



ВЕЙВЛЕТ-АНАЛИЗ ЧИРПОВ

А.А. Анисимов, О.Н. Павлова, А.Н. Тупицын, А.Н. Павлов

В работе обсуждаются возможности исследования ритмических процессов с линейно меняющимися частотами («чирпов») на основе вейвлет-анализа. Сформулированы ограничения метода непрерывного вейвлет-преобразования при анализе суперпозиции сигналов с линейной частотной модуляцией. Рассматриваются эффекты интерференции и модуляции ритмов колебаний.

Введение

Очень многие процессы в природе являются нестационарными и демонстрируют изменения во времени своих статистических свойств. Примерами могут служить переходные процессы в радиофизических устройствах, атмосферная и гидродинамическая турбулентность, нестационарные волны в океане, нестационарные геофизические и физиологические сигналы. Классические методы обработки экспериментальных данных (спектрально-корреляционный анализ, вычисление моментных функций и т.д.) представляют собой инструменты исследования стационарных случайных процессов; их применение для анализа нестационарных данных зачастую приводит к различным проблемам в интерпретации полученных результатов. В частности, наличие двух пиков в спектре мощности с некрратными частотами может соответствовать принципиально разным ситуациям: в динамике изучаемой системы могут одновременно присутствовать два независимых ритма или может наблюдаться процесс переключения частоты, и в каждый момент времени удается зафиксировать только один ритмический процесс.

Довольно часто при исследовании экспериментальных данных используется идеология анализа систем с медленно-меняющимися параметрами: предполагается, что в течение небольших интервалов времени свойства процесса меняются незначительно, и его можно рассматривать как стационарный, применяя классический аппарат статистической обработки. Такой подход следует признать эффективным лишь в том случае, если нестационарность ассоциируется с низкочастотной областью спектра по отношению к динамике, представляющей интерес для исследователя. Если же свойства процесса даже в пределах сравнительно малых временных интервалов успевают существенно поменяться, то есть два варианта дальнейших действий: либо отказываться от классических методов анализа временных рядов и ориентироваться

на специальные методики, либо тщательно проводить предварительную обработку экспериментальных данных, выбирая только те участки сигналов, на которых их можно считать приближенно стационарными. Но даже при условии осуществления предварительной обработки данных целесообразно проводить последующий анализ на основе наиболее универсальных методов, которые могут применяться независимо от свойства стационарности случайных процессов. Таких методов существует немного. К числу наиболее известных и популярных подходов можно отнести метод аналитического сигнала, использующий преобразование Гильберта [1], метод анализа флуктуаций относительно тренда [2, 3] и вейвлет-анализ [4-7]. Последний подход считается одним из наиболее универсальных инструментов исследования сложных сигналов. За последние годы вейвлеты продемонстрировали свою эффективность при решении очень широкого круга задач, связанных с подавлением шумов, сжатием больших объемов информации, анализом изображений и т.д. Возможности вейвлет-анализа очень широки [8, 9]. Также как и метод аналитического сигнала, он позволяет определять мгновенную амплитуду, фазу и частоту ритмических компонент нестационарных процессов. При изучении явления синхронизации в динамике систем с несколькими временными масштабами использование вейвлетов может быть эффективнее проведения исследования на основе преобразования Гильберта. Это связано с тем, что вейвлет-преобразование является инструментом многомасштабного анализа, позволяющим одновременно анализировать структуру сигналов в разных диапазонах масштабов наблюдения. С точки зрения изучения корреляционных свойств случайных процессов, базирующийся на вейвлет-преобразовании мультифрактальный формализм [10] обладает не только теми же возможностями, что и анализ флуктуаций относительно тренда, но еще и рядом преимуществ, например, он позволяет проводить исследование спектрально-корреляционных свойств нестационарных случайных процессов по сигналам малой длительности [11]. Отметим, что на практике исследователи работают с отдельной реализацией случайного процесса, имеющей конечную длительность и заданное разрешение. Поэтому, несмотря на то, что вейвлет-преобразование в лучшей степени подходит для изучения процессов с меняющимися во времени характеристиками, ограничения частотно-временного разрешения, присущие классическому спектральному анализу, при этом остаются.

В данной работе рассматриваются возможности и ограничения теории вейвлетов при анализе так называемых «чирпов» – процессов с монотонным изменением частоты. Чирпы (от англ. «chirp» – чирикание) напоминают звуки, издаваемые дельфинами или летучими мышами. Такие сигналы хорошо известны, например, в акустике. Характерные для чирпов частотно-модулированные зависимости иногда проявляются в рамках классического корреляционного анализа [12]. Отметим, что общепринятого определения чирпов не существует, и иногда чирпом называют любой сигнал, содержащий гармонические функции от нелинейного полинома времени [9].

1. Вейвлет-анализ нестационарных сигналов

Эффективность применения методов исследования структуры сигналов зависит от степени их стационарности. Поэтому ограничения используемых подходов должны проявляться в большей степени для сильно нестационарных процессов. Рассмотрим несколько примеров применения непрерывного вейвлет-преобразования.

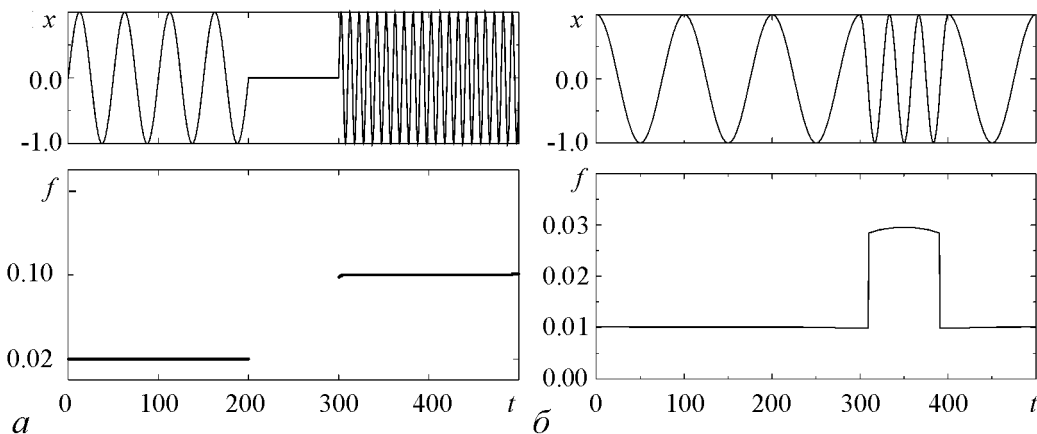


Рис. 1. Анализ сигналов, содержащих переключения частоты. На верхнем рисунке изображен анализируемый сигнал, на нижнем – результат вейвлет-анализа (выделенные временные зависимости мгновенных частот колебаний)

Во всех этих примерах в качестве базисной функции будет использоваться вейвлет Морле

$$\psi(\tau) = \pi^{-1/4} \exp(j2\pi m_0 \tau) \exp\left[-\frac{\tau^2}{2}\right].$$

1.1. Случай переключения частоты. Классический спектральный анализ, основанный на преобразовании Фурье, позволяет обнаружить сам факт существования различных ритмов, но не дает возможности проследить эволюцию во времени мгновенных характеристик колебательных процессов. Вейвлет-анализ обладает более широкими возможностями и является эффективным инструментом исследования локальных свойств сигналов даже в случае быстрых изменений мгновенных частот ритмических составляющих (сильной нестационарности). На рис. 1, *a* приведен тестовый пример сигнала, у которого вначале частота колебаний принимает одно значение, затем на некотором участке колебания полностью прекращаются, после чего они возникают уже на другой частоте. Вейвлет-анализ с применением базисной функции Морле позволяет с хорошей точностью идентифицировать моменты времени, в которые происходят быстрые изменения структуры сигнала. На рис. 1, *б* показан случай, когда частота дважды переключается в пределах одного периода. Возможность анализа столь медленных колебаний (примерно 0.01 Гц) важна в исследованиях сложной динамики живых систем, в частности, динамики различных физиологических процессов. Очень многие ритмы в биологии и медицине соответствуют диапазону $10^{-2} \div 10^{-1}$ Гц, и применение специальных методов, позволяющих проводить детальный анализ их структуры, играет важную роль в задачах диагностики состояния системы по экспериментальным данным.

1.2. Линейные чирпы. Хорошим тестом на эффективность методов исследования нестационарных данных является анализ сигналов, частота которых меняется по линейному закону. Рис. 2, *a* иллюстрирует случай сигнала, включающего два параллельных линейных чирпа (верхний рис.). После проведения вейвлет-преобразования можно идентифицировать мгновенные частоты ритмических процессов, меняющиеся по линейному закону (нижний рис.). Таким образом вейвлет-

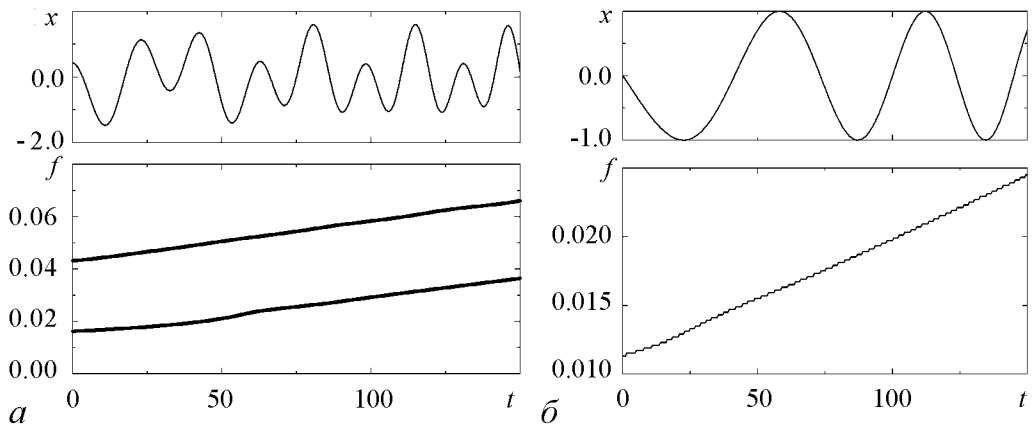


Рис. 2. Анализ линейных чирпов: *a* – сигнал, включающий два чирпа; *б* – случай одного линейного чирпа. На верхнем рисунке изображен анализируемый сигнал, на нижнем – результат вейвлет-анализа (выделенные временные зависимости мгновенных частот колебаний)

анализ позволяет получить правильную информацию о структуре исследуемого сигнала. Отметим, что несмотря на то, что мы можем проводить локальный спектральный анализ, тем не менее, все характеристики оцениваются в пределах окна, занимаемого функцией $\psi(\tau)$ во временной области. Это означает, что характеристики вычисляются не совсем локально, а на основе усреднения по короткому участку сигнала. Эффект усреднения приводит к увеличению погрешности вычисления мгновенных характеристик с ростом скорости их изменения. Однако даже при сравнительно быстрых изменениях свойств сигнала метод позволяет получать корректные результаты. Для иллюстрации рассмотрен случай одного линейного чирпа (рис. 2, *б*), частота которого меняется примерно в два раза за один период колебаний (верхний рис.). Вейвлет-анализ позволяет идентифицировать в этом случае линейную зависимость мгновенной частоты с высокой точностью (нижний рис.).

2. Ограничения вейвлет-анализа

Рассмотрим теперь несколько примеров, иллюстрирующих ограничения непрерывного вейвлет-преобразования на основе базисной функции Морле. Если проанализировать случай быстрых изменений мгновенных частот ритмических процессов или меньшую разницу сосуществующих частот, то это приводит к ограничениям возможности их корректной идентификации. Соответствующий пример изображен на рис. 3 и демонстрирует, что вместо линейных (теоретически ожидаемых) зависимостей наблюдаются осцилляции мгновенных частот колебаний. Частота данных осцилляций равна разности $\Delta f(t) = |f_2(t) - f_1(t)|$, а их размах зависит от параметра k , характеризующего скорость роста частоты параллельных чирпов: $f_j(t) = kt + f_j(0)$, параметра m_0 базисной функции $\psi(\tau)$ и величины $\Delta f(t)$.

Для количественной характеристики погрешности метода на рис. 4 приведена зависимость $\sigma(k)$, где σ – стандартное отклонение мгновенной частоты чирпа от прямой линии. Видно, что отклонения для $\Delta f = 0.05$ Гц и $\Delta f = 0.2$ Гц демонстрируют значительные отличия. При малых k ошибка меньше для $\Delta f = 0.2$ Гц, так как не возникает сложностей, связанных с недостаточным частотным разрешением. Для $\Delta f = 0.05$ Гц наличие близко расположенных мгновенных частот

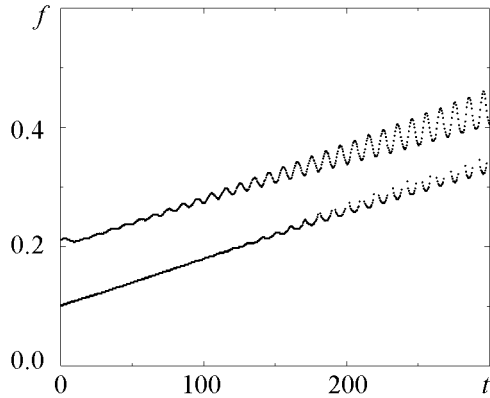


Рис. 3. Пример применения непрерывного вейвлет-преобразования к двум параллельным чирпам. С ростом частот чирпов появляются осцилляции мгновенных частот ритмических процессов $f_1(t)$ и $f_2(t)$ вместо ожидаемых прямых линий

приводит к большей величине ошибки их идентификации. С увеличением k отклонения от линейной зависимости для $\Delta f = 0.05$ Гц растут медленнее, поскольку флуктуации частоты ограничены диапазоном Δf , и это ограничение сильнее сказывается для близко расположенных мгновенных частот. Отметим, что ухудшение их идентификации связано не столько со свойствами или недостатками вейвлет-преобразования, сколько с разрешением сигнала и анализирующего вейвлета (и его выбором). Чем разрешение лучше, тем качественнее выявятся обе близкие частоты. Это справедливо до известных пределов, связанных, в частности, с принципом неопределенности.

Рис. 5 иллюстрирует зависимость величины ошибки идентификации от частоты колебаний: отклонения от линейных зависимостей в большей степени проявляются в данном случае для динамики в диапазоне $0.15 \div 0.2$ Гц, чем для меньших значений частот. Величину погрешности определения мгновенной частоты (размах осцилляций) можно попробовать уменьшить за счет подстройки параметра m_0 вейвлета Морле, который характеризует частотно-временное разрешение выбранной базисной функции. Однако из-за наличия принципа неопределенности Гейзенберга (проявлением которого служит существование частотно-временного окна вейвлет-преобразования), невозможно одновременно улучшить разрешение и во временной, и в частотной области. Поэтому полностью устранить существующие ограничения подстройкой параметров вейвлета не получится.

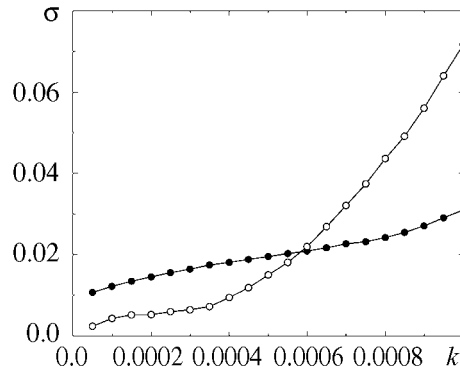


Рис. 4. Стандартные отклонения мгновенных частот двух параллельных чирпов от прямых линий в зависимости от параметра, характеризующего скорость роста частот. Черные кружочки соответствуют $\Delta f = 0.05$ Гц, белые – $\Delta f = 0.2$ Гц

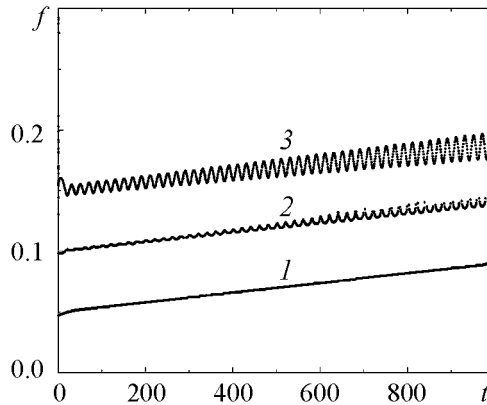


Рис. 5. Тройной чирп. Вместо ожидаемых прямых линий наблюдается осциллирующий характер поведения мгновенных частот для более высокочастотных составляющих чирпа и с ростом f . Кривые соответствуют мгновенным частотам трех линейных чирпов с начальными значениями частот: 1 – 0.05 Гц, 2 – 0.10 Гц, 3 – 0.15 Гц. Видно, что для высокочастотных составляющих ошибка идентификации мгновенных частот выше, чем для низкочастотных

3. Модуляция или интерференция?

В динамике биологических систем часто наблюдаются эффекты взаимодействия ритмов в форме частотной модуляции. Например, в работах [13-15] детально исследовалась частотная модуляция внутриклеточных процессов и взаимодействие ритмов нефронов; типичные примеры представлены на рис. 6.

Сравнивая результаты анализа эффекта частотной модуляции быстрого ритма колебаний медленной динамикой с результатами, демонстрирующими ограничения спектрального разрешения вейвлет-преобразования (см. рис. 5), видим их сходство. Отсюда возникает вопрос – как определить, с чем мы на самом деле встречаемся в той или иной ситуации? Можно ли, проводя анализ динамики живых систем, быть уверенными в том, что речь идет именно о взаимодействии ритмов (в форме частотной модуляции), а не об ограничениях разрешения анализируемого сигнала и выбранного вейвлета, приводящих к явлению интерференции [6]? Результаты, представленные на рис. 4 и 5, относятся именно к случаю интерференции, при котором осциллирующий характер отклонений от ожидаемой прямой линии вызван недостаточным (для разделения чирпов) частотным разрешением. Необходимым требованием для идентификации ритмических процессов является то, что значение разности мгновенных частот сосуществующих ритмов колебаний должно быть много больше чем спектральное разрешение вейвлета на данной частоте (ширина подвижного частотно-временного окна вейвлет-преобразования). Очевидно, что существует и зависимость от скорости роста частоты или степени нестационарности, которая влияет на временное разрешение вейвлет-преобразования. Вышесказанное означает, что идентификация эффектов взаимодействия ритмов в форме модуляции колебаний должна сопровождаться дополнительными исследованиями, которые могли бы подтвердить, что речь идет именно о модуляции сравнительно быстрых колебаний более медленным процессом. Наиболее простая проверка состоит в определении частоты модуляции (в случае нестационарной динамики это можно осуществить на основе техники двойного вейвлет-анализа [16, 17]). Если осцилляции мгновенной

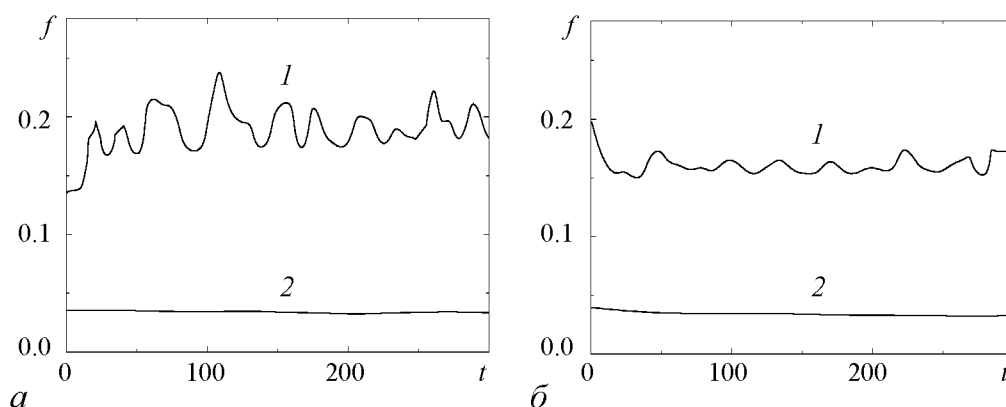


Рис. 6. Частотная модуляция колебаний в функционировании нефронов почки крысы: *а* – крыса с повышенным артериальным давлением, *б* – крыса с нормальным артериальным давлением. *1* – мгновенная частота быстрого ритма колебаний, *2* – мгновенная частота медленного ритма колебаний. Видно, что при повышенном давлении усиливается эффект частотной модуляции – наблюдаются более сильные осцилляции мгновенной частоты быстрого ритма

частоты быстрого ритма происходят с частотой медленной динамики, то этот случай соответствует модуляции колебаний. Если спектральное разрешение недостаточно для надежного разделения двух ритмических процессов, то наблюдаются осцилляции с частотой, представляющей собой линейную комбинацию частот сосуществующих ритмов колебаний (чаще всего их разность). Таким образом, сам факт наличия осциллирующего характера временных зависимостей мгновенных частот является недостаточным для того, чтобы делать вывод о нелинейном взаимодействии ритмов, проявляющемся в форме частотной модуляции, и принципиальным моментом является оценка частоты соответствующих осцилляций.

Заключение

В работе были рассмотрены возможности и ограничения вейвлет-анализа при исследовании частотно-модулированных процессов. В качестве теста на эффективность методов исследования структуры нестационарных данных был выбран случай чирпов – сигналов с монотонным изменением частоты (в данном случае, линейным). Следует отметить, что при решении задачи идентификации мгновенных частот ритмов колебаний до сих пор существует много открытых вопросов. С одной стороны, вейвлет-анализ воспринимается в качестве эффективного инструмента исследования, который обеспечивает хорошее частотное разрешение для сосуществующих ритмов [6]. С другой стороны, некоторые авторы полагают, что при изучении процессов, период которых составляет величину порядка 10 с и выше, вейвлет-анализ приводит к плохому временному разрешению и уступает подходам, основанным на преобразовании Вигнера–Вилля и другим специальным алгоритмам [18]. Этот диапазон, в частности, играет важную роль в динамике живых систем, поскольку многие ритмы в функционировании объектов живой природы являются медленными, и их исследование с применением теории вейвлетов позволяет обнаруживать новые явления [13, 14]. Данное обстоятельство приводит к необходимости более тщательно исследовать вопросы применимости данного математического аппарата при изучении структуры медленных ритмов с быстро меняющимися во времени характеристиками.

Ограничения возможностей анализа параллельных чирпов определяются тремя основными факторами: скоростью изменения мгновенных частот k , разностью между ними Δf и спектральным разрешением выбранной базисной функции. При малых значениях параметра k ошибка идентификации ритмических процессов уменьшается с ростом Δf , а при больших – увеличивается. Знание соответствующих ограничений непрерывного вейвлет-преобразования позволяет оценивать корректность результатов анализа сигналов, регистрируемых в экспериментах, и правильно интерпретировать такие результаты. В частности, недостаточное разрешение анализируемого сигнала и выбранного вейвлета приводят к эффектам, которые могут быть ошибочно приняты за частотную модуляцию. Данные результаты дополняют выводы работы [17], где были сформулированы ограничения вейвлет-анализа при исследовании эффектов амплитудной модуляции.

Проводимые исследования были поддержаны Министерством образования и науки РФ по программе «Развитие научного потенциала высшей школы (2006–2008 гг.)» и Германской службой академических обменов.

Библиографический список

1. *Gabor D.* Theory of communication // J. Inst. Electr. Eng. London. 1946. Vol. 93. P. 429.
2. *Peng C.-K., Havlin S., Stanley H.E., Goldberger A.L.* Quantification of scaling exponents and crossover phenomena in nonstationary heartbeat time series // Chaos. 1995. Vol. 5. P. 82.
3. *Peng C.-K., Buldyrev S.V., Havlin S., Simons M., Stanley H.E., Goldberger A.L.* Mosaic organization of DNA nucleotides // Phys. Rev. E. 1994. Vol. 49. P. 1685.
4. *Grossmann A., Morlet J.* Decomposition of hardy functions into square integrable wavelets of constant shape // S.I.A.M. J. Math. Anal. 1984. Vol. 15. P. 723.
5. *Meyer Y.* Wavelets: Algorithms and Applications. Philadelphie: S.I.A.M., 1993.
6. *Малла С.* Вэйвлеты в обработке сигналов. М.: Мир, 2005.
7. *Короновский А.А., Храмов А.Е.* Непрерывный вейвлетный анализ в приложениях к задачам нелинейной динамики. Саратов: ГосУНЦ «Колледж», 2002.
8. *Астафьева Н.М.* Вейвлет-анализ: основы теории и примеры применения // Успехи физических наук. 1996. Т. 166. С. 1145.
9. *Дремин И.М., Иванов О.В., Нечитайло В.А.* Вейвлеты и их применение // Успехи физических наук. 2001. Т. 171. С. 465.
10. *Muzy J.F., Bacry E., Arneodo A.* The multifractal formalism revisited with wavelets // Int. J. Bifurcation Chaos. 1994. Vol. 4. P. 245.
11. *Павлов А.Н., Анищенко В.С.* Мультифрактальный анализ сложных сигналов // Успехи физических наук. 2007. Т. 177. С. 859.
12. *Dremin I.M.* Cumulant and factorial moments in perturbative gluodynamics // Phys. Lett. B. 1993. Vol. 313. P. 209.
13. *Sosnovtseva O.V., Pavlov A.N., Brazhe N.A., Brazhe A.R., Erokhova L.A., Maksimov G.V., Mosekilde E.* Interference microscopy under double-wavelet analysis: A new tool to studying cell dynamics // Physical Review Letters. 2005. Vol. 94. P. 218103.
14. *Marsh D.J., Sosnovtseva O.V., Pavlov A.N., Yip K.-P., Holstein-Rathlou N.-H.* Frequency encoding in renal blood flow regulation // American Journal of Physiology. 2005. Vol. 288. P. R1160.
15. *Pavlov A.N., Makarov V.A., Mosekilde E., Sosnovtseva O.V.* Application of wavelet-based tools to study the dynamics of biological processes // Briefings in Bioinformatics. 2006. Vol. 7(4). P. 375.
16. *Sosnovtseva O.V., Pavlov A.N., Mosekilde E., Holstein-Rathlou N.-H., Marsh D.J.* Double-wavelet approach to study frequency and amplitude modulation in renal autoregulation // Phys. Rev. E. 2004. Vol. 70. P. 031915.
17. *Sosnovtseva O.V., Pavlov A.N., Mosekilde E., Holstein-Rathlou N.-H., Marsh D.J.* Double-wavelet approach to studying the modulation properties of nonstationary multimode dynamics // Physiological Measurement. 2005. Vol. 26. P. 351.
18. *Wand H., Siu K., Ju K., Chon K.H.* A high resolution approach to estimating time-frequency spectra and their amplitudes // Annals of Biomedical Engineering. 2006. Vol. 34. P. 326.

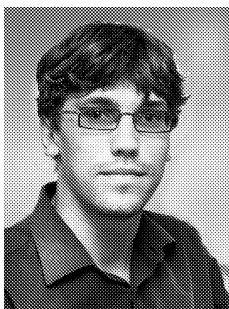
Саратовский государственный
университет

Поступила в редакцию 5.11.2007
После доработки 12.02.2008

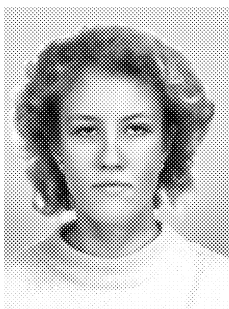
WAVELET-ANALYSIS OF CHIRPS

A.A. Anisimov, O.N. Pavlova, A.N. Tupitsyn, A.N. Pavlov

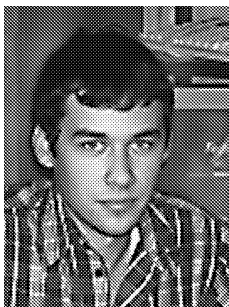
The paper discusses the possibilities of studying of rhythmic processes with linearly changed frequencies («chirps») based on the wavelet-analysis. Limitations of the continuous wavelet-transformation in the analysis of superpositions of signals with linear frequency modulation are formulated. Effects of the interference and the modulation of rhythmic processes are considered.



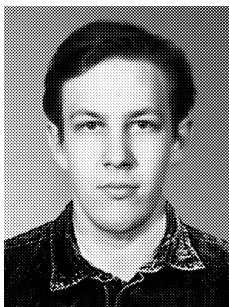
Анисимов Алексей Александрович – аспирант кафедры радиофизики и нелинейной динамики физического факультета СГУ (специальность «биофизика»). Инженер кафедры. Область научных интересов: динамика биологических систем, анализ временных рядов.



Павлова Ольга Николаевна – аспирант физического факультета Саратовского государственного университета им. Н.Г. Чернышевского (кафедра радиофизики и нелинейной динамики, специальность «биофизика»). Ассистент кафедры. Область научных интересов – применение методов нелинейной динамики в исследованиях биологических систем. Имеет более 10 научных публикаций.



Тупицын Анатолий Николаевич – родился в Саратове (1983). Окончил Саратовский государственный университет по специальности «биохимическая физика» (2005). В настоящее время аспирант и инженер кафедры радиофизики и нелинейной динамики СГУ. Область научных интересов: нелинейная динамика, анализ временных рядов.



Павлов Алексей Николаевич – родился в Саратове (1973). Окончил физический факультет Саратовского университета по специальности радиофизика и электроника (1995). Кандидат физико-математических наук (1998). Доцент кафедры радиофизики и нелинейной динамики. Область научных интересов: анализ временных рядов. Имеет более 60 работ, опубликованных в отечественной и зарубежной печати. E-mail: pavlov@chaos.ssu.runnet.ru



ТРАНЗИСТОРНЫЕ ГЕНЕРАТОРЫ С ИНЕРЦИОННОЙ НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ

С.М. Николаев, А.В. Хохлов, В.С. Анищенко

Приводится электронная схема генератора с инерционной нелинейностью, построенная на операционных усилителях и полевых транзисторах. Коэффициент усиления в генераторе рассчитывается аналитически и регулируется с помощью полевого транзистора. Строго и последовательно выводятся дифференциальные уравнения генератора. Экспериментальные исследования предложенной схемы демонстрируют переход к хаосу через каскад бифуркаций удвоения периода.

Введение

Генератор с инерционной нелинейностью был предложен К.Ф. Теодорчиком еще в 1946 году [1]. В качестве инерционного нелинейного элемента в колебательный контур генератора вводился термистор, сопротивление которого обладало нелинейной зависимостью от протекающего через него тока. Усилительный элемент считался линейным, и генератор производил квазигармонические колебания.

Детальные исследования свойств генератора с инерционной нелинейностью были проведены сотрудниками кафедры общей физики и волновых процессов МГУ. Результаты теоретических и экспериментальных исследований представлены в монографии П.С. Ланды [2].

В работах В.С. Анищенко и В.В. Астахова была предложена модификация генератора Теодорчика с целью реализации режимов не только периодических, но и хаотических автоколебаний [3–5]. В основу модификации был положен принцип использования обратной связи с особым типом нелинейности в цепи инерционного каскада, реализация которого позволила получить хаотические автоколебания [3]. Практически реализация генератора базировалась на использовании в качестве усилителя многосеточной электронной лампы (пентода или тетрода), что позволило осуществить управление крутизной основного усилителя путем подачи сигнала инерционной обратной связи на вторую сетку лампы. Модифицированный генератор с инерционной нелинейностью в отличие от [1] учитывал как инерционный механизм ограничения амплитуды, реализуемый с помощью дополнительной цепи обратной связи, так и безынерционный, обусловленный нелинейностью вольтамперной характеристики усилителя.

Метод введения цепи инерционной обратной связи состоял в использовании многосеточной электронной лампы, в которой первая сетка обеспечивала необходимое усиление переменного напряжения, а переменное напряжение второй сетки управляло крутизной усилителя и позволяло изменять коэффициент усиления каскада. Это открывало возможность исследовать режимы возбуждения различных типов автоколебаний, в том числе хаотических.

При разработке транзисторных генераторов с инерционной нелинейностью возникла серьезная проблема управляемого изменения коэффициента усиления транзисторного каскада. Дело в том, что транзисторных аналогов пентодов и тетродов нет, а в двухзатворных транзисторах сигнал одного из затворов не позволяет управлять крутизной другого. В результате длительного исследования различных схем транзисторных усилителей родилась идея использовать операционный усилитель (ОУ) с управляемым коэффициентом усиления. Теоретический анализ и предварительные эксперименты показали, что коэффициентом усиления ОУ можно управлять, если электрически регулировать величину одного из сопротивлений в цепи обратной связи.

1. Принципы электрического управления сопротивлением и электрическая схема автогенератора с инерционной нелинейностью на операционных усилителях

Как известно [6], поток носителей в униполярном (полевом) полупроводниковом транзисторе (ПТ) с каналом, например, n -типа и управляемым p - n -переходом модулируется электрическим полем, перпендикулярным потоку. При отрицательном (запирающем) напряжении на затворе относительно истока полное сопротивление канала между истоком и стоком может изменяться по закону

$$R_{\text{кан}} = \frac{R_{\text{min}}}{\sqrt{1 - U_{\text{ЗИ}}/U_{\text{отс}}}}, \quad (1)$$

где R_{min} – минимальное дифференциальное сопротивление канала при $U_{\text{ЗИ}} = 0$ ($R_{\text{min}} = 200 \div 1000$ Ом), $U_{\text{ЗИ}}$ – модуль отрицательного напряжения затвора относительно истока, $U_{\text{отс}}$ – напряжение отсечки тока в канале ПТ (при $U_{\text{ЗИ}} = U_{\text{отс}}$ сопротивление $R_{\text{кан}}$ становится неограниченно большим). Задавая на затворе ПТ напряжение $U_{\text{ЗИ}} = U_0 + U_{\approx}$, при $U_{\approx} \ll U_0$ можно изменять сопротивление канала в зависимости от U_{\approx} . Если использовать описанный транзистор в качестве сопротивления в цепи обратной связи ОУ, то можно электрически регулировать его коэффициент усиления.

Отметим еще одну особенность ПТ с управляемым p - n -переходом. В области отрицательных напряжений $U_{\text{ЗИ}}$ ток в канале ПТ (ток стока $I_{\text{СТ}}$) удовлетворяет соотношению

$$I_{\text{СТ}} = \frac{1}{2} S_0 (U_{\text{отс}} - U_{\text{ЗИ}})^2, \quad (2)$$

где S_0 – удельная крутизна ПТ. Строго говоря, характеристики ПТ в зависимости от распределения концентраций носителей в области канала и конструктивно-технологических особенностей могут отличаться от квадратичных, а полное сопротивление канала является комплексным. Однако в области звуковых частот модуль

реактивной составляющей превышает резистивное сопротивление в тысячи раз, а у 6 из 10 экземпляров транзистора 2П302Б экспериментально полученные зависимости $I_{CT}(U_{ЗИ})$ в интервале от $U_{отс}$ до $U_{отс}/2$ практически не отличались от квадратичных.

Электрическая принципиальная схема генератора с инерционной нелинейностью, построенная на основе операционных усилителей и полевых транзисторов, представлена на рис. 1. Схема содержит квадратичный преобразователь на ПТ V2. Экспоненциальный преобразователь изображен справа, за пределами схемы генератора с инерционной нелинейностью (схема 2). Все ОУ включены по схеме неинвертирующего усилителя и их коэффициенты усиления для малых сигналов удовлетворяют соотношению

$$K_i = 1 + R_{\beta i} / R_{0i}, \quad (3)$$

где i – порядковый номер ОУ. Резистор $R_{\beta 1} = 0$, так как ОУ А1 является повторителем напряжения с большим входным сопротивлением R_0 и ничтожно малым выходным. Функции резистора R_{02} выполняет сопротивление R_{V1} канала полевого транзистора V1.

Рассмотрим математическую модель автогенератора на операционном усилителе А2.

1. Пусть сигнал синхронизации на входе А1 и переменное напряжение на входе V1 отсутствуют, а усиление сигналов в А2 описывается нелинейной функцией

$$U_{\text{ВЫХ}} = KU_1 - K'U_1^3, \quad (4)$$

где K отвечает формуле (3). В отсутствие синхронизирующего напряжения ($U_{\text{синх}} = 0$) выход А1 принимает нулевой потенциал и элементы R_1, C_1 заземляются (пунктирная линия). В каскаде на операционном усилителе А2 цепи положительной обратной связи (ОС) в виде последовательно-параллельной RC-цепи Вина (R_1, R_2, C_1, C_2) и отрицательной ОС, состоящей из резистора $R_{\beta 1}$ и сопротивления канала R_{V1} , образуют мост Вина. Мост Вина находится в равновесии, когда $U_1 = U_2$, и в системе возникают автоколебания. При $R_1 = R_2 = R, C_1 = C_2 = C$ дифференци-

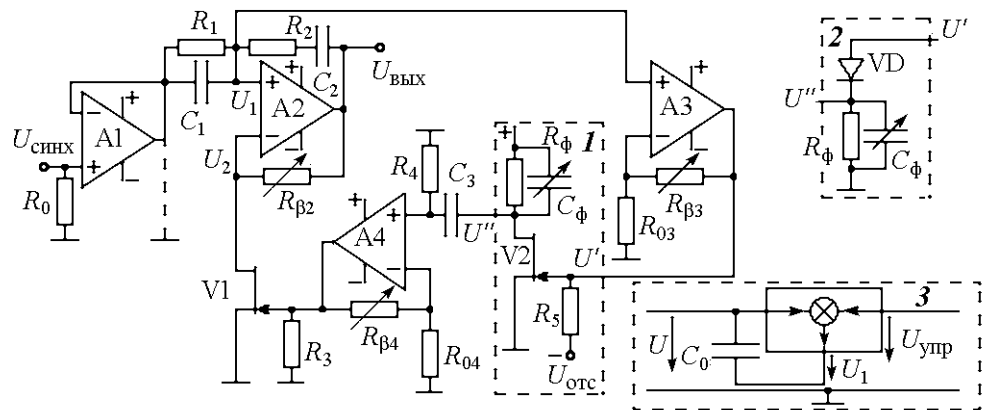


Рис. 1. Электрическая схема генератора с инерционной нелинейностью

альное уравнение RC -генератора, согласно [8], имеет вид

$$\frac{d^2U_1}{dt^2} + \frac{1}{RC}(3 - K + 3K'U_1^2)\frac{dU_1}{dt} + \frac{1}{R^2C^2}U_1 = 0. \quad (5)$$

Если обозначить $\omega_0 = 1/(RC)$, использовать для K выражение (3) и ввести безразмерные переменные $\tau = \omega_0 t$ и $x = U_1/U_{1\max}$, то получим

$$\frac{d^2x}{d\tau^2} + \left(2 - \frac{R_{\beta 2}}{R_{V1}} + \mu x^2\right)\frac{dx}{d\tau} + x = 0, \quad (6)$$

где $\mu = 3K'U_{1\max}^2$.

2. Пусть, как и в первом случае, $U_{\text{снх}} = 0$, а на затворе полевого транзистора V1 задано напряжение $U_{3И} = U_{\text{отс}}/2 + U_{\approx}$ ($U_{\approx} \ll U_{\text{отс}}$). Напряжение $U_{\approx} \ll U_{\text{отс}}$ представляет сигнал на выходе инерционного преобразователя. Чтобы регулировать амплитуды сигнала до и после инерционного преобразователя, в схему введены операционные усилители А3 и А4 с переменными коэффициентами усиления. Рассмотрим зависимость R_{V1} от напряжения U_{\approx} . Согласно формуле (1), имеем

$$R_{V1} = \frac{R_{\min}}{\sqrt{0.5 - U_{\approx}/U_{\text{отс}}}} = \frac{R_{\min}/\sqrt{0.5}}{\sqrt{1 - 2U_{\approx}/U_{\text{отс}}}},$$

$$\frac{R_{\beta 2}}{R_{V1}} = \frac{\sqrt{0.5}R_{\beta 2}}{R_{\min}}\sqrt{1 - 2U_{\approx}/U_{\text{отс}}} \cong \frac{\sqrt{0.5}R_{\beta 2}}{R_{\min}} - \frac{\sqrt{0.5}R_{\beta 2}}{R_{\min}U_{\text{отс}}}U_{\approx}. \quad (7)$$

Справедливость соотношения (7) проверялась экспериментально в интервале частот управляющего напряжения U_{\approx} от 10 Гц до 200 кГц. Линейная зависимость коэффициента усиления ОУ сохранялась при увеличении амплитуды U_{\approx} до 0.8 В для различных значений постоянного смещения на затворе ПТ. На частотах выше 80 кГц величины коэффициентов в (7) медленно уменьшались в среднем до 7%.

Подставляя (7) в (6), окончательно получим

$$\ddot{x} - (m - bz - \mu x^2)\dot{x} + x = 0, \quad (8)$$

где $m = \sqrt{0.5}R_{\beta 2}/R_{\min} - 2$, $b = \sqrt{0.5}R_{\beta 2}U_{1\max}/(R_{\min}U_{\text{отс}})$, $z = U_{\approx}/U_{1\max}$. Переменная z зависит от напряжения инерционной обратной связи и определяется характером нелинейности инерционного преобразователя.

Квадратичный преобразователь (схема 1). Если на затворе транзистора V2 задано постоянное смещение $U_{3И} = U_{\text{отс}}$, ток транзистора $I_{C\tau 2}$ будет отличен от нуля только при положительных значениях входного напряжения U' , то есть $I_{C\tau 2} = S_0U'^2\sigma(U')/2$, где $\sigma(U') = \begin{cases} 1, & U' > 0 \\ 0, & U' \leq 0 \end{cases}$. Проходя через $R_{\phi}C_{\phi}$ -звено, ток $I_{C\tau 2}$ создает на нем напряжение U_{\approx} , причем ток $I_{C\tau 2}$ равен сумме токов, протекающих через R_{ϕ} и C_{ϕ} . Поэтому

$$I_{C\tau 2} = \frac{U_{\approx}}{R_{\phi}} + C_{\phi}\frac{dU_{\approx}}{dt} \quad \text{или} \quad \frac{dU_{\approx}}{dt} = \frac{I_{C\tau 2}}{C_{\phi}} - \frac{U_{\approx}}{R_{\phi}C_{\phi}} = \frac{S_0R_{\phi}\sigma(U')}{2R_{\phi}C_{\phi}}U'^2 - \frac{U_{\approx}}{R_{\phi}C_{\phi}}.$$

Принимая во внимание, что U' пропорционально U_1 , и вводя безразмерные переменные z и $\tau = \omega_0 t$, получим дифференциальное уравнение инерционного преобразователя

$$\dot{z} = -gz + g'\Phi(x) = -gz + g'x^2, \quad (9)$$

где $g = RC/(R_\phi C_\phi) = 1/(\omega_0 \tau_\phi)$, $g' = [S_0 R_\phi / (2U_{1\max})][1/(\omega_0 \tau_\phi)]$, $\tau_\phi = R_\phi C_\phi$ – постоянная времени фильтра. При $S_0 R_\phi / (2U_{1\max}) = 1$ имеем $g' = g$, и уравнение становится каноническим.

Экспоненциальный преобразователь (схема 2). В качестве экспоненциального преобразователя можно использовать обычный полупроводниковый диод. Его вольтамперная характеристика описывается формулой

$$I_{VD} = I_0(\exp(U'/\varphi_T) - 1),$$

где $\varphi_T = kT/e \cong 25$ мВ – температурный потенциал. Ток, проходящий через R_ϕ и C_ϕ , состоит из двух частей: $I_{VD} = U_\approx / R_\phi + C_\phi dU_\approx / dt$. Поэтому

$$\frac{dU_\approx}{dt} = \frac{I_{VD}}{C_\phi} - \frac{U_\approx}{R_\phi C_\phi} = \frac{I_0}{C_\phi}(\exp(U'/\varphi_T) - 1) - \frac{U_\approx}{R_\phi C_\phi}.$$

Принимая во внимание, что U' пропорционально U_1 , и вводя безразмерные переменные z и $\tau = \omega_0 t$, получим дифференциальное уравнение для экспоненциального инерционного преобразователя

$$\dot{z} = -gz + g'\Phi(x) = -gz + g'(\exp(\alpha x) - 1), \quad (10)$$

где $g = RC/(R_\phi C_\phi) = 1/(\omega_0 \tau_\phi)$, $g' = (I_0 R_\phi / U_{1\max})[1/(\omega_0 \tau_\phi)]$, $\alpha = U_{1\max} / \varphi_T$, $\tau_\phi = R_\phi C_\phi$ – постоянная времени фильтра.

Таким образом, оба инерционных преобразователя в транзисторном генераторе с инерционной нелинейностью описываются одним и тем же дифференциальным уравнением с различными $\Phi(x)$, а уравнения (8) совместно с (9) или (10) соответствуют динамической системе Анищенко–Астахова [5]. Постоянную времени инерционного преобразователя нетрудно регулировать, если использовать переменный резистор R_ϕ или ввести в качестве C_ϕ электрически управляемую емкость (схема 3).

Пусть на входы перемножителя напряжений поступает напряжение U , действующее на емкости, и управляющее напряжение $U_{упр}$. Тогда напряжение на выходе перемножителя сигналов $U_1 = UU_{упр}/10$. Когда $U_{упр} \neq 0$ и постоянно, напряжение на емкости принимает вид $U - U_1 = U(1 - U_{упр}/10)$, а эквивалентная емкость

$$C = \frac{q}{U - UU_{упр}/10} = \frac{C_0}{1 - U_{упр}/10}$$

(q – заряд электрона) увеличивается или уменьшается по сравнению с C_0 в зависимости от знака $U_{упр}$ и может быть проградуирована с высокой точностью.

3. Пусть на вход повторителя напряжения ОУ А1 подано напряжение $U_{синх} = F(t)$. Тогда к входному напряжению усилителя на А2 аддитивно добавляется $U_{синх} = F(t)$, и уравнение (5) принимает вид

$$\frac{d^2 U_1}{dt^2} + \frac{1}{RC}(3 - K + 3K'U_1^2)\frac{dU_1}{dt} + \frac{1}{R^2 C^2}U_1 = \frac{1}{RC} \frac{dF}{dt}.$$

Переходя к безразмерным переменным и учитывая инерционную нелинейность, получим

$$\begin{aligned} \ddot{x} - (m - bz - \mu x^2)\dot{x} + x &= \dot{F}(\tau), \\ \dot{z} &= -gz + g'\Phi(x), \end{aligned} \quad (11)$$

В качестве $F(t)$ можно использовать не только синхронизирующее напряжение, но и вводить в генератор дополнительный источник шума. При этом уравнения (11) позволяют исследовать различные механизмы возникновения и синхронизации колебаний в генераторах с инерционной нелинейностью.

2. Некоторые режимы колебаний автогенератора с инерционной нелинейностью

Генератор с инерционной нелинейностью является одной из базовых моделей нелинейной динамики, демонстрирующих различные виды колебаний.

При малых положительных значениях параметра m амплитуда колебаний $x(t)$ в (11) мала, и воздействие на усилитель RC -генератора (см. рис. 1) со стороны дополнительной обратной связи незначительно. В системе (11) при любых значениях τ_{ϕ} (а значит, и параметра g) и некоторых значениях параметра возбуждения m в результате мягкой бифуркации Андронова–Хопфа из особой точки в нуле координат возникает устойчивый предельный цикл C периода $T(m)$.

С ростом m интенсивность колебаний $x(t)$ растет, сигнал обратной связи $z(t)$ тоже нарастает и начинает более активно управлять коэффициентом усиления основного усилителя. В системе возникает последовательность бифуркаций удвоения периода. При прохождении бифуркационного значения параметра m в некотором интервале изменения параметра g (для квадратичной нелинейности $g = 0.25 \div 0.8$, а для экспоненциальной нелинейности интервал изменения g оказывается более узким) в системе мягко рождается цикл $2C$ с периодом $2T(m)$. Как известно, такая бифуркация имеет коразмерность 1 и допускает однопараметрический анализ [4]. Далее в системе происходит последовательность бифуркаций удвоения периода циклов $2^k C$, $k = 1, 2, 3, \dots$. При этом в спектре мощности появляются дополнительные субгармоники.

Изменения фазовых портретов и соответствующих спектров мощности колебаний, происходящие при увеличении параметра возбуждения m , представлены на рис. 2.

С дальнейшим увеличением параметра m генератор переходит к хаотическим колебаниям и спектр мощности становится сплошным. Сначала в системе наблюдается многоленточный хаотический аттрактор, далее происходят бифуркации объединения лент хаотических аттракторов, в результате которых в спектре мощности колебаний исчезают соответствующие субгармоники. Примеры режимов хаоса и соответствующие спектры мощности, наблюдающиеся в генераторе с инерционной нелинейностью, представлены на рис. 3. При вариации управляющих параметров в области хаотических колебаний можно также наблюдать окна периодичности, которым соответствуют устойчивые многообходные циклы различных периодов.

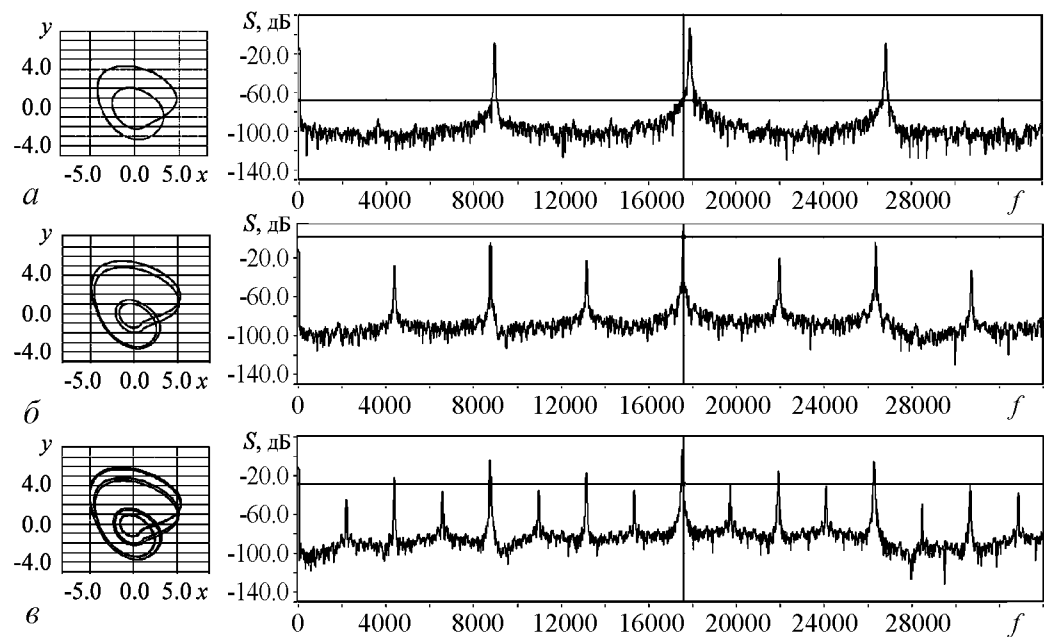


Рис. 2. Последовательность бифуркаций удвоения периода в генераторе с инерционной нелинейностью: проекции фазовых траекторий и спектры мощности, $g = 0.265$; $m=0.750$ (а), 0.825 (б), 0.865 (в)

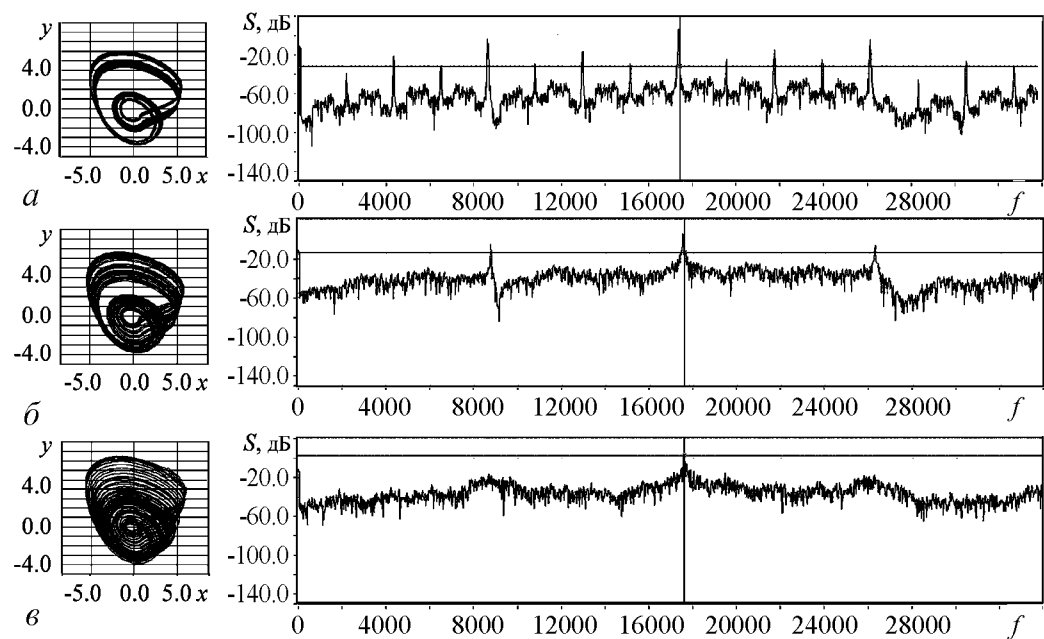


Рис. 3. Последовательность бифуркаций объединения лент хаотических аттракторов в генераторе с инерционной нелинейностью: проекции фазовых траекторий и спектры мощности, $g = 0.265$; $m=0.870$ (а), 0.873 (б), 0.875 (в)

Заключение

В работе предложен вариант схемы транзисторного генератора с инерционной нелинейностью, реализующий динамическую систему Анищенко–Астахова [5]. Элементы схемы поддаются аналитическому описанию и позволяют строго и последовательно вывести дифференциальные уравнения генератора, а также аналитически рассчитать его параметры.

Предложенная модель позволяет демонстрировать широкий круг различных динамических процессов: каскад бифуркаций удвоения, переход к хаосу, синхронизацию автоколебаний, динамику процессов при наличии аддитивных шумов различной природы, и может быть использована в учебном процессе при подготовке специалистов-радиофизиков.

Библиографический список

1. Теодорчик К.Ф. Автоколебательные системы с инерционной нелинейностью // ЖТФ. 1946. Т. 16. Вып. 7. С. 845.
2. Ланда П.С. Автоколебания в системах с конечным числом степеней свободы. М.: Наука, 1980.
3. Анищенко В.С. Астахов В.В. Экспериментальное исследование механизма возникновения и структуры странного аттрактора в генераторе с инерционной нелинейностью // Радиотехника и электроника. 1983. Т. 28, № 6. С. 1109.
4. Астахов В.В. Механизмы перехода к стохастичности в генераторе с инерционной нелинейностью. Дис. канд. физ.-мат. наук / СГУ. Саратов, 1983.
5. Анищенко В.С. Сложные колебания в простых системах. М.: Наука, 1990.
6. Хохлов А.В. Нелинейные и параметрические радиотехнические цепи и системы с полупроводниковыми приборами. Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 1994.
7. Анищенко В.С. Николаев С.М. Генератор квазипериодических колебаний. Бифуркация удвоения двумерного тора // Письма в ЖТФ. 2005. 31(19). С. 88.
8. Хохлов А.В. Полупроводниковые усилители и автогенераторы. Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 1997.

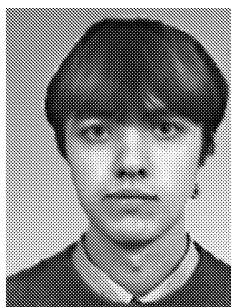
Саратовский государственный
университет

Поступила в редакцию 7.02.2008
После доработки 20.03.2008

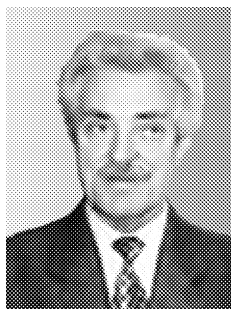
TRANSISTOR GENERATORS WITH INERTIAL NONLINEARITY

S.M. Nikolaev, A.V. Khokhlov, V.S. Anishchenko

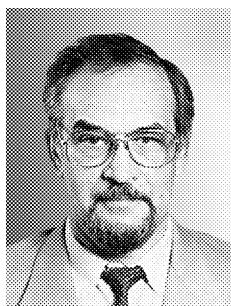
We present the electronic scheme of generator with inertial nonlinearity on operational amplifiers and field-effect transistors. The amplification coefficient in the generator is determined analytically, it is controlled by a field-effect transistor. The differential equations of the generator are derived strictly and consecutively. In the experiment we show, that the proposed scheme demonstrates the cascade of period-doubling bifurcations of transition to chaos.



Николаев Сергей Михайлович – аспирант кафедры радиофизики и нелинейной динамики СГУ. Область научных интересов – нелинейная динамика, хаотические и квазипериодические колебания.
E-mail: sergeyn@chaos.ssu.runnet.ru



Хохлов Артур Вениаминович – профессор, доктор физико-математических наук, руководитель группы радиофизического эксперимента. Научные интересы: радиоэлектроника, солнечная радиофизика и радиоастрономия, радиополариметрия, СВЧ и КВЧ-радиофизика и измерительная техника, системно-схемотехника. Опубликовано более 100 работ, в том числе четыре учебных пособия и 11 авторских свидетельств и патентов. Читает учебные курсы: «Основы радиоэлектроники», «Методы радиоастрономии», «Теория систем и сигналов».



Анищенко Вадим Семенович – родился в 1943 году. Окончил физический факультет СГУ (1966). Защитил диссертацию на звание кандидата физико-математических наук (1970) и доктора физико-математических наук (1986). С 1988 года – заведующий кафедрой радиофизики и нелинейной динамики СГУ. С 1979 и по настоящее время работает в области исследования нелинейной динамики и стохастических процессов в нелинейных системах. Является автором более 300 научных работ, среди которых 7 монографий на русском и английском языках и 4 учебника. Неоднократно читал лекции в ведущих вузах Германии в качестве приглашенного профессора. Член-корреспондент РАЕН, заслуженный деятель науки РФ (1995), Соросовский профессор, лауреат премии Фонда Александра Гумбольдта (1999).
E-mail:wadim@chaos.ssu.runet.ru



ВЛИЯНИЕ УСЛОВИЯ РАВЕНСТВА ДРЕЙФОВОЙ СКОРОСТИ ЗАРЯДОВ И ФАЗОВОЙ СКОРОСТИ ЭЛЕКТРОНОВ НА ШУМЫ В МНОГОРЕЗОНАТОРНОМ МАГНЕТРОНЕ

В.Б. Байбурин, К.В. Каминский

Рассмотрены режимы многорезонаторного магнетрона, соответствующие условиям температурного ограничения эмиссии и ограничению эмиссии пространственным зарядом с пространственно неоднородным магнитным полем. Установлено, что подбором закона изменения магнитного поля в пространстве взаимодействия можно оказывать влияние на уровень шумов в магнетроне.

В работе [1] на основе анализа динамики движения зарядов в многорезонаторном магнетроне показано, что благодаря большей хаотичности траекторий в режиме ограничения эмиссии пространственным зарядом по сравнению с режимом температурного ограничения эмиссии в первом случае наблюдается существенно больший уровень шума (на 30–40 дБ). Представляет интерес оценить влияние условия синхронизма на хаотичность электронных траекторий и, соответственно, на уровень шумов в многорезонаторном магнетроне. В данном случае под синхронизмом понимается близость скорости центров орбит вращения электронов (дрейфовая скорость электронов) к фазовой скорости высокочастотной волны [2]. С этой целью рассмотрим модель цилиндрического магнетрона с меняющимся магнитным полем. Магнитное поле будем задавать так, чтобы удовлетворить указанному условию синхронизма.

Согласно [1], уравнения движения зарядов в многорезонаторном магнетроне в двумерном случае в полярной системе координат (r, φ) можно записать в виде

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dr}{dt} = v_r, \\ \frac{d\varphi}{dt} = v_\varphi, \\ \frac{dv_r}{dt} = rv_\varphi^2 + E_r - \Omega r v_\varphi, \\ \frac{dv_\varphi}{dt} = \frac{1}{r} \Omega v_r + \frac{1}{r^2} E_\varphi - 2\frac{1}{r} v_r v_\varphi, \end{array} \right. \quad (1)$$

где E_r и E_φ – компоненты электрического поля в радиальном и азимутальном направлениях, соответственно; Ω – циклотронная частота.

Для определенности рассмотрим восьмirezонаторный магнетрон, работающий в режиме π -вида колебаний. Тогда, для компонент поля можно записать следующие уравнения:

$$\begin{cases} E_r = E_{\pi} + E_3 + E_0 e^r \cos(\beta r) \sin(\omega t), \\ E_{\varphi} = -E_0 e^r \sin(\beta r) \sin(\omega t), \end{cases} \quad (2)$$

где β – постоянная распространения, ω – частота высокочастотного поля, E_0 – амплитуда высокочастотного поля, E_{π} и E_3 – постоянное электрическое поле в магнетроне и поле пространственного заряда, соответственно. Для E_{π} можно записать

$$E_{\pi}(r) = U_0/r, \quad (3)$$

где $U_0 = U_a/\ln(r_a/r_k)$, U_a – анодное напряжение.

Для поля пространственного заряда можно записать простые аналитические выражения в следующем виде:

$$E_3(r) = \begin{cases} -E_{\pi}(r_k) + 2E_{\pi}(r_k) \frac{(r - r_k)}{r_{\text{вт}} - r_k}, & \text{при } r_k \leq r < r_{\text{вт}}, \\ \frac{U_0}{r - (r_{\text{вт}} - r_k)}, & \text{при } r_{\text{вт}} \leq r \leq r_a, \end{cases} \quad (4)$$

где r_k – радиус катода, r_a – радиус анода, $r_{\text{вт}}$ – радиус верхней границы «втулки» пространственного заряда [1].

Скорость центров орбит вращения электронов, как известно, определяется отношением E/B , где E – напряженность электрического поля (в общем случае является функцией от r), B – индукция магнитного поля. В пренебрежении полем пространственного заряда (режим температурного ограничения эмиссии) напряженность электрического поля меняется по закону (3). В режиме ограничения эмиссии пространственным зарядом электрическое поле можно представить как сумму (3) и (4).

Следовательно, чтобы приближенно выполнить условие синхронизма вдоль радиуса, необходимо ввести изменение магнитного поля (циклотронной частоты Ω) аналогично закону изменения электрического поля. Соответственно в режиме температурного ограничения эмиссии $\Omega(r)$ зададим в виде

$$\Omega(r) = \Omega_0/r, \quad (5)$$

где Ω_0 – некоторая постоянная величина. В режиме ограничения эмиссии пространственным зарядом для $\Omega(r)$ можно записать

$$\Omega(r) = \begin{cases} \frac{\Omega_0}{r} - \frac{\Omega_0}{r_k} + 2\Omega_0 \frac{(r - r_k)}{r_k(r_{\text{вт}} - r_k)}, & \text{при } r_k \leq r < r_{\text{вт}}, \\ \frac{\Omega_0}{r} + \frac{\Omega_0}{r - (r_{\text{вт}} - r_k)}, & \text{при } r_{\text{вт}} \leq r \leq r_a. \end{cases} \quad (6)$$

На рис. 1 и 2 представлены графики зависимости $E(r)$ и $\Omega(r)$ для случаев ограничения эмиссии пространственным зарядом и температурного ограничения эмиссии.

В расчетах значения безразмерных параметров в уравнениях (1)–(3) были заданы соответствующими стационарным номинальным режимам работы многорезонаторного магнетрона. При имитационном моделировании использовались 1000 крупных частиц. Уравнения движения решались методом Рунге–Кутты 4-го порядка точности с шагом интегрирования по времени 0.005 (это соответствует 1/500–1/1000 циклотронного периода) для каждой крупной частицы.

На рис. 3, 4 представлены типичные траектории зарядов с учетом выражений (5) и (6) для режимов температурного ограничения эмиссии и ограничения эмиссии пространственным зарядом, соответственно. Сплошная и пунктирная линии на этих рисунках соответствуют траекториям, выходящим из одной точки на катоде, но имеющим небольшие различия в начальных скоростях (в пределах значений начальных скоростей вылета электронов из катода, не превышающих, как известно, 0.03–0.05 от скоростей бомбардировки анода). Светло-серые линии (пунктирная и сплошная) на

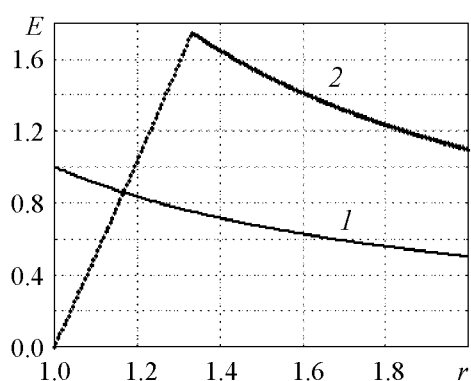


Рис. 1. Распределение электрического поля в пространстве взаимодействия по радиусу: 1 – для режима температурного ограничения эмиссии, 2 – для режима ограничения эмиссии пространственным зарядом

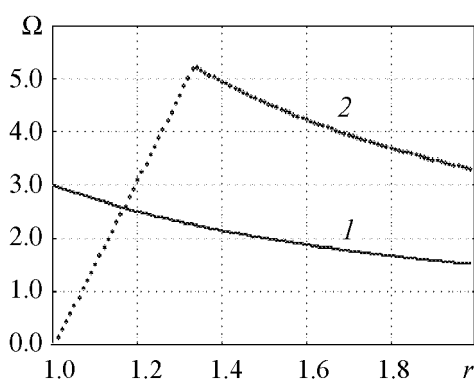


Рис. 2. Распределение циклотронной частоты в пространстве взаимодействия по радиусу: 1 – для режима температурного ограничения эмиссии, 2 – для режима ограничения эмиссии пространственным зарядом

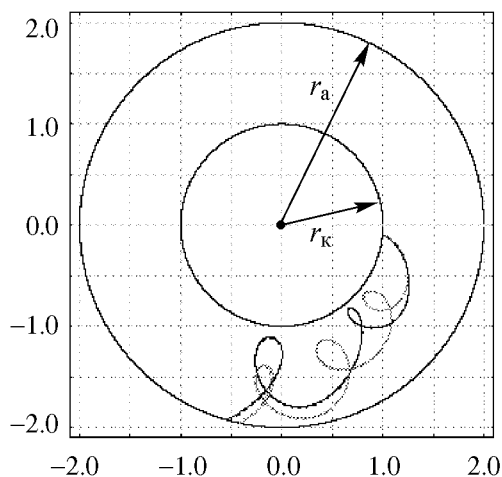


Рис. 3. Траектории зарядов в режиме температурного ограничения эмиссии

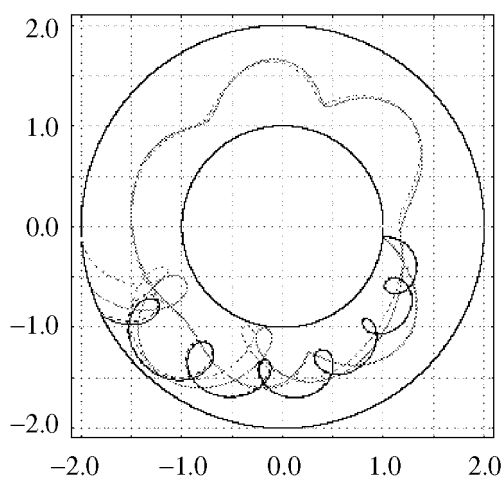


Рис. 4. Траектории зарядов в режиме ограничения эмиссии пространственным зарядом

обоих рисунках соответствуют случаю однородного (не меняющегося вдоль радиуса) постоянного магнитного поля [1]. Для каждого из режимов производился расчет старшего показателя Ляпунова.

Сравнивая траектории зарядов в режиме температурного ограничения эмиссии (рис. 3) для случаев постоянного магнитного поля [1] и меняющегося согласно (5), можно видеть, что длительность пребывания заряда в пространстве взаимодействия достаточно мала, расходимость траекторий также мала.

Проведенные расчеты показали, что в указанном режиме значение старшего показателя Ляпунова составляет 0.014 для рассматриваемого закона изменения магнитного поля. Для постоянного магнитного поля в [1] показатель оказался равным 0.127 при тех же начальных условиях (соответствует траектории, показанной светло-серой линией на рис. 3).

Если сравнить траектории зарядов в режиме ограничения эмиссии пространственным зарядом (рис. 4) для случаев постоянного магнитного поля [1] и меняющегося согласно (6), то можно сделать вывод: длительность пребывания электрона в пространстве взаимодействия значительно возрастает по сравнению со случаем температурного ограничения эмиссии (см. рис. 3). Однако можно отметить, что для меняющегося, согласно (6), поля время пролета заряда в 2–3 раза меньше, чем для аналогичного режима при постоянном поле [1]. Значение старшего показателя Ляпунова составляет 0.277 для рассматриваемого случая меняющегося магнитного поля, для постоянного магнитного поля согласно [1] получено значение 0.232 при тех же начальных условиях (соответствует траектории, показанной светло-серой линией на рис. 4). Как можно видеть, магнитное поле, меняющееся согласно закону (6) и удовлетворяющее приближенно условию синхронизма, приводит к уменьшению времени пребывания электрона в пространстве взаимодействия.

Выводы

В работе [1] предложен метод для оценки уровня шума, основанный на расчете наведенных токов для каждой крупной частицы. Метод позволяет сравнить режимы и оценить разницу в уровне шумов. Проведенные по этой методике расчеты показали, что в режиме температурного ограничения эмиссии и изменения магнитного поля согласно (5) уровень шумов меняется незначительно (в пределах 1–2 дБ) по сравнению со случаем однородного магнитного поля. В случае изменения магнитного поля согласно выражению (6) в режиме ограничения эмиссии пространственным зарядом имеет место уменьшение уровня шумов до 20 дБ по сравнению с моделью с постоянным магнитным полем.

Уменьшение уровня шумов в режиме ограничения эмиссии пространственным зарядом объясняется тем, что, как видно из рис. 4, при близких значениях старших показателей Ляпунова в рассматриваемых случаях расходимость траекторий в момент достижения анода сильно различается. В режиме температурного ограничения эмиссии (см. рис. 3) время пролета зарядов от катода к аноду достаточно мало (2–3 циклотронных периода), и степень хаотичности траекторий оказывается незначительной.

Таким образом, проведенный численный анализ показывает, что подбором вида изменения магнитного поля в пространстве взаимодействия можно оказывать влияние на изменение уровня шумов в магнетроне.

Библиографический список

1. *Байбурин В.Б., Каминский К.В.* Неустойчивость электронных траекторий и шумы в многорезонаторном магнетроне // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2007. Т. 15. № 6.
2. *Трубецков Д.И., Храмов А.Е.* Лекции по сверхвысокочастотной электронике для физиков. В 2 т. Т. 1. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003. 496 с.

Саратовский государственный
технический университет

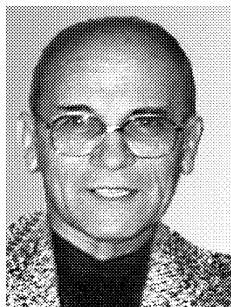
Поступила в редакцию
После доработки

13.02.2008
21.03.2008

SYNCHRONISM INFLUENCE ON NOISE LEVEL IN MULTISLOT MAGNETRON

V.B. Bayburin, K.V. Kaminsky

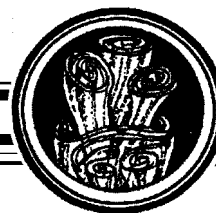
We examine regimes of magnetron corresponding to the temperature limitation conditions and spatial charge emission limitation under spatially inhomogeneous magnetic field. The magnetic field variation law selection proved to exert influence on noise level in devices of magnetron type with a central cathode.



Байбурин Вил Бариевич – родился в Оренбурге (1935). Окончил физический факультет Саратовского государственного университета (1957). Защитил диссертации на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук (СГУ, 1969) и доктора физико-математических наук в ИРЭ РАН (Москва, 1984) в области электроники СВЧ. Заведующий кафедрой Саратовского государственного технического университета, профессор, Заслуженный деятель науки РФ, действительный член РАЕН. Области научных интересов – компьютерное моделирование, электроника СВЧ, сканирующая зондовая микроскопия, применение СВЧ-энергии в технологических процессах. Автор более 300 научных публикаций, в том числе 6 монографий.



Каминский Константин Вячеславович – родился в Саратове (1983). Окончил факультет нелинейных процессов Саратовского государственного университета (2006). Аспирант кафедры программного обеспечения вычислительной техники и автоматизированных систем СГТУ. Области научных интересов – компьютерное моделирование, электроника СВЧ.



ПРИМЕР ЖЕСТКОЙ ТУРБУЛЕНТНОСТИ В СИСТЕМЕ РУСЕЛ И ДЖОКЕРОВ

М.-Г.М. Зульпукаров, Г.Г. Малинецкий, А.В. Подлазов

Рассматривается явление жесткой турбулентности – хаотического режима, отличающегося редкими катастрофическими выбросами на фоне слабых нерегулярных пространственных колебаний. Обсуждается один из примеров упрощенного качественного описания жесткой турбулентности – переключающаяся перемежаемость. Приводится пример решения обратной задачи: на основе временного ряда, порождаемого простой системой, работающей в режиме переключающейся перемежаемости (отображение Ершова), строится детерминировано-вероятностная система (система русел и джокеров), порождающая ряд с аналогичными характеристиками.

Введение

В настоящее время интенсивно ведутся исследования по применению методов нелинейной динамики в области управления риском. Возникающие при этом задачи зачастую трудно формализуемы, отличаются сложностью рассматриваемых систем и отсутствием полных и точных данных об их структуре и поведении. Эти особенности определяют изменение подхода к моделированию. От модели требуется не столько адекватность в традиционном смысле (в силу указанных причин, как правило, недостижимая), сколько воспроизведение качественных особенностей поведения наблюдаемой системы. При этом модель должна быть как можно более простой и наглядной.

Рассмотрим один из классов задач управления риском – разработку методов моделирования редких катастрофических событий. Примером таких событий являются аварии на океанских буровых платформах – сложных, масштабных и дорогостоящих сооружениях. Предполагается, что причиной подобных аварий могут быть нелинейные явления на поверхности атмосфера – океан.

Одно из центральных мест в области моделирования процессов на границе водной и воздушной сред занимает двумерное обобщение уравнения Курамото–Цузуки (Гинзбурга–Ландау) [1, 2]. При определенных значениях параметров в системе наблюдается так называемая *жесткая турбулентность* – хаотический режим с редкими сильными выбросами (пиками), хорошо подходящий для формализованного описания некоторых катастрофических событий.

Для исследования подобных выбросов используется модификация двумерного уравнения Гинзбурга–Ландау – одномерное *зависящее от времени уравнение Гинзбурга–Ландау с нелинейностью 5 порядка*. Уравнение содержит малый параметр ε , характеризующий интенсивность диссипации. В пределе при $\varepsilon \rightarrow 0$ данное уравнение переходит в *нелинейное уравнение Шредингера*. Известные на сегодняшний день уравнения, описывающие рост и спад выброса, получены путем исследования последнего [3].

Остается открытым вопрос описания фоновой (межпиковой) динамики и перехода от фоновой динамики к пиковой. Для этого было предложено использование более простых систем, например, систем, демонстрирующих так называемую *переключающуюся перемежаемость* – хаотический режим с наличием устойчивого инвариантного многообразия, со временем теряющего устойчивость. Для получения эффекта жесткой турбулентности подобную систему достаточно дополнить механизмом возвращения устойчивости инвариантному многообразию. Примером такой системы является *отображение Ершова* [4].

Далее обсуждается вопрос моделирования жесткой турбулентности в условиях неполноты информации о наблюдаемой системе. В качестве последней выбрана система Ершова; причем, по условиям задачи, для наблюдения доступна только одна из трех переменных.

Для воссоздания наблюдаемого поведения предлагается использовать *метод русел и джокеров*, основанный на конструировании модели из «разнородных» компонент – детерминированных и стохастических, непрерывных и дискретных, и т.д. [3–7]. Использование метода оправданно, когда фазовое пространство динамической системы неоднородно, и выделяются области сравнительно простого поведения (*русла*). В пределах русла система может быть описана простой динамической моделью. Там, где это не представляется возможным, для описания сложного поведения используется *джокер* – некоторый простейший алгоритм, как правило, вероятностный.

В системе Ершова рост и спад выброса представляют собой пример простого поведения, и им сопоставляются русла. В области устойчивого многообразия система демонстрирует сложное (хаотическое) поведение, для моделирования которого используется джокер.

Главное требование, предъявляемое к разрабатываемой модели, – соответствие основных характеристик временных рядов, порождаемых ею и исходной моделью. В качестве таких характеристик были выбраны распределения величины выбросов и длительности межпиковых интервалов.

1. Уравнение Курамото–Цузуки (Гинзбурга–Ландау) и жесткая турбулентность

Уравнение Курамото–Цузуки (иначе называемое уравнением Гинзбурга–Ландау) представляет собой одну из основных математических моделей, занимающих особое место в нелинейной динамике [1–3]. Данное уравнение демонстрирует большое разнообразие решений, включая стационарные, периодические и хаотические, и используется, в частности, для описания явлений, имеющих место в нелиней-

ных средах, – перехода к турбулентным режимам в гидродинамике, ионно-звуковых волн в плазме, и т.д. Нас интересует его двумерное обобщение, используемое при моделировании процессов, происходящих на границе сред: ветровых волн на воде, морфогенеза, протекающих на поверхности колебательных химических реакций [8].

Двумерное обобщение уравнения Курамото–Цузуки выглядит следующим образом:

$$W_t = (1 + ic_0) W + (1 + ic_1) \Delta W - (1 + ic_2) |W|^2 W. \quad (1)$$

Здесь W – некоторая комплекснозначная функция действительных переменных; c_0 , c_1 , c_2 – параметры (действительные постоянные). При определенном соотношении значений параметров в системе (1) можно наблюдать *жесткую турбулентность* (в англоязычных источниках используется термин *hard/strong turbulence*) – хаотический режим с редкими и исключительно сильными выбросами (пиками жесткой турбулентности). Для исследования данного режима используется специальная модификация уравнения Курамото–Цузуки – одномерная, но с более сильной нелинейностью

$$W_t = \varepsilon W + (i + \varepsilon) W_{xx} + (i - \varepsilon) |W|^4 W. \quad (2)$$

Данное уравнение известно под названием *зависящего от времени уравнения Гинзбурга–Ландау с нелинейностью 5 порядка (quintic time-dependent Ginzburg–Landau equation, QTDGL)*. При $\varepsilon = 0$ оно переходит в *нелинейное уравнение Шредингера*

$$W_t = iW_{xx} + i|W|^4 W. \quad (3)$$

Важное свойство последнего – наличие ряда законов сохранения, существенных для описания жесткой турбулентности. Это закон сохранения:

«массы»

$$M \equiv \int |W|^2 dx,$$

«импульса»

$$P \equiv \frac{1}{2i} \int (W_x^* W - W^* W_x) dx$$

и «энергии»

$$E \equiv \int \left(|W_x|^2 - \frac{1}{3} |W|^6 \right) dx.$$

На сегодняшний день также известны следующие свойства решений уравнения (2). Во-первых, при малых ε решение уравнения (3) представляет собой хорошую аппроксимацию профиля $W(x, t)$ в области роста больших пиков. Во-вторых, распределение максимумов пиков h описывается (в промежуточном интервале масштабов) степенной асимптотикой $p(h) \sim h^{-\alpha}$, где α – константа, $\alpha \approx 7 \div 8$. В области малых h имеет место иное распределение. Также максимумы пиков ограничены сверху, что, предположительно, объясняется воздействием множителя ε в уравнении (2).

На практике, как правило, из всех характеристик распределения наибольший интерес представляют моменты первого и второго порядка. Здесь существенна интерпретация W . Если имеют смысл величины $|W|$ и $|W|^2$, то аномально большие

пики не оказывают принципиального влияния на среднее и дисперсию, то есть распределение $p(h)$ можно считать эффективно ограниченным. Если же рассматривается величина $|W|^4$, то имеет место картина, характерная для некоторых разновидностей катастрофических событий, когда редкие аномальные выбросы оказывают существенное влияние на среднее и обращают в бесконечность дисперсию.

В численных экспериментах жесткую турбулентность можно наблюдать, решая уравнение (2) в области длины L с периодическими граничными условиями, с параметром ϵ в интервале $0.01 \div 0.0001$. Поведение системы зависит от размера области: при $L < 5$ пики жесткой турбулентности отсутствуют, в областях промежуточной длины ($10 \lesssim L \lesssim 80$) наблюдаются возникновения одиночного пика, в более длинных областях возможно возникновение нескольких пиков одновременно. Внешне жизненный цикл одиночного пика жесткой турбулентности выглядит следующим образом (здесь и далее предполагается рассмотрение в области промежуточной длины).

- Вначале в системе наблюдаются медленные нерегулярные пространственно-временные колебания. В каждый момент времени график $W(x)$ выглядит гладким, причем $|W| < 1$.

- Затем в какой-то момент времени начинается рост пика. Скорость роста значительно превышает характерную величину W_t вне области пика. Ширина пика при этом сокращается.

- Далее, после того, как пик достигает максимальной величины (обратно зависящей от ϵ), начинается его распад. Вначале фазы распада величина пика уменьшается, причем уменьшение происходит быстрее предшествующего роста. Ширина пика при этом увеличивается, а его форма сглаживается.

- Распад пика продолжается его превращением в быстро осциллирующий волновой пакет с колоколообразной огибающей. Высота пика при этом имеет величину порядка единиц.

- После этого, волновой пакет распространяется в ширину до заполнения всей области рассмотрения. Амплитуда волн продолжает уменьшаться, а высшие гармоники затухают.

- В конце концов, в области рассмотрения вновь наблюдаются медленные колебания. Характерное время сглаживания профиля имеет порядок ϵ^{-1} . Новый пик может образоваться не прежде, чем происходит сглаживание. Характерный вид профилей W в различных фазах пика жесткой турбулентности показан, в частности, в [9].

В ходе эволюции пика масса, импульс и энергия ведут себя следующим образом. В начале выброса происходит всплеск энергии – практически мгновенный рост на несколько порядков. Затем в ходе распада пика и далее энергия медленно и монотонно убывает. Новые пики не возникают, пока энергия не достигнет величины порядка 1.

Масса после возникновения пика начинает убывать, пока не перестанет выполняться условие $E > M$. После этого начинается рост. В целом масса меняется значительно слабее, чем энергия: минимальное и максимальное значения различаются менее чем на порядок.

Импульс практически не отражает развитие пика: в расчетах, где его начальное значение близко к нулю, его дальнейшее изменение незначительно.

В настоящее время не известны простые способы точного предсказания момента и координаты начала следующего пика, а также его высоты. В этой связи представляется естественной попытка дополнить динамическое описание системы статистическим, возможно, с привлечением более простых моделей жесткой турбулентности, чем уравнение (2).

2. Переключающаяся перемежаемость и отображение Ершова

Один из вариантов упрощенного (качественного) описания жесткой турбулентности основан на использовании систем, демонстрирующих так называемую *переключающуюся перемежаемость* (*on-off intermittency*). Приведенный термин используется для обозначения разновидности динамического режима, в котором хаотическое движение чередуется с резкими сильными выбросами. В данном случае такое поведение системы обусловлено наличием устойчивого инвариантного многообразия, теряющего устойчивость в результате бифуркации. Кроме того, система дополнена механизмом возвращения устойчивости инвариантному многообразию. Отметим следующее: предполагается, что хаотическое движение длится достаточно долго, чтобы точное определение основных характеристик выброса (момент начала, длительность, высота, направление) было невозможно.

Примером системы, в которой можно наблюдать переключающуюся перемежаемость, является *отображение Ершова* [3, 4]. Данная система строилась с учетом следующих требований.

1. Наличие одной медленной переменной, играющей роль параметра в отображении для быстрых переменных. Данная переменная, по аналогии с уравнением (2), называется «энергией» и обозначается E , так как предполагается, что именно энергия среди всех интегралов движения уравнения (2) играет наиболее существенную роль.

2. Наличие быстрых переменных, описывающих соответствующее межпиковой фазе движение на хаотическом аттракторе.

3. Изменение свойств аттрактора в зависимости от значения медленной переменной. При переходе медленной переменной некоторого критического значения должен происходить *кризис аттрактора* – появление неустойчивой области, так называемой «дырки», через которую изображающая точка покидает аттрактор, что соответствует росту пика. Здесь и далее имеется в виду изображающая точка в фазовом пространстве быстрых переменных.

4. Прекращение роста пика и возвращение изображающей точки на аттрактор (аттрактор вновь становится глобально притягивающим). Существует два очевидных способа определения момента возвращения аттрактору свойства притяжения. Первый, *параметрический*, предполагает зависимость от значения энергии (рост прекращается при превышении энергией некоторого порогового значения). Вторым, *динамический*, предполагает зависимость от значений быстрых переменных (рост прекращается при попадании изображающей точки в заданную область фазового пространства). Динамический способ считается в большей степени соответствующим сути поведения системы, заданной уравнением (2). Здесь следует отметить, что для простоты было бы естественно ограничиться единственной быстрой переменной. Однако в сочетании с динамическим способом ограничения роста пика это

привело бы к колебаниям вокруг порогового значения (при превышении порогового значения рост прекращается, начинается спад, после обратного перехода через порог вновь начинается рост и так далее). Поэтому необходимы наличие как минимум двух быстрых переменных и несколько более сложный механизм остановки роста пика. Например, следующий: изображающая точка, приближается к аттрактору по первой координате и продолжает удаляться по второй, пока не произойдет возврат по первой координате в область аттрактора. После этого начинается возврат по второй координате.

5. Максимально возможная простота функции отображения быстрых переменных. Целесообразно использование кусочно-линейной функции.

Система строится следующим образом. Есть две быстрые переменные, x и y , и соответствующие им два связанных одномерных отображения с параметром E . Когда E выше порогового значения $E_{кр}$, имеется хаотический аттрактор с некоторой конечной областью притяжения. При уменьшении E до порогового значения и далее происходит кризис аттрактора – границы аттрактора и его области притяжения соприкасаются, после чего появляется «дырка». При попадании в «дырку» изображающей точки начинается уход последней на бесконечность. Затем при превышении переменной y некоторого порогового значения $y_{кр}$ начинается возвращение на аттрактор по координате x . Когда изображающая точка достигает аттрактора (и более не покидает его) по координате x , начинается возвращение по координате y .

Далее энергия E рассматривается не как параметр, но как медленная переменная. Пока изображающая точка движется в пределах аттрактора, E медленно убывает, сходясь к некоторой неподвижной точке $E_* < E_{кр}$. При этом, когда условие $E > E_{кр}$ нарушается, происходит кризис аттрактора, изображающая точка начинает уходить на бесконечность, и вместе с этим начинает расти E . Как только условие $E > E_{кр}$ вновь начинает выполняться, «дырка» закрывается, и аттрактор становится локально притягивающим (росту значений быстрых переменных это не препятствует). После остановки роста пика по координате x рост энергии также прекращается, и она вновь начинает медленно убывать.

Соотношение быстрого и медленного масштаба времени определяется параметром ϵ , задающим скорость изменения энергии. Стоит отметить, что при $\epsilon \rightarrow 0$ рост пика начинается при значении энергии, очень мало отличающемся от критического ($E \rightarrow E_{кр} - 0$). Поскольку «дырка» возникает при $E = E_{кр}$ и увеличивается в размерах по мере уменьшения E , постольку в данном случае размеры «дырки» оказываются малы. То есть разброс начальных значений при росте пика мал и для энергии, и для быстрых переменных. Это не соответствует реально наблюдаемому поведению динамической системы, заданной уравнением (2).

Данная проблема решается путем некоторого усложнения механизма образования пика. При переходе энергии в область $E < E_{кр}$ открывается «дырка» и начинается рост только по одной координате x . «Дырка» по y открывается только при достижении x некоторого порогового значения $x_{кр}$. Параметры отображений подбираются таким образом, чтобы переменная x достигала порогового значения за количество итераций, достаточное для образования разброса по y порядка размера аттрактора. Изображающая точка попадает в область открывшейся «дырки» по y спустя некоторое время T_1 . Разброс по T_1 тем больше, чем больше разброс по y к моменту открытия «дырки», и чем меньше размер «дырки».

Время, которое проходит до момента достижения порогового значения по y , обозначается T_2 . Таким образом, после достижения $x_{кр}$ рост по x продолжается в течение времени $T_1 + T_2$. Если размер «дырки» по y мал, то разброс по T_2 также мал, и разброс максимальных значений по x определяется разбросом по T_1 .

Окончательно, с учетом изложенных соображений, записывается трехмерное отображение следующего вида:

$$\begin{cases} x_{n+1} = f(x_n, k_{x,n}, a_n) + \gamma \frac{y_n}{1 + |y_n|}, & k_x = \begin{cases} k_x^+ > 1, y \geq y_{кр}, \\ k_x^- < 1, y < y_{кр}, \end{cases} \\ y_{n+1} = f(y_n, k_{y,n}, a_0) - \gamma_0 \frac{\varepsilon x_n}{1 + \varepsilon |x_n|}, & k_y = \begin{cases} k_y^+ > 1, x \leq x_{кр}, \\ k_y^- < 1, x > x_{кр}, \end{cases} \\ E_{n+1} = E_n - \varepsilon (E_n + x_n), \end{cases} \quad (4)$$

$$a(E) = a_\infty \frac{E}{E + E_{кр} \left(\frac{a_\infty}{a_{кр}} - 1 \right)}.$$

Здесь величины γ и γ_0 – параметры связи одномерных отображений быстрых переменных, а f – кусочно-линейная функция, определяющая характер этих отображений,

$$f(x, k, a) = \begin{cases} \frac{2}{a-1}x + \frac{1+a}{1-a}, & x \geq a, \\ \frac{3}{2a+2}x + \frac{2-a}{2a+2}, & -1 \leq x < a, \\ kx + k - \frac{1}{2}, & x < -1. \end{cases} \quad (5)$$

График этой функции показан на рис. 1, а. Можно видеть, что одномерное отображение, заданное этой функцией, всегда имеет неустойчивую неподвижную точку. При $k > 1$ появляется еще одна неустойчивая неподвижная точка, обозначаемая x_* . Эта точка представляет собой границу области притяжения аттрактора данного отображения.

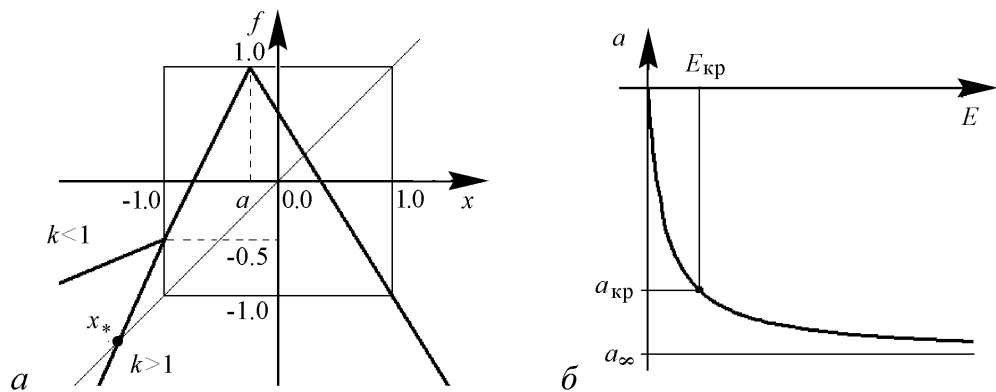


Рис. 1. Графики функций, входящих в отображение Ершова: а – функция f , входящая в одномерные отображения быстрых переменных, x_* – неподвижная точка; б – зависимость параметра a функции f от энергии

Функция $a(E)$ определяет влияние энергии на параметр a функции f и, как следствие, на геометрию аттрактора и его области притяжения, ограничивая это влияние в области больших значений E . Величины $a_{кр}$, a_{∞} – параметры этой функции; ее график показан на рис. 1, б.

Динамика системы (4) по построению подразделяется на следующие фазы. В межпиковой фазе происходит хаотическое движение на аттракторе; значения обеих быстрых переменных имеют порядок 1. Энергия медленно убывает, соответственно значение параметра a в отображении для x увеличивается и, следовательно, наклон правой ветви f возрастает.

Фаза выброса по координате x начинается, когда энергия, а значит, и наклон правой ветви f достигает порогового значения. В результате этого значение x_n может оказаться в области $x < x_*$, что означает выход изображающей точки из области притяжения аттрактора и экспоненциальный рост: $x_n \sim (k_x^+)^n$. Энергия быстро растет вместе с ростом $|x|$, $E_n \sim \varepsilon (k_x^+)^n$. В это же время динамика по координате y приближенно описывается отображением

$$y_{n+1} = f(y_n, k_y^+, a_0),$$

пока выполняется условие $|x_n| \ll 1/\varepsilon$. Аттрактор этого отображения – локально притягивающий, уход с него на бесконечность невозможен, несмотря на то, что левая ветвь f стала растягивающей, когда $|x_n|$ превысило $|x_{кр}|$.

Фаза выброса по y наступает, когда координата x изображающей точки достигает величин порядка $1/\varepsilon$. По мере роста x , появляется необходимость учета добавочного члена в отображении, описывающем динамику по координате y ,

$$y_{n+1} = f(y_n, k_y^+, a_0) + \Gamma_n, \quad \Gamma_n \equiv \gamma_0 \frac{|\varepsilon x_n|}{1 + |\varepsilon x_n|}.$$

Параметры подобраны таким образом, что отображение

$$y_{n+1} = f(y_n, k_y^+, a_0) + \frac{\gamma_0}{2},$$

соответствующее $x_n = 1/\varepsilon$, уже не имеет аттрактора. «Дырка» в аттракторе возникает при достижении добавочным членом Γ_n некоторого критического значения

$$\Gamma = \Gamma_{кр} \equiv \frac{1/2}{(k_y^+ - 1) \frac{1 + a_0}{1 - a_0} - 1}.$$

Ее размеры невелики, так что изображающая точка попадает в область «дырки» не сразу, но спустя некоторое количество итераций. Все это время добавочный член и, как следствие, геометрия «дырки» продолжают меняться, так что момент начала экспоненциального роста $y_n \sim (k_y^+)^n$ и его начальные условия имеют некоторый разброс.

Фаза спада по x наступает, как только $|y|$ превышает критическое значение $|y_{кр}|$. Левая ветвь f в отображении по x становится сжимающей, вследствие чего $|x_n|$ начинает убывать: $x_n \sim (k_x^-)^n$. Параметры подбираются таким образом, что $|x_n|$ убывает быстрее, чем рос до того. Рост энергии сменяется медленным уменьшением: $E_n \sim (1 - \varepsilon)^n$. Рост по y при этом продолжается.

Фаза распада пика начинается при переходе уменьшающегося $|x_n|$ через пороговое значение $|x_{кр}|$. Левая ветвь f в отображении по y становится сжимающей, рост

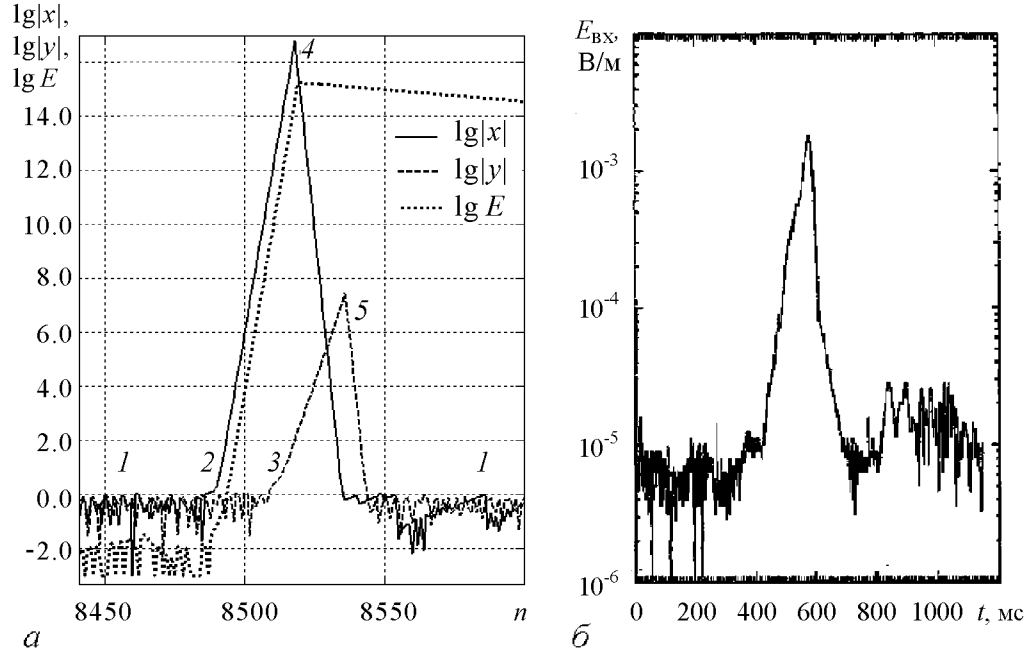


Рис. 2. Жесткая турбулентность в отображении Ершова и в эксперименте: *a* – графики E , x , y в полулогарифмическом масштабе для абсолютных значений. Цифрами обозначены фазы: 1 – межпиковая, 2 – выброс по x , 3 – выброс по y , 4 – спад по x , 5 – распад пика. *б* – экспериментальный график зависимости напряженности электрического поля от времени для ленгмюровского солитона огибающей, связанного с локальным радиовсплеском III типа [10]

$|y_n|$ сменяется еще более быстрым уменьшением: $y_n \sim (k_y^-)^n$. Пока значение $|y_n|$ превышает пороговое $|y_{кр}|$, уменьшение $|x|$ продолжается. Параметры должны быть подобраны так, чтобы изображающая точка успела войти по координате x в область аттрактора к моменту перехода y_n через порог, когда правая ветвь f в отображении по x станет растягивающей. Уменьшаясь по модулю, y_n входит в область аттрактора. Система вновь вступает в межпиковую фазу.

Общий вид происходящего в системе показан на рис. 2, *a*. На рис. 2, *б* для сравнения приведен пик жесткой турбулентности, зарегистрированный в описанном в [10] эксперименте по измерению напряженности электрического поля при локальном солнечном радиовсплеске III типа. Показанное соответствует следующим приведенным в [3] значениям параметров:

$$\begin{aligned} \varepsilon = 0.02, \quad a_0 = 0.5, \quad a_{кр} = -0.2668, \quad a_\infty = -0.8, \quad E_{кр} = 0.3, \quad \gamma = 0.122, \\ \gamma_0 = 0.5, \quad k_x^+ = 4, \quad k_x^- = 0.1, \quad k_y^+ = 2, \quad k_y^- = 0.1, \quad x_{кр} = -\frac{4}{3}, \quad y_{кр} = -100. \end{aligned} \quad (6)$$

Данный набор значений параметров используется и во всех дальнейших расчетах.

Для системы (4) аналитически (в предположении $\varepsilon \rightarrow 0$) показано, что распределение максимумов¹ пиков по координатам x и y – степенное

$$\rho_{x_{\max}}(x) = \begin{cases} a_x (-x)^{-b_x}, & x \leq B_x, \\ 0, & x > B_x, \end{cases} \quad (7)$$

¹Здесь и далее слова «максимум пика» используются для обозначения максимума по абсолютной величине.

а распределение длительностей межпиковых интервалов – экспоненциальное

$$\rho_N(n) = \begin{cases} a_n e^{-b_n n}, & n \geq B_n, \\ 0, & n < B_n \end{cases} \quad (8)$$

(здесь $a_x, b_x, B_x, a_n, b_n, B_n$ – некоторые константы). В дальнейшем, будем рассматривать эти распределения как основные характеристики режима жесткой турбулентности.

3. Реконструкция отображения Ершова: случай одной переменной

Итак, пусть имеется система (4), работающая в режиме жесткой турбулентности. Пусть система рассматривается как «черный ящик», и из трех порождаемых ею временных рядов, E_n, x_n и y_n , для наблюдения доступен только один – x_n . Наша задача заключается в построении простой (модельной) системы, порождающей временной ряд с аналогичными характеристиками.

Заметим, что теоретически, в условиях поставленной задачи, можно воспользоваться теоремой Такенса для восстановления фазового портрета по одномерной наблюдаемой [3]. Однако из-за наличия двух различных масштабов времени (наблюдаются резкие и короткие пики и длинные межпиковые интервалы, в пределах которых энергия E меняется медленно по сравнению с переменными x и y) при таком подходе потребовалась бы выборка неприемлемого объема. Таким образом, на практике необходимо использование какого-либо упрощения.

Поскольку информация наблюдателя об исходной системе неполна, будем учитывать как динамические, так и статистические характеристики временного ряда. Следовательно, при построении модельной системы можно совместно использовать (хотя бы, для простоты) динамические и вероятностные компоненты, то есть задействовать метод русел и джокеров. Иными словами, предполагается, что данный метод может упростить построение модельной системы, и в то же время дать возможность использовать максимум доступной информации о наблюдаемой системе. В этом состоит отличие от распространенной практики моделирования, предписывающей игнорировать как можно большую часть доступной информации, с целью упрощения модели.

Первичный анализ информации о наблюдаемой системе. Обсудим, какие характеристики временного ряда x_n могли бы быть рассмотрены при построении модели. Главная особенность временного ряда – наличие редких сильных выбросов, чередующихся с длительными межпиковыми интервалами. Следовательно, среди интересующих нас характеристик временного ряда можно выделить характеристики выбросов (распределение максимумов пиков, их продолжительность, динамика роста и спада) и характеристики межпиковых интервалов (продолжительность, межпиковая динамика). Также нас может заинтересовать процесс перехода от межпиковой (фоновой) динамики к росту пика и обратно – от спада к фоновой динамике.

Прежде всего нам понадобится правило, позволяющее отличить значения x_n , относящиеся к фазе выброса, от значений x_n , относящихся к межпиковым интервалам. На рис. 2 можно видеть, что первые превышают вторые на много порядков

величины. В то же время, длительность выброса крайне мала по сравнению с длительностью межпикового интервала. Отсюда следует, что медиана x_m временного ряда $\{|x_n|\}$ даст оценку характерной величины переменной состояния в межпиковой фазе. Для выделения пиковых значений x_n может использоваться *пороговое значение* – некоторая величина $x_{\text{п}} > 0$, превышающая медиану на один или несколько порядков. *Надпороговые значения* x_n , то есть, такие, что $|x_n| > x_{\text{п}}$, считаются относящимися к фазе выброса.

Согласно (7), эмпирическая функция плотности распределения максимумов пиков в логарифмических координатах $(\ln(-x), \ln \rho)$ должна (в идеальном случае) представлять собой прямую. Оценив свободный член c_0 и угловой коэффициент c_1 соответствующей линейной функции, например, методом наименьших квадратов, получим оценки параметров a_x и b_x

$$\begin{aligned}\hat{a}_x &= e^{c_0}, \\ \hat{b}_x &= -c_1.\end{aligned}\tag{9}$$

Здесь и далее надстрочный знак « $\hat{}$ » используется для обозначения оценки.

Чтобы оценить B_x , воспользуемся условием нормировки

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \rho_{x_{\text{max}}}(x) dx = \frac{a_x}{b_x - 1} (-x)^{-b_x+1} \Big|_{-\infty}^{B_x} = \frac{a_x}{b_x - 1} (-B_x)^{-b_x+1} = 1$$

(предполагается выполнение условия сходимости интеграла $b_x > 1$). Решив уравнение относительно B_x и подставив оценки \hat{a}_x и \hat{b}_x , получим

$$\hat{B}_x = - \left(\frac{\hat{a}_x}{\hat{b}_x - 1} \right)^{\frac{1}{\hat{b}_x - 1}}.\tag{10}$$

Точно так же, согласно (8), построив эмпирическую функцию плотности распределения длительностей межпиковых интервалов в полулогарифмических координатах $(n, \ln \rho)$ и воспользовавшись формулами, полностью аналогичными (9), получим оценки \hat{a}_n и \hat{b}_n . Решив уравнение нормировки

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \rho_N(n) dn = \frac{a_n}{-b_n} e^{-b_n n} \Big|_{B_n}^{+\infty} = \frac{a_n}{b_n} e^{-b_n B_n} = 1$$

относительно B_n и подставив \hat{a}_n и \hat{b}_n , получим оценку

$$\hat{B}_n = \frac{1}{\hat{b}_n} \ln \frac{\hat{a}_n}{\hat{b}_n}.\tag{11}$$

Рост пика, согласно (4) и (5), в области больших $|x|$ описывается отображением

$$x_{n+1} = k_x^+ x_n + k_x^+ - \frac{1}{2}.\tag{12}$$

Здесь мы пренебрегли членом, содержащим y_n . В силу его сравнительной малости при заданном наборе значений параметров (6), а также ненаблюдаемости переменной y по условиям задачи, воздействие данного члена можно считать слабой флуктуацией. Отображение (12) можно переписать в виде

$$(x_n - x_*) = (x_0 - x_*) (k_x^+)^n, \quad (13)$$

где x_* – его неподвижная точка. При отсутствии флуктуаций эта точка ограничивает область роста справа. Таким образом, точки на графике в полулогарифмических координатах $(n, \ln(-x_n))$, относящиеся к росту пика, в области больших $|x|$ (порядка максимума пика) должны аппроксимироваться некоторой прямой. Имеем оценку \hat{k}_x^+ для коэффициента k_x^+

$$\hat{k}_x^+ = e^{c_1}, \quad (14)$$

где C_1 – угловой коэффициент данной прямой.

Спад пика в области больших $|x|$ описывается уравнением

$$x_n \sim (k_x^-)^n, \quad x_{n+1} = k_x^- x_n \quad (15)$$

(начальное значение для данного отображения – точка максимума пика).

Оценку \hat{x}_* неподвижной точки x_* несложно вычислить, зная оценки свободного члена c_0 и углового коэффициента c_1 линейной функции (12)

$$\hat{x}_* = \frac{c_0}{1 - c_1}. \quad (16)$$

Оценки c_0 и c_1 можно получить, аппроксимировав прямой точки, относящиеся к росту пика, на графике (x_n, x_{n+1}) . Данные оценки будут весьма неточными по ряду причин. Во-первых, в силу экспоненциального роста x_n , для построения аппроксимирующей прямой можно использовать очень небольшое количество соседних точек: 3 или 4 точки для набора значений параметров (6). Некоторого повышения точности можно добиться, накапливая точки, относящиеся к разным пикам, а также заменив в формуле (16) c_1 более точной оценкой \hat{k}_x^+ . Во-вторых, оценка по точкам $|x| \sim |x_*|$ неточна, так как в этой области возрастает влияние слабых флуктуаций в (12). В-третьих, оценка по точкам $|x| \gg |x_*|$ неточна, поскольку погрешность оценки свободного члена линейной функции нарастает по мере удаления от начала координат.

С другой стороны, нас интересует не столько получение точной оценки x_* , сколько воспроизведение динамики роста пика. Поэтому, оставим за собой право определять \hat{x}_* , исходя из соображений простоты построения модели.

Процедура получения оценки \hat{k}_x^- для коэффициента k_x^- полностью аналогична описанной выше. Роль неподвижной точки сжимающего отображения не представляется существенной.

Фоновая динамика внешне выглядит как случайное отображение некоторой ограниченной области на себя, при выходе из этой области начинается рост пика. Будем считать эту область отрезком $[D_{x,\min}, D_{x,\max}]$. Поскольку пик растет в отрицательном направлении, величину $D_{x,\max}$ можно оценить как максимальное значение x_n за время наблюдения

$$\hat{D}_{x,\max} = \max_{\{n\}} \{x_n\}. \quad (17)$$

Величину $D_{x,\min}$ можно оценить как минимальное значение x_n в промежутке между какими-либо двумя соседними пиками

$$\hat{D}_{x,\min} = \min \{x_n | N_1 < n < N_2\}, \quad (18)$$

где N_1 – момент окончания спада первого пика, а N_2 – момент начала роста второго.

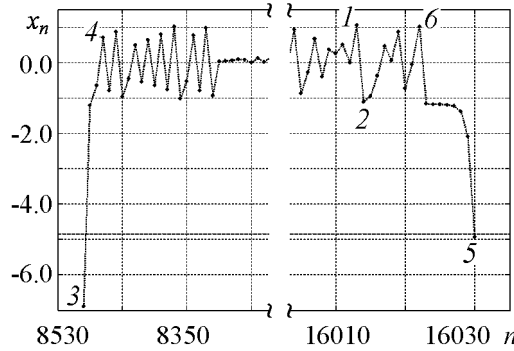


Рис. 3. Фоновая динамика, оценки границ области фоновой динамики. График $x_n(n)$ в межпиковой фазе. Цифрами обозначены точки: 1 – точка с ординатой $x = \hat{D}_{x,\max}$ согласно (17), 2 – точка с ординатой $x = \hat{D}_{x,\min}$ согласно (18), 3 – точка с абсциссой $n = N_0$, 4 – точка с абсциссой $n = N_1$ согласно (19), 5 – точка с абсциссой $n = N_3$, 6 – точка с абсциссой $n = N_2$ согласно (20). Пунктирной линией обозначен порог $|x| = x_n$

Фоновая динамика и процедура получения оценок $\hat{D}_{x,\min}$ и $\hat{D}_{x,\max}$ показана на рис. 3. Для повышения точности оценки $D_{x,\min}$ можно повторить описанную процедуру для нескольких межпиковых интервалов.

Предварительные соображения по схеме русел и джокеров. Итак, анализируя временной ряд x_n , можно выделить:

- фазу фоновой динамики,
- событие перехода от фоновой динамики к росту пика,
- фазу роста,
- событие остановки роста (достижения максимума пика),
- фазу спада,
- событие перехода от спада к фоновой динамике.

Динамика в фазах роста и спада описывается простыми уравнениями (13) и (15). Исходя из этого, имеет смысл назначить для моделирования роста и спада два русла, C_1 и C_2 , соответственно.

Фоновая динамика хаотична, а момент перехода от фоновой динамики к росту пика – случайная величина (переменная E , инициирующая переход, не наблюдается). Следовательно, имеет смысл использовать джокер для их описания. Обозначим данный джокер J_1 . Как будет видно далее, этот же джокер можно использовать и для описания события перехода от спада к фоновой динамике.

Для определения N_1 и N_2 можно поступить следующим образом. Рассматривая поведение системы в области больших $|x|$ ($|x| \gg x_n$), нетрудно выделить некоторый момент N_0 , относящийся к спаду первого пика. Считая, что в процессе спада значение x_n непрерывно возрастает, N_1 можно оценить как первый, начиная с N_0 , момент нарушения этой закономерности

$$\begin{aligned} x_n < x_{n+1}, n = N_0, N_0 + 1, \dots, \\ x_{N_1} \geq x_{N_1+1}. \end{aligned} \quad (19)$$

Аналогично, выделяется некоторый момент N_3 , относящийся к росту второго пика, и определяется N_2

$$\begin{aligned} x_{n-1} > x_n, n = N_3, N_3 - 1, \dots, \\ x_{N_2-1} \leq x_{N_2}. \end{aligned} \quad (20)$$

Достижение максимума пика – также случайное событие (смена динамики не следует из уравнения роста; инициирующая ее переменная y не наблюдается). Для его описания используем джокер, обозначенный J_2 .

Попутно заметим, что алгоритмы моделирования случайных событий должны быть рассчитаны на использование стандартного датчика случайных чисел, показания которого считаются случайной величиной, равномерно распределенной на отрезке $[0, 1]$. В дальнейших выкладках мы будем обозначать ее как Z , а соответствующую функцию плотности распределения как

$$\rho_Z(z) = \begin{cases} 1, & z \in [0, 1], \\ 0, & z \notin [0, 1]. \end{cases} \quad (21)$$

Русла C_1 и C_2 . Динамика на русле C_1 задается уравнением роста пика (13). Из этого уравнения следует, что рост пика не может начинаться с точки $x = x_*$. Следовательно, имеет смысл ограничить область русла неравенством

$$x \leq A_x < x_*.$$

В некоторой окрестности x_* влияние слабых флуктуаций является определяющим, и динамика хаотична. Область роста пика примыкает к области фоновой динамики слева, и с точки зрения наблюдателя, данная окрестность x_* относится к области фоновой динамики. Фактически, точка $x = A_x$ ограничивает окрестность слева, поэтому можно считать, что

$$A_x = D_{x,\min}. \quad (22)$$

Будем полагать, что начальное значение x_0 , согласно намеченной схеме русел и джокеров, представляет собой результат работы джокера J_1 – случайную величину. Функцию плотности распределения x_0 обозначим $\rho_{x_0}(x)$.

Динамика на русле C_2 задается уравнением спада (15). Поскольку рост и спад пика происходят в одной и той же области фазового пространства, область русла C_2 будет совпадать с областью русла C_1 . Таким образом, требуется уточнить, какое из русел в данный момент считается действующим.

Джокер J_2 . Разработка алгоритма джокера подразумевает решение двух задач. Во-первых, необходимо задать правило выбора момента срабатывания джокера. Во-вторых, требуется определить саму процедуру срабатывания.

Вторая задача в данном конкретном случае представляется более простой. Результат срабатывания джокера J_2 должен заключаться в том, что экспоненциальный рост значения наблюдаемой переменной сменяется экспоненциальным спадом. Таким образом, процедура срабатывания представляет собой изменение уравнения отображения (в терминах намеченной схемы русел и джокеров – переключение между руслами C_1 и C_2). Здесь просматривается аналогия с предложенным в [7] джокером типа «шов», также меняющим уравнение движения без перемещения изображающей точки.

Разница между джокером типа «шов» и джокером J_2 должна состоять в определении момента срабатывания. Первый срабатывает при пересечении фазовой траекторией линии, представляющей собой область джокера. В случае второго, это про-

стое правило неприменимо. Координата изображающей точки в момент срабатывания джокера \mathbf{J}_2 представляет собой максимум пика – случайную величину. Продолжительность роста пика – также случайная величина, что не дает возможности «настроить» джокер на срабатывание в фиксированные моменты времени.

Таким образом, момент срабатывания джокера \mathbf{J}_2 должен определяться некоторым вероятностным предикатом. Его аргументами могут быть как время n , так и координата x . Остановимся на определении момента срабатывания, исходя из координаты, так как этот способ в большей степени соответствует «традиционному» понятию области джокера.

В результате, приходим к следующему алгоритму. В процессе роста пика на каждой итерации принимается решение: либо срабатывает джокер и рост пика останавливается (пик достигает максимального значения), либо рост продолжается в соответствии с уравнением русла \mathbf{C}_1 . Вероятность срабатывания джокера зависит от значения x на данной итерации, $p = p_{\mathbf{J}_2}(x)$. Задача сводится к поиску функции $p_{\mathbf{J}_2}(x)$, обеспечивающей распределение максимумов, соответствующее распределению (7). По этой причине будем ссылаться на (7) как на *целевое распределение*.

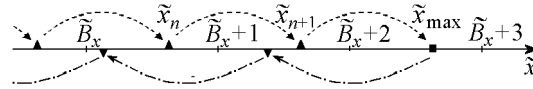


Рис. 4. Рост пика, срабатывание джокера и спад пика в логарифмической системе координат. Штриховая линия обозначает отображение, описывающее рост пика (движение в русле \mathbf{C}_1). Штрихпунктирная линия обозначает отображение, описывающее спад пика (движение в русле \mathbf{C}_2). Символом ▲ отмечены значения переменной состояния в процессе роста. Символом ■ отмечена точка срабатывания джокера. Символом ▼ отмечены значения переменной состояния в процессе спада

Найдем вид целевого распределения в новых координатах. Для этого понадобится формула распределения функции случайной величины. Пусть имеется некоторая случайная величина V с функцией плотности распределения $\rho_V(v)$. Пусть задана некоторая детерминированная функция g , непрерывная, строго монотонная и имеющая обратную функцию g^{-1} на всей области рассмотрения. Функция от случайной величины $W = g(V)$ будет случайной величиной с функцией плотности распределения

$$\rho_W(w) = \rho_V(g^{-1}(w)) \left| \frac{d}{dw} g^{-1}(w) \right|. \quad (25)$$

Сопоставим $x_{\max} V$, $\tilde{x}_{\max} W$, а функцию (23) g . Отметим, что в области $x \leq B_x < x_*$, во-первых, функция g отвечает всем предъявляемым требованиям, а во-вторых, величиной x_* в выражении (23) можно пренебречь в силу неравенства $|x_*| \ll |B_x|$. Отсюда

$$\begin{aligned} g^{-1}(\tilde{x}) &= -(k_x^+)^{\tilde{x}}, \\ \frac{d}{d\tilde{x}} g^{-1}(\tilde{x}) &= -(k_x^+)^{\tilde{x}} \ln k_x^+, \\ \rho_{x_{\max}}(g^{-1}(\tilde{x})) &= a_x (k_x^+)^{-b_x \tilde{x}}. \end{aligned}$$

Для удобства дальнейших выкладок, перейдем к логарифмической системе координат

$$\tilde{x} \equiv \log_{k_x^+}(x_* - x), \quad x < x_*. \quad (23)$$

Искомую зависимость вероятности срабатывания джокера от координаты далее будем обозначать $\tilde{p}_{\mathbf{J}_2}(\tilde{x})$. Удобство (23) состоит в том, что отображение, описывающее рост пика, примет очень простой вид (рис. 4)

$$\tilde{x}_{n+1} = \tilde{x}_n + 1. \quad (24)$$

Далее, можно видеть, что произошел переход от степенного распределения к экспоненциальному

$$\begin{aligned} \rho_{\tilde{x}_{\max}}(\tilde{x}) &= \begin{cases} \tilde{a}_x e^{-\tilde{b}_x \tilde{x}}, & \tilde{x} \geq \tilde{B}_x, \\ 0, & \tilde{x} < \tilde{B}_x, \end{cases} \\ \tilde{a}_x &= a_x \ln k_x^+, \\ \tilde{b}_x &= (b_x - 1) \ln k_x^+. \end{aligned} \quad (26)$$

В дальнейшем понадобится соотношение коэффициентов, которое нетрудно получить из уравнения нормировки,

$$\tilde{a}_x = \tilde{b}_x e^{\tilde{b}_x \tilde{B}_x}. \quad (27)$$

Отметим следующее важное свойство отображения (24). Пусть дан некоторый интервал $[\tilde{Q}_x, \tilde{Q}_x + s)$, $\tilde{Q}_x = \text{const}$, $s \leq 1$. Очевидно, что он не пересекается со своим образом $[\tilde{Q}_x + 1, \tilde{Q}_x + s + 1)$ и прообразом $[\tilde{Q}_x - 1, \tilde{Q}_x + s - 1)$. Обозначим $\rho_{\tilde{Q}_x, s}(\tilde{x})$ условную функцию плотности распределения значений \tilde{x} (условием является попадание в данный интервал в процессе роста пика). Из (25) следует, что условная функция плотности распределения на i -образах (прообразах) $[\tilde{Q}_x + i, \tilde{Q}_x + s + i)$ данного интервала имеет вид

$$\rho_{\tilde{Q}_x + i, s}(\tilde{x}) = \rho_{\tilde{Q}_x, s}(\tilde{x} - i), \quad i \in \mathbb{Z}.$$

Интервал $[\tilde{Q}_x + u, \tilde{Q}_x + u + s)$, $u \in \mathbb{R}$, в общем случае, не является образом (прообразом) $[\tilde{Q}_x, \tilde{Q}_x + s)$. Однако при условии $s = 1$ первый интервал можно разбить на два подинтервала – образы (прообразы) соответствующих подинтервалов второго интервала с числом итераций, различающимся на единицу. Следовательно, обозначив $\rho_{\tilde{Q}_x}(\tilde{x}) \equiv \rho_{\tilde{Q}_x, 1}(\tilde{x})$, можно записать соотношение

$$\rho_{\tilde{S}_x}(\tilde{x}) = \rho_{\tilde{Q}_x}(\tilde{x} - \tilde{S}_x + \tilde{Q}_x). \quad (28)$$

В дальнейших выкладках будем предполагать, что в процессе роста пика изображающая точка гарантированно попадает в интервал $[\tilde{B}_x, \tilde{B}_x + 1)$ и, как следствие, функция плотности распределения значений \tilde{x} на данном интервале совпадает с $\rho_{\tilde{B}_x}(\tilde{x})$. Для этого необходимо, чтобы начальные значения находились полностью в области $\tilde{x} < \tilde{B}_x$, то есть

$$\int_{-\infty}^{\tilde{B}_x} \rho_{\tilde{x}_0}(\tilde{x}) d\tilde{x} = 1$$

(хотя бы, с некоторой приемлемой точностью). Тогда функция плотности распределения максимумов пиков в интервале $\tilde{x} \in [\tilde{B}_x, \tilde{B}_x + 1)$ будет равна

$$\rho_{\tilde{x}_{\max}}(\tilde{x}) = \rho_{\tilde{B}_x}(\tilde{x}) \tilde{p}_{J_2}(\tilde{x}), \quad \tilde{x} \in [\tilde{B}_x, \tilde{B}_x + 1). \quad (29)$$

Согласно (28), для образов указанного интервала можно записать последовательность уравнений следующего вида:

$$\begin{aligned}\rho_{\tilde{x}_{\max}}(\tilde{x} + 1) &= \rho_{\tilde{B}_x}(\tilde{x})(1 - \tilde{p}_{\mathbf{J}_2}(\tilde{x}))\tilde{p}_{\mathbf{J}_2}(\tilde{x} + 1), \\ \rho_{\tilde{x}_{\max}}(\tilde{x} + 2) &= \rho_{\tilde{B}_x}(\tilde{x})(1 - \tilde{p}_{\mathbf{J}_2}(\tilde{x}))(1 - \tilde{p}_{\mathbf{J}_2}(\tilde{x} + 1))\tilde{p}_{\mathbf{J}_2}(\tilde{x} + 2), \\ \dots \\ \rho_{\tilde{x}_{\max}}(\tilde{x} + n) &= \rho_{\tilde{B}_x}(\tilde{x}) \left[\prod_{i=0}^{n-1} (1 - \tilde{p}_{\mathbf{J}_2}(\tilde{x} + i)) \right] \tilde{p}_{\mathbf{J}_2}(\tilde{x} + n),\end{aligned}\quad (30)$$

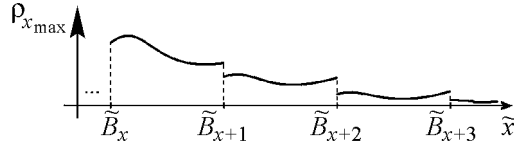


Рис. 5. Типичный вид распределения максимумов пиков для джокера \mathbf{J}_2 . На графике показан общий вид распределения максимумов пиков, обеспечиваемый джокером \mathbf{J}_2 в соответствии с формулами (29) и (30). Для наглядности, в качестве $\rho_{\tilde{B}_x}(\tilde{x})$ и $\tilde{p}_{\mathbf{J}_2}(\tilde{x})$ взяты произвольные функции

где $\tilde{x} \in [\tilde{B}_x, \tilde{B}_x + 1)$, $n \in \mathbb{N}$. Здесь учтено то обстоятельство, что изображающая точка попадает в следующий интервал, только если джокер не срабатывает на данном интервале. Общий вид функции $\rho_{\tilde{x}_{\max}}(\tilde{x})$ показан на рис. 5. Отсюда имеем уравнение

$$\begin{aligned}\rho_{\tilde{x}_{\max}}(\tilde{x} + n + 1) &= \rho_{\tilde{x}_{\max}}(\tilde{x} + n)(1 - \tilde{p}_{\mathbf{J}_2}(\tilde{x} + n)) \frac{\tilde{p}_{\mathbf{J}_2}(\tilde{x} + n + 1)}{\tilde{p}_{\mathbf{J}_2}(\tilde{x} + n)}, \\ \tilde{x} &\in [\tilde{B}_x, \tilde{B}_x + 1), \quad n \in \mathbb{N}.\end{aligned}$$

Учитывая, что из (26) следует

$$\frac{\rho_{\tilde{x}_{\max}}(\tilde{x} + n + 1)}{\rho_{\tilde{x}_{\max}}(\tilde{x} + n)} = e^{-\tilde{b}_x}, \quad \tilde{x} \geq \tilde{B}_x, \quad n \in \mathbb{N},$$

получаем для $\tilde{p}_{\mathbf{J}_2}(\tilde{x})$ рекуррентное соотношение

$$\tilde{p}_{\mathbf{J}_2}(\tilde{x} + n + 1) = \frac{\tilde{p}_{\mathbf{J}_2}(\tilde{x} + n)}{(1 - \tilde{p}_{\mathbf{J}_2}(\tilde{x} + n))} e^{-\tilde{b}_x}, \quad \tilde{x} \in [\tilde{B}_x, \tilde{B}_x + 1), \quad n \in \mathbb{N}$$

или, что эквивалентно,

$$\tilde{p}_{\mathbf{J}_2}(\tilde{x} + 1) = \frac{\tilde{p}_{\mathbf{J}_2}(\tilde{x})}{(1 - \tilde{p}_{\mathbf{J}_2}(\tilde{x}))} e^{-\tilde{b}_x}, \quad \tilde{x} \geq \tilde{B}_x. \quad (31)$$

Будем искать решение $\tilde{p}_{\mathbf{J}_2}(\tilde{x})$ этого уравнения в простейшем виде

$$\tilde{p}_{\mathbf{J}_2}(\tilde{x}) = \tilde{p}_x = \text{const}, \quad \tilde{x} \geq \tilde{B}_x.$$

Подставив в (31), получим выражение для искомой константы

$$\tilde{p}_x = 1 - e^{-\tilde{b}_x}. \quad (32)$$

Проверим, что найденное нами решение не нарушает условие нормировки

$$\int_{\tilde{B}_x}^{\tilde{B}_x+1} \rho_{\tilde{B}_x}(\tilde{x}) d\tilde{x} = 1. \quad (33)$$

Из (26) и (29) следует выражение для функции плотности распределения

$$\rho_{\tilde{B}_x}(\tilde{x}) = \frac{\tilde{a}_x}{\tilde{p}_x} e^{-\tilde{b}_x \tilde{x}}, \quad \tilde{x} \in [\tilde{B}_x, \tilde{B}_x + 1). \quad (34)$$

Подставив его в (33), получим уравнение

$$\int_{\tilde{B}_x}^{\tilde{B}_x+1} \rho_{\tilde{B}_x}(\tilde{x}) d\tilde{x} = \frac{\tilde{a}_x}{\tilde{p}_x} \frac{1}{-\tilde{b}_x} e^{-\tilde{b}_x \tilde{x}} \Big|_{\tilde{B}_x}^{\tilde{B}_x+1} = \frac{\tilde{a}_x}{\tilde{p}_x \tilde{b}_x} (1 - e^{-\tilde{b}_x}) e^{-\tilde{b}_x \tilde{B}_x} = 1.$$

Преобразовав с учетом (27), получим необходимое условие для (33)

$$\tilde{p}_x = 1 - e^{-\tilde{b}_x}.$$

Можно видеть, что (32) не противоречит данному условию.

Теперь, рассмотрим процесс роста пика в целом. В силу определенной свободы выбора границы \tilde{A}_x русла \mathbf{C}_1 , а также распределения начальных значений \tilde{x}_0 , положим, что все возможные начальные значения находятся в интервале $[\tilde{A}_x, \tilde{A}_x + 1)$. Отсюда, с учетом (28), (27) и (34), следует выражение для распределения начальных значений

$$\begin{aligned} \rho_{\tilde{x}_0}(\tilde{x}) &= \rho_{\tilde{A}_x}(\tilde{x}) = \tilde{\alpha}_x e^{-\tilde{b}_x \tilde{x}}, \quad \tilde{x} \in [\tilde{A}_x, \tilde{A}_x + 1), \\ \tilde{\alpha}_x &\equiv \frac{\tilde{b}_x e^{\tilde{b}_x \tilde{A}_x}}{\tilde{p}_x}. \end{aligned} \quad (35)$$

Записав для интервала $[\tilde{A}_x, \tilde{A}_x + 1)$ последовательность уравнений, аналогичную (29)–(30), с ограничением $\tilde{x} + n < \tilde{B}_x$ и сравнив с (26), можно доопределить $\tilde{p}_{\mathbf{J}_2}(\tilde{x})$ на интервале $[\tilde{A}_x, \tilde{B}_x)$ нулем. Окончательно, формально распространив область джокера \mathbf{J}_2 на все русло \mathbf{C}_1 и выполнив обратное преобразование координат, имеем

$$p_{\mathbf{J}_2}(x) = \begin{cases} p_x \equiv \tilde{p}_x = 1 - e^{-\tilde{b}_x}, & x \leq B_x, \\ 0, & x \in (B_x, A_x]. \end{cases} \quad (36)$$

Джoker \mathbf{J}_1 . Прежде всего на джoker \mathbf{J}_1 возлагается ответственность за моделирование фоновой динамики и за переход от фоновой динамики к росту пика. Сначала рассмотрим данные задачи по отдельности.

Пусть моделирование фоновой динамики заключается в случайном отображении отрезка $[D_{x,\min}, D_{x,\max}]$ на себя. Для простоты положим, что x_n на каждой итерации присваивается значение некоторой случайной величины, функция плотности распределения которой полностью находится в данном отрезке (то есть, значения x_n независимы в совокупности). С той же целью используем случайную величину Z с распределением (21). Итак, в межпиковой фазе

$$x_n = (D_{x,\max} - D_{x,\min}) \times Z + D_{x,\min}, \quad n = 0, 1, \dots \quad (37)$$

Следующая задача джокера \mathbf{J}_1 – обеспечение длительности межпиковой фазы в соответствии с экспоненциальным распределением (8). Пусть на каждой

n -й итерации возможно прекращение межпиковой фазы джокером с вероятностью, определяемой некоторой функцией $p_{J_1}(n)$. Чтобы найти эту функцию, рассмотрим пуассоновское приближение биномиального распределения

$$P_m(n) = \frac{(np)^m}{m!} e^{-np}, \quad n \gg 1, \quad p \ll 1,$$

где $P_m(n)$ – вероятность ровно m успехов в n испытаниях Бернулли, а p – вероятность успеха в отдельном испытании. Известно, что промежуток (количество испытаний) между успешными испытаниями распределен экспоненциально

$$\rho_N(n) = p e^{-np}, \quad p \ll 1.$$

Следовательно, взяв вероятность прекращения джокером межпиковой фазы на данной итерации $p = b_n$, получим искомый вид распределения межпиковых интервалов². Доопределив функцию $p_{J_1}(n)$ нулем в начале межпиковой фазы, окончательно получим

$$p_{J_1}(n) = \begin{cases} p_n = b_n, & n \geq B_n, \\ 0, & n = 0, \dots, B_n - 1. \end{cases} \quad (38)$$

Теперь, рассмотрим переход от фоновой динамики к росту пика. В этот момент, джокер J_1 вместо выполнения очередной итерации, согласно (37), должен перевести изображающую точку в исток русла C_1 . Таким образом, имеет смысл возложить на J_1 обязанность формирования в истоке русла распределения начальных значений вида (35), необходимого для получения заданного распределения максимумов пиков.

Для этого требуется решить частную задачу поиска зависимости $\tilde{x}_0 = g_Z(Z)$, позволяющей получить распределение (35) на основе (21). Согласно (25), имеем уравнение

$$\rho_{\tilde{x}_0}(\tilde{x}) = \rho_Z(g_Z^{-1}(\tilde{x})) \left| \frac{d}{d\tilde{x}} g_Z^{-1}(\tilde{x}) \right| = \begin{cases} \left| \frac{d}{d\tilde{x}} g_Z^{-1}(\tilde{x}) \right|, & g_Z^{-1}(\tilde{x}) \in [0, 1], \\ 0, & g_Z^{-1}(\tilde{x}) \notin [0, 1]. \end{cases}$$

Предположив, что выражение под знаком модуля положительно на всем интервале $[\tilde{A}_x, \tilde{A}_x + 1)$, перейдем к следующему уравнению:

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tilde{x}} g_Z^{-1}(\tilde{x}) &= \tilde{\alpha}_x e^{-\tilde{b}_x \tilde{x}}, \\ g_Z^{-1}(\tilde{x}) &\in [0, 1], \\ \tilde{x} &\in [\tilde{A}_x, \tilde{A}_x + 1). \end{aligned}$$

Проинтегрировав, получим

$$g_Z^{-1}(\tilde{x}) = -\frac{\tilde{\alpha}_x}{\tilde{b}_x} e^{-\tilde{b}_x \tilde{x}} + C.$$

²Замечание. На первый взгляд, в аналогичном случае для джокера J_2 целевое распределение зависит не только от $p_{J_2}(x)$, но и от распределения начальных значений x_0 . Поэтому, данная схема, предположительно, не даст существенного уменьшения объема выкладок.

Можно видеть, что на интервале $[\tilde{A}_x, \tilde{A}_x + 1)$ полученная функция строго возрастает, что соответствует сделанному выше предположению относительно положительности выражения под знаком модуля (рис. 6).

Чтобы найти константу интегрирования C , запишем граничные условия:

$$g_Z^{-1}(\tilde{A}_x) = 0,$$

$$g_Z^{-1}(\tilde{A}_x + 1) = 1.$$

Отметим, что одно из граничных условий избыточно и, следовательно, может использоваться для проверки непротиворечивости решения. Имеем

$$C = \frac{\tilde{\alpha}_x}{\tilde{b}_x} e^{-\tilde{b}_x \tilde{A}_x}.$$

Выполнив обращение найденной функции, получим

$$\tilde{x}_0 = g_Z(Z) = -\frac{1}{\tilde{b}_x} \ln \left(-\frac{\tilde{b}_x}{\tilde{\alpha}_x} Z + e^{-\tilde{b}_x \tilde{A}_x} \right)$$

или после обратного преобразования координат и подстановки определения $\tilde{\alpha}_x$ из (35) получим

$$x_0 = x_* - (k_x^+)^{\tilde{A}_x} (1 - \tilde{p}_x Z)^{-\frac{\ln k_x^+}{\tilde{b}_x}}. \quad (39)$$

Теперь можно определить значение \hat{x}_* таким образом, чтобы воспроизвести динамику в начале фазы роста пика. Как было отмечено выше, получение точной оценки x_* затруднено, и задача заключается, скорее, в воспроизведении внешнего вида фронта пика. Поэтому имеет смысл при определении оценки пользоваться наиболее грубыми и простыми методами.

Рассмотрим начало роста некоторого пика. Момент выхода x_n из области $[D_{x,\min}, D_{x,\max}]$ обозначим $N_{\text{старт}}$

$$x_{N_{\text{старт}}-1} \geq D_{x,\min}, \quad (40)$$

$$x_{N_{\text{старт}}} < D_{x,\min}.$$

Момент превышения абсолютной величиной x_n порогового значения $x_{\text{п}}$ обозначим $N_{\text{п}}$

$$|x_n| \leq x_{\text{п}}, \quad N_{\text{старт}} \leq n < N_{\text{п}}, \quad (41)$$

$$|x_n| > x_{\text{п}}, \quad n = N_{\text{п}}.$$

Число итераций между этими двумя моментами обозначим $N_{\text{фронт}}$

$$N_{\text{фронт}} \equiv N_{\text{п}} - N_{\text{старт}}. \quad (42)$$

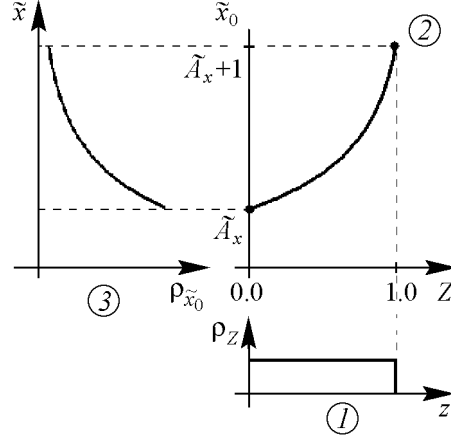


Рис. 6. Получение распределения начальных значений на основе равномерного распределения. 1 – функция плотности распределения (21) случайной величины Z ; 2 – искомая зависимость (39) начального значения \tilde{x}_0 от случайной величины Z ; 3 – заданная функция плотности распределения (35) начального значения \tilde{x}_0

Среднее по всем наблюдаемым пикам значение $N_{\text{фронт}}$ обозначим $\langle N_{\text{фронт}} \rangle$. Воспользуемся обозначением $\langle N_{\text{фронт,м}} \rangle$ для модельной системы и $\langle N_{\text{фронт,н}} \rangle$ для наблюдаемой системы. Будем считать, что внешний вид фронта пика воспроизводится приемлемо, если

$$\langle N_{\text{фронт,м}} \rangle \approx \langle N_{\text{фронт,н}} \rangle.$$

Значение $\langle N_{\text{фронт}} \rangle$ модельной системы можно грубо оценить, воспользовавшись аналогичным (13) равенством

$$(x_{\text{п}} - x_*) = (\langle x_0 \rangle - x_*) (k_x^+)^{\langle N_{\text{фронт,м}} \rangle}, \quad (43)$$

где $\langle x_0 \rangle$ обозначает математическое ожидание начального значения. Чтобы найти последнее, выполним обратное (23) преобразования координат для распределения начальных значений (35). Согласно (25), имеем

$$\rho_{x_0}(x) = \frac{1 - b_x}{\left((k_x^+)^{1-b_x} - 1 \right) (x_* - A_x)^{1-b_x}} (x_* - x)^{-b_x}, \quad x \in (k_x^+ A_x, A_x].$$

Отсюда,

$$\langle x_0 \rangle = \int_{k_x^+ A_x}^{A_x} \rho_{x_0}(x) dx = x_* - c_0 (x_* - A_x). \quad (44)$$

где

$$c_0 \equiv \frac{1 - b_x (k_x^+)^{2-b_x} - 1}{2 - b_x (k_x^+)^{1-b_x} - 1}. \quad (45)$$

Приравняв $\langle N_{\text{фронт,н}} \rangle$ и $\langle N_{\text{фронт,м}} \rangle$, подставив (22) и (44) в (43) и решив уравнение относительно x_* , получим оценку

$$\hat{x}_* = \frac{c_0 (k_x^+)^{\langle N_{\text{фронт,н}} \rangle} D_{x,\text{min}} - x_{\text{п}}}{c_0 (k_x^+)^{\langle N_{\text{фронт,н}} \rangle} - 1}. \quad (46)$$

Наконец еще одна потенциальная обязанность джокера \mathbf{J}_1 – прекращение спада пика согласно уравнению русла \mathbf{C}_2 . Фаза спада считается законченной, когда изображающая точка достигает области фоновой динамики. По этой причине, а также с учетом написанного выше имеет смысл объявить отрезок $[D_{x,\text{min}}, D_{x,\text{max}}]$ областью джокера \mathbf{J}_1 . Таким образом, двигаясь в соответствии с уравнением русла \mathbf{C}_2 , изображающая точка покинет русло и перейдет в область джокера, после чего произойдет активизация последнего.

Построение системы русел и джокеров. Окончательно цикл работы системы русел и джокеров выглядит следующим образом. В межпиковом интервале в области джокера \mathbf{J}_1 выполняются итерации случайного отображения (37) в течение времени, определяемого вероятностью начала выброса (38). Выброс начинается с задания в истоке русла \mathbf{C}_1 джокером \mathbf{J}_1 начального значения согласно (39). После этого выполняются итерации соответствующего руслу \mathbf{C}_1 отображения (13). При этом вероятность прекращения роста определяется джокером \mathbf{J}_2 согласно (36).

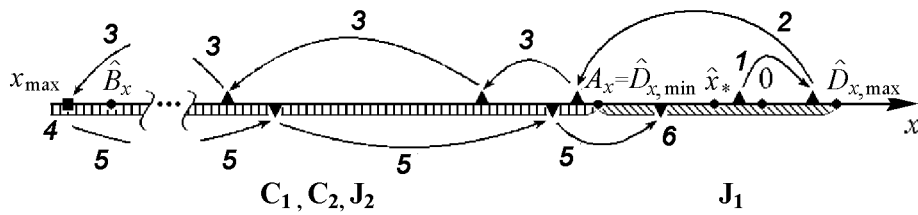


Рис. 7. Система русел и джокеров. Прямой штриховкой обозначены совпадающие области русел C_1 и C_2 и джокера J_2 . Косой штриховкой обозначена область джокера J_1 . Символом \blacktriangle отмечены значения переменной состояния в процессе роста пика. Символом \blacksquare отмечена точка срабатывания джокера J_2 . Символом \blacktriangledown отмечены значения переменной состояния в процессе спада пика. Цифрами обозначены: 1 – срабатывание джокера J_1 : случайное перемещение изображающей точки в соответствии с уравнением (37); 2 – срабатывание джокера J_1 : перевод изображающей точки в исток русла C_1 ; 3 – движение в русле C_1 в соответствии с его уравнением (13); 4 – срабатывание джокера J_2 : перевод изображающей точки в русло C_2 ; 5 – движение в русле C_2 в соответствии с его уравнением (15); 6 – изображающая точка вновь попадает в область джокера J_1 , движение в соответствии с уравнением русла C_2 прекращается

В момент прекращения роста русло C_1 перестает считаться действующим, активизируется русло C_2 , и начинают выполняться итерации соответствующего ему отображения (15). Это продолжается до тех пор, пока изображающая точка не достигнет области джокера J_1 , после чего начинается новый межпиковый интервал (рис. 7).

В соответствии с постановкой задачи, исходные данные для построения системы представляют собой временной ряд x_n (предполагается, что данных достаточно для получения всех необходимых статистических оценок).

Ниже приводится предлагаемый **порядок построения системы русел и джокеров**.

1. Вычисляется медиана x_m временного ряда $\{|x_n|\}$ и пороговое значение $x_{п}$.

2. Определяются границы областей русел и джокеров.

2.1. По формуле (17) вычисляется оценка $\hat{D}_{x,max}$ (используется весь имеющийся временной ряд, либо данные по одному или нескольким межпиковым интервалам).

2.2. По надпороговым значениям x_n выделяются два следующих непосредственно друг за другом пика.

2.3. Выделяются соответствующие надпороговым значениям моменты N_0 и N_3 в фазах спада первого пика и роста второго, соответственно.

2.4. По формуле (19), с использованием значений x_n , начиная с $n = N_0$, определяется момент N_1 начала межпикового интервала.

2.5. По формуле (20), с использованием значений x_n , начиная с $n = N_3$ в сторону уменьшения n , определяется момент N_2 конца межпикового интервала.

2.6. По формуле (18) вычисляется оценка $\hat{D}_{x,min}$. Это же значение, согласно (22), является правой границей области русел A_x .

2.7. Возможен повтор данной процедуры для остальных межпиковых интервалов с целью уточнения оценок.

3. Вычисляются оценки \hat{a}_n , \hat{b}_n и \hat{B}_n .

3.1. Строится гистограмма длительностей межпиковых интервалов в полулогарифмических координатах $(n, \ln \rho)$.

3.2. Для построенной гистограммы прокладывается аппроксимирующая прямая.

3.3. Вычисляются оценки \hat{a}_n и \hat{b}_n путем подстановки коэффициентов аппроксимирующей прямой в формулу, аналогичную (9).

3.4. Вычисляется оценка \hat{B}_n путем подстановки полученных оценок \hat{a}_n и \hat{b}_n в (11).

4. Вычисляются оценки \hat{a}_x , \hat{b}_x и \hat{B}_x .

4.1. Строится гистограмма максимумов пиков x_{\max} в логарифмических координатах $(\ln(-x), \ln \rho)$.

4.2. Для построенной гистограммы прокладывается аппроксимирующая прямая.

4.3. Вычисляются оценки \hat{a}_x и \hat{b}_x путем подстановки коэффициентов аппроксимирующей прямой в (9).

4.4. Вычисляется оценка \hat{B}_x путем подстановки полученных оценок \hat{a}_x и \hat{b}_x в (10).

5. Вычисляются оценки \hat{k}_x^+ и \hat{k}_x^- .

5.1. Для одного из пиков строится график в полулогарифмических координатах $(n, \ln(-x_n))$.

5.2. Прокладывается аппроксимирующая прямая по точкам в области больших $|x|$ (порядка $|\hat{B}_x|$), относящимся к фазе роста пика.

5.3. Вычисляется оценка \hat{k}_x^+ путем подстановки углового коэффициента аппроксимирующей прямой в (14).

5.4. Прокладывается аппроксимирующая прямая по точкам в области больших $|x|$, относящимся к фазе спада пика.

5.5. Вычисляется оценка \hat{k}_x^- путем подстановки углового коэффициента аппроксимирующей прямой в формулу (14).

5.6. Возможен повтор данной процедуры для других пиков, с целью уточнения оценок.

6. Вычисляется оценка \hat{x}_* .

6.1. Выполняется подстановка оценки $\hat{D}_{x,\min}$ в правило (40). Согласно данному правилу, на основе значений x_n , начиная с момента $n = N_2$ конца одного из межпиковых интервалов, определяется значение $N_{\text{старт}}$.

6.2. Определяется значение $N_{\text{п}}$ по правилу (41) и вычисляется значение $N_{\text{фронт}}$ по формуле (42).

6.3. Аналогичным образом определяются значения $N_{\text{фронт}}$ для остальных пиков. Вычисляется среднее значение $\langle N_{\text{фронт},n} \rangle$.

6.4. Вычисляется значение c_0 путем подстановки оценок \hat{b}_x и \hat{k}_x^+ в формулу (45).

6.5. Вычисляется оценка \hat{x}_* путем подстановки значений c_0 , $\langle N_{\text{фронт},n} \rangle$, $x_{\text{п}}$ и оценок $\hat{D}_{x,\min}$, \hat{k}_x^+ в формулу (46).

7. Вычисляются коэффициенты \tilde{A}_x , \tilde{B}_x , \hat{a}_x , \hat{b}_x и вероятность \hat{p}_x .

7.1. \tilde{A}_x и \tilde{B}_x – путем подстановки $x = A_x$ и $x = \hat{B}_x$ в (23).

7.2. \hat{a}_x и \hat{b}_x – путем подстановки \hat{a}_x , \hat{b}_x и \hat{k}_x^+ в (26).

7.3. \hat{p}_x – путем подстановки оценки \hat{b}_x в (32).

8. Окончательно определяются уравнения схемы русел и джокеров.

8.1. Уравнение (13) русла C_1 – путем подстановки \hat{x}_* и \hat{k}_x^+ .

8.2. Уравнение (15) русла C_2 – путем подстановки \hat{k}_x^- .

8.3. Функция отображения (37) джокера J_1 – путем подстановки $\hat{D}_{x,\min}$ и $\hat{D}_{x,\max}$.

8.4. Функция вероятности прекращения межпиковой фазы (38) джокера J_1 – путем подстановки \hat{b}_n и \hat{B}_n .

8.5. Функция формирования джокером J_1 начального значения для роста пика (39) – путем подстановки \hat{k}_x^+ , \tilde{A}_x , \hat{p}_x и \hat{b}_x .

8.6. Функция вероятности срабатывания джокера J_2 (36) – путем подстановки A_x и \hat{B}_x .

Результаты моделирования, сравнение. Для проверки предложенной модели использовался временной ряд x_n , порождаемый системой (4) с набором параметров (6) на протяжении $5 \cdot 10^7$ итераций. За время наблюдения произошел 8221 выброс.

На основе собранной статистики были получены следующие оценки: $\hat{D}_{x,\max} = 1.06$, $\hat{D}_{x,\min} = -1.17$, $\hat{a}_n = 4.33 \cdot 10^{-4}$, $\hat{b}_n = 2.5 \cdot 10^{-4}$, $\hat{B}_n = 2199$, $\hat{a}_x = 9.36 \cdot 10^{-2}$, $\hat{b}_x = 1.04$, $\hat{B}_x = -2.47 \cdot 10^9$, $\hat{k}_x^+ = 4.0$, $\hat{k}_x^- = 0.1$, $\hat{x}_* = -1.16$. Вероятностные параметры джокеров J_1 и J_2 составили $p_n = 2.5 \cdot 10^{-4}$ и $p_x = 5.35 \cdot 10^{-2}$, соответственно.

Общий вид динамики модельной системы $J_1-C_1-J_2-C_2$ показан на рис. 8 (ср. рис. 2).

Гистограммы абсолютных величин максимумов пиков и длительностей межпиковых интервалов в системах (4) и $J_1-C_1-J_2-C_2$ показаны на рис. 9. Можно видеть, что модельная система соответствует наблюдаемой (исходной) системе по выбранным для сравнения статистическим характеристикам.

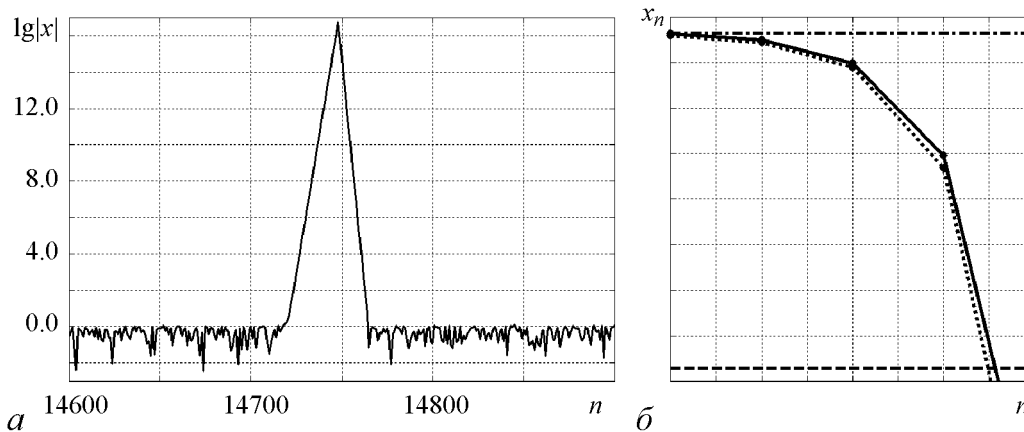


Рис. 8. Динамика системы русел и джокеров. a – фоновая динамика и одиночный пик в системе $J_1-C_1-J_2-C_2$, полулогарифмический масштаб. b – фронт пика, подробно: сплошная линия соответствует системе $J_1-C_1-J_2-C_2$, пунктирная линия – наблюдаемой системе; штрихпунктирной линией показан уровень $x = \hat{D}_{x,\min}$, штриховой – уровень $x = x_n$

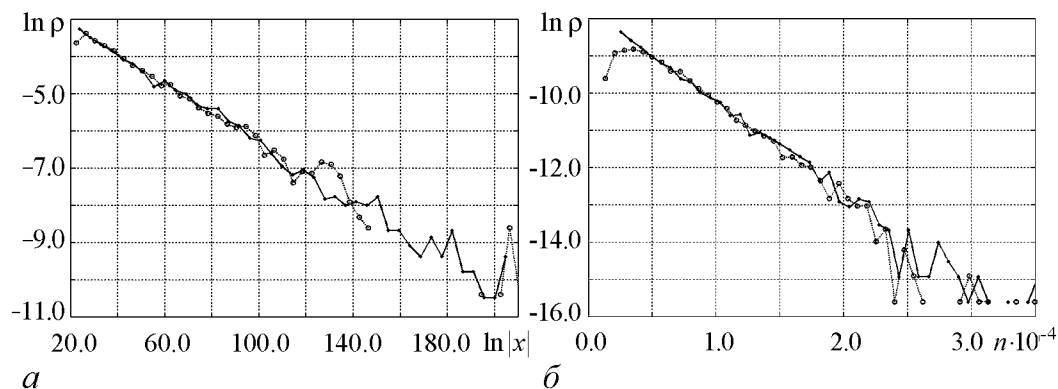


Рис. 9. Сравнение статистических характеристик исходной и модельной систем: a – гистограммы максимумов пиков, логарифмический масштаб; b – гистограммы длительностей межпиковых интервалов, полулогарифмический масштаб. Сплошная линия соответствует системе $J_1-C_1-J_2-C_2$, пунктирная линия – наблюдаемой системе

Заключение

Рассмотрен пример построения модели системы с жесткой турбулентностью в условиях неполноты доступной информации. Исходные данные представляют собой один из трех временных рядов, порождаемых трехмерным отображением Ершова (4). Характерная особенность рассмотренной системы заключается в наличии двух различных масштабов времени, что делает использование теоремы Такенса невозможным на практике. С учетом этого при решении задачи использовался метод русел и джокеров, заключающийся в совмещении динамических и вероятностных методов моделирования.

Наблюдаемый временной ряд отличается наличием длительных промежутков хаотической динамики, чередующихся с сильными выбросами (экспоненциальный рост, сменяющийся экспоненциальным спадом). В качестве главного показателя соответствия системы русел и джокеров исходной системе выбрано сходство распределений максимумов пиков и длительностей межпиковых интервалов порождаемых временных рядов.

Предложена схема, включающая два русла C_1 и C_2 и два джокера J_1 и J_2 . Уравнения русел описывают экспоненциальный рост и спад. Области русел совпадают, поэтому специально оговаривается, какое из русел в данный момент считается действующим.

Джокер J_1 отвечает за моделирование фоновой динамики и за переключение между различными типами динамики. Фоновая динамика моделируется путем случайного отображения области джокера на себя (используется равномерно распределенная случайная величина). Выброс начинается в результате перевода джокером изображающей точки в исток русла C_1 (после этого русло C_1 объявляется действующим). Спад заканчивается после достижения изображающей точкой, следующей в русле C_2 , области джокера J_1 . Область джокера смежна с областью русел.

Джокер J_2 представляет собой вероятностное правило определения момента перехода от роста к спаду, то есть в результате его срабатывания русло C_1 перестает, а русло C_2 начинает считаться действующим. Для формирования требуемого вида распределения максимумов пиков оказалось достаточно задаться постоянной веро-

ятностью срабатывания джокера на каждой итерации. Область джокера совпадает с областью русел.

Следует подчеркнуть две особенности предложенной схемы. Во-первых, она предусматривает совпадение областей русел и джокеров, и в этом смысле представляет собой дальнейшее развитие схемы, предложенной в [7]. Во-вторых, в отличие от предлагавшихся ранее схем, наибольшую часть времени изображающая точка проводит не в области русел, а в области джокера.

Среди возможных направлений доработки предложенной системы можно отметить изменение джокера J_1 для более точного моделирования фоновой динамики. Например, воспроизведение распределения значений наблюдаемой величины, ее функции автокорреляции и т.д. Также возможно решение более сложной задачи, когда для наблюдения доступны две переменные x и y из трех. В этом случае потребуется не только обеспечение заданного вида распределения для каждой переменной, но и соблюдение соотношения между параметрами распределений, учет распределения запаздывания выбросов по переменной y относительно выбросов по переменной x , учет кросс-корреляции переменных в межпиковой фазе и т.д.

Библиографический список

1. Kuramoto Y. Chemical oscillations, waves, and turbulence. Berlin: Springer-Verlag, 1984. 156 p.
2. Ахромеева Т.С., Курдюмов С.П., Малинецкий Г.Г., Самарский А.А. Нестационарные структуры и диффузионный хаос. М.: Наука, 1992. 544 с.
3. Малинецкий Г.Г., Потапов А.Б. Современные проблемы нелинейной динамики. М.: УРСС, 2002. 360 с.
4. Малинецкий Г.Г., Потапов А.Б., Подлазов А.В. Нелинейная динамика: подходы, результаты, надежды. М.: УРСС, 2006. 280 с.
5. Белайчук Л.В., Малинецкий Г.Г. Прodelки джокеров на одномерных отображениях. Препринт / Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН. М., 1997. № 24. 29 с.
6. Малинецкий Г.Г., Потапов А.Б. Руслa и джокеры: о новых методах прогноза поведения сложных систем. Препринт / Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН. М., 1998. № 32.
7. Зильпукаров М.-Г.М., Малинецкий Г.Г., Подлазов А.В. Метод русел и джокеров на примере исследования системы Розенцвейга–Макартура. Препринт / Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН. М., 2006. № 21. 32 с.
8. Гарел Д., Гарел О. Колебательные химические реакции. М.: Мир, 1986. 148 с.
9. Малинецкий Г.Г. Управление риском. Риск, устойчивое развитие, синергетика. М.: Наука, 2000.
10. Thejappa G., MacDowall R.J. Ulysses observations of nonlinear wave-wave interactions in the source regions of type III solar radio bursts // Journal of Astrophysics and Astronomy. 2000, September, December. Vol. 21. № 3, 4. P. 447.

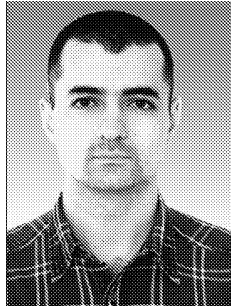
Институт прикладной математики
им. М.В. Келдыша РАН

Поступила в редакцию 10.12.2007

AN EXAMPLE OF HARD TURBULENCE IN THE CHANNELS AND JOKERS SYSTEM

M.-G.M. Zulpukarov, G.G. Malinetskii, A.V. Podlazov

Hard turbulence, a chaotic mode distinguished by infrequent catastrophic outbreaks on the weak irregular space oscillation background, is considered. On-off intermittency as one of the possible ways of simplified qualitative definition of hard turbulence is discussed. The paper introduces an example solution of the inverse problem, constructing a deterministic-probabilistic system (a channels and jokers system) generating time series with characteristics similar to the ones of the time series generated by a simple system working in on-off intermittency mode (the Ershov mapping).



Зульпукаров Магомед-Герей Меджидович – родился в 1978 году в Москве. Окончил Московский инженерно-физический институт (2002) и аспирантуру МИФИ (2005). Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук (2007). Работает младшим научным сотрудником в Институте прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН. Автор и соавтор 9 научных работ.



Малинецкий Георгий Геннадьевич – родился в Уфе (1956), окончил физический факультет МГУ (1979), защитил кандидатскую диссертацию на тему «Нестационарные диссипативные структуры в нелинейных средах» (1982) и докторскую диссертацию на тему «Диффузионный хаос и новые типы упорядоченности в нелинейных средах» (1990) в Институте прикладной математики РАН. В настоящее время работает заместителем директора ИПМ, а также профессором кафедры прикладной математики МФТИ. Автор большого количества статей в области исследования хаоса и нелинейных явлений, а также учебника «Структуры, хаос, вычислительный эксперимент. Введение в нелинейную динамику». E-mail: gmalin@spp.keldysh.ru



Подлазов Сергей Викторович – родился в Москве (1973), окончил Московский физико-технический институт (1996), к.ф.-м.н. В настоящее время работает в Институте прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН. Область научных интересов – нелинейная динамика, теория самоорганизованной критичности, математическая история, теоретическая демография, теория управления риском. E-mail: Tiger@Keldysh.ru



БИФУРКАЦИИ РОЖДЕНИЯ ЦИКЛОВ ПЕРИОДА ДВА ДВУМЕРНОГО ЛОГИСТИЧЕСКОГО ОТОБРАЖЕНИЯ

И.Н. Панкратова

В семействе двумерных логистических отображений обнаружены отображения с циклами периода 2, в которых происходят бифуркации рождения двух новых циклов периода 2. Для иллюстрации нового, по сравнению с одномерным логистическим отображением, свойства построены одномерные сечения бифуркационных диаграмм двухпараметрического отображения последования для двумерного логистического отображения при одном фиксированном параметре.

Введение

В качестве объекта изучения свойств, присущих многопараметрической нелинейной динамике, предлагаем отображение $f : R^n \rightarrow R^n$ следующего вида [1]:

$$fx = \left(1 - \sum_1^n x_i\right)Ax, \quad (1)$$

где $x = (x_1, \dots, x_n)'$ – вектор из вещественного пространства R^n , A – матрица параметров размерности $n \times n$.

Отображение f является одним из вариантов обобщения известного логистического отображения $\psi_\lambda : R \rightarrow R$ [2, 3],

$$\psi_\lambda x = \lambda(1 - x)x. \quad (2)$$

Здесь x – вещественная переменная; λ – параметр; запись ψ_λ означает, что отображение ψ зависит от параметра λ .

Основное внимание при изучении отображения f уделяется определению новых свойств и закономерностей его динамики по сравнению с одномерным однопараметрическим отображением ψ_λ . Одним из таких свойств является бифуркация рождения циклов четного периода.

Как известно (см. [2, 3]), у отображения ψ_λ циклы четных периодов возникают путем бифуркации удвоения периодов, а циклы нечетных периодов могут возникать

путем бифуркации рождения. В частности, из цикла периода 2 отображения ψ_λ (при $\lambda = 3$) на отрезке $I = [0, 1]$ путем бифуркации удвоения периода возникает цикл периода 4.

Обратимся к двумерному отображению f , динамика которого зависит от двух параметров. Оказывается, что в этом случае ситуация несколько иная: в циклах периода 2 отображения f возможны бифуркации рождения двух новых циклов периода 2, один из которых притягивающий, а другой – отталкивающий. Более того, если рассматривать не одно отображение, а семейство двумерных отображений f с двухпараметрической динамикой, то существуют бесконечно много значений параметров (на плоскости параметров они образуют непрерывную кривую за исключением одной точки), при которых в циклах периода 2 происходят бифуркации рождения новых циклов.

Для обнаружения этих циклов в данной работе рассмотрим двухпараметрические одномерные отображения последования отображения f на сечениях Пуанкаре и применим известную теорему о бифуркациях рождения циклов в однопараметрическом семействе одномерных отображений (см., например, [2, с. 178, теорема 8.1]), проверяя выполнение условий этой теоремы для нашего случая.

Такой подход оказался правомерным благодаря тому, что на кривой параметров, при которых происходят бифуркации рождения циклов периода 2, один из параметров можно выразить как функцию от другого параметра, в результате чего двухпараметрическое семейство отображений последования сводится к однопараметрическому. Еще одну особенность кривой параметров хотелось бы отметить: на плоскости параметров она задает бифуркационное множество (параметров), которое является образом кривой складок на многообразии катастрофы в пространстве переменной x и параметров [4, с. 107, 112] – поверхности неподвижных точек двухпараметрического одномерного отображения последования отображения f .

Остановимся кратко на содержании данной работы.

В разделе 1 вводится объект исследования – двумерное логистическое отображение f с двухпараметрической динамикой; дается постановка задачи и метод ее решения – метод отображения Пуанкаре, благодаря которому изучение бифуркаций циклов периода 2 отображения f сводится к исследованию бифуркаций в неподвижных точках двухпараметрического отображения последования отображения f .

В разделе 2 показано, что на одномерных сечениях Пуанкаре, которые для системы f^m не строятся, а появляются «естественным» образом, действуют двухпараметрические одномерные отображения последования отображения f , которые имеют аналитический вид.

В разделе 3 определяются неподвижные точки отображений последования отображения f , в которых происходят бифуркации рождения новых точек, и бифуркационные значения параметров.

В качестве иллюстрации приведены одномерные бифуркационные диаграммы отображения последования отображения f при одном фиксированном и другом меняющемся параметрах. Диаграммы показывают, что при бифуркационных значениях параметров в неподвижных точках отображения последования (являющихся аттракторами) путем бифуркации рождения появляются новые неподвижные точки, одну из которых в качестве аттрактора мы наблюдаем при увеличении или при уменьшении значения изменяемого параметра.

Отметим сразу, чтобы внести ясность, что помимо циклов периода 2, в точках которых происходят бифуркации рождения новых циклов периода 2, существуют целые подобласти параметров, в которых из циклов периода 2 отображения f путем бифуркации удвоения периода появляются циклы периода 4.

В разделе 4 дано описание возникающих типов бифуркаций циклов периода 2 в семействе двумерных отображений f с двухпараметрической динамикой.

Изучение отображения f связано с возможностью применения результатов его исследования в тех областях знаний, где система f^m используется в качестве математических моделей каких-либо реальных процессов или явлений.

В качестве примера приведем биологическую интерпретацию системы f^m . Пусть x – вектор относительных численностей (плотностей) возрастных групп популяции и A – матрица коэффициентов взаимосвязей групп между собой. Учитывая естественные ограничения на вектор x , выделим в пространстве R^n множество

$$K^n = \{x \in R^n \mid x_1 \geq 0, \dots, x_n \geq 0, \sum_1^n x_i \leq 1\}.$$

Тогда система f^m с фазовым пространством K^n задает модель динамики плотности n -групповой биологической популяции в условиях стационарной экосистемы с ограниченными ресурсами [1,5]. Эта система представляет собой также нелинейный аналог модели Лесли [6] (если матрицу A рассматривать, как обобщение матрицы Лесли L с коэффициентами рождаемости $a_{1,i} = b_i \geq 0, i = \overline{1, n}$, и выживаемости $a_{i,i-1} = a_i \geq 0, i = \overline{2, n}$, и $a_{i,j} = 0$ для всех других индексов матрицы L). В отличие от других нелинейных моделей Лесли и их вариантов, для которых зачастую возможно существование только равновесных и циклических решений (см., например, [7–9]), предложенная нами в качестве популяционной модели система f^m позволяет получать все виды динамики, в том числе и хаотические режимы, наиболее характерные для динамики биологических популяций.

1. Постановка задачи

Рассмотрим двумерное отображение f с матрицей $A = \begin{pmatrix} 0 & a_1 \\ a_2 & 0 \end{pmatrix}$. В координатной форме это отображение записывается следующим образом:

$$\begin{cases} (fx)_1 = a_1(1 - x_1 - x_2)x_2, \\ (fx)_2 = a_2(1 - x_1 - x_2)x_1. \end{cases}$$

Для динамической системы f^m , порожденной отображением f , фазовое пространство

$$K^2 = \{x \in R^2 \mid x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_1 + x_2 \leq 1\}$$

является компактным¹ множеством.

¹В конечномерном пространстве компактность множества эквивалентна его замкнутости и ограниченности. В случае компактного фазового пространства ω -предельные множества системы, к которым стремятся фазовые траектории при $t \rightarrow +\infty$, инвариантны и непусты (в отсутствие компактности некоторые (или все) ω -предельные множества системы могут оказаться пустыми, то есть могут располагаться вне фазового пространства). В частности, компактность фазового пространства гарантирует «наблюдаемость» аттракторов системы в фазовом пространстве.

Для инвариантности в положительном направлении множества K^2 , то есть для выполнения включения $fK^2 \subseteq K^2$, необходимо, чтобы $0 < a_1, a_2 \leq 4$ [1].

Действительно, для любого x из K^2 нужно, чтобы вектор fx также принадлежал K^2 . Поэтому для fx должны выполняться неравенства: $(fx)_1 \geq 0$, $(fx)_2 \geq 0$ и $(fx)_1 + (fx)_2 \leq 1$. Оценим $(fx)_1 + (fx)_2$. Имеем $(fx)_1 + (fx)_2 = a_1(1 - x_1 - x_2)x_2 + a_2(1 - x_1 - x_2)x_1 \leq \max\{a_1, a_2\}(1 - (x_1 + x_2))(x_1 + x_2) \leq \max\{a_1, a_2\} \cdot 1/4 \leq 1$, откуда следует ограничение.

Обозначим через $\lambda = \sqrt{a_1 a_2} > 0$ максимальное собственное значение матрицы A [10, с. 334], тогда $(-\lambda)$ – другое собственное значение (то есть собственные значения матрицы A по модулю совпадают). В этом случае говорят, что неотрицательная матрица A (с неотрицательными элементами) имеет циклический вид [10, с. 335]. Значению λ соответствует собственный вектор $e > 0$ (с положительными координатами) матрицы A , то есть $Ae = \lambda e$.

Цель работы – обнаружить циклы периода 2 отображения f , в которых происходят бифуркации рождения новых циклов.

Нам удобнее рассмотреть вместо циклов периода 2 отображения f неподвижные точки второй итерации f^2 отображения f (поскольку именно эти точки образуют циклы периода 2 отображения f). Отображение f^2 является для отображения f не чем иным, как отображением последования и, кроме того, его можно записать в аналитическом виде [5]

$$f^2 = \psi_{\lambda_2} \circ \psi_{\lambda_1}. \quad (3)$$

Поясним, как в (3) следует понимать равенство.

Пусть x – произвольная точка в K^2 ($x \neq 0$ и $x_1 + x_2 \neq 1$, иначе $fx = 0$).

Обозначим через $e_1 = ((e_1)_1, (e_1)_2)'$ – единичный вектор вдоль вектора x , то есть $\|e_1\| = (e_1)_1 + (e_1)_2 = 1$. Тогда x можно записать в виде

$$x = ye_1, \quad (4)$$

где $0 < y < 1$.

Равенство $f^2 = \psi_{\lambda_2} \circ \psi_{\lambda_1}$ понимается как равенство векторов

$$f^2 x = ((\psi_{\lambda_2} \circ \psi_{\lambda_1})y)e_1.$$

Суперпозиция $\psi_{\lambda_2} \circ \psi_{\lambda_1}$ по определению понимается как равенство

$$(\psi_{\lambda_2} \circ \psi_{\lambda_1})y = \psi_{\lambda_2}(\psi_{\lambda_1}y),$$

$$\psi_{\lambda_2}(\psi_{\lambda_1}y) = \lambda_2(1 - \psi_{\lambda_1}y)\psi_{\lambda_1}y,$$

где λ_1, λ_2 – параметры. Функция $(\psi_{\lambda_2} \circ \psi_{\lambda_1})y$ является полиномом 4-й степени по переменной y и зависит от двух параметров.

Таким образом, нам предстоит выяснить, что собой представляют сечения Пуанкаре, где они расположены в фазовом пространстве K^2 , и показать, что действующие на них отображения последования имеют вид (3).

2. Сечения Пуанкаре и отображения последования отображения f

Сечения Пуанкаре, как было отмечено выше, для динамической системы f^m не строятся, а возникают в K^2 «естественным» образом. Посмотрим, как это происходит.

На отрезке луча единичной длины вдоль собственного вектора e , соответствующего собственному значению λ матрицы A , отображение f линейно изоморфно одномерному отображению ψ_λ , то есть $f = \psi_\lambda$.

Действительно, возьмем вектор $x \in K^2$ ($x \neq 0$ и $x_1 + x_2 \neq 1$) и запишем его в виде (4).

Если $e_1 \equiv e$, то есть $x = ye$, то $fx = (1 - y)yAe = \lambda(1 - y)ye = (\psi_\lambda y)e$, откуда $f = \psi_\lambda$.

Пусть далее $x = ye_1$ и $e_1 \neq e$. Найдем вектор fx . Имеем

$$fx = (1 - x_1 - x_2)Ax = (1 - y)yAe_1 = (1 - y)y(a_1(e_1)_2, a_2(e_1)_1)'$$

Обозначим через λ_1 длину (норму) вектора Ae_1 , то есть

$$\lambda_1 = \|Ae_1\| = (Ae_1)_1 + (Ae_1)_2 = a_1(e_1)_2 + a_2(e_1)_1.$$

Пусть $e_2 \geq 0$ – единичный вектор вдоль вектора Ae_1 (вдоль вектора fx), то есть $e_2 = Ae_1/\|Ae_1\|$. Тогда

$$fx = \lambda_1(1 - y)y \frac{Ae_1}{\|Ae_1\|} = \lambda_1(1 - y)ye_2 = (\psi_{\lambda_1} y)e_2.$$

Далее найдем вектор f^2x . Имеем

$$\begin{aligned} f^2x &= f(fx) = (1 - (fx)_1 - (fx)_2)Afx = \\ &= (1 - \psi_{\lambda_1} y)\psi_{\lambda_1} yAe_2 = (1 - \psi_{\lambda_1} y)(\psi_{\lambda_1} y)(a_1(e_2)_2, a_2(e_2)_1)'. \end{aligned}$$

Обозначим через λ_2 длину вектора Ae_2 , то есть

$$\lambda_2 = \|Ae_2\| = (Ae_2)_1 + (Ae_2)_2 = a_1(e_2)_2 + a_2(e_2)_1.$$

Пусть $e_3 = Ae_2/\|Ae_2\| \geq 0$ – единичный вектор вдоль вектора Ae_2 (вдоль вектора f^2x). В результате получим

$$f^2x = \lambda_2(1 - \psi_{\lambda_1} y)(\psi_{\lambda_1} y) \frac{Ae_2}{\|Ae_2\|} = \lambda_2(1 - \psi_{\lambda_1} y)(\psi_{\lambda_1} y)e_3 = (\psi_{\lambda_2} \circ \psi_{\lambda_1} y)e_3.$$

С другой стороны, имеем

$$\begin{aligned} f^2x &= f(fx) = (1 - (fx)_1 - (fx)_2)Afx = (1 - \psi_{\lambda_1} y)(1 - y)yA^2e_1 = \\ &= \lambda^2 \frac{\lambda_1}{\lambda_1} (1 - \psi_{\lambda_1} y)(1 - y)ye_1 = (\lambda^2/\lambda_1)(1 - \psi_{\lambda_1} y)(\psi_{\lambda_1} y)e_1 = \\ &= \frac{\lambda^2}{\lambda_1} \cdot \frac{\lambda_2}{\lambda_2} (1 - \psi_{\lambda_1} y)(\psi_{\lambda_1} y)e_1 = \frac{\lambda^2}{\lambda_1 \lambda_2} (\psi_{\lambda_2}(\psi_{\lambda_1} y))e_1 = \frac{\lambda^2}{\lambda_1 \lambda_2} (\psi_{\lambda_2} \circ \psi_{\lambda_1} y)e_1. \end{aligned}$$

Сравнивая оба представления для вектора f^2x , получим $e_3 \equiv e_1$, $\lambda_1\lambda_2 = \lambda^2$ и $e_1 \geq 0$ – собственный вектор матрицы A^2 , соответствующий собственному значению λ^2 , то есть $A^2e_1 = \lambda^2e_1$.

Таким образом, векторы $x = ye_1$ и $f^2x = (\psi_{\lambda_2} \circ \psi_{\lambda_1}y)e_1$ расположены на одном и том же луче вдоль вектора e_1 .

Значит, отрезок луча единичной длины вдоль вектора e_1 ($\neq e$) является сечением Пуанкаре для траектории $f^m x$ и на нем действует отображение последования

$$f^2 = \psi_{\lambda_2} \circ \psi_{\lambda_1}.$$

Напомним еще раз, что суперпозиция $\psi_{\lambda_2} \circ \psi_{\lambda_1}$ по определению понимается как равенство

$$(\psi_{\lambda_2} \circ \psi_{\lambda_1})y = \psi_{\lambda_2}(\psi_{\lambda_1}y),$$

где числа λ_1, λ_2 , как нетрудно видеть, меняются в пределах $\min\{a_1, a_2\} \leq \lambda_1, \lambda_2 \leq \max\{a_1, a_2\}$.

Траектория $f^m x$ произвольной точки x из K^2 располагается на множестве, состоящем из двух единичной длины отрезков лучей вдоль векторов x и fx , циклически переходящих друг в друга под действием отображения f . Это множество назовем *циклом отрезков лучей периода 2* (в n -мерном случае см., например, [1, 5]).

Что представляет собой пространство K^2 ? Оно состоит из одного отрезка луча вдоль вектора e и континуума циклов отрезков лучей периода 2, отрезки лучей каждого из которых расположены в K^2 по обе стороны от одного отрезка луча.

Пара (λ_1, λ_2) однозначным образом определяет цикл отрезков лучей периода 2: на одном отрезке луча $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ (это множество можно считать циклом отрезков лучей периода 2 с совпадающими отрезками лучей); на цикле отрезков координатных лучей вдоль векторов $(0, 1)'$ и $(1, 0)'$ $\lambda_1 = a_1$ и $\lambda_2 = a_2$; на цикле отрезков лучей периода 2 вдоль векторов e_1, e_2 $\lambda_1 = \|Ae_1\|$ и $\lambda_2 = \|Ae_2\|$. При этом в силу равенства $\lambda_1 \cdot \lambda_2 = \lambda^2$ при переходе с одного отрезка луча на циклы отрезков лучей периода 2 вплоть до цикла отрезков координатных лучей параметры λ_1, λ_2 меняются непрерывным образом от значения λ до значений a_1, a_2 .

Таким образом, отрезок луча единичной длины вдоль произвольного вектора из K^2 является сечением Пуанкаре, на котором действует отображение последования вида (3) ($f = \psi_\lambda$ на одном отрезке луча).

3. Бифуркации рождения неподвижных точек отображения последования

Перейдем теперь непосредственно к изучению бифуркаций в неподвижных точках отображения $\psi_{\lambda_2} \circ \psi_{\lambda_1}$ на интервале $(0, 1)$.

В качестве области определения параметров (λ_1, λ_2) выберем максимально возможную, полагая $0 < \lambda_1, \lambda_2 \leq 4$ и $\lambda_1 \cdot \lambda_2 = \lambda^2$.

Распишем более подробно действие отображения $\psi_{\lambda_2} \circ \psi_{\lambda_1}$ на произвольную точку x отрезка I . Имеем

$$\begin{aligned} \psi_{\lambda_2} \circ \psi_{\lambda_1}x &= \psi_{\lambda_2}(\psi_{\lambda_1}x) = \lambda_2(1 - \psi_{\lambda_1}x)\psi_{\lambda_1}x = \\ &= \lambda_1\lambda_2(1 - \psi_{\lambda_1}x)(1 - x)x = \lambda^2(1 - \lambda_1(x - x^2))(x - x^2), \end{aligned}$$

то есть отображение $\psi_{\lambda_2} \circ \psi_{\lambda_1}$ можно считать зависящим также и от параметров λ_1, λ . Нам удобнее в дальнейшем рассматривать область параметров (λ_1, λ) , а не (λ_1, λ_2) . Область определения параметров будет иметь вид (см. также [5])

$$\Lambda = \{ (\lambda_1, \lambda) \mid 0 < \lambda_1 \leq 4, 0 < \lambda \leq 4, 4\lambda_1 \geq \lambda^2 \}.$$

В [2, с. 178] сформулированы условия (в виде теоремы 8.1), при которых происходят бифуркации рождения циклов в семействе гладких одномерных отображений, гладко зависящих от одного параметра. Хотя семейство отображений $\psi_{\lambda_2} \circ \psi_{\lambda_1}$ зависит от двух параметров, используем условия этой теоремы для обнаружения бифуркаций рождения новых точек и в нашем случае.

Неподвижные точки x отображения $\psi_{\lambda_2} \circ \psi_{\lambda_1}$, в которых возможны бифуркации рождения новых неподвижных точек ($x \neq 0$ и $x \neq 1$, иначе $\psi_{\lambda_2} \circ \psi_{\lambda_1} x = 0$), должны удовлетворять уравнению

$$\psi_{\lambda_2} \circ \psi_{\lambda_1} x = x,$$

а также уравнению

$$(\psi_{\lambda_2} \circ \psi_{\lambda_1})'_x = +1,$$

которое означает, что мультипликатор в неподвижной точке при бифуркационных значениях параметров (λ_1, λ) (производная по x функции $\psi_{\lambda_2} \circ \psi_{\lambda_1} x$) равен $+1$.

Запишем оба этих уравнения в виде следующей системы:

$$\begin{cases} \psi_{\lambda_2} \circ \psi_{\lambda_1} x = x, \\ (\psi_{\lambda_2} \circ \psi_{\lambda_1})'_x = 1 \end{cases}$$

или в развернутом виде

$$\begin{cases} \lambda^2(1 - \psi_{\lambda_1} x)(1 - x)x = x, \\ \lambda^2(1 - 2\psi_{\lambda_1} x)(1 - 2x) = 1. \end{cases}$$

Решая систему (сокращая на $x \neq 0$ обе части первого уравнения и вычитая из него второе уравнение), получим уравнение, не содержащее λ^2 ,

$$(1 - \psi_{\lambda_1} x)(1 - x) - (1 - 2\psi_{\lambda_1} x)(1 - 2x) = 0.$$

После несложных преобразований окончательно получим квадратное уравнение

$$3\lambda_1 x^2 - 4\lambda_1 x + \lambda_1 + 1 = 0,$$

решение которого имеет вид

$$x_{1,2} = \frac{2}{3} \pm \frac{1}{3} \sqrt{d}, \quad d = 1 - \frac{3}{\lambda_1}.$$

Обозначим $x_1(\lambda_1) = 2/3 + 1/3\sqrt{d}$ и $x_2(\lambda_1) = 2/3 - 1/3\sqrt{d}$. Проанализируем полученное уравнение.

При $\lambda_1 < 3$ имеем $d < 0$ и, следовательно, действительных корней нет. Это означает, что неподвижные точки отображения $\psi_{\lambda_2} \circ \psi_{\lambda_1}$, в которых возможны бифуркации рождения новых неподвижных точек, появляются, начиная с $\lambda_1 \geq 3$.

При $\lambda_1 = 3$ имеем $x_1 = x_2 = 2/3$ и $\lambda = 3$ (которое определяется из первого уравнения системы или из второго).

При $\lambda_1 > 3$ имеем $d > 0$ и значит, для каждого значения λ_1 существуют два решения $x_1 \neq x_2$. При заданном значении $\lambda_1 \geq 3$ неподвижным точкам $x_{1,2}$ соответствуют следующие значения параметра λ (которые можно найти как из первого, так и из второго уравнений системы):

$$\lambda^{(1,2)} = 1/\sqrt{(1 - \psi_{\lambda_1} x_{1,2})(1 - x_{1,2})}.$$

Здесь $\lambda^{(i)}$ соответствует решению x_i , $i = 1, 2$. (Знаменатель данного выражения отличен от нуля всюду на интервале $(0, 1)$ за исключением точки $x = 1/2$ при $\lambda = 4$.)

Подставляя вместо $x_{1,2}$ их значения, получим выражения для $\lambda^{(1,2)}$, как функций от λ_1 .

На рис. 1 приведены графики функций $x_{1,2}(\lambda_1)$ и $\lambda^{(1,2)}(\lambda_1)$.

Таким образом, в неподвижных точках отображения $\psi_{\lambda_2} \circ \psi_{\lambda_1}$, где возможны бифуркации рождения новых точек, семейство отображений $\psi_{\lambda_2} \circ \psi_{\lambda_1}$ можно рассматривать как однопараметрическое, зависящее от параметра λ_1 .

Остается проверить еще два условия теоремы 8.1 из [2, с. 178], при которых происходят бифуркации рождения новых неподвижных точек в неподвижных точках $x_{1,2}$ при $3 \leq \lambda_1 \leq 4$ и $\lambda^{(1,2)}$ как функций от λ_1 .

Эти условия состоят в оценке знаков следующих выражений:

$$1) (\psi_{\lambda_2} \circ \psi_{\lambda_1} x)''_{x^2}, \quad 2) \frac{d}{d\lambda_1} (\psi_{\lambda_2} \circ \psi_{\lambda_1} x).$$

В «1» оценивается знак второй производной по x , а в «2» – знак производной по λ_1 функции $\psi_{\lambda_2} \circ \psi_{\lambda_1}$.

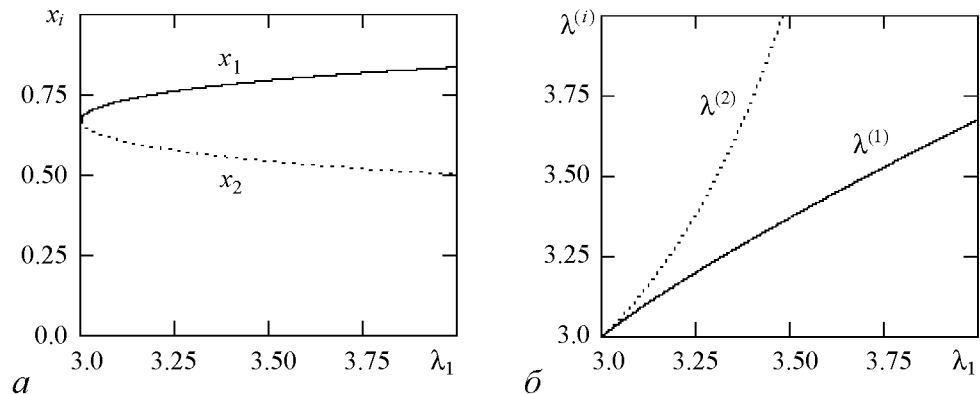


Рис. 1. Графики функций: $a - x_i(\lambda_1)$, $b - \lambda^{(i)}(\lambda_1)$

На самом деле, оказывается достаточно оценить знак произведения этих выражений:

$$(\psi_{\lambda_2} \circ \psi_{\lambda_1} x)''_{x^2} \cdot \frac{d}{d\lambda_1} (\psi_{\lambda_2} \circ \psi_{\lambda_1} x)$$

в неподвижных точках $x = x_{1,2}$ при $\lambda_1 \geq 3$ и $\lambda = \lambda^{(1,2)}(\lambda_1)$.

Нетрудно вычислить значения этих выражений

$$(\psi_{\lambda_2} \circ \psi_{\lambda_1} x)''_{x^2} = 2\lambda^2(6\psi_{\lambda_1} x - \lambda_1 - 1),$$

$$\frac{d}{d\lambda_1} (\psi_{\lambda_2} \circ \psi_{\lambda_1} x) = \psi_{\lambda} x (2\lambda'_{\lambda_1} (1 - \psi_{\lambda_1} x) - \psi_{\lambda} x),$$

где λ'_{λ_1} – производная функции λ по λ_1 .

Таким образом, необходимо оценить знаки двух выражений

$$(\lambda^{(i)})^2 (6\psi_{\lambda_1} x_i - \lambda_1 - 1) \psi_{\lambda^{(i)}} x_i (2(\lambda^{(i)})'_{\lambda_1} (1 - \psi_{\lambda_1} x_i) - \psi_{\lambda^{(i)}} x_i), \quad i = 1, 2.$$

Для оценки знаков этих выражений были построены их графики (как функций от λ_1), которые показали, что одно из произведений положительно (в точке x_1 при $\lambda = \lambda^{(1)}$), а другое отрицательно (в точке x_2 при $\lambda = \lambda^{(2)}$) при всех значениях параметра $\lambda_1 > 3$. При $\lambda_1 = \lambda = 3$ в точке $x = 2/3$ оба произведения равны нулю. В этом случае теорема 8.1 из [2] утверждает, что при $\lambda_1 > 3$ в достаточно малой положительной окрестности ε_1 неподвижной точки x_1 две новых неподвижных точки (одна из которых притягивающая, а другая – отталкивающая) появляются при уменьшении параметра λ_1 (и при его увеличении новых точек не возникает) и в достаточно малой положительной окрестности ε_2 неподвижной точки x_2 новые точки возникают при увеличении параметра λ_1 (и при уменьшении параметра λ_1 новых точек не возникает). (При построении графиков была использована аппроксимационная формула первого порядка для вычисления производной λ'_{λ_1} : $\lambda'_{\lambda_1} \approx [\lambda(\lambda_1 + h_{\lambda}) - \lambda(\lambda_1)]/h_{\lambda}$, где h_{λ} – шаг по λ_1 .)

Чтобы понять суть происходящих бифуркаций, обратимся к виду поверхности неподвижных точек.

В работе [5] установлено, что поверхность неподвижных точек отображения $\psi_{\lambda_2} \circ \psi_{\lambda_1}$ является многообразием катастрофы в пространстве $(x\lambda_1\lambda)$ [4, с. 107], поскольку точки этой поверхности удовлетворяют уравнению

$$\psi_{\lambda_2} \circ \psi_{\lambda_1} x = x,$$

которое после несложных преобразований приводится к кубическому уравнению

$$x^3 + P(\lambda_1)x + Q(\lambda_1, \lambda) = 0.$$

Здесь $P(\lambda_1) = 1/\lambda_1 - 1/3$, $Q(\lambda_1, \lambda) = 2/27 + 1/\lambda_1 \cdot (1/\lambda^2 - 1/3)$.

Дискриминант полученного кубического уравнения имеет вид

$$D(\lambda_1, \lambda) = -108(Q^2/4 + P^3/27),$$

а уравнение $D(\lambda_1, \lambda) = 0$ задает так называемое *бифуркационное множество (параметров)*, которое является образом *кривой складок* (в точках которой на многообразии катастрофы касательная плоскость вертикальна) при проектировании поверхности неподвижных точек на область параметров Λ по правилу $(x\lambda_1\lambda) \rightarrow (\lambda_1\lambda)$.

Линия $D(\lambda_1, \lambda) = 0$ представляет собой полукубическую параболу с вершиной в точке $(\lambda_1, \lambda) = (3; 3)$ и расположена в области параметров $\lambda_1, \lambda \geq 3$.

Сравнивая графики функций $\lambda^{(1,2)}(\lambda_1)$ с линией уровня $D(\lambda_1, \lambda) = 0$, видим, что функции $\lambda^{(1,2)}(\lambda_1)$ и $D = 0$ задают одну и ту же кривую в плоскости (λ_1, λ) , то есть задают бифуркационное множество параметров.

Таким образом, (единственным!) множеством неподвижных точек отображения $\psi_{\lambda_2} \circ \psi_{\lambda_1}$, в которых происходят бифуркации рождения новых неподвижных точек, является кривая складок на многообразии катастрофы (попутно мы определили явный вид бифуркационного множества).

Из непрерывной зависимости функций $x_{1,2}(\lambda_1)$ и $\lambda^{(1,2)}(\lambda_1)$ от параметра λ_1 ($\lambda_1 \geq 3$) следует, что бифуркации рождения новых неподвижных точек происходят во всех точках на кривой складок (за исключением начала кривой складок) при всех значениях параметров (λ_1, λ) из бифуркационного множества (за исключением точки сборки) и в других неподвижных точках отображения $\psi_{\lambda_2} \circ \psi_{\lambda_1}$ новые неподвижные точки путем бифуркации рождения не появляются.

Теперь становится понятным, в каких неподвижных точках отображения $\psi_{\lambda_2} \circ \psi_{\lambda_1}$ происходят бифуркации рождения новых точек и где они расположены на многообразии катастрофы.

Графики функций $x_{1,2}(\lambda_1)$ и $\lambda^{(1,2)}(\lambda_1)$ показывают, что в области параметров $(\lambda_1, \lambda) \geq (3, 3)$ нижний лист многообразия катастрофы подворачивается, образуя кривую складок, на линии $\lambda^{(2)}$ (здесь два совпадающих корня кубического уравнения x меньше третьего), затем выше расположен средний лист, который, подворачиваясь на кривой складок, соответствующей линии $\lambda^{(1)}$ (здесь два совпадающих корня кубического уравнения x больше третьего), переходит в верхний лист.

При этом неустойчивые неподвижные точки отображения $\psi_{\lambda_2} \circ \psi_{\lambda_1}$ расположены на среднем листе, а устойчивые – на верхнем и нижнем листах многообразия катастрофы [4, с. 113].

Таким образом, новые неподвижные точки путем бифуркации рождения возникают *при уменьшении параметра* λ_1 на кривой складок, соответствующей линии $\lambda^{(1)}$, в окрестности $(x_1 - \varepsilon_1, x_1 + \varepsilon_1)$ точки x_1 , при этом устойчивая (притягивающая) неподвижная точка располагается на верхнем листе многообразия катастрофы и неустойчивая (отталкивающая) – на среднем. На кривой складок, соответствующей линии $\lambda^{(2)}$, новые неподвижные точки путем бифуркации рождения возникают при увеличении параметра λ_1 в окрестности $(x_2 - \varepsilon_2, x_2 + \varepsilon_2)$ точки x_2 , при этом устойчивая неподвижная точка располагается на нижнем листе многообразия катастрофы и неустойчивая – на среднем.

Обнаруженный тип бифуркаций имеет наглядное подтверждение, если обратиться к одномерным бифуркационным диаграммам для отображения $\psi_{\lambda_2} \circ \psi_{\lambda_1}$ при фиксированном параметре λ и меняющемся вдоль оси x параметре λ_1 , $\lambda^2/4 \leq \lambda_1 \leq 4$. По оси y откладываются значения переменной $x \in I$, расположенные на аттракторе, которые получаются при итерациях отображения $\psi_{\lambda_2} \circ \psi_{\lambda_1}$.

На рис. 2 приведены одномерные бифуркационные диаграммы для отображения $\psi_{\lambda_2} \circ \psi_{\lambda_1}$. Одномерная бифуркационная диаграмма строится для фиксированной начальной точки $x \in (0, 1)$.

На рис. 2, а при значениях параметров $(\lambda_1, \lambda^{(2)}(\lambda_1)) \approx (3.149, 3.2)$ из бифуркационного множества наблюдается разрыв в положении неподвижной точки

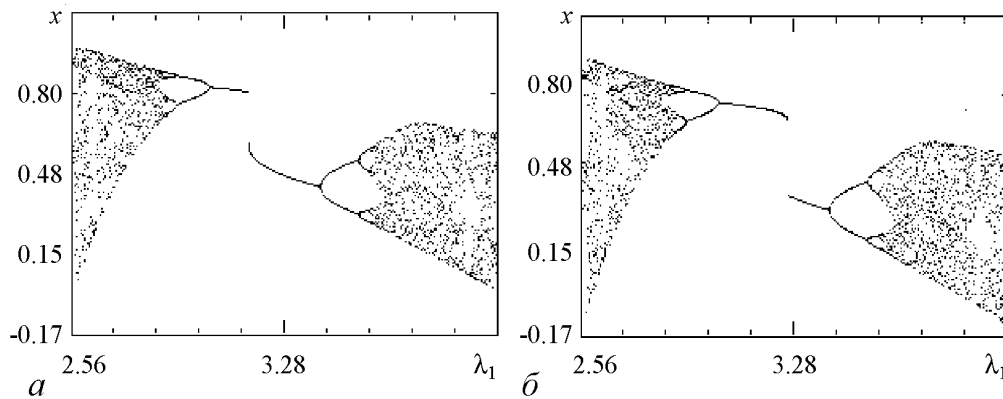


Рис. 2. Одномерные бифуркационные диаграммы для отображения $\psi_{\lambda_2} \circ \psi_{\lambda_1}$ при $\lambda = 3.2$, $2.56 \leq \lambda_1 \leq 4$ для начальных точек x : $a - 0.55$; $b - 0.85$

$x_2(3.149) \approx 0.594$, расположенной на кривой складок. В этой точке происходит бифуркация рождения двух новых неподвижных точек, одну из которых (притягивающую) мы наблюдаем в качестве аттрактора при $\lambda_1 > 3.149$. Эта новая точка расположена на нижнем листе многообразия катастрофы. При дальнейшем увеличении параметра λ_1 наблюдаются бифуркации удвоения периода притягивающих циклов и (возможный) переход в хаос. При $\lambda_1 < 3.149$ также наблюдается неподвижная точка в качестве аттрактора, но она уже расположена на верхнем листе многообразия катастрофы, поскольку точки нижнего листа отсутствуют при $\lambda_1 < 3.149$. Однако эта неподвижная точка согласно полученному в данной статье результату не появляется путем бифуркации рождения новых неподвижных точек из точки на кривой складок при $(\lambda_1, \lambda^{(2)}(\lambda_1)) \approx (3.149, 3.2)$.

Аналогичная одномерная бифуркационная картина наблюдается на рис. 2, б, но разрыв в положении неподвижной точки приходится уже на значения параметров $(\lambda_1, \lambda^{(1)}(\lambda_1)) \approx (3.252, 3.2)$ из бифуркационного множества. В неподвижной точке $x_1(3.252) \approx 0.759$, расположенной на кривой складок, происходит бифуркация рождения двух новых неподвижных точек, одну из которых (притягивающую) мы наблюдаем в качестве аттрактора при $\lambda_1 < 3.252$ и расположена она на верхнем листе многообразия катастрофы. Данная одномерная бифуркационная картина с точностью до изоморфизма повторяет одномерную бифуркационную картину, представленную на рис. 2, а, но при уменьшении параметра λ_1 , и ее описание аналогично. Наблюдаемая в качестве аттрактора неподвижная точка при $\lambda_1 > 3.252$, расположенная на нижнем листе многообразия катастрофы, также не появляется путем бифуркации рождения новых неподвижных точек из точки на кривой складок при $(\lambda_1, \lambda^{(1)}(\lambda_1)) \approx (3.252, 3.2)$.

Еще две одномерные бифуркационные диаграммы для отображения $\psi_{\lambda_2} \circ \psi_{\lambda_1}$ при $\lambda = 3.5$, $3.063 \leq \lambda_1 \leq 4$ представлены на рис. 3.

На рис. 3, а при значении параметров $(\lambda_1, \lambda^{(2)}(\lambda_1)) \approx (3.305, 3.5)$ из бифуркационного множества наблюдается смена типа аттрактора: неподвижная точка $x_2(3.305) \approx 0.565$, расположенная на кривой складок, при $\lambda_1 < 3.305$ сменяется другим типом динамики – (возможным) нерегулярным поведением. В самой же точке x_2 происходит бифуркация рождения двух новых неподвижных точек, одна из кото-

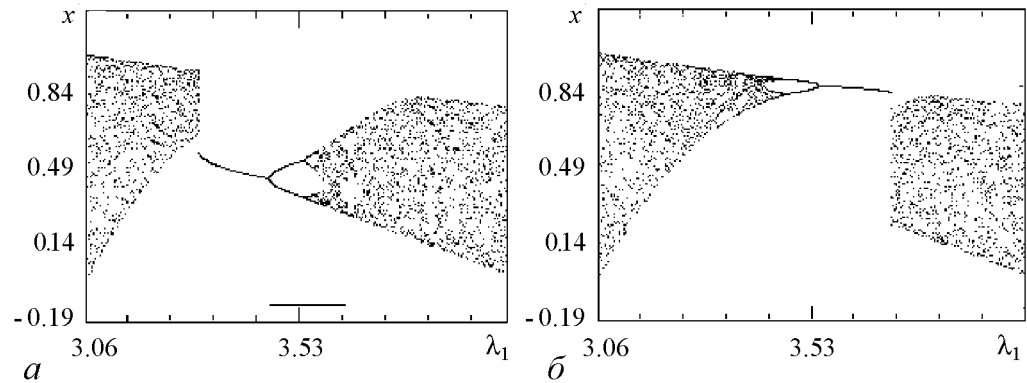


Рис. 3. Одномерные бифуркационные диаграммы для отображения $\psi_{\lambda_2} \circ \psi_{\lambda_1}$ при $\lambda = 3.5$, $3.06 \leq \lambda_1 \leq 4$ для начальных точек x : $a - 0.5$; $b - 0.8$

рых (притягивающая) наблюдается в качестве аттрактора при $\lambda_1 > 3.305$ на нижнем листе многообразия катастрофы. При дальнейшем увеличении параметра λ_1 снова наблюдаются бифуркации удвоения периода притягивающих циклов и (возможный) переход в хаос.

Аналогичную смену типа аттрактора, но при уменьшении параметра λ_1 , наблюдаем на рис. 3, б при значении параметров $(\lambda_1, \lambda^{(1)}(\lambda_1)) \approx (3.706, 3.5)$ из бифуркационного множества: неподвижная точка $x_1(3.706) \approx 0.812$, расположенная на кривой складок, сменяется другим типом динамики (возможно, хаотическим), при этом в самой точке x_1 происходит бифуркация рождения двух новых неподвижных точек, одна из которых (притягивающая) наблюдается в качестве аттрактора при $\lambda_1 < 3.706$ на верхнем листе многообразия катастрофы.

4. Бифуркации циклов периода 2 отображения f

Используем полученный для отображения $\psi_{\lambda_2} \circ \psi_{\lambda_1}$ результат по бифуркациям рождения новых точек для описания возникающих типов бифуркаций циклов периода 2 в семействе отображений f с двухпараметрической динамикой.

Очевидно, что для заданного отображения f параметр λ фиксирован: $\lambda = \sqrt{a_1 \cdot a_2}$ и $\min\{a_1, a_2\} \leq \lambda_1 \leq \max\{a_1, a_2\}$.

Определим значение λ , при котором ветви кубической параболы, задающей бифуркационное множество параметров, пересекаются с границей области Λ (см. рис. 1, б). Подставляя значение $\lambda_1 = 4$ в формулу $\lambda = \lambda^{(1)}(\lambda_1)$, получим $\lambda = \lambda_V$, где $\lambda_V = 3\sqrt{3/2} \approx 3.674$. При этом же значении $\lambda = \lambda_V$ вторая ветвь $\lambda = \lambda^{(2)}(\lambda_1)$ кубической параболы пересекает границу области Λ при значении $\lambda_1 \approx 3.375$. Более того, прямая $\lambda = \text{const}$, $3 \leq \lambda \leq \lambda_V$, пересекает ветви кубической параболы в двух точках при значениях параметра λ_1 , например, λ'_1, λ''_1 так, что выполнено равенство $\lambda'_1 \lambda''_1 = \lambda^2$.

Тогда двухпараметрическое семейство отображений f можно разделить на две части. Первой части принадлежат отображения f со значениями λ из промежутков $(0, 3] \cup [\lambda_V, 4]$, у которых из циклов периода 2 возможно появление только циклов периода 4 путем бифуркации удвоения периода. Второй части принадлежат отобра-

жения f со значениями λ из промежутка $(3, \lambda_V)$, у которых существуют как циклы периода 2, в которых путем бифуркации удвоения периода появляются циклы периода 4, так и циклы периода 2, в которых путем бифуркации рождения появляются два новых цикла периода 2 (один из них притягивающий, а другой – отталкивающий).

Заключение

Двумерное логистическое отображение с неотрицательной матрицей (параметров) циклического вида – это единственный случай, когда динамика отображения является двухпараметрической (отображения последования для него представимы в виде суперпозиции двух одномерных логистических отображений с двумя параметрами). Отображения с неотрицательными матрицами другого вида имеют однопараметрическую динамику (отображения последования линейно изоморфны однопараметрическим одномерным логистическим отображениям).

Поэтому можно сказать, что в семействе двумерных логистических отображений с произвольной неотрицательной матрицей параметров (размерности 2×2) отображения с двухпараметрической динамикой образуют множество меры нуль (в четырехмерной области параметров параметры отображений с двухпараметрической динамикой «заметают» двумерную (плоскую) область нулевого «объема»). Однако именно эти отображения демонстрируют качественно отличающиеся от одномерного однопараметрического случая свойства. Одним из таких свойств является изученная в данной статье бифуркация рождения новых циклов в циклах периода 2.

Обнаружено, что в семействе двумерных логистических отображений с двухпараметрической динамикой существует множество отображений (ненулевой меры), имеющих как циклы периода 2, в которых путем бифуркации удвоения периода появляются циклы периода 4, так и циклы периода 2, в которых путем бифуркации рождения появляются два новых цикла периода 2.

Работа выполнена в рамках ПФИ Ф0369 «Фундаментальные вопросы физики, математики, механики и информатики».

Библиографический список

1. Панкратова И.Н. О предельных множествах многомерного аналога нелинейного логистического разностного уравнения // Дифференц. уравнения. 1996. Т. 32, № 7. С. 995.
2. Шарковский А.Н., Коляда С.Ф., Сивак А.Г., Федоренко В.В. Динамика одномерных отображений. Киев: Наукова Думка, 1989.
3. Фейгенбаум М. Универсальность в поведении нелинейных систем // Успехи физ. наук. 1983. Т. 141, № 2. С. 343.
4. Постон Т., Стюарт И. Теория катастроф и ее приложения. М.: Мир, 1980.
5. Панкратова И.Н. Представление многогрупповой популяционной модели в виде одногрупповой модели со многими параметрами // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2005. Т. 13, № 5–6. С. 135.

6. *Leslie P.H.* The use of matrices in certain population mathematics // *Biometrika*. 1945. Vol. 33. P. 183.
7. *Свирижев Ю.М., Логофет Д.О.* Устойчивость биологических популяций. М.: Наука, 1978.
8. *Caswell H.* Matrix population models: construction, analysis and interpretation. Sunderland, Massachusettes, USA: Sunauer Associates Inc. 1989.
9. *Логофет Д.О.* Еще раз о нелинейной модели Лесли: асимптотическое поведение траекторий в примитивном и импримитивном случаях // Докл. АН СССР. 1991. Т. 318, № 5. С. 1077.
10. *Гантмахер Ф.Р.* Теория матриц. М.: Наука, 1988.

*Институт математики
министерства образования и науки
РК Алматы, Казахстан*

*Поступила в редакцию 29.11.2007
После доработки 24.04.2008*

HOPF BIFURCATIONS OF CYCLES OF PERIOD TWO OF TWO-DIMENSIONAL LOGISTIC MAP

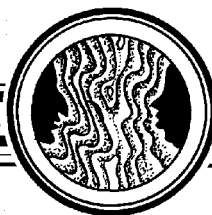
I.N. Pankratova

Maps having cycles of period two in which Hopf bifurcations of new cycles occur are localized in the family of two-dimensional logistic maps. For the purposes of illustration of the bifurcation property one-dimensional sections of bifurcation diagrams with one fixed parameter for two-parameters' first-return maps of two-dimensional logistic maps are given.



Панкратова Ирина Николаевна – родилась в 1958 году, окончила математический факультет Казахского государственного университета им. С.М.Кирова в 1980 году. Работает в институте математики МОН РК в должности ведущего научного сотрудника, кандидат физико-математических наук (1994). Имеет более 60 научных публикаций. Область научных интересов: многомерная многопараметрическая нелинейная динамика и ее применения в биологии и других областях науки.

E-mail: irina.pankratova@math.kz



ИЗ ИСТОРИИ ГАМИЛЬТОНОВА ХАОСА: ИССЛЕДОВАНИЯ СТОХАСТИЧНОСТИ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ В ТРУДАХ НОВОСИБИРСКОЙ ШКОЛЫ

Р.Р. Мухин

Статья посвящена вопросам истории открытия хаоса в гамильтоновых системах в 1960-е годы, мало освещенной в литературе по сравнению с историей диссипативного хаоса. Главным центром исследований гамильтонова хаоса был Институт ядерной физики в Новосибирске, где ключевая роль принадлежала Б.В. Чирикову и Г.М. Заславскому – крупнейшим специалистам в данной области в мире.

1. Начало исследований. Критерий Чирикова

В 1960-е годы главным центром исследований хаоса в гамильтоновых физических системах становится Институт ядерной физики Сибирского отделения АН СССР (Новосибирск). Основателем новосибирской школы нелинейной динамики является Борис Валерианович Чириков (1928–2008). Чириков принадлежит к первому выпуску физико-технического факультета МГУ (ныне Московский физико-технический институт). После окончания института он недолго проработал в Лаборатории № 3 (ныне Институт теоретической и экспериментальной физики в Москве). Затем по приглашению руководителя лаборатории новых методов ускорения, А.М. Будкера, в 1954 году Чириков переходит на работу в Лабораторию измерительных приборов (ЛИПАН, ныне Российский научный центр «Курчатовский институт»). В 1958 году в Новосибирском Академгородке был организован Институт ядерной физики Сибирского отделения АН СССР, первым директором которого стал Будкер. В следующем году Чириков перебирается в Новосибирск, начинает активно работать в ИЯФ и одновременно вести занятия в только что открывшемся Новосибирском университете [1, 2].

Здесь надо сказать несколько слов о том, как формировались коллективы институтов открывшегося Сибирского отделения Академии наук. Их ядро составили сотрудники научных институтов Москвы, Ленинграда и других городов, а также молодые выпускники различных вузов страны. Через несколько лет сюда добавилось сильное пополнение из так называемого «нулевого» выпуска молодого Новосибирского университета, первый набор которого (24 студента на отделение физики, столько же на отделение математики и механики) составили студенты из вузов со всей

страны, набранные сразу на второй курс. Среди приехавших из Института атомной энергии в ИЯФ кроме Будкера и Чирикова были С.Т. Беляев, В.М. Галицкий, Р.З. Сагдеев и другие.

Роальд Зинурович Сагдеев (родился в 1932 году), после окончания МГУ (1956) собирался поступать в аспирантуру Института физических проблем. Однако заявка в аспирантуру к Л.Д. Ландау была отклонена университетской комиссией по распределению. Ландау обратился к Курчатову с просьбой вмешаться, но единственное, что смог сделать Курчатов, это взять Сагдеева на работу в свой институт [3]. Все же защиту диссертации Сагдеев решил провести в Институте физических проблем. Присутствовавший на этой защите В.И. Коган вспоминал, что сначала много вопросов задавал П.Л. Капица, затем другие. Итог подвел Л.Д. Ландау, отметивший, что поражает способность диссертанта мгновенно находить ответы на любые вопросы [4]. Такое признание из уст Ландау, который сам отличался мгновенной реакцией при ответах на поставленные вопросы, было довольно необычным. В конце 1950-х годов Сагдеев прочел в Московском энергетическом институте один из первых учебных курсов по физике плазмы [5]. Физика плазмы в то время была еще очень молодой областью и с нее только что была снята завеса секретности. После переезда в Новосибирск (1961) Сагдеев возглавил одну из лабораторий ИЯФ. Всего через восемь лет после окончания университета Сагдеев был избран членом-корреспондентом АН СССР (1964). Находящаяся на взлете научной карьеры фигура Сагдеева была очень привлекательной для молодых физиков [6]. Из «нулевого» выпуска вышли первые аспиранты Сагдеева: А.А. Галеев, В.Е. Захаров, А.М. Фридман, М.С. Моисеев, их имена сейчас широко известны. К ним надо добавить Г.М. Заславского.

Георгий Моисеевич Заславский (родился в 1935 году), только что окончивший Одесский университет и приехавший в Академгородок, активно включился в исследования, проводившиеся в ИЯФ. Его кандидатская диссертация была посвящена вопросам релятивистской гидродинамики. Чириков и Сагдеев определили интерес Заславского к проблематике хаоса, которая и стала предметом всех его последующих исследований. С Чириковым и Сагдеевым выполнены первые работы Заславского в этой области. Чириков и Заславский по праву считаются одними из ведущих в мире специалистов по хаосу. В дальнейшем выделилось две группы исследований хаоса – Б.В. Чириков, В.В. Вечеславов, Ф.М. Израйлев, Д.Л. Шепелянский и Г.М. Заславский, Г.П. Берман, П.И. Белобров, А.Р. Коловский, Х.-Р.Я. Рачко, В.Н. Сынах, Н.Н. Филоненко и др.

Жизнь в Академгородке не ограничивалась только наукой, во второй половине 1960-х годов там происходили очень бурные события. Представление об атмосфере того времени дают воспоминания А.И. Бурштейна [7]. Одним из таких событий явилось письмо с протестом против процесса Гинзбурга–Галанскова. Речь идет об одном из самых громких политических процессов в СССР, состоявшемся в январе 1968 года. А. Гинзбург, Ю. Галансков, А. Добровольский и В. Лашкова обвинялись в «антисоветской агитации и пропаганде». Поначалу это письмо подписало около 500 человек, но после оказанного давления осталось 46 подписей. Среди них фамилии Г.М. Заславского, В.Е. Захарова, А.М. Фридмана [8]. Эти подписи дорого обошлись всем троим. Они стали «невъездными», кроме того, у Заславского была отменена объявленная защита докторской диссертации, которая должна была состояться в ИЯФ в 1970 году. Как вспоминал Заславский, – «Сначала пытались давить на оппо-

нентов (М.А. Леонтович, И.М. Лифшиц, Я.Г. Синай), чтобы они отказались. Когда из этого ничего не вышло, мне за пять дней до защиты сообщили, что защита отменяется. Никакой мотивировки не было, просто отменяется и все. Потом Леонтович начал искать, где мне будет можно защититься, и мою работу приняли в Институте низких температур в Харькове. Здесь очень значительна роль директора этого института Б.И. Веркина, человека, сделавшего много добра разным людям. Защита прошла в 1973 году, я очень благодарен всем, кто мне помог. После всего этого меня не брали на работу, куда первоначально приглашали. В конечном итоге я оказался в Институте физики им. Л.В. Киренского в Красноярске» [9]. Группа Сагдеева покинула ИЯФ. Он сам вместе с Галеевым в 1970 году уехал в Москву, в Институт высоких температур. Через несколько лет Сагдеев стал директором Института космических исследований, куда в середине 1980-х он пригласил Заславского. В 1991 году Заславский уехал в США, в один из ведущих исследовательских центров – Институт им. Р. Куранта при Нью-Йоркском университете, где работает до настоящего времени.

Еще работая в ЛИПАНе, под влиянием Будкера Чириков заинтересовался вопросами нелинейных колебаний, которые были стимулированы задачами создания новых ускорителей и открытых систем магнитного удержания плазмы, или ловушек с «магнитными пробками». Эти задачи заняли главное место в тематике исследований ИЯФ, в котором сразу после его создания начались интенсивные исследования динамики заряженных частиц в магнитных ловушках. Проблема была поставлена Будкером [10] и связана с продолжением исследований по удержанию плазмы для управляемого термоядерного синтеза, коллективными процессами в плазме, условиями устойчивости движения заряженных частиц в циклических ускорителях.

Будкер критиковал новый тип ускорителей с жесткой фокусировкой, утверждая, что при большом числе колебаний частицы около равновесной орбиты за один оборот начальная фаза колебаний должна как-то «забываться», вследствие чего колебания будут диффузионно расти и это приведет к быстрой гибели частиц [2]. Диффузия, предсказанная Будкером, была обнаружена в вычислительных экспериментах Ф. Говарда и М. Хайна в ЦЕРНе [11]. Однако механизм диффузии был совершенно не ясен.

Приведем выдержки из письма Чирикова автору: «В течение многих лет наша небольшая группа (В.В. Вечеславов, Ф.М. Израйлев, Д.Л. Шепелянский и я) занимается исследованием так называемого динамического хаоса. Это удивительное явление позволяет понять природу и механизм статистических законов (таких, например, как знаменитый закон возрастания энтропии, то есть беспорядка или хаоса), играющих столь значительную роль в природе. А началось все с «простой» задачи Будкера, как мы говорим теперь, а фактически, с очень интересных (как всегда с Андреем Михайловичем) обсуждений или, лучше сказать, горячих споров о судьбе заряженных частиц в магнитной ловушке...

В том далеком 1954 году молодой Андрей Будкер выдвинул свой подход к решению проблемы управляемого термоядерного синтеза, решению, казавшемуся тогда таким близким. *Вместо того, чтобы удерживать заряженные частицы плазмы вместе с магнитными линиями* (как предложили А.Д. Сахаров и И.Е. Тамм), Андрей Михайлович предполагал преградить путь частицам вдоль магнитного поля с помощью, как он шутил, «железных пробок». Дело, конечно, не в самих пробках, а в областях повышенного магнитного поля, от которых и отражаются вращающиеся

ся частицы. Простейший вопрос, на который нужно было дать немедленный ответ, чтобы можно было серьезно рассматривать это предложение, состоял в следующем: способна ли такая «ловушка с магнитными пробками» удерживать достаточно долго (миллионы колебаний) хотя бы одну заряженную частицу? В этом и состояла задача Будкера. И, хотя на первый взгляд она казалась очень простой, Андрей Михайлович сразу понял или, лучше сказать, интуитивно почувствовал, что теоретическое решение здесь едва ли возможно.

Интуиция Будкера оказалась весьма глубокой: как выяснилось впоследствии, его задача была не просто очень сложной, но и принципиально неразрешимой полнотью, как и знаменитая задача трех тел в небесной механике. В обоих случаях движение системы может стать при определенных условиях хаотическим, то есть весьма запутанным и непредсказуемым, несмотря на обманчивую простоту уравнений движения и отсутствие в системе каких-либо случайных параметров или шума. Частица двигалась так, словно на нее действовали какие-то случайные силы, хотя никаких других сил, кроме простой силы Лоренца, в магнитном поле на самом деле не было. Со времен Больцмана с его гипотезой «молекулярного хаоса» считалось, что подобное нерегулярное движение возможно лишь в очень сложных системах с огромным числом степеней свободы. А здесь – всего лишь одна частица в аксиально-симметричном магнитном поле, всего две степени свободы! Открылась какая-то совершенно новая область явлений, и оторвать нас от этих исследований было уже невозможно. Возникло новое, хотя и небольшое, направление работ в нашем Институте» [12].

Теория нелинейных колебаний была создана в школе А.А. Андропова под воздействием запросов радиофизики и теории автоматического регулирования. Для решения поставленных задач был привлечен новейший математический аппарат – только что зародившаяся теория динамических систем. Затем прогресс в теории нелинейных колебаний в значительной степени происходил в силу логики внутреннего развития физического знания. Теперь история в точности повторилась с тем изменением, что вместо диссипативных систем стали рассматриваться консервативные (гамильтоновы) системы. Интерес к классическим гамильтоновым системам, которые какое-то время находились на заднем плане, вновь возродился постановкой новых физических задач. Конечно, стали использоваться новейшие достижения теории динамических систем. Совершенно естественно, установились постоянные контакты с молодыми московскими математиками, в особенности с В.И. Арнольдом, Я.Г. Синаем, Д.В. Аносовым. Эти контакты в известной степени продолжаются до сих пор [13].

Для рассматриваемых задач имелась прочная математическая база в двух предельных случаях: устойчивых динамических систем, описываемых теорией КАМ, и максимально неустойчивых систем, описываемых эргодической теорией. Строгий анализ общих динамических систем, который включал бы теорию КАМ и эргодическую теорию в качестве частных случаев, наталкивается на трудности принципиального характера и в значительной степени остается делом будущего. Большинство реальных систем относится как раз к промежуточному случаю. Несмотря на грандиозные успехи современной эргодической теории, она непосредственно применима к очень небольшому числу реальных систем (как, например, системы бильярдного типа).

Проблема состояла в изучении реальных физических систем в общем случае с использованием тех математических средств, которые были к тому времени разработаны. Точные законы (уравнения Лагранжа, Гамильтона и др.) считаются известными, и задача состоит в получении следствий из них, разработке приближенной системы понятий и законов. Чириков называл такой подход конструктивной физикой, имея в виду, что речь идет не о формулировке каких-либо новых законов природы, а о применении хорошо известных и твердо установленных законов механики к объяснению и конструированию новых явлений и объектов [14]. К конструктивной физике он относил теорию колебаний, статистическую физику, химию. В дальнейшем его взгляды по этому поводу претерпели изменения.

При недостатке строгих результатов особое значение приобретали полукачественные методы, основанные на физическом подходе. В отличие от дедуктивных математических схем в основу физической теории хаоса (которая в Новосибирской школе получила название «теория стохастичности») часто были положены оценки по порядку величины, дополненные результатами вычислительных экспериментов. С помощью теории стохастичности появилась возможность не только увидеть общую картину возникновения и развития сложной динамики, но нередко получать количественные соотношения. Надо отметить, что качественное рассмотрение физических задач, оценки величин, совершенно неожиданные аналогии являются одними из самых сильных сторон Чирикова. Еще одна его характерная черта – глубокое понимание математики. Не так часто бывает, что физик находит неточности и ошибки в математических трудах [15].

В своей докторской диссертации [14] Чириков формулирует программу исследований: проведение изучения многомерных нелинейных колебаний консервативной системы в *целом*, то есть на неограниченном временном интервале и для произвольных начальных условий (программа Чирикова). Основой анализа нелинейных колебаний является понятие *нелинейного резонанса*, восходящее еще к Л. Эйлеру и Ж.-Л. Лагранжу, которые использовали его в задачах небесной механики (либрационное движение планет). Позднее нелинейный резонанс нашел применение в теории ускорителей в связи с механизмом автофазировки (В.И. Векслер, Э. Макмиллан). Критерий стохастичности основан на понятии перекрытия нелинейных резонансов, который определяет основные особенности движения.

Чириков рассматривает одномерный нелинейный осциллятор под действием периодического внешнего возмущения. Эта модель стала основной при изучении гамильтонова хаоса. Для нее вводится понятие расширенного фазового пространства, в котором роль добавочной координаты играет время. Таким образом, у основной модели фазовое пространство трехмерно, и в этой ситуации говорят, что система имеет $3/2$ степеней свободы. Это минимальная размерность, при которой существует хаос. Основную модель можно представить в виде отображений, что особенно удобно для проведения вычислительных экспериментов. Гамильтониан системы в переменных «действие I – угол θ » имеет вид

$$H(I, \theta, t) = H_0(I) + \varepsilon V(I, \theta, \varphi(t)), \quad (1)$$

где H_0 описывает свободный нелинейный осциллятор. Получаются следующие урав-

нения движения для осциллятора:

$$\dot{I} = -\varepsilon \frac{\partial V(I, \theta, \varphi)}{\partial \theta}, \quad \dot{\theta} = \omega(I) + \varepsilon \frac{\partial V(I, \theta, \varphi)}{\partial I}, \quad \dot{\varphi} = \Omega, \quad (2)$$

где ε – параметр возмущения ($\varepsilon \ll 1$), фаза φ характеризует внешнее возмущение с периодом $T = 2\pi/\Omega$. Спектр возмущения имеет частоты $n\Omega$, и условие резонанса имеет вид

$$m\omega(I) + n\Omega = 0. \quad (3)$$

Существенным и новым в рассмотрении Чирикова является *взаимодействие нелинейных резонансов*, которое всегда имеется в нелинейной системе. Взаимодействием резонансов Чириков называет ситуацию присутствия в системе одновременно нескольких резонансов, обусловленных гармониками возмущения. Отметим идентичность условия резонанса (3) и условия появления малых знаменателей в рядах теории возмущений. Согласно теории КАМ, имеется критическое значение возмущения, после которого движение становится неустойчивым. Взаимодействие резонансов служит источником неустойчивости колебаний, которая приводит к хаотическому движению, то есть появлению статистических законов в динамической системе [16, 14, 17].

В своей первой работе по проблеме Будкера «Резонансные процессы в магнитной ловушке» [16] Чириков рассматривает резонансы между ларморовским вращением заряженной частицы в магнитном поле и медленными колебаниями ее вдоль силовых линий. Постановка такого рода задач относится еще к 1928 году – в [18] указана роль резонансов в изменении адиабатического инварианта (магнитного момента частицы). Задача является столь сложной, что не удается провести достаточно полный математический анализ. Чириков формулирует простой и эффективный физический критерий разрушения интегралов движения и развития неустойчивости. Взаимодействие резонансов зависит от соотношения между шириной резонанса (ширина сепаратрисы) $\Delta\omega$ и расстоянием до ближайшего соседнего резонанса $\Delta = |\omega_{i+1} - \omega_i|$. Величина

$$S = \frac{\Delta\omega}{\Delta} \quad (4)$$

называется константой связи. Перекрытие резонансов начинается тогда, когда их сепаратрисы касаются друг друга, чему отвечает значение

$$S \geq 1. \quad (5)$$

Это условие означает переход к нерегулярному, хаотическому движению. Еще в вычислительных экспериментах Говарда и Хайна (1953) был получен критерий неустойчивости вида (5) [11]. Чириков распространил условие перекрытия нелинейных резонансов (5) на нелинейные гамильтоновы системы в общем случае и назвал его «критерием стохастичности»; в литературе он больше известен как «критерий Чирикова».

Критерий Чирикова является качественным методом оценки. Недостаток качественных методов в том, что сформулировать условия, при которых получается тот или иной результат, непросто, так как отсутствует строгий и последовательный вывод. Вследствие всего этого не определены границы применимости полученных результатов. Сказанное справедливо и по отношению к критерию Чирикова. Критерий

Чирикова явился исторически первым инструментом, дающим возможность провести простую оценку перехода к хаотической динамике в гамильтоновых системах. Сам Чириков применил его к большому числу различных физических задач, детально его исследовал в различных физических ситуациях, что позволило создать общую картину движения многих физически интересных гамильтоновых систем [14, 19]. Однако сейчас больше обращаются к методу показателей Ляпунова и к критерию Мельникова как к более строгим и последовательным методам.

2. Проблема Ферми–Пасты–Улама. Задача об ускорении Ферми

Наряду с Чириковым огромный вклад в понимание гамильтонова хаоса внес Заславский. В основу его подхода к вопросам хаоса положено понятие перемешивания. Более двух десятков работ Заславского, выполненных в 1960–1970-е годы, посвящены изучению нелинейных систем с перемешиванием. В них рассматриваются разнообразные физические задачи: движение заряженных частиц во внешних полях, неустойчивость частиц плазмы, нелинейные волны, турбулентность в средах с дисперсией и др. Вот что говорит сам Заславский: «Я начал работать над проблемами хаоса в 1963 году с Борисом Чириковым, и мы опубликовали статью об ускорении Ферми [17]. Это было временем становления новых представлений, и мы проанализировали реальную физическую систему. Вскоре после этого, перейдя к проблеме существования и устойчивости магнитных поверхностей, мы обнаружили два важных факта: 1) стохастическое разрушение магнитных поверхностей [20, 21]. Этот результат в настоящее время широко используются почти во всех случаях анализа в установках для удержания плазмы; 2) разрушение сепаратрисы и образование стохастического (эргодического) слоя, ширина которого оценивается с помощью специального, так называемого сепаратрисного отображения [22]. Последнее имеет принципиальное значение, так как в гамильтоновых системах хаос начинается с образования стохастического слоя... Для меня имела большое значение сильная поддержка со стороны Р.З. Сагдеева, М.А. Леонтовича, Б.Б. Кадомцева и И.М. Лифшица. Пришлось преодолеть немалые трудности, прежде чем мои работы по хаосу получили признание. В определенной степени это объяснялось моей отдаленностью, когда я работал в Красноярске. Широкое признание пришло где-то после 1984 года. Другой момент, на который я хочу обратить внимание – у меня не было хороших компьютеров и многое пришлось делать с помощью аналитических расчетов, в то время как на Западе повсеместно и очень эффективно пользовались компьютерами. Когда я приехал в США в 1990 году, я был удивлен тем, насколько хорошо были известны мои работы» [23]. Здесь следует отметить, что многие оригинальные результаты, в том числе полученные в указанных работах, изложены в книге [24], которая вместе с работой Чирикова [14] представляет самые первые книги по динамическому хаосу.

В недрах частных задач вызревали совершенно новые физические идеи, которые в должной мере не были сразу оценены. Статистическое описание для систем с очень большим ($N \sim 10^{23}$) числом степеней свободы является единственно возможным. В этом случае теряется детальная информация о траекториях системы, но за счет этого достигается очень значительное упрощение, поскольку намного уменьшается число переменных, необходимых для описания системы. Такое сокращенное

статистическое описание производится с помощью кинетических уравнений. Оно имеет давнюю историю, начиная с Л. Больцмана (1872), и эта история, наверно, еще не закончена [25–27]. При выводе кинетических уравнений налагаются дополнительные условия (например, приближение хаотических фаз), которые вводят в рассматриваемую систему элемент случайности. Изучение хаоса привело к пониманию того, что кинетическое описание может быть применено даже к системам с небольшим числом степеней свободы ($N = 1.5$) без каких-либо дополнительных условий. Это в огромной степени расширяет область применения мощных статистических методов. Одна из первых задач, в которой на простой физической модели было показано, как в динамической системе возникает кинетическое описание, была рассмотрена в работе Заславского и Чирикова [17].

Сначала обратимся к одной из последних работ Ферми, выполненной совместно с Дж. Пастой и С. Уламом [28]. Побудительным мотивом послужил давний интерес Ферми к нелинейным проблемам и возможность их изучения с помощью недавно созданных ЭВМ. Эргодические проблемы были предметом интереса Ферми еще в самом начале его научной деятельности. В 1923 году во время своего пребывания в Геттингене Ферми выполнил работу по эргодической теории [29]. В ней Ферми пытался доказать квазиэргодическую гипотезу, которая, как полагали, является основой обоснования статистической механики. В своем доказательстве он опирался на теорему Брунса–Пуанкаре о несуществовании у канонической нормальной системы однозначных, аналитических, не зависящих от времени интегралов, кроме интеграла энергии. Доказательство Ферми не было строгим, что вызвало нарекания математиков. Однако он был уверен в правильности своего результата. Ферми считал, что на основе квазиэргодической гипотезы можно будет описать поведение системы нелинейных осцилляторов [28]. В указанной работе изучался вопрос о распределении энергии в цепочке из 64 нелинейных осцилляторов, нелинейность вводилась как возмущение исходной линейной задачи. Рассматриваемая система являлась неинтегрируемой и не допускала аналитических решений, что и побудило авторов предпринять ее численное исследование. В задаче с самого начала содержался весьма нетривиальный момент. В интегрируемых системах траектории ложатся на многообразия малого числа измерений. В неинтегрируемом случае не существует полного набора независимых интегралов, поведение системы становится сложным, хаотическим. Если при сколь угодно малом возмущении система становится неинтегрируемой, как происходит разрушение интегралов движения? Эта трудность была разрешена теорией КАМ, но в то время она еще не была известна среди физиков. Таким образом, Ферми, Пастой и Уламом была затронута старая проблема, но предпринят новый подход к ее решению. Общепринятым был взгляд, что в системах с большим числом степеней свободы действуют законы статистической механики, и ожидалось равномерное распределение энергии между всеми модами. Вопреки ожидаемому, система демонстрировала устойчивый квазипериодический характер движения без заметных признаков хаотичности. Возникший парадокс получил название проблемы Ферми–Пасты–Улама (ФПУ-проблема).

ФПУ-проблема явилась одним из поворотных пунктов в развитии нелинейной динамики. Недавно как раз исполнилось 50 лет со дня публикации работы Ферми, Пасты и Улама [28] (май 1955 года) и этому событию целиком посвящен выпуск журнала «Хаос» [30]. В ФПУ-проблеме сошлись как в фокусе несколько важней-

ших аспектов. Во-первых, М. Крускал и Н. Забуски рассмотрели ФПУ-проблему в непрерывном пределе и показали, что уравнения движения цепочки нелинейных осцилляторов сводятся к уравнению Кортевега – де Фриза (КдФ) [31]. Уравнение КдФ было получено в 1895 году для описания слабонелинейных волн на мелкой воде и является интегрируемым. В работе М. Крускала и Н. Забуски появился термин «солитон», чтобы подчеркнуть частицеподобные свойства полученных ими решений. Основываясь на результатах работы [31] Крускал с соавторами развил новый метод интегрирования нелинейных эволюционных уравнений – метод обратной задачи рассеяния [32], что привело к созданию теории солитонов (см., например, [33]). Сформировался важнейший раздел современной математической физики, возродился интерес к классической области математики – к интегрируемым системам. Было найдено большое количество точно решаемых нелинейных систем, важных с точки зрения физики, и их число постоянно растет.

ФПУ-проблема послужила одним из исходных пунктов, положивших начало новому методу научного исследования – вычислительному эксперименту. Появление вычислительного эксперимента как метода научного исследования стало возможным с созданием быстродействующих ЭВМ. Первые ЭВМ предназначались, главным образом, для работ по атомной проблеме. В их числе была машина MANIAC, смонтированная в Лос-Аламосе в 1952 году. Фон Нейман и Ферми первыми поняли, какие возможности таят ЭВМ для решения научных задач, и им принадлежат главные заслуги в появлении вычислительного эксперимента в современном понимании. Об этом свидетельствуют С. Улам [34] и один из ближайших сотрудников фон Неймана, А. Бёркс [35]. Исходным пунктом для фон Неймана были его собственные исследования по гидродинамике. Он обнаружил, что существующие аналитические методы не пригодны для получения даже качественной информации о поведении решений нелинейных дифференциальных уравнений математической физики. Выход фон Нейман видел в численном решении и применении для этой цели только что появившихся ЭВМ. Он быстро оценил их возможности и предложил использовать результаты решений многих различных конкретных уравнений для выявления физических и математических закономерностей, что поможет построению общей теории. На машине MANIAC и была выполнена работа, приведшая к ФПУ-проблеме. В статье Ферми, Пасты, Улама [28] впервые появился сам термин «вычислительный эксперимент».

В понятие вычислительного эксперимента вкладывается иное содержание, чем просто численные решения задач. В вычислительном эксперименте варьированием параметров, начальных условий и т.д. стараются выяснить устройство модели в целом выделением ее характерных черт, элементов ее внутренней структуры, особенностей поведения. Все эти качества исследуемой системы заранее не известны. Вычислительный эксперимент имеет полное право претендовать на самостоятельный метод исследования наряду с теорией и натурным (лабораторным) экспериментом. В нем имеются составляющие традиционного научного метода «гипотеза – дедукция – эксперимент» [35]. Из исходной гипотезы с помощью математического формализма делаются некоторые выводы, которые проверяются экспериментально. С учетом данных экспериментов строится новая гипотеза, и процесс повторяется до тех пор, пока не будут выявлены общие закономерности. То же самое происходит в вычислительном эксперименте: строится некоторая гипотеза относительно исследу-

емых уравнений, ищутся критические случаи, полученные результаты сравниваются с гипотетическими, цикл повторяется и т.д. Вычислительный эксперимент может дополняться лабораторным экспериментом. Вычислительный эксперимент представляет эвристический метод исследования не только в физике, но и в современной математике. С его помощью выбираются направления для дальнейших аналитических исследований, появился даже термин «экспериментальная математика». Вычислительный эксперимент в исследованиях хаоса первым в нашей стране начал широко использовать Чириков. Вычислительный эксперимент не только в сильнейшей степени способствовал обнаружению феномена хаоса, но и привел к пониманию проблемы. Однако следует иметь в виду, что вычислительный эксперимент является эффективным методом, если он опирается на теоретические положения.

В ФПУ-проблеме статистическое поведение возникло не из-за взаимодействия системы с термостатом, а вследствие сложных нелинейных взаимодействий осцилляторов между собой. Как вспоминает Заславский, ФПУ-проблема в сильнейшей степени определила его интерес к нелинейным задачам [36]. Ферми в 1949 году опубликовал работу об ускорении космических частиц из-за столкновения с магнитными облаками, что давало возможный механизм происхождения космических лучей [37]. Отрицательный результат, полученный в [28], побудил Улама обратиться к более простой задаче ускорения Ферми. Улам предложил модель, в которой частица движется между двумя параллельными стенками, одна из которых колеблется по определенному закону [38]. Результаты Улама снова были отрицательными. В этой же работе Улам кратко описал ФПУ-проблему. Через два года (1963) работа Улама [38] была опубликована на русском языке в сборнике переводов «Математика». Первое знакомство в СССР с ФПУ-проблемой было косвенным. Лишь после установления переписки с Уламом Чириков получил от него ставший знаменитым отчет LA-1940 [28]. Стремление понять модель Улама привело к работе Заславского и Чирикова об ускорении Ферми [17]. В этой работе рассматривается механизм стохастического ускорения Ферми, который был предложен Э. Ферми для объяснения происхождения быстрых частиц в космических лучах [37]. Идея заключалась в том, что частицы при «столкновениях» с движущимися магнитными полями в межзвездной среде должны в среднем ускоряться. Такие «столкновения» можно представить как столкновения с телами очень большой массы с хаотическим распределением скоростей. Частица будет приобретать или отдавать энергию в зависимости от того, движется ли тело навстречу частице или от нее. Поскольку движущихся навстречу тел будет больше, частица будет чаще приобретать энергию, чем ее отдавать, что приводит к возникновению эффективного ускорения. Одним из побудительных мотивов рассмотрения данного механизма, как указывают авторы [17], была принципиальная возможность его использования для ускорения космических ракет в гравитационном поле планет или звезд.

В решении поставленной задачи можно выделить два этапа: 1) установление, исходя из полукачественных соображений, критерия стохастичности; 2) переход к статистическому описанию рассматриваемой системы. Была рассмотрена простая модель, когда частица движется между двумя бесконечно тяжелыми стенками, с которыми она сталкивается по законам абсолютно упругого удара. Одна из стенок строго периодически колеблется. С помощью этой модели был детально изучен механизм ускорения Ферми.

Причина отрицательного результата в модели Улама осталась нераскрытой. Положение прояснилось лишь после того, как пришло понимание механизма возникновения хаоса. Ключевым моментом является перемешивание в фазовом пространстве. Рассмотрим отображение [17, 39]

$$p_{n+1} = p_n + Vf(x_n), \quad x_{n+1} = x_n + \frac{a}{p_{n+1}^v} + b \pmod{2\pi}, \quad (6)$$

где все переменные безразмерные, (p, x) – обобщенный импульс и координата, $f(x)$ – периодическая функция: $f(x+2\pi) = f(x)$; V, a, b, v – постоянные. Для модели Улама p – скорость, $f(x)$ – функция пилообразной формы, определяющая периодические колебания стенки, n определяет номер соударения с движущейся стенкой, $v = 1$.

Хаос в отображении (6) возникает при условии

$$K \equiv (avV/p^{v+1})|f'(x)| \gg 1, \quad (7)$$

и можно принять условие растяжения фаз $K \sim 1$, который ввели и широко использовали Заславский и Чириков [17] в качестве критерия возникновения хаоса. В действительности в отображении (6) всегда имеются области хаоса, но они могут быть трудно обнаруживаемы из-за их малого объема. В области хаоса (назовем ее «область I») происходит быстрое перемешивание по фазам x и медленная диффузия вдоль переменных p . Для области I было получено кинетическое уравнение

$$\frac{\partial F(p, t)}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial p} D(p) \frac{\partial F(p, t)}{\partial p}, \quad (8)$$

где $F(p, t)$ – нормированная функция распределения, $D(p)$ – коэффициент диффузии, определяемый по формуле

$$D(p) = \langle (\Delta p)^2 / \Delta t \rangle \quad (9)$$

Здесь $\Delta p = Vf(x)$ – изменение скорости при ударе, Δt – время между двумя соударениями, $\langle \dots \rangle$ – усреднение по фазам.

Для значений $K \gg 1$ происходит экспоненциальное затухание корреляций

$$\langle e^{i(x_{n+m} - x_m)} \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \exp[i(x_{n+m} - x_m)] dx_m \sim \exp(-mc \ln K), \quad (10)$$

с константой $c \sim 1$. Соотношение (10) соответствует быстрому перемешиванию фазы с характерным временем

$$\tau \sim 1 / \ln K. \quad (11)$$

Было установлено существование трех качественно различных областей значений скорости частицы: I – область малых скоростей, в которой движение является стохастическим; II – промежуточная область; III – область больших скоростей, в которой скорость частицы совершает малые устойчивые колебания. Описание поведения системы является динамическим [17, 24, 40]. Численные расчеты показали правильность сделанных предположений. Одним из важных результатов явилось установление с помощью механизма Ферми величины максимально достижимой скорости. Заложенные в работе [17] идеи и методы получили развитие в дальнейших исследованиях.

Изучение ФПУ-проблемы поставило ряд вопросов, поиски ответов на которые оказало сильное влияние на исследования хаоса [39]:

1) каким образом возникает хаотическая динамика и какова структура областей фазового пространства Γ_c , где это происходит (перемешивание и существование в Γ_c положительной энтропии Колмогорова – Синая);

2) как провести упрощение системы уменьшением числа переменных и перейти к кинетическому описанию (master equation);

3) как провести интегрирование кинетического уравнения, что позволяет получить характеристики переноса (транспорта) в системе. В частности, большой интерес представляет распределение энергии между степенями свободы, с этим связана проблема термализации.

3. Интерпретация ФПУ-проблемы Б.В. Чириковым и Ф.М. Израйлевым

Несмотря на полученные результаты в исследованиях ФПУ-проблемы и связанных с нею задач, сама проблема не была закрыта. Результаты Забуски и Крускала [31] разъяснили возникший парадокс, но они относились к непрерывному пределу. Действительно ли система нелинейных осцилляторов представляет собой полностью интегрируемую систему? Ранняя смерть Ферми не позволила ему самому довести задачу до конца. Положение в определенной степени разъяснилось после появления работы Ф.М. Израйлева и Б.В. Чирикова «Статистические свойства нелинейной струны» [41]. В ней авторы пишут: «До недавнего времени считалось, что любая нелинейность будет приводить к появлению статистических свойств, которые мы кратко будем называть в дальнейшем термином стохастичность (эргодичность, перемешивание, конечная энтропия по А.Н. Колмогорову). Поэтому отрицательный результат работы ([28]. – *Р.М.*) (четкий квазипериодический характер движения вместо стохастичности) казался удивительным. Однако последние работы А.Н. Колмогорова и В.И. Арнольда показали, что такой результат является, наоборот, естественным: при достаточно малом возмущении нелинейная система сохраняет квазипериодический характер движения. С точки зрения современной теории динамических систем следует ожидать существования в общем случае некоторого критического возмущения, при котором начинается стохастичность. Целью настоящей работы является оценка границы стохастичности для цепочки осцилляторов» [41, с. 57].

В оригинальной работе Ферми, Пасты и Улама [28] рассматривалась система из 64 частиц с силами, действующими между соседними частицами. Если x_i – смещение i -й точки от ее начального положения, то уравнения движения будут иметь вид

$$\ddot{x}_l = (x_{l+1} + x_{l-1} - 2x_l) + \alpha [(x_{l+1} - x_l)^2 - (x_l - x_{l-1})^2] \quad (12)$$

или

$$\ddot{x}_l = (x_{l+1} + x_{l-1} - 2x_l) + \beta [(x_{l+1} - x_l)^3 - (x_l - x_{l-1})^3], \quad l = 1, 2, \dots, N - 1. \quad (13)$$

Константы нелинейности α и β предполагаются малыми. Имеются две модели, соответственно α - и β -модель.

Если нелинейные члены отсутствуют ($\alpha = 0$, $\beta = 0$), то точные решения уравнений (12) и (13) могут быть записаны в виде набора ($N - 1$) независимых

нормальных колебаний $Q_k(t)$

$$x_l = \sqrt{\frac{2}{N-1}} \sum_{k=1}^{N-1} Q_k \sin \frac{\pi kl}{N}, \quad (14)$$

система является интегрируемой.

Авторы [41] с самого начала стояли на твердой почве строгой математической теории (теория КАМ). В своей работе они аналитически рассмотрели β -модель. Используя критерий перекрытия резонансов (5), была проведена оценка нижней границы стохастичности

$$3\beta_{\text{кр}} \frac{E}{N} \sim \begin{cases} \frac{3}{k}, & k \ll N \text{ (акустические волны),} \\ \frac{3\pi^2}{N^2} \left(\frac{k}{N}\right)^2, & N - k \ll N \text{ (оптические волны),} \end{cases} \quad (15)$$

где E – энергия возбуждения, k – волновой вектор. Для высших мод и больших N стохастичность наступает уже при очень малой нелинейности. В противоположном случае, при возбуждении низших мод стохастичность возможна для очень больших нелинейных возмущений. Стал ясен результат работы Ферми, Пасты и Улама [28], где как раз возбуждались низшие моды, которые казались естественными начальными условиями. Значение работы Израйлева и Чирикова состоит также в том, что в ней была осуществлена одна из первых проверок теории КАМ: при достаточно малом возмущении нелинейная система сохраняла квазипериодический характер движения. В последующих работах полученные результаты были дополнены и уточнены [42, 43].

Работа Израйлева и Чирикова [41] поступила в редакцию Докладов АН СССР в апреле 1965 года и была напечатана в начале следующего года. В августе 1966 года произошла встреча Чирикова с Уламом на Международном конгрессе математиков в Москве. В контексте взаимоотношений советских и американских ученых любопытно, как Улам оказался в Москве [15]. Станислав Улам (1909–1984), польский математик, в 1930-е годы эмигрировал в США, где тесно сотрудничал с фон Нейманом и Ферми, и не случаен его интерес к нелинейным задачам. Улам был одной из главных фигур в создании термоядерного оружия, и ему были запрещены поездки в СССР и страны Восточной Европы. Несмотря на запрет, Улам тайком приехал в Москву. По возвращении в США у него были неприятности, и когда через некоторое время туда приехал Чириков, их уже не оставляли одних и все беседы проходили в присутствии сотрудников службы безопасности.

Открытие хаоса относительно независимо было сделано для двух классов динамических систем: гамильтоновых и диссипативных. Очень часто, особенно в зарубежной литературе, открытие хаоса в гамильтоновых системах игнорируется. Само открытие гамильтонова хаоса произошло даже несколько раньше, чем диссипативного. Феномен был не только открыт, но и понят; к началу 1970-х годов была создана соответствующая теория. Если говорить о диссипативном хаосе, то понятие странного аттрактора относится к 1971 году [44], работа Лоренца [45] получила признание в середине 1970-х годов. Иногда встречающееся утверждение, что «теория хаоса началась с Лоренца» выглядит чрезмерным упрощением, искажающим действительный ход событий. Имеются две линии развития. Открытие Лоренцом хаоса

в диссипативных системах относится к общеизвестной линии развития, которую на завершающем этапе можно изобразить цепочкой Лоренц – Смейл – Рюэль, Такенс. Другая линия идет через небесную механику и эргодическую теорию и восходит к Л. Больцману, А. Пуанкаре, Дж. Биркгофу, Э. Хопфу, Н.С. Крылову, А.Н. Колмогорову, Я.Г. Синаю. Эта линия развития привела в 1960-е годы к открытию хаоса в гамильтоновых системах, где работы Б.В. Чирикова, Г.М. Заславского и их сотрудников имели первостепенное значение. Обнаружение хаотичности при изучении ФПУ-проблемы, затронувшей фундаментальные вопросы физики (Б.В. Чириков, Ф.М. Израйлев, 1966), и в задаче о магнитных поверхностях (Г.М. Заславский, Р.З. Сагдеев, Н.Н. Филоненко, 1967) способствовало установлению представлений, что стохастическое разрушение интегралов движения является общим свойством гамильтоновых систем. Концептуальное значение в понимании феномена хаоса имело установление его неоднородности, когда области хаоса весьма сложным образом переплетены с областями регулярности – системы с разделяющимся фазовым пространством (Г.М. Заславский и Б.В. Чириков, 1964; Б.В. Чириков, 1969).

При написании данной работы я использовал информацию, полученную от Б.В. Чирикова, Г.М. Заславского и Ф.М. Израйлева, с Г.М. Заславским обсуждался ряд вопросов. А.Ю. Лоскутов прочел работу и выразил некоторые пожелания. Всем им приношу глубокую благодарность.

P.S. После того как статья была закончена, Г.М. Заславский сообщил мне о кончине Б.В. Чирикова. Борис Валерианович является не только одним из открывателей гамильтонова хаоса, он внес огромный вклад в дальнейшие исследования, и его работы в значительной степени определяют современный облик данной области науки.

Библиографический список

1. Борис Валерианович Чириков // УФН. 1998. Т. 168. № 7. С. 813.
2. *Чириков Б.В.* Жизнь – это творчество // Академик Г.И. Будкер. Новосибирск: Наука, 1988. С. 67.
3. *Сагдеев Р.З.* Сколько каши было съедено // Академик М.А. Леонтович. М.: Наука, 2003. С. 287.
4. *Коган В.И.* Устное сообщение 17.12.2003.
5. *Визгин Вл.П.* Устное сообщение 23.11.2004.
6. *Мухин Р.Р.* «Для понимания структуры и природы колец старые методы небесной механики оказались неприменимыми». Интервью с А.М. Фридманом // Вопр. истории естествозн. и техники. 2005. № 3. С. 157.
7. *Бурштейн А.И.* Возвращение «Интеграла» // Научное сообщество физиков СССР. 1950–1960-е годы. Вып. 1. СПб.: Изд-во РХГА, 2005. С. 569.
8. «Наука в Сибири» – 28 июня 1990. № 23-24.
9. *Заславский Г.М.* Устное сообщение 25.08.2006.
10. *Будкер Г.И.* Термоядерные реакции в системе с магнитными пробками // Физика плазмы и проблема управляемых реакций. Т. 3. М.: Изд-во АН СССР, 1958. С.3.
11. *Заславский Г.М., Чириков Б.В.* Стохастическая неустойчивость нелинейных колебаний // УФН. 1971. Т. 105, вып. 1. С. 3.

12. *Чириков Б.В.* Письменное сообщение от 17.11.2003.
13. *Синай Я.Г.* Как математики и физики нашли друг друга // Математические события XX века. М.: Фазис, 2003. С. 417.
14. *Чириков Б.В.* Исследования по теории нелинейного резонанса и стохастичности. Препринт ИЯФ 267. Новосибирск: ИЯФ СО АН СССР, 1969.
15. *Израйлев Ф.М.* Устное сообщение 2.07.2004.
16. *Чириков Б.В.* Резонансные процессы в магнитных ловушках // Атомн. энергия. 1959. Т 6, № 6. С. 630.
17. *Заславский Г.М., Чириков Б.В.* О механизме ускорения Ферми в одномерном случае // ДАН СССР. 1964. Т. 159. № 2. С. 306.
18. *Андронов А.А., Леонтович М.А., Мандельштам Л.И.* К теории адиабатических инвариантов // Журн. рус. физ.-хим. общества. 1928. Т. 60. № 5. С. 413.
19. *Chirikov B.V.* A universal instability of many-dimensional oscillator systems // Phys. Reps. 1979. Vol. 52, № 5. P. 263.
20. *Rosenbluth M.N., Sagdeev R.Z., Taylor J.B., Zaslavsky G.M.* Destruction of magnetic surfaces by magnetic field irregularities // Nucl. Fusion. 1966. Vol. 6. P. 297.
21. *Filonenko N.N., Sagdeev R.Z., Zaslavsky G.M.* Destruction of magnetic surfaces by magnetic field irregularities. Part II // Nucl. Fusion. 1967. Vol. 7. P. 253.
22. *Заславский Г.М., Филоненко Н.Н.* Стохастическая неустойчивость захваченных частиц и условия применимости квазилинейного приближения // ЖЭТФ. 1968. Т. 54, вып. 5. С. 1590.
23. *Заславский Г.М.* Письменное сообщение от 02.12.2003.
24. *Заславский Г.М.* Статистическая необратимость в нелинейных системах. М.: Наука, 1970.
25. *Зубарев Д.Н.* Современные методы статистической теории неравновесных процессов. М.: ВИНТИ, 1980.
26. *Кац М.* Вероятность и смежные вопросы в физике. М.: Мир, 1965.
27. *Пригожин И.* Неравновесная статистическая механика. М.: Мир, 1964.
28. *Fermi E., Pasta J., Ulam S.* Study of Nonlinear Problems // Studies of Nonlinear Problems. I. Los Alamos Report. LA, 1940. 1955 / Рус. пер.: Э.Ферми. Научн. тр. Т. 2. М.: Наука, 1972. С. 647.
29. *Fermi E.* Beweis dass ein Mechnisches Normalsystem in Allgemeinen Quasi-ergodisch ist // Phys. Zs. 1923. B. 24. S. 261 / Рус. пер.: Ферми Э. Научн. труды. Т. 1. М.: Наука, 1971. С. 115.
30. Chaos. 2005. Vol. 15. 015101.
31. *Zabusky N.J., Kruskal M.D.* Interaction of solitons in a collisionless plasma and the recurrence of initial states // Phys. Rev. Lett. 1965. Vol. 15. P. 240.
32. *Gardner C.S., Green J.M., Kruskal M.D., Miura K.M.* Method for the solving the Kortevag – de Vries equation // Phys. Rev. Lett. 1967. Vol. 19. P. 1095.
33. Солитоны. М.: Мир, 1983.
34. *Ulam S.* John von Neumann, 1903–1957 // Bull. AMS. 1958. Vol. 64, № 3. P. 1.
35. *Беркс А.* Введение к книге: Дж. фон Нейман. Теория самовоспроизводящихся автоматов. М.: Мир, 1971. С. 20.

36. *Заславский Г.М.* Письменное сообщение от 04.03.2004.
37. *Fermi E.* On the origin of cosmic radiation // *Phys. Rev.* 1949. Vol. 75. P. 1169 / Рус. пер.: Э.Ферми. Научн. тр. Т. 2. М.: Наука, 1972. С. 439.
38. *Ulam S.* On some statistical properties of dynamical systems // *Proc. 4-th Berkely Sympos. Math. Prob. Berkely – Los Angeles.* 1961. Vol. 3. P. 315.
39. *Zaslavsky G.M.* Long way from FPU-problem to chaos // *Chaos.* 2005. Vol. 15. 015103. P. 137.
40. *Лихтенберг А., Либерман М.* Регулярная и стохастическая динамика. М.: Мир, 1984.
41. *Израйлев Ф.М., Чириков Б.В.* Статистические свойства нелинейной струны // *ДАН СССР.* 1966. Т. 166, № 1. С. 57.
42. *Израйлев Ф.М., Хисамутдинов А.И., Чириков Б.В.* Численные эксперименты с нелинейной цепочкой. Препринт ИЯФ 252. Новосибирск: ИЯФ СО АН СССР, 1968.
43. *Израйлев Ф.М., Чириков Б.В.* Стохастичность простейшей динамической модели с разделенным фазовым пространством. Препринт ИЯФ 191. Новосибирск: ИЯФ СО АН СССР, 1968.
44. *Ruelle D., Takens F.* On the Nature of Turbulence // *Comm. Math. Phys.* 1971. Vol. 20. P. 167 / Рус. пер. в кн.: Странные аттракторы. М.: Мир, 1981. С. 117.
45. *Lorenz E.* Deterministic nonperiodic flow // *J.Atmosph. Sci.* 1963. Vol. 20. P. 130 / Рус. пер.: в кн.: Странные аттракторы. М.: Мир, 1981. С. 88.

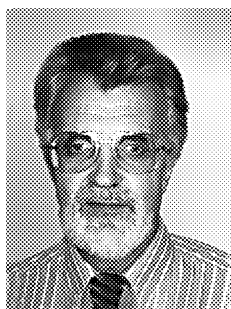
*Старооскольский
технологический институт*

*Поступила в редакцию 21.02.2008
После обработки 17.04.2008*

**FROM THE HISTORY OF HAMILTONIAN CHAOS:
RESEARCH OF STOCHASTICITY IN NONLINEAR SYSTEMS
BY THE NOVOSIBIRSK SCHOOL**

R.R. Mukhin

The article is devoted to the problems of history of the Hamiltonian chaos discovery in 1960th which is described a little in publications in comparison with the history of dissipative chaos. The main center of Hamiltonian chaos research was the Nuclear Physics Institute in Novosibirsk where B.V. Chirikov and G.M. Zaslavsky worked, being the major specialists in the world in this field of science.



Мухин Равиль Рафкатович – родился в Челябинской области (1947), окончил Московский инженерно-физический институт (1976). После защиты кандидатской диссертации (1991, Институт органического синтеза и углехимии АН Казахстана) работал в Карагандинском государственном университете. В настоящее время работает в Старооскольском технологическом институте (Старый Оскол Белгородской области). Сейчас область научных интересов – история физики, в особенности история нелинейной динамики. Имеет несколько десятков публикаций.



СИСТЕМЫ БИЛЬЯРДНОГО ТИПА И УСКОРЕНИЕ ФЕРМИ

А.Ю. Лоскутов, А.Б. Рябов

В работе описаны системы бильярдного типа с возмущаемыми границами. Рассмотрены обобщенный рассеивающий бильярд – газ Лоренца с открытым горизонтом, и фокусирующий бильярд типа «стадион». Аналитически и численно показано, что, когда бильярд обладает свойством развитого хаоса, следствием колебаний его границ является ускорение Ферми. Однако возмущение бильярдной системы, близкой к интегрируемой, приводит к новому интересному явлению – разделению частиц по скоростям. Это заключается в том, что, если начальная скорость частиц превышает некоторую критическую величину, характерную для данной геометрии бильярда, то частицы ускоряются. Если же начальная скорость ниже критической, то бильярдные частицы замедляются. Описаны зависимости эффекта разделения от характерных параметров бильярда и частоты колебаний границ.

Введение

Математически плоский бильярд представляет собой обычный бильярд, только с произвольной конфигурацией стола и без луз. Хотя, строго говоря, бильярды относятся к сильно упрощенным моделям классической статистической механики, имеется естественная аналогия между некоторыми физическими задачами и системами бильярдного типа [1, 2].

В общем случае бильярдная система может быть описана следующим образом. Бильярдным столом Q является область M с кусочно-гладкой границей ∂Q . Бильярдная динамическая система в M порождается свободным движением материальной точки (бильярдного шара) с условием упругого отражения от ∂Q . Это означает, что точка всегда движется по прямым в M с постоянной скоростью до соударения с границей. Если граница в точке соударения гладкая, то шар отражается от нее так, что тангенциальная компонента скорости не изменяется, в то время как нормальная составляющая изменяет знак. Если шар попадает в угол, то его дальнейшее движение определено неоднозначно или же не определено совсем.

Как правило, граница каждого бильярда состоит из m компонентов ∂Q_i , $i = 1, 2, \dots, m$. Точки сшивки компонентов ∂Q_i называются особыми. Остальные точки q – регулярными. Если для каждого компонента ∂Q_i рассмотреть единичные нормали $\mathbf{n}(q)$ в каждой точке $q \in \partial Q_i$, направленные внутрь области Q , то они будут определять кривизну $k(q)$ кривой ∂Q_i во всех регулярных точках q . Компонент

∂Q_i является *рассеивающим*, если $k(q) > 0$. Для $k(q) = 0$ и $k(q) < 0$ получим соответственно *нейтральный* и *фокусирующий* компоненты границы бильярда. Таким образом, каждый из компонентов границы может быть рассеивающим, фокусирующим или нейтральным.

Если граница состоит только из рассеивающих и нейтральных компонентов, такой бильярд называется *рассеивающим* (или бильярдом Синая). Одной из разновидностей рассеивающего бильярда является так называемый газ Лоренца. На его основе удается получить ряд строгих и очень глубоких результатов.

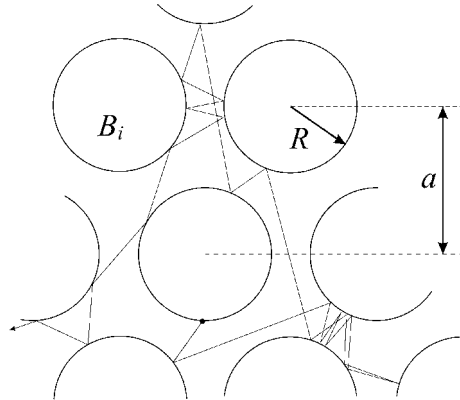


Рис. 1. Двумерный газ Лоренца с периодическим расположением рассеивателей на треугольной решетке

Рассмотрим неограниченную область D в евклидовом пространстве. Допустим, что в этой области находятся определенным образом расположенные непересекающиеся диски B_i (рассеиватели) радиуса R (рис. 1). При условии, что рассеиватели неподвижны, такая система, очевидно, будет бильярдной. Она называется *газом Лоренца*: частица движется между рассеивателями, упруго отражаясь от них. Впервые газ Лоренца был введен в связи с проблемой описания движения электронов в металлах (см. [3]).

При периодическом расположении рассеивателей с периодом a одним из основных параметров газа Лоренца является соотношение между a и R . Если $R \leq a/2$, то говорят, что бильярд имеет бесконечный горизонт. При $R \geq a/\sqrt{3}$ движение частицы ограничено одной ячейкой, так что система имеет ограниченный горизонт. Если же $a/2 < R < a/\sqrt{3}$, то свободный пробег частицы ограничен, но она может свободно перемещаться по пространству. В этом случае газ Лоренца имеет открытый горизонт.

При периодическом расположении рассеивателей с периодом a одним из

основных параметров газа Лоренца является соотношение между a и R . Если $R \leq a/2$, то говорят, что бильярд имеет бесконечный горизонт. При $R \geq a/\sqrt{3}$ движение частицы ограничено одной ячейкой, так что система имеет ограниченный горизонт. Если же $a/2 < R < a/\sqrt{3}$, то свободный пробег частицы ограничен, но она может свободно перемещаться по пространству. В этом случае газ Лоренца имеет открытый горизонт.

Для бесконечного горизонта из-за увеличения вероятности длинных перелетов изменяются статистические свойства бильярда. В частности, замедляется скорость убывания корреляций и не сходится среднее значение длины свободного пробега [4–8]. В то же время, для газа Лоренца с ограниченным и открытым горизонтом наблюдается экспоненциальный спад корреляций. Кроме того, было доказано, что в двумерном плоском случае движение частицы является эргодическим, обладает свойством перемешивания и, более того, сводится к броуновскому. Также в такой системе существует и положителен коэффициент диффузии [5]. Это явилось первым строгим подтверждением рождения хаоса в динамических системах.

Бильярд, граница которого состоит только из фокусирующих или нейтральных и фокусирующих компонентов, называется *фокусирующим*. Самым популярным примером такого бильярда является «стадион», граница которого состоит из двух фокусирующих компонентов и двух параллельных отрезков, соединяющих концы этих компонентов (рис. 2). Несмотря на наличие фокусирующих компонентов, для такого бильярда тоже характерно свойство перемешивания. Это связано с тем, что параллельные лучи после прохождения точки фокусировки начинают расходиться.

Достаточно общие условия существования хаотичности в двумерных бильярдах на плоскости описаны в работе [9] (см. также данную там литературу).

Естественным обобщением бильярдных систем являются бильярды, границы которых могут изменяться с течением времени, то есть осциллировать. К моделям такого типа сводятся некоторые важные проблемы математической физики. Например, анализ движения частиц внутри возмущенных ядер привел к необходимости изучения квадрупольных или «динамических» резонансов. В таких задачах рассматривалось столкновение частиц с движущимися границами (полями) и, как следствие, обмен энергиями. В физике плазмы ускорение в магнитных ловушках моделируется бильярдами с изменяющейся во времени границей. Наконец, если рассматривать газ Лоренца как физическую систему, то рассеиватели должны слегка «дрожать» с небольшой амплитудой вблизи своего равновесного состояния.

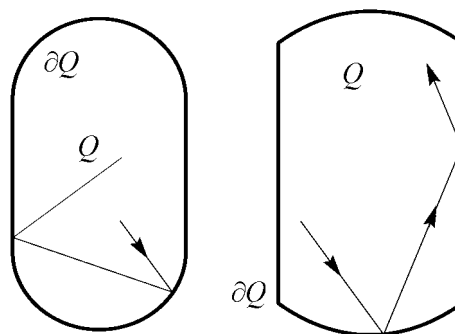


Рис. 2. Бильярд с границей в форме стадиона

В бильярдах с осциллирующими границами величина скорости шара меняется от столкновения к столкновению. При единичных актах столкновения шар приобретает или отдает энергию в зависимости от того, движутся ли шар и граница навстречу друг другу (имеет место *встречное* столкновение), или же шар нагоняет границу (происходит *сопутствующее* столкновение). Возникает важный вопрос, каких столкновений больше, то есть как будет в среднем меняться модуль скорости шара со временем?

Оказывается, здесь первостепенную роль играют динамические свойства бильярда: если он обладает развитым хаосом, то возмущение границы может привести к неограниченному росту скорости частицы. С другой стороны, бильярд с достаточно гладкой границей (например, в форме эллипса или окружности) не хаотичен, и ее колебания не приводят к ускорению бильярдной частицы. Однако самый интересный и неожиданный эффект наблюдается в промежуточном случае, когда бильярдная система близка к интегрируемой, так что в фазовом пространстве существуют хаотические слои, окруженные инвариантными кривыми (что возможно в случае «стадиона»). Тогда в зависимости от начальных условий бильярдная частица будет либо ускоряться, либо замедляться.

Данная работа посвящена исследованию динамики частиц в рассеивающих бильярдах типа газа Лоренца и фокусирующих бильярдах типа «стадион», граница которых изменяется со временем по некоторому закону.

1. Ускорение Ферми и бильярды с осциллирующими границами

Первоначально проблема ускорения частиц до чрезвычайно высоких энергий была рассмотрена Энрико Ферми [10]. Им был предложен механизм, основанный на статистике столкновений космических лучей (заряженных частиц) с беспорядочно движущимися макрообъектами (магнитными облаками). Идея состояла в том, что

при таких столкновениях частицы должны в среднем ускоряться. Именно, если скорости облаков, с которыми сталкивается частица, распределены случайно, то можно сказать, что число облаков, движущихся в одном направлении, равно числу облаков, движущихся в обратном направлении. Поэтому частица будет чаще сталкиваться с теми из них, которые движутся ей навстречу. Отсюда следует, что частица чаще будет приобретать энергию, чем отдавать ее. Так возникает эффективное ускорение, называемое *ускорением Ферми*.

Природа описанного механизма может быть исследована при помощи анализа достаточно простых систем. Так, в 1960 году С. Улам [11] предложил модель, которая позже была названа моделью Ферми–Улама: упругий шарик движется между двумя тяжелыми параллельными пластинами, каждая из которых совершает колебания по определенному закону, или одна неподвижна, а вторая осциллирует. Эта и некоторые другие модели [12–19] были призваны в той или иной степени объяснить происхождение ускорения Ферми.

В общем случае в основе решения проблемы ускорения Ферми лежит анализ динамических систем бильярдного класса, описывающих движение материальной точки внутри некоторой области с границей, осциллирующей по тому или иному закону. В работах [20–22] было проведено исследование бильярдов в форме эллипса и окружности и показано, что, как и в модели Ферми–Улама, рост скорости ограничен. В работе [23] рассмотрен бильярд в области, образованной прямоугольником, углы которого заменены четвертями окружностей радиуса R , а одна из сторон периодически осциллирует. Столкновение с границей не является абсолютно упругим: частица теряет часть своей скорости, пропорциональную некоторой постоянной δ ($\delta \ll 1$). Эта модель близка к модели Ферми–Улама, но наличие скругленных углов вносит элемент случайности в динамику частицы. Исследовался процесс релаксации системы к равновесному состоянию. Аналогичные исследования были проведены ранее в работах [24, 25] на модели Ферми–Улама. Как было найдено, в модели Ферми–Улама величина $\Pi(t) = E(t) - E(\infty)$, представляющая собой отклонение средней энергии системы от ее равновесного значения, убывает экспоненциально, то есть $\Pi(t) \sim \exp(-t/\tau)$, что, вообще говоря, естественно для большинства физических систем. Однако анализ показал [23], что релаксация системы к равновесию происходит медленнее, а $\Pi(t) \sim \exp(-(t/\tau)^\beta)$, где $\beta < 1$, причем значение β уменьшается с ростом R .

Результаты работ [26, 27] прояснили причину уменьшения скорости релаксации системы. С увеличением радиусов дуг растет степень хаотичности, что приводит к ускорению частиц. Поэтому релаксация системы к равновесному состоянию, связанная с наличием диссипации энергии частиц, будет происходить медленнее. Такой подход дает возможность определить величину β и, соответственно, скорость релаксации к равновесию систем, в которых хаотическая динамика является доминирующей.

В работах [26, 27] аналитически и численно было показано, что возмущение границ газа Лоренца приводит к ускорению Ферми. При этом газ Лоренца был исследован в двух различных вариантах: со стохастически и регулярно осциллирующими рассеивателями. Поскольку число столкновений и время не пропорциональны друг другу (за одно и то же время «быстрая» частица испытывает больше соударений, чем «медленная»), была найдена средняя скорость в зависимости от времени t и числа столкновений n (рис. 3). Для численного анализа было построено 5000 реали-

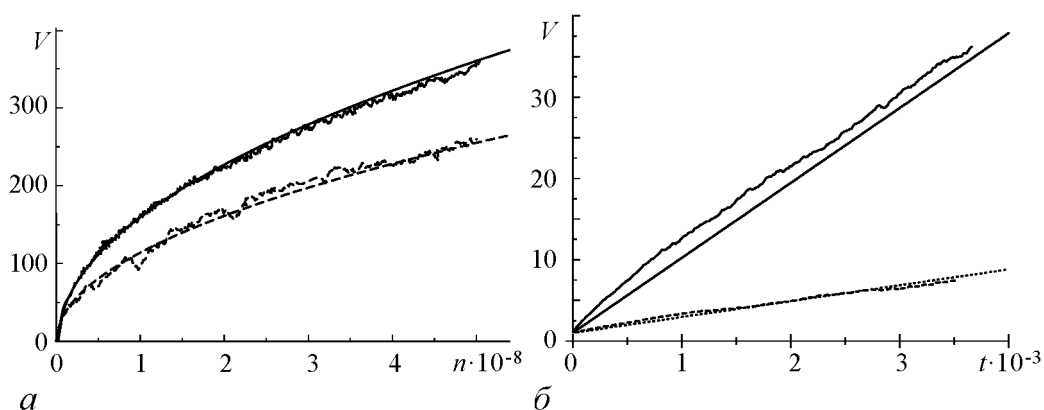


Рис. 3. Зависимости средней скорости частиц V в газе Лоренца от числа столкновений (a) и от времени (b). На обоих графиках сплошные линии отвечают регулярному случаю возмущения границы, а пунктир – стохастическому. Аналитические результаты соответствуют плавным кривым, численные – ломаным

заций динамики бильярдной частицы, которые отличались друг от друга начальными значениями величины вектора скорости \mathbf{V} и его направления, которые выбирались случайным образом.

Результаты этих исследований привели к обнаружению двух основных механизмов ускорения, которые были выявлены при выводе распределения частиц по скоростям в зависимости от числа столкновений в случае стохастических колебаний границ. Во-первых, это механизм, возникающий вследствие выполнения соотношения $\langle \Delta V \rangle > 0$ и приводящий к сносу всех частиц в направлении положительных скоростей. Во-вторых, это дисперсионный (или флуктуационный) механизм, проявляющийся по двум причинам: $\langle \Delta V^2 \rangle > 0$ и поэтому вероятностный пакет «расплывается» со временем; модуль скорости не может быть отрицательным и, таким образом, расплывание пакета не симметрично, а направлено в сторону бóльших скоростей. При этом флуктуации и среднее увеличение скорости частицы выше в случае регулярных колебаний границ рассеивателей, что приводит к большему росту скорости. Таким образом, можно также говорить о механизме, обусловленном корреляциями между последовательными изменениями скорости.

Более того, рассуждения, используемые при выводе зависимости скорости частицы от числа соударений и времени, легко перенести на любой другой бильярд, для которого известно вероятностное распределение угла между нормалью к поверхности в точке соударения и скоростью частицы. Поэтому развитая в данных работах техника оказалась очень полезной при изучении проблемы ускорения Ферми в других рассеивающих бильярдах.

На основании проведенных исследований авторами работ [26,27] было выдвинуто предположение, что для возникновения ускорения Ферми в бильярде с осциллирующими границами достаточно, чтобы при фиксированной границе такой бильярд обладал хаотической динамикой. Эта гипотеза поддерживалась рядом исследователей [28–31] и недавно получила частичное обоснование посредством использования термодинамического подхода [32].

В общем случае, однако, ситуация оказывается значительно сложнее: в некоторых бильярдах, например, в форме стадиона, когда кривизна фокусирующих компонентов мала (см. правый бильярд на рис. 2), при определенных начальных скоростях ускорение не наблюдается [33]. При других же значениях начальной скорости в бильярде той же конфигурации возникает эффективное ускорение. Этот интересный и неожиданный эффект позволяет предложить метод разделения частиц разреженного газа по скоростям: для этого достаточно слабого периодического внешнего воздействия на стенки сосуда. В определенном смысле этот эффект можно назвать бильярдным демоном Максвелла, когда посредством слабого влияния на систему можно сортировать быстрые и медленные частицы.

2. Бильярд типа «стадион»

Механизмы возникновения хаоса в рассеивающих и фокусирующих бильярдах различны. В первом случае два близких пучка частиц, попав на рассеивающий компонент границы, начинают сразу расходиться. Во втором случае после отражения от фокусирующего компонента два близких пучка сходятся до точки пересечения. Хаос в таком бильярде возникает, если время, в течение которого пучки сходятся, меньше времени расхождения.

Сначала рассмотрим бильярд с невозмущенными границами и сравним результаты точного и приближенного анализа в предположении, что кривизна фокусирующих компонентов мала (рис. 4, *a*)

$$l \gg a \gg b . \quad (1)$$

Это позволит более полно понять динамику бильярдной частицы. Пусть фокусирующие компоненты представлены дугами окружности радиуса R и угловой меры 2Φ , симметричными относительно вертикальной оси бильярда (см. рис. 4, *a*). Из геометрических соображений вытекают следующие соотношения:

$$R = \frac{a^2 + 4b^2}{8b}; \quad \Phi = \arcsin \frac{a}{2R} . \quad (2)$$

Условие стохастичности для такого бильярда выполнено, если дуга, дополняющая фокусирующий компонент до полной окружности, принадлежит области Q (см. [4]). При $b \ll a$ это дает

$$\frac{l}{2R} \approx \frac{4bl}{a^2} > 1 . \quad (3)$$

Введем динамические переменные, как показано на рис. 4. Положительным направлением для углов φ_n и α_n^* примем направление против часовой стрелки, а для угла α_n – по часовой. Если граница бильярда неподвижна, то угол падения α_n^* равен углу отражения α_n . Пусть V_n – скорость частицы, а t_n – время n -го столкновения с границей.

Построим *точное отображение*, описывающее динамику частицы в таком бильярде. Для этого необходимо рассмотреть два случая: после очередного столкновения с фокусирующим компонентом границы частица сталкивается с ним же (парные

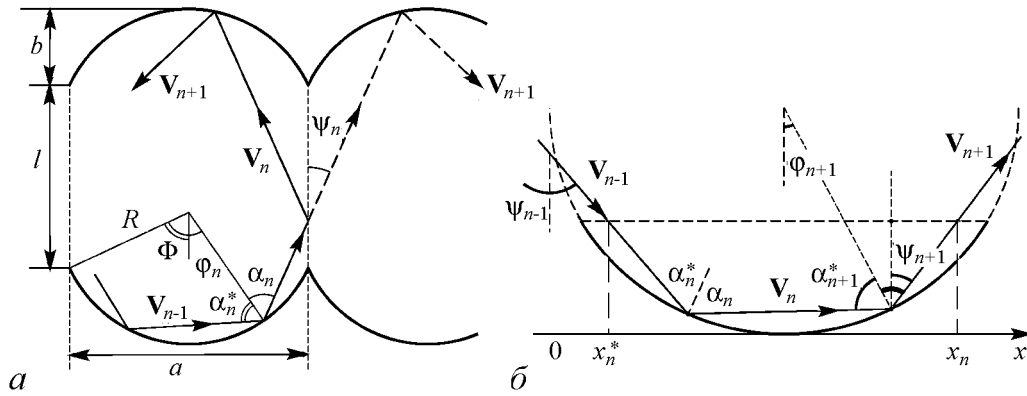


Рис. 4. К построению отображения для бильярда типа «стадион»

столкновения, рис. 4, б), либо следующее столкновение происходит с другим фокусирующим компонентом. В случае парных столкновений простые геометрические рассуждения [33] приводят к отображению вида

$$\begin{aligned}
 \alpha_{n+1}^* &= \alpha_n, \\
 \alpha_{n+1} &= \alpha_{n+1}^*, \\
 \varphi_{n+1} &= \varphi_n + \pi - 2\alpha_n \pmod{2\pi}, \\
 t_{n+1} &= t_n + \frac{2R \cos \alpha_n}{V_n}.
 \end{aligned} \tag{4}$$

Если $|\varphi_{n+1}| < \Phi$, то частица продолжает каскад столкновений с одной границей. В противном случае $(n + 1)$ -е столкновение произойдет с другим фокусирующим компонентом.

В случае перехода от одного фокусирующего компонента к другому отображение запишется как

$$\begin{aligned}
 \alpha_{n+1}^* &= \arcsin \left[\sin(\psi_n + \Phi) - \frac{x_{n+1}^*}{R} \cos \psi_n \right], \\
 \alpha_{n+1} &= \alpha_{n+1}^*, \\
 \varphi_{n+1} &= \psi_n - \alpha_{n+1}^*, \\
 t_{n+1} &= t_n + \frac{R(\cos \varphi_n + \cos \varphi_{n+1} - 2 \cos \Phi) + l}{V_n \cos \psi_n}.
 \end{aligned} \tag{5}$$

Здесь введены величины $\psi_n = \alpha_n - \varphi_n$, $x_n = R/(\cos \psi_n) [\sin \alpha_n + \sin(\Phi - \psi_n)]$, $x_{n+1}^* = x_n + l \tan \psi_n \pmod{a}$. При выводе данных отображений не использовались никакие упрощающие соотношения. Выражения (4) соответствуют серии последовательных столкновений частицы с одним фокусирующим компонентом, а (4) – переходу от одной границы к другой.

На рис. 5, а представлен фазовый портрет бильярда типа «стадион», задаваемый отображениями (4)–(5). В качестве координаты ξ_n выбиралась величина $\xi_n = 1/2 + (R \sin \varphi_n)/a$, равная нормированной на ширину бильярда проекции точки

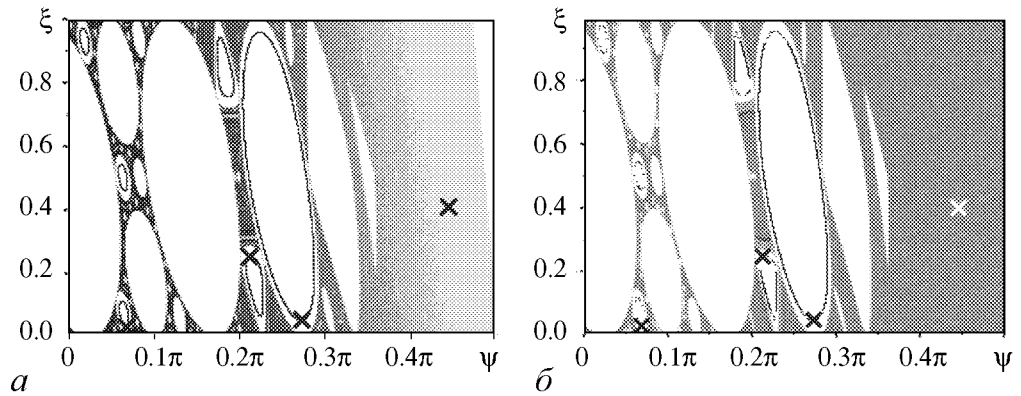


Рис. 5. Фазовый портрет бильярда типа «стадион» с границей в виде дуги окружности (а) и с параболической границей (б) при $a = 0.5$, $b = 0.01$ и $l = 1.0$

столкновения частицы с фокусирующим компонентом на ось Ox . Поскольку бильярд обладает осевой симметрией, то и исследуемые отображения должны обладать симметрией относительно замены $\xi \rightarrow 1 - \xi$, $\psi \rightarrow -\psi$. Следовательно, достаточно получить результаты в области неотрицательных ψ . При численном анализе интервал изменения величин ξ и ψ разбивался на 300×300 ячеек. Интенсивность черного цвета на рисунке пропорциональна числу точек, попавших в данную ячейку. Для построения графика использовались четыре траектории. Одна из них начиналась в стохастической области и включала $5 \cdot 10^8$ итераций. Три другие начинались в регулярной области и содержали по 10^7 итераций. Начальные условия отмечены на графике крестиками. Из рисунка следует, что в системе существуют устойчивые неподвижные точки, окруженные инвариантными кривыми и соответствующие различным резонансам. Динамика частиц в окрестностях этих точек является регулярной, отвечающей движению вдоль таких инвариантных кривых. Области, соответствующие различным резонансам, разделяются сепаратрисами, окруженными стохастическим слоем. Ширина этого слоя определяется величиной нелинейности в системе. Частица, начав свое движение в таком слое, посещает все доступные ей области случайным образом. С ростом нелинейности (то есть параметра b) неподвижные точки могут потерять свою устойчивость, в результате чего образуется область глобальной стохастичности, в которой частице доступно уже все фазовое пространство и она может диффундировать в любом направлении. Таким образом, можно выделить три слоя, в которых динамика системы будет качественно различна.

Для нахождения стационарных точек и анализа их устойчивости используем определенные упрощения в отображении (4)–(5). Аппроксимируем фокусирующий компонент границы бильярда частью параболы, $\chi(x) = 4bx(x - a)/a^2$. В качестве координат выберем угол ψ между вектором скорости и вертикалью, $\psi \in [-\pi/2, \pi/2]$, а также величину x – проекцию на ось Ox точки столкновения частицы с границей, $x \in [0, a)$ (рис. 6). Тогда, принимая во внимание приближение (1), найдем

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n + l \tan \psi_{n+1} \pmod{a}, \\ \psi_{n+1} &= \psi_n - 2\beta(x_{n+1}), \end{aligned} \quad (6)$$

где $\beta(x) = \arctan(\chi'(x))$ – угол наклона касательной в точке столкновения. В этом случае, очевидно, $\beta \approx 4b(2x - a)/a^2$.

Для дальнейших упрощений сделаем замену: $\xi = x/a$, $\xi \in [0, 1]$. В этих переменных отображение примет вид

$$\begin{aligned}\xi_{n+1} &= \xi_n + \frac{l}{a} \tan \psi_n \pmod{1}, \\ \psi_{n+1} &= \psi_n - \frac{8b}{a}(2\xi_{n+1} - 1).\end{aligned}\quad (7)$$

Одно из семейств неподвижных точек бильярда, очевидно, можно записать в виде $\{\xi = 1/2, \psi_m = \arctan(ma/l)\}$, $m \in \mathbb{Z}$. Эти точки соответствуют столкновениям частицы с центром дуги. Причем, если $m = 0$, то частица движется строго вертикально, если $m = 1$, то при каждом соударении частица смещается на одну ячейку и т.д. (см. штрихпунктирные линии на рис. 6). Исследуем устойчивость таких точек. Для этого линеаризуем отображение, сделав замену $\xi_n = \Delta\xi_n + 1/2$, $\psi_n = \Delta\psi_n + \arctan(ma/l)$. Тогда, раскладывая в ряд по $\Delta\psi$, найдем

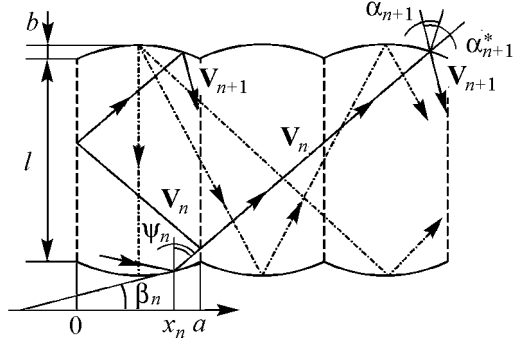


Рис. 6. Развертка бильярда типа «стадион»

$$\begin{aligned}\Delta\xi_{n+1} &= \Delta\xi_n + \frac{l}{a \cos^2 \psi_m} \Delta\psi_n + O(\Delta\psi_n^2), \\ \Delta\psi_{n+1} &= \Delta\psi_n - \frac{16b}{a} \Delta\xi_{n+1},\end{aligned}$$

где $\psi_m = \arctan(ma/l)$. При этом матрица преобразования имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{l}{a \cos^2 \psi_m} \\ -\frac{16b}{a} & 1 - \frac{16bl}{a^2 \cos^2 \psi_m} \end{pmatrix}.$$

Нетрудно убедиться, что $\det A = 1$. Следовательно, полученное отображение сохраняет площадь. Критерий устойчивости стационарных точек можно записать как $|\text{Tr}A| \leq 2$. Отсюда $\cos^2 \psi_m \geq 4bl/a^2$ или $m^2 \leq l/(4b) - l^2/a^2$.

Разрушение всех резонансов и переход к хаосу произойдет, если $4bl/a^2 > 1$. Можно показать [33], что движение частицы вокруг устойчивой точки описывается отображением поворота с числом вращения

$$\rho = \arccos \left(1 - \frac{8bl}{a^2 \cos^2 \psi_m} \right).$$

Движение частицы внутри бильярда с определенной скоростью V порождает поток, в котором можно ввести время t . Время между последовательными столкновениями приблизительно равно $\tau \approx (l/\cos \psi_m)(1/V)$. Поэтому период вращения

$$T_\rho = \frac{2\pi}{\rho} \tau = \frac{2\pi}{\arccos \left(1 - \frac{8bl}{a^2 \cos^2 \psi_m} \right)} \frac{l}{V \cos \psi_m}.$$

На рис. 5, б представлен фазовый портрет бильярда с фокусирующими компонентами в форме параболы, задаваемого *приближенным отображением* (7). Из его сравнения с рис. 5, а, построенным на основе точного отображения (4)–(5), видно, что во втором случае траектория равномерно распределена по всей стохастической области. Однако в первом случае бóльшая плотность соответствует области $\psi \geq 0$, а область $\psi \leq \pi/2$ практически пуста. Разницу результатов объясняет рис. 7, где показано приближение малой глубины фокусирующего компонента, сделанное при выводе отображения (7). В результате для точного отображения при

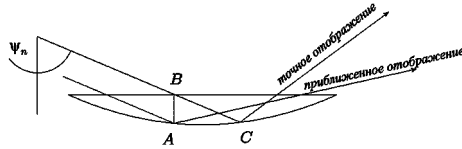


Рис. 7. Разница траекторий бильярдной частицы в точном и приближенном отображении

большом ψ соударение будет происходить с большей вероятностью с правой (на рисунке) частью дуги, так что угол ψ будет уменьшаться. Таким образом, частицы как бы выталкиваются из областей больших ψ , так что движение происходит, в основном, в окрестности регулярных областей.

2.1. Возмущение границы. Если граница бильярда возмущается, то частица может переходить из стохастической области в регулярную и обратно. Когда скорость частиц много больше скорости движения границ, можно показать [33], что частицы, попадая в окрестность неподвижных точек, будут двигаться по спирали, сначала приближаясь к центру, а потом удаляясь от него. При этом частота вращения остается такой же, как и в невозмущенной системе. Кроме того, легко понять, что при определенной скорости частиц может наступить резонанс между вращением частицы вокруг неподвижной точки и возмущением границ. В результате вся область в окрестности неподвижной точки становится доступной. Резонансную скорость можно выразить следующим образом:

$$V_r(m) = \frac{l\omega}{\cos \psi_m \arccos(1 - 8bl/(a \cos \psi_m)^2)}. \quad (8)$$

Пусть фокусирующие компоненты возмущаются таким образом, что скорость их движения в каждой точке одинакова по модулю и направлена по нормали к поверхности. Предположим, что модуль скорости границы зависит от времени по некоторому периодическому закону $U(t) = U_0 f(\omega(t + t_0))$, где ω – частота колебаний. Будем считать, что $U_0/\omega \ll l$, то есть смещение границы мало. В этом случае отображение, описывающее движение бильярдного шара, можно записать как

$$\begin{aligned} V_n &= \sqrt{V_{n-1}^2 + 4V_{n-1} \cos \alpha_n^* U_n + 4U_n^2}, \\ \alpha_n &= \arcsin \left(\frac{V_{n-1}}{V_n} \sin \alpha_n^* \right), \end{aligned} \quad (9)$$

$$\left. \begin{aligned} \alpha_{n+1}^* &= \alpha_n, \\ \varphi_{n+1} &= \varphi_n + \pi - 2\alpha_n \pmod{2\pi}, \\ t_{n+1} &= t_n + \frac{2R \cos \alpha_n}{V_n}, \end{aligned} \right\} \text{если } |\varphi_{n+1}| \leq \Phi \quad (10)$$

$$\left. \begin{aligned}
\psi_n &= \alpha_n - \varphi_n, \\
x_n &= \frac{R}{\cos \psi_n} [\sin \alpha_n + \sin (\Phi - \psi_n)], \\
x_{n+1}^* &= x_n + l \tan \psi_n \pmod{a}, \\
\alpha_{n+1}^* &= \arcsin \left[\sin (\psi_n + \Phi) - \frac{x_{n+1}^*}{R} \cos \psi_n \right], \\
\varphi_{n+1} &= \psi_n - \alpha_{n+1}^*, \\
t_{n+1} &= t_n + \frac{R(\cos \varphi_n + \cos \varphi_{n+1} - 2 \cos \Phi) + l}{V_n \cos \psi_n},
\end{aligned} \right\} \text{если } |\varphi_n + \pi - 2\alpha_n| > \Phi.$$

(11)

Отметим, что при его выводе не использовалось соотношение (1). Единственное приближение, которое было сделано, – малость смещения границ бильярда. Выражения (10) соответствуют серии последовательных столкновений частицы с одним фокусирующим компонентом, а (11) – переходу от одной границы к другой.

2.2. Численный анализ. Численное исследование бильярда типа «стадион» с возмущаемой границей, описываемого отображениями (9)–(11), проводилось при тех же значениях геометрических параметров, что и в предыдущем пункте. При этом амплитуда осцилляций границы $U_0 = 0.01$, а частота $\omega = 1.0$.

Как указывалось ранее, для разных скоростей частиц фазовые портреты такой системы должны различаться. На рис. 8 представлена зависимость резонансной скорости, задаваемой выражением (8), от угла ψ_m . Из него следует, что в области от 0 до $\psi_{m \text{ макс}}$ значение скорости меняется в узких пределах.

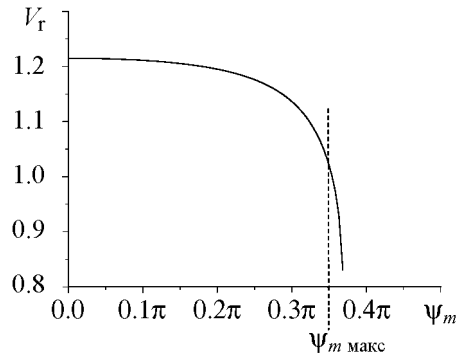


Рис. 8. Резонансная скорость в зависимости от ψ_m .

Численные исследования отображения (10)–(11) были проведены в двух случаях: для полностью хаотического и близкого к интегрируемому бильярдов. В первом случае бильярд – классический стадион, то есть $\Phi = \pi/2$, и граница бильярда состоит из двух полуокружностей и двух параллельных прямых, касательных к ним (левый бильярд на рис. 2). Близкий к интегрируемому случай означает, что фокусирующие компоненты – почти прямые (правый бильярд на рис. 2), так что выполняется соотношение (1).

Для хаотического бильярда были выбраны следующие параметры: $a = 0.5$, $b = 0.25$, $l = 1.0$, $U_0 = 0.01$, $\omega = 1.0$ и $V_0 = 0.1$. Скорость частицы вычислялась как среднее значение ансамбля из 5000 траекторий с различными начальными условиями (сплошная кривая 1 на рис. 9). Начальные условия выбирались случайным образом на фокусирующем компоненте, так чтобы вектор скорости частицы был направлен внутрь бильярдной области. Как следует из численного анализа, как и в случае газа Лоренца скорость частицы $V(n)$ пропорциональна \sqrt{n} .

В близком к интегрируемому бильярду параметр b достаточно мал и кривизна фокусирующего компонента вносит малую нелинейность в систему. В такой конфигурации фазовое пространство имеет области с регулярной и хаотической динамикой. Этот случай представляется значительно более интересным. Невозмущенный бильярд имеет устойчивые точки, окруженные инвариантными кривыми. В их окрестности движение частицы квазипериодично и хорошо аппроксимируется отображением поворота. В то же время вне этих регионов динамика хаотична. В этом случае траектории заполняют хаотическую область целиком. Таким образом, если граница бильярда не возмущена, то в зависимости от начальных условий движение бильярдной частицы может быть либо хаотическим либо регулярным.

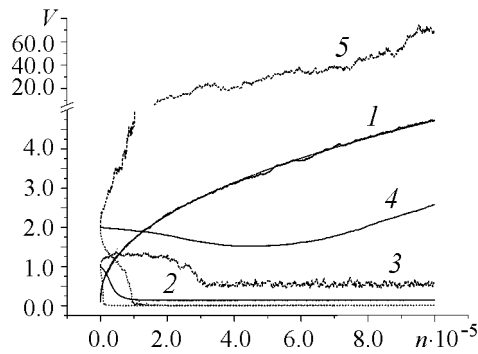


Рис. 9. Зависимость средней скорости частицы от числа соударений n с границей в бильярде типа «стадион» с осциллирующими стенками [27, 33]. Две кривые 1 (численно полученная и ее «корневая» аппроксимация $V \sim \sqrt{n}$) соответствуют бильярду с развитыми хаотическими свойствами ($b=0.25$). Кривые 2–5 отвечают близкому к интегрируемому бильярду ($b = 0.01$): $V_0 = 1.0$ (кривые 2, 3) и $V_0 = 2.0$ (кривые 4 и 5)

Теперь обратимся к возмущаемому бильярду. В такой системе частица может двигаться из стохастической области в регулярную и обратно. В достаточно малой окрестности фиксированной точки движение частицы имеет определенный период вращения, $T_p = 2\pi\lambda/(\rho V)$, где ρ – число вращения, λ – средняя длина свободного пробега и V – скорость частицы. В то же время, период осцилляций границы $T = 2\pi/\omega$. Таким образом, в системе при некоторой скорости V_r будет наблюдаться резонанс между частотой вращения вокруг неподвижной точки и частотой колебаний границы. Как следует из численного анализа, по разные стороны от резонанса бильярдные частицы имеют качественно различное поведение. Если начальная скорость $V_0 < V_r$, тогда скорость частиц *уменьшается* до конечной величины $V_{\text{fin}} < V_r$, и распределение по скоростям стремится к стационарному в интервале $(0, V_{\text{fin}})$. Если же $V_0 > V_r$, то частицы в среднем *ускоряются*. В этом случае распределение частиц не стационарно, и скорость неограниченно возрастает.

На рис. 9 (кривые 2–5) показана зависимость скорости частицы от числа столкновений. Параметры бильярда были выбраны те же, что и для классического «стадиона» (кривая 1), за исключением величины $b = 0.01$.

На основании 5000 реализаций для каждой начальной скорости были построены три кривые: средняя, минимальная и максимальная скорости, достигнутые на n -й итерации. Таким образом, можно определить интервал изменения скорости. Как следует из рисунка, если $V_0 < V_r$ тогда средняя скорость частиц (сплошная кривая 2) постепенно уменьшается и стремится к константе. Максимальная скорость частиц (пунктирная кривая 3) также уменьшается до величины V_{fin} и флуктуирует

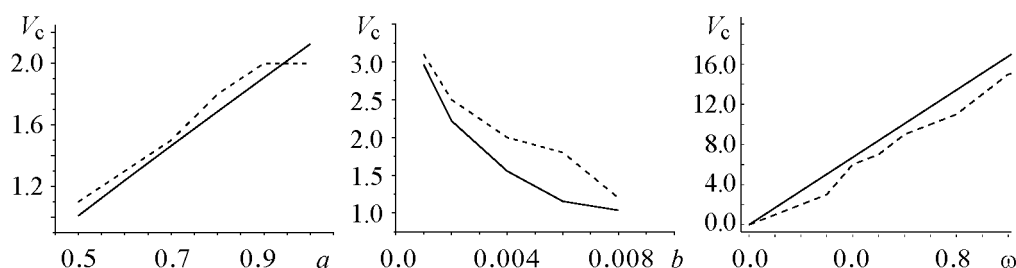


Рис. 10. Зависимость критической скорости V_c частицы от параметров a и b (см. рис. 4) и от частоты ω колебаний границы в близком к интегрируемому бильярде типа «стадион» с осциллирующими границами. Штриховые ломаные – численный расчет, сплошные линии – аппроксимация (12)

около этого значения. В конечном счете скорости частиц оказываются в интервале $0 < V < V_{\text{fin}}$. В случае $V > V_r$ минимальная скорость частиц также уменьшается. Это означает, что в ансамбле существуют частицы, попавшие в область малых скоростей. В численном анализе доля таких частиц составляла примерно 3/4. В то же время существуют частицы с большой скоростью (штриховая кривая 5, которая соответствует максимальной скорости ансамбля). В результате средняя скорость частиц (сплошная кривая 4) растет.

Следовательно, в данной бильярдной системе существует некоторое критическое значение скорости частицы, ниже которой частицы будут замедляться, а выше – ускоряться. Эту критическую скорость можно выразить как

$$V_c = \frac{\omega l}{\cos \psi_m \arccos(1 - 8bl / (a \cos \psi_m)^2)}, \quad (12)$$

На рис. 10 показана зависимость скорости (12) от характерных параметров бильярда: его ширины a , глубины фокусирующего компонента b (см. рис. 4) и частоты колебаний границы. Штриховыми линиями обозначены численно найденные зависимости, сплошными – аппроксимация на основе соотношения (12). Видно, что с ростом b критическая скорость стремится к нулю, то есть в соответствующем бильярде замедление частиц наблюдаться не может. То же имеет место и при уменьшении параметра a . Это связано с тем, что при таком изменении параметров в системе растет нелинейность и, как следствие, степень хаотичности в динамике бильярда. Величина критической скорости сильно зависит и от частоты осцилляций. Однако при очень большой частоте в бильярде наблюдается только хаотическая динамика и эффект разделения частиц также исчезает.

Таким образом, в данной бильярдной системе наблюдается сепарация частиц в ансамбле по скоростям: часть из них будет испытывать ускорение, а часть – замедляться. Иными словами, при слабом возмущении бильярда типа «стадион» естественным образом может реализоваться своеобразная динамическая модель демона Максвелла, когда быстрые и медленные частицы разделяются.

Заключение

Бильярды являются достаточно удобными моделями целого ряда физических систем. Например, многим динамическим задачам могут быть поставлены в соответствие уравнения траектории частицы в бильярдах заданной формы. Более того, большинство подходов к проблеме перемешивания в системах из многих частиц сводится к задачам бильярдного типа. Естественным обобщением бильярдных систем являются бильярды, границы которых не являются неподвижными, а изменяются по какому-либо закону. Это достаточно новая область, открывающая новые перспективы в исследовании многих давно известных, но малоизученных проблем.

В настоящей работе рассмотрена проблема ускорения Ферми в бильярде типа газа Лоренца и бильярде «стадион», границы которых возмущаются со временем. В отличие от газа Лоренца в стадионе динамика роста скорости зависит от его формы. Если форма такова, что поведение частицы полностью хаотично, то, как и в газе Лоренца, средняя скорость ансамбля частиц растет как корень квадратный из числа столкновений. В то же время, в близком к интегрируемому случаю наблюдается новое явление: существует критическое значение V_c такое, что, если начальная скорость $V_0 < V_c$, то скорость ансамбля частиц убывает вплоть до некоторой близкой к нулю (но не нулевой) величины, а распределение частиц стремится к стационарному. При этом скорость всех частиц падает до достаточно малого значения (существенно меньшего начальной скорости) и устанавливается равновесное распределение частиц по скоростям. Но если $V_0 > V_c$, то скорость частиц неограниченно возрастает.

Отметим однако, что данный результат, строго говоря, был получен не для точного отображения, описывающего динамику бильярдной частицы. Приближение, которое было сделано, – это пренебрежение смещением границ бильярда (так называемое статическое приближение). Хотя такая аппроксимация представляется вполне естественной и почти всегда используется при анализе бильярдов с возмущаемыми границами (см., например, [28–30]), было бы интересно сравнить полученные соотношения с результатами для систем, где смещением границ не пренебрегается [34].

Библиографический список

1. *Заславский Г.М.* Стохастичность динамических систем. М.: Наука, 1984.
2. *Fundamental Problems in Statistical Mechanics*, vol. 3 / Ed. R.H. Cohen. Elsevier, Amsterdam, 1975.
3. *Корнфельд И.П., Синай Я.Г., Фомин С.В.* Эргодическая теория. М.: Наука, 1980.
4. *Бунимович Л.А.* // В кн. Динамические системы – 2. Серия «Современные проблемы математики. Фундаментальные направления». ВИНТИ, 1985. С. 173.
5. *Bunimovich L.A., Sinai Ya.G.* // *Commun. Math. Phys.* 1981. Vol. 78. P. 479.
6. *Baldwin P.R.* // *J. Phys. A.* 1991. Vol. 24. P. L941.
7. *Chernov N.* // *J. Stat. Phys.* 1997. Vol. 88. P. 1.
8. *Garrido P.L.* // *J. Stat. Phys.* 1997. Vol. 88. P. 807.
9. *Bunimovich L.A.* // *Chaos.* 1991. Vol. 1. P. 187.

10. *Fermi E.* // *Phys. Rev.* 1949. Vol. 75. P. 1169.
11. *Ulam S.M.* // *Proc. of the 4th Berkeley Symp. on Math. Stat. and Probability.* California Univ. Press. 1961. Vol. 3. P. 315.
12. *Лихтенберг А., Либерман М.* Регулярная и стохастическая динамика. М.: Мир, 1984.
13. *Brahic A.* // *Astron. Astrophys.* 1971. Vol. 12. P. 98.
14. *Заславский Г.М.* Стохастическая необратимость в нелинейных системах. М.: Наука, 1970.
15. *Lichtenberg A.J., Lieberman M.A., Cohen R.H.* // *Physica D.* 1980. Vol. 1. P. 291.
16. *Пустьльников Л.Д.* // *Докл. Акад. наук СССР.* 1987. Т. 292. С. 549.
17. *Пустьльников Л.Д.* // *Матем. сб.* 1994. Т. 85. С. 113.
18. *Krüger T., Pustyl'nikov L.D., Troubetzkoy S.E.* // *Nonlinearity.* 1995. Vol. 8. P. 397.
19. *Пустьльников Л.Д.* // *Успехи матем. наук.* 1995. Т. 50. С. 143.
20. *Koiller J., Markarian R., Kamphorst S.Q., de Carvalho S.P.* // *Nonlinearity.* 1995. Vol. 8. P. 983.
21. *Koiller J., Markarian R., Oliffson S., Pintos S.* // *J. Stat. Phys.* 1996. Vol. 83. P. 127.
22. *Kamphorst S.Q., de Carvalho S.P.* // *Nonlinearity.* 1999. Vol. 12. P. 1363.
23. *Tsang K.J., Ngai K.L.* // *Phys. Rev. E.* 1997. Vol. 56. P. R17.
24. *Tsang K.J., Lieberman M.A.* // *Physica D.* 1984. Vol. 11. P. 147.
25. *Tsang K.J., Lieberman M.A.* // *Phys. Lett. A.* 1984. Vol. 103A. P. 175.
26. *Лоскутов А.Ю., Рябов А.Б., Акиншин Л.Г.* // *ЖЭТФ.* 1999. Т. 116. С. 1781.
27. *Loskutov A., Ryabov A.B., Akinshin L.G.* // *J. Phys. A.* 2000. Vol. 33. P. 7973.
28. *de Carvalho R.E., Souza F.C., Leonel E.D.* // *J. Phys. A.* 2006. Vol. 39. P. 3561.
29. *de Carvalho R.E., Souza F.C., Leonel E.D.* // *Phys. Rev. E.* 2006. Vol. 73. P. 066229.
30. *Karlis A.K., Papachristou P.K., Diakonou F.K., et al.* // *Phys. Rev. Lett.* 2006. Vol. 97. P. 194102.
31. *Leonel E.D.* // *J. Phys. A.* 2007. Vol. 40. P. F1077.
32. *Loskutov A., Chichigina O., Ryabov A.* // *Int. J. Bif and Chaos.* 2008. Vol. 18. P. 2863.
33. *Loskutov A., Ryabov A.* // *J. Stat. Phys.* 2002. Vol. 108. P. 995.
34. *Loskutov A., Ryabov A.B.* (Готовится к печати).

Московский государственный
университет им. М.В. Ломоносова

Поступила в редакцию 3.03.2008

BILLIARD TYPE SYSTEMS AND FERMI ACCELERATION

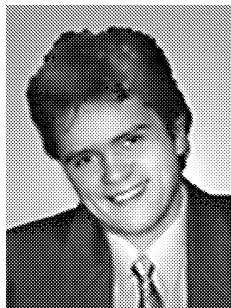
A.Yu. Loskutov, A.B. Ryabov

Systems of billiard types with perturbed boundaries are described. A generalized dispersing billiard – the Lorentz gas with the open horizon – and a focusing billiard in the form of stadium are considered. It is analytically and numerically shown that,

if the billiard possesses the property of the developed chaos, the consequence of the boundary perturbation is the Fermi acceleration. However, the perturbation of the nearly integrable billiard system leads to a new interesting phenomenon – the separation of the billiard particles in their velocities. This consists of the fact that if the initial particle velocities exceed some critical value (specific for the given billiard geometry) then the racing of the particle ensemble is observed. If the initial value is below the critical value, then the billiard particles are not accelerated. The dependence of the separation effect on the characteristic billiard parameters and the frequency of the boundary oscillations is described.



Лоскутов Александр Юрьевич – доктор физико-математических наук, профессор физического факультета МГУ. Область профессиональных интересов – теория динамических систем и ее приложения. Имеет более 130 публикаций в научных журналах, 2 учебника, 4 монографии (2 из которых с соавторами). Лауреат премии им. И.И. Шувалова по математике и физике (1998). Член редакций журналов «Проблемы анализа риска», «Вестник МГУ, серия физика-астрономия», «Nonlinear Biomedical Physics». Приглашенный профессор многих ведущих университетов мира.



Рябов Алексей Борисович – окончил физический факультет Московского государственного университета (1996). Защитил диссертацию по теме «Ускорение Ферми в хаотических бильярдах с возмущаемыми границами» (2002). С 2001 года преподавал и занимался исследованиями в качестве сотрудника физического факультета. С 2005 года проживает в Германии и работает в группе математического моделирования экологических систем.
E-mail: a.ryabov@icbm.de



ОПТИМАЛЬНОЕ ПОДАВЛЕНИЕ ХАОСА И ПЕРЕХОДНЫЕ ПРОЦЕССЫ В СКОРРЕКТИРОВАННЫХ МНОГОПАРАМЕТРИЧЕСКИХ КОЛЕБАТЕЛЬНЫХ СИСТЕМАХ

Ю.В. Талагаев, А.Ф. Тараканов

Представлена двухэтапная схема оптимальной коррекции пространства параметров динамической системы, целью которой является преобразование хаотического режима системы в регулярный с минимальной интенсивностью воздействий. В основе предлагаемого подхода лежит комбинирование методов теории оптимального управления с численным тестированием качества подавления хаоса. Теоретически обосновано, что найденные в результате применения схемы оптимальные корректирующие функции позволяют осуществить процесс модификации хаотического аттрактора в уникальное устойчивое предельное множество, соответствующий переходу системы к устойчивой динамике. В вычислительном эксперименте с обобщенной моделью автоколебательной системы показано, что предложенная методика коррекции эффективна для многопараметрического анализа ситуаций, возникающих при оптимальном подавлении хаоса.

Введение

Особенностью хаотических систем как объектов управления является не только чувствительная зависимость от малых возмущений параметров [1], но и то, что параметрическое пространство многих из них многомерно. Неослабевающий интерес к управлению хаосом [2] и бифуркациями [3, 4] требует совершенствования средств многопараметрического анализа, важных при конструировании и моделировании процессов управления сложных систем в технике, экономике, биологии и т.д.

При высокой размерности пространства параметров нелинейных динамических систем структура границ областей регулярной и хаотической динамики приобретают разнообразный (иногда нетривиальный) характер [5]. По причине сложности картины бифуркаций при большом числе управляющих параметров, анализ механизмов подавления хаотического поведения требует гораздо больших усилий, чем в однопараметрическом случае. Несмотря на возникающие трудности, продуктивность МР-анализа позволяет: углубить понимание механизма функционирования системы на основе сведений об особенностях границ параметрических областей устойчивости линеаризованных уравнений (теория многопараметрической устойчивости [6]); исследовать разнообразные критические ситуации и универсальные характеристики,

возникающие на границе перехода «регулярная динамика–хаос» (теория многопараметрической критичности [7, 8]); повысить прогнозируемость и выявить особенности управления нелинейными многопараметрическими системами [9–12] .

В представленной работе в качестве средства МР-анализа используется метод оптимальной коррекции. Первоначально [13] метод предназначался для погашения хаотической динамики автономных систем путем преобразования хаотического режима в регулярный динамической коррекцией (по некоторому критерию качества) их пространства параметров. Однако при включении в круг корректируемых объектов нелинейных осцилляторов оказалось, что его возможности шире и с его помощью можно исследовать особенности оптимальных переходных процессов, возникающих при подавлении хаоса. Согласно анализу целей управления в [14], цель коррекции мы определяем как *модификацию* предельного множества системы из неустойчивого в устойчивое с учетом требования малости воздействия на параметры. Отличие от задачи стабилизации хаоса [15] состоит в том, что заранее задаются не количественные характеристики целевого множества (как правило, это неустойчивая периодическая орбита или положение равновесия, вложенные в хаотический аттрактор), а характер устойчивости системы. Данная цель типична для методов управления сложной динамикой и хаосом в нелинейных осцилляторах, использующих внешние периодические возмущения, эффективность которых оценивается на основании критерия Мельникова [16–18], а также методов оптимального управления бифуркациями [19].

В одной из последних работ [20], посвященной управлению хаосом, специально подобранными возмущениями, реализованными без обратной связи, изучена проблема стабилизации хаотического поведения колебательной системы с сепаратрисным контуром. Для общего случая в ней показано, что внешнее возмущение (функция стабилизации), приводящее к подавлению хаоса, представляет собой серию толчков («kicks»). Это сразу наводит на вопрос о связи этих новых результатов с классической теорией оптимального управления [21–23], в которой аналогичная динамика характерна оптимальным программным сигналам.

В настоящей работе метод коррекции рассматривается как альтернативный способ нахождения функций, обеспечивающих устойчивость системы. Мы показываем, что требование малости возмущения параметров в сочетании с типичными свойствами хаотических систем позволяет получить вспомогательный интегральный критерий (имеющий смысл минимума затрат энергии на процесс коррекции) для определения на основе условий принципа максимума Понтрягина оптимальной структуры корректирующих функций, в отношении которых возможна минимизация уровня их интенсивности.

Теоретический анализ, проведенный в работе и подкрепленный численным экспериментом, указывает, что свойства оптимальных корректирующих функций позволяют осуществить процесс модификации хаотического аттрактора, не имея заранее полной информации о том, как будет вести себя траектория системы, если она окажется в устойчивом режиме. Такая ситуация возникает при управлении многими сложными системами, для которых неизвестно, какие из допустимых параметров и форм их возмущений будут наилучшими для осуществления управляющих воздействий. В результате в фазовом пространстве системы удается локализовать *уникальное предельное множество* (ULS), одновременно отвечающее требованиям к устойчивости и оптимальности переходного процесса.

1. Задача коррекции и метод ее решения

1.1. Постановка задачи. Рассмотрим нелинейную диссипативную динамическую систему $\dot{x} = f(x, p)$, $x \in R^n$, с вектором параметров $p \in R^m$, у которой значения параметров лежат в области параметрического пространства, соответствующей хаотической динамике. Это означает, что для любых начальных условий $x_0 \neq 0$ из бассейна притяжения B_A хаотического аттрактора A_p выполнено предельное соотношение $dist(x(t), A_p) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0$, где $dist(x(t), A_p) = \inf_{z \in A_p} \|x - z\|$ – расстояние от точки x до множества A_p ($\|\cdot\|$ – евклидова норма). Множество A_p ограничено ($\|x(t)\| < D$), и для траектории $x(t) = x(x_0, t)$, $x_0 \in B_A$, рассматриваемой хаотической системы положителен старший характеристический показатель Ляпунова

$$\Lambda_1 = \max \left\{ \overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \|\tilde{x}_i(t)\| \right\}, \quad i = \overline{1, n},$$

где $\tilde{x}(t)$ – возмущение траектории, то есть $\bar{x}(t) = x(t) + \tilde{x}(t)$, с близким к x_0 начальным условием $\bar{x}_0 = x_0 + \tilde{x}_0$, $\|\bar{x}_0 - x_0\| = \varepsilon$. Геометрическую структуру хаотического аттрактора определяет равновесное множество $E = \{x_{(k)}^e\}_{k=\overline{1, s}} = \{x \subset R^n \mid f(x, p) = 0\}$, где s – число неустойчивых состояний равновесия системы. От их количества, типа и локализации в фазовом пространстве зависит конфигурация траекторий системы на аттракторе.

Идея многопараметрической коррекции [13] состоит в выделении множества параметров $\{p_1, p_2, \dots, p_r\}$, $r \leq m$, допускающих целенаправленное воздействие и трансформацию исходной системы к виду

$$\dot{x} = f(x, \hat{p}), \quad (1)$$

где допустимые параметры скорректированы по правилу $\hat{p}_j(t) = p_j(1 + h_j(t))$, $j = \overline{1, r}$. Целью преобразования $\dot{x}(t) = f(x(t), p) \rightarrow \dot{x}(t) = f(x(t), \hat{p}(t))$ является обеспечение устойчивости скорректированной хаотической системы при соблюдении естественного требования «малости» коррекции параметров, формализованного в виде условия минимума некоторой векторной нормы $\|\hat{p}(\cdot) - p\| \rightarrow \min$.

Известно, что в хаотический аттрактор вложено счетное множество неустойчивых периодических орбит. Для скорректированных хаотических систем эта особенность проявляется в том, что выполнение условия устойчивости $\Lambda_1 < 0$ задает «нечеткую» цель, поскольку ей может соответствовать широкий класс приемлемых динамических режимов. Учитывая это, введем целевое множество $M_E = \{(x, h) \mid f(x, \hat{p}) = 0\}$, которое локально неустойчиво при $h = \{h_j\} \equiv 0$. Тогда цель коррекции можно переформулировать: необходимо обеспечить свойство $A_p \mapsto M_E$, то есть есть *модификацию* [24] хаотического аттрактора A_p во внутренне (локально) устойчивое инвариантное предельное множество M_E . Очевидно, что устойчивость множества M_E достигается при условии $\Lambda_1 < 0$. При этом в силу структуры $M_E \supset E$ оно будет содержать некоторый регулярный аттрактор, соответствующий устойчивому динамическому режиму скорректированной системы.

Использование при формализации цели коррекции множества M_E позволяет обойти неопределенность, которая возникает из-за недостаточности количественной информации о конечном режиме. Это происходит благодаря тому, что в исследуемой

задаче существенным оказывается не перевод состояния системы на терминальное множество («стабилизация»), а изменение характера устойчивости M_E в целом («модификация»). Если при этом соблюдено условие оптимальности $\|\hat{p}(\cdot) - p\| \rightarrow \min$, то на основе M_E рождается ULS системы.

Поскольку $\|\hat{p}(\cdot) - p\| = \|p h(\cdot)\| \leq \|p\| \cdot \|h(\cdot)\|$, то условие $\|\hat{p}(\cdot) - p\| \rightarrow \min$ для обеспечения модификации $A_p \mapsto M_E$ можно выполнить путем оценки сверху $\|h(\cdot)\| \rightarrow \min$, которое, очевидно, можно связать с наличием ограничивающего множества

$$U = \{h(\cdot) \in L_2[0, T] \mid \|h(t)\| \leq a, t \in [0, T], T \gg T^*\}$$

и записать критерий оптимальности коррекции в виде $a \rightarrow \min$. После введения множества U задача оказывается определенной на конечный интервал времени $[0, T]$, где T – время, на котором определено решение системы. Хаотическим системам характерно наличие времени T^* переходного процесса, в течение которого поведение траекторий отличается от свойственного им при $T > T^*$. Поэтому в задаче коррекции при исследовании характера устойчивости установившегося режима выбор момента T должен быть проведен согласно условию $T \gg T^*$, то есть быть заведомо больше длительности переходного процесса.

При $h \in U$ характер динамики скорректированной системы (1) зависит от значения a , являющегося общим уровнем возмущения параметров. Следовательно, величина a определяет эволюцию малого возмущения $\tilde{x}(t)$ вдоль выбранной для анализа устойчивости скорректированной траектории $x(t)$, $x_0 \in B_A$, причем Λ_1 есть функция $\Lambda_1 = \Lambda_1(a)$.

Определим множество $K = \{a > 0 \mid \Lambda_1(a) < 0\}$ допустимых значений, обеспечивающих устойчивость скорректированной системы. Тогда, конкретизируя норму и формализуя критерий «малости» коррекции $a \rightarrow \min_{a \in K}$, приходим к следующему условию:

$$J_1(h, a) = \|h(\cdot)\|_C = \max_{0 \leq t \leq T} \max_{1 \leq j \leq r} |h_j(t)| \rightarrow \min_{a \in K}. \quad (2)$$

В (2) обозначение $J_1(h, a)$ введено для отражения особенности исследуемой задачи, где минимум по параметру a может достигаться на различных $h \in U$. Поэтому дополнительно к решению a_{\min} задачи (2), при котором $\|h(\cdot)\|_C \leq a_{\min}$ и соблюдается условие устойчивости скорректированной системы $\Lambda_1(a_{\min}) < 0$, необходимо осуществить выбор оптимальной функции $h^0(t)$. Для этого введем вспомогательный критерий

$$J_2(h, a) = \int_0^T \sum_{j=1}^r h_j^2(t) dt \rightarrow \min_{h \in U}. \quad (3)$$

Условие (3) требует найти такую структуру корректирующей функции $h^0 \in U$, чтобы она обеспечивала минимум затрат энергии на коррекцию.

Суммируя сказанное, приходим к задаче оптимальной многопараметрической коррекции

$$J_1(h, a) \rightarrow \min_{a \in K, h^0 \in U^0}, \quad (4)$$

где минимум на множестве K допустимых значений параметра a , обеспечивающих на $[0, T]$ устойчивость скорректированной системы, ищется для функции $h^0 \in U^0 = \underset{h \in U}{\text{Arg min}} J_2(h, a)$.

Задача (4) стеснена условием выбора корректирующей функции $h \in U$ (внутренняя задача (3)) и максимным критерием выбора значения a_{\min} из множества допустимых значений K (параметрическая задача (2)). Решением (4) является пара $(h^*(\cdot), a_{\min})$, которая удовлетворяет неравенству $\|h^*(\cdot)\|_C \leq a_{\min}, t \in [0, T]$. При условии $\Lambda_1(a_{\min}) < 0$ пара обеспечивает оптимальную модификацию $A_p \mapsto M_E$, при которой ULS, локализованное на M_E , локально устойчиво. Тем самым оптимальным способом достигается цель коррекции, заключающаяся в обеспечении устойчивости установившегося на $[0, T]$ режима скорректированной динамической системы.

1.2. Оптимальные корректирующие функции и их свойства

1.2.1. Двухэтапная схема коррекции. Упорядоченность критериев (2)–(3) в задаче (4) позволяет провести ее решение в два этапа как последовательное решение двух задач:

$$J_2(h(\cdot), a) \xrightarrow{\text{I}} \min_{h(\cdot) \in U} \Rightarrow J_2(h^0(\cdot), a) \rightarrow J_1(h^0(\cdot), a) \xrightarrow{\text{II}} \\ \xrightarrow{\text{II}} \min_{a \in K, h^0 \in U^0} \Rightarrow J_1(h^*(\cdot), a_{\min}) = J^*.$$

Реализация двухэтапной схемы предполагает комбинирование методов теории оптимального управления с численным тестированием качества достижения системой устойчивого состояния. В этом случае искомой паре $(h^*(\cdot), a_{\min})$ соответствует наилучший результат J^* , являющийся неулучшаемой оценкой сверху качества достижения системой устойчивого режима на M_E .

На этапе I, где решается задача $J_2(h^0(\cdot), a) = \min_{h(\cdot) \in U} J_2(h(\cdot), a)$, определяются динамические свойства искомой оптимальной корректирующей функции. Для фиксированного a в ограничении $\|h(\cdot)\| \leq a$ с использованием соответствующих методов решается задача оптимального управления для скорректированной системы. А именно, ищется структура допустимой функции $h^0(t), t \in [0, T], T > T^*$, переводящей на интервале $[0, T]$ скорректированную систему с начальным условием $x_0 \in B_A$ во множество M_E с обеспечением (3).

На этапе II решается задача $J_1(h^*(\cdot), a_{\min}) = \min_{a \in K, h^0 \in U^0} J_1(h^0(\cdot), a)$, где $h^0 \in U^0$ – решение этапа I схемы коррекции. Задача минимизации по параметру a связана с численным тестированием качества модификации $A_p \mapsto M_E$. Для этого при различных значениях a в ограничениях $|h_j^0(t)| \leq a, j = \overline{1, r}$, отслеживается эволюция малого возмущения $\tilde{x}(t)$ вдоль скорректированной траектории. В результате для компонент $h_j^0(t), j = \overline{1, r}$, находится значение a_{\min} , которое обеспечивает переход $h^0(\cdot) \mapsto h^*(\cdot)$ от корректирующей функции с оптимальной структурой h^0 к оптимальной корректирующей функции h^* .

1.2.2. Необходимые условия оптимальности. Введем для системы (1) функцию Гамильтона–Понтрягина $H(x, h, \psi) = \psi^T f(x, \hat{p}) - \|h\|^2/2$. Для того чтобы вектор-функция $h^0(t) \in U$ и соответствующая траектория $x^0(t)$ с краевыми усло-

виями $x_0^0 \in B_A$, $x^0(T) \in M_E$ доставляла минимум функционалу энергии (3), необходимо выполнение условий:

1) существует ненулевая вектор-функции $\psi(t) \in R^n$, удовлетворяющая уравнению

$$\dot{\psi}(t) = -(\partial/\partial x)H(x^0(t), h^0(t), \psi(t));$$

2) функция $h^0(t) = h^0(x(t), \psi(t))$ удовлетворяет условию максимума

$$H(x^0(t), h^0(t), \psi(t)) = \max_{h \in U} H(x^0(t), h, \psi(t)) \equiv 0; \quad (5)$$

3) в точках x_0^0 и $x^0(T)$ выполнены условия трансверсальности $\psi_0 \perp \Omega(x_0^0)$ и $\psi(T) \perp \Omega(x^0(T))$, где $\Omega(x_0^0)$ и $\Omega(x^0(T))$ – касательные многообразия к множествам B_A и M_E в точках $x_0^0 \in B_A$ и $x^0(T) \in M_E$, соответственно.

Условие (5) позволяет покоординатно найти оптимальную структуру вектор-функции $h^0(t) = (h_1^0(t), h_2^0(t), \dots, h_r^0(t))$ как функции насыщения ($sat(\cdot)$) (доказательство см. в [23, с. 426–427]). Обозначим через $\tilde{h}_j(t)$ компоненты вектора $\tilde{h}(t)$, определяемые из равенств $(\partial/\partial h_j)H(x^0(t), h, \psi(t)) = 0$. Тогда

$$h_j^0(t) = sat(\tilde{h}_j(t)) = \begin{cases} \tilde{h}_j(t), & \text{если } |\tilde{h}_j(t)| \leq a, \\ a \cdot sign(\tilde{h}_j(t)), & \text{если } |\tilde{h}_j(t)| > a, \end{cases} \quad (6)$$

где $\tilde{h}_j(t) = (\partial/\partial h_j)\psi^T f(x(t), \hat{p}(t))$, $j = \overline{1, r}$.

Особенность полученной на основании условий принципа максимума вектор функции (6) заключается в том, что она аппроксимирует ограничение по гиперсфере ($\|h(\cdot)\| \leq a$) ограничением по гиперкубу ($\|h(\cdot)\|_C \leq a$): $|h_j(t)| \leq a$, $j = \overline{1, r}$. Очевидно, аппроксимация будет тем лучше, чем меньше величина a . Это означает, что найденному значению a_{\min} , определяющему переход $h^0(\cdot) \mapsto h^*(\cdot)$, будет соответствовать наилучшая (по критерию достижения устойчивости) аппроксимация.

После определения (6) получаем систему

$$\begin{cases} \dot{x} = (\partial/\partial \psi)H(x, h(x, \psi), \psi), & x_0 \in B_A, \\ \dot{\psi} = -(\partial/\partial x)H(x, h(x, \psi), \psi), & \psi_0 \perp \Omega(x_0), \end{cases} \quad (7)$$

интегрирование которой с (6) дает энергетически оптимальный процесс

$$C^0 = \{x^0(t), (h^0(t) = h(x^0(t), \psi(t)), a), t \in [0, T]\} \quad \forall a \in (0, 1).$$

Для оптимальности C^0 также нужно удовлетворить условиям трансверсальности на обоих концах траектории. Условие $\psi_0(0) \perp \Omega(x_0)$ на левом конце нетрудно выполнить, используя соотношение $\sum_{i=1}^n \psi_{0i} x_{0i} = 0$. Ниже будет показано, что условие $\psi(T) \perp \Omega(x^0(T))$ на правом конце выполняется автоматически.

1.2.3. Свойства оптимальных корректирующих функций и траекторий.

Определенные выше необходимые условия оптимальности $h^0(t)$ относятся к этапу I схемы коррекции. Однако для осуществления модификации хаотического аттрактора не менее важным требованием, предъявляемым к $h^0(t)$ на этапе II коррекции, является наличие у нее особых динамических свойств. Необходимо, чтобы для соответствующих траекторий $x^0(t)$ функция $h^0(t)$ обеспечивала их сходимость к M_E и характер устойчивости множества M_E определялся значением a в ограничениях (6).

Рассмотрим систему (7), которая за счет введения сопряженной переменной $\psi(t)$ расширяет фазовое пространство системы (1). Особенностью системы (7) является то, что она не может быть одновременно устойчивой по переменным x и ψ . Траектории хаотических систем сосредоточены в ограниченной области $\|x(t)\| < D$ фазового пространства. Глобальная ограниченность динамики нелинейных систем известна как устойчивость по Лагранжу и говорит о присутствии аттрактора. Важно, что ограниченность сохраняется при малом возмущении параметров системы. Тогда введение, согласно принципу максимума, сопряженной системы оставляет в силе условие $\|x(t)\| < D$ и приводит к тому, что норма $\|\psi(t)\|$ неограниченно возрастает на $[0, T]$.

Особенности системы (7) определяют динамические свойства компонент корректирующей функции $h^0(t)$. А именно, при произвольном $a \in (0, 1)$ в ограничениях $|h_j^0(t)| \leq a, j = \overline{1, r}$:

- 1) компоненты функции $h^0(t), t \in [0, T]$, почти всюду постоянны и равны $\pm a$;
- 2) для траекторий $x^0(t)$ скорректированной системы выполнена оценка

$$\|f(x^0(t), \hat{p}(h^0(t)))\| \leq \frac{r a^2}{2\|\psi(t)\|} \rightarrow 0 \text{ при } t \rightarrow T, \quad (8)$$

то есть функция $h^0(t)$ обладает свойством аттрактивности, обеспечивающим сходимость $x^0(t)$ к множеству M_E (обоснование свойств 1-2 вынесено в приложение).

Выражение (8) означает, что при коррекции для траекторий (1) при произвольном $a \in (0, 1)$ регулярно выполнено $dist(x^0(t), M_E) < \varepsilon, t \in [0, T]$, то есть функция $h^0(t)$ обеспечивает сходимость скорректированных траекторий $x^0(t)$ к множеству M_E . Следовательно, выбор некоторой точки из множества B_A автоматически дает достижение соответствующей траекторией $x^0(t)$ целевого множества, и для оптимальности процесса C^0 достаточно удовлетворить условию трансверсальности на левом конце траектории.

Таким образом, благодаря свойствам функции $h^0(t)$, имеет место достижение целевого множества, проявляющая себя в притяжении траекторий $x^0(t)$ к M_E . Однако из этого не следует, что для каждого a будет обеспечена локальная устойчивость сходящихся к M_E скорректированных траекторий. Реализующийся характер динамики существенно зависит от величины a в ограничении $\|h^0(\cdot)\|_C \leq a$. Поэтому дополнительно к условиям принципа максимума следует реализовать этап II схемы коррекции и найти значение ограничения $a_{\min} = \arg \min_{a \in K, h^0 \in U^0} J_1(h, a)$, а вместе с ним процесс $C^* = \{x^*(t), (h^*(t), a_{\min}), t \in [0, T]\}$, обеспечивающий оптимальную динамическую модификацию хаотического аттрактора в ULS, соответствующее устойчивой динамике системы.

В заключение раздела, посвященного формальной стороне задачи коррекции, укажем общий смысл проблемы. Оптимальность функции $h^*(t), t \in [0, T]$, определенная решением задачи (4), обеспечивает ключевое для области управления хаосом требование малости воздействия на параметры системы. Собственно значение a_{\min} дает оценку сверху границы, ниже которой условие устойчивости (1) не выполняется, а значит, имеет место хаотическая динамика. Поскольку $|h_j^*(t)| \leq a_{\min}, j = \overline{1, r}$, то общее для каждого скорректированного параметра $\hat{p}_j^*(t) = p_j + p_j h_j^*(t)$ значение a_{\min} определяет интервал параметрического возмущения компонент r -мерной функ-

ции $h^0(\cdot) \in U^0$ и позволяет говорить об a_{\min} как о *минимальном радиусе коррекции* системы, а о задаче (4) – как задаче его определения. Добавим, что, с физической точки зрения, задача (4) означает минимизацию максимально возможной амплитуды стабилизирующих систему управлений.

2. Коррекция многопараметрической колебательной системы

2.1. Модель. В данной работе объектом коррекции является периодически возмущаемый осциллятор ван дер Поля–Дуффинга

$$\ddot{x} - \lambda(1 - x^2)\dot{x} + (d/dx)V(x) = f \cos(\omega t), \quad (9)$$

где $\lambda > 0$ – управляющий параметр; f и ω – амплитуда и частота внешнего периодического возмущения; $V(x)$ – потенциальная функция, заданная в виде $V(x) = \alpha x^2/2 + \beta x^4/4$. Уравнение (9) является нелинейным обобщением двух эталонных осцилляторов и способно демонстрировать разнообразные режимы, включая хаотическую динамику. Наш интерес к модели продиктован ее многопараметричностью. Она позволяет исследовать возможности метода оптимальной многопараметрической коррекции как способа подавления хаотической динамики [25], дополняя полученные ранее результаты для осциллятора Дуффинга–Холмса [26]. В данной работе с более широкой позиции оценивается его возможности как средства многопараметрического анализа, способного углубить понимание особенностей оптимальных переходных процессов, ведущих к стабилизации хаотического поведения и присущих автоколебательным системам различной природы.

Реализация методики коррекции начинается с выделения параметров системы, допускающих целенаправленное воздействие. Хаотизация динамики (9) вызывается внешним периодическим возмущением $f \cos(\omega t)$, корректированию доступны только собственные параметры осциллятора α , β и λ . Тогда в эквивалентной уравнению (9) форме скорректированная система запишется в виде

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = -\hat{\alpha}x_1 - \hat{\beta}x_1^3 + \hat{\lambda}(1 - x_1^2)x_2 + f \cos(\theta), \quad \dot{\theta} = \omega, \quad (10)$$

где $\hat{\alpha}(t) = \alpha(1 + h_1(t))$, $\hat{\beta}(t) = \beta(1 + h_2(t))$, $\hat{\lambda}(t) = \lambda(1 + h_3(t))$.

Конкретный представитель семейства осцилляторов (9) определяется ограничениями на значения параметров α и β потенциала невозмущенной ($f = h \equiv 0$) системы. Согласно условию $(d/dx)V(x) = 0$ система имеет три состояния равновесия: $x_{(1)}^e = (0, 0)$ и $x_{(2,3)}^e = (\pm\sqrt{-\alpha/\beta}, 0)$, то есть для (10) множество M_E содержит окрестности трех точек, определяемых условием локального экстремума потенциальной функции $V(x)$. Нами будут изучены две наиболее интересных физических ситуации: (i) потенциал с одной ямой ($\alpha > 0$, $\beta > 0$) и (ii) потенциал с двумя ямами ($\alpha < 0$, $\beta > 0$).

В случае (i) собственные значения параметров, дающих хаотическое поведение, будут выбраны для $\alpha \gg \beta > 0$, то есть для очень малой величины параметра фазовой нелинейности β . Данная ситуация подробно изучена в работе [27], где показано, что системе в основном характерны два пути перехода к хаосу: каскад бифуркаций удвоения периода и перемежаемость, связанная с седло-узловыми бифуркациями. Типичное хаотическое состояние со значениями параметров $\alpha = 1$,

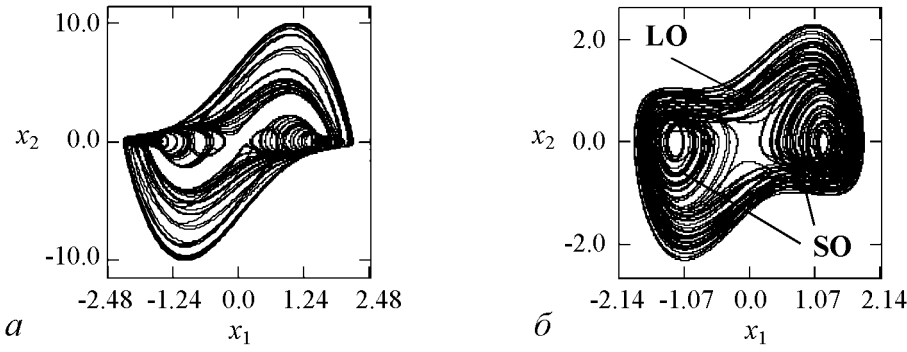


Рис. 1. Хаотическая динамика осциллятора (1): a – потенциал с одной ямой; b – потенциал с двумя ямами

$\beta = 0.00025$, $\lambda = f = 5$, $\omega = 2.4665$, которое в дальнейшем будет считаться исходным при коррекции параметров системы, представлено на рис. 1, a . Единственным типом траекторий, формирующих структуру хаотического аттрактора, являются орбиты, охватывающие все три состояния равновесия системы.

Случай (ii) будет исследован для $|\alpha| > \beta$, когда хаотический аттрактор содержит два типа траекторий (неустойчивых орбит), которые в невозмущенном случае замкнуты и разделены сепаратрисой. Рис. 1, b иллюстрирует исходное хаотическое состояние системы, возникающее при значениях параметров $\alpha = -1.44$, $\beta = \mu = 1$, $f = 0.45$, $\omega = 1.2$. Как видно, первый тип движений (L-орбиты, LO) окружает все три состояния равновесия. Второй тип (S-орбиты, SO) происходит в окрестности точек $x_{(2,3)}^e$ и зависит от начальных условий.

2.2. Реализация схемы коррекции. Для обоих случаев вида потенциальной функции осциллятора задача коррекции формулируется одинаково: воздействием на систему (10) корректирующей функцией $h(t) = (h_1(t), h_2(t), h_3(t))$ необходимо преобразовать динамику системы из хаотической в регулярную, чтобы

$$\max_{0 \leq t \leq T} \max_{1 \leq i \leq 3} |h_j^0(t)| \rightarrow \min_{a \in K, h^0 \in U^0} .$$

Согласно двухэтапной схеме коррекции, последовательность действий следующая. Сначала ищется оптимальная структура корректирующей вектор-функции $h^0 \in U$, которая на этапе I схемы (внутренняя задача) должна обеспечить сходимость скорректированных траекторий к целевому множеству M_E с условием $\frac{1}{2} \int_0^T \sum_{j=1}^3 h_j^2(t) dt \rightarrow \min_{h \in U}$. Для этого, на основании (10), записывается функция Гамильтона–Понтрягина

$$H(x, h, \psi) = \psi_1 x_2 + \psi_2 (-\hat{\alpha} x_1 - \hat{\beta} x_1^3 + \hat{\lambda} (1 - x_1^2) x_2 + f \cos(\theta)) + \psi_3 \omega - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^3 h_j^2$$

и применяются необходимые условия оптимальности (п.1.2.2). А именно, согласно условию $\psi_i = -(\partial/\partial x_i)H(x, h, \psi)$, $i = \overline{1, 3}$, к (10) добавляется система сопряженных

переменных

$$\dot{\psi}_1 = \psi_2(\hat{\alpha} + 3\hat{\beta}x_1^2 + 2\hat{\lambda}x_1x_2), \quad \dot{\psi}_2 = -\psi_1 - \psi_2\hat{\lambda}(1 - x_1^2), \quad \dot{\psi}_3 = 0, \quad (11)$$

для которой на основании связи $\sum_{i=1}^3 \psi_{0i}x_{0i} = 0$ для произвольного $x_0 = (x_{01}, x_{02}, x_{03})^T \in B_A$ системы (10) производится выбор начального вектора для сопряженной системы (в результатах ниже использован вариант $\psi_0 = (-x_{02}, x_{01}, 0)^T$). Далее находятся удовлетворяющие условию максимума (5) однозначно выраженные через состояние системы $x(t)$ и сопряженную переменную $\psi(t)$ компоненты корректирующей функции

$$h_j^0(t) = \begin{cases} \tilde{h}_j(t), & \text{если } |\tilde{h}_j(t)| \leq a, \\ a \cdot \text{sign}(\tilde{h}_j(t)), & \text{если } |\tilde{h}_j(t)| > a, \end{cases} \quad (12)$$

для которых

$$\tilde{h}_1 = -\alpha x_1 \psi_2, \quad \tilde{h}_2 = -\beta x_1^3 \psi_2, \quad \tilde{h}_3 = \lambda x_2 \psi_2 (1 - x_1^2)$$

есть решения уравнений $(\partial/\partial h_j)H(x, h, \psi) = 0$, $j = \overline{1, 3}$.

Полученная $2n$ -система дифференциальных уравнений (10)–(11) с условием (12) и начальным условием (x_0, ψ_0) образуют задачу Коши. Вместе с функцией $h^0(t) = (\text{sat}(\tilde{h}_1(x^0(t), \psi(t))), \dots, \text{sat}(\tilde{h}_r(x^0(t), \psi(t))))$ она дает оптимальный процесс $C^0 = \{x^0(t), (h^0(t), a), t \in [0, T]\}$, где T – время, много большее времени переходного процесса T^* , на котором определено решение задачи Коши. Исследование его устойчивости производится на этапе II схемы коррекции, где необходимо численным тестированием качества коррекции минимизировать величину ограничения a .

Процедура тестирования заключается в задании двух близких начальных условий $x_0^0 = (x_{01}^0, x_{02}^0, x_{03}^0)^T$, $\bar{x}_0^0 = (\bar{x}_{01}^0 + \varepsilon, \bar{x}_{02}^0 + \varepsilon, \bar{x}_{03}^0 + \varepsilon)^T$ (где, например, $\varepsilon = 10^{-5}$), вычислении соответствующих $\psi_0, \bar{\psi}_0$ и интегрировании системы (10)–(11) с (12). Полученные процессы C^0 и \bar{C}^0 позволяют оценить качество модификации хаотического аттрактора A_P по эволюции во времени малого возмущения $\tilde{x}^0(t)$, $\tilde{x}_0^0 = \bar{x}_0^0 - x_0^0$ вдоль опорной скорректированной траектории $x^0(t)$. Для этого в ходе интегрирования с выбранным значением $a_0 < 1$ достаточно [28, 29] приближенным вычислением величины $\Lambda_1(a_0) = T^{-1} \ln(\varepsilon^{-1} \|\bar{x}^0(t) - x^0(t)\|)$ отследить характер устойчивости режима скорректированной системы по динамике $\Lambda_1(a_0)$ на интервале $[0, T]$. Если условие $\Lambda_1(a_0) < 0$ при $t \rightarrow T$ окажется выполненным, то следует повторить вычисления Λ_1 для последовательности $a_l < \dots < a_1 < a_0$ и выбрать $a_{\min} = \min_{a \in K} \{a_m\}_{m=\overline{0, l}}$. В результате среди ограничений на функцию $\|h^0(\cdot)\|_C \leq a$ находится искомая граница a_{\min} , ниже которой условие $\Lambda_1(a_{\min}) < 0$ уже не выполняется.

2.3. Результаты

2.3.1. Потенциал с одной ямой. Данный случай отличает особенная чувствительность динамики осциллятора к малой вариации параметров. Уже при ограничении $\|h^*(\cdot)\|_C \leq a_{\min} = 0.0015$ корректирование всех трех параметров вызывает

короткий переходной процесс, в результате которого происходит требуемая модификация хаотического аттрактора и рождение устойчивого ULS. Как видно на рис. 2, ULS представляет собой устойчивый цикл. Его локализация определяется структурой траекторий на хаотическом аттракторе и отличается от формы предельного цикла невозмущенной системы ($f = h \equiv 0$). При уменьшении величины ограничения на корректирующее воздействие ниже a_{\min} наблюдается переход к хаосу через последовательность бифуркаций удвоения периода. Особенности ULS и бифуркационный механизм перехода от оптимального регулярного режима к хаосу сохраняются при уменьшении числа корректируемых параметров. Например, для корректирующей функции $h^*(t) = (h_1^*(t), 0, 0)$ минимальное ограничение, обеспечивающее существование аналогичного ULS, составляет $a_{\min} = 0.004$.

2.3.2. Потенциал с двумя ямами. Результаты коррекции в этом случае определяются одновременным сосуществованием в фазовом пространстве нескольких возможных установившихся режимов. Причиной мультистабильности являются особенности потенциала, который симметричен и имеет два локальных минимума. При коррекции мультистабильность сохраняется и проявляется в чувствительной зависимости локализации ULS от выбранного начального условия. В результате установившимся режимом скорректированной хаотической системы оказывается устойчивый цикл, локализованный либо в окрестности состояния $x_{(2)}^e = \sqrt{-\alpha/\beta} = 1.2$, либо $x_{(3)}^e = -\sqrt{-\alpha/\beta} = -1.2$. Пример стабилизации движений в окрестности одной из потенциальных ям ($x_{(2)}^e$), полученный при корректировании функцией $h^*(t) = (h_1^*(t), h_2^*(t), h_3^*(t))$, приведен на рис. 3.

Данному случаю характерна большая длительность переходного процесса (см. рис. 3 и рис. 4). Его основную часть занимает движение по L-орбите, ограничивающей область, занимаемую прежде хаотическим аттрактором, и имеющей максимальный период. Окончанием переходного процесса является реализация перехода $LO \rightarrow SO$. Он сопровождается потерей устойчивости L-орбиты и переходом к ти-

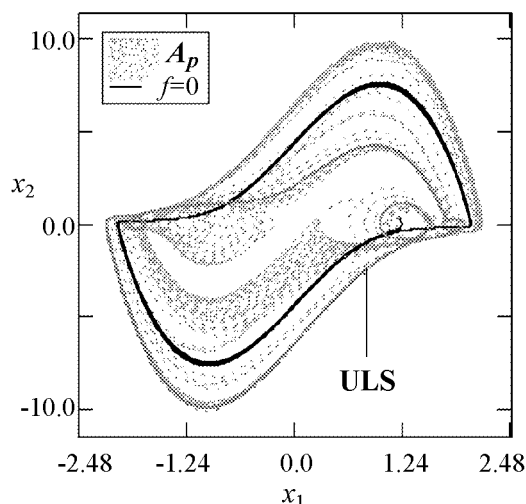


Рис. 2. Результат коррекции (10) с ограничением $a_{\min} = 0.0015$ (потенциал с одной ямой)

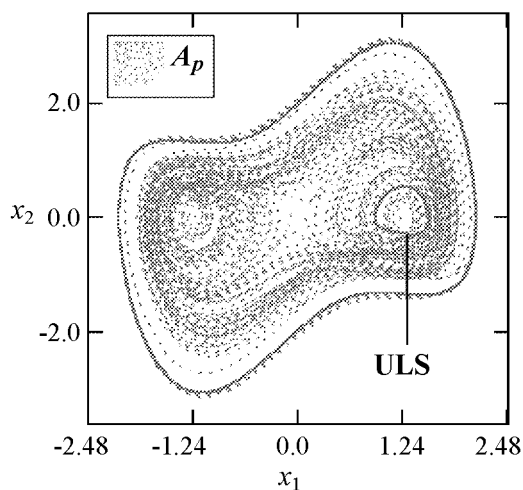


Рис. 3. Результат коррекции (10) с ограничением $a_{\min} = 0.05$ (потенциал с двумя ямами)

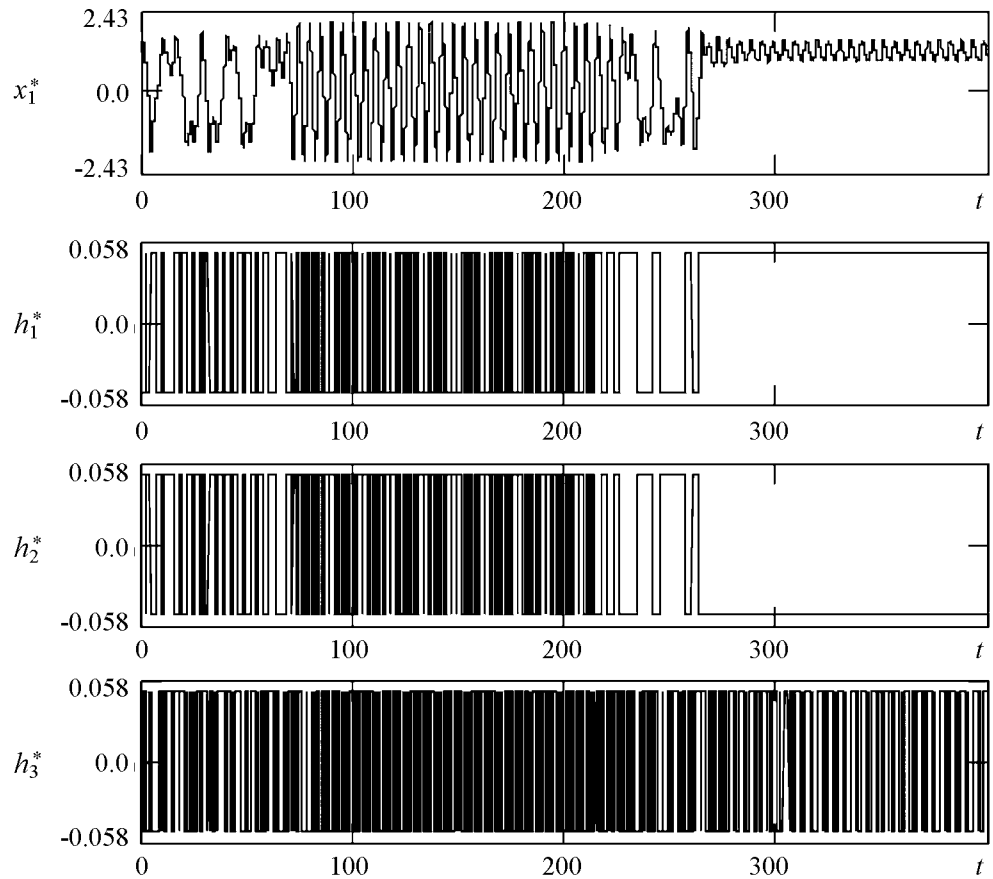


Рис. 4. Временная реализация скорректированного режима (10) (потенциал с двумя ямами), $a_{\min} = 0.05$

пу движений по S-орбите. Реализующийся при этом цикл устойчив и является ULS системы. Таким образом, оптимальный переходной процесс системы к ULS можно выразить следующей схемой: хаос \rightarrow LO \rightarrow хаос \rightarrow SO.

Обращает на себя внимание эффект насыщения корректирующих функций $h_1^*(t)$, $h_2^*(t)$ на границе ограничения (см. рис. 4), возникающий после выхода траекторий на ULS и являющийся следствием свойств оптимальных корректирующих функций (см. п. 1.2.3). Момент насыщения в точности совпадает с окончанием переходного процесса и может использоваться для оценки времени выхода системы на устойчивый режим. Характер насыщения ($h_1^*(t)$ на верхней границе ограничения, $h_2^*(t)$ – на нижней) сохраняется и не зависит от того, относительно какой из потенциальных ям произошла стабилизация колебаний осциллятора.

Картина потери устойчивости ULS отличается от описанной в п. 2.3.1. При выборе ограничения меньше $a_{\min} = 0.05$ происходит увеличение длительности переходного процесса, который приобретает все более нерегулярный характер. При этом уменьшается длительность фазы движения по L-орбите. При дальнейшем уменьшении ограничения предельным множеством системы вновь становится хаотический аттрактор. Отметим, что указанные особенности сохраняются при меньшем числе корректируемых параметров (например, для $h^*(t) = (h_1^*(t), 0, 0)$, $a_{\min} = 0.07$).

Приложение

Действительно, функция $h^0(t)$ с компонентами вида (6) аппроксимирует евклидову норму $\|h^0(\cdot)\| \leq a$ кубической $\|h^0(\cdot)\|_C \leq a$ так, что компоненты $h_j^0(t) = \text{sat}(\tilde{h}_j(t))$, $j = \overline{1, r}$, становятся независимыми. А именно, если в некоторый момент времени θ выполнено $h_1^0(\theta) = a$, то остальные $r - 1$ компонент $h_2^0(\theta), h_3^0(\theta), \dots, h_r^0(\theta)$ могут иметь любые совместимые с ограничением $\|h^0(\cdot)\|_C \leq a$ значения. В силу возрастания $\|\psi(t)\|$ на $[0, T]$, где определено решение системы, существует конечное число моментов переключения $0 = \tau_0 < \tau_1 \dots < \tau_s = T$, при которых $|\tilde{h}_j(t)| > a$, $j = \overline{1, r}$. Тогда, согласно (6), имеем $h_j^0(t) = a \cdot \text{sign}(\tilde{h}_j(t)) = \pm a$.

После подстановки тройки $(x^0(t), h^0(t), \psi(t))$ в функцию H , согласно (5), получим равенство

$$H(x^0(t), h^0(t), \psi(t)) = \psi^T(t) f(x^0(t), \hat{p}(h^0(t))) - \|h^0(t)\|^2/2 \equiv 0,$$

где в силу (6) корректирующая функция $h^0(t)$ оказывается ограниченной для всех $t \in [0, T]$. Тогда

$$\psi^T(t) f(x^0(t), \hat{p}(h^0(t))) = \frac{1}{2} \|h^0(t)\|^2 \leq \frac{\bar{a}^2}{2},$$

где верхняя оценка $\bar{a} = \|h^0(t)\| = \sqrt{r} a$ взята с учетом того, что соотношения (6) аппроксимируют $\|h^0(\cdot)\| \leq a$ ограничением $\|h^0(\cdot)\|_C \leq a$. Так как $\psi(t) \neq 0$ (иначе $h^0(t) \equiv 0$ и требование обеспечить условие $a \in K$ невыполнимо), то $\dot{x}^0(t) = f(x^0(t), p(h^0(t))) \leq \frac{r a^2}{2\psi(t)}$. Отсюда при неограниченном возрастании $\|\psi(t)\|$ получаем требуемую оценку (8).

Заключение

На основе формализации понятия модификации предельного множества как цели воздействия комбинированием методов теории оптимального управления с численным тестированием качества подавления хаоса в статье развит метод оптимальной коррекции параметров системы. Выяснение роли сопряженной системы для хаотических систем с расширенным фазовым пространством позволило найти оптимальные корректирующие функции, которые благодаря свойству аттрактивности обеспечивают оптимальную динамическую модификацию хаотического аттрактора в уникальное предельное множество, соответствующее устойчивой динамике системы.

Являясь достаточно эффективным способом подавления хаоса, методика динамической коррекции пространства параметров одновременно позволяет сфокусировать внимание на эволюции системы к устойчивому состоянию. Корректирование системы предоставляет обобщенную информацию о свойствах объекта в виде реакции системы на суммарное параметрическое воздействие. При этом оказывается возможным сравнение и оценка эффективности воздействия на конкретный параметр. В практических приложениях, когда управлению доступно ограниченное число параметров, возмущение только одного параметра становится более обоснованным, а его результаты – предсказуемыми.

На примере коррекции обобщенной автоколебательной модели нелинейного осциллятора показано, что метод дает возможность идентифицировать переходной процесс, который приводит к устойчивости системы, требуя наименьшей интенсивности корректирующего воздействия. Описан ранее отмеченный при коррекции системы Лоренца [24] эффект насыщения корректирующих функций, возникновение которого вызывается стабилизацией фазовых траекторий в области локального минимума энергии скорректированной системы. Методика многопараметрической коррекции применима к широкому кругу нелинейных колебательных систем и открывает новый путь к исследованию особенностей оптимальных переходных процессов в хаотических системах.

Работа поддержана Федеральным агентством по образованию РФ в рамках подпрограммы I «Фундаментальные исследования» ведомственной научной программы «Развитие научного потенциала высшей школы». Авторы благодарят профессора В.А. Горелика (Вычислительный центр РАН) за полезные обсуждения.

Библиографический список

1. *Shinbrot T., Grebogi C., Ott E., and Yorke J.A.* Using small perturbations to control chaos // *Nature*. 1993. Vol. 882. P. 300.
2. *Fradkov A.L., Evans R.J., Andrievsky B.R.* Control of chaos: methods and applications in mechanics // *Phil. Trans. R. Soc. A*. 2006. Vol. 364. P. 2279.
3. *Chen G., Moiola J.L., Wang H.O.* Bifurcation control: Theories, methods, and applications // *Int. J. of Bifurcation and Chaos*. 2000. Vol. 10, № 3. P. 511.
4. *Krener A., Kang W., Chang D.E.* Control bifurcations // *IEEE Trans. on Automatic Control*. 2004. Vol. 49, № 8. P. 1231.
5. *Kuznetsov A.P., Turukina L.V., Savin A.V., Sataev I.R., Sedova J.V., Milovanov S.V.* Multi-parameter picture of transition to chaos // *Izvestija Vuzov. Applied Nonlinear Dynamics*. 2002. Vol. 10, № 3. P. 80.
6. *Seyranian A.P., Mailybaev A.A.* Multiparameter stability theory with mechanical applications. World Scientific, New Jersey, London, 2003.
7. *Kuznetsov A.P., Kuznetsov S.P., Sataev I.R.* A variety of period-doubling universality classes in multi-parameter analysis of transition to chaos // *Physica D*. 1997. Vol. 109. P. 91.
8. *Kuznetsov S.P., Kuznetsov A.P., Sataev I.R.* Multiparameter critical situations, universality and scaling in two-dimensional period-doubling maps // *J. of Statistical Physics*. 2005. Vol. 121, № 5–6. P. 697.
9. *Warncke J., Bauer M., Martienssen W.* Multiparameter control of high-dimensional chaotic systems // *Europhys. Lett*. 1994. Vol. 25, № 5. P. 323.
10. *Barreto E., Grebogi C.* Multiparameter control of chaos // *Phys. Rev. E*. 1995. Vol. 54, № 4. P. 3553.
11. *Löcher M., Hunt E.R.* Control of high-dimensional chaos in systems with symmetry // *Phys. Rev. Lett*. 1997. Vol. 79. P. 63.
12. *Paula A.S., Savi M.A.* A multiparameter chaos control method based on OGY approach // *Chaos, Solitons & Fractals*. 2008 (in press).
13. *Горелик В.А., Талагаев Ю.В., Тараканов А.Ф.* Оптимальная параметрическая

- коррекция динамики систем с хаотическим аттрактором // Моделирование, декомпозиция и оптимизация сложных динамических процессов. М.: ВЦ РАН, 2006. С. 34.
14. *Фрадков А.Л.* Кибернетическая физика: Принципы и примеры. СПб.: Наука, 2003. 208 с.
 15. *Ott E., Grebogi C., Yorke J.A.* Controlling chaos // *Phys. Rev. Lett.* 1990. Vol. 64. P. 1196.
 16. *Chacon R.* Relative effectiveness of weak periodic excitations in suppressing homoclinic/heteroclinic chaos // *Eur. Phys. J. B.* 2002. Vol. 30. P. 207.
 17. *Lenci S., Rega G.* Optimal control of nonregular dynamics in a Duffing oscillator // *Nonlinear Dynamics.* 2003. Vol. 33, № 1. P. 71.
 18. *Loskutov A.Y.* Parametric perturbation and non-feedback controlling chaotic motion // *Discrete and continuous dynamical systems-Series B.* 2006. Vol. 6, № 5. P. 1157.
 19. *Cao H., Chen G.* A simplified optimal control method for homoclinic bifurcations // *Nonlinear Dynamics.* 2005. Vol. 42, № 1. P. 43.
 20. *Dzhanoev A.R., Loskutov A., Cao H., Sanjuán M.A.F.* A new mechanism of the chaos suppression // *Discrete and Continuous Dynamical Systems B.* 2007. Vol. 7, № 2. P. 275.
 21. *Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф.* Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1969. 384 с.
 22. *Ли Э.Б., Маркус Л.* Основы теории и оптимального управления. М.: Наука, 1972. 574 с.
 23. *Атанс М., Фалб П.* Оптимальное управление. М.: Машиностроение, 1968. 764с.
 24. *Talagaev Y.V., Tarakanov A.F.* Modification of chaotic systems limit sets by multiparametrical optimal correction // *Proc. 3rd Int. IEEE Scientific Conference on Physics and Control (PhysCon 2007), September 3rd-7th, 2007. University of Potsdam, Germany. (Full text in Open Library IPACS: <http://lib.physcon.ru/>).*
 25. *Talagaev Y.V., Tarakanov A.F.* Multiparametrical optimal correction for chaos suppression in a family of Duffing–van der Pol oscillators // *Proc. of 6th EUROMECH. Nonlinear Dynamics Conference (ENOC 2008), June 30–July 4, 2008, Saint Petersburg, Russia.*
 26. *Талагаев Ю.В., Тараканов А.Ф.* Оптимальная параметрическая стабилизация хаотических колебательных систем // *Системы управления и информационные технологии.* 2007. Вып. 2(28). С. 67.
 27. *Sanjuán M.A.F.* Symmetry-restoring crises, period-adding and chaotic transitions in the cubic van der Pol oscillator // *J. of Sound and Vibration.* 1996. Vol. 193, № 4. P. 752.
 28. *Андреевский Б.Р., Фрадков А.Л.* Управление хаосом. Методы и приложения. Часть 1. Методы // *Автоматика и телемеханика.* 2003. № 5. С. 3.
 29. *Кузнецов С.П.* Динамический хаос (курс лекций). М.: Физматлит, 2001. 296 с.

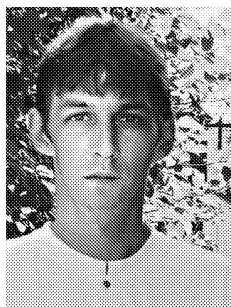
*Балашовский филиал Саратовского
государственного университета
Борисоглебский государственный
педагогический институт*

*Поступила в редакцию 24.04.2008
После доработки 16.07.2008*

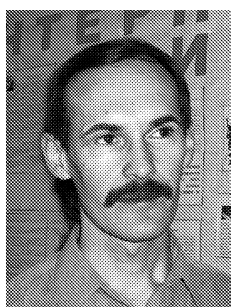
OPTIMAL CHAOS SUPPRESSION AND TRANSITION PROCESSES IN CORRECTED MULTIPARAMETRICAL OSCILLATORY SYSTEMS

Yu.V. Talagaev, A.F. Tarakanov

In the work we present a two-stage scheme of optimal correction of the dynamic system's parameters space aimed at the transformation of the system's chaotic regime into the regular one through minimal intensity of the perturbation. The offered technique is based on combination of the optimal control theory methods with numerical tests of chaos suppression quality. It is theoretically proved that optimal corrective functions found in the course of scheme application allow putting into practice the process of modification of chaotic attractor into the unique stable limit set corresponding to the transition of the system to the stable dynamics. Numerical experiment performed on a generalized model of an auto-oscillatory system showed that the offered correction technique is effective in multiparametrical analysis of situations that arise in optimal chaos suppression.



Талагаев Юрий Викторович – родился в Балашове (1975). Окончил физико-математический факультет Балашовского государственного педагогического института (1997). Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата педагогических наук в СГУ (2000) в области приложений системно-синергетического подхода к современным образовательным технологиям. Доцент кафедры физики Балашовского филиала Саратовского государственного университета (с 2004). Область научных интересов: моделирование и оптимизация сложных систем, управление хаосом, многопараметрическая коррекция динамических систем. Автор 48 научных статей в отечественной и зарубежной печати. Принял участие в нескольких международных конференциях. Член Международного общества физики и управления (IPACS, 2007).
E-mail: shangyi@narod.ru



Тараканов Андрей Федорович – родился в Рыбинске Ярославской области (1959). Окончил физико-математический факультет Борисоглебского государственного педагогического института (1982) Защитил диссертации на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук (1989) и доктора физико-математических наук (1996) в Вычислительном центре АН в области управления динамическими системами в условиях неопределенности, профессор (с 2000). Профессор кафедры прикладной математики и информатики Борисоглебского государственного педагогического института (с 2003). Научные интересы связаны с математической теорией оптимального управления в условиях неопределенности, оптимальной коррекцией динамических систем с неустойчивой и хаотической динамикой, теорией коалиционных и иерархических игр. Автор более 80 научных работ. Состоит в Обществе прикладной математики и механики (ГАММ), член Международного общества физики и управления (IPACS), член-корреспондент Российской Академии Естествознания. Осуществляет подготовку аспирантов по специальности «Теоретические основы информатики».
E-mail: aft777@rambler.ru



ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ НЕЛИНЕЙНЫХ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ПРОЦЕССОВ В ЦЕПОЧКЕ СВЯЗАННЫХ ГИРОГЕНЕРАТОРОВ СО ВСТРЕЧНОЙ ВОЛНОЙ

М.В. Белоглазкина, А.А. Короновский, А.Е. Храмов

В работе численно исследуется нелинейная динамика в цепочке однонаправленно связанных гирогенераторов со встречной волной. Показано, что в связанной системе при изменении управляющих параметров каждой из распределенных связанных автоколебательных сред возможно установление как развитой хаотической динамики, так и режимов стационарных одночастотных колебаний.

Введение

Мощные генераторы хаотических колебаний миллиметрового диапазона длин волн представляют определенный интерес для ряда приложений, в частности, радиолокации, технологических процессов, современных информационно-телекоммуникационных систем передачи и обработки информации с использованием динамического хаоса [1–5]. Одним из важных и перспективных приборов современной электроники больших мощностей является гирогенератор со встречной волной (гиرو-ЛВВ), который активно исследуется в последнее время как источник мощного СВЧ-излучения (до десятков кВт) в миллиметровом диапазоне длин волн [6–9]. Как показано в работах [10, 11], с увеличением параметра неизохронности в гиру-ЛВВ имеет место удвоение периода автомодуляции и реализуется переход к сильно нерегулярным относительно широкополосным хаотическим колебаниям с достаточно однородным сплошным спектром. Подобный режим получил название развитого хаоса и наиболее привлекателен для указанных выше приложений. Однако для получения режимов развитого хаоса требуется, чтобы ток электронного пучка значительно превышал стартовое значение (более чем в 10–20 раз в зависимости от параметра неизохронности электронов-осцилляторов), что достаточно сложно обеспечить на практике. Одной из возможностей снижения величины порога перехода к развитому хаосу является использование цепочки из двух связанных гирогенераторов со встречной волной, когда сигнал с выхода одной из ламп подается на вход второй лампы. Следует отметить, что аналогичное исследование уже проводилось для системы однонаправленно связанных ламп обратной волны (ЛОВ) [12]. Хорошо известно, что ЛОВ является генератором СВЧ-диапазона, в котором могут наблюдаться режимы хаотической генерации [13–17]. Было показано [12], что использование цепочки

связанных ЛОВ позволяет значительно снизить порог перехода к широкополосным хаотическим колебаниям с достаточно однородным сплошным спектром. Следует также отметить, что в работе [18] было проведено исследование однонаправленно связанных ЛОВ с поперечным полем, находящихся в режимах хаотической генерации, при этом была показана возможность возникновения в подобной системе режимов хаотической синхронизации электронно-волновых генераторов. В представленной работе приводятся результаты численного исследования динамики цепочки двух связанных генераторов на винтовом электронном пучке со встречной электромагнитной волной (гири-ЛВВ) и показано, что в подобной системе возможно наблюдение различных типов колебательных режимов, включая режимы стационарной и хаотической генерации.

1. Исследуемая модель цепочки связанных гиригенераторов со встречной волной

Нелинейная нестационарная динамика цепочки двух связанных гири-ЛВВ описывается самосогласованной системой уравнений движения электронов слабoreлятивистского винтового пучка и уравнений возбуждения встречной волны электронным потоком [10, 19, 20], которые в безразмерном виде для каждой из гири-ЛВВ записываются следующим образом:

$$\frac{d\beta_{1,2}}{d\xi} - j\mu_{1,2} (1 - |\beta_{1,2}|^2) \beta_{1,2} = F_{1,2}, \quad (1)$$

$$\frac{dF_{1,2}}{d\tau} - \frac{dF_{1,2}}{d\xi} = I_{1,2}, \quad I_{1,2} = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \beta_{1,2} d\theta_0. \quad (2)$$

Здесь индексы «1» и «2» обозначают номер элемента цепочки (индекс «1» соответствует ведущей, а индекс «2» – ведомой гири-ЛВВ); $\beta = b \exp(j\theta)$ – комплексный радиус траекторий электронов ансамбля, первоначально равномерно распределенных по фазе относительно ВЧ-поля; $F = F(\xi, \tau)$ – медленно меняющаяся комплексная безразмерная амплитуда поля в сечении пучка; $I = I(\xi, \tau)$ – первая гармоника сгруппированного тока; $\xi = \beta_0(\omega)\varepsilon z$ – безразмерная продольная координата; $\tau = \omega\varepsilon(t - z/v_{\parallel})(1 + v_{\parallel}/|v_g|)^{-1}$ – безразмерное время в движущейся с продольной скоростью пучка v_{\parallel} системе координат, ω – частота, по которой производится усреднение, v_g – групповая скорость волны на частоте ω . Частота ω удовлетворяет условию синхронизма

$$\omega + \beta_0(\omega) \cdot v_{\parallel} = \omega_c. \quad (3)$$

Здесь $\beta_0(\omega)$ – постоянная распространения встречной волны с частотой ω в системе без электронного пучка. Кроме этого введены следующие параметры: параметр неизохронности $\mu = v_{\parallel}/(2c\varepsilon)$, характеризующий меру инерционности системы; параметр взаимодействия

$$\varepsilon = \sqrt{\frac{I_0 K}{4V_0} \left(1 + \frac{v_{10}^2}{v_{\parallel}^2} \right)}; \quad (4)$$

циклотронная частота при $\xi = 0$

$$\omega_c = \frac{eB_0}{cm_0} \left(1 - \frac{1}{2} \frac{v_{\parallel}^2 + v_{\perp,0}^2}{c^2} \right); \quad (5)$$

сопротивление связи K ; начальная поперечная скорость электронов $v_{\perp,0}$; постоянные составляющие тока и напряжения пучка I_0 и V_0 .

Уравнения (1) и (2) дополняются следующими начальными условиями:

$$F_1(\tau, \xi = 0) = f^0(\xi), \quad \beta(\xi = 0) = \exp(j\theta_0), \quad \theta_0 \in [0, 2\pi], \quad (6)$$

$f^0(\xi)$ – функция, характеризующая начальное распределение поля вдоль пространства взаимодействия gyro-ЛВВ), а также следующими граничными условиями, которые описывают однонаправленную связь между элементами цепочки:

$$F_1(\xi = A_1, \tau) = 0, \quad F_2(\xi = A_2, \tau) = RF_1(\xi = 0, \tau), \quad (7)$$

где $R = re^{(j\varphi)}$ – комплексный коэффициент связи между гиrolампами с обратной волной, r – амплитуда коэффициента связи, φ – его фаза.

В данной работе рассматривается частный случай, когда длины пространства взаимодействия ламп фиксированы и составляют $A_1 = A_2 = 6$, что соответствует длинам пространства взаимодействия реальных gyro-ЛВВ [6]. Фаза коэффициента связи в силу однонаправленности связи не оказывает влияния на динамику связанной системы, поэтому фаза была также фиксирована и выбрана равной $\varphi = \pi$.

2. Результаты исследования нелинейной динамики цепочки связанных gyro-ЛВВ

Исследование полной картины нелинейной динамики цепочки связанных gyro-ЛВВ является весьма сложной и трудоемкой задачей, требующей больших вычислительных затрат. Это связано с тем, что рассматриваемая задача оказывается многопараметрической, требующей рассмотрения различных ситуаций в зависимости от того, в каком режиме работают отдельные генераторы, составляющие цепочку. В данной работе мы будем рассматривать случай, когда у первой (ведущей) лампы параметры фиксированы, а сам гиросгенератор со встречной волной находится в режиме периодической автомодуляции. У второй (ведомой) gyro-ЛВВ мы будем менять параметр неизохронности μ_2 таким образом, что лампа будет последовательно демонстрировать режимы стационарной генерации, периодической и хаотической автомодуляции выходного сигнала.

Итак, зафиксируем параметры первой лампы, когда она находится в автомодуляционном режиме (параметр неизохронности $\mu_1 = 2.4$). Огибающая выходного сигнала, спектр мощности в логарифмическом масштабе и проекция фазового портрета, построенная по огибающей сигнала ведущей gyro-ЛВВ, представлены на рис. 1. Проекция фазового портрета строилась с помощью метода Такенса со временем задержки $\tau = 5$ [21]. Из рисунка хорошо видно, что система находится в режиме периодической автомодуляции амплитуды выходного сигнала. Будем изменять параметр неизохронности ведомой лампы. Хорошо известно [10, 11], что при увеличении

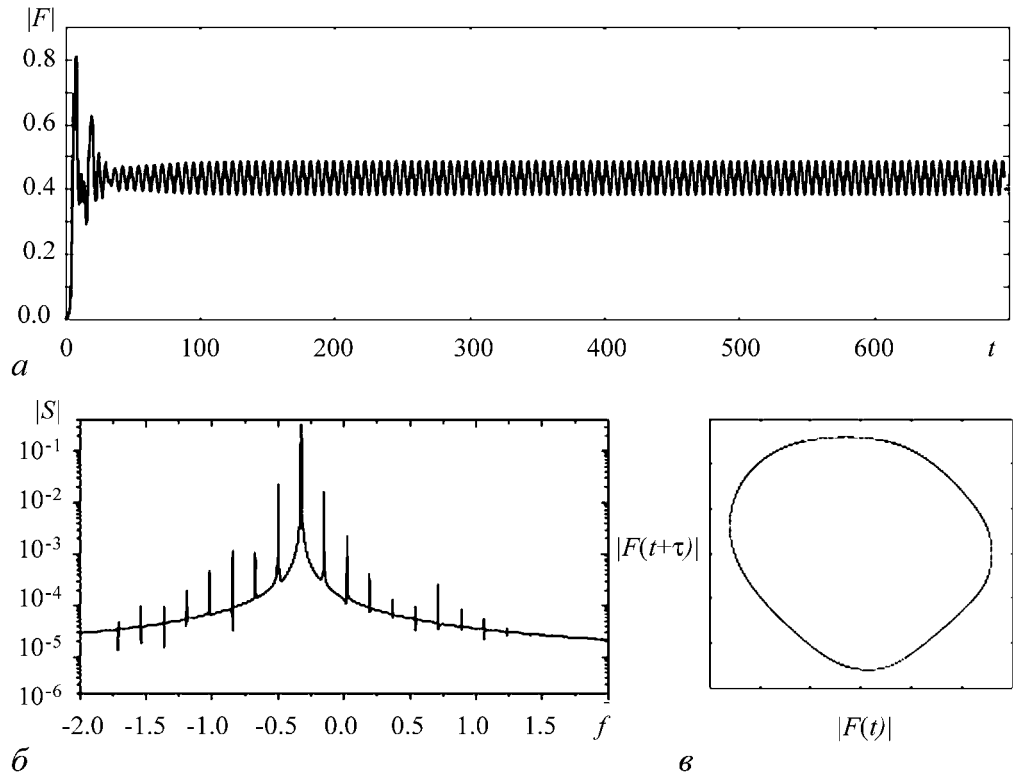


Рис. 1. Зависимость выходного сигнала $|F_1(t)|$, спектр мощности и фазовый портрет колебаний ведущей гиро-ЛВВ при значении параметра неизохронности $\mu_1 = 2.4$

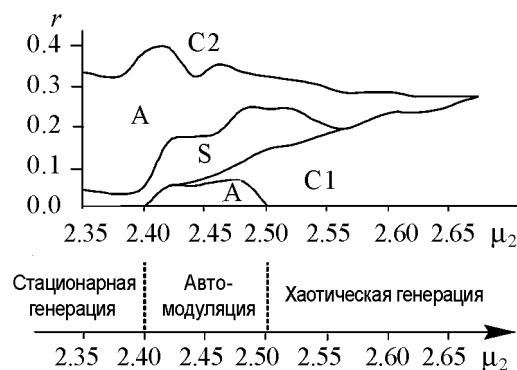


Рис. 2. Области реализации различных режимов колебаний в цепочке связанных гиро-ЛВВ. Здесь символом «S» обозначена область стационарной генерации, «A» – область автомодуляции, «C1» и «C2» – области различных режимов хаотической генерации. Внизу рисунка показаны области различных режимов колебаний при изменении параметра μ_2 в автономной гиро-ЛВВ

параметра неизохронности в гиро-ЛВВ наблюдается последовательность усложняющихся режимов от стационарной до развитой хаотической генерации. При выбранной длине пространства взаимодействия $A_2 = 6$ в автономной системе стационарная генерация имеет место при $\mu_2 < 2.4$, периодическая автомодуляция при $2.4 \leq \mu_2 \leq 2.5$, и хаотическая генерация возникает при $\mu_2 > 2.5$.

Данная последовательность смены режимов колебаний в автономной гиро-ЛВВ показана внизу рис. 2, позволяя получить наглядное представление о динамике системы при увеличении параметра неизохронности и отсутствии внешнего сигнала ($r = 0$) от ведущего гирогенератора.

Рассмотрим нелинейную динамику цепочки гирогенераторов в целом. На рис. 2 показана карта режимов на плоскости управляющих параметров «параметр неизохронности μ_2 ведомого гирогенератора с обратной волной — амплитуда коэффициента связи r », на которой выделены характерные области динамики связанной системы.

При значениях $\mu_2 < 2.4$, как уже отмечалось выше, автономная ведомая гиро-ЛВВ находится в режиме стационарной генерации. При воздействии на нее сигнала сравнительно большой амплитуды (при $r > 0.04$) ведущей гиро-ЛВВ (находящейся в режиме периодической автомодуляции выходного сигнала) неавтономная вторая лампа начинает демонстрировать режим периодической автомодуляции в большом диапазоне изменения параметра однонаправленной связи r . При больших величинах амплитуды коэффициента однонаправленной связи $r > 0.3 \div 0.4$ (что соответствует подаче на вход ведомой лампы порядка $10 \div 20\%$ выходной мощности первой лампы) динамика ведомой гиро-ЛВВ хаотизируется и спектр генерации становится сплошным. Таким образом, использование цепочки однонаправленно связанных гирогенераторов со встречной волной позволяет существенно снизить порог возникновения хаотической генерации.

При увеличении параметра неизохронности второй лампы $\mu_2 > 2.4$ (в результате чего ведомая гиро-ЛВВ переходит в автомодуляционный режим) при изменении амплитуды коэффициента связи в цепочке связанных гирогенераторов наблюдается более сложная перестройка режимов (см. рис. 2). Остановимся на ней более подробно. При малых значениях параметра связи внешний сигнал практически не оказывает влияния на динамику ведомой системы, так что на выходе цепочки наблюдается автомодуляционный режим, практически не отличающийся от режима автономной ведомой системы (область А на рисунке). С дальнейшим увеличением параметра неизохронности μ_2 режим модуляции амплитуды выходного сигнала усложняется, в спектре выходного сигнала цепочки появляются новые модуляционные частоты. Усложнение автомодуляционного режима приводит к установлению в системе режимов слабохаотической генерации (область С1). С ростом параметра неизохронности μ_2 и коэффициента связи r область на плоскости параметров, занимаемая режимом С1, расширяется. При $\mu_2 \approx 2.5$ в ведомой системе в автономном режиме ($r = 0$) устанавливается хаотическая генерация. В этом случае режимы периодической автомодуляции при малых коэффициентах связи перестают наблюдаться.

Весьма интересным и важным представляется появление на карте режимов области S, которая соответствует возникновению режимов стационарной генерации на выходе цепочки связанных гиро-ЛВВ, когда каждая из ламп автономно демонстрирует режимы автомодуляции выходного поля. Вид выходного сигнала ведомой лампы цепочки генераторов в данном режиме показан на рис. 3. После переходного процесса, длительность которого уменьшается с ростом коэффициента связи (ср. рис. 3, а и рис. 3, б), в системе устанавливается режим стационарной генерации, который характеризуется одночастотным спектром и неизменной амплитудой поля на выходе системы.

Следует отметить, что при малых значениях $\mu_2 \approx 2.4$ по мере увеличения параметра связи стационарная генерация возникает непосредственно после режима периодической автомодуляции, в то время как при больших параметрах неизохронности $\mu_2 > 2.5$ стационарная генерация возникает на фоне хаотических автомодуляционных режимов (см. карту режимов на рис. 2). Из карты режимов также следует, что с ростом параметра неизохронности второй гиролампы пороговое значение r , при котором начинается стационарная генерация, повышается (от $r = 0.05$ при $\mu_2 \approx 2.4$

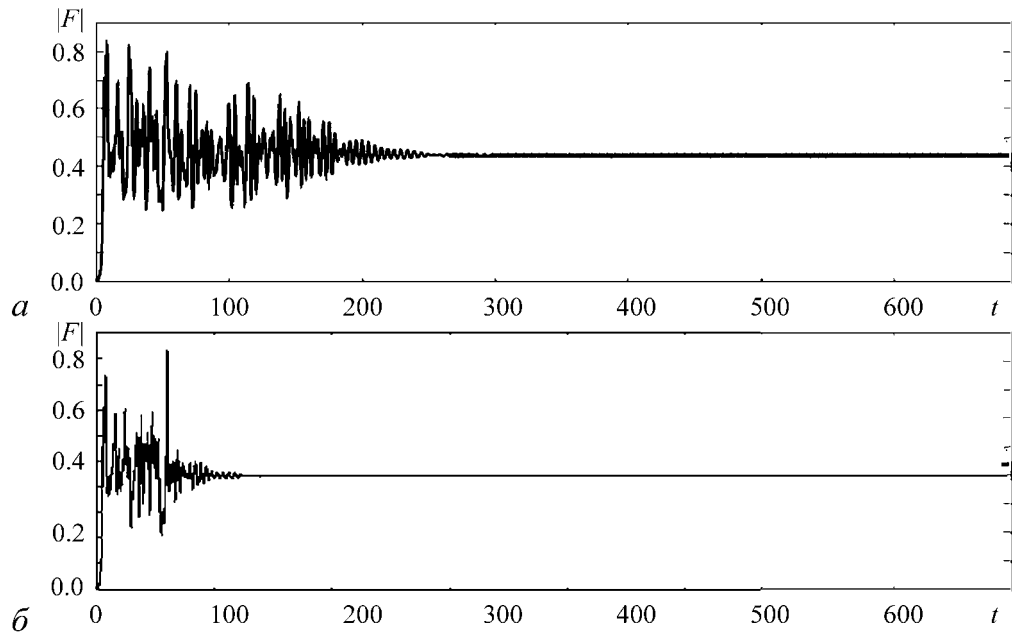


Рис. 3. Зависимость выходного сигнала $|F_2(t)|$ ведомой giro-ЛВВ при различных значениях коэффициента связи $r = 0.15$ (а) и $r = 0.18$ (б) при значении параметра неизохронности $\mu_2 = 2.5$

до $r = 0.15$ при $\mu_2 \approx 2.55$). С ростом параметра неизохронности область на карте режимов, соответствующая режиму стационарной генерации, сужается и исчезает при $\mu_2 \approx 2.56$. Как следствие, сближаются пороги режимов хаотической генерации и периодической автомодуляции.

При переходе через границу области S стационарной генерации со стороны больших значений амплитуды коэффициента связи r в системе снова устанавливается режим модуляции выходного сигнала, типичные характеристики которого показаны на рис. 4. Важной особенностью данного модуляционного режима является его квазипериодический характер, который выражается в том, что модуляция амплитуды поля на выходе лампы происходит с двумя характерными несоизмеримыми частотами, что хорошо видно из спектра мощности на рис. 4. Тот же самый вывод можно сделать из анализа проекции фазового портрета колебаний амплитуды выходного поля $|F_2|$, который типичен для двухчастотных колебаний с несоизмеримыми частотами. Для подтверждения данного вывода строилось сечение Пуанкаре по колебаниям амплитуды выходного поля и было показано, что вид сечения Пуанкаре соответствует гладкой замкнутой инвариантной кривой, что также подтверждает вышеприведенный вывод о возникновении двухчастотной модуляции амплитуды выходного сигнала ведомой giro-ЛВВ.

Наконец, при больших воздействиях ведущей системы на ведомую (при $r > 0.3 \div 0.4$) в цепочке связанных генераторов устанавливается режим развитой хаотической генерации (область C2 на карте параметров рис. 2). Характерный вид амплитуды $|F_2|$ выходного сигнала, спектр мощности и фазовый портрет в режиме развитой хаотической генерации показаны на рис. 5. Данный режим характеризуется сильно нерегулярными колебаниями амплитуды выходного сигнала, сложной нере-

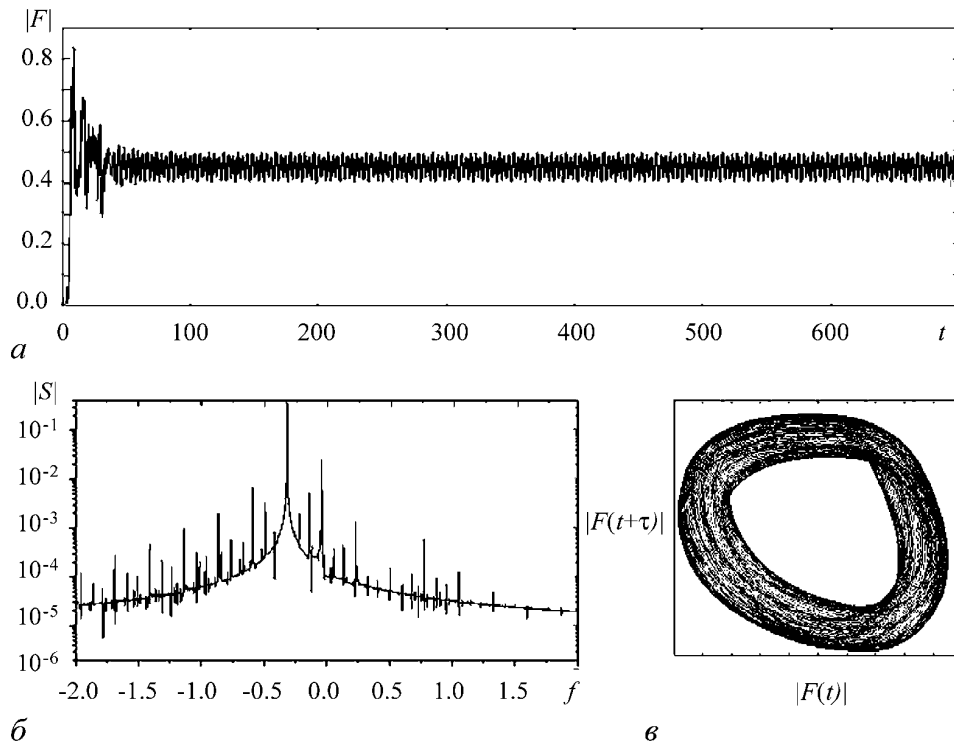


Рис. 4. Зависимость выходного сигнала $|F_2(t)|$, спектр мощности и фазовый портрет колебаний ведомой гиро-ЛВВ при значении параметра неизохронности $\mu_2 = 2.5$ и коэффициенте связи $r = 0.28$. Неавтономная гиро-ЛВВ находится в режиме квазипериодической модуляции выходного сигнала

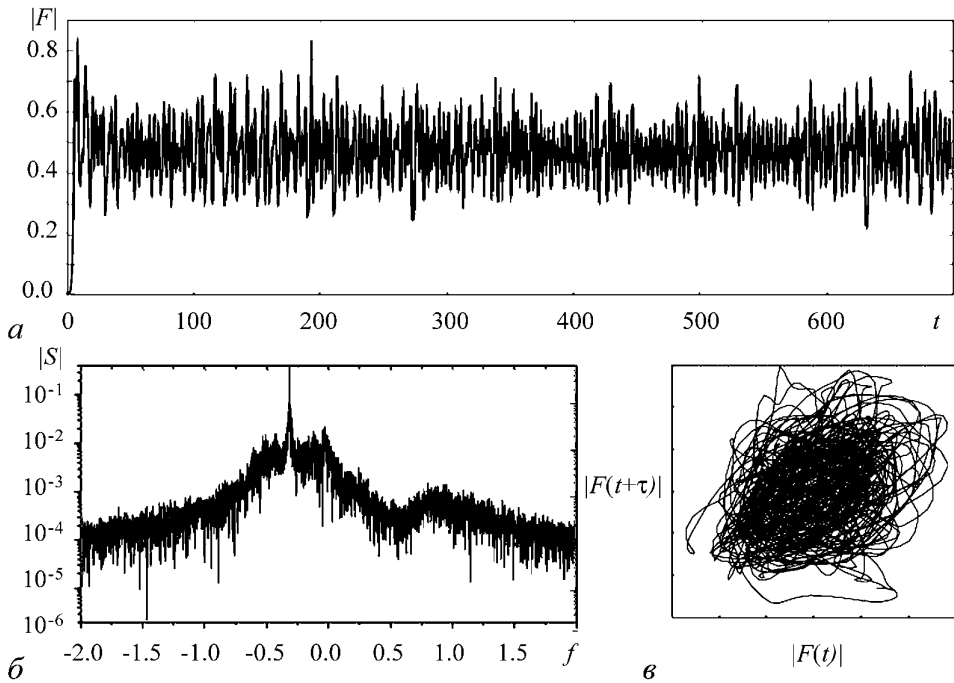


Рис. 5. Зависимость выходного сигнала $|F_2(t)|$, спектр мощности и фазовый портрет колебаний ведомой гиро-ЛВВ при значении параметра неизохронности $\mu_2 = 2.5$ и коэффициенте связи $r = 0.4$. Неавтономная гиро-ЛВВ находится в режиме развитой хаотической модуляции выходного сигнала

гулярной структурой фазового портрета колебаний и сплошным спектром мощности со сравнительно высоким шумовым пьедесталом вблизи основной частоты генерации. Можно предположить, что в рассматриваемой системе при больших значениях коэффициента связи будет реализоваться переход к хаосу через разрушение квазипериодических колебаний.

Таким образом, можно сделать вывод, что при изменении управляющих параметров в цепочке связанных giro-ЛВВ, находящихся в автономном состоянии в режимах многочастотной генерации, наблюдается сложная перестройка режимов колебаний от стационарной одночастотной генерации до режимов развитой хаотической генерации.

Рассмотрим кратко в заключение обсуждения динамики цепочки связанных giro-ЛВВ пространственно-временную динамику в винтовом электронном пучке, взаимодействующем со встречной волной в неавтономной ведомой системе, определяющую установление вышеописанных режимов колебаний в ведомом giroгенераторе.

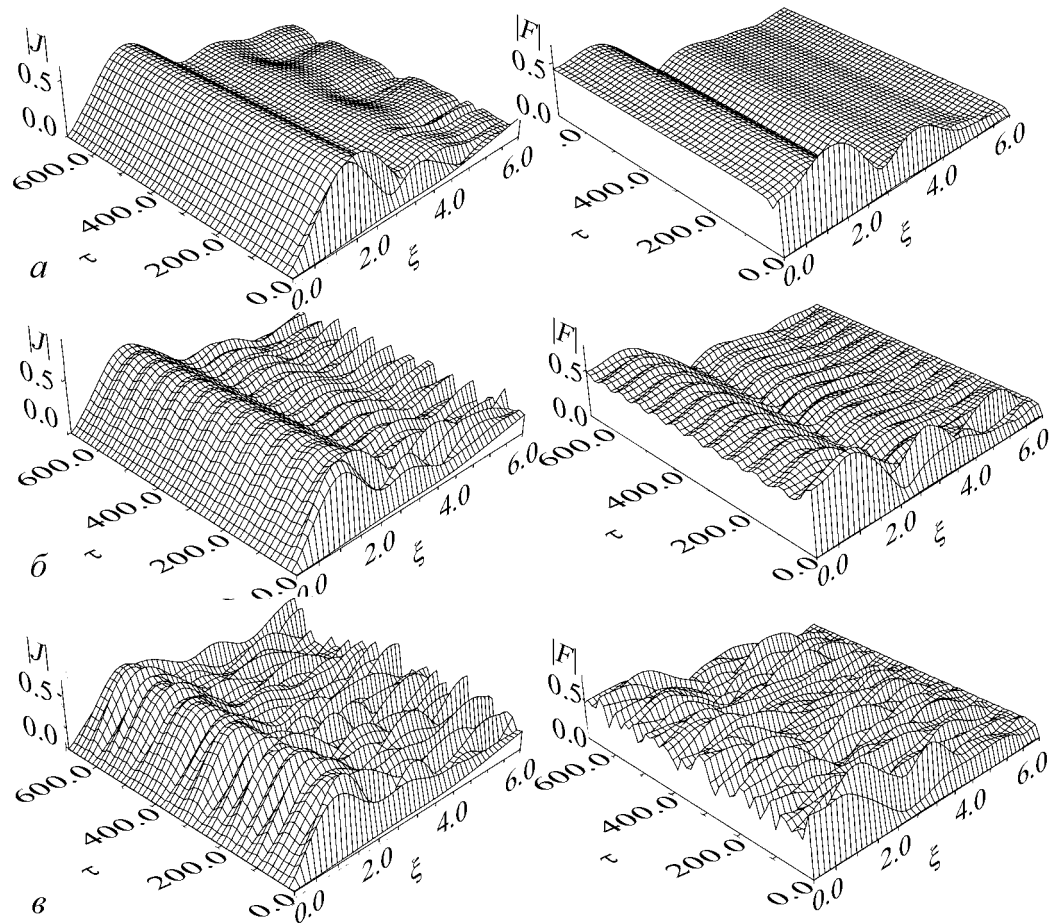


Рис. 6. Пространственно-временные распределения первой гармоники тока $|J_2(t, \xi)|$ (слева) и амплитуды поля $|F_2(t, \xi)|$ (справа) ведомой giro-ЛВВ для различных значений коэффициента связи τ : 0.18 (а); 0.28 (б); 0.4 (в)

торе со встречной волной. Для этого рассмотрим пространственно-временные распределения амплитуды поля и первой гармоники сгруппированного тока в неавтономной гиро-ЛВВ. На рис. 6 показаны соответствующие зависимости для различных значений коэффициента связи r и параметра неизохронности $\mu_1 = 2.4$ и $\mu_2 = 2.5$.

При малых коэффициентах связи, когда в ведомой системе под воздействием внешнего сигнала ведущей гиро-ЛВВ наблюдается неизменная амплитуда выходного сигнала (режим стационарной генерации, область S на рис. 2) в системе наблюдается сложная перестройка пространственно-временной динамики тока и поля вдоль длины пространства взаимодействия (рис. 6, а). Вблизи выходного ($\xi = 0$) конца пространства взаимодействия переменные, описывающие систему, ведут себя неизменным образом во времени, при этом в области $\xi \approx 1.5$ наблюдается перегруппировка электронного потока, что выражается в возникновении максимума на зависимости тока $|J_2(\xi)|$. В коллекторном конце лампы наблюдается медленная модуляция амплитуды первой гармоники сгруппированного тока, которая обусловлена воздействием слабого внешнего сигнала ведущей гиро-ЛВВ. Однако эта модуляция, как видно из рис. 6, а, не приводит к модуляции амплитуды выходного поля гиро-ЛВВ. В режиме квазипериодической модуляции выходного сигнала (рис. 6, б, $r = 0.28$) наблюдается хорошо известная картина возникновения автомодуляции в гиролампе со встречной волной под воздействием внешнего сигнала (см. подробнее [22, 23]). В режимах развитой хаотической генерации, как видно из рис. 6, в, построенного при $r = 0.4$, распределения амплитуд поля и тока ведут себя сложным образом, демонстрируя пространственно-временной хаос в системе. Перегруппировка пучка под действием внешнего сигнала происходит нерегулярно в различных точках пространства взаимодействия, что приводит к сложной динамике амплитуды выходного сигнала цепочки связанных гиро-ЛВВ и, как следствие, сложному спектральному составу генерируемого сигнала (см. рис. 4).

Заключение

В работе проведено численное исследование нелинейных нестационарных процессов в цепочке однонаправленно связанных гирогенераторов со встречной волной при изменении основных управляющих параметров такой системы (параметра неизохронности второй гиро-ЛВВ, параметра связи между лампами, составляющими цепочку гироприборов). Выявлена сложная картина перестройки режимов колебаний при изменении управляющих параметров в подобной системе, построена карта режимов, описывающая динамику связанных систем, проанализированы характеристики выходного сигнала цепочки связанных генераторов в различных режимах работы системы. Было показано, что существует возможность снижения порога возникновения хаотической автомодуляции в цепочке однонаправленно связанных гиро-ЛВВ.

Работа поддержана РФФИ (грант № 08-02-90002), CRDF (проект REC-006), Президентской программой поддержки ведущих научных школ РФ (проект НШ-355.2008.2) и программой поддержки молодых докторов наук (проект МД-1884.2007.2), а также ФНП «Династия».

Библиографический список

1. *Дмитриев А.С., Панас А.И.* Динамический хаос: новые носители информации для систем связи. М.: Физматлит, 2002.
2. *Dronov V., Hendrey M.R., Antonsen T.M., Ott E.* Communication with a chaotic traveling wave tube microwave generator // *Chaos*. 2004. Vol. 14, № 1. P. 30.
3. *Дмитриев А.С., Панас А.И., Старков С.О.* Динамический хаос как парадигма современных систем связи // *Зарубежная радиоэлектроника. Успехи современной радиоэлектроники*. 1997. Vol. 10. P. 4.
4. *Дмитриев А.С., Кузьмин Л.В., Панас А.И., Старков С.О.* Эксперименты по передаче информации с использованием хаоса через радиоканал // *Радиотехника и электроника*. 1998. Vol. 43. P. 1115.
5. Applications of Nonlinear Dynamics to Electronic and Information Engineering // *Proc. IEEE. Special Issue*. 2002. Vol. 90, № 5.
6. *Felch K.L., Danly B.G., Jory H.R., Kreischer K.E., Lawson W., Levush B., Temkin R.J.* Characteristics and applications of fast-wave gyrodevices // *Proc. IEEE*. 1999. Vol. 87, № 5. P. 752.
7. *Nusinovich G.S., Vlasov A.N., Antonsen T.M.* Nonstationary phenomena in tapered gyro-backward-wave oscillators // *Phys. Rev. Lett*. 2001. Vol. 87, № 21. 218301.
8. *Grudiev A., Schünemann K.* Numerical analysis of an injection-locked gyrotron backward-wave oscillator with tapered sections // *Phys. Rev. E*. 2003. Vol. 68. 016501.
9. *Трубецков Д.И., Храмов А.Е.* Лекции по сверхвысокочастотной электронике для физиков. Т. 2. М.: Физматлит, 2004.
10. *Трубецков Д.И., Четвериков А.П.* Автоколебания в распределенных системах «электронный поток – встречная (обратная) электромагнитная волна» // *Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика*. 1994. Т. 2, № 5. С. 9.
11. *Дмитриев А.Ю., Трубецков Д.И., Четвериков А.П.* Нестационарные процессы при взаимодействии винтового электронного пучка со встречной волной в волноводе // *Изв. вузов. Радиофизика*. 1991. Т. 34, № 9. С. 595.
12. *Рыскин Н.М., Титов В.Н.* Переход к развитому хаосу в цепочке двух однонаправленно-связанных ламп обратной волны // *ЖТФ*. 2003. Т. 73, № 9. С. 90.
13. *Гинзбург Н.С., Кузнецов С.П., Федосеева Т.Н.* Теория переходных процессов в релятивистской ЛОВ // *Изв. вузов. Радиофизика*. 1978. Т. 21, № 7. С. 1037.
14. *Безручко Б.П., Кузнецов С.П., Трубецков Д.И.* Экспериментальное наблюдение стохастических автоколебаний в динамической системе электронный пучок – обратная электромагнитная волна // *Письма в ЖЭТФ*. 1979. Т. 29, № 3. С. 180.
15. *Рыскин Н.М., Титов В.Н., Трубецков Д.И.* Детали перехода к хаосу в системе электронный пучок – обратная электромагнитная волна // *Доклады Академии Наук*. 1998. Т. 358, № 5. С. 620.
16. *Рыскин Н.М., Титов В.Н.* О сценарии перехода к хаосу в однопараметрической модели лампы обратной волны // *Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика*. 1998. Т. 6, № 1. С. 75.
17. *Трубецков Д.И., Анфиногентов В.Г., Рыскин Н.М., Титов В.Н., Храмов А.Е.* Сложная динамика электронных приборов СВЧ (нелинейная нестационарная

- теория с позиций нелинейной динамики)//Радиотехника. 1999. Т. 63, № 4. С. 61.
18. *Hramov A.E., Koronovskii A.A., Popov P.V., Rempen I.S.* Chaotic synchronization of coupled electron-wave systems with backward waves // *Chaos*. 2005. Vol. 15, № 1. P. 013705.
 19. *Юлматов В.К.* Нелинейная теория взаимодействия непрямолинейного периодического электронного пучка с электромагнитным полем // *Вопросы радиоэлектроники. Сер. I. Электроника*. 1965. № 12. С. 15.
 20. *Дмитриев А.Ю., Коневец А.Е., Пищик Л.А., Трубецков Д.И., Четвериков А.П.* Обзорные лекции по теории взаимодействия слаборелятивистских винтовых электронных пучков с электромагнитными волнами в волноводе // *Лекции по электронике СВЧ и радиофизике. 7-я зимняя школа-семинар*. Кн. 1. Саратов, 1981, 61.
 21. *Takens F.* Detecting strange attractors in dynamical systems and turbulence. N.Y.: Springer-Verlag, 1981.
 22. *Короновский А.А., Трубецков Д.И., Храмов А.Е.* Влияние внешнего сигнала на автоколебания распределенной системы винтовой электронный пучок – встречная электромагнитная волна // *Изв. вузов. Радиофизика*. 2002. Т. XLV, № 9. С. 773.
 23. *Трубецков Д.И., Короновский А.А., Храмов А.Е.* Синхронизация распределенных автоколебательных систем электронно-волновой природы с обратной волной // *Изв. вузов. Радиофизика*. 2004. Т. XLVII, № 5–6. С. 343.

Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского

*Поступила в редакцию
После доработки*

*13.02.2008
10.07.2008*

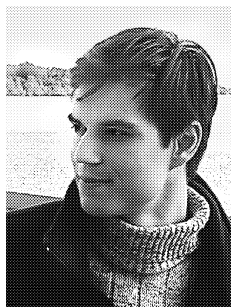
NUMERICAL INVESTIGATION OF NONLINEAR NONSTATIONARY PROCESS IN A CHAIN OF COUPLED GYRO-BACKWARD-WAVE OSCILLATORS

M.V. Beloglazkina, A.E. Hramov, A.A. Koronovskii

In this work the nonlinear dynamics in a chain of unidirectionally coupled gyro-backward-wave oscillators is studied. In coupled system, when the control parameters of each distributed system are changed, it is possible to show both a developed chaos dynamics and the regimes of stationary oscillations with one frequency.



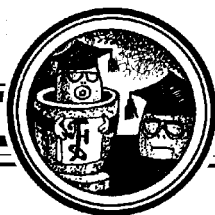
Белоглазкина Марина Владимировна родилась 6 сентября 1984 года. Окончила Саратовский государственный университет имени Н.Г. Чернышевского (СГУ) в 2007 году. В настоящее время работает ассистентом кафедры электроники, колебаний и волн факультета нелинейных процессов СГУ. Область интересов: хаотическая динамика распределенных автоколебательных систем электронно-волновой природы. Опубликовано одна статья и семь тезисов в трудах конференций.



Храмов Александр Евгеньевич – окончил физический факультет Саратовского государственного университета (1996). Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата (1999) и доктора (2006) физ.-мат. наук. Профессор, заместитель заведующего кафедрой электроники, колебаний и волн факультета нелинейных процессов СГУ. Область научных интересов – радиофизика в той ее части, которая связана со взаимодействием свободных электронов с электромагнитными полями, нелинейная динамика распределенных активных сред, методы анализа и моделирования динамических систем. Опубликовал в соавторстве с чл.-корр. РАН, профессором Д.И. Трубецковым книгу «Лекции по сверхвысокочастотной электронике для физиков» (Т. 1, М.: Физматлит, 2003; Т. 2, М.: Физматлит, 2004) и в соавторстве с доцентом А.А. Короновским монографии «Непрерывный вейвлетный анализ и его приложения» (Москва: Наука, Физматлит, 2003) и «Непрерывный вейвлетный анализ в приложениях к задачам нелинейной динамики» (Саратов: Изд-во ГосУНЦ «Колледж», 2002).
E-mail: aeh@nonlin.sgu.ru



Короновский Алексей Александрович – родился в Саратове (1972). Окончил физический факультет Саратовского государственного университета (1995), доктор физико-математических наук (2007), профессор кафедры электроники, колебаний и волн СГУ. Область научных интересов – нелинейная динамика и ее проявления в различных сферах человеческой деятельности, в том числе нелинейная динамика социально-экономических процессов. Автор ряда статей в центральной печати, а также монографий (в соавторстве) «Нелинейная динамика в действии» и «Непрерывный вейвлетный анализ», вышедших в Издательстве ГосУНЦ «Колледж».
E-mail: alkor@nonlin.sgu.ru



АВТОКОЛЕБАТЕЛЬНАЯ СИСТЕМА С КОМПЕНСИРУЕМОЙ ДИССИПАЦИЕЙ: ДИНАМИКА ПРИБЛИЖЕННОГО ТОЧЕЧНОГО ОТОБРАЖЕНИЯ

А.П. Кузнецов, С.П. Кузнецов, А.В. Савин, Д.В. Савин

Рассмотрена автоколебательная система с компенсируемой диссипацией, представляющая собой осциллятор ван дер Поля под импульсным воздействием, амплитуда которого зависит от значения обобщённой координаты осциллятора. Для такой системы с помощью метода медленно меняющихся амплитуд получено дискретное отображение для значений обобщённых скорости и координаты непосредственно перед очередным импульсом. Проведён анализ устройства пространства параметров полученного отображения, в частности, продемонстрировано наличие в нём гамильтоновой критической точки как феномена коразмерности 2. Особо следует отметить, что рассматриваемая система является системой общего вида, то есть системой, в которой диссипация зависит не только от её параметров, но и от значений переменных. Демонстрируется возможность возникновения инициированных импульсным воздействием квазипериодических режимов и системы языков синхронизации в окрестности неустойчивого предельного цикла.

Введение

Хорошо известно, что в нелинейных динамических системах распространён сценарий перехода к хаосу через удвоения периода [1, 2]. Для диссипативных систем с квадратичной нелинейностью он получил название каскада Фейгенбаума и характеризуется универсальной константой скейлинга $\delta_F = 4.6692\dots$, ответственной за сходимость точек бифуркаций удвоения к критической точке [1, 3]. В консервативных системах наблюдается каскад удвоений периода с другой универсальной константой скейлинга $\delta_H = 8.7210972$ [4, 5]. Такой тип критического поведения получил название гамильтонова, а точка, к которой сходится последовательность бифуркаций удвоений периода – гамильтоновой критической точки, или Н-точки [5, 6]. Простейшим примером системы такого рода является консервативное отображение Эно

$$x_{n+1} = 1 - \lambda x_n^2 + y_n, \quad y_{n+1} = -x_n, \quad (1)$$

в котором последовательность бифуркаций удвоения периода устойчивых (эллиптических) периодических орбит имеет место при увеличении параметра λ , а критическая точка располагается при $\lambda = 4.13616680390428\dots$ [5].

Известно, что для систем с постоянной диссипацией (отображения с постоянным якобианом) гамильтонова и фейгенбаумова критичности сосуществуют. При этом гамильтоновой критичности отвечает концевая точка линии Фейгенбаума на плоскости параметров. С другой стороны к этой точке подходит линия нулевой диссипации в системе. Вблизи такой точки устройство пространства параметров характеризуется свойством масштабного подобия (скейлинга): при надлежащем выборе локальной системы координат конфигурация областей воспроизводит себя при пересчете масштабов на факторы $\delta_1 = \delta_H$ и $\delta_2 = 2$ по двум осям координат [7]. Примером такого поведения служит диссипативное отображение Эно

$$x_{n+1} = 1 - \lambda x_n^2 + y_n, \quad y_{n+1} = -bx_n, \quad (2)$$

превращающееся в (1) при $b = 1$. Его якобиан равен параметру b , который, таким образом, непосредственно управляет величиной диссипации.

Однако реализовать гамильтоново критическое поведение в конкретной физической системе с постоянной диссипацией практически невозможно, так как полностью исключить потери энергии нельзя, а введение любой, сколь угодно малой диссипации неизбежно приводит к появлению критичности Фейгенбаума, начиная с определенного уровня удвоений [8, 9]. Оказывается, и это является предметом настоящего сообщения, возможно наблюдение гамильтонова критического поведения в динамической системе общего вида (с якобианом, зависящим от переменных системы), допускающей физическую реализацию. Соответствующее модельное отображение будет получено для автоколебательной системы с периодическим импульсным возбуждением в ситуации, когда амплитуда воздействия определенным образом зависит от состояния возбуждаемой системы. В этом случае гамильтонова критическая точка обнаруживается на плоскости двух управляющих параметров или, используя терминологию теории бифуркаций, выступает как феномен коразмерности два.

1. Построение модели

Рассмотрим осциллятор ван дер Поля под периодическим импульсным воздействием, амплитуда которого зависит от величины динамической переменной системы x посредством функции $F(x) = 1 - \lambda x^2$:

$$\ddot{x} - (\varepsilon - \mu x^2)\dot{x} + x = \sum_m F(x)\delta(t - mT). \quad (3)$$

Здесь x – динамическая переменная, T – период следования внешних импульсов. Система (3) характеризуется «внутренними» параметрами ε и μ и «внешним» параметром λ . Параметр ε отвечает за величину линейной диссипации (отрицательного трения при $\varepsilon > 0$), параметр μ характеризует нелинейную диссипацию в автономной системе. Соответственно, при положительных значениях этих параметров автономная система демонстрирует устойчивый предельный цикл, размер которого можно оценить как $r \approx \sqrt{\varepsilon/\mu}$. Функция $F(x) = 1 - \lambda x^2$ управляет степенью зависимости амплитуды подаваемых импульсов от состояния осциллятора. Конкретный выбор функции $F(x)$ обусловлен необходимостью наличия параметра (λ), который управлял бы удвоениями в системе (см. ниже).

Для упрощения анализа системы построим для нее дискретное отображение. Для этого примем момент очередного импульса за начало отсчета времени и предположим, что перед этим импульсом координата x и скорость \dot{x} имели значения x_n и y_n , соответственно. После импульса получим, очевидно,

$$x_{+0} = x_n, \quad y_{+0} = y_n + F(x_n). \quad (4)$$

Для описания динамики в промежутках времени между толчками используем известный метод медленно меняющихся амплитуд (см., например, [10]). Полагаем $x = ae^{it} + a^*e^{-it}$ и $\dot{x} = y = ia e^{it} - ia^*e^{-it}$. Как следует из (4),

$$a_{+0} = a - \frac{1}{2}iF(x). \quad (5)$$

Подстановка выражений для x и \dot{x} в уравнение ван дер Поля с последующим умножением на e^{-it} и усреднением по времени приводит к уравнению для медленно меняющейся амплитуды

$$\dot{a} = \frac{1}{2}\varepsilon - \frac{1}{2}\mu |a|^2 a, \quad (6)$$

решение которого с начальным условием (5) имеет вид

$$a(t) = \frac{1}{2}(x - iy) \exp(-it) = \frac{a_{+0} \exp(\varepsilon t/2)}{\sqrt{1 + (\mu/\varepsilon)(\exp(\varepsilon t) - 1) |a_{+0}|^2}}. \quad (7)$$

Подставляя сюда $t = T$, находим координату и скорость непосредственно перед следующим импульсом

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= B \frac{x_n \cos T + (y_n + F(x_n)) \sin T}{\sqrt{1 + C [x_n^2 + (y_n + F(x_n))^2]}}, \\ y_{n+1} &= B \frac{-x_n \sin T + (y_n + F(x_n)) \cos T}{\sqrt{1 + C [x_n^2 + (y_n + F(x_n))^2]}}, \end{aligned} \quad (8)$$

где $B = \exp(\varepsilon T/2)$, $C = \mu T (\exp(\varepsilon T) - 1) / (4\varepsilon T)$.

Положим для простоты $T = \pi/2(4k + 1)$, где k – целое число, и используем конкретный вид функции $F(x) = 1 - \lambda x^2$. Тогда отображение (8) принимает вид

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= B \frac{1 - \lambda x_n^2 + y_n}{\sqrt{1 + C [x_n^2 + (1 - \lambda x_n^2 + y_n)^2]}}, \\ y_{n+1} &= -B \frac{x_n}{\sqrt{1 + C [x_n^2 + (1 - \lambda x_n^2 + y_n)^2]}}. \end{aligned} \quad (9)$$

В дальнейшем будем анализировать динамику системы при помощи данного отображения.

2. Различные режимы поведения системы

Если нелинейная диссипация отсутствует ($\mu \rightarrow 0$, $C = 0$), то исследуемая дифференциальная система представляет собой линейный осциллятор под импульсным воздействием, а отображение (9) переходит в диссипативное отображение Эно

$$x_{n+1} = B(1 - \lambda x_n^2 + y_n), \quad y_{n+1} = -Bx_n, \quad (10)$$

которое легко можно представить в форме (2). Если при этом и линейная диссипация отсутствует ($\epsilon \rightarrow 0$, $B = 1$), то (10) переходит в консервативное отображение Эно (1). Отметим, что именно возможность такого предельного перехода и определила выбор функции $F(x) = 1 - \lambda x^2$.

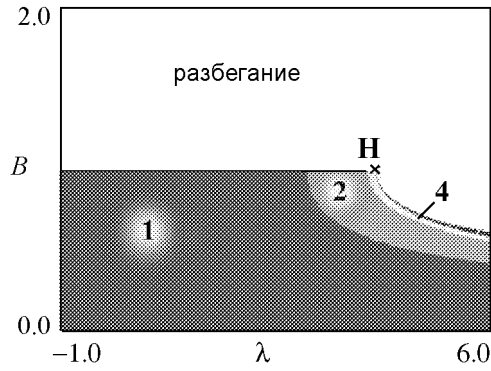


Рис. 1. Карта динамических режимов отображения (9) при $C = 0$

Таким образом, внешнее воздействие инициирует удвоения периода, даже если автономная система линейна; при этом параметр нелинейности воздействия λ управляет ими. Карта динамических режимов отображения (10) приведена на рис. 1. Линия отсутствия диссипации на плоскости параметров (B, λ) дается линией $B = 1$, пересечение которой с линией Фейгенбаума отвечает критической точке Н-типа (см. рис. 1). Линия $B = 1$ разграничивает области «разбегания» траекторий (отрицательное трение, $B > 1$) и периодических режимов (режим диссипативного осциллятора, $B < 1$).

Если в дифференциальной системе линейная диссипация положительна, а нелинейная – отрицательна ($\epsilon < 0$, $\mu < 0$), в ней реализуется неустойчивый предельный цикл. В отображении (9) этому случаю соответствует $C < 0$, $0 < B < 1$.

Если в дифференциальной системе линейная диссипация отрицательна, а нелинейная – положительна ($\epsilon > 0$, $\mu > 0$), наблюдается режим автоколебательной системы с устойчивым предельным циклом. В отображении (9) этому случаю соответствует $B > 1$, $C > 0$.

Два последних случая подробно рассмотрены в разделах 3 и 4, соответственно.

3. Режим системы с неустойчивым предельным циклом

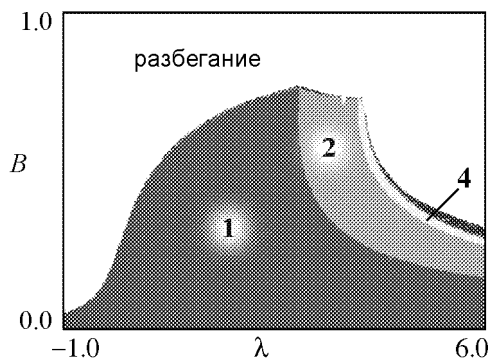


Рис. 2. Карта динамических режимов отображения (9) в режиме системы с неустойчивым предельным циклом, $C = -0.9$

Как было указано выше, реализации такого режима в отображении (9) соответствуют значения параметров $C < 0$, $0 < B < 1$. Карта динамических режимов для этого случая на плоскости (B, λ) при $C = -0.9$ приведена на рис. 2. Как видим, в этом случае область разбегания траекторий существенно расширяется по сравнению со случаем линейного осциллятора. Также нужно отметить, что размер бассейнов притяжения устойчивых режимов достаточно мал. На рис. 3 приведен увеличенный фрагмент карты динамических режимов для $C = -0.9$, а также характерные фазовые портреты, иллюстрирующие существование в системе инвариантной кривой и циклов различных перио-

дов.

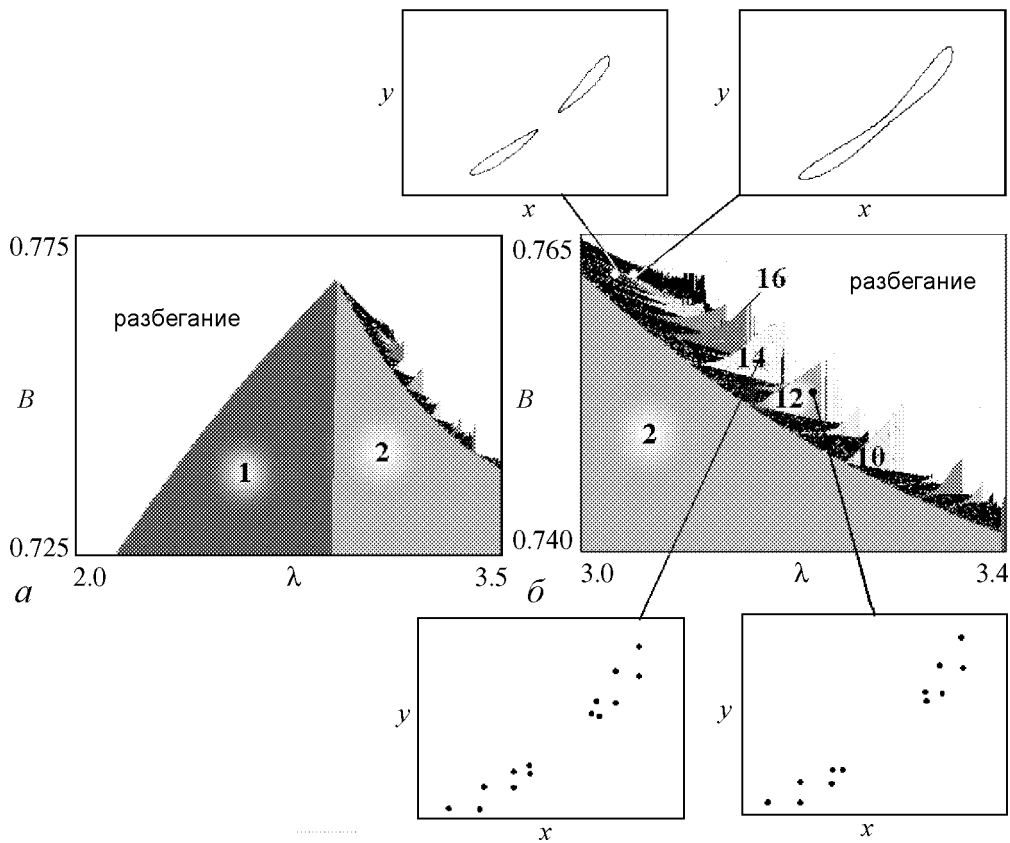


Рис. 3. Увеличенные фрагменты карты динамических режимов отображения (9) при $C = -0.9$ (а, б) и фазовые портреты в различных точках плоскости параметров на рис. б. На всех изображениях фазовых портретов $0 < x < 0.6$; $-0.45 < y < 0$

дов. Видно, что на границе области разбегания траекторий существует узкая область устойчивых квазипериодических движений со встроенной системой языков синхронизации, образовавшаяся на базе цикла периода 2. Это говорит о возможности существования инициированных внешними импульсами устойчивых синхронных и квазипериодических режимов в окрестности неустойчивого предельного цикла.

Стоит отметить, что задача о стабилизации неустойчивых режимов малым воздействием рассматривалась ранее в контексте управления хаосом (см., например, [11]). В данной системе происходит рождение новых устойчивых режимов в окрестности неустойчивого предельного цикла. Такой феномен наблюдался в возбуждаемой постоянными по амплитуде импульсами системе [12–14]. В работах [12–14] использовалась система, аналогичная (3), в левую часть которой, однако, введена дополнительная кубическая нелинейность по типу осциллятора Дуффинга. Для нее в рамках метода медленно меняющихся амплитуд получается, что скорость изменения фазы пропорциональна квадрату амплитуды. Как показано в [12–14], именно ускорение точек по фазе на орбитах большего радиуса в промежутках между импульсами ответственно за стабилизацию неустойчивости. В нашей системе такого механизма стабилизации нет: она возникает за счет того, что величина импульса за-

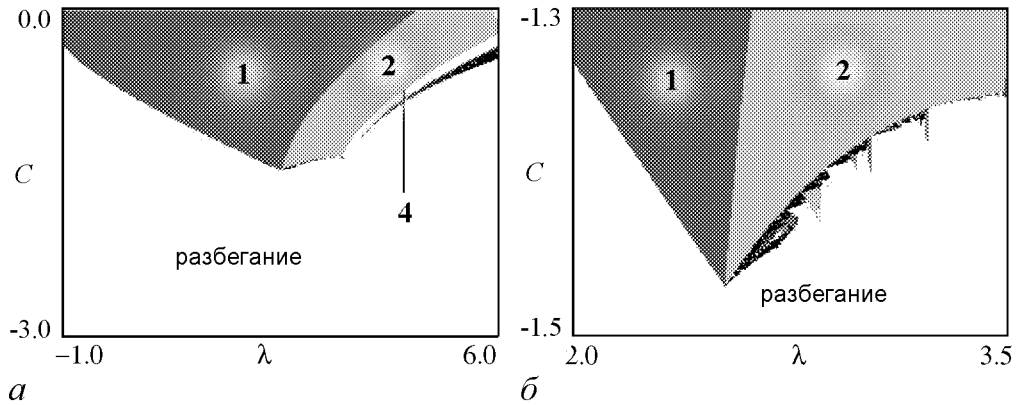


Рис. 4. Карта динамических режимов отображения (9) при $B = 0.5$ (а) и её увеличенный фрагмент (б)

висит от координаты осциллятора. Таким образом, наряду с фазовым механизмом стабилизации неустойчивых предельных циклов [12–14] можно говорить об амплитудном механизме, реализующемся в рассматриваемой системе (3).

Карта динамических режимов на плоскости (C, λ) для $B = 0.5$ приведена на рис. 4. Видно, что при больших отрицательных значениях C области существования устойчивых периодических режимов исчезают. На увеличенном фрагменте также видно существование области квазипериодических режимов и языков синхронизации.

4. Режим автоколебательной системы

Если линейная диссипация в дифференциальной системе отрицательна, а нелинейная – положительна ($\epsilon > 0, \mu > 0$), то, как было уже указано выше, в автономной системе наблюдается режим автоколебательной системы с неустойчивым положением равновесия и устойчивым предельным циклом. В отображении (9) при этом $B > 1, C > 0$.

Для исследования динамики отображения в этом случае также построим карты динамических режимов на плоскости (B, λ) для различных значений параметра C (рис. 5), а также на плоскости (C, λ) для различных B (рис. 6).

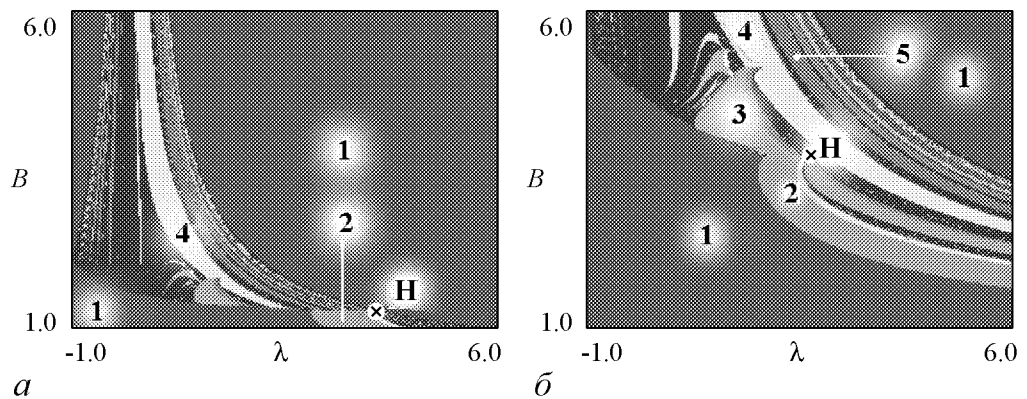


Рис. 5. Карты динамических режимов отображения (9) при $C = 1.5$ (а); 20.0 (б)

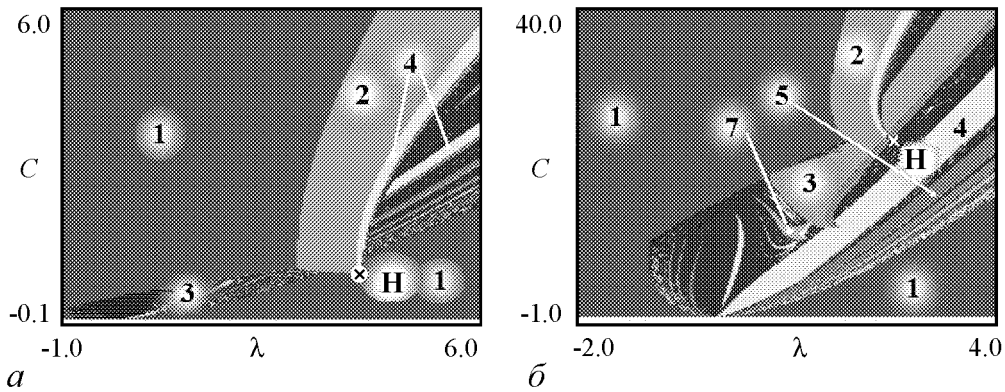


Рис. 6. Карты динамических режимов отображения (9) при $B = 1.2$ (а); 4.0 (б)

Во-первых, следует отметить, что при введении сколь угодно малой нелинейной диссипации в дифференциальной системе в отображении исчезает область разбегания траекторий, на месте которой возникают область квазипериодических движений с языками синхронизации и область режима периода 1. На картах также хорошо видна линия, ограничивающая области периода 1, 2, 4 и т.д., которая приходит на смену линии отсутствия диссипации в отображениях с постоянным якобианом. В анализируемом случае она является линией бифуркации Неймарка–Сакера циклов удвоенного периода. На ее пересечении с линией накопления фейгенбаумовых удвоений периода и располагается гамильтонова критическая точка, отмеченная символом H .

Вблизи линии $\lambda = 0$ на плоскости (B, λ) (см. рис. 5) наблюдается узкая и очень длинная область существования квазипериодических режимов. Это объясняется тем, что при $\lambda = 0$ исследуемая система представляет собой осциллятор ван дер Поля под импульсным воздействием постоянной амплитуды, для которого как раз и наблюдаются различные квазипериодические режимы. Характерные фазовые портреты в данной области, иллюстрирующие существование квазипериодических режимов, языков синхронизации и хаоса, приведены на рис. 7.

Следует также отметить существование в системе мультистабильности. С режимом периода 1 (назовем его цикл A), лежащим вблизи начала координат, на ос-

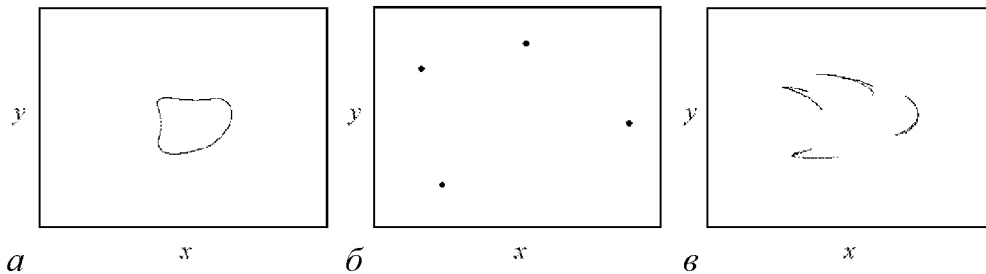


Рис. 7. Фазовые портреты отображения (9) в различных режимах при $C = 0.1$: а – $B = 1.113$, $\lambda = 0.466$, квазипериодика; б – $B = 1.504$, $\lambda = 0.269$, язык синхронизации; в – $B = 1.121$, $\lambda = 0.663$, хаотический режим. На всех рисунках $-5 < x < 5$; $-5 < y < 5$

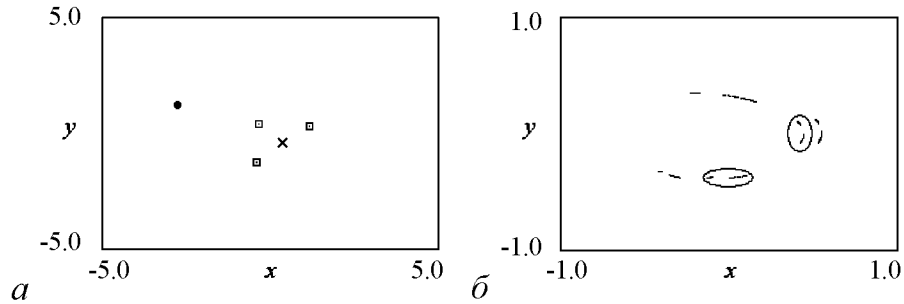


Рис. 8. Сосуществующие аттракторы отображения (9): $a - C = 0.1$, $B = 1.025$, $\lambda = 1.166$, крестиком обозначен цикл А, точкой – цикл Б; $\bar{b} - C = 2.7$, $B = 1.0$, $\lambda = 5.781$, аттрактор на базе цикла А обведен овалом

нове которого реализуются удвоения периода и происходит бифуркация Неймарка–Сакера, сосуществует цикл периода 3, который в некоторых местах хорошо виден на картах динамических режимов, а также еще один цикл периода 1, который обозначим как цикл Б (рис. 8, а). Также наблюдается сосуществование хаотических режимов, в частности, режимов, образовавшихся на базе цикла А и на базе цикла периода 3 (рис. 8, б).

5. Поиск критической точки Н

Для поиска критической точки Н-типа, располагающейся на пересечении линии отсутствия диссипации (в нашем случае, как было указано выше, это линия бифуркации Неймарка–Сакера) с линией Фейгенбаума, были использованы методы нахождения последовательности терминальных точек удвоения периода и последовательности точек с равными мультипликаторами.

Метод равных мультипликаторов [15] основан на следующем асимптотическом свойстве мультипликаторов неустойчивых циклов в критической точке: с увеличением периода цикла они стремятся к фиксированным значениям, представляющим собой универсальные константы, специфические для каждого типа критического поведения. Последовательность точек в пространстве параметров, в которых мультипликаторы некоторого цикла и цикла удвоенного периода совпадают, с увеличением периода циклов должна быстро сходиться к критической точке, а мультипликаторы этих циклов – к соответствующим универсальным значениям. Константы скейлинга в этом случае можно оценить как собственные числа матрицы Γ , определяемой соотношением

$$\Gamma = \Gamma_n^{-1} \Gamma_{2n}, \quad \Gamma_n = \begin{pmatrix} \frac{\partial S_n}{\partial \lambda} & \frac{\partial S_n}{\partial C} \\ \frac{\partial J_n}{\partial \lambda} & \frac{\partial J_n}{\partial C} \end{pmatrix}, \quad (11)$$

где S_n и J_n – соответственно след и определитель матрицы монодромии цикла периода n в данной точке.

Координаты найденных точек и значения мультипликаторов циклов при значении параметра $B = 4.0$ приведены в табл. 1, а оцененные в соответствии с (11)

значения констант скейлинга в пространстве параметров – в табл. 2. (Здесь n – период базового цикла.)

Таблица 1

n	$2n$	λ	C	μ_1	μ_2
16	32	2.641979414	22.21231986	-2.057641674	-0.486079481
32	64	2.641972827	22.21235779	-2.057456301	-0.486025619
64	128	2.6419732641	22.21235527	-2.057481305	-0.486032664
128	256	2.641973235	22.212355441	-2.057477956	-0.486031738

Видно, что точки демонстрируют хорошую сходимость к $\lambda_c = 2.641973\dots$, $C_c = 22.212355\dots$. Поскольку мультипликаторы и константы скейлинга в пространстве параметров явно стремятся к характерным для Н-типа универсальным значениям $\delta_1 = 8.7210972\dots$, $\delta_2 = 2.00\dots$, $\mu_1 = -2.0574783\dots$, $\mu_2 = -0.4860318\dots$, можно сделать вывод, что эта точка действительно является критической точкой Н-типа.

Суть метода нахождения последовательности терминальных точек удвоения периода состоит в том, что для каждого периода из каскада удвоений ищется точка с парой мультипликаторов $(-1; -1)$. Равенство одного из мультипликаторов (-1) соответствует нахождению в точке удвоения периода, а другого – определяется условием, что на линии отсутствия диссипации якобиан цикла должен быть равен 1. Таким образом, мы получаем последовательность точек удвоения периода, лежащих на линии отсутствия диссипации. Если в системе реализуется гамильтоново критическое поведение, то эта последовательность должна, во-первых, сходиться к определенному пределу и, во-вторых, подчиняться определенным скейлинговым закономерностям. Подбор двух параметров производился с помощью двумерного метода Ньютона, третий параметр оставался фиксированным. Последовательности терминальных точек были найдены при фиксированном значении параметра $B = 4.0$ и при фиксированном значении параметра $C = 4.0$. Найденные последовательности приведены соответственно в табл. 3 и 4; n обозначает период цикла.

Таблица 2

n	$2n$	δ_1	δ_2
16	32	8.721435908	2.000128521
32	64	8.721042264	1.998814272
64	128	8.721096857	1.999608640
128	256	8.721095561	2.002160475

Таблица 3

n	λ	C
16	2.6418483186	22.212306782
32	2.6419592348	22.212348001
64	2.6419716101	22.212354702
128	2.6419730518	22.212355339
256	2.6419732156	22.212355421
	2.641973...	22.212355...

Таблица 4

n	λ	B
16	3.752589280	1.768497964
32	3.752754648	1.768491542
64	3.752773535	1.768490657
128	3.752775706	1.768490565
	3.75277...	1.768490...

Как видим, последовательности также демонстрируют сходимость к определенным точкам в пространстве параметров.

Можно также оценить константы скейлинга по полученным последовательностям. Они рассчитываются как собственные числа матрицы Г, для которой выполня-

ется следующее соотношение:

$$\begin{pmatrix} \Delta\lambda_{2n} \\ \Delta C_{2n} \end{pmatrix} = \Gamma \begin{pmatrix} \Delta\lambda_n \\ \Delta C_n \end{pmatrix}. \quad (12)$$

В этом случае нами было получено значение старшей константы $\delta_1 = 8.72109$, что также соответствует известному значению для гамильтоновой критической ситуации.

Таким образом, полученные результаты позволяют говорить о существовании в исследуемой системе гамильтоновой критической точки как феномена коразмерности два.

Заключение

В работе рассмотрена динамика автоколебательной системы с нелинейным импульсным возбуждением. Проведено исследование динамики модельного отображения, построенного для данной системы с использованием квазигармонического приближения. Продемонстрировано существование в этом отображении критической ситуации гамильтонова типа как феномена коразмерности два. Данный результат позволяет сделать вывод о том, что гамильтоново критическое поведение может быть реализовано не только в консервативных системах с постоянным якобианом, но и в системах общего вида (с диссипацией, определяемой не только значениями управляющих параметров системы, но и значениями ее динамических переменных). Ему отвечает точка коразмерности два на плоскости параметров, в окрестности которой можно наблюдать не только удвоения периода, но и квазипериодические режимы со встроенной системой языков синхронизации, причем последние могут реализовываться и на базе неустойчивого предельного цикла. В силу присущей критическим явлениям универсальности можно ожидать, что качественный характер устройства пространства параметров и количественные закономерности вблизи критической ситуации будут проявляться независимо от конкретных деталей устройства системы. Например, воздействие на осциллятор, по-видимому, можно осуществлять прямоугольными импульсами конечной длительности или непрерывным периодическим сигналом какой-либо иной формы.

Работа проводилась при поддержке фонда некоммерческих программ «Династия», гранта CRDF REC-006 Y4-P-06-06 и программы Президиума РАН «Поддержка молодых ученых».

Частично работа выполнена во время научной командировки А.В. Савина в университет Потсдама (Германия) в группу профессора А.С. Пиковского «Статистическая физика и теория хаоса».

Библиографический список

1. Кузнецов С.П. Динамический хаос. М.: Физматлит, 2006.
2. Шустер Г. Детерминированный хаос. М.: Мир, 1988.
3. Feigenbaum M.J. Quantitative universality for a class of nonlinear transformations // Journal of Statistical Physics. 1978. Vol. 19, № 1. P. 25.
4. Лихтенберг А., Либман М. Регулярная и стохастическая динамика. М.: Мир, 1984.

5. *MacKay R.S.* In «Long Time Predictions in Dynamics», J. Wiley and Sons, New York, 1983.
6. *Kuznetsov A.P., Kuznetsov S.P., Sataev I.R.* A variety of period-doubling universality classes in multiparameter analysis of transition to chaos // *Physica D*. 1997. Vol. 109. P. 91.
7. *Chen C., Gyorgyi G. and Schmidt G.* Universal scaling in dissipative systems // *Physical Review A*. 1987. Vol. 35, № 6. P. 2660.
8. *Reick C.* Universal corrections to parameter scaling in period-doubling systems: Multiple scaling and crossover // *Physical Review A*. 1992. Vol. 45, № 2. P. 777.
9. *Reinout G., Quispel W.* Analytical crossover results for the Feigenbaum constants: Crossover from conservative to dissipative systems // *Physical Review A*. 1985. Vol. 31, № 6. P. 3924.
10. *Кузнецов А.П., Кузнецов С.П., Рыскин Н.М.* Нелинейные колебания. М.: Физматлит, 2002.
11. *Lima R., Pettini M.* Suppression of chaos by resonant parametric perturbations // *Phys. Rev. A*. 1990. Vol. 41, № 2. P. 726.
12. *Кузнецов А.П., Тюрюкина Л.В.* Синхронизация в системе с неустойчивым циклом, инициированная внешним сигналом // *Письма в ЖТФ*. 2003. Vol. 29. Вып. 8. С. 52.
13. *Кузнецов А.П., Тюрюкина Л.В.* Инициированные короткими импульсами устойчивые квазипериодические и периодические режимы в системе с неустойчивым предельным циклом // *Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика*. 2006. Vol. 14, № 1. С. 72.
14. *Кузнецов А.П., Роман Ю.П., Станкевич Н.В., Тюрюкина Л.В.* Синхронизация импульсами и синхронизация в связанных системах: новые аспекты классической задачи // *Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика*. 2008. № 3. С. 88.
15. *Kim S.Y.* Bicritical behavior of period doublings in unidirectionally coupled maps // *Physical Review E*. 1999. Vol. 59, № 6. P. 6585.

*Саратовский государственный
университет им. Н.Г. Чернышевского
Саратовский филиал ИРЭ РАН*

*Поступила в редакцию 28.02.2008
После доработки 15.10.2008*

AUTOOSCILLATING SYSTEM WITH COMPENSATED DISSIPATION: DYNAMICS OF APPROXIMATED DISCRETE MAP

A.P. Kuznetsov, S.P. Kuznetsov, A.V. Savin, D.V. Savin

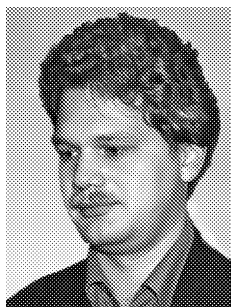
The pulse-driven van der Pol oscillator with the external pulse amplitude depending on the system variables is considered. The discrete map for values of the system variables just before the pulse moment was obtained by the slow-varying-amplitude method. Further the parameter space of this map was analyzed, and the existence of the Hamiltonian critical behavior in this system was shown. The remarkable fact is that our system is the system with the dissipation depending not only on the parameter values, but on the variable values too. Also the existence of the quasi-periodicity and the synchronization near the unstable cycle was shown.



Кузнецов Александр Петрович – родился в 1957 году. Доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник Саратовского филиала Института радиотехники и электроники РАН, профессор Саратовского государственного университета, заведующий базовой кафедрой динамических систем СГУ в СФ ИРЭ РАН. Специалист по нелинейной динамике, теории динамического хаоса и теории критических явлений. Занимается использованием идей теории катастроф и теории бифуркаций, а также развитием концепции сценариев перехода к хаосу применительно к многопараметрическим модельным и физическим нелинейным системам. Соросовский профессор (2000, 2001), научный руководитель студенческой лаборатории «Теоретическая нелинейная динамика» и школьной научной лаборатории. Опубликовал более 100 научных работ. Автор нескольких оригинальных учебных курсов для факультета нелинейных процессов и лицея прикладных наук СГУ, 10 учебных пособий и монографии «Нелинейные колебания» (совместно с С.П. Кузнецовым и Н.М. Рыскиным. М.: Физматлит, 2002). E-mail: alkuz@sgu.ru; www.sgnd.narod.ru



Кузнецов Сергей Петрович – родился в Москве (1951). Окончил Саратовский государственный университет (1973). С 1988 – сотрудник Саратовского филиала Института радиотехники и электроники РАН, в настоящее время – заведующий лабораторией теоретической нелинейной динамики. Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук в СГУ (1977) и доктора наук (1987) по специальности радиофизика. Профессор кафедры динамических систем. Автор учебно-научной монографии «Динамический хаос» и «Нелинейные колебания» (в соавторстве с А.П. Кузнецовым и Н.М. Рыскиным). Опубликовал свыше 150 научных статей по нелинейной динамике, радиофизике и электронике. Под руководством С.П. Кузнецова защищены семь кандидатских диссертаций. Лауреат государственной научной стипендии для ученых России (1994-1996), Соросовский доцент (1998), Соросовский профессор (2000, 2001). Член редакционной коллегии журнала «Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика». E-mail: spkuz@rambler.ru



Савин Алексей Владимирович – родился в Саратове в 1980 году. Окончил физический факультет Саратовского государственного университета (2002) и аспирантуру факультета нелинейных процессов СГУ. Кандидат физико-математических наук (2005). Доцент факультета нелинейных процессов СГУ, научный сотрудник Саратовского филиала ИРЭ РАН. Имеет более 20 научных публикаций в центральных и международных журналах. Область научных интересов: особенности перехода к хаосу и критического поведения, в том числе в связанных слабодиссипативных нелинейных системах.



Савин Дмитрий Владимирович – родился в Саратове в 1987 году. В 2003 году закончил Физико-технический лицей № 1 с золотой медалью, а в 2008 – факультет нелинейных процессов Саратовского государственного университета с отличием. В настоящее время работает ассистентом кафедры нелинейной физики ФНП СГУ и является аспирантом базовой кафедры динамических систем ФНП СГУ. Имеет более 15 публикаций, в том числе 5 статей в научных журналах. Область научных интересов: сложная динамика и критическое поведение систем, близких к консервативным.



АНАЛИЗ В ФИЗИКЕ

А.П. Кузнецов, С.П. Кузнецов, А.В. Савин, Н.В. Станкевич

©А.П. Кузнецов, С.П. Кузнецов, А.В. Савин, Н.В. Станкевич, 2008
Саратов: «Научная книга», 2008. 90 с.
ISBN 978-5-9758-0776-2

Книга содержит задачи, требующие при своем решении не простого получения формул, а их анализа и исследования. Такой подход позволяет воспринимать физику как исследовательскую науку, а также научиться понимать и использовать взаимосвязь физики и математики. Книга будет полезна школьникам и студентам младших курсов, интересующимся физикой и исследовательской работой, а также учителям физики и преподавателям.

Книга доступна в сети Интернет по адресу <http://sgtnd.narod.ru/publ/rus/APh.htm>

Оглавление

Предисловие

Задачи

1. Физический анализ математических задач
2. Анализ с учетом малости физических величин
3. Анализ функций
4. Внимание, в уравнении параметр
5. Катастрофы (бифуркации)

Решения

Предисловие

Из нескольких таких увеличительных стекол Стекляшкин сделал большую подзорную трубу, в которую можно было смотреть на Луну и на звезды. Таким образом он сделался астрономом.

Н. Носов. Приключения Незнайки

Физика – это не только дисциплина в учебном плане школы или вуза, но и наука, которая занимается исследованием окружающего мира и получением новых, не известных ранее знаний. Определенное представление о работе физика-исследователя дает решение физических задач. Но реальные задачи, конечно, отличаются от

учебных. Они отличаются и степенью сложности, и объемом математических преобразований, и необходимостью проведения эксперимента и компьютерных расчетов. Главное, однако, в том, что они не сводятся к подстановке чисел в некоторую формулу, найденную в учебнике или справочнике. Как правило, решаемые физиками задачи требуют глубокого и всестороннего *анализа*. Этот анализ необходим как на этапе получения уравнений и формул (например, какие факторы учесть, а какие нет?), так и на этапе их решения (есть ли строгие методы? можно ли применить приближенные?), а также на этапе обсуждения конечных соотношений (какое поведение системы они предсказывают? какие варианты возможны?) В определенной мере именно анализ, точнее, его отсутствие, отличает «традиционную» учебную задачу от по-настоящему исследовательской.

Физические методы анализа трудно формализовать; это в определенной мере искусство, обучиться которому можно, занимаясь исследовательской работой. Однако некоторым подходам и приемам можно научиться и на уровне «школьной» физики, чему и посвящена настоящая книжка.

Интересно, что физические приемы можно применять для решения задач в математической формулировке. Поэтому, прежде всего, мы рекомендуем задачи, которые «выглядят» как математические, но требуют для своего решения физического подхода. Некоторые примеры задач такого рода даны в первом разделе. Во втором разделе обсуждаются физические примеры задач, характеризующихся наличием малой величины. В третьем разделе обсуждаются задачи, связанные с анализом функциональных зависимостей физических величин, в четвертом представлены задачи, для которых исследование связано с зависимостью решения от параметров. В пятом даны примеры задач, анализ которых выявляет так называемые катастрофы и бифуркации, то есть качественные перестройки состояний физической системы при вариации параметров.

Мы старались не выходить за рамки школьной программы, хотя для решения некоторых задач необходимо уметь вычислять производные. В то же время книжка будет полезна и студентам младших курсов, которые заинтересованы в более глубоком освоении физики.

Эта книжка является, фактически, задачником, при этом решения составляют ее важную часть. Большинство решений представляют собой маленькие исследования, знакомство с которыми не сводится к простой проверке: правильно или неправильно Вы решили задачу. Поэтому рекомендуем сначала попытаться решить задачу, а потом ознакомиться с решением, даже если Вы убеждены, что решили ее правильно.

Катастрофы (бифуркации)

Задача. Маленькая бусинка массы m может скользить без трения по тонкому проволочному кольцу радиуса R . Кольцо вращают с частотой ω вокруг вертикальной оси, проходящей через плоскость кольца на расстоянии a от его центра. Проследите за трансформацией зависимости потенциальной энергии бусинки от ее координаты во вращающейся системе отсчета. Сначала исследуйте случай малых значений

координаты x , отсчитываемой от оси вращения. Найдите отвечающие качественным изменениям вида потенциала линии на плоскости безразмерных параметров $\varepsilon = g/(\omega^2 R)$, $\alpha = a/R$.

Решение. Задачу удобно решать во вращающейся системе отсчета. В этой системе действует центробежная сила $m\omega^2 r$, которой можно сопоставить потенциальную энергию $U = -(m\omega^2 r^2)/2$, где r – радиус вращения. Проведем вертикальную ось системы координат так, чтобы она проходила через центр окружности. Тогда, очевидно, $r = x + a$. В свою очередь, в соответствии с рис. 1, потенциальная энергия дается выражением

$$U = -mg\sqrt{R^2 - x^2}.$$

Таким образом, суммарная потенциальная энергия

$$U(x) = -\frac{m\omega^2(x+a)^2}{2} - mg\sqrt{R^2 - x^2}.$$

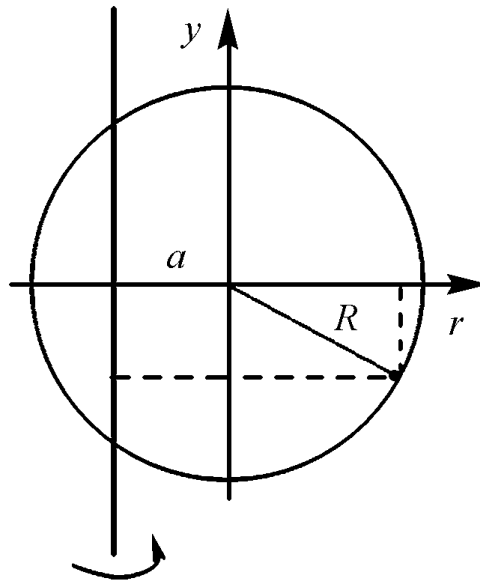


Рис. 1.

Перейдем к безразмерным переменным и параметрам. Введем безразмерную энергию $W = U/(m\omega^2 R)$ и параметры: $\varepsilon = g/(\omega^2 R)$, характеризующий скорость вращения системы, и $\alpha = a/R$, характеризующий степень смещения оси вращения относительно центра системы. Тогда

$$W(x) = -\frac{(x+\alpha)^2}{2} - \varepsilon\sqrt{1-x^2}.$$

(Мы сохранили для координаты, нормированной на радиус кольца, обозначение x .)

При вариации двух существенных параметров $\alpha = a/R$ и $\varepsilon = g/(\omega^2 R)$ потенциальная энергия как функция координаты может испытывать определенные метаморфозы.

Обсудим сначала случай $\alpha = 0$, при котором ось вращения проходит через центр окружности. Ясно, что при отсутствии вращения будет единственное устойчивое положение равновесия в нижней точке кольца $x = 0$. С другой стороны, при очень сильном вращении это равновесие может стать неустойчивым. Убедимся в этом. Используя при малых x известное соотношение

$$\sqrt{1-x^2} = 1 - \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{8} + \dots,$$

получаем

$$W(x) = \text{const} + \frac{\varepsilon-1}{2} x^2 + \frac{\varepsilon}{8} x^4 + \dots$$

Таким образом, потенциальная энергия как функция координаты задается параболой четвертой степени. При $\varepsilon = g/(\omega^2 R) > 1$ (медленное вращение) потенциальная функция имеет единственный минимум в начале координат, который отвечает

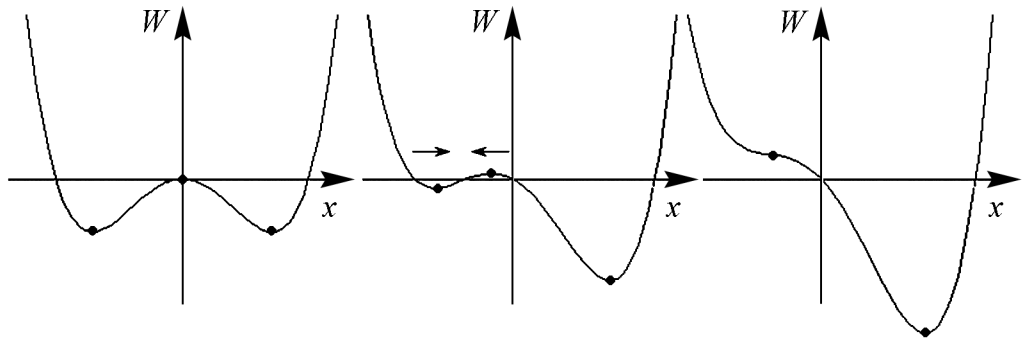


Рис. 2.

устойчивому положению равновесия. При $\varepsilon < 1$ (быстрое вращение) оно становится неустойчивым. В этот момент минимум превращается в максимум, и от него отделяются симметричным образом два локальных минимума $x = \pm \sqrt{4(1 - \varepsilon)/\varepsilon}$, рис. 2, а.

Если теперь $\alpha \neq 0$, то есть ось вращения смещена относительно центра окружности, то

$$W(x) = \text{const} - \alpha x + \frac{\varepsilon - 1}{2} x^2 + \frac{\varepsilon}{8} x^4 + \dots$$

В этом случае график потенциальной энергии становится асимметричным, при этом количество возможных конфигураций потенциала как функции x существенно возрастает. Задача становится принципиально двухпараметрической. (То есть поведение существенно зависит от двух параметров: α и ε .) Обсудим возможные метаморфозы потенциала.

Введение нового параметра α и асимметрии задачи приводит к тому, что глубина двух потенциальных минимумов может быть разной. При этом, варьируя параметр α , можно добиться ситуации слияния максимума и одного из минимумов. Эта ситуация иллюстрируется рис. 2, б, в.

Найдем условие этой бифуркации. Положению равновесия отвечает нулевое значение производной потенциала по координате $W'(x) = 0$, а условию слияния положений равновесия – равенство нулю второй производной $W''(x) = 0$, когда потенциальная функция имеет точку перегиба. Вычислим соответствующие производные и приравняем их нулю:

$$W'(x) = -\alpha + (\varepsilon - 1)x + \frac{\varepsilon x^3}{2} = 0,$$

$$W''(x) = \varepsilon - 1 + \frac{3\varepsilon x^2}{2} = 0.$$

Из второго уравнения находим $x = \pm \sqrt{2(1 - \varepsilon)/(3\varepsilon)}$. Подставляя в первое соотношение, получаем

$$\alpha = \pm \left(\frac{2(1 - \varepsilon)}{3\varepsilon} \right)^{3/2}.$$

Это уравнение задает линию на плоскости параметров (α, ε) , разделяющую области с различным характером конфигурации потенциальной энергии, как функции

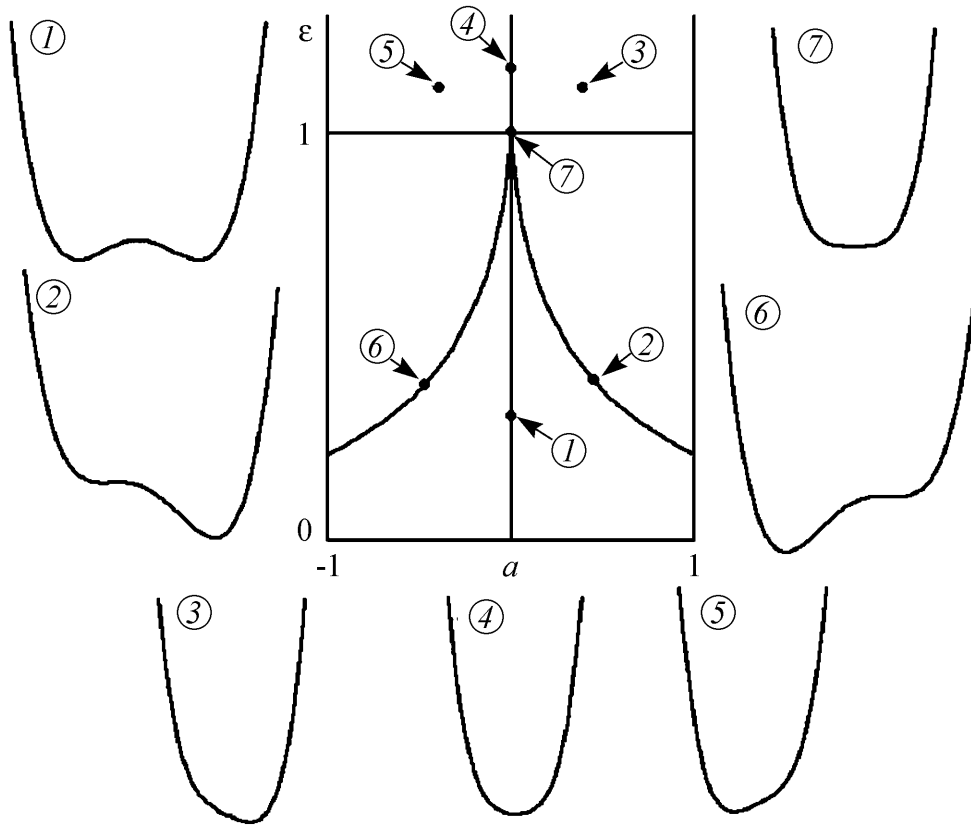


Рис. 3.

координаты. Такое разбиение плоскости (α, ε) показано на рис. 3. Рядом представлены соответствующие конфигурации потенциальной функции. Можно заметить, что разделительная линия, отвечающая слиянию двух положений равновесия, в точке $(0, 1)$ имеет особенность («острие»). Эта точка отвечает максимально вырожденной ситуации, когда функция характеризуется локальным минимумом четвертой степени. В ее окрестности, используя $\varepsilon = 1 - \Delta\varepsilon$, получаем

$$\alpha \approx \pm \left(\frac{2}{3} \Delta\varepsilon \right)^{3/2}.$$

Таким образом, это действительно особенность в виде полукубического острия. Такие особенности весьма характерны для систем, в которых могут сосуществовать и сливаться три локальных экстремума. В теории катастроф такая точка носит специальное название *точка сборки*, а подходящие к ней линии слияния экстремумов называют линиями *складок*.

Мы пока ограничились рассмотрением случая малых x . Проведем теперь рассмотрение более аккуратно, не ограничиваясь этим предположением. Вычисляя соответствующие производные от потенциала

$$W(x) = -(x + \alpha)^2/2 - \varepsilon\sqrt{1 - x^2},$$

получаем

$$W'(x) = -x - a + \frac{\varepsilon x}{\sqrt{1-x^2}} = 0,$$
$$W''(x) = -1 + \frac{\varepsilon}{(1-x^2)^{3/2}} = 0.$$

После несложных преобразований находим:

$$x = \pm\sqrt{1-\varepsilon^{2/3}}$$

и

$$\alpha = \pm(1-\varepsilon^{2/3}).$$

Последнее уравнение задает более точно линию на плоскости параметров (α, ε) , разделяющую области с различным характером конфигурации потенциальной энергии как функции координаты. Однако легко видеть, что в окрестности точки сборки мы имеем также полукубическое острие. Действительно, используя $\varepsilon = 1 - \Delta\varepsilon$ и, соответственно, $\varepsilon^{2/3} = (1 - \Delta\varepsilon)^{2/3} \approx 1 - (2/3)\Delta\varepsilon$, получаем $\alpha \approx \pm((2/3)\Delta\varepsilon)^{3/2}$, то есть уже полученное выше соотношение.



ПАМЯТИ ГЕНРИХА ГРИГОРЬЕВИЧА МОНОСОВА

Умер друг у меня – вот такая беда...
Как мне быть – не могу и ума приложить.
Я не думал, не верил, не ждал никогда,
Что без этого друга придется мне жить.

К. Симонов

Нет больше с нами Генриха Григорьевича Моносова – умного и доброго человека, искренне и глубоко переживавшего несправедливость и неправду, замечательного физика, типичного представителя фрязинской научной школы по СВЧ-электронике.

Мы познакомились в 1971 году на одной из конференций, когда я докладывал о режимах циклотронного резонанса в лучевых приборах магнетронного типа, а он критиковал мое выступление. В это время теоретиков, занимавшихся магнетронными приборами, было не так уж много, все знали друг друга и бурно обсуждали любой новый результат. Генрих Григорьевич лучше всех понимал, что творится в магнетроне, и последовательно находил все больше и больше тонкостей и нюансов в теории. Это о нем сказал поэт его же словами: «Во всем мне хочется дойти до самой сути...». И он старался дойти до нее, будь то теория или какая-либо жизненная ситуация. Генрих Григорьевич окончил физический факультет МГУ, учился прекрасно и готовился стать аспирантом профессора Самсона Давидовича Гвоздовера. Но... получил «тройку» на экзамене по истории КПСС (опять хотел «дойти до самой сути») и оказался в теоретическом отделе знаменитого впоследствии фрязинского «Истока». В Саратове стали проходить в те годы зимние школы по СВЧ-электронике. Начиная со второй школы 1972 года, он стал их постоянным участником как приглашенный лектор. Однако ценность его участия не ограничивалась прекрасно прочитанными

лекциями. Будучи блестящим полемистом, он участвовал во всех дискуссиях, участвовал горячо, говорил порой остро, но всегда доброжелательно. Мы быстро подружились и стали близкими людьми. Близкими стали и наши семьи. Дом Моносовых стал домом друзей для саратовских (и не только саратовских) электронщиков, он стал родным для многих. Как писал К. Симонов:

Дом друзей, куда можно зайти без всякого,
Где и с горя и с радости ты ночевал,
Где всегда приютят, и всегда одинаково
Под шумок, чем найдут, угостят наповал...

Генрих Григорьевич любил застолье, любил петь, любил стихи. Мы обменивались с ним незатейливыми праздничными поздравлениями и телефонными звонками. Школы почти всегда приходились на 4 февраля – день его рождения, который мы отмечали в «Волжских даях» – любимой обители электронщиков Союза и России. Он любил детей, и они отвечали ему искренней любовью. Мне никогда не забыть, как он сопереживал моим бедам 2003 года, как старался отвлечь меня от грустных размышлений.

В период с 1972 по 1978 годы наша научная группа печатала, практически, все статьи в журнале «Электронная техника». Их строгим рецензентом был Генрих Григорьевич. Иногда нам приходилось вносить исправления после пятого возвращения статьи с его замечаниями. И всегда замечания улучшали статью, а он улыбался своей чудесной улыбкой и говорил одно и то же: «Платон мне друг, но истина дороже».

Его работы касались не только магнетронных приборов: были его статьи по цепочкам электронных устройств, по теории казавшегося экзотическим пениотрона – своеобразного мазера на циклотронном резонансе. Он первым рассчитал форму пучка в поперечном сечении пениотрона, возникающую в процессе взаимодействия. В его последних работах изложены результаты компьютерного моделирования процесса автомодуляции пространственного заряда в магнетроне. Впервые дана следующая ясная качественная картина этого процесса. Высокочастотное поле резонансной системы, наложенное на статический электронный поток, сначала приводит к образованию выпуклости, на которую постепенно накручиваются новые слои электронов, образуя локальную вращающуюся втулку. Когда верхние слои этой втулки поднимаются достаточно близко к аноду, они под действием высокочастотного поля резонаторной системы отрываются от локальной втулки и постепенно в виде сгустков импульсами оседают на аноде. После оседания сгустка локальная втулка постепенно восстанавливается, и описанный процесс повторяется вновь. Нерегулярность этого процесса определяется тем, что время образования локальной втулки не связано со временем прохождения втулки от одной щели резонаторной системы до другой. Поэтому процесс отрыва порций заряда от локальной втулки начинается каждый раз при новом исходном состоянии втулки; от нее каждый раз отрываются новые порции заряда. Такая хаотическая автомодуляция может быть одной из причин возникновения высокого шумового пьедестала в частотном спектре сигнала, генерируемого магнетроном. Генрих Григорьевич докладывал эти результаты, вызвавшие большой интерес на нескольких российских конференциях, в Саратове и Санкт-Петербурге, а также в республике Корея.

Он очень тяжело переживал фальшь в науке, и в жизни. У него был своеобразный (может быть, в чем-то мальчишеский) протест против показушных советских выборов: Генрих Григорьевич не опускал часть бюллетеней в урну, а уносил их домой. Получалось у него это довольно ловко. Однажды я голосовал вместе с ним в Москве и попробовал проделать то же самое. Мгновенно передо мной вырос какой-то безликий человек в сером и ласково предложил проголосовать. А Моносов опять унёс часть бюллетеней домой и был очень доволен этим.

Мы не раз ездили вместе на электричке во Фрязино. Путь от его дома, а жил я у него, был за долгие годы поездок просчитан по минутам. По моим ощущениям, появившись на перроне, нужно было садиться в ближайший вагон. Нет! Нужно было дойти до второго вагона, потому что там во Фрязино ехали «все лучшие люди». И Генрих Григорьевич размеренно двигался ко второму вагону, приговаривая: «Смотри, пантограф еще не поднят, горит жёлтый свет, успеваем».

Он занимался теорией, но в нем жил экспериментатор, потому что руками он умел делать все. Домашние в шутку называли его «большим мастером мелкого ремонта». К тому же экспериментировал он и над собой: занимался лечебным голоданием, пил какую-то «живую» воду, делая все это с огромным увлечением. Любил дачу, сам делал домашнее вино.

Был счастлив, когда появился внук Володя, с удовольствием рассказывал о том, что тот сказал, что сделал. К сожалению, Генрих Григорьевич был болен, мужественно перенес несколько операций... И вот его нет. И опять о нем Симоновские строки:

Еще в памяти все твои живы черты,
А уже не лечу я сказать тебе «ты».
Говорят: раз ты умер – таков уж закон –
Вместо «ты» про тебя говорить надо «он»,
Вместо слов – что люблю тебя – надо: «любил»,
Вместо слов – что есть друг у меня – надо: «был».
Так ли это? Не знаю. По-моему – нет!
Свет погасшей звезды еще тысячу лет
К нам доходит. А что ей, звезде, до людей?
Ты добрей был её, и теплей и светлей,
Да и срок невелик – тыщу лет мне не жить,
На мой век тебя хватит – мне по дружбе светить.

Трубецков Д.И.

Зав. редакцией *Н.Н. Левина*
Редакторы *Л.А. Сидорова, Н.Н. Левина*
Оформление художника *Д.В. Соколова*
Оригинал-макет подготовлен
И.А. Пономаревой, О.Н. Строгановой
в пакете *L^AT_EX*

Подписка на 2009 год осуществляется
по каталогу Агентства Роспечать
«Газеты. Журналы», индекс 73498
и по договору между Подписчиком
(юридическим или физическим лицом)
и Издателем (Саратовским государственным университетом)

Стоимость подписки на 2009 год 600 руб. (6 номеров)
Заявки на заключение договора принимаются
по почте, по телефону редакции, по эл. почте редакции

Адрес редакции: 410012, Саратов, Астраханская, 83
Тел./факс: (845-2) 52-38-64
E-mail: and@nonlin.sgu.ru

Распространение журнала осуществляется
редакцией журнала по адресной системе

Сдано в набор 8.09.08. Подписано к печати 17.12.08
Формат 70x108/16. Бумага «Снегурочка». Печать трафаретная
Усл. печ. л. 12,95(9,25). Уч.-изд. л. 12,0. Тираж 200. Заказ 408

Отпечатано на ризографе GR 3750 редакции журнала

© Редакция журнала
«Известия вузов. ПНД», 2008
© Оформление художника
Д.В. Соколова, 2008