

**МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ**

Известия высших учебных заведений  
**ПРИКЛАДНАЯ НЕЛИНЕЙНАЯ ДИНАМИКА**  
*научно-технический журнал*

издается с 1993 года

Выходит 6 раз в год

Том 19, № 5, 2011, Саратов

**СО Д Е Р Ж А Н И Е**

<b>ПРИКЛАДНЫЕ ЗАДАЧИ НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ КОЛЕБАНИЙ И ВОЛН</b>	
<i>Караваев А.С., Пономаренко В.И., Прохоров М.Д.</i> Восстановление систем нейтрального типа с запаздыванием.....	3
<i>Дмитриев Б.С., Жарков Ю.Д., Садовников С.А., Скороходов В.Н.</i> Синхронизация автоколебаний в клистронном автогенераторе в присутствии шума ..	17
<i>Алюков С.В.</i> Моделирование динамических процессов с кусочно-линейными характеристиками .....	27
<i>Феоктистов А.В., Анищенко В.С.</i> Динамика системы Фитцхью–Нагумо под внешним периодическим воздействием .....	35
<i>Курушина С.Е., Громова Л.И., Максимов В.В.</i> Стохастические уравнения и уравнение Фоккера–Планка для параметров порядка в исследовании динамики шумоиндуцированных пространственных диссипативных структур	45
<b>БИФУРКАЦИИ В ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ РАЗЛИЧНОЙ ПРИРОДЫ</b>	
<i>Кузнецов А.П., Селезнев Е.П., Станкевич Н.В.</i> Исследование возбуждения системы двух связанных осцилляторов ван дер Поля внешним сигналом при переходе автономной системы в режим «гибели колебаний» .....	68
<i>Емельянова Ю.П., Кузнецов А.П., Тюрюкина Л.В.</i> Динамика трех неидентичных по управляющим параметрам связанных осцилляторов ван дер Поля ....	76
<i>Кузнецов А.П., Новиков Е.В., Савин А.В.</i> Трансформация устройства пространства параметров неавтономной автоколебательной системы при введении запаздывающей модуляции .....	91
<b>МЕТОДИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ ПО НЕЛИНЕЙНОЙ ДИНАМИКЕ</b>	
<i>Кузнецов С.П.</i> Схемы электронных устройств с гиперболическим хаосом и моделирование их динамики в программной среде Multisim .....	98
<b>КОНФЕРЕНЦИИ. СЕМИНАРЫ. СИМПОЗИУМЫ. ШКОЛЫ</b>	
XV Международная юбилейная зимняя школа-семинар по СВЧ-электронике и радиофизике, Россия, Саратов, 6–11.2012.....	116
<b>ИЗ КНИГ И ЖУРНАЛОВ</b>	
<i>М.В. Ломоносов.</i> К 300-летию со дня рождения.....	118
<i>Неймарк Ю.И.</i> Математическое моделирование как наука и искусство .....	119
<b>КНИЖНОЕ ОБОЗРЕНИЕ</b>	
<i>Рыскин Н.М., Балякин А.А., Дмитриева Т.В., Титов В.Н., Хаврошин О.С., Шигаев А.М.</i> Нелинейная динамика распределенных систем: Системы с запаздыванием, вакуумные микроволновые приборы, системы взаимодействующих нелинейных волн.....	128
<b>PERSONALIA</b>	
Памяти Александра Юрьевича Лоскутова .....	131

C O N T E N T S

APPLIED PROBLEMS OF NONLINEAR OSCILLATION AND WAVE THEORY

<i>Karavaev A.S., Ponomarenko V.I., Prokhorov M.D.</i> Reconstruction of neutral time-delay systems .....	3
<i>Dmitriev B.S., Zharkov Ju.D., Sadovnikov S.A., Skorokhodov V.N.</i> Synchronization of klystron oscillator with delayed feedback in the presence of noise .....	17
<i>Alyukov S.V.</i> Modelling of dynamic processes with piecewise linear characteristics ..	27
<i>Feoktistov A.V., Anishchenko V.S.</i> Dynamics of the Fitzhugh–Nagumo system under external periodic force .....	35
<i>Kurushina S.E., Gromova L.I., Maximov V.V.</i> Stochastic equations and Fokker–Planck equation for the order parameters in the study of the noise–induced spatial patterns dynamics .....	45

BIFURCATION IN DYNAMICAL SYSTEMS

<i>Kuznetsov A.P., Seleznev E.P., Stankevich N.V.</i> The research of excited by external signal system of two coupled van der Pol oscillators at transition to the regime of amplitude death in the autonomous system .....	64
<i>Emelianova Yu.P., Kuznetsov A.P., Turukina L.V.</i> Dynamics of three coupled van der Pol oscillators with non-identical controlling parameters .....	76
<i>Kuznetsov A.P., Novikov E.V., Savin A.V.</i> Changes of the parameter plane of driven auto-oscillatory system caused by delayed modulation of the parameter .....	91

METHODICAL PAPERS IN NONLINEAR DYNAMICS

<i>Kuznetsov S.P.</i> Electronic circuits manifesting hyperbolic chaos and simulation of their dynamics using software package Multisim .....	98
---	----

CONFERENCES. MEETINGS. SYMPOSIA. SCIENTIFIC SCHOOLS

XV International Jubilee Winter School-Seminar on Microwave Electronics and Radiophysics, Russia, Saratov, 6–11.2012 .....	116
--	-----

FROM BOOKS AND JOURNALS

M.V. Lomonosov. To the 300 <sup>th</sup> Birthday .....	118
<i>Neimark Yu.I.</i> Mathematical Modeling as Science and Art .....	119

BOOK REVIEW

<i>Ryskin N.M., Balyakin A.A., Dmitrieva T.V., Titov V.N., Khavroshin O.S., Shigaev A.M.</i> Nonlinear dynamics of distributed systems. Time-delayed feedback systems, vacuum microwave tubes, systems of interacting nonlinear waves .....	128
---	-----

PERSONALIA

<i>Neimark Yu.I.</i> Mathematical Modeling as Science and Art .....	131
---	-----



## ВОССТАНОВЛЕНИЕ СИСТЕМ НЕЙТРАЛЬНОГО ТИПА С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

*А.С. Караваев, В.И. Пономаренко, М.Д. Прохоров*

Предложены методы реконструкции систем с задержкой, моделируемых дифференциальными уравнениями нейтрального типа с запаздыванием, по временным рядам. Эффективность методов продемонстрирована на численных примерах при восстановлении обобщенного уравнения Маккея–Гласса и модельных уравнений, описывающих качку корабля и колебания тела вертикально стоящего человека.

*Ключевые слова:* Реконструкция уравнений, системы с запаздыванием, анализ временных рядов.

### Введение

Моделирование и исследование многомерных колебательных систем со сложной динамикой по зашумленным временным реализациям экспериментально наблюдаемых величин является актуальной междисциплинарной задачей, имеющей большое значение при изучении многих реальных объектов, описание которых «из первых принципов» затруднено или невозможно. Решение этой задачи важно не только для описания динамики системы и прогноза ее поведения во времени и при изменении параметров. Оно позволяет также оценить адекватность заложенных в модели представлений об объекте, осуществить классификацию систем и режимов их функционирования, восстановить скрытые переменные и определить значения параметров, недоступных непосредственному измерению в эксперименте.

Использование при реконструкции модельных уравнений по временным рядам универсальных методик, не учитывающих особенности объекта, как правило, не приводит к успеху. На хороший результат обычно можно рассчитывать лишь при использовании специальных технологий реконструкции для определенных классов объектов. Такой класс, в частности, составляют системы с запаздыванием. Обычно они моделируются дифференциальными уравнениями с запаздывающим аргументом. Такие модели успешно применяются во многих разделах физики, биологии и

химии [1–4]. В достаточно общем случае системы с запаздывающей обратной связью описываются уравнением следующего вида:

$$\varepsilon_n x^{(n)}(t) + \varepsilon_{n-1} x^{(n-1)}(t) + \dots + \varepsilon_1 \dot{x}(t) = F(x(t), x(t - \tau_1), \dots, x(t - \tau_k)), \quad (1)$$

где  $x(t)$  – состояние системы в момент времени  $t$ ;  $x^{(n)}(t)$  – производная по времени порядка  $n$ ;  $\tau_1, \dots, \tau_k$  – времена запаздывания;  $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$  – параметры, характеризующие инерционные свойства системы;  $F$  – некоторая функция.

Так как системы с запаздыванием обладают бесконечно большим числом степеней свободы, это вносит трудности в решение задачи реконструкции по временному ряду. Даже уравнения первого порядка с запаздыванием могут демонстрировать хаотические колебания, которым в фазовом пространстве соответствуют аттракторы очень высокой размерности. Поэтому для реконструкции систем вида (1) с задержкой разрабатывают специальные методы [5–15].

Помимо систем, моделируемых уравнением (1), динамика которых зависит от состояния динамической переменной в задержанные моменты времени, существует класс систем с запаздыванием, динамика которых зависит от скорости изменения динамической переменной в задержанные моменты времени. Такие системы достаточно распространены в физике, биологии, инженерных науках [4, 16–20]. Они описываются дифференциальными уравнениями нейтрального типа с запаздыванием. Наиболее часто используемыми моделями нейтрального типа являются дифференциальные уравнения второго порядка с запаздыванием

$$\varepsilon_2 \ddot{x}(t) + \varepsilon_1 \dot{x}(t) = F(x(t), x(t - \tau_1), \dot{x}(t - \tau_2)). \quad (2)$$

К таким уравнениям относится, например, обобщенное уравнение Маккея–Гласса [8]

$$\ddot{x}(t) = -\gamma \dot{x}(t) - \omega_0^2 x(t) + \omega_0^2 f(x(t - \tau_1)) + \frac{df(x(t - \tau_1))}{dx(t - \tau_1)} \dot{x}(t - \tau_1), \quad (3)$$

где нелинейная функция  $f$  имеет вид

$$f(x(t - \tau_1)) = \frac{ax(t - \tau_1)}{1 + x^c(t - \tau_1)}. \quad (4)$$

К уравнению вида (2) относится также уравнение, описывающее малые колебания вертикально стоящего человека

$$\ddot{x}(t) = -\gamma \dot{x}(t) - \omega_0^2 x(t) - k_1 x(t - \tau_1) - k_2 \dot{x}(t - \tau_1), \quad (5)$$

где  $\gamma, \omega_0, k_1, k_2$  – положительные параметры [21]. Время запаздывания  $\tau_1$  соответствует нейрофизиологической задержке, возникающей вследствие конечной скорости распространения и обработки нервных сигналов в организме человека. Принято считать, что в уравнении (5) члены без задержки описывают пассивные компоненты системы управления движением, а члены с запаздыванием описывают активные компоненты [21].

При малой амплитуде колебаний уравнением вида (2) описывается также качка корабля, оборудованного для предотвращения качки на волнах специальными резервуарами, частично заполненными водой [20]

$$\ddot{x}(t) = -\gamma \dot{x}(t) - \omega_0^2 x(t) - k \dot{x}(t - \tau_1), \quad (6)$$

где  $x(t)$  – угол отклонения судна от вертикального положения;  $\omega_0 > 0$  – частота собственных колебаний;  $\gamma > 0$  – коэффициент затухания;  $k > 0$  – коэффициент трения. Заметим, что уравнение (6) не зависит от  $x(t - \tau_1)$ .

В отличие от уравнения (3), способного демонстрировать хаотическую динамику, уравнения (5) и (6) описывают затухающие колебания. Однако под действием внешней силы, в том числе под действием шума, системы (5) и (6) могут демонстрировать сложную динамику. Задача реконструкции времени запаздывания таких систем по их временным рядам до настоящего времени не исследовалась. В данной работе мы предлагаем методы восстановления систем, описываемых дифференциальными уравнениями нейтрального типа с запаздыванием, и апробируем их на различных модельных уравнениях.

## 1. Описание методов

**1.1. Восстановление времени запаздывания с помощью статистического анализа экстремумов временного ряда и их производных.** Ранее нами было установлено, что во временных реализациях систем с запаздыванием вида (1) с одним временем задержки практически отсутствуют экстремумы, удаленные друг от друга на время запаздывания [9]. Если система (1) совершает хаотические колебания, то экстремумы в ее временном ряде расположены нерегулярно и расстояние между ними принимает различные значения. На основе этого свойства нами был предложен метод определения  $\tau_1$ , использующий статистический анализ временных интервалов между экстремумами хаотического временного ряда системы с запаздыванием. Определив для различных значений  $\tau$  число  $N$  ситуаций, при которых точки временного ряда, разделенные интервалом времени  $\tau$ , одновременно являются экстремальными, и построив зависимость  $N(\tau)$ , легко найти время задержки  $\tau_1$  как значение, при котором наблюдается абсолютный минимум этой зависимости [9].

Покажем, что этот метод определения времени задержки можно развить на системы нейтрального типа с запаздыванием. Рассмотрим сначала систему (6). Продифференцировав ее по  $t$  и перенеся член со второй производной в левую часть уравнения, получим

$$\ddot{x}(t) + \gamma\dot{x}(t) = -\omega_0^2\dot{x}(t) - k\ddot{x}(t - \tau_1). \quad (7)$$

Как видно из уравнения (7), если при  $\dot{x}(t) = 0$  одна из производных  $\dot{x}(t)$  или  $\ddot{x}(t)$  отлична от нуля или обе эти производные отличны от нуля и имеют одинаковый знак, то должно выполняться условие  $\ddot{x}(t - \tau_1) \neq 0$ . Для различных значений  $\tau$  построим зависимость  $M(\tau)$ , где  $M$  – число пар точек, для которых одновременно выполняются два условия:  $\dot{x}(t) = 0$  и  $\ddot{x}(t - \tau) \neq 0$ . Причем при построении зависимости  $M(\tau)$  будем использовать только такие экстремальные точки  $\dot{x}(t) = 0$ , в которых вторая и третья производная имеют одинаковый знак. Зависимость  $M(\tau)$  будет иметь минимум при времени  $\tau$ , соответствующем времени запаздывания системы.

Рассмотрим теперь уравнение (5). Его производная по времени имеет вид

$$\ddot{x}(t) + \gamma\dot{x}(t) = -\omega_0^2\dot{x}(t) - k_1\dot{x}(t - \tau_1) - k_2\dot{x}(t - \tau_1). \quad (8)$$

Аналогичный вид имеет производная по времени уравнения (3). При  $\dot{x}(t) = 0$  и одинаковом знаке  $\ddot{x}(t)$  и  $(t)$  сумма второго и третьего слагаемых в правой части (8) отлична от нуля. А это возможно, когда  $\dot{x}(t - \tau_1) \neq 0$  и/или  $\ddot{x}(t - \tau_1) \neq 0$ . В этом случае график  $M(\tau)$  будет иметь выраженный минимум при истинном значении времени запаздывания.

Отметим, что для восстановления времени запаздывания  $\tau_1$  уравнений (3) и (5) можно использовать зависимость  $N(\tau)$ , предложенную нами для систем с запаздыванием (1) [9]. Это объясняется тем, что в уравнениях (3) и (5) запаздывающая обратная связь такова, что динамическая переменная и ее производная задержаны на одно и то же время  $\tau_1$ .

Методы реконструкции времен запаздывания, основанные на построении и анализе зависимостей  $N(\tau)$  и  $M(\tau)$ , предназначены для восстановления систем вида (1) и (2), находящихся в режиме хаотических колебаний. Однако, в отличие от уравнения (3), способного демонстрировать хаотическую динамику, уравнения (5) и (6) описывают затухающие колебания. Воздействие на системы (5) и (6) шумом способно индуцировать в них колебания, при этом системы могут демонстрировать сложное поведение [20]. В этом случае может быть использован предложенный метод восстановления времени запаздывания, основанный на статистическом анализе экстремумов временного ряда и их производных. Отметим, что включение шума в уравнения нарушает связи между производными переменных по времени. Кроме того, оценка самих производных (особенно высокого порядка) по временному ряду становится все менее точной с увеличением уровня шума. Эти обстоятельства накладывают ограничения на применимость метода, который перестает быть эффективным, начиная с некоторого уровня шума.

**1.2. Восстановление времени запаздывания по отклику системы на периодическое внешнее воздействие прямоугольным импульсным сигналом.** Для систем с запаздыванием, описываемых уравнением вида (1), нами недавно был предложен метод восстановления времени задержки, основанный на возмущении системы периодическим внешним воздействием и анализе отклика [13]. Если воздействие  $y(t)$  имеет вид прямоугольных импульсов, то траектория  $x(t)$  системы (1) будет претерпевать возмущения через время  $\tau_i$  ( $i = 1, \dots, k$ ) после начала и после окончания каждого импульса. При этом на реализации  $x(t)$  появляются изломы, которые при малой амплитуде воздействия практически не заметны. Изменение динамики системы становится более заметным, если численно продифференцировать  $x(t)$  по времени. Зависимость  $\dot{x}(t)$  демонстрирует скачок через время  $\tau_i$  после прохождения переднего и заднего фронтов прямоугольного импульса. Наиболее удобна для анализа отклика системы с запаздыванием (1) на внешнее воздействие вторая производная  $\ddot{x}(t)$ . Ее временная реализация демонстрирует узкие пики или провалы через время  $\tau_i$  после начала и окончания импульса, хорошо заметные даже при малых амплитудах воздействия. Взаимная корреляционная функция

$$C(s) = \frac{\langle |\ddot{y}(t)| |\ddot{x}(t+s)| \rangle}{\sqrt{\langle |\ddot{y}(t)|^2 \rangle \langle |\ddot{x}(t)|^2 \rangle}}, \quad (9)$$

где угловые скобки обозначают усреднение по времени, имеет четко выраженные максимумы при  $s = \tau_i$ ,  $i = 1, \dots, k$  [13].

Аналогичные рассуждения остаются справедливыми и для случая периодического воздействия прямоугольными импульсами  $y(t)$  на системы нейтрального типа с запаздыванием. Временные реализации  $\ddot{x}(t)$  таких систем, описываемых уравнениями (3), (5), (6), имеют хорошо заметные пики и провалы через время  $\tau_1$  после начала и окончания импульса. Следовательно, для систем нейтрального типа с запаздыванием функция (9) также будет демонстрировать максимумы при  $s = \tau_1$  и может быть использована для восстановления времени задержки.

Помимо пиков при  $s = \tau_1$  функция  $C(s)$  имеет другие пики, положение которых определяется отношениями  $T/\tau_1$  и  $Q/T$ , где  $T$  – период, а  $Q$  – длительность импульсного воздействия [13]. То есть при разных  $T$  пики  $C(s)$  наблюдаются при разных  $s$ . Неизменным остается лишь положение пика, соответствующего времени запаздывания. Поэтому для определения времени запаздывания следует подействовать на исследуемую систему сначала импульсным сигналом с  $T = T_1$ , а затем с  $T = T_2$ , близким к  $T_1$ , и сравнить функции  $C(s)$  для первого и второго случаев. Обнаружив пик  $C(s)$ , положение которого не меняется при изменении  $T$ , мы найдем  $\tau_1$ .

**1.3. Восстановление линейных и нелинейных функций и параметров инерционности.** Определив тем или иным способом время задержки  $\tau_1$  исследуемой системы нейтрального типа с запаздыванием, мы можем восстановить параметры инерционности  $\varepsilon_1$  и  $\varepsilon_2$  и функции от задержанных переменных. Для этого будем использовать следующий подход. Рассмотрим сначала уравнение (6). Поделим его на  $\omega_0^2$  и перепишем в виде

$$\varepsilon_2 \ddot{x}(t) + \varepsilon_1 \dot{x}(t) + x(t) = f(\dot{x}(t - \tau_1)), \quad (10)$$

где  $\varepsilon_2 = 1/\omega_0^2$ ,  $\varepsilon_1 = \gamma/\omega_0^2$ ,  $f$  – линейная функция. Из уравнения (10) следует, что, если построить на плоскости множество точек с координатами  $(\dot{x}(t - \tau_1), \varepsilon_2 \ddot{x}(t) + \varepsilon_1 \dot{x}(t) + x(t))$ , то оно воспроизведет функцию  $f$ . Поскольку заранее величины  $\varepsilon_1$  и  $\varepsilon_2$  не известны, будем строить зависимости  $\hat{\varepsilon}_2 \ddot{x}(t) + \hat{\varepsilon}_1 \dot{x}(t) + x(t)$  от  $\dot{x}(t - \tau_1)$  для различных значений  $\hat{\varepsilon}_1$  и  $\hat{\varepsilon}_2$ , добиваясь однозначности, которая возможна только при  $\hat{\varepsilon}_1 = \varepsilon_1$ ,  $\hat{\varepsilon}_2 = \varepsilon_2$ .

В качестве количественного критерия однозначности при таком поиске  $\varepsilon_1$  и  $\varepsilon_2$  будем использовать минимальную длину  $L(\hat{\varepsilon}_1, \hat{\varepsilon}_2)$  линии, последовательно соединяющей точки на перебираемых плоскостях вложения, упорядоченные по величине абсциссы. Минимум зависимости  $L(\hat{\varepsilon}_1, \hat{\varepsilon}_2)$  будет наблюдаться при правильном выборе параметров, а построенное при этом значение множество точек на плоскости воспроизведет функцию  $f$ . При ошибочном выборе значений  $\varepsilon_1$  и  $\varepsilon_2$  мы получаем на плоскости набор точек, не связанных между собой функционально. Чем менее точно определены параметры, тем более беспорядочно расположены точки, а соединяющая их ломаная линия имеет большую длину, чем в случае, когда множество точек ложится на одномерную кривую. Похожий подход использовался нами в [9] при реконструкции систем с запаздыванием вида (1). Отметим, что применение такого подхода возможно только в том случае, если нам априорно известен вид модельного уравнения, а неизвестными являются параметры.

Восстановив параметры  $\varepsilon_1$  и  $\varepsilon_2$ , можно найти  $\omega_0$  и  $\gamma$ :  $\omega_0 = \sqrt{1/\varepsilon_2}$ ,  $\gamma = \varepsilon_1/\varepsilon_2$ . Параметр  $k$  уравнения (6) можно оценить по углу наклона восстановленной линейной функции  $f$ .

Процедура реконструкции параметров уравнения (5) несколько сложнее. Перепишем уравнение (5) в виде

$$\varepsilon_2 \ddot{x}(t) + \varepsilon_1 \dot{x}(t) + x(t) = f_1(x(t - \tau_1)) + f_2(\dot{x}(t - \tau_1)), \quad (11)$$

где  $\varepsilon_1$  и  $\varepsilon_2$  имеют тот же вид, что и в уравнении (10),  $f_1$  и  $f_2$  – линейные функции. Уравнение (11) описывает двумерную поверхность, на которой располагаются точки, посещаемые системой (5) в трехмерном пространстве вложения  $(x(t - \tau_1), \dot{x}(t - \tau_1), \varepsilon_2 \ddot{x}(t) + \varepsilon_1 \dot{x}(t) + x(t))$ .

Сечение этой поверхности плоскостью  $\dot{x}(t - \tau_1) = \text{const}$  позволяет с точностью до константы определить вид функции  $f_1$ , так как точки сечения удовлетворяют уравнению  $\varepsilon_2 \ddot{x}(t) + \varepsilon_1 \dot{x}(t) + x(t) = f_1(x(t - \tau_1)) + c_1$ , где  $c_1 = f_2(\dot{x}(t - \tau_1))$  при выбранном постоянном значении  $\dot{x}(t - \tau_1)$ . Аналогично можно восстановить с точностью до константы функцию  $f_2$ , построив сечение  $x(t - \tau_1) = \text{const}$ , точки которого описываются уравнением  $\varepsilon_2 \ddot{x}(t) + \varepsilon_1 \dot{x}(t) + x(t) = f_2(\dot{x}(t - \tau_1)) + c_2$ , где  $c_2 = f_1(x(t - \tau_1))$  при фиксированном  $x(t - \tau_1)$ .

Так как параметры  $\varepsilon_1$  и  $\varepsilon_2$  априорно не известны, будем перебирать их из некоторого интервала, находя в сечении  $\dot{x}(t - \tau_1) = \text{const}$  или  $x(t - \tau_1) = \text{const}$  зависимость, наиболее близкую к однозначной. Как и в рассмотренном выше случае, в качестве количественного критерия однозначности удобно использовать минимальную длину  $L(\hat{\varepsilon}_1, \hat{\varepsilon}_2)$  линии, соединяющей упорядоченные по величине абсциссы точки сечения, где  $\hat{\varepsilon}_1$  и  $\hat{\varepsilon}_2$  – пробные значения параметров  $\varepsilon_1$  и  $\varepsilon_2$ . Минимум  $L(\hat{\varepsilon}_1, \hat{\varepsilon}_2)$  будет наблюдаться при  $\hat{\varepsilon}_1 = \varepsilon_1$ ,  $\hat{\varepsilon}_2 = \varepsilon_2$ , при этом в указанных сечениях получим функции  $f_1$  и  $f_2$ . После этого описанным выше способом можно вычислить  $\omega_0$  и  $\gamma$  и оценить параметры  $k_1$  и  $k_2$ .

Аналогичным образом можно восстановить параметры уравнения (3), которое тоже можно записать в виде (11). Отличие от уравнения (5) будет в том, что функции  $f_1$  и  $f_2$ , входящие в (11), являются нелинейными.

## 2. Применение методов

**2.1. Восстановление обобщенного уравнения Маккея–Гласса.** Применим описанные в разделе 1 методы для восстановления по наблюдаемому временному ряду обобщенного уравнения Маккея–Гласса (3) в присутствии гауссова  $\delta$ -коррелированного шума  $\zeta(t)$ . Уравнение исследуемой системы имеет вид

$$\ddot{x}(t) = -\gamma \dot{x}(t) - \omega_0^2 x(t) + \omega_0^2 f(x(t - \tau_1)) + \frac{df(x(t - \tau_1))}{dx(t - \tau_1)} \dot{x}(t - \tau_1) + \zeta(t), \quad (12)$$

где  $\langle \zeta(t)\zeta(t') \rangle = 2D\delta(t - t')$ ,  $D$  – интенсивность шума. Зададим следующие значения параметров:  $\gamma = 1.5$ ,  $\omega_0 = 1.0$ ,  $\tau_1 = 100.0$ ,  $a = 3.0$ ,  $c = 10.0$ . При этих параметрах в отсутствие шума система демонстрирует движение на хаотическом аттракторе высокой размерности [8]. На рис. 1, а приведен фрагмент временного ряда колебаний системы (12) при  $D = 0.014$ . Весь ряд состоял из  $10^6$  точек при шаге интегрирования  $h = 0.01$  и содержал около 6700 экстремумов.



Подсчитав число  $M$  одновременных обращений в нуль  $\dot{x}(t)$  и  $\ddot{x}(t - \tau)$  для различных значений  $\tau$ , перебираемых с шагом 0.1, построим зависимость  $M(\tau)$ , введя нормировку  $M$  на общее число экстремумов в ряде (рис. 1, б). Напомним, что для построения  $M(\tau)$  используются только такие экстремальные точки  $\dot{x}(t) = 0$ , в которых вторая и третья производные имеют одинаковый знак. Для оценки производных по временному ряду мы использовали локальную аппроксимацию полиномами 4 порядка, подгоняемыми методом наименьших квадратов. Отметим, что для сглаживания временного ряда и уменьшения числа обусловленных шумом экстремумов при оценке производной в процедуре локальной аппроксимации использовалось 7 соседних точек. Несмотря на присутствие шума, зависимость  $M(\tau)$  демонстрирует четко выраженный минимум при  $\tau = 100.2$ , давая хорошую оценку времени запаздывания (см. рис. 1, б). Относительная погрешность  $\Delta$  при восстановлении  $\tau$  составляет 0.2%.

Для иллюстрации метода восстановления времени запаздывания, основанного на анализе отклика системы на внешнее воздействие, подействуем на систему (12) внешним сигналом  $y(t)$ , представляющим собой прямоугольные импульсы. На рис. 1, в построены взаимные корреляционные функции (9) для случая, когда возмущающие импульсные сигналы имеют амплитуду  $A = 5$ , периоды  $T_1 = 250$ ,  $T_2 = 300$  и длительность  $Q = 0.1$ , а параметры системы (12) такие же, как в рассмотренном выше случае. При шаге изменения  $s$ , равном 0.01,  $C(s)$  имеет высокий пик при  $s = \tau_1 = 100.00$ , который не смещается при изменении периода воздействующих импульсов.

Восстановим теперь параметры  $\gamma$  и  $\omega_0$  и нелинейную функцию уравнения (12) по ее временному ряду в отсутствие внешнего воздействия. Возьмем точки экстремального сечения  $\dot{x}(t - \tau_1) = 0$  при восстановленном  $\tau_1 = 100$  и будем проецировать их на плоскости  $(x(t - \tau_1), \ddot{x}(t)/\omega^2 + \hat{\gamma}\dot{x}(t)/\omega^2 + x(t))$  при различных значениях  $\hat{\gamma}$  и  $\omega$ , перебираемых с шагом 0.01 из некоторого интервала, добиваясь зависимости, наиболее близкой к однозначной. В отсутствие шума ( $D = 0$ ) длина  $L(\hat{\gamma}, \omega)$  линии, последовательно соединяющей точки на перебираемых плоскостях вложения, упорядоченных по величине абсциссы, имеет минимум при  $\hat{\gamma} = 1.50$  и  $\omega = 1.00$ , то есть при истинных значениях  $\gamma$  и  $\omega_0$ . На рис. 2, а приведена восстановленная нелинейная функция системы. При  $D = 1.4 \cdot 10^{-4}$  минимум  $L(\hat{\gamma}, \omega)$  наблюдается при  $\hat{\gamma} = 2.33$

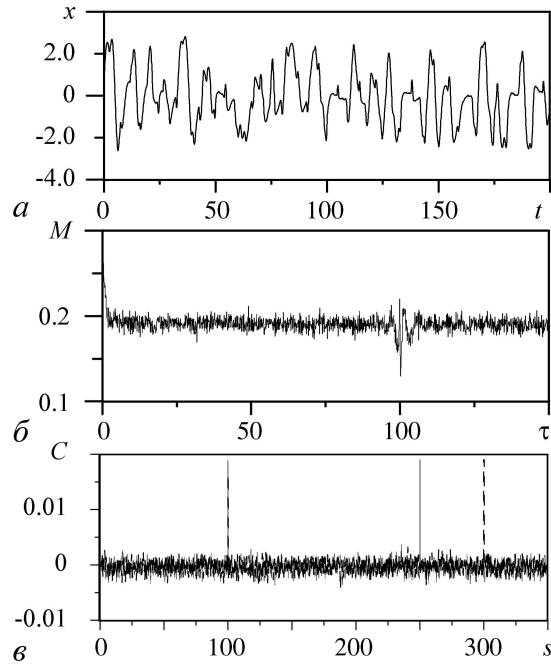


Рис. 1. а – временной ряд обобщенного уравнения Маккея–Гласса (12) в режиме хаотических колебаний; б – зависимость  $M(\tau)$ , нормированная на общее число экстремумов в ряде,  $M_{\min}(\tau) = M(100.2)$ ; в – взаимные корреляционные функции (9) при  $T_1 = 250$  (сплошная линия) и  $T_2 = 300$  (пунктирная линия). Пики  $C(s)$  при  $s = 100.00$  совпадают для  $T_1$  и  $T_2$

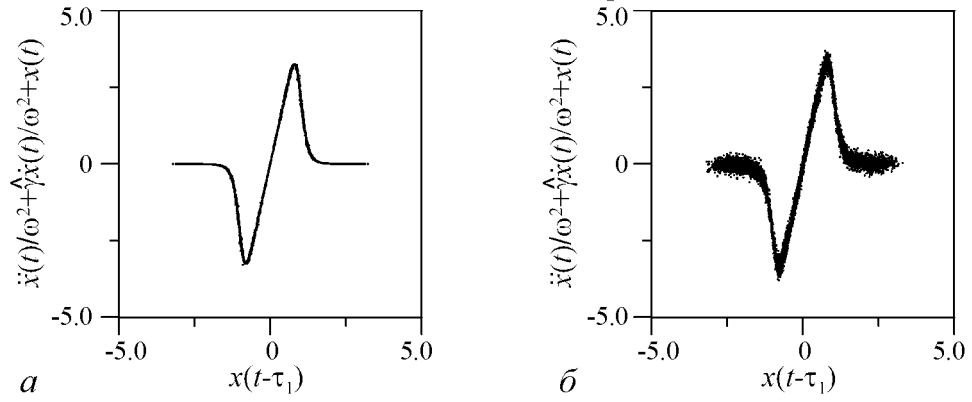


Рис. 2. Восстановленная нелинейная функция обобщенного уравнения Маккея–Гласса (12):  $a - \hat{\gamma} = 1.50, \omega = 1.00, D = 0$ ;  $b - \hat{\gamma} = 2.33, \omega = 1.31, D = 1.4 \cdot 10^{-4}$

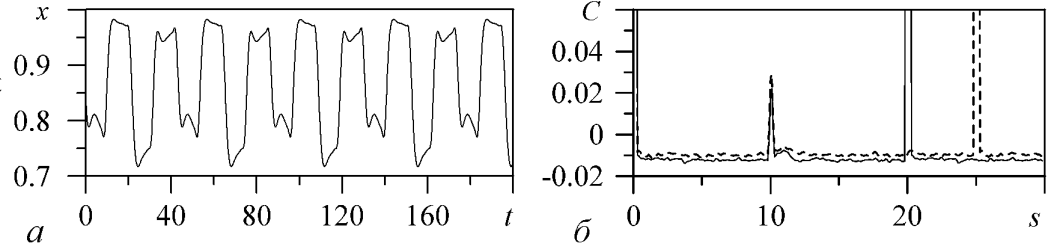


Рис. 3.  $a$  – временной ряд обобщенного уравнения Маккея–Гласса (3) в режиме периодических колебаний;  $b$  – взаимные корреляционные функции (9) при  $T_1 = 20$  (сплошная линия) и  $T_2 = 25$  (пунктирная линия). При  $s = 10.0$  пики  $C(s)$  для  $T_1 = 20$  и  $T_2 = 25$  совпадают

( $\Delta = 55\%$ ) и  $\omega = 1.31$  ( $\Delta = 31\%$ ). При этих параметрах восстановленная нелинейная функция имеет вид, представленный на рис. 2,  $b$ . С увеличением уровня шума качество реконструкции параметров  $\gamma$  и  $\omega_0$  и нелинейной функции ухудшается.

Следует отметить, что предложенный нами метод реконструкции времени задержки, основанный на анализе отклика системы на внешнее воздействие, можно применять к системам нейтрального типа, находящимся как в режиме хаотических, так и в режиме периодических колебаний. Пусть параметры уравнения (3)  $\gamma = 1.5$ ,  $\omega_0 = 1.0$ ,  $\tau_1 = 10.0$ ,  $a = 0.9$ ,  $c = 10$  таковы, что система демонстрирует периодические колебания (рис. 3,  $a$ ). Подействуем на исследуемую систему периодическими импульсными сигналами с амплитудой  $A = 1$ , периодами  $T_1 = 20$ ,  $T_2 = 25$  и длительностью  $Q = 0.01$ . Из рис. 3,  $b$  видно, что  $C(s)$  имеет высокий пик при  $s = \tau_1 = 10.0$ , положение которого не изменяется при изменении периода воздействующих импульсов, то есть время запаздывания системы восстанавливается точно.

**2.2. Восстановление уравнения, моделирующего качку корабля.** Как было отмечено выше, модельное уравнение (6), описывающее при малой амплитуде колебаний качку корабля на волнах, демонстрирует в отсутствие внешнего воздействия затухающие колебания. Однако воздействие на систему шумом способно индуцировать в ней сложную колебательную динамику [20]. Подействуем на систему (6) гауссовым  $\delta$ -коррелированным шумом  $\zeta(t)$  и запишем уравнение возмущаемой системы в виде

$$\ddot{x}(t) = -\gamma\dot{x}(t) - \omega_0^2 x(t) - k\dot{x}(t - \tau_1) + \zeta(t). \quad (13)$$

На рис. 4, *a* приведен фрагмент временного ряда колебаний системы (13) при  $\gamma = 2$ ,  $\omega_0 = 0.8$ ,  $k = 1$ ,  $\tau_1 = 50$ ,  $D = 0.1$ ,  $h = 0.01$ . Весь ряд состоял из  $10^5$  точек и содержал около 4100 экстремумов. Зависимость  $M(\tau)$ , построенная при шаге изменения  $\tau$ , равном 0.1, приведена на рис. 4, *б*. Абсолютный минимум  $M(\tau)$  наблюдается при  $\tau = 50.1$  ( $\Delta = 0.2\%$ ).

Исследования показывают, что с увеличением значений параметров  $\gamma$  и  $k$  абсолютный минимум  $M(\tau)$  становится более выраженным, и при  $\gamma$  и  $k$ , больших 10, метод позволяет точно восстановить  $\tau_1$ . Зависимость  $M(\tau)$ , построенная при  $\gamma = 20$ ,  $k = 20$  и тех же  $\omega_0$ ,  $\tau_1$  и  $D$ , что и рис. 4, *б*, демонстрирует хорошо заметный абсолютный минимум при  $\tau = 50.0$  (рис. 4, *в*).

Рис. 4, *г* иллюстрирует восстановление времени запаздывания по отклику системы на периодическое внешнее воздействие в виде прямоугольного импульсного сигнала. Взаимные корреляционные функции (9) построены на рис. 4, *г* при шаге изменения  $s$ , равном 0.01, для случаев, когда возмущающие импульсные сигналы имеют амплитуду  $A = 1$ , периоды  $T_1 = 200$ ,  $T_2 = 250$  и длительность  $Q = 0.01$ . Из рис. 4, *г* видно, что  $C(s)$  имеет высокий максимум при  $s = \tau_1 = 50.00$ , положение которого не изменяется при изменении периода воздействующих импульсов, то есть время запаздывания системы восстанавливается точно. Отметим, что метод определения  $\tau_1$  с помощью возбуждающих импульсов можно применять непосредственно к системе, моделируемой уравнением (6), при  $D = 0$ , поскольку внешний импульсный сигнал выводит систему из положения равновесия и вызывает в ней колебания.

Проиллюстрируем реконструкцию остальных параметров уравнения (13) по временному ряду, полученному при следующих значениях параметров:  $\gamma = 2$ ,  $\omega_0 = 0.8$ ,  $k = 1$ ,  $\tau_1 = 50$ ,  $D = 0.1$ , для случая, когда система возбуждается импульсами с амплитудой  $A = 1$ , периодом  $T = 250$  и длительностью  $Q = 0.01$ .

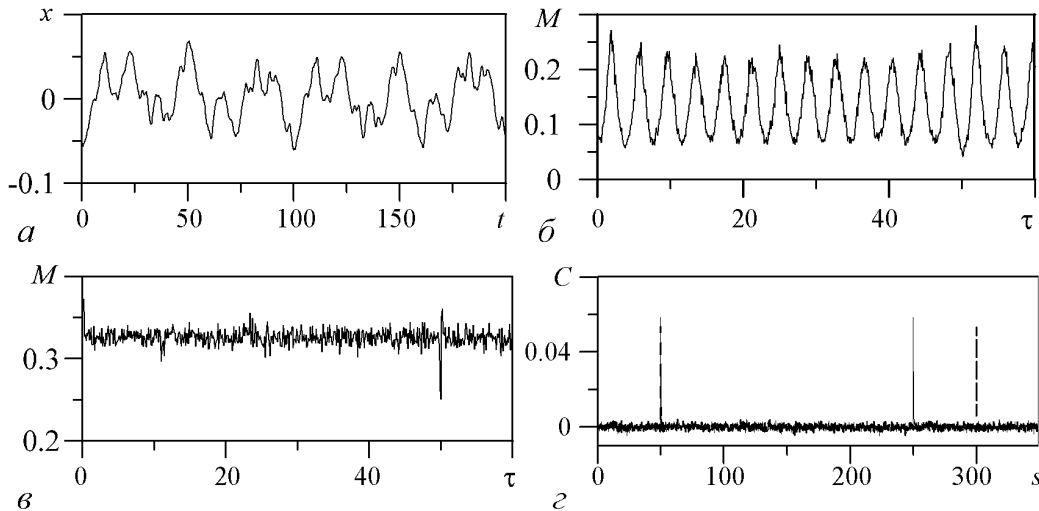


Рис. 4. *a* – временной ряд уравнения (13), моделирующего качку корабля; *б* – зависимость  $M(\tau)$ , нормированная на общее число экстремумов в ряде, при  $\gamma = 2$ ,  $\omega_0 = 0.8$ ,  $k = 1$ ,  $\tau_1 = 50$ ,  $D = 0.1$ ,  $M_{\min}(\tau) = M(50.1)$ ; *в* – зависимость  $M(\tau)$ , нормированная на общее число экстремумов в ряде, при  $\gamma = 20$ ,  $\omega_0 = 0.8$ ,  $k = 20$ ,  $\tau_1 = 50$ ,  $D = 0.1$ ,  $M_{\min}(\tau) = M(50.0)$ ; *г* – взаимные корреляционные функции (9) при  $T_1 = 200$  (сплошная линия) и  $T_2 = 250$  (пунктирная линия). При  $s = 50.00$  пики  $C(s)$  для  $T_1 = 200$  и  $T_2 = 250$  совпадают

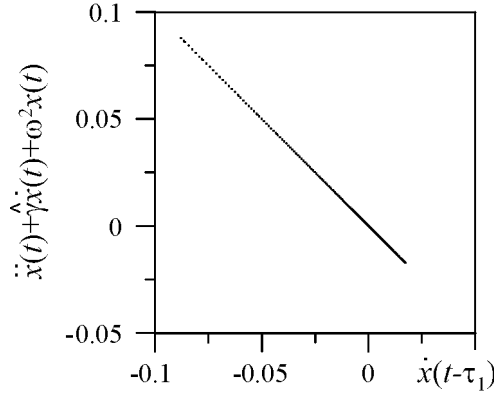


Рис. 5. Проекция траектории системы (13) на плоскость  $(\dot{x}(t - \tau_1), \ddot{x} + \hat{\gamma}\dot{x} + \omega^2 x)$  при  $\hat{\gamma} = 2.00$ ,  $\omega = 0.80$

плоскостях вложения, упорядоченных по величине абсциссы, имеет минимум при  $\hat{\gamma} = \gamma = 2.00$  и  $\omega = \omega_0 = 0.80$ . При этих параметрах проекция траектории системы имеет вид, представленный на рис. 5. Определив угловой коэффициент прямой, аппроксимирующей набор точек на рисунке, получаем оценку  $k = 1.0$ , что в точности совпадает с истинным значением.

**2.3. Восстановление модельного уравнения колебаний вертикально стоящего человека.** Уравнение (5), описывающее малые колебания вертикально стоящего человека, так же как и уравнение (6), моделирующее колебания корабля при качке, демонстрирует затухающие в отсутствие внешнего воздействия колебания. Поэтому, как и в рассмотренном выше случае, подействуем на систему (5) гауссовым  $\delta$ -коррелированным шумом  $\zeta(t)$ , индуцирующим в ней сложные колебания, и запишем уравнение возмущаемой системы в виде

$$\ddot{x}(t) = -\gamma\dot{x}(t) - \omega_0^2 x(t) - k_1 x(t - \tau_1) - k_2 \dot{x}(t - \tau_1) + \zeta(t). \quad (14)$$

На рис. 6, а приведен временной ряд колебаний системы (14) при  $\gamma = 10$ ,  $\omega_0 = 0.9$ ,  $k_1 = 0.5$ ,  $k_2 = 10$ ,  $\tau_1 = 50.0$ ,  $D = 1$ ,  $h = 0.01$ . Весь ряд состоял из  $10^5$  точек и содержал около 3700 экстремумов. Зависимость  $M(\tau)$ , построенная при шаге изменения  $\tau$ , равном 0.1, приведена на рис. 6, б. Абсолютный минимум  $M(\tau)$  наблюдается при  $\tau = 50.0$ , позволяя точно определить время задержки.

Подействуем на систему (14) внешним прямоугольным импульсным сигналом  $y(t)$  и построим функцию (9) (рис. 6, в). При  $A = 1$ ,  $T_1 = 200$  и  $T_2 = 250$ ,  $Q = 0.01$ ,  $D = 0.1$  и шаге изменения  $s$ , равном 0.01,  $C(s)$  имеет высокий пик при  $s = \tau_1 = 50.00$ , который не смещается при изменении периода воздействующего импульсного сигнала. Таким образом,  $\tau_1$  восстанавливается точно.

Восстановление остальных параметров модельного уравнения (14) по временному ряду проиллюстрируем при их значениях, указанных выше, для случая, когда система возбуждается в отсутствие шума ( $D = 0$ ) импульсами с  $A = 1$ ,  $T = 250$  и  $Q = 0.01$ . Процедура реконструкции состоит из нескольких этапов. Сначала построим экстремальное сечение  $\dot{x}(t - \tau_1) = 0$  реализации, сгенерированной исследуемой системой. При этом полагаем, что время запаздывания  $\tau_1 = 50$  мы уже восстановили описанным выше способом. В отсутствие внешнего воздействия точки этого

Для восстановления параметров  $\gamma$  и  $\omega_0$  системы мы проецировали ее траекторию в промежутках между внешними импульсами на плоскости  $(\dot{x}(t - \tau_1), \ddot{x} + \hat{\gamma}\dot{x} + \omega^2 x)$  для различных значений  $\hat{\gamma}$  и  $\omega$ , перебираемых с шагом 0.01 из некоторого интервала, а значение времени запаздывания  $\tau_1$  считали уже восстановленным одним из описанных выше способов. При этом мы искали однозначную зависимость в перебираемых пространствах вложения. Длина  $L(\hat{\gamma}, \omega)$  линии, последовательно соединяющей точки на перебираемых

сечения удовлетворяют уравнению  $\ddot{x}(t) + \gamma\dot{x}(t) + \omega_0^2x(t) = -k_1x(t - \tau_1)$ . Но  $\gamma$ ,  $\omega_0$  и  $k_1$  нам заранее не известны, поэтому мы проецируем точки экстремального сечения на плоскости  $(x(t - \tau_1), \ddot{x}(t) + \hat{\gamma}\dot{x}(t) + \omega^2x(t))$  для различных значений  $\hat{\gamma}$  и  $\omega$ , перебираемых с шагом 0.01 из некоторого интервала, и ищем такие  $\hat{\gamma}$  и  $\omega$ , при которых множество точек на плоскости ложится на прямую линию. То есть в качестве оценок  $\gamma$  и  $\omega_0$  мы берем такие  $\hat{\gamma}$  и  $\omega$ , при которых длина  $L(\hat{\gamma}, \omega)$  линии, соединяющей упорядоченные по величине абсциссы точки проекции, оказывается минимальной. Полученные оценки  $\hat{\gamma} = 9.90$  ( $\Delta = 1\%$ ) и  $\omega = 0.88$  ( $\Delta = 2\%$ ) близки к истинным  $\gamma$  и  $\omega_0$ . Отметим, что для уменьшения влияния на результаты реконструкции переходных процессов, обусловленных воздействием на систему импульсов, мы не используем при проецировании точки реализации, попадающие в интервал длительностью  $\tau_1/5$  после каждого импульса.

Аппроксимируем множество точек проекции, построенной на рис. 7, *a* при  $\hat{\gamma} = 9.90$  и  $\omega = 0.88$ , прямой линией. Угловым коэффициентом аппроксимирующей прямой  $\hat{k}_1 = 0.46$  ( $\Delta = 8\%$ ) дает достаточно хорошую оценку параметра  $k_1$ .

Для оценки параметра  $k_2$  спроецируем траекторию системы (14) на плоскость  $(\dot{x}(t - \tau_1), \ddot{x}(t) + \hat{\gamma}\dot{x}(t) + \omega^2x(t) + \hat{k}_1x(t - \tau_1))$  при  $\hat{\gamma} = 9.90$ ,  $\omega = 0.88$  и

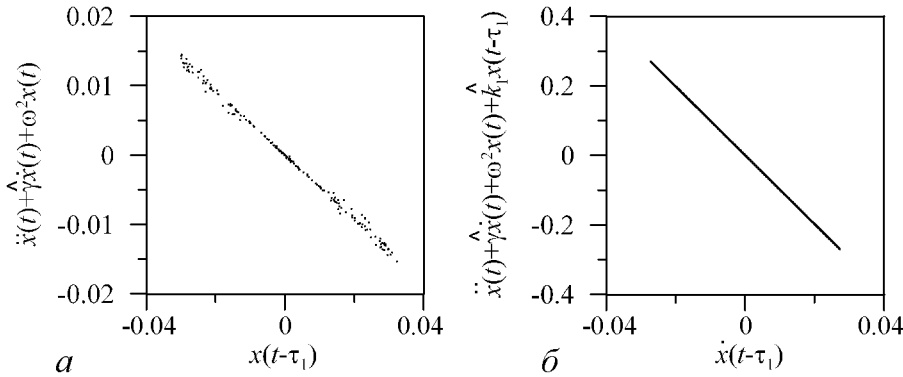


Рис. 7. Реконструкция параметров  $k_1$  и  $k_2$  системы (14): *a* – проекция точек экстремального сечения  $\dot{x}(t - \tau_1) = 0$  на плоскость  $(x(t - \tau_1), \ddot{x}(t) + \hat{\gamma}\dot{x}(t) + \omega^2x(t))$  при  $\hat{\gamma} = 9.90$ ,  $\omega = 0.88$ ; *b* – проекция траектории системы (14) на плоскость  $(\dot{x}(t - \tau_1), \ddot{x}(t) + \hat{\gamma}\dot{x}(t) + \omega^2x(t) + \hat{k}_1x(t - \tau_1))$  при  $\hat{\gamma} = 9.90$ ,  $\omega = 0.88$ ,  $\hat{k}_1 = 0.46$

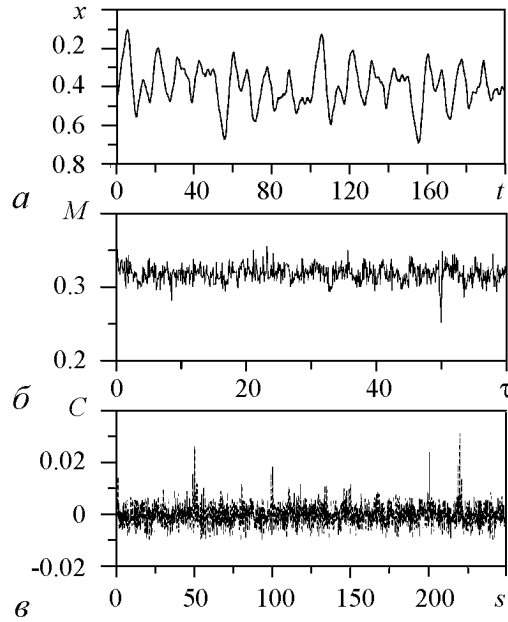


Рис. 6. *a* – временной ряд уравнения (14), моделирующего колебания вертикально стоящего человека; *b* – зависимость  $M(\tau)$ , нормированная на общее число экстремумов в ряде,  $M_{\min}(\tau) = M(50.0)$ ; *c* – взаимные корреляционные функции (9) при  $T_1 = 200$  (сплошная линия) и  $T_2 = 250$  (пунктирная линия). При  $s = 50.00$  пики  $C(s)$  для  $T_1 = 200$  и  $T_2 = 250$  совпадают

$\hat{k}_1 = 0.46$  (рис. 7, б). Затем аппроксимируем множество точек проекции прямой линией и найдем ее угловой коэффициент. Его значение  $\hat{k}_2 = 9.9$  ( $\Delta = 1\%$ ) близко к истинному  $k_2 = 10$ .

### Заключение

Нами предложены методы восстановления модельных дифференциальных уравнений с задержкой для систем нейтрального типа с запаздыванием по их временным рядам. Методы могут быть применены для реконструкции систем нейтрального типа, находящихся как в режиме хаотических, так и в режиме периодических колебаний. Для восстановления времени запаздывания использован метод, основанный на статистическом анализе экстремумов временного ряда и их производных, и метод, основанный на анализе отклика системы на периодическое внешнее воздействие в виде прямоугольных импульсов. Для восстановления линейных и нелинейных функций и параметров инерционности систем нейтрального типа с запаздыванием использован метод, основанный на проецировании траектории системы в специальном образом выбранные подпространства малой размерности.

Эффективность методов продемонстрирована на численных примерах при восстановлении обобщенного уравнения Маккея–Гласса в хаотическом и периодическом режимах и при реконструкции модельных уравнений, описывающих качку корабля и колебания тела вертикально стоящего человека.

*Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант № 10–02–00980, аналитической ведомственной целевой программы «Развитие научного потенциала высшей школы (2009–2011 годы)», проект № 2.1.1/1738, программы РАН и гранта Президента РФ для поддержки молодых кандидатов наук.*

### Библиографический список

1. Mackey M.C., Glass L. Oscillations and chaos in physiological control systems // Science. 1977. Vol. 197. P. 287.
2. Ikeda K. Multiple-valued stationary state and its instability of the transmitted light by a ring cavity system // Opt. Commun. 1979. Vol. 30. P. 257.
3. Epstein I.R. Delay effects and differential delay equations in chemical-kinetics // Int. Rev. in Phys. Chem. 1992. Vol. 11. P. 135.
4. Kuang Y. Delay Differential Equations with Applications in Population Dynamics. Boston: Academic Press, 1993.
5. Voss H., Kurths J. Reconstruction of non-linear time delay models from data by the use of optimal transformations // Phys. Lett. A. 1997. Vol. 234. P. 336.
6. Tian Y.-C., Gao F. Extraction of delay information from chaotic time series based on information entropy // Physica D. 1997. Vol. 108. P. 113.
7. Hegger R., Bünner M.J., Kantz H., Giaquinta A. Identifying and modeling delay feedback systems // Phys. Rev. Lett. 1998. Vol. 81. P. 558.
8. Bünner M.J., Ciofini M., Giaquinta A., Hegger R., Kantz H., Meucci R., Politi A. Reconstruction of systems with delayed feedback: (I) Theory // Eur. Phys. J. D. 2000. Vol. 10. P. 165.

9. Пономаренко В.И., Прохоров М.Д., Караваяев А.С., Безручко Б.П. Определение параметров систем с запаздывающей обратной связью по хаотическим временным реализациям // ЖЭТФ. 2005. Т. 127. Вып. 3. С. 515.
10. Ortín S., Gutiérrez J.M., Pesquera L., Vasquez H. Nonlinear dynamics extraction for time-delay systems using modular neural networks synchronization and prediction // Physica A. 2005. Vol. 351. P. 133.
11. Siefert M. Practical criterion for delay estimation using random perturbations // Phys. Rev. E. 2007. Vol. 76. 026215.
12. Yu D., Frasca M., Liu F. Control-based method to identify underlying delays of a nonlinear dynamical system // Phys. Rev. E. 2008. Vol. 78. 046209.
13. Prokhorov M.D., Ponomarenko V.I. Reconstruction of time-delay systems using small impulsive disturbances // Phys. Rev. E. 2009. Vol. 80. 066206.
14. Zunino L., Soriano M.C., Fischer I., Rosso O.A., Mirasso C.R. Permutation-information-theory approach to unveil delay dynamics from time-series analysis // Phys. Rev. E. 2010. Vol. 82. 046212.
15. Ma H., Xu B., Lin W., Feng J. Adaptive identification of time delays in nonlinear dynamical models // Phys. Rev. E. 2010. Vol. 82. 066210.
16. Gopalsamy K. Oscillations in neutral delay-differential equations // J. Math. Phys. Sci. 1987. Vol. 21. P. 23.
17. Gopalsamy K. Stability and Oscillations in Delay Differential Equations of Population Dynamics. Dordrecht: Kluwer, 1992.
18. Hale J.K., Lunel S.M.V. Introduction to Functional Differential Equations. New York: Springer, 1993.
19. Bocharov G.A., Rihan F.A. Numerical modelling in biosciences using delay differential equations // J. Comp. Appl. Math. 2000. Vol. 125. P. 183.
20. Patanarapeelert K., Frank T.D., Friedrich R., Beek P.J., Tang I.M. A data analysis method for identifying deterministic components of stable and unstable time-delayed systems with colored noise // Phys. Lett. A. 2006. Vol. 360. P. 190.
21. Peterka R.J. Sensorimotor integration in human postural control // J. Neurophysiol. 2002. Vol. 88. P. 1097.

*Саратовский госуниверситет  
Саратовский филиал ИРЭ  
им. В.А. Котельникова РАН*

*Поступила в редакцию 14.06.2011  
После доработки 19.10.2011*

## RECONSTRUCTION OF NEUTRAL TIME-DELAY SYSTEMS

*A.S. Karavaev, V.I. Ponomarenko, M.D. Prokhorov*

The methods are proposed for the reconstruction of time-delay systems modeled by neutral delay-differential equations from their time series. The methods are successfully applied to the recovery of generalized Mackey–Glass equation and equations modeling ship rolling and human movement from simulated data.

*Keywords:* Reconstruction of equations, time-delay systems, time series analysis.



*Караваяев Анатолий Сергеевич* – родился в 1981 году в Саратове. Окончил Саратовский государственный университет в 2004 году. Кандидат физико-математических наук (2007). Доцент кафедры динамического моделирования и биомедицинской инженерии СГУ. Область научных интересов – моделирование по временным рядам, нелинейная динамика и ее приложения. Имеет более 50 научных публикаций.

410012 Саратов, ул. Астраханская, 83  
Саратовский госуниверситет  
E-mail: karavaevas@gmail.com



*Пономаренко Владимир Иванович* – родился в 1960 году в Саратове. Окончил Саратовский государственный университет в 1982 году. Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук (1992) и доктора физико-математических наук (2008). Ведущий научный сотрудник Саратовского филиала Института радиотехники и электроники РАН. Область научных интересов – статистическая радиофизика, анализ временных рядов, нелинейная динамика и ее приложения. Автор более 130 научных публикаций.

410019 Саратов, ул. Зеленая, 38  
Саратовский филиал Института радиотехники и электроники РАН  
E-mail: ponomarenkovi@gmail.com



*Прохоров Михаил Дмитриевич* – родился в 1968 году в Саратове. Окончил Саратовский государственный университет в 1992 году. Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук (1997) и доктора физико-математических наук (2008). Ведущий научный сотрудник Саратовского филиала Института радиотехники и электроники РАН. Область научных интересов – нелинейная динамика и ее приложения, математическое моделирование, анализ временных рядов. Имеет более 100 научных публикаций.

410019 Саратов, ул. Зеленая, 38  
Саратовский филиал Института радиотехники и электроники РАН  
E-mail: mdprokhorov@yandex.ru





## СИНХРОНИЗАЦИЯ АУТОКОЛЕБАНИЙ В КЛИСТРОННОМ АУТОГЕНЕРАТОРЕ В ПРИСУТСТВИИ ШУМА

*Б.С. Дмитриев, Ю.Д. Жарков, С. А. Садовников, В.Н. Скороходов*

Приведены результаты экспериментального исследования синхронизации клистронного автогенератора с запаздывающей обратной связью в присутствии шума. Показано, что эффект синхронизации приводит к заметному уменьшению внесенных шумов, увеличению синхронизирующего сигнала и сужению полосы синхронизации. При подаче на вход клистрона аддитивной суммы гармонического и шумового сигналов в результате синхронизации существенно увеличивается отношение сигнал–шум.

*Ключевые слова:* Клистронный автогенератор с запаздывающей обратной связью, синхронизация в присутствии шума, отношение сигнал–шум.

### Введение

Теория синхронизации в генераторах с шумом была развита еще в 20 веке и описана в классических трудах [1,2]. Однако до настоящего времени мало экспериментальных работ по изучению синхронизации автогенераторов СВЧ в присутствии шума, хотя эти вопросы весьма важны для увеличения качества колебаний в СВЧ-диапазоне. В настоящей статье приведены результаты экспериментального исследования явления синхронизации описанного в [3] автогенератора СВЧ на пьезорезонаторном клистроне с запаздывающей обратной связью (ЗОС) в присутствии шума.

### 1. Описание измерительного комплекса

Для проведения исследований был разработан и откалиброван универсальный измерительный комплекс, позволяющий изучать влияние внешнего сигнала на регулярные колебания в исследуемом клистроне в присутствии шума. Схема комплекса показана на рис. 1.

Основным источником шума в данной схеме является лампа бегущей волны (ЛБВ) с магнитной периодической фокусирующей системой. ЛБВ в качестве основного источника шумового сигнала используется по двум причинам: высокие собственные шумы и широкая полоса частот. Как известно, основным источником шума



Рис. 1. Измерительный комплекс для исследования влияния внешнего сигнала на колебания клистронного генератора в присутствии шума

в ЛБВ является дробовой эффект. На рис. 2 приведен спектр шумового сигнала ЛБВ при токе 50 мА и ускоряющем напряжении 2200 В. Интегральная мощность шумов около 2 мкВт в полосе частот 1200 МГц, спектральная плотность мощности шумов составила  $2 \cdot 10^{-15}$  Вт/Гц.

Такой мощности шумов для проведения запланированных исследований явно не достаточно. Для повышения общего уровня шумов используются дополнительно еще два усилителя. Во-первых, транзисторный усилитель А301–04 (УС1), с диапазоном частот от 2 до 4 ГГц и коэффициентом усиления 33 дБ. При этом достигнуто существенное увеличение мощности до 10 мВт в полосе частот 2 ГГц. Для дальнейшего увеличения уровня мощности шумов дополнительно использовался пятирезонаторный клистронный усилитель с коэффициентом усиления 30 дБ. В этом случае в полосе частот 30 МГц можно получить увеличение интегральной мощности шумов до 1.7 Вт. Спектральная характеристика полученного шумового сигнала приведена на рис. 3 (центральная частота 2800 МГц).

Для проведения исследования влияния шумов на синхронизацию внешним периодическим сигналом на вход исследуемого автогенератора кроме шумов подавался сигнал от генератора стандартных сигналов Г4–80 (ГСС). При этом для увеличения мощности синхронизирующего сигнала был дополнительно включён усилитель

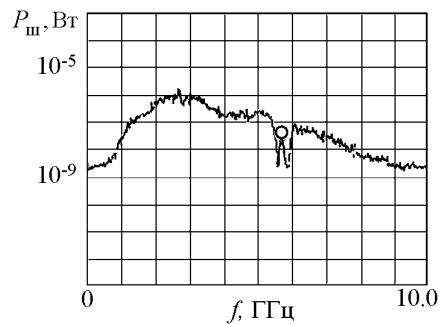


Рис. 2. Спектр шумового сигнала ЛБВ

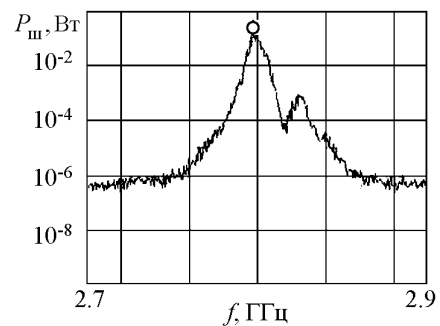


Рис. 3. Вид шумового сигнала в цепочке из трёх усилителей: ЛБВ, транзисторный усилитель, клистрон

Agilent 87415A (UC2). Наблюдение спектра проводилось с помощью цифрового анализатора спектра Agilent E4408B. Универсальность такого измерительного комплекса заключалась в том, что он дает возможность исследования характеристик как самих внешних шумов, так и влияния этих шумов на динамику исследуемого автогенератора с ЗОС, а также синхронизацию колебаний гармоническим сигналом в присутствии шума.

## **2. Методика и результаты измерения влияния внешнего воздействия на автоколебания в резонансных автогенераторах СВЧ в присутствии шума**

Изучение поведения автоколебательной системы в присутствии шума при внешнем гармоническом воздействии имеет большое значение для науки и техники [4]. В зависимости от вида нелинейной характеристики автоколебательной системы, уровня внешнего гармонического воздействия, соотношения частоты внешнего воздействия и частоты колебаний автоколебательной системы будут наблюдаться различные результирующие эффекты, обусловленные внешними шумами.

В рамках исследования влияния внешних шумов на синхронизацию клистронного автогенератора внешним периодическим сигналом были поставлены эксперименты по изучению данного явления при определенной мощности одночастотных колебаний в системе для различных интенсивностей внешнего шума и мощностей синхронизирующего сигнала.

Как известно, классическая картина эффекта синхронизации в исследуемой системе без внешних шумов имеет следующий вид. При определенных параметрах в системе наблюдается одночастотная генерация. При введении в систему внешнего (синхронизирующего) сигнала мощность одночастотного сигнала начинает уменьшаться до полного его исчезновения, а синхронизирующего – увеличиваться. Частоту, при которой происходит полное исчезновение одночастотного сигнала, можно считать частотой начала синхронизации. Далее при изменении частоты синхронизирующего сигнала одночастотный сигнал вновь возникает в спектре колебаний исследуемой системы. Это можно считать окончанием эффекта синхронизации. По разности частот, при которых происходит окончание и начало синхронизации, можно определить полосу синхронизации.

До проведения экспериментального изучения синхронизации в системах с шумом предварительно было исследовано влияние внешних шумов на автоколебания клистронного автогенератора в режиме одночастотной генерации. На рис. 4 приведены спектрограммы клистронного автогенератора для различных уровней интегральной мощности внешнего шума. Как видно из рис. 4, *а*, при отсутствии шума клистрон генерирует единственную частоту 2796.1 МГц с мощностью сигнала 860 мВт и шириной спектральной линии порядка 0.1 МГц. При последовательном увеличении шумов до значения  $P_{ш}/P_c = 0.3$  (рис. 4, *б*) мощность в максимуме падает до 600 мВт, а ширина спектральной линии расширяется до 0.3 МГц.

При  $P_{ш}/P_c = 0.4$  (рис. 4, *в*) мощность падает до 270 мВт, а спектральная линия расширяется до 0.6 МГц. Явно видно, что шум приводит к резкому падению мощности и к диффузии фазы, приводящей к тому, что мгновенная частота (скорость изменения фазы) есть случайная функция времени. Диффузия фазы свидетельствует о том, что колебания не являются более строго периодическими. При дальнейшем увеличении  $P_{ш}/P_c = 1.8$  (рис. 4, *е*) происходит полное подавление регулярных автоколебаний внешним шумом. Этот эффект подавления физически объясняется силь-

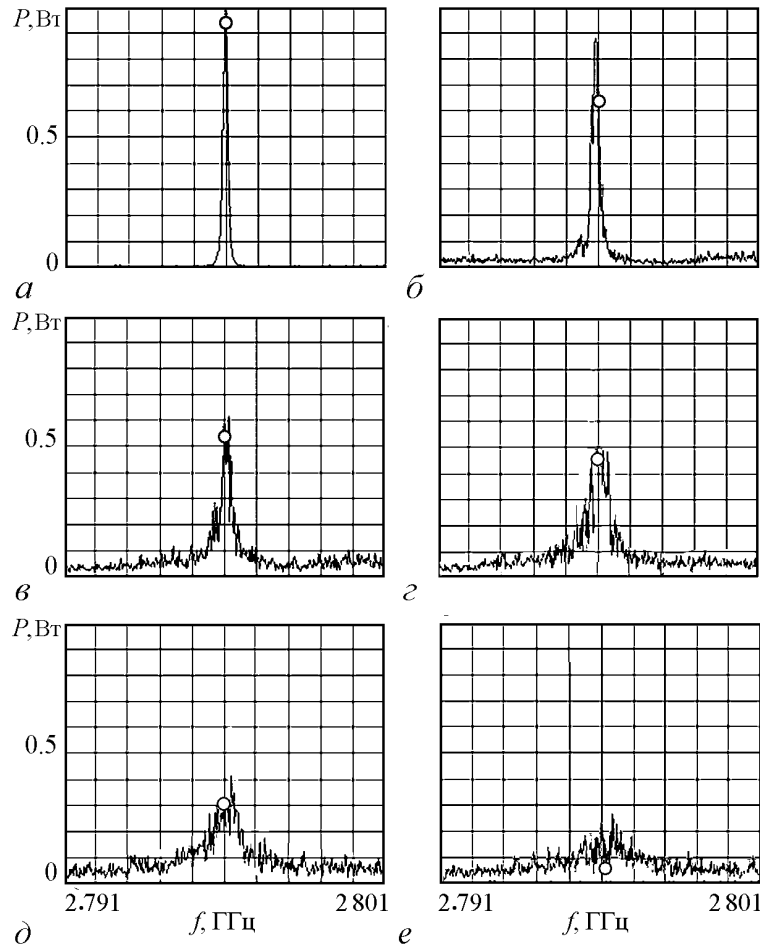


Рис. 4. Спектры выходного сигнала  $P$  клистронного автогенератора для разных уровней мощности внешнего шума  $P_{ш}$ :  
 $a - P_{ш} = 0$ ,  
 $b - P_{ш}/P_c = 0.1$ ,  
 $в - P_{ш}/P_c = 0.3$ ,  
 $z - P_{ш}/P_c = 0.4$ ,  
 $д - P_{ш}/P_c = 0.9$ ,  
 $e - P_{ш}/P_c = 1.8$

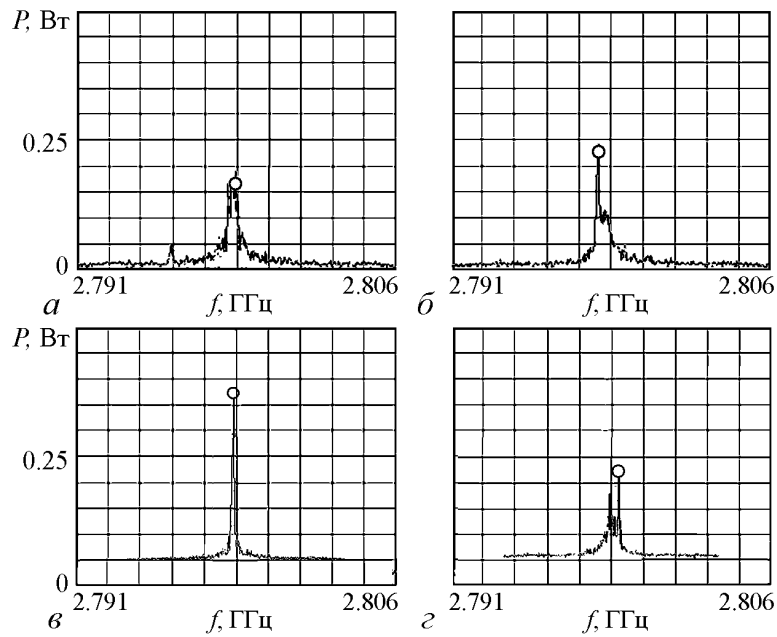


Рис. 5. Характерная картина эффекта синхронизации колебаний зашумленного клистронного автогенератора при воздействии внешнего одночастотного сигнала:  $a$  – спектр колебаний отдельных сигналов: синхронизирующего и сигнала клистрона над шумовым пьедесталом;  $б$  – начало синхронизации;  $в$  – максимальная мощность автоколебаний и минимальная мощность шумов при синхронизации (мощность сигнала увеличилась до 400 мВт);  $z$  – окончание синхронизации

ной разгруппировкой электронных сгустков в клистроне под действием внешнего шумового сигнала и резким падением амплитуды первой гармоники сгруппированного тока в выходном резонаторе клистрона.

В рамках исследования влияния внешних шумов на синхронизацию была выбрана зона генерации клистронного автогенератора при токе пучка  $I = 17$  мА, ускоряющем напряжении  $U = 2080$  В и затухании в цепи обратной связи  $L = 9$  дБ. Эта зона соответствует точке амплитудной характеристики на восходящем ее участке ( $P_c = 200$  мВт). Сначала на вход клистронного автогенератора подавался шумовой сигнал с интегральной мощностью около 100 мВт и средней частотой, совпадающей с частотой клистрона. В результате сигнал клистрона располагался над шумовым пьедесталом. Затем на вход автогенератора вводился синхронизирующий сигнал с мощностью 10 мВт (на рис. 5, а приведены отдельные сигналы: синхронизирующий (слева) и клистронный над шумовым пьедесталом (в центре)) и плавно менялась частота синхронизирующего сигнала.

Характерная картина эффекта синхронизации клистронного автогенератора с поданными на его вход шумовым сигналом (интегральная мощность шума  $P_{ш} = 100$  мВт) и внешним гармоническим сигналом приведена на рис. 5. Как видно из спектрограмм, эффект синхронизации приводит к заметному уменьшению уровня внесенных шумов и резкому увеличению синхронизирующего сигнала. Интересный эффект уменьшения шумов в наблюдаемом сигнале можно объяснить подавлением флуктуаций, вызванных шумами, вследствие синхронизации.

Для внешнего шума различных интенсивностей целесообразно привести серию зависимостей мощности автоколебаний от расстройки частот  $\Delta f$  (разности между частотой одночастотного сигнала в автономном режиме автогенератора и частотой синхронизирующего сигнала, при котором производится измерение мощности), позволяющую определить полосу синхронизации. Такая серия зависимостей приведена на рис. 6.

Представляется интересным построить зависимость полосы синхронизации  $df$  от мощности внешних шумов. Данная зависимость приведена на рис. 7. Видно, что с увеличением мощности шумов, подаваемых на вход исследуемой системы, происходит сужение полосы синхронизации (при увеличении мощности шумов она сузилась более чем в 2 раза).

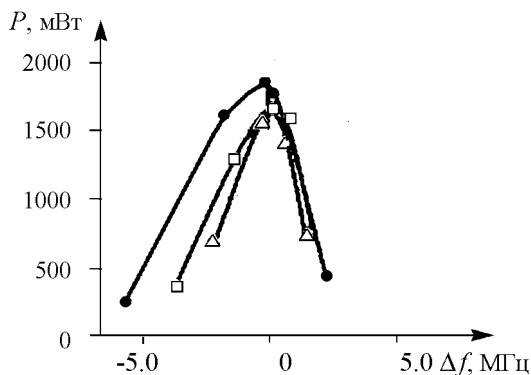


Рис. 6. Поведение мощности автоколебаний от расстройки частот автономного генератора ( $P_c = 570$  мВт,  $I = 20$  мА,  $U = 1907$  В) и синхронизирующего сигнала (57 мВт) для разных интенсивностей внешнего шума:  $\circ$  – в автономном случае  $P_{ш} = 0$  мВт;  $\square$  – для мощности шума  $P_{ш} = 2$  мВт;  $\triangle$  – для мощности шума  $P_{ш} = 13$  мВт

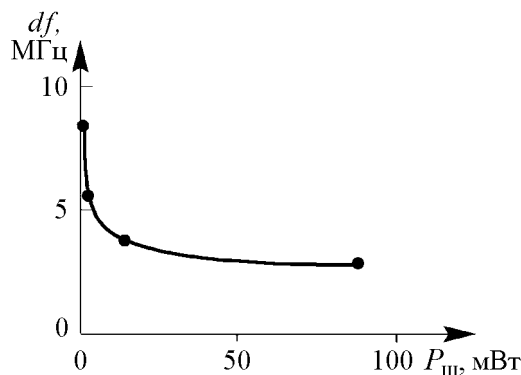


Рис. 7. Зависимость полосы синхронизации от мощности внешних шумов на восходящем участке амплитудной характеристики

Полученные результаты (см. рис. 6, 7) можно объяснить следующими физическими представлениями: при добавлении внешних шумов в систему происходит диффузия фазы колебаний, и мощность одночастотного сигнала снижается, а как известно, при уменьшении мощности одночастотного сигнала полоса синхронизации сужается.

Полученные результаты согласуются с приведенными в литературе результатами (см., например, [4, 5]). В частности, в [4] показано, что при ограниченном шуме полоса синхронизации есть монотонно убывающая функция интенсивности внешнего шума. Данное утверждение подтверждается и приведенными результатами.

Таким образом, проведенное экспериментальное исследование синхронизации автоколебаний в клистронном автогенераторе в присутствии внешних шумов позволяет сделать вывод, что синхронизация зашумленных автоколебаний приводит к двум интересным эффектам, проявляющимся одновременно. Во-первых, при определенных уровнях мощности зашумленных собственных автоколебаний и синхронизирующего сигнала за счет эффекта синхронизации при совпадении частот наблюдается существенное увеличение амплитуды синхронизируемого сигнала на частоте внешнего воздействия (например, в автономном режиме – от 57 до 1700 мВт). Во-вторых, вследствие синхронизации происходит значительное уменьшение уровня шумового пьедестала наблюдаемого сигнала при совпадении частот за счет подавления автоколебаний, индуцированных внешними шумами.

Приведенные результаты позволяют предложить еще одно важное с практической точки зрения направление экспериментальных исследований влияния внешнего воздействия на автоколебания в системах СВЧ в присутствии шума. Суть этого предложения заключается в следующем. На вход клистронного автогенератора, работающего в режиме периодических колебаний, подается внешний зашумленный синхронизирующий сигнал и подбором частоты этого внешнего сигнала и средней частоты полосы шума осуществляется синхронизация колебаний. В этом режиме можно получить увеличение амплитуды синхронизирующего сигнала с одновременным некоторым понижением уровня шумового пьедестала. В итоге следует ожидать увеличения отношения сигнал–шум на выходе этого своеобразного усилителя по сравнению с отношением на входе.

Для проведения этих исследований был собран специальный измерительный комплекс, схема которого представлена на рис. 8.

На собранном измерительном комплексе была исследована синхронизация клистронного автогенератора с ЗОС внешним периодическим сигналом генератора стандартных сигналов (ГСС) Г4-80 и шумовым пьедесталом, создаваемым перестраиваемым генератором шума Agilent E4438C. Основные характеристики генератора шума: диапазон частот от 250 кГц до 6 ГГц; мощность 100 мВт на частоте 3 ГГц, ширина частот шумового сигнала до 80 МГц. Зашумлённый синхронизирующий сигнал усиливался усилителем Agilent 87415A (УС) и подавался через тройник в цепь обратной связи клистронного автогенератора. Спектр фиксировался с помощью цифрового анализатора спектра Agilent E4408B. Автономный сигнал клистронного автогенератора имел мощность 230 мВт, а входной синхронизирующий сигнал ГСС –

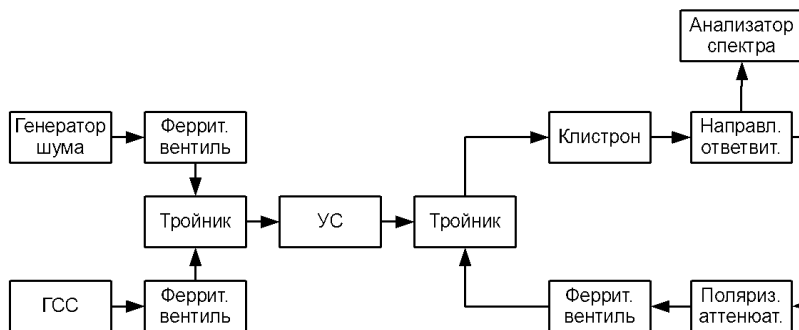


Рис. 8. Измерительный комплекс для исследования влияния шумов на колебания клистронного автогенератора

12 мВт над шумовым пьедесталом с полосой 2 МГц и уровнем мощности 2 мВт. В ходе эксперимента измерялось отношение сигнал – шум (SNR) как отношение высоты спектральной линии сигнала над шумовым основанием к высоте шумового основания в спектре сигнала на выходе и входе клистрона [6]. Кроме того, измерялся коэффициент усиления  $K$  в режиме синхронизации этого своеобразного усилителя.

Результаты измерений спектров колебаний при различной расстройке  $\Delta f_p$  синхронизирующего сигнала относительно сигнала клистронного автогенератора приведены на рис. 9.

На рис. 10 дана зависимость коэффициента усиления  $K$  от частоты синхронизирующего сигнала  $f$ , а на рис. 11 – зависимость SNR на входе (а) и выходе (б) клистрона также от частоты  $f$ . Коэффициент усиления и SNR вычислялись по оцифрованным спектрограммам.

Полученные результаты позволяют сделать вывод о том, что внешнее воздействие на автоколебания в СВЧ автогенераторах в присутствии шума, приводящее к явлению синхронизации, вызываемому, с одной стороны, увеличением амплитуды поданного на вход клистронного автогенератора сигнала (коэффициент усиления

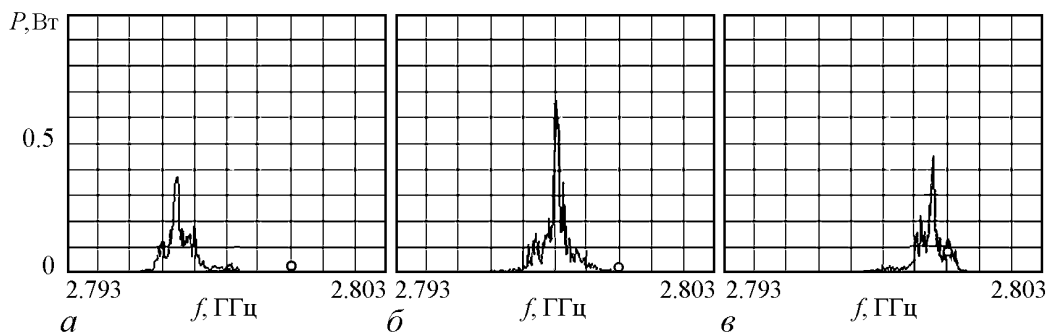


Рис. 9. Спектр колебаний при расстройке синхронизирующего сигнала относительно сигнала клистронного автогенератора: а –  $\Delta f_p = -1.63$  МГц – начало синхронизации; б –  $\Delta f_p = 0$  МГц – полная синхронизация; в –  $\Delta f_p = +1.47$  МГц – конец синхронизации

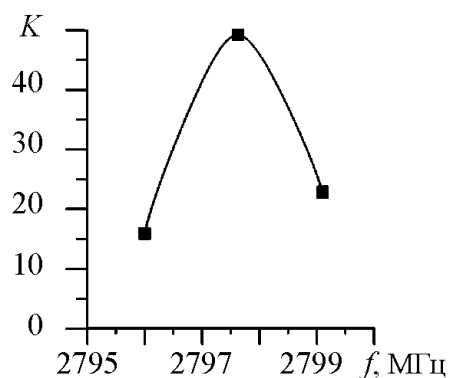


Рис. 10. Зависимость коэффициента усиления  $K$  от частоты  $f$

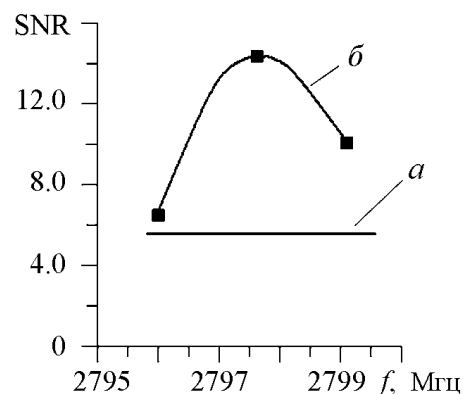


Рис. 11. Зависимость SNR на входе (а) и выходе (б) от частоты  $f$

по мощности достигает 17 дБ), а с другой – росту SNR в 2.5 раза. Таким образом, существенно повышается качество внешнего зашумленного сигнала.

Эффективность предлагаемого способа улучшения отношения сигнал–шум на выходе клистрона определяется высоким значением SNR (порядка 15) и значительной выходной мощностью (порядка 0.6 Вт), полученными даже без оптимизации за счет выбора уровня внешних шумов и соотношения мощностей синхронизирующего и синхронизированного сигналов.

### Заключение

Разработана методика измерения влияния внешнего воздействия на автоколебания в клистронном автогенераторе в присутствии шума, состоящая в изучении эволюции спектров колебаний зашумленного клистрона в результате действия гармонического сигнала.

Показано, что эффект синхронизации приводит к заметному уменьшению уровня внесенных шумов и резкому увеличению синхронизирующего сигнала, при этом полоса синхронизации с ростом мощности шумов заметно сужается.

Предложено новое использование клистронного автогенератора с запаздывающей обратной связью как своеобразного усилителя при подаче на его вход аддитивной суммы гармонического и шумового сигналов. В результате такой синхронизации получен коэффициент усиления по мощности 17 дБ и увеличено отношение сигнал–шум на выходе этого усилителя в 2.5 раза.

*Работа выполнена при поддержке грантов РФФИ (проекты № 11-02-00057 и № 11-02-00047) и в рамках президентской программы поддержки ведущих научных школ РФ (проект № НШ-3407.2010.2).*



## Библиографический список

1. Малахов А.Н. Флуктуации в автоколебательных системах. М.: Наука. 1979.
2. Ланда П.С. Автоколебания в системах с конечным числом степеней свободы. М.: Наука. 1980.
3. Дмитриев Б.С., Жарков Ю.Д., Клоков Д.В., Рыскин Н.М. Экспериментальное исследование сложной динамики в многорезонаторном клистронном автогенераторе с запаздывающей обратной связью // ЖТФ. 2003. Т. 73. Вып. 7. С. 105.
4. Пиковский А., Розенблюм М., Куртс Ю. Синхронизация. Фундаментальное нелинейное явление. М.: Техносфера, 2003.
5. Лоскутов А. Нелинейная динамика, теория динамического хаоса и синергетика (перспективы и приложения) // Компьютерра. 1998. № 4.
6. Анищенко В.С., Астахов В.В., Вадивасова Т.Е. Нелинейные эффекты в хаотических и стохастических системах. Москва; Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2003.

Саратовский государственный  
университет им. Н.Г. Чернышевского

Поступила в редакцию  
После доработки

9.06.2011  
12.10.2011

## SYNCHRONIZATION OF KLYSTRON OSCILLATOR WITH DELAYED FEEDBACK IN THE PRESENCE OF NOISE

*B.S. Dmitriev, Ju.D. Zharkov, S.A. Sadovnikov, V.N. Skorokhodov*

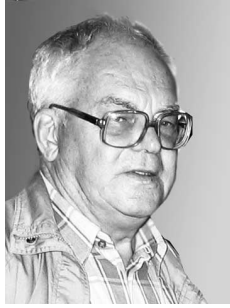
This work presents experimental results of synchronization of klystron oscillator with delayed feedback in the presence of noise. It was shown, that synchronization effect significantly decreases noise level, leads to amplifying of synchronizing signal and shortening of synchronization wideband. When additive sum of harmonic and noise signal are directed to klystron input, signal-to-noise ratio significantly increases due to synchronization.

*Keywords:* Klystron oscillator with delayed feedback, synchronization in the presence of noise, signal-to-noise ratio.



*Дмитриев Борис Савельевич* – родился в Саратове (1937), окончил физический факультет Саратовского университета (1959). В настоящее время – профессор кафедры нелинейной физики СГУ, доктор физ.-мат. наук. Читает лекции по общему курсу физики, радиофизике и электронике, концепциям современного естествознания. Область научных интересов – микроволновая электроника и радиофизика, нелинейная динамика распределённых систем. Опубликовал более 150 научных работ и учебных пособий, монографию «Относительность – время, пространство, поля» (с грифом учебного пособия для вузов), автор 16 изобретений и патентов.

410012 Саратов, ул. Астраханская, 83  
Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского  
E-mail: DmitrievBS@info.sgu.ru



*Жарков Юрий Дмитриевич* – родился в селе Терса Еланского района Волгоградской области (1931). Окончил физический факультет СГУ (1953). Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук (1961) и доктора (1987) в области радиофизики и электроники СВЧ. В настоящее время – профессор кафедры электроники, колебаний и волн СГУ. Область научных интересов – физическое моделирование процессов взаимодействия потоков заряженных частиц с СВЧ-полями, исследование сложной динамики в СВЧ-генераторах с запаздывающей обратной связью. Опубликовал более 200 работ, среди них несколько учебных пособий, 20 изобретений.

410012 Саратов, ул. Астраханская, 83  
Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского



*Садовников Сергей Александрович* – родился в 1986 году. Окончил факультет нелинейных процессов СГУ (2008). В настоящее время аспирант кафедры нелинейной физики СГУ. Область научных интересов – экспериментальные исследования нелинейной динамики в СВЧ автогенераторах. Имеет 6 публикаций.

410012 Саратов, ул. Астраханская, 83  
Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского



*Скороходов Валентин Николаевич* – родился в 1959 году. Окончил физический факультет СГУ в 1982 году. В настоящее время является заведующим лабораторией кафедры электроники, колебаний и волн. Область научных интересов: нелинейная динамика в СВЧ-электронике. Автор более 15 статей в отечественных и зарубежных журналах.

410012 Саратов, ул. Астраханская, 83  
Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского



## МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИНАМИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ С КУСОЧНО-ЛИНЕЙНЫМИ ХАРАКТЕРИСТИКАМИ

*С.В. Алюков*

В статье рассматриваются вопросы моделирования динамических систем с кусочно-линейными характеристиками. Предложены новые методы аппроксимации кусочно-линейных, в частности, ступенчатых функций, не имеющие недостатков традиционного разложения в ряды Фурье. Исследуются вопросы сходимости и погрешности аппроксимации.

*Ключевые слова:* Моделирование, аппроксимация, кусочно-линейные функции, сходимость, погрешность.

### Введение

Математическое моделирование динамики сложных систем с переменными характеристиками часто связано с применением кусочно-линейных функций. С помощью таких функций, например, описывают ударные воздействия, передачу сигналов, динамику механических систем с нелинейными упругостями, с нагрузками типа «сухое трение» и другие процессы.

Широкое применение кусочно-линейных функций объясняется простотой их структуры, особенно по участкам. На каждом участке эти функции представляют собой прямые линии и их отрезки, что позволяет во многих случаях получать решения, пользуясь методами теории линейных систем. Вместе с тем, часто возникают проблемы при построении решений на всей области определения кусочно-линейной функции, увязки решений по участкам с необходимостью применения специальных математических методов. Для упрощения расчетов при работе с кусочно-линейными функциями во многих случаях прибегают к методам аппроксимации. Одним из наиболее широко используемых методов аппроксимации кусочно-линейных функций является разложение этих функций с помощью рядов Фурье  $f = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \varphi_k$ , где  $\{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n, \dots\}$  – ортогональная система в функциональном гильбертовом пространстве  $L_2[-\pi, \pi]$  измеримых функций с интегрируемыми по Лебегу квадратами,  $f \in L_2[-\pi, \pi]$ ,  $c_k = (f\varphi_k) / \|\varphi_k\|^2$ . В качестве ортогональной системы

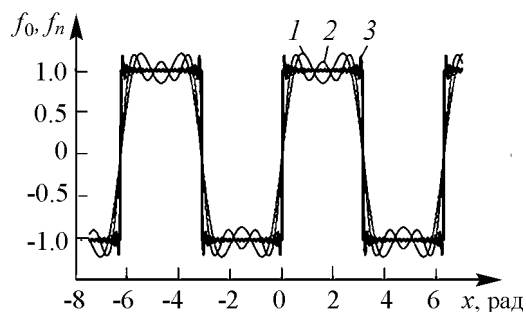


Рис. 1. Погрешности аппроксимации с помощью разложения в ряд Фурье

функции, что приводит к достаточно большой погрешности аппроксимации. На рис. 1 кривые 1 и 2 иллюстрируют этот недостаток.

Более того, и при большом числе слагаемых в разложении с помощью ряда Фурье существуют характерные скачки аппроксимирующей функции в окрестности точек разрыва  $O_\delta(x_0)$  исходной функции. Для таких точек  $\sup_{x \in O_\delta(x_0)/\{x_0\}} |f(x) - S_n(x)| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} A \neq 0$ , где  $S_n(x)$  – частичная сумма ряда Фурье [1]. Например, для функции

$$f_0(x) = \text{sign}(\sin x) \quad (1)$$

с прямоугольными импульсами точка  $x = \pi/m$ , где  $m = 2[(n+1)/2]$  и  $[A]$  – целая часть числа  $A$ , является точкой максимума частичной суммы  $S_n(f_0)$  тригонометрического ряда Фурье [2], причем  $S_n(f_0, \pi/m) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} (2/\pi) \int_0^\pi (\sin t/t) dt \approx 1.17898$ . То есть величина абсолютной погрешности  $|f_0(\pi/m) - \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(f_0, \pi/m)| > 0.178$ , а относительная погрешность составляет более 17% независимо от числа слагаемых в частичной сумме ряда Фурье.

На рис. 1 кривая 3 соответствует графику аппроксимирующей функции  $f_n(x) = \sum_{n=1}^{20} c_n \varphi_n$  и иллюстрирует повышенную погрешность аппроксимации в окрестности точек разрыва исходной функции (1). В этом проявляется так называемый эффект Гиббса [2], причем с ростом числа гармоник эффект Гиббса не исчезает, что ведет к крайне негативным последствиям использования аппроксимирующей функции.

Эффект Гиббса носит общий характер, проявляется для любой функции, имеющей ограниченную вариацию на отрезке  $[a, b]$ , с изолированной точкой разрыва  $x_0 \in (a, b)$ . Для таких функций выполняется условие [2]

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(f, x_0 + \pi/m) = f(x_0 + 0) + \frac{d}{2} \left( \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \frac{\sin t}{t} dt - 1 \right),$$

где  $d = f(x_0 + 0) - f(x_0 - 0)$ .

Покажем, что абсолютная  $\Delta = \Delta(x)$  и относительная  $\delta = \delta(x)$  погрешности аппроксимации в окрестности точек разрыва могут быть сколь угодно большими.

часто берут тригонометрическую систему  $2\pi$ -периодических функций  $\{1, \sin nx, \cos nx; n \in \mathbb{N}\}$ .

Применение рядов Фурье имеет и определенные недостатки. Например, при относительно небольшом числе слагаемых в ряде Фурье, используемых для разложения кусочно-линейной функции, аппроксимирующая функция имеет ярко выраженный волнообразный характер даже в пределах одного прямолинейного участка кусочно-линейной

Действительно,

$$\begin{aligned}
 \lim_{n \rightarrow \infty} \Delta(x_0 + \pi/m) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| S_n(f, x_0 + \pi/m) - f(x_0 + \pi/m) \right| = \\
 &= \left| \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x_0 + \pi/m) - \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_0 + \pi/m) \right| = \\
 &= \left| f(x_0 + 0) + \frac{d}{2} \left( \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \frac{\sin t}{t} dt - 1 \right) - f(x_0 + 0) \right| = \\
 &= \left| \frac{d}{2} \left( \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \frac{\sin t}{t} dt - 1 \right) \right| = \Delta(d).
 \end{aligned}$$

Функция  $\Delta(d)$  является бесконечно большой величиной, так как  $\forall M > 0 \exists d = d^*(M) > 0 \forall d : |d| > d^* \Rightarrow \Delta(d^*) = |(d^*/2) \cdot ((2/\pi) \int_0^\pi (\sin t)/t dt - 1)| > M$ . В качестве  $d^*$  можно взять, например,  $[2M\pi / (2 \int_0^\pi (\sin t)/t dt - \pi)] + 1$ , где  $[A]$  – целая часть числа  $A$ .

Для относительной погрешности  $\delta(x) = \Delta(x)/|f(x)|$  доказательство аналогично. Более того, даже при фиксированном значении  $d \in \mathbb{R}$  ( $d \neq 0$ ) для любого  $M > 0$  можно подобрать такую функцию  $f(x) \in L_2[a, b]$ , для которой  $\delta(x_0 + 0, d) = \Delta(x_0 + 0, d)/|f(x_0 + 0)| > M$ . В качестве такой функции, например, можно взять функцию, у которой  $|f(x_0 + 0)| < \Delta(x_0 + 0, d)/M$ ,  $f(x_0 + 0) \neq 0$ . Заметим, что даже на множестве непрерывных функций  $C[-\pi, \pi]$  ряд Фурье, как известно, еще не обязан сходиться в каждой точке.

## 1. Описание метода

Для устранения отмеченных недостатков предложено аппроксимировать исходную ступенчатую функцию (1) последовательностью рекурсивных периодических функций [3]

$$\{f_n(x) | f_n(x) = \sin((\pi/2)f_{n-1}(x)), f_1(x) = \sin x; n - 1 \in \mathbb{N}\} \subset C^\infty[-\pi, \pi]. \quad (2)$$

Аппроксимация (2) основана на использовании тригонометрических выражений, но не в форме слагаемых, как в рядах Фурье, а в форме вложений. Для этого случая на рис. 2 представлены графики ступенчатой функции (1) и четырех ее последовательных приближений.

Следует отметить, что уже при относительно небольших значениях  $n$  при использовании процедуры (2) график аппроксимирующей функции дает достаточно хорошее приближение исходной функции (1). В случае предложенного метода аппроксимации синусоида как бы растягивается вдоль прямых участков графика исходной

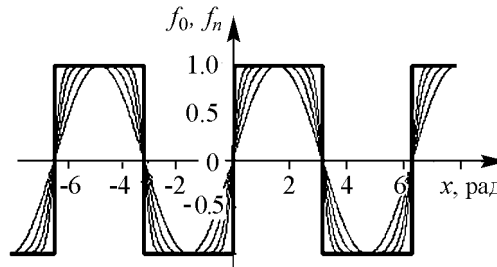


Рис. 2. Графики ступенчатой функции и четырех ее последовательных приближений с помощью вложенных функций

функции. При этом никаких колебаний аппроксимирующей функции в рамках прямолинейных участков исходной ступенчатой функции не происходит. Полностью отсутствует также эффект Гиббса.

## 2. Сходимость и погрешность аппроксимации

Рассмотрим некоторые вопросы сходимости и погрешности аппроксимации (2).

**Теорема.** В пространстве измеримых функций  $L_1[0, \pi/2]$  и функциональном гильбертовом пространстве  $L_2[0, \pi/2]$  последовательность аппроксимирующих функций  $f_n(x)$  сходится по норме к исходной функции  $f_0(x)$ .

*Доказательство.* Введем последовательность минорантных относительно последовательности  $f_n(x)$  функций  $\{\varphi_n(x) \mid \varphi_n(x) = 1 - \exp(-(\pi/2)^{n-1}x), n \in \mathbb{N}\} \subset C^\infty[0, \pi/2]$ . Можно показать, что  $f_n(x) \geq \varphi_n(x)$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [0, \pi/2]$ . Заметим, что мера множества точек разрыва функции  $f_0(x)$  равна нулю. Тогда, учитывая знаконеотрицательность и ограниченность функций  $f_n(x)$  и  $\varphi_n(x)$  на рассматриваемом отрезке, в пространстве  $L_1[0, \pi/2]$  получим

$$\begin{aligned} \|f_0(x) - f_n(x)\|_{L_1[0, \pi/2]} &= \int_0^{\pi/2} (1 - f_n(x)) dx \leq \int_0^{\pi/2} (1 - \varphi_n(x)) dx = \\ &= (2/\pi)^{n-1} (1 - \exp(-(\pi/2)^n)). \end{aligned}$$

Так как  $\lim_{n \rightarrow \infty} (2/\pi)^{n-1} (1 - \exp(-(\pi/2)^n)) = 0$ , то  $\|f_0(x) - f_n(x)\|_{L_1[0, \pi/2]} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ .

В функциональном гильбертовом пространстве  $L_2[0, \pi/2]$  с метрикой  $\rho(x, y) = \left( \int_0^{\pi/2} (x(t) - y(t))^2 dt \right)^{1/2}$  имеем

$$\begin{aligned} \|f_0(x) - f_n(x)\|_{L_2[0, \pi/2]} &= \left( \int_0^{\pi/2} (1 - f_n(x))^2 dx \right)^{1/2} \leq \left( \int_0^{\pi/2} (1 - \varphi_n(x))^2 dx \right)^{1/2} = \\ &= \left( \frac{(2/\pi)^{n-1}}{2} (1 - \exp(-2(\pi/2)^n)) \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Учитывая, что  $\lim_{n \rightarrow \infty} ((2/\pi)^{n-1} (1 - \exp(-2(\pi/2)^n))/2)^{1/2} = 0$ , получим, что и в этом пространстве  $\|f_0(x) - f_n(x)\|_{L_2[0, \pi/2]} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ . Последовательность (2) сходится в среднем к исходной функции (1). ■

Таким образом, последовательность аппроксимирующих функций  $f_n(x)$  (2) в пространствах  $L_1[-\pi, \pi]$  и  $L_2[-\pi, \pi]$  является фундаментальной. В пространстве  $C[-\pi, \pi]$  последовательность  $f_n(x)$  фундаментальной не является.

Для оценки погрешности аппроксимации воспользуемся соотношением  $\varphi_n(x) \leq f_n(x) \leq \psi_n(x)$  (рис. 3), где  $\psi_n(x) = (\pi/2)^{n-1} \cdot x$ ,  $x \in [0, \pi/2]$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Функции  $\varphi_n(x)$  и  $\psi_n(x)$  построены из условия равенства производных в нуле  $\varphi'_n(0) = \psi'_n(0) = f'_n(0)$ , что позволяет получить узкий интервал для оценки погрешности аппроксимации.

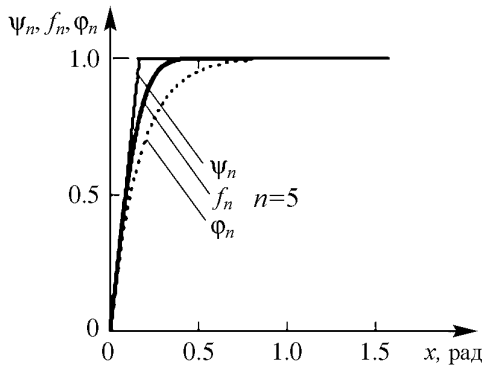


Рис. 3. Графики ограничивающих функций

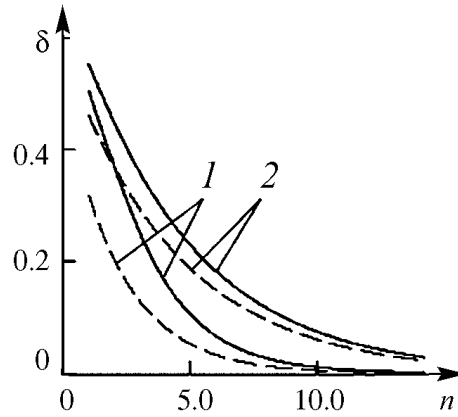


Рис. 4. Графики оценок относительной погрешности

В пространстве  $L_1[0, \pi/2]$  оценки для абсолютной и относительной погрешности, соответственно, будут

$$(2/\pi)^{n-1}/2 \leq \|f_n(x) - f_0(x)\|_{L_1[0, \pi/2]} \leq (2/\pi)^{n-1}(1 - \exp(-(\pi/2)^n));$$

$$\frac{(2/\pi)^n}{2} \leq \left( \|f_n(x) - f_0(x)\|_{L_1[0, \pi/2]} \right) / (\pi/2) \leq (2/\pi)^n(1 - \exp(-(\pi/2)^n)).$$

Для пространства  $L_2[0, \pi/2]$  эти оценки принимают, соответственно, вид

$$\left( \frac{(2/\pi)^{n-1}}{3} \right)^{1/2} \leq \|f_n(x) - f_0(x)\|_{L_2[0, \pi/2]} \leq \left( (2/\pi)^{n-1} \frac{1 - \exp(-2(\pi/2)^n)}{2} \right)^{1/2};$$

$$\left( \frac{(2/\pi)^n}{3} \right)^{1/2} \leq \left( \|f_n(x) - f_0(x)\|_{L_2[0, \pi/2]} \right) / (\pi/2)^{1/2} \leq \left( (2/\pi)^n \frac{1 - \exp(-2(\pi/2)^n)}{2} \right)^{1/2}.$$

Графики верхних и нижних оценок относительной погрешности  $\delta$  в зависимости от  $n \in \mathbb{N}$  для пространства  $L_1[0, \pi/2]$  (кривые 1) и пространства  $L_2[0, \pi/2]$  (кривые 2) изображены на рис. 4.

### 3. Примеры аппроксимации

В последовательности аппроксимирующих функций (2) в качестве постоянного множителя использовалось число  $\pi/2$ , хотя понятно, что возможно взять и другой множитель. Более того, множитель может быть и переменным. Вместо синуса в предложенном методе аппроксимации может быть использован косинус и другие тригонометрические функции, а также их комбинации. Например, используя процедуру  $f(x) = \cos(S(S...(S(x))))$ , где  $S(x) = (\pi/2) \sin x$ , мы можем получить последовательность аппроксимирующих функций, описывающих кратковременные импульсы (рис. 5).

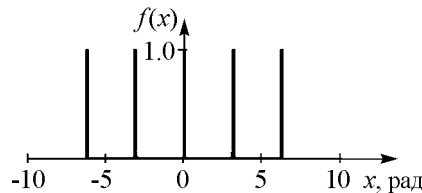


Рис. 5. График аппроксимирующей функции, описывающей импульсные процессы

Заметим, что, несмотря на существенно нелинейный вид графика, аппроксимирующие функции являются аналитическими и, следовательно, допускают применение аналитических методов исследования. Эти функции могут быть использованы для математических моделей, описывающих передачу сигналов, механические системы с ударными взаимодействиями и т.д.

Предложенные методы аппроксимации позволяют также аппроксимировать ступенчатые функции с разной длиной промежутков, соответствующих положительным и отрицательным значениям исходной ступенчатой зависимости. Например, если в качестве начальной функции мы возьмем  $f_1(x) = -0.7 + \sin x$ , то, используя аппроксимирующую процедуру (2), мы получим последовательность функций, графики которых изображены на рис. 6. Заметим при этом, что можно построить аппроксимации для ступенчатых функций с любым соотношением промежутков, соответствующих положительным и отрицательным значениям исходной ступенчатой функции.

На рис. 7 приводятся примеры аппроксимации непериодических ступенчатых функции с помощью предложенной процедуры.

Заметим, что доказанная ранее теорема носит общий характер, справедлива для произвольной ступенчатой функции. Так, например, произвольную периодическую ступенчатую функцию можно представить в виде линейной комбинации  $f(x) = \sum_{i=1}^k h_i f_{0i}(x)$ ,  $h_i \in \mathbb{R}$  сдвинутых по фазе и по оси ординат сигнум-функций  $f_{0i}(x) = \text{sign}(\sin(l_i x - x_i))$ ,  $l_i, x_i \in \mathbb{R}$ . Согласно доказанной теореме, в пространствах  $L_1[-\pi, \pi]$  и  $L_2[-\pi, \pi]$  существует сходимость  $\|f_{0i}(x) - f_{ni}(x)\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \forall i$ , поэтому функция  $f_n(x) = \sum_{i=1}^k h_i f_{ni}(x)$  сходится по норме к функции  $f(x)$ , так как

$$\|f(x) - f_n(x)\| = \left\| \sum_{i=1}^k h_i f_{0i}(x) - \sum_{i=1}^k h_i f_{ni}(x) \right\| \leq \sum_{i=1}^k |h_i| \cdot \|f_{0i}(x) - f_{ni}(x)\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

В данной работе предлагаются также и некоторые другие методы аппроксимации кусочно-линейных функций. Например, функцию  $f(x) = ((P-1)/A(x)) \cos((\pi/2)x)$ , где  $A(x) = (P^2 - (P-1)^2 \sin^2((\pi/2)x))^{1/2}$ , при достаточно больших значениях параметра  $P$  можно использовать для аппроксимации ступенчатых функций. Функции  $f_1(x) = (2/\pi) \arcsin((1 - (1/P)) \sin((\pi/2)x))$  и  $f_2(x) = (2/\pi) \arcsin((1 - (1/P)) \times \sin((\pi/2)x f(x)))$  можно использовать для аппроксимации пилообразных кусочно-

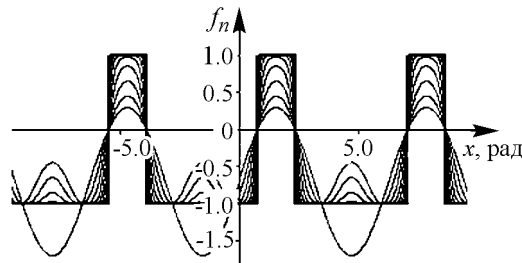


Рис. 6. Аппроксимация периодической ступенчатой функции с различной длиной промежутков знакопостоянства функции

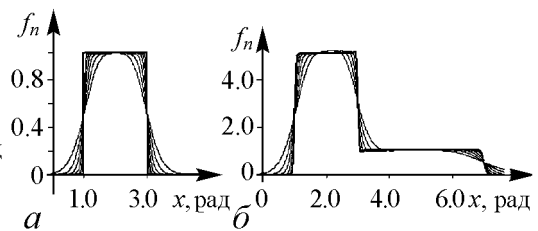


Рис. 7. Примеры аппроксимации ступенчатых непериодических функций



линейных функций. Для аппроксимации функции  $f(x) = |x|$  можно использовать такие аналитические функции, как

$$f(x) = (B^2(x) + 2P) / 2PB(x) \text{ и } f(x) = x + 2/B(x), \text{ где } B(x) = Px + ((Px)^2 + 2P)^{1/2}.$$

#### 4. Численная проверка

Численную проверку предложенной аппроксимирующей процедуры проведем на примере исследования динамики инерционно-импульсной бесступенчатой передачи. Известно [4], что из конструкции инерционно-импульсной бесступенчатой передачи на основе планетарной передачи с неуравновешенными сателлитами можно исключить слабые звенья (механизмы свободного хода) при условии, что момент сопротивления, действующий на ведомый вал, является знакопеременным. Динамику такой передачи можно описать существенно нелинейным дифференциальным уравнением второго порядка

$$A_1 \ddot{\beta} + A_2 (\omega - \dot{\beta})^2 - A_3 \omega^2 = -M_C,$$

где  $A_1 = B_1 + b_1 \cos \psi$ ;  $A_2 = a_2 \sin \psi$ ;  $A_3 = a_3 \sin \psi$ ,  $\psi = q(\omega t - \beta)$ ;  $B_1, b_1, a_2, a_3, q$  – постоянные коэффициенты, включающие параметры передачи;  $M_C = M_1 \text{sign}(\dot{\beta}) + M_0$  – момент сопротивления, действующий на ведомый вал ( $M_0, M_1 \equiv \text{const}$ );  $\omega \equiv \text{const}$  – угловая скорость ведущего вала;  $\beta$  – угол поворота ведомого вала, « $\cdot$ »  $\equiv d/dt$  – оператор дифференцирования по времени  $t$ . Сигнум-функция  $\text{sign}(\dot{\beta})$  является существенно нелинейной, что затрудняет проведение аналитических исследований динамики инерционно-импульсной передачи. Кроме того, эта функция не является периодической. С помощью предложенных методов (2) аппроксимируем сигнум-функцию, например, аналитической функцией вида  $\text{sign}(\dot{\beta}) \approx f_6(\dot{\beta}/10)$ .

С целью сравнения проведем численное решение дифференциального уравнения движения с сигнум- и аппроксимирующей функциями для конкретных параметров передачи по методу Рунге–Кутты. Фазовые траектории на фазовой плоскости  $(\beta, \dot{\beta})$  с выходом на периодическое решение изображены на рис. 8. Здесь сплошной линией изображено решение, полученное при использовании в математической модели передачи разрывной сигнум-функции, пунктирной линией – при использовании аналитической аппроксимации. Утолщенная линия на рис. 8 соответствует периодическому решению. Погрешность результатов, судя по рисунку, является невысокой, что говорит о хорошей сходимости предложенных аппроксимирующих процедур. Более того, погрешность аппроксимации можно уменьшить до сколь угодно малой величины, увеличивая число вложенных функций.

Описанные методы аппроксимации лишены недостатков разложения функций

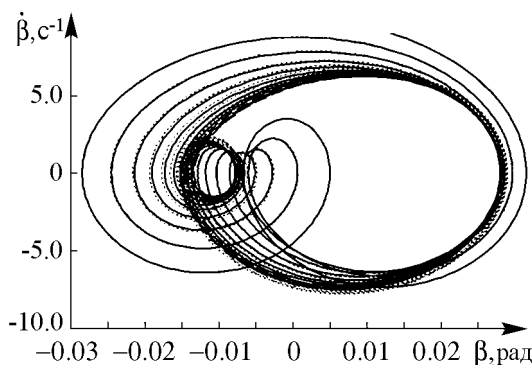


Рис. 8. Фазовые траектории при использовании сигнум-функции и её аппроксимации

в ряды Фурье и могут найти широкое применение в решении прикладных задач. Аппроксимация ступенчатых функций производится с помощью тригонометрических функций, которые стандартным образом реализуются в компьютерных программах.

Заметим также, что предложенные аппроксимирующие функции являются непрерывными и аналитическими и даже в большей степени, чем ступенчатые функции, отвечают реальным процессам, так как в действительности даже скачкообразные процессы происходят хоть и за короткие, но не нулевые промежутки времени.

### Библиографический список

1. *Helmberg G.* The Gibbs phenomenon for Fourier interpolation // *J. Approx. Theory.* 1994. Vol. 78. P. 41.
2. *Жук В.В., Натансон Г.И.* Тригонометрические ряды Фурье и элементы теории аппроксимации. Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1983. 188 с.
3. *Алюков С.В.* Аппроксимация ступенчатых функций в задачах математического моделирования // *Математическое моделирование.* 2011. Т. 23, № 3. С. 75.
4. *Алюков С.В.* Динамика инерционного трансформатора вращающего момента без механизмов свободного хода. Владимир: ВПИ, 1983, автореферат диссертации... канд. техн. наук.

*Южно-Уральский государственный  
университет, Челябинск*

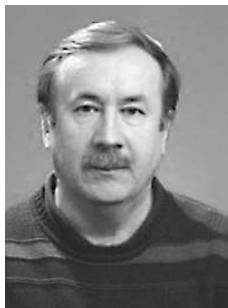
*Поступила в редакцию 26.04.2011  
После доработки 11.07.2011*

## MODELLING OF DYNAMIC PROCESSES WITH PIECEWISE LINEAR CHARACTERISTICS

*S.V. Alyukov*

Some problems of modelling of dynamic systems with piecewise linear characteristics are considered. New methods of approximation of the piecewise linear functions, in particular, step functions without disadvantages of the traditional Fourier series expansions are suggested. Some questions of convergence and error estimation of the approximation are explored.

*Keywords:* Modelling, approximation, piecewise linear functions, convergence, error of approximation.



*Алюков Сергей Викторович* – родился в городе Карталы Челябинской области (1957). Окончил Челябинский политехнический институт (1978), Уральский государственный университет (1986), Bowling Green State University (USA, 2007). После окончания ЧПИ работает в Южно-Уральском государственном университете доцентом. Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата технических наук во Владимирском политехническом институте (1983) в области машиноведения, систем приводов, нелинейной динамики, математического моделирования, теории нелинейных колебаний. Опубликовал свыше 60 научных статей по направлениям, указанным выше. Автор восьми изобретений.

454080 Челябинск, пр. Ленина, 76  
Южно-Уральский государственный университет  
E-mail: alysergey@gmail.com



## ДИНАМИКА СИСТЕМЫ ФИТЦХЬЮ–НАГУМО ПОД ВНЕШНИМ ПЕРИОДИЧЕСКИМ ВОЗДЕЙСТВИЕМ

*А.В. Феоктистов, В.С. Анищенко*

В работе на основе эксперимента на радиофизической модели проведен анализ динамики системы ФитцХью–Нагумо под действием внешнего гармонического сигнала. Выявлена зависимость режима колебаний системы от параметров воздействия. Рассмотрено влияние формы сигнала внешнего воздействия на отклик системы.

*Ключевые слова:* Система ФитцХью–Нагумо, периодическое воздействие, области резонансов, последовательность импульсов, спайк.

### Введение

Возбудимые системы представляют большой интерес в современной науке. Исследованию их поведения, в частности, при различном внешнем воздействии на такие системы посвящено большое количество работ [1–5, 10]. Система ФитцХью–Нагумо (ФХН) широко исследуется уже в течение порядка 50 лет и за это время стала базовым примером возбудимой системы. Установлено, что под действием шума в ней наблюдаются интересные явления, такие как когерентный резонанс [7–9]. Воздействие на систему последовательностью импульсов представляет интерес в связи с исследованиями клеток сердца [10, 11]. В работе [10] проведен подробный анализ возбудимых систем, в частности, и системы ФитцХью–Нагумо под внешним периодическим воздействием как последовательностью импульсов, так и синусоидальным сигналом. В отличие от нашей работы воздействие осуществлялось на медленную переменную. Также построены области резонансов. Поскольку подавляющее большинство работ посвящено случаю, когда внешнее воздействие осуществляется импульсами, как одиночными, так и последовательностью импульсов, интересным становится вопрос, как меняется динамика системы в зависимости от формы сигнала воздействия. Настоящая работа посвящена исследованию динамики осциллятора ФитцХью–Нагумо под внешним периодическим, а именно синусоидальным воздействием, выявлению особенностей поведения системы в зависимости от параметров внешнего воздействия – амплитуды и частоты, а также влияния порога генерации.

## 1. Исследуемая система и ее математическая модель

Экспериментальная модель представляет собой классическую схему, предложенную ФитцХью и Нагумо, но частично модифицированную. В оригинальной схеме в качестве нелинейного элемента используется туннельный диод, мы же взамен туннельного диода используем схему на операционном усилителе, которая также имеет  $N$ -образную вольт-амперную характеристику. Дополнительно на экспериментальную установку подается гармонический сигнал с внешнего генератора. Принципиальная электрическая схема установки и ВАХ нелинейного элемента представлены на рис. 1.

На основе законов Кирхгофа нетрудно получить уравнения, описывающие динамику системы,

$$\begin{aligned} \frac{dI}{dt} &= \frac{1}{L}(V_c - RI - U + A \sin(\omega_{\text{ex}}t)), \\ \frac{dU}{dt} &= \frac{1}{C}(I - I(U)), \quad I(U) = \alpha U^3 - \gamma U, \end{aligned} \quad (1)$$

где  $V_c$  – напряжение смещения;  $I$  – ток, протекающий через индуктивность  $L$ ;  $U$  – напряжение на конденсаторе  $C$  (номинальные значения элементов схемы, напряжение питания и параметры нелинейной характеристики соответствуют рис. 1);  $\alpha = 2.22 \cdot 10^{-5}$ ,  $\gamma = 1.6 \cdot 10^{-3}$ ;  $A$  – амплитуда внешнего воздействия;  $\omega_{\text{ex}} = 2\pi f_{\text{ex}}$  – частота внешнего воздействия.

## 2. Анализ динамики системы

В схемотехнике для определения и задания требуемых режимов работы схемы часто используют вольт-амперную характеристику и нагрузочную прямую [12]. При анализе систем дифференциальных уравнений удобно пользоваться нульклинами, поскольку такой способ является простым и наглядным [13]. Его суть заключается в построении в пространстве переменных системы кривых, на которых производные соответствующих переменных обращаются в нуль. Эти кривые разбивают пространство переменных на области, в которых производные имеют разные знаки, тем са-

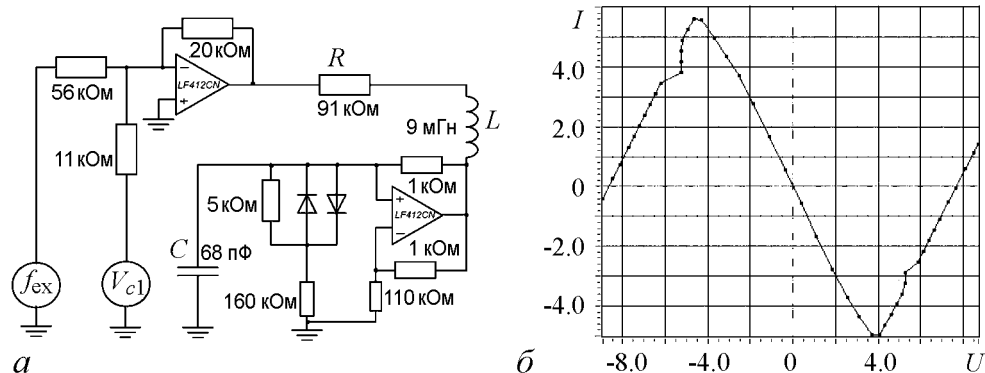


Рис. 1. Экспериментальная установка и  $N$ -характеристика нелинейного элемента

мым позволяя сделать предположения о траектории изображающей точки. Поскольку в нашей системе всего две переменных, то фазовое пространство представляет собой плоскость. На плоскости параметров напряжение  $U$  – ток  $I$  построим нульклины для системы (1).  $U$ -нульклина представляет собой инвертированную  $N$ -образную кривую, на которой  $dU/dt$  меняет свой знак и определяется из условия  $dU/dt = 0$ . Она симметрична относительно нуля и пересекает ось абсцисс в точках  $-8.49$ ;  $0$ ;  $8.49$  В.  $I$ -нульклина представляет собой прямую, на которой  $dI/dt$  меняет свой знак и определяется из условия  $dI/dt = 0$ . Это прямая с угловым коэффициентом  $-1/r$ , где  $r$  – активное сопротивление всей цепочки, примерно равное значению резистора  $R$  на схеме (рис. 1, а). Замечательно, что с физической точки зрения  $U$ -нульклина соответствует  $N$ -образной характеристике нелинейного элемента, а  $I$ -нульклина соответствует нагрузочной прямой. Нульклины точно совпадут с  $N$ -характеристикой и нагрузочной прямой, если инвертировать ось ординат. Поскольку переменные  $U$  и  $I$  являются для системы (1) также и фазовыми переменными, то плоскость  $U, I$ , на которой изображены нульклины, является фазовой плоскостью. Точка пересечения нульклин является точкой равновесия, поскольку в ней выполняется условие  $dU/dt = dI/dt = 0$ . В зависимости от значений управляющих параметров в системе (1) возможны несколько состояний равновесия [14]. Нас же интересует только случай, когда в системе существует единственное состояние равновесия.

Сначала рассмотрим осциллятор ФХН при нулевой амплитуде внешнего воздействия. Зададим начальное состояние таким образом, чтобы точка пересечения нульклин находилась немного левее минимума  $U$ -нульклина, как показано на рис. 2. Эта точка, соответствующая состоянию равновесия в системе (1), обозначена звездочкой. Расположение точки пересечения нульклин определяется, главным образом, сопротивлением  $R$  и напряжением смещения  $V_c$ . В зависимости от ее расположения, состояние равновесия может быть как устойчивым так и неустойчивым. Условие устойчивости выполняется во всей плоскости  $U, I$  (см. рис. 2) кроме области, выделенной светло-серым цветом. Левая граница  $U_a$  области неустойчивости проходит точно через минимум  $U$ -нульклина, а абсцисса правой границы  $U_b$  определяется как напряжение максимума  $U$ -нульклина минус значение тока в этом максимуме, деленное на  $r$ . Как только точка пересечения попадает в неустойчивую область, в системе появляется генерация. Фазовый портрет представляет собой предельный цикл, а траектория в зависимости от параметров схемы  $L$  и  $C$  может либо приближаться к  $U$ -нульклин в области левой и правой ветвей  $N$ -характеристики и совершать скачки между ветвями, либо достаточно далеко отходить от нульклин. В первом случае колебания носят релаксационный характер, а предельный цикл имеет характерную форму. Во втором случае колебания близки к синусоидальным. В понятиях быстро-медленной системы движения вдоль ветвей  $N$ -характеристики называются медленными, а скачки между ветвями – быстрыми движениями.

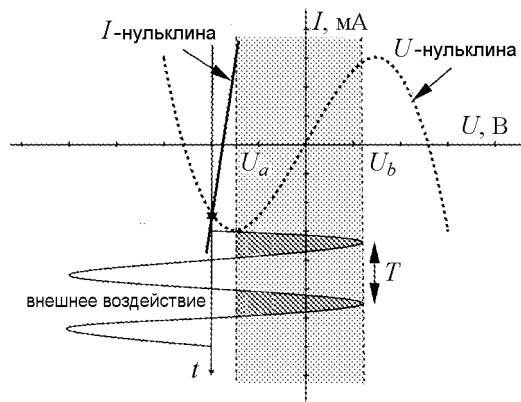


Рис. 2. Система ФХН под внешним воздействием

Рассмотрим, что будет происходить с системой ФХН при ненулевой амплитуде внешнего воздействия. Снова выберем начальные условия, как показано на рис. 2 звездочкой, а именно, когда система находится в состоянии покоя и в фазовом пространстве наблюдается только неподвижная точка. С практической точки зрения внешнее периодическое напряжение представляет собой добавку (со знаком плюс или минус) к напряжению  $V_c$ , которая меняется со временем. Таким образом, внешний сигнал двигает точку пересечения нульклин либо в неустойчивую область, тем самым приводя систему к генерации, либо еще глубже в устойчивую область, отодвигая от порога генерации. На рис. 2 показан случай, когда амплитуда сигнала внешнего воздействия точно равна сумме величин ширины области и порога генерации. Назовем полупериод, на котором происходит генерация, активным, а полупериод, где генерации нет – нейтральным полупериодом. На рис. 2 активный полупериод выделен темно-серым фоном. Точка пересечения преодолевает расстояние до порога генерации ( $U_a$ ) от своего начального местоположения, проходит полностью область генерации, касаясь в одной точке другой границы ( $U_b$ ), затем снова полностью проходит область генерации, но уже в обратном направлении и, наконец, возвращается в свое начальное положение и все это за (активную) половину периода ( $T$ ) внешнего воздействия. Вторую (нейтральную) половину этого же периода точка пересечения путешествует по устойчивой области. Если задать начальные условия таковыми, что состояние равновесия окажется около «дальней» границы ( $U_b$ ), то полупериоды поменяются местами.

Рассмотрим, как меняется фазовый портрет и временные реализации системы при варьировании частоты внешнего воздействия. Будем сравнивать период собственных колебаний  $T_s$  с периодом внешнего воздействия  $T$ . Разделим весь диапазон изменения частоты внешнего сигнала на две основные области. Первая область определяется из условия  $T_s \leq (1/2)T$ , то есть период собственных колебаний системы меньше либо равен половине периода внешнего воздействия. Частота сигнала внешнего воздействия  $\omega_{ex}$  не превосходит половины частоты собственных колебаний  $\omega_s$ . Вторая область определяется из условия  $T_s > (1/2)T$  или  $\omega_{ex} > (1/2)\omega_s$ , то есть частота сигнала внешнего воздействия  $\omega_{ex}$  больше половины частоты собственных колебаний  $\omega_s$ .

Рассмотрим первый случай, когда период собственных колебаний системы меньше полупериода внешнего воздействия ( $T_s < (1/2)T$ ). На единичное воздействие, превышающее пороговое значение, система дает отклик в виде спайка, который представляет собой один период сигнала, такого же, как в режиме генерации, а фазовая точка совершает один проход по замкнутой траектории. За время длительности активного полупериода внешнего воздействия система создает такое количество спайков, сколько периодов собственных колебаний уложится в длительности активного полупериода. Рис. 3 иллюстрирует этот случай. Частота внешнего воздействия специально выбрана такой, чтобы на длительности активного полупериода укладывалось небольшое количество собственных периодов и было легче наблюдать за происходящим. Квадратик отмечает место точки равновесия (пересечения нульклин) при нулевой амплитуде внешнего воздействия. На этом рисунке хорошо видно, что в течение активного полупериода система совершает колебания, а на протяжении нейтрального полупериода генерации нет, о чем свидетельствует практически вертикально опускающаяся траектория, прорисованная устойчивой фазовой

точкой (рис. 3, *a*). При уменьшении частоты внешнего воздействия за время активного полупериода система успевает совершить большее число осцилляций. Временная реализация (рис. 3, *б*) представляет последовательность групп спайков, в каждой группе содержится одинаковое количество спайков. При увеличении амплитуды воздействия и фиксированной частоте количество спайков в последовательности также увеличивается, объяснение этому явлению будет дано ниже, в разделе 3. Если зафиксировать амплитуду воздействия  $A$  и плавно менять частоту  $\omega_{\text{ex}}$ , приближая её к  $(1/2)\omega_s$ , то будет уменьшаться число спайков в каждой группе (рис. 3, *в*)

При равенстве частоты внешнего воздействия половине собственной частоты ( $T_s = (1/2)T$ ) в каждом активном полупериоде укладывается ровно один период собственных колебаний, а каждая из групп во временной реализации содержит ровно по одному спайку. В фазовом пространстве наблюдается однообходный цикл (рис. 4).

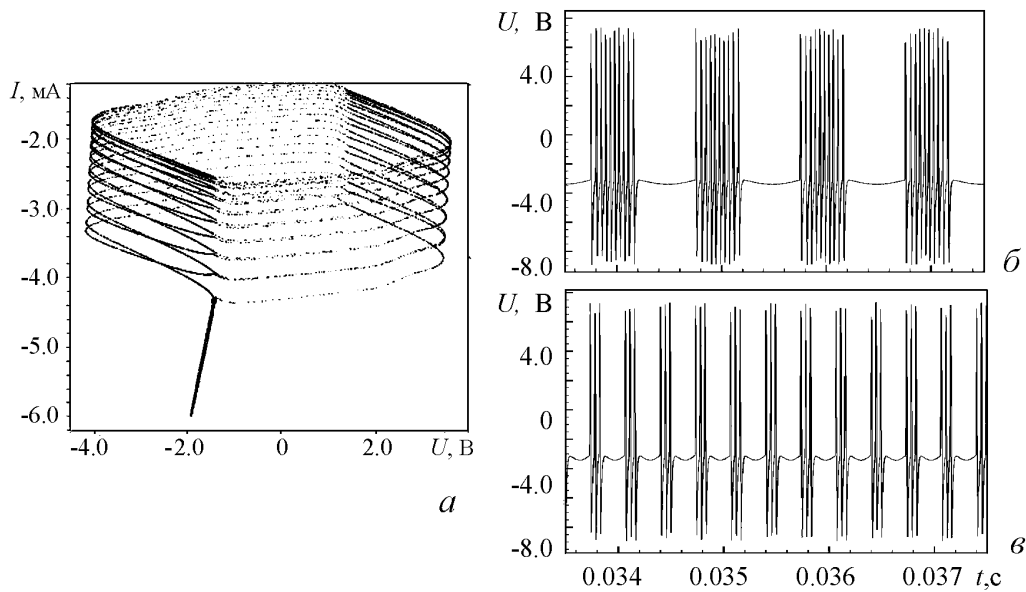


Рис. 3. Система ФХН под внешним воздействием для  $T_s < (1/2)T$

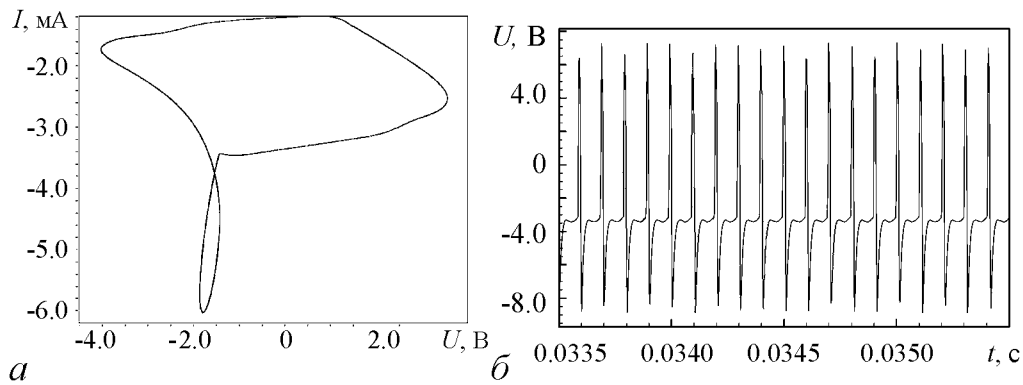


Рис. 4. Фазовый портрет (*a*) и временная реализация (*б*) системы ФХН под внешним воздействием для  $T_s = (1/2)T$

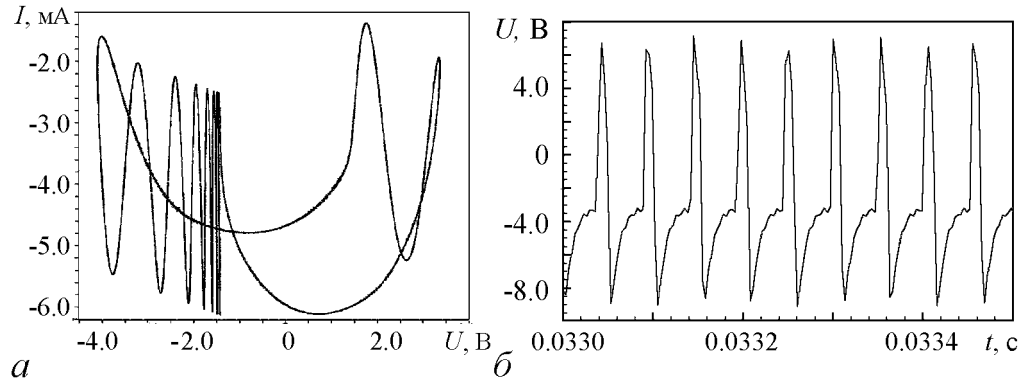


Рис. 5. Фазовый портрет системы ФХН под внешним воздействием для  $T_s > (1/2)T$

В случае, когда частота внешнего воздействия превосходит половину частоты собственных колебаний ( $T_s > (1/2)T$ ), фазовый портрет становится несколько другим, что отражено на рис. 5. В начальный момент времени, когда амплитуда внешнего воздействия равна нулю, система ФХН находится в состоянии покоя. Как только амплитуда внешнего воздействия преодолет расстояние от точки равновесия до границы генерации, система выйдет из состояния равновесия и фазовая точка будет описывать в фазовом пространстве цикл. Как только точка равновесия пересечет порог генерации, она сразу попадает в область быстрых движений. Когда активный полупериод уже закончился (а может быть, проходит и несколько периодов  $T$ ), точка все равно успеет перескочить в область медленных движений. Теперь только в этой области внешнее воздействие может оказывать на фазовую точку влияние, что проявляется в повторении участком предельного цикла формы сигнала внешнего воздействия. Затем снова в области быстрых движений мы не видим ощутимого влияния внешнего воздействия, а следующая за ней медленная часть предельного цикла снова своей формой повторяет форму внешнего воздействия. При увеличении  $\omega_{ex}$  количество изгибов траектории в области медленных движений увеличивается, что соответствует увеличению числа периодов внешнего воздействия, прошедших за время медленных движений.

### 3. Влияние порога генерации

Как уже было отмечено ранее, если зафиксировать частоту внешнего воздействия и менять амплитуду воздействия, например, увеличивать, то количество спайков в каждой последовательности спайков будет меняться. Разобраться в этой ситуации нам поможет рис. 6, а. Литеры  $U_a$  и  $U_b$ , как и на рис. 2, обозначают границы области генерации; e.p.l. (equilibrium point level) – обозначают расположение состояния равновесия при отсутствии внешнего воздействия. По оси ординат отложена амплитуда внешнего воздействия. Вдоль оси абсцисс слева направо располагаются активные полупериоды внешнего воздействия с увеличивающейся амплитудой. Темно-серым отмечена действительно активная часть активного полупериода, то есть в которой система ФХН находится в режиме генерации. Видно, что величина порога генерации (расстояние между e.p.l. и  $U_a$ ) уменьшает размер активного полупериода по амплитуде, являясь как бы нижней границей активного полупериода



по амплитуде. Верхнюю границу задает размер области генерации, но только в том случае, если амплитуда сигнала внешнего воздействия велика по сравнению с величиной области генерации. В случае, если амплитуда внешнего воздействия не превышает размеров области генерации, то понятие верхней границы теряет свой смысл. Два крайних правых полупериода на рис. 6, а представляют случай, когда амплитуда внешнего воздействия велика. В такой ситуации, как только внешнее воздействие переходит за верхнюю границу, активный полупериод разбивается на два полупериода, величина которых уменьшается с увеличением амплитуды внешнего воздействия.

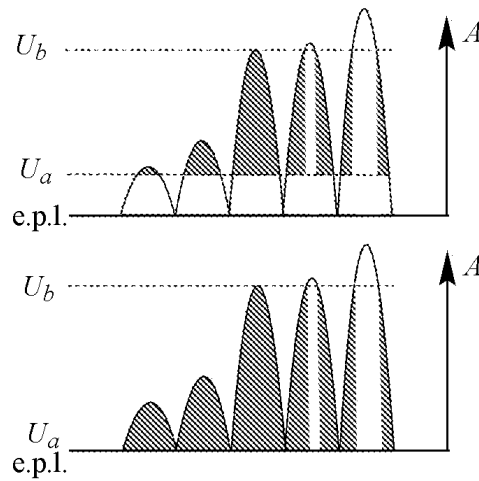


Рис. 6. Система ФХН под внешним воздействием при наличии (а) и отсутствии (б) порога генерации

Таким образом, если мы при нулевой амплитуде внешнего воздействия зададим начальное положение так, что система ФХН находится в состоянии покоя (отсутствует генерация) поблизости с границей генерации  $U_a$ , зафиксируем частоту внешнего воздействия и будем увеличивать его амплитуду, то будем наблюдать следующее поведение. До того момента, пока амплитуда внешнего воздействия не достигнет границы  $U_a$ , в системе генерации не будет. Как только амплитуда достигнет порогового значения, система начнет выдавать одиночные спайки. По мере увеличения амплитуды количество спайков во временной реализации увеличивается, становится заметно, что временная реализация представляет последовательность групп спайков. С увеличением амплитуды увеличивается общее число спайков за счет увеличения спайков в каждой такой группе. Число же самих групп остается постоянным, поскольку оно определяется частотой внешнего воздействия, которая зафиксирована. Можно заметить, что при увеличении амплитуды внешнего воздействия скорость появления спайков в каждой группе падает и, начиная с некоторого значения амплитуды, появления новых спайков не происходит, что связано с формой сигнала внешнего воздействия. В случае, если амплитуда внешнего воздействия превышает размер области генерации, то, как только достигается верхняя граница области генерации, сразу удваивается количество групп. Частота внешнего воздействия при этом остается постоянной.

Рассмотрим теперь случай, когда порог генерации отсутствует, то есть начальное состояние (e.p.l.) и граница генерации  $U_a$  совпадают (рис. 6, б). Видно, что в этом случае даже бесконечно малая амплитуда внешнего воздействия заставляет систему перейти в режим генерации. Причем количество спайков в каждой группе всегда является максимально возможным для данной частоты внешнего воздействия и никак не изменяется с увеличением амплитуды внешнего воздействия, если только эта амплитуда не превышает размер области генерации. В противном случае, при превышении амплитудой внешнего воздействия размеров области генерации, количество групп удваивается. Каждая такая новая группа в момент удвоения вмещает максимальное для себя количество спайков. По мере дальнейшего увеличения амплитуды внешнего воздействия количество спайков в каждой новой группе уменьшается. В математической модели от воздействия сигналом с бесконечно малой амплитудой

генерация не появится, поскольку фазовой точке необходимо преодолеть пороговое значение, обусловленное сепаратрисой седловой точки, находящейся недалеко от устойчивого состояния равновесия. «Грубость» же радиофизической модели делает для нас это пороговое явление невидимым.

#### 4. Области различных периодических режимов на плоскости параметров

Проводя аналогию с квазипериодическими колебаниями, а именно с двумерным тором, можно заметить, что случай, когда частота внешнего воздействия низка и не превосходит половину частоты собственных колебаний, а в активном полупериоде укладывается целое число периодов собственных колебаний, соответствует резонансу кратности  $1 : n$ , где  $n$  равно количеству собственных периодов, уложившихся в активном полупериоде. Случай равенства частоты воздействия половине частоты собственных колебаний в системе начинают наблюдаться резонансы кратности  $m : 1$ , где  $m$  – количество периодов внешнего воздействия, уложившихся на периоде собственных колебаний системы. Поскольку эксперименты проводились на радиофизической модели, а как уже было отмечено ранее, такие системы относят к грубым, поэтому, как бы близко мы ни подходили к границе генерации, порог генерации всегда будет присутствовать. Именно поэтому в радиофизической модели и частота и амплитуда определяют количество спайков в группе, а не только частота. На плоскости параметров частота–амплитуда внешнего воздействия были построены области резонансов  $1 : n$  и  $m : 1$ . Результаты представлены на рис. 7. Для графика рис. 7 амплитуда внешнего воздействия не превышала размеров области генерации. Наиболее широкая область резонанса

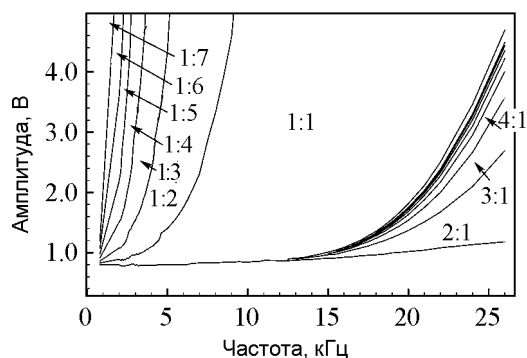


Рис. 7. Области резонансов  $1 : n$  и  $m : 1$  системы ФХН под внешним синусоидальном воздействием при наличие порога генерации

$1 : 1$ . Остальные области резонансов по мере увеличения  $m$  или  $n$  уменьшаются и каждая область резонанса со следующим номером вложена в предыдущую. Так же как все резонансные области вложены в область резонанса  $1 : 1$ . Интересно, что такой вид области резонансов придает наличие порога генерации. При его отсутствии эти области значительно упрощаются, а при значениях амплитуды внешнего воздействия, не превышающих размер области генерации, зависимость от амплитуды вообще исчезает.

#### Заключение

Полученные в эксперименте результаты свидетельствуют о том, что внешнее периодическое воздействие для системы ФитцХью–Нагумо можно рассматривать в качестве способа управления этой системой. Выявлено неожиданно большое влияние на динамику системы наличие порога генерации. Именно наличие порога гене-

рации позволяет системе «различать» форму сигнала внешнего воздействия. Выявлено, что размер области генерации ограничивает максимальную амплитуду сигнала воздействия. При выходе за «дальнюю» границу этой области динамика системы претерпевает изменения. Если на систему ФитцХью–Нагумо при наличии порога подавать не просто сунусоидальный, а амплитудно-модулированный сигнал, несущая частота в котором является синусоидальным сигналом, то отклик будет содержать последовательность групп спайков, причем в каждой группе будет разное число спайков в зависимости от формы модулирующего сигнала. Размер каждой группы будет постоянным, поскольку несущая частота постоянна. Если на систему подавать частотно-модулированный сигнал, то размер каждой группы будет меняться, а вот количество спайков на единице длины такой группы будет постоянным, поскольку амплитуда остается постоянной. Подбирая частоту и амплитуду воздействия, можно получать точно заданное количество спайков. Или наоборот, декодируя последовательности групп спайков, можно восстанавливать исходный сигнал. Вероятно, тема декодирования окажется интересной в дальнейшем развитии, поскольку вопрос об информации, передающейся в живых системах, остается открытым.

*Работа выполнена при поддержке Министерства образования и науки РФ (контракт № 14.740.11.0074).*

#### **Библиографический список**

1. *Yanagita T., Nishiura Y., Kobayashi R.* Signal propagation and failure in one-dimensional FitzHugh–Nagumo equations with periodic stimuli // *Phys. Rev. E.* 2005. Vol. 71. 036226.
2. *Gong P.-L., Xu J.-X.* Global dynamics and stochastic resonance of the forced FitzHugh–Nagumo neuron model // *Phys. Rev. E.* 2001. Vol. 63. 031906.
3. *Coombes S., Osbaldestin A.H.* Period-adding bifurcation and chaos in periodically stimulated excitable neural relaxation oscillator // *Phys. Rev. E.* 2000. Vol. 62, № 3. P. 4057.
4. *Othmer H.G., Xie M.* Subharmonic resonance and chaos in forced excitable systems // *J. Math. Biol.* 2006. Vol. 39. P. 139.
5. *Lee S.-G., Seunghwan K.* Bifurcation analysis of mode-locking structure in a Hodgkin–Huxley neuron under sinusoidal current // *Phys. Rev. E.* 2006. Vol. 73. 041924.
6. *Alexander J.C., Doedel E.J., Othmer H.G.* . On the resonance structure in a forced excitable system // *SIAM J. Appl. Math.* 1990. Vol. 50, № 5. P. 1373.
7. *Pikovsky A.S., Kurths Ju.* Coherence resonance in a noise-driven excitable system // *Phys. Rev. Lett.* 1997. Vol. 78. P. 775.
8. *Linder B., Schimansky-Geier L.* Analytical approach to the stochastic FitzHugh–Nagumo system and coherence resonance // *Phys. Rev. E.* 1999. Vol. 60, № 6. P. 7270.
9. *Феоктистов А.В., Астахов С.В., Анищенко В.С.* Когерентный резонанс и синхронизация стохастических автоколебаний в системе ФитцХью–Нагумо // *Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика.* 2010. Т. 18, № 5.

10. *Croisier H.* Continuation and bifurcation analyses of a periodically forced slow–fast system. Liege, Mars. 2009.
11. *FitzHugh R.* Impulses and physiological states in theoretical models of nerve membrane // Bull. Math. Biophysics. 1955. Vol. 17. P. 257.
12. *Андронов А.А., Витт А.А., Хайкин С.Э.* Теория колебаний. М.: Наука, 1981.
13. *Эрроусмит Д., Плейс К.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. Качественная теория с приложениями: Пер. с англ. М.: Мир, 1986. 243 с.
14. *Izhikevich E.M.* Dynamical Systems in Neuroscience: The Geometry of Excitability and Bursting. The MIT Press, Cambridge, MA, 2007.

*Саратовский государственный  
университет им. Н.Г. Чернышевского*

*Поступила в редакцию 24.10.2011*

## DYNAMICS OF THE FITZHUGH–NAGUMO SYSTEM UNDER EXTERNAL PERIODIC FORCE

*A.V. Feoktistov, V.S. Anishchenko*

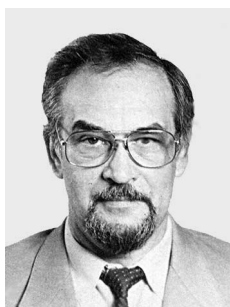
In paper on basis of radiophysical experiment analysis of dynamics of the FitzHugh–Nagumo system have been carried out. The dependence of oscillation’s regime in the system from force parameter has been found out. Influence of the form of the external force signal on the system response has been studied.

*Keywords:* FitzHugh–Nagumo system, periodic force, resonance region, sequence of impulses, spike.



*Феоктистов Алексей Владимирович* – родился в 1987 году в Сердобске, окончил Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского (2009). После окончания СГУ обучается в аспирантуре на кафедре радиофизики и нелинейной динамики. Научные интересы главным образом связаны с возбудимыми системами, стохастическими колебаниями, эффектами синхронизации и радиофизическими экспериментами. Автор 2 публикаций в реферируемых журналах и 5 докладов на научных конференциях.

410012 Саратов, ул. Астраханская, 83  
Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского  
E-mail: feoktistov\_a\_v@mail.ru



*Анищенко Вадим Семенович* – родился в 1943 году. Окончил физический факультет СГУ (1966). Защитил диссертацию на звание кандидата физико-математических наук (1970) и доктора физико-математических наук (1986). С 1988 года – заведующий кафедрой радиофизики и нелинейной динамики СГУ. С 1979 и по настоящее время работает в области исследования нелинейной динамики и стохастических процессов в нелинейных системах. Является автором более 300 научных работ, среди которых 7 монографий на русском и английском языках и 4 учебника. Неоднократно читал лекции в ведущих вузах Германии в качестве приглашенного профессора. Член-корреспондент РАЕН, заслуженный деятель науки РФ (1995), Соросовский профессор, лауреат премии Фонда Александра Гумбольдта (1999).

410012 Саратов, ул. Астраханская, 83  
Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского  
E-mail: wadim@chaos.ssu.runet.ru



## СТОХАСТИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ И УРАВНЕНИЕ ФОККЕРА–ПЛАНКА ДЛЯ ПАРАМЕТРОВ ПОРЯДКА В ИССЛЕДОВАНИИ ДИНАМИКИ ШУМОИНДУЦИРОВАННЫХ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ДИССИПАТИВНЫХ СТРУКТУР

*С.Е. Курушина, Л.И. Громова, В.В. Максимов*

Аналитически исследована с точки зрения концепции параметров порядка эволюция пространственных диссипативных структур, возникающих во флуктуирующей возбудимой среде. В качестве модели такой среды рассматривается система реакция–диффузия, находящаяся во внешних шумах. Разработан метод получения стохастических уравнений для амплитуд неустойчивых мод (параметров порядка) и дисперсионных уравнений для усредненных по статистическому ансамблю амплитуд неустойчивых мод. Получено уравнение Фоккера–Планка для параметров порядка, в явном виде найдено его решение для одной критической моды. Развитая теория позволяет проанализировать шумоиндуцированные эффекты, в том числе изменение границ фазового перехода «беспорядок–порядок–беспорядок», в зависимости от параметров внешнего шума.

*Ключевые слова:* Пространственные диссипативные структуры, внешние шумы, фазовые переходы, параметры порядка.

### Введение

Шумы присутствуют в реальных системах любого типа. Влияние внешних шумов на открытые нелинейные распределенные системы весьма разнообразно и иногда приводит к совершенно неожиданным результатам. Известно, что в таких системах могут возникать шумоиндуцированные пространственные структуры и фронты, шумоиндуцированные фазовые переходы, пространственно-временной стохастический резонанс, поддерживаемые шумом бегущие и конвективные структуры, импульсы, шумоиндуцированная синхронизация [1,2] и т. д.

Теоретическое исследование пространственно-временной динамики нелинейных открытых распределенных систем осуществляется различными методами [2]. Устойчивость однородного состояния относительно малых возмущений может быть проанализирована в линейном приближении. Однако линейное приближение неприемлемо для описания эволюции системы в окрестности порога самоорганизации, так как само это явление представляет собой существенно нелинейный эффект. Существует подход к исследованию шумоиндуцированных явлений, основанный на широко известном приближении среднего поля. В этом приближении предполагается,

что взаимодействие между некоторой пространственной точкой и ее ближайшими соседями происходит посредством среднего поля, значение которого соответствует статистически среднему в данной точке. При этом подходящим способом осуществляется дискретизация пространства исходной распределенной системы и для значений поля в точках полученной регулярной решетки записывается уравнение Фоккера–Планка (УФП) для многомерной плотности распределения вероятности. Интегрирование уравнения по значениям поля во всех точках, кроме данной, приводит к УФП для одномерной плотности распределения вероятности значения поля в данной точке. В последнем уравнении условные средние значения поля в соседних точках заменяются средним полем в данной точке. Этот подход успешно применен для исследования различных моделей [3–7] и позволяет объяснить возникновение в них шумоиндуцированной последовательности упорядочивающего и разупорядочивающего фазовых переходов. Преимущество этого подхода заключается в том, что он позволяет описывать поведение системы вдали от точки перехода [7]. Однако при этом с необходимостью возникает вопрос о корректной дискретизации непрерывного пространства изучаемой системы и пространственной компоненты функции корреляции шума. К недостаткам данного подхода следует отнести и тот факт, что стационарное решение полученного УФП может быть записано только формально, поэтому для его нахождения требуется привлечение численных методов. Отметим также, что приближение среднего поля не применимо в окрестности точки перехода.

Еще один аналитический подход к исследованию фазовых переходов с образованием пространственных структур основан на получении обобщенных уравнений Гинзбурга–Ландау для параметров порядка рассматриваемых систем. Этот подход позволяет описывать поведение системы в окрестности точки перехода. Метод получения обобщенных уравнений Гинзбурга–Ландау для рассматриваемых систем, в правой части которых содержатся аддитивные шумы, описан в [8,9]. Он основан на разделении собственных мод системы на затухающие и незатухающие (параметры порядка) и дальнейшем исключении затухающих. Однако в результате такого подхода снова получают стохастические уравнения, что мало упрощает анализ поведения систем. Кроме того, в [8,9] не рассматривалась ситуация, когда в системах присутствуют мультипликативные шумы.

Целью этой работы является развитие теории, позволяющей с единой точки зрения концепции параметров порядка провести последовательное и детальное изучение процессов образования пространственных диссипативных структур (паттернов), спонтанно возникающих в открытых нелинейных распределенных системах с внешними шумами как в окрестности, так и вдали от точки перехода. Развитые аналитические методы применены для исследования шумоиндуцированных явлений, возникающих в конкретной модели.

## 1. Стохастические уравнения для параметров порядка

Система реакционно-диффузионного типа

$$\frac{\partial x_k}{\partial t} = P_k(x_1, x_2, x_3, \dots, \mathbf{r}, \vec{\eta}, t) + D_k \nabla^2 x_k, \quad k = 1, 2, 3 \dots \quad (1)$$

является одной из основных моделей неравновесной возбудимой среды. Здесь  $x_k$  – ее функции состояния (динамические переменные);  $P_k(x_1, x_2, x_3, \dots, \mathbf{r}, \vec{\eta}, t)$  – функциональные зависимости, определяющие взаимодействие и эволюцию компонент  $x_k$  в

пространстве и во времени;  $D_k$  – коэффициенты диффузии компонент;  $\vec{\eta} = (\chi_1, \dots, \chi_n, \eta_1, \dots, \eta_s)$  – вектор, компоненты которого являются управляющими параметрами, описывающими воздействие на систему внешнего окружения. Далее без потери общности будет рассматриваться двухкомпонентная система вида (1). Предлагаемый ниже метод исследования легко распространяется на многокомпонентный случай.

В присутствии внешних флуктуирующих полей пространственно-временная динамика неравновесной системы (1) для  $k = 2$  может быть описана следующей системой уравнений:

$$\begin{aligned}\frac{\partial x_1}{\partial t} &= P_1(x_1, x_2, \chi_{10}, \dots, \chi_{m0}, \dots, \chi_n) + \sum_{j=1}^m f_{1j}(\mathbf{r}, t) P_{1j}(x_1, x_2, \chi_{m+1}, \dots, \chi_{n'}) + D_1 \nabla^2 x_1, \\ \frac{\partial x_2}{\partial t} &= P_2(x_1, x_2, \eta_{10}, \dots, \eta_{l0}, \dots, \eta_s) + \sum_{j=1}^l f_{2j}(\mathbf{r}, t) P_{2j}(x_1, x_2, \eta_{l+1}, \dots, \eta_{s'}) + D_2 \nabla^2 x_2,\end{aligned}\quad (2)$$

где  $m$  и  $l$  – число флуктуирующих параметров в первом и втором уравнениях соответственно;  $\chi_{j0}, \eta_{j0}$  – пространственно-временные средние параметров;  $f_{ij}(\mathbf{r}, t)$  ( $i = 1, 2$ ) – случайные поля, описывающие шумы соответствующих параметров относительно их средних значений, причем  $\langle f_{ij}(\mathbf{r}, t) \rangle = 0$ .

Определим статистические характеристики случайных полей  $f_{ij}(\mathbf{r}, t)$  в соответствии со свойствами окружающей среды. Флуктуации окружения представляют собой суммарный эффект действия многих слабосвязанных факторов. Тогда из центральной предельной теоремы следует, что флуктуации внешнего источника имеют гауссово распределение. Свойства эргодичности, марковости и гауссовости флуктуирующего окружения ограничивает выбор случайных полей для моделирования флуктуаций окружающей среды в (2) стационарным однородным изотропным гауссовым полем с экспоненциальной во времени функцией корреляции [10]:

$$K [f_{ij}(\mathbf{r}, t), f_{i'j'}(\mathbf{r}', t')] = \Phi_i(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) \exp(-k_{ti} |t - t'|) \delta_{ii'} \delta_{jj'}, \quad (3)$$

где  $\Phi_i(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)$  задают пространственные зависимости функций корреляции случайных полей. Взаимная корреляция полей  $f_{ij}(\mathbf{r}, t)$  и  $f_{i'j'}(\mathbf{r}, t)$  отсутствует. Время корреляции  $r_t = k_t^{-1}$  – характерный временной масштаб внешних флуктуаций. Здесь и далее для корреляционной функции используется обозначение  $K[F_1, F_2]$ , определяемое равенством:  $K[F_1, F_2] = \langle F_1 F_2 \rangle - \langle F_1 \rangle \langle F_2 \rangle$ .

Положим далее для простоты  $m = l = 1$  и введем безразмерные переменные:  $\tau = \chi_{10} t$  и  $\mathbf{r}' = \mathbf{r} \sqrt{\chi_{10}/D_1}$ , где  $\chi_{10}$  – параметр, имеющий размерность обратного времени. Тогда система (2) примет вид

$$\begin{aligned}\frac{\partial x_1}{\partial \tau} &= P'_1(x_1, x_2, \chi_{10}, \dots, \chi_n) + f_{11}(\mathbf{r}', \tau) P'_{11}(x_1, x_2, \chi_2, \dots, \chi_{n'}) + \nabla'^2 x_1, \\ \frac{\partial x_2}{\partial \tau} &= P'_2(x_1, x_2, \eta_{10}, \dots, \eta_s) + f_{21}(\mathbf{r}', \tau) P'_{21}(x_1, x_2, \eta_2, \dots, \eta_{s'}) + D \nabla'^2 x_2.\end{aligned}\quad (4)$$

Функции со штрихом отличаются от соответствующих функций без штриха множителем  $\chi_{10}^{-1}$ ,  $D = D_2/D_1$ . Далее везде штрихи опущены.

Пусть в детерминированном случае значения параметров  $\chi_1, \dots, \chi_n, \eta_1, \dots, \eta_s$  таковы, что существуют устойчивые состояния равновесия  $x_{10}$  и  $x_{20}$ , определяемые уравнениями  $P_1(x_1, x_2, \chi_1, \dots, \chi_n) = 0$  и  $P_2(x_1, x_2, \eta_1, \dots, \eta_s) = 0$ .

Запишем систему (4) в операторном виде, выделив из ее правой части линейную  $K(\nabla^2)\mathbf{q}$ , нелинейную  $\mathbf{g}(\mathbf{q})$  и случайную  $\mathbf{F}(\mathbf{r}, \tau)$  компоненты.

$$\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial \tau} - K(\nabla^2)\mathbf{q} = \mathbf{g}(\mathbf{q}) + \mathbf{F}(\mathbf{r}, \tau). \quad (5)$$

Вектор  $\mathbf{q}$  описывает отклонения динамических переменных от равновесных значений:  $\mathbf{q} = (x_1 - x_{10}, x_2 - x_{20})$ . Линейный оператор  $K(\nabla^2)$  имеет вид

$$K(\nabla^2) = \begin{pmatrix} a_{11} + \nabla^2 & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} + D\nabla^2 \end{pmatrix}, \quad a_{ij} = \left. \frac{\partial P_i}{\partial x_j} \right|_{x_{10}, x_{20}}, \quad i, j = 1, 2. \quad (6)$$

Вектор  $\mathbf{g}(\mathbf{q})$  содержит квадратичные и кубические нелинейности, полученные разложением в ряд правой детерминированной части (4). Его компоненты определяются следующим образом:

$$g_i(\mathbf{q}) = \sum_{\mu, \nu=1}^2 g_{i, \mu\nu}^{(2)} q_\mu q_\nu + \sum_{\mu, \nu, \kappa=1}^2 g_{i, \mu\nu\kappa}^{(3)} q_\mu q_\nu q_\kappa, \quad (7)$$

$$\text{где } g_{i, \mu\nu}^{(2)} = \frac{1}{2!} \left. \frac{\partial^2 P_i}{\partial x_\mu \partial x_\nu} \right|_{x_{10}, x_{20}}, \quad g_{i, \mu\nu\kappa}^{(3)} = \frac{1}{3!} \left. \frac{\partial^3 P_i}{\partial x_\mu \partial x_\nu \partial x_\kappa} \right|_{x_{10}, x_{20}}.$$

Вектор  $\mathbf{F}$  содержит случайные поля

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} f_{11}(\mathbf{r}, \tau) P_{11}(x_1, x_2, \chi_2, \dots, \chi_{n'}) \\ f_{21}(\mathbf{r}, \tau) P_{21}(x_1, x_2, \eta_2, \dots, \eta_{s'}) \end{pmatrix}.$$

При исследовании устойчивости стационарного состояния детерминированной системы будем полагать, что вектор  $\mathbf{q}$  имеет вид  $\mathbf{q} = \mathbf{q}_0 \exp(\lambda\tau + i\mathbf{k}\mathbf{r})$ . Соответствующее характеристическое уравнение  $\lambda^2 - \alpha\lambda + \beta = 0$ , имеет решения

$$\lambda_{1,2}(\mathbf{k}) = \frac{\alpha(k) \pm \sqrt{\alpha^2(k) - 4\beta(k)}}{2}, \quad (8)$$

где  $\alpha(k) = Tr(a_{ij}) - (1 + D)k^2$ ,  $\beta(k) = Det(a_{ij}) - (Da_{11} + a_{22})k^2 + Dk^4$ .

Условие  $\alpha(k) < 0$ ,  $\beta(k) \leq 0$  приводит к аperiodической неустойчивости (неустойчивости Тьюринга типа мягкой моды), то есть появлению одного положительного действительного корня (8):  $Re(\lambda_1) \geq 0$ ,  $Im(\lambda_{1,2}) = 0$ . Ниже будем рассматривать только этот случай.

Положим, что один из параметров  $\chi_1, \dots, \chi_n, \eta_1, \dots, \eta_s$ , например,  $\chi_2$  является бифуркационным, то есть при некотором критическом значении этого параметра  $\chi_{2c}$  существует критическое значение волнового числа  $k_c$ , при котором выполняются условия  $Re(\lambda_1(k_c)) = 0$ ,  $\left. \frac{d(Re\lambda_1(k))}{dk} \right|_{k=k_c} = 0$ .



Представим вектор  $\mathbf{q}$  в виде суперпозиции по собственным формам оператора  $K(\nabla^2)$

$$\mathbf{q}(\mathbf{r}, \tau) = \sum_{\mathbf{k}', j} \mathbf{O}^{(j)}(\mathbf{k}') \xi_{\mathbf{k}'}^{(j)}(\tau) e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}}, \quad (9)$$

где  $\mathbf{O}^{(j)}(\mathbf{k})$  – собственные векторы оператора  $K(\nabla^2)$ ,  $\xi_{\mathbf{k}}^{(j)}(\tau)$  – неизвестные амплитуды,  $\exp(i\mathbf{k}\mathbf{r})$  – собственные функции оператора  $\nabla^2$ . Здесь предполагается, что вектор  $\mathbf{q}(\mathbf{r}, \tau)$  представляет суперпозицию плоских волн. Однако в зависимости от симметрии задачи в качестве собственных функций оператора  $\nabla^2$  нужно выбирать функции Бесселя или сферические волновые функции.

Вектор  $\mathbf{F}$  содержит нелинейные функции  $P_{i1}$ , которые необходимо разложить в ряд Тейлора по степеням компонент вектора  $\mathbf{q}$ . Ограничимся в разложении  $P_{i1}$  квадратичными слагаемыми. Как показано в [11], слагаемые такого порядка необходимы для получения дисперсионных уравнений для усредненных амплитуд неустойчивых мод с точностью до слагаемых, квадратичных по интенсивностям флуктуаций.

В результате компоненты вектора  $\mathbf{F}$ , содержащие случайные функции, приобретают вид

$$F_i = f_{i1}(\mathbf{r}, \tau) \left[ p_i^{(0)} + \sum_{\mu=1}^2 p_{i,\mu}^{(1)} q_\mu + \sum_{\mu,\nu=1}^2 p_{i,\mu\nu}^{(2)} q_\mu q_\nu \right],$$

где  $p_i^{(0)} = P_{i1}(x_{10}, x_{20})$ ,  $p_{i,\mu}^{(1)} = \left. \frac{\partial P_{i1}}{\partial x_\mu} \right|_{x_{10}, x_{20}}$ ,  $p_{i,\mu\nu}^{(2)} = \frac{1}{2!} \left. \frac{\partial^2 P_{i1}}{\partial x_\mu \partial x_\nu} \right|_{x_{10}, x_{20}}$ .

Неустойчивые моды заключены в узкой полосе значений волновых векторов, определяющей область неустойчивости системы. Это дает возможность построить волновые пакеты путем суммирования по волновым векторам, заключенным в малых интервалах. Таким образом, выделяются несущие моды с дискретными значениями волновых векторов и медленно меняющимися амплитудами  $\xi_{\mathbf{k}}^{(j)}(\tau)$ .

Чтобы получить уравнения для амплитуд мод  $\xi_{\mathbf{k}}^{(j)}(\tau)$  подставим (9) в (5), умножим полученное уравнение слева на  $\exp(-i\mathbf{k}\mathbf{r}) \mathbf{O}^{*(j')}(\mathbf{k})$  и проинтегрируем по области, значительно большей периода осцилляций  $\exp(i\mathbf{k}\mathbf{r})$ , но в которой  $\xi_{\mathbf{k}}^{(j)}(\tau)$  меняется очень мало. Здесь  $\mathbf{O}^{*(j')}(\mathbf{k})$  – собственные векторы оператора, сопряженного к  $K(\nabla^2)$ :  $\mathbf{O}^{(j)} \mathbf{O}^{*(j')} = \delta_{jj'}$ .

После преобразований система уравнений для амплитуд мод  $\xi_{\mathbf{k}}^{(j)}(\tau)$  принимает вид

$$\begin{aligned} \frac{d\xi_{\mathbf{k}}^{(j)}}{d\tau} - \lambda_j(\mathbf{k}) \xi_{\mathbf{k}}^{(j)} &= \sum_{j'j'', \mathbf{k}'\mathbf{k}''} \sigma_{j'j''}^{(j)}(\mathbf{k}, \mathbf{k}', \mathbf{k}'') \xi_{\mathbf{k}'}^{(j')} \xi_{\mathbf{k}''}^{(j'')} \delta(\mathbf{k}' + \mathbf{k}'' - \mathbf{k}) + \\ &+ \sum_{j'j''j''', \mathbf{k}'\mathbf{k}''\mathbf{k}'''} \sigma_{j'j''j'''}^{(j)}(\mathbf{k}, \mathbf{k}', \mathbf{k}'', \mathbf{k}''') \xi_{\mathbf{k}'}^{(j')} \xi_{\mathbf{k}''}^{(j'')} \xi_{\mathbf{k}'''}^{(j''')} \delta(\mathbf{k}' + \mathbf{k}'' + \mathbf{k}''' - \mathbf{k}) + \\ &+ \sum_{\varphi=1}^2 O_\varphi^{*(j)}(\mathbf{k}) p_\varphi^{(0)} z_{\varphi, \mathbf{k}}(\tau) + \sum_{\varphi=1}^2 \sum_{j', \mathbf{k}'} \varepsilon_{\varphi, j'}^{(j)}(\mathbf{k}, \mathbf{k}') \xi_{\mathbf{k}'}^{(j')} z_{\varphi, \mathbf{k}-\mathbf{k}'}(\tau) + \\ &+ \sum_{\varphi=1}^2 \sum_{j'j'', \mathbf{k}'\mathbf{k}''} \varepsilon_{\varphi, j'j''}^{(j)}(\mathbf{k}, \mathbf{k}', \mathbf{k}'') \xi_{\mathbf{k}'}^{(j')} \xi_{\mathbf{k}''}^{(j'')} z_{\varphi, \mathbf{k}-\mathbf{k}'-\mathbf{k}''}(\tau). \end{aligned} \quad (10)$$

Функции  $\sigma_{j'j''}^{(j)}(\mathbf{k}, \mathbf{k}', \mathbf{k}'')$ ,  $\sigma_{j'j''j'''}^{(j)}(\mathbf{k}, \mathbf{k}', \mathbf{k}'', \mathbf{k}''')$ ,  $\varepsilon_{\varphi,j'}^{(j)}(\mathbf{k}, \mathbf{k}')$ ,  $\varepsilon_{\varphi,j'j''}^{(j)}(\mathbf{k}, \mathbf{k}', \mathbf{k}'')$ , введенные в уравнениях (10), представлены в Приложении. Случайные процессы  $z_{\varphi,\mathbf{k}}(\tau) = \int f_{\varphi 1}(\mathbf{r}, \tau) e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}} d\mathbf{r}$  – компоненты случайного векторного поля  $\mathbf{z}(\tau)$ , имеющие нулевые средние;  $\varphi$  и  $\mathbf{k}$  – индексные аргументы этого поля. В предположении, что времена корреляций случайных полей гораздо меньше всех характерных времен детерминированной задачи (4), корреляционные функции для компонент поля  $\mathbf{z}(\tau)$  будут иметь вид  $\langle z_{j,\mathbf{k}}(t) z_{l,\mathbf{k}'}(\tau) \rangle = g_{jl}(|\mathbf{k}|) \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \delta(t - \tau) \delta_{jl}$  [12]. Положим далее для определенности

$$\Phi_j(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) = \theta_j \exp(-k_{fj} |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|). \quad (11)$$

Здесь  $\theta_j$  – интенсивности шумов;  $k_{fj}$  – величины, обратные радиусам корреляций. Для одномерной среды  $g_{jj} = 2\theta_j k_{fj} / (k^2 + k_{fj}^2)^{1/2}$ .

Система (10) содержит как устойчивые (затухающие), так и неустойчивые (незатухающие) моды. В окрестности точки бифуркации время релаксации незатухающих мод значительно больше времени релаксации затухающих, поэтому последние адиабатически следуют за первыми. Это дает возможность исключить из уравнений (10) затухающие моды.

Чтобы провести процедуру адиабатического исключения устойчивых мод, перепишем (10), выделив из нее две подсистемы уравнений: для неустойчивых мод (обозначим их дополнительным индексом « $u$ ») и для устойчивых « $s$ ». Поскольку незатухающие моды, если пренебречь нелинейными членами, могут нарастать до бесконечности, уравнения для них запишем с точностью до кубических слагаемых, обеспечивающих нелинейную стабилизацию неустойчивости.

Естественно считать, что амплитуды устойчивых мод много меньше амплитуд неустойчивых мод  $|\xi_s| \ll |\xi_u|$  и их изменения происходят согласованным образом:  $\xi_s \sim \xi_u^2$ .

В уравнениях для амплитуд устойчивых мод оставим только члены, необходимые для получения уравнений для амплитуд неустойчивых мод с точностью до членов третьего порядка. Тогда из (10) для амплитуд устойчивых мод получим следующие уравнения:

$$\begin{aligned} \frac{d\xi_{\mathbf{k}s}^{(j)}}{d\tau} - \lambda_j(\mathbf{k}_s) \xi_{\mathbf{k}s}^{(j)} &= \sum_{\mathbf{k}'_u \mathbf{k}''_u} \sigma_{11}^{(j)}(\mathbf{k}_s, \mathbf{k}'_u, \mathbf{k}''_u) \xi_{\mathbf{k}'_u}^{(1)} \xi_{\mathbf{k}''_u}^{(1)} \delta(\mathbf{k}'_u + \mathbf{k}''_u - \mathbf{k}_s) + \\ &+ \sum_{\varphi=1}^2 O_{\varphi}^{*(j)}(\mathbf{k}_s) p_{\varphi}^{(0)} z_{\varphi, \mathbf{k}s}(\tau) + \sum_{\varphi=1}^2 \sum_{\mathbf{k}'_u} \varepsilon_{\varphi,1}^{(j)}(\mathbf{k}_s, \mathbf{k}'_u) \xi_{\mathbf{k}'_u}^{(1)} z_{\varphi, \mathbf{k}s - \mathbf{k}'_u}(\tau) + \\ &+ \sum_{\varphi=1}^2 \sum_{\mathbf{k}'_u \mathbf{k}''_u} \varepsilon_{\varphi,11}^{(j)}(\mathbf{k}_s, \mathbf{k}'_u, \mathbf{k}''_u) \xi_{\mathbf{k}'_u}^{(1)} \xi_{\mathbf{k}''_u}^{(1)} z_{\varphi, \mathbf{k}s - \mathbf{k}'_u - \mathbf{k}''_u}(\tau). \end{aligned} \quad (12)$$

Уравнения для амплитуд неустойчивых мод будут иметь вид

$$\begin{aligned}
\frac{d\xi_{\mathbf{k}u}^{(1)}}{d\tau} - \lambda_1(\mathbf{k}_u)\xi_{\mathbf{k}u}^{(1)} &= \sum_{\mathbf{k}'_u\mathbf{k}''_u} \sigma_{11}^{(1)}(\mathbf{k}_u, \mathbf{k}'_u, \mathbf{k}''_u)\xi_{\mathbf{k}'_u}^{(1)}\xi_{\mathbf{k}''_u}^{(1)}\delta(\mathbf{k}'_u + \mathbf{k}''_u - \mathbf{k}_u) + \\
&+ \sum_{\mathbf{k}'_u\mathbf{k}''_u\mathbf{k}'''_u} \sigma_{111}^{(1)}(\mathbf{k}_u, \mathbf{k}'_u, \mathbf{k}''_u, \mathbf{k}'''_u)\xi_{\mathbf{k}'_u}^{(1)}\xi_{\mathbf{k}''_u}^{(1)}\xi_{\mathbf{k}'''_u}^{(1)}\delta(\mathbf{k}'_u + \mathbf{k}''_u + \mathbf{k}'''_u - \mathbf{k}_u) + \\
&+ \sum_{\varphi=1}^2 O_{\varphi}^{*(1)}(\mathbf{k}_u)p_{\varphi}^{(0)}z_{\varphi,\mathbf{k}u}(\tau) + \sum_{\varphi=1}^2 \sum_{\mathbf{k}'_u} \varepsilon_{\varphi,1}^{(1)}(\mathbf{k}_u, \mathbf{k}'_u)\xi_{\mathbf{k}'_u}^{(1)}z_{\varphi,\mathbf{k}u-\mathbf{k}'_u}(\tau) + \\
&+ \sum_{\varphi=1}^2 \sum_{\mathbf{k}'_u\mathbf{k}''_u} \varepsilon_{\varphi,11}^{(1)}(\mathbf{k}_u, \mathbf{k}'_u, \mathbf{k}''_u)\xi_{\mathbf{k}'_u}^{(1)}\xi_{\mathbf{k}''_u}^{(1)}z_{\varphi,\mathbf{k}u-\mathbf{k}'_u-\mathbf{k}''_u}(\tau) + \\
&+ \sum_{\psi,\varphi=1}^2 \sum_{\mathbf{k}_s} \varepsilon_{\varphi,\psi}^{(1)}(\mathbf{k}_u, \mathbf{k}_s)\xi_{\mathbf{k}_s}^{(\psi)}z_{\varphi,\mathbf{k}u-\mathbf{k}_s}(\tau) + \\
&+ \sum_{\psi=1}^2 \sum_{\mathbf{k}'_u\mathbf{k}_s} (\sigma_{1\psi}^{(1)}(\mathbf{k}_u, \mathbf{k}'_u, \mathbf{k}_s) + \sigma_{\psi 1}^{(1)}(\mathbf{k}_u, \mathbf{k}_s, \mathbf{k}'_u))\xi_{\mathbf{k}'_u}^{(1)}\xi_{\mathbf{k}_s}^{(\psi)}\delta(\mathbf{k}'_u + \mathbf{k}_s - \mathbf{k}_u) + \\
&+ \sum_{\psi,\varphi=1}^2 \sum_{\mathbf{k}'_u\mathbf{k}_s} (\varepsilon_{\varphi,1\psi}^{(1)}(\mathbf{k}_u, \mathbf{k}'_u, \mathbf{k}_s) + \varepsilon_{\varphi,\psi 1}^{(1)}(\mathbf{k}_u, \mathbf{k}_s, \mathbf{k}'_u))\xi_{\mathbf{k}'_u}^{(1)}\xi_{\mathbf{k}_s}^{(\psi)}z_{\varphi,\mathbf{k}u-\mathbf{k}'_u-\mathbf{k}_s}(\tau).
\end{aligned} \tag{13}$$

В случае аperiодической неустойчивости при исключении  $\xi_{\mathbf{k}_s}^{(j)}$  из уравнений (13), в (12) можно пренебречь производной по времени  $d\xi_{\mathbf{k}_s}^{(j)}/d\tau$  [8]. Выражая амплитуды  $\xi_{\mathbf{k}_s}^{(j)}$  из (12) и подставляя их в (13), получим систему уравнений для амплитуд неустойчивых мод  $\xi_{\mathbf{k}u}^{(1)}$

$$\frac{d\xi_{\mathbf{k}u}^{(1)}}{d\tau} = F_{\mathbf{k}u}(\tau), \tag{14}$$

$$\begin{aligned}
F_{\mathbf{k}u}(\tau) &= \lambda_1(\mathbf{k}_u)\xi_{\mathbf{k}u}^{(1)} + \sum_{\mathbf{k}'_u\mathbf{k}''_u} \sigma_{11}^{(1)}(\mathbf{k}_u, \mathbf{k}'_u, \mathbf{k}''_u)\xi_{\mathbf{k}'_u}^{(1)}\xi_{\mathbf{k}''_u}^{(1)}\delta(\mathbf{k}'_u + \mathbf{k}''_u - \mathbf{k}_u) + \\
&+ \sum_{\mathbf{k}'_u\mathbf{k}''_u\mathbf{k}'''_u} \omega(\mathbf{k}_u, \mathbf{k}'_u, \mathbf{k}''_u, \mathbf{k}'''_u, \mathbf{k}_u - \mathbf{k}'_u)\xi_{\mathbf{k}'_u}^{(1)}\xi_{\mathbf{k}''_u}^{(1)}\xi_{\mathbf{k}'''_u}^{(1)}\delta(\mathbf{k}'_u + \mathbf{k}''_u + \mathbf{k}'''_u - \mathbf{k}_u) + \\
&+ \sum_{\varphi=1}^2 O_{\varphi}^{*(1)}(\mathbf{k}_u)p_{\varphi}^{(0)}z_{\varphi,\mathbf{k}u}(\tau) - \sum_{\psi,\varphi,\varphi'=1}^2 \sum_{\mathbf{k}_s} \zeta_{\varphi,\psi,\varphi'}(\mathbf{k}_u, \mathbf{k}_s)z_{\varphi,\mathbf{k}u-\mathbf{k}_s}(\tau)z_{\varphi',\mathbf{k}_s}(\tau) + \\
&+ \sum_{\varphi=1}^2 \sum_{\mathbf{k}'_u} \eta_{\varphi}(\mathbf{k}_u, \mathbf{k}'_u)\xi_{\mathbf{k}'_u}^{(1)}z_{\varphi,\mathbf{k}u-\mathbf{k}'_u}(\tau) + \\
&+ \sum_{\varphi=1}^2 \sum_{\mathbf{k}'_u\mathbf{k}''_u} \nu_{\varphi}(\mathbf{k}_u, \mathbf{k}'_u, \mathbf{k}''_u)\xi_{\mathbf{k}'_u}^{(1)}\xi_{\mathbf{k}''_u}^{(1)}z_{\varphi,\mathbf{k}u-\mathbf{k}'_u-\mathbf{k}''_u}(\tau) - \\
&- \sum_{\psi,\varphi,\varphi'=1}^2 \sum_{\mathbf{k}_s,\mathbf{k}'_u} A_{\varphi,\psi,\varphi'}(\mathbf{k}_u, \mathbf{k}_s, \mathbf{k}'_u)\xi_{\mathbf{k}'_u}^{(1)}z_{\varphi',\mathbf{k}_s-\mathbf{k}'_u}(\tau)z_{\varphi,\mathbf{k}u-\mathbf{k}_s}(\tau) - \\
&- \sum_{\psi,\varphi,\varphi'=1}^2 \sum_{\mathbf{k}'_u\mathbf{k}_s} B_{\varphi,\psi,\varphi'}(\mathbf{k}_u, \mathbf{k}_s, \mathbf{k}'_u)\xi_{\mathbf{k}'_u}^{(1)}z_{\varphi,\mathbf{k}u-\mathbf{k}'_u-\mathbf{k}_s}(\tau)z_{\varphi',\mathbf{k}_s}(\tau) -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \sum_{\psi, \varphi, \varphi'=1}^2 \sum_{\mathbf{k}'_u \mathbf{k}''_u \mathbf{k}_s} C_{\varphi, \psi, \varphi'}(\mathbf{k}_u, \mathbf{k}_s, \mathbf{k}'_u, \mathbf{k}''_u) \xi_{\mathbf{k}'_u}^{(1)} \xi_{\mathbf{k}''_u}^{(1)} z_{\varphi', \mathbf{k}_s - \mathbf{k}'_u - \mathbf{k}''_u}(\boldsymbol{\tau}) z_{\varphi, \mathbf{k}_u - \mathbf{k}_s}(\boldsymbol{\tau}) - \\
& - \sum_{\psi, \varphi, \varphi'=1}^2 \sum_{\mathbf{k}'_u \mathbf{k}''_u \mathbf{k}_s} D_{\varphi, \psi, \varphi'}(\mathbf{k}_u, \mathbf{k}'_u, \mathbf{k}_s, \mathbf{k}''_u) \xi_{\mathbf{k}'_u}^{(1)} \xi_{\mathbf{k}''_u}^{(1)} z_{\varphi, \mathbf{k}_u - \mathbf{k}'_u - \mathbf{k}_s}(\boldsymbol{\tau}) z_{\varphi', \mathbf{k}_s - \mathbf{k}''_u}(\boldsymbol{\tau}) - \\
& - \sum_{\psi, \varphi=1}^2 \sum_{\mathbf{k}'_u \mathbf{k}''_u \mathbf{k}'''_u} E_{\psi, \varphi}(\mathbf{k}_u, \mathbf{k}'_u, \mathbf{k}_u - \mathbf{k}'_u, \mathbf{k}''_u, \mathbf{k}'''_u) \xi_{\mathbf{k}'_u}^{(1)} \xi_{\mathbf{k}''_u}^{(1)} \xi_{\mathbf{k}'''_u}^{(1)} z_{\varphi, \mathbf{k}_u - \mathbf{k}'_u - \mathbf{k}''_u - \mathbf{k}'''_u}(\boldsymbol{\tau}) - \\
& - \sum_{\psi, \varphi=1}^2 \sum_{\mathbf{k}'_u \mathbf{k}''_u \mathbf{k}'''_u} F_{\psi, \varphi}(\mathbf{k}_u, \mathbf{k}'_u, \mathbf{k}''_u, \mathbf{k}'''_u) \xi_{\mathbf{k}'_u}^{(1)} \xi_{\mathbf{k}''_u}^{(1)} \xi_{\mathbf{k}'''_u}^{(1)} z_{\varphi, \mathbf{k}_u - \mathbf{k}'_u - \mathbf{k}''_u - \mathbf{k}'''_u}(\boldsymbol{\tau}) - \\
& - \sum_{\psi, \varphi, \varphi'=1}^2 \sum_{\mathbf{k}'_u \mathbf{k}''_u \mathbf{k}'''_u \mathbf{k}_s} G_{\psi, \varphi, \varphi'}(\mathbf{k}_u, \mathbf{k}'_u, \mathbf{k}_s, \mathbf{k}''_u, \mathbf{k}'''_u) \xi_{\mathbf{k}'_u}^{(1)} \xi_{\mathbf{k}''_u}^{(1)} \xi_{\mathbf{k}'''_u}^{(1)} z_{\varphi, \mathbf{k}_u - \mathbf{k}'_u - \mathbf{k}_s}(\boldsymbol{\tau}) \times \\
& \quad \times z_{\varphi', \mathbf{k}_s - \mathbf{k}''_u - \mathbf{k}'''_u}(\boldsymbol{\tau}).
\end{aligned}$$

Функция  $\omega(\mathbf{k}_u, \mathbf{k}'_u, \mathbf{k}''_u, \mathbf{k}'''_u, \mathbf{k}_u - \mathbf{k}'_u)$  и другие, введенные в уравнениях (14), представлены в Приложении. Моды  $\xi_{\mathbf{k}_u}^{(1)}$  служат параметрами порядка. Их кооперация или конкуренция определяют вид возникающих структур.

Система уравнений (14) все еще сложна для анализа, так как содержит случайные компоненты. Дальнейший анализ уравнений (14) может заключаться или в усреднении их по ансамблю реализаций, или в получении УФП.

## 2. Усреднение по ансамблю реализаций

При усреднении по ансамблю реализаций используется связь между моментами и корреляторами [13] и многомерное обобщение формулы Фурутцу–Новикова [14]. Принимая во внимание формальные решения системы уравнений (14) и допуская, что можно пренебречь корреляторами выше второго порядка, можно показать [11], что в уравнениях (14) нужно отбросить слагаемые, содержащие  $\xi_{\mathbf{k}'_u}^{(1)} \xi_{\mathbf{k}''_u}^{(1)} \xi_{\mathbf{k}'''_u}^{(1)} z_{\varphi, \mathbf{k}_1}(\boldsymbol{\tau}) z_{\varphi', \mathbf{k}_2}(\boldsymbol{\tau})$  и  $\xi_{\mathbf{k}'_u}^{(1)} \xi_{\mathbf{k}''_u}^{(1)} \xi_{\mathbf{k}'''_u}^{(1)} z_{\varphi, \mathbf{k}}(\boldsymbol{\tau})$ , так как при усреднении они не дают вклад в средние значения мод  $\xi_{\mathbf{k}_u}^{(1)}$ .

Отметим здесь, что процедура раскрытия корреляторов будет приводить к появлению аналогичных корреляторов для других взаимодействующих мод. Поэтому эту процедуру нужно проводить до тех пор, пока не будут учтены все слагаемые, содержащие необходимую степень интенсивности флуктуаций. Остальными корреляторами можно пренебречь ввиду их малости, так как после их раскрытия получатся слагаемые, пропорциональные более высокой степени интенсивности шума.

Чтобы после усреднения получить поправки к инкрементам  $\lambda_1(\mathbf{k}_u)$  амплитуд неустойчивых мод с точностью до слагаемых, квадратичных по интенсивности шума, при вычислении вариационных производных, входящих в формулу Фурутцу–Новикова, необходимо сохранять слагаемые, содержащие произведения  $\xi_{\mathbf{k}'_u}^{(1)} z_{\varphi, \mathbf{k}}(\boldsymbol{\tau})$ .

Ниже приводится только структура полученных в результате усреднения уравнений, так как они имеют очень громоздкий вид,

$$\begin{aligned} \frac{d \langle \xi_{\mathbf{k}u}^{(1)} \rangle}{d\tau} - \lambda_1(\mathbf{k}_u) \langle \xi_{\mathbf{k}u}^{(1)} \rangle = & \mathbf{L}_0(\mathbf{k}_u) + \mathbf{L}_1(\mathbf{k}_u, \mathbf{k}'_u) \langle \xi_{\mathbf{k}'_u}^{(1)} \rangle + \\ & + \mathbf{L}_2(\mathbf{k}_u, \mathbf{k}'_u, \mathbf{k}''_u, \mathbf{k}'''_u, \mathbf{k}_s) \langle \xi_{\mathbf{k}''_u}^{(1)} \xi_{\mathbf{k}'''_u}^{(1)} \rangle + \\ & + \mathbf{L}_3(\mathbf{k}_u, \mathbf{k}'_u, \mathbf{k}''_u, \mathbf{k}'''_u, \mathbf{k}_u^{IV}, \mathbf{k}_s, \mathbf{k}'_s) \langle \xi_{\mathbf{k}''_u}^{(1)} \xi_{\mathbf{k}'''_u}^{(1)} \xi_{\mathbf{k}^{IV}_u}^{(1)} \rangle. \end{aligned} \quad (15)$$

Подробный вывод уравнения (15), а также вид операторов  $\mathbf{L}_0(\mathbf{k}_u)$  и  $\mathbf{L}_1(\mathbf{k}_u, \mathbf{k}'_u)$  можно найти в [11]. Анализ уравнений (15) приводит к следующим заключениям.

Во-первых, после усреднения системы (14) в (15) возникают дополнительные слагаемые, не зависящие от  $\langle \xi_{\mathbf{k}u}^{(1)} \rangle$ . Они определяются параметрами задачи, видом корреляционной функции  $g_{jj}$ , интенсивностью шума и волновым числом данной моды.

Во-вторых, в системе (15) возникают дополнительные слагаемые, пропорциональные  $\langle \xi_{\mathbf{k}u}^{(1)} \rangle$ , что приводит к изменению инкрементов усредненных амплитуд неустойчивых мод в сравнении с детерминированным случаем. Следствием этого является изменение области неустойчивости системы и изменение скорости разрушения статистически стационарного однородного состояния и формирования структур.

Выделив из  $\mathbf{L}_1(\mathbf{k}_u, \mathbf{k}'_u)$  слагаемые, дающие вклад в инкремент  $\langle \xi_{\mathbf{k}u}^{(1)} \rangle$ , получим дисперсионное уравнение

$$\lambda = \lambda_1(\mathbf{k}_u) + \mathbf{L}_1(\mathbf{k}_u, \mathbf{k}_u) + \mathbf{L}_1(\mathbf{k}_u, -\mathbf{k}_u). \quad (16)$$

При выводе уравнения (16) учтено, что  $\xi_{-\mathbf{k}u}^{(1)} = \xi_{\mathbf{k}u}^{*(1)} = \xi_{\mathbf{k}u}^{(1)}$ , так как решения уравнений (14) должны быть действительными. Из уравнения (16) и выражений для  $\mathbf{L}_1(\mathbf{k}_u, \mathbf{k}'_u)$  и  $g_{ii}$  следует, что инкременты усредненных амплитуд неустойчивых мод пропорциональны интенсивности шума и зависят от его радиуса корреляции. При этом интенсивность шума становится еще одним бифуркационным параметром и структуры начинают формироваться при значении параметра  $\chi_{2\theta}$  отличном от  $\chi_{2c}$ . Как показывает исследование конкретных систем  $\chi_{2\theta} > \chi_{2c}$ , то есть значение бифуркационного параметра  $\chi_2$  смещается в докритическую область.

Наконец, обратим внимание на то, что во внешних случайных полях, процесс образования диссипативных структур происходит за счет многомодового взаимодействия, при котором условия резонансного взаимодействия мод также отличаются от детерминированного случая. В частности, возникает взаимодействие различных конфигураций мод с модами, имеющими удвоенные волновые числа, например,  $2\mathbf{k}'_u - \mathbf{k}''_u = \mathbf{k}_u$ .

Таким образом, приведенный выше теоретический анализ позволяет более детально описать эволюцию рассматриваемых стохастических систем в окрестности точки бифуркации Тьюринга.

### 3. Уравнение Фоккера–Планка для параметров порядка

Если параметры системы таковы, что она находится в закритической области ( $\chi_2 < \chi_{2c}$ ), то с увеличением интенсивности шума система будет «уходить» все дальше от точки бифуркации детерминированной системы. При этом для описания состояния системы нужно применять УФП.

Для системы (14) УФП может быть представлено в общем виде следующим образом [15]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial w \left( \left\{ \xi_{\mathbf{k}u}^{(1)} \right\}, \tau \right)}{\partial \tau} = & - \sum_{\mathbf{k}u} \frac{\partial}{\partial \xi_{\mathbf{k}u}^{(1)}} \left\{ \left( \langle F_{\mathbf{k}u}(\tau) \rangle + \sum_{\mathbf{q}u} \int_{-\infty}^0 K \left[ \frac{\partial F_{\mathbf{k}u}(\tau)}{\partial \xi_{\mathbf{q}u}^{(1)}}, F_{\mathbf{q}u}(t') \right] dt' \right) w \right\} + \\ & + \sum_{\mathbf{k}u, \mathbf{q}u} \frac{\partial^2}{\partial \xi_{\mathbf{k}u}^{(1)} \partial \xi_{\mathbf{q}u}^{(1)}} \left\{ \left( \int_{-\infty}^0 K [F_{\mathbf{k}u}(\tau), F_{\mathbf{q}u}(t')] dt' \right) w \right\}. \end{aligned} \quad (17)$$

Здесь  $w \left( \left\{ \xi_{\mathbf{k}u}^{(1)} \right\}, \tau \right)$  – многомерная плотность распределения вероятности, определяющая вероятность некоторой конфигурации неустойчивых мод  $\left\{ \xi_{\mathbf{k}u}^{(1)} \right\}$ . После преобразований с точностью до членов, линейных по интенсивностям шумов, можно получить корреляционные функции, входящие в (17),

$$\begin{aligned} K \left[ \frac{\partial F_{\mathbf{k}u}(\tau)}{\partial \xi_{\mathbf{q}u}^{(1)}}, F_{\mathbf{q}u}(t') \right] = & \sum_{\varphi} \eta_{\varphi}(\mathbf{k}_u, \mathbf{q}_u) O_{\varphi}^{*(1)}(\mathbf{q}_u) p_{\varphi}^{(0)} g_{\varphi\varphi}(|\mathbf{k}_u - \mathbf{q}_u|) \delta_{\mathbf{k}u - \mathbf{q}u, \mathbf{q}u} \delta(\tau - t') + \\ & + \sum_{\varphi} [\nu_{\varphi}(\mathbf{k}_u, \mathbf{q}_u, \mathbf{k}_u - 2\mathbf{q}_u) + \nu_{\varphi}(\mathbf{k}_u, \mathbf{k}_u - 2\mathbf{q}_u, \mathbf{q}_u)] \times \\ & \times O_{\varphi}^{*(1)}(\mathbf{q}_u) p_{\varphi}^{(0)} g_{\varphi\varphi}(|\mathbf{q}_u|) \xi_{\mathbf{k}u - 2\mathbf{q}u} \delta(\tau - t') + \\ & + \sum_{\varphi} \eta_{\varphi}(\mathbf{k}_u, \mathbf{q}_u) \eta_{\varphi}(\mathbf{q}_u, 2\mathbf{q}_u - \mathbf{k}_u) g_{\varphi\varphi}(|\mathbf{k}_u - \mathbf{q}_u|) \xi_{2\mathbf{q}u - \mathbf{k}u} \delta(\tau - t') + \\ & + \sum_{\varphi, \mathbf{q}'u} \eta_{\varphi}(\mathbf{k}_u, \mathbf{q}_u) \nu_{\varphi}(\mathbf{q}_u, \mathbf{q}'u, 2\mathbf{q}_u - \mathbf{k}_u - \mathbf{q}'u) g_{\varphi\varphi}(|\mathbf{k}_u - \mathbf{q}_u|) \xi_{\mathbf{q}'u} \xi_{2\mathbf{q}u - \mathbf{k}u - \mathbf{q}'u} \delta(\tau - t') + \\ & + \sum_{\varphi, \mathbf{q}'u, \mathbf{q}''u} [\nu_{\varphi}(\mathbf{k}_u, \mathbf{q}_u, \mathbf{k}_u - 2\mathbf{q}_u + \mathbf{q}'u + \mathbf{q}''u) + \nu_{\varphi}(\mathbf{k}_u, \mathbf{k}_u - 2\mathbf{q}_u + \mathbf{q}'u + \mathbf{q}''u, \mathbf{q}_u)] \times \\ & \times \nu_{\varphi}(\mathbf{q}_u, \mathbf{q}'u, \mathbf{q}''u) g_{\varphi\varphi}(|\mathbf{q}_u - \mathbf{q}'u - \mathbf{q}''u|) \xi_{\mathbf{q}'u} \xi_{\mathbf{q}''u} \xi_{\mathbf{k}u - 2\mathbf{q}u + \mathbf{q}'u + \mathbf{q}''u} \delta(\tau - t') + \\ & + \sum_{\varphi, \mathbf{q}'u} \eta_{\varphi}(\mathbf{q}_u, \mathbf{q}'u) [\nu_{\varphi}(\mathbf{k}_u, \mathbf{k}_u - 2\mathbf{q}_u + \mathbf{q}'u, \mathbf{q}_u) + \nu_{\varphi}(\mathbf{k}_u, \mathbf{q}_u, \mathbf{k}_u - 2\mathbf{q}_u + \mathbf{q}'u)] \times \\ & \times g_{\varphi\varphi}(|\mathbf{q}_u - \mathbf{q}'u|) \xi_{\mathbf{q}'u} \xi_{\mathbf{k}u - 2\mathbf{q}u + \mathbf{q}'u} \delta(\tau - t'), \\ \\ K[F_{\mathbf{k}u}(\tau), F_{\mathbf{q}u}(t')] = & \sum_{\varphi} \left( O_{\varphi}^{*(1)}(\mathbf{k}_u) \right)^2 \left( p_{\varphi}^{(0)} \right)^2 g_{\varphi\varphi}(|\mathbf{k}_u|) \delta_{\mathbf{k}u, \mathbf{q}u} \delta(\tau - t') + \\ & + \sum_{\varphi} \eta_{\varphi}(\mathbf{k}_u, \mathbf{k}_u - \mathbf{q}_u) O_{\varphi}^{*(1)}(\mathbf{q}_u) p_{\varphi}^{(0)} g_{\varphi\varphi}(|\mathbf{q}_u|) \xi_{\mathbf{k}u - \mathbf{q}u} \delta(\tau - t') + \\ & + \sum_{\varphi, \mathbf{k}'} \nu_{\varphi}(\mathbf{k}_u, \mathbf{k}'u, \mathbf{k}_u - \mathbf{k}'u - \mathbf{q}_u) O_{\varphi}^{*(1)}(\mathbf{q}_u) p_{\varphi}^{(0)} g_{\varphi\varphi}(|\mathbf{q}_u|) \xi_{\mathbf{k}'u} \xi_{\mathbf{k}u - \mathbf{k}'u - \mathbf{q}u} \delta(\tau - t') + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{\varphi} \eta_{\varphi}(\mathbf{q}_u, \mathbf{q}_u - \mathbf{k}_u) O_{\varphi}^{*(1)}(\mathbf{k}_u) p_{\varphi}^{(0)} g_{\varphi\varphi}(|\mathbf{k}_u|) \xi_{\mathbf{q}_u - \mathbf{k}_u} \delta(\tau - t') + \\
& + \sum_{\varphi, \mathbf{q}'} \eta_{\varphi}(\mathbf{k}_u, \mathbf{k}_u - \mathbf{q}_u + \mathbf{q}'_u) \eta_{\varphi}(\mathbf{q}_u, \mathbf{q}'_u) g_{\varphi\varphi}(|\mathbf{q}_u - \mathbf{q}'_u|) \xi_{\mathbf{q}'_u} \xi_{\mathbf{k}_u - \mathbf{q}_u + \mathbf{q}'_u} \delta(\tau - t') + \\
& + \sum_{\varphi, \mathbf{k}', \mathbf{q}'} \nu_{\varphi}(\mathbf{k}_u, \mathbf{k}'_u, \mathbf{k}_u - \mathbf{k}'_u - \mathbf{q}_u + \mathbf{q}'_u) \eta_{\varphi}(\mathbf{q}_u, \mathbf{q}'_u) \times \\
& \times g_{\varphi\varphi}(|\mathbf{q}_u - \mathbf{q}'_u|) \xi_{\mathbf{k}'_u} \xi_{\mathbf{q}'_u} \xi_{\mathbf{k}_u - \mathbf{k}'_u - \mathbf{q}_u + \mathbf{q}'_u} \delta(\tau - t') + \\
& + \sum_{\varphi, \mathbf{q}'} \eta_{\varphi}(\mathbf{k}_u, \mathbf{k}_u - \mathbf{q}_u + \mathbf{q}'_u) \eta_{\varphi}(\mathbf{q}_u, \mathbf{q}'_u) g_{\varphi\varphi}(|\mathbf{q}_u - \mathbf{q}'_u|) \xi_{\mathbf{q}'_u} \xi_{\mathbf{k}_u - \mathbf{q}_u + \mathbf{q}'_u} \delta(\tau - t') + \\
& + \sum_{\varphi, \mathbf{k}', \mathbf{q}'} \nu_{\varphi}(\mathbf{k}_u, \mathbf{k}'_u, \mathbf{k}_u - \mathbf{k}'_u - \mathbf{q}_u + \mathbf{q}'_u) \eta_{\varphi}(\mathbf{q}_u, \mathbf{q}'_u) \times \\
& \times g_{\varphi\varphi}(|\mathbf{q}_u - \mathbf{q}'_u|) \xi_{\mathbf{k}'_u} \xi_{\mathbf{q}'_u} \xi_{\mathbf{k}_u - \mathbf{k}'_u - \mathbf{q}_u + \mathbf{q}'_u} \delta(\tau - t') + \\
& + \sum_{\varphi, \mathbf{q}'} \nu_{\varphi}(\mathbf{q}_u, \mathbf{q}'_u, \mathbf{q}_u - \mathbf{q}'_u - \mathbf{k}_u) O_{\varphi}^{*(1)}(\mathbf{k}_u) p_{\varphi}^{(0)} g_{\varphi\varphi}(|\mathbf{k}_u|) \xi_{\mathbf{q}'_u} \xi_{\mathbf{q}_u - \mathbf{q}'_u - \mathbf{k}_u} \delta(\tau - t') + \\
& + \sum_{\varphi, \mathbf{k}', \mathbf{q}'} \nu_{\varphi}(\mathbf{q}_u, \mathbf{q}'_u, \mathbf{q}_u - \mathbf{q}'_u - \mathbf{k}_u + \mathbf{k}'_u) \eta_{\varphi}(\mathbf{k}_u, \mathbf{k}'_u) \times \\
& \times g_{\varphi\varphi}(|\mathbf{k}_u - \mathbf{k}'_u|) \xi_{\mathbf{k}'_u} \xi_{\mathbf{q}'_u} \xi_{\mathbf{q}_u - \mathbf{q}'_u - \mathbf{k}_u + \mathbf{k}'_u} \delta(\tau - t') + \\
& + \sum_{\varphi, \mathbf{k}', \mathbf{q}', \mathbf{q}''} \nu_{\varphi}(\mathbf{k}_u, \mathbf{k}'_u, \mathbf{k}_u - \mathbf{k}'_u - \mathbf{q}_u + \mathbf{q}'_u + \mathbf{q}''_u) \nu_{\varphi}(\mathbf{q}_u, \mathbf{q}'_u, \mathbf{q}''_u) \times \\
& \times g_{\varphi\varphi}(|\mathbf{q}_u - \mathbf{q}'_u - \mathbf{q}''_u|) \xi_{\mathbf{k}'_u} \xi_{\mathbf{q}'_u} \xi_{\mathbf{q}''_u} \xi_{\mathbf{k}_u - \mathbf{k}'_u - \mathbf{q}_u + \mathbf{q}'_u + \mathbf{q}''_u} \delta(\tau - t').
\end{aligned}$$

Рассмотрим случай одномерного пространства. Если в одномерном пространстве неустойчива только одна мода с волновым вектором  $\mathbf{k}_c$  и амплитудой  $\xi_{\mathbf{k}_c}$ , уравнение (17) существенно упрощается:

$$\frac{\partial w(\xi_{\mathbf{k}_c}, \tau)}{\partial \tau} = - \frac{\partial}{\partial \xi_{\mathbf{k}_c}} \left\{ (a \xi_{\mathbf{k}_c} + b \xi_{\mathbf{k}_c}^3) w - (c + d \xi_{\mathbf{k}_c}^2 + e \xi_{\mathbf{k}_c}^4) \frac{\partial w}{\partial \xi_{\mathbf{k}_c}} \right\}. \quad (18)$$

Здесь

$$a = \lambda_1(\mathbf{k}_c) - \frac{1}{2} \sum_{\varphi} \eta_{\varphi}^2(\mathbf{k}_c, \mathbf{k}_c) g_{\varphi\varphi}(0) - \sum_{\varphi} \nu_{\varphi}(\mathbf{k}_c, \mathbf{k}_c, \mathbf{k}_c) O_{\varphi}^{*(1)}(\mathbf{k}_c) p_{\varphi}^{(0)} g_{\varphi\varphi}(\mathbf{k}_c),$$

$$b = \omega(\mathbf{k}_c, \mathbf{k}_c, \mathbf{k}_c, \mathbf{k}_c, 0) - \sum_{\varphi} \nu_{\varphi}^2(\mathbf{k}_c, \mathbf{k}_c, \mathbf{k}_c) g_{\varphi\varphi}(\mathbf{k}_c),$$

$$c = \frac{1}{2} \sum_{\varphi} \left( O_{\varphi}^{*(1)}(\mathbf{k}_c) p_{\varphi}^{(0)} \right)^2 g_{\varphi\varphi}(\mathbf{k}_c),$$

$$d = \frac{1}{2} \sum_{\varphi} \eta_{\varphi}^2(\mathbf{k}_c, \mathbf{k}_c) g_{\varphi\varphi}(0) + \sum_{\varphi} \nu_{\varphi}(\mathbf{k}_c, \mathbf{k}_c, \mathbf{k}_c) O_{\varphi}^{*(1)}(\mathbf{k}_c) p_{\varphi}^{(0)} g_{\varphi\varphi}(\mathbf{k}_c),$$

$$e = \frac{1}{2} \sum_{\varphi} \nu_{\varphi}^2(\mathbf{k}_c, \mathbf{k}_c, \mathbf{k}_c) g_{\varphi\varphi}(\mathbf{k}_c).$$

Стационарное решение уравнения (18) имеет вид

$$w(\xi_{kc}) = \begin{cases} N |c + d\xi_{kc}^2 + e\xi_{kc}^4|^{\frac{b}{4e}} \left| \frac{2e\xi_{kc}^2 + d - \sqrt{d^2 - 4ec}}{2e\xi_{kc}^2 + d + \sqrt{d^2 - 4ec}} \right|^{\frac{2ae-bd}{4e\sqrt{d^2-4ec}}}, & d^2 > 4ec, \\ N |c + d\xi_{kc}^2 + e\xi_{kc}^4|^{\frac{b}{4e}} \exp \left\{ \frac{2ae - bd}{2e\sqrt{4ec - d^2}} \operatorname{arctg} \left( \frac{2e\xi_{kc}^2 + d}{\sqrt{4ec - d^2}} \right) \right\}, & 4ec > d^2. \end{cases} \quad (19)$$

Здесь  $N$  – нормировочная постоянная

$$N = \begin{cases} 1 / \int_{-\infty}^{+\infty} |c + d\xi_{kc}^2 + e\xi_{kc}^4|^{\frac{b}{4e}} \left| \frac{2e\xi_{kc}^2 + d - \sqrt{d^2 - 4ec}}{2e\xi_{kc}^2 + d + \sqrt{d^2 - 4ec}} \right|^{\frac{2ae-bd}{4e\sqrt{d^2-4ec}}} d\xi_{kc}, & d^2 > 4ec, \\ 1 / \int_{-\infty}^{+\infty} |c + d\xi_{kc}^2 + e\xi_{kc}^4|^{\frac{b}{4e}} \exp \left\{ \frac{2ae - bd}{2e\sqrt{4ec - d^2}} \operatorname{arctg} \left( \frac{2e\xi_{kc}^2 + d}{\sqrt{4ec - d^2}} \right) \right\} d\xi_{kc}, & 4ec > d^2. \end{cases} \quad (20)$$

Преимущество развитого подхода при выводе уравнений (17), (18) в сравнении с подходом, изложенным в [7], заключается в том, что стационарное решение УФП записывается в явном виде. Этот подход применим к более широкому классу функций  $P_{1j}(x_1, x_2, \chi_{m+1}, \dots, \chi_{n'})$ ,  $P_{2j}(x_1, x_2, \eta_{l+1}, \dots, \eta_{s'})$ , в том числе и имеющих разрыв второго рода. Кроме того, предложенный подход не содержит произвольного элемента, связанного с дискретизацией непрерывного пространства системы.

#### 4. Шумоиндуцированные эффекты в одной экологической системе

Теория, изложенная в разделах 1–3, была применена для исследования влияния внешних шумов на экологическую систему «фитопланктон–зоопланктон–рыба». Математическая модель этой системы имеет вид [16,17]

$$\begin{aligned} \frac{\partial x_1}{\partial t} &= rx_1(1 - x_1) - \frac{ax_1}{1 + bx_1}x_2 + D_1\nabla^2x_1, \\ \frac{\partial x_2}{\partial t} &= \frac{ax_1}{1 + bx_1}x_2 - mx_2 - \frac{g^2x_2^2}{1 + h^2x_2^2}f + D_2\nabla^2x_2, \end{aligned} \quad (21)$$

где  $x_1, x_2$  – плотности биомассы фитопланктона и зоопланктона соответственно, параметры  $r, a, b, m, g, h, f, D_1$  и  $D_2$  подробно описаны в [16,17]. Параметр  $f$  определяет постоянную численность планктоноядной рыбы. Исследование локальной динамики и бифуркационный анализ системы (21) проведены в работах [16–20].

Введем безразмерные время  $\tau = rt$  и координаты  $\mathbf{x}' = \mathbf{x}\sqrt{r/D_1}$  и представим параметры  $m/r$  и  $a/r$ , зависящие от коэффициентов естественного прироста фитопланктона  $r$ , естественной смертности зоопланктона  $m$  и трофического коэффициента  $a$ , в виде:  $m/r = (m_0/r_0)(1 + f_1(\mathbf{x}', \tau))$ ,  $a/r = (a_0/r_0)(1 + f_2(\mathbf{x}', \tau))$ . Здесь  $m_0, r_0, a_0$  – пространственно-временные средние соответствующих коэффициентов, случайные однородные изотропные поля  $f_i(\mathbf{x}', \tau)$  определяют пространственно-временные



гауссовы флуктуации этих параметров и имеют нулевые средние значения и корреляторы вида (3), (11). Параметр  $m_0$  в этой работе выбран в качестве бифуркационного.

С учетом шумов получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial x_1}{\partial \tau} &= x_1(1 - x_1) - \frac{a_0}{r_0}(1 + f_2(\mathbf{x}', \tau)) \frac{x_1 x_2}{(1 + b x_1)} + \nabla'^2 x_1, \\ \frac{\partial x_2}{\partial \tau} &= \frac{a_0}{r_0}(1 + f_2(\mathbf{x}', \tau)) \frac{x_1 x_2}{(1 + b x_1)} - \\ &- \frac{m_0}{r_0}(1 + f_1(\mathbf{x}', \tau)) x_2 - \frac{g^2 x_2^2}{r_0(1 + h^2 x_2^2)} f + \frac{D_2}{D_1} \nabla'^2 x_2. \end{aligned} \quad (22)$$

Для системы (22) получено дисперсионное уравнение для средних амплитуд неустойчивых мод вида (16) [21]. Зависимости действительной части собственных значений от волновых чисел представлены на рис. 1. Из рис. 1, *a* и *b* видно, что в закритической области ( $m_0 < m_{0c}$ ) при увеличении интенсивностей внешних шумов  $\theta_1$  и  $\theta_2$ , область неустойчивости, в которой  $\text{Re } \lambda > 0$ , увеличивается и абсолютное значение инкрементов средних амплитуд неустойчивых мод в присутствии шума больше, чем при  $\theta_1 = \theta_2 = 0$ . Следовательно, при наличии мультипликативного шума амплитуды неустойчивых мод в среднем нарастают значительно быстрее, чем в его отсутствии, что ускоряет процесс образования пространственных диссипативных структур по сравнению с детерминированной системой.

На рис. 1, *в* приведены зависимости  $\text{Re } \lambda(k)$  в докритической области ( $m_0 > m_{0c}$ ). Сплошной линией показана соответствующая зависимость при отсутствии шума. Видно, что в этом случае неустойчивость не возникает. При наличии же шумов (линии пунктирная и пунктирная с точкой на рис. 1, *в*) возникает область, в которой  $\text{Re } \lambda > 0$ , то есть существует критическая интенсивность шума, при которой индуцируется параметрическая

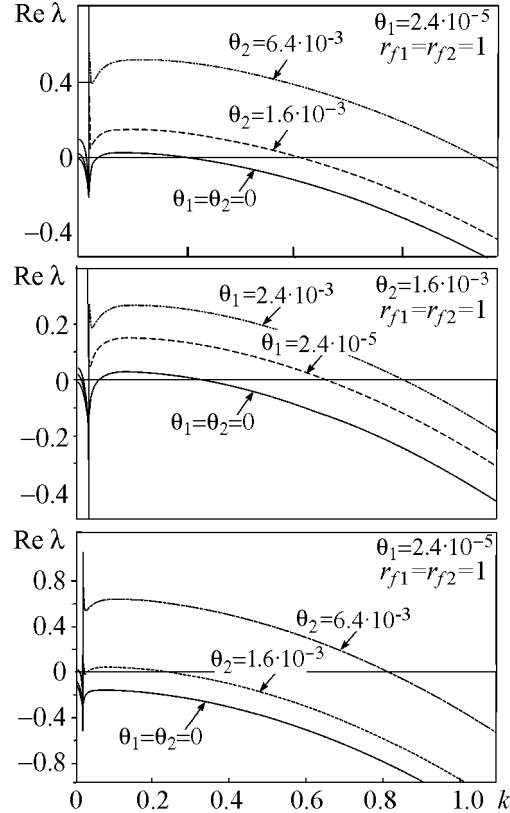


Рис. 1. Характерные зависимости действительных частей собственных значений  $\text{Re } \lambda$  от волновых чисел  $k$  для системы (22): *a* – в закритической области ( $m_0 = 0.49$ ) при изменении  $\theta_2$ ,  $\theta_1 = 2.4 \cdot 10^{-5}$ ;  $\theta_2 = 1.6 \cdot 10^{-3}$ ; *б* – в закритической области при изменении  $\theta_1$ ,  $\theta_2 = 1.6 \cdot 10^{-3}$ ; *в* – в докритической области ( $m_0 = 0.51$ ) при изменении  $\theta_2$ ,  $\theta_1 = 2.4 \cdot 10^{-5}$ . Для сравнения значений  $\text{Re } \lambda$  на рисунках приведены кривые при  $\theta_1 = \theta_2 = 0$ . Другие параметры модели:  $r_0 = 1$ ,  $a_0 = 8$ ,  $g = 1.434$ ,  $f = 0.093$ ,  $h = 0.857$ ,  $b = 11.905$ ,  $D_1/D_2 = 1000$ .  $r_{f1} = r_{f2} = 1$ . Критическое значение бифуркационного параметра  $m_{0c} = 0.50$

неустойчивость системы 22). Фазовый переход с образованием структур в присутствии шумов происходит в докритической области (то есть раньше, чем при детерминистическом описании).

Разрыв второго рода в зависимости  $\text{Re } \lambda(k)$  обусловлен выбором компонент собственных векторов сопряженного оператора и не влияет на вышеприведенный анализ.

В докритической области состояние системы является однородным статистически стационарным. Этому соответствует одномодальная плотность распределения вероятности. Возникновение неоднородного статистически стационарного состояния проявляется в расщеплении максимума плотности распределения вероятности на два симметричных.

Для системы (22) было получено УФП для плотности распределения вероятности критической моды, имеющее вид (18). На рис. 2 представлено изменение плотности стационарного распределения вероятности этой моды при увеличении интенсивности шумов при переходе через точку бифуркации  $m_{0c}$ . Рис. 2, *a* иллюстрирует плотность распределения вероятности, соответствующую однородному статистически стационарному состоянию системы в докритической области. Рис. 2, *б-г*

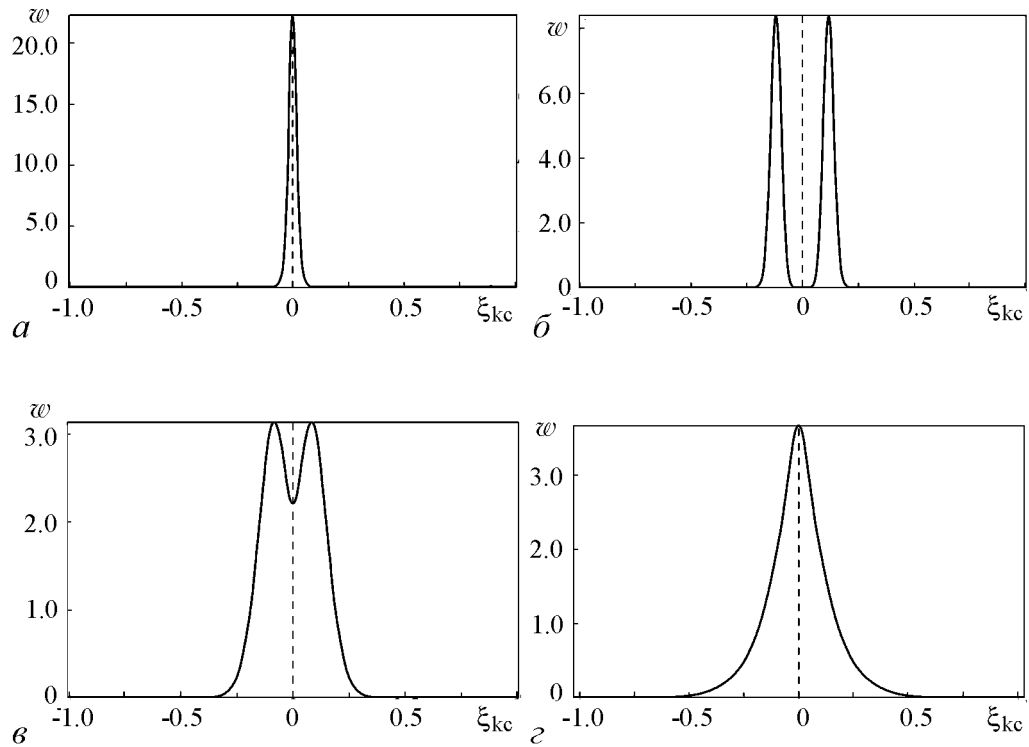


Рис. 2. Плотность стационарного распределения вероятности (19) для системы (22). *a* – Докритическая область:  $m_0 = 0.51$ ,  $\theta_2 = 6.4 \cdot 10^{-4}$ ,  $\theta_1 = 2.4 \cdot 10^{-5}$ . *б* – Закритическая область:  $m_0 = 0.49$ ,  $\theta_1 = 2.4 \cdot 10^{-5}$ ,  $\theta_2 = 6.4 \cdot 10^{-5}$ . *в* – Закритическая область:  $\theta_1 = 2.4 \cdot 10^{-5}$ ,  $\theta_2 = 6.4 \cdot 10^{-4}$ . *г* – Закритическая область  $\theta_1 = 2.4 \cdot 10^{-5}$ ,  $\theta_2 = 6.4 \cdot 10^{-3}$ . Другие параметры модели:  $r_0 = 1$ ,  $a_0 = 8$ ,  $g = 1.434$ ,  $f = 0.093$ ,  $h = 0.857$ ,  $b = 11.905$ ,  $D_1/D_2 = 1000$ .  $r)f_1 = r_f_2 = 1$ . Критическое значение бифуркационного параметра  $m_{0c} = 0.50$

демонстрируют плотность распределения вероятности в закритической области при различных интенсивностях шума. Бимодальные распределения (см. рис. 2, б и в) соответствуют существованию диссипативных структур. При этом математическое ожидание параметра порядка становится отличным от нуля. Из этих рисунков видно, что при увеличении интенсивности шумов происходит постепенное слияние максимумов, и при втором критическом значении интенсивности шума система переходит в состояние сильно нерегулярного поведения (рис. 2, г). Таким образом, полученное изменение плотности стационарного распределения вероятности свидетельствует о существовании в системе (22) фазового перехода «беспорядок–порядок–беспорядок».

Следует заметить, что в работе [22] было проведено исследование влияния внешнего шума на систему Гирера–Майнхардта, являющуюся базовой в понимании процессов биологического формообразования и дифференциации клеток. Результаты исследований показали качественное совпадение особенностей динамического поведения этой системы с системой (22). Поэтому подобного поведения следует ожидать и от других систем реакция–диффузия в поле внешних шумов.

### Заключение

С единой точки зрения концепции параметров порядка развита теория, позволяющая предсказывать и исследовать шумоиндуцированные эффекты, возникающие в системах реакция–диффузия во внешних шумах.

Получены стохастические уравнения для амплитуд неустойчивых мод (параметров порядка) и дисперсионные уравнения для усредненных по ансамблю реализаций амплитуд неустойчивых мод. Аналитически найдена зависимость инкрементов усредненных по ансамблю реализаций амплитуд неустойчивых мод от волнового числа, интенсивности и радиуса корреляции шума. Показано, что мультипликативные шумы параметров системы приводят к изменению собственных значений задачи, а также к расширению области неустойчивости системы, изменению условий резонансного взаимодействия мод, шумоиндуцированной параметрической неустойчивости (смещению точки бифуркации Тьюринга в докритическую область) и уменьшению времени разрушения статистически стационарного однородного состояния и спонтанного образования пространственных диссипативных структур при увеличении интенсивности внешнего шума.

Получено уравнение Фоккера–Планка для параметров порядка рассматриваемых систем. Показано, что в таких системах существует шумоиндуцированный фазовый переход «беспорядок–порядок–беспорядок».

Авторы выражают глубокую благодарность профессору Ю.М. Романовскому за постоянное внимание к работе, полезные обсуждения и ценные замечания.

*Работа частично поддержана АВЦП «Развитие научного потенциала высшей школы» (2009–2011 гг.), проект 2.1.1/309, ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 гг., ГК № П2315.*

Функции, введенные в уравнениях (10):

$$\sigma_{j'j''}^{(j)}(\mathbf{k}, \mathbf{k}', \mathbf{k}'') = \sum_{\varepsilon, \mu, \nu} g_{\varepsilon, \mu \nu}^{(2)} O_{\varepsilon}^{*(j)}(\mathbf{k}) O_{\mu}^{(j')}(\mathbf{k}') O_{\nu}^{(j'')}(\mathbf{k}''),$$

$$\sigma_{j'j''j'''}^{(j)}(\mathbf{k}, \mathbf{k}', \mathbf{k}'', \mathbf{k}''') = \sum_{\varepsilon, \mu, \nu, \kappa} g_{\varepsilon, \mu \nu \kappa}^{(3)} O_{\varepsilon}^{*(j)}(\mathbf{k}) O_{\mu}^{(j')}(\mathbf{k}') O_{\nu}^{(j'')}(\mathbf{k}'') O_{\kappa}^{(j''')}(\mathbf{k}'''),$$

$$\varepsilon_{\varphi, j'}^{(j)}(\mathbf{k}, \mathbf{k}') = \sum_{\mu} p_{\varphi, \mu}^{(1)} O_{\mu}^{*(j)}(\mathbf{k}) O_{\mu}^{(j')}(\mathbf{k}'),$$

$$\varepsilon_{\varphi, j'j''}^{(j)}(\mathbf{k}, \mathbf{k}', \mathbf{k}'') = \sum_{\mu, \nu} p_{\varphi, \mu \nu}^{(2)} O_{\mu}^{*(j)}(\mathbf{k}) O_{\mu}^{(j')}(\mathbf{k}') O_{\nu}^{(j'')}(\mathbf{k}'').$$

Функции, введенные в уравнениях (14):

$$\begin{aligned} \omega(\mathbf{k}_u, \mathbf{k}'_u, \mathbf{k}''_u, \mathbf{k}'''_u, \mathbf{k}_u - \mathbf{k}'_u) &= \sigma_{111}^{(1)}(\mathbf{k}_u, \mathbf{k}'_u, \mathbf{k}''_u, \mathbf{k}'''_u) - \\ &- \frac{(\sigma_{11}^{(1)}(\mathbf{k}_u, \mathbf{k}'_u, \mathbf{k}_s) + \sigma_{11}^{(1)}(\mathbf{k}_u, \mathbf{k}_s, \mathbf{k}'_u))}{\lambda_1(\mathbf{k}_s)} \sigma_{11}^{(1)}(\mathbf{k}_s, \mathbf{k}''_u, \mathbf{k}'''_u) - \\ &- \frac{(\sigma_{12}^{(1)}(\mathbf{k}_u, \mathbf{k}'_u, \mathbf{k}_s) + \sigma_{21}^{(1)}(\mathbf{k}_u, \mathbf{k}_s, \mathbf{k}'_u))}{\lambda_2(\mathbf{k}_s)} \sigma_{11}^{(2)}(\mathbf{k}_s, \mathbf{k}''_u, \mathbf{k}'''_u), \end{aligned}$$

$$\zeta_{\varphi, \psi, \varphi'}(\mathbf{k}_u, \mathbf{k}_s) = \varepsilon_{\varphi, \psi}^{(1)}(\mathbf{k}_u, \mathbf{k}_s) \frac{O_{\varphi'}^{*(\psi)}(\mathbf{k}_s)}{\lambda_{\psi}(\mathbf{k}_s)} p_{\varphi'}^{(0)},$$

$$\begin{aligned} \eta_{\varphi}(\mathbf{k}_u, \mathbf{k}'_u) &= \varepsilon_{\varphi, 1}^{(1)}(\mathbf{k}_u, \mathbf{k}'_u) - \\ &- \sum_{\psi=1}^2 [\sigma_{1\psi}^{(1)}(\mathbf{k}_u, \mathbf{k}'_u, \mathbf{k}_u - \mathbf{k}'_u) + \sigma_{\psi 1}^{(1)}(\mathbf{k}_u, \mathbf{k}_u - \mathbf{k}'_u, \mathbf{k}'_u)] \frac{O_{\varphi}^{*(\psi)}(\mathbf{k}_u - \mathbf{k}'_u)}{\lambda_{\psi}(\mathbf{k}_u - \mathbf{k}'_u)} p_{\varphi}^{(0)}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \nu_{\varphi}(\mathbf{k}_u, \mathbf{k}'_u, \mathbf{k}''_u) &= \varepsilon_{\varphi, 11}^{(1)}(\mathbf{k}_u, \mathbf{k}'_u, \mathbf{k}''_u) - \\ &- \sum_{\psi=1}^2 [\sigma_{1\psi}^{(1)}(\mathbf{k}_u, \mathbf{k}'_u, \mathbf{k}_u - \mathbf{k}'_u) + \sigma_{\psi 1}^{(1)}(\mathbf{k}_u, \mathbf{k}_u - \mathbf{k}'_u, \mathbf{k}'_u)] \frac{\varepsilon_{\varphi, 1}^{(\psi)}(\mathbf{k}_u - \mathbf{k}'_u, \mathbf{k}''_u)}{\lambda_{\psi}(\mathbf{k}_u - \mathbf{k}'_u)} - \\ &- \sum_{\psi, \varphi=1}^2 \varepsilon_{\varphi, \psi}^{(1)}(\mathbf{k}_u, \mathbf{k}'_u + \mathbf{k}''_u) \frac{\sigma_{11}^{(\psi)}(\mathbf{k}_u, \mathbf{k}'_u, \mathbf{k}''_u)}{\lambda_{\psi}(\mathbf{k}'_u + \mathbf{k}''_u)}, \end{aligned}$$

$$A_{\varphi,\psi,\varphi'}(\mathbf{k}_u, \mathbf{k}_s, \mathbf{k}'_u) = \varepsilon_{\varphi,\psi}^{(1)}(\mathbf{k}_u, \mathbf{k}_s) \frac{\varepsilon_{\varphi',1}^{(\psi)}(\mathbf{k}_s, \mathbf{k}'_u)}{\lambda_{\psi}(\mathbf{k}_s)},$$

$$B_{\varphi,\psi,\varphi'}(\mathbf{k}_u, \mathbf{k}_s, \mathbf{k}'_u) = [\varepsilon_{\varphi,1\psi}^{(1)}(\mathbf{k}_u, \mathbf{k}'_u, \mathbf{k}_s) + \varepsilon_{\varphi,\psi 1}^{(1)}(\mathbf{k}_u, \mathbf{k}_s, \mathbf{k}'_u)] \frac{O_{\varphi'}^{*(\psi)}(\mathbf{k}_s)}{\lambda_{\psi}(\mathbf{k}_s)} p_{\varphi'}^{(0)},$$

$$C_{\varphi,\psi,\varphi'}(\mathbf{k}_u, \mathbf{k}_s, \mathbf{k}'_u, \mathbf{k}''_u) = \varepsilon_{\varphi,\psi}^{(1)}(\mathbf{k}_u, \mathbf{k}_s) \frac{\varepsilon_{\varphi',11}^{(\psi)}(\mathbf{k}_s, \mathbf{k}'_u, \mathbf{k}''_u)}{\lambda_{\psi}(\mathbf{k}_s)},$$

$$D_{\varphi,\psi,\varphi'}(\mathbf{k}_u, \mathbf{k}'_u, \mathbf{k}_s, \mathbf{k}''_u) = (\varepsilon_{\varphi,1\psi}^{(1)}(\mathbf{k}_u, \mathbf{k}'_u, \mathbf{k}_s) + \varepsilon_{\varphi,\psi 1}^{(1)}(\mathbf{k}_u, \mathbf{k}_s, \mathbf{k}'_u)) \frac{\varepsilon_{\varphi',1}^{(\psi)}(\mathbf{k}_s, \mathbf{k}''_u)}{\lambda_{\psi}(\mathbf{k}_s)},$$

$$E_{\psi,\varphi}(\mathbf{k}_u, \mathbf{k}'_u, \mathbf{k}_u - \mathbf{k}'_u, \mathbf{k}''_u, \mathbf{k}'''_u) = (\sigma_{1\psi}^{(1)}(\mathbf{k}_u, \mathbf{k}'_u, \mathbf{k}_u - \mathbf{k}'_u) + \sigma_{\psi 1}^{(1)}(\mathbf{k}_u, \mathbf{k}_u - \mathbf{k}'_u, \mathbf{k}'_u)) \times \\ \times \frac{\varepsilon_{\varphi,11}^{(\psi)}(\mathbf{k}_u - \mathbf{k}'_u, \mathbf{k}''_u, \mathbf{k}'''_u)}{\lambda_{\psi}(\mathbf{k}_u - \mathbf{k}'_u)},$$

$$F_{\psi,\varphi}(\mathbf{k}_u, \mathbf{k}'_u, \mathbf{k}''_u, \mathbf{k}'''_u) = [\varepsilon_{\varphi,1\psi}^{(1)}(\mathbf{k}_u, \mathbf{k}'_u, \mathbf{k}''_u + \mathbf{k}'''_u) + \varepsilon_{\varphi,\psi 1}^{(1)}(\mathbf{k}_u, \mathbf{k}''_u + \mathbf{k}'''_u, \mathbf{k}'_u)] \times \\ \times \frac{\sigma_{11}^{(\psi)}(\mathbf{k}''_u + \mathbf{k}'''_u, \mathbf{k}''_u, \mathbf{k}'''_u)}{\lambda_{\psi}(\mathbf{k}''_u + \mathbf{k}'''_u)},$$

$$G_{\psi,\varphi,\varphi'}(\mathbf{k}_u, \mathbf{k}'_u, \mathbf{k}_s, \mathbf{k}''_u, \mathbf{k}'''_u) = (\varepsilon_{\varphi,1\psi}^{(1)}(\mathbf{k}_u, \mathbf{k}'_u, \mathbf{k}_s) + \varepsilon_{\varphi,\psi 1}^{(1)}(\mathbf{k}_u, \mathbf{k}_s, \mathbf{k}'_u)) \times \\ \times \frac{\varepsilon_{\varphi',11}^{(\psi)}(\mathbf{k}_s, \mathbf{k}''_u, \mathbf{k}'''_u)}{\lambda_{\psi}(\mathbf{k}_s)}.$$

## Библиографический список

1. Lindner B., García-Ojalvo J., Neiman A., Schimansky-Geier L. Effects of noise in excitable systems // *Physics Reports*. 2004. Vol. 392. P. 321.
2. García-Ojalvo J., Sancho J.M. Noise in spatially extended systems. New York: Springer Verlag, 1999.
3. Van den Broeck C., Parrondo J.M.R., Toral R. Noise-induced nonequilibrium phase transition // *Phys. Rev. Lett.* 1994. Vol. 73. P. 3395.
4. Genovese W., Muñoz M.A., Sancho J.M. Nonequilibrium transitions induced by multiplicative noise // *Phys. Rev. E*. 1998. Vol. 57. P. R2495.

5. *Landa P.S., Zaikin A.A., Schimansky-Geier L.* Influence of additive noise on noise-induced phase transition on nonlinear chains // *Chaos, Solitons & Fractals*. 1998. Vol. 9. P. 1367.
6. *Zaikin A.A., Schimansky-Geier L.* Spatial patterns induced by additive noise // *Phys. Rev. E*. 1998. Vol. 58. P. 4355.
7. *Ibañes M., García-Ojalvo J., Toral R., Sancho J.M.* Noise-induced phase separation: Mean-field results // *Phys. Rev. E*. 1999. Vol. 60. P. 3597.
8. *Хакен Г.* Синергетика. М.: Мир, 1980.
9. *Курушина С.Е.* Аналитическое исследование и численное моделирование контрастных диссипативных структур в поле флуктуаций динамических переменных // *Изв. вузов. ПНД*. 2009. Т. 17, № 6. С. 125.
10. *Хорстхемке В., Лефевр Р.* Индуцированные шумом переходы: теория и применение в физике, химии и биологии. М.: Мир, 1987.
11. *Курушина С.Е.* Моделирование динамики пространственно-распределенных систем типа «реакция-диффузия» с внешними флуктуациями. Дисс. ... докт. физ.-мат. наук. Самара, СГАУ, 2010.
12. *Рытов С.М.* Введение в статистическую радиофизику. М.: Наука, 1966.
13. *Стратонович Р.Л.* Нелинейная неравновесная термодинамика. М.: Наука, 1985.
14. *Кляцкин В.И.* Стохастические уравнения глазами физика. М.: Физматлит, 2001.
15. *Стратонович Р.Л.* Случайные процессы в динамических системах. Москва; Ижевск: ИКИ, 2009.
16. *Scheffer M.* Fish and nutrients interplay determines algal biomass: A minimal model // *OIKOS*. 1991. Vol. 62. P. 271.
17. *Malchow H.* Motional instabilities in prey-predator systems // *J. Theor. Biol.* 2000. Vol. 204. P. 639.
18. *Malchow H.* Spatiotemporal pattern formation in nonlinear non-equilibrium plankton dynamics // *Procc. R. Soc. Lond. B*. 1993. Vol. 251. P. 103.
19. *Satnoianu R.A., Menzinger M.* Non-turing stationary patterns in flow-distributed oscillators with general diffusion and flow rates // *Phys. Rev. E*. 2000. Vol. 62, № 1. P. 113.
20. *Satnoianu R.A., Menzinger M., Maini P.K.* Turing instabilities in general systems // *J. Math. Biol.* 2000. Vol. 41, № 6. P. 493.
21. *Курушина С.Е., Завершинский И.П., Максимов В.В. и др.* Моделирование пространственно-временных структур в системе хищник-жертва во внешней флуктуирующей среде // *Математическое моделирование*. 2010. Т. 22, № 10. С. 3.
22. *Курушина С.Е., Иванов А.А.* Диссипативные структуры в системе реакция-диффузия в поле мультипликативных флуктуаций // *Изв. вузов. ПНД*. 2010. Т. 18, № 3. С. 85.

*Самарский государственный  
аэрокосмический университет*

*Поступила в редакцию 29.07.2011*

# STOCHASTIC EQUATIONS AND FOKKER–PLANCK EQUATION FOR THE ORDER PARAMETERS IN THE STUDY OF THE NOISE–INDUCED SPATIAL PATTERNS DYNAMICS

*S.E. Kurushina, L.I. Gromova, V.V. Maximov*

From the viewpoint of the order parameters concept spatial pattern formation in excitable fluctuating medium was researched analytically. The reaction–diffusion system in external noise was considered as a model of such medium. Stochastic equations for the unstable modes amplitudes (order parameters) and the dispersion equations for the average unstable modes amplitudes were received. Fokker–Planck equation for the order parameters was received. The developed theory allows studying noise–induced effects, including variation boundaries of ordering and disordering phase transitions in dependence on the parameters of external noise.

*Keywords:* Spatial patterns, external noise, phase transitions, order parameters.

*Курушина Светлана Евгеньевна* – родилась в Куйбышеве (1971), окончила Самарский государственный университет (1994). После окончания СГУ работает в Самарском государственном аэрокосмическом университете. Защитила диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук в СГАУ (2002) по специальности 01.04.05 – Оптика и доктора физико-математических наук в СГАУ (2010) по специальности 05.13.18 – Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ. Опубликовала 65 научных работ. Область научных интересов: оптика, теория колебаний, волн, структур; динамика нелинейных стохастических систем; теория самоорганизации; прикладная математика; стохастические уравнения.



443086 Самара, Московское шоссе, 34  
Самарский государственный аэрокосмический университет  
им. академика С.П. Королева  
E-mail: kurushina72@mail.ru

*Громова Лидия Ивановна* – родилась в Москве (1938), окончила Куйбышевский государственный педагогический институт (1961). В настоящее время работает в Самарском государственном аэрокосмическом университете. Защитила диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук в КГПИ (1969) в области магнитных явлений в твердых телах. Опубликовала более 70 научных работ. Область научных интересов: теория колебаний, волн, структур; теория самоорганизации.

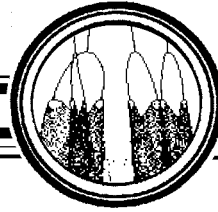


443086 Самара, Московское шоссе, 34  
Самарский государственный аэрокосмический университет  
им. академика С.П. Королева  
E-mail: kurushina72@mail.ru

*Максимов Валерий Владимирович* – родился в поселке Усть-Омчуг, Магаданской области (1952). Окончил Куйбышевский авиационный институт (1976). После окончания КуАИ работал в ЦСКБ «Прогресс». С 1979 г. работает в КуАИ – СГАУ. Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата технических наук в КуАИ (1987) по специальности 05.07.05 – Тепловые двигатели летательных аппаратов. Опубликовал более 60 научных работ. Имеет 6 авторских свидетельств в области двигателестроения и плазменного напыления. Область научных интересов: теория колебаний и волн; динамика нелинейных стохастических систем; теория самоорганизации.



443086 Самара, Московское шоссе, 34  
Самарский государственный аэрокосмический университет  
им. академика С.П. Королева  
E-mail: maksimov52@mail.ru



**ИССЛЕДОВАНИЕ ВОЗБУЖДЕНИЯ СИСТЕМЫ  
ДВУХ СВЯЗАННЫХ ОСЦИЛЛЯТОРОВ ВАН ДЕР ПОЛЯ  
ВНЕШНИМ СИГНАЛОМ ПРИ ПЕРЕХОДЕ АВТОНОМНОЙ  
СИСТЕМЫ В РЕЖИМ «ГИБЕЛИ КОЛЕБАНИЙ»**

*А.П. Кузнецов, Е.П. Селезнев, Н.В. Станкевич*

В работе исследуется система двух связанных осцилляторов ван дер Поля в режиме синхронизации 1:1 и гибели колебаний, возбуждаемая периодическим импульсным сигналом. В радиофизическом эксперименте продемонстрировано существование «островов» квазипериодических режимов на плоскости параметров период – амплитуда воздействия, а также даны иллюстрации различных типов колебаний в системе.

*Ключевые слова:* Связанные осцилляторы, режим гибели колебаний, квазипериодические режимы, импульсное воздействие.

### Введение

В последнее время активно исследуются различные аспекты задачи о динамике связанных нелинейных систем. В природе практически невозможно встретить изолированную систему, так что исследования связанных динамических систем различной природы (физических, химических, биологических, социальных и т.д.) имеют большое значение для многих областей науки [1–8]. Взаимодействие связанных автоколебательных осцилляторов приводит к новым эффектам, таким как синхронизация, гистерезис, фазовая мультистабильность и т.д. Также одним из интересных явлений в связанных автоколебательных системах является эффект гибели колебаний (*amplitude death, oscillator death*). Этот эффект состоит в том, что в результате взаимодействия осцилляторов с увеличением связи происходит гашение автоколебаний и переход к устойчивому состоянию равновесия. Впервые данный эффект был обнаружен экспериментально в химических системах<sup>1</sup> [9,10]. На сегодняшний день исследованию эффекта гибели колебаний в различных аспектах посвящено достаточно большое количество работ, например, [9–27].

Наиболее простой случай, когда в системе может проявиться эффект гибели колебаний – это диссипативно связанные автоколебательные осцилляторы с различными собственными частотами. Связь между осцилляторами должна быть достаточно велика, так как она привносит в каждый из осцилляторов дополнительное

<sup>1</sup> Иногда его называют «эффект Бар-Эли», по имени автора.



затухание, и оно не может быть компенсировано за счет энергии другого осциллятора. При этом должна быть достаточно велика и частотная расстройка, поскольку в противном случае скорости осцилляторов близки, и диссипативная связь будет недостаточной для подавления автоколебаний, так что возникает режим синхронизации [1,13]. Теоретическое рассмотрение этого эффекта было дано в [13]. Также он был обнаружен в целом ряде физических систем, например, в паре связанных термооптических осцилляторов [17].

В работах [18,21] продемонстрирована возможность эффекта гибели колебаний в системах связанных идентичных по частоте осцилляторов, но с нелинейной связью. Возможность реализации режима гибели колебаний обнаружена также для систем связанных осцилляторов с одинаковыми частотами и с запаздыванием [15,16]. Для связанных систем с запаздыванием данный эффект проявляется не только в том случае, когда несвязанные подсистемы демонстрируют периодическое поведение, но и для осцилляторов в хаотическом режиме [19]. Эффект гибели колебаний для хаотических осцилляторов Ресслера наблюдался в [28]. В недавней работе [29] демонстрируется возможность эффекта гибели колебаний в хаотических системах Ресслера и Лоренца, а также обсуждается обобщенный характер данного эффекта. Отметим, что эффект гибели колебаний наблюдается и в случае связи разнотипных систем, например осциллятора ван дер Поля и брюсселятора [30] или осциллятора ван дер Поля и автогенератора Кислова–Дмитриева [31].

Таким образом, можно сказать, что эффект гибели колебаний носит общий характер для систем связанных автоколебательных осцилляторов. Об этом также можно судить по тому, что он был обнаружен в экспериментах для систем различной природы: химических [9,10], физических [11,15,16], электрохимических [24] и электробиологических [23].

Интересным представляется вопрос о динамике возбуждаемой внешним сигналом системы двух автоколебательных осцилляторов, которые в отсутствие внешнего сигнала могут демонстрировать переход в режим «гибели колебаний». На первый взгляд представляется, что система в этом случае будет вести себя просто как диссипативный осциллятор. Оказывается, это не совсем так. Наблюдается более сложное поведение системы, в частности, выявляется картина определенных трансформаций квазипериодических режимов, которая и является предметом численного и экспериментального исследования в настоящей работе<sup>2</sup>.

## 1. Динамика возбуждаемой импульсами системы двух диссипативно связанных осцилляторов ван дер Поля

Рассматривается система возбуждаемых импульсами двух связанных автоколебательных осцилляторов ван дер Поля

$$\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} - (\lambda - x^2) \frac{dx}{dt} + x + \mu \left( \frac{dx}{dt} - \frac{dy}{dt} \right) &= A \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT), \\ \frac{d^2y}{dt^2} - (\lambda - y^2) \frac{dy}{dt} + (1 + \Delta)y + \mu \left( \frac{dy}{dt} - \frac{dx}{dt} \right) &= 0. \end{aligned} \quad (1)$$

<sup>2</sup>Следует отметить, что задача о возбуждении пассивных осцилляторов внешним сигналом [32] не дает возможность пронаблюдать соответствующую трансформацию картины от «традиционной» системы языков Арнольда, погруженных в область квазипериодических колебаний.

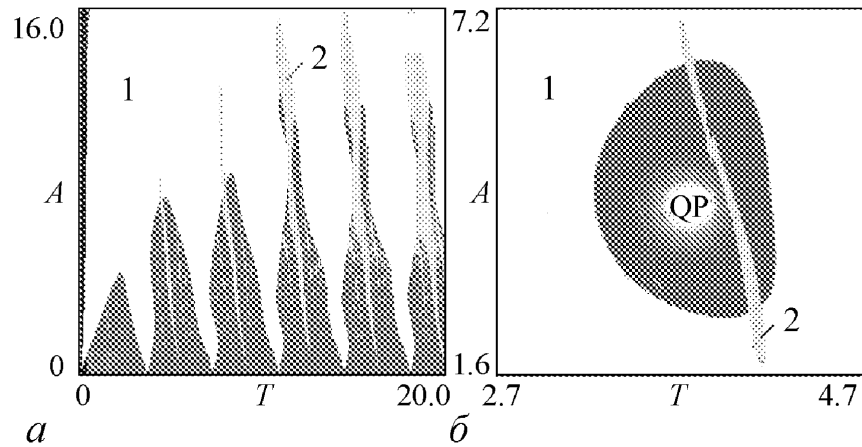


Рис. 1. Плоскость параметров период  $T$  - амплитуда воздействия  $A$  возбуждаемой системы (1) при  $\lambda = 1$ ,  $\mu = 1.3$ :  $a$  - в случае, когда система демонстрирует режим синхронизации 1:1,  $\Delta = 4$ ;  $b$  - когда система демонстрирует режим гибели колебаний,  $\Delta = 6$

Здесь  $x, y$  - динамические переменные;  $\lambda$  - параметр, характеризующий степень превышения порога бифуркации Андронова-Хопфа в отдельных осцилляторах;  $\Delta$  - частотная расстройка второго осциллятора относительно первого в отсутствие связи;  $\mu$  - коэффициент диссипативной связи;  $A$  - амплитуда импульсов;  $T$  - период воздействия. Внешнее воздействие выбираем в виде коротких импульсов, периодически сообщаящих системе определенный «толчок»<sup>3</sup>.

На рис. 1 представлены две карты динамических режимов для системы (1) на плоскости параметров период  $T$  - амплитуда  $A$  воздействия. Карты построены следующим образом: в каждой точке плоскости параметров в стробоскопическом сечении Пуанкаре определялся период режима, реализующегося в системе, в соответствии с этим точка плоскости параметров окрашивалась в тот или иной цвет. На карте белый цвет отвечает режиму периода 1, светло-серый - режиму периода 2 и т.д.; черный цвет соответствует неперiodическим режимам. Внешнее воздействие подавалось на систему связанных осцилляторов в режиме синхронизации с соотношением частот 1:1 (рис. 1,  $a$ ) и в режиме гибели колебаний (рис. 1,  $b$ ).

При этом обнаруживаются следующие особенности. Когда в автономной системе наблюдается захват частот колебаний осцилляторов с соотношением 1:1, в неавтономном режиме картина синхронизации (см. рис. 1,  $a$ ) в определенной мере аналогична случаю воздействия импульсами на отдельный осциллятор ван дер Поля [37]. Имеется набор языков синхронизации (основных и высших порядков), встроенных в область квазипериодических режимов.

При переходе связанных осцилляторов в режим гибели колебаний (см. рис. 1,  $b$ ) области квазипериодических режимов «отрываются» от оси нулевой амплитуды воздействия и образуют отдельные изолированные «острова». Некоторые из областей периодических режимов, например, область периода 2, образуют узкие «окна»

<sup>3</sup>Такой тип сигнала достаточно популярен в нелинейной динамике [33-36]. Например, воздействие короткими импульсами на нелинейный осциллятор Дуффинга приводит к одной из эталонных моделей нелинейной динамики - отображению Икеды [35,36].

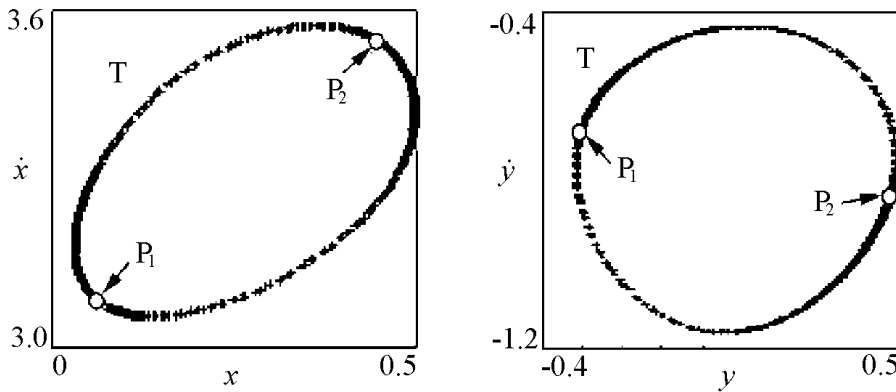


Рис. 2. Проекции стробоскопических сечений Пуанкаре на плоскости  $(x, \dot{x})$  и  $(y, \dot{y})$ :  $T$  – инвариантная кривая для квазипериодического режима,  $P_1, P_2$  – 2-цикл, рождающийся из инвариантной кривой

периодичности, пересекающие острова. «Окна» сформировались из высших языков синхронизации разной кратности. На рис. 2 изображены стробоскопические сечения Пуанкаре первого и второго осцилляторов для такого «окна», отвечающие 2-циклу (на рисунке указаны стрелками и буквами  $P_1, P_2$ ) и инвариантной кривой ( $T$ ). Можно видеть, что наблюдаемые периодические режимы являются результатом синхронизации на инвариантной кривой (торе для исходной системы).

Квазипериодические режимы наблюдаются внутри всей черной области на рис. 1, б, что можно проиллюстрировать с помощью анализа спектра показателей Ляпунова. На рис. 3 изображены графики зависимости двух старших показателей Ляпунова от периода воздействия системы (1). Так как система неавтономная, то размерность ее фазового пространства  $N = 5$ , соответственно, она имеет 5 показателей Ляпунова, один из которых всегда равен нулю и два наименьших показателя – всегда отрицательные. Зависимость двух оставшихся показателей от параметра  $T$  представлена на рис. 3. Светло-серым изображен первый (старший) показатель Ляпунова, темно-серым – второй, точками отмечены области, где первый и второй показатели имеют одинаковые значения. Как видно из рисунка, второй показатель всегда отрицателен, а старший в некотором интервале параметра  $T$  становится нулевым, что подтверждает квазипериодический характер наблюдаемого режима. Хорошо виден «провал» старшего показателя Ляпунова в отрицательную область, соответствующий языку синхронизации высшего порядка.

При дальнейшем продвижении в область гибели колебаний в системе без воздействия, то есть при увеличении частотной расстройки  $\Delta$  осцилляторов, в неавтономной системе (1) на плоскости параметров период – амплитуда внешнего сигнала острова квазипериодических режимов постепенно уменьшаются в размерах и поэтапно «вымирают».

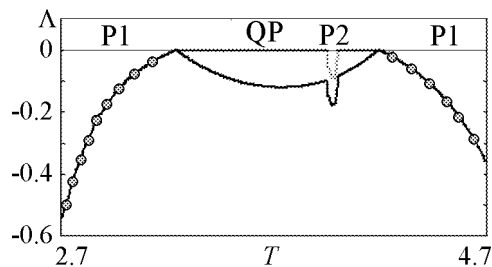


Рис. 3. Графики зависимости двух старших показателей Ляпунова от периода воздействия при пересечении острова по линии постоянной амплитуды  $A = 4.3$  ( $\lambda = 1, \mu = 1.3, \Delta = 6$ )

## 2. Экспериментальное исследование

Теперь перейдем к экспериментальному исследованию системы двух диссипативно связанных осцилляторов ван дер Поля под импульсным воздействием. Схема экспериментальной установки (рис. 4) включает в себя два автогенератора – обозначены  $\Gamma 1$  и  $\Gamma 2$ . Каждый из генераторов состоит из колебательного контура, образованного катушкой индуктивности  $L$  и конденсатором  $C_{1,2}$ , нелинейных элементов в виде встречно-параллельно включенных полупроводниковых диодов  $D_{1-6}$ ; возбуждение автоколебаний осуществляется за счет отрицательного сопротивления  $-r$ , собранного на основе операционных усилителей ОУ4 и ОУ7. Связь обеспечивается переменным резистором  $R_C$ , включенным между идентичными точками автогенераторов. На генератор 1 подается внешнее воздействие в виде коротких прямоугольных импульсов положительной полярности, формируемых стандартным генератором типа Г5-54. Операционный усилитель ОУ1 используется для развязки импульсного генератора и исследуемой схемы, ОУ2 и ОУ3 используются для развязки измерительных приборов, а ОУ5 и ОУ6 – для дифференцирования выходных сигналов автогенераторов. Конденсатор переменной емкости  $C_6$  использовался для плавной, а ключи  $K_1 - K_3$  и конденсаторы  $C_3 - C_5$  – для ступенчатой перестройки частоты генератора 2. Параметры соответствующих элементов генераторов: индуктивностей колебательных контуров, диодов, элементов с отрицательным сопротивлением, дифференцирующих усилителей – подбирались близкими.

На рис. 5 приведена упрощенная схема экспериментальной установки. Записав закон Кирхгофа для узловых точек, обозначенных  $U$  и  $\tilde{U}$  на схеме, и предпо-

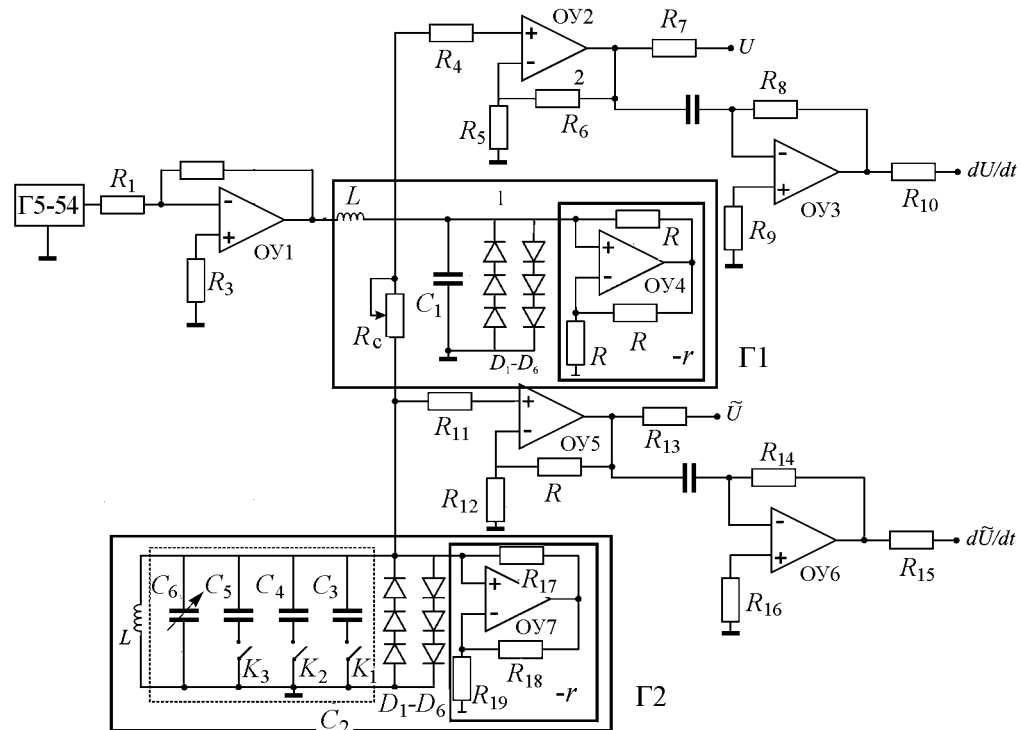


Рис. 4. Схема экспериментальной установки двух связанных автогенераторов под импульсным воздействием

ложив, что вольт-амперная характеристика диода описывается выражением  $f(U) = I_0(e^{U/\varphi} - 1)$  (здесь  $I_0$  – ток насыщения диода,  $\varphi = kT/e$  – температурный потенциал,  $k = 1.38 \cdot 10^{-23}$  Дж/К – постоянная Больцмана,  $T$  – температура,  $e = 1.6 \cdot 10^{-19}$  Кл – заряд электрона), после некоторых алгебраических преобразований легко получить

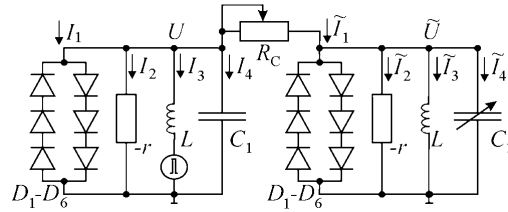


Рис. 5. Упрощенная схема двух связанных автогенераторов под импульсным воздействием, используемая для применения законов Кирхгофа

$$\begin{aligned} \frac{d^2 U}{dt^2} - \frac{1}{C_1} \left( \left( \frac{1}{r} - \frac{2I_0}{3\varphi} \right) - \frac{I_0}{27\varphi^3} U^2 \right) \frac{dU}{dt} + \frac{1}{C_1 L} U + \frac{1}{R_c C_1} \left( \frac{dU}{dt} - \frac{d\tilde{U}}{dt} \right) = \\ = A \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT), \\ \frac{C_2}{C_1} \frac{d^2 \tilde{U}}{dt^2} - \frac{1}{C_1} \left( \left( \frac{1}{r} - \frac{2I_0}{3\varphi} \right) - \frac{I_0}{27\varphi^3} \tilde{U}^2 \right) \frac{d\tilde{U}}{dt} + \frac{1}{C_1 L} \tilde{U} + \frac{1}{R_c C_1} \left( \frac{d\tilde{U}}{dt} - \frac{dU}{dt} \right) = 0, \end{aligned} \quad (2)$$

где  $T$  – период;  $A = V_0/(C_1 L)$  – амплитуда импульсного сигнала;  $V_0$  – напряжение, подаваемое генератором импульсов на первый генератор. В эксперименте вместо дельта-импульсов использовались прямоугольные импульсы высокой скважности и большой амплитуды. Таким образом, рассматриваемая система описывается уравнениями, по структуре аналогичными (1), но в размерной форме.

В эксперименте можно изменять величину связи осцилляторов, варьируя сопротивление  $R_C$ , частотную расстройку осцилляторов, варьируя емкости конденсаторов. Также можно изменять параметры внешнего сигнала: среднеквадратичное напряжение  $\bar{V}$ , подаваемое генератором импульсов, из которого легко рассчитать напряжение, подаваемое на первый осциллятор  $V_0 = \bar{V}\tau/T$ , или амплитуду  $A$  внешнего сигнала; период следования импульсов  $T$  и длительность импульса  $\tau$ , которая была выбрана достаточно малой относительно периода следования импульсов,  $\tau = 150$  мкс.

Сначала была исследована автономная система, то есть без внешнего воздействия. В эксперименте реализованы следующие значения параметров:  $r = -410$  кОм,  $C_1 = 20000$  нФ,  $L = 0.947$  Гн, общее сопротивление  $R_C$  менялось от 1 до 50 кОм, а емкость  $C_2$  – от 1.5 до 4 нФ. В качестве частотной расстройки использовался параметр  $\Delta = \lg(C_1/C_2)$ , а в качестве параметра связи –  $\mu = 1/R_C$ .

На рис. 6, а представлена полученная экспериментально карта динамических режимов на плоскости частотная расстройка осцилляторов – величина связи. При этом выбрана область достаточно больших частотных расстроек осцилляторов. На карте присутствуют те же характерные области, что выявлены при аналитическом рассмотрении и численном исследовании [1,13]: область синхронизации 1:1, область квазипериодических режимов и область гибели колебаний. Одним из отличий от классической картины [1,13] является наличие узкой полосы синхронизации 1:1 между областью гибели колебаний и областью квазипериодических режимов. Наличие этой полосы объясняется эффектом широкополосной синхронизации в системе двух диссипативно связанных осцилляторов ван дер Поля с неидентичными параметрами [26,27]. Хотя осцилляторы в нашем рассмотрении предполагаются идентичными по управляющим параметрам (параметры  $\lambda$ ), но реализовать условие

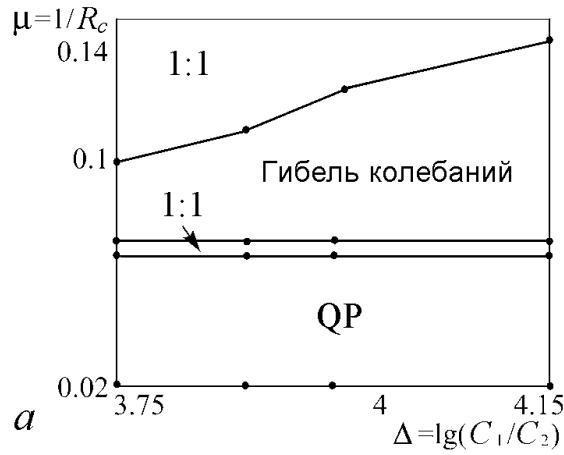
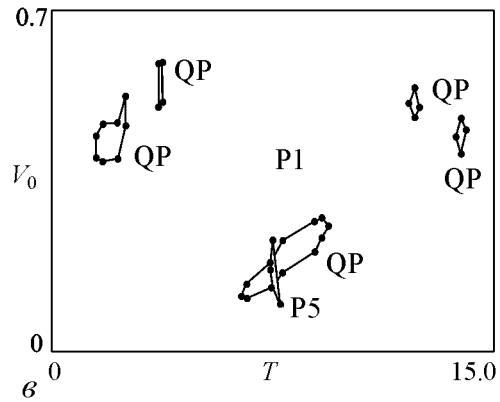
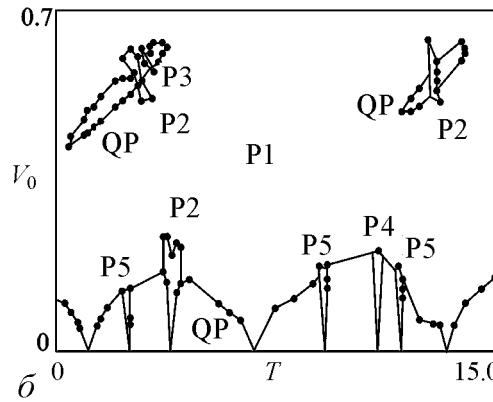


Рис. 6. Экспериментальная карта динамических режимов системы двух связанных автогенераторов ван дер Поля. *a* – без внешнего воздействия; *b*, *в* – с импульсным воздействием: *b* – в автономном режиме система демонстрирует режим захвата; *в* – в автономном режиме система демонстрирует гибель колебаний. Обозначения: P1, P2, и т.д. – режимы периода 1, 2 и т.д.; QP – квазипериодические режимы



идентичности экспериментально достаточно сложно. В уравнении (6) параметр, отвечающий за частотную расстройку  $C_1/C_2$ , стоит перед второй производной. Если емкости генераторов различны, что необходимо для введения частотной расстройки осцилляторов и проявления эффекта гибели колебаний, то автоматически вносится неидентичность во второе слагаемое уравнения (6) и, таким образом, мы получаем два генератора, неидентичных по величине отрицательного сопротивления. Поэтому экспериментально параметры отрицательных сопротивлений подбирались так, чтобы полоса широкополосной синхронизации была как можно уже.

Теперь зафиксируем параметр частотной расстройки, то есть емкости конденсаторов:  $C_1 = 22000$  нФ,  $C_2 = 3$  нФ, выберем значение параметра связи  $R_C$  так, чтобы автономная система демонстрировала синхронные автоколебания ( $R_C = 8.5$  кОм), и добавим импульсное воздействие. Для выбранных значений на плоскости параметров  $(T, V_0)$  построена карта динамических режимов (рис. 6, б).

Из сопоставления рис. 6, б и рис. 1, а видно, что общие черты картины синхронизации для экспериментальной системы сохраняются. При малых амплитудах внешнего сигнала мы видим набор языков синхронизации, встроенных в область квазипериодических режимов. Также наблюдаются языки синхронизации на субгармониках, например, языки периодов 4 и 5, и большой язык синхронизации периода 2. При увеличении амплитуды на карте доминирует область периода 1 в стробоскопическом сечении, но в ней наблюдаются острова квазипериодических режимов.

Теперь увеличим значение параметра связи  $R_C$  до 10 кОм, чтобы перейти в область гибели колебаний. Для этого случая на рис. 6, в приведена экспериментально полученная карта режимов для системы двух связанных генераторов ван дер

Поля под импульсным воздействием на плоскости параметров внешнего сигнала. Рис. 6, *в* сопоставим с рис. 1, *б*. Видно, что при переходе автономной системы в область гибели колебаний появляется амплитудный порог возникновения квазипериодических режимов, области этих режимов образуют изолированные острова на плоскости параметров внешнего сигнала. Острова пересекают узкие языки синхронизации высших порядков. Острова, наблюдающиеся в области больших амплитуд, уменьшаются в размерах по сравнению с неавтономной системой в режиме синхронизации осцилляторов (см. рис. 6, *а*).

На рис. 7 изображены фотографии фазовых портретов, наблюдаемые на электронном осциллографе. В колонке слева представлены фазовые портреты системы

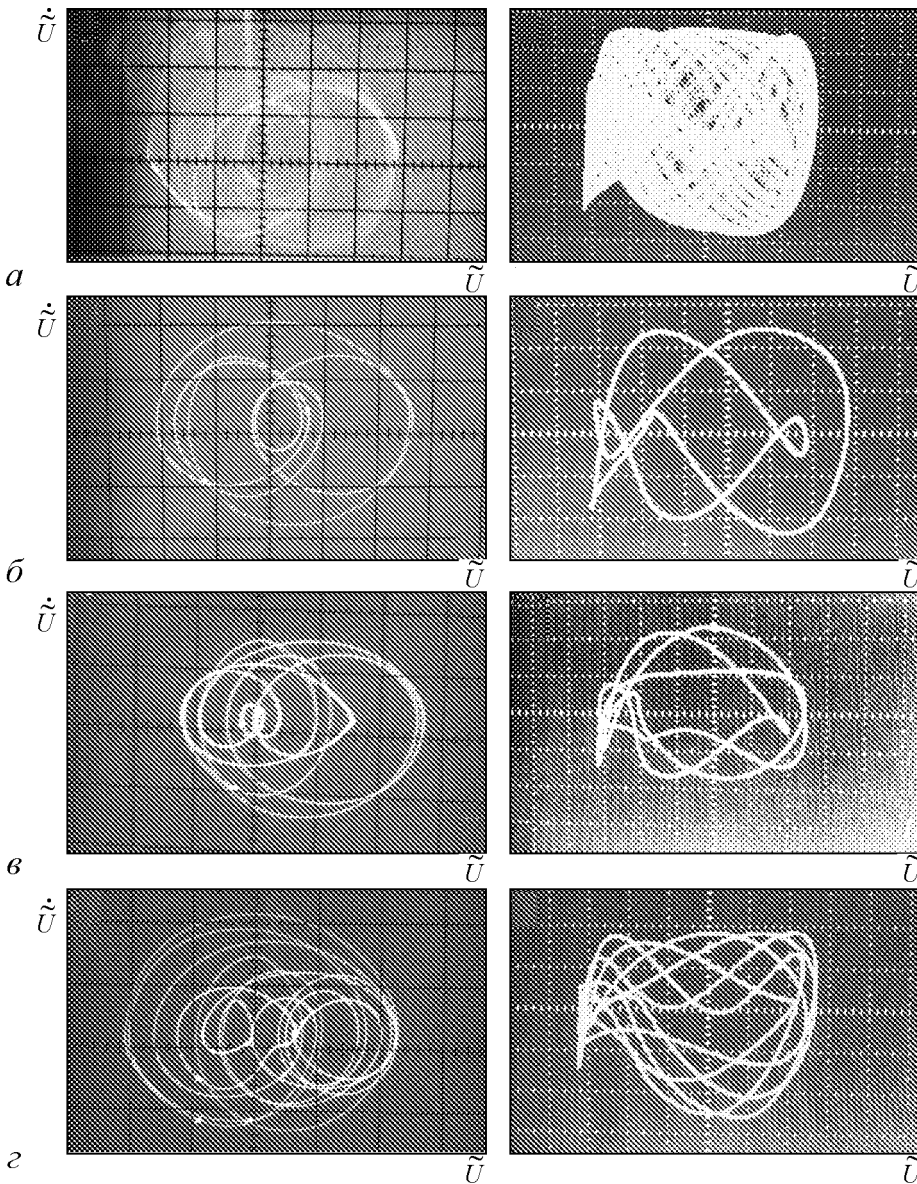


Рис. 7. Фазовые портреты системы двух связанных автогенераторов ван дер Поля с импульсным воздействием, сфотографированные с экрана осциллографа: *а* – квазипериодический режим; *б* – режим периода 2; *в* – режим периода 3; *г* – режим периода 5

на плоскости переменных второго генератора  $(\tilde{U}, \dot{\tilde{U}})$ , яркими точками отмечено стробоскопическое сечение Пуанкаре. В эксперименте сечение Пуанкаре визуализировалось следующим образом: импульс подавался на вход «Z», управляющий яркостью электронного луча осциллографа, в результате чего на экране формировалась картина, соответствующая аттрактору в стробоскопическом сечении. Введение временного сдвига между воздействующим и подсвечивающим импульсами позволяло смещать сечение по проекции аттрактора. В колонке справа показаны фигуры Лиссажу  $(U, \tilde{U})$  для наиболее характерных точек плоскости параметров. На фазовом портрете (рис. 7, а) можно видеть замкнутую инвариантную кривую в стробоскопическом сечении Пуанкаре, что подтверждает квазипериодический характер режима. Рис. 7, б, в и г соответствуют режимам периода 2, 3 и 5, что также хорошо видно по количеству точек в стробоскопическом сечении Пуанкаре. Можно отметить особенность рассматриваемой системы: фазовые траектории являются достаточно сложными орбитами, содержащими большое число витков, несмотря на небольшую величину периода в сечении Пуанкаре. Это иллюстрирует сложный характер движения связанных осцилляторов в режиме, когда диссипативная связь существенно подавляет собственные автоколебания.

При дальнейшем увеличении параметра связи  $R_C$  острова квазипериодических режимов исчезают. Так, например, при  $R_C = 12$  кОм осцилляторы, возбуждаемые импульсами, демонстрируют только режим синхронизации 1:1.

### Заключение

Эффект гибели колебаний диссипативно связанных автоколебательных осцилляторов является характерным «общеколебательным» эффектом. Как радиофизический эксперимент, так и численное моделирование показывают, что в этом режиме внешнее импульсное воздействие может инициировать квазипериодические колебания осцилляторов. При этом на плоскости параметров период – амплитуда воздействия возникают острова квазипериодических режимов, которые пересекаются системой мелкомасштабных областей синхронных режимов. Возникновение квазипериодических режимов носит пороговый характер по амплитуде воздействия. При продвижении по параметру  $\Delta$  вглубь области гибели колебаний автономной системы острова последовательно исчезают. Фазовые траектории осцилляторов в таких режимах являются достаточно сложными орбитами, содержащими большое число витков, несмотря на небольшую величину периода в сечении Пуанкаре.

*Работа поддержана грантами РФФИ (грант № 09-02-00707-а) и Программой развития научного потенциала высшей школы Минобрнауки РФ (грант № 2.1.1/1738).*

### Библиографический список

1. Пиковский А., Розенблюм М., Куртс Ю. Синхронизация. Фундаментальное нелинейное явление. М.: Техносфера, 2003. 508 с.
2. Ланда П.С. Автоколебания в системах с конечным числом степеней свободы. М.: Наука, 1980. 360 с.
3. Блехман И.И. Синхронизация динамических систем. М.: Наука, 1971. 896 с.
4. Глас Л., Мэки М. От часов к хаосу. Ритмы жизни. М.: Мир, 1991. 248 с.



5. *Winfree A.* The Geometry of Biological Time. New York: Springer-Verlag, second edition, 2001. 777 p.
6. *Анищенко В.С., Астахов В.В., Вадивасова Т.Е., Стрелкова Г.И.* Синхронизация регулярных, хаотических и стохастических колебаний. Москва; Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2008. 144 с.
7. *Kuramoto Y.* Chemical oscillations, waves and turbulence. Berlin: Springer, 1984. 164 p.
8. *Kaneko K.* Theory and applications of coupled map lattices. New York, 1993.
9. *Bar-Eli K.* Coupling of chemical oscillators // *J.Phys.Chem.* 1984. Vol. 88. P. 3616.
10. *Bar-Eli K.* On the stability of coupled chemical oscillators // *Physica D.* 1985. Vol. 14. P. 242.
11. *Астахов В.В., Безручко Б.П., Селезнёв Е.П.* Изменение структуры разбиения плоскости параметров стохастической системы при возбуждении дополнительной моды // *Письма в ЖТФ.* 1987. Т. 13, вып. 8. С. 449.
12. *Ermentrout G.B., Kopell N.* Oscillator death in systems of coupled neural oscillators // *J. Appl. Math.* 1990. Vol. 50. P. 125.
13. *Aronson D.G., Ermentrout G.B., Kopell N.* Amplitude response of coupled oscillators // *Physica D.* 1990. Vol. 41. P. 403.
14. *Mirollo R.E., Strogatz S.H.* Amplitude death in array of limit-cycle oscillators // *J. Stat. Phys.* 1990. Vol. 60. P. 245.
15. *Ramana Reddy D.V., Sen A., Johnston G.L.* Time delay induced death in coupled limit cycle oscillators // *Phys. Rev. Lett.* 1998. Vol. 80. P. 5109.
16. *Ramana Reddy D.V., Sen A., Johnston G.L.* Experimental evidence of time-delay-induced death in coupled limit-cycle oscillators // *Phys. Rev. Lett.* 2000. Vol. 85. P. 3381.
17. *Herrero M., Figueras M., Rius J., Pi F., Orriols G.* Experimental observation of the amplitude death effect in two coupled nonlinear oscillators // *Phys. Rev. Lett.* 2000. Vol. 84. P. 5312.
18. *Atay M.* Total and partial amplitude death in networks of diffusively coupled oscillators // *Physica D.* 2003. Vol. 183. Is.1-2. P. 1.
19. *Prasad A.* Amplitude death in coupled chaotic oscillators // *Phys. Rev. E.* 2005. Vol. 72. 056204.
20. *Karnatak R., Ramaswamy R., Prasad A.* Amplitude death in the absence of time delays in identical coupled oscillators // *Phys. Rev. E.* 2007. Vol. 76. 035201.
21. *Prasad A., Dhamala M., Adhikari B.M., Ramaswamy R.* Amplitude death in nonlinear oscillators with nonlinear coupling // *Phys. Rev. E.* 2010. Vol. 81. 027201.
22. *Hou Z., Xin H.* Oscillator death on small-world networks // *Phys. Rev. E.* 2003. Vol. 68. 055103.
23. *Ozden I., Venkataramani S., Long M.A., Connors B.W., Nurmikko A.V.* Strong coupling of nonlinear electronic and biological oscillators: reaching the «amplitude death» regime // *Phys. Rev. Lett.* 2004. Vol. 93. 158102.
24. *Zhai Y., Kiss I.Z., Hudson J.L.* Amplitude death through a Hopf bifurcation in coupled electrochemical oscillators: experiments and simulations // *Phys. Rev. E.* 2004. Vol. 69. 026208.
25. *Кузнецов А.П., Паксютов В.И.* О динамике двух осцилляторов ван дер Поля–Дуффинга с диссипативной связью // *Изв. вузов. ПНД.* 2003. Т. 11, № 6. С. 48.
26. *Кузнецов А.П., Емельянова Ю.П., Селезнев Е.П.* Синхронизация связанных ав-

- токолебательных осцилляторов с неидентичными параметрами // Изв. вузов. ПНД. 2010. Т. 18, № 2. С. 62.
27. *Kuznetsov A.P., Roman Ju.P.* Properties of synchronization in the systems of non-identical coupled van der Pol and van der Pol–Duffing oscillators. Broadband synchronization // *Physica D*. 2009. Vol. 238, № 16. P. 1499.
  28. *Osipov G.V., Pikovsky A.S., Rosenblum M.G.* Phase synchronization effects in a lattice of nonidentical Rössler oscillators // *Phys. Rev. E*. 1997. Vol. 55. P. 2353.
  29. *Resmi V., Ambika G., Amritkar R.E.* General mechanism for death in coupled systems. Preprint nlin arXiv:1101.5340, 2011.
  30. *Емельянова Ю.П., Кузнецов А.П.* Связанные автоколебательные осцилляторы разной природы на примере системы ван дер Поля и брюсселятора // Изв. вузов. ПНД. 2010. Т. 18, № 5. С. 80.
  31. *Емельянова Ю.П., Кузнецов А.П.* Синхронизация связанных автогенераторов ван дер Поля и Кислова–Дмитриева // *ЖТФ*. 2011. Т. 81, вып. 4. С. 7.
  32. *Kozlowski J., Parlitz U., Lauterborn W.* Bifucation analysis of two coupled periodically driven Duffing oscillators // *Phys. Rev. E*. 1995. Vol. 51, № 3. P. 1861.
  33. *Кузнецов А.П., Станкевич Н.В., Тюрюкина Л.В.* Эффект «вымирания» квазипериодических режимов в системе диссипативно связанных осцилляторов ван дер Поля с импульсным воздействием // *Письма в ЖТФ*. 2008. Т. 34, вып. 15. С. 22.
  34. *Ланда П.С.* Нелинейные колебания и волны. М.: Наука, 1997. С. 496.
  35. *Кузнецов А.П., Кузнецов С.П., Рыскин Н.М.* Нелинейные колебания. М.: Физматлит, 2002. С. 292.
  36. *Кузнецов С.П.* Динамический хаос. 2-е изд., перераб. и доп. М.: Физматлит, 2006. С. 355.
  37. *Кузнецов А.П., Тюрюкина Л.В.* Осциллятор ван дер Поля с импульсным воздействием: от потока к отображениям // Изв. вузов. ПНД. 2001. № 6. С. 69.
- |   |   |
|---|---|
| <p><i>Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского</i><br/> <i>Саратовский государственный технический университет</i><br/> <i>Саратовский филиал ИРЭ им. В.А. Котельникова РАН</i></p> | <p><i>Поступила в редакцию 11.05.2011</i><br/> <i>После доработки 7.10.2011</i></p> |
|---|---|

**THE RESEARCH OF EXCITED BY EXTERNAL SIGNAL SYSTEM OF TWO COUPLED VAN DER POL OSCILLATORS AT TRANSITION TO THE REGIME OF AMPLITUDE DEATH IN THE AUTONOMOUS SYSTEM**

*A.P. Kuznetsov, E.P. Seleznev, N.V. Stankevich*

Pulsed driven system of two coupled van der Pol oscillators in the regime of synchronization 1:1 and «oscillator death» is researched. The existence of islands of quasi-periodic regimes on the parameter plane period – amplitude of perturbation in the radiophysics experiment are shown. The different types of oscillations in this system are illustrated.

*Keywords:* Coupled oscillators, regime of amplitude death, quasi-periodic regimes, pulsed action.

*Кузнецов Александр Петрович* – родился в 1957 году. Доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник Саратовского филиала Института радиотехники и электроники РАН, профессор Саратовского государственного университета, заведующий базовой кафедрой динамических систем СГУ в СФ ИРЭ РАН. Специалист по нелинейной динамике, теории динамического хаоса и теории критических явлений. Занимается использованием идей теории катастроф и теории бифуркаций, а также развитием концепции сценариев перехода к хаосу применительно к многопараметрическим модельным и физическим нелинейным системам. Лауреат гранта Президента Российской Федерации для молодых российских ученых – докторов наук. Лауреат персонального гранта Фонда содействия отечественной науки. Соросовский профессор (2000, 2001), научный руководитель студенческой лаборатории «Теоретическая нелинейная динамика». Опубликовал более 100 научных работ. Автор нескольких оригинальных учебных курсов для факультета нелинейных процессов и Лицея прикладных наук СГУ, 10 учебных пособий и монографии «Нелинейные колебания» (совместно с С.П. Кузнецовым и Н.М. Рыскиным. М.: Физматлит, 2002).



410012 Саратов, ул. Астраханская, 83  
Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского  
E-mail: apkuz@rambler.ru

*Селезнев Евгений Петрович* – родился в 1960 году в Саратове, окончил Саратовский государственный университет (1982). После окончания СГУ работает ведущим научным сотрудником Саратовского филиала Института радиотехники и электроники РАН. Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук (1990) и доктора физико-математических наук (2006). Область научных интересов – радиофизика, экспериментальное исследование нелинейных явлений. Имеет более 120 научных публикаций.

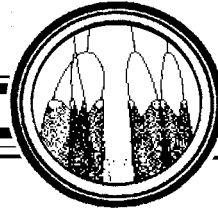


410019 Саратов, ул. Зеленая, 38  
Саратовский филиал института радиотехники и электроники  
им. В.А. Котельникова РАН  
E-mail: evgenii\_seleznev@mail.ru

*Станкевич Наталья Владимировна* - родилась в 1985 году. С 2000 по 2002 год обучалась в Лицее прикладных наук. В 2002 году поступила в Саратовский госуниверситет на факультет нелинейных процессов. В 2007 году окончила университет с красным дипломом. В 2011 году под руководством проф., д.ф.-м.н. А.П. Кузнецова защитила диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук. В настоящее время доцент кафедры «Радиотехника» Саратовского государственного технического университета им. Ю.А. Гагарина. Занимается исследованием особенностей синхронизации короткими импульсами в многомерных автоколебательных системах. Автор более 30 публикаций, в том числе 10 статей в российских и зарубежных журналах. В 2009 году получила поддержку Германской службы академических обменов (DAAD) и совершила визит в научную группу Аркадия Пиковского (г. Потсдам).



410054 Саратов, ул. Политехническая, 77  
Саратовский государственный технический университет им. Ю.А. Гагарина  
E-mail: stankevichnv@mail.ru



## ДИНАМИКА ТРЕХ НЕИДЕНТИЧНЫХ ПО УПРАВЛЯЮЩИМ ПАРАМЕТРАМ СВЯЗАННЫХ ОСЦИЛЛЯТОРОВ ВАН ДЕР ПОЛЯ

*Ю.П. Емельянова, А.П. Кузнецов, Л.В. Тюрюкина*

Рассмотрена цепочка трех диссипативно связанных автоколебательных осцилляторов с неидентичными управляющими параметрами. Обсуждаются ситуации, когда связь демпфирует различные осцилляторы. Выяснено устройство плоскости параметров «частотная расстройка – величина связи» с точки зрения расположения областей гибели колебаний, полной синхронизации осцилляторов, двух- и трехчастотной квазипериодичности. Обсуждаются особенности, связанные с неидентичностью по управляющим параметрам. Продемонстрирована возможность режимов полной широкополосной синхронизации и режимов двухчастотной широкополосной синхронизации.

*Ключевые слова:* Синхронизация, связанные осцилляторы, квазипериодическая динамика.

### Введение

Задача о динамике диссипативно связанных автоколебательных осцилляторов является фундаментальной в теории колебаний и нелинейной динамике [1–10]. Основные эффекты, которые демонстрируют два связанных осциллятора – это взаимный захват с различным соотношением частот, двухчастотные квазипериодические колебания и эффект «гибели» (гашения) колебаний, наблюдающийся при достаточно большой величине диссипативной связи. Традиционно наиболее детально обсуждаются различные аспекты задачи, относящиеся к случаю идентичных по управляющим параметрам  $\lambda$  осцилляторов. Однако случай неидентичных осцилляторов важен и требует специального рассмотрения [10–16]. Для двух осцилляторов соответствующий анализ выявляет еще один своеобразный тип поведения, которому на плоскости параметров отвечает область, разделяющая области гибели колебаний и квазипериодической динамики. При этом синхронизация осцилляторов возможна при сколь угодно большой величине частотной расстройки. В [11–12] для такого режима предложен термин «широкополосная синхронизация» (broadband synchronization [13]). В этом режиме один из осцилляторов, для которого  $\lambda_1 < \lambda_2$ , в определенной мере подавлен (продемпфирован) связью, а второй доминирует. Различные аспекты такого

режима обсуждались в [11–16]: построены карты динамических режимов на плоскости параметров «частотная расстройка осцилляторов – величина связи», исследована эволюция чисел вращения с ростом частотной расстройки, выполнен бифуркационный анализ и т.д. Соответствующая картина наблюдалась в радиофизическом эксперименте [16].

В настоящей работе обсуждается в аналогичном контексте случай трех диссипативно связанных в цепочку осцилляторов ван дер Поля. В этом случае могут наблюдаться различные ситуации доминирования того или иного осциллятора, так что число возможных вариантов увеличивается. Отметим, что задача о трех- (и более) частотной синхронизации в последнее время привлекает определенное внимание [17–21] в контексте феномена синхронизации квазипериодических колебаний. Так в [21] в фазовом приближении рассмотрена динамика цепочки их трех идентичных осцилляторов. Однако, в случае неидентичных управляющих параметров при условии доминирования хотя бы одного осциллятора, когда величина связи  $\mu > \min(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ , фазовое приближение неприменимо, так что приходится исследовать исходные уравнения.

### 1. Особенности поведения системы трех связанных неидентичных автоколебательных осцилляторов

Рассмотрим систему трех неидентичных, диссипативно связанных в цепочку осцилляторов ван дер Поля (рис. 1)

$$\begin{aligned} \ddot{x} - (\lambda_1 - x^2) \dot{x} + x + \mu (\dot{x} - \dot{y}) &= 0, \\ \ddot{y} - (\lambda_2 - y^2) \dot{y} + (1 + \Delta_1) y + \mu (\dot{y} - \dot{x}) + \mu (\dot{y} - \dot{z}) &= 0, \\ \ddot{z} - (\lambda_3 - z^2) \dot{z} + (1 + \Delta_2) z + \mu (\dot{z} - \dot{y}) &= 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь  $x, y, z$  – динамические переменные осцилляторов;  $\lambda_{1,2,3}$  – управляющие параметры, отвечающие за бифуркации Андронова–Хопфа в автономных осцилляторах;  $\Delta_1$  и  $\Delta_2$  – частотные расстройки второго и третьего осцилляторов относительно первого;  $\mu$  – коэффициент диссипативной связи.

Система (1) характеризуется большим числом параметров, так что она может демонстрировать сложную и разнообразную картину колебательных режимов. В значительной степени она зависит от величины и соотношения управляющих параметров  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ . Обсудим на качественном уровне возникающие особенности такой задачи.

При анализе двух связанных осцилляторов выделяются три существенно разные ситуации [10–16]:

- $\mu < \min(\lambda_1, \lambda_2)$ , связь мала и оба осциллятора демонстрируют автоколебательные свойства;
- $\min(\lambda_1, \lambda_2) < \mu < \max(\lambda_1, \lambda_2)$ , связь «умеренная», она демпфирует

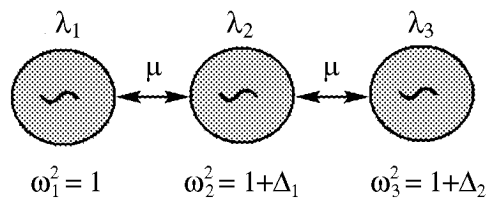


Рис. 1. Схематическое изображение цепочки связанных неидентичных автоколебательных осцилляторов

только наименее возбужденный осциллятор, возможен режим широкополосной синхронизации;

- $\mu > \max(\lambda_1, \lambda_2)$ , связь сильная, демпфированы оба осциллятора, возможен режим гашения (гибели) колебаний.

При этом такая классификация не зависит от того, какой из осцилляторов более возбужден, в силу их равноправия с точки зрения положения в цепочке.

Для трех осцилляторов число возможных вариантов увеличивается. Действительно, связь может существенно демпфировать колебания каждого из трех осцилляторов. Обсудим возникающие при этом ситуации. «Выключим» последовательно в каждом уравнении системы (1) воздействие двух оставшихся осцилляторов. (Физически это можно реализовать, например, сильно отстроив эти осцилляторы по частоте.) Тогда приходим к уравнению одиночного осциллятора, но с уменьшенным за счет связи управляющим параметром  $\lambda^*$ , так что

- для первого осциллятора:  $\lambda_1^* = (\lambda_1 - \mu)$ ,
- для второго осциллятора:  $\lambda_2^* = (\lambda_2 - 2\mu)$ ,
- для третьего осциллятора:  $\lambda_3^* = (\lambda_3 - \mu)$ .

Таким образом, условие того, что первый или третий осцилляторы продемпфированы связью, имеет вид:  $\lambda_1 < \mu$  или  $\lambda_3 < \mu$ . Для второго осциллятора это условие отличается и имеет вид:  $\lambda_2 < 2\mu$ . То есть связь в два раза сильнее демпфирует центральный осциллятор. Выделенную роль этого осциллятора легко понять физически. Действительно, первый и третий осцилляторы испытывают трение со стороны только одного соседа, а второй – со стороны двух соседей (см. рис. 1). Именно поэтому он более существенно демпфируется связью, чем крайние осцилляторы. Этот факт связан с геометрией цепочки; для связанных, например, в кольцо осцилляторов такая особенность наблюдаться не будет.

Таким образом, в зависимости от соотношения параметров  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  и величины связи могут оказаться продемпфированными один, два или три осциллятора. При этом картина может зависеть от того, на краю или в центре цепочки оказывается такой осциллятор. Эти особенности проявляются в устройстве плоскости параметров «частотная расстройка – величина связи» системы (1) и в характере наблюдаемых режимов.

## 2. Режимы с продемпфированным центральным осциллятором

Прежде всего, нужно выбрать характерные величины (порядок) управляющих параметров. В основном, будем использовать их значения не очень большие, порядка 0.1, что отвечает ситуации достаточно слабо возбужденных осцилляторов.

Поскольку число существенных параметров велико, то нужно иметь некоторую «стратегию» их выбора. Подходящим вариантом является подход к многочастотным колебаниям в духе концепции Ландау–Хопфа [22]. А именно, будем рассматривать подключение новой колебательной моды к системе двух осцилляторов. При этом возникают два варианта подключения нового осциллятора в цепочку: посередине или с одного из краев.

Возьмем два осциллятора с управляющими параметрами  $\lambda = 0.13$  и  $\lambda = 0.18$ . Частотную расстройку между ними выберем небольшой:  $\Delta = 0.15$ . Благодаря этому

осцилляторы имеют тенденцию к синхронизации. Рассмотрим сначала случай, когда новый осциллятор помещается посередине между этими двумя. Для добавляемого осциллятора выберем значение управляющего параметра  $\lambda = 0.19$ . Таким образом, с учетом принятого правила нумераций осцилляторов в цепочке, мы фиксируем следующий набор параметров:  $\lambda_1 = 0.13$ ,  $\lambda_2 = 0.19$ ,  $\lambda_3 = 0.18$ ,  $\Delta_2 = 0.15$ . Интересная особенность данного выбора параметров состоит в том, что центральный осциллятор наиболее возбужден, но благодаря указанным выше особенностям с ростом связи он будет продемпфирован сильнее своих соседей, поскольку  $\lambda_2/2 = \min(\lambda_1, \lambda_2/2, \lambda_3)$ .

Обратимся теперь к плоскости параметров «частота второго осциллятора – величина связи»  $(\Delta_1, \mu)$ . В системе трех связанных осцилляторов возможны режимы как двухчастотной, так и трехчастотной квазипериодичности, которым отвечают двумерный и трехмерный торы в фазовом пространстве. Для их визуализации используем метод ляпуновских карт [20,21]. В рамках этого метода в каждой точке плоскости параметров  $(\Delta_1, \mu)$  вычислялись ляпуновские показатели системы (1). Затем эта плоскость окрашивалась в определенный цвет в соответствии с величиной двух старших показателей, чтобы визуализировать следующие режимы:

- а)  $P$  – область периодических режимов,  $\Lambda_1 < 0$ ,  $\Lambda_2 < 0$ ;
- б)  $T_2$  – двухчастотный квазипериодический режим,  $\Lambda_1 = 0$ ,  $\Lambda_2 < 0$ ;
- в)  $T_3$  – трехчастотный квазипериодический режим,  $\Lambda_1 = 0$ ,  $\Lambda_2 = 0$ .

Отметим, что при этом один нулевой показатель, который всегда присутствует в системе и отвечает за выход фазовых траекторий на аттрактор, отброшен. Равенство нулю ляпуновских показателей проверялось с точностью до допуска, величина которого составляла  $10^{-2}$ , точность вычисления самих показателей составляла порядка  $10^{-5}$ . При этом вид карт на плоскости параметров не меняется существенно при увеличении длительности и точности расчетов и определенного уменьшения «невязки».

Полученная таким способом карта показана на рис. 2 сверху. Кроме того, на рис. 2 представлены примеры фазовых портретов трех осцилляторов в некоторых избранных точках, обозначенных на карте буквами  $a-z$ . Обсудим наблюдаемую картину. Для удобства восприятия типов режимов вдоль правого края карты стрелочками указаны уровни связи, отвечающие значениям  $\mu = \lambda_1$ ,  $\mu = \lambda_2/2$  и  $\mu = \lambda_3$ .

Прежде всего, отмечаем наличие режима гибели колебаний. Этот режим наблюдается, если связь демпфирует сразу все три осциллятора. В рассматриваемом случае  $\lambda_3 = \max(\lambda_1, \lambda_2/2, \lambda_3)$ , поэтому на плоскости параметров область гибели колебаний лежит при уровне связи  $\mu > \lambda_3$ . При этом с ростом частотной расстройки нижняя граница области гибели колебаний асимптотически стремится к линии  $\mu = \lambda_3$ .

Из регулярных режимов наблюдается, фактически, один, которому отвечает неподвижная точка в сечении Пуанкаре<sup>1</sup>. Это одночастотный режим, когда все три осциллятора взаимно захвачены. Такой режим будем называть режимом *полной синхронизации*. В области небольших расстроек  $\Delta_1$  соответствующая область имеет вид языка, но в отличие от случая двух осцилляторов, полная синхронизация трех осцилляторов не возможна при малой связи. Таким образом, полная синхронизация имеет порог по величине связи<sup>2</sup>.

<sup>1</sup>При проведении расчетов сечение Пуанкаре выбиралось по обращению в ноль скорости одного (второго) осциллятора.

<sup>2</sup>Заметим, что эта особенность характерна и для идентичных осцилляторов [21].

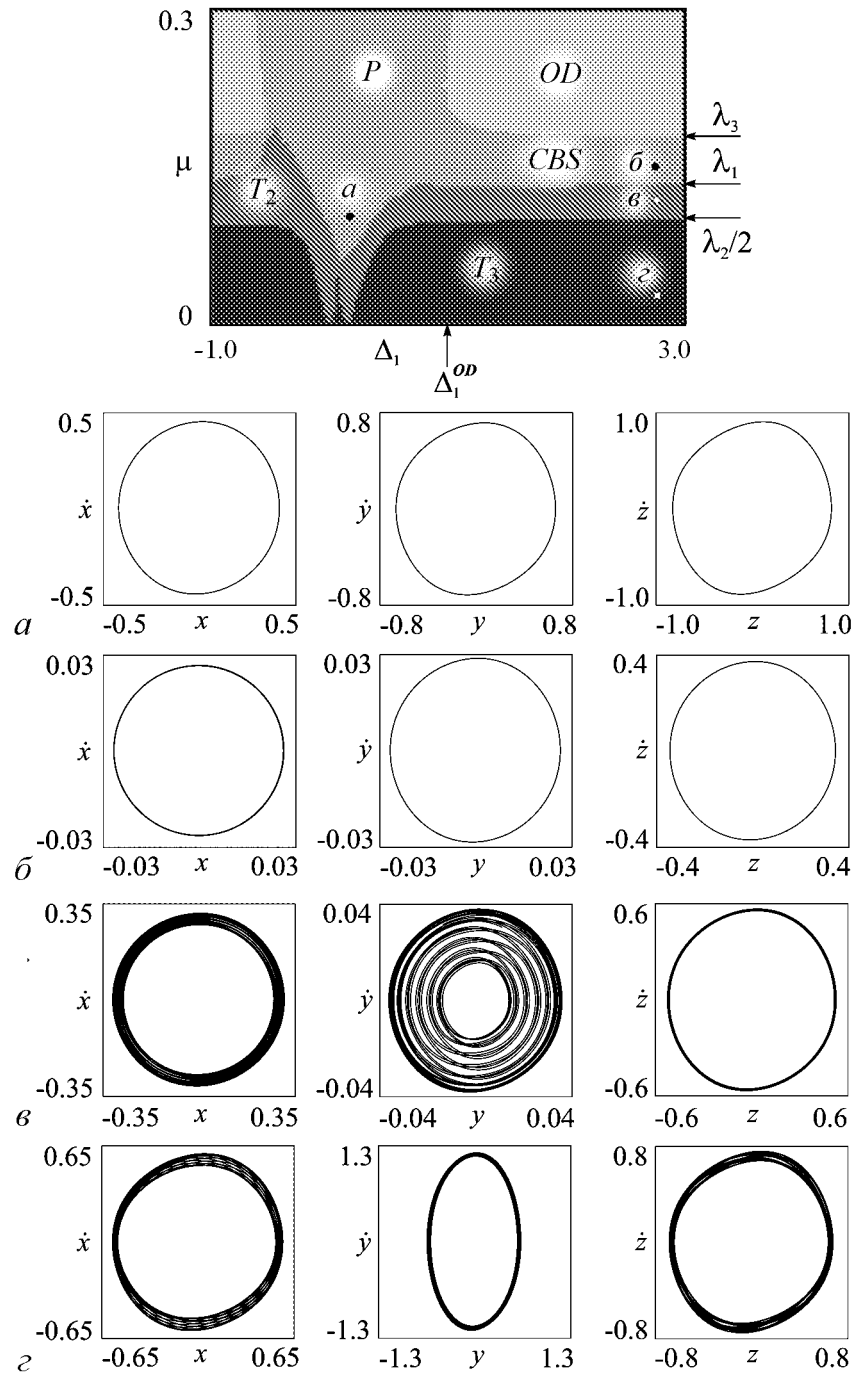


Рис. 2. Карта ляпуновских показателей системы (1),  $\lambda_1 = 0.13$ ,  $\lambda_2 = 0.19$ ,  $\lambda_3 = 0.18$ ,  $\Delta_2 = 0.15$ . Указана граница высокочастотной области гибели колебаний  $\Delta_1^{OD}$ . На карте также показаны:  $OD$  – область гибели колебаний,  $CBS$  – область полной широкополосной синхронизации,  $P$  – периодические режимы,  $T_2$  – двухчастотный квазипериодический режим,  $T_3$  – трехчастотный квазипериодический режим



Фазовые портреты трех осцилляторов внутри языка полной синхронизации показаны на рис. 2, а. Можно видеть, что орбиты осцилляторов близки к окружностям, не сильно отличающимся по величине. Таким образом, в этом режиме все осцилляторы примерно равноправны.

Как и в случае двух осцилляторов, в системе возможен и режим широкополосной синхронизации, когда в сколь угодно широком диапазоне частот ( $\Delta_1 \rightarrow \infty$ ) наблюдается захват всех трех осцилляторов. При  $\Delta_1 > 2.0$  область такой *полной широкополосной синхронизации CBS* (complete broadband synchronization) располагается в диапазоне  $\lambda_1 < \mu < \lambda_3$ . Соответствующие фазовые портреты показаны на рис. 2, б. Можно видеть, что все осцилляторы демонстрируют простейшие предельные циклы. При этом третий осциллятор доминирует, а первый и второй подавлены, но равноправны: радиус орбиты третьего осциллятора на порядок больше радиусов орбит первого и второго (см. масштабы по осям координат на фазовых портретах).

Далее, на ляпуновской карте наблюдаются режимы двухчастотной квазипериодичности, располагающиеся, в основном, при  $\mu < \lambda_1$ . При этом возможен режим, который можно назвать режимом *широкополосной двухчастотной синхронизации*. На карте он имеет место в полосе  $\lambda_2/2 < \mu < \lambda_1$  при большой частотной расстройке  $\Delta_1$  (фактически, уже при  $\Delta_1 > 1.0$ ). Соответствующие фазовые портреты показаны на рис. 2, в. Можно видеть, что третий осциллятор доминирует, его орбита почти не возмущена. Первый осциллятор достаточно возбужден, и его орбита демонстрирует возмущение квазипериодического характера. Наконец, второй осциллятор существенно подавлен, причем его орбита очень сильно возмущена.

В области малых значений связи имеют место трехчастотные режимы. Пример соответствующих фазовых портретов дан на рис. 2, г. В этом случае предельные циклы автономных систем возмущены слабо, и «приоритет» осцилляторов приходит в соответствие с их непродемпфированными управляющими параметрами:  $\lambda_1 = 0.13$ ,  $\lambda_2 = 0.19$ ,  $\lambda_3 = 0.18$ . Поэтому самая большая орбита у второго осциллятора, несколько меньшая у третьего и самая малая – у первого.

Обсуждаемая ситуация относилась к случаю малой разницы частот первого и третьего осцилляторов  $\Delta_2$ . Увеличим теперь существенно частоту третьего осциллятора, так что  $\Delta_2 = 2.0$  (рис. 3). Можно видеть следующие особенности.

Во-первых, в области  $\mu < \min(\lambda_1, \lambda_2/2, \lambda_3)$ , где все осцилляторы «активны», полная синхронизация становится невозможной. Таким образом, различие частот, затрудняет полную синхронизацию осцилляторов, которая становится возможной только при условии подавления связью хотя бы одного осциллятора.

Во-вторых, области гибели колебаний уменьшаются в размерах за счет изменения их частотных границ. Это особенно заметно для высокочастотной области: ее граница сдвигается от  $\Delta_1^{OD} \approx 1.0$  на рис. 2 до  $\Delta_1^{OD} \approx 3.1$  на рис. 3. Причина состоит в следующем. Для реализации эффекта гибели колебаний требуется не только условие большой связи, но и условие достаточно большой частотной расстройки осцилляторов<sup>3</sup>. В нашем случае расстройка второго и третьего осцилляторов дается величиной  $(\Delta_1 - \Delta_2)$ . Таким образом, если растет частота третьего осциллятора  $\Delta_2$ , то должна расти и частота второго  $\Delta_1$ .

<sup>3</sup>В противном случае относительная скорость осцилляторов невелика, и даже большая связь не демпфирует осцилляторы. В результате наблюдается не гибель колебаний, а синхронизация с соотношением частот 1:1 [1].

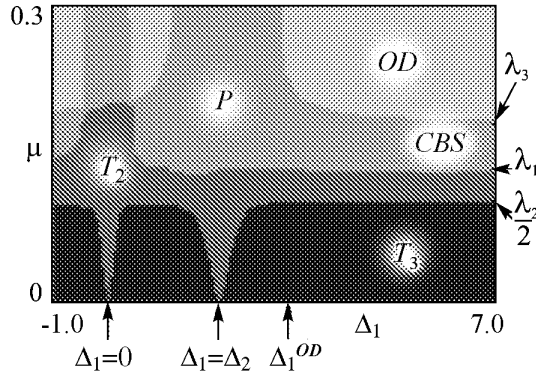


Рис. 3. Карта ляпуновских показателей системы (1),  $\lambda_1 = 0.13$ ,  $\lambda_2 = 0.19$ ,  $\lambda_3 = 0.18$ . Частота третьего осциллятора  $\Delta_2 = 2.0$ . Наименее возбужден центральный осциллятор. Указана граница высокочастотной области гибели колебаний  $\Delta_1^{OD}$ , а также условия резонансов между первым и вторым  $\Delta_1 = 0$  и вторым и третьим осцилляторами  $\Delta_1 = \Delta_2$

Соответствующие резонансы хорошо видны на ляпуновской карте в виде двух явно выраженных языков двухчастотных торов в области трехчастотной квазипериодичности. В этом случае осцилляторы попарно захвачены, но колебания носят квазипериодический характер, поскольку они возмущены сильно расстроенным по частоте оставшимся осциллятором.

Вспомним теперь, что для реализации режима гибели колебаний необходимы частотные условия. Для пары первый–второй осцилляторы эти условия дают две области гибели колебаний, лежащих слева и справа от точки резонанса  $\Delta_1 = 0$  (см. рис. 3). Аналогично, для захваченной пары второй–третий осцилляторы должны наблюдаться две области гибели колебаний: слева и справа от точки резонанса  $\Delta_1 = \Delta_2$ . «Суммарная» картина и приводит к возможности трех областей гибели колебаний. При этом нижняя по величине связи граница области гибели колебаний определяется максимальным управляющим параметром не каждой пары, а всей системы:  $\mu \approx \max(\lambda_1, \lambda_2/2, \lambda_3) = \lambda_1$ . Подчеркнем, что указанный эффект возможен только при достаточно большой частотной расстройке первого и третьего осцилляторов.

### 3. Режимы с наиболее протемпированным крайним осциллятором

Пока наше обсуждение относилось к случаю, когда наиболее протемпированным был центральный осциллятор. Выберем теперь набор параметров  $\lambda_1 = 0.13$ ,  $\lambda_2 = 0.3$ ,  $\lambda_3 = 0.18$ ,  $\Delta_2 = 0.15$ . Теперь  $\lambda_1 = \min(\lambda_1, \lambda_2/2, \lambda_3)$ , так что наиболее протемпированным будет крайний (первый) осциллятор. Соответствующая карта представлена на рис. 4.

Нижняя граница области гибели колебаний по-прежнему определяется третьим осциллятором, а второй и первый поменяли приоритет. Теперь нижняя граница области полной широкополосной синхронизации дается значением  $\mu = \lambda_2/2$ , а двухчастотной широкополосной синхронизации – значением  $\mu = \lambda_1$ . С другой стороны, в области  $\mu < \lambda_1 = \min(\lambda_1, \lambda_2/2, \lambda_3)$ , в которой активны все осцилляторы,

Наконец, на рис. 3 можно видеть появление дополнительной области гибели колебаний. Этот факт можно объяснить следующим образом. При условии, что  $\Delta_2$  велико, первый и третий осцилляторы сильно расстроены по частоте. Поэтому при вариации параметра  $\Delta_1$  взаимодействие между осцилляторами носит «парный» характер и наблюдается при выполнении резонансных условий:

- когда близки частоты первого и второго осцилляторов (в нашей нормировке  $\Delta_1 \approx 0$ );
- когда близки частоты второго и третьего осцилляторов ( $\Delta_1 \approx \Delta_2$ ).

имеет место значительный по размеру язык режима полной синхронизации. Таким образом, полная синхронизация возникает предпочтительно в ситуации, когда наиболее протемпфирован крайний осциллятор.

Для этих режимов представим характеристики с помощью чисел вращения. Числа вращения определим следующим образом. Выберем для каждого осциллятора свое сечение Пуанкаре, по обращению в ноль его скорости. За некоторый большой промежуток времени подсчитываем числа возвратов  $N_x, N_y, N_z$  в каждое сечение. Затем определяем числа вращения первого осциллятора относительно второго  $w_{1-2} = N_x/N_y$  и второго относительно третьего  $w_{2-3} = N_y/N_z$ .

Обратимся к рис. 5, на котором показаны примеры полученных таким образом зависимостей чисел вращения  $w_{1-2}$  и  $w_{2-3}$  от частотной расстройки осцилляторов  $\Delta_1$ . Графики отвечают трем маршрутам  $\mu = \text{const}$  на рис. 4 в случае слабой, «умеренной» и большой связи. Заметим, что последний случай отвечает значению связи  $\lambda_1 < \mu < \lambda_2, \lambda_3$ , когда первый осциллятор сильно протемпфирован, и соответствующий маршрут целиком лежит в области двухчастотных торов.

При малой связи на рис. 5, *a* имеются две «полочки»  $w_{1-2} = 1$  и  $w_{2-3} = 1$ , отвечающие взаимному захвату первого–второго и второго–третьего осцилляторов с соотношением частот 1:1. Из ляпуновской карты на рис. 4 видно, что эти полочки возникают при последовательном прохождении через два языка двухчастотных торов. При этом области захвата разделены небольшой полосой трехчастотных торов, что также видно на рис. 5, *a*.

При умеренной связи на рис. 5, *б* последовательно наблюдаются: трехча-

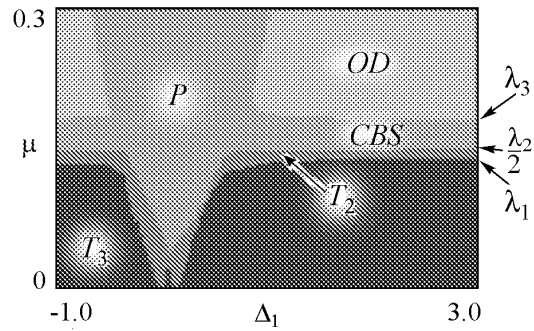


Рис. 4. Карта ляпуновских показателей системы (1),  $\lambda_1 = 0.13, \lambda_2 = 0.3, \lambda_3 = 0.18, \Delta_2 = 0.15$ . Наименее возбужден крайний осциллятор

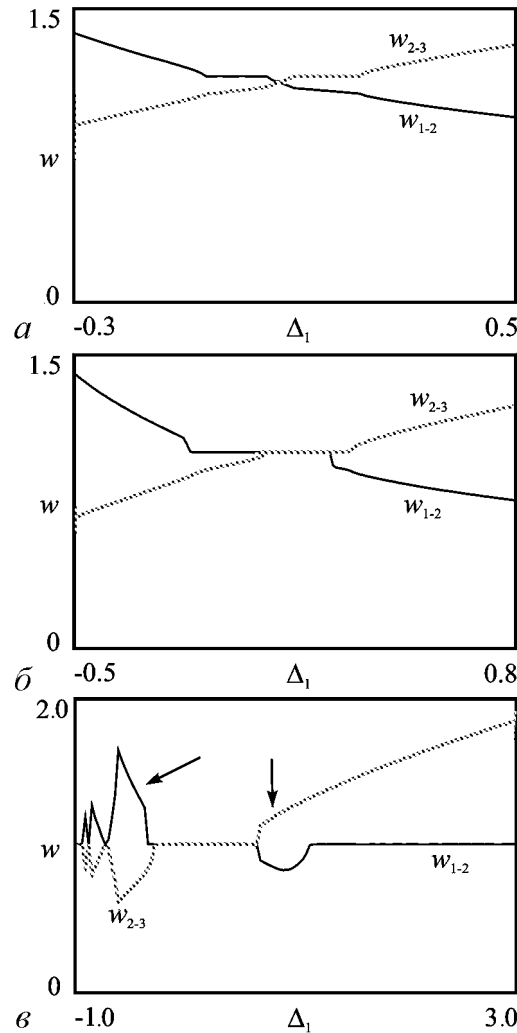


Рис. 5. Графики чисел вращения  $w_{1-2}$  и  $w_{2-3}$ . Параметр связи  $\mu = 0.03$  (*a*),  $\mu = 0.06$  (*б*),  $\mu = 0.143$  (*в*); остальные параметры отвечают рис. 4

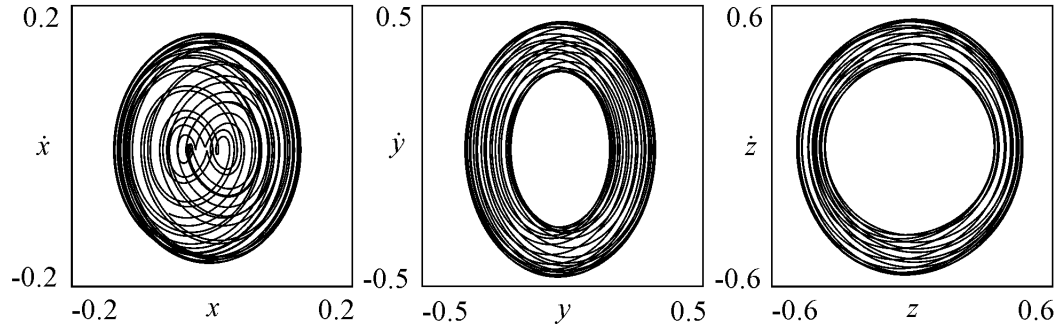


Рис. 6. Фазовые портреты в режиме подавления колебаний первого осциллятора,  $\lambda_1 = 0.13$ ,  $\lambda_2 = 0.3$ ,  $\lambda_3 = 0.18$ ,  $\Delta_1 = 1.1$ ,  $\Delta_2 = 0.15$ ,  $\mu = 0.132$

стотные колебания, захват первого–второго осцилляторов, полная синхронизация трех осцилляторов, взаимный захват второго–третьего осцилляторов и снова область трехчастотных колебаний.

Однако при большой связи на рис. 5, в картина изменяется: после прохождения области полной синхронизации возникает захват не второго–третьего, а снова первого–второго осцилляторов. Этот эффект связан с неидентичностью осцилляторов. В рассматриваемом случае первый осциллятор сильно протемпирован, и поэтому именно он, а не третий, захватывается вторым. Отметим, что в соответствии с рис. 5, в захват первого и второго осцилляторов реализуется в широкой полосе частот, как минимум, до  $\Delta_1 = 3.0$ . Это режим *двухчастотной широкополосной синхронизации*, обусловленный подавлением первого осциллятора при  $\lambda_1 < \mu$ .

Отметим также, что на графиках чисел вращения (рис. 5, в) имеются отмеченные стрелочками области, внутри которых эти графики приходят в противоречие с ляпуновской картой (см. рис. 4). Действительно, в этом случае наблюдаются двухчастотные режимы, а на графиках чисел вращения они не фиксируются. Причина становится понятной, если обратиться к фазовым портретам (см. рис. 6), отвечающим такой области значений параметров. На рис. 6 хорошо видно, что траектория первого осциллятора имеет многочисленные петли и периодически посещает окрестность начала координат. Поэтому фаза и, соответственно, число вращения для этого осциллятора плохо определены. Причина в неидентичности осцилляторов: в рассматриваемом случае первый осциллятор сильно протемпирован, что и предопределяет такой вид его фазовых траекторий. Таким образом, число вращения является не вполне удачной характеристикой режимов неидентичных осцилляторов в области, где хотя бы один из них протемпирован.

#### 4. Случай идентичных осцилляторов

Обратимся теперь к случаю идентичных по управляющим параметрам осцилляторов, когда  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda$ . Соответствующая карта ляпуновских показателей для значений параметров  $\lambda = 0.2$  и  $\Delta_2 = 0.15$  показана на рис. 7. В фазовом приближении случай идентичных осцилляторов рассмотрен в [21], поэтому интересным является вопрос, какие особенности в этом случае демонстрирует исходная система (1).

На рис. 7 можно видеть, что, как и для двух идентичных осцилляторов, режим полной широкополосной синхронизации отсутствует. Однако возникает новый тип режима – двухчастотная широкополосная синхронизация. Этот режим наблюдается при сколь угодно большой частотной расстройке  $\Delta_1$  в интервале значений связи  $\lambda/2 < \mu < \lambda$ . Причина появления этого режима состоит в «выделенной» роли центрального осциллятора. Хотя все осцилляторы идентичны и имеют одинаковую степень возбуждения, центральный испытывает трение со стороны не одного, а двух соседей и с ростом величины связи оказывается более протемпированным. При этом в области  $\lambda/2 < \mu < \lambda$  он легко захватывается соседними осцилляторами, и возникает режим двухчастотной квазипериодичности. Такой тип поведения не описывается в рамках фазового приближения [21].

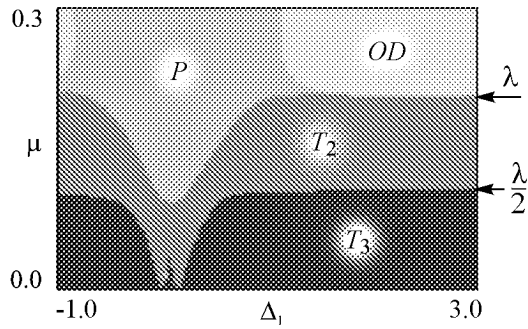


Рис. 7. Карта ляпуновских показателей системы (1) в случае идентичных по управляющим параметрам осцилляторов;  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda = 0.2$ ,  $\Delta_2 = 0.15$

## 5. Случай больших значений управляющих параметров

Выше рассмотрен случай, когда значения управляющих параметров невелики. Пусть теперь эти параметры сопоставимы с единицей. Увеличим по сравнению с ситуацией, изображенной на рис. 2, все параметры в 10 раз, так что  $\lambda_1 = 1.3$ ,  $\lambda_2 = 1.9$ ,  $\lambda_3 = 1.8$ ,  $\Delta_2 = 1.5$ . Соответствующие карты и характерные фазовые портреты показаны на рис. 8.

В этом случае внутри основного языка полной синхронизации все осцилляторы равноправны, но вид фазовых портретов на рис. 8, а заметно отличается от окружности, что обусловлено большими значениями управляющих параметров. В области полной широкополосной синхронизации появились режимы периода 3, для которых характерно появление на фазовом портрете второго осциллятора дополнительных петель (рис. 8, б). При этом, как и в случае малых  $\lambda$ , сохраняется ситуация, когда первый и второй осцилляторы подавлены по сравнению с третьим. Интересно, что в этом режиме каждый осциллятор имеет какую-то свою, характерную форму фазового портрета.

Наиболее существенные изменения происходят в области трехчастотной квазипериодичности. Внутри нее появляются выраженные языки двухчастотных торов<sup>4</sup>. Фазовые портреты осцилляторов для двух наиболее характерных языков представлены на рис. 8, в и г. Можно видеть, что в этом случае доминирует (хотя и незначительно) второй осциллятор, у которого наибольшее значение управляющего параметра. Таким образом, демпфирующее влияние связи невелико. При этом внутри двух указанных языков наиболее возмущены квазипериодическим образом разные осцилляторы: третий – на рис. 8, в, и первый – на рис. 8, г. Это отвечает тому, что в ситуации

<sup>4</sup>По аналогии с классической задачей синхронизации можно предположить, что границам этих языков отвечают седло-узловые бифуркации двухчастотных торов, простейшие примеры которых обсуждались в [17–21].

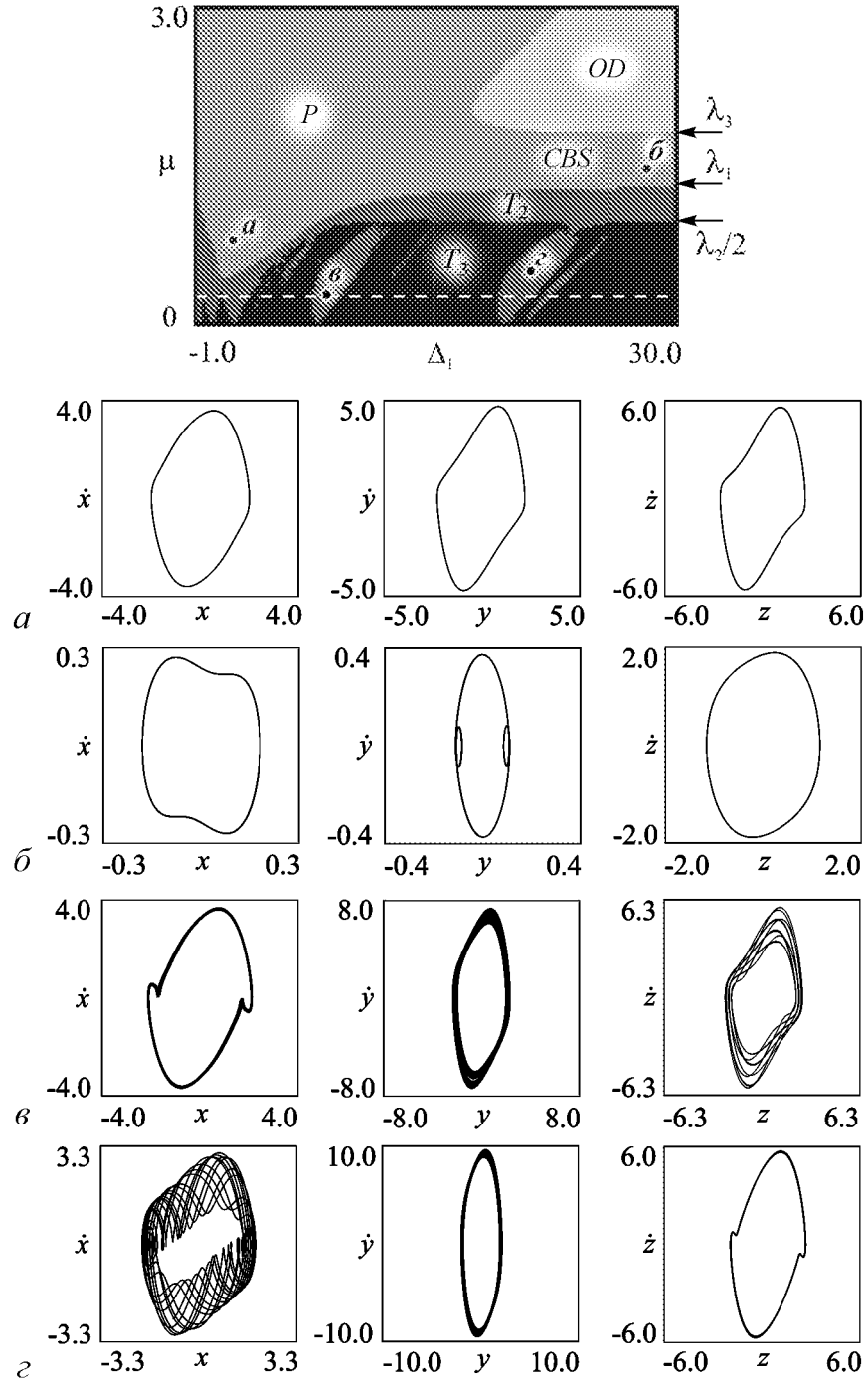


Рис. 8. Карта ляпуновских показателей системы (1),  $\lambda_1 = 1.3$ ,  $\lambda_2 = 1.9$ ,  $\lambda_3 = 1.8$ ,  $\Delta_2 = 1.5$ ;  $a-z$  – фазовые портреты в соответствующих точках

рис. 8, в взаимно захвачены первый-второй, а в ситуации рис. 8, г – второй-третий осцилляторы.

Этот факт легко обосновать, рассчитав числа вращения. На рис. 9 показаны графики зависимостей чисел вращения  $w_{1-2}$  и  $w_{2-3}$  от частотной расстройки  $\Delta_1$  для фиксированного уровня связи, отвечающего белой пунктирной

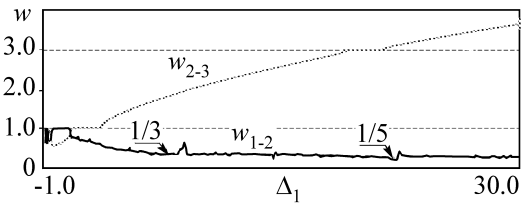


Рис. 9. Зависимости чисел вращения  $w_{1-2}$  и  $w_{2-3}$  от частотной расстройки  $\Delta_1$ ;  $\lambda_1 = 1.3$ ,  $\lambda_2 = 1.9$ ,  $\lambda_3 = 1.8$ ,  $\Delta_2 = 1.5$ . Значение параметра связи  $\mu = 0.32$

линии на рис. 8. На них можно видеть характерные полочки  $w_{1-2} = 1/3$  и  $w_{2-3} = 3$ . Таким образом, в этом случае наблюдается кратная синхронизация с соотношением частот 1:3. Расчеты показывают, что в полосе широкополосной двухчастотной синхронизации также взаимно захвачены второй и третий осцилляторы. В этом режиме второй осциллятор сильнее всех протемпирован связью, поскольку  $\lambda_2/2 < \lambda_1, \lambda_3$ .

### Заключение

В цепочке трех диссипативно связанных неидентичных осцилляторов ван дер Поля связь может подавлять колебания любого из трех осцилляторов. В силу геометрии цепочки, осциллятор, находящийся в ее центре, испытывает большее (в два раза) диссипативное воздействие. Картина синхронизации зависит от положения наиболее протемпированного связью осциллятора в цепочке.

В системе возможен режим полной широкополосной синхронизации, когда захват всех трех осцилляторов наблюдается в сколь угодно широком диапазоне частотных расстроек. Такой режим возникает в ситуации, когда за счет диссипативной связи оказываются протемпированными два осциллятора. Сверху он ограничен областью гибели колебаний, граница которой задается условием на величину связи  $\mu = \max(\lambda_1, \lambda_2/2, \lambda_3)$ .

В системе возможен также режим, который можно назвать широкополосной двухчастотной синхронизацией. Он располагается в области значений управляющих параметров, когда сильно протемпированным является один из осцилляторов. Ниже этой области располагаются режимы трехчастотных квазипериодических колебаний. Для них ни один осциллятор не протемпирован, и соотношение размеров аттракторов определяется соотношением управляющих параметров осцилляторов.

В случае близких частот крайних осцилляторов, при подключении в центр цепочки наименее «активного» осциллятора ( $\lambda_2/2 < \lambda_1, \lambda_3$ ) область полной синхронизации имеет форму языка с порогом по величине связи. При увеличении частотной расстройки крайних осцилляторов полная синхронизация в области  $\mu < \min(\lambda_1, \lambda_2/2, \lambda_3)$  становится невозможной. Кроме того, происходит уменьшение размеров областей гибели колебаний за счет изменения их частотных границ. Причина состоит в том, что для реализации эффекта гибели колебаний нужно не только условие большой связи, но и условие достаточно большой частотной расстройки осцилляторов. Еще одна особенность состоит в возникновении дополнительной об-

ласти гибели колебаний, что связано с «парным» характером взаимодействия осцилляторов и с выполнением резонансных частотных условий. Соответствующие резонансы хорошо выявляются на карте ляпуновских показателей и имеют вид двух выраженных языков двухчастотных торов в области трехчастотной квазипериодичности.

В случае, когда наиболее протемпфированным оказывается крайний осциллятор, в области  $\mu < \min(\lambda_1, \lambda_2/2, \lambda_3)$  имеется значительный по своему размеру язык режима полной синхронизации. Таким образом, полная синхронизация возникает предпочтительно в ситуации, когда наиболее протемпфирован крайний осциллятор.

Для идентичных осцилляторов ( $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda$ ) в области значений связи  $\lambda/2 < \mu < \lambda$  возникает режим двухчастотной широкополосной синхронизации, что обусловлено выделенной ролью центрального осциллятора, который даже в случае равенства управляющих параметров оказывается более протемпфированным за счет связи.

В случае, когда управляющие параметры осцилляторов сопоставимы с единицей, возникают высшие резонансы, отвечающие захватам пар первый–второй или второй–третий осцилляторы с соотношением частот 1:3, 1:5 и т.д. Им отвечают соответствующие языки двухчастотных торов, погруженные в область трехчастотной квазипериодичности.

*Работа поддержана грантом РФФИ 09-02-00707-а и программой «Развитие научного потенциала высшей школы» № 2.1.1/1738. Ю.П. Емельянова благодарит также Фонд содействия отечественной науке.*

## Библиографический список

1. Пиковский А., Розенблум М., Куртс Ю. Синхронизация: Фундаментальное нелинейное явление. М.: Техносфера, 2003. 508 с.
2. Ланда П.С. Нелинейные колебания и волны. М.: Наука, 1997. 495 с.
3. Ланда П.С. Автоколебания в системах с конечным числом степеней свободы. М.: Наука, 1980. 360 с.
4. Блехман И.И. Синхронизация в природе и технике. М.: Наука, 1981. 351 с.
5. Aronson D.G., Ermentrout G.B., Kopell N. Amplitude response of coupled oscillators // Physica D. 1990. Vol. 41. P. 403.
6. Rand R., Holmes P.J. Bifurcation of periodic motions in two weakly coupled van der Pol oscillators // Int. J. Non-Linear Mechanics. 1980. Vol. 15. P. 387.
7. Storti D.W., Rand R.H. Dynamics of two strongly coupled van der Pol oscillators // Int. J. Non-Linear Mechanics. 1982. Vol. 17, № 3. P. 143.
8. Pastor I., Perez-Garcia V.M., Encinas-Sanz F., Guerra J.M. Ordered and chaotic behavior of two coupled van der Pol oscillators // Phys. Rev. E. 1993. Vol. 48. P. 171.
9. Кузнецов А.П., Паксютов В.И. О динамике двух связанных осцилляторов ван дер Поля–Дуффинга с диссипативной связью // Изв. вузов. ПНД. 2003. Т. 11, № 6. С. 48.



10. *Ivanchenko M.V., Osipov G.V., Shalfeev V.D., Kurths J.* Synchronization of two non-scalar-coupled limit-cycle oscillators // *Physica D*. 2004. Vol. 189, № 1-2. P. 8.
11. *Кузнецов А.П., Паксютов В.И., Роман Ю.П.* Особенности синхронизации в системе связанных осцилляторов ван дер Поля, неидентичных по управляющему параметру // *Письма в ЖТФ*. 2007. Т. 33, вып. 15. С. 15.
12. *Кузнецов А.П., Паксютов В.И., Роман Ю.П.* Особенности синхронизации в системе неидентичных связанных осцилляторов ван дер Поля и ван дер Поля–Дуффинга. Широкополосная синхронизация // *Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика*. 2007. Т. 15, № 4. С. 3.
13. *Kuznetsov A.P., Roman Yu.P.* Properties of synchronization in the systems of non-identical coupled van der Pol and van der Pol–Duffing oscillators. Broadband synchronization // *Physica D*. 2009. Vol. 238, № 16. P. 1499.
14. *Астахов В.В., Коблянский С.А Вадивасова Т.Е., Анищенко В.С.* Бифуркационный анализ динамики диссипативно связанных генераторов ван дер Поля // *Успехи современной радиоэлектроники*, 2008. Вып. 9. С. 61.
15. *Астахов В.В., Коблянский С.А., Шабунин А.В.* Бифуркационный анализ режимов синхронизации и гашения колебаний в связанных генераторах с инерционной нелинейностью // *Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика*. 2010. Т. 18, № 2. С. 79.
16. *Кузнецов А.П., Емельянова Ю.П., Селезнев Е.П.* Синхронизация связанных автоколебательных осцилляторов с неидентичными параметрами // *Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика*. 2010. Т. 18, № 2. С. 62.
17. *Anishchenko V., Astakhov S., Vadivasova T.* Phase dynamics of two coupled oscillators under external periodic force // *Europhysics Letters*. 2009. Vol. 86. P. 30003.
18. *Анищенко В.С., Астахов С.В, Вадивасова Т.Е., Феоктистов А.В.* Численное и экспериментальное исследование внешней синхронизации двухчастотных колебаний // *Нелинейная динамика*. 2009. Т. 5, № 2. С. 237.
19. *Анищенко В.С., Астахов В.В., Вадивасова Т.Е., Стрелкова Г.И.* Синхронизация регулярных, хаотических и стохастических колебаний. Москва, Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2008. 144 с.
20. *Кузнецов А.П., Сатаев И.Р., Тюрюкина Л.В.* Фазовая динамика возбуждаемых квазипериодических автоколебательных осцилляторов // *Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика*. 2010 Т. 18, № 4. С. 17.
21. *Кузнецов А.П., Сатаев И.Р., Тюрюкина Л.В.* Синхронизация и многочастотные колебания в цепочке фазовых осцилляторов // *Нелинейная динамика*. 2010. Т. 6, № 4. С. 693.
22. *Ландау Л.Д.* К проблеме турбулентности // *ДАН СССР*. 1944. Т. 44, № 8. С. 339.

*Саратовский государственный  
университет им. Н.Г. Чернышевского  
Саратовский филиал ИРЭ  
им. В.А. Котельникова РАН*

*Поступила в редакцию 28.03.2011  
После доработки 12.10.2011*

## DYNAMICS OF THREE COUPLED VAN DER POL OSCILLATORS WITH NON-IDENTICAL CONTROLLING PARAMETERS

*Yu.P. Emelianova, A.P. Kuznetsov, L.V. Turukina*

We consider the chain of three dissipatively coupled self-oscillating systems with non-identical controlling parameters. We observe situations, when coupling damps different oscillators. The structure of the frequency mismatch – coupling value parameter plane is investigated with a view to the location of oscillator death area, complete synchronization area, two- and three-frequency quasiperiodic regimes. Features, connected with non-identity in controlling parameters, are considered. A possibility of complete broadband synchronization regimes and two-frequency broadband synchronization regimes is demonstrated.

*Keywords:* Synchronization, coupled oscillators, quasiperiodic dynamics.



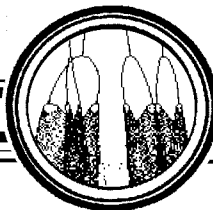
*Емельянова Юлия Павловна* – родилась в 1987 году в Венгрии в Сешфехерваре, окончила факультет нелинейных процессов Саратовского государственного университета им. Н.Г. Чернышевского с красным дипломом в 2009 году. Занимается научной работой под руководством профессора, д.ф.-м.н. А.П. Кузнецова с 2002 года. Научные интересы – исследование особенностей синхронизации связанных автоколебательных систем. Победитель стипендиальной программы Фонда некоммерческих программ «Династия» (2008–2009), лауреат стипендии Президента РФ как «студент-отличник, проявивший выдающиеся способности в учебной и научной деятельности» (2008–2009), а также программы «Лучшие аспиранты РАН» Фонда содействия отечественной науке за 2010 год по направлению «Инженерные и технические науки». Автор более 20 публикаций, в том числе 9 статей в российских и международных журналах, а также 1 учебного пособия.

410012 Саратов, Астраханская, 83  
Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского  
E-mail: yuliaem@gmail.com



*Тюрюкина Людмила Владимировна* – родилась в 1977 году. Окончила факультет нелинейных процессов в Саратовском госуниверситете (2000). Кандидат физико-математических наук (2003, СГУ), имеет звание доцента по специальности радиофизика (2009). В настоящее время старший научный сотрудник Саратовского филиала Института радиотехники и электроники РАН, доцент базовой кафедры динамических систем СГУ в СФ ИРЭ РАН. Область научных интересов – новые аспекты явления синхронизации в системах различной физической природы (радиофизические системы, модели турбулентности, модели биофизических систем и др.); контроль (управление) неустойчивыми режимами; динамический хаос; физические системы с гиперболическими аттракторами. Автор более 80 публикаций, в том числе 30 статей в российских и зарубежных журналах и 3 учебно-методических пособий.

410019 Саратов, ул. Зеленая, д. 38  
Саратовский филиал Института радиотехники  
и электроники им. В.А. Котельникова РАН  
E-mail: lvtur@rambler.ru



## ТРАНСФОРМАЦИЯ УСТРОЙСТВА ПРОСТРАНСТВА ПАРАМЕТРОВ НЕАВТОНОМНОЙ АВТОКОЛЕБАТЕЛЬНОЙ СИСТЕМЫ ПРИ ВВЕДЕНИИ ЗАПАЗДЫВАЮЩЕЙ МОДУЛЯЦИИ

*А.П. Кузнецов, Е.В. Новиков, А.В. Савин*

Исследуется динамика автоколебательной системы с запаздывающей модуляцией амплитуды воздействия. Показано, что при определенной глубине модуляции происходит смена бифуркационного сценария разрушения синхронизации, и выявлена трансформация устройства пространства параметров «частота–амплитуда воздействия» в этом случае.

*Ключевые слова:* Бифуркации, квазипериодическая динамика, запаздывание.

### Введение

Способ модификации динамических систем путем введения запаздывающей обратной связи, обыкновенно пропорциональной разности значений переменных в данный и некоторый предшествующий моменты времени, известен достаточно давно. Традиционно [1–5] такой способ применяется для задач управления хаосом, то есть стабилизации неустойчивых в исходной системе регулярных режимов. В то же время такая модификация может использоваться и с противоположной в некотором смысле целью – получить на базе простейших известных систем новые модели с более богатой динамикой. В [6] некоторые модели такого типа были предложены и изучены на основе дискретных отображений с переходом к хаосу через каскад бифуркаций удвоения периода. В настоящей работе такой подход применяется к другому классу систем, представляющих собой автоколебательные системы с внешним воздействием и демонстрирующих явление синхронизации и сопутствующие ему эффекты, в частности, переход к хаосу через разрушение квазипериодического поведения.

## 1. Получение модели

Простейшей дискретной моделью, демонстрирующей явление синхронизации, служит одномерное синус-отображение окружности

$$\theta_{n+1} = \theta_n + \Omega - K \sin \theta_n, \quad (1)$$

в котором параметр  $\Omega$  имеет смысл числа вращения – отношения частоты воздействия к частоте собственных колебаний, а параметр  $K$  – амплитуды воздействия.

Тривиальное формальное построение модели путем введения модуляции параметра  $K$  непосредственно разностью текущего и предыдущего значений переменной представляется не вполне корректным с физической точки зрения, поскольку динамическая переменная имеет смысл фазы колебаний. Поэтому, чтобы получить физически мотивированный способ введения модуляции, обратимся к возбуждаемой импульсами системе ван дер Поля–Дуффинга [7]

$$\ddot{x} - (\lambda - x^2)\dot{x} + x + \beta x^3 = B \sum \delta(t - nT). \quad (2)$$

Здесь  $x$  – динамическая переменная (координата осциллятора),  $\lambda$  – параметр, отвечающий за отрицательное трение в осцилляторе,  $\beta$  – параметр нелинейности, введенной по типу осциллятора Дуффинга и отвечающий за неизохронность малых колебаний,  $B$  и  $T$  – амплитуда и период следования импульсов.

Система (2) может быть приведена к двумерному отображению [7], если в промежутке между импульсами для поиска решения автономной системы использовать метод медленно меняющихся амплитуд [8]. Если, кроме того, в промежутке между импульсами изображающая точка успевает вернуться на предельный цикл автономной системы, то при дополнительном условии большой неизохронности динамика фазы может быть приближенно описана классическим одномерным синус-отображением окружности (1), при этом  $K = 3\beta B$ ,  $\Omega = T(1 + \frac{3}{2}\beta\lambda)$  – безразмерные амплитуда и период следования импульсов, а переменная  $\theta_n$  имеет смысл фазы колебаний в момент очередного импульса. (Детали вывода см., например, в [7].)

Одним из возможных физически адекватных способов введения запаздывания является модуляция амплитуды импульсов разностью значений координаты системы в момент текущего и предыдущего импульса, что приводит к следующей модификации исходной системы:

$$\ddot{x} - (\lambda - x^2)\dot{x} + x + \beta x^3 = \sum [B + E(x(t) - x(t - T))]\delta(t - nT), \quad (3)$$

где  $E$  – амплитуда модуляции. Действуя совершенно аналогично [7], можно прийти к описывающему систему (3) отображению

$$\theta_{n+1} = \theta_n + \Omega - (K + \varepsilon(\cos \theta_n - \cos \theta_{n-1})) \sin \theta_n, \quad (4)$$

где введен еще один безразмерный параметр  $\varepsilon = 3\beta E$ , отвечающий за глубину модуляции. Полученное отображение можно рассматривать как аналог синус-отображения окружности с модуляцией управляющего параметра запаздывающим воздействием.

Благодаря введению запаздывания, мы, однако, получаем уже двумерное отображение, которое можно записать в явной форме следующим образом:

$$\begin{aligned}\theta_{n+1} &= \theta_n + \Omega - (K + \varepsilon(\cos \theta_n - \cos \varphi_n)) \sin \theta_n, \\ \varphi_{n+1} &= \theta_n.\end{aligned}\quad (5)$$

Исследованию динамики отображения (5) в зависимости от величины амплитуды модуляции  $\varepsilon$  посвящена настоящая работа.

## 2. Бифуркационные механизмы разрушения синхронизации

Сначала опишем простейшие бифуркации приведенной системы. Как известно, режиму синхронизации с числом вращения 1:1 (основному языку синхронизации) отвечает наличие в отображении устойчивой неподвижной точки. Неподвижные точки отображения (5) совпадают, очевидно, с неподвижными точками «немодулированного» синус-отображения окружности (2), и область их существования ограничена линиями седло-узловой бифуркации

$$\left| \frac{K}{\Omega} \right| = 1, \quad (6)$$

задающими границу языка синхронизации при небольших амплитудах модуляции.

Однако в двумерном отображении становится возможной бифуркация Неймарка–Сакера. Чтобы ее найти, запишем матрицу Якоби отображения (5)

$$M = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial \theta} & \frac{\partial f}{\partial \varphi} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (7)$$

где  $f(\theta, \varphi) = \theta + \Omega - (K + \varepsilon(\cos \theta - \cos \varphi)) \sin \theta$ . Условие бифуркации Неймарка–Сакера отвечает равенству единице определителя матрицы Якоби, так что из (7) получаем  $\partial f / \partial \varphi = -1$ , или

$$\varepsilon \sin^2 \theta_0 = 1, \quad (8)$$

где  $\theta_0 = \varphi_0$  – неподвижная точка отображения (5). Очевидно, что это условие может быть выполнено только при  $\varepsilon \geq 1$ , и после подстановки координаты неподвижной точки  $\theta_0$  оно принимает вид

$$\Omega = \pm \frac{K}{\sqrt{\varepsilon}}. \quad (9)$$

Таким образом, при  $\varepsilon > 1$  должно произойти изменение типа границы языка синхронизации на плоскости параметров период – амплитуда воздействия. Теперь это будет не линия седло-узловой бифуркации (5), а линия бифуркации Неймарка–Сакера (7), так что можно говорить о смене сценария установления (разрушения) синхронизации при увеличении глубины запаздывающей модуляции.

## 3. Устройство пространства параметров вблизи границы языка синхронизации

Исследуем теперь эволюцию пространства параметров с увеличением глубины модуляции при помощи построения карт динамических режимов и карт ляпунов-

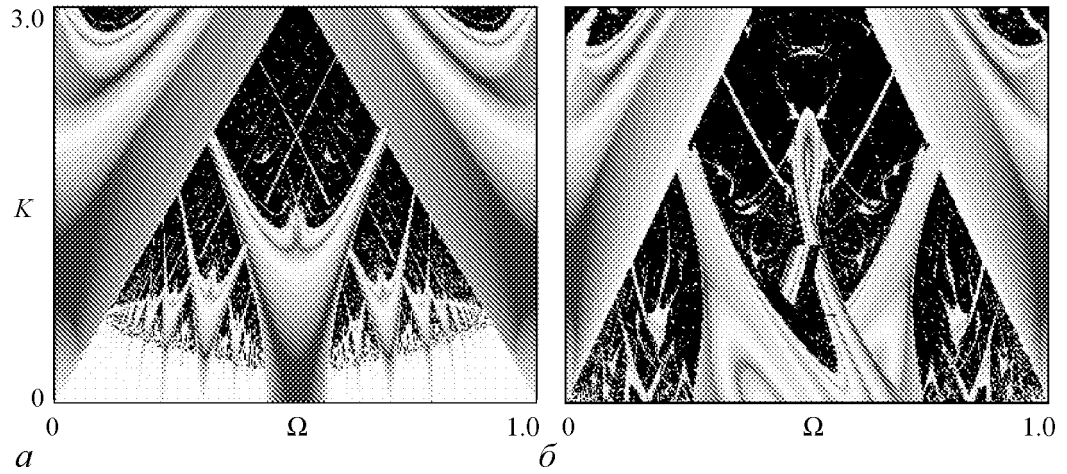


Рис. 1. Карты старшего показателя Ляпунова отображения (4) при различных значениях амплитуды модуляции  $\varepsilon$ : 0.4 (а); 1.5 (б). Оттенками серого цвета закодировано значение старшего показателя Ляпунова – черный цвет соответствует положительным значениям (хаотическая динамика), белый – нулевому (квазипериодическая динамика), оттенки серого – отрицательным значениям, причем чем больше абсолютная величина показателя, тем темнее оттенок

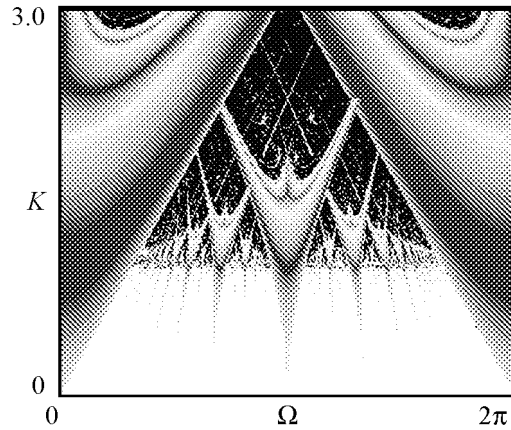


Рис. 2. Карта старшего показателя Ляпунова отображения окружности (1)

ских показателей. На рис. 1 приведены карты ляпуновских показателей исследуемого отображения при различных значениях глубины модуляции  $\varepsilon$  (карта ляпуновских показателей в отсутствие модуляции показана на рис. 2). Видно, что при  $\varepsilon > 1$  граница языка синхронизации действительно не совпадает с линией седло-узловой бифуркации и режим синхронизации теряет устойчивость при меньших значениях частотной расстройки. Так, при амплитуде модуляции 1.5 (рис. 1, б) ширина основного языка синхронизации значительно меньше, чем при амплитуде модуляции 0.4 (рис. 1, а).

Еще один новый момент состоит в том, что линия перехода к хаосу через разрушение квазипериодических движений (линия  $K = 1$  в исходной системе (2)) смещается в сторону меньших значений амплитуды воздействия, что приводит к уменьшению площади области пространства параметров, занятой квазипериодическими режимами, при увеличении модуляции, вплоть до ее практически полного исчезновения (см. рис. 1, б). При этом существенную часть пространства параметров занимают области хаотической динамики. Это особенно хорошо заметно на увеличенных фрагментах карт ляпуновских показателей вблизи границы основного языка синхронизации (рис. 3).

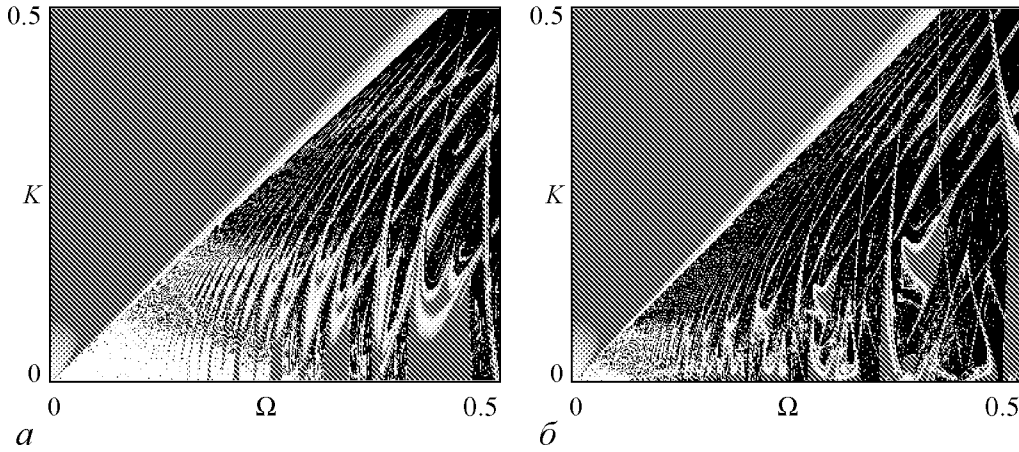


Рис. 3. Увеличенные фрагменты карт показателей Ляпунова отображения (4) для значений амплитуды модуляции  $\varepsilon = 1.3$  (а) и  $\varepsilon = 1.5$  (б). Область квазипериодической динамики окрашена белым

Проведенный при помощи программы *Content* бифуркационный анализ показывает, что являющаяся границей языка синхронизации линия бифуркации Неймарка содержит участки, отвечающие как прямой, так и обратной бифуркациям. Разделяет эти участки точка вырожденной бифуркации Неймарка–Сакера (DN, или Chenciner bifurcation, по терминологии [9]). На рис. 4 приведена зависимость координат этой точки от амплитуды модуляции, полученная численно при помощи программы *Content*. Хорошо видно, что эта точка быстро приближается к оси  $K = 0$ , так что уже при амплитуде модуляции 0.2 большая часть границы языка синхронизации является линией обратной бифуркации Неймарка–Сакера.

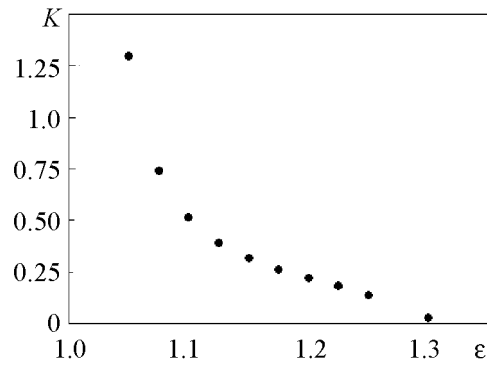


Рис. 4. Точки вырожденной бифуркации Неймарка–Сакера, определенные численно при помощи программы *Content*, на плоскости параметров  $(\varepsilon, K)$  отображения (4). Значение параметра  $\Omega$  удовлетворяет соотношению (7), что соответствует границе языка синхронизации

### Заключение

Таким образом, введение модуляции управляющего параметра запаздывающим воздействием в систему с квазипериодическим поведением приводит к изменению бифуркационного сценария разрушения синхронизации. А именно, при значительной амплитуде модуляции разрушение синхронного режима происходит в результате бифуркации Неймарка–Сакера, а не бифуркации «седло-узел», что сопровождается соответствующей перестройкой структуры пространства параметров в окрестности границы языка синхронизации. При этом значительная часть границы языка соответствует обратной бифуркации Неймарка–Сакера, что приводит к суще-

ственному уменьшению областей квазипериодических режимов вплоть до их визуального исчезновения на картах ляпуновских показателей.

Авторы благодарят к.ф.-м.н. И.Р. Сагаева за полезное обсуждение.

*Работа поддержана грантом РФФИ № 09-02-00707 и АВЦП «Развитие научного потенциала высшей школы» (проект № 2.1.1/1738) Минобрнауки РФ.*

### **Библиографический список**

1. Pyragas K. Continuous control of chaos by self-controlling feedback // Phys. Rev. A. 1992. Vol. 170. P. 421.
2. Barrero E., Grebogi C. Multiparameter control of chaos // Phys. Rev. E. 1993. Vol. 52. P. 3553.
3. Vieira M.S., Lichtenberg A.J. Controlling chaos using nonlinear feedback with delay // Phys. Rev. E. 1996. Vol. 54. P. 1200.
4. Buchner T., Zebrowski J.J. Logistic map with a delayed feedback: Stability of a discrete time-delay control of chaos // Phys. Rev. E. 2000. Vol. 61. 016210.
5. Balanov A.G., Janson N.B., Scholl E. Delayed feedback control of chaos: bifurcation analysis // Phys. Rev. E. 2005. Vol. 71. 016222.
6. Кузнецов А.П., Новиков Е.В., Савин А.В. Отображения с удвоениями периода с модуляцией управляющего параметра запаздывающим воздействием // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2008. Т. 16, № 4. С. 33.
7. Кузнецов А.П., Тюрюкина Л.В. Синхронизация автоколебательной системы ван дер Поля–Дуффинга короткими импульсами // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2004. Т. 12, № 5. С.16-31.
8. Кузнецов А.П., Кузнецов С.П., Рыскин Н.М. Нелинейные колебания. М.: Физматлит, 2006.
9. Kuznetsov Yu.A. Elements of applied bifurcation theory. Springer-Verlag, 1998, p. 593.

*Саратовский государственный  
университет им. Н.Г. Чернышевского*

*Поступила в редакцию 23.06.2011  
После доработки 4.10.2011*

### **CHANGES OF THE PARAMETER PLANE OF DRIVEN AUTO-OSCILLATORY SYSTEM CAUSED BY DELAYED MODULATION OF THE PARAMETER**

*A.P. Kuznetsov, E.V. Novikov, A.V. Savin*

The driven auto-oscillatory system with the delayed modulation of driving amplitude was investigated. It was shown that synchronous regime destructs in different ways at small and large modulation amplitudes. The changes in the «driving amplitude–driving frequency» plane were revealed.

*Keywords:* Bifurcations, quasi-periodicity, delayed modulation.





*Новиков Евгений Вячеславович* – родился в 1987 году. Окончил факультет нелинейных процессов СГУ (2009). Аспирант базовой кафедры динамических систем СГУ. Имеет 5 публикаций.

410012 Саратов, ул. Астраханская, 83  
Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского  
E-mail:



*Савин Алексей Владимирович* – родился в 1980 году в Саратове. Окончил физический факультет СГУ (2002) и аспирантуру факультета нелинейных процессов СГУ (2005). Кандидат физико-математических наук (2005), доцент кафедры нелинейной физики СГУ. Область научных интересов – сложная динамика и переход к хаосу в близких к консервативным динамических системах. Автор 20 статей в научных журналах.

410012 Саратов, ул. Астраханская, 83  
Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского  
E-mail: SavinA@info.sgu.ru



## СХЕМЫ ЭЛЕКТРОННЫХ УСТРОЙСТВ С ГИПЕРБОЛИЧЕСКИМ ХАОСОМ И МОДЕЛИРОВАНИЕ ИХ ДИНАМИКИ В ПРОГРАММНОЙ СРЕДЕ MULTISIM

*С.П. Кузнецов*

Приводятся схемы электронных устройств, представляющих собой неавтономные динамические системы с гиперболическим аттрактором типа Смейла–Вильямса, и результаты их моделирования в программной среде NI Multisim. Радиотехнические устройства со структурно устойчивым гиперболическим хаосом, подобные описанным в статье, могут найти применение в системах скрытой коммуникации, шумовой локации, для криптографических систем, для генерации случайных чисел. В методическом плане предлагаемый материал интересен для студентов и аспирантов, специализирующихся в области радиофизики и электроники, в плане обучения принципам построения и анализа систем со сложной динамикой.

*Ключевые слова:* Хаос, аттрактор, соленоид Смейла–Вильямса, неавтономная система, операционный усилитель, моделирование, Multisim.

### Введение

Со времени классических работ Андронова и его школы, грубые, или структурно устойчивые системы считаются подлежащими первоочередному исследованию в теории колебаний и рассматриваются как наиболее значимые с практической точки зрения [1–3]. В свете этого принципа, говоря о прикладных аспектах динамического хаоса, следовало бы отдать предпочтение классу систем с однородно гиперболическими хаотическими аттракторами, которым присуща структурная устойчивость [4–9]. Когда в свое время такие аттракторы были введены в рассмотрение, ожидалось, что они будут адекватны многим физическим ситуациям. Потом выяснилось, однако, что хаотические аттракторы, с которыми обычно приходится иметь дело в приложениях, не попадают в этот класс и не вписываются в узкие рамки ранней гиперболической теории. Усилия математиков оказались перенаправлены на развитие обобщений, включающих реалистичные примеры хаоса [10, 11], тогда как однородно гиперболические аттракторы, представленные искусственными математическими конструкциями, стали рассматриваться как рафинированный образ хаоса, не имеющий прямого отношения к реальности.

Одна из таких конструкций – аттрактор Смейла–Вильямса, построение которого часто объясняют следующим образом [3, 5]. Рассмотрим область в виде тора в трехмерном пространстве состояний системы с дискретным временем. Один шаг эволюции состоит в том, что, представляя тор как пластичный объект, растягиваем его в длину, сжимаем в поперечном направлении, так что общий объем уменьшается, складываем двойной петлей и помещаем внутрь исходной области. На каждой следующей итерации указанного преобразования число витков объекта удваивается и в пределе становится бесконечным – получается так называемый *соленоид*. В качестве его поперечного сечения выступает множество типа канторова. Хаотическая природа динамики на аттракторе обусловлена неустойчивостью по отношению к вариации начальных условий, поскольку продольное растяжение вдоль витков на каждом шаге итераций влечет удаление друг от друга изначально близких изображающих точек.

Другой, формальный подход состоит в том, чтобы указать явный вид отображения с аттрактором типа соленоида [7, 8]. Пусть  $X$  и  $Y$  – декартовы координаты точки в меридиональном сечении тора, подчиненные условию  $X^2 + Y^2 \leq 1$ , а  $\varphi$  – угловая координата этого сечения. Определим отображение, отвечающее одному шагу дискретного времени, скажем, в виде

$$\varphi_{n+1} = 2\varphi_n, \quad X_{n+1} = \frac{3}{10}X_n + \frac{1}{2}\cos\varphi_n, \quad Y_{n+1} = \frac{3}{10}Y_n + \frac{1}{2}\sin\varphi_n. \quad (1)$$

Наглядно его действие иллюстрируется на рис.1: множество точек, заполняющих тор, переводится в объект меньшего объема в виде замкнутой двойной петли внутри исходной области. На рисунке также представлен результат двукратного применения отображения и показан собственно аттрактор в виде соленоида, возникающий в пределе бесконечного числа итераций.

Тонкость состоит в том, что геометрическая конструкция, как она здесь описана, не эквивалентна отображению (1) в топологическом смысле. В этом можно убедиться, поэкспериментировав, скажем, с реальной замкнутой в кольцо резиновой трубкой и сопоставив два варианта операции. Вариант, отвечающий отображению (1), состоит в том, что мы разрезаем трубку поперек, производим ее двукратное растяжение и поперечное сжатие, складываем двойной петлей, и склеиваем концы, будто разреза и не было. Другой же вариант, непрерывная деформация кольцевой трубки в двойную петлю без разреза, сопровождается, как можно заметить, неизбежно реализующимся дополнительным продольным кручением трубки. Чтобы иметь эквивалентность, надо было бы склеивать концы не впрямую, а с поворотом одного по отношению к другому на  $360^\circ$ .

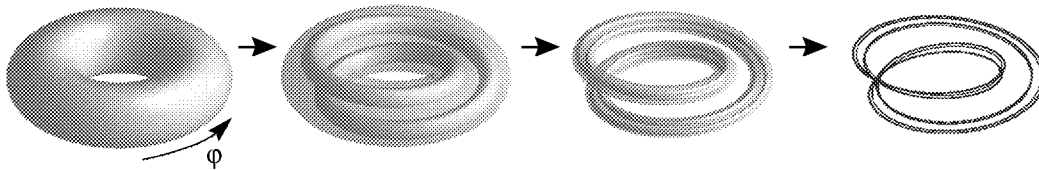


Рис. 1. Тороидальная область в трехмерном пространстве состояний, результат ее преобразования на двух итерациях отображения (1) и соленоид Смейла–Вильямса, получающийся как предельный объект, при многократном применении отображения

Если мы хотим получить систему с непрерывным временем, имеющую при описании в терминах отображения Пуанкаре аттрактор типа соленоида, то обязаны исходить из непрерывной деформации объекта в фазовом пространстве, что согласуется с геометрическим вариантом конструкции, тогда как вариант, ассоциирующийся с отображением (1), в качестве отправной точки не годится.

Сравнительно недавно были предложены примеры физически реализуемых систем с однородно гиперболическими хаотическими аттракторами [12–19]. Тем самым возникли предпосылки для создания на этой основе реально функционирующих устройств, демонстрирующих структурно устойчивый хаос, например, в электронике.

Имея в виду разработку электронных устройств, естественно обратиться к современным средствам схемотехнического моделирования, среди которых удобным и популярным является программный продукт Multisim [20, 21]. Его первоначальная версия была выпущена в 1995 г. канадской компанией Interactive Image Technologies под названием Electronics Workbench («Электронный верстак»). Начиная с 2005 г., усовершенствованные версии программного продукта разрабатываются компанией National Instruments (в которую первоначальная компания-разработчик вошла как подразделение) под названием NI Multisim. Представленные в настоящей статье результаты получены с использованием приобретенной Саратовским филиалом ИРЭ РАН лицензионной версии продукта NI Multisim 10.1.1.

В первом разделе статьи обсуждается система, идея которой предложена в работе автора [12]. Она составлена из двух осцилляторов ван дер Поля, которые становятся активными попеременно благодаря периодической модуляции параметра, ответственного за возникновение автоколебаний. Обе подсистемы передают возбуждение по очереди друг другу так, что это сопровождается растягивающим преобразованием переменной, задающей фазу высокочастотного заполнения для последовательно генерируемых цугов колебаний. Система характеризуется присутствием аттрактора Смейла–Вильямса в четырехмерном отображении, описывающем изменение состояния за период модуляции. В программной среде Multisim воспроизводится схема лабораторного устройства, экспериментально исследованного в совместной работе автора с Е.П. Селезевым [14].

Второй раздел посвящен неавтономной системе, построенной на основе одиночного осциллятора ван дер Поля, в котором в силу периодической модуляции параметра чередуются стадии активности и затухания. Возбуждение каждый раз стимулируется сигналом, испущенным на предыдущей стадии активности и претерпевшим нелинейное преобразование с удвоением фазы при прохождении через дополнительную цепь запаздывающей обратной связи. Из-за наличия запаздывания фазовое пространство, в которое вложен аттрактор типа Смейла–Вильямса, в данном случае, формально говоря, бесконечномерное. Представлена схема в программной среде Multisim, соответствующая лабораторному устройству, экспериментально исследованному в совместной работе с В.И. Пономаренко [17].

В третьем разделе рассматривается аналоговое устройство, в котором непосредственно осуществляется упомянутый выше принцип построения геометрической конструкции соленоида Смейла–Вильямса на основе деформации тороидальной области в фазовом пространстве. Стробоскопическое описание динамики соответствует трехмерному отображению Пуанкаре, которое получается как результат эво-

люции на трех последовательных периодически повторяющихся стадиях процесса. Первоначальная версия модели описана в статье [18], но в настоящей работе принята определенная модификация с целью упрощения схемотехнической реализации. Отметим, что это система с минимальной размерностью фазового пространства, при которой вообще возможно присутствие аттрактора Смейла–Вильямса.

## 1. Система с аттрактором Смейла–Вильямса на основе неавтономных осцилляторов ван дер Поля

В работе [5] была введена в рассмотрение неавтономная система, описываемая уравнениями

$$\begin{aligned} \ddot{x} - [A \cos(2\pi t/T) - x^2]\dot{x} + \omega_0^2 x &= \varepsilon y \cos \omega_0 t, \\ \ddot{y} - [-A \cos(2\pi t/T) - y^2]\dot{y} + 4\omega_0^2 y &= \varepsilon x^2. \end{aligned} \quad (2)$$

Переменные  $x$  и  $y$  относятся к двум подсистемам – осцилляторам ван дер Поля, возбуждающимся по очереди благодаря принудительному изменению с периодом  $T$  параметра, глубина модуляции которого задается константой  $A$ . Рабочие частоты осцилляторов различаются вдвое и составляют  $\omega_0$  и  $2\omega_0$ . Воздействие подсистем друг на друга характеризуется параметром связи  $\varepsilon$ , причем действие первого осциллятора на второй описывается членом, пропорциональным квадрату обобщенной координаты, а второго на первый – членом, содержащим произведение обобщенной координаты на вспомогательный опорный сигнал частоты  $\omega_0$ . Предполагается выполненным соотношение  $T = 2\pi N/\omega_0$ , где  $N$  – целое число, так что это система уравнений с периодическими коэффициентами.

Предположим, что первый осциллятор на стадии активности имеет фазу  $\varphi$ :  $x \sim \cos(\omega_0 t + \varphi)$ . Его действие на второй осциллятор определяется второй гармоникой  $\cos(2\omega_0 t + 2\varphi)$ , которая соответствует частоте второго осциллятора и способствует его возбуждению при переходе в активную стадию; при этом возникающие колебания характеризуются с точностью до аддитивной константы фазой  $2\varphi$ . В свою очередь, при действии второго осциллятора на первый, благодаря смещению колебаний  $y$  со вспомогательным сигналом, возникает составляющая на разностной частоте  $\omega_0$ , которая обеспечивает затравку для возбуждения с передачей фазы колебаниям на следующей стадии активности первого осциллятора. Таким образом, обе подсистемы по очереди передают возбуждение одна другой, и на последовательных стадиях активности фаза колебаний осциллятора дается в рассматриваемом приближении отображением Бернулли  $\varphi_{n+1} = 2\varphi_n + \text{const} \pmod{2\pi}$ .

Отображение, описывающее изменение состояния системы за период модуляции, производит в четырехмерном пространстве  $(x, \dot{x}, y, \dot{y})$  растяжение по угловой (циклической) переменной, отвечающей фазе  $\varphi$ , и сжатие по трем остальным направлениям. Можно указать поглощающую область в виде тороида, так что одна итерация отображения отвечает продольному растяжению и поперечному сжатию этого тороида, вкладываемого затем в виде двойной петли внутрь исходной области, что соответствует рассмотренной во введении геометрической конструкции с аттрактором Смейла–Вильямса [13].<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Обычно построение рассматривают в трехмерном пространстве; здесь же оно, напомним, четырехмерное.

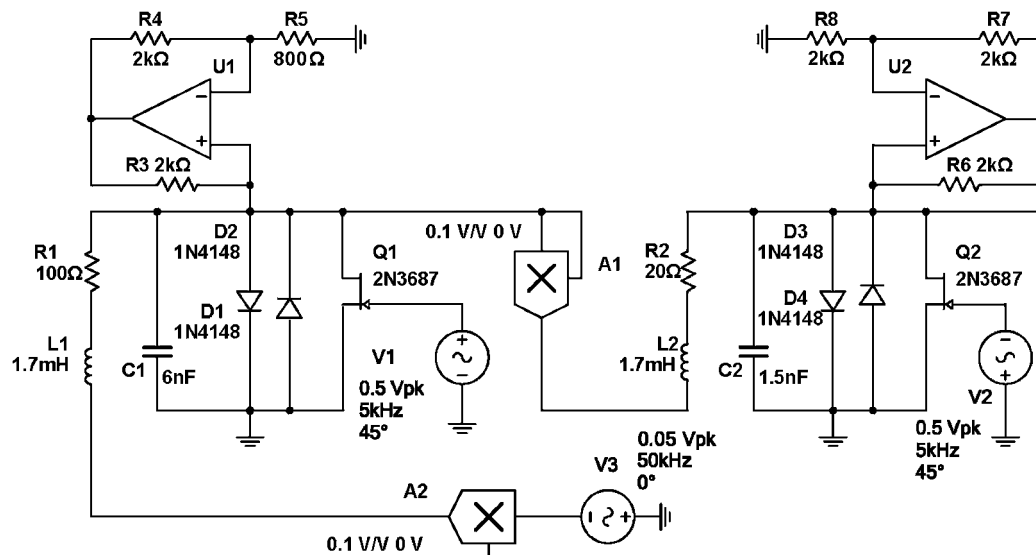


Рис. 2. Принципиальная схема устройства, в котором в отображении за период модуляции ( $T = 0.2$  мс) реализуется отображение с аттрактором Смейла – Вильямса. Умножитель A1 имеет коэффициент преобразования произведения входных напряжений в выходное, равный 0.1

Обратимся к показанной на рис. 2 схеме, составленной из двух подсистем в виде осцилляторов ван дер Поля на основе колебательных контуров, один из которых образован катушкой индуктивности  $L1$  и емкостью  $C1$ , а второй, соответственно,  $L2$  и  $C2$ . Поскольку индуктивности одинаковы, а емкость во втором контуре в четыре раза меньше, собственные частоты находятся в отношении 1:2. При указанных на схеме номиналах собственные частоты составляют приблизительно 50 и 100 кГц, соответственно. Отрицательное сопротивление в каждый контур вносится элементом на основе операционного усилителя (на схеме, соответственно,  $U1$  и  $U2$ ).<sup>2</sup> Нелинейная проводимость, обеспечивающая увеличение потерь энергии в контурах с ростом амплитуды колебаний, вводится элементами из полупроводниковых диодов в виде параллельно соединенных ветвей с противоположным направлением пропускания тока ( $D1$ ,  $D2$  и  $D3$ ,  $D4$ ). Для модуляции параметра, ответственного за возникновение автоколебаний, в каждый контур включен полевой транзистор, проводимость которого в цепи сток – исток управляется подаваемым на затвор переменным напряжением на частоте 5 кГц. Для модуляции параметра в двух осцилляторах используются источники переменного напряжения  $V1$  и  $V2$  с противоположной полярностью мгновенного напряжения. На одном полупериоде модуляции первый осциллятор находится в режиме генерации колебаний, а второй – под порогом генерации. На следующем полупериоде они меняются ролями. Первый генератор действует на второй через посредство умножителя  $A1$ , выдающего на выходе квадрат входного сигнала. Порождаемая при этом вторая гармоника сигнала служит для стимуляции возбуждения второго осциллятора, когда приходит время его выхода за порог генерации. В свою очередь, второй генератор действует на первый через посредство элемента  $A2$ , осуществляющего смещение поступающего сигнала и вспомогательного сигнала на частоте 50 кГц от источника напряжения  $V3$ . При этом появляется составляющая на

<sup>2</sup>Для получения сведений, касающихся схемотехнических вопросов, включая функционирование и типовое применение операционных усилителей, можно рекомендовать книги и пособия [22–24].

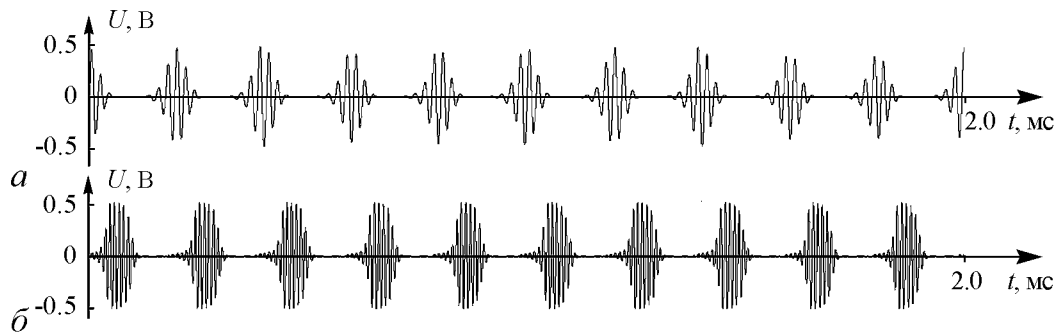


Рис. 3. Реализации напряжения на конденсаторах C1 (а) и C2 (б)

разностной частоте, которая действует на первый осциллятор и стимулирует в нем начало генерации.

На рис. 3 показаны графики реализаций напряжения на конденсаторах C1 и C2, полученные при моделировании в среде Multisim с использованием предусмотренного программным продуктом двухлучевого осциллографа (Stimulate – Instruments – Oscilloscope). Как можно видеть, в соответствии с приведенным выше качественным описанием, имеет место поочередное возбуждение колебаний в контурах L1, C1 и L2, C2.

Чтобы убедиться, что переход к каждой новой стадии активности сопровождается удвоением переменной, характеризующей фазу колебаний, поступим следующим образом. Подключим осциллограф так, чтобы один луч управлялся напряжением на конденсаторе C1, а второй – напряжением на резисторе R1. В среде Multisim с помощью приложения Grapher предусмотрена запись в файл данных, получаемых в процессе моделирования, с возможностью дальнейшей цифровой обработки. Шаг выборки по времени надо установить равным периоду модуляции ( $T = 0.2$  мс). Чтобы правильно подобрать моменты выборки, отвечающие стадиям активности первого осциллятора, можно использовать фазовый параметр источников переменного напряжения V1 и V2. (На схеме рис. 2 этот параметр задан равным  $45^\circ$ , что оказывается приемлемым.) При записи в файл предпочтительно использовать опцию Spline Interpolation, что обеспечивает лучшую точность представления данных. Затем файл обрабатывается внешней программой, составленной на любом удобном для пользователя языке (автор использовал Free Basic IDE). Сначала оба временных ряда – для напряжений на конденсаторе и резисторе  $U_C$  и  $U_R$  – нормируются так, чтобы сумма квадратов элементов была для них одинакова. Затем для каждой пары величин  $U_C^n$ ,  $U_R^n$ , относящихся к одному и тому же моменту времени  $nT$ , определяем фазу, как  $\varphi_n = \arg(U_C^n + iU_R^n)$ , причем фаза приводится к интервалу от 0 до  $2\pi$ .

На рис. 4 показан график, на котором представлены обработанные таким

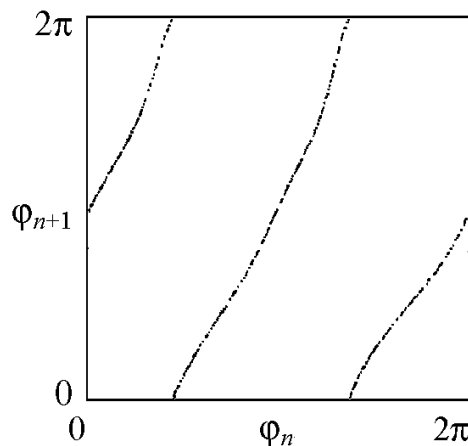


Рис. 4. Эмпирическая итерационная диаграмма для фаз

образом данные в виде зависимости значений  $\varphi_{n+1}$  от  $\varphi_n$ . Как можно видеть, график соответствует растягивающему отображению окружности типа Бернулли. В самом деле, один полный обход окружности для прообраза отвечает двум оборотам для образа, то есть требуемое для аттрактора Смейла–Вильямса условие выполняется.

То же самое подключение осциллографа можно использовать для получения портрета аттрактора в проекции на фазовую плоскость первого осциллятора, если переключить его в режим, в котором развертка по времени не производится, а отклонение луча по горизонтали и вертикали управляется входными напряжениями  $U_C$  и  $U_R$ . Полученный таким образом портрет аттрактора показан на рис. 5, *а*. Для построения аттрактора в стробоскопическом сечении можно воспользоваться записанными в файл данными, использованными при построении диаграммы для фаз, представив их графически в координатах  $U_C$ ,  $U_R$  с помощью внешней программы. Полученная диаграмма показана на рис. 5, *б*. Здесь можно видеть объект, соответствующий по виду соленоиду Смейла–Вильямса, с характерной образуемой его витками поперечной канторовой структурой.

Рис. 6 иллюстрирует спектры сигналов, генерируемых обеими подсистемами в процессе функционирования схемы. Этот способ представления реализуется с помощью имеющегося в среде Multisim анализатора спектра (Stimulate – Instruments – Spectrum Analyzer). При его использовании нужно правильно установить рабочий частотный диапазон и разрешающую способность анализа, линейный или логарифмический масштаб. Спектры на рис. 6 приводятся в логарифмическом масштабе: по оси ординат отложена спектральная плотность мощности в децибелах. Панель (*а*)

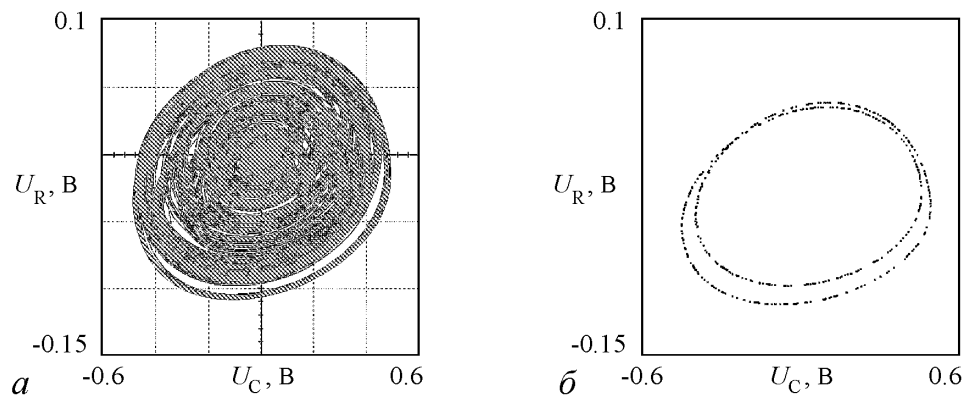


Рис. 5. Портрет аттрактора в проекции из расширенного фазового пространства системы (*а*) и в стробоскопическом сечении (*б*). По горизонтальной и вертикальной оси отложены, соответственно, напряжение на конденсаторе C1 и на резисторе R1

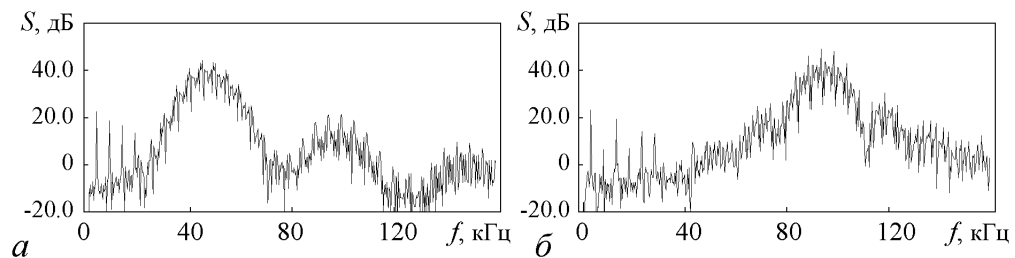


Рис. 6. Спектры колебаний напряжения на конденсаторах C1 (*а*) и C2 (*б*)



отвечает спектру сигнала от первого осциллятора (напряжение на конденсаторе С1), а панель (б) – сигналу от второго осциллятора (напряжение на конденсаторе С2). Спектр сплошной, как это и должно быть для случайного сигнала. Для первого осциллятора он сосредоточен, по большей части, в окрестности его собственной частоты 50 кГц, а для второго – в окрестности удвоенной частоты 100 кГц. В низкочастотной части спектра заметны дискретные компоненты на частоте 5 кГц и ее гармониках, обусловленные присутствием периодической модуляции параметров с этой частотой.

## 2. Система на основе неавтономного осциллятора ван дер Поля с дополнительной цепью запаздывающей обратной связи

В качестве альтернативного подхода, растягивающее отображение окружности для фаз последовательных стадий осцилляторной активности можно реализовать в системе с запаздывающей обратной связью. В этом случае достаточно иметь один осциллятор, попеременно демонстрирующий стадии возбуждения и затухания. Стимуляция возбуждения на каждой новой стадии производится сигналом, поступившим по цепи обратной связи от предыдущей стадии активности, с фазой, претерпевшей надлежащее преобразование. В работе [18] была предложена система, описываемая уравнением

$$\ddot{x} - [A \cos(2\pi t/T) - x^2]\dot{x} + \omega_0^2 x = \varepsilon x(t - \tau)\dot{x}(t - \tau) \cos \omega_0 t. \quad (3)$$

Здесь  $x$  – динамическая переменная осциллятора ван дер Поля с рабочей частотой  $\omega_0$ , в котором параметр, ответственный за бифуркацию рождения предельного цикла, медленно модулирован во времени с периодом  $T$  и амплитудой  $A$ , так что осциллятор попеременно возбуждается и затухает. В правой части уравнения добавлен член, отвечающий за запаздывающую обратную связь. Это произведение динамической переменной в запаздывающий момент времени, ее производной и вспомогательного сигнала на частоте  $\omega_0$ . Время запаздывания определяется константой  $\tau$ . Параметр  $\varepsilon$  характеризует интенсивность обратной связи и управляется изменением амплитуды вспомогательного сигнала. Предполагается, что  $N = \omega_0 T / 2\pi$  целое число, так что внешнее воздействие на систему в целом периодическое. Отметим, что фазовое пространство системы (3) бесконечномерное: задание мгновенного состояния подразумевает не только указание обобщенной координаты и скорости осциллятора в данный момент, но и знание их, как функций времени, на интервале задержки. На рис. 7 показана схема, в которой осциллятор ван дер Поля реализован на основе колебательного контура, образованного катушкой индуктивности L1 и емкостью С1. При указанных на схеме номиналах собственная частота составляет приблизительно 50 кГц. Отрицательное сопротивление вносится элементом на основе операционного усилителя U1. Нелинейная проводимость, обеспечивающая увеличение потерь энергии с ростом амплитуды колебаний, вводится элементом из полупроводниковых диодов D1 и D2. Для модуляции параметра в контур включен полевой транзистор, проводимость которого в цепи сток – исток управляется подаваемым на затвор переменным напряжением от источника V1 с частотой 10 кГц. На одном полупериоде модуляции осциллятор находится в режиме генерации колебаний, а на другом –

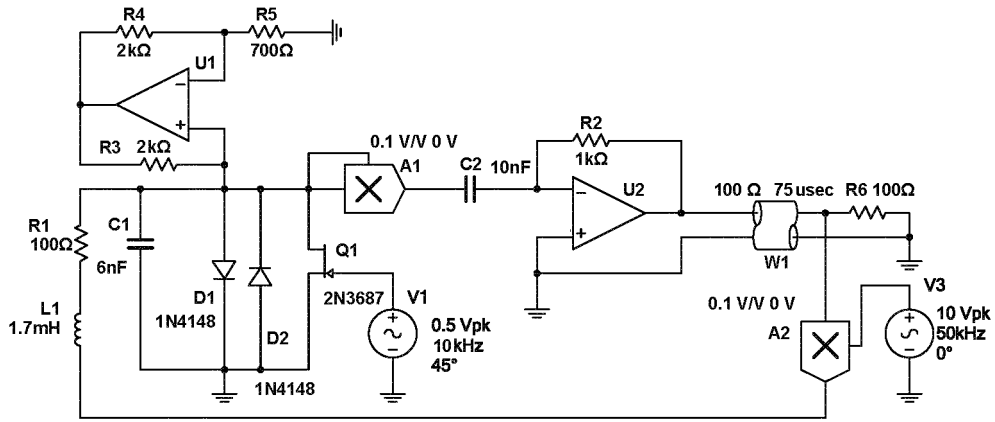


Рис. 7. Принципиальная схема устройства с запаздывающей обратной связью. Коэффициенты преобразования произведения входных напряжений в выходное для умножителей A1 и A2 равны 0.1

под порогом генерации. Генерируемый сигнал возводится в квадрат умножителем A1, подвергается преобразованию посредством дифференциатора на конденсаторе C2, резисторе R2 и операционном усилителе U2, и поступает в линию задержки W1. На ее выходе присутствует резистор R6, соответствующий по величине волновому сопротивлению линии задержки, что обеспечивает согласованную нагрузку и отсутствие отражений. С помощью умножителя A2 сигнал с выхода линии задержки смешивается со вспомогательным сигналом частоты 50 кГц от источника V3. Полученный сигнал используется для резонансной стимуляции возбуждения осциллятора на следующей стадии активности. Величина запаздывания в линии задержки  $\tau=75$  мкс составляет  $3/4$  периода модуляции. Этим обеспечивается поступление сигнала, испущенного на стадии активности, через цепь обратной связи в нужный момент, предшествующий наступлению очередной стадии активности. На рис. 8 показан график реализации напряжения на конденсаторе C1, полученный при моделировании в среде Multisim с использованием осциллографа. Как можно видеть, в контуре L1, C1 в соответствии с приведенным выше качественным описанием, имеет место попеременное возбуждение и затухание колебаний. При этом фаза высокочастотного заполнения от одной эпохи активности к другой изменяется в соответствии с хаотическим отображением – растягивающим отображением окружности. Чтобы в этом убедиться, подключим осциллограф так, чтобы один луч управлялся напряжением на конденсаторе C1, а второй – напряжением на резисторе R1, и запишем данные в файл с шагом выборки по времени, равным периоду модуляции  $T = 0.1$  мс. Затем файл обрабатывается внешней программой так же, как в предыдущем разделе.

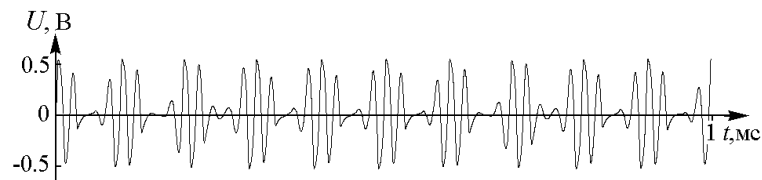


Рис. 8. Реализации напряжения на конденсаторе C1

На рис. 9 показан график зависимости значений  $\varphi_{n+1}$  от  $\varphi_n$ , которая, как можно видеть, соответствует растягивающему отображению окружности типа Бернулли.

На рис. 10 показаны портреты аттрактора в проекции из бесконечномерного пространства состояний системы с запаздыванием на плоскость переменных  $U_R, U_C$ . Портрет на диаграмме (а) получается переключением осциллографа в режим, в котором эти напряжения управляют отклонением луча по горизонтали и вертикали. Для построения аттрактора в стробоскопическом сечении привлекается файл данных, использованный при построении диаграммы для фаз: данные представляются графически в координатах  $U_C, U_R$  с помощью внешней программы. Полученный объект, показанный на диаграмме (б), соответствует по виду соленоиду Смейла-Вильямса. На рис. 11 показан спектр сигнала, построенный с помощью анализатора спектра в логарифмическом масштабе для сигнала, представляющего собой

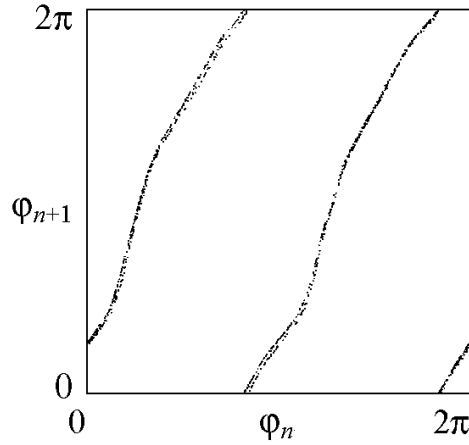


Рис. 9. Эмпирическая итерационная диаграмма для фаз

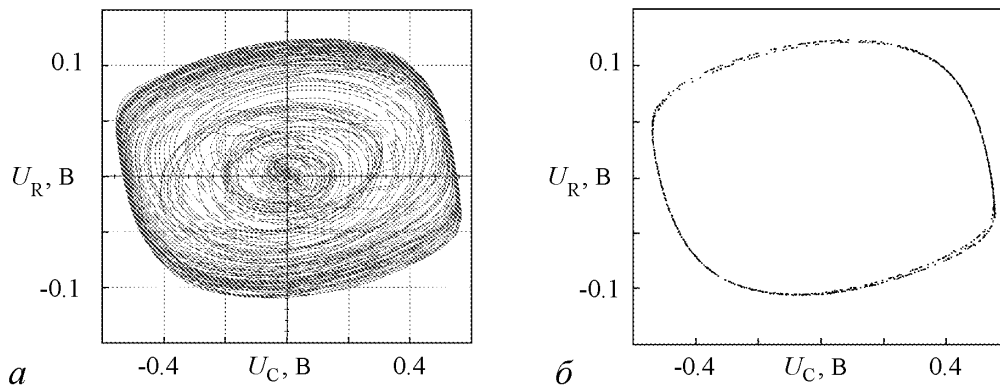


Рис. 10. Портрет аттрактора в проекции из расширенного фазового пространства системы (а) и в стробоскопическом сечении (б). По горизонтальной и вертикальной оси отложены, соответственно, напряжение на конденсаторе С1 и на резисторе R1

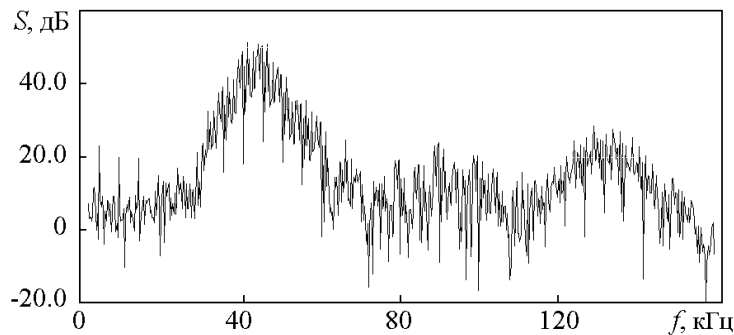


Рис. 11. Спектр колебаний напряжения на конденсаторе С1

напряжение на конденсаторе С1. Спектр сплошной, и сосредоточен по большей части в окрестности собственной частоты осциллятора 50 кГц. В низкочастотной части спектра заметны дискретные компоненты на частоте 5 кГц и ее гармониках, обусловленные присутствием периодической модуляции параметров с этой частотой.

### 3. Аналоговое устройство с аттрактором Смейла–Вильямса

Сконструируем неавтономную систему, в которой мгновенное состояние дается вектором  $(x, y, z)$ , а расширенное фазовое пространство – четырехмерное.

Динамика на каждом периоде внешнего воздействия будет состоять из трех этапов. На первом этапе обеспечивается затухание переменной  $z$  к нулю и эволюция переменных  $x, y$  к единичной окружности на плоскости этих переменных. Тороидальная область, фигурирующая в конструировании аттрактора Смейла–Вильямса, отвечает окрестности этой единичной окружности. На втором этапе в пространстве трех переменных  $(x, y, z)$  производится дифференциальное вращение вокруг оси  $x$  с угловой скоростью, линейно зависящей от  $x$  и обращающейся в ноль при  $x = 0$ . При этом на краях она должна быть такой, чтобы область, располагавшаяся вначале около единичной окружности, приняла в проекции на плоскость  $(x, y)$  форму восьмерки. На последней, третьей стадии плоскость, в которой располагалась эта «восьмерка», претерпевает перегиб и, благодаря поперечному сплющиванию по  $z$  и смещению по  $x$ , обе половинки «восьмерки» занимают положение, которое обеспечивает на следующем периоде вложение деформированной фигуры в исходную область в виде двойной петли.

Уравнения, описывающие динамику системы, имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \mu x(1 - x^2 - y^2) - \frac{\pi}{2} \xi_2(t) z, \\ \dot{y} &= \mu y(1 - x^2 - y^2) - \frac{\pi}{2} \xi_1(t) x z - \xi_2(t) [2y - 3(x^2 + z^2) + b], \\ \dot{z} &= -\gamma z + \frac{\pi}{2} \xi_1(t) x y + \frac{\pi}{2} \xi_2(t) x, \end{aligned} \quad (4)$$

где  $\xi_1(t)$  и  $\xi_2(t)$  – периодические функции времени, обеспечивающие включение и выключение процессов, отвечающих за динамику, соответственно, на второй и третьей стадиях. Период  $T$  примем равным 10, полагая, что функция  $\xi_2(t)$  равна 1 в конце каждого периода на интервале времени единичной протяженности и нулю на остальной части периода. Функция  $\xi_1(t)$  равна 1 на предшествующем единичном временном интервале и нулю на остальной части периода. Тестовые вычисления показывают, что задание остальных параметров  $\mu=0.3, a=1.5, b=0.9, \gamma=0.2$  обеспечивает желаемый тип динамики.

Схема устройства показана на рис.12. Динамические переменные  $x, y, z$  отвечают выходным сигналам интеграторов на операционных усилителях U1, U2, U3. Это напряжения на конденсаторах C1, C2, C3, измеренные в вольтах. За единицу времени принят интервал  $\Delta t=RC=0.1$  мс, где  $C$  – значение емкостей C1, C2, C3, а  $R = 100$  кОм. Период  $T$  составляет 10 единиц, то есть 1 мс. Схема содержит ключи J1, J2, J3, J4, которые открываются и закрываются с периодом  $T$  благодаря импульсным сигналам от источников V1 и V2. На первом этапе, занимающем 80% полного

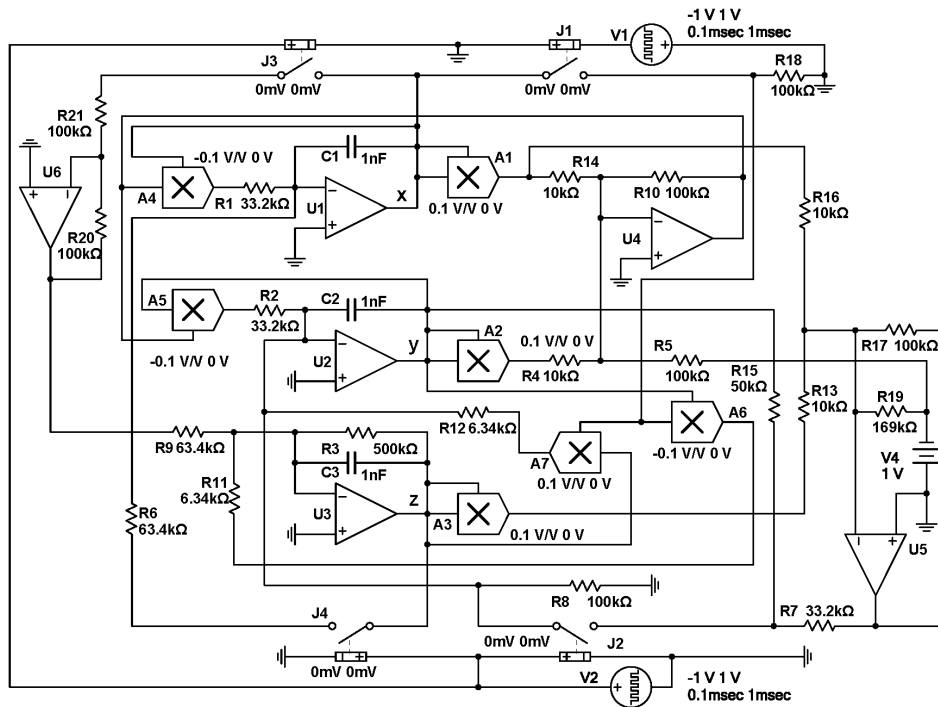


Рис. 12. Схема аналогового устройства, в котором обеспечивается аттрактор Смейла–Вильямса в отображении за период  $T=1$  мс. Динамические переменные  $x, y, z$  отвечают напряжениям на конденсаторах  $C1, C2, C3$ , соответственно. Заметим, что умножители  $A1, A2, A3$  и  $A7$  имеют положительный коэффициент преобразования произведения входных напряжений в выходное, а умножители  $A4, A5$  и  $A6$  отрицательный, при этом абсолютная величина коэффициентов одинакова и составляет 0.1

периода, все ключи разомкнуты. На втором этапе, составляющем 10% периода, открыт ключ  $J1$ , а на третьем этапе, тоже занимающем 10 % периода, открыты ключи  $J2, J3, J4$ .

Через посредство умножителей  $A1, A2$ , инвертирующего сумматора на операционном усилителе  $U4$ , и умножителей  $A4, A5$  вырабатывается сигнал, обеспечивающий эволюцию переменных  $x$  и  $y$  к ситуации  $x^2 + y^2 = 1$ , тогда как наличие резистора  $R3$  обеспечивает затухание переменной  $z$  к нулю. Когда замкнут ключ  $J1$ , сигналы, пропорциональные, соответственно,  $xz$  и  $-xy$  (для их формирования используются умножители  $A6$  и  $A7$ ), поступают на интеграторы, отвечающие переменным  $y$  и  $z$ . Этим обеспечивается дифференциальное вращение в фазовом пространстве вокруг оси  $x$ . Когда замкнуты ключи  $J2, J3, J4$ , на интеграторы  $x$  и  $z$  подаются сигналы, пропорциональные, соответственно,  $z$  и  $-x$ , что обеспечивает требуемый поворот половинок «восьмерки» вокруг оси  $y$ , а на интегратор  $y$  – сигнал, содержащий сумму квадратов переменных  $x$  и  $z$ , постоянное слагаемое и добавку, пропорциональную  $y$ .

Как можно показать, динамика схемы описывается уравнениями (4). Номиналы элементов схемы, обозначенные на рис. 12, соответствуют приведенным выше параметрам.

На рис. 13 показаны графики реализаций напряжений на конденсаторах  $C1, C2, C3$ , полученные при моделировании с использованием многоканального осцил-

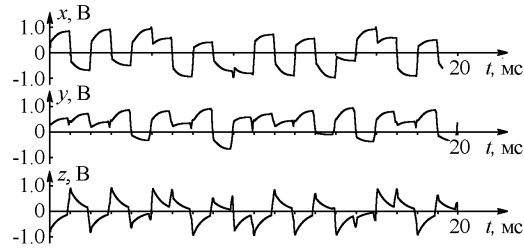


Рис. 13. Графики реализаций напряжений на конденсаторах C1, C2, C3, полученные при функционировании схемы аналогового устройства на рис. 12

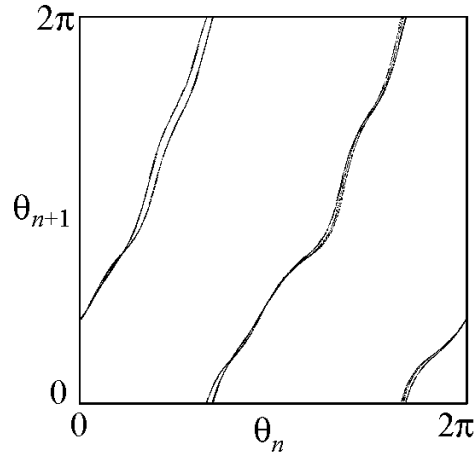


Рис. 14. Эмпирическая итерационная диаграмма для угловой переменной  $\theta_n = \arg(x + iy)$

На рис. 15 в верхнем ряду показаны портреты аттрактора в трех проекциях из четырехмерного расширенного фазового пространства системы, наблюдавшиеся непосредственно при моделировании динамики в среде Multisim с помощью осциллографа. Его подключение к схеме производится так, что отклонение луча по горизонтали и вертикали управляется напряжениями на конденсаторах C1 и C2, C3 и C2, C1 и C3, соответственно, для получения первого, второго и третьего изображений. Для построения портретов в стробоскопическом сечении, показанных в нижнем ряду, привлекается файл данных, записанных при моделировании динамики с использованием многолучевого осциллографа с временным шагом в один период  $T$ , и обработанных для построения диаграмм с помощью внешней программы. Их можно интерпретировать как изображение в трех проекциях соленоида Смейла–Вильямса, вложенного в трехмерное пространство состояний стробоскопического отображения. На рис. 16 показаны спектры мощности, построенные с помощью анализатора спектра в логарифмическом масштабе для сигналов, представляющих собой напряжение на конденсаторах C1, C2, C3. Спектры сплошные и занимают достаточно широкий

лографа, доступного в среде Multisim (Stimulate – Instruments – Four Channel Oscilloscope). Отметим, что временные зависимости выглядят, как неперiodический процесс.

Чтобы выявить динамическую природу наблюдаемого поведения, как ассоциирующегося с аттрактором Смейла–Вильямса, полученные при моделировании реализации записываются в файл в виде временных рядов с шагом выборки, равным периоду модуляции  $T = 1$  мс. Затем временные ряды  $x_n$  и  $y_n$  обрабатываются внешней программой, и для каждого шага  $n$  определяется угловая координата на плоскости  $(x, y)$ :  $\theta_n = \arg(x_n + iy_n)$ . Как видно из графика на рис. 14, показывающего значения  $\theta_{n+1}$  в зависимости от предыдущих величин  $\theta_n$ , на каждом периоде модуляции динамика приближенно соответствует растягивающему отображению окружности типа Бернулли. При наличии сжатия по остальным направлениям в фазовом пространстве, это соответствует присутствию аттрактора типа Смейла–Вильямса.<sup>3</sup>

<sup>3</sup>Выполнить другие тестовые процедуры (расчет спектра показателей Ляпунова, проверка трансверсальности пересечения многообразий, проверка критерия конусов и др.) в среде Multisim затруднительно. Соответствующие расчеты были сделаны на основе решения уравнений (4) конечно-разностным методом, и подтверждение гиперболической природы аттрактора было получено.

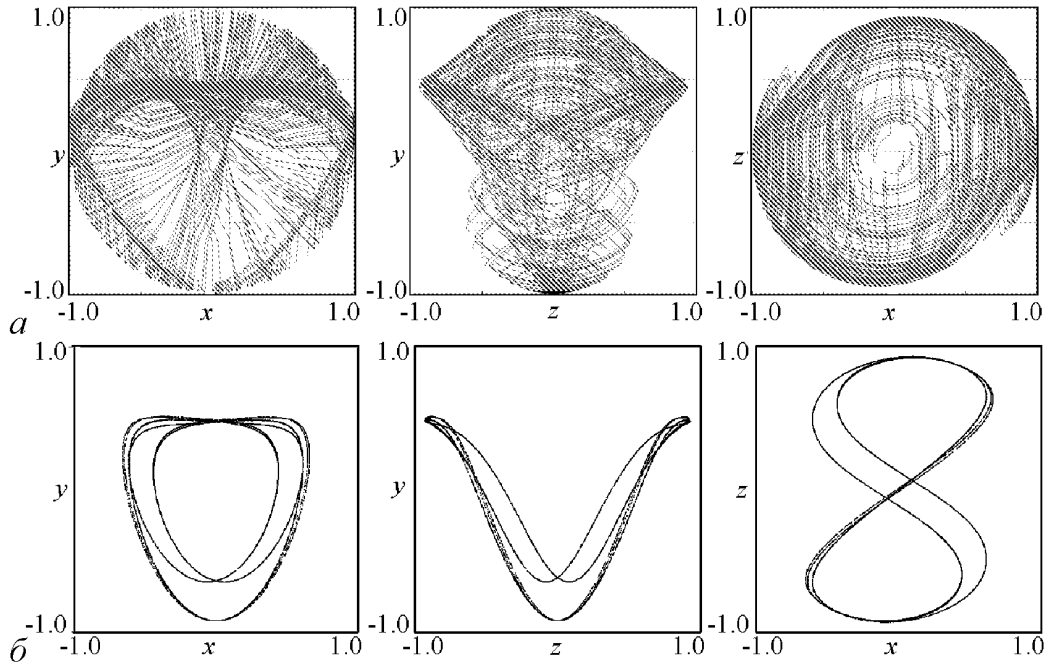


Рис. 15. Портреты аттрактора в трех проекциях из расширенного фазового пространства системы (а) и в стробоскопическом сечении (б)

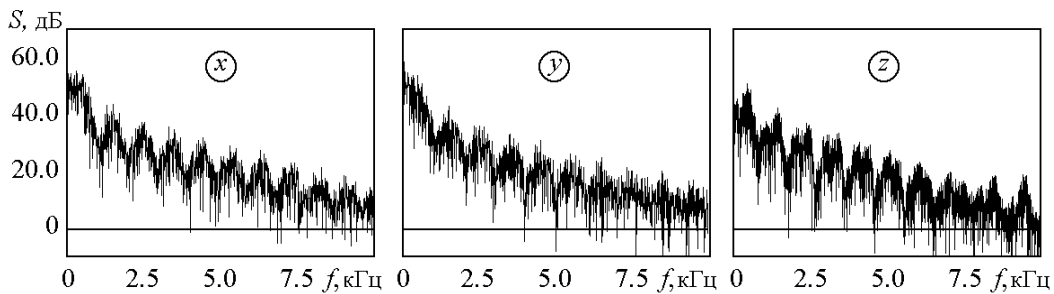


Рис. 16. Спектры колебаний напряжения на конденсаторах  $C1(x)$ ,  $C2(y)$  и  $C3(z)$

интервал частот. Можно отметить изрезанность с характерным интервалом по частоте 1 кГц, что, очевидно, связано с присутствием внешней модуляции параметров системы с периодом  $T = 1$  мс.

### Заключение

В статье приведены схемы электронных устройств, представляющих собой неавтономные системы с периодической модуляцией параметров, в которых имеет место хаотическая динамика, ассоциирующаяся с аттрактором типа Смейла–Вильямса в стробоскопическом отображении, описывающем изменение состояния за период. Основанием для трактовки аттрактора как соленоида Смейла–Вильямса в каждом случае служит то обстоятельство, что можно ввести угловую или фазовую переменную, которая за период модуляции претерпевает двукратно растягивающее отобра-

жение окружности (отображение Бернулли), тогда как по остальным направлениям в пространстве состояний имеет место сжатие фазового объема.

Использованы два методически разных подхода, хотя грань между ними несколько условная. А именно, первые две схемы отвечают идеологии конструирования физической системы, обладающей типом динамического поведения, аналогичным таковому для взятых за основу модельных уравнений. Основой служит один или два колебательных контура, к которым добавляются элементы, обеспечивающие нужный тип динамики (элементы отрицательного сопротивления, источники переменного напряжения, элементы обратной связи и т.п.). При этом цель состоит скорее в реализации интересующего типа динамики на качественном уровне, нежели в точном воспроизведении исходных уравнений. Напротив, при конструировании в разделе 3 принята идеология по возможности точного воспроизведения уравнений исходной модели с опорой на элементы, традиционно применяемые в технике аналогового моделирования, такие как интеграторы, умножители, сумматоры и пр. Тем не менее, оба подхода указывают конкретные пути к построению реально функционирующих радиотехнических устройств, выступающих как генераторы структурно устойчивого хаоса.

Радиотехнические устройства со структурно устойчивым гиперболическим хаосом, подобные описанным в статье, могут найти приложение в системах скрытой коммуникации [25, 26], шумовой локации [27], а также для криптографических схем [28, 29].

Одно из возможных применений состоит в использовании этих устройств для генерации случайных чисел, что считается важной прикладной задачей [30, 31]. Для систем с аттрактором типа Смейла–Вильямса бинарная случайная последовательность получается естественным образом как символическая последовательность, кодирующая траекторию на аттракторе. (Ноль или единица отвечает попаданию угловой переменной на каждом периоде в одну или другую половину полного интервала.)<sup>4</sup>

Представленный в статье материал может быть полезен для обучения студентов и аспирантов, специализирующихся в области радиофизики и электроники, принципам построения и анализа систем со сложной динамикой. В частности, можно рекомендовать использование рассмотренных схем в компьютерных практикумах, а также при постановке экспериментальных лабораторных работ.

Автор благодарен В.И. Пономаренко и Е.П. Селезневу за полезное обсуждение.

*Работа подготовлена при финансовой поддержке РФФИ (грант 09-02-00426).*

---

<sup>4</sup>Математические модели рассмотренных устройств, демонстрирующие динамический хаос, в этом контексте следовало бы отнести к «генераторам псевдослучайных чисел» (в англоязычной литературе употребляется термин Pseudo-Random Number Generator). Однако, реализованные, как физические устройства, они должны быть отнесены к классу «истинных генераторов случайных чисел» (в литературе используют термин True Random Number Generator), поскольку их функционирование протекает в присутствии неизбежных в физических устройствах шумов и флуктуаций. В самом деле, в процессе динамической эволюции на аттракторе они усиливаются от микроскопического уровня до макроскопических величин в силу присущей хаосу чувствительности к возмущению фазовых траекторий, что проявляется в присутствии положительного показателя Ляпунова. Тем самым система, находящаяся под непрерывным действием слабого шума, выбирает траекторию на аттракторе реально случайным образом.



## Библиографический список

1. *Андронов А.А., Витт А.А., Хайкин С.Э.* Теория колебаний. М.: Наука, 1959. 915 с.
2. *Рабинович М.И., Трубецков Д.И.* Введение в теорию колебаний и волн. М.: Наука, 1984. 432 с.
3. *Shilnikov L.* Mathematical problems of nonlinear dynamics: A tutorial // *Int. J. of Bifurcation and Chaos.* 1997. Vol. 7, № 9. P. 1353.
4. *Smale S.* Differentiable dynamical systems // *Bull. Amer. Math. Soc. (NS).* 1967. Vol. 73. P. 747.
5. *Синай Я.Г.* Стохастичность динамических систем // *Нелинейные волны.* Ред. А.В. Гапонов-Грехов. М.: Наука, 1979. С. 192.
6. *Afraimovich V., Hsu S.-B.* Lectures on chaotic dynamical systems, AMS/IP Studies in Advanced Mathematics, Vol. 28, American Mathematical Society, Providence, RI; International Press, Somerville, MA, 2003, 353pp.
7. *Каток А., Хасселблат Б.* Введение в теорию динамических систем с обзором последних достижений. М.: МЦНМО, 2005. 464 с.
8. *Лоскутов А.Ю.* Очарование хаоса // *УФН.* 2010. Vol. 180, № 12. P. 1305.
9. *Анищенко В.С., Астахов В.В., Вадивасова Т.Е., Нейман А.Б., Стрелкова Г.И., Шиманский-Гайер Л.* Нелинейные эффекты в хаотических и стохастических системах. Москва–Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2003.
10. *Barreira L., Pesin Y.* Lectures on Lyapunov exponents and smooth ergodic theory // In book: *Smooth Ergodic Theory and Its Applications* AMS, Proceedings of Symposia in Pure Mathematics, 2001. P. 3.
11. *Bonatti C., Diaz L.J., Viana M.* Dynamics beyond uniform hyperbolicity. A global geometric and probabilistic perspective // *Encyclopedia of Mathematical Sciences.* Vol. 102. Springer: Berlin, Heidelberg, New-York, 2005. 384 p.
12. *Kuznetsov S.P.* Example of a physical system with a hyperbolic attractor of the Smale–Williams type // *Phys. Rev. Lett.* 2005. Vol. 95. 144101.
13. *Кузнецов С.П., Сатаев И.Р.* Проверка условий гиперболичности хаотического аттрактора в системе связанных неавтономных осцилляторов ван дер Поля // *Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика.* 2006. Т. 14, № 5. С. 3.
14. *Кузнецов С.П., Селезнев Е.П.* Хаотическая динамика в физической системе со странным аттрактором типа Смейла–Вильямса // *ЖЭТФ.* 2006. Т. 129, № 2. С. 400.
15. *Isaeva O.B., Jalnina A.Yu., Kuznetsov S.P.* Arnold’s cat map dynamics in a system of coupled nonautonomous van der Pol oscillators // *Phys. Rev. E.* 2006. Vol. 74. 046207.
16. *Kuznetsov S.P., Pikovsky A.* Autonomous coupled oscillators with hyperbolic strange attractors // *Physica.* 2007. Vol. D232. P. 87.
17. *Кузнецов С.П., Пономаренко В.И.* О возможности реализации странного аттрактора типа Смейла–Вильямса в радиотехническом генераторе с запаздыванием // *Письма в ЖТФ.* 2008. Т. 34, вып. 18. С. 1.
18. *Кузнецов С.П.* Гиперболические странные аттракторы систем, допускающих

физическую реализацию // Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2009. Т. 17, № 4. С. 5.

19. *Кузнецов С.П.* Динамический хаос и однородно гиперболические аттракторы: от математики к физике // УФН. 2011. Т. 181. № 2. С. 121.
20. *Макаренко В.В.* Моделирование радиоэлектронных устройств с помощью программы NI MULTISIM. Электронные компоненты и системы (Киев) VD MAIS, 2008, № 1, 50-56; №2, 51-57; №3, 44-51; №4,44-51, №6, 46-53; №7, 54-59; №8, 46-56; №9, 65-69; №12, 47-52.
21. *Варзарев Ю.Н., Иванцов В.В., Спиридонов Б.Г.* Моделирование электронных схем в системе Multisim. Таганрог: Изд-во ГТИ ЮФУ, 2008. 81 с.
22. *Хоровиц П., Хилл У.* Искусство схемотехники. Т. 1. М.: Мир, 1986. 510 с.
23. *Хоровиц П., Хилл У.* Искусство схемотехники. Т. 2. М.: Мир, 1986. 592 с.
24. *Ремпен И.С., Егоров Е.Н., Савин А.Н., Пономаренко В.И.* Операционные усилители. Учебно-методическое пособие. Саратов: Изд-во ГосУНЦ «Колледж», 2004. Ч. 1: 19 с. Ч. II: 16 с.
25. *Дмитриев А.С., Панас А.И.* Динамический хаос: новые носители информации для систем связи, М.: Физматлит, 2002, 252 с.
26. *Короновский А.А., Москаленко О.И., Храмов А.Е.* О применении хаотической синхронизации для скрытой передачи информации. УФН. 2009. Vol. 179, № 12. P. 1281.
27. *Lukin K.A.* Noise radar technology // Telecommunications and Radio-Engineering. 2001. Vol. 16, № 12. P. 8.
28. *Baptista M.S.* Cryptography with chaos // Physics Letters A. 1998. Vol. 240. P. 50.
29. *Птицын Н.В.* Приложение теории детерминированного хаоса в криптографии. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2002. 80 с.
30. *Stojanovski T. and Kocarev L.* Chaos-based random number generators. Part I: Analysis // IEEE Trans. Circuits and Systems I. 2001. Vol. 48, № 3. P. 281.
31. *Stojanovski T., Pihl J., Kocarev L.* Chaos-based random number generators. Part II: Practical Realization //IEEE Trans. Circuits and Systems. 2001. Vol. 48, № 3. P. 382.

*Саратовский филиал ИРЭ  
им. В.А. Котельникова РАН*

*Поступила в редакцию 11.07.2011  
После доработки 4.10.2011*

## **ELECTRONIC CIRCUITS MANIFESTING HYPERBOLIC CHAOS AND SIMULATION OF THEIR DYNAMICS USING SOFTWARE PACKAGE MULTISIM**

*S.P. Kuznetsov*

We consider several electronic circuits, which are represented dynamical systems with hyperbolic chaotic attractors, such as Smale–Williams and Plykin attractors, and present results of their simulation using the software package NI Multisim 10. The approach

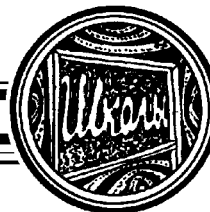
developed is useful as an intermediate step of constructing real electronic devices with structurally stable hyperbolic chaos, which may be applicable in systems of secure communication, noise radar, for cryptographic systems, for random number generators. The developed approach is also of methodological interest for training students specializing in radiophysics and nonlinear dynamics in the design and analysis of systems with complex dynamics on a base of examples close to practical applications.

*Keywords:* Chaos, attractor, Smale–Williams solenoid, non-autonomous system, operational amplifier, simulation, Multisim.

*Кузнецов Сергей Петрович* – родился в Москве (1951). Окончил Саратовский государственный университет (1973). С 1988 – сотрудник Саратовского филиала Института радиотехники и электроники им. В.А. Котельникова РАН, в настоящее время – заведующий лабораторией теоретической нелинейной динамики. Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук в СГУ (1977) и доктора наук (1987) по специальности радиофизика. Профессор кафедры динамических систем. Автор монографии «Hyperbolic Chaos. A Physicist’s View», опубликованной в 2011 г. в рамках совместной серии издательства Шпрингера и Министерства образования КНР, монографии Strange Nonchaotic Attractors (совместно с А. Пиковским и У. Фойдель, издательство World Scientific), а также учебно-научных монографий «Динамический хаос» и «Нелинейные колебания» (в соавторстве с А.П. Кузнецовым и Н.М. Рыскиным). Опубликовал около 200 научных статей по нелинейной динамике, радиофизике и электронике. Под руководством С.П. Кузнецова защищены девять кандидатских диссертаций. Лауреат государственной научной стипендии для ученых России (1994–1996), Соросовский доцент (1998), Соросовский профессор (2000, 2001). Член редакционной коллегии журнала «Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика».



410019 Саратов, ул. Зеленая, 38  
Саратовский филиал ИРЭ им. В.А. Котельникова РАН  
E-mail: [spkuz@rambler.ru](mailto:spkuz@rambler.ru)



Изв. вузов «ПНД», т. 19, № 5, 2011

## XV МЕЖДУНАРОДНАЯ ЮБИЛЕЙНАЯ ЗИМНЯЯ ШКОЛА-СЕМИНАР ПО СВЧ-ЭЛЕКТРОНИКЕ И РАДИОФИЗИКЕ

Саратов, 6–11 февраля 2012

### *Организаторы*

Саратовский государственный университет имени Н.Г. Чернышевского  
Саратовский научный центр РАН  
НОЦ «Нелинейная динамика и биофизика»  
Саратовский филиал Института радиотехники и электроники РАН  
ФГУП «НПП «Контакт»  
ФГУП «НПП «Алмаз»

### *Программный комитет*

Трубецков Д.И., д.ф.-м.н., чл.-корр. РАН, СГУ, Саратов (председатель); Блюх Ю.П., д.ф.-м.н., Технион, Хайфа, Израиль; Братман В.Л., д.ф.-м.н., профессор, ИПФ РАН, Нижний Новгород; Бушуев Н.А., к.ф.-м.н., д.э.н., директор ФГУП «НПП «Алмаз», Саратов; Галдецкий А.В., к.ф.-м.н., ФГУП «НПП «Исток», Фрязино; Гапонов-Грехов А.В., академик, научный руководитель ИПФ РАН, Нижний Новгород; Гуляев Ю.В., академик, директор ИРЭ им. В.А. Котельникова РАН, Москва; Ерёмка В.Д., к.ф.-м.н., ИРЭ НАН Украины, Харьков, Украина; Калинин Ю.А., д.т.н., профессор, СГУ, Саратов; Клеев А.И., д.ф.-м.н., ИПФ РАН, Москва; Кураев А. А., д.ф.-м.н., проф., БГУИР, Минск, Беларусь; Магда И. И., д. ф.-м. н., проф. ННЦ «ХФТИ», Харьков, Украина; Морев С.П., д.ф.-м.н., ФГУП «НПП «Торий», Москва; Мулин В.В., генеральный директор ФГУП «НПП «Контакт», Саратов; Некоркин В.И., д.ф.-м.н., профессор, ИПФ РАН, Нижний Новгород; Никитов С.А., д.ф.-м.н., чл.-корр. РАН, ИРЭ им. В.А. Котельникова РАН, Москва; Петелин М.И., профессор, ИПФ РАН, Нижний Новгород; Солнцев В.А., д.ф.-м.н., профессор, МИЭМ, Москва; Соминский Г.Г., д.ф.-м.н., профессор, СПбГПУ, Санкт-Петербург; Стрелков П.С., д.ф.-м.н., профессор, ИОФ РАН, Москва; Стриханов М.Н., д.ф.-м.н., профессор, ректор, Национальный исследовательский ядерный университет (МИФИ), Москва; Сухоруков А.П., д.ф.-м.н., профессор, МГУ, Москва; Усанов Д.А., д.ф.-м.н., профессор, СГУ, Саратов; Филимонов Ю.А., к.ф.-м.н., директор СФ ИРЭ им. В.А. Котельникова РАН, Саратов; Шалфеев В.Д., д.ф.-м.н., профессор, ННГУ, Нижний Новгород

### *Организационный оргкомитет*

Д.И. Трубецков, чл.-корр. РАН, профессор, д.ф.-м.н., СГУ (председатель); Ю.И. Левин, профессор, к.ф.-м.н., декан факультета нелинейных процессов СГУ (зам. председателя); А.Е. Храмов, профессор, д.ф.-м.н., СГУ (зам. председателя); Е.Н. Егоров, доцент, к.ф.-м.н., СГУ (ученый секретарь); В.П. Марнопольская, О.И. Москаленко, С.А. Шурыгина (технические секретари)

**Члены оргкомитета:** проф. Ю.П. Шараяевский, проф. А.А. Короновский, В.П. Марнопольская, проф. Н.М. Рыскин, доц. И.С. Ремпен, доц. Е.Н. Егоров, доц. О.И. Москаленко, асс. С.А. Куркин, зам. руководителя ОФНС НИИ ЕН СГУ А.В. Стародубов, доц. С.В. Гришин, асс. А.А. Овчинников, асс. М.К. Куровская, асп. С.А. Шурыгина, асп. А.О. Сельский, асп. М.О. Журавлёв, асп. А.В. Титов, асп. Г.М. Краснова, асп. Д.Н. Хренов

Тематика школы включает курсы лекций и секционные заседания по следующим основным направлениям:

- теория и разработка классических вакуумных приборов СВЧ (клистроны, все типы ЛБВ, ЛОВ, приборы со скрещенными полями, клистроды);
- программы компьютерного моделирования электронных приборов СВЧ;
- СВЧ вакуумная микроэлектроника и наноэлектроника;
- гиротроны, гиро-усилители;
- релятивистская и плазменная электроника больших мощностей;
- нелинейная динамика и задачи СВЧ-электроники и радиофизики;
- применения приборов СВЧ в телекоммуникационных системах, медицине, ускорительной технике, радарх, системах безопасности;
- магнитоэлектроника;
- от прошлого к будущему: история СВЧ-электроники и радиофизики, современное состояние и перспективы развития в XXI веке.

Программа школы включает: лекции, заказанные Программным комитетом; устные и стендовые доклады «учеников» школы по вышеуказанной тематике. Возможно участие в работе школы в качестве слушателя без предоставления доклада.

**По окончании школы планируется издание специальных выпусков журналов «Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика» и «Известия вузов. Радиофизика», в которых будут опубликованы статьи по материалам избранных лекций и докладов.**

**Тезисы лекций и докладов:** К началу работы школы планируется издать сборник тезисов лекций и докладов. Тезисы докладов на русском или английском языках должны быть оформлены как одна полная страница текста в формате LaTeX. Тезисы в других форматах НЕ БУДУТ опубликованы в сборнике трудов конференции. Желаящие принять участие в работе школы должны до 15 декабря 2011 заполнить анкету участника школы и прислать тезисы своего сообщения по адресу электронной почты Организационного комитета:

**winterschool2012@gmail.com**

Анкета участника школы и шаблон доклада доступны на странице школы по адресу:

**<http://www.sgu.ru/node/71035>**

По всем вопросам просьба обращаться по адресу электронной почты Организационного комитета:

**winterschool2012@gmail.com**

Информационная поддержка работы школы-конференции будет осуществляться на сайте:

**<http://www.sgu.ru/node/71035>**

**Ключевые даты:**

Представление тезисов не позже 15 декабря 2011  
Подтверждение участия в работе школы 15 января 2012  
Предварительная программа школы 20 декабря 2011  
Окончательная программа школы 30 января 2012

**Контактные лица:**

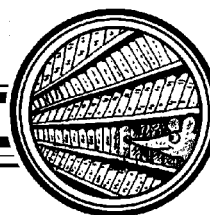
Лёвин Юрий Иванович, профессор, декан ФНП; тел. (8452) 52-38-64, факс. (8452) 51-45-40  
Храмов Александр Евгеньевич, профессор, д.ф.-м.н.; тел. (8452) 51-42-94  
Егоров Евгений Николаевич, доцент, к.ф.-м.н.; тел. (8452) 51-42-94

**E-mail: winterschool2012@gmail.com**

**Адрес оргкомитета:**

Россия, Саратов, 410012, Астраханская, 83,  
Саратовский госуниверситет, Факультет нелинейных процессов,  
Оргкомитет Зимней школы-семинара по СВЧ-электронике и радиофизике

Тел.: +7 (8452) 514540; 514294  
Факс: +7 (8452) 523864  
WWW: <http://www.sgu.ru/node/71035>  
E-mail: winterschool2012@gmail.com



## МИХАИЛ ВАСИЛЬЕВИЧ ЛОМОНОСОВ

1711–2011

Михаил Васильевич Ломоносов внес огромный вклад в развитие науки, русской литературы и языка, просвещения в России; от Ломоносова идет материалистическая традиция русской философии. Удивительно яркую и многогранную деятельность великого ученого и просветителя удачно охарактеризовал в свое время С.И. Вавилов. Он писал:

«Длинная череда физико-химических опытов, работа в мозаичной мастерской с тысячами пробных плавок цветного стекла, с кропотливой компоновкой громадных мозаичных картин сменяются изобретением и изготовлением всевозможных оптических приборов, телескопов, перископов, фотометров, с самостоя-

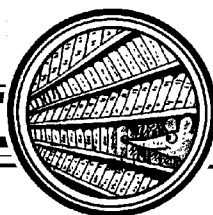
тельной отливкой сплавов для зеркал, с продумыванием подробностей механических конструкций, с управлением целым штатом механиков, столяров, оптиков, химиков.

Рядом с этим никогда не прерываются физико-философские записи о природе света, тяготения, электрической силы на основе представлений о вращающихся корпускулах и эфире. Трактаты по металлургии и рудному делу, «Слово о рождении металлов от трясения земли» и «О слоях земных» чередуются с астрономическими наблюдениями прохождения Венеры по солнечному диску и открытием «знатной воздушной атмосферы» у Венеры.

М.В. Ломоносов работает в качестве начальника Географического департамента Академии наук, с головой входит в интересы картографии, мореплавания, выдвигает проект Великого Северного Пути, пишет «Рассуждение о большей точности морского пути». Ломоносов, физико-химик, естествоиспытатель и техник, успевает вместе с тем быть вполне компетентным и оригинальным историком и словесником. Он пишет «Краткий российский летописец с родословием» и «Древнюю Российскую историю от начала Российского Народа до кончины великого князя Ярослава Первого, или до 1054 года», составляет «Российскую грамматику», по которой учились еще лет сто после Ломоносова. Наряду с этими, трудно перечислимыми звеньями работы Ломоносова, никогда не прекращалась и его поэтическая деятельность.

...Поразительно, что при всем этом разнообразии деятельности ни в одной области Ломоносов не остался поверхностным дилетантом. Всюду он сказал свое новое и важное слово».\*

\*С.И. Вавилов. Великий русский ученый. «Природа». 1945, № 3. С. 75–76.



## МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ КАК НАУКА И ИСКУССТВО

*Ю.И. Неймарк*

Учебник, издание 2-е, исправленное и дополненное<sup>1</sup>

© Ю.И. Неймарк

© Нижегородский госуниверситет им. Н.И. Лобачевского, 2010

Н. Новгород: Изд-во Нижегородского госуниверситета, 2010. 420 с.

ISBN 978-5-91326-145-8

В учебнике рассказывается о разнообразных конкретных математических эволюционных моделях и их исследовании в механике, физике, биологии, технике и управлении, моделях игр и поиска решения, волновых явлениях, фундаментальных законах макромира и микромира, пространстве и времени и др.

Для студентов, аспирантов, преподавателей, инженеров и всех интересующихся математическим моделированием.

### Оглавление

#### Предисловие

**Введение.** Математика как язык. Математическая модель. Математическое моделирование как метод изучения окружающего мира

<sup>1</sup>1-е издание: Неймарк Ю.И. Математические модели естествознания и техники: Учебник. Н.Новгород: Изд-во ННГУ, 2004. 401 с.

Дополнение 2-го издания составили два раздела

«46. Синтез и функциональные возможности квазиинвариантного линейного и нелинейного управления: На примере простейшей математической модели линейной минимально фазовой системы квазиинвариантного управления рассматриваются вопросы физической реализуемости, устойчивости, ошибки управления, на основе которых решается задача синтеза квазиинвариантного управления путем синтеза нелинейной системы, объединяющей квазиинвариантную стратегию с классической»

«47. Абстрактная и реальная математическая теории динамических систем: Глава содержит краткое описание современного состояния основ теории динамических систем» (*Прим. ред.*)

1. **Динамическая система.** Детерминизм Лапласа. Динамическая система как основная математическая модель естествознания. Фазовый портрет. Примеры динамических систем и их фазовых портретов: простейшие примеры, игра «жизнь», маятник на вращающемся основании. Фазовый портрет как средство отображения наших знаний о динамике модели и как средство ее изучения
2. **Вытекание жидкости из сосуда.** Закон Торричелли и простейшая модель вытекания. Эффект сжатия струи. Недостаточность простейшей модели. Уточненные модели, учитывающие разгон жидкости. Фазовый портрет и отображение на нем быстрой фазы разгона и медленного вытекания. Уточнение фазы разгона
3. **Равновесие и автоколебания уровня жидкости в сосуде при одновременном притоке и оттоке.** Равномерный приток и отток через дырочку и через сифон
4. **Переходный процесс, состояние равновесия и автоколебания.** Подводится итог полученным знаниям о возможных типах движений: переходные процессы, устойчивые равновесия и автоколебания
5. **Динамика уровня зеркала водохранилища с гидростанцией.** Критические значения. Бифуркационная диаграмма
6. **Энергетическая модель сердца.** Виды кризисных состояний. Критические значения. Сужение жизненных возможностей
7. **Засоление водоема с заливом и загадки Каспийского моря.** Загрязнение водоема сточными водами с растворимыми загрязнениями. Загадка Каспийского моря. Засоление водоема с заливом. Равновесный водный режим и равновесная соленость. Возможность непредсказуемых смен равновесного уровня
8. **Экспоненциальные процессы.** Математическая модель. Периоды полураспада и удвоения. Примеры экспоненциальных процессов: размножение и гибель, радиоактивность, цепные реакции, разряд конденсатора, разгон ракеты, торможение, поглощение излучения, охлаждение, распространение эпидемии и слухов, рост численности населения, производства, знаний, приближение и удаление от равновесия и др. Уточнение модели: учет насыщения, взрывной характер роста. Явление внезапного кризиса, «схлопывания» и исключительности
9. **Динамика сосуществования популяций.** Математические модели сосуществования; «хищник–жертва», конкуренция (противостояние), симбиоз. Фазовые и бифуркационные портреты
10. **Проточный биологический реактор.** Простейшая модель биологического реактора (хемостат): фазовый портрет, оптимизация
11. **Математическая модель иммунного ответа организма на вторжение инфекции.** Рассматривается упрощенная феноменологическая модель иммунного ответа организма на инфекцию в виде системы дифференциальных уравнений четвертого порядка, которая обнаруживает основные варианты течения заболевания: выздоровление и выздоровление через обострение, гибель и гибель от истощения ресурсов, хроническое заболевание с равновесным и периодическим течением, бациллоносительство, их зависимости
12. **Математическая модель сообщества «производители–продукт–управленцы».** Возможные виды фазовых портретов. Эволюция сообщества с ростом технологии производства в зависимости от остальных параметров
13. **Линейный осциллятор.** Математическая модель линейного осциллятора. Возможные типы движений. Фазовый и бифуркационный портреты. Что описывает линейный осциллятор: типы равновесий, гармонические, затухающие и нарастающие колебания
14. **Электромеханические аналогии. Уравнения Лагранжа–Максвелла.** Электромеханические аналогии. Уравнения Лагранжа–Максвелла механических, электрических и электромеханических систем. Инвариантность уравнений Лагранжа. Принцип наименьшего действия как вариационная форма математических моделей. Примеры и уравнения Лагранжа–Максвелла с обобщенными силами
15. **Часы Галилея–Гюйгенса.** Как и почему появились часы Галилея–Гюйгенса, что в них принципиально нового, что определяет точность часов? Анализ причин погрешностей и пути их уменьшения. Простейшая математическая модель часов Галилея–Гюйгенса. Фазовый портрет. Отображение А. Пуанкаре и диаграмма точечного отображения Кенигса–Ламерея. Часы как автоколебательная система, как система с обратной связью



16. **Генератор электрических колебаний.** Генератор электрических колебаний как электрический аналог часов Галилея–Гюйгенса. Математическая модель. Уравнение ван дер Поля и его фазовый портрет. Приближенное исследование уравнения ван дер Поля и сведение к точечному отображению. Мягкий режим возбуждений автоколебаний
17. **Мягкий и жесткий режимы возбуждения автоколебаний.** Фазовые портреты и бифуркационные портреты мягкого и жесткого возбуждения автоколебаний на основе исследования точечного отображения
18. **Стохастический осциллятор («часы наоборот»).** Осциллятор с непредсказуемым поведением. Математическая модель, фазовый портрет, точечное отображение. Непредсказуемость и случайность. Два типа поведения динамических систем: устойчивость и неустойчивость, предсказуемость и непредсказуемость. Осциллятор (динамическая система) как генератор стохастических колебаний
19. **Неустойчивость и автоколебания, вызываемые трением.** Математическая модель и ее фазовый портрет. Классическая кулоновская модель сухого трения и необходимость ее уточнения. Возбуждение колебаний трением и возникновение автоколебаний, исчезновение трения
20. **Вынужденные колебания линейного осциллятора.** Математическая модель. Амплитудно-фазовая частотная характеристика. Явления резонанса и фазового сдвига. Примеры килевой качки корабля и динамического гасителя колебаний. Спектральный подход и принцип суперпозиции. Обобщенная  $\delta$ -функция
21. **Параметрическое возбуждение и стабилизация.** Математическая модель. Явления параметрического возбуждения и резонанса. Особенности параметрического резонанса, отличающие его от обычного резонанса
22. **Нормальные колебания и биения.** Математическая модель двух взаимодействующих осцилляторов. Нормальные колебания и перекачка энергии, вызывающая явление биений
23. **Стабилизация перевернутого маятника.** Управление как лучшее средство изменения поведения и свойств динамических объектов и систем. Жонглирование вертикально стоящей на опоре и двумя стоящими друг на друге палочками. Математические модели. Стратегия управления, условия стабилизации, роль запаздывания
24. **Управляемый маятник и двуногая ходьба.** Перевернутый управляемый маятник как математическая модель автоколебательной двуногой ходьбы
25. **Динамические модели игр, обучения и целесообразного поведения.** Автоматные модели игроков и динамические детерминированные и стохастические модели игр
26. **Персептрон и распознавание образов.** Рассказывается о принципе работы персептрона Розенблата, трактуемого как динамическая система. Описываются математические модели объекта, образа, распознавания и обучения распознаванию. Формулируется и доказывается теорема о конечности числа ошибок. Обнаруживается связь между алгоритмом обучения персептрона и стохастической аппроксимацией
27. **Законы Кеплера и проблема двух тел, решенная Ньютоном.** Рассказывается о проблеме двух тел и ее связи с некоторыми вопросами астрономии: черные дыры, расширение Вселенной, эволюция Солнечной системы
28. **Распределенные динамические модели механики и физики.** Определяется понятие распределенной динамической системы. Описываются распределенные модели классической математической физики, механики, электродинамики и квантовой механики: уравнения Эйлера и Навье–Стокса, Максвелла и Шредингера
29. **Фундаментальное решение уравнения теплопроводности.** Рассказывается о расплывании поля температур, диффундирующего вещества или плотности вероятности блуждающей случайной частицы, поначалу сосредоточенных в некоторой точке. Решается задача о прогреве полупространства
30. **Бегущие волны и дисперсионное уравнение.** Рассказывается о бегущих гармонических волнах. Решается задача о температуре поверхностного слоя земли под влиянием суточных и годовых колебаний над ним. Решается задача о скорости намерзания льда на поверхности воды
31. **Теория электромагнетизма Фарадея–Максвелла и электромагнитные волны Максвелла–Герца.** Показывается наличие у уравнений Максвелла решения в виде бегущей со скоростью света гармонической волны

- 32. Отражение и преломление волн.** Находятся отраженная и преломленная волны при набе- гании на границу раздела сред бегущей гармонической волны
- 33. Стоячие волны и колебания ограниченной струны.** Излагается метод Фурье изучения колебаний струны. Решается задача о колебаниях струны, вызванных сосредоточенным ударом. Выясняется спектр и его связь с «окраской» звука
- 34. Микрочастица.** Рассказывается об особенностях микромира. О необходимости пересмот- ра привычных представлений классической физики. Излагается формализм квантовой механики и приводятся примеры его применения. Описываются понятия квантового со- стояния, оператора его изменения и его связь с измеряемыми и наблюдаемыми физиче- скими величинами. Рассматривается поведение квантовой частицы в потенциальной яме, в радиально-симметричном электрическом поле заряда
- 35. Пространство и время.** Рассказывается о преобразованиях Галилея и Лоренца. Об инвари- антности уравнений Ньютона и неинвариантности уравнений Максвелла по отношению к преобразованиям Галилея. Выводятся преобразования Лоренца из свойства сохране- ния волнового уравнения, вытекающего из уравнений Максвелла, и представлений одно- родности и изотропности пространства и однородности времени. Рассматривается связь между событиями, наблюдаемыми в разных системах координат: сокращение расстояний и замедление часов, сложение скоростей. Вводится четырехмерное пространство–время. Обсуждаются понятие одновременности и принцип причинности. Указываются необхо- димые уточнения уравнений Ньютона в случае очень больших скоростей движения, при- ближающихся к скорости света
- 36. Разгон релятивистских частиц в циклотроне.** Рассматривается модель движения реляти- вистской частицы в циклотроне. Обнаруживается наличие квазистационарного устойчи- вого резонансного разгона
- 37. Математика как язык, как операционная система и модели.** Математика как особый язык, включающий операционную систему и математические модели. Изоморфизм опе- рационных систем и моделей. Роль изоморфизма в математическом моделировании
- 38. Геометрическое, физическое, аналоговое, математическое и статистическое имита- ционное моделирование.** О геометрическом, физическом, математическом моделирова- нии и лежащих в их основе изоморфизмах, о критериях моделируемости и правилах моделирования
- 39. Общая схема математического моделирования.** О двух разных взаимосвязанных частях математического моделирования (составление модели и ее исследование) и основных этапах моделирования и некоторых полезных соображениях
- 40. Модели вибропогружения.** О вибропогружении и его математическом моделировании
- 41. Основная математическая модель современной науки и теория колебаний.** Динамиче- ская система как основная модель точной науки, о ее роли и ее изучении. Об автоколе- баниях, регулярных и хаотических движениях и гомоклинических структурах. О теории колебаний как всеобъемлющей науке об эволюционных процессах. О роли А.А. Андро- нова в становлении нелинейной теории колебаний
- 42. Математическая модель как плодотворная идея научного исследования.** *D*-разбиение. На примере устойчивости линейных систем (проблемы Рауса–Гурвица, робастной устой- чивости и др.) показывается возможная роль математической модели как плодотворной идеи научного использования
- 43. Идеализация, математическая корректность и реальность.** На примерах моделирования центробежного регулятора скорости вращения и известной проблемы парадокса Пенлеве в механике иллюстрируется роль идеализации в математической корректности, в дости- жении требуемой адекватности результатов моделирования реальному объекту
- 44. Динамическая интерпретация метода наименьших квадратов и глобальной поисковой оптимизации с адаптивной моделью.** На примерах широко известного метода наимень- ших квадратов и глобальной поисковой оптимизации функций многих переменных ил- люстрируется полезность широкого использования модели динамической системы
- 45. Игровая модель человеческого общества.** Аргументируется игровая модель humano- го общества. Обнаруживаются основные принципы его функционирования, организации и управления. Изучается идеальная игра людей в обществе и выясняется существо и пути преодоления проблемы власти

**46. Синтез и функциональные возможности квазиинвариантного линейного и нелинейного управления.** На примере простейшей математической модели линейной минимально фазовой системы квазиинвариантного управления рассматриваются вопросы физической реализуемости, устойчивости, ошибки управления, на основе которых решается задача синтеза квазиинвариантного управления и возникает возможность расширения управления путем синтеза нелинейной системы, объединяющей квазиинвариантную стратегию управления с классической

**47. Абстрактная и реальная математические теории динамических систем.** Глава содержит краткое описание современного состояния основ теории динамических систем

#### Список литературы

\*\*\*

### 47. Абстрактная и реальная математические теории динамических систем

В настоящее время динамическая система – одна из основных математических моделей. Математическая теория динамических систем, которую разрабатывали величайшие математики XIX и XX веков, очень сложна и обширна. Полное изучение этой теории едва ли необходимо для прикладного пользователя, но ознакомиться с ее основами, безусловно, целесообразно. Краткое изложение современного состояния теории динамических систем является целью этой главы.

Ко времени рождения теории динамических систем господствующее положение в науке занимала идея детерминизма Лапласа: то, что происходит сегодня, определяется тем, что было вчера, а то, что будет завтра, определяется тем, что есть сегодня. Универсальной математической моделью, вытекающей из идеи детерминизма, стала динамическая система.

Теория динамических систем ведет свое начало от А. Пуанкаре, от его труда «Новые методы небесной механики», появившегося в конце XIX века. Пуанкаре создал классическую теорию динамических систем. Большой вклад в развитие теории внес Д. Биркгоф, с появлением его книги «Динамические системы» эта теория стала достоянием мировой науки. Биркгоф, в частности, ввел классификацию всех возможных движений в такой системе. Свой след в развитии теории динамических систем оставили такие величайшие математики, как Пуассон, А.М. Ляпунов, С. Смейл и др. Исчерпывающим источником знаний о динамических системах в России долгое время была книга В.В. Немыцкого и В.В. Степанова «Качественная теория дифференциальных уравнений». Далее изучение динамических систем широко распространилось как в теоретических, так и в прикладных исследованиях. Однако в исследовании конкретных динамических систем успех был достигнут только для размерности, не превышающей второй порядок, который и был подытожен в работах А.А. Андропова с соавторами. Некоторое продвижение в изучении динамических систем больших размерностей все же можно отметить для систем третьего порядка благодаря методу точечных отображений и существенным теоретическим исследованиям в трудах С. Смейла.

Цель исследования динамических систем состоит в определении вида фазовых траекторий и их взаиморасположения, т.е. в построении фазового портрета системы, а также в выяснении зависимости фазового портрета от параметров и в изучении бифуркаций при их изменении. По-видимому, детальное описание фазовых портретов столь разнообразно и огромно, что едва ли оно может быть полным, но можно выделить основные, самые важные характеристики фазового портрета, к которым, прежде всего, относятся установившиеся движения. В классической теории это устойчивые состояния равновесия, периодические движения, тороидальные образования, многообразия из устойчивых состояний равновесия.

Каковы особенности классической теории динамических систем? Классическая теория базируется на допущении возможности пренебречь очень малыми воздействиями. Она основана на двух основных фактах: факте существования решения и его единственности при

заданных начальных условиях. Модель, отвечающую перечисленным выше условиям, естественно назвать абстрактной или идеальной. Изучению таких абстрактных динамических систем посвящена классическая теория Пуанкаре–Биркгофа. Согласно этой теории существование решения и его единственность представляются достаточными для установления взаимно-однозначного соответствия между фазовыми траекториями и реальными движениями соответствующего объекта, т.е. в классической теории вычисленные фазовые траектории представляют само движение системы. То, что фазовые траектории вычислимы и физически реализуемы не вызывало сомнений. При этом само собой подразумевалось, что ошибки счета, как и физические помехи, несущественно малы. Такую трактовку и обоснование можно назвать абстрактными, а классическую теорию – абстрактной теорией динамических систем.

Изучение конкретных динамических систем до появления компьютеров велось в основном аналитическими методами и ограничивалось системами небольшой размерности. При этом получаемые результаты укладывались в рамки классической теории. Ситуация резко изменилась с появлением быстродействующих ЭВМ и возможности наблюдать за поведением фазовых траекторий на дисплее компьютера. Перед исследователями открылся сложный мир фазовых портретов и весьма сложных движений. Появились отдельные примеры, теоретическое исследование которых было затруднено, некоторые конкретные системы с весьма сложными фазовыми портретами не поддавались изучению. Требовались новые подходы. Одновременно обнаруживались явления, которые не находили объяснений. Самым удивительным среди них было обнаружение случайности в поведении фазовых траекторий, когда при одних и тех же начальных условиях могли быть получены совершенно разные решения. Эта случайность обнаружилась и в физическом эксперименте, и при счете на компьютере. Лежащее в основе абстрактной теории утверждение о единственности фазовой траектории с заданными начальными условиями нарушалось, и это не находило объяснения. Возможность сколь угодно точных вычислений всей полутраектории от заданного начального условия и такой же ее физической реализуемости не вызывала сомнений, однако признание абстрактной теорией однозначности, вычислимости и физической реализуемости траекторий приводило к противоречию реального эксперимента с теорией. Остановимся чуть подробнее на результатах исследования особенностей поведения некоторых фазовых траекторий при заданных начальных условиях: с теоретической точки зрения, в плане реализуемости физического процесса и в плане компьютерных вычислений.

1. Абстрактная теория динамических систем предполагает единственность решения для заданных начальных условий. Эта единственность имеет место как для динамических систем, определяемых обыкновенными дифференциальными уравнениями, так и для систем в частных производных, а также для систем, заданных любыми другими способами.

2. Физический эксперимент показывает, что в некоторых случаях реализуемые фазовые траектории с заданными начальными условиями отличаются друг от друга случайным образом, причем различие траекторий может быть весьма значительным. Возможны случаи, когда малейшее изменение начальных условий приводит к существенным изменениям соответствующих фазовых траекторий.

3. Компьютерный эксперимент по вычислению фазовых траекторий при заданных начальных условиях с использованием компьютеров или различных методов счета может приводить к весьма различным траекториям, с некоторого времени ничего общего между собой не имеющим. В таких случаях малейшие изменения начальных условий в пределах, учитываемых компьютером, приводят к аналогичным результатам. Повторный счет на компьютере при одинаковых начальных условиях и одном методе счета приводит к одной и той же траектории.

Эти особенности некоторых фазовых траекторий были восприняты многими исследователями как возможность существования случайных, хаотических или стохастических движений, что находится в явном противоречии с общеизвестной теоремой о единственности решений дифференциальных уравнений и с самим определением динамической системы. Более того, это мнение о наличии случайности в детерминированных системах стало вос-

приниматься как фантастическое открытие, и этому открытию придавалось очень большое значение, а противоречие с безусловно верной теорией игнорировалось. Возникшая вера в наличие случайных движений приняла догматический характер, и этому не помешали не только теорема о единственности решения, но и реальный факт однозначности решения при одинаковом способе счета на компьютере. Вместе с тем, безусловно, весьма значительным был и факт наличия стохастичности при физической реализации динамической системы, и в каком-то смысле именно он одержал победу над теоретическими рассуждениями. После длительного отрицания возможности построения различных траекторий при одних и тех же начальных условиях этот факт был признан как некоторое новое понимание движения динамических систем и был введен новый тип движения, названный хаотическим. В системах второго порядка их не было обнаружено, но в системах третьего порядка и выше они были. Необычайно сложные движения вызвали бум, их открывали всюду. Хаотические движения и хаотические аттракторы получили признание, но их наличие и природа не поддавались объяснению. Определения, что такое хаотический аттрактор, не существовало, и это не удивительно. Ясно, что такое положение требует выяснения истинных причин наблюдаемых явлений.

Истинная причина скрыта именно в базовом для классической теории допущении возможности пренебрегать очень малыми воздействиями. Это допущение верно для грубых систем, оно было естественным для систем первого и второго порядка, которые на первых порах были основными объектами, поддающимися изучению. Впрочем, требование вычислительной реализуемости может не выполняться и для двумерных систем, о чем свидетельствует рис. 47.1, а, когда при выборе точки  $M$  сколь угодно точные, но разные вычисления могут привести к разным решениям. Правда, этот простой пример реализуется на одномерном отрезке фазовой траектории, и вероятность случайного выбора точки  $M$  равна нулю. Аналогичная картина в пространстве представлена на рис. 47.1, б.

В случае многомерной динамической системы такое поведение траекторий может иметь место уже для некоторой области фазового пространства, когда сколь угодно малые отклонения от теоретически принятой идеальной модели динамической системы приводят к значительным изменениям решения за конечное время. Это явление можно назвать сверхчувствительностью, и оно наблюдается при экспоненциальной неустойчивости бесконечной фазовой траектории, отвечающей заданному начальному условию. В этом случае имеет место отклонение порядка  $\varepsilon e^{\lambda t}$  ( $\varepsilon > 0$ ), и с ростом  $t$  это отклонение значительно при сколь угодно малом  $\varepsilon$ . Этим свойством обладает любая экспоненциально неустойчивая фазовая траектория, в том числе и такие траектории, которые не выходят за пределы некоторой ограниченной области. Подчеркнем, что сверхчувствительность относится как к очень малым неучитываемым возмущениям, так и к погрешностям вычислений. Из сказанного следует, что экспоненциально неустойчивая фазовая траектория не может быть в целом найдена, т.е. в реальности следует признать факт существования невычислимых и физически нереализуемых фазовых траекторий. Означает ли это, что фазовая траектория случайна? Компьютер при неизменности метода расчета все время выдает один и тот же результат, не демонстрируя никакой случайности. Физический эксперимент, напротив, при достаточно длительном эксперименте приводит к различным (случайным) результатам. Различия вызываются флуктуациями параметров физической системы и случайными отклонениями, происходящими в реальной системе. При этом при малых возмущениях отклонения могут быть значительными в силу неустойчивости фазовой траектории. Таким образом, для асимптотически неустойчивых движений можно говорить о случайности вычисляемых и физически реализуемых траекторий, но случайностей, порождаемых динамической системой, нет. Наблюдаемые случайности – следствие неучета малых, но существенных воздействий.

Почему же так разнятся реализации устойчивых и неустойчивых движений? Прежде всего, заметим, что этих различий нет, если на реализуемую фазовую траекторию нет даже очень малых неизвестных воздействий. При выполнении этого условия состояние системы в точности соответствует фазовой траектории математической модели. Различие проявля-

ется с появлением неизвестных воздействий, когда устойчивость уменьшает их влияние, а неустойчивость увеличивает. При этом уход от первоначальной фазовой траектории экспоненциально нарастает при неустойчивости, а в случае устойчивости, напротив, экспоненциально убывает. Экспоненциальный рост приводит к тому, что в значительной мере изменение состояния определяется очень малыми неучитываемыми воздействиями. Таким образом, при неустойчивости случайные возмущения могут вызвать изменение состояния и отвечающую ему эволюцию фазовой траектории.

Неустойчивые фазовые траектории могут образовывать притягивающие множества, и тогда можно наблюдать блуждание фазовой траектории в некоторой ограниченной области. Притягивающее множество блужданий получило название «странного аттрактора» (странного потому, что устойчивое множество состоит из неустойчивых фазовых траекторий, которые могут пересекаться вследствие сколь угодно малых неучитываемых случайных воздействий). В странном аттракторе фазовая точка перемещается по области притяжения под управлением неучитываемых ничтожно малых случайных неуправляемых воздействий. При этом вычисляемая или физически реализуемая фазовая траектория не имеет определенного вида, задаваемого начальными условиями. И хотя блуждающие движения не вычислимы и физически не реализуемы по начальным условиям, в целом они образуют устойчивые притягивающие множества и в этом смысле похожи на установившиеся устойчивые движения (состояния равновесия, периодические движения и др.). Подчеркну, что блуждание прекращается, как только фазовая точка попадает в область притяжения устойчивой фазовой траектории. Если устойчивость асимптотическая, то дальнейшее движение – это движение по асимптотической траектории. Такое возможно, конечно, при достаточно малых возмущениях. В противном случае, когда приход в область притяжения устойчивого движения невозможен, блуждание не прекращается.

Возникает вопрос о вероятностном описании неустойчивых притягивающих движений. Оказывается, что такое описание иногда возможно и в некоторых случаях легко реализуемо. При этом, естественно, предполагается отсутствие внешних возмущений. Основываясь на изучении точечного отображения аттрактора самого в себя, т.е., исходя из задания динамической системы в виде точечного отображения, можно найти плотность вероятности для этих странных аттракторов. В некоторых простейших случаях вычисление плотностей вероятностей достаточно просто (см. гл. 18). Можно предположить, что блуждающие движения в некоторых случаях подчиняются определенным статистическим законам, но полное изучение всех вариантов мне неизвестно.

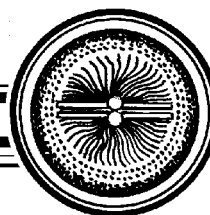
Итак, с точки зрения реальной теории, не вдаваясь в детали, все движения в аналитической системе можно разделить на переходные и установившиеся, устойчивые и неустойчивые и, как частный случай неустойчивого движения, движения, блуждающие при наличии притягивающего множества. В свою очередь, установившиеся движения делятся на регулярные и блуждающие: асимптотически устойчивые фазовые траектории (регулярные движения) не выходят из конечной области устойчивого состояния равновесия или периодического движения, а асимптотически неустойчивая траектория блуждает в некоторой ограниченной области притягивающего множества (хаотического аттрактора).

После сказанного естественно возникает вопрос, каким образом Пуанкаре, Биркгоф и их последователи проигнорировали возможность различных движений из одного и того же начального состояния при неучете малых воздействий, не заметили существования невычислимых фазовых траекторий. Возможно, это связано с господствовавшим в то время механистическим взглядом на природу, с тем, что эти «странные» явления в изучаемых механических системах не проявили себя. Известно высказывание английского физика лорда Кельвина, который сто лет назад сказал, что «он не может понять ни одного явления до тех пор, пока не представит себе его механическую модель» (Вольтер Б.В. В царстве неустойчивости // Знание – сила. 1993. № 4. С. 113.). Хотя это не значит, что таких движений в механических системах нет. Таких примеров не было, но сейчас они известны, и один из них приведен в этой книге: осциллятор с отрицательным трением и ограничительным

торможением. С проявлением неустойчивых движений на практике столкнулись химики, когда начали взрываться химические реакторы. «Предсказать, разглядеть сокрытую опасность неустойчивости далеко не всегда можно «методом здравого смысла». В устойчивости есть некая соразмерность между внешними воздействиями и реакцией системы. Сильное воздействие – активнее реакция. Неустойчивая система не подчиняется такой соразмерности, она может возбудиться от малейшей едва заметной причины» (там же, с. 115). Но не химики создали и развивали теорию динамических систем, а математики в то время были далеки от химии и химических реакторов.

Хочу подчеркнуть, что мир состоит как бы из двух частей: устойчивой и неустойчивой. Изменения, происходящие в устойчивом мире, соответствуют изменяющим его воздействиям. Эволюция устойчивого мира прогнозируема. Изучая процессы, происходящие в том или ином объекте, мы пытаемся найти закономерности его изменения, не сомневаясь, что такие закономерности существуют. Но это не так, точнее, это не всегда так. Окружающий нас мир гораздо сложнее, чем мы думаем. В некоторых случаях изменения происходят из-за очень малых случайных воздействий. В неустойчивом мире нет соответствия: очень малые воздействия могут приводить к громадным изменениям, эволюция неустойчивого мира не прогнозируема. Существующая теория динамических систем относится в основном к устойчивому миру. Неустойчивый мир ждет своего исследования, которое, безусловно, расширит наше понимание окружающего мира.

И в заключение подведем итог имеющимся представлениям о хаотических движениях динамических систем. Так называемая стохастичность движений динамической системы не соответствует ее природе, она есть результат неполноты ее описания. Эта неполнота считалась несущественной в силу ее малости, возможность сверхчувствительности не замечалась и не учитывалась. Но вместе с тем блуждания, вызванные не учитываемыми воздействиями, действительно могут обладать статистическими закономерностями.



**НЕЛИНЕЙНАЯ ДИНАМИКА РАСПРЕДЕЛЕННЫХ СИСТЕМ**  
**Системы с запаздыванием, вакуумные микроволновые приборы,**  
**системы взаимодействующих нелинейных волн**

*Н.М. Рыскин, А.А. Балякин, Т.В. Дмитриева,  
В.Н. Титов, О.С. Хаврошин, А.М. Шигаев*

©LAP LAMBERT Academic Publisher, 2011  
ISBN 978-3-8433-0886-1

Изучение нелинейной динамики в распределенных системах радиофизической и электронной природы представляет интерес как для решения многих традиционных практических задач радиоэлектроники (теория переходных процессов, возбуждение паразитных колебаний, усиление и генерация коротких импульсов, усиление сигналов со сложным спектральным составом), так и в связи с новыми перспективами применения хаотических сигналов в системах связи, обработки информации, радиолокации, радиоэлектронного противодействия. Изучение сложного нерегулярного поведения (пространственно-временного хаоса) в таких системах может послужить ключом к решению проблемы возникновения турбулентности. В монографии рассматриваются автоколебательные системы с запаздыванием, модели приборов вакуумной микроволновой электроники, системы параметрически взаимодействующих волн, обсуждается подавление неустойчивостей в таких системах при помощи методов управления хаосом. Книга рассчитана на научных работников, занимающихся исследованием нелинейных явлений в радиофизике, электронике и смежных областях, может быть также полезна аспирантам и студентам старших курсов физических и физико-технических специальностей вузов.

## Оглавление

### Введение

#### 1. Нелинейная динамика и задачи радиофизики и СВЧ-электроники

- 1.1. Генераторы СВЧ хаотических колебаний: возможности практического применения.  
1.1.1. Системы связи. 1.1.2. Обработка информации. 1.1.3. Радиолокация. 1.1.4. Генераторы помех.  
1.2. Генераторы СВЧ хаотических колебаний: основные результаты теоретических и экспериментальных исследований. 1.2.1. ЛБВ-генераторы с запаздывающей обратной связью. 1.2.2. Лампы обратной волны. 1.2.3. Нелинейная динамика взаимодействия ЭП-ЭМВ вблизи границы полосы пропускания. 1.2.4. Клистронные автогенераторы с запаздыванием. 1.2.5. Лазеры на свободных электронах.



- 1.3. Другие области применения нестационарной теории. 1.3.1. Паразитное самовозбуждение усилителей. 1.3.2. Усиление и генерация коротких импульсов. 1.3.3. Усиление сигналов со сложным спектральным составом.
- 1.4. Выводы.
- 2. Сложная динамика простых моделей автогенераторов с запаздыванием**
- 2.1. Простая модель автогенератора с кубичной нелинейностью и запаздыванием. 2.1.1. Теоретический анализ. 2.1.2. Результаты численного моделирования. 2.1.3. Приближение трех взаимодействующих мод.
- 2.2. Модель «однорезонаторного клистрона» с запаздыванием. 2.2.1. Режимы стационарной генерации и их устойчивость. 2.2.2. Результаты численного моделирования. 2.2.3. Применение к нестационарной теории отражательного клистрона.
- 2.3. Модель ЛБВ-генератора с узкополосным фильтром в цепи обратной связи: особенности хаотической динамики и использование в схеме передачи информации.
- 2.4. Анализ спектра показателей Ляпунова в системах с запаздыванием. 2.4.1. Методика расчета спектра показателей Ляпунова систем с запаздыванием. 2.4.2. Результаты расчета спектра показателей Ляпунова. 2.4.3. Типичные особенности процедуры расчета спектра показателей Ляпунова.
- 2.5. Выводы.
- 3. Нестационарная теория клистронных автогенераторов с запаздыванием**
- 3.1. Теория двухрезонаторного клистрона-генератора с ЗОС. 3.1.1. Основные уравнения. 3.1.2. Условия самовозбуждения, стационарные режимы и их устойчивость. 3.1.3. Численное моделирование процессов перехода к хаосу. 3.1.4. Влияние сил пространственного заряда. 3.1.5. Применение клистрона-генератора в схеме прямохаотической передачи информации.
- 3.2. Теория многорезонаторного клистрона-генератора. 3.2.1. Основные уравнения. Трехрезонаторный клистрон. 3.2.2. Приближение большого усиления в промежуточных каскадах. 3.2.3. Условия самовозбуждения автоколебаний. 3.2.4. Численное моделирование сложной динамики многорезонаторных клистронов.
- 3.3. Экспериментальное исследование многорезонаторного клистрона-генератора.
- 3.4. Выводы.
- 4. «Тонкая структура» режимов автомодуляции и хаоса в лампе обратной волны**
- 4.1. Основные уравнения нестационарной нелинейной теории ЛОВ. 4.1.1. Уравнения движения. 4.1.2. Уравнение возбуждения. 4.1.3. Переход к уравнениям стационарной теории. 4.1.4. Конечно-разностная схема.
- 4.2. Переход к хаосу в однопараметрической модели ЛОВ.
- 4.3. Нелинейная динамика двухпараметрической модели ЛОВ (нестационарная нелинейная теория ЛОВ при конечных значениях параметра усиления).
- 4.4. Нелинейная динамика релятивистской ЛОВ.
- 4.5. Нелинейная динамика ЛОВ с отражениями. 4.5.1. Условия самовозбуждения. 4.5.2. Численное моделирование. Самовозбуждение и возникновение автомодуляции. 4.5.3. Переход к хаосу при больших отражениях. 4.5.4. Переход к хаосу при слабых отражениях.
- 4.6. Моделирование нелинейной динамики релятивистской ЛОВ при помощи полностью электромагнитного кода MAGIC.
- 4.7. Переход к развитому хаосу в цепочке двух однонаправлено связанных ЛОВ.
- 4.8. Воздействие узкополосного хаотического сигнала на усилитель и генератор обратной волны. 4.8.1. Усложнение хаотического сигнала при прохождении через ЛОВ-усилитель. 4.8.2. Воздействие детерминированного хаотического сигнала на ЛОВ-генератор.
- 4.9. Выводы.
- 5. Нестационарная нелинейная теория ЛБВ-генератора с запаздывающей обратной связью**
- 5.1. Модель и основные уравнения.
- 5.2. Условия самовозбуждения и стационарные режимы генерации.
- 5.3. Возникновение автомодуляции.
- 5.4. Сценарий перехода к хаосу.
- 5.5. Моделирование нелинейной динамики ЛБВ-генератора с замедляющей структурой типа «петляющий волновод». 5.5.1. Постановка задачи. 5.5.2. Линейная нестационарная теория. 5.5.3. Численное моделирование. Режимы стационарной генерации. 5.5.4. Численное моделирование. Режимы автомодуляции и хаоса. 5.5.5. Сопоставление с экспериментом.
- 5.6. Выводы.

## **6. Сложная динамика в системах, параметрически взаимодействующих**

- 6.1. Сложная динамика распределенного параметрического генератора. 6.1.1. Постановка задачи. Основные уравнения. 6.1.2. Условия самовозбуждения. 6.1.3. Стационарные режимы генерации. Теория. 6.1.4. Стационарные режимы генерации. Численное моделирование. 6.1.5. Возникновение автомодуляции. 6.1.6. Переход к хаосу в режиме синхронизации фаз. 6.1.7. Переход к хаосу в центре зоны генерации. Общий случай. 6.1.8. Переход к хаосу вблизи границ зоны генерации.
- 6.2. Сложная динамика параметрического генератора встречной волны. 6.2.1. Условия самовозбуждения и стационарные режимы генерации. 6.2.2. Результаты численного моделирования.
- 6.3. Выводы.

## **7. Параметрическое взаимодействие электронного потока с полями двух незамедленных электромагнитных волн**

- 7.1. Основные уравнения и законы сохранения. 7.1.1. Основные уравнения нестационарной нелинейной теории ЛСЭ-скаттрона. 7.1.2. Приближение малой амплитуды комбинационной волны. 7.1.3. Приближение больших пространственных зарядов. 7.1.4. Законы сохранения. 7.1.5. Численная схема решения нестационарных уравнений ЛСЭ.
- 7.2. Линейная нестационарная теория ЛСЭ-скаттрона: коэффициент усиления усилителя и условия самовозбуждения генератора. 7.2.1. Кинематическая модель без учета пространственного заряда. 7.2.2. Учет влияния пространственного заряда. 7.2.3. Линейная нестационарная теория в случае больших пространственных зарядов.
- 7.3. Автомоуляционная неустойчивость в ЛСЭ-усилителе. 7.3.1. Динамика ЛСЭ-усилителя в приближении малой амплитуды комбинационной волны. 7.3.2. Учет влияния пространственного заряда. 7.3.3. Динамика ЛСЭ-усилителя с учетом нелинейности процессов в электронном потоке.
- 7.4. Нелинейная динамика ЛСЭ-генератора. 7.4.1. Динамика в приближении малой амплитуды комбинационной волны. 7.4.2. Учет влияния пространственного заряда. 7.4.3. Моделирование динамики ЛСЭ-генератора с учетом перегруппировки электронов.
- 7.5. Выводы.

## **8. Сложная динамика модуляционной неустойчивости в нелинейных средах с дисперсией**

- 8.1. Нелинейная динамика МН в окрестности критической частоты. 8.1.1. Нелинейный эффект смены характера МН. Теория. 8.1.2. Численное моделирование нелинейной динамики МН. 8.1.3. Влияние характера МН на эффекты нелинейного туннелирования. 8.1.4. Нелинейная динамика МН в периодической брэгговской структуре.
- 8.2. Нелинейная динамика МН в кольцевом резонаторе. 8.2.1. Условия неустойчивости стационарного режима. 8.2.2. Результаты численного моделирования.
- 8.3. Нелинейная динамика МН при наличии отражений от границ. 8.3.1. Стационарные режимы колебаний и их устойчивость. 8.3.2. Численное моделирование нелинейной динамики одномерного резонатора.
- 8.4. Спектр показателей Ляпунова.
- 8.5. Выводы.

## **9. Управление хаосом в системах с запаздыванием**

- 9.1. Метод управления хаосом.
- 9.2. Подавление автомодуляции в автогенераторе с кубичной нелинейностью и запаздыванием. 9.2.1. Анализ упрощенной модели в виде точечного отображения. 9.2.2. Результаты численного моделирования. 9.2.3. Подавление режимов развитого хаоса и управляемая мультистабильность.
- 9.3. Подавление автомодуляции в двухрезонаторном клистроне с запаздыванием. 9.3.1. Упрощенная модель в виде точечного отображения. 9.3.2. Результаты численного моделирования.
- 9.4. Применение методики управления хаосом для улучшения характеристик усилителей и генераторов на основе лампы бегущей волны. 9.4.1. Подавление автомодуляции в ЛБВ-генераторе. 9.4.2. Применение дополнительной обратной связи для подавления пульсаций коэффициента усиления ЛБВ, вызванных отражениями от границ.
- 9.5. Подавление неустойчивостей в кольцевом резонаторе, содержащем среду с кубичной фазовой нелинейностью. 9.5.1. Модифицированное отображение Икеды. 9.5.2. Приближение низкодобротного резонатора. 9.5.3. Численное моделирование модифицированного отображения Икеды. 9.5.4. Пространственно-временная модель кольцевого резонатора.
- 9.6. Выводы.

## **Список литературы**



Изв. вузов «ПНД», т. 19, № 5, 2011



**АЛЕКСАНДР ЮРЬЕВИЧ  
ЛОСКУТОВ**

05.05.1959 – 05.11.2011

После тяжелой болезни ушел из жизни профессор Московского государственного университета, доктор наук Александр Юрьевич Лоскутов. Он родился в Москве в 1959 году. После окончания Московского государственного университета работал научным сотрудником физического факультета. С 1995 года доцент, с 1998 – профессор МГУ. В 1987 году защитил кандидатскую диссертацию на тему «Динамическая стохастичность нелинейных систем и проблема предсказания», а в 1997 году докторскую диссертацию на тему «Подавление хаоса в динамических системах».

Читал курсы лекций «Основы общей физики», «Нелинейная динамика и программирование», «Введение в нелинейную динамику», «Теория динамического хаоса», «Теория неравновесных динамических систем», «Физика хаоса», «Анализ временных рядов», «Математические основы хаотических динамических систем», «Современные методы финансового анализа», «Новые методы анализа и прогноза на финансовых рынках», «Теория и практика прогнозирования». Ему принадлежат около 200 публикаций в научной печати, в том числе учебно-научные монографии «Введение в синергетику» и «Основы теории сложных систем», а также двухтомник «Foundations of Synergetics» (совместно с А.С. Михайловым), блестящие обзорные статьи в журнале УФН «Динамический хаос. Системы классической механики» (2007) и «Очарование хаоса» (2010). Александр Юрьевич успел создать свою научную школу, под его руководством защищено 13 кандидатских диссертаций. Обширна география научных связей – он объехал весь мир, поддерживая рабочие контакты с коллегами из Германии, Бразилии, Израиля, Франции и других стран. На каждой конференции или научной школе, куда приезжал Александр Юрьевич, он становился центром активности и интенсивного рабочего общения. Александр Юрьевич активно сотрудничал с Саратовской научной школой, неизменно участвовал сам с докладами в Саратовских научных конференциях по нелинейной динамике. Последнее время привозил на конференции своих учеников с докладами и сообщениями. Александр Юрьевич был рецензентом и автором журнала «Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика». Его отзывы всегда отличались скрупулезностью рассмотрения рецензируемой статьи, конструктивными замечаниями и рекомендациями, существенно улучшающими научную ценность представленного материала. Его уход из жизни – это огромная потеря для российской науки и для всех нас, его коллег и друзей. Александр Юрьевич был необычайно разносторонней личностью – выдающимся ученым и педагогом, популяризатором науки, любил путешествия, писал рассказы и стихи, увлекался астрономией, историей, занимался спортом. В науке он успел сделать очень многое. Память о нем и его труды останутся с нами всегда.

*Редакционная коллегия*