

Журнал включен в «Перечень периодических научных и научно-технических изданий РФ,  
рекомендованных для публикации основных результатов диссертаций  
на соискание ученой степени доктора наук»

**МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ**  
Известия высших учебных заведений  
**ПРИКЛАДНАЯ НЕЛИНЕЙНАЯ ДИНАМИКА**  
*научно-технический журнал*  
издается с 1993 года

Выходит 6 раз в год

Том 17, № 5(99), 2009, Саратов

**СО Д Е Р Ж А Н И Е**

*К 100-летию Саратовского государственного университета*

*Материалы Международной школы-семинара  
«Статистическая физика и информационные технологии»  
Россия, Саратов, июнь 2–5, 2009*

Часть II

**ОБЗОРЫ АКТУАЛЬНЫХ ПРОБЛЕМ НЕЛИНЕЙНОЙ ДИНАМИКИ**

<i>Вадивасова Т.Е., Анищенко В.С.</i> Стохастические бифуркации .....	3
<i>Смолянский С.А., Блашке Д.Б., Тараканов А.В., Шмидт С.М.</i> Вакуумное рождение частиц в сильных полях: статистические аспекты .....	17
<i>Рябухо В.П., Лякин Д.В., Лычагов В.В.</i> Продольная когерентность оптического поля .....	30
<i>Короновский А.А., Куровская М.К., Храмов А.Е.</i> Распределение длительностей ламинарных фаз для перемежаемости типа I в присутствии шума .....	43
<i>Шабунин А.В.</i> Методы измерений хаотической синхронизации .....	60
<i>Безручко Б.П.</i> Моделирование по временным рядам в приложении к обработке сложных сигналов .....	70
<i>Макаренко Н.Г., Князева И.С.</i> Мультифрактальный анализ цифровых изображений .....	85
<i>Павлов А.Н.</i> Вейвлет-анализ и примеры его применения .....	99

**НЕЛИНЕЙНАЯ ДИНАМИКА В ЛИЦАХ. ИСТОРИЯ. PERSONALIA**

<i>Трубецков Д.И.</i> Две тысячи девятый год в датах нелинейной динамики .....	112
Правила для авторов .....	131

Зав. редакцией *Н.Н. Левина*  
Редакторы *Л.А. Сидорова, Н.Н. Левина*  
Оформление художника *Д.В. Соколова*  
Оригинал-макет подготовлен  
*И.А. Пономаревой, О.Н. Строгановой*  
в пакете  $L^A T_E X$

Подписка на 2010 год осуществляется  
по каталогу Агентства Роспечать  
«Газеты. Журналы», индекс 73498,  
и по договору между Подписчиком  
(юридическим или физическим лицом)  
и Издателем (Саратовским государственным университетом)

Стоимость подписки на 2010 год 600 руб. (6 номеров)  
Заявки на заключение договора принимаются  
по почте, по телефону редакции, по эл. почте редакции  
Адрес редакции: 410012, Саратов, Астраханская, 83  
Тел./факс: (845-2) 52-38-64  
E-mail: and@nonlin.sgu.ru

Распространение журнала осуществляется  
редакцией журнала по адресной системе

Сдано в набор 15.09.09. Подписано к печати 1.10.09  
Формат 70x108/16. Бумага «Балет». Печать трафаретная  
Усл. печ. л. 11,55(8,25). Уч.-изд. л. 11,0. Тираж 200. Заказ 416

Отпечатано на ризографе GR 3750 редакции журнала

© Редакция журнала  
«Известия вузов. ПНД», 2009  
© Оформление художника  
Д.В. Соколова, 2009

CONTENTS

To the 100<sup>th</sup> Anniversary of the Saratov State University

Transactions of the International school-seminar  
«Statistical Physics and Informational Technologies»  
Russia, Saratov, June 2–5, 2009

Part II

REVIEWS OF ACTUAL PROBLEMS OF NONLINEAR DYNAMICS

Vadivasova T.E., Anishchenko V.S. Stochastic bifurcations . . . . .	3
Smolyansky S.A., Blaschke D.B., Tarakanov A.V., Schmidt S.M. Vacuum particle creation in strong fields: statistical aspects . . . . .	17
Ryabukho V.P., Lyakin D.V., Lychagov V.V. Longitudinal coherence of optical field . .	30
Koronovskii A.A., Kurovskaya M.K., Hramov A.E. Distribution of the laminar phases in the case of type-I intermittency with noise . . . . .	43
Shabunin A.V. Methods of measuring chaotic synchronization . . . . .	60
Bezruchko B.P. Modeling from time series and applications to processing of complex signals . . . . .	70
Makarenko N.G., Knyazeva I.S. Multifractal analysis of digital images . . . . .	85
Pavlov A.N. Wavelet-analysis and examples of its applications . . . . .	99

HISTORY OF NONLINEAR DYNAMICS. PERSONALIA

Trubetskov D.I. Nonlinear dynamics dates in 2009 . . . . .	112
Autors ruller . . . . .	131

ПРАВИЛА ПРЕДСТАВЛЕНИЯ РУКОПИСЕЙ

Рукописи, объемом не более 16 стр. и 8 рис. принимаются в редакцию в 2 вариантах: бумажном и электронном.

1. **Бумажный вариант** должен быть напечатан через 1,5 интервала и распечатан в 2-х экз. Если рисунки (только черно-белые!) не вставлены в текст, то они выполняются на отдельных страницах также в 2-х экз. Под рисунком указывается его номер, фамилии авторов, название статьи; подрисовочные подписи печатаются на отдельном листе и не должны дублировать внутритекстовое описание рисунка.

*Требования к оформлению текста.* На первой странице перед текстом статьи должны быть напечатаны: индекс УДК, название статьи, инициалы и фамилии авторов, краткая аннотация статьи с ключевыми словами, составленная по форме удобной для непосредственного включения ее в РЖ, издаваемые ВИНТИ.

*К статье прилагаются в 1 экз.:*

- перевод на английский язык названия статьи, инициалов и фамилий авторов, аннотации, **ключевых слов.**
- краткие сведения об авторах с фотографиями в графических форматах JPG, GIF и т.д., или сканированные с разрешением не менее 300dpi без дополнительной компьютерной обработки, **e-mail каждого автора и почтовый адрес организации.**

• *Краткие сведения об авторах составляются по следующей форме:*

Сидоров Петр Иванович – родился в 1938 году в Москве, окончил Московский физико-технический институт в 1961 году. После окончания МФТИ работает в ФИАН заведующим отделом. Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук в МГУ (1964) и доктора физико-математических наук (1977) в области теории колебаний и волн. Автор монографии «Детерминированный хаос и экономика» и учебника «Волны в экологии» (в соавторстве с...). Опубликовал 120 научных статей по направлениям, указанным выше. Лауреат Государственной премии СССР. Редактор журнала International Journal of Chaos Theory и член редакционной коллегии журнала «Физика и жизнь».

*В библиографическом списке нумерация источников должна соответствовать очередности ссылок на них в тексте. В списке указываются:*

- а) для книг – фамилия автора, инициалы, название книги, город, издательство, год издания, том;
- б) для журнальных статей – фамилия автора, инициалы, название статьи, название журнала, серия, год, том, номер, выпуск, первая страница статьи;
- в) для депонированных статей – название статьи, инициалы, фамилия автора, название организации, в которой выполнена работа, город, год, объем статьи, название депонирующей организации, дата депонирования, регистрационный номер;
- г) для препринта – фамилия автора, инициалы, название издания, полное название издающей организации, год, количество страниц;
- д) для материалов конференций, школ, семинаров – фамилия автора, инициалы, название статьи, название издания, время и место проведения конференции, город, издательство, год, первая страница статьи.

В конце статьи авторы должны указать наименование программы, в рамках которой выполнена работа, или наименование фонда поддержки.

2. Электронный вариант. Статья оформляется с использованием макропакета L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X 2ε. Рекомендуется пользоваться компилятором MiKTeX (MiKTeX2.4), так как именно им пользуются в редакции. В редакцию присылать только TEX-файл (с англ. аннотацией и ав. сведениями) без стилевых файлов и PDF статьи. Все иллюстрации, включенные в оригинал-макет, предоставляются в виде отдельных файлов, записанных в любом из форматов: TIFF, GIF, JPEG, EPS. Название файла должно соответствовать номеру рисунка в тексте.

В виде исключения принимаются статьи, подготовленные с помощью текстового редактора Microsoft Word (все формулы должны быть набраны при помощи Equation или MathType).

**Все публикации в журнале, в том числе и публикации аспирантов, бесплатные.**

В 1907 году Леонид Исаакович Мандельштам показал что рэлеевское рассеяние нельзя объяснить рассеянием на хаотически движущихся молекулах, если их число в объеме, малом по сравнению с кубом длины волны, велико, и они распределены в пространстве равномерно и однородно. Рассеянные волны гасят друг друга, то есть остаются лишь прямые лучи падающего света. В 1908 году Мариан Смолуховский показал, что молекулярное рассеяние вызывается тепловыми флуктуациями показателя преломления среды. Наконец, в 1910 году Альберт Эйнштейн, основываясь на идеях М.Смолуховского, создал теорию рассеяния света в жидкостях и газах. Интересно, что формула Рэлея все время оставалась верной, менялось лишь её физическое объяснение.

**1904** Норвежский физик и геофизик Вильгельм Фриман Корен Бьёркнес (1862–1951) разработал динамические методы предсказания погоды на основе математической обработки физических данных. Однако практическому применению этого метода препятствовала сложность вычислений. Метод Бьёркнеса был применен только в 1950 году на вычислительной машине ENIAC.

**1919** Советский физик и биофизик Петр Петрович Лазарев (1878–1942) организовал в Москве первый в мире Институт биологической физики (с 1927 года – Институт физики и биофизики). Он же ввел понятие «биологическая физика».

**1924** Луи де Бройль в докторской диссертации «Исследования по теории квантов» выступил с идеей о волновых свойствах материи (см. например, главу «Микроквантавы» в книге Д.И. Трубецкого [20]). В 1929 Луи де Бройлю присуждена Нобелевская премия «за открытие волновой природы электрона». Читателям журнала, несомненно, будет интересна вышедшая на русском языке книга Луи де Бройля «По тропам науки» [21], а также, на странице 379 этой книги – список книг и статей де Бройля, переведенных на русский язык. Чтобы заинтриговать читателя, приведем отрывок из послесловия к книге, написанного доктором философских наук, профессором И.В. Кузнецовым.

«Перевернута последняя страница этой книги. Закончено поучительное и увлекательное путешествие по многим из тех троп, по которым некогда прошла и идет ныне научная мысль. Когда мы следовали по ним, внимание всецело было занято развертывавшимися перед нашим мысленным взором картинами неустанных поисков истины, образами тех, кто вложил в общую сокровищницу человеческого знания ценнейшие дары. Мы тогда не думали о том, кто ведет нас по этому пути, кому мы обязаны духовной встречей с выдающимися людьми науки, творческий путь которых всегда будет вызывать восхищение. Теперь, расставаясь с прочитанной книгой, мы невольно обращаемся к человеку, который так искусно направлял нас в этом мысленном путешествии – к автору книги, замечательному французскому физику Луи де Бройлю. Это тем более оправданно, что он является не только умелым проводником по тропам науки, проложенным некогда другими, но и проницательным первооткрывателем новых путей, по которым движется физика наших дней. Поэтому его собственная творческая деятельность столь же поучительна, как и творческая деятельность тех людей, о которых рассказал он».

**1924** Нобелевская премия в области физиологии и медицины присуждена нидерландскому физиологу В. Эйнтховену за создание метода кардиограмм. В 1903 году он создал струнный гальванометр, с помощью которого впервые зарегистрировал электрические потенциалы сердца, положив начало клинической электрокардиогра-

С D-бифуркациями связана качественная перестройка так называемого *стохастического* или *случайного аттрактора* (random attractor) [5]. Случайный аттрактор представляет собой множество точек в фазовом пространстве, получаемых спустя интервал времени  $\tau \rightarrow \infty$  из множества всевозможных начальных состояний системы (1) при заданной реализации случайной силы. Строгое математическое определение случайного аттрактора дано в [5]. Конкретный вид случайного аттрактора, вообще говоря, меняется во времени, но в установившемся режиме ( $\tau \rightarrow \infty$ ) его геометрическая структура сохраняется. Это может быть точка (стохастическое состояние равновесия), замкнутая кривая (стохастический цикл), поверхность тора (стохастический тор), множество с канторовой структурой (стохастический странный аттрактор).

Как отмечалось в [4], шум может не только сдвигать существующие в системе бифуркации в пространстве параметров, но при некоторых условиях приводить к качественно новому поведению. Такие явления были названы *индуцированными шумом переходами*. Характеристики шума такие, как его интенсивность или ширина спектра (в случае цветного шума), могут играть роль бифуркационных параметров системы.

Для одномерных систем ( $N = 1$ ) справедлива следующая теорема [5]. Пусть процесс  $x(t)$  задается одномерным СДУ

$$dx = f(x)dt + g(x)dW,$$

где  $W(t)$  – стандартный винеровский процесс, тогда при любом значении параметров существует единственное стационарное решение уравнения ФПК  $p(x)$ , которому соответствует отрицательный показатель Ляпунова. В случае аддитивного шума в системе (4) имеется единственная инвариантная мера и, как следует из теоремы, соответствующий ей показатель Ляпунова всегда отрицателен

$$\lambda = -2 \int_{-\infty}^{\infty} \left( \frac{f(x)}{g(x)} \right)^2 p(x) dx < 0. \quad (4)$$

Таким образом, D-бифуркации в одномерной системе с аддитивным шумом не возможны.

Рассмотрим влияние шума на некоторые типичные локальные бифуркации состояний равновесия: бифуркацию «трехкратное равновесие» (бифуркацию вил для точек равновесия) и суперкритическую бифуркацию Андронова–Хопфа.

## 2. Бифуркация «трехкратное равновесие» (бифуркация вил)

В детерминированном случае бифуркация описывается следующим уравнением первого порядка:

$$\dot{x} = \alpha x - x^3, \quad (5)$$

где  $\alpha$  – управляющий параметр. При  $\alpha < 0$  имеется устойчивая точка равновесия  $x_1 = 0$ . При  $\alpha = 0$  происходит бифуркация, в результате которой при  $\alpha > 0$  равновесие в нуле становится неустойчивым и образуются две новые устойчивые точки равновесия  $x_{2,3} = \pm\sqrt{\alpha}$ . Бифуркация в присутствии шума описана в [5, 13]. Рассмотрим отдельно случаи аддитивного и мультипликативного шума.

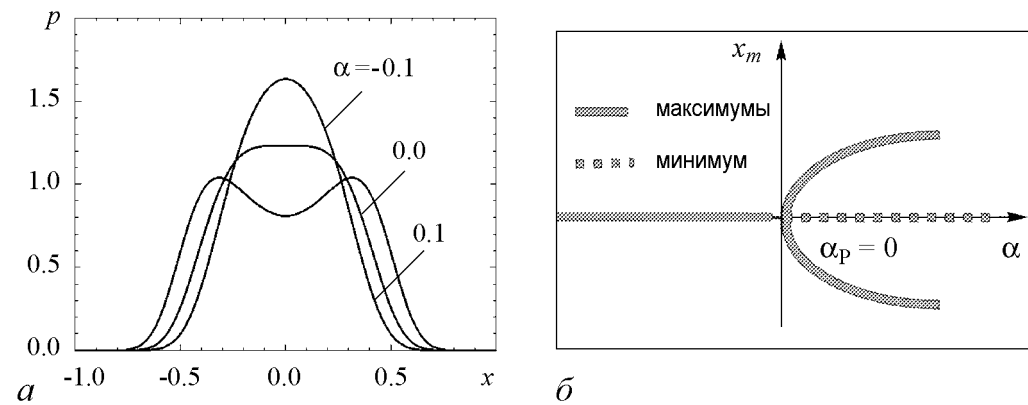


Рис. 1. Бифуркация «трехкратное равновесие» при аддитивном шуме:  $a$  – графики стационарной плотности вероятности до Р-бифуркации, в момент бифуркации и после бифуркации;  $b$  – зависимость координат экстремумов распределения от параметра  $\alpha$

**Аддитивный шум.** Бифуркация описывается следующим стохастическим уравнением:

$$\dot{x} = \alpha x - x^3 + \sqrt{2D}n(t), \quad (6)$$

где  $n(t) = dW/dt$  – нормированный гауссов белый шум;  $D$  – константа, задающая интенсивность шума. Для (6) единственным инвариантным множеством траекторий является всё пространство состояний. На нем задана стационарная плотность вероятности  $p(x)$ , являющаяся стационарным решением уравнения ФПК. Коэффициенты сноса и диффузии для процесса, задаваемого СДУ (5), есть

$$A(x) = \alpha x - x^3, \quad B(x) = D = \text{const.}$$

Легко найти стационарное решение уравнения ФПК

$$p(x) = C \exp \left\{ \frac{x^2}{4D} (2\alpha - x^2) \right\}, \quad (7)$$

где  $C$  – нормировочная константа. Изменение формы распределения  $p(x)$  с изменением  $\alpha$  при  $D = 0.01$  показано на рис. 1,  $a$ . При  $\alpha < 0$  имеется единственный максимум распределения в точке  $x_1 = 0$ . При  $\alpha = \alpha_P = 0$  происходит Р-бифуркация: появляются два симметричных максимума в точках  $x_{2,3} = \pm \sqrt{\alpha}$ , а точка  $x_1 = 0$  становится точкой минимума. Координаты экстремумов в зависимости от параметра  $\alpha$  приведены на рис. 1,  $b$ . Они в точности совпадают с точками равновесия системы без шума, причем минимум соответствует неустойчивому равновесию, а максимумы – устойчивым.

В соответствии с приведенной выше теоремой D-бифуркация при аддитивном шуме отсутствует.

**Мультипликативный шум.** Бифуркация описывается следующим стохастическим уравнением:

$$\dot{x} = \alpha x - x^3 + \sqrt{2D}xn(t). \quad (8)$$

При  $\alpha < 0$  для (8) имеется единственное инвариантное множество  $v$  – устойчивая точка равновесия в нуле. Соответствующая плотность вероятности есть

В Вашингтоне в апреле 1990 года во время презентации наш проект по этому показателю оказался самым лучшим. Вторыми были англичане с коэффициентом 0.3.

К сожалению, программа не получила развития.

**1899** Дж. Рэлеем (1842–1919) разработана теория молекулярного рассеяния света (рэлеевское рассеяние).

Изложим его подход, следуя книге Г. Хантли «Анализ размерностей» [19], в которой автор приводит примеры решения задач из разных областей физики. Начнем с цитаты, во многом объясняющей выбор изложения.

«Следующий пример дан как ввиду его эстетического интереса, так и в связи с тем, что он показывает полезность (в ряде случаев) использования экспериментальных фактов в дополнение к методу размерностей.

Пример №13. Почему небо голубого цвета?

Голубой цвет вызван рассеянием цвета на пылинках, капельках жидкостей и твердых частицах молекулярных размеров, взвешенных в атмосфере. Теория этого вопроса достаточно сложна, однако Рэлей показал, что полезный результат можно получить с помощью метода размерностей в сочетании с известными законами оптики.

Задача формулируется следующим образом. Пусть частица с линейным размером  $l$  рассеивает солнечный свет с длиной волны  $\lambda$  и амплитудой  $A$ . Амплитуда рассеянной волны уменьшается с увеличением расстояния от частицы. Пусть эта амплитуда равна  $S$  на расстоянии  $r$  от частицы. Требуется найти зависимость  $S$  от остальных переменных. В дальнейших расчетах учитывается, что все переменные имеют одинаковую размерность  $L$ . По правилам размерности амплитуда  $S$  выражается как произведение остальных переменных в некоторых степенях:  $S = CA^\alpha l^\beta r^\gamma \lambda^\delta$ , где  $C$  – безразмерный коэффициент,  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  – искомые показатели степени. Отсюда получается весьма необычное уравнение для размерностей  $[L] = [L]^\alpha [L]^\beta [L]^\gamma [L]^\delta$ , из которого следует, что  $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 1$ . Для решения задачи анализ размерностей необходимо дополнить физическими представлениями. Во-первых, вспомним, что амплитуда рассеянного света обратно пропорциональна расстоянию от частицы, то есть  $\gamma = -1$ . Во-вторых, амплитуда рассеянного света пропорциональна амплитуде падающего света, поэтому  $\alpha = 1$ . Тогда получаем, что  $\delta = 1 - \beta$  и  $S = C \left(\frac{A}{r}\right) l^\beta \lambda^{1-\beta}$  или  $S = C \left(\frac{A\lambda}{r}\right) \left(\frac{l}{\lambda}\right)^\beta$ . Далее Рэлей отмечает, что, судя по динамике процесса, отношение амплитуд волн падающего и рассеянного света пропорционально объему рассеивающей частицы. Таким образом, следует считать, что  $\frac{S}{A} \sim l^\beta \sim l^3$  и  $\beta = 3$ . Окончательно получается, что  $S = C \frac{Al^3}{r\lambda^2}$ . Интенсивность рассеянного света пропорциональна квадрату амплитуды  $S$ , то есть  $I \sim \lambda^{-4} \sim \omega^4$ , где  $\omega$  – частота.

Позднее Рэлей понял, что рассеяние вызывается не посторонними частицами, а самими молекулами воздуха. Такое рассеяние света стали называть рэлеевским или молекулярным рассеянием.

Обратимся еще раз к книге Г. Хантли. Он пишет следующее.

«Читатель может заметить, что в этом примере в большей мере использованы «физическая интуиция» и знание законов физики, чем анализ размерностей. С этим приходится согласиться, но верно также и то, что использование обоих источников привело простым и изящным образом к интересному результату, который невозможно получить методами элементарного анализа».

Таким образом, вместо линейного уравнения второго порядка (1) мы получили уравнение первого порядка, но нелинейное. Однако в данном случае оно оказывается проще для исследования.

Учитывая медленность изменения параметра, будем искать приближенное решение уравнения (4) в виде асимптотического разложения

$$y = Ty_0 + y_1 + T^{-1}y_2 + \dots + T^{-(n-1)}y_n + \dots, \quad (5)$$

где малым параметром служит  $\frac{1}{T}$ . Подставляя (5) в (4), получим

$$T^2 y_0'' + 2Ty_0 y_1' + y_1^2 + Ty_0' + y_1' + T^2 \omega_0^2(\tau) + \dots = 0.$$

Разделение слагаемых по порядку малости дает

$$y_0 = \pm i\omega_0(\tau), \quad y_1 = -\frac{y_0'}{2y_0} = -\frac{1}{2}(\ln \omega_0)', \quad i = \sqrt{-1}. \quad (6)$$

Ограничимся двумя первыми членами разложения в (5). Тогда в этом приближении, используя (6), из соотношения (3) находим, что

$$x(\tau) = \exp \left\{ \int_0^\tau (Ty_0 + y_1) d\tau \right\} = A \exp \left\{ -\frac{1}{2} \ln \omega_0(\tau) + iT \int_0^\tau \omega_0(\tau) d\tau \right\} + \text{к.с.},$$

где  $A$  – постоянная величина; к.с. – комплексно-сопряженное слагаемое, соответствующее второму знаку (минус) в  $y_0$ .

Окончательно приближенное решение имеет вид

$$x(\tau) = \frac{A}{\sqrt{\omega_0(\tau)}} e^{i\theta} + \text{к.с.}, \quad (7)$$

где  $\theta = T \int_0^\tau \omega_0(\tau) d\tau$  – полная фаза. Таким образом, решение соответствует осцилляциям с меняющимися амплитудой и частотой. Самый существенный результат состоит в том, что амплитуда этих колебаний убывает или возрастает медленно адиабатически, поскольку медленно меняется  $\omega_0$ . Решение (7) и называется приближением ВКБ. Как уже указывалось, впервые оно было получено при решении уравнения Шредингера для волн, распространяющихся в слабо неоднородной среде.

В период с 1928 по 1932 годы он выполняет большое количество работ по применению квантовой механики к различным задачам, в частности, одну из своих самых известных работ по физике твердого тела – «Свободные электроны в металле и роль брэгговских отражений». Именно в ней введено понятие о так называемых зонах Бриллюэна, важных для теории распространения волн в кристаллах. Бриллюэну принадлежит изложение с квантовых позиций теории парамагнетизма Ланжевена. Совместно с Ф. Блохом он заложил основы зонной теории твердых тел, предсказал независимо от П. Дебая диффузионное рассеяние рентгеновских лучей на колебаниях решетки.

растущей во времени дисперсией. Хотя скорость роста дисперсии не постоянна, в этом случае, как и для винеровского процесса, можно показать, что значения  $\varphi$ , приведенные к интервалу  $[-\pi, +\pi]$ , стремятся к стационарному равномерному распределению. Таким образом, для любого  $a$  можно предположить, что  $p(\varphi|a) = 1/(2\pi)$ ,  $\varphi \in [-\pi, +\pi]$ . Расчеты подтверждают данное предположение.

Для  $p(x, y)$  окончательно имеем

$$p(x, y) = C \exp \left\{ -\frac{1}{16D} (x^2 + y^2 - 4\varepsilon)^2 \right\}, \quad (15)$$

где  $C = N/(2\pi)$ . Для системы (11) имеется единственное инвариантное множество траекторий – вся фазовая плоскость со стационарной плотностью вероятности  $p(x, y)$ .

Исследовав экстремумы выражения (15), легко найти Р-бифуркацию при  $\varepsilon = \varepsilon_P = 0$ . Вид функции  $p(x, 0)$  до и после бифуркации приведен на рис. 3, а.

После бифуркации стационарная плотность вероятности принимает кратеровообразную форму: в начале координат образуется минимум, а максимальное значение  $p(x, y)$  соответствует точкам предельного цикла детерминированной системы (10):  $x^2 + y^2 = 2\varepsilon$ . Таким образом, с Р-бифуркацией при  $\varepsilon = 0$  можно связать начало генерации.

Анализ устойчивости траекторий удобнее провести в полярных координатах, рассмотрев возмущения амплитуды и фазы. Устойчивость решений уравнения для амплитуды характеризуется показателем  $\lambda_1$ , усредненным по распределению  $p(a)$ . Как следует из теоремы для СДУ первого порядка, всегда должно выполняться неравенство  $\lambda_1 < 0$ . Второй показатель Ляпунова  $\lambda_2$  связан с поведением возмущения фазы  $\varphi$  и тождественно равен нулю. Зависимость показателя  $\lambda_1$  от параметра  $\varepsilon$ , рассчитанная по формуле

$$\lambda_1 = \left\langle \frac{\partial \dot{a}}{\partial a} \right\rangle_\mu = \frac{1}{2} \int_0^\infty \left( \varepsilon - \frac{3}{4}a^2 - \frac{D}{a^2} \right) p(a) da$$

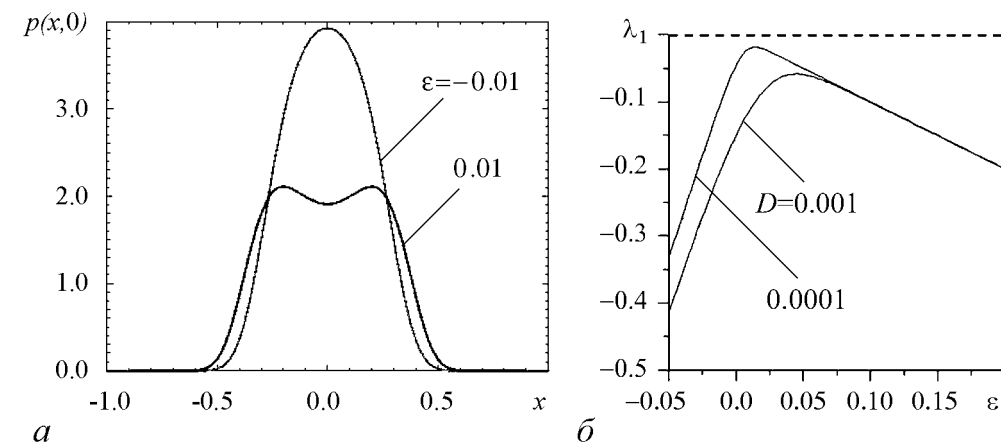


Рис. 3. Суперкритическая бифуркация Андронова–Хопфа при аддитивном шуме: а – перестройка стационарной плотности вероятности в точке Р-бифуркации при интенсивности шума  $D = 0.001$ ; б – зависимости показателя Ляпунова, характеризующего поведение амплитуды, от управляющего параметра для двух уровней шума

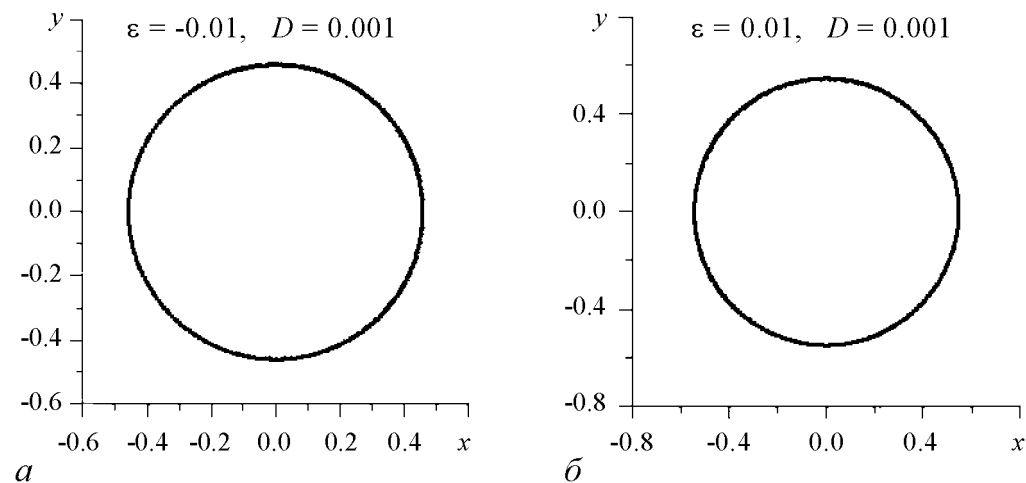


Рис. 4. Случайный аттрактор системы (13) до (а) и после (б) стохастической Р-бифуркации

при двух различных значениях интенсивности шума  $D$ , приведена на рис. 3, б. Таким образом, в системе (13) отсутствует динамическая бифуркация. Случайный аттрактор системы (13) при любых значениях  $\varepsilon$  и  $D$  имеет одну и ту же форму стохастического цикла (рис. 4). Изображающие точки равномерно распределяются на окружности, так как возмущение фазы сохраняется во времени. Здесь надо отметить следующую важную деталь. Расчеты показывают, что при слабом шуме и небольших значениях параметра  $\varepsilon$  укороченная модель (13) находится в очень хорошем количественном соответствии с исходной моделью (11). Однако есть некоторое отличие в характере стохастического аттрактора, связанное с нарушением нейтральной устойчивости траекторий исходной системы вдоль касательного направления в результате действия шума. Возмущение вдоль этого направления соответствует возмущению фазы в (13). Если построить случайный аттрактор для исходной системы (11), то при любом значении параметра все точки на плоскости соберутся в одну точку, вращающуюся вокруг начала координат. Оба показателя Ляпунова системы (11) будут всегда отрицательными, хотя старший из них при слабом шуме близок к нулю.

Сделанный нами вывод об отсутствии D-бифуркации при аддитивном шуме противоречит результатам численных исследований, приведенным в [10]. Затруднительно сказать, связано ли это с использованным нами квазигармоническим приближением или результаты расчетов в [10] ошибочны.

**Мультипликативный шум.** Генератор описывается следующим стохастическим уравнением:

$$\ddot{x} - (\varepsilon - x^2)\dot{x} + x = \sqrt{2D}\dot{x}n(t), \quad (16)$$

где  $n(t)$  – источник нормированного гауссова белого шума,  $D$  – интенсивность шума. Шум в модели (16) представляет собой случайную модуляцию параметра возбуждения  $\varepsilon$ . Используя замену переменных (12) и метод усреднения получаем укороченные уравнения

$$\dot{a} = \left( \frac{\varepsilon}{2} + \frac{D}{4} - \frac{a^2}{8} + \frac{\sqrt{D}}{2}n_1(t) \right) a, \quad \dot{\varphi} = \frac{\sqrt{D}}{2}n_2(t), \quad (17)$$

где  $n_1(t)$  и  $n_2(t)$  – независимые нормированные источники гауссова белого шума. Как следует из (17), амплитуда и фаза для данной модели полностью независимы.

После демобилизации Бриллюэн продолжил работу над докторской, которую защитил в 1920 году. В течение следующих десяти лет (1921–1931) он преподавал радиофизику в Высшей электротехнической школе и теоретическую физику в Институте Анри Пуанкаре (1928–1931) в Сорбонне, совершил первые поездки в Канаду и США в 1924 и 1928 годах.

Преподавательскую деятельность Бриллюэн сочетал с интенсивной исследовательской работой. Основные научные работы Бриллюэна относятся к квантовой механике, радиофизике, физике твердого тела, кибернетике, философским проблемам науки.

В 1922 году Л. Бриллюэн и позднее, но независимо от него, Л.И. Мандельштам предсказали явление рассеяния света в кристаллах, известное в физике как эффект Мандельштама–Бриллюэна (описание эффекта и некоторые подробности его открытия можно найти в книге Трубецкого Д.И. Введение в синергетику. Колебания и волны [10]).

В 1926 году вскоре после опубликования знаменитого уравнения Э. Шредингера для волновой функции Бриллюэн написал статью «Волновая механика Шредингера: общий метод решения с помощью последовательных приближений». Аналогичный метод независимо от него был предложен немецким физиком Г. Вентцелем и усовершенствован голландцем Х. Крамерсом. В русскоязычной литературе его называют методом (приближением) Вентцеля–Крамерса–Бриллюэна (приближение ВКБ). Применение метода ВКБ позволило установить связь между теорией атома Бора–Зоммерфельда и волновой механикой Шредингера для атома водорода.

Напомним, как получается приближение ВКБ, на примере рассмотрения модели осциллятора с медленно меняющейся частотой. Уравнение такого осциллятора имеет вид

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2(t)x = 0. \quad (1)$$

Характерное время  $T$  изменения частоты  $\omega_0$  велико:  $T \gg \frac{2\pi}{\omega_0}$ , что позволяет ввести медленное время  $\tau = \frac{t}{T}$ . Тогда уравнение (1) можно переписать следующим образом:

$$x'' + T^2\omega_0^2(\tau)x = 0 \quad (2)$$

(штрихами здесь и далее обозначено дифференцирование по медленному времени). Сделаем замену переменных

$$x(\tau) = \exp \int_0^\tau y d\tau. \quad (3)$$

С учетом (3)  $x'(\tau) = xy$ ,  $x''(\tau) = xy^2 + xy'$ , поэтому вместо (1) получим уравнение  $x[y^2 + y' + T^2\omega_0^2(\tau)] = 0$ , которое при  $x \neq 0$  совпадает с известным уравнением Риккати

$$y^2 + y' + T^2\omega_0^2(\tau) = 0. \quad (4)$$

в глаза – структура ячеек на поверхности кофе под поднимающимся паром, которые имеют форму неправильных многоугольников поперечным размером от 1 до 3 см и выглядят как пыльные белые пятна, ограниченные черными линиями. Пятнам соответствуют места выхода на поверхность восходящих потоков жидкости, которые затем растекаются по поверхности, немного охлаждаются и вновь погружаются в кофе там, где видны темные линии. Так образуются структуры – ячейки Бенара.

Детальная физика процесса состоит в следующем. Молекулы водяного пара интенсивно поднимаются от поверхности горячего кофе, действуют на слои более холодной атмосферы, непосредственно прилегающие к жидкости, с силой, направленной вверх. Большая часть водяных капель, которые конденсируются в насыщенном влагой воздухе, либо поднимаются в атмосферу, испаряясь в ней, либо опускаются назад, в жидкость. Есть, правда, и такие капельки, которые слишком велики, чтобы подняться в верхние слои воздуха, но и в то же время слишком малы по весу, чтобы преодолеть давление восходящего потока молекул воды, поднимающихся с поверхности горячего кофе. В результате капельки оказываются взвешенными в воздухе над поверхностью горячего кофе, поскольку вес сконденсированных капелек уравнивается силой давления молекул, вылетающих с поверхности кофе. На границах ячеек существует нисходящий поток, и здесь черная поверхность кофе обнажается, поскольку капельки оседают. Пылевидные пятна над восходящими потоками горячего кофе состоят из плотно упакованных маленьких однородных водяных капелек, которые сильно заряжены.

**1879** Статью Дж.П. Рыбака (США) и Л.Н. Крыжановского «Дэвид Эдвард Юз и открытие радиоволн» [7] предваряет эпиграф: «Опыты Юза 1879 года представляли собой открытие герцевых волн до Герца, изобретение когерера до Бранли и изобретение беспроводного телеграфа до Маркони и других» (Газета «Globe» от 12 мая 1899 г.). К числу «других» относится и Александр Степанович Попов, 150 лет со дня рождения которого отмечалось в 2009 году. О А.С. Попове написано много, но для меня самой лучшей остается лекция М.А. Миллера «Об изобретении радио... и не только» (я уже упоминал о ней в одной из статей календаря нелинейных дат), опубликованная в книге М. Миллера «Всякая и не всякая всячина, посвященная собственному 80-летию» [8]. Много написано и о Маркони. О Юзе, с одной стороны, лишь упоминания, с другой – приведенный выше эпиграф. Кто же такой Юз и что он сделал?

Дэвид Эдвард Юз родился 16 мая 1831 года в Лондоне. Когда ему было семь лет, его семья переехала в Соединенные Штаты. В детстве и юности его талант проявился в музыке, а не в науке и технике. В дальнейшем любовь к музыке, по видимому, трансформировалась в любовь к электроакустике и её методам. Юз после окончания колледжа Св. Иосифа в Бардстауне (штат Кентукки) начал свою карьеру в должности преподавателя музыки Академии Роузленда в том же городе. По-счастью через некоторое время он стал интересоваться механическими и электрическими опытами, оборудование для которых проектировал и изготавливал сам.

Вскоре Юз настолько преуспел в науке, что был назначен на кафедру натуральной философии (точных наук), где стал преподавать физику и музыку. Он оставил преподавательскую работу в 1853 году, чтобы сосредоточиться на научно-техническом творчестве, и переехал в Боулинг-Грин (штат Кентукки). На жизнь и на опыты он зарабатывал деньги частными уроками.

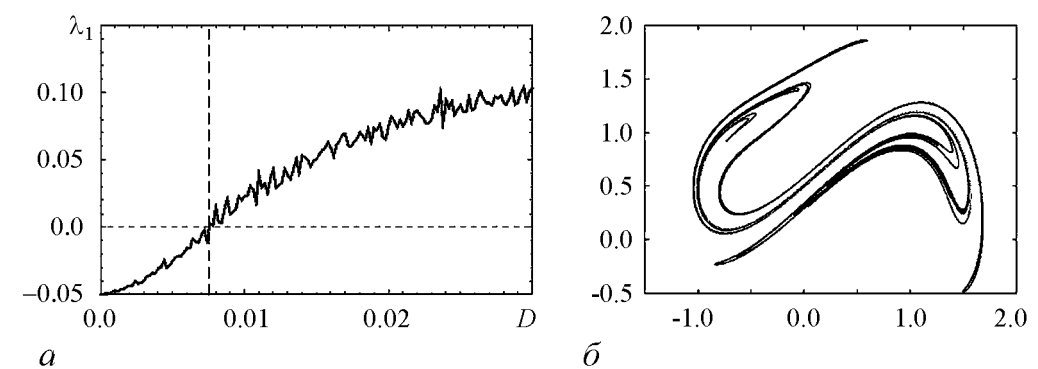


Рис. 6. Индуцированный шумом хаос в осцилляторе Дуффинга (20): *a* – зависимость старшего показателя Ляпунова от интенсивности шума; *б* – случайный аттрактор после D-бифуркации

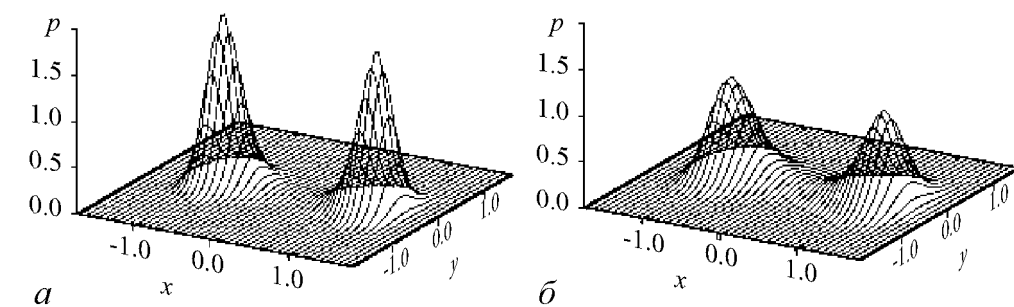


Рис. 7. Стационарная плотность вероятности  $p(x, y)$  до бифуркации при  $D = 0.006$  (*a*) и после бифуркации при  $D = 0.01$  (*б*)

На рис. 7 приведены графики численно полученной стационарной плотности вероятности  $p(x, y)$  до и после бифуркации. Плотность вероятности имеет два максимума, соответствующих устойчивым состояниям равновесия детерминированной системы, и при переходе через точку D-бифуркации качественно не меняется.

Подобным же образом происходит подавление собственной хаотической динамики внешним шумом, характерное для широкого класса хаотических автогенераторов [18, 19].

### Заключение

В заключение подведем некоторые итоги и поставим вопросы, ответ на которые пока не известен. Итак, что же, всё-таки, остается от всего многообразия бифуркаций динамических систем, если учесть присутствие шума? За исключением некоторых случаев мультипликативного шума, когда точка равновесия остается решением стохастического дифференциального уравнения, гауссов шум должен приводить к объединению существующих в детерминированной системе инвариантных множеств и, соответственно, исчезновению динамических бифуркаций. Большинство бифуркаций, даже при мультипликативном шуме, будут проявляться только в перестройках стационарного вероятностного распределения. Их диагностика, особенно для многомерных систем, сильно осложняется.

Определение P-бифуркаций не представляется достаточно строгим и однозначным. Возникает вопрос, правильно ли связывать P-бифуркации только с изменением

числа экстремумов? Дело в том, что при нелинейной замене переменных число экстремумов распределения может измениться. Примером может служить сопоставление плотности вероятности  $p(x, y)$  и плотности вероятности  $p(a)$  для рассмотренных в данной лекции систем (10) и (14). Экстремумы распределения при переходе к полярным координатам исчезают и возникают при других значениях управляющего параметра.

Из всего сказанного следует, что, несмотря на важную роль шума в нелинейных системах, возможности бифуркационного анализа зашумленных систем оказываются весьма ограниченными. Об этом же свидетельствует следующий факт. Такие фундаментальные явления, как эффективная синхронизация шумящего автогенератора [20, 21], стохастический резонанс [22, 23], когерентный резонанс [24, 25] и синхронизация стохастических осцилляторов [26, 27] до настоящего времени не удалось связать с какими-либо стохастическими бифуркациями. Однако не исключено, что дальнейшее исследование перечисленных явлений и развитие теории стохастических бифуркаций приведут к установлению такой взаимосвязи.

*Работа выполнена в рамках АВЦП МО и науки РФ «Развитие научного потенциала высшей школы на 2009-2010 годы» ( гр. № 2.2.2.2/ 229)*

#### Библиографический список

1. Арнольд В.И., Афраймович В.С., Ильясенко Ю.С., Шильников Л.П. Теория бифуркаций // Динамические системы -5. М.: ВИНТИ. 1986. С. 5. (Итоги науки и техн.). (Сов. пробл. мат. Фунд. направл.).
2. Анищенко В.С., Астахов В.В., Вадивасова Т.Е., Нейман А.Б., Стрелкова Г.И., Шиманский-Гайер Л. Нелинейные эффекты в хаотических и стохастических системах. Москва-Ижевск: Институт комп. иссл., 2003.
3. Андронов А.А., Витт А.А., Хайкин С.Э. Теория колебаний. М.: Наука, 1981.
4. Хорстнемке В., Лефевр Р. Индуцированные шумом переходы. М.: Мир, 1987.
5. Arnold L. Random dynamical systems. Chapter 9. Bifurcation theory. Spriger, 2003.
6. Lefever R., Turner J. Sensitivity of a Hopf bifurcation to multiplicative colored noise // Phys. Rev. Lett. 1986. Vol. 56. P. 1631.
7. Franzoni L., Mannella R., McClintock P., Moss F. Postponement of Hopf bifurcations by multiplicative colored noise // Phys. Rev. F. 1987. Vol. 36. P. 834.
8. Sri Namachshivaya N. Stochastic bifurcation// Appl. Math. and Computation. 1990. Vol. 38. P. 101.
9. Arnold L., Sri Namachshivaya N., Schenk-Yoppe' K.R. Toward an understanding of stochastic Hopf bifurcation: a base study // Int. J. Bifurcation and Chaos. 1996. Vol. 6. P. 1947.
10. Schenk-Yoppe' K.R. Bifurcation scenarios of the noisy Duffing-van der Pol oscillator // Nonlinear Dynamics. 1996. Vol. 11. P. 255.
11. Olarrea J., de la Rubia F.J. Stochastic Hopf bifurcation: The effect of colored noise on the bifurcational interval // Phys. Rev. E. 1996. Vol. 53(1). P. 268.
12. Landa P.S., Zaikin A.A. Noise-induced phase transitions in a pendulum with a randomly vibrating suspension axis // Phys. Rev.E. 1996. Vol. 54(4). P. 3535.

заряд  $e$ , массу электрона  $m$ , абсолютную температуру  $\theta$  и газовую постоянную  $k$ . Как подчеркивает П. Бриджмен, – «Число электронов на куб.см не войдет (в решение, – Ред.), так как мы знаем из кинетической теории, что средняя скорость электронов не зависит от их числа. Второе начало термодинамики также показывает, что плотность энергии в полости есть функция температуры, но не плотности электронного газа».

Таким образом, плотность энергии  $U = f(c, m, e, \theta, k)$ , и матрица размерности  $MLT\theta$  имеет вид

	$U$	$c$	$m$	$e$	$\theta$	$k$
$L$	-1	1	0	3/2	0	2
$M$	1	0	1	1/2	0	1
$T$	-2	-1	0	-1	0	-2
$\theta$	0	0	0	0	1	-1

В задаче шесть определяющих величин и четыре основные единицы размерности, поэтому должны быть два критерия подобия:

$$\Pi_1 = \frac{U}{e^{-6}k^4\theta^4}, \quad \Pi_2 = \frac{k\theta}{mc^2},$$

Поэтому результат принимает следующую форму:

$$U = k^4 e^{-6} \theta^4 f(k\theta m^{-1} c^{-2}).$$

Вид функции  $f$ , конечно, не известен. Но величина  $\frac{k\theta}{m}$  есть половина квадрата скорости электрона, поэтому аргумент есть квадрат отношения скорости электрона к скорости света. Далее П. Бриджмен указывает: «В практической области температур это отношение остается чрезвычайно малым и, следовательно, независимо от формы функции нам известно, что перед нами функция весьма малого аргумента. ...Можно утверждать с большей вероятностью, что числовое значение нашей функции практически имеет то же значение, что и для нулевой величины аргумента, то есть функция может быть заменена некоторой постоянной для всей практической области изменения переменных. Поэтому можно ожидать, что результат будет иметь следующую форму:

$$U = \text{const} \cdot k^4 e^{-6} \theta^4.$$

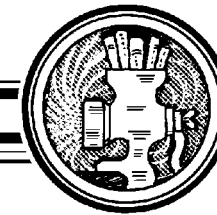
$\theta$  – единственная физическая переменная правой стороны уравнения, поэтому можно написать:

$$U = \alpha \theta^4.$$

Мы, разумеется, узнаем в этой формуле закон Стефана, оправдывающийся на опыте. Поэтому результат до известной степени оправдывает наши упрощения».

Еще одно открытие И. Стефана – так называемые «потoki Стефана», благодаря которым хорошо видны знаменитые ячейки Бенара [5], например, на поверхности горячего кофе [6]. Можно даже считать, что наблюдение ячеек – один из наиболее изящных способов заметить это трудно фиксируемое явление. Что мы увидим, если наполним до краев чашку черным кофе, близким к закипанию, и посмотрим на поверхность, осветив её ярким горизонтальным пучком света? Первое, что бросается





**1789** Эрнст Флоренс Фридрих Хладни (1756–1827) создал свой «эуфон» (в переводе с греческого – благозвучный), а на следующий год уже мог продемонстрировать игру на нем. Конечно, данное изобретение не главное из того, что сделал этот удивительный человек. Подробно его жизнь описана в статье А.И. Еремеевой «Беспокойный гений Эрнста Хладни. К 250-летию со дня рождения» [1]. Во введении к статье есть следующая краткая характеристика деятельности Хладни.

«В истории науки Эрнст Флоренс Фридрих Хладни известен, прежде всего, как основоположник экспериментальной акустики. Но в не меньшей степени он заслуживает имени «отца метеоритики» – по существу, открытой им области естествознания, сформировавшейся на стыке астрономии, физики, химии, минералогии, метеорологии и революционным образом изменившей астрономическую картину мира».

Для нас особенно интересны его исследования продольных колебаний струн, стержней, пластин, камертонов, колоколов и крутильных колебаний стержней. Наиболее известны работы Хладни по изучению колебаний пластин, при которых образуются красивые «акустические фигуры» (фигуры Хладни). Они получались при колебаниях пластины, посыпанной песком. Эти эксперименты поставили новую задачу математической физики – задачу о колебаниях мембраны. Хладни первым весьма точно измерил скорость распространения звука в различных газах и доказал, что в твердых телах звук распространяется с конечной скоростью, а не мгновенно, как тогда считали. Кроме эуфона Хладни изобрел и другие музыкальные инструменты. Он проводил музыкальные выступления, которые дополнял лекциями по акустике и демонстрацией звуковых фигур.

**1799** Родился французский физиолог и физик Жан Леонард Мари Пуазейль (1799–1869). Его работы относятся, главным образом, к изучению течения жидкостей в тонких трубках. Он открыл закон истечения жидкости через тонкую цилиндрическую трубку (закон Пуазейля), который получил широкое применение для определения вязкости и скорости течения в капиллярах. Пуазейль, будучи доктором медицины, впервые в 1828 году применил ртутный манометр для измерения кровяного давления. Он изобрел вискозиметр. Выведем из соображений размерности закон Пуазейля, решая следующую задачу.

*Определить объем вязкой жидкости, проходящей через трубу круглого сечения в единицу времени, считая течение ламинарным.*

Напомним, что динамическую вязкость  $\eta$  применительно к потоку, параллельному неподвижной поверхности, определяют как параллельную поверхности силу, действующую на единицу площади потока, деленную на градиент скорости, который имеет место в направлении, перпендикулярном поверхности; размерность  $\eta$  в системе  $LMT$  равна  $L^{-1}MT^{-1}$ . Коэффициент кинематической вязкости равен  $\eta/\rho$ , где  $\rho$  – плотность жидкости;  $[\eta/\rho] = L^2T^{-1}$ .

Пусть  $r$  – радиус трубы,  $l$  – её длина. Так как течение жидкости поддерживается за счет разности давлений ( $p_1 - p_2$ ) на концах трубы, градиент давления  $\mathcal{P} = \frac{(p_1 - p_2)}{l}$ ;  $[\mathcal{P}] = MT^{-2}L^{-2}$ . Обозначим через  $V$  объемный расход жидкости в единицу времени. Вместо объемного расхода можно определять массовый расход жидкости, однако в этом случае нельзя исключить из числа переменных задачи плотность жидкости. Достаточно ли указанных определяющих величин для решения задачи? Казалось, следовало бы ввести, например, ускорение свободного падения  $g$ .

## ВАКУУМНОЕ РОЖДЕНИЕ ЧАСТИЦ В СИЛЬНЫХ ПОЛЯХ: СТАТИСТИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ

*С.А. Смолянский, Д.Б. Блашке, А.В. Тараканов, С.М. Шмидт*

В настоящем обзоре собраны известные сведения об эволюции сильно неравновесной квазичастичной электрон-позитронной плазмы, генерируемой из вакуума под воздействием сильных нестационарных электромагнитных полей. Методической основой служат квантовые кинетические уравнения немарковского типа, которые являются непerturbативным следствием основных уравнений квантовой электродинамики в бесстолкновительном приближении.

*Ключевые слова:* Вакуумное рождение, электрон-позитронная плазма, кинетическое уравнение, эффект Швингера.

### Введение

Перспективы развития лазерной технологии ставят на повестку дня экспериментальную проверку квантовой электродинамики в сильных полях и, в частности, эффекта Швингера вакуумного рождения электрон-позитронных пар. Этот эффект, первоначально предсказанный в случае постоянных электрических полей [1,3], неоднократно обсуждался для случая интенсивных «лазерных» полей как оптического [4–12], так и рентгеновского диапазонов [13–15]. Стали актуальными перспективные оценки рождения  $\mu$ - и  $\pi$ -мезонов в  $(e^-e^+\gamma)$ -плазме [16].

На современном уровне теоретических исследований обычным является предположение о пространственной однородности электрического поля и игнорировании магнитного поля. Эти условия приближенно выполняются при фокусировке лазерного поля на расстояниях порядка длины волны  $\lambda$ , поскольку процесс вакуумного рождения частиц определяется комптоновской длиной  $\lambda_c \ll \lambda$  (например, [6]). В этом случае один из двух инвариантов электромагнитного поля

$$J_1 = E^2 - H^2 \quad \text{и} \quad J_2 = \vec{E}\vec{H} \quad (1)$$

отличен от нуля,  $J_1 \neq 0$ , что обеспечивает возможность существования эффекта Швингера [3].

Как правило, здесь подразумевается рождение реальных электрон-позитронных пар, которые остаются, например, в фокусном пятне после прохождения лазерного импульса. Оценки показывают [5], что в докритических полях

$$E \lesssim E_{cr} = m^2/|e| \quad (2)$$

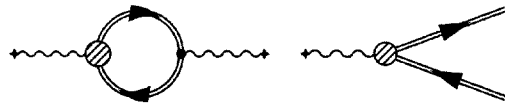


Рис. 1. Диаграммная интерпретация перехода от квазичастичной электрон-позитронной пары при  $E \leq E_{cr}$  (левая диаграмма) к реальной при  $E \geq E_{cr}$  (правая диаграмма)

реальные электрон-позитронные пары практически не генерируются. С другой стороны, эволюцию электромагнитного поля, в том числе достаточно слабого, всегда сопровождает квазичастичная электрон-позитронная плазма (ЭПП). В этом случае, по-видимому, требования  $J_1 \neq 0$ ,  $J_2 \neq 0$  не являются обязательными. Генерация квазичастичной ЭПП достаточно высокой плотности служит предвестником рождения реальной ЭПП. Происходящие при этом процессы иллюстрируют скелетные диаграммы рис. 1: при достижении критического поля начинается диссоциация (правая диаграмма) вакуумных диаграмм во внешнем поле и квазичастичная электрон-позитронная пара трансформируется в реальную. Другими словами, диссоциация вакуумной флуктуации происходит в том случае, когда  $e^-$  и  $e^+$  как квазичастицы приобретают на комптоновской длине  $\lambda_c = 1/m$  критическую энергию, то есть  $|e|E_{cr}\lambda_c \sim 2m$ .

Если для описания рождения реальной ЭПП достаточно S-матричных методов, содержащих адиабатическую гипотезу о выключении внешнего поля при  $t \rightarrow \pm\infty$ , то описание квазичастичной ЭПП эксклюзивно основано на методах кинетической теории. Краткому обзору кинетических методов описания эволюции квазичастичной ЭПП посвящен настоящий обзор. В разделе 1 суммированы известные в настоящее время сведения о кинетике квазичастичной ЭПП, а в разделе 2 – об отклике вакуумной квазичастичной ЭПП на внешнее воздействие. Заключение содержит краткий перечень других направлений исследования вакуумной квазичастичной плазмы.

### 1. Кинетика квазичастичной электрон-позитронной плазмы

Простейшее кинетическое уравнение (КУ) для описания вакуумного рождения и аннигиляции квазичастичной ЭПП (см. левую диаграмму рис. 1) было предложено в работах [17, 18] для квазиклассического внешнего линейно поляризованного поля с векторным потенциалом в гамильтоновой калибровке  $A^H(0, 0, 0, A(t))$  в бесстолкновительном приближении (КУ власовского типа)

$$\dot{f}(\vec{p}, t) = \frac{1}{2}\lambda(\vec{p}, t) \int_{t_0}^t dt' \lambda(\vec{p}, t') [1 - 2f(\vec{p}, t')] \cos \Theta(\vec{p}, t, t'), \quad (3)$$

где  $\lambda$  и  $\Theta$  – амплитуда и набег высокочастотной фазы квантовых осцилляций –

$$\lambda(\vec{p}, t) = \frac{eE(t)\epsilon_{\perp}}{\omega^2(\vec{p}, t)}, \quad (4)$$

$$\Theta(\vec{p}, t, t') = 2 \int_{t'}^t d\tau \omega(\vec{p}, \tau). \quad (5)$$

Здесь  $e$  – заряд электрона со своим знаком,  $E(t) = -\dot{A}(t)$ , а

$$\omega(\vec{p}, t) = \sqrt{\epsilon_{\perp}^2 + P^2}, \quad \epsilon_{\perp}^2 = m^2 + p_{\perp}^2 \quad (6)$$

– полная и «поперечная» энергии, соответственно,  $P = p - eA(t)$ . Периодический множитель в подынтегральном выражении КУ (3) описывает квантовые осцилляции на удвоенной частоте  $\omega(\vec{p}, t)$ , промодулированные внешним полем. Некоторые

Современные астрологи, заполняющие своими прогнозами страницы газет и экраны телевизоров, часто ссылаются на Кеплера-астролога. Однако Кеплер прекрасно понимал, чем он занимается и почему. Ему принадлежат следующие слова: «Лучше издавать альманахи с предсказаниями, чем просить милостыню. Астрология – дочь астрономии, хоть и незаконная, и разве не естественно, чтобы дочь кормила свою мать, которая иначе могла бы умереть с голоду».

**1724** Петр I принял решение о создании в Петербурге Академии наук (Петербургской академии наук).

**1739** Леонард Эйлер дал полную теорию колебаний струны.

**1789** Дж. Пристли доказал, что интенсивность звука зависит от плотности газа, в котором звук распространяется. Напомним, что интенсивностью звука  $I$  называют отношение падающей на поверхность звуковой мощности  $\mathcal{P}$  к площади этой поверхности  $A$ :  $I = \mathcal{P}/A$ . В системе  $LMT$   $[I] = [MT^{-3}]$ . Разумно предположить, что  $I = f(p, \rho, c)$ , где  $p$  – звуковое давление,  $\rho$  – плотность среды,  $c$  – скорость звука в среде. Поскольку  $I = Cp^{\alpha}\rho^{\beta}c^{\gamma}$ , где  $\alpha, \beta, \gamma$  и  $C$  – неизвестные постоянные, матрица размерности в системе  $LMT$  имеет вид

	$I$	$p$	$\rho$	$c$
$L$	0	-1	-3	1
$M$	1	1	1	0
$T$	-3	-2	0	-1

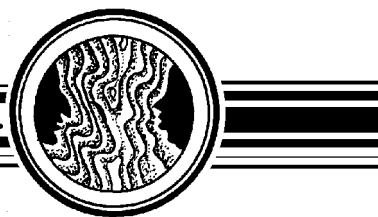
и, следовательно,  $MT^{-3} = M^{\alpha+\beta}T^{-2\alpha-\gamma}L^{-\alpha-3\beta+\gamma}$ , то есть

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 1, \\ 2\alpha + \gamma = 3, \\ \alpha + 3\beta - \gamma = 0, \end{cases} \quad \alpha = 2, \quad \beta = \gamma = -1.$$

Таким образом,  $I = C \frac{p^2}{\rho c}$ . Заметим, что скорость распространения звуковых колебаний в среде зависит также от её плотности. На скорость оказывают влияние плотность среды, объемный модуль упругости  $\mu$  ( $[\mu] = L^{-1}MT^{-2}$ ) для жидкости или давление (размерность та же) в случае газа, то есть  $c = C_1 \rho^{\alpha} \mu^{\beta}$ , где  $C_1 = \text{const}$ . Тогда  $c = C_1 \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}$ .

Любопытно, что по этой формуле Ньютон вычислил скорость звука в воздухе и получил  $281 \text{ м} \cdot \text{с}^{-1}$ . Видно, что величина значительно занижена. Лаплас считал, что причина заключается в неправильном значении, приписанном величине  $\mu$ . Дело в том, что сжатие и разрежение чередуются в звуковых волнах весьма быстро, поэтому изменения давления и объема носят адиабатический, а не изотермический характер. Уточнение Лапласа дало значение для скорости звука в воздухе  $332 \text{ м} \cdot \text{с}^{-1}$ , что близко к экспериментальному значению.

А задумались ли вы, зависит или нет скорость звука от длины волны? Если в определяющие величины предыдущей задачи добавить длину волны  $\lambda$  и заново провести решение, ответ останется прежним, то есть скорость звука не зависит от длины волны. Кстати, если бы было иначе, оркестры не существовали бы.



## ДВЕ ТЫСЯЧИ ДЕВЯТЫЙ ГОД В ДАТАХ НЕЛИНЕЙНОЙ ДИНАМИКИ

*Д.И. Трубецков*

Время – друг великих сочинений  
И смертельный враг плохих.  
Там поймешь, кто гений, кто не гений.  
Где давно не будет нас в живых.

*Александр Кушнер*

Уважаемый читатель! Вашему вниманию предлагается очередная статья из календаря нелинейных дат, который начал отсчет на страницах журнала с 2004 года. Все по-прежнему: тот же эпиграф, тот же стиль изложения (с небольшими вариациями), выбор событий и героев опять же на совести автора. Другие – только герои и события.

**1119** 890 лет назад в Болонье основан университет (первоначально в нем изучалось право), ставший впоследствии образцом при создании университетов в других европейских странах. В 2009 году исполняется еще одна университетская дата, более скромная, но близкая сердцу автора статьи: 100 лет назад был создан Императорский Николаевский Саратовский Университет. В настоящее время Саратовский государственный университет – признанный центр исследований в области нелинейной динамики, что подтверждается, в частности, изданием в нем журнала «Известия высших учебных заведений – Прикладная нелинейная динамика».

**1209** Церковный собор в Париже издал постановление, запрещающее монахам читать естественно-научные сочинения, причисленные к разряду греховных.

Современные представители церкви ведут себя так, что InterAcademy Panel (IAP) обратилась к академиям наук мира с заявлением о преподавании эволюции, которое на 26 мая 2009 года подписали 69 академий, включая РАН. Текст заявления приводится полностью.

### Заявление IAP о преподавании эволюции

«Нижеподписавшимся Академиям Наук стало известно, что в различных местах по всему миру, в ходе преподавания научных курсов в некоторых системах публичного образования скрываются или отрицаются научные свидетельства, данные и экспериментально

включающим в себя внутреннее и внешнее поля и уравнение Максвелла

$$\dot{\vec{E}}(t) = -\vec{j}(t) = -\vec{j}_{\text{cond}} - \vec{j}_{\text{pol}}(t) \quad (14)$$

с регуляризованным внутренним током, состоящим из тока проводимости и поляризованного тока. В квазичастичном представлении эти токи в общем случае пока не были вычислены.

Основные особенности динамики квазичастичной ЭП-плазмы обусловлены существенно нелинейным характером самосогласованной системы уравнений ВР-проблемы. В первую очередь это отражается на нерегулярности динамического поведения системы, что особенно четко проявляется при изучении эволюции функции распределения такой сильно неравновесной плазмы [20, 36–38]. Стохастическое поведение партонной плазмы, генерируемой при столкновении релятивистских тяжелых ионов, возможно, является одним из механизмов стохастичности в физике высоких энергий [39]. В настоящее время отсутствует также теоретическая интерпретация крупномасштабных плазменных осцилляций [36].

КУ (3) и (11) получены непertурбативными методами [17, 27] в рамках квазичастичного представления [26]. В присутствии сильных полей электроны и позитроны как квазичастицы могут значительно отличаться от аналогичных частиц в свободном состоянии за счет вакуумных поляризационных эффектов (см., например, систему ОДУ (7), в которой функции  $u$  и  $v$  описывают вакуумную поляризацию, а также рис. 1 и соответствующее обсуждение). Это приводит к тому, что оказывается сомнительным использование S-матричных методов при модельном конструировании интегралов столкновений [22] или каких-либо элементарных процессов (например, процесса двухфотонной аннигиляции [7]). Эти сомнения имеют различные основания. Например, элементарные флуктуации являются короткоживущими (происходит постоянное мерцание на частоте  $\omega(\vec{p}, t)$  (6)), а функция распределения демонстрирует лишь усредненную характеристику квазичастичной ЭПП. Квантовые вакуумные флуктуации (биения) на частоте (6) представляют собой «среду», в которой реализуются квазичастичные электрон-позитронные возбуждения. Ситуация напоминает возможные возбуждения в достаточно плотной системе появляющихся и исчезающих пузырьков пара на поверхности кипящей жидкости. Удивительно, что энергия этих возбуждений определяется той же формулой (6), что и частота «дыханий» вакуума.

Фермиевские возбуждения квазичастичной ЭПП сопровождаются возбуждениями плазменных осцилляций электромагнитного поля. В настоящее время возбуждения такого типа остаются совершенно не изученными. Некоторые процессы взаимодействия плазменных волн иллюстрируют рис. 3 и 4.

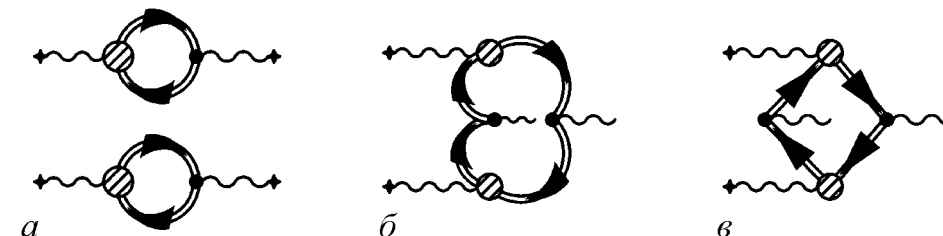


Рис. 3. Флуктуации в квазичастичной ЭПП

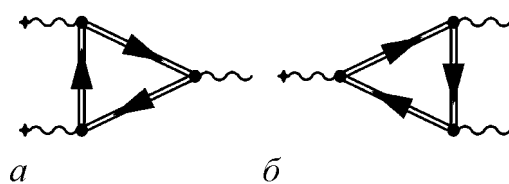


Рис. 4. Трехвершинные процессы в квазичастичной ЭПП

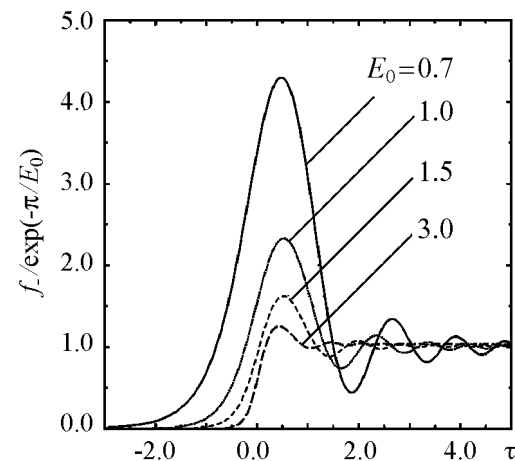


Рис. 5. Зависимость от времени функции распределения, нормированной на «швингеровскую экспоненту», для различных значений поля

получен в квазичастичном представлении интеграл столкновений в скалярной теории с самодействием. Заметим, что система КУ (11) выполняет также важную роль основы для обобщения в сторону взаимодействия с квантованным электромагнитным полем (фотонный сектор квазичастичной ЭПП). Представляется очевидным, что КУ рассматриваемого типа должны описывать не только динамику вакуумного рождения и аннигиляции квазичастичной ЭПП, но и поставлять информацию о реальной ЭПП, остающейся сразу после прохождения импульса электромагнитного поля. Реализовать, однако, эту программу аналитически до настоящего времени не удалось даже в случае хорошо известных решений уравнений Дирака для потенциала Заутера. В случае постоянного поля швингеровский предел хорошо реализуется при численном решении КУ (3) (рис. 5) [19, 36].

## 2. Отклик вакуума

Ниже будет рассмотрен отклик вакуума на периодический сигнал с амплитудой  $E_0$  и частотой  $\nu$  [46]. В методическом отношении мы будем следовать подходу, основанному на кинетической теории (раздел 1) и заимствованному из физики твердого тела (например, [47]), оставляя в стороне альтернативный путь, связанный с определением поляризации вакуума как вариационной производной от плотности тока по полю. При наличии периодического высокочастотного поля в подкритической области теория характеризуется двумя параметрами:  $\xi = E_0/E_{cr} \ll 1$  и

$$\gamma = \frac{m\nu}{eE_0} = \frac{E_{cr}\nu}{E_0m} \quad (15)$$

(параметр адиабатичности [48]).

Например, рис. 4 демонстрирует трехвершинные процессы трансформации плазменных осцилляций  $\gamma^* + \gamma^* \rightarrow \gamma$  (а) и  $\gamma^* \rightarrow \gamma + \gamma$  (б). Первый процесс может обеспечить выход достаточно жестких фотонов. Укажем здесь на аналогию с теорией взаимодействия плазменных волн в газоразрядной плазме [40].

Нужно также учесть, что под влиянием сильных полей квазичастицы плазмы испытывают значительные ускорения, которые могут оказывать существенное влияние на все элементарные процессы [43–45]. Единственным адекватным методом описания подобных процессов в квазичастичной плазме является подход, основанный на КУ (11), включающий в себя в качестве обобщения фотонный сектор, по аналогии с тем, как это делается в «нормальной» квантово-электродинамической [25, 41] или квантово-хромодинамической [42] плазме. Первый шаг в этом направлении был сделан в работе [23], где был

21. Дмитриев А.С., Панас А.И. Динамический хаос. Новые носители информации для систем связи (М: Физматлит, 2002).
22. Короновский А.А., Москаленко О.И., Попов П.В., Храмов А.Е. Способ скрытой передачи информации, основанный на явлении обобщенной синхронизации // Известия РАН. Серия физическая. 2008. Т. 72, № 1. С. 143.
23. Anishchenko V.S., Pavlov A.N. Global reconstruction in application to multichannel communication // Phys. Rev. E. 1998. Vol. 57. P. 2455.

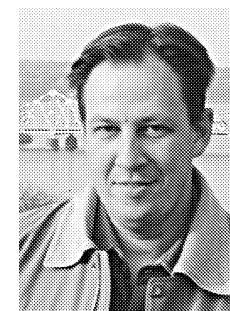
Поступила в редакцию 3.06.2009

## WAVELET-ANALYSIS AND EXAMPLES OF ITS APPLICATIONS

A.N. Pavlov

Theoretical background of the wavelet-analysis and a series of applications of the given method are considered including a study of clustering phenomena for synchronous dynamics in structural units if the kidney, tactile information encoding by neurons of the trigeminal complex and detection of information messages from the chaotic carrying signal.

*Keywords:* Time series analysis, wavelet-transform, nonstationary processes.



Павлов Алексей Николаевич – родился в Саратове (1973). Окончил физический факультет Саратовского университета по специальности радиофизика и электроника (1995). Кандидат физико-математических наук (1998). В настоящее время работает доцентом на кафедре радиофизики и нелинейной динамики. Область научных интересов: анализ временных рядов. Имеет более 80 работ, опубликованных в отечественной и зарубежной печати.

410012 Саратов, ул. Астраханская, 83  
Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского  
E-mail: pavlov\_lesha@mail.ru

Применение вейвлетов представляет собой эффективный способ решения этой проблемы, поскольку вейвлет-анализ позволяет *корректно* проводить дифференцирование сигналов при наличии помех

$$W [\partial_t^m x_1(t)] = (-1)^m \int_{-\infty}^{\infty} x_1(t) \partial_t^m [\psi_{ab}^*(t)] dt. \quad (6)$$

Эта формула означает, что вместо того, чтобы дифференцировать  $m$  раз сигнал  $x_1(t)$ , можно продифференцировать  $m$  раз анализирующий вейвлет. Такая процедура позволяет существенно уменьшить ошибки детектирования, а при использовании дискретных вейвлетов – повысить скорость вычислений, что особенно важно при практической реализации данного метода. Более детальное изложение методики детектирования представлено в статье [17], а на рис. 6 проиллюстрирован один из примеров работоспособности предложенного подхода для случая передачи графической информации. В качестве модели генератора хаотических колебаний была выбрана

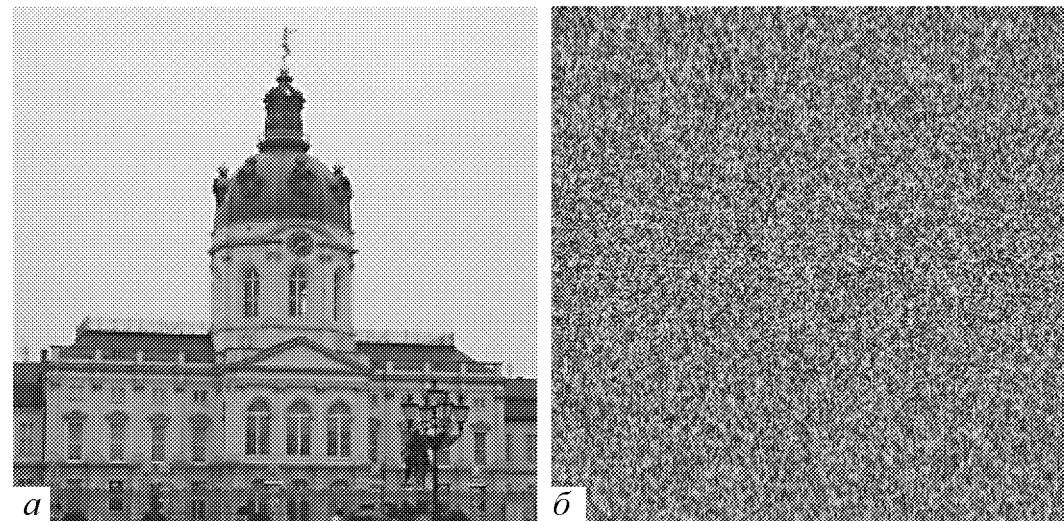


Рис. 6. Передача графической информации. Изображения: *a* – передаваемое, *b* – в канале связи, *в* – восстановленное

процессы остаются непонятными. Интересно также рассмотреть интерпретацию динамического швингеровского эффекта с позиции нестационарной теории туннелирования: по существу, квазичастичная ЭПП эволюционирует за период действия поля во внутрибарьерной области.

#### Библиографический список

1. Sauter F. Über das Verhalten eines electrons im homogenen elektrischen field nach der relativistische theory Dirac // Z. Phys. 1931. Vol. 69. P. 742.
2. Heisenberg W., Euler H. Consequences of Dirac's theory of positrons // Z. Phys. 1936. Vol. 98. P. 714.
3. Schwinger J. On gauge invariance and vacuum polarization // Phys. Rev. 1951. Vol. 82. P. 664.
4. Бункин Ф.В., Тугов И.И. О возможности рождения электронно-позитронных пар в вакууме при фокусировке лазерного излучения // ДАН СССР. 1969. Т. 187. С. 541.
5. Brezin E., Itzykson C. Pair production in vacuum by an alternating field // Phys. Rev. 1970. Vol. D2. P. 1191.
6. Понов В.С. Рождение пар в переменном и однородном электрическом поле как задача об осцилляторе // ЖЭТФ. 1972. Т. 62. С. 1248.
7. Blaschke D.B., Prozorkevich A.V., Smolyansky S.A., Roberts C.D., Schmidt S.M. Pair production and optical laser // Phys. Rev. Lett. 2006. Vol. 96. P. 140402.
8. Bulanov S.S., Narozhny N.B., Mur V.D., Popov V.S. On  $e^+e^-$  pair production by a focused laser pulse in vacuum // arXiv: hep-ph/0403163 (2004).
9. Bulanov S.S., Fedotov A.M., Pegoraro F. Damping of electromagnetic waves due to electron-positron pair production // arXiv: hep-ph/0409301 (2004).
10. Bulanov S.S. Pair production by a circular polarized electromagnetic wave in plasma // arXiv: hep-ph/0307296 (2003).
11. Avetissian H.K., Avetissian A.K., Bagdasarian A.Kh., Sedrakian Kh.V. Nonlinear  $e^+e^-$  pair production in a plasma by a strong electromagnetic wave // Phys. Rev. 1996. Vol. D54. P. 5509.
12. Avetissian H.K., Avetissian A.K., Mkrтчian G.F., Sedrakian Kh.V. Electron-positron pair production in the field of superstrong oppositely directed laser beams // Phys. Rev. 2002. Vol. E66. P. 016502.
13. Ringwald A. Pair production from vacuum at the focus of an X-ray free electron laser // Phys. Lett. 2001. Vol. B510. P. 107.
14. Alkofer R., Hecht M.B., Roberts C.D., Schmidt S.M., Vinnik D.V. Pair creation and X-ray free electron laser // Phys. Rev. D. 2001. Vol. 87. P. 193902.
15. Roberts C.D., Schmidt S.M., Vinnik D.V. Quantum effects with an X-ray free electron laser // Phys. Rev. 2002. Vol. D89. P. 153901.
16. Kuznetsova I., Habs D. and Rafelsky J. Pion and muon production in  $e^-, e^+, \gamma$  plasma // arXiv: hep-ph/0803.1588 (2008).
17. Schmidt S.M., Blaschke D.B., Röpke G., Smolyansky S.A., Prozorkevich A.V. A quantum kinetic equation for particle production in the Schwinger mechanism // Int. J. Mod. Phys. 1998. Vol. 7. P. 709.

18. Kluger Y., Mottola E., Eisenberg J.M. The quantum Vlasov equation and its Markov limit // Phys. Rev. 1998. Vol. D58. P. 125015.
19. Schmidt S.M., Blaschke D.B., Röpke G., Prozorkevich A.V., Smolyansky S.A., Toneev V.D. Non-Markovian effects in strong field pair creation // Phys. Rev. 1999. Vol. D59. P. 094005.
20. Винник Д.В., Мизерный В.А., Prozorkevich A.B., Смолянский С.А., Toneev В.Д. Кинетическое описание вакуумного рождения частиц при столкновениях релятивистских ядер. Препринт ОИЯИ: P2-2000-85.
21. Смолянский С.А., Prozorkevich A.B., Тараканов А.В. Исследование кинетических уравнений в теории вакуумного рождения частиц в сильных полях // Прикладная Физика. 2004. Вып. 11. С. 124.
22. Скоков В.В., Винник Д.В., Смолянский С.А., Toneev В.Д. Релаксационные процессы в релятивистской плазме, рожденной из вакуума сильным полем. Препринт ОИЯИ: P2-2002-215.
23. Smolyansky S.A., Reichel A.V., Vinnik D.V., Schmidt S.M. Collision integrals in the kinetics of vacuum creation in strong fields // In: Progress in nonequilibrium Green's function II. / Editors Bonitz M. and Semkat D. Dresden, Germany. World Sc., N.-Jersey–London–Singapour–Hong Kong, 2003. P. 384.
24. Tarakanov A.V., Reichel A.V., Smolyansky S.A., Vinnik D.V., Schmidt S.M. Kinetics of vacuum pair creation in strong electromagnetic fields // Ibid. P. 393.
25. Bialynicki-Birula I., Gornicki P., Rafelsky J. Phase space structure of the Dirac vacuum // Phys. Rev. 1991. Vol. 44, P. 1825.
26. Гриб А.А., Мамаев С.Г., Мостепаненко В.М. Вакуумные квантовые эффекты в сильных полях. М.: Энергоиздат. 1988.
27. Pervushin V.N., Skokov V.V., Reichel A.V., Smolyansky S.A., Prozorkevich A.V. The kinetic description of vacuum particle creation in the oscillator representation // Int. J. Mod. Phys. A. 2005. Vol. 20. P. 5689.
28. Filatov A.V., Prozorkevich A.V., Smolyansky S.A. Pair creation by electromagnetic wave in a self-created plasma // Proc. of SPIE. 2006. Vol. 6165. P.616509.
29. Filatov A.V., Smolyansky S.A., Tarakanov A.V. Kinetics of parton–antiparton plasma vacuum creation in the time-dependent chromo-electric fields of arbitrary polarization. 2008. Report on the XIX Int. Baldin Sem. on High Energy Phys. Problems «Relativistic Nuc. Phys. and Quantum Chromodynamics». Dubna, Sept. 29 Oct. 4; arXiv:0901.0522.
30. Блашке Д.В., Дмитриев В.В., Смолянский С.А., Тараканов А.В. Кинетика вакуумного рождения электрон-позитронных пар в сильных электромагнитных полях произвольной поляризации // Доклад на школе-семинаре «Волны–2009», 25–29 мая 2009. М: МГУ.
31. Pervushin V.N., Skokov V.V. Kinetic description of fermion production in the oscillator representation // Acta. Phys. Polonica. 2006. Vol. B37. P. 2587.
32. Bulanov S.S., Fedotov A.M., Pegoraro F. Nonlinear evolution of a relativistic strong electromagnetic wave in the self-created electron-positron plasma // Письма в ЖЭТФ. 2004. Т. 80. С. 865.
33. Bulanov S.S. Pair production by a circularly polarized electromagnetic wave in plasma // arXiv: hep-ph/0307296.

ровали полосовую фильтрацию, около 30% – пропускание низких частот и 10% – отсутствие выраженных частотных характеристик. Для Sp05 нейронов было получено несколько другое процентное соотношение: 53%, 35% и 12%. При полосовой фильтрации «оптимальное» значение частоты было примерно 5 Гц для нейронов ядер Pr5 и Sp15, и около 4 Гц для нервных клеток ядра Sp05. Обнаруженные частотные характеристики совпадают с диапазоном частот колебаний усов при активном эксплоративном ощупывании 4–12 Гц. Эти результаты подкрепляются данными, полученными на основе измерения амплитуды усредненного нейронного отклика в сомато-сенсорной коре SI, в которых были обнаружены сходные фильтрационные свойства [16]. Таким образом, можно предположить, что часть фильтрационных характеристик, проявляющихся в отклике нейронов сомато-сенсорной коры, являются индуцированными аналогичным откликом нейронов тройничного нерва.

**2.3. Детектирование информационных сообщений из хаотического несущего сигнала.** В качестве одной из иллюстраций других применений вейвлет-анализа рассмотрим задачу о детектировании информационных сигналов из хаотического несущего. Эта проблема обсуждалась в предыдущей статье [17], поэтому кратко отметим лишь основную идеологию предложенного метода. В целом, проблема защиты информации, передаваемой в хаотическом несущем сигнале, активно обсуждается с начала 1990-х годов. Так, в работах [18, 19] были рассмотрены два способа выделения информационного сигнала из хаотического несущего, основанные на использовании идентичных генераторов хаоса в передающем и приемном устройствах: аддитивное добавление информационного сообщения к несущему сигналу и модуляция параметров генератора хаоса. В ходе дальнейших исследований были разработаны системы многоканальной связи с высокой степенью защиты информации от несанкционированного доступа [20], а также предложен ряд более «практичных» способов защищенной передачи информации [21, 22].

Несколько лет назад в работе [23] были представлены теоретические основы альтернативного способа детектирования информационных сигналов из хаотического несущего, который предусматривал решение задачи реконструкции динамических систем. Основная идея метода состояла в следующем. Предположим, что математическую модель генератора хаотических колебаний

$$\dot{\vec{x}} = \vec{F}(\vec{x}, \vec{\mu}), \quad \vec{x} \in R^n, \quad \vec{\mu} \in R^k \quad (4)$$

путем замен переменных можно свести к виду

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = x_3, \dots, \quad \dot{x}_n = f(x_1, x_2, \dots, x_n, \vec{\mu}). \quad (5)$$

В этом случае по короткому участку несущего сигнала  $x_1(t)$  методом наименьших квадратов можно определить текущие значения вектора параметров  $\vec{\mu}$ . Если осуществить модуляцию параметров информационными сообщениями, то это позволит решить задачу детектирования этих сообщений. Главная техническая сложность состоит в численном дифференцировании несущего сигнала  $x_1(t)$ , который является зашумленным.



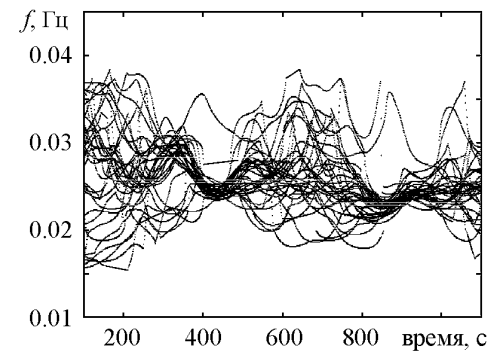


Рис. 1. Образование кластеров синхронной динамики нефронов, расположенных на поверхности почки. Соответствующие кластеры четко видны в окрестности 400 с и 900 с. Данный рисунок иллюстрирует также, что появление кластеров и их разрушение происходят с определенной периодичностью

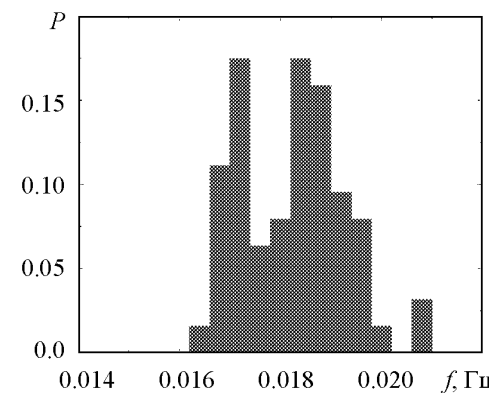


Рис. 2. Распределение частоты ритма КГОС для 63 нефронов на поверхности почки

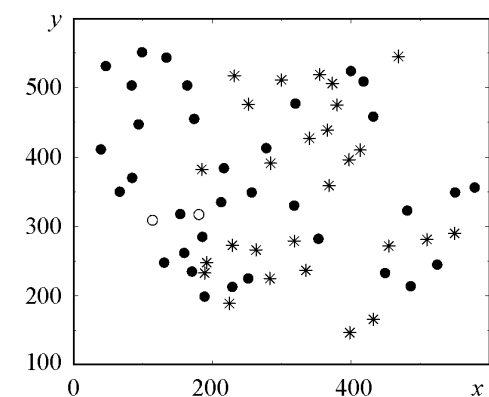
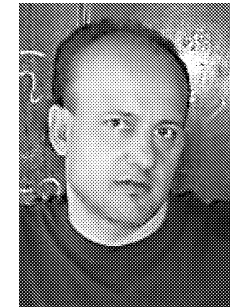


Рис. 3. Расположение синхронных кластеров на поверхности почки. По осям отложены координаты в пикселях (выделенная область соответствует, примерно, 2/3 верхней поверхности почки). Разные кластеры показаны различными символами

эффект образования кластера, после чего поведение отдельных нефронов снова становится несинхронным, а затем начинается очередная подстройка ритмов колебаний.

Чтобы определить, какое количество кластеров целесообразно рассматривать в том или ином эксперименте, необходимо провести предварительный анализ путем построения распределения (или гистограммы) средних значений частоты ритма КГОС для анализируемых нефронов. Такое распределение приведено на рис. 2. В данном случае можно выделить три кластера: два больших и один маленький (из двух отдаленных по частоте нефронов). Зная координаты нефронов на поверхности почки (идентифицируемые по фотографии, сделанной с помощью микроскопа), можно проанализировать расположение нефронов, относящихся к одному кластеру. Как следует из рис. 3, нефроны одного и того же кластера рассредоточены по всей поверхности, то есть кластеризация осуществляется не только для близлежащих нефронов, но и для отдаленных. Важно отметить, что в формировании одного кластера участвует большое количество нефронов (несколько десятков). Такой эффект до сих пор был неизвестен – считалось, что подстройка ритмов колебаний возможна лишь для соседних элементов, расположенных на одном «нефронном дереве». Обнаруженная синхронизация частот больших ансамблей нефронов свидетельствует о существовании механизмов взаимодействия между разными «деревьями». Кроме того, существуют основания предполагать, что формирование кластеров синхронной динамики существенно отличается в норме и при гипертонии [12].



*Тараканов Александр Викторович* – родился в 1961 году. Окончил Саратовский госуниверситет (1985). Защитил кандидатскую диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук в области ядерных реакций при низких энергиях (1992). Доцент кафедры теоретической и математической физики СГУ. Автор более 30 работ в области теоретической физики.  
410012 Саратов, ул. Астраханская, 83  
Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского  
E-mail: tarakanovav@sgu.ru



*Шмидт Себастьян* – родился в 1967 году. Окончил Ростокский университет (Германия, 1991). В настоящее время является членом совета директоров исследовательского центра в Юлихе (Германия), а также профессором технического университета в Дортмунде. Автор более 50 работ по квантовой теории поля и физике высоких энергий.  
Forschungszentrum Jülich GmbH, D-52425 Jülich, Germany  
Technische Universität Dortmund, Fakultät für Physik,  
Otto-Hahn-Str. 4, D-44221 Dortmund, Germany  
E-mail: s.schmidt@fz-juelich.de



## ПРОДОЛЬНАЯ КОГЕРЕНТНОСТЬ ОПТИЧЕСКОГО ПОЛЯ

*В.П. Рябухо, Д.В. Лякин, В.В. Лычагов*

Рассматривается пространственная когерентность оптического поля в направлении его распространения в зависимости от параметров его частотного и углового спектров. Получены выражения для функции и длины продольной когерентности в зависимости от ширины частотного и углового спектров. Обсуждается конкурирующее влияние углового и частотного спектров поля на его продольную когерентность. Выполнены эксперименты с использованием интерферометра Майкельсона продольного сдвига, подтверждающие теоретические результаты.

*Ключевые слова:* оптическая когерентность, длина когерентности, функция когерентности, интерференция, интерферометр Майкельсона.

### Введение

Временные корреляции случайных волновых полей в оптике описываются в терминах давно сложившихся понятий когерентности колебаний, возбуждаемых волной в различных точках пространства [1–6]. Соответствующие корреляционные функции поля в оптике называют функциями когерентности. Корреляционные свойства случайных волновых полей наиболее ярко проявляются при их распространении, интерференции, дифракции и в поляризационных эффектах.

Когерентность стационарного оптического поля, случайного по своей природе, определяется и частотным, и угловым спектрами поля [1–6]. В общем случае для описания когерентных свойств бегущего оптического поля рассматривается пространственно-временная функция когерентности поля [2, 4, 5]. Однако наиболее часто рассматриваются отдельно пространственная поперечная и временная когерентность, что во многом обусловлено соответствующими интерференционными экспериментами, в которых наблюдаются проявления этих типов когерентности [1, 2, 6]. В продольном направлении – в направлении распространения поля, как это принято считать, когерентные свойства поля определяются его частотным спектром. Функция продольной пространственной когерентности  $\Gamma(\Delta z)$  отождествляется с функцией временной когерентности  $\Gamma(\Delta t = \Delta z/c)$  и полагается, что длина продольной когерентности  $L_c$  равна длине временной когерентности  $l_c$ , которая обратно пропорциональна ширине  $\Delta\omega$  частотного спектра;  $l_c \approx 2\pi c/\Delta\omega$ , где  $c$  – скорость света. Это справедливо для направленного пучка света – для поля с относительно широким частотным спектром  $G(\omega)$  и достаточно узким угловым спектром  $I(\alpha)$ .

наглядный способ анализа нестационарной многочастотной динамики, обеспечивающий возможность отслеживать временную эволюцию каждого ритма колебаний, представляющего интерес для исследователя. Поскольку каждая точка хребта ассоциируется с локальным энергетическим спектром, нахождение мгновенных частот колебательных процессов одновременно обеспечивает и определение мгновенных амплитуд этих процессов. Именно этот вариант анализа и будет использоваться далее в исследованиях сложной динамики биологических систем.

## 2. Примеры применения

**2.1. Синхронизация колебаний в динамике больших ансамблей структурных элементов почки.** Динамика нефронов (структурных элементов почки) включает два механизма авторегуляции кровотока: канальцево-гломерулярную обратную связь (КГОС), которая регулирует входящий поток крови в зависимости от концентрации NaCl в фильтрате, проходящем по канальцам нефрона, и миогенный механизм, приводящий к активации гладких мышечных клеток стенок сосудов (артериол) при изменении давления крови, протекающей по ним. Первый механизм является основным, он вызывает незатухающие колебания величины давления фильтрата с периодом примерно 30–40 с. В ходе экспериментальных исследований [10] было установлено, что при нормальном артериальном давлении эти колебания являются почти периодическими, а при гипертонии они становятся сильно нерегулярными, демонстрируя типичные характеристики динамического хаоса. Второй механизм связан с синхронизацией межклеточной динамики кальция в отдельных клетках, которая приводит к колебаниям радиуса артериол с периодом 5–10 с (но со сравнительно малой амплитудой). Оба механизма взаимодействуют между собой, и активация одного из них модифицирует отклик другого.

Кроме взаимодействия ритмов на уровне отдельного нефрона, наблюдается взаимодействие и между разными структурными элементами почки [11, 12]. Однако до настоящего времени экспериментальные исследования ограничивались рассмотрением коллективной динамики малых групп нефронов (2–3 элемента). Чтобы проанализировать коллективную динамику больших ансамблей, была осуществлена серия экспериментов на крысах, в рамках которых проводилась регистрация динамики структурных элементов на поверхности. С помощью инфракрасной камеры записывалась величина потока крови в артериолах (в течение 30 минут). В результате получалась видеозапись динамики значительной части верхней поверхности почки (около 2/3). С помощью микроскопа одновременно фиксировалось расположение нефронов, что позволило извлекать из видео-файла временную динамику именно в тех точках, где располагались структурные элементы почки. В результате такой довольно сложной процедуры идентифицировались сигналы больших групп нефронов (50–100 штук в зависимости от эксперимента). Эксперименты проводились на нормотензивных крысах в университете Копенгагена (институт Панум), данные были предоставлены профессорами N.-H. Holstein-Rathlou и D.J. Marsh.

С помощью вейвлет-анализа изучалась временная динамика мгновенных частот ритмов колебаний, обусловленных механизмом КГОС, и коллективное поведение ансамблей нефронов. Как видно из рис. 1, с течением времени происходит



классических методов цифровой обработки данных применимы лишь к процессам с постоянными во времени (или пространстве) характеристиками.

По аналогии с преобразованием Фурье вейвлет-преобразование сигнала  $x(t)$  состоит в его разложении по некоторому базису. Отличие заключается в том, что в качестве базисной выбирается «солитоноподобная», хорошо локализованная и по времени, и по частоте функция  $\psi(t)$ , обладающая рядом характерных признаков; базис формируется путем ее перемасштабирования и сдвигов вдоль временной оси. Использование локализованных функций позволяет проводить анализ процессов, характеристики которых меняются во времени, и обеспечивает двумерную развертку сигнала  $x(t)$ , при которой время и частота воспринимаются как независимые переменные [5].

Само возникновение теории вейвлетов не является неожиданным событием и связано с реальными потребностями экспериментальных исследований. В его современном виде вейвлет-анализ в значительной степени представляет собой синтез многих существовавших ранее идей и методов. Так, быстрые алгоритмы вейвлет-преобразования используют известную в радиофизике и радиотехнике идеологию субполосного кодирования [9]. Часть идей была заимствована из физики (когерентные состояния [2]) и математики (например, изучение интегральных операторов Зигмунда–Кальдерона [3], которые сейчас используются при вейвлет-анализе операторных выражений, помогающем решать некоторые уравнения в физике).

В данной статье будут рассмотрены несколько примеров применения вейвлет-анализа, включая динамику биологических систем (синхронизация ансамблей нефронов почки, кодирование информации нейронами) и детектирование информационных сообщений в системе защищенной передачи информации.

## 1. Теоретические основы вейвлет-анализа

Существует дискретное вейвлет-преобразование (ДВП) и непрерывное вейвлет-преобразование (НВП), которые можно рассматривать фактически как разные методы анализа структуры сигналов. Непрерывное вейвлет-преобразование использует в качестве  $\psi(t)$  функции, имеющие аналитическую форму записи и являющиеся бесконечно дифференцируемыми. Вследствие этого для них характерен экспоненциальный спад на бесконечности, и базис, построенный на основе таких вейвлетов, не является строго ортонормированным. Данная особенность означает, что НВП является избыточным, и значения коэффициентов вейвлет-преобразования оказываются сильно коррелированными. Однако избыточность может быть и полезным свойством, позволяющим получать более наглядную и ясную интерпретацию результатов анализа структуры сигналов в виде картин «скелетон» или «хребтов» поверхности вейвлет-коэффициентов [6]. Информацию, которую можно извлечь из непрерывного вейвлет-преобразования, например, об изменении характерных частот ритмических процессов и их взаимодействии, легче анализировать, и она интуитивно понятнее для специалистов с базовым радиофизическим образованием. Например, при использовании комплексных функций  $\psi(t)$  НВП позволяет изучать динамику таких характеристик, как мгновенные частоты, мгновенные амплитуды и мгновенные фазы ритмических процессов, идентифицируемых в структуре анализируемого сигнала.

Влияние множителя  $\cos^2(\theta/2)$  во втором слагаемом (8) становится заметным только при очень широком частотном спектре, когда  $\Delta\omega \approx \omega_0$ . В остальных случаях при малых  $\theta$  можно считать  $\cos^2(\theta/2) \approx 1$ , а при средних и больших углах  $\theta$  имеет место преобладающее влияние первого слагаемого в (8). Поэтому множитель  $\cos^2(\theta/2)$  в (8) можно опустить и это уравнение записать в более наглядном и запоминающемся виде

$$\frac{1}{L_c} \approx \frac{1}{\rho_{||}} + \frac{1}{l_c}, \quad (9)$$

где  $l_c \approx \lambda_0^2/\Delta\lambda$  – длина временной когерентности;

$$\rho_{||} = \frac{\lambda_0}{2 \sin^2(\theta/2)} \quad (10)$$

– длина когерентности, определяемая шириной углового спектра поля при достаточно узком частотном спектре.

Если  $l_c \gg \rho_{||}$ , то, как следует из (9),  $L_c \approx \rho_{||}$  – длина когерентности определяется преимущественно угловым спектром поля. И наоборот, если  $l_c \ll \rho_{||}$ , то  $L_c$  определяется преимущественно частотным спектром поля,  $L_c \approx l_c$ . В диапазоне сравнимых величин  $l_c$  и  $\rho_{||}$  длина когерентности  $L_c$  определяется и угловым, и частотным спектрами поля и существенно отличается от  $l_c$  и  $\rho_{||}$  – при  $l_c \approx \rho_{||}$  величина  $L_c \approx l_c/2$ .

На рис. 3 представлены полученные с помощью (9) и (10) зависимости

$L_c(z)$  и  $\rho_{||}(z)$  ( $z$  – расстояние от источника) при использовании соотношения  $\theta(z) = \arctg(D/2z)$ , где  $D$  – диаметр источника. Отметим, для  $l_c$  и, соответственно, для  $L_c(z)$  мы не учитываем эффект дифракционного изменения ширины частотного спектра – эффект Вольфа [18, 19]. Графики показывают заметное отличие  $L_c$  от  $l_c$  и  $\rho_{||}$  в области сравнимых значений  $l_c$  и  $\rho_{||}$ . Эти различия должны заметным образом проявляться в интерференционном эксперименте.

График  $L_c(z)$  показывает эволюцию длины когерентности поля в процессе его распространения от источника. Ширина углового спектра поля  $\theta$  протяженного пространственно некогерентного источника света (например, теплового) изменяется в широких пределах в пространстве распространения этого поля от источника до дальней области дифракции. Около источника поле имеет предельно широкий угловой спектр  $\theta \approx \pi/2$ . В этом случае, согласно (9) и (10),  $L_c \approx \lambda_0/2$ , что вполне согласуется с физическими представлениями, поскольку это значение совпадает с периодом стоячей волны, образующейся при сложении встречных волн, которые имеют место при таком широком угловом спектре поля. При удалении от источника ширина углового спектра уменьшается и становится пренебрежимо малой в дальней области дифракции. При относительно узком частотном спектре  $G(\omega)$  можно считать, что в пространстве вблизи источника длина продольной когерентности поля определяется шириной углового спектра, который оказывает преимущественное влияние на

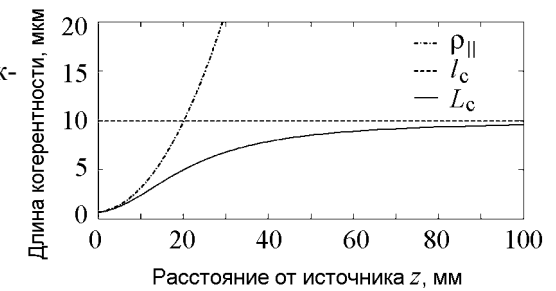
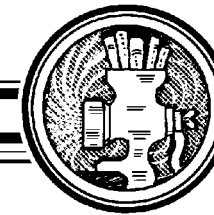


Рис. 3. Длина продольной когерентности  $L_c$  в зависимости от расстояния  $z$  от некогерентного источника диаметром  $D = 15$  мм при постоянной ширине  $\Delta\lambda = 0.04$  мкм частотного спектра поля и  $\lambda_0 = 0.63$  мкм



## ВЕЙВЛЕТ-АНАЛИЗ И ПРИМЕРЫ ЕГО ПРИМЕНЕНИЯ

А.Н. Павлов

Рассматриваются теоретические основы вейвлет-анализа и ряд примеров применения данного метода, включая исследование эффектов формирования кластеров синхронной динамики структурных элементов почки, кодирование тактильной информации нейронами тройничного нерва и детектирование информационных сообщений из хаотического несущего сигнала.

*Ключевые слова:* Анализ временных рядов, вейвлет-преобразование, нестационарные процессы.

### Введение

Терминология «вейвлетов» (от англ. *wavelet*, что в дословном переводе означает «маленькая волна») сформировалась в восьмидесятых годах двадцатого века [1]. Первоначально данный математический аппарат [2–7] был предложен в качестве альтернативы классическому спектральному анализу, основанному на преобразовании Фурье. Возникновение теории вейвлетов считается одним из важнейших событий в математике за последние десятилетия, поскольку это, пожалуй, единственная новая математическая концепция, которая сразу же после ее появления стала восприниматься в качестве инструмента *прикладных* исследований практически во всех естественных науках и многих областях техники. В настоящее время вейвлеты широко используются при решении задач анализа и синтеза различных сигналов, для обработки изображений, для сжатия больших объемов информации и цифровой фильтрации, для распознавания образов, при изучении сильно развитой турбулентности, при решении некоторых дифференциальных уравнений. Причем, этот список можно еще долго продолжать.

Интерес к новому направлению с момента его появления был очень большим. Согласно исследованиям, предпринятым в монографии [8], начиная с 1990-х годов количество научных работ по изучению физических явлений с помощью вейвлетов демонстрирует монотонный рост. Число ссылок на источники в сети Интернет, в которых упоминается термин «вейвлет», уже достигло нескольких миллионов. Основной областью применения данного математического аппарата в естествознании является обработка нестационарных (во времени) или неоднородных (в пространстве) случайных процессов. Именно поэтому вейвлет-анализ представляет значительный интерес в задачах исследования структуры сигналов, так как большинство

продольную когерентность,  $\rho_{||} \ll l_c$  и поэтому  $L_c \approx \rho_{||}$ . Вдали от источника, вследствие уменьшения ширины углового спектра  $\theta$ , там, где  $\rho_{||}$  становится существенно больше  $l_c$ ,  $\rho_{||} \gg l_c$  или, что эквивалентно,  $\theta \ll \sqrt{2\Delta\lambda/\lambda_0}$ , длина продольной когерентности определяется уже шириной частотного спектра  $L_c \approx l_c$ , влияние которого в дальней области дифракции становится доминирующим. В некоторой промежуточной области пространства имеет место переходный процесс, в котором проявляется приблизительно равное влияние и углового, и частотного спектров поля на его продольную длину когерентности  $L_c$ . Равное и совместное влияние спектров можно расценивать как удвоенное влияние. Следовательно, длина продольной когерентности  $L_c$  в этой области примерно в два раза меньше длины временной когерентности  $l_c$  и длины когерентности  $\rho_{||}$ ,  $L_c \approx l_c/2 \approx \rho_{||}/2$ .

С продольной когерентностью поля и, соответственно, с длиной продольной когерентности связано представление о волновом цуге и его длине [1, 2]. На рис. 4 схематически представлено изменение длины волнового цуга в процессе его распространения от источника в дальнюю область дифракции. Вблизи источника, где  $\rho_{||} \ll l_c$ , волновой цуг имеет длину  $\rho_{||}$ , определяемую шириной углового спектра  $\theta$ . В этой области волновой цуг в процессе своего распространения постоянно испытывает амплитудно-фазовые декорреляционные изменения, обусловленные влиянием некоррелированных различных угловых компонент поля. Фактически, волновой цуг в процессе распространения не сохраняется. Длина когерентности  $\rho_{||}$  в этом случае определяет длину коррелированного пробега волнового возмущения.

В пространстве, где  $\rho_{||} \gg l_c$ , волновой цуг имеет длину  $l_c$  и в процессе распространения претерпевает медленные амплитудно-фазовые декорреляционные изменения. Длина такого коррелированного пробега цуга равна длине когерентности  $\rho_{||}$ , определяемой шириной углового спектра поля в этом пространстве. В дальней области пространства, где  $\theta \approx 0$ , волновой цуг распространяется без декорреляционных изменений.

Для определения декорреляции волнового цуга в процессе его распространения необходимо использовать специальную функцию продольной пространственно-временной когерентности  $\Gamma(z, \Delta z, \Delta t = \Delta z/c)$ , определяющую корреляцию возмущений в двух точках пространства вдоль направления распространения возмущения при взаимной временной задержке возмущений  $\Delta t$ , равной времени распространения возмущения из одной точки в другую. Эта функция в [14, 15] названа функцией продольной чисто пространственной когерентности, поскольку она определяется только угловым спектром волнового поля.

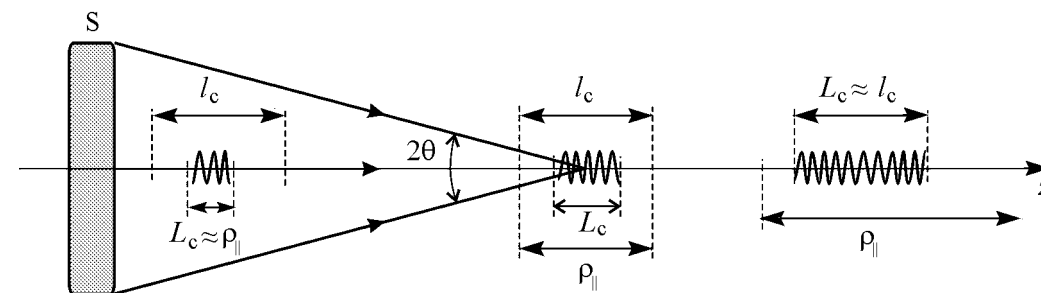


Рис. 4. Изменение длины волнового цуга в процессе его распространения в поле излучения пространственно некогерентного источника

пагатора. Хотя для реконструкции использовалось лишь 38% показателей  $h(x)$ , она визуально мало отличается от оригинала.

В заключение отметим, что описанные методы имеют чрезвычайно широкий круг применений. Действительно, современные экспериментальные данные большей частью являются матричными, то есть они представлены цифровыми изображениями. С ними приходится иметь дело в медицине, геофизике, дистанционном зондировании Земли из Космоса, астрономии и многих других областях знания. Удивительно, но практически все природные изображения с достаточно высоким пространственным разрешением – мультифрактальны, то есть имеют свойство статистической масштабной инвариантности. Как раз оно и обеспечивает эффективность методов, изложенных в статье. Кроме геометрии, изображение имеет еще и топологию (алгебраическую структуру): два фрактала могут иметь одинаковую размерность, но различаться «пористостью» меры. О методах извлечения топологии из изображений мы собираемся рассказать в нашей следующей статье.

#### Библиографический список

1. *Barnsley M.* Fractals Everywhere. N.Y.: Academic Press, 1988. 531 p.
2. *Falconer K.* Fractal Geometry. Mathematical Foundations and Applications. Wiley. 2003.
3. *Falconer K.* Techniques in Fractal Geometry. Wiley & Sons. 1997. 256 p.
4. *Макаренко Н.Г., Каримова Л.М., Мухамеджанова С.А., Князева И.С.* Система итеративных функций и марковский прогноз временных рядов // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2006. т. 14, № 6. С. 3.
5. *Зельдович Я.Б., Соколов Д.Д.* Фракталы, подобие, промежуточная асимптотика // УФН. 1985. Т. 146. С. 493.
6. *Halsey T.C., Jensen M.H., Kadanoff L.P., Procaccia I., Schraiman B.I.* Fractal measures and their singularities: the characterization of strange sets // Phys.Rev. A. 1986. Vol. 33. P. 1141.
7. *Grassberger P., Procaccia I.* On the characterization of strange attractors // Phys.Rev. Lett. 1983. Vol. 50. P. 346.
8. *Falconer K. J.* The multifractal spectrum of statistically self-similar measures // J. Theor. Prob. 1994. Vol. 7. P.681.
9. *Mach J., Mas F., Sagués F.* Two representations in multifractal analysis // J.Phys. A: Math.Gen. 1995. Vol. 28. P.5607.
10. *Павлов А.Н., Анищенко В.С.* Мультифрактальный анализ сложных сигналов // УФН. 2007. Т.177. С.859
11. *Короленко П.В., Маганова М.С., Меснянкин А.В.* Новационные методы анализа стохастических процессов и структур в оптике. Фрактальные и мультифрактальные методы, вейвлет преобразования. М.: НИИЯФ, МГУ, 2004.
12. *Riedi R.H.* Multifractal processes // Long-range dependence: theory and applications / Eds P. Doukhan, G. Oppenheim and M.S. Taqqu. Birkhäuser, 2002. P. 625.
13. *Федер Е.* Фракталы. М.: Мир, 1991. 260 с.
14. *Божюкин С.В., Паршин Д.А.* Фракталы и мультифракталы. Москва-Ижевск: РХД, 2001. 128 с.

менте изменялась путем изменения диаметра апертурной диафрагмы. Теоретическая кривая  $L_c(\theta)$  (сплошная линия) получена с использованием выражения (9) при  $l_c = 165$  мкм (отмечено штрихпунктирной линией). На рис. 7 также представлена теоретическая кривая  $0.6\rho_{||}(\theta)$  (пунктирная линия) и экспериментальные значения (ромбы) этой длины когерентности, полученные при минимальной ширине частотного спектра источника и, соответственно, при максимальной длине временной когерентности излучения  $l_{c\max} = 5 \cdot 10^3$  мкм.

Экспериментальные результаты, как мы считаем, находятся в хорошем согласии с теоретическими данными. Некоторую завышенность экспериментальных значений по сравнению с теоретическими можно объяснить тем, что угловое распределение интенсивности по вторичному источнику (матовому стеклу) было более близко к гауссову, нежели к равномерному (об этом можно было судить по медленному спадающему интерференционному импульсу – наличию так называемых «крыльев»), в то время как теоретические кривые строились в предположении равномерности и углового, и частотного спектров.

В эксперименте с интерферометром Майкельсона (см. рис. 5) также возможно наблюдение эффектов чисто пространственной продольной когерентности, определяемых функцией когерентности вида  $\Gamma(z, \Delta z, \Delta t = \Delta z/c)$ . Эти эффекты, как рассматривалось выше, связаны с процессами декорреляции волнового цуга (волнового возмущения) в процессе его распространения. Длина волнового цуга, определяемая длиной временной когерентности  $l_c$ , должна быть существенно меньше длины когерентности  $\rho_{||}(\theta)$ , определяемой шириной углового спектра поля,  $l_c \ll \rho_{||}(\theta)$ . Для наблюдения эффектов декорреляции волнового цуга необходимо иметь возможность создания в интерферометре взаимного продольного сдвига  $\Delta z$  интерферирующих полей при специальной временной задержке возмущений  $\Delta t = \Delta z/c$ . При такой временной задержке, как нетрудно показать, оптическая разность хода волн в плечах интерферометра должна быть равна нулю,  $\Delta = 0$ .

Эти, на первый взгляд противоречивые, условия могут быть созданы в разбалансированном интерферометре [15], в одном из плеч которого располагается нескомпенсированный оптический слой, например, плоскопараллельная стеклянная пластина с оптической толщиной  $nd$  (пластина GP на рис. 5). Пластина при двойном прохождении через нее светового поля вносит продольный сдвиг вперед амплитудно-фазовой структуры поля на величину  $\Delta z_{GP} \approx 2d(n-1)/n$  и изменяет оптическую разность хода волн на величину  $\Delta_{GP} \approx 2d(n-1)$ . Эта дополнительная разность хода может быть скомпенсирована соответствующим смещением  $\Delta z \approx d(n-1)$  зеркала M2 или зеркала M1. Смещение зеркала сопровождается таким же продольным смещением амплитудно-фазовой структуры поля, отраженного этим зеркалом. В результате на выходе интерферометра имеем нулевую разность хода волн в плечах интерферометра при ненулевом продольном сдвиге интерферирующих полей,  $\Delta z \approx \Delta z_{GP} + \Delta_{GP} = 2d(n^2 - 1)/n$ . Если изменять толщину нескомпенсированного оптического слоя от 0 до такой величины, при которой  $\Delta z > \rho_{||}$ , то по значениям коэффициента модуляции интерференционных осцилляций в сигнале интерферометра  $\tilde{u}_P(2\Delta z_M)$  можно определить значения функции чисто пространственной когерентности,  $\tilde{u}_P(2\Delta z_M) \sim |\Gamma(z, \Delta z, \Delta t = \Delta z/c)| \cos(2\pi 2\Delta z_M/\lambda_0)$ .

В наших экспериментах плавное изменение толщины  $d$  нескомпенсированного оптического слоя GP (см. рис. 5) в одном плече интерферометра достигалось

использованием специального светоделительного куба BS, одну из призм которого можно плавно смещать вдоль гипотенузной (делительной) грани [14]. На рис. 8 представлены экспериментально зарегистрированные интерференционные импульсы когерентности, наблюдаемые при непрерывном сканировании зеркала M2. Импульсы на рисунке отображены в шкале разности хода  $2\Delta z_M$ , нулевое значение которой имеет место при нулевой толщине слоя GP,  $d = 0$ . Каждый импульс записывался при определенной толщине  $d$  нескомпенсированного оптического слоя GP. Увеличение толщины слоя сопровождается соответствующим смещением импульса в шкале разности хода  $\Delta$  и уменьшением амплитуды осцилляций в импульсе, обусловленным снижением взаимной когерентности интерферирующих полей. Величина смещения импульса позволяет определить взаимный продольный сдвиг полей  $\Delta z$ , а максимальная относительная амплитуда осцилляций – значения модуля нормированной продольной чисто пространственной когерентности  $|\gamma(\Delta z, \Delta t = \Delta z/c)| = |\Gamma(\Delta z, \Delta t = \Delta z/c)| / \Gamma(\Delta z = 0, \Delta t = 0)$ . На рис.9 представлен модуль нормирован-

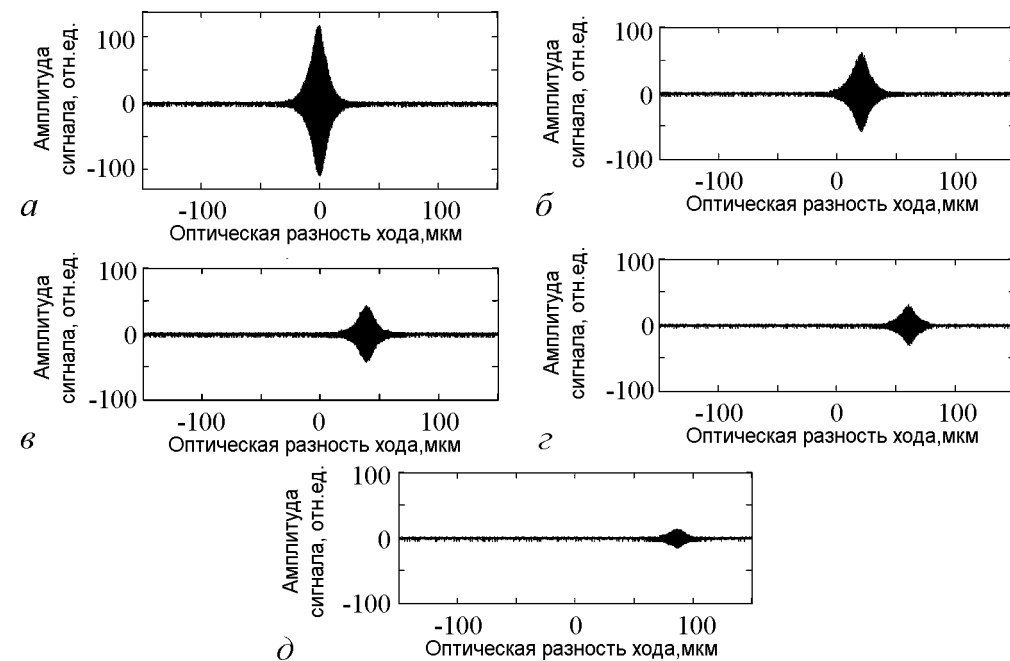


Рис. 8. Экспериментальные осциллограммы интерференционных импульсов продольной когерентности, зарегистрированные на выходе разбалансированного интерферометра в световом поле с широкими угловым и частотным спектрами ( $\theta \approx 0.15$  рад, длина временной когерентности  $l_{c1} \approx 7$  мкм) при различной толщине  $d$  нескомпенсированного слоя с показателем преломления  $n \approx 1.5$  в одном из плеч интерферометра:  $d \approx 0$  (а); 20 (б); 38 (в); 60 (г); 85 мкм (д)

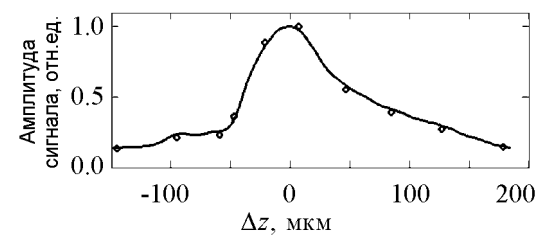


Рис. 9. Экспериментальные значения модуля нормированной продольной чисто пространственной когерентности  $|\gamma(\Delta z, \Delta t = \Delta z/c)|$

фурье-реконструкции, то простейшая функция  $g(f)$ , удовлетворяющая всем этим свойствам, имеет вид [37]

$$g(f) = \|g(f)\|f/f, \quad \|g(f)\| = f^{-1}, \quad g^*(f) = if/f^2, \quad i = \sqrt{-1}. \quad (33)$$

В результате получается следующее выражение для фурье-реконструкции изображения:

$$I^*(f) = i(f \cdot v_0^*)f^{-2}. \quad (34)$$

Для иллюстрации на рис. 4 приведены оригинальное изображение второго автора статьи, его гельдеровская карта, MSM и реконструкция с помощью описанного про-

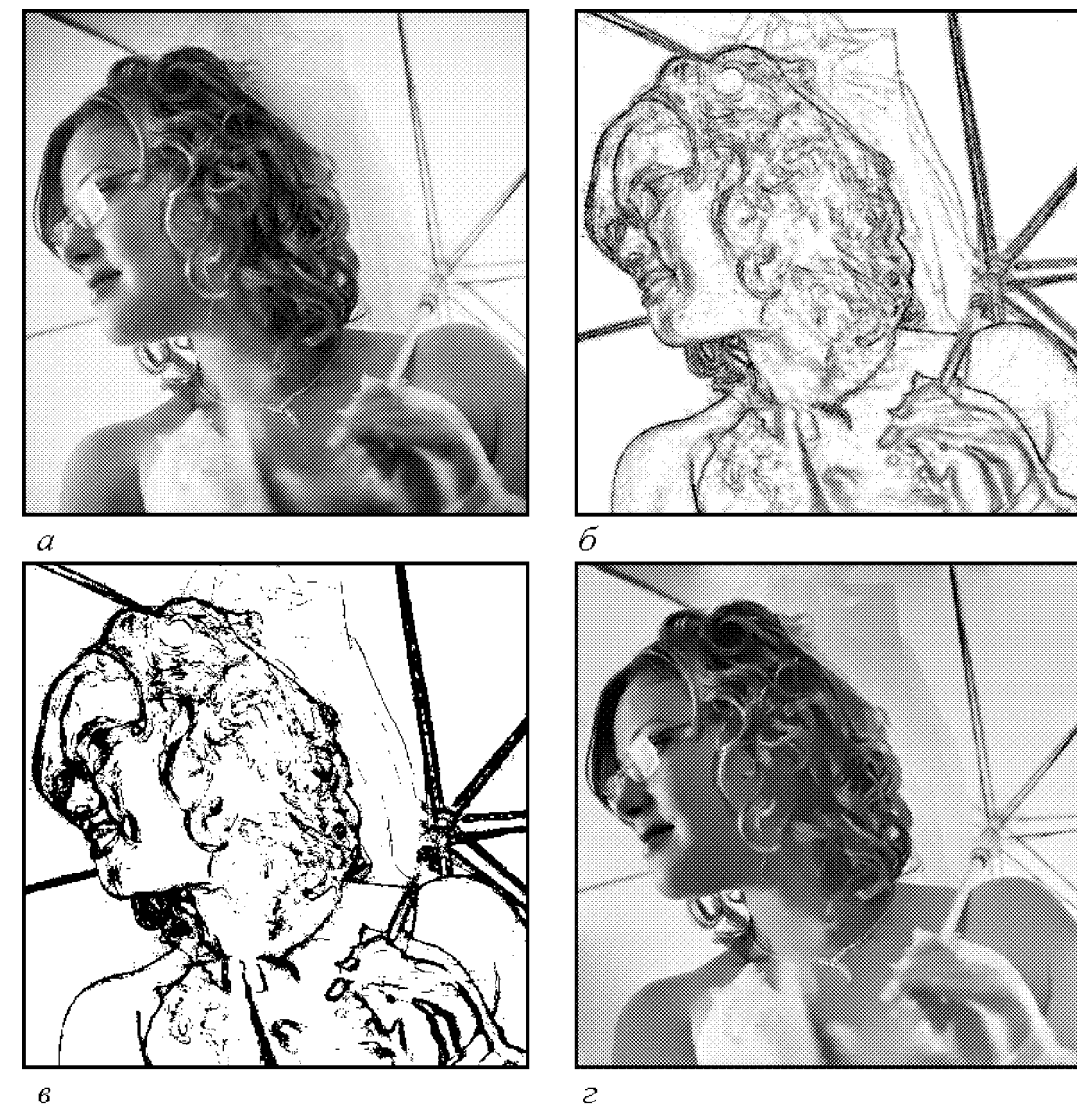


Рис. 4. Реконструкция изображения по сингулярным многообразиям: а – оригинал, б – карта гельдеровских экспонент; в – MSM,  $0 < h(x) \leq 2$ ; z – реконструкция

Наконец, если функция  $f$  не дифференцируема в обычном смысле, то используется аппроксимация

$$\|f\|_V = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{+\infty} \varepsilon^{-1} |f(x + \varepsilon) - f(x)| dx. \quad (23)$$

Известная *формула Банаха об индикатрисе* утверждает, что вариация функции совпадает с суммой индикатрис по уровню [22, 27, 31]:

$$\|f\|_V = \int_a^b |f'| dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{N}(y, f) dy. \quad (24)$$

Выражение (19) – это двухмерный аналог (21) и, следовательно, наша мера измеряет полную вариацию контраста в области. Ее можно оценить, используя теорему об индикатрисе. Рассмотрим, ради простоты, регулярный случай. Пусть  $\Omega \in R^2$  и  $f(x, y) \in C^2$  – гладкая поверхность. Тогда множество ее морсовских особых точек  $E = \{(x, y) | \nabla f = 0\}$ , по теореме Морса–Сарда, не образует связного множества, то есть  $\mu_H^1(E) = 0$ . С другой стороны, множество ее уровней  $S = f^{-1}(t) \cap \Omega$  будет одномерным  $C^2$ -многообразием почти для каждого  $t$ . Индикатрисы – это множество  $\mu_H^1(f^{-1}(t) \cap \Omega)$ , образованное длинами изолиний, полученных пересечением графика  $\{(x, y), z = f(x, y)\}$  с плоскостью  $z = t$ . Вариация  $\|f\|_V$  определяется теперь так называемой формулой *ко-площади*, которая справедлива для всех липшицевских функций [21, 22, 31]

$$\|f\|_V = \int_{-\infty}^{+\infty} \mu_H^1[f^{-1}(t) \cap \Omega] dt. \quad (25)$$

Пусть  $\mu[B_r(\mathbf{x})]$  мера Радона для шара  $B_r(\mathbf{x})$ , окружающего каждую точку  $\mathbf{x} \in A$ . Используя выражение (8) мы полагаем, что для достаточно малых окрестностей точки справедлива следующая аппроксимация [19, 29]:

$$\mu[B_r(\mathbf{x})] = a(\mathbf{x}) r^{h(\mathbf{x})} + o(r^{h(\mathbf{x})}). \quad (26)$$

Здесь гильдеровские показатели обозначены через  $h(\mathbf{x})$ , чтобы отличить их от общего случая (14), а  $o(r^{h(\mathbf{x})})$  обозначают члены более высокого порядка малости, нежели  $r^{h(\mathbf{x})}$ . Коэффициенты  $a(\mathbf{x})$  зависят от выбора метрики, используемой для определения шаров и шкалы масштабов. Напротив,  $h(\mathbf{x})$  не зависят от метрики и дают всю информацию об эволюции меры при изменении масштаба. Они могут быть получены с помощью линейной регрессии  $\log \mu(B_r(\mathbf{x})) = h(\mathbf{x}) \log r$  [33]. Такой вариант получения оценок показателей реферируют как *микрочанонический вариант* мультифрактального формализма [18, 19].

### 5. Емкости Шоке и многообразия максимальной сингулярности

В численных методах из-за большой вариабельности контраста обычно не удается хорошо определить градиент: при уменьшении размера окрестности последовательность оценок не меняется монотонно при уменьшении цифрового радиуса

20. Рябухо В.П., Лякин Д.В., Лычагов В.В. Какой тип когерентности оптического поля наблюдается в интерферометре Майкельсона // Опт. и спектр. 2007. Т. 102, № 6. С. 996.
21. Рябухо В.П., Хомутов В.Л., Лякин Д.В., Константинов К.В. Лазерный интерферометр с острогофокусированными пучками для контроля пространственного положения объекта // ПЖТФ. 1998. Т. 24, вып. 4. С. 19.
22. Тычинский В.П. Когерентная фазовая микроскопия внутриклеточных процессов // УФН. 2001. Т. 171, № 6. С. 649.
23. Тычинский В.П. Динамическая фазовая микроскопия: возможен ли «диалог» с клеткой? // УФН. 2007. Т. 177, № 5. С. 535.
24. Вишняков Г.Н., Левин Г.Г., Минаев В.Л. Томографическая микроскопия трехмерных фазовых объектов в частично когерентном свете // Опт. и спектр. 2003. Т. 95, № 1. С. 142.
25. Liu H., Han S. Spatial longitudinal coherence length of a thermal source and its influence on lens less ghost imaging // Opt. Lett. 2008. Vol. 33, № 8. P. 824.
26. Ferri F., Magatti D., Sala V.G., Gatti A. Longitudinal coherence in thermal ghost imaging // Appl. Phys. Lett. 2008. Vol. 92, I. 26. P. 261109.

Поступила в редакцию 29.06.2009

## LONGITUDINAL COHERENCE OF OPTICAL FIELD

V.P. Ryabukho, D.V. Lyakin, V.V. Lychagov

Spatial coherence of an optical field in a direction of its propagation depending on parameters of frequency and angular spectra of the field is considered. The expressions for function and length of longitudinal coherence are derived depending on width of frequency and angular spectra. The competing influence of angular and frequency spectra of a field on its longitudinal coherence is discussed. The experimental study with use the Michelson interferometer of longitudinal shift confirming theoretical results are executed.

*Keywords:* optical coherence, length of coherence, coherence function, interference of waves, Michelson interferometer.

*Рябухо Владимир Петрович* – родился в с. Новопокровка Балашовского района Саратовской области (1951), окончил Саратовский государственный университет (1976). Работал в НПО «Алмаз» инженером, младшим научным сотрудником. В 1980 г. окончил спецфакультет Московского физико-технического института (МФТИ). Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук в МФТИ (1985) и доктора физико-математических наук в СГУ (1996) в области голографической и спекл-интерферометрии, теории интерференции оптических спекл-полей. Профессор кафедры оптики СГУ, заведующий лабораторией проблем когерентно-оптических измерений в точной механике Института проблем точной механики и управления РАН. Опубликовал 180 научных статей по направлениям, указанным выше.

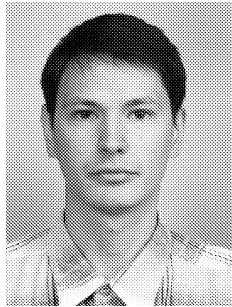
410012 Саратов, ул. Астраханская, 83  
Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского  
410028 Саратов, ул. Рабочая, 24  
Институт проблем точной механики и управления РАН  
E-mail: rvp@sgu.ru





*Лякин Дмитрий Владимирович* – родился в Саратове (1977), окончил Саратовский государственный университет (2000). Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук в СГУ (2004) в области оптической низкокогерентной и лазерной интерферометрии. Старший научный сотрудник Института проблем точной механики и управления РАН.

410028 Саратов, ул. Рабочая, 24  
Институт проблем точной механики и управления РАН  
E-mail: ldv-77@mail.ru



*Лычагов Владислав Валерьевич* – родился в Саратове (1981), окончил Саратовский государственный университет (2003). Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук (2007) в области теории когерентности оптических полей. Заведующий учебной лабораторией кафедры оптики и биофотоники. Опубликовал 12 научных статей по этому направлению.

410012 Саратов, ул. Астраханская, 83  
Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского  
E-mail: ceres@yandex.ru

#### 4. Микроканонический мультифрактальный формализм

*Микроканонический формализм* оценивает локальные масштабные свойства мультифрактальных мер *геометрически*, а не статистически [18, 19, 28–30]. Ниже мы будем иметь дело с цифровыми изображениями, то есть с дискретным полем яркости  $I(\mathbf{x})$ ,  $\mathbf{x} \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ , заданным на ограниченной области  $A$  квадратной решетки. Под точкой  $\mathbf{x} \equiv (x_1, x_2)$ , в зависимости от контекста, мы будем понимать либо координаты центра пиксела, либо сам пиксел. Часто удобнее работать с отклонениями от среднего значения  $I_0 = \langle I(\mathbf{x}) \rangle$  уровня серого, подсчитанного для всего изображения, то есть с глобальным *полем контрастности*:

$$c(\mathbf{x}) \equiv I(\mathbf{x}) - I_0, \quad \langle c(\mathbf{x}) \rangle_{\mathbf{x} \in A} = 0. \quad (18)$$

Теперь нам нужна мера  $\mu$  для каждого компактного множества  $A$  на изображении. Ее можно определить следующим образом [19, 31]:

$$\mu(A) \equiv \int_{\mathbf{x} \in A} d\mu(\mathbf{x}), \quad (19)$$

где плотность меры для  $c(\mathbf{x})$  в предположении локальной гладкости изображения описывается выражением [19, 27]

$$d\mu(\mathbf{x}) \equiv |\nabla c(\mathbf{x})| dx, \quad |\nabla c(x_1, x_2)| = \left( |\partial c(\mathbf{x})/\partial x_1|^2 + |\partial c(\mathbf{x})/\partial x_2|^2 \right)^{1/2} \quad (20)$$

и частные производные понимаются в смысле их аппроксимации разделенными разностями. Заметим, что, вообще говоря, «истинного» изображения  $u(\mathbf{x})$  не существует. Мы всегда имеем дело с интегралом  $\langle u, \phi \rangle = \int_A u(\mathbf{x}) \phi(\mathbf{x}) dx_1 dx_2$ , где  $\phi(\mathbf{x})$  – функция с компактным носителем, или сенсор-ячейка CCD-приемника или сетчатки глаза. Таким образом, описание изображений попадает в контекст теории обобщенных функций (распределений) и производные можно понимать в слабом смысле [32]. Условие  $\langle u, \phi \rangle \geq 0$  эквивалентно непрерывности «обобщенного» изображения или существованию единственной меры Радона на  $A$ . Выбор меры в форме (19) связан с пространствами Соболева и понятием функций с ограниченной вариацией [31]. Напомним, что полной вариацией функции  $f(x) \in C^1$  называют величину [22, 27, 31]

$$\|f\|_V = \int_{-\infty}^{+\infty} |f'| dx. \quad (21)$$

Если мы имеем дело с функцией  $y = f(x)$  на ограниченном интервале и  $\{x_p\}$  – множество особых точек, в которых производная обращается в нуль, то полная вариация определяется суммой

$$\|f\|_V = \sum_p |f(x_{p+1}) - f(x_p)|. \quad (22)$$

где  $d = 1, 2, 3$  называют *емкостью* или *бокс-размерностью*  $F$ . Формулу (2) можно рассматривать как определение  $d$ . Действительно, с точностью до нормировки

$$d = - \lim_{r \rightarrow 0} (\log N(r) / \log r) \quad (3)$$

в предположении, что предел существует. Поскольку размерность заранее не известна, будем перебирать все возможные пробные значения  $d$ , пока не найдется такое из них, для которого  $m(F)$  в пределе  $r \rightarrow 0$  равняется *конечному* числу. Пусть, например,  $\gamma : [0, 1] \rightarrow R^2$  – фрагмент спрямляемой кривой длиной  $l$ . Необходимое для покрытия фрагмента число  $r$  шаров составляет  $N(r) = l/r$  и мера (2) равна  $m(\gamma) = lr^{d-1}$ . Легко убедиться, что для  $d > 1$  мера  $m(\gamma) \rightarrow 0$  при  $r \rightarrow 0$  и  $m(\gamma) \rightarrow \infty$ , если  $d < 1$ . Между ними существует единственное «правильное» значение  $d = 1$ , которому и соответствует конечное значение меры  $m(\gamma) = l$ . Мы будем неоднократно использовать ниже этот прием: необходимая для нас величина  $\alpha$  должна обладать свойством «точки перехода» – для любого  $\beta > \alpha$  некоторая мера равна нулю, а для любого  $\beta < \alpha$  она бесконечна. Размерность, которую определяет формула (3), часто называют фрактальной.

Дальнейшее обобщение связано с заменой шаров покрытия на произвольные взаимно пересекающиеся множества [2, 20, 21]. Счетное семейство подмножеств  $\mathcal{A} = \{A_i\}$  называют счетным  $\epsilon$ -покрытием множества  $F$ , если  $F \subseteq \bigcup_i A_i$  и для всех  $A_i$  справедливо неравенство  $\text{diam } A_i \leq \epsilon$ ,  $\text{diam } A = \sup_{x, y \in A} \|x - y\|$ . Определим *крупнозернистую  $\alpha$ -мерную меру Хаусдорфа*, как [2, 20, 21]

$$\mu_H^\alpha(\epsilon, F) = \inf \sum_{A_i \in \mathcal{A}} (\text{diam } A_i)^\alpha, \quad (4)$$

где нижняя грань берется по всем счетным  $\epsilon$ -покрытиям. Предел

$$\mu_H^\alpha(F) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \mu_H^\alpha(\epsilon, F) \quad (5)$$

называют  *$\alpha$ -мерной мерой Хаусдорфа*. Эта мера обладает приятными свойствами. Так, в метрическом пространстве  $R$  для конечного множества  $A$  одномерная мера Хаусдорфа совпадает с мерой Лебега:  $\mu_H^1(A) = m(A)$ . Если  $A$  состоит из  $n$  точек, то мера  $\mu_H^0(A) = n$ . Легко понять, что вычислить меру (5) практически невозможно. Однако ее можно оценить, используя один результат из геометрической теории меры [22]. Пусть мера Радона  $\mu[B_r(x)]$  для шара  $B_r(x)$ , окружающего каждую точку  $x \in A$  борелева множества  $A \subset R^n$ , удовлетворяет условию

$$\lim_{r \rightarrow 0} (\log \mu[B_r(x)] / \log |r^\alpha|) = 1, \quad 0 < \alpha \leq n. \quad (6)$$

Тогда существует постоянная  $C = C(\alpha, n)$  такая, что

$$\mu(A) \geq C \lambda \mu_H^\alpha(A), \quad 0 < \lambda < \infty. \quad (7)$$

Иными словами,  $\alpha$ -мерную меру Хаусдорфа можно аппроксимировать более доступной для измерения мерой Радона, если последняя удовлетворяет «скейлингу»

$$\mu[B_r(x)] \sim r^\alpha. \quad (8)$$

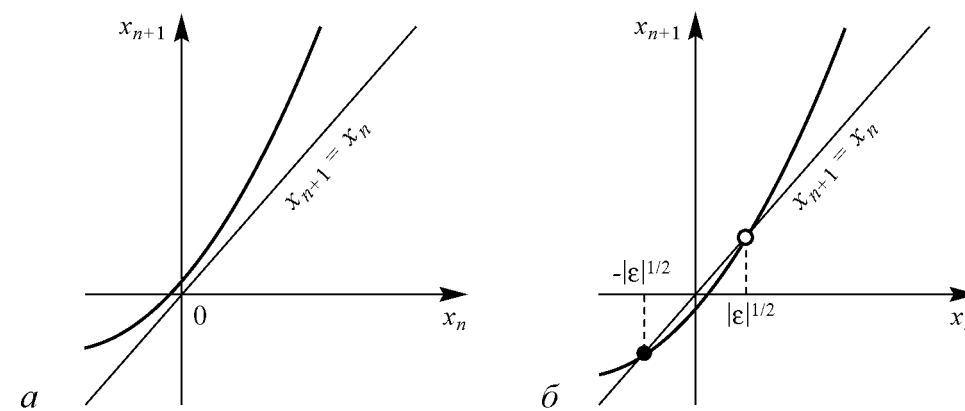


Рис. 1. Итерационная диаграмма отображения (1) для  $\epsilon > 0$  (а) и  $\epsilon < 0$  (б). Устойчивая  $x_s = -|\epsilon|^{1/2}$  и неустойчивая  $x_u = |\epsilon|^{1/2}$  неподвижные точки отображения (1) обозначены символами  $\bullet$  и  $\circ$ , соответственно

квадратному корню из  $(\epsilon - \epsilon_c)$ , то есть

$$T \sim (\epsilon - \epsilon_c)^{-1/2}. \quad (2)$$

Чтобы построить теорию перемежаемости типа I в присутствии шума, рассмотрим то же самое квадратичное отображение (1), добавив в него стохастическое слагаемое  $\xi_n$

$$x_{n+1} = x_n + x_n^2 + \epsilon + \xi_n, \quad (3)$$

где  $\xi_n$  – дельта-коррелированный белый шум с нулевым средним [ $\langle \xi_n \rangle = 0$ ,  $\langle \xi_n \xi_m \rangle = D \delta(n - m)$ ].

Степень влияния стохастического слагаемого  $\xi_n$  на поведение системы регулируется значением параметра  $D$  (интенсивность шума). При положительных значениях управляющего параметра  $\epsilon$  ( $\epsilon > 0$ ), изображающая точка на итерационной диаграмме, отвечающая поведению системы (3), движется вдоль узкого коридора, и это движение возмущается случайным образом. Пока интенсивность шума невелика, наблюдаются характеристики, близкие к характеристикам классической перемежаемости типа I.

Иной сценарий имеет место, если управляющий параметр  $\epsilon$  принимает отрицательные значения ( $\epsilon < 0$ ). В этом случае точка, отвечающая поведению системы (3), долгое время остается в области  $x < x_c = |\epsilon|^{1/2}$ , при этом динамика системы также возмущается случайной силой. Как только изображающая точка из-за влияния шума достигает границы  $x_c = |\epsilon|^{1/2}$ , в системе начинается турбулентная фаза, однако такое событие происходит достаточно редко.

В этом случае поведение отображения (3) кардинальным образом отличается от динамики системы (1), поскольку для (1) турбулентные фазы не наблюдаются при  $\epsilon < 0$  в отсутствие шума. Следовательно, область отрицательных значений параметра  $\epsilon$  представляется интересной при рассмотрении перемежаемости типа I в присутствии в системе шума.

Полагая, что значение  $\epsilon$  отрицательно и мало и значение  $x$  изменяется за одну итерацию незначительно, можно рассматривать разность  $(x_{n+1} - x_n)$  как производную по времени  $\dot{x}$  и перейти от системы с дискретным временем (3) к потоковой, аналогично тому, как это осуществляется в классической теории перемежаемости типа I.



Поскольку в уравнении (3) присутствует стохастическое слагаемое, то нужно рассматривать стохастическое дифференциальное уравнение

$$dX = (X^2 - |\varepsilon|) dt + dW \quad (4)$$

(где  $X(t)$  – стохастический процесс,  $W(t)$  – одномерный винеровский процесс) вместо обычного дифференциального уравнения  $dx/dt = x^2 + \varepsilon$ , рассматриваемого в классической теории перемежаемости I типа.

Стохастическое дифференциальное уравнение (4) эквивалентно уравнению Фоккера–Планка

$$\frac{\partial \rho_X(x, t)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x}((x^2 - |\varepsilon|)\rho_X(x, t)) + \frac{D}{2} \frac{\partial^2 \rho_X(x, t)}{\partial x^2} \quad (5)$$

для плотности вероятности  $\rho_X(x, t)$  стохастического процесса  $X(t)$ . В противоположность тому, что сделано в работе [21], где использовалось обратное уравнение Фоккера–Планка, в настоящей работе рассматривается прямое уравнение, что позволяет получить распределение длительностей ламинарных фаз. Начальные условия были выбраны в виде  $\rho_X(x, 0) = \delta(x)$ , где  $\delta(\cdot)$  – дельта-функция. Такой выбор начальной формы плотности вероятности  $\rho_X(x, 0)$  соответствует началу ламинарной фазы, когда изображающая точка системы (3) имеет координату  $x = 0$  в момент времени  $t = 0$ . Другими словами, предполагается, что вероятность реинжекции есть дельта-функция

$$P_{in}(x) = \delta(x), \quad (6)$$

и после процесса реламинизации система всегда возвращается в состояние  $x = 0$ . Несмотря на то, что вероятность реинжекции  $P_{in}(x)$  является важным фактором и должна учитываться при исследовании статистических свойств перемежающегося поведения [24, 25], в рассматриваемой задаче форма вероятности реинжекции практически не влияет на распределение длительностей ламинарных фаз (и, соответственно, на зависимость средней длительности ламинарных фаз от параметра надкритичности), как это будет показано ниже.

Чтобы уменьшить число управляющих параметров, можно выполнить нормировку  $z = x/\sqrt{|\varepsilon|}$ ,  $\tau = t\sqrt{|\varepsilon|}$ , после чего уравнение (5) переписывается в виде

$$\frac{\partial \rho_Z(z, \tau)}{\partial \tau} = -\frac{\partial}{\partial z}((z^2 - 1)\rho_Z(z, \tau)) + \frac{D^*}{2} \frac{\partial^2 \rho_Z(z, \tau)}{\partial z^2}, \quad (7)$$

где  $D^* = D|\varepsilon|^{-3/2}$ ,  $\rho_Z(z, \tau) = \sqrt{|\varepsilon|}\rho_X(z|\varepsilon|^{1/2}, \tau|\varepsilon|^{-1/2})$ .

Так как координата состояния системы долгое время остается в области  $z < z_c = 1$ , можно предположить, что плотность вероятности нужно искать в виде метастабильного распределения, очень медленно убывающего с течением времени (за долгий промежуток времени). Полагают, что процесс релаксации плотности вероятности к этому метастабильному состоянию очень быстрый в сравнении со временем убывания метастабильного распределения, и, следовательно, можно пренебречь временем переходного процесса  $0 \leq t \leq t_{tr}$ . При сделанных выше предположениях плотность вероятности можно записать в виде  $\rho_Z(z, \tau) = A(\tau)g(z)$ ,  $\forall z \leq 1$ , где  $A(\tau) > 0$  уменьшается очень медленно с увеличением времени, то есть  $dA/d\tau \approx 0$ .

Основной задачей нашей статьи является изложение основ этого формализма на уровне технической строгости. Теоретические основы иллюстрируются на примере цифровых изображений – объектов, для которых этот вариант формализма выглядит настолько естественным, насколько это вообще возможно. Мы описываем мультифрактальное разложение изображения на сингулярные компоненты с использованием емкостей Шоке и приводим способ восстановления оригинала по множествам максимальной сингулярности.

## 1. Мера и размерность Хаусдорфа

Предполагая, что читатель знаком с основными понятиями теории меры, мы приведем здесь лишь некоторые основные сведения (см. [20, 21]). Наиболее известная мера Лебега является способом приписать подмножеству из  $R^n$  неотрицательное число, имеющее смысл его «размера». Представим себе однородное распределение массы в  $R^n$  такое, что любой единичный  $n$ -мерный куб содержит единичную массу. Тогда лебегова мера  $\mu_L(A)$  компактного множества  $A \in R^n$  – это просто количество массы, которое в нем содержится. Для интервала  $I_n = [a_n, b_n] \in R$  эта мера – длина  $\mu_L(I_n) = b_n - a_n$ ; для прямоугольника  $P = [a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n]$  – это объем  $\mu_L(P) = (b_1 - a_1) \times \dots \times (b_n - a_n)$ . Для произвольного множества  $A \in R^n$  мера Лебега определяется как нижняя граница мер прямоугольников, покрывающих  $A$ . При этом предполагается выполнение двух свойств:

$$\mu_L(\emptyset) = 0; \quad A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \Rightarrow \mu(A) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i). \quad (1)$$

В общем случае мера на множестве  $X$  – это функция, которая приписывает каждому подмножеству  $A \subset X$  неотрицательное число  $0 \leq \mu(A) \leq \infty$ , так что выполняются условия (1). Если мера  $\mu$  уже определена, то множество  $A \in X$  называют  $\mu$ -измеримым, если оно аддитивно «расщепляет» любое другое множество  $B \in X$ , то есть  $\mu(B) = \mu(B \cap A) + \mu(B \cap A^c)$ , где  $A^c$  дополнение  $A$  в  $X$ . Иными словами, измерить множество, это значит разбить его на части с помощью эталонного множества.

Класс  $\mu$ -измеримых множеств образует алгебру: дополнение к любому измеримому множеству – измеримо; счетное объединение и пересечение измеримых множеств также измеримы. Минимальную алгебру составляют так называемые борелевы множества: на  $R$  такими множествами являются обычные интервалы. Мера  $\mu$  называют борелевской регулярной мерой, если для каждого множества  $A$  существует такое борелево множество  $B \supset A$ , которое «аппроксимирует» меру  $A$ :  $\mu(B) = \mu(A)$ . Если такая регулярная мера конечна для любого компактного множества, ее называют мерой Радона. Меры Радона в  $R^n$  получают следующим образом. Выберем фиксированный масштаб  $r$  и покроем тело  $F$  непересекающимися кубами или шарами размером  $r$ . Пусть  $N(r)$  – их минимальное число. Тогда мера – длина, площадь или объем – определяется выражением

$$m(F) = N(r) r^d, \quad (2)$$



### Заключение

Опосредованный подход к обработке сигнала опирается на математическую модель. Моделирование, по-видимому, всегда останется в значительной степени искусством, но могут быть выделены некоторые общие принципы и частные рецепты, позволяющие повысить шансы на получение «хорошей» модели. Ряд таких соображений, изложен в данной лекции. Но сказанное является лишь «экскурсом в...», а не исчерпывающим изложением техники эмпирического моделирования.

Выражаю искреннюю благодарность коллегам из СГУ и СФ ИРЭ РАН, чьи результаты использовались в лекции: Диканеву Т.В., Караваеву А.С., Селезневу Е.П., Сидак Е.В., Смирнову Д.А., Сысоеву И.В., Пономаренко В.И., Прохорову М.Д.

*Изложенные результаты получены в рамках исследований, которые проводились при финансовой поддержке гранта РФФИ (08-02-00081) и Программы Президиума РАН «Фундаментальные науки – медицине».*

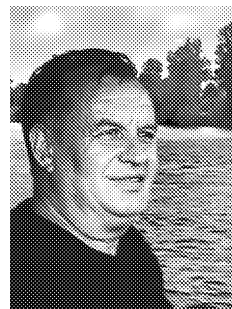
Поступила в редакцию 4.08.2009

### MODELING FROM TIME SERIES AND APPLICATIONS TO PROCESSING OF COMPLEX SIGNALS

*B.P. Bezruchko*

Signals obtained from most of real-world systems, especially from living organisms, are irregular, often chaotic, non-stationary, and noise-corrupted. Since modern measuring devices usually realize digital processing of information, recordings of the signals take the form of a discrete sequence of samples (a time series). The present paper gives a brief overview of the possibilities of such experimental data processing based on reconstruction and usage of a predictive empirical model of a time realization under study. The technique of reconstruction of mathematical models from time series is described and possibilities of the approach are illustrated with examples from the author's and his colleagues' experience.

**Keywords:** Time series, signal processing, reconstruction of dynamical systems, coupling diagnostics, empirical modelling, biomedical and geophysical application.



*Безручко Борис Петрович* – родился в 1946 году. Окончил физический факультет Саратовского госуниверситета (1969). Доктор физико-математических наук (1995). Заведующий кафедрой биомедицинской инженерии и динамического моделирования Саратовского госуниверситета, заведующий лабораторией моделирования в нелинейной динамике СФ ИРЭ РАН. Опубликовал более 100 статей в научных журналах и 2 монографии (в соавторстве). Область научных интересов: радиофизика и электроника, нелинейная динамика, моделирование по временным рядам с приложением к задачам физиологии и медицинской диагностики, физический эксперимент.  
410012 Саратов, ул. Астраханская, 83  
Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского  
E-mail: BezruchkoBP@gmail.com; bbp@sgu.ru

На рис. 3 изображены профили плотности вероятности  $\rho_X(x, t^*)$ , взятые в различные моменты времени. Очевидно, что после очень короткого переходного процесса (кривая 1,  $t_1^* = 10$ ), профиль плотности вероятности  $\rho_X(x, t)$  практически не меняется со временем.

Два различных профиля  $\rho_X(x, t^*)$ , соответствующие моментам времени  $t_2^* = 3 \times 10^1$  и  $t_3^* = 2 \times 10^4$  (кривые 2 и 3, соответственно), очень близко расположены, несмотря на большой временной интервал  $\Delta t = t_3^* - t_2^*$  между ними. Более того, они находятся в отличном согласии с приближенным решением  $A(0)g(x)$ , описываемым уравнением (18) и показанным на рис. 3 квадратами. С ростом времени амплитуда плотности вероятности убывает по экспоненциальному закону, но очень медленно (см. рис. 3, кривые 4 и 5,  $t_4^* = 2.5 \times 10^5$  и  $t_5^* = 10^6$ , соответственно), хотя форма плотности вероятности остается одной и той же во все моменты времени.

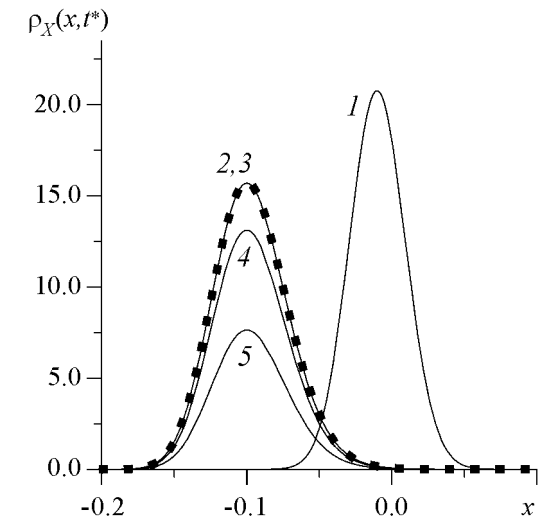


Рис. 3. Профили плотности вероятности  $\rho_X(x, t^*)$  в различные моменты времени  $t^*$ , полученные посредством численного интегрирования уравнения Фоккера–Планка (5)

Следовательно, принимая во внимание результаты численного интегрирования уравнения Фоккера–Планка (5) и сравнение с полученным приближенным решением (18), приходим к выводу, что сделанные нами предположения при выводе выражений корректны и могут быть использованы для дальнейшего анализа.

Эволюция плотности вероятности  $\rho_X(x, t)$  может рассматриваться отдельно на двух временных интервалах  $0 \leq t < t_{tr}$  и  $t_{tr} \leq t < +\infty$ , соответственно. Первый участок времени соответствует переходному периоду, когда плотность вероятности эволюционирует к виду (18), близкому к стационарному. Только когда  $0 \leq t < t_{tr}$ , вид вероятности реинжекции  $P_{in}(x)$  может влиять на эволюцию плотности вероятности  $\rho_X(x, t)$ . При  $t \geq t_{tr}$  (когда время переходного периода истекло) эволюция плотности вероятности всецело определяется выражением (18) и совсем не зависит от вероятности реинжекции  $P_{in}(x)$ . Поскольку переходный период очень короткий по сравнению с экспоненциальным спадом плотности вероятности  $\rho_X(x, t)$ , им можно пренебречь и использовать только второй интервал времени  $t_{tr} \leq t < +\infty$  для того, чтобы получить статистические характеристики перемежающегося поведения типа I в присутствии шума. Очевидно, что в этом случае полученные результаты не будут зависеть от процесса реламинаризации и вероятности реинжекции  $P_{in}(x)$ .

Вид распределения  $p(t)$  длительностей  $t$  ламинарных фаз может быть определен из соотношения между  $\rho_X(x, t)$  и  $p(t)$

$$p(t) = - \int_{-\infty}^{\sqrt{|t|}} \frac{\partial \rho_X(x, t)}{\partial t} dx. \quad (22)$$

Используя соотношения (18), (19) и (21) можно получить, что распределение дли-

тельностью ламинарных фаз выражается экспоненциальным законом

$$p(t) = T^{-1} \exp(-t/T), \quad (23)$$

где  $T$ , определяемое выражением (20), есть средняя длительность ламинарных фаз. Полученное аналитическое выражение (20) для средней длительности  $T$  ламинарных фаз согласуется с решением  $T \sim |\varepsilon|^{-1/2} f(\sigma^2 |\varepsilon|^{-3/2})$ , выведенным в предыдущих работах [20, 26, 27] и совпадает с формулой для  $T$ , приведенной в [21]. Если значение параметра надкритичности  $\varepsilon$  достаточно большое, то можно использовать приближенное уравнение  $\ln T \sim D^{-1} |\varepsilon|^{3/2}$  (см. [21]). Основываясь на рассмотрении, проведенном выше, можно утверждать, что выражения (20) и (23) практически не зависят от свойств процесса реламинизации и могут быть использованы для произвольной вероятности реинжекции  $P_{in}(x)$ .

## 2. Результаты численного моделирования

Для того чтобы проверить справедливость полученных аналитических выражений, рассмотрим численно поведение двух различных динамических систем, в которых можно наблюдать перемежаемость типа I, добавив шум. В качестве таких систем были выбраны квадратичное отображение (п. 2.1) и неавтономный генератор ван дер Поля (п. 2.2).

### 2.1. Квадратичное отображение с добавлением стохастического слагаемого.

Начнем рассмотрение влияния шума на характеристики перемежаемости типа I на примере квадратичного отображения

$$x_{n+1} = x_n^2 + \lambda + \varepsilon + D\xi_n, \quad \text{mod } 1, \quad (24)$$

где «mod 1» – операция, обеспечивающая возврат системы в окрестность точки  $x = 0$ ;  $\lambda = 0.25$ ; а плотность вероятности случайной величины  $\xi$  распределена равномерно в интервале  $\xi \in [-1, 1]$ . Уравнение (24) можно свести к отображению (3) с помощью линейного преобразования переменных. Если интенсивность шума  $D$  равна нулю, то седло-узловая бифуркация происходит при  $\varepsilon = 0$ . Перемежающееся поведение типа I наблюдается при  $\varepsilon > 0$  в то время как устойчивая неподвижная точка в системе существует при  $\varepsilon < 0$ . Добавив случайное воздействие с интенсивностью  $D = 10^{-7}$  в уравнение (24), можно ожидать, что перемежающееся поведение будет также наблюдаться и в области отрицательных значений параметра надкритичности  $\varepsilon$ .

Зависимость средней длительности ламинарных фаз  $T$  от параметра надкритичности ниже точки  $\varepsilon_c = 0$  показана на рис. 4. Для сравнения с теоретической зависимостью  $\ln T \sim D^{-1} |\varepsilon|^{3/2}$  по оси абсцисс на рис. 4, а откладываются значения  $|\varepsilon|^{3/2}$  ( $\varepsilon < 0$ ), в то время как ось ординат показана в логарифмическом масштабе. Видно отличное соответствие аналитического закона (20) и данных, полученных при численном моделировании.

Распределение длительностей ламинарных фаз также хорошо согласуется с экспоненциальным законом (23), предсказываемым теорией перемежаемости типа I с шумом (рис. 4, б). Нужно заметить, что имеется небольшой диапазон, в который попадают короткие ламинарные фазы, и где наблюдается отклонение от экспоненциального закона (23). Эта область соответствует переходному периоду  $0 \leq t < t_{tr}$ ,

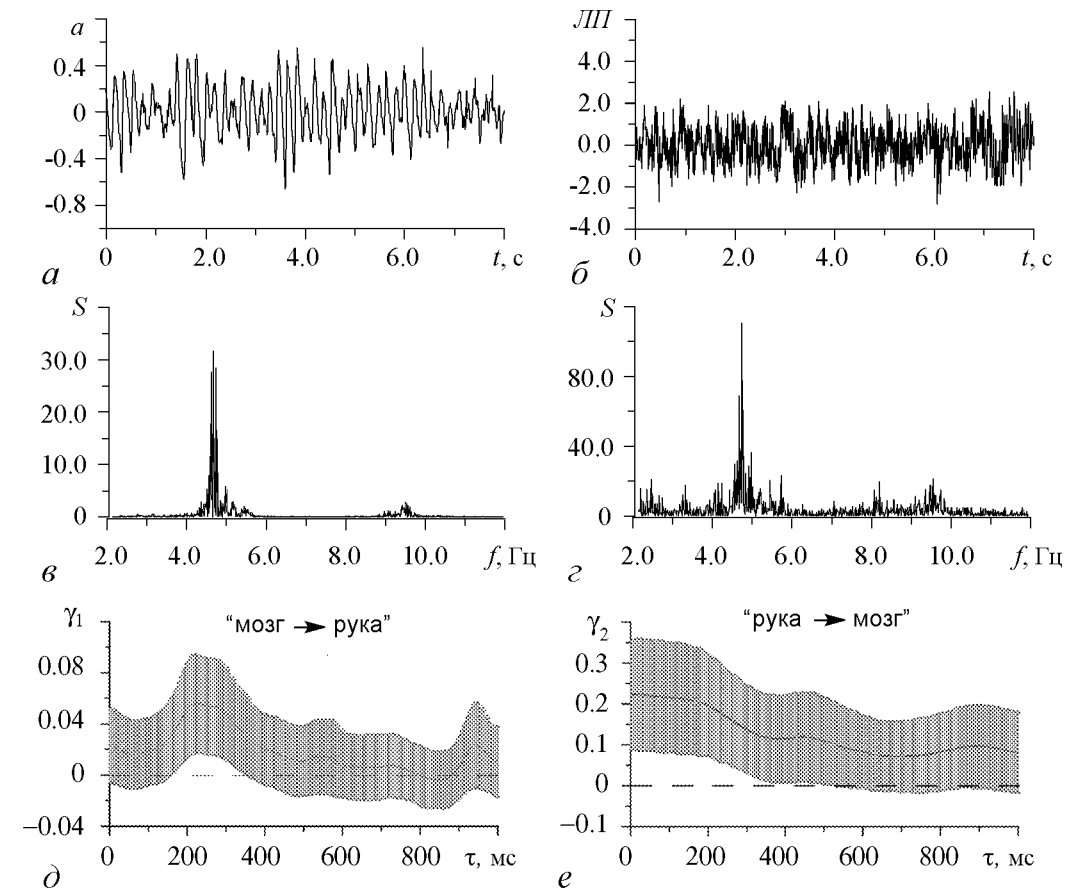


Рис. 10. Записи: сигнала с акселерометра (а), локального потенциала на электроде в мозге (б) и соответствующих им спектров мощности  $S$  (в). Оценки связанности на фоне доверительного интервала (д) при болезни Паркинсона: мозг  $\rightarrow$  рука (е), рука  $\rightarrow$  мозг (е)

**Другие примеры.** Методы обработки рядов, опирающиеся на моделирование динамики, позволяют рассматривать данные различной природы. В качестве примера в заключение рассмотрим результаты оценок связанности (по Грейнджеру) для анализа влияния солнечной активности на глобальную приповерхностную температуру (ГПТ) Земли, сделанных И.Г. Моховым и Д.А. Смирновым. Использовались две версии сигналов, отражающих солнечную активность – по Хойту и Лину<sup>4</sup>. Установлено наличие влияния Солнца на ГПТ без запаздывания или с запаздыванием в пределах 1 года. При этом в первой трети XX века солнечная активность определяет 5% дисперсии процесса ГПТ, а во второй половине XX века – 25 %. В короткий период 1925–1945 годов вполне могло происходить резкое изменение каких-либо характеристик процессов. Возможно, что с середины XX века воздействие Солнца усиливается до сих пор (вывод только по Хойту). Можно предположить, что характерный масштаб вариаций характеристик воздействия Солнца на ГПТ составляет около 30–50 лет. Все результаты анализа более стабильны при анализе по данным, полученным по методике Хойта.

<sup>4</sup>Hoyt D.V., Schatten K.H. The Role of the Sun in Climate Change. Oxford: Oxford Univ. Press, 1997. 279 pp.

Lean J., Rottman G., Harder J., Kopp G. Source contributions to new understanding of global change and solar variability // Solar Physics. 2005. Vol. 230. P. 27.

$\sqrt{(1/L) \sum_{j=1}^L (\hat{c}_{k,j} - \langle c_k \rangle)^2}$ . Исключим слагаемое, соответствующее наименее стабильному коэффициенту. Для упрощенной структуры модели повторим всю процедуру. Продолжая ее дальше, будем последовательно удалять «нестабильные слагаемые». Исключение слагаемых прекращается, когда качество модели перестает улучшаться. На рис. 8, б после исключения 20 слагаемых из модельного многочлена ( $K = 7$ ) погрешность уменьшается на порядок по сравнению со стартовой структурой модели.

Перечень технических приемов можно было бы продолжить, но ограниченный объем статьи не позволяет сделать сколь либо подробный обзор.

### 3. Примеры приложений методов опосредованного анализа сигналов с помощью эмпирических моделей

Пожалуй, самым известным приложением является использование моделей для прогноза будущего по наблюдаемому временному ряду. У всех на слуху прогнозы погоды и климата, землетрясений, курсов акций и валют и пр. Положительный результат реконструкции модели (хорошее ее качество) может быть истолкован, как одно из доказательств правильности физических соображений, заложенных в ее структуру – оценка адекватности представлений, заложенных в модель. Это самодостаточная фундаментальная ценность, которая может привести впоследствии к разнообразным практическим приложениям.

Среди прочих полезных приложений можно выделить задачи выявления квазистационарных участков в нестационарном сигнале, прогноз бифуркаций слабонеавтономных систем, многоканальная конфиденциальная передача информации. Отметим также задачи восстановления сигнала внешнего воздействия по хаотическому ряду координаты неавтономной системы, классификации сигналов, управления техническими объектами, расчета характеристик аттракторов по коротким временным рядам, тестирования на нелинейность и детерминизм, проведение адаптивной фильтрации. Применительно к тем или иным профессиональным запросам могут оказаться наиболее полезными определенные «инструменты». В качестве примера рассмотрим следующие «инструменты», которые можно предложить биомедицине.

**Анализ записей сигналов.** Запись потенциалов мозга (электроэнцефалограммы – ЭЭГ), с мышц (миограммы), с сердца (кардиограммы), сделанные с электродов наряду с необходимой информацией содержит различные искажения – артефакты, мешающие выявлению патологий (рис. 9, а). Такие участки можно выделить с помощью предсказательной модели в виде  $D$ -мерных отображений  $\mathbf{x}(t_{n+1}) = f(\mathbf{x}(t_n), \mathbf{c})$ . Построенная по участку с нормальной активностью такая модель предсказывает последующее поведение, а сделанная ошибка может быть использована как критерий отклонения от выбранной нормы (рис. 9, б). Наоборот, если эталонная модель составлена по участку с конфигурацией, присущей некоторой патологии, то малая ошибка прогноза будет свидетельствовать о наличии признаков такой патологии, а большая – об отличии от свойств заданного эталона.

Аналогичный подход, когда по различным участкам ряда реконструируются одинаковые уравнения, позволяет выделять интервалы стационарности – участки

Распределение длительностей ламинарных фаз  $N(t)$ , полученное для  $A > A_c$ , также подтверждает справедливость теоретических выводов. Действительно, распределение  $N(t)$ , показанное на рис. 5, б, находится в хорошем соответствии с экспоненциальным законом (23), предсказанным теорией, при этом так же, как и для отображения (24), можно выделить малый диапазон с короткими ламинарными фазами, соответствующий переходному периоду после процедуры реламинаризации. Несмотря на то, что в этом диапазоне наблюдается отклонение от экспоненциального закона, переходный процесс не оказывает существенного влияния на характеристики перемежающегося поведения при наличии в системе шума.

Таким образом, рассмотрев две различные системы, можно сделать выводы, что (а) шум вносит новые черты в перемежающееся поведение, когда система в его отсутствие демонстрирует перемежаемость I типа, при этом данные особенности динамики будут наблюдаться при большем значении управляющего параметра; (б) теоретическое приближение, полученное в разделе 1, является верным.

Необходимо обсудить еще один случай. До настоящего момента мы имели дело со стохастическим внешним воздействием как при теоретическом рассмотрении, так и в численном моделировании. Тем не менее, возмущения могут быть как случайными, так и детерминированными. Хорошо известно, что система Ресслера может рассматриваться как зашумленный периодический осциллятор (см., например, [30]). Кроме того, два типа синхронной динамики, обобщенная синхронизация [31–34] и индуцированная шумом синхронизация [19, 35–38] обуславливаются очень схожими механизмами [39], а различие между ними заключается лишь в характере управляющего сигнала. В случае индуцированной шумом синхронизации хаотический осциллятор управляется случайным внешним сигналом, в то время как при обобщенной синхронизации используется детерминированный сигнал другой хаотической динамической системы. Таким образом, одним из интересных моментов является следующий: будут ли наблюдаться закономерности, выявленные при исследовании динамических систем со стохастическим (случайным) внешним воздействием, в случае, когда шумоподобное поведение обуславливается наличием хаотической динамики. Следующий раздел посвящен рассмотрению этого вопроса.

**2.3. Однонаправленно связанные осцилляторы Ресслера** Обратимся к хаотической системе, управляемой внешним хаотическим сигналом, когда имеет место режим фазовой синхронизации [40, 41]. В этом случае присутствуют как явление синхронизации, так и детерминированная шумоподобная динамика, следовательно, можно ожидать, что зависимости, полученные в разделе 1, окажутся справедливыми.

Исследуемая система описывается следующими дифференциальными уравнениями:

$$\begin{aligned} \dot{x}_d &= -\omega_d y_d - z_d, \\ \dot{y}_d &= \omega_d x_d + a y_d, \\ \dot{z}_d &= p + z_d(x_d - c), \\ \dot{x}_r &= -\omega_r y_r - z_r + \sigma(x_d - x_r), \\ \dot{y}_r &= \omega_r x_r + a y_r, \\ \dot{z}_r &= p + z_r(x_r - c), \end{aligned} \tag{27}$$

где  $(x_d, y_d, z_d)$  – декартовы координаты ведущего осциллятора,  $(x_r, y_r, z_r)$  – ведомого;  $\sigma$  – параметр, отвечающий за величину связи. Значения других управляющих параметров по аналогии с предыдущими исследованиями [42, 43] были выбраны

следующими:  $a = 0.15$ ,  $p = 0.2$ ,  $c = 10.0$ . Параметр  $\omega_r$ , задающий собственную частоту ведомой системы, был фиксирован ( $\omega_r=0.95$ ), а значение аналогичного параметра ведущей системы  $\omega_d$  равнялось 0.93. При указанных значениях управляющих параметров хаотические аттракторы обеих подсистем в отсутствие связи являются фазово-когерентными.

Мгновенная фаза хаотического сигнала  $\varphi(t)$  может быть введена традиционным способом как угол поворота  $\varphi_{d,r} = \arctan(y_{d,r}/x_{d,r})$  на плоскости проекции

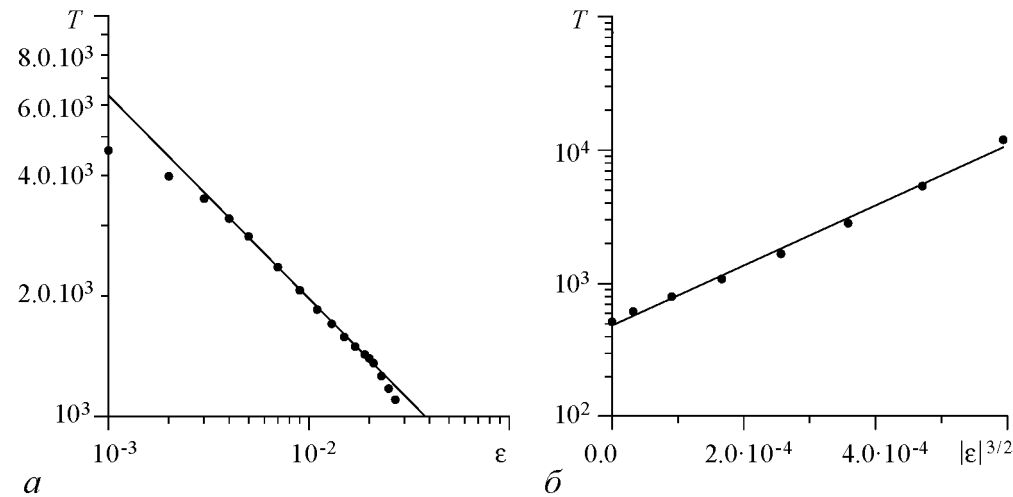


Рис. 6. Зависимость средней длительности ламинарных фаз  $T$  от параметра надкритичности  $\epsilon = (\sigma_c - \sigma)$  для двух однонаправленно связанных осцилляторов Ресслера (27). Точки, полученные посредством численного интегрирования (27), изображены символами  $\bullet$ .  $a$  – Величина связи  $\sigma < \sigma_c$ , параметр  $\epsilon > 0$ . Оси координат представлены в логарифмическом масштабе, степенной закон  $T \sim \epsilon^{-1/2}$  показан сплошной линией. Отклонения численно полученных данных от теоретической зависимости наблюдается только при очень больших и очень малых значениях  $\epsilon$ .  $b$  – Величина связи  $\sigma > \sigma_c$ , параметр  $\epsilon < 0$ . Представлена зависимость средней длительности ламинарных фаз  $T$  от величины  $|\epsilon|^{3/2}$ , при этом только ось ординат изображена в логарифмическом масштабе. Теоретический экспоненциальный закон (20) показан сплошной линией

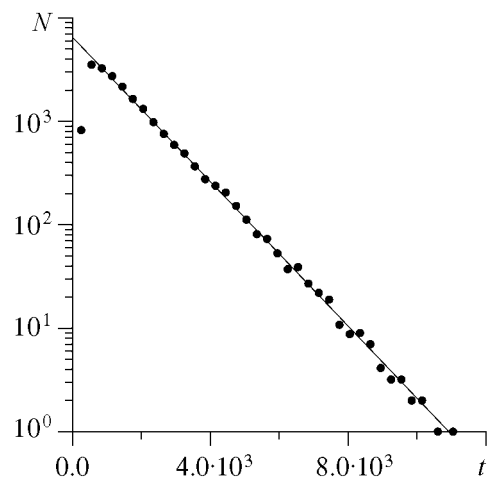


Рис. 7. Распределение длительностей ламинарных фаз для двух однонаправленно связанных осцилляторов Ресслера (27), значение параметра связи  $\sigma = 0.035$  выбрано выше критической точки  $\sigma_c = 0.031$  ( $\epsilon = -0.004$ ). Аналитический экспоненциальный закон (23) показан сплошной линией. Ось ординат представлена в логарифмическом масштабе

**2.3. Оптимизация структуры модели.** Одной из проблем реконструкции уравнений является чрезмерная громоздкость аппроксимирующих функций из-за использования длинных функциональных рядов, в которых многие члены лишние. Лишние слагаемые можно идентифицировать путем наблюдения за поведением оценок коэффициентов модели при реконструкции по различным участкам временного ряда, то есть по точкам, лежащим в различных областях фазового пространства. Параметры адекватной глобальной модели стационарной системы не должны зависеть от того, по каким участкам ее временного ряда ведется реконструкция. А коэффициенты при лишних слагаемых могут претерпевать, в зависимости от выбора участка, заметные изменения. Причем наиболее сильно это проявляется, если временной ряд содержит переходный процесс, так как при этом фазовой траекторией «осваиваются» существенно различные области фазового пространства.

Будем строить модель с многочленом высокого порядка  $K$  по последовательным сегментам временного ряда длиной  $W$ :  $\{\eta_{(k-1)W+1}, \dots, \eta_{(k-1)W+W}\}$ ,  $k = 1, 2, \dots, L$ . Получим набор оценок коэффициентов  $\hat{c}_{i,j}^{(k)}$  (рис. 8,  $a$ ). Степень стабильности оценки каждого коэффициента  $\hat{c}_{i,j}$  определим как модуль отношения эмпирического среднего  $\langle \hat{c}_{i,j} \rangle = (1/L) \sum_{k=1}^L \hat{c}_{i,j}^{(k)}$  к стандартному отклонению

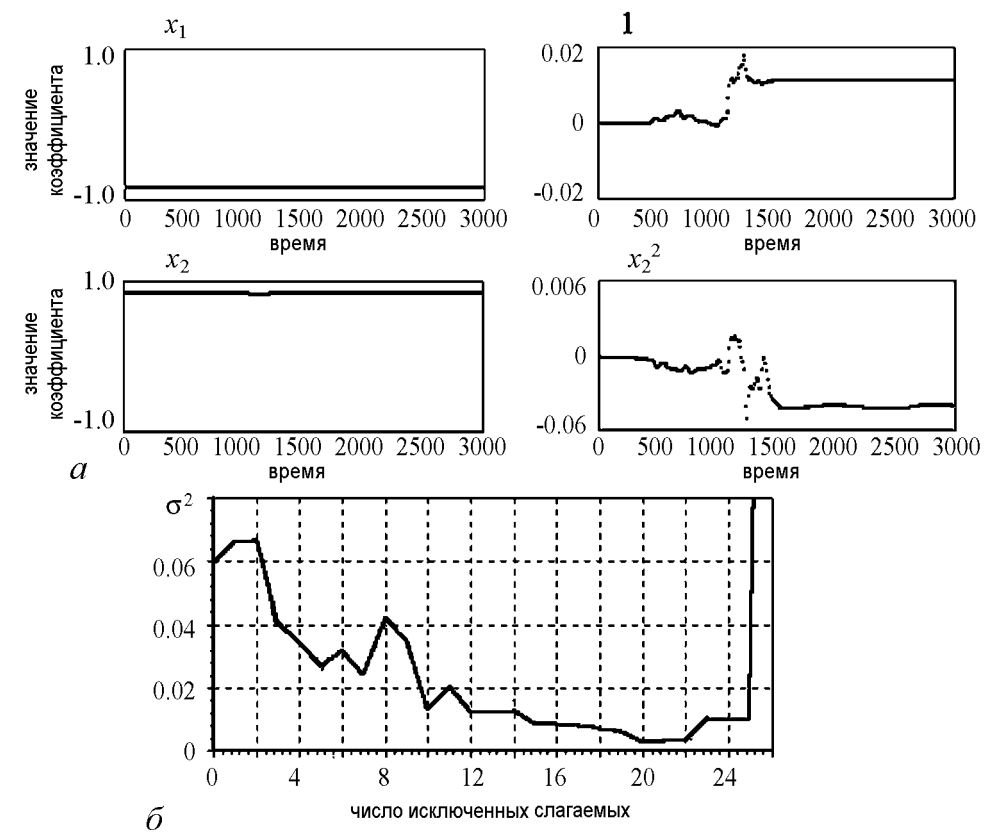


Рис. 8.  $a$  – зависимость коэффициентов при некоторых слагаемых многочлена от стартового момента сегмента реконструкции;  $b$  – изменение погрешности при исключении наиболее осциллирующих коэффициентов; погрешность минимальна при 20 исключенных слагаемых

$$g(t) = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{K_i} c_{i,j} \cos(j\omega_i t + \varphi_{i,j}). \quad (9)$$

Причем адекватные модели с тригонометрическими многочленами могут быть получены и при очень большом числе (сотни) используемых гармоник, тогда как при аппроксимации алгебраическими многочленами увеличение размера модели чревато неустойчивостью их траекторий. Эффективность подхода показана на примерах реконструкции уравнений по зашумленным хаотическим реализациям эталонных осцилляторов при различных видах воздействия: периодическом импульсном, периодическом с субгармониками, квазипериодическом. Кроме того, зависимость от времени можно вводить и во все коэффициенты многочлена  $f$ , чтобы описать неаддитивное воздействие.

**2.2. Выбор переменных.** Пусть проблемы получения экспериментального ряда решены полностью, и мы определились с типом модельного уравнения. Какой из вариантов выбора переменных предпочесть? Теоретически можно пробовать поочередно все мыслимые варианты, для каждого выбора аппроксимировать зависимость вида  $dx/dt = f(x, c)$  или  $x_{n+1} = f(x_n, c)$  и оценить результат, но это не реально. Желательно было бы заранее выбрать относительно небольшое число наиболее подходящих вариантов и только для них проводить аппроксимацию. Для осуществления такого выбора предложен ряд процедур, опирающихся на очевидное требование: переменные динамической модели должны обеспечивать однозначность и непрерывность зависимостей значений стоящих в «левых частях» уравнений величин от значений динамических переменных. Обозначим «левую часть» модельных уравнений  $z$  и проведем дальнейшую часть процедуры аппроксимации рядов наблюдаемой  $\{x(t_i)\}$  и «левых частей»  $\{z(t_i)\}$ <sup>3</sup>. Далее нужно проверить, соответствуют ли близким значениям  $x$  близкие соответствующие значения  $z$ . Для этого область  $V$ , внутри которой содержится множество векторов  $\{x(t_i)\}$ , разбивается на одинаковые «гиперкубические» ячейки со стороной  $\delta$  (рис. 6, а). Из них выбираются все ячейки  $s_1, \dots, s_M$ , которые содержат более одного вектора  $x(t_i)$ , то есть имеют хотя бы две точки в нижней клетке рисунка. Разность между максимальным и минимальным значениями  $z$  (одной из компонент вектора  $z$ ) в пределах ячейки  $s_k$  назовем *локальным разбросом*  $\varepsilon_k$ . По величине максимального разброса  $\varepsilon_{\max} = \max_{1 \leq k \leq M} \varepsilon_k$  и графику  $\varepsilon_{\max}(\delta)$  оценивается пригодность величин  $x$  и  $z$  для глобального моделирования. Для построения глобальной модели переменные нужно выбирать так, чтобы график  $\varepsilon_{\max}(\delta)$  стремился к началу координат плавно, без изломов (жирная линия на рис. 6, б) для каждой из аппроксимируемых зависимостей  $z_k(x)$ ,  $k = 1, \dots, D$ .

При этом желательно, чтобы наклон графика  $\varepsilon_{\max}(\delta)$  был как можно меньшим, потому что для аппроксимации тогда достаточно использовать более простую модельную функцию, например, многочлен низкого порядка. На рис. 6, в, г это проиллюстрировано на простом примере – аппроксимации зависимости следующего значения наблюдаемой от предыдущего, когда наблюдаемая генерируется первой, второй или третьей итерацией квадратичного отображения  $x(t_{n+1}) = \lambda - x^2(t_n)$ . График первой итерации «наименее осциллирующий», а потому наклон  $\varepsilon_{\max}(\delta)$  самый маленький. Именно в этом случае проще всего получить «хорошую» модель

<sup>3</sup>Для обыкновенных дифференциальных уравнений это делают численным дифференцированием ряда  $\{x(t_i)\}$ , а для отображений – сдвигом  $\{x(t_i)\}$  на один шаг по времени.

19. Zhou C.T., Kurths J., Allaria E., Boccaletti S., Meucci R., and Arecchi F.T. Noise-enhanced synchronization of homoclinic chaos in a CO2 laser // Phys. Rev. E. 2003. Vol. 67. P. 015205.
20. Hirsch J.E., Huberman B.A., and Scalapino D.J. Theory of intermittency // Phys. Rev. A. 1982. Vol. 25, № 1. P. 519.
21. Kye W.-H. and Kim C.-M. Characteristic relations of type-I intermittency in the presence of noise // Phys. Rev. E. 2000. Vol. 62, № 5. P. 6304.
22. Cho Jin-Hang, Ko Myung-Suk, Park Young-Jai, and Kim C.-M. Experimental observation of the characteristic relations of type-i intermittency in the presence of noise // Phys. Rev. E. 2002. Vol. 65, № 3. P. 036222.
23. Kye W.-H., Rim S., Kim C.-M., Lee Jong-Han, Ryu Jung-Wan, Yeom Bok-Sil, and Park Young-Jai. Experimental observation of characteristic relations of type-III intermittency in the presence of noise in a simple electronic circuit // Phys. Rev. E. 2003. Vol. 68, № 3. P. 036203.
24. Kim C.-M., Kwon O.J., Lee Eok-Kyun, and Lee Hoyun. New characteristic relations in type-i intermittency // Phys. Rev. Lett. 1994. Vol. 73, № 4. P. 525.
25. Kim C.-M., Yim Geo-Su, Ryu Jung-Wan, and Park Young-Jai. Characteristic relations of type-iii intermittency in an electronic circuit // Phys. Rev. Lett. 1998. Vol. 80, № 24. P. 5317.
26. Hirsch J.E., Nauenberg M., and Scalapino D.J. // Phys. Lett. A. 1982. Vol. 87. P. 391.
27. Crutchfield J.P., Farmer J.D., and Huberman B.A. Fluctuations and simple chaotic dynamics // Physics Reports. 1982. Vol. 92, № 2 P. 45.
28. Pikovsky A.S., Rosenblum M.G., and Kurths J. Phase synchronisation in regular and chaotic systems // Int. J. Bifurcation and Chaos. 2000. Vol. 10, № 10. P. 2291.
29. Hramov A.E., Koronovskii A.A., and Kurovskaya M.K. Two types of phase synchronization destruction // Phys. Rev. E. 2007. Vol. 75, № 3. P. 036205.
30. Pikovsky A.S., Rosenblum M.G., Osipov G.V., and Kurths J. Phase synchronization of chaotic oscillators by external driving // Physica D. 1997. Vol. 104, № 4. P. 219.
31. Rulkov N.F., Sushchik M.M., Tsimring L.S., and Abarbanel H.D.I. Generalized synchronization of chaos in directionally coupled chaotic systems // Phys. Rev. E. 1995. Vol. 51, № 2. P. 980.
32. Pyragas K. Weak and strong synchronization of chaos // Phys. Rev. E. 1996. Vol. 54, № 5. R4508-R4511.
33. Kocarev Lj. and Parlitz U. Generalized synchronization, predictability, and equivalence of unidirectionally coupled dynamical systems // Phys. Rev. Lett. 1996. Vol. 76, № 11. P. 1816.
34. Abarbanel H.D.I., Rulkov N.F., and Sushchik M.M. Generalized synchronization of chaos: The auxiliary system approach // Phys. Rev. E. 1996. Vol. 53, № 5. P. 4528.
35. Fahy S. and Hamann D.R. Transition from chaotic to nonchaotic behavior in randomly driven systems // Phys. Rev. Lett. 1992. Vol. 69, № 5. P. 761.

36. *Martian A. and Banavar J.R.* Chaos, noise and synchronization // *Phys. Rev. Lett.* 1994. Vol. 72, № 10. P. 1451.
37. *Toral R., Mirasso C.R., Hernández-García E., and Piro O.* Analytical and numerical studies of noise-induced synchronization of chaotic systems // *Chaos.* 2001. Vol. 11, № 3. P. 665.
38. *Zhou C.T. and Kurths J.* Noise-induced phase synchronization and synchronization transitions in chaotic oscillators // *Phys. Rev. Lett.* 2002. Vol. 88. P. 230602.
39. *Hramov A.E., Koronovskii A.A., and Moskalenko O.I.* Are generalized synchronization and noise-induced synchronization identical types of synchronous behavior of chaotic oscillators? // *Phys. Lett. A.* 2006. Vol. 354, № 5–6. P. 423.
40. *Pikovsky A.S., Rosenblum M.G., and Kurths J.* Synchronization: a universal concept in nonlinear sciences, Cambridge University Press, 2001.
41. *Boccaletti S., Kurths J., Osipov G.V., Valladares D.L., and Zhou C.T.* The synchronization of chaotic systems // *Physics Reports.* 2002. Vol. 366. P. 1.
42. *Hramov A.E. and Koronovskii A.A.* Generalized synchronization: a modified system approach // *Phys. Rev. E.* 2005. Vol. 71, № 6. P. 067201.
43. *Hramov A.E., Koronovskii A.A. and Moskalenko O.I.* Generalized synchronization onset // *Europhysics Letters.* 2005. Vol. 72, № 6. P. 901.
44. *Hramov A.E., Koronovskii A.A., Ponomarenko V.I., and Prokhorov M.D.* Detecting synchronization of self-sustained oscillators by external driving with varying frequency // *Phys. Rev. E.* 2006. Vol. 73, № 2. P. 026208.
45. *Hramov A.E., Koronovskii A.A., Ponomarenko V.I., and Prokhorov M.D.* Detection of synchronization from univariate data using wavelet transform // *Phys. Rev. E.* 2007. Vol. 75, № 5. P. 056207.

Поступила в редакцию 29.07.2009

#### DISTRIBUTION OF THE LAMINAR PHASES IN THE CASE OF TYPE-I INTERMITTENCY WITH NOISE

*A.A. Koronovskii, M.K. Kurovskaya, A.E. Hramov*

This work is devoted to the intermittent behavior caused by the interplay between the dynamical mechanisms resulting in the type-I intermittency and the stochastic processes. The analytical consideration of the laminar phase distribution is given.

*Keywords:* Intermittency, saddle-node bifurcation, noise, chaotic synchronization, laminar phase distribution.

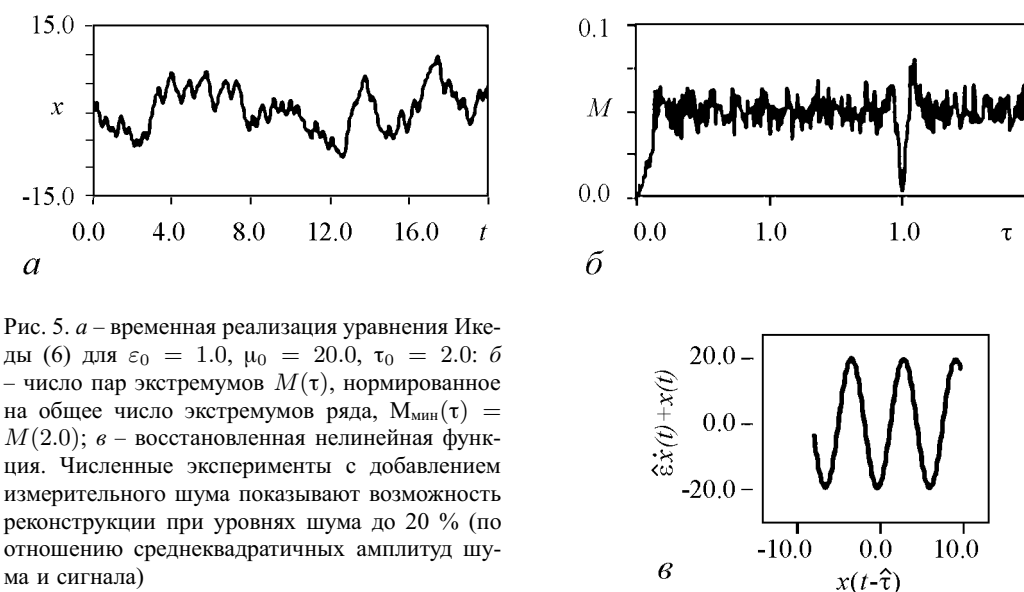


Рис. 5. *a* – временная реализация уравнения Икеды (6) для  $\varepsilon_0 = 1.0$ ,  $\mu_0 = 20.0$ ,  $\tau_0 = 2.0$ ; *b* – число пар экстремумов  $M(\tau)$ , нормированное на общее число экстремумов ряда,  $M_{\min}(\tau) = M(2.0)$ ; *в* – восстановленная нелинейная функция. Численные эксперименты с добавлением измерительного шума показывают возможность реконструкции при уровнях шума до 20 % (по отношению среднеквадратичных амплитуд шума и сигнала)

Описанный статистический подход к определению времени задержки может быть распространен на системы с запаздыванием более высокого порядка, а также на системы с несколькими различными временами задержки. Он экономичен по отношению к машинному времени и использует для восстановления нелинейной функции все точки временного ряда, что позволяет по коротким временным рядам восстанавливать нелинейную функцию  $F$  даже в случаях слаборазвитого хаоса. Статистический подход не критичен к присутствию шума в наблюдаемой. На рис. 5, *в* в качестве примера приведены результаты реконструкции по хаотической временной реализации (рис. 5, *a*) уравнения Икеды, описывающего динамику пассивного оптического резонатора,

$$\varepsilon \dot{x}(t) = -x(t) + \mu \sin(x(t - \tau_0) - x_0). \quad (6)$$

**2.1.2. Реконструкция неавтономных систем: регулярное воздействие.** Часто информацию о наличии регулярного воздействия можно получить из анализа спектра мощности наблюдаемого ряда, который для таких систем обнаруживает дискретные составляющие. В этом случае в уравнения модели включаются описывающие воздействие функции, явно зависящие от времени. Например, если воздействие гармоническое и аддитивное, целесообразна модель в виде

$$\frac{d^D x}{dt^D} = f\left(x, \frac{dx}{dt}, \dots, \frac{d^{D-1}x}{dt^{D-1}}, \mathbf{c}\right) + a \cos \omega t + b \sin \omega t, \quad (7)$$

где  $f$  – алгебраический многочлен.

В случае произвольного регулярного воздействия (сложного периодического и квазипериодического) удобно представление

$$\frac{d^D x}{dt^D} = f\left(x, \frac{dx}{dt}, \dots, \frac{d^{D-1}x}{dt^{D-1}}, \mathbf{c}\right) + g(t, \mathbf{c}), \quad (8)$$

где функция  $g(t)$  описывает воздействие и также содержит неизвестные параметры. Она может иметь вид тригонометрического многочлена

## 1. Идея реконструкции по временному ряду

Предшественниками современных задач математического моделирования по экспериментальным рядам являются известные с середины XVIII века задачи аппроксимации – описания явной временной зависимости наблюдаемой величины  $\eta = f(t, c)$  некоторой функцией  $f$ , где  $c$  –  $P$ -мерный вектор параметров модели. Их можно интерпретировать как проведение кривой через экспериментальные точки на плоскости  $(t, \eta)$  или вблизи этих точек (рис. 2). Если качественный вид связи между величинами  $t$  и  $\eta$  – функция  $f(t, c)$  – известен с точностью до значений компонент  $c$ , задача состоит в том, чтобы как можно точнее оценить параметры зависимости. В другой, более сложной, постановке задачи требуется найти функцию  $f$ , способную обеспечить прогноз поведения с минимальной погрешностью. В примере, представленном на рис. 2, напрашивается предположение о поиске  $f$  в виде перевернутой и смещенной параболы. Здесь действительно фигурирует парабола, поэтому три параметра модели в отсутствие шумов (рис. 2, а) точно определяются из системы алгебраических уравнений с известными левыми частями

$$\begin{aligned} \eta_1 &= c_0 + c_1 t_1 + c_2 t_1^2, \\ \eta_2 &= c_0 + c_1 t_2 + c_2 t_2^2, \\ \eta_3 &= c_0 + c_1 t_3 + c_2 t_3^2, \end{aligned} \quad (1)$$

составленной для любых трех различающихся моментов времени  $t_1, t_2, t_3$ . В стохастическом случае (рис. 2, б) модель ищется в виде

$$\eta = f(t, c_0) + \xi(t), \quad (2)$$

где  $\xi$  – случайный процесс («шум») с нулевым средним<sup>1</sup>. Здесь при расчете параметров речь идет не о точном их значении, а о получении *статистических оценок*  $\hat{c}$ , как можно более близких к  $c_0$ .

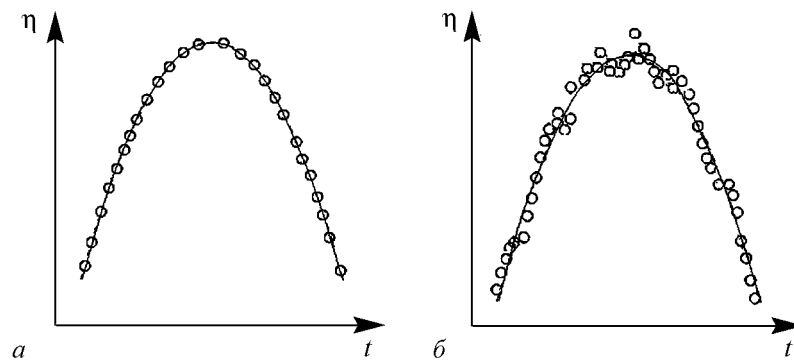


Рис. 2. Иллюстрация задачи – провести кривую заданного вида через экспериментальные точки (кружочки) на плоскости: а – шума нет, вид функции подобрать несложно; б – точки не ложатся в точности на простую кривую из-за случайной помехи, либо из-за сложного характера зависимости. Задача состоит в аппроксимации наблюдаемой зависимости простой функцией

<sup>1</sup>В статистике процедура создания модели по рядам известна под названием «идентификация систем».

подобия  $S(\tau)$

$$\mu = \min_{\tau} (S(\tau)),$$

где

$$S(\tau) = \sqrt{\frac{\langle (x_2(t+\tau) - x_1(t))^2 \rangle}{\sqrt{\langle x_1(t) \rangle^2 \langle x_2(t) \rangle^2}}}.$$

В случае полной синхронизации минимум функции  $S(\tau)$  достигается при  $\tau = 0$ , при синхронизации с задержкой – при некотором положительном  $\tau$ . В обоих случаях свидетельством полностью синхронного поведения является равенство нулю индекса синхронизации  $\mu$ .

В случае фазовой синхронизации, когда «амплитуды» колебаний оказываются некоррелированными, а «фазы» – захвачены, можно ввести формальное определение в виде неравенства

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |\varphi_1(t) - \varphi_2(t)| < M, \quad (1)$$

где  $\varphi_1, \varphi_2$  – мгновенные фазы первого и второго осцилляторов, а  $M$  некоторая положительная константа. Естественной количественной мерой для фазовой синхронизации может служить коэффициент эффективной диффузии разности мгновенных фаз [9]

$$D_{\text{эфф}} = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left[ \langle (\varphi_2(t) - \varphi_1(t))^2 \rangle - \langle (\varphi_2(t) - \varphi_1(t)) \rangle^2 \right].$$

Эта величина показывает насколько быстро происходит диффузия разности фаз взаимодействующих осцилляторов и связана, таким образом, со средним временем, в течение которого имеет место захват фаз. Для полной фазовой синхронизации  $D_{\text{эфф}} = 0$ . При разрушении фазовой синхронизации, когда длительные интервалы синхронного поведения прерываются внезапными «проскальзываниями» фаз,  $D_{\text{эфф}}$  начинает монотонно расти по мере ухода от режима синхронизации.

## 2. Различные подходы к построению универсальной меры синхронизации хаоса

Указанные количественные характеристики хаотической синхронизации являются частными, поскольку применимы лишь для определенного вида синхронизации. Кроме того, получаемые из них величины имеют относительный характер: их конкретные значения ничего не скажут исследователю, насколько сильной или слабой является синхронизация в каждом рассматриваемом случае. Имеет смысл лишь сопоставление значений одной и той же величины на разных этапах перехода от синхронного состояния к несинхронному. Хотелось бы иметь универсальную количественную меру синхронизации, позволяющую сравнивать степень согласованности движений для разных проявлений взаимоподстройки осцилляторов. Разумно потребовать, чтобы эта количественная характеристика удовлетворяла следующим критериям.

1. Универсальность, то есть применимость к разным видам синхронного поведения.

2. Ясный физический смысл, позволяющий легко интерпретировать получаемые результаты.



3. Инвариантность к виду конкретных уравнений, описывающих колебательную систему. Это означает, что количественная мера должна рассчитываться только на основе сигналов, генерируемых осцилляторами, без привлечения какой-либо информации о структуре ее уравнений.

4. Устойчивость по отношению к действию малых возмущающих факторов, таких как внешний шум или малые искажения генерируемых сигналов.

5. Кроме того, количественная характеристика должна представлять собой вещественное число, принимающее значение в заданном интервале, например, от нуля до единицы. Причем выбранный интервал определения должен быть единым для всех рассматриваемых динамических систем и видов синхронного поведения.

Первыми работами, рассматривающими задачу количественной меры хаотической синхронизации, можно, по-видимому, считать работы П.С. Ланды и М. Розенблюма [10, 11], в которых для этой цели предлагалось использовать размерность аттрактора (речь шла о корреляционной размерности, однако, предполагалось, что можно применять и другие определения размерности хаотического аттрактора). В частности, полностью синхронными полагались такие колебания, для которых размерность аттрактора в полном фазовом пространстве системы совпадала с «частичной размерностью», то есть с размерностью, подсчитанной в проекции фазового подпространства на один осциллятор. В дальнейшем появились и другие подходы к построению количественной характеристики хаотической синхронизации, которые базировались на измерении взаимной информации между подсистемами [12], измерении «близости» фазовых точек в синхронизируемой подсистеме, отвечающих соседним фазовым точкам в синхронизирующем осцилляторе (так называемый метод «нелинейных взаимозависимостей») [12–16], а также на анализе отображений возврата (recurrent plots approach) [17].

Наличие большого числа разнообразных алгоритмов, дающих подчас противоречивые результаты свидетельствует о том, что задача нахождения «хорошей» универсальной количественной меры хаотической синхронизации пока не решена. В данной работе предлагается оригинальный подход к построению указанной характеристики на основе функции когерентности.

### 3. Индекс хаотической синхронизации, основанный на когерентности колебаний

Основная идея метода заключается в следующем. Возьмем два хаотических сигнала, генерируемых взаимодействующими осцилляторами  $x(t)$  и  $y(t)$ . В спектральном представлении им соответствуют их фурье-образы  $F_x(\omega)$  и  $F_y(\omega)$ , получаемые через непрерывное преобразование Фурье от сигналов

$$F_{x,y}(\omega) = |F_{x,y}(\omega)| \exp(j\theta_{x,y}(\omega)) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) [y(t)] \exp(-j\omega t) dt.$$

Здесь  $\theta_{x,y}(\omega)$  обозначает фазовый спектр сигналов на частоте  $\omega$ . Усредняя фурье-образы по ансамблю, получаем спектр мощности, характеризующий распределение мощности сигнала по частоте,

$$P_{x,y}(\omega) = \langle F_{x,y}(\omega) F_{x,y}^*(\omega) \rangle,$$

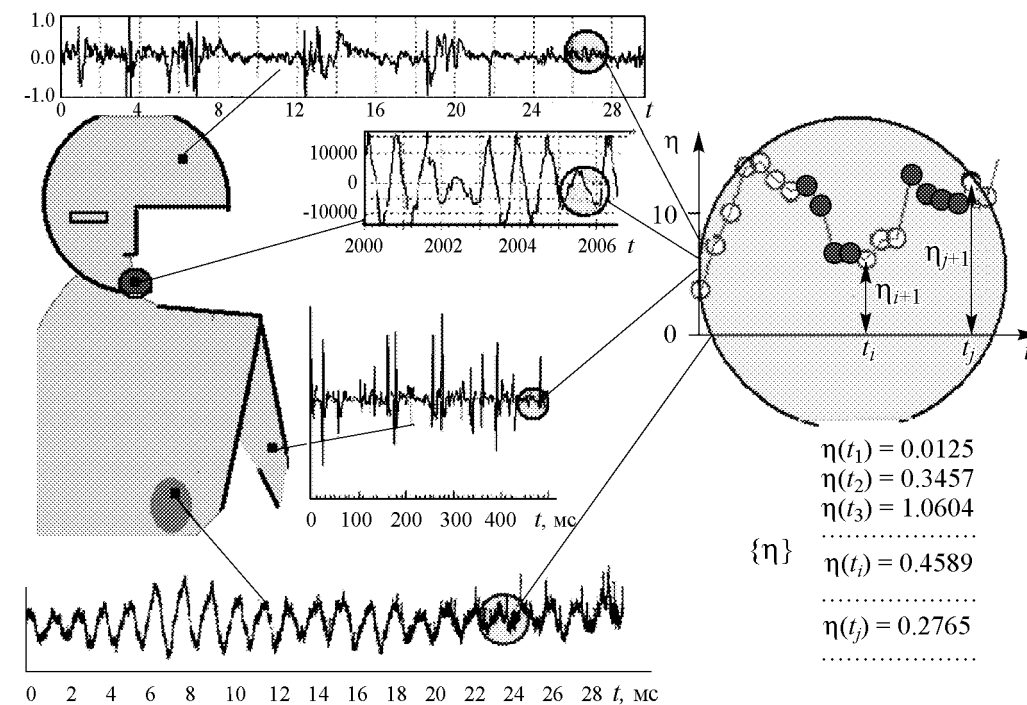


Рис. 1. Вид записей сигналов активного мозга, звукового, потенциала на коже, связанного с активностью мышц, давления в нефроне почки. Все они имеют вид временного ряда (см. справа увеличенный фрагмент графика и соответствующий численный ряд)

подход добавляет к достоинствам непосредственного анализа сигналов возможности прогноза поведения во времени или при изменении параметров, классификации сигналов и диагностики, хранения данных, оценки адекватности представлений об объекте или о механизмах его функционирования, измерения величин не поддающихся прямой регистрации и т.п.

О том, как создать по временному ряду такую математическую конструкцию, почему для сложных движений предпочтительны уравнения, а не функции времени, и какие специфические приемы можно использовать, изложено ниже.

Начнем с идеи и предыстории задачи реконструкции (раздел 1), затем рассмотрим типичные подходы и некоторые оригинальные приемы восстановления уравнений и некоторые поучительные примеры (раздел 2), а закончим иллюстрацией нескольких приложений описываемой техники на практике (раздел 3). Достаточно полный перечень публикаций по рассматриваемым вопросам потребовал бы слишком много места, поэтому предлагаем заинтересованному читателю такой список в доступной на сайте ([www.nonlinmod.sgu.ru](http://www.nonlinmod.sgu.ru)) книге Безручко Б.П., Смирнова Д.А. «Математическое моделирование и хаотические временные ряды» (Саратов: ГосУНЦ «Колледж», 2005), которая легла в основу обзора. Для иллюстраций используем результаты, ранее изложенные в статьях нашей научной группы из СГУ и СФ ИРЭ РАН; ряд уникальных экспериментальных данных для расчетов был представлен нашими партнерами: из Москвы И.Г. Моховым из Института физики атмосферы РАН (климатические данные) и из Германии П. Тассом из Института медицины Исследовательского центра города Юлих (медицинские данные).



для случая (а) и « $\diamond$ » для случая (б). Видно, что в случае слабого нелинейного искажения зависимости для измененного и исходного сигналов практически совпадают. Это также означает, что представленная зависимость величины  $S$  от связи может характеризовать обобщенную синхронизацию хаоса, наблюдаемую в модифицированной системе (7). Если искажения значительны, то совпадение присутствует только в области полной синхронизации и при ее полном отсутствии при нулевой связи. В остальном диапазоне связи расхождение между  $S_{xy}$  и  $S_{uv}$  значительны и можно говорить лишь об их качественном соответствии.

Таким образом, проведенный анализ показал, что предлагаемая количественная характеристика не чувствительна к действию слабого шума и малых искажений.

### Выводы

Функция когерентности является мощным средством для анализа явления хаотической синхронизации. Индекс синхронизации, построенный на ее основе, может применяться для измерения и диагностики различных типов синхронного поведения: полной или обобщенной синхронизации. Он обладает следующими преимуществами:

- имеет ясный физический смысл и прямо следует из традиционной концепции синхронизации как захват фаз колебаний осцилляторов;
- его расчет базируется на хорошо известных и досконально изученных методах цифрового спектрального анализа;
- позволяет также производить выборочный анализ уровня синхронизации для определенного частотного диапазона. Например, возможно в отдельности рассматривать синхронизацию «быстрых» и «медленных» колебаний.

### Библиографический список

1. Fujisaka H., Yamada T. Stability theory of synchronized motion in coupled-oscillator systems // Prog. Theor. Phys. 1983. Vol. 69. P. 32.
2. Пиковский А.С. О взаимодействии странных аттракторов // ИПФ АН СССР, № 79. Горький, 1983.
3. Анищенко В.С., Постнов Д.Э. Эффект захвата базовой частоты хаотических автоколебаний. Синхронизация странных аттракторов // Письма в ЖТФ. 1988. Т. 14, вып. 6. С. 569.
4. Анищенко В.С., Вадивасова Т.Е., Постнов Д.Э., Сафонова М.А. Вынужденная и взаимная синхронизация хаоса // Радиотехника и электроника, 1991. Т. 36, № 2. С. 338.
5. Rosenblum M.G., Pikovsky A.S., Kurths J. Phase synchronization of chaotic oscillators // Phys. Rev. Lett. 1996. Vol. 76. P. 1804.
6. Rulkov N.F., Suschik M.M., Tsimring L.S., Abarbanel H.D.I. Generalized synchronization of chaos in directionally coupled chaotic systems // Phys. Rev. E. 1995. Vol. 51. P. 980.
7. Rosenblum M.G., Pikovsky A.S., Kurths J. From phase to lag synchronization in coupled chaotic oscillators // Phys. Rev. Lett. 1997. Vol. 78. P. 4193.
8. Hramov A.E., Koronovskiy A.A. An approach to chaotic synchronization // Chaos. 2004. Vol. 14, № 3. P. 603.

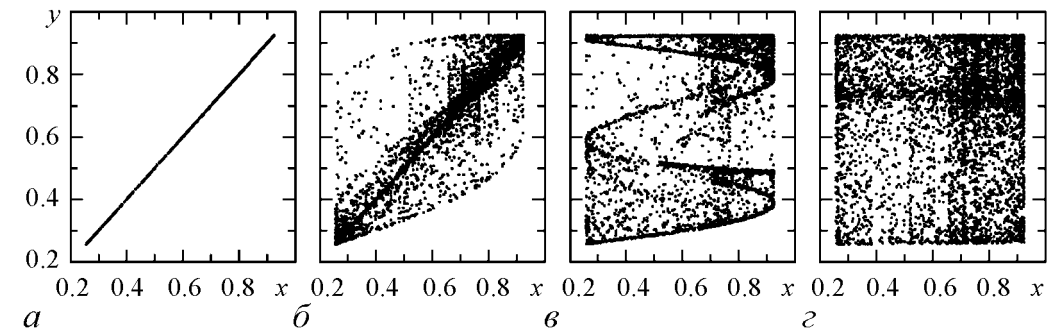


Рис. 1. Фазовые портреты колебаний в системе (5) при  $\alpha = 3.7$  для последовательно уменьшаемых значений связи  $\gamma$ : а – 0.32, б – 0.29, в – 0.1, з – 0.005

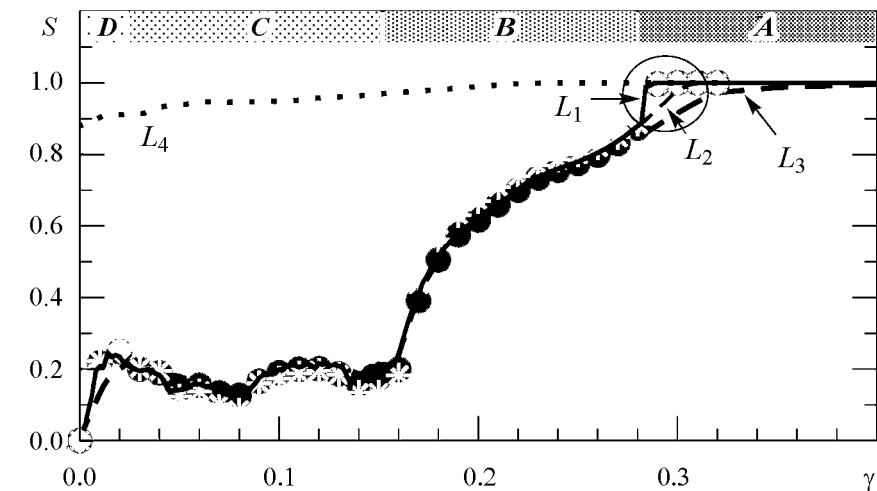


Рис. 2. Зависимость индекса синхронизации  $S$  от параметра связи:  $L_1$  – для системы без шума и искажений (5),  $L_2$  – для системы с аддитивным шумом (6) при  $a = 10^{-5}$  и  $L_3$  – при  $a = 10^{-2}$ . Символами отображаются зависимости, построенные по модифицированным сигналам  $u$  и  $v$ : \* – линейное усиление одного из сигналов ( $u = x, v = 10y$ );  $\circ$  – слабое нелинейное искажение ( $u = x, v = y - 0.5y^2 + 0.6y^3$ );  $\diamond$  – сильное нелинейное искажение ( $u = x, v = y - 0.7y^3$ ). Все эти зависимости построены для режима развитого хаоса при  $\alpha = 3.7$ . Пунктирная линия  $L_4$  отображает зависимость  $S$  для режима двухленточного хаоса при  $\alpha = 3.65$

Это отражается на наблюдаемой динамике: теперь как в присутствии шума, так и в его отсутствии имеет место пузырящееся поведение. «Ламинарные фазы» почти синхронных колебаний чередуются с короткими «турбулентными всплесками», когда синхронизация нарушается. Уменьшение коэффициента связи приводит к постепенному уменьшению ламинарных фаз и увеличению доли турбулентных всплесков. Режим перемежающейся синхронизации постепенно замещается несинхронными колебаниями. При  $\gamma < 0.17$  наблюдается некоторая внутренняя структурная перестройка аттрактора вследствие поглощения им хаотических предельных множеств, возникших на базе несинхронных режимов. Этот процесс отображается появлением некоторых структур внутри аттрактора, которые можно увидеть на рис. 1, в. Наконец, при очень слабой связи мы видим полностью несинхронные колебания, при которых фазовая точки практически равномерно покрывают квадратную область (рис. 1, з).

Рассмотрим теперь описанный выше процесс десинхронизации с точки зрения индекса синхронизации  $S$  (3). На рис. 2 построена зависимость индекса синхронизации в зависимости от связи (линия  $L_1$ ). Данная зависимость может быть поделена на четыре участка с качественно различным поведением.

А Горизонтальная линия  $S = 1$ , начинающаяся от  $\gamma \simeq 0.29$ , которая соответствует области, где наблюдается полная хаотическая синхронизация. Трансверсальный показатель Ляпунова  $\Lambda_{\perp}^s$  принимает в этой области отрицательные значения.

В Участок монотонного спада индекса синхронизации от  $S = 1$  до  $S \simeq 0.2$ , имеющий место в области значений связи, при которой наблюдается постепенное развитие процесса пузырения аттрактора. Он начинается с резкого падения синхронизации от  $S = 1$  до  $S \simeq 0.85$  в точке бифуркации прорыва, затем уменьшение  $S$  происходит более плавно. В этой области показатель  $\Lambda_{\perp}$  принимает близкие к нулю значения, оставаясь при этом отрицательным, в то время как трансверсальный показатель Ляпунова для синхронных движений  $\Lambda_{\perp}^s$  становится положительным.

С После  $\gamma \simeq 0.17$  и до очень слабой связи  $\gamma \simeq 0.01$  располагается участок, на котором индекс синхронизации меняется слабо, осциллируя около уровня  $S \simeq 0.2$ . Данная зависимость имеет место как раз в той области, где отмечается указанная выше внутренняя перестройка аттрактора с включением в него новых предельных множеств (см. рис. 1, а). Второй показатель Ляпунова в этой области вначале уменьшается, а затем начинает увеличиваться.

Д Наконец, при сверхслабой связи  $\gamma < 0.01$  наблюдается быстрое падение индекса синхронизации к нулю при нулевой связи. Фазовый портрет представляет собой «черный квадрат» равномерно заполненный фазовыми точками (см. рис. 1, з).

Таким образом зависимость индекса синхронизации от связи уверенно отслеживает различные стадии процесса разрушения хаотической синхронизации: от полной синхронизации до полностью несинхронного поведения. Эта характеристика в точности равна единице на стадии полной синхронизации и стремится к нулю при переходе к несвязанным осцилляторам.

Рассматриваемая система идентичных отображений является идеализацией реальных систем, в которых всегда присутствуют внешние шумы, а также имеются искажения генерируемых сигналов в канале связи между осцилляторами и измерительной аппаратурой. Типичной является ситуация, когда вместо исходного сигнала  $x(t)$  мы имеем дело с некоторым наблюдаемым сигналом  $G(x(t - \tau), \xi(t))$ , где  $G$  является некоторой детерминированной функцией, описывающей искажение сигнала в канале связи наряду с его возможной задержкой по времени на интервал  $\tau$  и учитывающей смешивание с шумом  $\xi(t)$ .

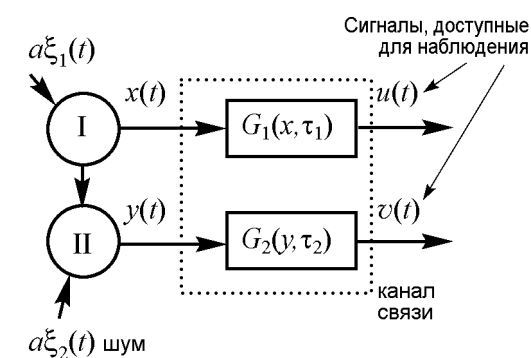


Рис. 3. Переход от исходных «идеальных» сигналов к наблюдаемым искаженным сигналам

Поэтому низкая чувствительность к действию шума и искажениям сигнала – очень важная особенность рассматриваемого индекса синхронизации. Она особенно важна при работе с сигналами биологического происхождения, когда зачастую нет возможности отделить сами сигналы от вносимых искажений.

Рассмотрим чувствительность индекса  $S$  к отмеченным выше модификациям исходных данных (рис. 3). Чтобы учесть влияние внешнего шума и искажений модифицируем систему (5) следующим образом:

$$\begin{aligned} x(n+1) &= f(x(n)) + a\xi_1(n), \\ y(n+1) &= f(y(n) + \gamma(x(n) - y(n))) + a\xi_2(n), \\ u(n) &= G_1(x(n - n_1)), \\ v(n) &= G_2(y(n - n_2)), \end{aligned} \quad (6)$$

где  $a\xi_{1,2}(n)$  – два независимых источника аддитивного шума с равномерным распределением и интенсивностью  $a$ ; анализируемые данные  $u(n)$  и  $v(n)$  представляют собой копии исходных сигналов  $x(n)$  и  $y(n)$ , трансформированных некоторыми детерминированными функциями  $G_1$  и  $G_2$  и задержанных на интервалах времени  $n_1$  и  $n_2$ . Рассмотрим воздействие каждого из указанных факторов по отдельности.

*Чувствительность к действию шума:* в этом случае в уравнениях (6)  $G_1(x) = x$ ,  $n_1 = 0$ ,  $G_2(y) = y$ ,  $n_2 = 0$ . Интенсивность шума менялась от очень малой  $a = 10^{-5}$  (линия  $L_2$  на рис. 2) до достаточно большой  $a = 10^{-2}$  (линия  $L_3$  на рис. 2) Измерения показали, что шум слабо влияет на значение  $S$  за исключением узкой области по связи, соответствующей режиму негрубой синхронизации (на рисунке это область выделена окружностью). При малой интенсивности шума данный интервал – единственный, где зависимость для системы с шумом и без него можно различить визуально. Высокая чувствительность шума в области негрубой синхронизации – естественное следствие высокой чувствительности поведения системы к шуму в данном диапазоне связи. При средних значениях связи индекс синхронизации отличается от идеального случая во всем интервале значений параметра связи (см. линию  $L_3$  на рис. 2).

*Чувствительность к искажениям формы сигналов:*  $u(n) = G_1(x(n))$ ,  $v(n) = G_2(y(n))$ . Если обе функции являются взаимно однозначными, уравнения (6) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} u(n+1) &= g(u(n)), \\ v(n+1) &= h(v(n), u(n), \gamma), \end{aligned} \quad (7)$$

где  $g(u) = G_1(f(G_1^{-1}(u)))$ ,  $h(v, u, \gamma) = G_2(f(G_2^{-1}(v) + \gamma(G_1^{-1}(u) - G_2^{-1}(v))))$ . Полная синхронизация в исходной системе (5) индуцирует обобщенную синхронизацию  $u(n) = G_1(G_2^{-1}(v(n)))$  в ее модифицированном аналоге (7). Если же взаимная однозначность отсутствует, то есть обратные функции  $G_1^{-1}$  и  $G_2^{-1}$  имеют по несколько ветвей, передача сигналов по искажающим каналам связи сопровождается потерей информации, что означает принципиальную невозможность восстановить исходные сигналы по принятым данным. При нелинейных искажениях как функция когерентности, так и спектры мощности меняются. Поэтому, естественно, изменяет свое значение и индекс синхронизации. Насколько чувствительным является индекс  $S$  к нелинейным искажениям? Чтобы ответить на этот вопрос было выбрано два вида нелинейных функций, изменяющих форму анализируемых сигналов: (а) слабая нелинейность ( $G_1(x) = x$ ,  $G_2(y) = y - 0.5y^2 + 0.6y^3$ ), при которой не нарушается взаимная однозначность между исходным и измененными сигналами, а значит не происходит потери информации о процессе в канале связи, и (б) достаточно сильное искажение ( $G_1(x) = x$ ,  $G_2(y) = y - 0.7y^3$ ) с нарушением взаимной однозначности, то есть с потерей информации. Результаты представлены на рис. 2 символами «○»

всем диапазоне частот, а только в некотором поддиапазоне  $\omega_1 \leq \omega \leq \omega_2$ . Для этого достаточно изменить пределы интегрирования в формуле для усреднения

$$\hat{S}_{xy}(\omega_1, \omega_2) = \frac{\int_{\omega_1}^{\omega_2} h(\omega) \sigma_{xy}(\omega) d\omega}{\int_{\omega_1}^{\omega_2} (P_x(\omega) + P_y(\omega)) d\omega}. \quad (4)$$

$\hat{S}_{xy}(\omega_1, \omega_2)$  дает возможность количественно характеризовать хаотическую синхронизацию отдельно для «быстрых» и «медленных» колебаний. Легко увидеть, что в пределе  $\omega_2 \rightarrow \omega_1$  индекс  $\hat{S}_{xy}(\omega_1, \omega_2)$  переходит в обычную функцию когерентности  $\sigma_{xy}(\omega_1)$ .

Расчеты индекса синхронизации (3) не представляют трудности, поскольку базируются на известных и теоретически досконально разработанных алгоритмах спектрального оценивания. Получаемые результаты устойчивы по отношению к выборам параметров численной схемы. Основные трудности метода заключаются в необходимости анализа большого объема экспериментальных данных, поскольку разрешающая способность спектральных характеристик по частоте  $\Delta\omega$  обратно пропорциональна длине обрабатываемой реализации, а статистическая устойчивость результатов пропорциональна корню квадратному из числа таких реализаций.

#### 4. Количественный анализ разрушения полной синхронизации хаоса в связанных осцилляторах с дискретным временем

Рассмотрим в качестве примера анализ разрушения полной синхронизации хаоса в отображениях с дискретным временем. Будем рассматривать систему двух логистических отображений с внутренней однонаправленной связью

$$\begin{aligned} x(n+1) &= f(x(n)), \\ y(n+1) &= f(y(n) + \gamma(x(n) - y(n))), \end{aligned} \quad (5)$$

где  $f(x) = \alpha x(1-x)$ .

Система (5) демонстрирует явление полной синхронизации хаоса. Уменьшение коэффициента связи  $\gamma$  ведет сначала к локальной изрешеченности синхронного хаотического аттрактора, что проявляется в переходе от грубого режима синхронизации к негрубому режиму, а затем, через бифуркацию прорыва, к постепенной смене синхронных колебаний несинхронными. Типичные качественные изменения в фазовых портретах колебаний приведены на рис. 1 для режима одноленточного хаотического аттрактора ( $\alpha = 3.7$ ). При сильной связи ( $\gamma > 0.298$ ) трансверсальный показатель Ляпунова отрицателен, следовательно синхронное хаотическое предельное множество трансверсально устойчиво (рис. 1, а). В системе наблюдается режим хаотической синхронизации. Однако этот режим является грубым лишь при  $\gamma > 0.32$ , тогда как в диапазоне  $0.298 < \gamma < 0.32$  малый внешний шум вызывает «пузырящееся» поведение, при котором временная реализация  $(x - y)$  напоминает перемежающуюся синхронизацию. При значении связи  $\gamma = 0.298$  происходит бифуркация прорыва, за которой синхронные колебания теряют трансверсальную устойчивость и синхронный хаотический аттрактор превращается в хаотическое седло (ср. рис. 1, б).

9. Стратонович Р.Л. Избранные вопросы теории флуктуаций в радиотехнике. М.: Советское радио, 1961.
10. Ланда П.С., Розенблюм М.Г. О синхронизации хаотических автоколебательных систем // Доклады Академии наук РФ. 1992. Т. 324, № 1. С. 65.
11. Landa P.S., Rosenblum M. Synchronization and chaotization of oscillations in coupled self-oscillating systems // Appl. Mech. Reviews. 1993. Vol. 46, № 7. P. 414.
12. Quian Quiroga R., Kraskov A., Kreuz T., Grassberger P. Performance of different synchronization measures in real data: A case study on electroencephalographic signals // Phys. Rev. E. 2002. Vol. 65. 041903.
13. Schiff S.J., So P., Chang T. Detecting dynamical interdependence and generalized synchrony through mutual prediction in a neural ensemble // Phys. Rev. E. 1996. Vol. 54. P. 6708.
14. Arnhold J., Grassberger P., Lehnertz K., Elger C.E. A robust method for detecting interdependencies: application to intracranially recorded EEG // Physica D. 1999. Vol. 134. P. 419.
15. Schmitz A. Measuring statistical dependence and coupling of subsystems // Phys. Rev. E. 2000. Vol. 62. P. 7508.
16. Kramer M.A., Edwards E., Soltani M., Berger M., Knight R., Szeri A.J. Synchronization measures of bursting data: Application to the electrocorticogram of an auditory event-related experiment // Phys. Rev. E. 2004. Vol. 70. P. 011914.
17. Romano M.C., Thiel M., Kurths J., von Bloh W. Multivariate recurrence plots // Phys. Lett. A. 2004. Vol. 330. P. 214.

Поступила в редакцию 19.06.2009

#### METHODS OF MEASURING CHAOTIC SYNCHRONIZATION

A.V. Shabunin

Different universal methods of calculation of index of chaotic synchronization are considered. One of the methods, which is based on mutual coherence function, is presented in more detail. Its advantages and disadvantages, sensibility to external noise and distortions are discussed. Application of the algorithm to process of destruction of complete chaotic synchronization in two coupled systems with discrete time are demonstrated.

Keywords: Chaos, synchronization, nonlinear oscillations.



Шабунин Алексей Владимирович – окончил Саратовский государственный университет (1990). Доцент кафедры радиофизики и нелинейной динамики СГУ, доктор физико-математических наук (1998). Научные интересы – нелинейная динамика, теория колебаний, синхронизация и управление хаосом. Автор более 40 научных публикаций.

410012 Саратов, ул. Астраханская, 83  
Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского  
E-mail: shabuninav@info.sgu.ru



## МОДЕЛИРОВАНИЕ ПО ВРЕМЕННЫМ РЯДАМ В ПРИЛОЖЕНИИ К ОБРАБОТКЕ СЛОЖНЫХ СИГНАЛОВ

*Б.П. Безручко*

Сигналы, снимаемые с большинства реальных систем, особенно живых, нерегулярны, часто хаотичны, нестационарны и зашумлены. Так как современные измерительные приборы обычно реализуют цифровую обработку информации, записи сигналов имеют вид дискретной последовательности отсчетов (временных рядов). В данной лекции дается краткий обзор возможностей обработки таких экспериментальных данных с опорой на реконструкцию и использование предсказательной модели рассматриваемой временной зависимости. Описывается методика реконструкции математических моделей по рядам, которая иллюстрируется примерами из практики автора и его коллег.

*Ключевые слова:* Временные ряды, обработка сигналов, реконструкция динамических систем, эмпирическое моделирование, диагностика связей, приложения в биомедицине и науках о Земле.

### Введение

Вид временного ряда – дискретной последовательности отсчетов – имеют сигналы на выходе практически всех современных измерительных устройств, использующих цифровую обработку, в том числе электроэнцефалографов, кардиографов, миографов и многих других медицинских приборов (пример {η} на рис. 1). Форму ряда обычно имеют и записи статистических данных. С помощью сканирования в виде рядов может быть представлена информация о свойствах объектов, распределенных в пространстве. Ряды могут быть векторными и скалярными в зависимости от вида их элементов. Все имеющиеся подходы к обработке таких данных можно разделить на *непосредственную обработку* ряда и *опосредованный* путь с использованием дополнительной математической модели. *Первый подход* более традиционен – например, кардиолог непосредственно рассматривает кардиограмму, визуально оценивая форму зубцов; аналогично, непосредственно по записи сигнала (по временному ряду), только с помощью компьютера, можно оценить средние значения, спектры, корреляции или построить фазовые портреты, рассчитать меры их сложности и т.п. При *втором подходе* для анализа процесса используется его модель, описывающую динамику – **изменение переменных во времени** (в общем случае это – не модель структуры объекта или механизма его функционирования). Опосредованный

а также взаимный спектр мощности

$$C_{xy}(\omega) = \langle F_x(\omega)F_y^*(\omega) \rangle.$$

Как известно, взаимный спектр по абсолютной величине не превосходит среднегеометрическое от собственных спектров мощности. Нормируя взаимный спектр на среднегеометрическое от собственных спектров, получаем характеристику взаимодействия сигналов, которую принято называть функцией когерентности,

$$\sigma_{xy}(\omega) = \left| \frac{C_{xy}(\omega)}{\sqrt{P_x(\omega)P_y(\omega)}} \right|.$$

Функция когерентности – неотрицательная величина, принимающая значения в интервале от нуля до единицы. Она характеризует постоянство разности фаз сигналов на выбранной частоте  $\omega$ :  $\sigma(\omega) = 1$ , если все разности фаз остаются постоянными ( $\theta_x(\omega) - \theta_y(\omega) = \text{const}$ ) и  $\sigma(\omega) \rightarrow 0$ , если фазы колебаний осцилляторов независимы друг от друга. При этом плотность распределения величины  $\theta_x(\omega) - \theta_y(\omega)$  представляет собой постоянное значение, распределенное в интервале  $[-\pi; \pi]$ .

Представляя собой характеристику взаимозависимости фаз колебаний на выбранной частоте, функция когерентности является достаточно мощным средством анализа сигналов. Однако, чтобы охарактеризовать степень этой взаимозависимости суммарно для всех частот, необходимо провести ее усреднение. При этом необходимо учесть, что разные составляющие спектра дают различный вклад в общую мощность сигналов, поэтому они должны быть по-разному учтены в результирующем среднем значении. Разумно в процессе усреднения домножить функцию когерентности на весовую функцию, учитывающую вклад составляющих спектра на текущей частоте в полную мощность. Естественным кандидатом на роль такой весовой функции является сумма спектров мощности  $h(\omega) = P_x(\omega) + P_y(\omega)$ . При этом получаем формулу для усредненной функции когерентности

$$\bar{\sigma}_{xy} = \int_0^{\infty} h(\omega)\sigma_{xy}(\omega)d\omega. \quad (2)$$

Усредненная когерентность  $\bar{\sigma}_{xy}$  может принимать неотрицательные значения в диапазоне от нуля, до полной мощности рассматриваемых сигналов. Нормируя ее на суммарную мощность, получаем неотрицательную величину в интервале  $[0; 1]$

$$S_{xy} = \frac{\bar{\sigma}_{xy}}{\int_0^{\infty} (P_x(\omega) + P_y(\omega))d\omega}. \quad (3)$$

$S_{xy}$  представляет собой отношение мощности когерентной составляющей сигналов  $x$  и  $y$  к их полной мощности.

Индекс синхронизации, определенный уравнением (3), легко можно использовать и для тех случаев, когда рассматривается взаимодействие осцилляторов не во



## МЕТОДЫ ИЗМЕРЕНИЙ ХАОТИЧЕСКОЙ СИНХРОНИЗАЦИИ

А.В. Шабунин

Рассматриваются универсальные методы количественного измерения синхронизации хаоса. Детально описывается подход к измерению хаотической синхронизации, основанный на использовании усредненной функции когерентности.

*Ключевые слова:* хаос, синхронизация, нелинейные колебания.

### Введение

После открытия динамического хаоса, когда было обнаружено, что детерминированные динамические системы могут демонстрировать сложное непредсказуемое поведение, внимание исследователей было обращено на возможность синхронизации взаимодействующих хаотических осцилляторов. Такую синхронизацию стали называть «синхронизацией хаоса» или «хаотической синхронизацией». На сегодняшний день нет единого подхода к определению хаотической синхронизации. Этот термин объединяет несколько разных способов взаимной подстройки колебаний хаотических осцилляторов: полная синхронизация хаоса (ПС) [1, 2], частотная синхронизация хаоса (ЧС) [3, 4], фазовая синхронизация (ФС) [5], обобщенная синхронизация (ОС) [6], синхронизация с задержкой по времени (lag-synchronization в англоязычной литературе) [7]. В последнее время появилась попытка рассмотреть разные виды синхронизации с единых позиций, как постепенный взаимозахват фаз вейвлет-образов в разных частотных диапазонах [8]. Данный метод анализа получил название «синхронизация временных масштабов».

Наличие разных видов синхронного поведения хаотических осцилляторов, а также тот факт, что выход из режима синхронизации хаоса происходит постепенно, через частично синхронное состояние к полностью несинхронному, делает актуальной задачу диагностики и количественного анализа хаотической синхронизации.

### 1. Методы измерения для разных видов синхронизации хаоса

Для каждого из видов синхронизации вводились свои количественные меры. Легче всего ввести меру полной синхронизации или синхронизации с задержкой как степень «схожести» временных реализаций взаимодействующих осцилляторов. В работе [7] для этих целей предлагалось использовать минимальное значение функции

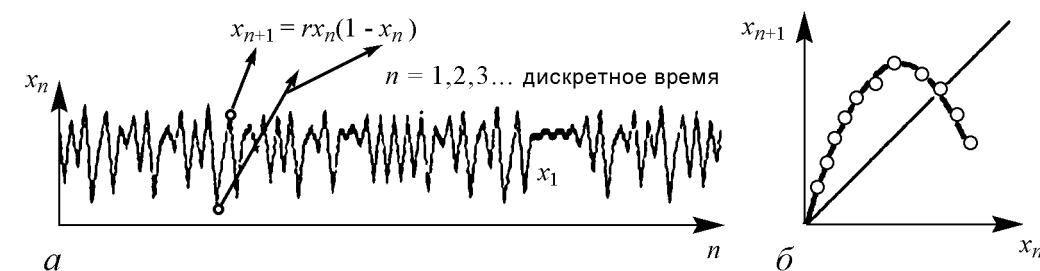


Рис. 3. Сложная хаотическая зависимость (а) точно аппроксимируется квадратичным отображением (б)

С усложнением множества точек на плоскости решение становится более громоздким – для аппроксимации приходится использовать все более длинные ряды  $\eta_3 = c_0 + c_1t + c_2t^2 + c_3t^3 + \dots + c_kt^k$ , но и эти возможности ограничены. Например, аппроксимация простой синусоиды десятком слагаемых обеспечивает хорошее приближение на интервале длиной всего в несколько периодов. Очевидно, что аппроксимация хаотического временного ряда, приведенного на рис. 3, а, требует несравненно еще более громоздкой конструкции. Но ситуация резко упрощается, если отказаться от аппроксимации ряда функцией времени, а искать *уравнение, решением которого является рассматриваемый ряд*<sup>2</sup>. Так, хаотический временной ряд (см. рис. 3, а) является решением очень простого нелинейного разностного уравнения

$$x_{n+1} = rx_n(1 - x_n), \quad (3)$$

где  $r$  – параметр, а  $n = 0, 1, 2, 3, \dots$  – дискретное время. Это – известное точечное квадратичное отображение, на котором в 1970-е годы исследовались закономерности хаотической динамики, а его график – такая же, как в (1), – парабола (рис. 3, б), но на других по сравнению с рис. 2 осях (на рис. 3, б по осям отложены значения переменной в данный и последующий моменты времени). А раз так, то задача реконструкции модели в виде  $x(t_{n+1}) = f(x(t_n), c)$  на этом этапе не усложняется по сравнению с рассмотренным ранее примером аппроксимации явной временной зависимости (хотя добавляются трудности догадки – какие величины следует взять в качестве переменных).

При аппроксимации дифференциальным уравнением  $dx/dt = f(x, c)$  по осям откладываются динамические переменные и скорости их изменения. Так, для синусоиды, являющейся решением уравнения гармонического осциллятора, переменными являются  $x_1 = x$  и  $x_2 = dx/dt$ , а модельная система имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= f_1(x_1, x_2) = x_2, \\ \frac{dx_2}{dt} &= f_2(x_1, x_2) = -\omega_0^2 x_1. \end{aligned} \quad (4)$$

Имея временные ряды переменных  $x_1, x_2$  и скоростей их изменения  $dx_1/dt, dx_2/dt$ , можно провести подбор коэффициентов искоемых функций.

<sup>2</sup>Уравнением называют запись задачи в виде равенства двух функций. Решение задачи означает нахождение зависимости переменной уравнения от времени, подстановка которой превращает равенство в тождество. Откровением XX века стало понимание способности системы трех и более одномерных нелинейных дифференциальных уравнений демонстрировать хаотическое поведение. Для дискретных систем это возможно уже при одной переменной.



Рис. 4. Схема процесса реконструкции уравнений по временным рядам

Итак, реконструкция уравнения проводится по следующей схеме (рис. 4): исходя из вида временных рядов и априорной информации выбирается тип уравнений (разностное или дифференциальное), их структура (вид функций, число переменных  $x_i$ , способ получения  $x_i$  из временных рядов наблюдаемых величин  $\{\eta\}$ ), а затем по экспериментальным значениям, взятым из рядов переменных и скоростей, проводится подгонка коэффициентов любым из известных для этого методов. Чем больше нам известно об искомой модели, тем больше вероятность успеха. Наиболее проста ситуация, когда известно все, кроме значений коэффициентов в функциях, а наиболее сложна, если сведения об объекте моделирования отсутствуют (имеем «черный ящик»). Но на каждом из этапов, даже самом простом (правом на схеме) возникают свои специфические технические трудности, для преодоления которых разрабатываются специальные технические приемы – технологии (см. литературу на сайте [www.nonlinmod.sgu.ru](http://www.nonlinmod.sgu.ru)). Рассмотрим некоторые из них.

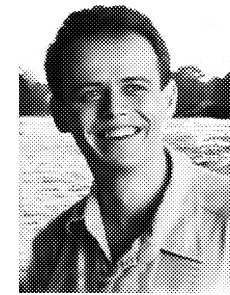
## 2. Некоторые технические приемы процедуры реконструкции

**2.1. Специфические подходы к выбору структуры модели.** Неопределенность в выборе структуры модели может быть уменьшена за счет использования априорной информации о свойствах системы или предварительного анализа рядов наблюдаемых. Проиллюстрируем это на двух важных примерах.

**2.1.1. Восстановление характеристик систем с запаздыванием.** Речь пойдет о системах, чья динамика описывается дифференциальными уравнениями с запаздывающими аргументами вида

$$\varepsilon \dot{x}(t) = -x(t) + F(x(t - \tau_0)), \quad (5)$$

где скалярная переменная  $x$  (наблюдаемая) может содержать и шумы. В принципе, можно пытаться решать задачу, используя данные ряда  $x$  с помощью метода наименьших квадратов, минимизируя сумму  $\sum_n (\dot{x}(t_n) - ax(t_n) - f(x(t_n - \tau), c))^2 \rightarrow \min$  и рассматривая при этом время задержки  $\tau$  как дополнительный неизвестный параметр. Но существуют априорные предположения и технология реконструкции, опирающаяся на анализ расположения экстремумов во временных реализациях наблюдаемых колебаний. Статистический анализ временных интервалов, разделяющих экстремумы во временных реализациях различных модельных и реальных систем с запаздыванием, позволяет установить, что зависимость от величины  $\tau$  числа  $N$  пар экстремумов временной реализации, удаленных друг от друга на время  $\tau$ , имеет четкий минимум при времени, соответствующем времени запаздывания системы (рис. 5). Далее с помощью сделанной по этому минимуму оценке  $\hat{\tau} \approx \tau_0$  можно найти оценку параметра инерционности  $\varepsilon$  и аппроксимировать нелинейную функцию  $F$ .



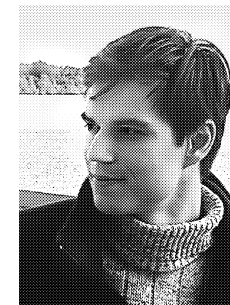
*Короновский Алексей Александрович* – родился в Саратове (1972). Окончил физический факультет Саратовского государственного университета (1995), доктор физико-математических наук (2007), профессор кафедры электроники, колебаний и волн СГУ. Область научных интересов – нелинейная динамика и ее проявления в различных сферах человеческой деятельности, в том числе нелинейная динамика социально-экономических процессов. Автор ряда статей в центральной печати, а также монографий (в соавторстве) «Нелинейная динамика в действии» и «Непрерывный вейвлетный анализ», вышедших в Издательстве ГосУНЦ «Колледж».

410012 Саратов, ул. Астраханская, 83  
Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского  
E-mail: [alkor@nonlin.sgu.ru](mailto:alkor@nonlin.sgu.ru)



*Куровская Мария Константиновна* – родилась в г. Ташауз (1986). Окончила факультет нелинейных процессов Саратовского государственного университета (2007). Награждена медалью Российской академии наук (2008). Кандидат физико-математических наук (2009). Ассистент кафедры нелинейной физики СГУ. Область научных интересов - нелинейная динамика, различные типы хаотической синхронизации и методы их диагностики. Автор ряда статей в рецензируемых отечественных и зарубежных журналах.

410012 Саратов, ул. Астраханская, 83  
Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского  
E-mail: [mc@nonlin.sgu.ru](mailto:mc@nonlin.sgu.ru)



*Храмов Александр Евгеньевич* – окончил физический факультет Саратовского госуниверситета (1996). Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата (1999) и доктора (2006) физ.-мат. наук. Профессор, заместитель заведующего кафедрой электроники, колебаний и волн факультета нелинейных процессов СГУ. Область научных интересов – радиофизика в той ее части, которая связана со взаимодействием свободных электронов с электромагнитными полями, нелинейная динамика распределенных активных сред, методы анализа и моделирования динамических систем. Опубликовал в соавторстве с чл.-корр. РАН, профессором Д.И. Трубецковым книгу «Лекции по сверхвысокочастотной электронике для физиков» (Т. 1, М.: Физматлит, 2003; Т. 2, М.: Физматлит, 2004) и в соавторстве с доцентом А.А. Короновским монографии «Непрерывный вейвлетный анализ и его приложения» (Москва: Наука, Физматлит, 2003) и «Непрерывный вейвлетный анализ в приложениях к задачам нелинейной динамики» (Саратов: Изд-во ГосУНЦ «Колледж», 2002).

410012 Саратов, ул. Астраханская, 83  
Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского  
E-mail: [ach@nonlin.sgu.ru](mailto:ach@nonlin.sgu.ru)

## Библиографический список

1. Bergé P., Pomeau Y., and Vidal Ch. L'ordre dans le chaos. Hermann, Paris, 1988.
2. Dubois M., Rubio M., and Bergé P. Experimental evidence of intermitstencies associated with a subharmonic bifurcation // Phys. Rev. Lett. 1983. Vol.51. P. 1446.
3. Platt N., Spiegel E.A., and Tresser C. On-off intermittency: a mechanism for bursting // Phys. Rev. Lett. 1993. Vol. 70, № 3. P. 279.
4. Heagy J.F., Platt N., and Hammel S.M. Characterization of on-off intermittency // Phys. Rev. E. 1994. Vol. 49, № 2. P. 1140.
5. Boccaletti S. and Valladares D.L. Characterization of intermittent lag synchronization // Phys. Rev. E. 2000. Vol. 62, № 5. P. 7497.
6. Hramov A.E. and Koronovskii A.A. Intermittent generalized synchronization in unidirectionally coupled chaotic oscillators // Europhysics Lett. 2005. Vol. 70, № 2. P. 169.
7. Pikovsky A.S., Osipov G.V., Rosenblum M.G., Zaks M., and Kurths J. Attractor-repeller collision and eyelet intermittency at the transition to phase synchronization // Phys. Rev. Lett. 1997. Vol. 79, № 1. P. 47.
8. Lee K.J., Kwak Y., and Lim T.K. Phase jumps near a phase synchronization transition in systems of two coupled chaotic oscillators // Phys. Rev. Lett. 1998. Vol. 81, № 2. P. 321.
9. Boccaletti S., Allaria E., Meucci R., and Arecchi F.T. Experimental characterization of the transition to phase synchronization of chaotic CO2 laser systems // Phys. Rev. Lett. 2002. Vol. 89, № 19. P. 194101.
10. Hramov A.E., Koronovskii A.A., Kurovskaya M.K., and Boccaletti S. Ring intermittency in coupled chaotic oscillators at the boundary of phase synchronization // Phys. Rev. Lett. 2006. Vol. 97. P. 114101.
11. Neiman A., Silchenko A., Anishchenko V.S., and Schimansky-Geier L. Stochastic resonance: Noise-enhanced phase coherence // Phys. Rev. E. 1998. Vol. 58. P. 7118.
12. Anishchenko V.S., Kopeikin A.S., Vadivasova T.E., Strelkova G.I., and Kurths J. Influence of noise on statistical properties of nonhyperbolic attractors // Phys. Rev. E. 2000. Vol. 62. P. 7886.
13. Sosnovtseva O.V., Fomin A.I., Postnov D.E., and Anishchenko V.S. Clustering of noise-induced oscillations // Phys. Rev. E. 2001. Vol. 64, № 2. P. 026204.
14. Pikovsky A.S. and Kurths J. Coherence resonance in a noise-driven excitable system // Phys. Rev. Lett. 1997. Vol. 78, № 5. P. 775.
15. Mangioni S., Deza R., Wio H., and Toral R. Disorder effects of color in nonequilibrium phase transitions induced by multiplicative noise // Phys. Rev. Lett. 1997. Vol. 79, № 13. P. 2389.
16. Zaikin A.A., Kurths J., and Schimansky-Geier L. Doubly stochastic resonance // Phys. Rev. Lett. 2000. Vol. 85, № 2. P. 227.
17. Neiman A. and Russell David F. Synchronization of noise-induced bursts in noncoupled sensory neurons // Phys. Rev. Lett. 2002. Vol. 88, № 13. P. 138103.
18. Zhou C.T., Kurths J., Kiss I.Z., and Hudson J.L. Noise-enhanced phase synchronization of chaotic oscillators // Phys. Rev. Lett. 2002. Vol. 89, № 1. P. 014101.

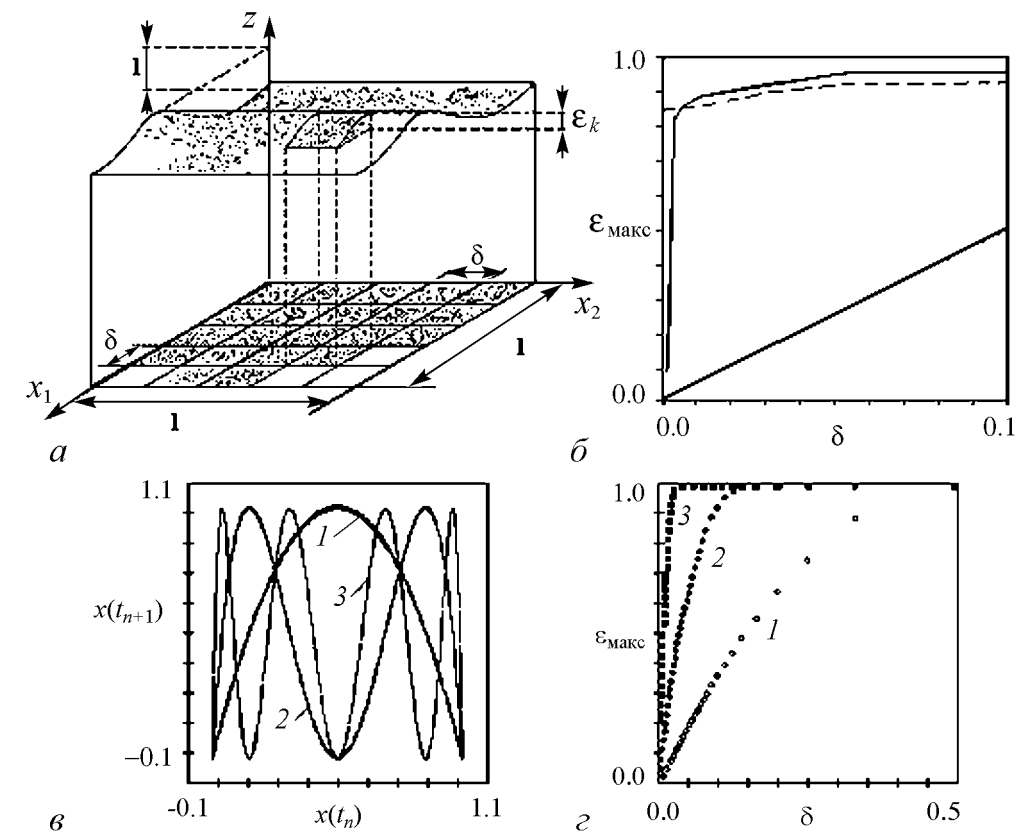


Рис. 6. *a* – иллюстрация методики проверки однозначности и непрерывности зависимости  $z(\mathbf{x})$  при  $D = 2$ ; *б* – типичные графики  $\varepsilon_{\max}(\delta)$  для различных переменных, жирная линия – лучший случай, штриховая линия – худший (неоднозначность или разрывность), тонкая линия соответствует зависимости с областями быстрого изменения; *в* – графики 1, 2 и 3-й итераций квадратичного отображения (помечены цифрами); *г* – графики  $\varepsilon_{\max}(\delta)$  для зависимостей  $x(t_{n+1})$  от  $x(t_n)$  в этих трех случаях

(действительно, достаточно многочлена второго порядка, тогда как для описания третьей итерации нужен многочлен восьмого порядка). Особенно различаются эти три случая по трудности реконструкции при наличии шумов.

Самый простой способ получения дополнительных переменных по ряду наблюдаемой это метод временных задержек. В случае скалярной наблюдаемой, согласно этому подходу, в качестве компонент вектора  $\mathbf{x}(t)$  берутся ее последовательные значения, разделенные некоторым интервалом  $\tau$  (временем задержки):  $x_1(t) = \eta(t)$ ,  $x_2(t) = \eta(t + \tau)$ , ...,  $x_D(t) = \eta(t + (D - 1)\tau)$ .

Не менее популярен и метод последовательного дифференцирования, который состоит в использовании временных производных наблюдаемой в качестве динамических переменных:  $x_1(t) = \eta(t)$ ,  $x_2(t) = d\eta(t)/dt$ , ...,  $x_D(t) = d^{D-1}\eta(t)/dt^{D-1}$ . Его применение затруднительно при наличии измерительных шумов, так как шумовая «бахрома» имеет на графике  $\eta(t)$  большую крутизну, после дифференцирования уровень шума резко возрастает.

Имеющиеся шумы частично подавляются при использовании интегрирования для получения дополнительной переменной. Например, при использовании интегралов от наблюдаемой с переменным верхним пределом:  $x_2(t) = \int_0^t \eta(t)dt$ . Однако при интегрировании теряется часть информации о наблюдаемой.



С помощью взвешенного суммирования можно составить переменную из последовательных значений наблюдаемой

$$x_2(t) = a_0\eta(t) + a_1\eta(t - \Delta t) + a_2\eta(t - 2\Delta t) + \dots,$$

где  $a_k$  – весовые коэффициенты. Возможны комбинации всех упомянутых подходов и другие способы получения рядов модельных переменных.

В заключение остановимся на очень популярном в настоящее время использовании в качестве переменной «фазы колебаний» наблюдаемой. Фазой гармонического сигнала  $x(t) = A \cos(\omega t + \phi_0)$  называют аргумент косинуса  $\phi = \omega t + \phi_0$ . Существуют обобщения понятия фазы на более сложные сигналы, из которых наиболее распространен вариант, использующий построение аналитического сигнала. Аналитический сигнал  $z(t) = x(t) + iy(t)$  строится по исходному сигналу  $x(t)$  с помощью преобразования Гильберта

$$y(t) = \text{P.V.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x(t') dt'}{\pi(t - t')}, \quad (10)$$

где P.V. означает главное значение несобственного интеграла. Это преобразование поворачивает фазы гармоник исходного сигнала на  $\pi/2$ . Фаза определяется как аргумент  $z(t)$ , то есть как угол поворота радиуса-вектора на комплексной плоскости  $(x, y)$ . Так, в случае гармонического сигнала  $x(t) = A \cos(\omega t + \phi_0)$  получаем сопряженный сигнал  $y(t) = A \sin(\omega t + \phi_0)$ . Фазовая траектория на плоскости  $(x, y)$  представляет собой окружность (рис. 7, а). Для более сложного («похожего» на гармонический, но узкополосного) сигнала наблюдается вращение радиус-вектора  $z(t)$  не по окружности, а «почти» по окружности (рис. 7, б). Фаза нарастает в среднем со скоростью, равной средней угловой частоте колебаний. В случае сложных нерегулярных сигналов без ярко выраженного основного ритма может оказаться, что построение аналитического сигнала через преобразование Гильберта не обнаружит вращения около четко определенного центра (рис. 7, в). Тогда такое формальное определение фазы, бесполезно. Поэтому часто используют полосовую фильтрацию, чтобы сузить на сколько возможно полосу частот сигнала.

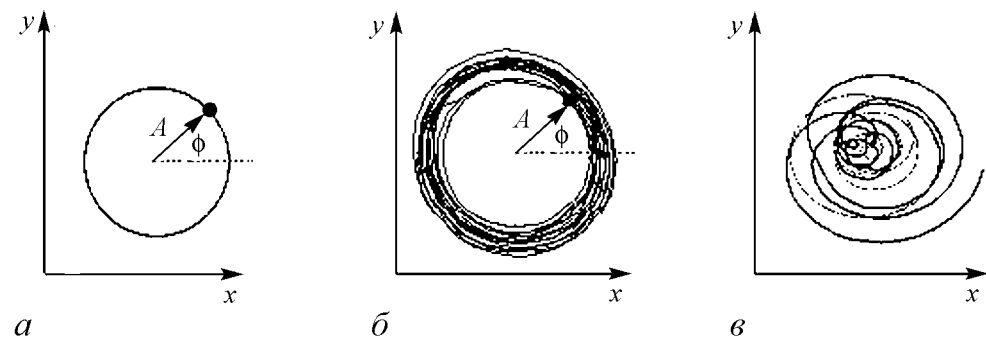


Рис. 7. а – траектория на комплексной плоскости для гармонического сигнала, его амплитуда и фаза; б – определение амплитуды и фазы негармонического узкополосного сигнала с помощью преобразования Гильберта; в – то же самое для широкополосного сигнала (фаза не является хорошо определенной величиной)

$(x, y)$  каждой системы. Наличие режима фазовой синхронизации диагностировалось при выполнении условия захвата фаз [41]

$$|\Delta\varphi(t)| = |\varphi_d(t) - \varphi_r(t)| < \text{const}. \quad (28)$$

Ниже границы режима фазовой синхронизации зависимость разности фаз  $\Delta\varphi(t)$  от времени  $t$  содержит участки синхронной динамики (ламинарные фазы), чередующиеся с участками, в течение которых значение  $|\Delta\varphi(t)|$  изменяется на  $2\pi$  (турбулентные фазы).

Как и в случае неавтономного осциллятора ван дер Поля со случайным слагаемым (25), будут наблюдаться те же самые степенной (2) и экспоненциальный (20) законы для зависимости средней длительности ламинарных фаз  $T$  от параметра надкритичности  $\varepsilon = \sigma_c - \sigma$ , ниже и выше критической точки  $\sigma_c \approx 0.031$ , соответственно (рис. 6). Распределение длительностей ламинарных фаз  $N(t)$  (рис. 7) также удовлетворяет аналитическому выражению (23).

Принимая во внимание, что полученные результаты находятся в отличном соответствии с теоретическими выводами для перемежаемости типа I в присутствии шума, можно заключить, что не только шум, имеющий случайную природу, но также и детерминированная хаотическая динамика вносит изменения в перемежающееся поведение I типа, при этом имеют место зависимости (20) и (23).

### Заключение

Таким образом, в работе рассмотрен тип перемежающегося поведения, обусловленный взаимодействием детерминированных механизмов и случайной динамики. Исследовав численно три модельные системы, включая случай, когда шум имеет детерминированную природу (два однонаправленно связанных осциллятора Ресслера), можно сделать вывод, что (а) шум вносит новые черты в перемежающееся поведение, когда система в его отсутствие демонстрирует перемежаемость I типа; (б) результаты численного моделирования находятся в отличном соответствии с построенной теорией; (в) процесс реламинизации и вероятность реинжекции не влияют на статистические характеристики перемежаемости типа I в присутствии шума. Несмотря на то, что в данной работе исследование характеристик перемежающегося поведения было проведено на примере модельных систем, можно ожидать, что те же самые закономерности будут наблюдаться во многих других важных условиях, когда уровень естественных шумов значителен, например в некоторых физиологических [44, 45] и физических [9] системах.

*Работа выполнена при поддержке Российского Фонда Фундаментальных Исследований (проекты 07-02-00044 и 09-02-92421-КЭ), Фонда некоммерческих программ «Династия», а также аналитической ведомственной программы «Развитие научного потенциала высшей школы».*



зывать метод комплексных амплитуд для поиска решения в виде  $x(t) = \text{Re } a(t)e^{i\omega t}$ , описывающего поведение осциллятора (25) в отсутствие шума. В результате для комплексной амплитуды  $a(t)$  получаем укороченное уравнение  $\dot{a} = -i\nu a + a - |a|^2 a - ik$ , где  $\nu$  – расстройка частот,  $k$  – перенормированная амплитуда внешнего воздействия. При малых  $\nu$  и больших  $k$  устойчивая неподвижная точка  $a^* = \text{const}$  на плоскости комплексной амплитуды соответствует синхронному режиму, при этом разрушению синхронизации соответствует локальная седло-узловая бифуркация, ассоциированная с глобальной бифуркацией рождения предельного цикла из общей сепаратрисы седла и узла [28, 29]. Ниже границы режима синхронизации (для малых значений расстройки частот) разность фаз в зависимости от времени

$$\Delta\varphi(t) = \varphi(t) - \omega_e t \quad (26)$$

(где  $\varphi(t)$  – фаза осциллятора ван дер Поля) содержит участки синхронной динамики (ламинарные фазы), прерываемые фазовыми проскоками (турбулентные фазы), в течение которых значение  $|\Delta\varphi(t)|$  изменяется на  $2\pi$ . Средняя длительность ламинарных фаз  $T$  зависит от параметра надкритичности  $\varepsilon = (A_c - A)$  по закону (2), соответствующему перемежаемости типа I.

Если добавить случайное слагаемое  $D\xi(t)$  ( $D \neq 0$ ), то закономерности перемежаемости типа I с шумом, описанные выше, будут выявляться для значений параметра  $A > A_c$  (рис. 5, а). Для отрицательных значений параметра надкритичности  $\varepsilon$ , как и ожидалось, наблюдается закон  $\ln T \sim D^{-1}|\varepsilon|^{3/2}$ . Чтобы показать это более наглядно, по оси абсцисс на рис. 5, а откладываются значения  $|\varepsilon|^{3/2}$  ( $\varepsilon < 0$ ), а ось ординат представлена в логарифмическом масштабе. Нетрудно видеть прекрасное соответствие численных данных и теоретических выводов (20).

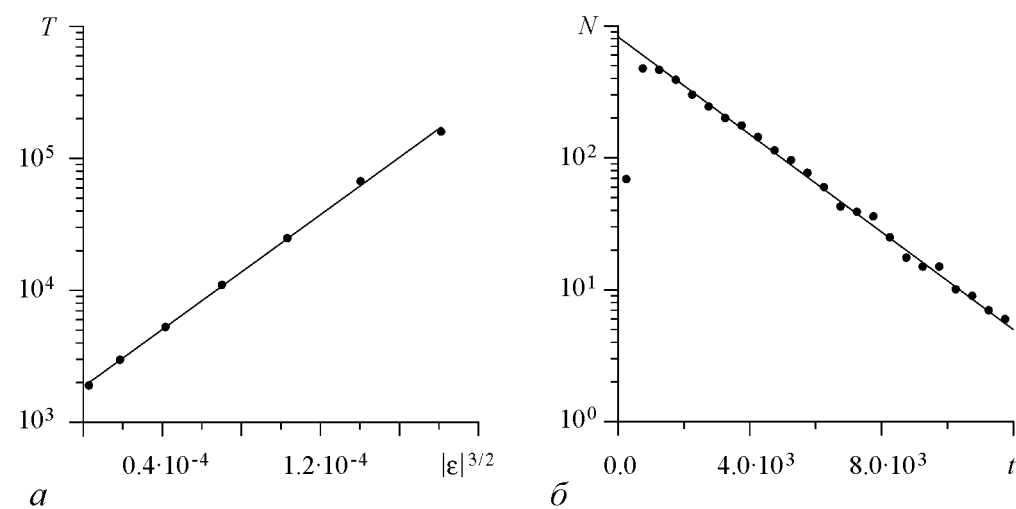


Рис. 5. а – Зависимость средней длительности  $T$  ламинарных фаз от параметра надкритичности  $\varepsilon = (A_c - A)$  для неавтономного генератора ван дер Поля со случайным воздействием (25). Точки, полученные численным интегрированием (25) изображены символами (•). Теоретический закон  $\ln T \sim |\varepsilon|^{3/2}$  показан сплошной линией. б – Распределение длительностей ламинарных фаз для неавтономного осциллятора ван дер Поля, амплитуда внешнего сигнала  $A = 0.0245$  была взята выше критической точки  $A_c = 0.0238$  ( $\varepsilon = -7 \times 10^{-4}$ ). Ось ординат представлена в логарифмическом масштабе. Аналитический экспоненциальный закон (23) показан сплошной линией

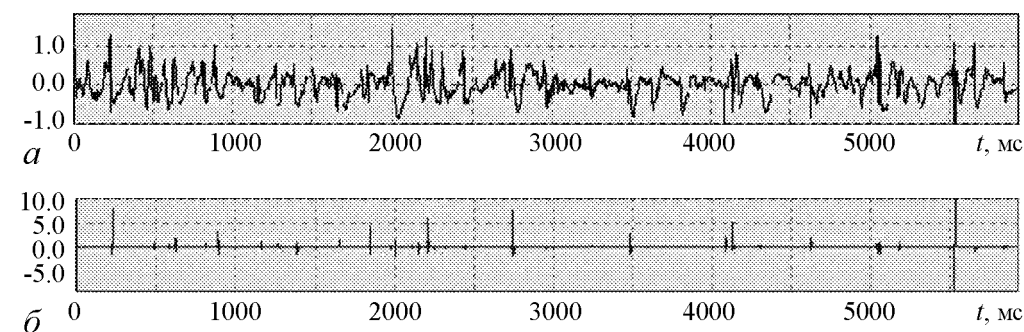


Рис. 9. Электроэнцефалограмма с присущими ей артефактами (а) и графики погрешности, где выбросы соответствуют интервалам отклонения от нормы (б)

записи, на которых коэффициенты модели остаются неизменными. Сопоставление коэффициентов моделей, подогнанных на различных участках записи, позволяет различить *интервалы стационарности* в нестационарном процессе.

Набор коэффициентов базовой модели может использоваться для запоминания данных *при диспансеризации*. Такой подход позволяет **ввести количественную меру** изменения состояния здоровья за промежуток после предыдущих обследований, если в качестве меры изменения состояния использовать расстояние между значениями параметров модели в пространстве параметров (например, среднеквадратичное значение изменений всех параметров модели).

**Анализ связей между элементами системы.** Если структура адекватной математической модели ансамбля элементов известна и имеется конечный набор вариантов структуры связей, параметры которых следует установить, можно действовать простым перебором – искать варианты, которые обеспечивают наиболее точное воспроизведение наблюдаемой динамики.

В отсутствие априорной информации о структуре модельных уравнений К. Грейнджером предложен следующий подход выявления причинно-следственных связей. Основная идея состоит в том, что по имеющимся временным рядам  $\{x_1(t_1), \dots, x_1(t_N)\}$  и  $\{x_2(t_1), \dots, x_2(t_N)\}$  строятся прогностические модели – «индивидуальные» и «совместные». Существенное улучшение прогноза динамики первой системы при усложнении модели (учете значений переменной еще и от второго элемента) воспринимается как признак наличия воздействия второй системы на первую (если такого улучшения нельзя достичь усложнением индивидуальной модели).

Наиболее чувствительным и приспособленным к выявлению предпатологий является анализ фазовой динамики. Этот подход применим, если в исходных временных рядах имеют место ярко выраженные ритмы колебаний (в спектрах мощности имеется существенный подъем в узкой полосе частот). В этом случае можно недвусмысленно определить фазы  $\phi_1$  и  $\phi_2$  наблюдаемых процессов. Широкому классу колебаний адекватно представление в виде достаточно простой системы стохастических разностных уравнений

$$\phi_{1,2}(t + \tau) - \phi_{1,2}(t) = f_{1,2}(\phi_{1,2}(t), \phi_{2,1}(t - \Delta_{1,2})), \quad (11)$$

где  $f_{1,2}$  – тригонометрические многочлены невысокого порядка;  $t$  – фиксированный

временной интервал, обычно равный меньшему из характерных периодов колебаний;  $\Delta_{1,2}$  – пробные времена запаздывания воздействий. Коэффициенты тригонометрических многочленов оценивают по временному ряду и по полученным оценкам рассчитывают силы воздействия систем друг на друга. Степень влияния  $c_{2 \rightarrow 1}^2$  системы 1 на систему 2 определяется крутизной зависимости  $f_1$  от  $\phi_2$ , аналогично для  $c_{1 \rightarrow 2}^2$ :

$$c_{2 \rightarrow 1, 1 \rightarrow 2}^2 = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \left( \frac{\partial f_{1,2}(\phi_1, \phi_2)}{\partial \phi_{2,1}} \right)^2 d\phi_x d\phi_y. \quad (12)$$

Недостатком рабочей формулы (12) является требование довольно большой длины исходного ряда (порядка 1000 условных периодов). Но это требование может быть смягчено на порядок, если ввести поправки  $r_{1,2}$

$$\gamma_{1 \rightarrow 2, 2 \rightarrow 1} = c_{1 \rightarrow 2, 2 \rightarrow 1}^2 + r_{1,2},$$

зависящие от уровня шума, частот колебаний и длины временного ряда.

Перечисленные варианты оценок связанности полезны в приложении ко многим заболеваниям нервной системы, включая эпилепсию и болезнь Паркинсона, при которых имеет место патологическая синхронизация нейронов. Однако функциональная роль этой синхронизации при генерации паркинсоновского тремора (непроизвольных регулярных колебаний конечностей с частотами от 3 до 6 Гц) остается предметом обсуждений. Несмотря на неполную ясность механизма патологии, в качестве стандартной терапии при отсутствии эффекта от лекарств используется постоянная глубокая электрическая стимуляция мозга. Процедура небезобидна – не исключены побочные эффекты, а уменьшить меру воздействия можно лишь, увеличивая целенаправленность воздействия. В связи с этим актуальна задача определения характера связей между различными областями мозга и колебаниями конечностей пациентов.

Задача решалась нами путем анализа экспериментальных данных с использованием записей локальных потенциалов с глубинных электродов и сигналов акселерометров, закрепленных на конечностях (рис. 10). Информация об активности мозга была представлена записями локальных потенциалов от четырех глубинных электродов, вживленных в таламус или базальные ганглии. Данные из нескольких десятков интервалов спонтанного тремора для каждого пациента были получены на факультете стереотаксической и функциональной нейрохирургии Университета Кельна и в Институте нейронауки и биофизики Исследовательского центра Юлиха.

С помощью нелинейного метода, основанного на моделировании фазовой динамики, была выявлена двунаправленная связь между процессами. Оказалось, что воздействие субталамического ядра на конечности является нелинейным эффектом и демонстрирует запаздывание в 200–400 мс. Обратное воздействие (конечности – субталамическое ядро) носит линейный характер с запаздыванием не более 50 мс. Такое взаимодействие обнаружено по экспериментальным данным впервые и означает, что субталамическое ядро является звеном «кольца обратной связи», определяющим колебания конечностей, а не просто пассивным приемником сигналов.

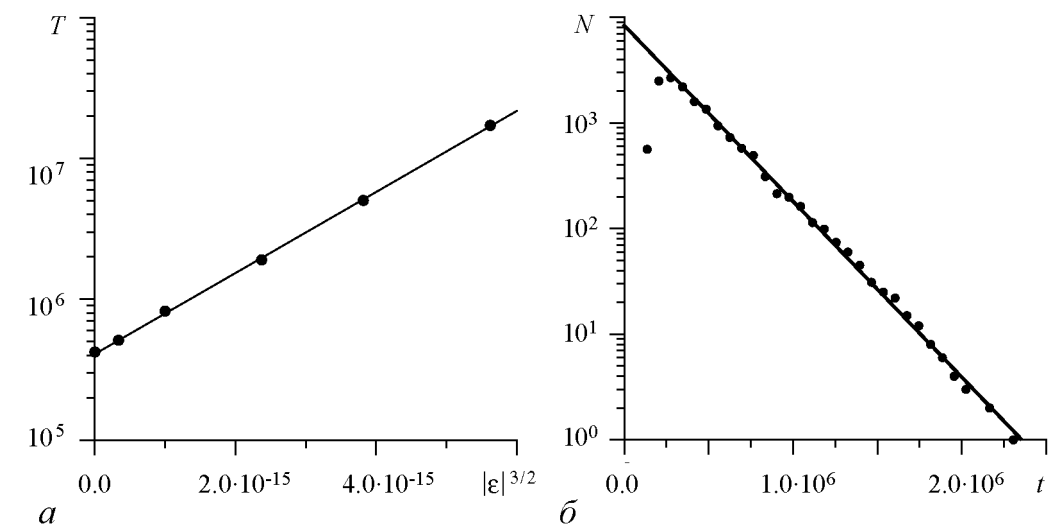


Рис. 4. *a* – Зависимость средней длительности  $T$  ламинарных фаз от параметра надкритичности  $|\epsilon|$  ( $\epsilon < 0$ ) для (24). Точки, полученные итерированием (24) изображены символами (•). Теоретический закон  $\ln T \sim |\epsilon|^{3/2}$  показан сплошной линией. *b* – Распределение длительностей ламинарных фаз для отображения (24), значение параметра надкритичности было выбрано равным  $|\epsilon| = 10^{-11}$ . Аналитический экспоненциальный закон (23) показан сплошной линией

в течение которого плотность вероятности  $\rho_X(x, t)$  приходит к виду (18), близкому к стационарному состоянию, как это уже обсуждалось в разделе 1. Существование этого переходного интервала времени, тем не менее, практически не влияет на статистические характеристики (20) и (23) перемежающегося поведения в присутствии шума в полном соответствии с выводами, сделанными выше.

Таким образом, перемежающееся поведение, наблюдающееся в квадратичном отображении со случайным слагаемым, подчиняется теоретическим закономерностям, полученным в разделе 1. Поскольку теория перемежаемости типа I была построена на основе модели (3), схожей с отображением (24), необходимо исследовать другую систему, чтобы убедиться, что наши теоретические выводы справедливы и применимы к широкому классу нелинейных систем.

**2.2. Осциллятор ван дер Поля под внешним гармоническим воздействием в присутствии шума.** Рассмотрим в качестве второго примера неавтономный генератор ван дер Поля

$$\ddot{x} - (\lambda - x^2)\dot{x} + x = A \sin(\omega_e t) + D\xi(t) \quad (25)$$

под внешним гармоническим воздействием с амплитудой  $A$  и частотой  $\omega_e$ , при наличии стохастического слагаемого  $D\xi(t)$ , где  $\xi(t)$  – дельта-коррелированный белый шум [ $\langle \xi(t) \rangle = 0$ ,  $\langle \xi(t)\xi(\tau) \rangle = \delta(t - \tau)$ ].

Значения управляющих параметров были выбраны следующими:  $\lambda = 0.1$ ,  $\omega_e = 0.98$ . Для данных значений параметров и  $D = 0$  динамика неавтономного осциллятора ван дер Поля становится синхронной при  $A = A_c = 0.0238$ . Для интегрирования уравнения (25) использовался одношаговый метод Эйлера с шагом  $h = 5 \times 10^{-4}$ , величина интенсивности шума была фиксированной:  $D = 1$ .

Известно, что при определенных условиях (то есть для слабо нелинейного изохронного осциллятора под внешним периодическим воздействием) можно исполь-

что равносильно экспоненциальному закону для характеристики распределения длительностей ламинарных фаз, как это будет показано далее.

Возвращаясь к первоначальным переменным  $x$  и  $t$ , получим следующее выражение для плотности вероятности:

$$\rho_X(x, t) \simeq A(t) \exp\left(-\frac{2}{D} \left(|\varepsilon|x - \frac{x^3}{3}\right)\right), \quad (18)$$

положив константу интегрирования  $C_1 = 0$ . Здесь

$$A(t) = A(0) \exp\left(-\frac{t}{T}\right), \quad (19)$$

и

$$T = \frac{1}{k\sqrt{|\varepsilon|}} \exp\left(\frac{4|\varepsilon|^{3/2}}{3D}\right), \quad (20)$$

при этом  $A(t)$  рассматривается как нормировочный множитель, то есть

$$A(0) \int_{-\infty}^{\sqrt{|\varepsilon|}} \exp\left(-\frac{2}{D} \left(|\varepsilon|x - \frac{x^3}{3}\right)\right) dx = 1. \quad (21)$$

Для того чтобы убедиться в справедливости полученных уравнений и предположений, сделанных выше, было проведено сравнение эволюции плотности вероятности  $\rho_X(x, t)$ , заданной выражением (18), с результатами численного интегрирования уравнения Фоккера–Планка (5) при значениях управляющих параметров  $|\varepsilon| = 10^{-2}$  и  $D = 2.5 \times 10^{-4}$ .

Эволюция плотности вероятности  $\rho_X(x, t)$ , полученная посредством численного интегрирования (5), показана на рис. 2. Видно, что после короткого переходного процесса  $0 \leq t \leq t_{tr}$  плотность вероятности  $\rho_X(x, t)$  достигает состояния, близкого к стационарному (рис. 2, а). После этого значение  $\rho_X(x, t)$  уменьшается очень медленно (по экспоненциальному закону) с увеличением времени, при этом вид зависимости плотности вероятности от  $x$ -координаты остается неизменным (рис. 2, б).

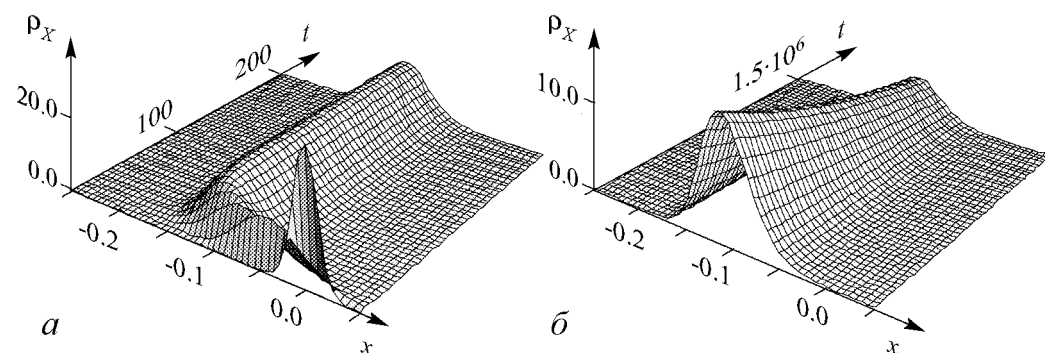


Рис. 2. Эволюция плотности вероятности  $\rho_X(x, t)$ , полученная посредством численного интегрирования уравнения Фоккера–Планка (5),  $|\varepsilon| = 10^{-2}$ ,  $D = 2.5 \times 10^{-4}$ . а – Начальный участок эволюции функции плотности вероятности, включающий переходный процесс ( $0 \leq t < t_{tr}$ ,  $t_{tr} \approx 30$ ). б – Долговременная эволюция функции  $\rho_X(x, t)$ , переходный процесс не представлен,  $t \geq 50$



## МУЛЬТИФРАКТАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ ЦИФРОВЫХ ИЗОБРАЖЕНИЙ

Н.Г. Макаренко, И.С. Князева

Статья содержит изложение методов микроканонического варианта мультифрактального формализма. На уровне технической строгости обсуждаются его возможности в применении к анализу и реконструкции цифровых изображений.

Ключевые слова: Фракталы, мультифрактальный анализ, цифровые изображения.

Не буду заморачивать тебя подробностями, потому что ты можешь...

– Могу что?

– Можешь заморочиться.

Дуглас Адамс. Жизнь, Вселенная и Вообще

### Введение

Фракталом называют множество, которое можно представить как композицию или коллаж своих уменьшенных копий [1]. Каждая из копий получается применением к исходному компактному множеству конечного набора линейных сжимающих отображений IFS (*iterated function system*), дополненных, возможно, вращениями и трансляциями. По теореме Банаха о неподвижной точке в пространстве компактов, IFS имеет единственную неподвижную «точку» или аттрактор IFS [1–4]. Если образы IFS не пересекаются, то аттрактор может быть несвязным компактным объектом с дробной размерностью, то есть фракталом. Представим себе, что каждая итерация IFS эквивалентна нанесению черной краски (массы меры) на носитель. Тогда предельным образом будет черно-белая геометрическая фигура, такая, например, как ковер Серпиньского. Предположим теперь, что каждое из IFS выбирается с фиксированной вероятностью. В этом случае раскраска аттрактора будет воспроизводить себя в шкале «уровней серого» на различных, все более уменьшающихся масштабах, следуя заданному распределению вероятностей. В результате получится единственная самоподобная инвариантная мера IFS на аттракторе в силу той же самой теоремы Банаха, но уже в пространстве борелевых мер с метрикой Монжа–Канторовича [1, 2, 4]. Такую меру называют *мультифрактальной*, потому что она состоит из фрактальных компонент разной размерности.

Для того чтобы описать локальную изменчивость мультифрактального узора, используют понятие регулярности функции, адаптированное к мере. Эвристическая идея измерения регулярности заключается в том, что мы исследуем локальное изменение функции в зависимости от изменения аргумента. Для «хороших» функций приращения функции и аргумента согласованы так, что их отношение равномерно ограничено  $|\Delta y|/|\Delta x| \leq C$  в некоторой малой окрестности  $|\Delta x| = |x - x_0| \leq \varepsilon$  точки  $x_0$  положительной константой. С другой стороны, можно представить себе функцию, для которой небольшое изменение  $|\Delta x|$  приводит к огромному значению  $|\Delta y|$ , так что  $|\Delta y|/|\Delta x| \sim \infty$ . Альтернативой может быть непостоянная функция, которая очень слабо реагирует на изменение аргумента, то есть  $|\Delta y|/|\Delta x| \sim 0$ . Можно обобщить все эти ситуации с помощью некоторой постоянной  $\alpha(x_0)$ , такой что в окрестности  $x_0$  ограниченным является отношение  $|\Delta y|/|\Delta x|^\alpha \leq C_H$ . Величину  $\alpha(x_0)$  называют *гельдеровским показателем регулярности* функции в точке  $x_0$ , а постоянную  $C_H$  иногда называют *гельдеровской производной*. Ее геометрическим образом в  $x_0$  является криволинейный «касательный» конус  $\Delta y \sim |\Delta x|^\alpha$  [5].

Будем рассматривать значения функции в  $\varepsilon$ -окрестности некоторой точки  $x \in R$  как количество массы [2] некоторой меры  $\mu(\varepsilon)$ . Ее универсальной аппроксимацией на  $I \subset R$  является степенной закон  $\mu(\varepsilon) \sim \varepsilon^{\alpha(x)}$ , где  $\alpha(x)$  называют *гельдеровским показателем сингулярности меры*. Если масса  $M$  распределена «атомарно», со значениями  $m_i$  в отдельных точках  $x_i$  носителя, то  $\alpha = 0$  и  $M = \sum_i m_i \delta(x - x_i)$ . Равномерному распределению массы соответствует значение  $\alpha = 1$  и абсолютно непрерывная мера  $\mu$  с постоянной плотностью  $\rho$ , так что  $M = \int_I \rho dx$ . Для  $\alpha < 1$  плотность меры расходится при  $\varepsilon \rightarrow 0$ , и такую меру называют *сингулярной*. Несколько неожиданным покажется то, что случай  $\alpha = 2$  тоже объявляют сингулярным в  $1D$ . Для случая  $2D$  мера сингулярна при  $\alpha \neq 2$  и т.д. Множество точек носителя, имеющих меру с сингулярностью  $\alpha$  в общем случае образуют фрактальное множество с размерностью  $f(\alpha)$ , а пару  $(\alpha, f(\alpha))$  называют *мультифрактальным спектром*. В случае самоподобной меры график спектра является выпуклой вверх кривой. Способы вычисления такого спектра для разных ситуаций являются одной из задач мультифрактального анализа.

Мультифрактальная техника была введена в физику в 1986 г. статьей [6], хотя обобщенные размерности Реньи использовали тремя годами раньше [7] для описания странных аттракторов. Позднее были приведены строгие обоснования метода статистических моментов для оценки спектров самоподобных мер [8, 9]. Этот подход реферирован как *канонический* вариант формализма [10–15]. Можно развивать мультифрактальный формализм не только для мер, но и для функций [16]. Оказывается, что почти каждая функция в некоторых пространствах математической физики является мультифрактальной [17]. Грубо говоря, это означает, что гладких кривых намного меньше, чем кривых, которые можно провести не отрывая карандаш от листа бумаги.

Менее известен физикам *микрканонический* вариант мультифрактального формализма [18, 19]. В нем показатели сингулярности и их спектр явным образом получаются из таких фундаментальных понятий, как гельдеровская регулярность радоновых мер. Здесь мультифрактальность перестает быть прерогативой ситуаций, связанных лишь с полностью развитой турбулентностью.

Функция  $g(z)$  должна удовлетворять условиям

$$g(z) > 0 \quad \forall z < 1; \quad \int_{-\infty}^1 g(z) dz < \infty. \quad (8)$$

Так как максимум плотности вероятности должен совпадать с устойчивой неподвижной точкой  $z_s = -1$ , то

$$g'(z)|_{z=-1} = 0. \quad (9)$$

При сделанных предположениях мы переходим к рассмотрению обычного дифференциального уравнения

$$D^* g''(z) - 2((z^2 - 1)g(z))' = 0 \quad (10)$$

вместо (7) в области  $z < 1$ . Данное уравнение эквивалентно уравнению

$$D^* g'(z) - 2(z^2 - 1)g(z) + C_1 = 0, \quad (11)$$

где  $C_1$  – константа. Чтобы решить его, необходимо использовать интегрирующий множитель

$$M(z) = \exp\left(-\frac{2}{D^*} \left(\frac{z^3}{3} - z\right)\right). \quad (12)$$

Решение (11) может быть найдено в виде

$$g(z) = \frac{C_1 \int_0^z \exp\left(\frac{2}{D^*} \left(s - \frac{s^3}{3}\right)\right) ds + C_2}{D^* \exp\left(\frac{2}{D^*} \left(z - \frac{z^3}{3}\right)\right)}. \quad (13)$$

Из уравнения (13) легко получить, что  $g'(-1) = C_1/D^*$ . Учитывая условие (9), приходим к выводу, что  $C_1 \equiv 0$ . Заметим, что в этом случае полученная функция

$$g(z) = \frac{C_2}{D^*} \exp\left(-\frac{2}{D^*} \left(z - \frac{z^3}{3}\right)\right) \quad (14)$$

также удовлетворяет условию (8). Следовательно, плотность вероятности  $\rho_Z(z, \tau)$  в области  $z < 1$  есть функция

$$\rho_Z(z, \tau) \simeq A(\tau) \exp\left(-\frac{2}{D^*} \left(z - \frac{z^3}{3}\right)\right). \quad (15)$$

Спад функции  $A(\tau)$  должен определяться распределением вероятности, взятым на граничной точке  $z = 1$ , то есть  $dA(\tau)/d\tau \sim -\rho_Z(1, \tau)$ . Это предположение может быть переписано в виде

$$\frac{dA(\tau)}{d\tau} = -kA(\tau) \exp\left(-\frac{4}{3D^*}\right), \quad (16)$$

где  $k$  – коэффициент пропорциональности. Очевидно, что убывание  $A(\tau)$  описывается экспоненциальным законом

$$A(\tau) = A(0) \exp(-k\eta\tau), \quad \eta = \exp(-4/(3D^*)), \quad (17)$$

и при отсутствии. Не так давно было проведено теоретическое рассмотрение перемежающегося поведения при наличии шума в закритической области [21] (здесь в отсутствие шума перемежаемость не возникает), при этом аналитический вид зависимости средней длительности ламинарных фаз от параметра надкритичности был получен в предположении фиксированной вероятности реинжекции, взятой в виде  $\delta$ -функции. Справедливость найденного аналитического закона была проверена также с помощью экспериментального наблюдения перемежаемости в присутствии шума [22, 23]. В то же время, другая важная статистическая характеристика перемежающегося поведения, а именно распределение длительностей ламинарных фаз, не рассматривалась в закритической области значений управляющих параметров.

В настоящей работе аналитически получен вид распределения длительностей ламинарных фаз для перемежаемости типа I при наличии шума в закритической области значений управляющего параметра. Уже известная зависимость средней длительности ламинарных фаз от параметра надкритичности [21, 22] является при этом следствием построенной теории. Более того, мы показываем, что данная закономерность, полученная в [21] в предположении фиксированной вероятности реинжекции, выбранной в виде  $\delta$ -функции, на самом деле, практически не зависит от характера процесса реламинизации и, соответственно, полученное выражение для средней длительности ламинарных фаз от параметра надкритичности остается справедливым при различных формах вероятности реинжекции. Справедливость найденного аналитически распределения длительностей ламинарных фаз проверена с помощью численного интегрирования модельных динамических систем.

Структура работы следующая. В разделе 1 описывается теория перемежаемости типа I в присутствии шума и приводится аналитический вывод выражения для распределения длительностей ламинарных фаз. В разделе 2 рассматривается поведение некоторых динамических систем для иллюстрации справедливости теоретических выводов. С помощью численного моделирования продемонстрировано, что найденные аналитические зависимости имеют место в различных нелинейных системах, включая связанные хаотические осцилляторы вблизи границы режима фазовой синхронизации в случае, когда величина расстройки их собственных частот мала (раздел 2.3). Окончательные выводы сформулированы в Заключение.

## 1. Теория перемежаемости типа I в присутствии шума

Классической моделью для изучения перемежаемости типа I [1] является однопараметрическое квадратичное отображение

$$x_{n+1} = f(x_n) = x_n + x_n^2 + \varepsilon, \quad (1)$$

где  $\varepsilon$  – управляющий параметр. Значение  $\varepsilon_c = 0$  соответствует седло-узловой (касательной) бифуркации, когда устойчивая и неустойчивая неподвижные точки  $x_{u,s} = \pm|\varepsilon|^{1/2}$ , сливаются друг с другом в точке  $x = 0$  и исчезают.

Ниже критического значения параметра  $\varepsilon < \varepsilon_c$  наблюдается устойчивая неподвижная точка  $x_s = -|\varepsilon|^{1/2}$ , в то время как выше  $\varepsilon_c$  существует узкий коридор между графиком функции  $f(x)$  и биссектрисой  $x_{n+1} = x_n$ , такой что изображающая точка отображения (1) движется вдоль него (рис. 1). Это движение соответствует ламинарной фазе, при этом ее средняя длительность  $T$  обратно пропорциональна

Рассмотрим теперь поведение  $\mu_H^\alpha(F)$  как функции  $\alpha$ , используя прием, описанный выше. Когда  $\alpha$  увеличивается, мера уменьшается. Пусть  $F$  – борелево множество и  $0 < \alpha < s$ . Тогда, если  $\mu_H^\alpha(F) < \infty$ , то  $\mu_H^s(F) = 0$ . Напротив, если  $\mu_H^s(F) > 0$ , то  $\mu_H^\alpha(F) = \infty$ . Можно доказать, что для  $F$  существует единственное критическое значение  $\alpha_0 \in [0, \infty]$ , такое что  $\mu_H^\alpha(F) = \infty$  для всех  $\alpha < \alpha_0$  и  $\mu_H^\alpha(F) = 0$  для всех  $\alpha > \alpha_0$ . Эту величину

$$\alpha_0 = \dim_H F = \sup \{ \alpha \mid \mu_H^\alpha(F) = 0 \} = \inf \{ \alpha \mid \mu_H^\alpha(F) = \infty \} \quad (9)$$

и называют *размерностью Хаусдорфа* [2, 3, 20]. Можно показать, что если  $A$  и  $B$  – борелевы множества, то

$$A \subseteq B \Rightarrow \dim_H A \leq \dim_H B; \quad \dim_H (A \cup B) = \max \{ \dim_H A, \dim_H B \}. \quad (10)$$

## 2. Абстрактный мультифрактальный формализм

Пусть  $X \subset \mathbb{R}$  и  $g : X \rightarrow [-\infty, +\infty]$  – непрерывная функция. Проведем на графике  $(x, g(x))$  горизонтальную прямую  $g(x) = \alpha$  и рассмотрим для разных  $\alpha$  множества уровней  $K_\alpha^g = g^{-1}(\alpha) \cap X$ , то есть множества точек носителя, в которых  $g(x)$  пересекается с прямой [23] (рис. 1)

$$K_\alpha^g = \{x \in X \mid g(x) = \alpha\}. \quad (11)$$

Их называют компонентами мультифрактального разложения  $X$ , так как

$$X = \bigcup_{-\infty \leq \alpha \leq +\infty} K_\alpha^g. \quad (12)$$

Термин «мультифрактальный» означает, что каждая из компонент  $K_\alpha^g$  образована конечным числом точек, так что  $\dim_H(K_\alpha^g) \leq 1$ , как для фрактала. Таким образом,  $X$  расслаивается на различные «фрактальные» множества относительно функции  $g$ . Целочисленную многозначную функцию, равную числу пересечений графика  $g(x)$  с нашей прямой

$$\mathcal{N}(\alpha, g, K_\alpha^g) = \# \{x \mid g(x) = \alpha\}, \quad (13)$$

называют *индикатрисой Банаха*. Для  $X = [a, b]$  она равна  $\mu_H^0(g^{-1}(\alpha) \cap [a, b])$ , то есть равна нульмерной мере Хаусдорфа множества точек пересечения.

Для «измерения» каждой компоненты  $K_\alpha^g$  выберем монотонную функцию множества, например, размерность Хаусдорфа,  $f_H(\alpha) = \dim_H(K_\alpha^g)$ , которая обладает нужным свойством (см.(10)). Пару  $(\alpha, f_H(\alpha))$  называют *мультифрактальным спектром* относительно  $g(x)$ .

Наша ближайшая цель – выбор подходящей функции  $g(x)$ . Мы используем для этого гельдеровский показатель регулярности функции.

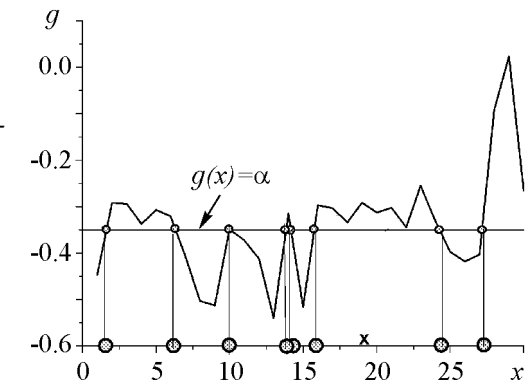


Рис. 1. Компонента мультифрактального разложения для  $\alpha = -0.35$  относительно графика  $g(x)$  (показана кружками на оси абсцисс)

### 3. Гельдеровская регулярность функций

Пусть  $f : R \rightarrow R$  – функция,  $n \leq \alpha \leq n + 1$ ,  $n \in Z$  и  $x_0 \in R$  – некоторая точка. Говорят, что  $f \in C^\alpha(x_0)$ , если существует число  $\delta > 0$ , полином  $P_n$  степени  $n$  и постоянная  $C$ , такие что для любой точки  $x$  из  $\delta$ -окрестности  $x_0$  справедливо неравенство [24–27]

$$|f(x) - P_n(x - x_0)| \leq C|x - x_0|^\alpha. \quad (14)$$

Случай  $n = 0$  в (14) приводит к стандартному определению липшиц-непрерывности для функции. *Поточечным гельдеровским показателем (экспонентой)  $f$  в точке  $x_0$*  называют величину

$$\alpha_p(x_0) = \sup \{ \alpha | f \in C^\alpha(x_0) \} \quad (15)$$

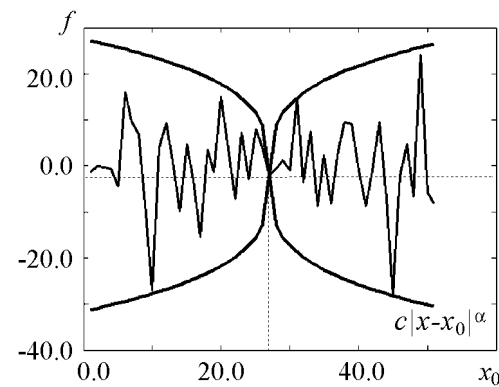


Рис. 2. Гельдеровская регулярность функции

Приведем геометрическую интерпретацию [24] этого показателя (рис. 2). Считаем, что функция  $f$  имеет показатель  $\alpha$  в  $x_0$ , если ее график  $\{x, f(x)\}$  в окрестности  $x_0$  эквивалентен кривой  $x \rightarrow f(x_0) + c|x - x_0|^\alpha$  в следующем смысле. График  $f$  для любого  $\varepsilon > 0$  ограничен в этой окрестности огибающей, состоящей из пары кривых:  $x \rightarrow f(x_0) + c|x - x_0|^{\alpha-\varepsilon}$  и  $x \rightarrow f(x_0) - c|x - x_0|^{\alpha-\varepsilon}$ . Указанное свойство нарушается для любых  $\varepsilon < 0$ .

Можно доказать [27], что полином  $P_n$  в (14) состоит из первых  $(n + 1)$  членов разложения функции  $f(x)$  в окрестности точки  $x_0$  в ряд Тейлора

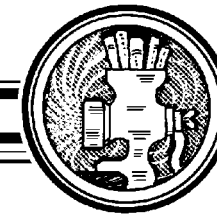
$$f(x) = c_0 + c_1(x - x_0) + \dots + c_n(x - x_0)^n + C|x - x_0|^{\alpha(x_0)}, \quad (16)$$

где  $c_0 = f(x_0)$ ,  $c_k = (1/k!) \partial^k f(x) |_{x_0}$ ,  $k \geq 1$  и  $\partial^k f(x) \equiv \partial^k f / \partial x^k$ . Усеченный до членов  $k$ -го порядка ряд Тейлора называют *k-струей*. Таким образом, анализ регулярности сводится к последовательному вычитанию  $k$ -струй и оценки остатка.

В общем случае, когда  $n \leq \alpha \leq n + 1$ , функция  $f(x)$  в точке  $x_0$  имеет  $n$  производных, но ее  $(n + 1)$ -я производная не ограничена. Если она ограничена, но разрывна,  $n$ -я производная не является сингулярной. Рассмотрим, например, функцию

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ x, & x \geq 0. \end{cases} \quad (17)$$

Ее производная является функцией Хевисайда; она разрывна, но ограничена в точке  $x = 0$ . Следовательно,  $f(x)$  не сингулярна в этой точке. Можно показать, что в этой точке  $\alpha = 1$ .



### РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ДЛИТЕЛЬНОСТЕЙ ЛАМИНАРНЫХ ФАЗ ДЛЯ ПЕРЕМЕЖАЕМОСТИ ТИПА I В ПРИСУТСТВИИ ШУМА

А.А. Короновский, М.К. Куровская, А.Е. Храмов

Рассматривается тип перемежающегося поведения, который возникает в результате взаимодействия между динамическими механизмами, приводящими к возникновению перемежаемости типа I, и случайными процессами. Приводится аналитический вывод закона для распределения длительностей ламинарных фаз, при этом зависимость средней длительности ламинарных фаз от параметра надкритичности, полученная ранее W.-Н. Кие, С.-М. Ким (PRE 62(2000) 6304), является следствием построенной в данной работе теории.

*Ключевые слова:* Перемежаемость, седло-узловая бифуркация, шум, хаотическая синхронизация, распределение длительностей ламинарных фаз.

#### Введение

Перемежающееся поведение представляет собой часто встречающееся явление в нелинейной науке. Его статистические характеристики исследуются на протяжении долгого времени; в связи с этим выделены различные типы перемежаемости, такие как перемежаемость типа I–III [1, 2], on–off перемежаемость [3–6], перемежаемость «игольного ушка» [7–9], а также перемежаемость цикла [10].

С другой стороны, повышенный интерес исследователей в последнее время направлен на изучение конструктивной роли шума и флуктуаций в нелинейных динамических системах [11–13]. В частности, было обнаружено, что наличие случайных флуктуаций может приводить к некоторой доле упорядоченности во множестве нелинейных систем [14–16]. Подобное явление довольно часто наблюдается в физических, химических и биологических системах при соответствующих условиях [9, 17–19].

Нет никаких сомнений, что различные типы перемежающегося поведения могут иметь место в широком классе систем при наличии шума и флуктуаций, включая случаи, когда данное явление представляет непосредственный практический интерес, например, в радиотехнике, медицине, физиологии и других прикладных науках. Ранее перемежающееся поведение в присутствии шума было исследовано с помощью уравнения Фоккера–Планка [20] с применением ренорм-группового анализа, но при этом характерные закономерности были выявлены лишь в субкритической области, где перемежающееся поведение наблюдается как при наличии шума, так

## Библиографический список

1. Борн М., Вольф Э. Основы оптики / Пер. с англ. М.: Наука, 1973. 720 с.
2. Мандель Л., Вольф Э. Оптическая когерентность и квантовая оптика / Пер. с англ. М.: Наука. Физматлит, 2000. 896 с.
3. Сороко Л.М. Основы голографии и когерентной оптики. М.: Наука, 1971. 616 с.
4. Рытов С.М., Кравцов Ю.А., Татарский В.И. Введение в статистическую радиофизику. Ч.2. Случайные поля. М.: Наука, 1978. 464 с.
5. Ахманов С.А., Дьяков Ю.Е., Чиркин А.С. Введение в статистическую радиофизику и оптику. М.: Наука, 1981. 640 с.
6. Гудмен Дж. Статистическая оптика / Пер. с англ. М.: Мир, 1988. 528 с.
7. Zarubin A.M. Three-dimensional generalization of Van Cittert-Zernike theorem to wave and particle scattering // Opt. Commun. 1993. Vol. 100. P. 491.
8. Ryabukho V.P., Klimenko I.S., Golubentseva L.I. Interference of laser speckle fields // Proc. SPIE. 1994. Vol. 2340. P. 513.
9. Rosen J., Yariv A. Longitudinal partial coherence of optical radiation // Opt. Commun. 1995. Vol. 117. P. 8.
10. Локишин Г.Р., Ученоев А.В., Энтин М.А. Пространственная периодичность в когерентных, некогерентных и спекл-полях // Радиотех. и электр. 2000. Т. 45, № 4. С. 416.
11. Abdulhalim I. Theory for double beam interference microscopes with coherence effects and verification using the Linnik microscope // J. Mod. Opt. 2001. Vol. 48, № 2. P. 279.
12. Ryabukho V., Lyakin D., Lobachev M. Influence of longitudinal spatial coherence on signal of a scanning interferometer // Opt. Lett. 2004. Vol. 29, № 7. P. 667.
13. Рябухо В.П., Лякин Д.В., Лобачев М.И. Эффекты продольной пространственной когерентности света в интерференционном эксперименте // Опт. и спектр. 2005. Т. 98, № 2. С. 309.
14. Ryabukho V., Lyakin D., Lobachev M. Longitudinal pure spatial coherence of a light field with wide frequency and angular spectra // Opt. Lett. 2005. Vol. 30, № 3. P. 224.
15. Рябухо В.П., Лякин Д.В., Лычагов В.В. Продольная чисто пространственная когерентность светового поля // Опт. и спектр. 2006. Т. 100, № 5. С. 788.
16. Abdulhalim I. Competence between spatial and temporal coherence in full field optical coherence tomography and interference microscopy // J. Opt. A: Pure Appl. Opt. 2006. Vol. 8. P. 952.
17. Рябухо В.П., Лякин Д.В. Теорема Винера-Хинчина в теории пространственной когерентности в курсах статистической оптики и радиофизики // Физ. обр. вуз. 2005. Т. 11, вып. 3. С. 107.
18. Wolf E. Invariance of the spectrum of light on propagation // Phys. Rev. Lett. 1986. Vol. 56. P. 1370.
19. Дьяков Ю.Е. Дифракционные изменения в частотном спектре распространяющегося излучения (эффект Вольфа) // Квант. электрон. 1993. Т. 20, № 11. С. 1068.

окрестности. Чтобы обойти эту трудность, можно вместо обычной борелевой меры – суммы уровней серого в пикселах – использовать так называемые *емкости Шоке* [34]. Они удовлетворяют слабому условию аддитивности и гарантируют монотонность при изменении масштаба. Точнее, емкостью называют неубывающую функцию  $\omega(A)$  множества, которая имеет два свойства. Для возрастающей последовательности вложенных подмножеств  $\dots, \subset A_n \subset A_{n+1} \subset \dots: \omega(\bigcup_n A_n) = \sup_n \omega(A_n)$ . Если  $\{A_n\}$  – убывающая последовательность подмножеств  $\dots, \supset A_n \supset A_{n+1} \supset \dots$ , то  $\omega(\bigcap_n A_n) = \inf_n \omega(A_n)$ .

Не останавливаясь на деталях [30, 34, 35], определим три емкости Шоке  $\mu_{\max}$ ,  $\mu_{\min}$  и  $\mu_{\text{iso}}$  для области  $\Omega$  цифрового изображения следующим образом. Пусть  $\Omega^* \subset \Omega$  – подмножество, в котором для любого пиксела  $i$  интенсивность или контраст  $p(i) \neq 0$ . Определим емкость как максимальное или минимальное значение  $p(i)$

$$\mu_{\max}(\Omega) = \max_{i \in \Omega} p(i), \quad \mu_{\min}(\Omega) = \min_{i \in \Omega^*} p(i). \quad (27)$$

Третья емкость  $\mu_{\text{iso}}$  зависит от дискретизации уровней серого. Будем считать два пиксела  $i$  и  $j$  эквивалентными  $p_\delta(i) \approx p_\delta(j)$ , если уровни серого в них не различаются с точностью до заданного фиксированного числа  $\delta$ , то есть  $|p(i) - p(j)| < \delta$ . Тогда

$$\mu_{\text{iso}} = \#\{i \in \Omega : p_\delta(i) = p_\delta(G(\Omega))\}, \quad (28)$$

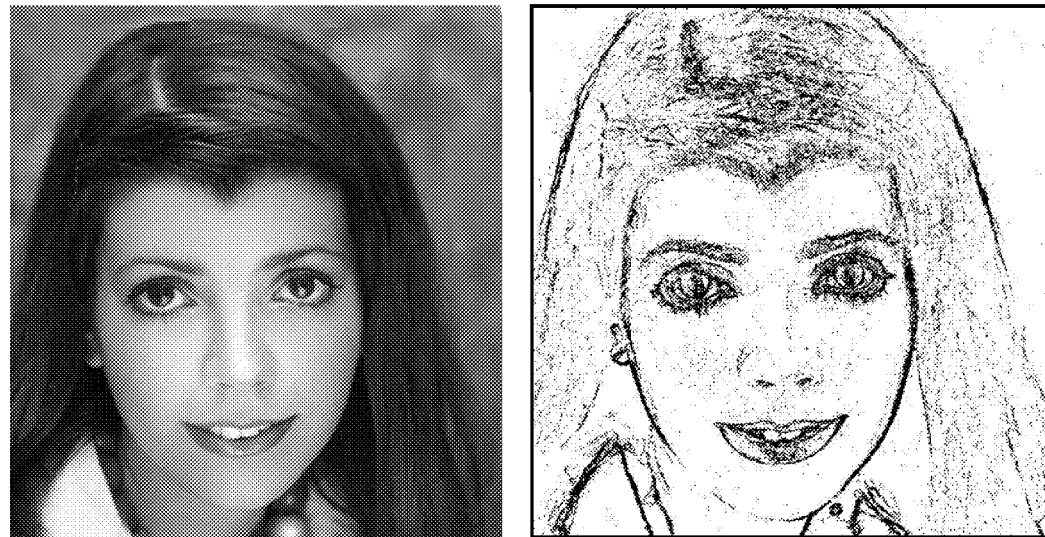
где  $G(\Omega)$  – геометрический центр  $\Omega$ , а  $\#$  – число пикселей. Очевидно, что все три емкости монотонно изменяются с размерами окрестности. Заметим, что  $\mu_{\max}(\Omega)$  и  $\mu_{\min}(\Omega)$  зависят только от значений уровня серого, в то время как  $\mu_{\text{iso}}(\Omega)$  – только от распределения уровней серого. Используя емкости Шоке, мы можем вычислить геллеровские показатели для цифрового изображения. Затем для каждого из  $h$  мы сможем получить компоненту мультифрактального разложения  $F_h = \{\mathbf{x} \in \Omega | h(\mathbf{x}) = h\}$  (см. раздел 2) – так называемое *singular manifold* (SM) [19, 28]. Размерность Хаусдорфа  $d_H F_h = D(h)$  можно оценить, используя бокс-размерность см. (3). Для покрытия точек  $F_h$  необходимо  $N_h(\epsilon) \sim \epsilon^{-D(h)}$  боксов размером  $\epsilon$  из общего числа  $N(\epsilon) \sim \epsilon^{-2}$  боксов, покрывающих всю  $\Omega$ . Следовательно, вероятность наблюдать сингулярность  $h$  на масштабе  $\epsilon$  ведет себя в пределе малых  $\epsilon$  как [36]

$$P_\epsilon(h) \propto N_h(\epsilon) / N(\epsilon) \sim \epsilon^{2-D(h)}. \quad (29)$$

Таким образом, для оценки мультифрактального спектра  $(h, D(h))$  в этом варианте формализма можно использовать частотную гистограмму вычисленных показателей [18, 19, 29]. Напомним, что, чем меньше  $h$ , тем больше сингулярность соответствующей меры. Минимальным значениям показателя соответствуют так называемые *most singular fractal manifolds* (MSM) [28, 37]. Наиболее интересны из них те, для которых  $D(h) \approx 1$ , то есть  $F_h$  представляют собой контуры. Они играют особую роль при распознавании образов – мы можем узнать человека, располагая лишь контурным рисунком – шаржем. На рис. 3 приведен пример MSM для диапазона показателей  $0 < h \leq 1$ .

Самое удивительное заключается в том, что MSM образует такой *скелет изображения*, который позволяет восстановить исходную картину с помощью простого





*a*

*b*

Рис. 3. Оригинал (*a*) и MSM для  $0 < h \leq 1$  (*b*)

*пропатора* – оператора восстановления. Это дает возможность сохранять исходную информацию в чрезвычайно компактной форме, поскольку MSM описываются матрицами с большим количеством нулей.

Задача восстановления ставится следующим образом [37]: необходимо восстановить изображение  $I(\mathbf{x})$ , то есть значение интенсивности в каждой точке, по информации об изменении градиента интенсивности в точках MSM, множество которых мы обозначим как  $F_\infty$ . Для того чтобы построить пропатор, выбираются следующие условия [30, 37].

- Пропатор – линейная функция градиента на MSM

$$|\nabla I(\mathbf{x})| = \mathbf{G} [|\nabla I|_{F_\infty}], \quad \nabla I(\mathbf{x}) = \int_{F_\infty} \mathbf{G}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \nabla I(\mathbf{y}) d\mathbf{y}. \quad (30)$$

- Пропатор инвариантен относительно сдвигов

$$\nabla I(\mathbf{x}) = \int_{F_\infty} \mathbf{G}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \nabla I(\mathbf{y}) d\mathbf{y} = \int_{F_\infty} \mathbf{g}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \nabla I(\mathbf{y}) d\mathbf{y}, \quad \mathbf{G}_{ij} = \partial_i \mathbf{g}_j(\mathbf{x}). \quad (31)$$

Определим множество градиентов на MSM как  $\mathbf{v}_0(\mathbf{x}) = \nabla I(\mathbf{x}) \delta_{F_\infty}$ . Тогда

$$I(\mathbf{x}) = \int_{F_\infty} \mathbf{g}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \mathbf{v}_0(\mathbf{y}) d\mathbf{y} = \mathbf{g} \circ \mathbf{v}_0(\mathbf{x}), \quad (32)$$

где  $\circ$  обозначает свертку. Если в (32) перейти к фурье-представлению  $I^*(\mathbf{x})$ , добавить условия изотропности и эквивалентности спектров мощности оригинала и его

ной функции когерентности  $|\gamma(\Delta z, \Delta t = \Delta z/c)|$ , восстановленный по экспериментальным импульсам когерентности (см. рис. 8). Длина продольной когерентности – длина коррелированного пробега волнового цуга  $\rho_{||}$ , определенная как ширина функции  $|\gamma(\Delta z, \Delta t = \Delta z/c)|$ , – с хорошей точностью совпадает с теоретически рассчитанным значением  $\rho_{||} \approx 2\lambda_0/\theta^2 \approx 58$  мкм.

### Заключение

Когерентность оптического поля в продольном направлении в общем случае определяется и частотным, и угловым спектрами поля. В свободном пространстве в поле излучения протяженного некогерентного источника всегда имеется такая область, в которой продольная когерентность и, соответственно, ее длина оказываются существенно зависимыми одновременно и от ширины частотного, и от ширины углового спектров. Эта зависимость в аналитическом виде получена в настоящей работе.

С длиной продольной когерентности связано представление о волновом цуге. Если длина когерентности определяется преимущественно угловым спектром поля,  $L_c \approx \rho_{||}$ , то с необходимостью приходим к представлению о волновом цуге, непрерывно и стохастически изменяющемся в процессе его распространения. При  $L_c \approx l_c$  волновой цуг пробегает без существенных декорреляционных изменений расстояние  $\Delta z \approx \rho_{||}$ . Это расстояние можно рассматривать как длину коррелированного (свободного) пробега волнового цуга. В дальней области дифракции, где поле имеет узкий угловой спектр, длина коррелированного пробега волнового цуга устремляется в бесконечность. С приближением к поверхности источника длина пробега уменьшается. В области, где  $\rho_{||} \approx l_c$ , длина цуга оказывается приблизительно в 2 раза меньше  $l_c$  или  $\rho_{||}$ . В этой области цуг претерпевает декорреляционные изменения в процессе своего распространения и длина когерентности определяет длину коррелированного пробега возмущения волнового поля. Еще ближе к источнику длина когерентности преимущественно определяется угловым спектром волнового поля  $L_c \approx \rho_{||}$ .

Зависимость продольной когерентности и от частотного, и от углового спектров может проявляться в различных экспериментальных условиях, например, в микроскопии высокого разрешения, в том числе в интерференционной микроскопии, где используются объективы с большой числовой апертурой и широкополосный источник света [11, 16, 22–24]. Полная длина когерентности может проявляться и в методе формирования совпадающих изображений (ghost imaging) [25, 26] при использовании частично когерентного излучения.

Результаты настоящей работы, как мы полагаем, имеют и важное методологическое значение, уточняющее соответствующие положения теории когерентности оптических полей и теории проявления когерентности в интерференционном эксперименте.

Авторы благодарны В.И. Цою за плодотворное обсуждение работы и А.Л. Кальянову за помощь в эксперименте.

Работа выполнена при поддержке гранта 2.1.1/4364 и 2.2.1.1/2950 программы «Развитие научного потенциала высшей школы» и гранта Президента для ведущих научных школ РФ, НШ-208-2008.2.

тем перемещения фотоприемника вдоль оптической оси при фиксированном диаметре диафрагмы на входе интерферометра. Ширина частотного спектра поступающего в интерферометр оптического поля определялась частотным спектром источника, освещающего рассеиватель. Показанная на рис. 5 плоскопараллельная пластина GP с оптической толщиной  $nd$  в одном из плеч интерферометра использовалась для наблюдения эффектов продольной чисто пространственной когерентности (см. ниже).

На рис. 6 представлены переменные составляющие сигналов  $\tilde{u}_P(2\Delta z_M)$ , полученные в режиме непрерывного сканирования зеркала M2 интерферометра при различной ширине  $\theta$  углового спектра интерферирующих полей. Длина продольной когерентности  $L_c$  определялась как полуширина интерференционного импульса на половине его высоты. Экспериментальные значения  $L_c$  сопоставлялись с теоретическими значениями, рассчитанными с использованием уравнений (9). Ширина углового спектра поля в плоскости регистрации сигнала определялась с помощью камеры-обскуры. Разность хода волн в интерферометре  $\Delta$  и, соответственно, величина продольного сдвига  $\Delta z = \Delta$  определялись по числу интерференционных осцилляций в сигнале с использованием средней длины волны источника света  $\lambda_0 = 0.65$  мкм. В сигналах на рис. 6 интерференционные осцилляции графически не разрешаются (сливаются) из-за их высокой частоты.

На рис. 7 представлены экспериментальные значения (кружки) длины когерентности  $L_c$  в зависимости от ширины углового спектра  $\theta$ , которая в экспери-

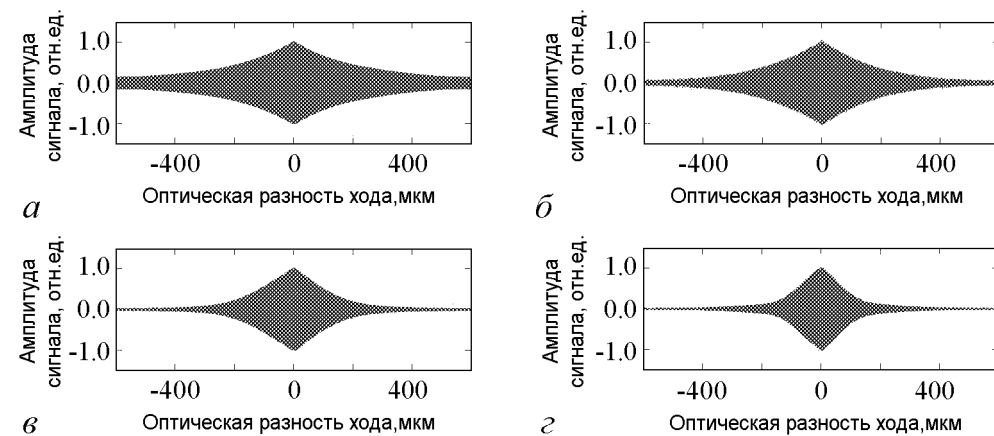


Рис. 6. Нормированные переменные составляющие сигналов интерферометра Майкельсона с протяженным некогерентным источником ( $\lambda_0 = 0.65$  мкм,  $l_c = 165$  мкм) при различной ширине  $\theta$  углового спектра интерферирующих световых полей:  $\theta = 0.01$  рад (а);  $\theta = 0.045$  рад (б);  $\theta = 0.063$  рад (в);  $\theta = 0.085$  рад (г)

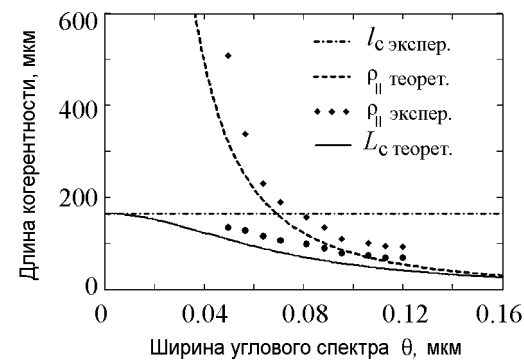


Рис. 7. Длина продольной когерентности в зависимости от ширины углового спектра при увеличении диаметра апертурной диафрагмы (расстояние от источника до фотоприемника  $z = 60$  мм)

15. Harte D. Multifractals: theory and applications. CRC Press, 2001. 247 p.
16. Jaffard S. Multifractal formalism for functions. Part I: Results valid for all functions // SIAM J. Math. Anal. 1997. Vol. 28. P. 944.
17. Fraysse A., Jaffard St. How smooth is almost every function in a Sobolev space? // Rev. Mat. Iberoamericana. 2006. Vol. 22. P. 663.
18. Arneodo A., Bacry E., Muzy J.F. The thermodynamics of fractals revisited with wavelets // Physica A. 1995. Vol. 213. P. 232.
19. Turiel A., Yahia H., Pérez-Vicente C. J. Microcanonical multifractal formalism – a geometrical approach to multifractal systems: Part 1. Singularity analysis // J. Phys. A: Math. Theor. 2008. Vol. 41. 015501.
20. Edgar G. Measure, Topology, and Fractal Geometry. Springer. 2008. 268 p.
21. Morgan F. Geometric Measure Theory. A Beginner's Guide. Academic Press. 2000.
22. Ziemer W.P. Weakly differentiable functions, Graduate Texts in Mathematics. Vol. 120, New York, Springer-Verlag, 1989. 370 p.
23. Barreira L., Pesin Y., Schmeling J. On a general concept of multifractality: Multifractal spectra for dimensions, entropies, and Lyapunov exponents. Multifractal rigidity // Chaos. 1997. Vol. 7. P. 27.
24. Barriere O., Levy Vehel J. Local Hölder regularity-based modeling of RR intervals // CBMS 2008. 21th IEEE Internat. Symp. on Computer-Based Medical Systems, June 17–19, 2008, Jyväskylä, Finland, 2008.
25. Daoudi K, Levy Vehel J., Meyer Y. Construction of continuous functions with prescribed local regularity // Constructive Approximation. 1998. Vol. 014(03). P. 349.
26. Mallat St., Hwang W. Singularity detection and processing with wavelets // IEEE Trans. Info. Theory. 1992. Vol. 38. P. 617.
27. Mallat St. A Wavelet Tour of Signal Processing. Academic Press, 1999. 851 p.
28. Turiel A., Parga N. The multi-fractal structure of contrast changes in natural images: from sharp edges to textures // Neural Computation. 2000. Vol. 12. P. 763.
29. Turiel A., Pérez-Vicente C.J., Grazzini J. Numerical methods for the estimation of multifractal singularity spectra: a comparative study // J. Computat. Phys. 2006. Vol. 216. P. 362.
30. Макаренко Н. Г. Геометрия изображений // Лекции по нейроинформатике. М.: МИФИ, 2009. С. 89.
31. Chan T.F., Shen J. Image processing and analysis. Variational, PDE, wavelet and stochastic methods. SIAM. 2005. 400 p.
32. Florack L.M.J. Mathematical Techniques for Image Analysis. Eindhoven University of Technology. 2008. 100 p.
33. Pont O., Turiel A., Pérez-Vicente C.J. Applications of the microcanonical formalism to monofractal systems // Phys. Rev. E. 2006. Vol. 74. P. 061110(1).
34. Levy Vehel J., Vojak R. Multifractal analysis of Choquet capacities: Preliminary results // Advances in Applied Mathematics. 1998. Vol.20. P. 1.
35. Макаренко Н.Г., Круглун О.А., Макаренко И.Н., Каримова Л.М. Мультифрактальная сегментация данных дистанционного зондирования // Исследование Земли из Космоса. 2008, № 3. С. 18

36. Riedi R., Scheuring I. Conditional and relative multifractal spectra // Fractals.1997. Vol. 5. P.153.
37. Turiel A., del Pozo A. Reconstructing images from their most singular fractal manifold // IEEE Trans. on Image Processing. 2002. Vol. 11. P. 345.

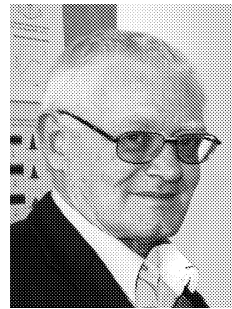
Поступила в редакцию 8.07.2009

## MULTIFRACTAL ANALYSIS OF DIGITAL IMAGES

N.G. Makarenko, I.S. Knyazeva

The article is based on the lecture that was given by the first author at the school StatInfo-2009. In the first part the microcanonical variant of multifractal formalism is reviewed. Possibilities for digital image analysis and reconstruction are discussed at the level of technical strictness.

**Keywords:** Fractals, multifractal analysis, digital images.



Макаренко Николай Григорьевич – родился в Троицке (1945). Окончил Уральский государственный университет им. Горького (Свердловск) по специальности «Астрономия». Главный научный сотрудник ГАО РАН, д.ф.-м.н. Главный научный сотрудник, д.т.н. лаборатории Компьютерного Моделирования (Институт математики, Алма-Ата, Казахстан). Область научных интересов: фрактальная геометрия, вычислительная топология, детерминированный хаос, нейронные сети, физика Солнца. Имеет более 80 научных публикаций.

196140 Санкт-Петербург, Пулковское шоссе, 65/1  
Главная астрономическая обсерватория РАН  
E-mail: ng-makar@mail.ru



Князева Ирина Сергеевна, 1983 года рождения, окончила физический факультет Санкт-Петербургского государственного университета (2007), после чего поступила в аспирантуру ГАО РАН. Область научных интересов – фрактальная геометрия, анализ изображений, нейронные сети, прогноз временных рядов.

196140 Санкт-Петербург, Пулковское шоссе, 65/1  
Главная астрономическая обсерватория РАН  
E-mail: iknyazeva@gmail.com

## 2. Интерференционный эксперимент

Проявление продольной когерентности можно наблюдать с помощью интерферометра Майкельсона (рис. 5). При продольном смещении зеркала M2 на величину  $\Delta z_M$  на выходе интерферометра на его оптической оси возникает взаимный продольный сдвиг  $\Delta z = 2\Delta z_M$  интерферирующих полей. При этом, как установлено в [20], между этими полями отсутствует временная задержка,  $\Delta t = 0$ , которая рассматривается в функции пространственно-временной когерентности  $\Gamma(\Delta z, \Delta t)$ , где  $\Delta t$  никак не связано с  $\Delta z$ ,  $\Delta t \neq \Delta z/c$ . Поэтому в сигнале фотодетектора  $u_P$ , установленном на оптической оси интерферометра, проявляется функция продольной одновременной когерентности  $\Gamma(\Delta z, \Delta t = 0)$ :  $u_P \sim \text{Re} \{ \Gamma(\Delta z, \Delta t = 0) \} = |\Gamma(\Delta z)| \cos(4\pi\Delta z/\lambda_0)$ . При непрерывном сканировании зеркала M2 в сигнале фотодетектора  $u_P$  формируется интерференционный импульс продольной когерентности, огибающая которого определяется  $|\Gamma(\Delta z)|$ . Ширина импульса в шкале разности хода волн  $\Delta = 2\Delta z_M = \Delta z$  определяется длиной когерентности  $L_c$ .

В эксперименте в качестве первичного источника света S использовался полупроводниковый лазер ( $\lambda_0 = 0.653$  мкм) с возможностью регулировки тока накачки и, соответственно, ширины частотного спектра, что позволяло изменять длину временной когерентности в пределах  $l_{c \min} = 146$  мкм,  $l_{c \max} = 5 \cdot 10^3$  мкм. В качестве источника оптического поля с широким угловым спектром, поступающего в интерферометр, использовался рассеиватель G, диаметр освещенной области на котором можно регулировать с помощью ирисовой диафрагмы D. Центр диафрагмы располагался строго на оптической оси интерферометра.

Таким образом, ширина углового спектра оптического поля, поступающего в интерферометр, могла быть изменена путем изменения диаметра диафрагмы D при фиксированном положении фотоприемника PD на выходе интерферометра или пу-

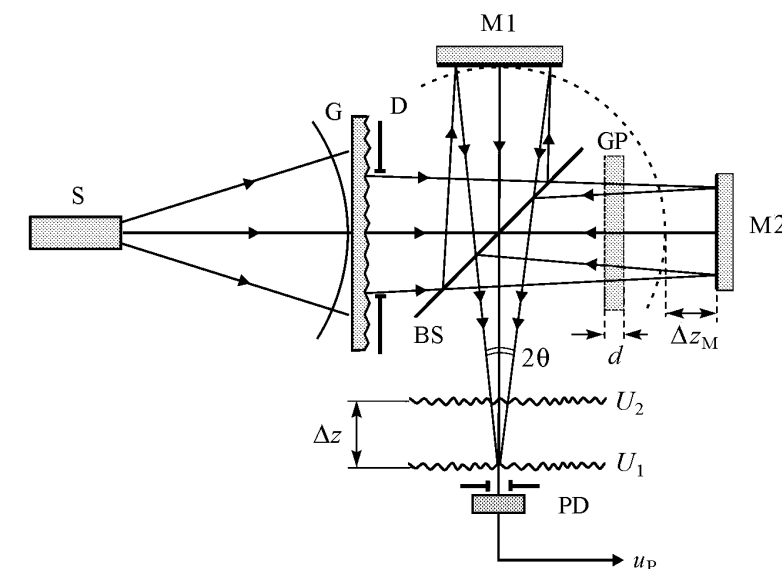


Рис. 5. Оптическая схема интерферометра Майкельсона для наблюдения эффектов продольной когерентности оптического поля: S – источник света; G – рассеиватель (матовое стекло); D – апертурная диафрагма; BS – светоделитель; M1 и M2 – плоские зеркала; GP – плоскопараллельная стеклянная пластина с оптической толщиной  $nd$ ;  $U_1$  и  $U_2$  – идентичные волновые поля, отраженные зеркалами M1 и M2, соответственно; PD – фотодетектор;  $u_P$  – сигнал фотодетектора

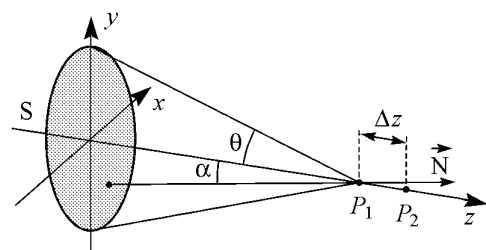


Рис. 1. К определению функции продольной когерентности  $\Gamma(P_1, P_2, \Delta t = 0) = \Gamma(\Delta z, \Delta t = 0)$  оптического поля протяженного некогерентного источника S

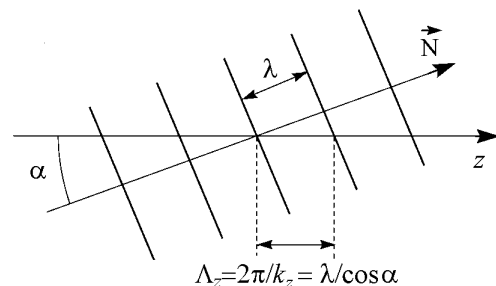


Рис. 2. Пространственный период  $\Lambda_z$  и пространственная частота  $k_z = 2\pi/\Lambda_z$  вдоль продольной оси  $z$  некоторой угловой компоненты оптического поля

поля в продольном направлении  $z$  (рис. 2);  $W(k_z)$  – спектр пространственных компонент волнового поля.

Пространственная частота  $k_z$  зависит и от частоты  $\omega$  (от длины волны  $\lambda$ ), и от угла  $\alpha$  распространения плоской волны углового спектра поля относительно оси  $z$

$$k_z = \frac{2\pi}{\lambda} \cos(\alpha) = \frac{\omega}{c} \cos(\alpha). \quad (2)$$

Предположим, что спектральная функция поля  $W(k_z) = W(\alpha, \omega) = W_0 = \text{const}$  на всем диапазоне пространственных частот  $\Delta k_z = k_{z \max} - k_{z \min}$ , где

$$k_{z \max} = \frac{\omega_0 + \Delta\omega/2}{c} \cos(\alpha = 0), \quad k_{z \min} = \frac{\omega_0 - \Delta\omega/2}{c} \cos(\alpha = \theta), \quad (3)$$

$\omega_0$  – центральная частота колебаний. Тогда из (1) непосредственно следует выражение для продольной длины когерентности

$$L_c \approx \frac{2\pi}{\Delta k_z}. \quad (4)$$

Соотношение (4) также следует и из явного выражения для  $\Gamma(\Delta z)$ , которое можно получить с использованием (1) для равномерного спектра

$$\Gamma(\Delta z) = (W_0 \Delta k_z) \frac{\sin(\Delta k_z \Delta z / 2)}{\Delta k_z \Delta z / 2} \exp(ik_{z0} \Delta z), \quad (5)$$

где  $k_{z0}$  – средняя пространственная частота,

$$k_{z0} = \frac{(k_{z \max} + k_{z \min})}{2} = \frac{2\pi}{\lambda_0} \left( \cos^2 \frac{\theta}{2} + \frac{1}{2} \frac{\Delta\lambda}{\lambda_0} \sin^2 \frac{\theta}{2} \right), \quad (6)$$

$$\Delta k_z = k_{z \max} - k_{z \min} = 2\pi \left[ \frac{2 \sin^2 \theta / 2}{\lambda_0} + \frac{\Delta\lambda}{\lambda_0^2} \cos^2 \frac{\theta}{2} \right]. \quad (7)$$

В (6) и (7)  $\lambda_0$  и  $\Delta\lambda$  – центральная длина волны и диапазон длин волн поля.

Длину когерентности  $L_c$  можно определить как расстояние  $\Delta z$ , на котором модуль  $\Gamma(\Delta z)$  принимает первое нулевое значение

$$\frac{1}{L_c} \approx \frac{1}{2\pi} \left[ \frac{\omega_0}{c} 2 \sin^2 \left( \frac{\theta}{2} \right) + \frac{\Delta\omega}{c} \cos^2 \frac{\theta}{2} \right] = \frac{2 \sin^2(\theta/2)}{\lambda_0} + \frac{\Delta\lambda}{\lambda_0^2} \cos^2(\theta/2). \quad (8)$$

Такая возможность делает НВП крайне привлекательным инструментом исследования, применимым при решении многих задач.

Дискретное вейвлет-преобразование имеет существенные отличия. Оно может оперировать с неортогональными базисными функциями (в этом случае говорят о так называемых *фреймах*). Однако чаще рассматривается случай ортонормированного базиса, что позволяет осуществлять более точное представление сигнала и значительно упрощает его восстановление по набору вейвлет-коэффициентов. В отличие от непрерывного преобразования, вейвлеты, используемые в рамках ДВП, не имеют аналитической формы записи (за исключением функции Хаара). Они задаются в виде таблицы численных коэффициентов, полученных путем решения некоторых уравнений. На практике в рамках ДВП конкретная форма функций  $\psi(t)$  в явном виде не рассматривается, записываются только наборы чисел, с помощью которых задается тот или иной вейвлет. При проведении анализа структуры сигналов это приводит к различным операциям с матрицами. Базис строится на основе итерационного алгоритма, предусматривающего изменение масштаба и смещение единственной функции. Детальное описание принципиальных различий ДВП и НВП приводится, например, в монографии [8]. В рамках данной статьи мы ограничимся рассмотрением теоретических основ непрерывного вейвлет-преобразования.

В отличие от классического спектрального анализа, основанного на преобразовании Фурье и оперирующего с гармоническими функциями, вейвлет-анализ допускает значительное разнообразие выбора базиса, по которому проводится разложение сигнала. В рамках широко используемой интерпретации вейвлет-анализа как метода «математического микроскопа» можно говорить о том, что выбор солитоноподобной функции  $\psi(t)$ , рассматриваемой в качестве базисной, аналогичен заданию разрешения для объектива микроскопа: если выбранное разрешение позволяет увидеть нужные детали, то вейвлет подходит для целей проводимого исследования. Более того, что немаловажно, последующий выбор объектива с лучшим разрешением уже не дает ничего нового.

Гармонические функции, применяемые в классическом спектральном анализе, заданы в диапазоне  $t \in (-\infty, \infty)$  и не позволяют изучать локальные изменения структуры сигналов. Расчет спектра мощности сигнала  $x(t)$  обеспечивает возможность определения частотного состава рассматриваемого процесса и выявления характерных ритмов колебаний. Такой расчет позволяет установить сам факт наличия колебаний определенной частоты, но не дает ответа на вопрос, когда существовали эти колебания – на протяжении всего времени регистрации сигнала или только на каком-то участке? Бесконечно осциллирующие функции не могут использоваться при проведении *локализованного* спектрального анализа [8].

Так что же представляют собой другие базисные функции – вейвлеты? Чтобы функцию  $\psi(t)$  можно было рассматривать в качестве вейвлета, она должна обладать рядом характерных признаков, включающим: 1) локализацию функции и по времени, и по частоте; 2) конечную энергию; 3) автомодельность (самоподобие) базиса. Сформулированные характерные признаки определяют большой класс вещественных и комплексных вейвлетов, которые применяются при решении различных задач. В частности, при проведении локального спектрального анализа процессов с меняющимися во времени характеристиками применяются комплексные вейвлеты, наиболее популярным из которых является вейвлет Морле, хорошо локализованный как

по времени, так и по частоте,

$$\psi(t) = \frac{1}{\pi^{1/4}} \left( e^{j2\pi f_0 t} - e^{-(2\pi f_0)^2/2} \right) e^{-t^2/2}, \quad (1)$$

где  $f_0$  – параметр, называемый центральной частотой. Второе слагаемое в скобках осуществляет корректировку при проведении вейвлет-преобразования сигналов с ненулевым средним значением. В случае  $f_0 \gg 0$  им можно пренебречь.

После выбора «материнского вейвлета»  $\psi(t)$  на его основе формируется базис. Поскольку  $\psi(t)$  является локализованной во времени, то для того, чтобы анализировать с ее помощью различные участки сигнала  $x(t)$ , требуется предусмотреть процедуру сдвигов функции вдоль оси  $t$ , которые позволили бы сместиться в эти участки. С другой стороны, для проведения локализованного анализа структуры сигнала в широком диапазоне масштабов необходимо также предусмотреть процедуру перемасштабирования. Как следствие, с помощью функции  $\psi(t)$  строится двупараметрическое семейство вейвлетов

$$\psi_{a,b}(t) = \frac{1}{\sqrt{a}} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right), \quad (2)$$

где  $a \in R, a \neq 0$  – масштабный коэффициент (он определяет сжатие или растяжение функции);  $b \in R$  – параметр сдвига, с помощью которого вейвлет перемещается вдоль анализируемого сигнала  $x(t)$ . Множитель  $1/\sqrt{a}$  осуществляет нормировку энергии каждой функции  $\psi_{a,b}(t)$  таким образом, чтобы  $\|\psi_{a,b}(t)\| = \|\psi(t)\|$ .

Непрерывное вейвлет-преобразование сигнала  $x(t)$ , определенного во временной области  $-\infty < t < \infty$ , имеет следующий вид:

$$W(a,b) = \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \psi^*\left(\frac{t-b}{a}\right) dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \psi_{a,b}^*(t) dt. \quad (3)$$

Результат преобразования (3) можно интерпретировать как поверхность коэффициентов  $W(a,b)$  в трехмерном пространстве. Для наглядного представления об особенностях исследуемого сигнала существуют различные варианты визуализации этой поверхности. Один из них состоит в рассмотрении ее проекции на плоскость  $ab$  и изображении интенсивности амплитуд вейвлет-преобразования различными оттенками цвета (по аналогии с географическими картами). Такой способ позволяет увидеть, как происходит изменение во времени свойств сигнала на разных масштабах, и дает полную информацию о преобразовании.

Другой способ визуализации наиболее важной информации о вейвлет-преобразовании применяется для идентификации мгновенных характеристик (амплитуды, частоты, фазы) ритмических процессов. Он часто называется построением «хребтов» (*ridges*) вейвлет-преобразования [6]. Хребты строятся для поверхности плотности энергии сигнала  $E(a,b) = |W(a,b)|^2$ , представляя собой линии локальных максимумов этой поверхности (идентифицируемые при фиксировании момента времени  $b = t^*$  и рассмотрении локальных энергетических спектров). Вместо поверхности  $E(a,b)$  удобно рассматривать  $E(f,b)$ , то есть осуществлять переход к частотному представлению энергетического спектра. В частности, для вейвлета (1) при условии  $f_0 \gg 0$  справедливо приближенное равенство  $f \simeq f_0/a$ . Это очень удобный и

В [7–16] показано, что когерентность оптического поля в продольном направлении может определяться преимущественно угловым спектром поля. Для длины когерентности в этом случае используется [7–10, 17] оценка  $L_c \approx 2\lambda_0/\theta^2$ , где  $\theta$  – ширина углового спектра,  $\lambda_0$  – средняя длина волны. В [11–14] с помощью интерферометра Майкельсона показано, при каких условиях в интерференционном сигнале можно наблюдать преимущественное влияние на продольную когерентность или частотного, или углового спектров оптического поля.

Очевидно, волновое поле может иметь такую ширину частотного и такую ширину углового спектров, когда продольная когерентность поля и, соответственно, функция продольной когерентности  $\Gamma(\Delta z)$  в сравнимой степени зависят от параметров этих спектров. Длина продольной когерентности  $L_c$  в этом случае должна определяться одновременно и шириной частотного и шириной углового спектров оптического поля,  $L_c(\Delta\omega, \theta)$ . Такая зависимость продольной когерентности в форме или явного выражения для функции продольной когерентности  $\Gamma(\Delta z; \Delta\omega, \theta)$ , или длины когерентности  $L_c(\Delta\omega, \theta)$ , насколько нам известно, не обсуждается в специальной литературе, несмотря на, казалось бы, всестороннее теоретическое описание когерентных свойств оптических полей [1–6]. Причина этой неполноты в исследовании оптической когерентности кроется, как мы полагаем, в методологически ошибочном отождествлении представлений о продольной и временной когерентности оптического поля и, что самое главное, в отсутствии соответствующих экспериментов по наблюдению эффектов продольной когерентности.

В настоящей работе получены выражения для функции продольной когерентности  $\Gamma(\Delta z; \Delta\omega, \theta)$  и для длины продольной когерентности  $L_c(\Delta\omega, \theta)$  в зависимости и от ширины  $\Delta\omega$  частотного, и от ширины  $\theta$  углового спектров оптического поля. Эти выражения позволяют определять продольную когерентность поля в условиях, когда продольная когерентность в сравнимой степени зависит от ширины частотного  $G(\omega)$  и углового  $I(\alpha)$  спектров оптического поля. Полученная теоретическая зависимость  $L_c(\Delta\omega, \theta)$  проверена экспериментально с использованием сканирующего интерферометра Майкельсона продольного сдвига с широкополосным протяженным источником света.

## 1. Функция продольной когерентности

Оптическое поле в свободном пространстве в большинстве случаев можно отнести к классу статистически квазиоднородных случайных полей [5] с достаточно медленно меняющимися в пространстве статистическими параметрами в сравнении с их корреляционной длиной и с достаточно медленным изменением самой корреляционной длины. Для таких полей возможно использование теоремы Винера–Хинчина для определения корреляционной функции [5]. Поэтому для функции одновременной ( $\Delta t = 0$ ) продольной когерентности оптического поля можно записать:

$$\Gamma(\Delta z, \Delta t = 0) = \int_{-\infty}^{\infty} W(k_z) \exp(ik_z \Delta z) dk_z, \quad (1)$$

где  $\Gamma(\Delta z, \Delta t = 0) = \langle E(z, t) E^*(z - \Delta z, t) \rangle$ ,  $E(z, t)$  – возмущение, создаваемое полем на продольной оси  $z$  (рис. 1), а угловые скобки означают усреднение во времени;  $\Delta t$  – взаимная задержка возмущений;  $k_z$  – пространственная частота оптического

52. Smolyansky S.A., Tarakanov A.V., Bonitz M. Vacuum particle creation: Analogy with the bloch theory in solid state physics // Plasma Phys. 2009. In press.
53. Filatov A.V., Prozorkevich A.V., Smolyansky S.A., Toneev V.D. Inertial mechanism: dynamical mass as a source of partial creation // ЭЧАЯ. 2008. Т. 39. С. 886.
54. Smolyansky S.A., Skokov V.V., Prozorkevich A.V. Kinetic theory of the quantum systems with unstable vacuum // Письма в ЭЧАЯ. 2005. Т. 2. С. 50.
55. Smolyansky S.A., Prozorkevich A.V., Bravina L.V., and Zabrodin E.E. Dynamical Casimir effect in an expanding flux tube // Proc. of the XVIII Baldin International Seminar on High Energy Physics Problems «Relativistic Nuclear Physics and Quantum Chromodynamics» / Eds. Sisakian A.N., Burov V.V., and Malakhov A.I., Dubna. 2008. Vol. 2. P. 75.

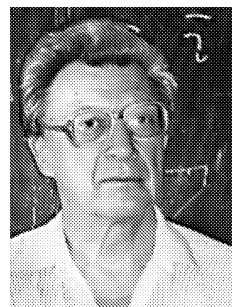
Поступила в редакцию 22.06.2009

### VACUUM PARTICLE CREATION IN STRONG FIELDS: STATISTICAL ASPECTS

S.A. Smolyansky, D.B. Blaschke, A.V. Tarakanov, S.M. Schmidt

In the present review we summarize the known informations about the evolution of a strongly nonequilibrium quasiparticle electron-positron plasma created from the vacuum under the influence of a strong nonstationary electromagnetic field. The methodical basis is given by quantum kinetic equations of the non-Markovian type which are nonperturbative consequences of the basic equations of QED in the collisionless approximation.

**Keywords:** Vacuum creation, electron-positron plasma, kinetic equation, Schwinger effect.



Смолянский Станислав Александрович – родился в 1936 году в Саратове. Окончил Саратовский госуниверситет (1960). Защитил кандидатскую диссертацию (1969) и докторскую (1988) в области теоретической физики. Работает заведующим кафедрой теоретической и математической физики СГУ. Автор более 150 работ по данному направлению.  
410012 Саратов, ул. Астраханская, 83  
Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского  
E-mail: smol@sgu.ru



Блашке Давид – родился в 1959 году. Окончил Ростокский университет (Германия, 1983), там же защитил диссертацию (1987). Профессор университета в Варшаве. Автор более 150 работ по квантовой теории поля, астрофизике и космологии, а также кинетической теории.  
Institute for Theoretical Physics, University of Wroclaw, 50-204 Wroclaw, Poland  
Bogoliubov Laboratory for Theoretical Physics, Joint Institute for Nuclear Research, RU-141980 Dubna, Russia  
Institut für Physik, Universität Rostock, D-18051 Rostock, Germany  
E-mail: blaschke@ift.uni.wroc.pl

**2.2. Кодирование тактильной информации нейронами тройничного нерва.** Центральная нервная система (ЦНС) живых организмов непрерывно получает и обрабатывает сенсорную информацию, поступающую посредством взаимодействия с внешним миром. Исследование механизмов кодирования, представления и обработки данной информации ЦНС представляет собой одну из актуальнейших задач современного естествознания. Оптические, звуковые, тактильные и вкусовые стимулы кодируются соответствующими рецепторами в последовательности электрических импульсов, которые далее передаются по нервным волокнам к «первым» нейронам, областям ЦНС, где осуществляется их первичная обработка. Далее сенсорная информация проходит еще несколько этапов обработки, прежде чем достигнуть коры головного мозга, где формируется образ внешнего мира. С каждым последующим этапом сложность исследования соответствующих процессов существенно усложняется. Даже на первичных этапах сенсорных путей остается много открытых вопросов о принципах кодирования информации нейронами разных типов и их ансамблями. Рассмотрим более подробно данный этап на примере первичной обработки тактильной информации у крыс.

Основную информацию об окружающем мире крысы воспринимают с помощью специальных длинных волосков или усов, называемых вибриссами (от лат. *vibrate* – дрожать). Эти волоски являются частью высокоорганизованной специализированной сенсорной системы, передающей информацию через тройничный нерв в головной мозг животного [13]. Каждый волосок имеет определенное расположение и длину (рис. 4, а), которая уменьшается от 30–50 мм до 4–5 мм у самого носа,

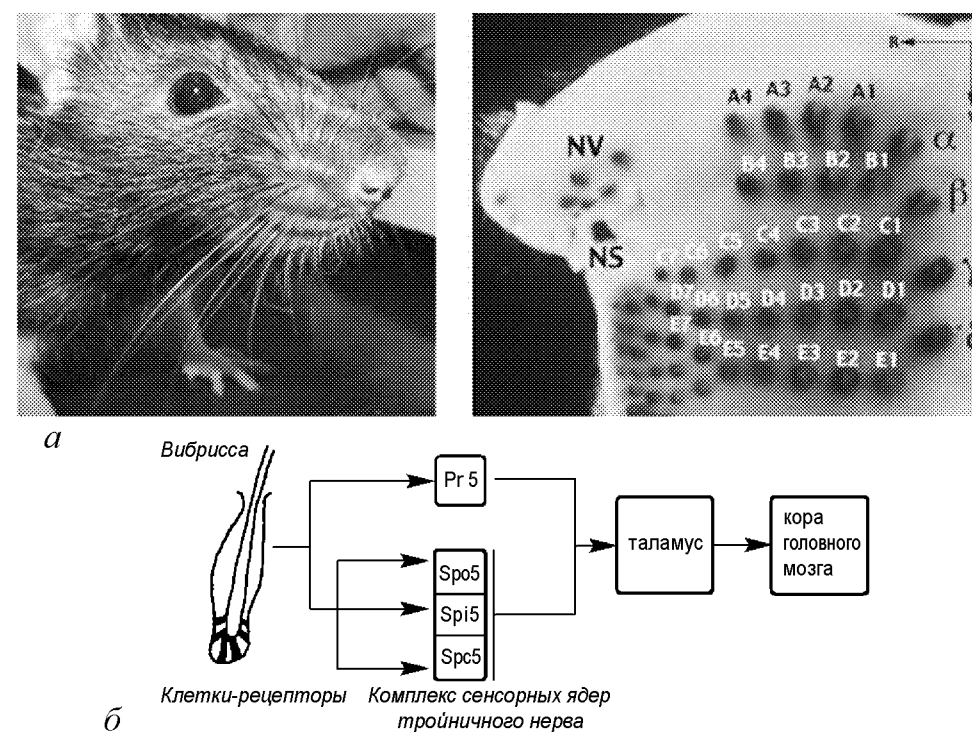


Рис. 4. а – иллюстрация расположения вибрисс; б – схематическое представление основных этапов прохождения сенсорной информации от механорецепторов вибрисс через тройничный нерв к коре головного мозга



что обеспечивает одновременный контакт их кончиков с осязаемым предметом при ощупывающих движениях.

Сигналы от клеток-рецепторов, расположенных в фолликулах вибрисс (рис. 4, б), сначала попадают в комплекс ядер тройничного нерва [13], содержащий главное сенсорное ядро (Pr5), а также оральное (Spo5), интерполярное (Spi5) и каудальное (Spс5) ядра, где происходит первичная обработка поступившей сенсорной информации. При соприкосновении вибрисс с каким-либо предметом, их вибрация приводит к генерации клетками импульсов, с помощью которых кодируется информация о физических характеристиках объекта (например, шероховатости).

В проводимых исследованиях делался акцент на изучение свойств комплекса ядер тройничного нерва при свободных колебаниях вибриссы, возбуждаемых периодической последовательностью воздушных импульсов (при фиксированной длительности импульсов 10 мс и варьировании частоты стимуляции от 1 Гц до 30 Гц). Данный тип стимуляции позволяет добиться максимальной естественности движений вибрисс. Учитывая, что отклик на стимуляцию может меняться с течением времени, проводились расчеты характеристики стабильности  $Stab$ , представляющей собой величину, обратную дисперсии мгновенной частоты нейронного отклика в окрестности частоты воздействия [14].

С одной стороны, увеличение частоты должно неизбежно приводить к «сбоям» и нестабильности в динамике нейрона. Таким образом, мы можем ожидать эффективной фильтрации высоких частот, выражаемой в монотонном убывании динамической стабильности  $Stab$  при увеличении частоты стимула  $f$ . С другой стороны, многочисленные результаты (см., например, [15, 16]) указывают на важность выбора частоты ощупывающих движений усов для достижения точности при осязании. В данном случае последовательность импульсов определенной частоты может восприниматься как единый сложный стимул, и мы вправе ожидать присутствия оптимальной частоты, вообще говоря, разной для различных нейронов. Таким образом, мы можем говорить о полосовой фильтрации стимулов.

Меняя частоту стимуляции  $f$  в пределах от 1 Гц до 30 Гц, удалось обнаружить оба типа поведения нейронов (рис. 5). Кроме того, часть нейронов была невосприимчива к изменению частоты. В целом, около 60% нейронов из Pr5 и Spi5 демонстри-

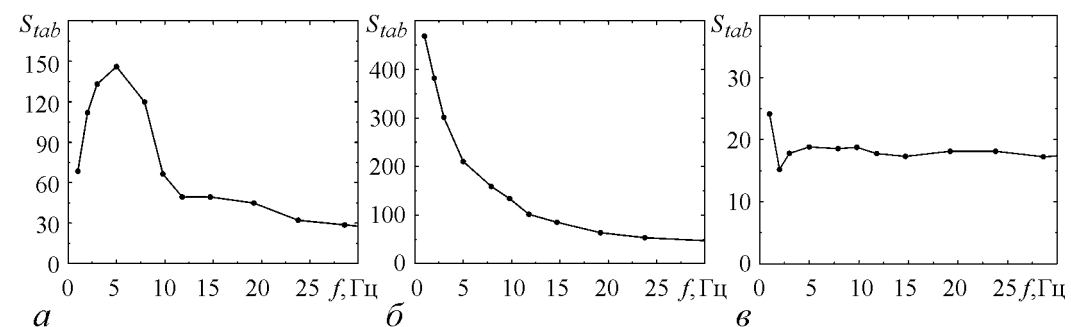


Рис. 5. Три основных типа зависимости характеристики динамической стабильности нейронного отклика от частоты внешнего периодического воздействия: а – полосовая фильтрация стимула; б – пропускание низких частот; в – отсутствие ярко выраженной частотной зависимости

34. Filatov A.V., Lavkin A.G., Smolyansky S.A., Bravina L.V., Zabrodin E.E. Vacuum particle creation in plasma // Теоретическая физика. 2007. Т. 8. С. 101.
35. Baier V.N., Katkov V.M. Influence of a medium on pair photoproduction and bremsstrahlung // Phys. Rev. 2003. Vol. D62. P. 036008.
36. Vinnik D.V., Mizerny V.A., Prozorkevich A.V., Smolyansky S.A., Toneev V.D. Kinetic description of vacuum particle production in collision of ultrarelativistic nuclei // Phys. of Atomic Nuclei. 2001. Vol. 64. P. 836.
37. Bloch J.C., Mizerny V.A., Prozorkevich A.V., Roberts C.D., Schmidt S.M., Smolyansky S.A., Vinnik D.V. Pair creation: back reactions and damping // Phys. Rev. 1999. Vol. D60. P. 116011.
38. Smolyansky S.A., Mizerny V.A., Vinnik D.V., Prozorkevich A.V., Toneev V.D. The non-equilibrium distribution function of particles and anti-particles created in strong fields // In «Progress in nonequilibrium Green's function» / Editor Bonitz M. World Scientific Publ., Singapour. 2000. P. 375; arXiv: hep - ph /9911303.
39. Biro T.S., Matinyan S.G., Müller B. Chaos and gauge field theory. World Scientific, Singapour. 1994.
40. Пустовалов В.В., Силин В.П. Нелинейная теория взаимодействия плазменных волн в плазме // Труды ФИАН. 1972. Т. 61. С. 42.
41. Höll A., Morozov V.G., Röpke G. Kinetic theory of QED plasma in strong electromagnetic field // Theor. Math. Phys. 2002. Vol. 131. P. 812; Vol. 132. P. 1026.
42. Prozorkevich A.V., Smolyansky S.A., Ilyine S.V. Kinetic equation for the quark Wigner function in strong gluon fields // Теоретическая физика. 2002. Т. 3. С. 108.
43. Chott N.I., Su Q., Grobe R. Classical-quantum correspondence in electron-positron pair creation // Phys. Rev. 2007. Vol. A76. P. 010101.
44. Амиров Р.Х., Смолянский С.А., Шехтер Л.Ш. К теории квантовых кинетических процессов в сильных переменных полях // ТМФ. 1974. Т. 21. С. 247.
45. Зубарев В.Н., Морозов В.Г., Рёнке Г. Статистическая механика неравновесных процессов. Т. 1. М.: Физматлит. 2002.
46. Blaschke D.B., Ilyine S.V., Panferov A.D., Röpke G., Smolyansky S.A. Optical properties of the  $e^+e^-$  plasma generated in the focal spot of a high-intensity laser // Plasma Phys. 2009. In press.
47. Haug H., Koch S.W. Quantum theory of the optical and electronic properties of semiconductors. Fourth Ed. World Scientific, 2004.
48. Popov V.S. Schwinger mechanism of electron-positron pair production by the field of optical and X-ray lasers in vacuum // JETP Lett. 2001. Vol. 74. P. 133.
49. Кузовлев Ю.Е., Медведев Ю.В., Гришин А.М. Быстро флуктуирующие поля как источник низкочастотных флуктуаций проводимости и размерные эффекты в квантовой кинетике // Письма в ЖЭТФ. 2000. Т. 72. С. 832.
50. Цитович В.Н. О пространственной дисперсии в релятивистской плазме // ЖЭТФ. 1961. Т. 40. С. 1775.
51. Blaschke D.B., Dąbrowski M.P., Dmitriev V.V., and Smolyansky S.A. Massive vector boson production in an instantaneous electroweak phase transition in the early Universe // Доклад на «Черниковском гравитационном семинаре». ЛТФ. Дубна. 2008.



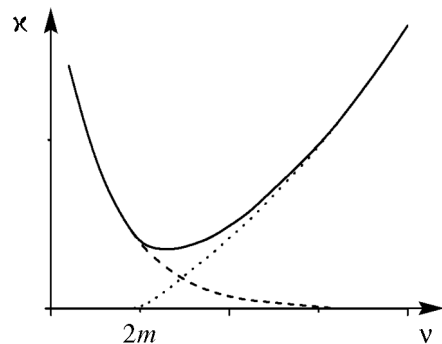


Рис. 6. Спектр поглощения: пунктирная линия – оптическая область ( $\nu \ll m, \gamma \ll 1$ ); точечная линия – высокочастотная область ( $\nu \gtrsim m, \gamma \gtrsim 1$ ); сплошная линия – общий коэффициент поглощения

тивной в силу плохой сходимости рядов. В настоящее время здесь получен только качественный результат [46] (см. рис. 6)

$$\kappa_{\text{opt}}(\nu) \sim \kappa_0 m / \nu. \quad (27)$$

Заметим, что такая зависимость характерна для фликкер-шума (например, см. [49] и цитированную там литературу). Возможно, что это сходство имеет общие причины.

### Заключение

Вакуумное рождение частиц может происходить под воздействием не только сильных электромагнитных полей, но и других механизмов возбуждения вакуума. Для достаточно быстрых процессов, как правило, удается вводить различные модификации кинетических уравнений, обсуждаемых в разделе 1. Здесь ограничимся кратким перечнем направлений, в которых были использованы методы кинетической теории вакуумного рождения частиц, упоминая лишь обзоры либо первоначальные работы в новых направлениях.

1. Генерация кварк-глюонной плазмы при соударении ультррелятивистских тяжелых ионов [20, 36, 42].
2. Релятивистский фазовый переход в ранней космологии [51].
3. Генерация частиц в динамических фазовых переходах [54].
4. Теория междузонных переходов под воздействием электромагнитных полей в физике твердого тела [52].
5. Инерциальный механизм вакуумного рождения частиц, где источником вакуумной нестабильности является генерация массы покоя частиц определенного сорта [53].
6. Вакуумное рождение частиц в системах с изменяющейся топологией [55].
7. Влияние сильных магнитных полей [24].

Можно констатировать, что в настоящее время физика квазичастичной электрон-позитронной плазмы находится в состоянии развития. Многие происходящие в ней

система Ресслера. Информационные сообщения осуществляли одновременную модуляцию трех параметров этой системы для передачи информации об оттенках трех цветов (красный, синий, зеленый), формирующих цветное изображение.

### Заключение

Методы анализа структуры сигналов, основанные на вейвлет-преобразовании, могут применяться независимо от природы процесса; они с равным успехом могут быть использованы как в исследованиях радиофизических систем, так и при анализе сложной динамики объектов живой природы. Биологические системы часто демонстрируют сложное нерегулярное поведение, характеристики которого непрерывно меняются во времени. Привлечение для анализа соответствующей динамики классических вероятностных и спектральных методов означает априорное предположение о том, что рассматриваемые процессы можно приближенно считать эргодическими, а справедливость этого допущения довольно сложно обосновать, если живой организм демонстрирует процесс адаптации к изменению внешних условий функционирования. Зачастую возникают проблемы с интерпретацией результатов анализа биологических данных, которые выявляют ограничения классических подходов к анализу случайных процессов и определяют важность разработки новых, более эффективных инструментов анализа структуры сигналов. Развитие техники привело в настоящее время к высочайшему уровню экспериментальных исследований, когда сигналы биологических систем можно измерять на микроскопическом уровне отдельных клеток и внутриклеточной динамики. В то же время анализ таких сигналов зачастую ограничивается простой статистической обработкой экспериментальных данных. Создание более точных инструментов исследования сигналов, позволяющих выявить детали их сложной структуры, является в этой связи очень актуальной задачей: под высокоточные эксперименты, выполняемые в настоящее время в биологии, нужны соответствующие методы анализа. Биологические приложения физических подходов обогащают и саму физику. В частности, разработанные специальные методы, для которых нестационарность динамики не является препятствием, не только существенно расширяют возможности экспериментальных исследований, но и в значительной степени определяют дальнейший прогресс в развитии теории анализа структуры сигналов.

*Автор выражает признательность N.-H. Holstein-Rathlou, D.J. Marsh и В.А. Макарову за предоставленные данные и многочисленные дискуссии. Работа была поддержана Федеральным агентством по образованию в рамках ФЦП «Научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 годы (государственный контракт № П451).*

### Библиографический список

1. Grossman A., Morlet J. Decomposition of Hardy functions into square intergable wavelets of constant shape // SIAM J. Math. Anal. 1984. Vol. 15. P. 723.
2. Daubechies I. Ten lectures on wavelets (Philadelphia: S.I.A.M., 1992).

3. Meyer Y. Wavelets: Algorithms and applications (Philadelphia: S.I.A.M., 1993).
4. Kaiser G. A friendly guide to wavelets (Boston: Birkhäuser, 1994).
5. Астафьева Н.М. Вейвлет-анализ: основы теории и примеры применения // Успехи физических наук. 1996. Т. 166, № 11. С. 1145.
6. Mallat S.G. A wavelet tour of signal processing (New York: Academic Press, 1998).
7. Короновский А.А., Храмов А.Е. Непрерывный вейвлетный анализ и его приложения. (М.: Физматлит, 2003).
8. Addison P.S. The illustrated wavelet transform handbook: applications in science, engineering, medicine and finance (Bristol, Philadelphia: IOP Publishing, 2002).
9. Vetterli M., Kovacevic J. Wavelets and subband coding (NJ: Prentice Hall, 1995).
10. Holstein-Rathlou N.-H., Leyssac P.P. TGF-mediated oscillations in the proximal intratubular pressure: Differences between spontaneously hypertensive rats and Wistar-Kyoto rats // Acta Physiol. Scand. 1986. Vol. 126. P. 333.
11. Marsh D.J., Sosnovtseva O.V., Pavlov A.N., Yip K.-P., Holstein-Rathlou N.-H. Frequency encoding in renal blood flow regulation // American Journal of Physiology (Regul. Integr. Comp. Physiol.). 2005. Vol. 288. P. R1160.
12. Sosnovtseva O.V., Pavlov A.N., Mosekilde E., Yip K.-P., Holstein-Rathlou N.-H., Marsh D.J. Synchronization among mechanisms of renal autoregulation is reduced in hypertensive rats // American Journal of Physiology (Renal Physiology). 2007. Vol. 293. P. F1545.
13. Moreno A., Garsia-Gonzalez V., Sanches-Jimenez A., Panetsos F. Principalis, oralis and interpolaris responses to whisker movements provoked by air jets in rats // NeuroReport. 2005. Vol. 16. P. 1569.
14. Pavlov A.N., Makarov V.A., Mosekilde E., Sosnovtseva O.V. Application of wavelet-based tools to study the dynamics of biological processes // Briefings in Bioinformatics. 2006. Vol. 7. P. 375.
15. Carvell G.E., Simons D.J. Task- and subject-related differences in sensorimotor behavior during active touch // Somat. Mot. Res. 1995. Vol. 12. P. 11.
16. Garabedian C.E., Jones S.R., Merzenich M.M., Dale A., Moore C.I. Band-pass response properties of rat SI neurons // J. Neurophysiology. 2003. Vol. 90. P. 1379.
17. Павлов А.Н. Детектирование информационных сигналов на основе реконструкции динамических систем и дискретного вейвлет-преобразования // Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2008. Т. 16, № 6. С. 3.
18. Kocarev L., Halle K.S., Eckert K., Chua L.O., Parlitz U. Experimental demonstration of secure communications via chaotic synchronization // Int. J. Bifurcation and Chaos. 1992. Vol. 2. P. 709.
19. Cuomo K.M., Oppenheim A.V., Strogatz S.H. Synchronization of Lorenz-based chaotic circuits with application to communications // IEEE Trans. Circuits Syst. 1993. Vol. 40. P. 626.
20. Parlitz U., Kocarev L. Multichannel communication using autosynchronization // Int. J. Bifurcation and Chaos. 1996. Vol. 6. P. 581.

Определим коэффициент поглощения как фурье-образ плотности мощности локального поглощения  $Q(t) = \vec{j}(t)\vec{E}(t)$ , нормированной на плотность энергии падающего излучения

$$\kappa(\omega) = Q(\omega)/w(\omega). \quad (16)$$

В случае подкритического поля  $\xi \ll 1$  можно воспользоваться приближением малой плотности для функций распределения и вакуумной поляризации (мы ограничимся ниже случаем линейно поляризованного поля) [27, 46]

$$f(\vec{p}, t) = \frac{1}{4} \left| \int_{t_0}^t dt' \Delta(\vec{p}, t') \exp(i\theta(\vec{p}, t, t')) \right|^2, \quad (17)$$

$$u(\vec{p}, t) = \int_{t_0}^t dt' \Delta(\vec{p}, t') \cos \theta(\vec{p}, t, t'). \quad (18)$$

Тогда для токов проводимости и поляризации ( $\int dp = \int d^3p(2\pi)^{-3}$ )

$$j_{\text{cond}}(t) = 4e \int dp \frac{p_{\parallel}}{\varepsilon(\vec{p}, t)} f(\vec{p}, t), \quad (19)$$

$$j_{\text{pol}}(t) = 2e \int dp \frac{\varepsilon_{\perp}(\vec{p})}{\varepsilon(\vec{p}, t)} u(\vec{p}, t), \quad (20)$$

легко получить следующие оценки по параметру  $\xi \ll 1$ :

$$j_{\text{cond}} \sim j_{\text{cond}}^{(3)}, \quad j_{\text{pol}} \sim j_{\text{pol}}^{(1)} \quad (21)$$

и, следовательно,

$$j \simeq j_{\text{pol}} \simeq j_{\text{pol}}^{(1)}. \quad (22)$$

В высокочастотной области  $\nu \sim m$  параметр  $\gamma \sim 1/\xi \gg 1$  и можно заменить  $\omega(\vec{p}, t)$  (6) на  $\omega_0(p) = [m^2 + p^2]^{1/2}$ . Тогда

$$j = 2e^2 \int dp \frac{\varepsilon_{\perp}^2}{\omega_0^3} \int_{t_0}^t dt' E(t') \cos[2\omega_0(t - t')]. \quad (23)$$

В этом выражении присутствуют эффекты запаздывания, и проводимость определяется импульсным распределением вакуумных осцилляций на частоте  $2\omega_0$

$$\sigma(t) = 2e^2 \int dp \frac{\varepsilon_{\perp}^2}{\omega_0^3} \cos(2\omega_0 t). \quad (24)$$

Интегрирование здесь выполняется точно

$$\sigma(\omega) = \frac{\kappa_0}{3\pi} \sqrt{\frac{\omega^2}{4m^2} - 1} \left( 1 + \frac{8m^2}{\omega^2} \right) \theta(\omega - 2m), \quad (25)$$

$\kappa_0 = e^2 m / 4\pi$  – вакуумная восприимчивость. В результате получим

$$\kappa(\nu) = 4\pi\sigma(\nu). \quad (26)$$

где теперь  $\vec{P} = \vec{p} - e\vec{A}(t)$ ,

$$\omega = \sqrt{m^2 + P^2}, \quad \omega_+ = \omega + m, \quad (12)$$

а  $\vec{q} = a[\vec{P}(\vec{P}\vec{E}) - \vec{E}\omega\omega_+]$ ,  $\vec{U} = a\omega[\vec{P}\vec{E}]$ ,  $a = e/(2\omega^2\omega_+)$ . В случае линейно поляризованного поля эта система переходит в (7). КУ (3) или, в более общем случае, замкнутая система уравнений (11) являются непертурбативными следствиями динамики фермионных полей в присутствии сильного квазиклассического электрического поля. На рис. 2 [30] показана временная зависимость плотности числа рожденных квазичастичных электрон-позитронных пар

$$n(t) = \frac{2}{(2\pi)^3} \int d^3p f_0(\vec{p}, t) \quad (13)$$

для линейно и циркулярно поляризованного поля. При вычислениях была использована укороченная система уравнений (11), которая получается при учете только первых слагаемых в разложениях (10) (пренебрежение спиновыми эффектами, роль которых, по-видимому, можно пренебречь в случае достаточно слабых, подкритических полей  $E \ll E_{cr}$ ).

Уже простейшее КУ (3) содержит в себе эффекты либо «бозевского усиления» ( $1 + 2f$ ), либо «фермиевского подавления» ( $1 - 2f$ ). С этой точки зрения, присутствие «первоначальной» плазмы затрудняет вакуумное рождение ЭПП и ее наблюдение (укажем, тем не менее, работы [32, 33], относящиеся к этому направлению). Некоторые общие особенности вакуумной генерации квазичастичной ЭПП в присутствии начальной ЭПП с функцией распределения  $f_{in}(\vec{p})$  были изучены в работе [34]. Отметим также работу [35], идеи которой могут оказаться полезными для рассматриваемого направления.

Проблема обратной реакции (BR-проблема) в сильных электрических и хромоэлектрических полях обсуждалась достаточно давно [18, 20, 36] в случае линейной поляризации поля на основе КУ (3). В общем случае проблема должна быть исследована на основе системы КУ (11) с полным полем  $A(t) = A_{in}(t) + A_{ex}(t)$ ,

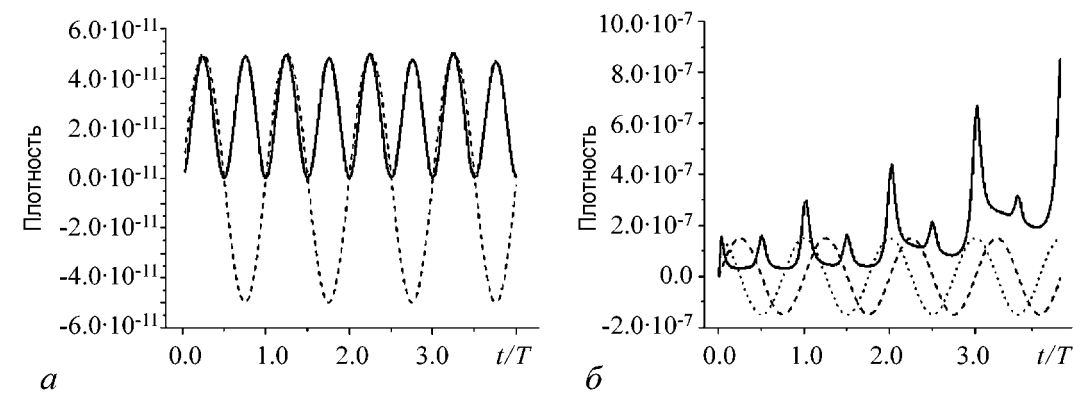


Рис. 2. Временная зависимость плотности квазичастичной ЭПП для лазерного поля с  $E_0 = 3 \cdot 10^{-5} E_{cr}$  и  $\lambda = 795$  nm: а – для линейной поляризации (штрихом изображена напряженность поля  $E_z = E_{0n} \sin vt$ ,  $E_{0n}$  – нормированная амплитуда поля); б – для циркулярной поляризации ( $E_x = E_{0n} \sin vt$ ,  $E_y = E_{0n} \cos vt$ )

проверяемые теории о происхождении и эволюции жизни на Земле, которые подменяются теориями, не допускающими научной проверки. Мы призываем всех людей, принимающих решения, учителей и родителей обучать детей методам науки и результатам её открытий, а также способствовать продвижению общего понимания достижений естественных наук. Знание окружающего мира, в котором мы живем, дает людям возможности для удовлетворения их потребностей и защиты нашей планеты.

Мы считаем, что следующие *доказанные* факты о происхождении и эволюции Земли и жизни на этой планете твердо установлены многочисленными наблюдениями и полученными независимо экспериментальными результатами многих научных дисциплин. Несмотря на то, что остается еще много вопросов о тонких деталях эволюционных изменений, научные свидетельства никогда еще не противоречили следующим результатам.

1. Во Вселенной, которая развивалась к нынешнему своему состоянию в течение примерно 11 или 15 миллиардов лет, наша Земля сформировалась приблизительно 4.5 миллиарда лет назад.

2. С момента своего формирования Земля – её геологическое строение и окружающая среда – менялись под влиянием многочисленных физических и химических сил и этот процесс продолжается в настоящее время.

3. Жизнь появилась на Земле, по крайней мере, 2.5 миллиарда лет назад. Вскоре после этого, по меньшей мере, 2 миллиарда лет назад, эволюция позволила фотосинтезирующим организмам постепенно преобразовывать атмосферу к состоянию со значительным содержанием кислорода. В дополнение к производству кислорода, которым мы дышим, процесс фотосинтеза является основным источником связанной энергии и пищи, от которой зависит человеческая жизнь на нашей планете.

4. С момента своего появления жизнь на Земле приняла множество форм, которые все еще продолжают развиваться путями, все более точно описываемыми палеонтологией, современной биологией и биохимией на основе независимых подтверждений. Общность генетического кода всех существующих ныне организмов, включая человека, ясно указывает на их общее исходное происхождение.

Мы также подписываемся под следующим заявлением, касающимся научных взглядов на преподавание эволюции, или в более общем виде, касательно любой формы научного знания.

Научное знание выводится из исследований природы Вселенной, которые привели к большим успехам и важным последствиям. Наука занимается (I) наблюдениями естественного мира и (II) формулировкой *проверяемых* и *опровергаемых* гипотез, позволяющих все более глубокое объяснение наблюдаемых явлений. Когда полученные в ходе исследований факты являются достаточно надежными, развиваются научные теории, объясняющие эти факты и предсказывающие возможный ход различных процессов или еще не наблюдавшиеся явления.

Человеческое понимание ценности и цели находится за пределами задач естественных наук. Однако ряд аспектов – научных, социальных, философских, религиозных, культурных и политических – вносят здесь свой вклад. Все эти области обогащают друг друга в ходе совместных обсуждений при ясном осознании ограниченности соответствующих областей применения.

Признавая эти ограничения, наука открыта для обсуждений, поправок и дальнейшего развития, по мере того, как открываются новые теоретические и эмпирические знания».

**1584** Опубликовано сочинение Джордано Бруно «О бесконечности, Вселенной и мирах», в котором были высказаны идеи о бесконечности Вселенной и бесконечном множестве миров. Бруно признавал и развивал гелиоцентрическую теорию мироздания Коперника.

**1619** Вышла в свет книга Кеплера «Гармония мира», в которой был изложен третий закон движения планет. Два других закона движения планет вокруг Солнца – закон эллипсов и закон равных площадей – были открыты им ранее. Напомним их формулировки.

I закон. Каждая планета движется по эллипсу, в одном из фокусов которого расположено Солнце.

II закон. Радиус-вектор планеты описывает в равные промежутки времени равные площади.

III закон. Общая формулировка. В невозмущенном эллиптическом движении двух материальных точек произведения квадратов времен обращения на суммы масс центральной и движущихся точек относятся как кубы больших полуосей их орбит, то есть

$$\frac{T_1^2 m_0 + m_1}{T_2^2 m_0 + m_2} = \frac{a_1^2}{a_2^2},$$

где  $T_1, T_2$  – периоды обращения двух точек (двух планет),  $m_1$  и  $m_2$  – их массы,  $m_0$  – масса центральной точки (Солнца),  $a_1$  и  $a_2$  – большие полуоси орбит точек.

Если пренебречь массами планет по сравнению с массой Солнца, получим III закон Кеплера в его первоначальной формулировке: квадраты времен обращений планет вокруг Солнца пропорциональны кубам больших полуосей их эллиптических орбит.

Этот закон легко получить из соображений размерности, решая следующую задачу.

Планета массой  $m$  вращается вокруг своего Солнца массой  $M$  по эллиптической орбите с большой осью  $D$ . Найти период  $T$  обращения планеты. Очевидно, что  $T = f(M, m, D, G)$ , где  $G$  – гравитационная постоянная. Матрица размерности в системе  $LMT$  имеет вид

	$T$	$M$	$m$	$D$	$G$
$L$	0	0	0	1	3
$M$	0	1	1	0	-1
$T$	1	0	0	0	-2

Поскольку  $T = CM^\alpha m^\beta D^\gamma G^\delta$ , где  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  и  $C$  – неизвестные постоянные,  $T = M^{\alpha+\beta-\delta} L^{\gamma+3\delta} T^{-2\delta}$ . Следовательно

$$2\delta = -1, \quad \alpha + \beta - \delta = 0, \quad \gamma + 3\delta = 0;$$

тогда

$$\delta = -1/2, \quad \beta = -1/2 - \alpha, \quad \gamma = 3/2.$$

Окончательно имеем  $T = C(M/m)^\alpha (Gm)^{-1/2} D^{3/2}$  или  $T^2 \sim D^3$ , то есть квадрат периода обращения планеты пропорционален кубу большой орбиты.

свойства этого интегро-дифференциального КУ немарковского типа (уравнение типа Вольтерры) были изучены в работах [18–21]. Можно записать (3) в системе ОДУ

$$\dot{f} = \frac{1}{2}\lambda u, \quad \dot{u} = \lambda(1 - 2f) - 2\omega v, \quad \dot{v} = 2\omega u, \quad (7)$$

которая удобна для численного анализа. Интегралы столкновений, дополняющие КУ (3), были получены в работах [22, 23]. Обобщение КУ (3) на случай, когда наряду с электрическим полем  $A(t)$  действует сильное постоянное магнитное поле  $\vec{H}(0, 0, H)$ , дано в [24]. Система (7) была получена также в работе [25]. Функция распределения квазичастичной ЭПП в (3) определена как вакуумное ожидание по in-вакууму в квазичастичном представлении [26]

$$f(\vec{p}, t) = \langle 0_{\text{in}} | a^+(\vec{p}, t) a(\vec{p}, t) | 0_{\text{in}} \rangle. \quad (8)$$

Такое определение не всегда адекватно постановке задачи, например, в ранней космологии понятие частицы определено только в out-вакууме.

Первоначально КУ (3) (или эквивалентная ему система (7)) было получено в рамках метода зависящего от времени канонического преобразования Боголюбова [26]. Впоследствии был разработан метод, основанный на осцилляторном представлении [27], который оказался наиболее эффективным при получении КУ типа (3).

В частности, это представление оказалось очень полезным при обобщении КУ (3) на случай внешнего электрического поля произвольной поляризации  $A^H(0, \vec{A}(t))$  [28–31]. В результате учета спиновых эффектов соответствующая система КУ значительно усложняется по сравнению с системой (7). Для полного описания процессов вакуумного рождения квазичастичных электрон-позитронных пар достаточно задать три матричных функции (при условии электронейтральности системы)

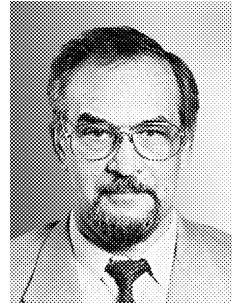
$$\begin{aligned} f_{\alpha\beta}(\vec{p}, t) &= \langle 0_{\text{in}} | a_{\beta}^+(\vec{p}, t) a_{\alpha}(\vec{p}, t) | 0_{\text{in}} \rangle, \\ f_{\alpha\beta}^{(+)}(\vec{p}, t) &= \langle 0_{\text{in}} | a_{\beta}^+(\vec{p}, t) b_{\alpha}^+(-\vec{p}, t) | 0_{\text{in}} \rangle, \\ f_{\alpha\beta}^{(-)}(\vec{p}, t) &= \langle 0_{\text{in}} | b_{\beta}(-\vec{p}, t) a_{\alpha}(\vec{p}, t) | 0_{\text{in}} \rangle. \end{aligned} \quad (9)$$

Чтобы выделить спиновые эффекты, можно выполнить здесь стандартные разложения по матрицам Паули типа

$$f = f_0 + f_k \sigma^k. \quad (10)$$

В таком спиновом представлении результирующая система КУ будет иметь следующий вид ( $u = \text{Re}f^{(+)}$ ,  $v = \text{Im}f^{(+)}$ ):

$$\begin{aligned} \dot{f}_0 &= -2\vec{q}\vec{u}, & \dot{f}_k &= -2u_0 q_k - 2[\vec{f}\vec{U}]_k + 2[\vec{v}\vec{q}]_k, \\ \dot{f}_0^c &= 2\vec{q}\vec{u}, & \dot{f}_k^c &= 2u_0 q_k - 2[\vec{f}^c\vec{U}]_k - 2[\vec{v}\vec{q}]_k, \\ \dot{u}_0 &= 2\omega v_0 + (\vec{f} - \vec{f}^c)\vec{q}, & \dot{u}_k &= 2\omega v_k - 2[\vec{u}\vec{U}]_k + (f_0 - f_0^c)q_k, \\ \dot{v}_0 &= -2\omega u_0, & \dot{v}_k &= -2\omega u_k - 2[\vec{v}\vec{U}]_k + [(\vec{f} + \vec{f}^c)\vec{q}]_k, \end{aligned} \quad (11)$$



*Анищенко Вадим Семенович* – родился в 1943 году. Окончил физический факультет СГУ (1966). Защитил диссертацию на звание кандидата физико-математических наук (1970) и доктора физико-математических наук (1986). С 1988 года – заведующий кафедрой радиофизики и нелинейной динамики физического факультета СГУ. С 1979 и по настоящее время работает в области исследования нелинейной динамики и стохастических процессов в нелинейных системах. Является автором более 300 научных работ, среди которых 7 монографий на русском и английском языках и 4 учебника. Неоднократно читал лекции в ведущих вузах Германии в качестве приглашенного профессора. Член-корреспондент РАН, заслуженный деятель науки РФ (1995), Соросовский профессор, лауреат премии Фонда Александра Гумбольдта (1999).

410012 Саратов, Астраханская, 83  
Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского  
E-mail: wadim@info.sgu.ru



*Вадивасова Татьяна Евгеньевна* – родилась в 1958 году. Окончила физический факультет Саратовского государственного университета (1981), доктор физико-математических наук. В настоящее время – профессор кафедры радиофизики и нелинейной динамики физического факультета СГУ. Научные интересы сосредоточены в области нелинейной динамики: эффекты синхронизации в ансамблях хаотических осцилляторов, явление фазовой мультистабильности взаимодействующих хаотических систем, свойства различных типов нерегулярных аттракторов, статистические характеристики динамического хаоса, роль флуктуаций в нелинейных системах и др. Автор более 60 публикаций в отечественной и зарубежной печати, включая 3 монографии.

410012 Саратов, Астраханская, 83  
Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского  
E-mail: vadvasovate@yandex.ru

Эксперимент по определению расхода жидкости возможен и в отсутствие гравитационного поля, следовательно, введение  $g$  излишне.

Таким образом,  $V = f(\mathcal{P}, r, \eta)$  и  $V = C\mathcal{P}^\alpha r^\beta \eta^\gamma$ , где  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  и  $C$  – неизвестные постоянные. Составим матрицу размерности в системе  $LMT$

$$\begin{array}{ccccc} & V & \mathcal{P} & r & \eta \\ L & 3 & -2 & 1 & -1 \\ M & 0 & 1 & 0 & 1 \\ T & -1 & -2 & 0 & -1 \end{array} .$$

Следовательно,

$$L^3 T^{-1} = L^{-2\alpha+\beta-\gamma} M^{\alpha+\gamma} T^{-2\alpha-\gamma}.$$

Тогда имеем следующую систему уравнений для определения  $\alpha$ ,  $\beta$  и  $\gamma$ :

$$\left. \begin{array}{l} -2\alpha + \beta - \gamma = 3, \\ \alpha + \gamma = 0, \\ 2\alpha + \gamma = 1, \end{array} \right\} \alpha = 1, \beta = 4, \gamma = 1.$$

Окончательно для закона Пуазейля имеем

$$V = C \frac{\mathcal{P} r^4}{\eta}.$$

Строгое решение дает  $C = \frac{\pi}{8}$  и  $V = \frac{\pi p_1 - p_2}{8 l \eta} r^4$ .

Полученный результат показывает, что для определения  $\eta$  радиус трубы должен быть измерен с весьма высокой точностью, так как  $\eta \sim r^4$ .

**1849** Родился Джон Амброс Флеминг – английский физик, научные работы которого посвящены радиотелеграфии и радиотелефонии, а также различным вопросам электротехники. В 1904 году он изобрел двухэлектродную лампу (диод). Ему принадлежит правило Флеминга – правило правой руки для определения направления индукционного тока в проводнике.

В «колебательных кругах» имя Флеминга известно еще и тем, что он отрицал реальность боковых полос при модуляции. Исчерпывающее объяснение ошибки Флеминга дал Л.И.Мандельштам. В семнадцатой лекции своих знаменитых «Лекций по теории колебаний» [2] он пишет: «Мы разлагали простейшее модулированное колебание на три синусоидальных колебания. Флеминг говорит следующее. Эти три волны «не реальны». Законодательство ограничивает частоту модуляции. Оно требует, чтобы при передаче модуляция была не более быстрой, чем 10 тысяч колебаний в секунду. Это мотивируется тем, что в противном случае близкие по частоте станции не смогут работать. Но так как боковые частоты не реальны, говорит Флеминг, то такое законодательство не имеет смысла.

Вопрос «реальны» или «не реальны» боковые полосы, не имеет смысла. Так вопрос ставить нельзя. Переход от формулы  $y = E \cos(pt) = E_0(1 + k \cos(vt)) \cos(pt)$  к формуле  $y = E_0 \cos(pt) + \frac{kE_0}{2} \cos[(p - v)t] + \frac{kE_0}{2} \cos[(p + v)t]$  – простая тригонометрия. Никакое приемное устройство не различит, имеется ли одна модулированная волна или соответствующие ей три волны от трех немодулированных передатчиков.

Вопрос о реальности боковых полос – это такой же вопрос, как, например, что реально: то, что  $10 = 2 + 8$ , или то, что  $10 = 5 + 5$ ? Правильно ставить вопрос только так: как целесообразно в данном конкретном случае представить число 10? А это зависит от того, что вы хотите сделать».

В этой же лекции [2, с.164], заканчивая обсуждение теории резонанса, Мандельштам вновь критикует громкую ошибку Флеминга.

«Возьмем, например, Флеминга. Это крупный радиоспециалист, член Королевского общества (Английской академии наук). Его книга «Волны в воде, воздухе и эфире» – в общем, неплохая, там есть много интересных сведений. Но по поводу резонанса там имеется явный вздор. Говорится, например, что мальчик, стреляя из рогатки, может разрушить железнодорожный мост через Темзу. Это невозможно из-за затухания».

Но Мандельштам не только ругал Флеминга: одна из наглядных интерпретаций Флеминга благодаря Мандельштаму стала классической. В третьей лекции из цикла «Лекции по некоторым вопросам теории колебаний» [3] мы находим следующее.

«При отрицательной групповой скорости «медленно меняющаяся амплитуда» движется в сторону, противоположную направлению распространения волн, составляющих группу. Как представить себе это наглядно? Флеминг приводит следующий пример: по плывущей барже вереницей бегут мальчики, спрыгивают с носа в воду и взбираются затем на корму. Если мальчики будут бежать в сторону, противоположную движению баржи, то мы и получим картину отрицательной групповой скорости (скорость баржи)» [3, с. 423].

**1869** В Англии начал издаваться журнал «Nature».

**1879** Австрийский физик Йозеф Стефан (1835–1893) экспериментально установил пропорциональность энергии, излучаемой нагретым телом, четвертой степени абсолютной температуры (закон Стефана–Больцмана). Этот закон в 1884 году теоретически вывел Л. Больцман (1844–1906). Стефан – основатель австрийской физической школы, его учениками были Л. Больцман и Ф. Газенорль (1874–1917). Он проводил исследования в области оптики, акустики, электромагнетизма, кинетической теории, гидродинамики, теории теплового излучения.

Следуя уже сложившейся традиции, покажем, следуя Перси Уильяму Бриджмену (1882–1961), как вывести закон Стефана–Больцмана из соображений размерности [4].

Рассмотрим полость со стенками, полностью отражающими всякое излучение. Пусть внутри полости находится разреженный электронный газ. Считаем, что электроны ведут себя подобно молекулам идеального газа, и эффектом пространственного распределения заряда можно пренебречь по сравнению с силами, обусловленными столкновениями частиц. Таким образом, на электроны действуют силы столкновения с другими электронами (их природа такая же, как у атомов в обычной кинетической теории) и силы поля излучения. Рано или поздно система должна прийти в равновесие, достигая некоторой плотности энергии. Причем электроны должны обладать кинетической энергией, свойственной атомам газа при температуре полости. Пусть электронный газ в полости находится при абсолютной температуре  $\theta$ . При строгом решении задачи необходимо пользоваться уравнениями электродинамики, поэтому в наше решение скорость света  $c$  войдет как размерная постоянная. Следует учитывать

13. *Crauel H., Flandol F.* Additive noise destroys a pitchfork bifurcation // Journal of Dynamics and Differential Equations. 1998. Vol. 10. P. 259.
14. *Leung H.K.* Stochastic Hopf bifurcation in a based van der Pol model // Physica A. 1998. Vol. 254(1). P. 146.
15. *Bashkirtseva I., Ryashko L., Schurz H.* Analysis of noise-induced transitions for Hopf system with additive and multiplicative random disturbances // Chaos, Solitons, and Fractals. 2009. Vol. 39. P. 7.
16. *Ebeling W., Herzel H., Richert W., Schimansky-Geier L.* Influence of noise on Duffing–van der Pol oscillator // Zeitschrift f. Angew. Math. und Mechanik. 1986. Vol. 66. P. 141.
17. *Schimansky-Geier L., Herzel H.* Positive Lyapunov exponents in the Kramers oscillator // J. of Stat. Physics. 1993. Vol. 70. P. 141.
18. *Matsumoto K., Tsuda I.* Noise-induced order // J. Stat. Phys. 1983. Vol. 31(1). P. 87.
19. *Hramov A.E., Koronovskii A.A., Moskalenko O.I.* Are generalized synchronization and noise-induced synchronization identical types of synchronous behavior of chaotic oscillators? // Phys. Lett. A. 2006. Vol. 354(5-6). P. 423.
20. *Стратонович П.Л.* Избранные вопросы теории флуктуаций в радиотехнике. М.: Сов. радио, 1961.
21. *Малахов А.Н.* Флуктуации в автоколебательных системах. М.: Наука, 1968.
22. *Benzi R., Sutera A., Vulpiani A.* The mechanism of stochastic resonance // J. Phys. A: Math. Gen. 1981. Vol. 14. P. L453.
23. *Gammaitoni L., Marchesoni F., Menichella-Saetta E., Santucci S.* Stochastic resonance in bistable systems // Phys. Rev. Lett. 1989. Vol. 62. P. 349.
24. *Pikovsky A., Kurths J.* Coherence resonance in a noisy driven excitable system // Phys. Rev. Lett. 1997. Vol. 78. P. 775.
25. *Linder B., Schimansky-Geier L.* Analytical approach to the stochastic FitzHugh–Nagumo system and coherence resonance // Phys. Rev. E. 1999. Vol. 60(6). P. 7270.
26. *Shulgin B., Neiman A., Anishchenko V.* Mean switching frequency locking in stochastic bistable system driven by a periodic force // Phys. Rev. Lett. 1995. Vol. 75(23). P. 4157.
27. *Anishchenko V., Neiman B.* Stochastic synchronization // Stochastic Dynamics / Eds. L. Schimansky-Geier and T. Pöschel. Berlin: Springer, 1997. P. 155.

Поступила в редакцию 30.06.2009

## STOCHASTIC BIFURCATIONS

*T.E. Vadivasova, V.S. Anishchenko*

The modern knowledges of bifurcations of dynamical systems in the presence of noise are presented. The main definitions are given and certain typical examples of the bifurcations in the presence of additive and multiplicative noise are considered.

*Keywords:* Stochastic bifurcation, P-bifurcation, D-bifurcation, noise induced transition.

дет точкой гладкого минимума, поскольку производные функции  $p_{\mu}(x, y)$  в нуле терпят разрыв. При  $\varepsilon > \varepsilon_{P1}$  возникает максимум функции  $p_{\mu}(x, y)$  в точках предельного цикла  $x^2 + y^2 = 2\varepsilon$ , поэтому данная бифуркация может рассматриваться как начало генерации. Таким образом, как при аддитивном, так и при мультипликативном шуме, порог генерации остается тем же, что и в детерминированной системе (10).

В точке  $\varepsilon = \varepsilon_{P2} = D/2$  происходит еще одна качественная перестройка стационарного вероятностного распределения, состоящая в возникновении гладкого минимума в нуле координат. Поведение стационарной плотности вероятности  $p_{\mu}(x, y)$  для модели (16)–(17) очень похоже на поведение плотности вероятности в модели бифуркации «трехкратное равновесие» (8), рассмотренной ранее. Вопрос о том, как вторая Р-бифуркация отражается на статистических характеристиках автоколебаний, пока не исследовался.

Мы рассмотрели влияние на бифуркацию Андронова–Хопфа только белого гауссова шума. В случае мультипликативного цветного шума важную роль играет время корреляции шума  $\tau_{\text{кор}}$  (или, что то же самое, ширина спектральной линии шума). Точки бифуркаций и длина бифуркационного интервала оказываются зависящими от  $\tau_{\text{кор}}$  как от управляющего параметра системы [6, 7, 11].

#### 4. Возникновение и подавление хаоса под действием аддитивного шума

Для рассмотренных простых примеров аддитивный шум, по-видимому, приводит к исчезновению динамической бифуркации. Однако это не означает, что динамические бифуркации при аддитивном шуме вообще невозможны. Для систем с размерностью пространства состояний  $N \geq 2$  типичны эффекты возникновения или, напротив, подавления хаотического поведения при воздействии аддитивного шума. Под хаотическим поведением понимается экспоненциальная неустойчивость фазовых траекторий. Например, индуцированный шумом переход к хаосу установлен для осцилляторов ван дер Поля–Дуффинга [16] и Дуффинга [17]. Такие переходы являются D-бифуркациями, но они отличаются от рассмотренных ранее D-бифуркаций состояний равновесия при воздействии мультипликативного шума. В данном случае нет двух различных инвариантных множеств, соответствующих стационарному режиму до и после бифуркации. Меняется устойчивость траекторий, принадлежащих одному и тому же инвариантному множеству. При этом бифуркация не приводит к качественному изменению вида стационарной плотности вероятности.

В качестве примера рассмотрим переход к хаосу в осцилляторе Дуффинга под действием аддитивного внешнего шума. Система описывается следующим СДУ:

$$\ddot{x} + \gamma \dot{x} = x - x^3 + \sqrt{2D}n(t). \quad (20)$$

Здесь  $n(t)$  – источник нормированного гауссова белого шума;  $D$  – интенсивность шума;  $\gamma$  – параметр, задающий диссипацию энергии. Зафиксировав  $\gamma = 0.1$  и меняя интенсивность шума, при некотором значении  $D \approx 0.0075$  можно наблюдать переход старшего показателя Ляпунова  $\lambda_1$  из области отрицательных значений в область положительных значений (рис. 6, а). Возникновение экспоненциальной неустойчивости сопровождается изменением характера случайного аттрактора. Если до бифуркации он представлял собой единственную точку, случайным образом перемещающуюся по фазовой плоскости  $(x, y = \dot{x})$ , то после бифуркации он приобретает сложную, по-видимому, фрактальную структуру (рис. 6, б).

Первый успех пришел к Юзу в 1854 году, когда он создал печатающий телеграфный аппарат, в котором использовалась синхронизация печатающих барабанов передающего и приемного устройств. Приведем цитату из статьи, с упоминания которой мы начали рассказ о Юзе.

«В 1855 г. Юз продал свой еще незавершенный аппарат за 100 тыс. долларов Коммерческой компании печатающего телеграфа. В 1856 году он запатентовал свое изобретение и стал работать в Американской телеграфной компании, которая практически немедленно внедрила у себя аппараты Юза. В 1857 году Юз поехал в Англию в поисках нового рынка сбыта для своего изобретения. Однако англичане не проявили интереса к изобретению уроженца их страны. По иронии судьбы, когда через несколько лет через Ла-Манш был проложен первый подводный телеграфный кабель, возникла необходимость использования на обоих концах телеграфных аппаратов одного и того же типа. Французы соглашались только на печатающий аппарат Юза. И англичане были вынуждены применить аппаратуру, которую ранее высокомерно отвергли. Но единственным местом, в котором они установили аппарат Юза, был Лондонский оконечный пункт линии через Ла-Манш. Во всех других местах в Англии телеграфные сообщения по-прежнему записывались от руки.

Практически все страны континентальной Европы оценили новый аппарат по достоинству. Франция, Россия, Австрия, Турция не только внедрили изобретение Юза, но и наградили изобретателя медалями и почетными титулами.

В 1865 году Юз был в Санкт-Петербурге в связи с установкой его аппарата на телеграфной линии Петербург–Москва...

Продажа лицензий на печатающий телеграфный аппарат обеспечила Юзу материальную независимость. В 1877 году Юз со своей женой, уроженкой Америки, навсегда обосновался в Лондоне, и с этого времени он полностью посвятил себя науке» [7].

Юз построил ряд устройств, в которых под действием звуковых волн происходило изменение тока в цепи. Телефон, включенный в цепь, реагировал на изменение тока, воспроизводя звук. Свои преобразования звука он называл микрофонами. «Можно вполне рассчитывать на то, – писал Юз, – что микрофон будет делать для нас в отношении слабых звуков то же самое, что микроскоп делает в отношении предметов, которые слишком малы для зрения человека» [9].

20 февраля 1880 года Юз в своей лаборатории в Лондоне показывал президенту Королевского общества Вильяму Споттисвуду (1825–1883) и почетным секретарям общества, Томасу Генри Гексли (1825–1895) и Джорджу Габриелю Стоксу (1819–1903), как с помощью простой схемы, содержащей микрофон и телефон, можно обнаруживать даже на расстоянии в четверть мили не известные ранее «воздушные электрические волны», возникающие при искровом разряде. Но ученые гости не увидели важного научного открытия в опытах Юза, объяснив их известным давно явлением электромагнитной индукции, а не тем что, как говорил Юз, «воздух проводит электрические волны». Их не убедило и то, что Юз демонстрировал узлы и пучности в открытых им волнах. Он мог утешаться тем, что главный из «отрицателей» его идей, Стокс, ранее отверг как «незначительные» несколько статей Фарадея и Максвелла, представленных Королевскому обществу.

Закончим рассказ словами из цитируемой статьи [7].

«Примерно через десять лет после опытов Юза Герц получил всеобщее признание за экспериментальное доказательство существования электромагнитных волн (1887). Юз



искренне признал успех Герца... Юз справедливо писал: «Опыты Герца были гораздо убедительнее моих, хотя он пользовался значительно менее эффективным детектором по сравнению с микрофоном и когерером». Расхождение Юза с Споттисвудом, Гексли и Стоксом не испортило его отношений с Королевским обществом. В конце 1880 г. он был избран членом этого общества, а в 1885 году награжден его золотой медалью за научные заслуги. Юзом восхищались как ученым, изобретателем и как личностью. В 1886 году Королевское общество избрало Дэвида Юза своим президентом».

**1889** 120 лет со дня рождения французского исследователя Леона Бриллюэна (1889–1969), имя которого известно каждому физика, поскольку в их обиходе термины «зона Бриллюэна», «эффект Манделштама–Бриллюэна», «функция Бриллюэна», «формула Бриллюэна–Вигнера», «метод Вентцеля–Крамерса–Бриллюэна», «диаграмма Бриллюэна». Он родился 7 августа в городе Севре, близ Парижа. К точным наукам имели отношение несколько поколений его предков. Действительно, прадед по материнской линии – Ш. Брио – был профессором механики в Сорбонне, дед – Э. Маскар – профессором экспериментальной физики в Коллеж де Франс, известным специалистом в области оптики и земного магнетизма, наконец, отец – Марсель Бриллюэн – в течение тридцати двух лет занимал кафедру теоретической физики также в Коллеж де Франс. Леон Бриллюэн в своих воспоминаниях писал, что в доме деда он видел Гельмгольца и Кельвина, которые вместе разрабатывали систему электромагнитных единиц.

Видимо, широта научного кругозора предков и их окружения способствовала тому, что Бриллюэн стал одним из наиболее универсальных физиков XX века.

Среднее образование Леон получил в лицеях Генриха IV и Людовика Великого. Поначалу он не проявлял особого интереса к физике. Все изменилось, когда он обнаружил в библиотеке отца книгу с перепиской Б. Паскаля и его зятя Ф. Перрье по поводу ставшего знаменитым опыта на горе Пью-де Дом, доказавшего наряду с опытом Торричелли существование атмосферного давления. Впоследствии он вспоминал, что читал эту книгу как захватывающий роман, она открыла ему страсть и красоту научного исследования. С 1908 года в течение четырех лет Леон изучал математику, физику, химию в Высшей Нормальной школе в Париже. Одновременно он посещал лекции П. Ланжевена в Коллеж де Франс. Именно из них он узнал о квантах и теории относительности. В Парижском университете он слушал лекции Ж. Перрена и М. Склодовской-Кюри. В 1912–1913 г.г. Бриллюэн провел год в Институте теоретической физики Мюнхенского университета в Германии у А. Зоммерфельда, где на его глазах творилась новая физика. Первая работа Бриллюэна была опубликована на немецком языке в «Annalen der Physik». Она была посвящена физике твердого тела и называлась «О распространении света в диспергирующей среде».

В 1913 году он возвращается в Париж, где начинает работать над диссертацией «Теория твердого тела и кванты». Работа была прервана войной, поскольку в её начале в 1914 году Бриллюэна призывают в армию, сначала как рядового. Затем Бриллюэн становится лейтенантом радиосвязи и работает в лаборатории генерала Г. Феррье вместе с А. Абрагамом и братьями Морисом и Луи де Бройль над усовершенствованием телекоммуникаций.

Для (16) существует точка равновесия  $x = 0, y = \dot{x} = 0$ . Иначе говоря, имеется инвариантное множество  $v$  с плотностью  $p_v(x, y) = \delta(x, y)$ . В терминах модели (17) множеству  $v$  соответствует решение  $a = 0$ . Оно характеризуется плотностью вероятности  $p_v(a) = 2\delta(a)$  (фаза  $\varphi$  может принимать любые значения). Устойчивость решения  $a = 0$  определяется показателем

$$\lambda_1(v) = \left\langle \frac{\partial \dot{a}}{\partial a} \right\rangle_v = \frac{1}{2} \int_0^\infty \left( \varepsilon + \frac{D}{2} - \frac{3}{4}a^2 \right) p_v(a) da + \frac{\sqrt{D}}{2} \langle n_1(t) \rangle = \frac{1}{2} \left( \varepsilon + \frac{D}{2} \right).$$

Если  $\varepsilon < -D/2$ , то решение  $a = 0$  устойчиво, и  $p_v(a)$  является стационарным распределением амплитуды. При  $\varepsilon = \varepsilon_D = -D/2$  происходит D-бифуркация, и показатель  $\lambda_1(v)$  становится положительным, что означает неустойчивость решения  $a = 0$  при  $\varepsilon > -D/2$ . Стационарным распределением будет плотность  $p_\mu(a)$ , заданная на множестве  $\mu$  значений амплитуды  $a \neq 0$ ,

$$p_\mu(a) = N a^{2\alpha+1} \exp \left\{ -\frac{1}{2D} a^2 \right\}, \quad \alpha = \frac{2\varepsilon}{D}, \quad (18)$$

где  $N$  – нормировочная константа. Соответствующий показатель Ляпунова

$$\lambda_1(\mu) = \left\langle \frac{\partial \dot{a}}{\partial a} \right\rangle_\mu = \int_0^\infty \left( \frac{\varepsilon}{2} + \frac{D}{4} - \frac{3}{8}a^2 \right) p_\mu(a) da + \frac{\sqrt{D}}{2} \langle n_1(t) \rangle = \varepsilon + \frac{D}{2}$$

будет всегда отрицательным.

Стохастический аттрактор системы (17) до динамической бифуркации (при  $\varepsilon < -D/2$ ) представляет собой единственную точку в начале координат, а после бифуркации (при  $\varepsilon > -D/2$ ) становится стохастическим циклом.

Переходя от (18) к декартовым координатам, получаем стационарное распределение

$$p_\mu(x, y) = C(x^2 + y^2)^\alpha \exp \left\{ -\frac{1}{2D} (x^2 + y^2) \right\}, \quad (19)$$

где  $C = N/(2\pi)$ . Анализ выражения (19) позволяет определить две качественные перестройки стационарной плотности вероятности  $p_\mu(x, y)$ , которые можно назвать феноменологическими (P) бифуркациями. Графики функции  $p_\mu(x, 0)$  приведены на рис. 5. Для  $-D/2 < \varepsilon < 0$  функция  $p_\mu(x, y)$ , хотя и отлична от  $\delta$ -функции, но при  $x \rightarrow 0, y \rightarrow 0$  обращается в бесконечность. При  $\varepsilon = \varepsilon_{P1} = 0$  происходит P-бифуркация, после которой плотность вероятности при  $x \rightarrow 0, y \rightarrow 0$  обращается в ноль. Можно доопределить функцию  $p_\mu(x, y)$  в нуле как  $p_\mu(0, 0) = 0$ , не нарушая её непрерывности. Однако начало координат не бу-

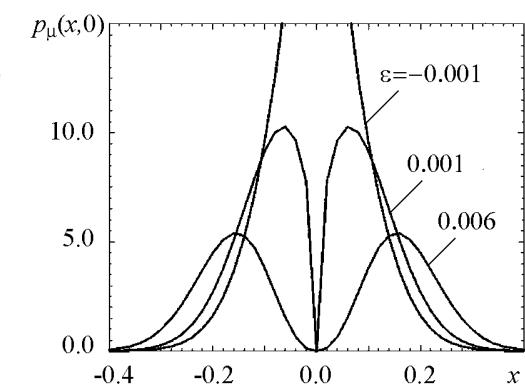


Рис. 5. Суперкритическая бифуркация Андронова–Хопфа при мультипликативном шуме: вид стационарной плотности вероятности для интенсивности шума  $D = 0.01$  и различных значений  $\varepsilon$

суперкритическая («мягкая») бифуркация Андронова–Хопфа (АХ), в результате которой из устойчивого фокуса в начале координат  $x = 0, y = 0^1$  рождается устойчивый предельный цикл. Влияние шума на бифуркацию АХ исследовалось в ряде работ, например в [6–11, 14–15]. Тем не менее, поскольку применяются либо численные либо приближенные методы, некоторые детали бифуркационного сценария остаются под вопросом. Ниже мы рассмотрим отдельно влияние аддитивного и мультипликативного шума на суперкритическую бифуркацию АХ, используя квазигармоническое приближение.

**Аддитивный шум.** Генератор описывается следующим стохастическим уравнением:

$$\ddot{x} - (\varepsilon - x^2)\dot{x} + x = \sqrt{2D}n(t), \quad (11)$$

где  $n(t)$  – источник нормированного гауссова белого шума,  $D$  – интенсивность шума. В (11) время нормировано таким образом, что собственная частота колебаний есть  $\omega_0 = 1$ .

Используя замену переменных

$$x = a(t) \cos(t + \varphi(t)), \quad \dot{x} = y = -a(t) \sin(t + \varphi(t)), \quad (12)$$

где  $a(t)$  и  $\varphi(t)$  полагаются «медленными» случайными функциями, и применяя усреднение за период автоколебаний, можно получить следующие стохастические уравнения для амплитуды  $a(t)$  и фазы  $\varphi(t)^2$ :

$$\dot{a} = \left( \frac{\varepsilon}{2} - \frac{a^2}{8} \right) a + \frac{D}{2a} + \sqrt{D}n_1(t), \quad \dot{\varphi} = \frac{\sqrt{D}}{a}n_2(t), \quad (13)$$

где  $n_1(t)$  и  $n_2(t)$  – независимые нормированные источники гауссова белого шума. Амплитудное уравнение не содержит зависимости от фазы  $\varphi$  и может рассматриваться независимо. Стационарное решение уравнения ФПК для плотности распределения амплитуды есть

$$p(a) = Na \exp \left\{ -\frac{1}{16D} (a^2 - 4\varepsilon)^2 \right\}, \quad (14)$$

где  $N$  – нормировочная константа.

Переходя к декартовым координатам с помощью замены (12), получаем

$$p(x, y) = p(a, \varphi) |J|^{-1},$$

где  $p(a, \varphi)$  – совместная плотность вероятности амплитуды и фазы, а  $J$  – якобиан преобразования (12). Учитывая, что  $p(a, \varphi) = p(a)p(\varphi|a)$ , где  $p(\varphi|a)$  есть условная плотность вероятности фазы при заданном значении амплитуды, и  $J = -a$  получаем

$$p(x, y) = \frac{1}{a} p(a) p(\varphi|a).$$

Рассмотрим второе уравнение системы (13), зафиксировав реализацию  $a(t)$ . Так как  $a(t)$  – «медленная функция», то процесс  $\varphi(t)$  можно считать близким к винеровскому на длинных интервалах времени. Соответственно распределение фазы, определенной в неограниченном интервале  $(-\infty, +\infty)$ , близко к гауссову с монотонно

<sup>1</sup>Здесь и далее вторая переменная на фазовой плоскости вводится как  $y = \dot{x}$ .

<sup>2</sup>Точнее говоря,  $\varphi(t)$  есть флуктуация мгновенной фазы относительно среднего значения  $\Phi_0 = t$ .

В 1932 году Бриллюэн возглавил кафедру теоретической физики в Коллеж де Франс. В 1939–1940 годах он был директором Национального радиовещания Франции. На этом посту он должен был заниматься совершенствованием дальней радиосвязи. Но началась война, и по приказу Бриллюэна перед приходом гитлеровцев все государственные передающие радиостанции были уничтожены. Такая акция не могла остаться незамеченной со стороны оккупантов. Поэтому даже в Виши, куда переехало правительство, Бриллюэн не был в безопасности, и через Португалию выехал в США. С 1941 года работал в университетах США, в том числе, с 1954 года – в Калифорнийском университете в Беркли.

Во время войны, уже в США Бриллюэн участвовал в исследованиях в области вакуумной сверхвысокочастотной электроники. В частности, ему была поручена реформа системы подготовки кадров в области электроники в фирме ИВМ. Известны ленточный и асимметричный электронные потоки Бриллюэна [11]; интересны его работы по теории магнетрона [12, 13].

Л. Бриллюэн первым указал на возможность существования стационарных нелинейных волн в электронном потоке, взаимодействующем с электромагнитной бегущей волной [14] в рамках гидродинамической модели электронного потока без учета сил пространственного заряда.

После войны Бриллюэн продолжал работать в США в новом для него направлении – теории информации, где получил существенные результаты.

Бриллюэну принадлежит большое число монографий, ставших классическими и относящихся к различным областям физики.

В Советском Союзе и в России известны книги Л. Бриллюэна, переведенные на русский язык. Чтобы читатель получил некоторое представление о них, приведем отрывки из предисловий и введений к некоторым книгам.

Из предисловия авторов, Л. Бриллюэна и М. Пароди к книге [15] :

«В этой книге читатель встретится с весьма широким кругом вопросов. Некоторые относятся к электротехнике и теории связи, другие – к теории колебаний и, наконец, третьи – к теории кристаллов и распространению упругих электромагнитных или электронных волн в периодических структурах. Как бы разнообразны ни были задачи, их математическое рассмотрение приводит к уравнениям, имеющим ряд общих свойств и весьма сходные решения. Это глубокое родство между столь различными проблемами было хорошо известно еще Кельвину и Рэлею. Однако в дальнейшем о нем несколько забыли и только в самых последних работах на эти важные положения было снова обращено необходимое внимание».

Из предисловия Редактора к этой же книге:

«Ценной особенностью книги является простота и ясность изложения многих трудных проблем. Широкий подход к рассмотрению волновых процессов в различных по своей физической природе системах позволяет применять результаты исследования той или иной конкретной системы к другим системам, моделировать одни волновые процессы другими, что имеет важное практическое значение для специалистов во всех областях, которые описываются в книге».

Из введения Л. Бриллюэна к книге [16].

«Новая территория была завоевана для науки с появлением в недавнее время теории информации. Это открытие создало новую область, немедленно привлекая разведчиков и исследователей. Это интересное исследование в истории науки и также внезапное

расширение области научного исследования заслуживает более пристального рассмотрения. Как это случилось? Как далеко идет? И где оно может продолжать распространяться? Означает ли это вторжение науки на территорию, принадлежащую по традиции философии, или это есть открытие новой страны, своего рода «ничейной земли», которая ускользала от прежних исследований. Мы разберем все эти вопросы и дадим на них ответ».

На русском языке выходили также книги Л. Бриллюэна «Научная неопределенность и информация» [17] и «Новый взгляд на теорию относительности» [18].

Леон Бриллюэн умер в Нью-Йорке в возрасте 80 лет в октябре 1969 года.

**1899** Петр Николаевич Лебедев (1866–1912) экспериментально доказал давление света на твердые тела, а позднее и на газы, что явилось прямым подтверждением электромагнитной теории света. По этому поводу У. Томсон говорил: «Я всю жизнь воевал с Максвеллом, не признавая его светового движения, а вот... Лебедев заставил меня сдать перед его опытами».

Сегодня феномен давления света лежит в основе, на первый взгляд, фантастической идеи – идеи солнечных парусов.

В рассказе Артура Кларка «Солнечный ветер» есть такие строки.

«Протяните ладони к Солнцу. Что вы чувствуете? Тепло, конечно. Но кроме него есть еще и давление. Правда, такое слабое, что вы его не замечаете. На площадь ваших ладоней приходится всего около одной миллионной унции. Но в космосе даже такая малая величина играет важную роль, потому что она действует все время, час за часом, день за днем. И запас энергии в отличие от ракетного горючего не ограничен. Мы можем создать паруса, которые будут улавливать солнечное излучение».

Далее в рассказе описана гонка вокруг Земли яхт с солнечными парусами.

Обычно считается, что идея солнечных парусов возникла, когда в 1951 году в журнале «Astounding Science Fiction» Р. Саундерс опубликовал статью «Космические парусники», в которой показано, что в принципе можно приводить в движение космический корабль в Солнечной системе, используя давление света на огромные паруса. Промелькнуло сообщение о том, что концепция использования светового давления солнечных лучей проскальзывала у Ф.А. Цандера еще в 1920-е годы. По-настоящему эта идея стала прорабатываться в семидесятые годы XX века в рамках полета к комете Галлея в США и в СССР (проект «Регата»). В связи с 500-летием открытия Америки Колумбовская юбилейная комиссия, сформированная президентом США, объявила необычный конкурс на лучший космический парусник для полета к Марсу. Условия предполагаемого полета, сформулированные в декабре 1988 года, состояли в следующем: корабли участников должны быть выведены на начальную орбиту в 1992–93 годах, оттуда, подняв паруса, двигаться по раскручивающейся спирали к Луне; после завершения маневра в поле тяготения Луны парусники должны взять курс на Марс и постараться как можно быстрее добраться до планеты. Все как в рассказе А. Кларка!

Нашими специалистами был спроектирован аппарат «Витязь» с парусом площадью  $120 \cdot 10^3 \text{ м}^2$  при весе 485 кг, что обеспечивает коэффициент эффективности (отношение предельной силы, развиваемой парусом на орбите, к силе притяжения к Солнцу), равной 0.37. Этот коэффициент не зависит от места нахождения корабля и служит важнейшей характеристикой, определяющей его возможности как транспортного средства.

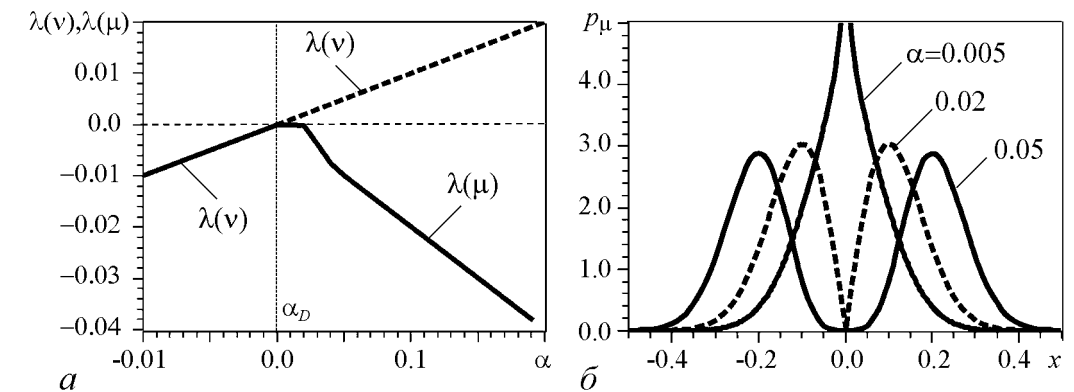


Рис. 2. Бифуркация «трехкратное равновесие» при мультипликативном шуме: *a* – показатели Ляпунова инвариантных множеств  $v$  и  $\mu$ ; *b* – графики стационарной плотности вероятности  $p_\mu(x)$  при различных значениях параметра  $\alpha$

$p_v(x) = \delta(x)$ , а показатель Ляпунова  $\lambda(v) = \alpha$ . При  $\alpha = \alpha_D = 0$  происходит D-бифуркация: равновесие в нуле становится неустойчивым. При этом  $\lambda(v)$  меняет знак с минуса на плюс (рис. 2, *a*). При  $\alpha > 0$  кроме инвариантного множества  $v$  имеется инвариантное множество  $\mu$ , представляющее собой все значения  $x$ , за исключением нуля. На множестве  $\mu$  задана стационарная плотность вероятности  $p_\mu(x)$ , являющейся решением уравнения ФПК

$$p_\mu(x) = |x|^\gamma C \exp\left\{-\frac{x^2}{2D}\right\}, \quad \gamma = \frac{\alpha}{D} - 1. \quad (9)$$

Соответствующий показатель Ляпунова  $\lambda_\mu$  при  $\alpha > 0$  всегда отрицателен (рис. 2, *a*).

С ростом  $\alpha$  наблюдаются две качественные перестройки плотности вероятности (9), которые можно считать P-бифуркациями. Они проиллюстрированы графиками функции  $p_\mu(x)$ , приведенными на рис. 2, *b*. До первой бифуркации в точке  $\alpha = \alpha_{P1} = D$  функция  $p_\mu(x)$  неограниченно возрастает при  $x \rightarrow \pm\infty$ , а после нее – стремится к нулю. При этом возникают два максимума с координатами  $x_{2,3} = \pm\sqrt{\alpha - D}$ . Для  $\alpha > \alpha_{P1}$  доопределим функцию  $p_\mu(x)$  в нуле, исходя из свойства непрерывности,  $p_\mu(0) = 0$ . В результате второй бифуркации при  $\alpha = \alpha_{P2} = 2D$  точка  $x_1 = 0$ , в которой производная  $dP(x)/dx$  терпела разрыв, становится точкой гладкого минимума.

Таким образом, бифуркация, наблюдавшаяся в детерминированной системе, при мультипликативном шуме разделилась на несколько этапов: D-бифуркацию в точке  $\alpha_D$  и P-бифуркации в точках  $\alpha_{P1}$  и  $\alpha_{P2}$ . Расстояние от  $\alpha_D$  до  $\alpha_{P2}$  называется бифуркационным интервалом.

### 3. Суперкритическая бифуркация Андронова–Хопфа

Рассмотрим уравнение ван дер Поля

$$\ddot{x} - (\varepsilon - x^2)\dot{x} + x = 0. \quad (10)$$

Оно служит классической моделью генератора с мягким возникновением автоколебаний. Параметр  $\varepsilon$  управляет режимом генератора. При  $\varepsilon = 0$  в (10) имеет место

## 1. Основные понятия и определения

Рассмотрим достаточно общую модель динамической системы с шумом – стохастическое дифференциальное уравнение (СДУ), называемое также уравнением Ланжевена [4, 5]

$$d\mathbf{x} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t)dt + \hat{G}(\mathbf{x}, t)d\mathbf{W}, \quad \mathbf{x} \in R^N, \quad \mathbf{W} \in R^N. \quad (1)$$

Здесь  $\mathbf{x} \in R^N$  – вектор состояния системы;  $\mathbf{W}(t)$  – векторный винеровский процесс, компоненты которого  $W_i$  – независимые стандартные винеровские процессы ( $i = 1, 2, \dots, N$ );  $\hat{G}(\mathbf{x}, t)$  – матрица  $N \times N$ , элементы которой  $g_{jk}(\mathbf{x}, t)$  задают интенсивности источников шума. Если интенсивности источников шума не зависят от состояния  $\mathbf{x}$ , то шум принято называть *аддитивным*; в противном случае шум называют *параметрическим* или *мультипликативным*. Уравнение (1) описывает некоторую динамическую систему, находящуюся под действием источников гауссова белого шума. Обычно, для большинства естественнонаучных задач СДУ (1) понимается в смысле Стратоновича [4, 5]. Его решение является диффузионным марковским процессом с плотностью вероятности  $p(\mathbf{x}, t)$ , удовлетворяющей уравнению Фоккера–Планка–Колмогорова (ФПК)

$$\frac{\partial p(\mathbf{x}, t)}{\partial t} = - \sum_{j=1}^N \frac{\partial A_j(\mathbf{x}, t)p(\mathbf{x}, t)}{\partial x_j} + \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N \frac{\partial^2 B_{jk}(\mathbf{x}, t)p(\mathbf{x}, t)}{\partial x_j \partial x_k}. \quad (2)$$

Компоненты вектора сноса  $A(\mathbf{x})$  и элементы матрицы диффузии  $\hat{B}(\mathbf{x})$  задаются следующими выражениями

$$A_j(\mathbf{x}, t) = f_j(\mathbf{x}, t) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^N g_{ik}(\mathbf{x}, t) \frac{\partial g_{jk}(\mathbf{x}, t)}{\partial x_i}, \quad (3)$$

$$B_{jk}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N g_{ji}(\mathbf{x}, t) g_{ki}(\mathbf{x}, t), \quad j, k = 1, 2, \dots, N.$$

Обратимся к основным определениям, предложенным в [4, 5]. Начнем с определения стохастической бифуркации, которая может наблюдаться в системе (1) при изменении некоторого управляющего параметра  $\alpha$  (этим параметром может быть и интенсивность шума). В [4] под бифуркацией в присутствии шума понимается качественное изменение стационарной плотности вероятности  $p(\mathbf{x})$ . Например, бифуркация может приводить к возникновению или исчезновению локальных максимумов вероятностного распределения при некотором значении параметра  $\alpha = \alpha_P$ . В [5] бифуркации такого типа названы *феноменологическими бифуркациями* или *P-бифуркациями*.

Кроме P-бифуркаций в [5] предлагается выделять еще и другой тип стохастических бифуркаций – *динамические бифуркации* или *D-бифуркации*. Динамическая бифуркация есть изменение характера устойчивости траекторий. Пусть имеется инвариантное множество траекторий  $\nu$ , устойчивость которых определяется показателями Ляпунова  $\lambda_i(\nu)$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$ . Смена знака каким-либо из показателей  $\lambda_i(\nu)$  при некотором  $\alpha = \alpha_D$  означает D-бифуркацию. Одна и та же стохастическая бифуркация может быть одновременно и P- и D-бифуркацией, а может соответствовать только одному типу бифуркации.

фии. В последние годы на основе результатов применения методов нелинейной динамики к анализу кардиограмм было установлено, что колебания сердца здорового человека не являются строго периодическими. Более того, экспериментально установлено, что строгая периодичность в работе сердца есть отклонение от нормы, а режим работы сердца здорового человека является хаотическим. Между двумя последовательными сокращениями при нормальной работе сердца существует разброс временных интервалов. Уменьшение этого разброса – один из предвестников остановки сердца (см., например, [22]). В этом плане весьма броско выглядит высказывание Гольдбергера и Ригни: «Остановка сердца представляет собой бифуркацию от фрактальной, хаотической динамики нормальных сердцебиений к патологическим ритмам умирающего сердца» [23].

1929 Американский астроном Эдвин Пауэл Хаббл (1889–1953) представил 17 января в Труды Национальной академии наук США статью, называвшуюся «Связь между расстоянием и лучевой скоростью внегалактических туманностей». Сопоставление этих расстояний с лучевыми скоростями показало четкую линейную зависимость скорости от расстояния (закон Хаббла). Вселенная оказалась расширяющейся.

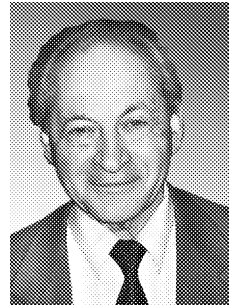
Измерения скоростей и законов Хаббла основаны на измерениях красного смещения в спектрах галактик.

## Библиографический список

1. Еремеева А.И. Беспокойный гений Эрнста Хладни. К 250-летию со дня рождения // Природа. 2006, № 12. С. 58–64
2. Мандельштам Л.И. Лекции по теории колебаний. М.: Изд-во «Наука», 1972. С. 160–161.
3. Мандельштам Л.И. Лекции по некоторым вопросам теории колебаний, 1944 г. // В кн. Лекции по оптике, теории относительности и квантовой механике. М.: Изд-во «Наука», 1972.
4. Бриджмен П. Анализ размерностей. Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2001. С. 105–108.
5. Benard E. // Ann de Chimie et Phys. 1901. Vol. 23. P. 62.
6. Шеффер В. Наблюдения над утренней чашкой кофе // УФН. 1972. Т. 108. Вып. 3. С. 577–580.
7. Рыбак Дж.П., Крыжановский Л.Н. Дэвид Эдвард Юз и открытие радиоволн // Электросвязь. 1994, № 9. С. 34–36.
8. Миллер М.А. Всякая и не всякая всячина, посвященная собственному 80-летию. Н. Новгород: ИПФ РАН, 2005. С. 90–122.
9. Hughes D.E. On the action of sonorous vibrations in varying the force of an electric current // Proc. Royal. Soc. 1879. Ser.A. P. 362–369.
10. Трубецков Д.И. Введение в синергетику. Колебания и волны. М.: Едиториал УРСС, 2003.
11. Brillouin L. A theorem of Larmor and its importance for electrons in magnetic fields // Phys. Rev. 1945. Vol. 67, № 7–8. P. 260–266.
12. Brillouin L. Advances in Electronics. 1951. Vol. 3. P. 85.

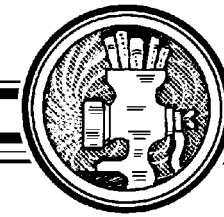
13. Brillouin L., Bloch F. Ibid. P. 145.
14. Brillouin L //J.Appl.Phys. 1949. Vol. 20, № 12. P. 1196.
15. Бриллюэн Л., Пароди М. Распространение волн в периодических структурах. М.: Изд-во иностранной литературы, 1959.
16. Бриллюэн Л. Наука и теория информации. М.: Гос. изд-во физико-математической литературы, 1960.
17. Бриллюэн Л. Научная неопределенность и информация. М.: Мир, 1966.
18. Бриллюэн Л. Новый взгляд на теорию относительности. М.: Мир, 1972.
19. Хантли Г. Анализ размерностей. М.: Мир, 1970. С. 68–70.
20. Трубецков Д.И. Даниил Семенович Данин и его кентавристика. Саратов: Изд-во ГосУНЦ «Колледж», 2007.
21. Де Бройль Л. По тропам науки. М.: Изд-во иностранной литературы. 1962. 408 с.
22. Goldberger A.L., Rigney D.R., Mietus J., Anthman E.M., Greenwald S. Nonlinear dynamics in sudden cardiac death syndrome: Heart rate oscillations and bifurcations // Experientia, 44, Birkhauser Verlag, CH-4010, Basel, Switzerland, 1988.
23. Гольдбергер Э.Л., Ригни Д.Р., Уэст Б.Дж. Хаос и фракталы в физиологии человека //В мире науки. 1990, № 4. С. 25–32.

Поступила в редакцию 3.09.2009



Трубецков Дмитрий Иванович – родился в Саратове (1938). Окончил физический факультет Саратовского государственного университета (1960). Защитил диссертации на соискание ученой степени кандидата (1965, СГУ) и доктора физико-математических наук (1978, СГУ) в области радиофизики. Заведующий кафедрой электроники, колебаний и волн факультета нелинейных процессов СГУ, профессор, член-корреспондент Российской академии наук, заслуженный деятель науки РФ, лауреат премии Президента РФ в области образования. Научный руководитель Лицея прикладных наук и факультета нелинейных процессов СГУ. Область научных интересов: вакуумная электроника и микроэлектроника сверхвысоких частот, теория колебаний и волн, нелинейная динамика, история науки. Автор более двадцати учебных пособий и монографий, а также более двухсот статей в периодической печати.

410012 Саратов, Астраханская, 83  
Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского.  
E-mail: trubetskov@nonlin.sgu.ru



## СТОХАСТИЧЕСКИЕ БИФУРКАЦИИ

Т.Е. Вадивасова, В.С. Анищенко

Излагаются современные представления о бифуркациях динамических систем, находящихся под воздействием шума. Даются основные определения и рассматриваются некоторые типичные примеры бифуркаций в присутствии аддитивного и мультипликативного шума.

*Ключевые слова:* Стохастическая бифуркация, Р-бифуркация, D-бифуркация, индуцированный шумом переход.

### Введение

Известно, какую важную роль играет бифуркационный анализ в детерминированной нелинейной динамике. Он позволяет выявить возможные сценарии перехода системы от простого поведения к сложному, проанализировать структуру возникающих предельных множеств и разработать методы управления этой структурой [1, 2]. Возникает вопрос, как повлияет шум на бифуркации и что собой представляют бифуркации в присутствии шума. Этот вопрос является весьма важным в силу двух причин: во-первых, шум всегда присутствует в любой реальной системе и, во-вторых, вблизи бифуркации система особенно чувствительна к действию шума, так как в бифуркационной точке нарушается свойство структурной устойчивости [3]. Имеется немало работ, посвященных исследованию *стохастических бифуркаций*, то есть бифуркаций динамических систем в присутствии шума. Однако таких работ гораздо меньше, чем количество публикаций по другим актуальным направлениям нелинейной динамики. В описании стохастических бифуркаций остается много неясного, начиная с формальных определений и кончая наблюдаемыми эффектами. Среди работ по данной проблематике, прежде всего, нужно назвать известную монографию В. Хорстнемке и Р. Лефевра [4], а также книгу Л. Арнольда [5], одна из глав которой посвящена стохастическим бифуркациям. Имеется также ряд статей, в которых исследуются те или иные бифуркации в конкретных динамических системах с шумом, например, работы [6–15].

*Цель данной статьи* – дать общие представления о теории стохастических бифуркаций и проиллюстрировать их примерами типичных бифуркаций в нелинейных системах с аддитивным и мультипликативным шумом.