Зав. редакцией *Н.Н. Левина*
Редакторы *Л.А. Сидорова, Н.Н. Левина*
Оформление художника *Д.В. Соколова*
Оригинал-макет подготовлен
И.А. Пономаревой, О.Н. Строгановой
в пакете L^AT_EX

Подписка на 2011 год осуществляется
по каталогу Агентства Роспечать
«Газеты. Журналы», индекс 73498,
и по договору между Подписчиком
(юридическим или физическим лицом)
и Издателем (Саратовским государственным университетом)

Стоимость подписки на 2011 год 720 руб. (6 номеров)
Заявки на заключение договора принимаются
по почте, по телефону редакции, по эл. почте редакции

Адрес редакции: 410012, Саратов, Астраханская, 83
Тел./факс: (845-2) 52-38-64
E-mail:and@nonlin.sgu.ru

Распространение журнала осуществляется
редакцией журнала по адресной системе

**Условия подписки на электронную версию журнала на сайте
Научной электронной библиотеки http://elibrary.ru**

Сдано в набор 1.11.2010. Подписано к печати 9.12.2010
Формат 70x108/16. Бумага «Снегурочка». Печать трафаретная
Усл. печ. л. 15,05(10,75). Уч.-изд. л. 15,0. Тираж 200. Заказ 427

Отпечатано на ризографе GR 3750 редакции журнала

© Редакция журнала
«Известия вузов. ПНД», 2010
© Оформление художника
Д.В. Соколова, 2010

*Журнал включен в «Перечень периодических научных и научно-технических изданий РФ,
рекомендованных для публикации основных результатов диссертаций
на соискание ученой степени доктора наук»*

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Известия высших учебных заведений

ПРИКЛАДНАЯ НЕЛИНЕЙНАЯ ДИНАМИКА

научно-технический журнал

издается с 1993 года

Выходит 6 раз в год — Том 18, № 5 (105), 2010, Саратов

С О Д Е Р Ж А Н И Е

ПРИКЛАДНЫЕ ЗАДАЧИ НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ КОЛЕБАНИЙ И ВОЛН

Прохоров М.Д., Пономаренко В.И. Реконструкция ансамблей связанных систем с запаздыванием по временным рядам 3

Комаров М.А., Осипов Г.В. Генерация медленных ритмов и последовательная активность в ансамблях нейроноподобных осцилляторов 18

Феоктистов А.В., Астахов С.В., Анищенко В.С. Когерентный резонанс и синхронизация стохастических автоколебаний в системе ФитцХью–Нагумо . . 33

Поздняков М.В., Савин А.В. Особенности мультистабильных режимов несимметрично связанных логистических отображений 45

Емельянова Ю.П., Кузнецов А.П. Связанные автоколебательные осцилляторы разной природы на примере системы ван дер Поля и брюсселятора . . . 55

БИФУРКАЦИИ В ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ РАЗЛИЧНОЙ ПРИРОДЫ

Кренц А.А., Молевич Н.Е. Рождение устойчивого тора из замкнутой особой кривой и его бифуркации в лазерной системе с отстройкой частоты . . . 68

ДЕТЕРМИНИРОВАННЫЙ ХАОС

Кузнецов С.П., Тюрюкина Л.В. Аттракторы типа Смейла–Вильямса в модельных системах с импульсным периодическим воздействием 80

Купцов П.В. Вычисление показателей Ляпунова для распределённых систем: преимущества и недостатки различных численных методов 93

НЕЛИНЕЙНЫЕ ВОЛНЫ. СОЛИТОНЫ

Морозова М.А., Шараевский Ю.П., Шешукова С.Е. Механизмы формирования солитонов огибающей в периодических ферромагнитных структурах . . . 113

НОВОЕ В ПРИКЛАДНОЙ ФИЗИКЕ

Зюрюкин Ю.А., Павлова М.В., Древко Д.Р. Волновые уравнения для описания эффекта Поккельса в кристаллах и их анализ на примере кристалла ниобата лития 125

ДЕБЮТ

Круглов В.П. Кольцевой неавтономный генератор гиперболического хаоса 138

Краснова Г.М. К двумерной линейной теории взаимодействия электронного потока с бегущей электромагнитной волной: учет влияния пространственного заряда в модели тонкого пучка 151

КОНФЕРЕНЦИИ.СЕМИНАРЫ. СИМПОЗИУМЫ. ШКОЛЫ

IV Всероссийская школа с международным участием «Нелинейная динамика в физиологии и медицине», VI Всероссийский симпозиум «Вариабельность ритма сердца и медленные колебательные процессы в организме человека», 24–27 мая 2011, Новокузнецк, Россия 161

PERSONALIA

Давид Альбертович Франк-Каменецкий. К 100-летию со дня рождения 164

DEPARTMENT OF EDUCATION AND SCIENCE OF RUSSIAN FEDERATION
Izvestiya VUZ
APPLIED NONLINEAR DYNAMICS
scientific-technical journal
published since 1993
Published 6 times a year Vol. 18, № 5 (105), 2010, Saratov

C O N T E N T S

APPLIED PROBLEMS OF NONLINEAR OSCILLATIONS AND WAVE THEORY

Prokhorov M.D., Ponomarenko V.I. Reconstruction of ensembles of coupled time-delay systems from time series 3

Komarov M.A., Osipov G.V. Generation of slow rhythms and sequential activity in ensembles of neuron-like oscillators 18

Feoktistov A.V., Astakhov S.V., Anishchenko V.S. Coherence resonance and synchronization of stochastic self-sustained oscillations in the FitzHugh–Nagumo system 33

Pozdnyakov M.V., Savin A.V. Multistable regimes in asymmetrically coupled period-doubling systems 45

Emelianova Yu.P., Kuznetzov A.P. Coupled self-sustained oscillators of different nature by example of van der Pol system and Brusselator 55

BIFURCATION IN DYNAMICAL SYSTEMS

Krents A.A., Molevich N.E. Birth of a stable torus from the critical closed curve and its bifurcations in a laser system with frequency detuning 68

DETERMINISTIC CHAOS

Kuznetsov S.P., Turukina L.V. Attractors of Smale–Williams type in periodically kicked model systems 80

Kuptsov P.V. Computation of Lyapunov exponents for spatially extended systems: advantages and limitations of various numerical methods 93

NONLINEAR WAVES. SOLITONS

Morozova M.A., Sharaevsky Yu.P., Sheshukova S.E. Mechanisms of formation of envelope solitons in periodic ferromagnetic structures 113

INNOVATIONS IN APPLIED PHYSICS

Zyuryukin Yu.A., Pavlova M.V., Drevko D.R. Wave equations for the Pockels effect description in crystals and their analysis on the example of lithium niobate . . 125

DEBUT

Kruglov V.P. Circular non-autonomous generator of hyperbolic chaos 138

Krasnova G.M. On two-dimensional linear theory of interaction between electron beam and traveling electromagnetic wave: allowing for influence of space charge in a thin beam model 151

CONFERENCES. MEETINGS. SYMPOSIA. SCIENTIFIC SCHOOLS

Nonlinear Dynamics Physiology and Medicine, 24–27 May 2011, Novokuznetsk, Russia 161

PERSONALIA

D.A. Frank-Kamenetskii. To the 100th Birthday 164

Давид Альбертович развил идеи об эпиплазме, ему же принадлежит и само это название плазмы, состоящей из частиц и античастиц. Сегодня с несомненностью установлено, что именно таким было состояние вещества на ранней стадии эволюции Вселенной.

Для Давида Альбертовича были характерны широта научных интересов, стремление к синтезу знаний. Иногда сетуют на все возрастающую сложность и дифференциацию отдельных областей естествознания. Жизнь и творчество Давида Альбертовича являются убедительным опровержением этих жалоб. Талант и эрудиция Давида Альбертовича позволили ему преодолеть барьеры, разделяющие отдельные области, и остаться ученым-универсалом на высоком профессиональном уровне в нашей трудной второй половине XX века.

Сегодня становится очевидным, что в целом ряде вопросов идеи Давида Альбертовича обгоняли свое время и, может быть, поэтому не получили достаточного резонанса.

Все мы (и в первую очередь автор этих строк) с запозданием ощущаем, что в шестидесятые годы недостаточно контактировали с Давидом Альбертовичем, недостаточно прислушивались к его идеям и советам. Может быть, эти строки послужат толчком к усилению контактов и дискуссий среди советских физиков, химиков, биологов.

Хотя об этом и не принято писать, напомним, что Давид Альбертович не был избран ни академиком, ни членом-корреспондентом Академии наук. Я убежден, что Давид Альбертович был вполне достоин этих званий. Он не получил их в значительной степени потому, что диапазон его работ был шире тематики тех отделений (общей химии, физики и астрономии), на которые сегодня делится Академия.

Сыграла роль и его личная скромность... И все же остается ощущение несправедливости и недостаточной настойчивости коллег и соратников Давида Альбертовича, в том числе и автора. Здесь нужно сказать, что самому Давиду Альбертовичу были абсолютно чужды соображения карьеристские.

Он был человеком исключительно светлого мироощущения, любил природу и искусство. Его работа, его ученики и, наконец, («на последнем месте, но не последнее по значению» – last but not least) его семья доставляли ему непреходящую радость.

Хочу поделиться одним глубоко личным, дорогим для меня воспоминанием. В марте 1970 года под действием какого-то внутреннего импульса, без конкретного повода или приглашения я с женой приехал в гости к Давиду Альбертовичу. После беседы о науке (главным образом, об астрономии) мы пошли ужинать на кухню. К нам присоединилась жена Давида Альбертовича Елена Ефимовна, его дети и друзья его детей. Зашла речь о поэзии, и Давид Альбертович вдохновенно прочел «Равенну», стихотворение Блока, начинающееся словами: «Все что минутно, все что бренно, похоронила ты в веках...» Навсегда запомнилось восхищение молодежи.

Давид Альбертович был уже тяжело болен, но в памяти об этой встрече остался его образ такого, каким он был всю жизнь, – талантливым, вдохновенным, счастливым.

Академик Я.Б. Зельдович

Студент Давид Франк-Каменецкий, Томск, 1931 год

Я. Б. Зельдович и Д. А. Франк-Каменецкий, 1951 год

С женой Еленой Ефимовной, дочерью Тэмой и сыном Максимом во дворе своего дома в Сарове. 1950 год

Прогулка с дочкой Машей вокруг своего большого дома, как всегда, временного. Саров, 1953 год

С Я.Б.Зельдовмчем и А.Д.Сахаровым. Саров, 1952 год

различных значений τ число N_i ситуаций, при которых точки временного ряда, разделенные интервалом времени τ, одновременно являются экстремальными. Затем, построив зависимость $N_i(\tau)$, легко найти время задержки τ_i как значение, при котором наблюдается абсолютный минимум этой зависимости [21].

Рассмотрим, как скажется на эффективности метода наличие связи между системами с запаздыванием. Воздействие на систему со стороны соседних элементов ансамбля возмущает траекторию ее движения, приводя к исчезновению одних экстремумов временного ряда и появлению других. Особенно заметно этот эффект проявляется при линейной связи систем с запаздыванием, рассмотренной нами в [28]. Чем больше величина линейной связи, тем большее возмущение испытывает элемент цепочки со стороны соседних элементов и тем менее выражена его собственная динамика. В результате абсолютный минимум зависимости $N_i(\tau)$, наблюдающийся при истинном времени задержки τ_i, становится менее выраженным и, начиная с некоторых значений коэффициентов линейной связи, перестает наблюдаться при $\tau = \tau_i$. Таким образом, в случае линейной связи метод позволяет восстановить время задержки при условии, что связь между элементами ансамбля не слишком велика. Критические значения коэффициентов связи зависят от конкретной системы. Исследования показывают, что в случае линейной связи метод, как правило, перестает работать при амплитуде воздействия, составляющей более 20% от амплитуды собственных колебаний изолированной системы с запаздыванием.

В случае диффузионной связи систем с запаздыванием, описываемой уравнениями (1) и (2), метод, основанный на статистическом анализе экстремумов хаотического временного ряда системы, тоже можно использовать для восстановления времени задержки, причем метод остается эффективным при существенно более высоких значениях коэффициентов связи. Поясним это на примере уравнения (2), продифференцировав его по t,

$$\varepsilon_i \ddot{x}_i(t) = -\dot{x}_i(t) + \frac{df_i\left(x_i(t-\tau_i)\right)}{dx_i(t-\tau_i)}\dot{x}_i(t-\tau_i) + k_i\left[\dot{x}_{i+1}(t) - 2\dot{x}_i(t) + \dot{x}_{i-1}(t)\right]. \quad (3)$$

Если при $\dot{x}_i(t) = 0$ в типичном случае квадратичных экстремумов $\ddot{x}_i(t) \neq 0$, то при $\varepsilon_i \neq 0$ должно выполняться условие

$$\frac{df_i\left(x_i(t-\tau_i)\right)}{dx_i(t-\tau_i)}\dot{x}_i(t-\tau_i) + k_i\left[\dot{x}_{i+1}(t) + \dot{x}_{i-1}(t)\right] \neq 0. \quad (4)$$

Для выполнения условия (4) необходимо, чтобы $\dot{x}_i(t-\tau_i) \neq 0$ или/и

$$k_i\left[\dot{x}_{i+1}(t) + \dot{x}_{i-1}(t)\right] \neq 0. \quad (5)$$

Условие (5) никогда не выполняется в случае отсутствия связи ($k_i = 0$) и в случае сильной связи, обеспечивающей синхронизацию элементов, так как при этом $\dot{x}_{i+1}(t) = \dot{x}_{i-1}(t) = \dot{x}_i(t)$, а $\dot{x}_i(t) = 0$ при выводе условия (4). Следовательно, в этих пограничных случаях первое слагаемое в (4) отлично от нуля, а значит, производные $\dot{x}_i(t)$ и $\dot{x}_i(t-\tau_i)$ одновременно в нуль не обращаются, то есть на удалении τ_i от квадратичного экстремума во временном ряде $x_i(t)$ не должно быть другого экстремума. В промежуточных ситуациях слабой и умеренной связи существует вероятность обнаружения пары экстремумов на расстоянии τ_i друг от друга. Однако, как показывают исследования, в общем случае эта вероятность меньше, чем вероятность

встретить пару экстремумов на расстоянии $\tau \neq \tau_i$. В результате число экстремумов, разделенных интервалом времени τ_i, будет меньше, чем число экстремумов, разделенных другими значениями времени τ, и, следовательно, график $N_i(\tau)$ будет иметь минимум при $\tau = \tau_i$. То есть качественные особенности зависимости $N_i(\tau)$ сохраняются для систем (1) и (2) в широком диапазоне значений коэффициентов связи. Отметим, что такой метод определения времени запаздывания обладает высоким быстродействием, поскольку использует только операции сравнения и сложения, не требуя вычисления каких-либо мер сложности движения [13–15] или ошибки аппроксимации данных [9–11].

Однако, если система с запаздыванием совершает периодические колебания, такой подход оказывается неработоспособным, так как экстремумы во временном ряде расположены регулярным образом. Для изолированных систем с запаздыванием, находящихся в режиме периодических автоколебаний, нами недавно был предложен метод восстановления времени задержки, основанный на возмущении системы внешним воздействием и анализе отклика [29]. Если на переменную $x_i(t)$ изолированной системы с запаздыванием подействовать внешним сигналом $y_i(t)$, представляющим собой прямоугольные импульсы, и построить взаимную корреляционную функцию

$$C_i(s) = \frac{\langle |\ddot{y}_i(t)|\, |\ddot{x}_i(t+s)| \rangle}{\sqrt{\left\langle |\ddot{y}_i(t)|^2 \right\rangle \left\langle |\ddot{x}_i(t)|^2 \right\rangle}}, \tag{6}$$

где угловые скобки обозначают усреднение по времени, то $C_i(s)$ будет иметь четко выраженный максимум при $s = \tau_i$. Недостатком такого подхода по сравнению с рассмотренным выше методом является необходимость активного воздействия на систему. Однако метод позволяет использовать импульсы малой амплитуды, что позволяет свести воздействие на систему к минимуму [29].

Исследуем возможность применения такого метода для определения времен задержки в ансамбле связанных систем с запаздыванием первого порядка. Вид модельного уравнения системы определяется способом внесения в нее возмущения. Рассмотрим такой способ возбуждения элементов цепочки внешними сигналами $y_i(t)$, при котором модельные уравнения для однонаправлено и взаимно диффузионно связанных систем с запаздыванием имеют, соответственно, следующий вид:

$$\varepsilon_i \dot{x}_i(t) = -x_i(t) + f_i\left(x_i(t-\tau_i) + y_i(t-\tau_i)\right) + k_i\left[x_{i+1}(t) - x_i(t)\right], \tag{7}$$

$$\varepsilon_i \dot{x}_i(t) = -x_i(t) + f_i\left(x_i(t-\tau_i) + y_i(t-\tau_i)\right) + k_i\left[x_{i+1}(t) - 2x_i(t) + x_{i-1}(t)\right]. \tag{8}$$

Воздействия $y_i(t)$ представляют собой прямоугольные импульсы с амплитудой A_i, периодом T_i и длительностью M_i. Для восстановления времени задержки τ_i только одного i-го элемента цепочки достаточно подействовать возмущающим сигналом только на этот i-й элемент. Как уже было отмечено выше, наличие взаимодействия между системами с запаздыванием приводит к возмущению траекторий их движения. Эти возмущения могут препятствовать выявлению отклика системы на прямоугольное импульсное воздействие $y_i(t)$ и снижать чувствительность взаимной корреляционной функции (6) как характеристики для определения времени запаздывания. Например, чем сильнее линейная связь между элементами ансамбля, тем большая амплитуда внешнего воздействия в виде прямоугольных импульсов $y_i(t)$ требуется

Давид Альбертович теоретически предсказал важное явление магнитно-звукового резонанса, которое затем было экспериментально обнаружено при его непосредственном участии. В дальнейшем им и его учениками это явление было подробно исследовано как в теоретическом, так и в экспериментальном плане. Были изучены дисперсионные свойства обширного класса колебаний: прямых и косых магнитно-звуковых волн. Экспериментально было показано возникновение резонансной раскачки электромагнитных полей в плазме при магнитно-звуковом резонансе («эффект пространственного усиления магнитного поля»). Наконец, была обнаружена аномальная диссипация магнитно-звуковых колебаний и, как следствие этого, продемонстрирована экспериментально возможность нагрева плазмы при магнитно-звуковом резонансе до высоких температур. В частности, с помощью этого метода плотную водородную и гелиевую плазму удалось нагреть до температур $5(10^6–10^7)$ К.

В последующие годы наряду с этой тематикой Давид Альбертович предпринял исследование неустойчивости плазмы при электронном циклотронном нагреве, а также развернул работы по изучению плазменных явлений в твердом теле.

Следует отметить громадное влияние Давида Альбертовича на творческую молодежь. Еще в 1956–1957 гг. он призывал к исследованию коллективных процессов в плазме и явлений, где они должны проявляться: нелинейных и ударных волн без столкновений, пинча и пр. Его идеи, несомненно, играли фундаментальную роль в становлении физики плазмы.

Широта эрудиции, энциклопедичность знаний, незаурядный литературный талант и умение о самом сложном сказать просто и ясно снискали Давиду Альбертовичу славу одного из крупнейших популяризаторов в области естественных наук. Он автор серии научно-популярных книг по различным областям физики: «Энергия в природе и технике», «Образование химических элементов в недрах звезд», «Ядерная астрофизика». Наибольшую известность получила написанная им по предложению И.В. Курчатова книга «Плазма – четвертое состояние вещества», неоднократно переизданная и переведенная на английский, болгарский, польский, чешский, немецкий и японский языки.

Давид Альбертович был одним из наиболее компетентных специалистов по огромному кругу вопросов физики, химии, астрофизики, биофизики. Искреннее и совершенно бескорыстное желание помочь каждому, кто обращался к нему за советом, колоссальная эрудиция, постоянная готовность с энтузиазмом погрузиться в решение научных проблем, даже лежащих вне круга его интересов, делали Давида Альбертовича незаменимым творческим консультантом. Яркое представление об уникальной широте его научных интересов, а также о присущем ему живом стиле изложения и чувстве юмора дают рецензии, печатавшиеся в течение многих лет в бюллетене «Новые книги за рубежом», статьи и заметки о последних достижениях советской и мировой науки и по ряду принципиальных философских проблем в журнале «Природа». Под редакцией Д.А. Франк-Каменецкого вышли на русском языке многие научные и научно-популярные книги зарубежных ученых. Большую известность получили его публичные лекции по самым животрепещущим проблемам современного естествознания, блестящие выступления по радио и телевидению. Преподавательская деятельность Д.А. Франк-Каменецкого, начатая еще в начале 1930-х годов в Читинском горно-металлургическом техникуме и Иркутском университете, продолжалась почти непрерывно всю его жизнь.

Изв. вузов «ПНД», т. 18, № 5, 2010 УДК 541.124/128

Главная книга Д.А. Франк-Каменецкого и её автор*

Настоящая книга – третье издание замечательной монографии Д.А. Франк-Каменецкого «Диффузия и теплопередача в химической кинетике». Изданная в СССР в 1947 г. и вторым изданием в 1967 г., книга была переведена в ФРГ в 1959 г. и в США в 1969 г. Монография сыграла огромную роль в развитии послевоенной науки и техники, в воспитании не одного поколения химиков, технологов и физикохимиков. До настоящего времени именно эта монография остается наиболее известной и чаще всего цитируемой в работах, относящихся к основам химического машиностроения и к теории горения.

Книга стала библиографической редкостью и в связи с этим, естественно, возник вопрос о ее переиздании. К величайшему сожалению, третье издание посмертное. Давид Альбертович Франк-Каменецкий безвременно скончался 2 июня 1970 г., не дожив до шестидесяти лет.

Намечая новое издание без участия автора, представляется необходимым подробно сказать и о книге и о ее авторе. Нужно объяснить причину исключительного долголетия и актуальности книги. Отличительная ее особенность заключается в обилии собственных результатов автора – одного из тех, кто заложил основы новой области науки.

В Предисловии к первому изданию академик Н.Н. Семенов пишет: «При этом автору удалось разработать новые плодотворные методы, выделить важные предель-

*Франк-Каменецкий Д.А. Диффузия и теплопередача в химической кинетике. Изд. 3-е испр. и доп. М.: Наука, 1987. 502 с. Табл. 14. Ил. 201. Библиогр. 321 назв.

© Изд-во «Наука», 1987 г.

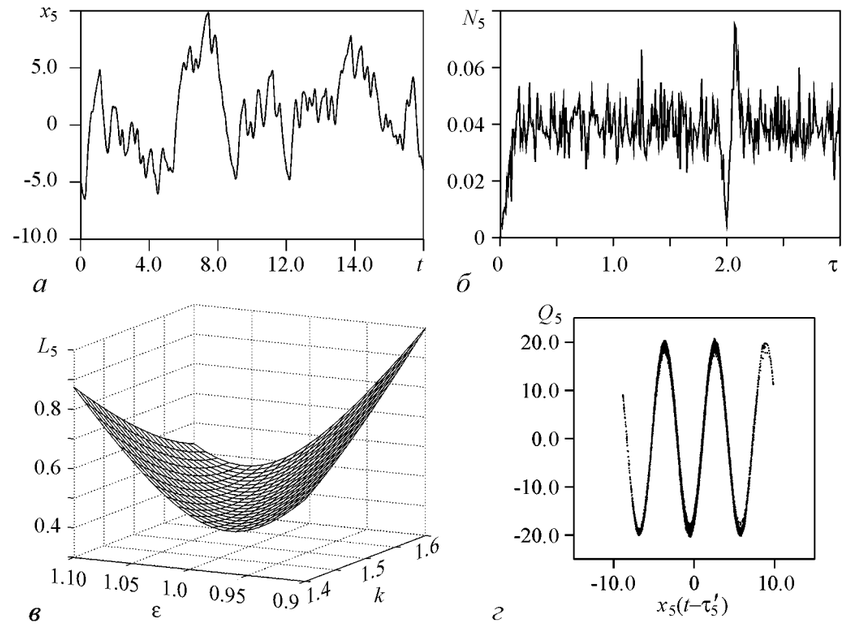
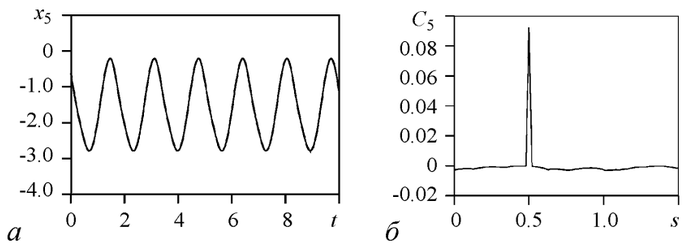


Рис. 1. Восстановление элемента цепочки однонаправлено связанных уравнений Икеды (11) в присутствии 20% гауссова белого шума: *а* – временной ряд переменной $x_5(t)$; *б* – число N_5 пар экстремумов временного ряда переменной $x_5(t)$ на удалении τ друг от друга, нормированное на общее число экстремумов в ряде, $N_{5\,\min}(\tau) = N_5(2.00)$; *в* – зависимость $L_5(\varepsilon, k)$, нормированная на максимальную длину $L_{5\,\max}(\varepsilon, k) = L_5(0.90, 1.60)$ в исследуемом интервале параметров, $L_{5\,\min}(\varepsilon, k) = L_5(0.99, 1.45)$; *г* – восстановленная нелинейная функция f_5 при $\tau_5' = 2.00$, $\varepsilon_5' = 0.99$, $k_5' = 1.45$. $Q_5 = \varepsilon_5'\dot{x}_5(t) + x_5(t) - k_5'(x_6(t) - x_5(t))$

На рис. 1, *г* приведена восстановленная нелинейная функция f_5, построенная при найденных значениях параметров. Она хорошо совпадет с истинной функцией уравнения Икеды. Амплитуда синусоиды (см. рис. 1, *г*) позволяет определить параметр μ_5, а значение функции при $x_5(t-\tau_5) = 0$ – найти параметр x_{05}. Аппроксимация восстановленной нелинейной функции полиномом 12-й степени позволила нам получить следующую оценку параметров: $\mu_5' = 19.68$ и $x_{05}' = 1.01$, то есть близко к $x_{05} = \pi/3 \approx 1.05$.

При $\mu_i = 5$, $\tau_i = 0.5$, $x_{0i} = \pi/3$, $k_i = 1$ элементы цепочки (11) демонстрируют периодические колебания. На рис. 2, *а* приведен фрагмент временного ряда колебаний в пятом элементе цепочки. В этом случае метод, основанный на статистическом анализе временных интервалов между экстремумами временного ряда, не позволяет восстановить время задержки. Для определения времени запаздывания τ_5 подействуем на переменную $x_5(t)$ слабым внешним сигналом $y_5(t)$, представляющим собой прямоугольные импульсы, таким образом, что динамика возбуждаемого элемента описывается уравнением (7). На рис. 2, *б* построена взаимная корреляционная функция (6) для случая, когда возмущающий импульсный сигнал имеет амплитуду $A_5 = 0.1$, период $T_5 = 2.3$ и длительность $M_5 = T_5/2$. При шаге изменения s, равном 0.01, $C_5(s)$ имеет высокий максимум при $s = 0.50$, то есть время запаздывания восстанавливается точно. Так же как и рис. 1, *б*, график построен по 20000 точек,



а *б*

Рис. 2. *а* – временной ряд переменной $x_5(t)$ системы (11); *б* – взаимная корреляционная функция (6) для случая, когда элементы цепочки (11) совершают периодические в отсутствие внешнего воздействия колебания, $C_{5\max}(s) = C_5(0.50)$

однако метод позволяет использовать более короткие ряды. Аналогичным образом можно восстановить времена запаздывания τ_i остальных элементов, подействовав на них внешними сигналами $y_i(t)$. Определив времена запаздывания τ_i, можно восстановить параметры ε_i и k_i и нелинейные функции f_i описанным выше способом.

2.2. Восстановление цепочки взаимно связанных систем Маккея–Гласса. Рассмотрим теперь цепочку диффузионно связанных систем с запаздыванием, моделируемую уравнением (2), элементы которой описываются уравнениями Маккея–Гласса [2]. В этом случае функции f_i в уравнении (2) имеют вид

$$f_i\left(x_i(t-\tau_i)\right) = \frac{a_i x_i(t-\tau_i)}{b_i(1+x_i^{c_i}(t-\tau_i))}, \qquad (12)$$

а параметры инерционности $\varepsilon_i = 1/b_i$.

Как и в предыдущем примере, рассмотрим цепочку, состоящую из 10 элементов с периодическими граничными условиями $x_1 = x_{J+1}$, $J = 10$. Однако в отличие от рассмотренного выше случая, элементы цепочки выберем неидентичными. Пусть времена запаздывания τ_i принимают случайные целые значения от 300 до 400, а a_i – случайные значения от 0.20 до 0.30. Остальные параметры одинаковы для всех элементов: $b_i = 0.1$ ($\varepsilon_i = 10$), $c_i = 10$, $k_i = 0.1$. При выбранных значениях параметров элементы цепочки демонстрируют хаотические колебания высокой размерности. К временным рядам всех 10 систем Маккея–Гласса добавлен 10% гауссов белый шум (отношение сигнал/шум равно 20 дБ).

На рис. 3, *а* приведен фрагмент временного ряда колебаний в пятом элементе цепочки при $\tau_5 = 330$, $a_5 = 0.25$. Масштабы таковы, что 330 точек ряда занимали временной интервал, равный времени задержки. Весь ряд состоял из 10000 точек и содержал 660 экстремумов. На рис. 3, *б* приведена зависимость $N_5(\tau)$, построенная по временному ряду переменной $x_5(t)$ при шаге изменения τ, равном 1. Несмотря на присутствие шума, отчетливый минимум зависимости $N_5(\tau)$ наблюдается при $\tau = \tau_5 = 330$. Зависимость $L_5(\varepsilon, k)$, построенная при шаге изменения ε, равном 0.1, и шаге изменения k, равном 0.01, демонстрирует минимум при $\varepsilon = 10.2$ и $k = 0.10$ (рис. 3, *в*). На рис. 3, *г* приведена восстановленная при найденных значениях параметров нелинейная функция f_5. Заметим, что для построения $L_5(\varepsilon, k)$ и восстановления нелинейной функции мы использовали лишь по 2000 точек временных

Тематика Школы: теоретические аспекты

1. Механизмы и нелинейные модели регуляции медленноволновых процессов нейровегетативной, кардиососудистой и двигательной систем
2. Природа медленных колебательных процессов в физиологических системах. Синергетика макроколебательных процессов кардиоритма с психическими, нейроэндокринными, обменными (биохимическими, иммунными) процессами. Взаимосвязь вегетативных нарушений в организме и изменений ВРС
3. Методы регистрации и анализа медленных волновых процессов ВРС, в сосудистой системе, в ЦНС, двигательной активности и других системах
4. Влияние шумов на процессы в нелинейных физиологических системах
5. Математические модели нелинейной динамики мозга, сердечно-сосудистой и двигательной систем
6. Физиологические основы медленных волновых процессов. Классификация ВРС. Модели анализа медленных колебаний гемодинамики и ВРС. Модели медленных колебательных процессов в ЦНС и психической активности.
7. Клинико-медленноволновые соотношения, синдромы
8. Генетические аспекты вегетативной регуляции ВРС
9. Нелинейные феномены: предельные циклы, перемежаемость, турбулентность, синхронизация, самоорганизованная критичность, проблемы устойчивости и др.
10. Общие принципы клинического анализа
11. ВРС и сон: теоретические и прикладные аспекты

Тематика симпозиума: прикладные аспекты

А • Использование медленных колебаний ВРС, сосудистой системы, дыхания, двигательной активности, сахара в крови в клинической практике (сердечно-сосудистая система, неврология, психиатрия, нейроэндокринология, сахарный диабет и тд.).

• Использование ВРС в оценке функционального состояния организма в физиологии труда, спортивной медицине, специальной профессиональной деятельности (операторы промышленных предприятий, горноспасатели, водолазы, космонавты). Влияние экологии. Социальный стресс.

• Онтогенетические особенности ВРС (детство, менструальный цикл, беременность, старость)

• Санаторно-курортная терапия, реабилитация.

Б • Разработка портативных аппаратурно-программных комплексов анализа ВРС, двигательной активности индивидуального пользования в оценке функционального состояния организма.

• Наносенсоры.

• Телеметрия и организация консультативной службы.

Круглый стол: «Перспективы развития теоретических и прикладных аспектов медленноволновой динамики физиологических процессов и их клинические приложения»

Оргкомитет

Зам. председателя Оргкомитета
д.м.н., проф. Флейшман Арнольд Наумович
тел.: (3843)79-66-54; e-mail: anf937@mail.ru;
http://ndfm.ru/; http://www.conf.ndfm.ru

ON TWO-DIMENSIONAL LINEAR THEORY OF INTERACTION BETWEEN ELECTRON BEAM AND TRAVELING ELECTROMAGNETIC WAVE: ALLOWING FOR INFLUENCE OF SPACE CHARGE IN A THIN BEAM MODEL

G.M. Krasnova

In the article two-dimensional model of interaction between infinitely thin electron beam in longitudinal magnetic field and traveling electromagnetic wave has been considered; in the frames of two-dimensional linear theory integral equation described such interaction has been formulated. On the basis of derived dispersion relation condition of initiation of beam instability has been found and influence of space charge fields on the processes of interaction has been analyzed.

Keywords: Interaction between electron beam and traveling electromagnetic wave, O-type interaction, beam instability, space charge.

Краснова Галина Михайловна – родилась в 1989 году в Саратове. Окончила Лицей прикладных наук. В 2006 году поступила в Саратовский государственный университет на факультет нелинейных процессов. Занимается научной работой, темой которой является исследование взаимодействия электронного потока и бегущей электромагнитной волны в рамках двумерной линейной теории. Принимала участие в студенческих конференциях.

410012 Саратов, ул. Астраханская, 83
Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского
E-mail: gal4onock@rambler.ru

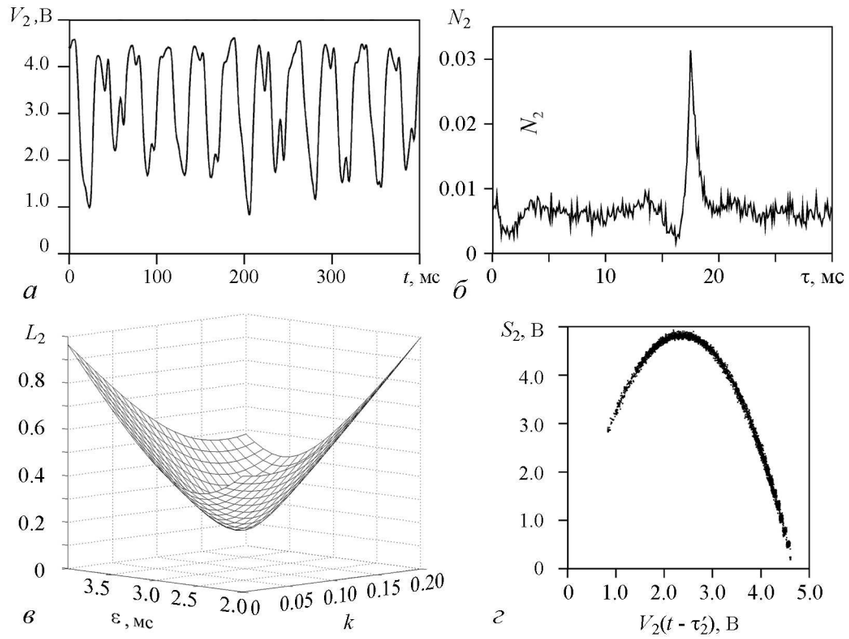


Рис. 6. Восстановление элемента цепочки связанных экспериментальных радиотехнических генераторов с запаздывающей обратной связью: *а* – экспериментальная временная реализация $V_2(t)$ второго генератора; *б* – зависимость $N_2(\tau)$, нормированная на общее число экстремумов в ряде, $N_{2\min}(\tau) = N_2$ (16.2 мс); *в* – зависимость $L_2(\varepsilon, k)$, нормированная на максимальную длину в исследуемом интервале параметров, $L_{2\min}(\varepsilon, k) = L_2(3.03 \text{ мс}, 0.10)$; *г* – восстановленная нелинейная функция f_2 при $\tau_2' = 16.2$ мс, $\varepsilon_2' = 3.03$ мс, $k_2' = 0.10$. $S_2 = \varepsilon_2' \dot{V}_2(t) + V_2(t) - k_2' \left(V_3(t) - 2V_2(t) + V_1(t)\right)$

$\tau_2 = 16.4$ мс, $\tau_3 = 20.4$ мс, $\varepsilon_1 = 2.88$ мс, $\varepsilon_2 = 2.91$ мс, $\varepsilon_3 = 2.94$ мс, $k_2 = 0.1$ записывались хаотические сигналы $V_i(t)$ с помощью трехканального аналого-цифрового преобразователя с частотой выборки $f_s = 10$ кГц. Фрагмент временной реализации сигнала $V_2(t)$ приведен на рис. 6, *а*.

При шаге изменения τ, равном периоду выборки точек $T_s = 0.1$ мс, абсолютный минимум $N_2(\tau)$ наблюдается для второго генератора при $\tau = 16.2$ мс (рис. 6, *б*). Зависимость $L_2(\varepsilon, k)$, построенная при восстановленном времени запаздывания и параметрах ε и k, перебираемых с шагом, равном 0.01, демонстрирует минимум при $\varepsilon = 3.03$ мс и $k = 0.10$ (рис. 6, *в*), то есть позволяет получить близкую оценку ε_2 и k_2. Нелинейная функция, восстановленная по экспериментальному временному ряду, приведена на рис. 6, *г*. Она достаточно хорошо совпадает с истинной передаточной характеристикой f_2 нелинейного элемента второго генератора.

Проиллюстрируем возможность восстановления времени запаздывания по экспериментальным данным с помощью метода, основанного на анализе отклика системы на слабое внешнее воздействие в виде прямоугольных импульсов. Будем возмущать второй элемент цепочки генераторов внешним сигналом $V_{\text{вн}}$, вводя его между фильтром и линией задержки этого элемента через суммирующий усилитель. При

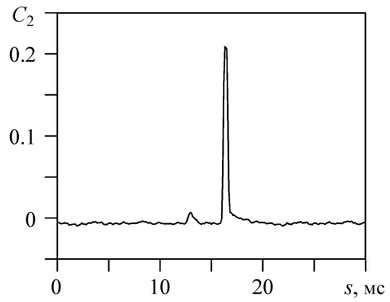


Рис. 7. Взаимная корреляционная функция (6) для связанных экспериментальных радиотехнических генераторов с запаздывающей обратной связью в хаотическом режиме, $C_{2\max}(s) = C_2$ (16.3 мс)

таком воздействии динамика второго элемента цепочки описывается уравнением (8). Параметры связанных генераторов оставим прежними. На рис. 7 построена взаимная корреляционная функция (6) для случая, когда возмущающий импульсный сигнал имеет амплитуду $A_2 = 0.1$ В, период $T_2 = 40$ мс и длительность $M_2 = T_2/2$. При шаге изменения s, равном 0.1 мс, график $C_2(s)$ имеет максимум при $s = 16.3$ мс, то есть, время запаздывания восстанавливается с высокой точностью.

Заключение

Предложены методы реконструкции модельных дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом для ансамблей связанных систем с задержкой по их временным рядам. Методы восстановления времени запаздывания опираются на закономерности расположения экстремумов во временных реализациях наблюдаемых колебаний, либо основаны на анализе отклика системы на слабое внешнее воздействие в виде прямоугольных импульсов. Достоинством первого метода является его простота и высокое быстродействие, а недостатком – невозможность его применения к системам с задержкой в периодических режимах и при высоких уровнях шума. Достоинством второго метода является его эффективность для систем, находящихся как в периодических, так и в хаотических режимах колебаний, и возможность использования при сильной связи элементов и высоких уровнях шума. Недостатком является необходимость активного воздействия на исследуемую систему, что сужает возможности применения этого метода на практике. Например, такой метод нельзя использовать для реконструкции динамических систем по временным рядам, полученным в результате пассивных наблюдений. Для применения метода мы должны иметь доступ к динамической переменной исследуемой системы и иметь возможность ее возмущения внешним сигналом. При этом внешнее воздействие не должно приводить к срыву автоколебаний. С другой стороны, метод допускает использование импульсов малой амплитуды, что сводит воздействие на систему к минимуму и позволяет избежать качественных изменений ее динамики.

Для восстановления параметров инерционности, коэффициентов связи и нелинейных функций ансамбля связанных систем с задержкой использован метод, основанный на проецировании бесконечномерного фазового пространства системы с запаздыванием в специальным образом выбранные подпространства малой размерности.

Эффективность методов продемонстрирована на примере хаотических и периодических временных рядов цепочек диффузионно связанных модельных систем с

приведены зависимости реальной и мнимой частей $F\left(\Phi_0, \phi_c, \theta_p\right)$ при различных параметрах пространственного заряда для нескольких фиксированных значений циклотронного угла пролета. Видно, что на поведение кривых в этом случае оказывает влияние как магнитное поле, так и поля пространственного заряда. В определенной степени они компенсируют друг друга. Именно их соотношение и определяет введенный параметр q. И чем выше его значение, тем больше амплитуда максимумов кривых активной и реактивной мощностей взаимодействия. Причем максимум активной составляющей по мере увеличения q смещается в сторону меньших значений Φ_0. Кривые, для которых значение $\theta_p = 0$, соответствуют случаю, когда пространственным зарядом пренебрегаем.

Следует отметить, что, когда q – величина действительная и никакой неустойчивости не возникает, то влияние магнитного поля будет превышать влияние полей пространственного заряда. Тогда с увеличением q максимум активной составляющей мощности вновь будет уменьшаться по амплитуде и сдвигаться в сторону больших по абсолютной величине значений Φ_0.

Выводы

В данной работе рассмотрено взаимодействие электронного пучка и бегущей электромагнитной волны в рамках двумерной линейной теории.

1. Сформулированы интегральные уравнения, описывающие процессы такого взаимодействия в рамках двумерной линейной теории с учетом влияния пространственного заряда.

2. Приведен вывод дисперсионного уравнения дрейфующего электронного потока и найдено условие возникновения неустойчивости в результате влияния кулоновских сил взаимодействия.

3. Получены выражения для ВЧ смещений, а также для активной и реактивной мощностей взаимодействия. Представлены графики зависимости функций от невозмущенного относительного угла пролета, циклотронного угла пролета и параметра пространственного заряда, характеризующих активные и реактивные мощности взаимодействия.

Библиографический список

1. *Андрушкевич В.С., Козлов Г.А., Трубецков Д.И.* К двумерной линейной теории СВЧ приборов О-типа // Изв. вузов. Радиофизика. 1967. Т. 10, № 1. С. 105
2. *Шевчик В.Н., Трубецков Д.И.* Аналитические методы расчета в электронике СВЧ. М.: Советское радио, 1970.
3. *Дёч Г.* Руководство к практическому применению преобразования Лапласа и Z-преобразования. М.: Наука, 1971.

Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского

Поступила в редакцию 21.07.2010

5. Энергетическое взаимодействие электронов и волны (первое приближение)

Чтобы рассмотреть характер энергообмена в рамках двумерной теории взаимодействия электронов и волны, используем выражения для активной и реактивной мощностей [2]:

$$P_{eI} = \frac{1}{2}\int\limits_0^x \tilde{i}E^0 \mathrm{sh}(\beta_0 y_0)\exp(j\beta_0\xi)d\xi, \tag{17.1}$$

$$P_{eII} = \frac{1}{2}\int\limits_0^x I_0\tilde{y}E^0\frac{\beta_e}{\beta_0}\mathrm{ch}(\beta_0 y_0)\exp(j\beta_0\xi)d\xi. \tag{17.2}$$

Выражение (17.1) представляет собой мощность, отдаваемую сгруппированным током $\tilde{i}$ волне постоянной амплитуды $E^0\mathrm{sh}(\beta_0 y_0)e^{-j\beta_0 x}$. Переменная составляющая тока связана с продольными смещениями: $\tilde{i} = j\omega\rho_0\tilde{x}$. Подставляя в (17.1) выражение (14), получаем для активной мощности

$$P_{eI} = \frac{1}{4}P_0\xi_x^2\bar{\varphi}_0\left[F_{1a}\left(\Phi_0,\theta_p\right) + jF_{1r}\left(\Phi_0,\theta_p\right)\right], \tag{18}$$

где $\xi_x = E^0 l\mathrm{sh}(\beta_0 y_0)/V_0$, $\bar{\varphi}_0 = \beta_e l$ – абсолютный невозмущенный угол пролета электронов, $P_0 = I_0 V_0$, $\theta_p = \beta_p l$, $\Phi_0 = (\beta_e - \beta_0)\,l$ – невозмущенный относительный угол пролета электронов и волны, l – длина пространства взаимодействия. Реальная и мнимая части функции относительного угла пролета и параметра пространственного заряда имеют вид:

$$\mathrm{Re}F(\Phi_0,\theta_p) = \frac{2\Phi_0 - \dfrac{1}{2\theta_p}\left[(\theta_p+\Phi_0)^2\cos(\Phi_0-\theta_p) - (\theta_p-\Phi_0)^2\cos(\Phi_0+\theta_p)\right]}{(\Phi_0+\theta_p)^2(\Phi_0-\theta_p)^2}, \tag{19.1}$$

$$\mathrm{Im}F(\Phi_0,\theta_p) = \frac{\theta_p^2 - \Phi_0^2 + \dfrac{1}{2\theta_p}\left[(\theta_p+\Phi_0)^2\sin(\Phi_0-\theta_p) - (\theta_p-\Phi_0)^2\sin(\Phi_0+\theta_p)\right]}{(\Phi_0+\theta_p)^2(\Phi_0-\theta_p)^2}. \tag{19.2}$$

В том случае, когда полями пространственного заряда можно пренебречь ($\theta_p \to 0$), выражения (19.1) и (19.2) переходят в соответствующие, найденные из теории без учёта пространственного заряда [2, соотношения (III.11)–(III.12)].

Формула (17.2) характеризует работу электронов в неоднородном в поперечном направлении поле волны. Подставляя (15.2) в (17.2) и интегрируя, получаем выражения для P_{eII}:

$$P_{eII} = \frac{1}{4}P_0\xi_y^2\bar{\varphi}_0\left[F_{1a}\left(\Phi_0,\phi_c,\theta_p\right) + jF_{1r}\left(\Phi_0,\phi_c,\theta_p\right)\right], \tag{20}$$

30. *Pyragas K.* Synchronization of coupled time-delay systems: Analytical estimations // Phys. Rev. E. 1998. Vol. 58. P. 3067.
31. *Burić N., Vasović N.* Global stability of synchronization between delay-differential systems with generalized diffusive coupling // Chaos, Solitons and Fractals. 2007. Vol. 31. P. 336.
32. *Ikeda K., Matsumoto K.* High-dimensional chaotic behavior in systems with time-delayed feedback // Physica D. 1987. Vol. 29. P. 223.

Саратовский филиал Института радиотехники и электроники РАН

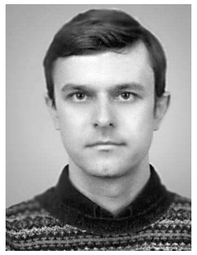
Поступила в редакцию *12.04.2010*
После доработки *12.10.2010*

RECONSTRUCTION OF ENSEMBLES OF COUPLED TIME-DELAY SYSTEMS FROM TIME SERIES

M.D. Prokhorov, V.I. Ponomarenko

The methods for the reconstruction of model delay-differential equations for ensembles of coupled time-delay systems from their time series are proposed. The methods efficiency is illustrated using chaotic and periodic time series from chains of diffusively coupled model and experimental time-delay systems for the cases of unidirectional and mutual coupling.

Keywords: Reconstruction of equations, time series analysis, dynamical modeling, time-delayed feedback.



Прохоров Михаил Дмитриевич – родился в Саратове (1968). Окончил Саратовский государственный университет (1992). Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук (1997) и доктора физико-математических наук (2008). Ведущий научный сотрудник Саратовского филиала Института радиотехники и электроники РАН. Область научных интересов – нелинейная динамика и ее приложения, математическое моделирование, анализ временных рядов. Имеет более 100 научных публикаций.

410019 Саратов, ул. Зеленая, 38
Саратовский филиал Института радиотехники и электроники РАН
E-mail: mdprokhorov@yandex.ru

Пономаренко Владимир Иванович – родился в Саратове (1960). Окончил Саратовский государственный университет (1982). Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук (1992) и доктора физико-математических наук (2008). Ведущий научный сотрудник Саратовского филиала Института радиотехники и электроники РАН. Область научных интересов – статистическая радиофизика, анализ временных рядов, нелинейная динамика и ее приложения. Автор более 130 научных публикаций.

410019 Саратов, ул. Зеленая, 38
Саратовский филиал Института радиотехники и электроники РАН
E-mail: ponomarenkovi@gmail.com

Прикладные задачи нелинейной теории колебаний и волн

Изв. вузов «ПНД», т. 18, № 5, 2010 УДК 621.391.01

ГЕНЕРАЦИЯ МЕДЛЕННЫХ РИТМОВ И ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНАЯ АКТИВНОСТЬ В АНСАМБЛЯХ НЕЙРОНОПОДОБНЫХ ОСЦИЛЛЯТОРОВ

М.А. Комаров, Г.В. Осипов

Различные экспериментальные данные и последние исследования моделей нейронных сетей показывают особую роль ингибиторных синаптических связей в формировании медленных ритмов осцилляторной активности. Известно, что в основе генерации медленных ритмов может лежать эффект последовательной пачечной активности отдельных нейронов или групп элементов в нейронной сети. Данная работа посвящена исследованию бифуркаций, которые приводят к образованию гетероклинических контуров – математических образов последовательной пачечной активности в ансамбле нейронов, объединенных взаимными ингибиторными синаптическими связями. Анализ проводится для моделей различных типов возбудимости. Показано, что для моделей первого типа гетероклинический контур возникает вследствие седлоузловой бифуркации предельных циклов, в то время как для моделей второго типа возбудимости субкритическая бифуркация Неймарка–Сакера приводит к образованию гетероклинических орбит и последовательным переключениям активности осцилляторов.

Ключевые слова: Нейродинамика, последовательная активность, гетероклинический контур.

Введение

Возникновение и взаимодействие паттернов различной осцилляторной активности в сложных нейронных структурах является важнейшей задачей современной нейронауки. Биологические данные и эксперименты указывают на особую роль пачечной активности в функционировании мозга и нервной системы [1–5]. В работе [6] исследовалась задача формирования последовательной пачечной активности в ансамбле из трех нейронов, объединенных взаимными ингибиторными синапсами, и в рамках частотной модели было доказано, что возникновение устойчивого гетероклинического контура в фазовом пространстве динамической системы приводит к генерации последовательной нейронной активности [7–11]. В данной работе приводится численный анализ бифуркаций в нейронных ансамблях, состоящих из трех элементов с взаимными синаптическми ингибиторными связями. В качестве моделей

4. ВЧ смещения электронов при наличии электромагнитной волны

Рассмотрим теперь, как скажется влияние неустойчивости, если пучок движется в пространстве, где есть замедляющая система. При наличии бегущей электромагнитной волны в дифференциальных уравнениях появляются слагаемые, стоящие справа от знака равенства. Эти слагаемые определяются компонентами собственного электрического поля прямой бегущей электромагнитной волны, распространяющейся в рассматриваемой системе. Уравнения тогда становятся неоднородными и принимают вид:

$$\frac{\partial^2\tilde{x}}{\partial x^2}+2j\beta_{\rm e}\frac{\partial\tilde{x}}{\partial x}-\tilde{x}\left(\beta_{\rm e}^2-\eta B\frac{\omega_{pH}}{\upsilon_0^2}{\rm th}\,(\beta_0 y_0)\right)=\frac{E^0}{2V_0}{\rm sh}(\beta_0 y_0)e^{-j\beta_0 x}, \tag{13.1}$$

$$\frac{\partial^2\tilde{y}}{\partial x^2}+2j\beta_{\rm e}\frac{\partial\tilde{y}}{\partial x}-\tilde{y}\left(\left(\beta_{\rm e}^2-\beta_{\rm c}^2\right)+\eta B\frac{\omega_{pH}}{\upsilon_0^2}\frac{1}{{\rm th}\,(\beta_0 y_0)}\right)=j\frac{E^0}{2V_0}{\rm ch}(\beta_0 y_0)e^{-j\beta_0 x}, \tag{13.2}$$

где $V_0=\upsilon_0^2/(2\eta)$ – ускоряющее напряжение.

Используя преобразование Лапласа, можем получить решение уравнений (13.1), (13.2) в интегральном виде (при начальных условиях $(\tilde{x},\partial\tilde{x}/\partial x)_{x=0}=0$ и $(\tilde{y},\partial\tilde{y}/\partial x)_{x=0}=0$):

$$\tilde{x}(x)=\int\limits_0^x\frac{E^0}{2V_0}{\rm sh}(\beta_0 y_0){\rm exp}(-j\beta_0\xi)\frac{\sin\left[(x-\xi)\,\beta_p\right]}{\beta_p}\,{\rm exp}(-j\beta_{\rm e}(x-\xi))d\xi, \tag{14}$$

$$\tilde{y}(x)=\int\limits_0^x j\frac{E^0}{2V_0}{\rm ch}(\beta_0 y_0){\rm exp}(-j\beta_0\xi)\frac{\sin\left[(x-\xi)\sqrt{\beta_{\rm c}^2-\beta_p^2{\rm cth}^2(\beta_0 y_0)}\right]}{\sqrt{\beta_{\rm c}^2-\beta_p^2{\rm cth}^2(\beta_0 y_0)}}\,{\rm exp}(-j\beta_{\rm e}(x-\xi))d\xi, \tag{15.1}$$

$$\tilde{y}(x)=\int\limits_0^x j\frac{E^0}{2V_0}{\rm ch}(\beta_0 y_0){\rm exp}(-j\beta_0\xi)\frac{{\rm sh}\left[(x-\xi)\sqrt{\beta_p^2{\rm cth}^2(\beta_0 y_0)-\beta_{\rm c}^2}\right]}{\sqrt{\beta_p^2{\rm cth}^2(\beta_0 y_0)-\beta_{\rm c}^2}}\,{\rm exp}(-j\beta_{\rm e}(x-\xi))d\xi. \tag{15.2}$$

Для $\tilde{y}(x)$ записано два решения в силу того, что преобразование Лапласа приводит к разным выражениям для положительного и отрицательного значений дискриминанта [3]:

$$D=-(\beta_{\rm e}^2-\beta_{\rm c}^2+\beta_p^2{\rm cth}^2(\beta_0 y_0))-\frac{(2j\beta_{\rm e})^2}{4}=\beta_{\rm c}^2-\beta_p^2{\rm cth}^2(\beta_0 y_0). \tag{16}$$

В основном будем рассматривать выражения (14) и (15.2), так как для $\tilde{y}(x)$ именно такое выражение получено при учете, что $\beta_{\rm c}^2-\beta_p^2{\rm cth}^2(\beta_0 y_0)<0$.

Следует отметить, что при предельном переходе, когда $\beta_p\to 0$ и пространственным зарядом можно пренебречь, выражения для смещений совпадают с теми, которые получены в двумерной линейной теории без учета пространственного заряда [2, соотношения (IV.19)].

1. Исходные соотношения

На рис. 1 представлена анализируемая схема. Бесконечно тонкий электронный пучок движется в однородном магнитном поле с индукцией $B_0 = B_x = \mathrm{const}$ вдоль положительного направления оси x со скоростью υ_0. Рассматривается взаимодействие пучка с прямой бегущей электромагнитной волной, распространяющейся в замедляющей системе. Компоненты вектора напряжённости $\mathbf{E}_s$ собственного электрического поля волны с частотой ω при её распространении в плоской замедляющей системе имеют вид

$$E_{sx} = E^0 \mathrm{sh}\,(\beta_0 y)\, e^{j(\omega t - \beta_0 x)}, \quad E_{sy} = jE^0 \mathrm{ch}\,(\beta_0 y)\, e^{j(\omega t - \beta_0 x)}, \quad E_{sz} = 0, \qquad (1)$$

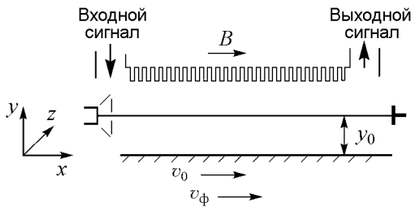


Рис. 1. Двумерная модель взаимодействия электронного пучка и электромагнитной волны

где E^0 – постоянная амплитуда волны, β_0 – фазовая постоянная волны в системе без пучка.

В качестве исходного уравнения используется уравнение движения электронов [1]:

$$\frac{d^2\tilde{\mathbf{r}}}{dt^2} = \eta\mathbf{E} + \eta\left[\frac{d\tilde{\mathbf{r}}}{dt}\mathbf{B}\right], \qquad (2)$$

где $\tilde{\mathbf{r}} = \tilde{\mathbf{r}}(x)\exp(j\omega t)$ – высокочастотное смещение электрона ($\sim$ обозначает ВЧ-переменные); $\eta = e/m$, e и m – заряд и нерелятивистская масса электрона; электрическое поле можно представить как сумму поля волны и поля пространственного заряда $\mathbf{E} = \mathbf{E}_s + \mathbf{E}_{\text{ПЗ}}$.

Если замедляющей системы нет, и она заменена гладким металлическим электродом, то тонкий электронный пучок дрейфует в пространстве под действием поля пространственного заряда. Этому соответствует следующая система уравнений:

$$\frac{d^2\tilde{x}}{dt^2} = \left(\frac{\partial}{\partial t} + \upsilon_0\frac{\partial}{\partial x}\right)^2 \tilde{x} = \eta E_{x\text{ПЗ}}, \qquad (3.1)$$

$$\frac{d^2\tilde{y}}{dt^2} = \left(\frac{\partial}{\partial t} + \upsilon_0\frac{\partial}{\partial x}\right)^2 \tilde{y} = \omega_{\text{c}}\frac{d\tilde{z}}{dt} + \eta E_{y\text{ПЗ}}, \qquad (3.2)$$

$$\frac{d^2\tilde{z}}{dt^2} = \left(\frac{\partial}{\partial t} + \upsilon_0\frac{\partial}{\partial x}\right)^2 \tilde{z} = -\omega_{\text{c}}\frac{d\tilde{y}}{dt}, \qquad (3.3)$$

где $\omega_{\text{c}} = \eta B_0$ – циклотронная частота.

2. Вычисление ВЧ полей пространственного заряда

Вывод выражений для компонент поля пространственного заряда подробно приведен в [2] для случая бесконечно тонкого электронного пучка магнетронного типа. Направления полей сказываются лишь при записи уравнений движения и не оказывают никакого влияния на вывод выражений для полей пространственного заряда. Тогда, как для случая, когда электронный пучок движется в скрещенных полях,

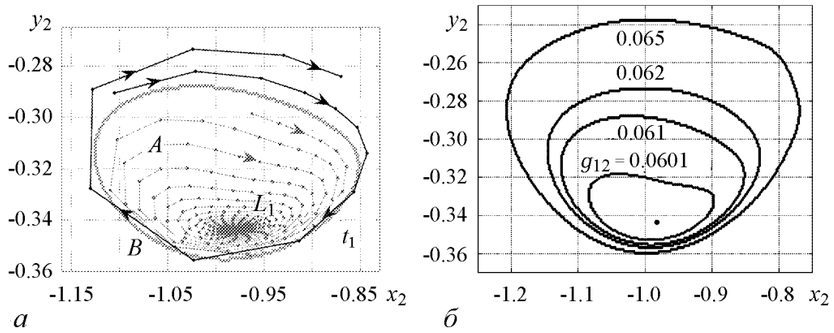


Рис. 4. *а* – Отображение Π_1 в себя, плоскость (x_2, y_2). Сплошная замкнутая линия t_1 – сечение седлового тора T_1. Из области A (область внутри замкнутой кривой t_1) все траектории приближаются к предельному циклу L_1 (неподвижная точка в отображении плоскости Π_1 в себя). Из области B (область вне кривой t_1) все траектории приближаются к предельному циклу L_2, параметры: $g_{12} = g_{23} = g_{31} = 0.065$, $g_{21} = g_{13} = g_{32} = 0.5$. *б* – Сечения тора T_1 при различных значениях проводимости $g_{12} = 0.065$, 0.062, 0.061, 0.0601. По мере уменьшения g_{12} седловой тор стягивается к устойчивому предельному циклу

Для того чтобы определить бифуркации, которые приводят к режиму последовательных переключений, мы исследовали зависимость мультипликаторов предельных циклов от значения коэффициентов ингибиторных связей g_{ij}. Выяснилось, что пара комплексно-сопряженных мультипликаторов $\mu_{1,2}$ цикла L_1 выходит на единичную окружность при уменьшении силы синаптической связи g_{12} (рис. 3). Собственные векторы матрицы монодромии, соответствующие мультипликаторам $\mu_{1,2}$, имеют ненулевые компоненты в направлениях, коллинеарных осям x_2 и y_2. Принимая во внимание этот факт, было произведено отображение гиперплоскости $\Pi_1 = \{x_1 = 0,$ $y_1 = -0.18,\ z_1 = 0,\ z_2 = 0.01,\ x_3 = -0.9,\ y_3 = -0.32,\ z_3 = 0.018$ (все координаты взяты на предельном цикле L_1, за исключением переменных $x_2,\ y_2$) в себя. Построение данного отображения позволило определить наличие седлового тора T_1. Рис. 4, *а* иллюстрирует сечение t_1 тора плоскостью Π_1. Из области A (внутренняя область сечения t_1 тора) траектории идут к предельному циклу L_1, из области B (внешняя область сечения t_1 тора) траектории идут к предельному циклу L_2. При уменьшении g_{12} седловой тор стягивается к предельному циклу L_1 и в момент бифуркации влипает в L_1, передавая ему свою неустойчивость (рис. 4, *б*). Таким образом, предельный цикл L_1 теряет устойчивость вследствие субкритической бифуркации Неймарка–Сакера. Численно был проведен анализ начальных условий в окрестности тора T_1. Выяснилось, что все траектории из окрестности тора T_1 ведут либо к устойчивому предельному циклу L_1, либо к устойчивому предельному циклу L_2 (см. рис. 4, *а*, рис. 6). На рис. 5

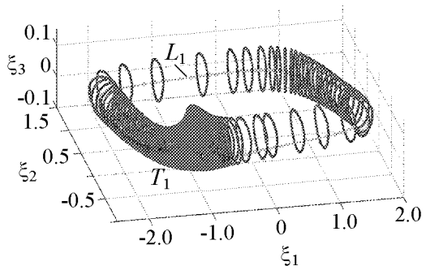


Рис. 5. Изображение седлового тора T_1 и устойчивого предельного цикла L_1 в пространстве (ξ_1, ξ_2, ξ_3)

с помощью преобразования координат $\xi_1 = x_1 + x_2\cos(\theta)$, $\xi_2 = y_1 + x_2\sin(\theta)$, $\xi_3 = y_2 + 10z_1$, $\theta = \mathrm{arctg}(\dot{y}_1/\dot{x}_1)$ был построен седловой тор T_1 и устойчивый предельный цикл L_1 (подобное преобразование координат было выбрано для удобства построения седлового тора). Рис. 6 отображает несколько траекторий, идущих из окрестности тора к предельному циклу L_2. Для лучшего представления траектории отображены в двух подпространствах: траектории выходят из окрестности седлового тора T_3 (рис. 6, *а*, пространство (ξ_1, ξ_2, ξ_3)) и затем идут к предельному циклу L_2 (рис. 6, *б*, пространство $(x_2 + x_1, y_2, 10z_1)$). Следует заметить, что подобным свойством обладают и два других предельных цикла: L_2 и L_3 теряют свою устойчивость вследствие субкритической бифуркации Неймарка–Сакера при уменьшении параметров связи g_{23} и g_{31}, соответственно. Поведение траекторий при $g_{12} = 0.062$, $g_{23} = 0.063$, $g_{31} = 0.065$, $g_{21} = g_{13} = g_{32} = 0.5$ (до бифуркации каждого из предельных циклов) схематически иллюстрирует рис. 7. Сечения торов T_2 и T_3 изображены в проекции отображений гиперплоскостей $x_2 = 0$ и $x_3 = 0$ в себя на плоскости (x_3, y_3) и (x_1, y_1). Черная линия со стрелкой, ведущая из окрестности седлового тора T_1 к предельному циклу L_2, схематически обозначает множество траекторий, идущих из окрестности T_1 к L_2, часть из которых изображена на рис. 6. В работах [7, 8] показано, что гетероклинические орбиты и их последовательности являются прообразами в фазовом пространстве генерации последовательной активности в сетях, где нейроны описываются одномерной модифицированной моделью Лотки–Вольтерры (частотная модель). В нашем случае образование гетероклинических орбит также является причиной генерации последовательностей переключения активности. Рассмотрим случай, когда $g_{12} \approx 0.0599$ (бифуркационное значение, при котором седловой тор T_1 влипает в предельный цикл L_1). Поскольку до бифуркации часть траекторий из окрестности седлового тора T_3 уходила к устойчивому предельному циклу L_1, то в момент бифуркации между седловым тором T_3 и седловым предельным циклом L_1 образуется гетероклиническая орбита, являющаяся прообразом последовательного переключения активности от третьего к первому элементу. Начальные условия в окрестности тора T_3 обеспечивают активность третьего нейрона в течение конечного промежутка времени. В силу неустойчивости тора, изображающая точка в окрестности гетероклинической орбиты покидает T_3 и идет к неустойчивому циклу L_1. В окрестности L_1 система находится некоторое

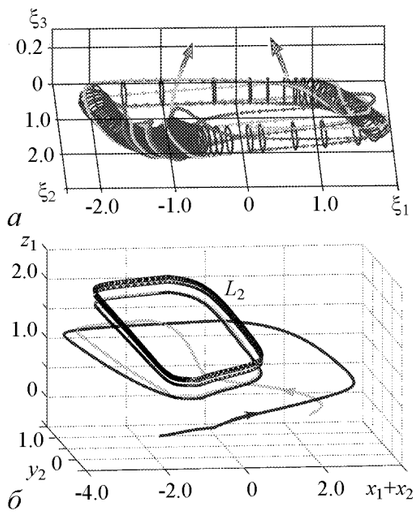


Рис. 6. *а* – Седловой тор T_1 и несколько траекторий, ведущих из окрестности тора к предельному циклу L_2. *б* – Продолжения траекторий, изображенных на рис. *а*; траектории следуют к предельному циклу L_2. $g_{12} = g_{23} = g_{31} = 0.065$, $g_{21} = g_{13} = g_{32} = 0.5$

Изв. вузов «ПНД», т. 18, № 5, 2010 УДК 621.385.6

К ДВУМЕРНОЙ ЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ЭЛЕКТРОННОГО ПОТОКА С БЕГУЩЕЙ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ВОЛНОЙ: УЧЕТ ВЛИЯНИЯ ПРОСТРАНСТВЕННОГО ЗАРЯДА В МОДЕЛИ ТОНКОГО ПУЧКА

Г.М. Краснова

В статье рассмотрена двумерная модель взаимодействия бесконечно тонкого электронного пучка в продольном магнитном поле с прямой бегущей электромагнитной волной; в рамках двумерной линейной теории сформулированы интегральные уравнения, описывающие такое взаимодействие. На основании выведенного дисперсионного соотношения получено условие возникновения пучковой неустойчивости и проанализировано влияние полей пространственного заряда на процессы взаимодействия.

Ключевые слова: Взаимодействие электронного потока с бегущей электромагнитной волной, взаимодействие О-типа, пучковая неустойчивость, пространственный заряд.

Введение

Известны различные теории, описывающие взаимодействие электронного пучка и бегущей электромагнитной волны в приборах О-типа. Однако большинство работ по линейной теории СВЧ приборов О-типа ограничиваются рассмотрением двумерных моделей движения электронов без учета полей пространственного заряда.

В то же время построение двумерной линейной теории с учетом влияния полей пространственного заряда представляет определенный интерес при исследовании особенностей действия приборов с длительным взаимодействием, таких как лампа бегущей волны и лампа обратной волны. Кроме того, влияние полей пространственного заряда в некоторых случаях может привести к появлению и развитию пучковой неустойчивости и изменениям в характеристиках приборов.

Таким образом, основная задача состоит в том, чтобы рассмотреть двумерную модель взаимодействия бесконечно тонкого электронного пучка в продольном магнитном поле с прямой бегущей электромагнитной волной.

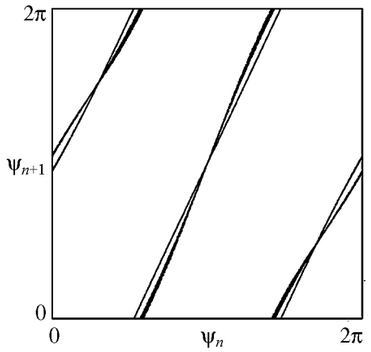


Рис. 11. Динамика фазы второго осциллятора для системы укороченных уравнений

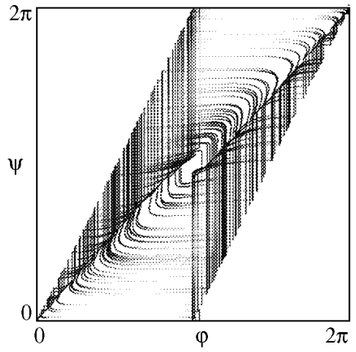


Рис. 12. Аттрактор системы укороченных уравнений в проекции на плоскость фаз колебаний (φ, ψ)

Заключение

В статье предложена схема генератора гиперболического хаоса в виде кольцевой системы, состоящая из двух линейных осцилляторов (полосовых фильтров), усилителя с квадратичной нелинейной характеристикой и нелинейного элемента, на который периодически подается последовательность радиоимпульсов. Собственная частота первого осциллятора вдвое меньше собственной частоты второго. На элементе с квадратичной нелинейной характеристикой происходит удвоение частоты и фазы сигнала от первого осциллятора. На другом нелинейном элементе сигнал от второго осциллятора смешивается с внешним вспомогательным сигналом и затем поступает на первый осциллятор. При определенных значениях параметров динамика фазы колебаний описывается растягивающим отображением окружности, что является принципиальным условием существования аттрактора Смейла–Вильямса в фазовом пространстве системы.

Математически модель описывается неавтономной системой обыкновенных дифференциальных уравнений четвертого порядка с периодическими коэффициентами. Также получена система уравнений для медленных комплексных амплитуд. Проведено численное решение исходных уравнений и уравнений для медленных амплитуд, установлено хорошее соответствие обоих способов описания в рассматриваемой области параметров. Продемонстрирована хаотическая природа динамических режимов. От системы дифференциальных уравнений осуществлен переход к отображению возврата Пуанкаре. При этом в четырехмерном фазовом пространстве отображения Пуанкаре реализуется аттрактор типа Смейла–Вильямса. На основании расчетов построена итерационная диаграмма для фазы колебаний, которая приближенно совпадает с диаграммой для отображения Бернулли. Вычислены показатели Ляпунова отображения Пуанкаре и построены их графики в зависимости от управляющего параметра. Гладкая зависимость старшего показателя от параметра подтверждает предположение о структурной устойчивости аттрактора. При этом величина старшего показателя приближенно равна $\ln 2$, что соответствует приближенному описанию динамики фазы колебаний растягивающим отображением окружности.

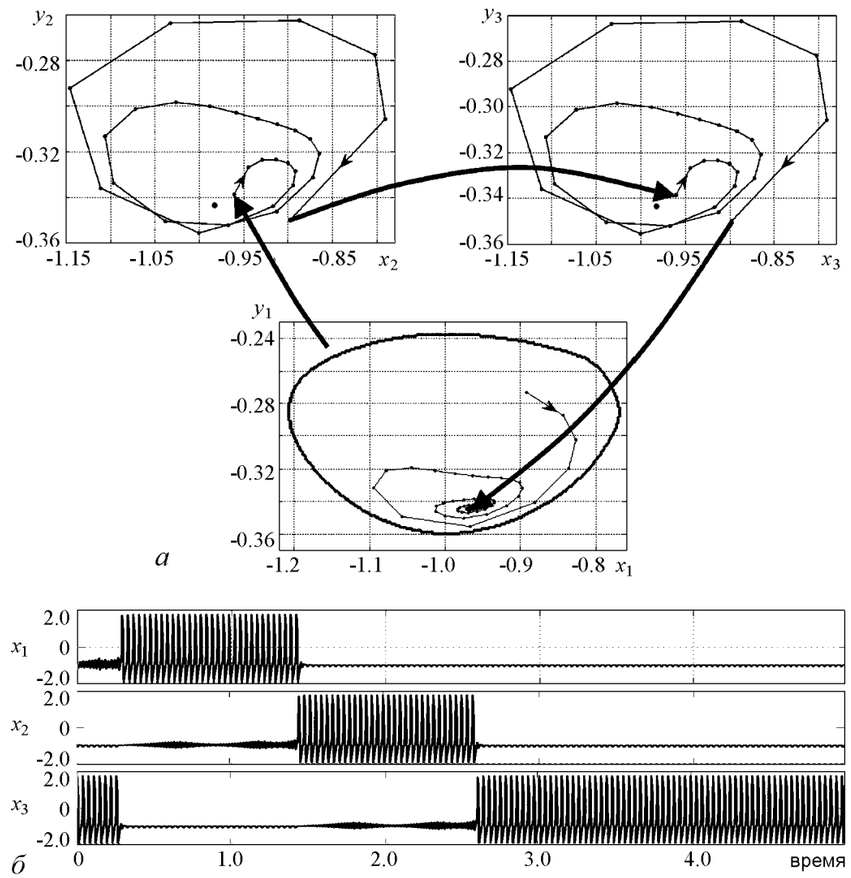


Рис. 9. *а* – Иллюстрация поведения траекторий при $g_{12}=g_{23}=0.059$, $g_{31}=0.065$, $g_{21}=g_{13}=g_{32}=0.5$. *б* – Последовательные переключения активности, вызванные образованием последовательности гетероклинических орбит

ляются образами периодической активности. Наконец, одновременное уменьшение сразу трех проводимостей g_{12}, g_{23}, g_{31} приводит к образованию гетероклинического контура между седловыми циклами L_1, L_2, L_3. При дальнейшем уменьшении проводимостей гетероклинический контур разрушается и в окрестности его рождается устойчивый предельный цикл, который соответствует периодической генерации пачечной активности (рис. 10). Подобная бифуркация образования предельного цикла при разрушении замкнутого гетероклинического контура аналитически изучена в работах [6,7]. Приводимые результаты численных расчетов подтверждают образование подобных бифуркаций и структур в фазовом пространстве более сложных систем, которые более реалистично описывают динамику нейронной активности.

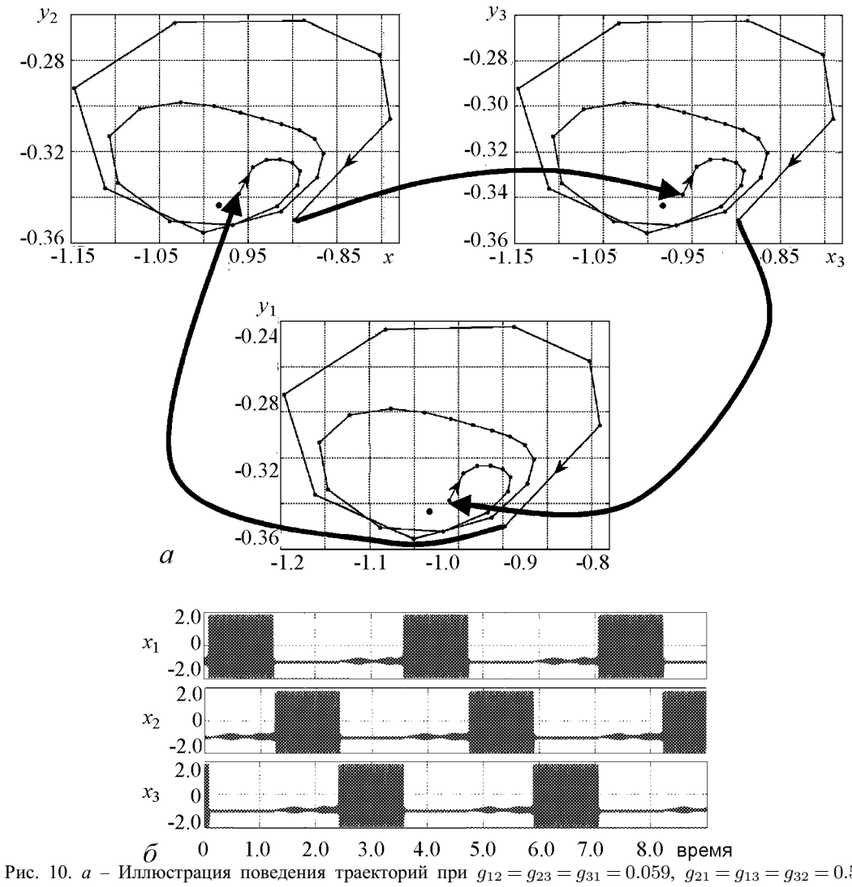


Рис. 10. *а* – Иллюстрация поведения траекторий при $g_{12} = g_{23} = g_{31} = 0.059$, $g_{21} = g_{13} = g_{32} = 0.5$. *б* – Периодическая генерация последовательной активности, вызванная образованием устойчивого предельного цикла при разрушении замкнутого гетероклинического контура

2. Образование гетероклинических контуров и последовательной активности в ансамблях элементов, моделируемых уравнениями Морриса–Лекара

Рассмотрим модель первого класса возбудимости – модель Морриса–Лекара ($S_j = 0$) [13]:

$$\begin{cases} -C\dfrac{dV_j}{dt} = g_L(V_j - V_L) + g_{Ca}M_\infty(V_j)(V_j - V_{Ca}) + g_K N_j(V_j - V_K) - \\ \qquad\qquad - \displaystyle\sum_{i=1}^{i=N} g_{ij}S_j(E_{\text{syn}} - V_j) - I_{\text{ext}}; \\ \dfrac{dN_j}{dt} = \lambda_N(V_j)(N_\infty(V_j) - N_j). \end{cases} \qquad (3)$$

здесь V_j – мембранный потенциал, N_j – переменная, описывающая действие ионных токов. Функции M_∞, N_∞, λ_N представляют собой нелинейные функции,

4. Результаты численного решения укороченных уравнений

Обсудим результаты, полученные на основе уравнений для медленных амплитуд (8). На рис. 8 показаны временные реализации, найденные при численном решении уравнений для значений параметров $\tau = 3$, $T = 13$, $a = 24$, $\gamma = 0.4$. На рис. 9 изображены зависимости вещественной амплитуды первого осциллятора r_1 и динамической переменной x от времени за два периода внешнего воздействия ($\omega_0 = 6\pi$).

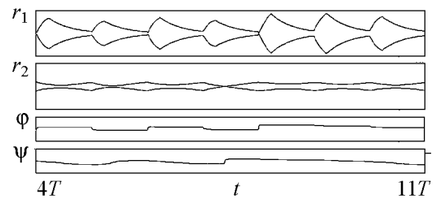


Рис. 8. Временные зависимости вещественных амплитуд r_1, r_2 и фаз φ, ψ в установившемся режиме, полученные при численном решении системы уравнений (8) при значениях параметров $\tau = 3$, $T = 13$, $a = 24$, $\gamma = 0.4$.

Сравнение с результатами, обсуждавшимися в разделе 2, свидетельствует о хорошем соответствии между решениями исходных и укороченных уравнений, что подтверждает правомерность использования приближенных уравнений в рассматриваемой области параметров. Хаос в системе проявляется в случайной вариации максимумов амплитуды колебаний осцилляторов и случайных скачках фаз на последовательных периодах воздействия внешним сигналом.

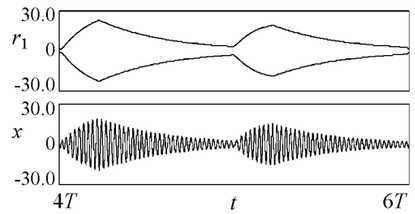


Рис. 9. Сравнение временных зависимостей вещественной амплитуды первого осциллятора r_1 и быстрой переменной x

На рис. 10 представлен портрет аттрактора для системы укороченных уравнений, в проекции на плоскость медленных амплитуд (r_1, r_2). Это изображение выполнено в той же технике, что и рис. 3.

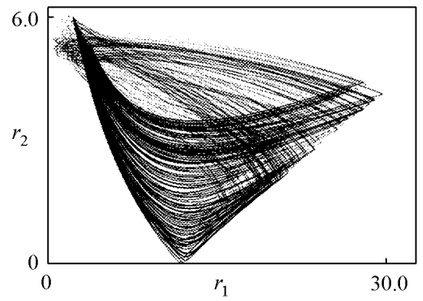


Рис. 10. Аттрактор системы укороченных уравнений в проекции на плоскость (r_1, r_2).

На рис. 11 показана диаграмма, иллюстрирующая динамику фазы второго осциллятора, построенная на основе численного решения укороченных уравнений. По горизонтальной оси отложено значение аргумента комплексной переменной A_2 в момент времени $t_n = nT$, а по вертикальной – в момент $t_{n+1} = (n+1)T$, где T – период внешнего воздействия. Фаза отнесена к интервалу от 0 до 2π. На рис. 12 изображен аттрактор системы укороченных уравнений в проекции на плоскость фаз колебаний (φ, ψ). Очевидно сходство полученного изображения с итерационной диаграммой для отображения Бернулли.

Старший показатель Ляпунова положительный, что является количественным подтверждением присутствия хаоса. При этом он близок к величине $\ln 2$, равной показателю Ляпунова отображения Бернулли, которое приближенно описывает динамику фазы колебаний в системе. Остальные показатели отрицательные. Нулевой показатель отсутствует, что характерно для отображений и неавтономных потоковых систем с периодическими коэффициентами. Таким образом, элемент объема в фазовом пространстве отображения Пуанкаре за одну итерацию испытывает растяжение по одному направлению и сжатие по остальным трем. Это соответствует построению гиперболического аттрактора типа Смейла–Вильямса (если учесть, что растяжение происходит по угловой переменной), но в четырехмерном фазовом пространстве.

На рис. 6 показаны зависимости показателей Ляпунова для аттрактора отображения Пуанкаре от коэффициента усиления a при фиксированных значениях остальных параметров. На всем рассматриваемом интервале значений параметра a старший показатель положительный, а остальные отрицательные. Старший показатель гладко зависит от параметра. Резкие провалы в отрицательную область, характерные для негиперболических аттракторов, отсутствуют. При этом величина старшего показателя в широком диапазоне изменения параметра остается близкой к $\ln 2$.

Оценка фрактальной размерности для аттрактора в отображении Пуанкаре при значениях параметров $\omega_0 = 6\pi$, $\tau = 3$, $T = 13$, $a = 24$, $\gamma = 0.4$ по формуле Каплана–Йорке составила

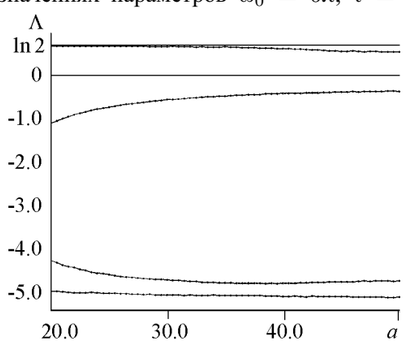


Рис. 6. Графики зависимости показателей Ляпунова для аттрактора отображения Пуанкаре от параметра a при фиксированных значениях остальных параметров ($\omega_0 = 6\pi$, $\tau = 3$, $T = 13$, $a = 24$, $\gamma = 0.4$)

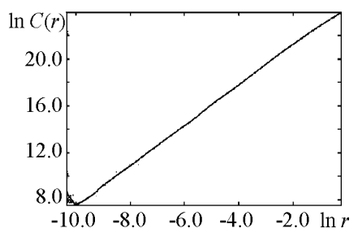


Рис. 7. График зависимости корреляционного интеграла $C(r)$ от размера ячейки r в логарифмическом масштабе ($\omega_0 = 6\pi$, $\tau = 3$, $T = 13$, $a = 24$, $\gamma = 0$)

$$D_{\mathrm{KY}} = 1 + \frac{\Lambda_1}{|\Lambda_2|} \approx 1.86.$$

Соответственно, для аттрактора исходной неавтономной системы, вложенного в пятимерное расширенное фазовое пространство, фрактальная размерность больше на единицу: $D = D_{\mathrm{KY}} + 1 \approx 2.86$.

Проводились расчеты корреляционной размерности аттрактора в сечении Пуанкаре с помощью алгоритма Грассбергера–Прокаччиа [4]. Для этого реализация, полученная путем численного решения уравнений, подвергалась обработке, состоящей в вычислении корреляционного интеграла с помощью программы OpenTSTOOL [11], использующей метод ближайших соседей в зависимости от размера ячейки покрытия аттрактора. На рис. 7 представлен график корреляционного интеграла. Полученная зависимость близка к линейной в широком диапазоне значений размера ячейки. Соответствующий угловой коэффициент дает оценку корреляцион-

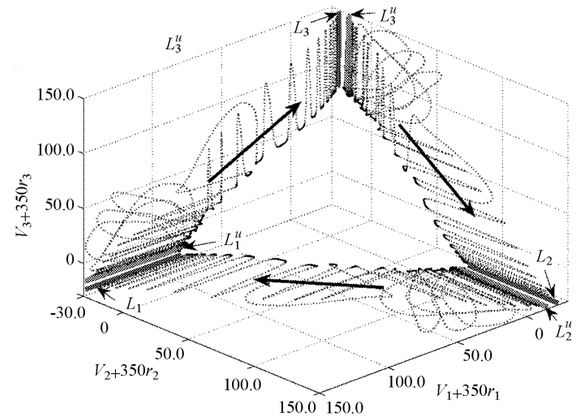


Рис. 14. Проекции устойчивых предельных циклов $L_{1,2,3}$, седловых предельных циклов $L^u_{1,2,3}$ (сплошные линии) и гетероклинических орбит (кривые, изображенные пунктирными линиями), направленных от седловых циклов L^u_1, L^u_2, L^u_3 к устойчивым предельным циклам L_3, L_1, L_2, соответственно. Параметры: $g_{13} = g_{32} = g_{21} = 3.05$, $g_{31} = g_{23} = g_{12} = 5.0$

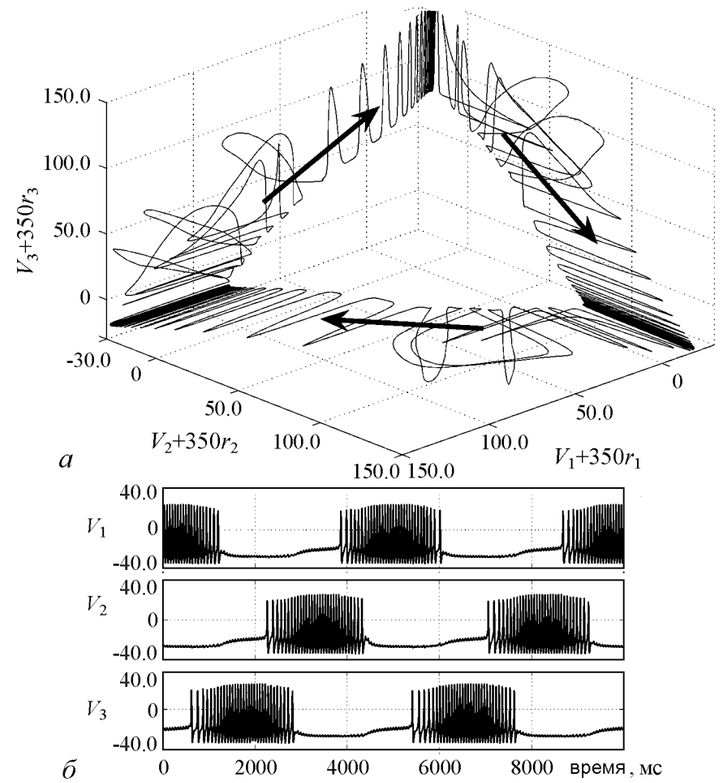


Рис. 15. *а* – Проекция предельного цикла, соответствующего режиму последовательных переключений активности; *б* – реализация переключательной динамики. Параметры: $g_{13} = g_{32} = g_{21} = 2.93$, $g_{31} = g_{23} = g_{12} = 5.0$

Заключение

Исследование нейронных ансамблей, состоящих из трех нейронов, объединенных взаимными ингибиторными связями, показало, что, несмотря на различные типы моделей, асимметрия связей приводит к образованию устойчивого гетероклинического контура, который является математическим образом генерации последовательной пачечной активности в нейронных ансамблях [7, 8]. Класс возбудимости используемой нейронной модели определяет бифуркацию, вследствие которой рождается устойчивый гетероклинический контур. В случае модели первого класса возбудимости – это седлоузловая бифуркация предельных циклов, в случае модели второго класса возбудимости – это субкритическая бифуркация Неймарка–Сакера. В ансамбле нейронов с асимметричными ингибиторными связями образование и период последовательной пачечной активности зависят только от параметров ингибиторной связи и никак не зависят от деталей и свойств спайковой активности отдельного изолированного элемента. Таким образом, существенную роль в образовании последовательных переключений играют ингибиторные синаптические связи. Следует отметить, что последовательная активность между различными состояния нейронных сетей, типичная для гетероклинического контура, была неоднократно обнаружена в различных биологических экспериментах [14, 15].

Благодарим Афраймовича В.С., Белых В.Н. и Петрова В.С. за полезные советы и обсуждения.

Работа выполнена при поддержке Федеральной целевой программы «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013гг. (контракты № П2018, П15, П2308, 02.740.11.5138, П942, 02.740.11.5188), при поддержке РФФИ (гранты 08-02-92004, 08-02-970049, 10-02-00940) и при поддержке корпорации Intel.

Библиографический список

1. *Buzsaki G.* Rhythms of the Brain. Oxford: Oxford University Press, 2006.
2. *Rabinovich M.I., Varona P., Selverston A.I., and Abarbanel H.D.I.* Dynamical principles in neuroscience // Rev. Mod. Phys. 2006. Vol. 78. 1213.
3. *Hahnloser R.H.R., Kozhevnikov A.A., and Fee M.S.* An ultra-sparse code underlies the generation of neural sequences in a songbird // Nature. London. 2002. Vol. 419. 65.
4. *Mazor O. and Laurent G.* Transient Dynamics versus fixed points in odor representations by locust antennal lobe projection neurons // Neuron. 2005. Vol. 48. 661.
5. *Huxter J., Burgess N., and O'Keefe J.* Independent rate and temporal coding in hippocampal pyramidal cells // Nature. London. 2003. Vol. 425. 828.
6. *Nowotny T. and Rabinovich M.I.* Dynamical origin of independent spiking and bursting activity in neural microcircuits // Phys. Rev. Lett. 2007. Vol. 98. 128106.
7. *Afraimovich V.S., Rabinovich M.I., and Varona P.* Heteroclinic contours in neural

Как видно из диаграммы, динамика фазы приближенно описывается растягивающим отображением окружности: за полный проход точкой ψ_n интервала от 0 до 2π ее образ ψ_{n+1} проходит этот интервал дважды.

На рис. 5 изображен аттрактор отображения возврата Пуанкаре за период внешнего воздействия в проекции на плоскость (x, u) и его увеличенные фрагменты. Полученный портрет визуально похож на аттрактор Смейла–Вильямса; это позволяет предполагать, что аттрактор однородно гиперболический. На рисунке отчетливо видна фрактальная структура аттрактора.

Для аттрактора исходной системы в сечении Пуанкаре были вычислены показатели Ляпунова по алгоритму Бенеттина с ортогонализацией по Граму–Шмидту [4]. В соответствии с этим методом выполняется совместное численное решение уравнений (2) и четырех наборов уравнений в вариациях за период внешнего воздействия. Каждый раз после пересечения траектории с секущей плоскостью $t_n = nT$ производится ортогонализация по Граму–Шмидту и нормализация векторов возмущений. Показатели Ляпунова определяются как отношения накапливающихся сумм логарифмов от норм векторов возмущений (после ортогонализации, но перед нормализацией) к числу полных периодов на каждом последующем возврате Пуанкаре. При значениях параметров $\omega_0 = 6\pi$, $\tau = 3$, $T = 13$, $a = 24$, $\gamma = 0.4$ получен полный спектр показателей Ляпунова

$$\Lambda_1 = 0.6695, \quad \Lambda_2 = -0.7751, \quad \Lambda_3 = -4.5398, \quad \Lambda_4 = -4.9983.$$

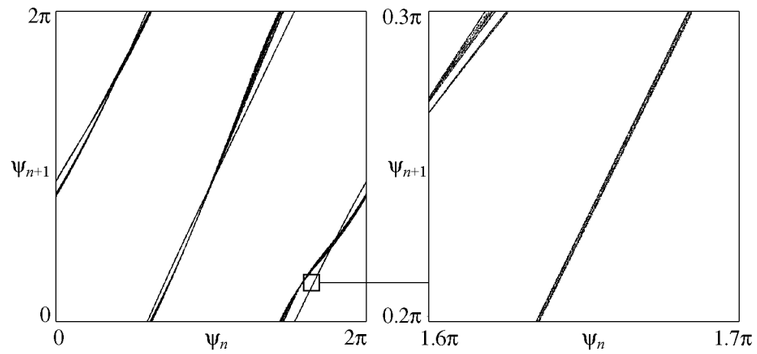


Рис. 4. Итерационная диаграмма для фазы колебаний второго осциллятора и ее увеличенный фрагмент при значениях параметров $\omega_0 = 6\pi$, $\tau = 3$, $T = 13$, $a = 24$, $\gamma = 0.4$

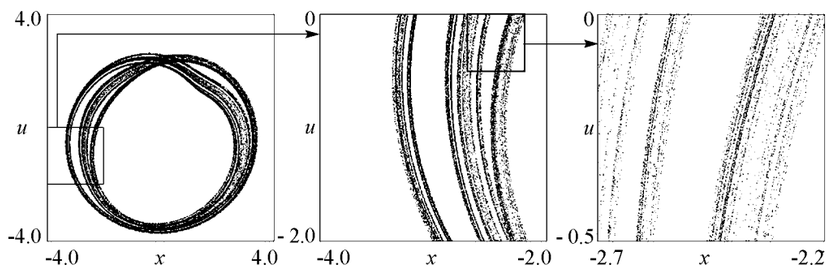


Рис. 5. Аттрактор системы (2) в сечении Пуанкаре на плоскости динамических переменных (x, u) и его увеличенные фрагменты при значениях параметров $\omega_0 = 6\pi$, $\tau = 3$, $T = 13$, $a = 24$, $\gamma = 0.4$

ласти параметров обладает хаотическим аттрактором, который однако не является однородно гиперболическим.

В настоящей статье вводится в рассмотрение неавтономная кольцевая система, генерирующая гиперболический хаос и допускающая несложную реализацию в виде радиотехнического устройства. В отличие от ранее предложенных систем с гиперболическим хаосом [1], она не содержит автоколебательных элементов, что можно рассматривать как достоинство с точки зрения простоты практической реализации. Схема составлена из двух линейных осцилляторов – фильтров второго порядка, которые включены в кольцевую цепь вместе с активными элементами усилительного типа, обеспечивающими усиление неустойчивости, ее стабилизацию, и надлежащее преобразование фазы колебаний при передаче возбуждения. Принцип работы и математическое описание подробно изложены в разделе 1. В разделе 2 представлены результаты численного анализа системы. Раздел 3 посвящен выводу уравнений для медленно меняющихся амплитуд. Раздел 4 содержит результаты, основанные на численном решении укороченных уравнений.

1. Описание системы

Рассмотрим кольцевую неавтономную систему, состоящую из двух линейных фильтров второго порядка (осцилляторов) и двух нелинейных элементов, блок-схема которой показана на рис. 1. Через x и y обозначены соответственно сигналы от первого и второго осцилляторов. Собственная частота второго осциллятора равна удвоенной частоте первого. Первый нелинейный элемент обладает квадратичной характеристикой в области малых амплитуд и насыщением в области больших амплитуд. На схеме преобразованный сигнал обозначен как $f(x^2)$, вид этой функции указан ниже. На втором нелинейном элементе производится смешение сигнала удвоенной частоты со вспомогательным внешним сигналом $g(t)$, представляющим собой последовательность радиоимпульсов.

Модельные уравнения системы в безразмерных переменных выглядят следующим образом:

$$\begin{aligned} &\frac{d^2x}{dt^2} + \gamma\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = \gamma\frac{d}{dt}yg(t), \\ &\frac{d^2y}{dt^2} + \gamma\frac{dy}{dt} + 4\omega_0^2 y = \gamma\frac{d}{dt}f(x^2). \end{aligned} \tag{1}$$

Здесь γ – коэффициент затухания, собственная частота первого осциллятора рав-

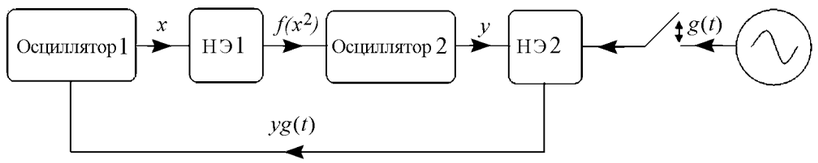


Рис. 1. Блок-схема рассматриваемой системы. НЭ1 – нелинейный элемент 1, НЭ2 – нелинейный элемент 2

Прикладные задачи нелинейной теории колебаний и волн

Изв. вузов «ПНД», т. 18, № 5, 2010 УДК 537.86/.87:530.182

КОГЕРЕНТНЫЙ РЕЗОНАНС И СИНХРОНИЗАЦИЯ СТОХАСТИЧЕСКИХ АВТОКОЛЕБАНИЙ В СИСТЕМЕ ФИТЦХЬЮ–НАГУМО

А.В. Феоктистов, С.В. Астахов, В.С. Анищенко

Методами численного и физического экспериментов исследуются эффекты когерентного резонанса, внешней и взаимной синхронизации индуцированных внешним шумом стохастических колебаний в возбудимой системе ФитцХью–Нагумо. Анализируются свойства аттрактора системы и процессы энергообмена. Обосновывается вывод об автоколебательном характере стохастических колебаний в неавтономной системе ФитцХью–Нагумо.

Ключевые слова: Когерентный резонанс, синхронизация, стохастические автоколебания, система ФитцХью–Нагумо, индуцированные шумом колебания.

Введение

Одной из актуальных проблем современной нелинейной динамики является изучение свойств так называемых возбудимых систем. Интерес к возбудимым системам во многом обусловлен задачами моделирования в нейродинамике [3]. Под действием относительно малого шума в таких системах происходят процессы возбуждения и релаксации, в результате которых возникают незатухающие стохастические колебания. При некоторой (оптимальной) интенсивности шума эти колебания обладают высокой степенью когерентности (регулярности). Данный эффект получил название когерентного резонанса (КР) [1, 2].

Классической моделью возбудимых систем является осциллятор ФитцХью–Нагумо (ФХН) [4,5], представляющий собой упрощенную модель нейрона Ходжкина–Хаксли. Исследованию возбудимых систем, в частности осцилляторов типа ФХН и ансамблей таких осцилляторов, посвящено значительное количество работ (см., например, [6–10]). Был установлен важный факт: стохастические колебания в условиях КР демонстрируют эффект фазо-частотной синхронизации (см., например, [8–10]). Известно, что эффект синхронизации является характерной чертой автоколебательных систем. Возникает принципиальный вопрос – можно ли рассматривать индуцированные шумом колебания возбудимых систем в качестве особого типа автоколебаний, а именно, в качестве стохастических автоколебаний? Чтобы ответить на этот вопрос, необходимо выяснить, в чем состоит отличие стохастических колебаний в

возбудимых системах от стохастических колебаний, возникающих в результате преобразований случайного внешнего воздействия нелинейными системами. Примером последних могут служить вынужденные колебания в пассивных нелинейных контурах, возникающие под действием случайных сил. Установив эти различия, мы сможем понять, почему именно для возбудимых стохастических осцилляторов характерны эффекты синхронизации.

В данной работе методами физического и численного экспериментов проведены детальные исследования явления КР и эффектов внешней и взаимной синхронизации в системе ФХН. Обсуждается вопрос об аттракторе неавтономной системы ФХН, анализируются особенности энергетических характеристик колебаний. Целью исследований является обоснование введения понятия стохастических автоколебаний и, соответственно, стохастических автоколебательных систем. По мнению авторов, этот вопрос является фундаментально важным, так как связан с обобщением понятия автоколебаний по Андронову, введенному применительно к автоколебательным системам [11], на неавтономные системы со случайным воздействием.

1. Исследуемая система и ее математическая модель

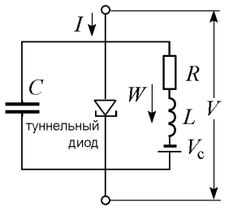


Рис. 1. Принципиальная схема осциллятора ФитцХью–Нагумо. Здесь R – активное сопротивление, L – катушка индуктивности, C – емкость, V – напряжение внешнего воздействия, I – ток внешнего воздействия, W – ток, протекающий через индуктивность, V_c – напряжение смещения

За основу была выбрана оригинальная система, предложенная ФитцХью и Нагумо, изображенная на рис. 1 [4]. В схеме в качестве нелинейного элемента с N-образной вольт-амперной характеристикой используется туннельный диод. Для более стабильной работы мы заменил туннельный диод схемой на операционном усилителе (рис. 2), которая также имеет N-образную вольт-амперную характеристику (рис. 3, см. также [12]) и допускает наиболее простую аппроксимацию при математическом моделировании динамической системы в виде полинома $I(U) = \alpha' U^3 - \gamma' U$, где α', γ' – масштабные коэффициенты.

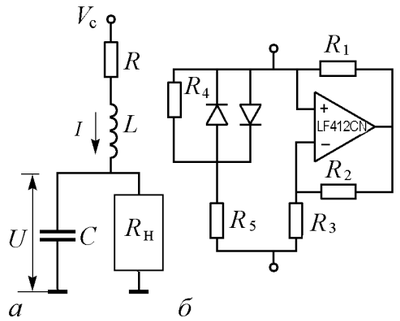


Рис. 2. *а* – используемая в эксперименте схема: $R = = 91$ Ом, $L = 6.8$ мГн, $C = 68$ пФ; *б* – схема нелинейного элемента $R_н$: $R_1 = 1$ кОм, $R_2 = 1$ кОм, $R_3 = 110$ Ом, $R_4 = 5$ кОм, $R_5 = 160$ кОм

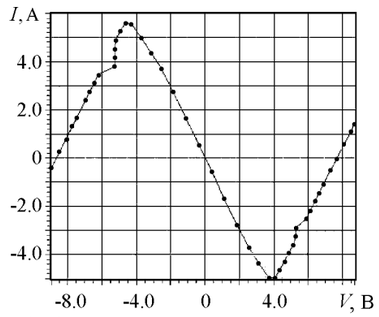


Рис. 3. Экспериментальная N-характеристика элемента $R_н$

подпространства векторов являются касательными к устойчивому и неустойчивому многообразиям траектории. Вектор произвольного малого возмущения может быть представлен в виде линейной комбинации векторов, принадлежащих указанным подпространствам.

В системах с гиперболическим аттрактором существование хаоса математически доказано. Такие системы обладают свойством грубости или структурной устойчивости. Это означает, что структура их фазового пространства и характер динамики нечувствительны к изменению параметров и функций, входящих в описывающие динамику уравнения. Старший показатель Ляпунова гиперболического аттрактора положительный и зависит от параметров системы гладким образом, без провалов в отрицательную область.

До недавнего времени не удавалось найти примеры физических систем, обладающих однородно гиперболическими аттракторами. Некоторые известные примеры – аттракторы Смейла–Вильямса и Плыкина – были представлены лишь искусственными геометрическими моделями с дискретным временем. За хаотическое поведение большинства известных нелинейных диссипативных систем отвечают квазиаттракторы [5,6], которые, в отличие от однородно гиперболических аттракторов, содержат в себе помимо седловых траекторий устойчивые предельные циклы с большим периодом и очень малым бассейном притяжения. Поэтому гиперболический хаос представлялся лишь математической абстракцией.

В неавтономных системах, таких как предложенная в данной работе, можно исследовать аттрактор с помощью отображения Пуанкаре за период внешнего воздействия. Для возникновения аттрактора Смейла–Вильямса необходимо, чтобы существовала некоторая угловая переменная, которая при однократном действии отображения Пуанкаре увеличивалась бы в целое число раз, что сопровождается сжатием фазового объема по остальным переменным [2–5]. В радиотехнических устройствах эта переменная может представлять собой фазу колебаний. Система должна быть устроена так, чтобы фаза подвергалась растягивающему отображению окружности.

Первый пример системы с аттрактором Смейла–Вильямса, основанной на упомянутом выше принципе манипуляции фазой, предложен в работе [7]. Эта система состоит из двух попеременно возбуждающихся осцилляторов ван дер Поля. В статье [8] представлены результаты ее экспериментального исследования. В работе [9] показано, что аттрактор в ее фазовом пространстве однородно гиперболический. Этот и другие примеры систем с однородно гиперболическими аттракторами обсуждаются также в обзоре [1]. Тем не менее, в ряду систем с хаотической динамикой примеры с гиперболическим хаосом остаются редкими и исключительными, так что разработка конкретных систем такого рода и принципов их конструирования представляется интересной и актуальной.

Известный пример кольцевого генератора хаоса – генератор Дмитриева–Кислова [10,4]. В конце 1960-х – начале 1970-х годов в институте радиотехники и электроники АН СССР под руководством В.Я. Кислова была создана кольцевая схема на основе ламп бегущей волны, в которой реализуются хаотические автоколебания. Позднее Дмитриев и Кислов разработали и изучили простую модель-аналог, представляющую собой замкнутую в кольцо систему из нелинейного усилителя, фильтра второго порядка и фильтра первого порядка. Эта модель в некоторой об-

направлениях. Далее, используя метод преобразования координат, можно получить выражения, определяющие фазовые скорости световых волн, распространяющихся в электрооптических кристаллах в произвольном направлении, что не представлено в настоящей работе.

Таким образом, составленное в данной работе структурированное теоретическое описание и алгоритм исследования эффекта Поккельса (на примере кристалла ниобата лития) применимы для изучения электрооптических свойств произвольного кристалла. Отметим, что все полученные в работе результаты не противоречат основам линейного электрооптического эффекта, изложенным в учебной и научной литературе [1–6, 8–10].

Библиографический список

1. *Ярив А., Юх П.* Оптические волны в кристаллах. М.: Мир, 1987.
2. *Мустель Е.П., Парыгин В.Н.* Методы модуляции и сканирования света. М.: Наука, 1970.
3. *Кузьминов Ю.С.* Электрооптический и нелинейно-оптический кристалл ниобата лития. М.: Наука, 1987.
4. Верещагин И.К., Косяченко Л.А., Кокин С.М. Введение в оптоэлектронику. М.: Высшая школа, 1991.
5. *Бережной А.А.* Анизотропия электрооптического взаимодействия в кристаллах LiNbO3 // Оптика и спектроскопия. 2002. Т. 92, № 3. С. 503.
6. *Ньюнхем Р.Э.* Свойства материалов. Анизотропия, симметрия, структура. Ижевск: РХД, 2007.
7. *Григорьев И.С., Мейлихов Е.З.* Физические величины. Справочник. М.: Энергоатомиздат, 1991.
8. *Байбородин Ю.В., Гаража С.А.* Электрооптический эффект в кристаллах. М.: Машиностроение, 1967.
9. *Желудев И.С.* Электрооптические явления в кристаллах // Успехи физических наук. 1969. Т. 88, вып. 2. С. 253.
10. *Сонин А.С., Василевская А.С.* Электрооптические кристаллы. М.: Атомиздат, 1971.

Саратовский государственный технический университет

Поступила в редакцию 13.05.2010

WAVE EQUATIONS FOR THE POCKELS EFFECT DESCRIPTION IN CRYSTALS AND THEIR ANALYSIS ON THE EXAMPLE OF LITHIUM NIOBATE

Yu.A. Zyuryukin, M.V. Pavlova, D.R. Drevko

Theoretical description of the Pockels effect is offered in which statement of a problem in the form of Maxwell equations allows to go on to wave equations directly and to find their solutions. Analytical expressions determining phase velocities and polarization

3. Внешняя синхронизация системы ФитцХью–Нагумо гармоническим сигналом в режиме когерентного резонанса

С целью синхронизации колебаний внешний гармонический сигнал вводился так, как это показано на рис. 8. Уровень шума соответствовал режиму когерентного резонанса. С целью наблюдения эффекта синхронизации проводились измерения спектра мощности колебаний $S_i(f)$ при вариации амплитуды внешнего сигнала для постоянной величины расстройки по частоте $f_{ex} = f_0 + \Delta$, ($\Delta = 1450$ Гц) и при вариации частоты f_{ex} при фиксированной амплитуде $A_{ex} = 510$ мВ. Результаты представлены на рис. 9 и рис. 10. Как видно из рис. 9 при достижении амплитудой значения $A_{ex} = 900$ мВ наблюдается захват частоты, а именно: спектр колебаний системы ФХН смещается вправо и совпадает с частотой воздействующего сигнала.

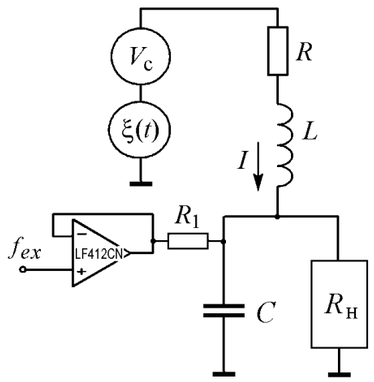


Рис. 8. Схема установки для исследования внешней синхронизации гармоническим сигналом $A_{ex}\sin(f_{ex}t)$. Здесь значения параметров элементов цепи: $R = 91$ Ом, $R_1 = 8$ кОм, $L = 6.8 \cdot 10^{-3}$ Гн, $C = 6.8 \cdot 10^{-11}$ Ф, $V_c = 7.2$ В, $\alpha' = 2.22 \cdot 10^{-5}$ Ом$^{-3}$, $\gamma' = 1.61 \cdot 10^{-3}$ Ом$^{-1}$

Рис. 10 иллюстрирует эффект захвата частоты при вариации расстройки Δ и фиксированном значении амплитуды $A_{ex} = 510$ мВ. Результаты эффекта захвата частоты при изменении частоты сигнала синхронизации рис. 10 с использованием чисел вращения представлены на рис. 11, который иллюстрирует наличие конечной области синхронизации $f_{ex}/f_0 = 1$ (на основном тоне) для фиксированной амплитуды внешнего сигнала $A_{ex} = 510$ мВ. Эффект внешней синхронизации был подтвержден компьютерным экспериментом с неавтономной системой ФХН, для которой уравнения в безразмерной форме принимали вид

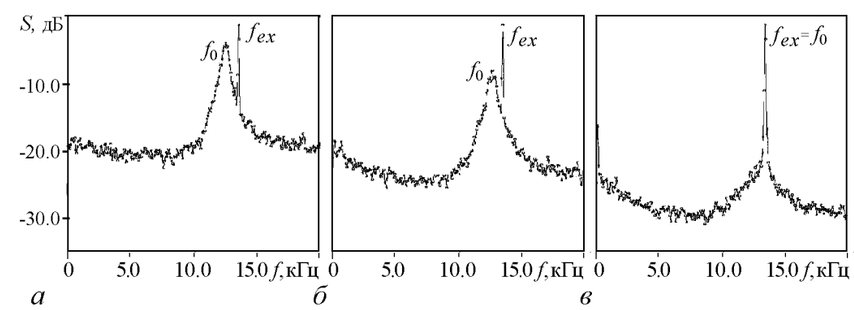


Рис. 9. Эффект захвата частоты осциллятора ФХН внешней силой $A_{ex}\sin(f_{ex}t)$ при постоянной расстройке $\Delta = f_0 - f_{ex} = 1450$ Гц, $f_0 = 12550$ Гц с увеличением амплитуды A_{ex}: *а* – 400 мВ, *б* – 500 мВ, *в* – 900 мВ

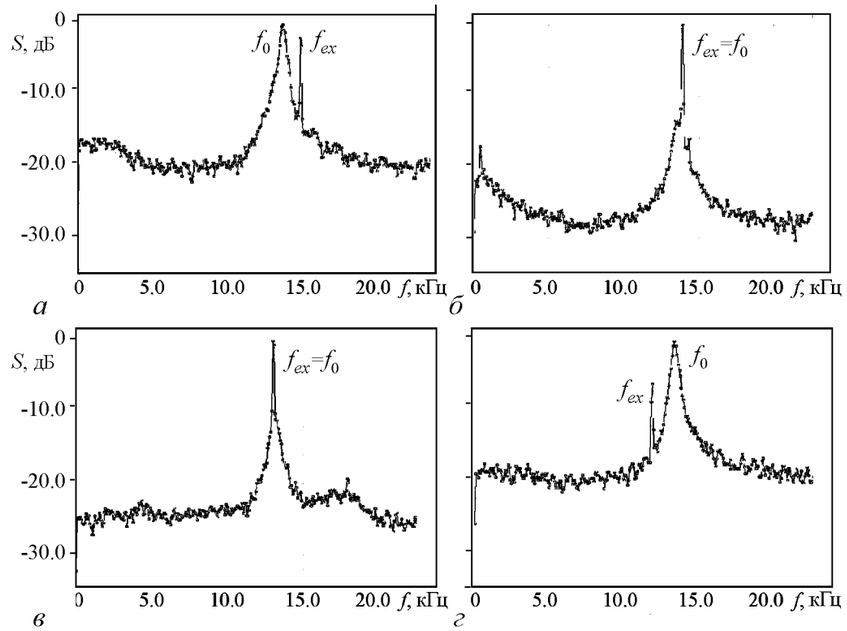


Рис. 10. Эффект захвата частоты в системе ФХН при вариации частоты внешнего сигнала; *а* – отсутствие захвата частоты ($f_{ex} = 14800$ Гц); *б* – эффект захвата частоты, при котором спектральная линия колебаний системы смещается вправо и совпадает с частотой f_{ex} ($f_{ex} = 13950$ Гц); *в* – захват частоты в области синхронизации, когда частота системы ФХН следует за частотой f_{ex} ($f_{ex} = 13050$ Гц); *г* – выход из области синхронизации ($f_{ex} = 11700$ Гц)

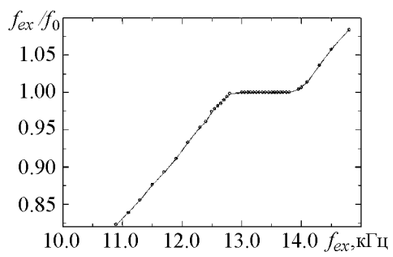


Рис. 11. Экспериментальная зависимость отношения частот f_{ex}/f_0 при вариации частоты внешнего сигнала f_{ex} при фиксированной амплитуде $A_{ex} = 510$ мВ

$$\begin{aligned} \dot{x} &= a(b - cx - y) + \sqrt{2D}\eta(t) + A_{ex}\sin(f_{ex}t), \\ \dot{y} &= g[x - F(y)], \quad F(y) = \alpha y^3 - \gamma y \end{aligned} \tag{4}$$

для значений параметров: $a = 10^{-4}$, $b = 4.395$, $c = 100$, $D = 5 \cdot 10^{-9}\langle A_\xi^2\rangle$, $\alpha = 2.22 \cdot 10^{-5}$, $g = 10^4$, $\gamma = 1.6 \cdot 10^{-3}$, соответствующих экспериментальным значениям, указанным на рис. 8. Результаты расчетов практически полностью повторяют данные физического эксперимента и в статье не приведены.

Поскольку $2\left(\Delta^*\right)^2 \ll 1$, то окончательно выражения (47) примут вид

$$\upsilon_1^2 = c^2\left(\frac{1}{n_o^2} + r_{22}E_y^{\text{ст}} - \frac{\left(r_{51}E_y^{\text{ст}}\right)^2}{\dfrac{1}{n_o^2} - \dfrac{1}{n_e^2} + r_{22}E_y^{\text{ст}}}\right), \tag{48}$$

$$\upsilon_2^2 = c^2\left(\frac{1}{n_e^2} + \frac{\left(r_{51}E_y^{\text{ст}}\right)^2}{\dfrac{1}{n_o^2} - \dfrac{1}{n_e^2} + r_{22}E_y^{\text{ст}}}\right). \tag{49}$$

Здесь фактически мы сталкиваемся как с линейным эффектом (для волны υ_1), так и с квадратичным (для обеих волн). Направления поляризации y' и z' световых волн, распространяющихся в кристалле вдоль оси x под действием поля $E_y^{\text{ст}}$ со скоростями υ_1 и υ_2, соответственно, определяются из уравнений (45), (46) с учетом решений (48), (49), следующим выражением:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{D_z^\circ}{D_y^\circ} = \frac{\varepsilon_{||}r_{51}E_y^{\text{ст}}}{1 - \dfrac{\upsilon_1^2}{\left(\upsilon_z^\circ\right)^2}} = \frac{r_{51}E_y^{\text{ст}}}{\dfrac{1}{n_e^2} - \dfrac{1}{n_o^2} - r_{22}E_y^{\text{ст}} + \dfrac{\left(r_{51}E_y^{\text{ст}}\right)^2}{\dfrac{1}{n_o^2} - \dfrac{1}{n_e^2} + r_{22}E_y^{\text{ст}}}}, \tag{50}$$

где α – угол, определяющий индуцированные направления поляризации y' и z' световых волн, относительно кристаллофизических направлений y и z. Даже для умеренно сильных электрических полей: при $E_y = 10^6$ В/м, $\alpha = -0.11°$. Тогда для данной геометрии взаимодействия светового пучка (распространяется по оси x) и внешнего электрического поля $E_y^{\text{ст}}$ волна с исходной поляризацией по оси y будет распространяться в кристалле со скоростью υ_1, а волна с поляризацией по оси z – со скоростью υ_2.

Итак, как видно из проведенного анализа волновых уравнений для кристалла ниобата лития, для обеспечения фазовой модуляции, когда необходимо максимальное изменение показателя преломления для данной линейной поляризации, наиболее оптимальное проявление достигается в условиях реализации поперечного эффекта Поккельса (электрическое поле создается по направлению оптической оси).

Заключение

Для количественной оценки степени влияния внешнего статического электрического поля на распространение светового пучка в кристаллах предложено теоретическое описание эффекта Поккельса в форме уравнений Максвелла на примере кристалла ниобата лития. Анализ получаемых в этом случае волновых уравнений в полной мере позволяет оценить проявление электрооптического эффекта в конкретном кристалле, то есть определить фазовые скорости и поляризации плоских световых волн, распространяющихся в кристалле в главных кристаллофизических направлениях для различных случаев влияния внешнего электрического поля в данных

2.3. Электрическое поле приложено вдоль оси x, световой пучок распространяется по направлению y. В этом случае из уравнений Максвелла следуют уравнения:

$$\frac{\partial^2 D_z}{\partial y^2} - \frac{1}{(\upsilon_z^\circ)^2}\frac{\partial^2 D_z}{\partial t^2} = -\frac{r_{51}E_x^{\text{ст}}}{\eta_{zz}^\circ}\frac{\partial^2 D_x}{\partial y^2}, \tag{28}$$

$$\frac{\partial^2 D_x}{\partial y^2} - \frac{1}{(\upsilon_x^\circ)^2}\frac{\partial^2 D_x}{\partial t^2} = -\frac{r_{51}E_x^{\text{ст}}}{\eta_{xx}^\circ}\frac{\partial^2 D_z}{\partial y^2}, \tag{29}$$

где $(\upsilon_x^\circ)^2 = c^2/n_o^2$, $(\upsilon_z^\circ)^2 = c^2/n_e^2$. Используем подстановку Эйлера и приходим к системе уравнений

$$\frac{\varepsilon_{||} r_{51}E_x^{\text{ст}}}{\upsilon^2}D_x^\circ - \left(\frac{1}{(\upsilon_z^\circ)^2} - \frac{1}{\upsilon^2}\right)D_z^\circ = 0, \tag{30}$$

$$\left(\frac{1}{(\upsilon_x^\circ)^2} - \frac{1}{\upsilon^2}\right)D_x^\circ - \frac{\varepsilon_\perp r_{51}E_x^{\text{ст}}}{\upsilon^2}D_z^\circ = 0. \tag{31}$$

Из равенства нулю определителя данной системы уравнений получаем уравнение относительно искомой скорости υ^2, решения которого определяются выражением

$$\upsilon_{1,2}^2 = \frac{(\upsilon_x^\circ)^2 + (\upsilon_z^\circ)^2}{2} \pm \frac{(\upsilon_x^\circ)^2 - (\upsilon_z^\circ)^2}{2}\sqrt{1 + \frac{4\,(\upsilon_x^\circ)^2\,(\upsilon_z^\circ)^2}{\left((\upsilon_x^\circ)^2 - (\upsilon_z^\circ)^2\right)^2}\varepsilon_\perp\varepsilon_{||}\,(r_{51}E_x^{\text{ст}})^2}. \tag{32}$$

Введем следующее обозначение:

$$\Delta^2 = \frac{2\,(\upsilon_x^\circ)^2\,(\upsilon_z^\circ)^2}{\left((\upsilon_x^\circ)^2 - (\upsilon_z^\circ)^2\right)^2}\varepsilon_\perp\varepsilon_{||}\,(r_{51}E_x^{\text{ст}})^2 = 2\left(\frac{n_o^2 n_e^2 r_{51}E_x^{\text{ст}}}{n_e^2 - n_o^2}\right)^2, \tag{33}$$

тогда выражение (32), определяющее искомую скорость, примет вид

$$\upsilon_{1,2}^2 = \frac{(\upsilon_x^\circ)^2 + (\upsilon_z^\circ)^2}{2} \pm \frac{(\upsilon_x^\circ)^2 - (\upsilon_z^\circ)^2}{2}\sqrt{1 + 2\Delta^2}. \tag{34}$$

Оценим величину $\left(2\Delta^2\right)$, используя значения, соответствующие длине волны $\lambda = 0.633$ мкм [7]. Получили, что $\left(2\Delta^2\right) = 1.4 \cdot 10^{-5}$ при $E_x^{\text{ст}} = 10^6$ В/м. Видим, что $2\Delta^2 \ll 1$, тогда можно считать, что $\sqrt{1 + 2\Delta^2} \approx 1 + \Delta^2$, и в этом случае получаем выражения для фазовых скоростей в виде

$$\upsilon_1^2 = c^2\left(\frac{1}{n_o^2} + \frac{n_e^2\,(r_{51}E_x^{\text{ст}})^2}{\left(\frac{n_o}{n_e}\right)^2 - 1}\right), \tag{35}$$

$$\upsilon_2^2 = c^2\left(\frac{1}{n_e^2} + \frac{n_o^2\,(r_{51}E_x^{\text{ст}})^2}{\left(\frac{n_e}{n_o}\right)^2 - 1}\right). \tag{36}$$

5. Обоснование автоколебательного характера стохастических колебаний в системе ФХН

Данные экспериментов, изложенные выше, свидетельствуют, что несмотря на то, что колебания в системе ФХН возникают и поддерживаются только при наличии внешнего шумового сигнала, они характеризуются полным набором свойств, присущих автоколебательным процессам. Обсудим это более детально.

Вначале рассмотрим вопрос об аттракторе режима колебаний в условиях когерентного резонанса. Определение аттрактора неавтономной системы введено в работе [13], где показано, что об аттракторе в этом случае необходимо говорить, привлекая понятие предельного множества в функциональном (гильбертовом) пространстве применительно ко всем возможным решениям $\mathbf{x} = f(\mathbf{x}_0, t)$. К сожалению, не существует возможности геометрического изображения подобного предельного множества. Можно использовать метод проектирования решений на плоскость фазовых переменных. Эта проекция будет зависеть от времени наблюдения решения. Однако в случае наличия аттрактора в функциональном пространстве его проекция на плоскость фазовых переменных системы ФХН практически не будет видоизменяться в достаточно длительном временном интервале. Экспериментально этот факт подтверждается. На рис. 14, *а* представлена проекция предельного множества на плоскость переменных x и y, вид которого напоминает слабо зашумленный периодический режим. Рис. 14, *б* иллюстрирует факт независимости от начальных данных предельного множества фазовых траекторий в проекции на плоскость. Вертикальные линии являются фазовыми траекториями, отвечающими различным начальным условиям из области притяжения аттрактора. Эксперименты показали, что никаких других предельных множеств в конечной окрестности аттрактора (см. рис. 14, *а*) система ФХН не имеет.

На основании вышеприведенных результатов можно сделать вывод о существовании аттрактора у системы ФХН. Однако наличие аттрактора еще не доказывает автоколебательный характер процесса. Для этого необходимо обсудить проблему подкачки энергии в систему. С этой целью рассмотрим выражение для дивергенции векторного поля $\mathbf{G} = (\dot{x}, \dot{y})$ системы (2)

$$\operatorname{div}\mathbf{G} = \frac{d\dot{x}}{dx} + \frac{d\dot{y}}{dy} = (\gamma g - ac) - 3\alpha g y^2. \tag{8}$$

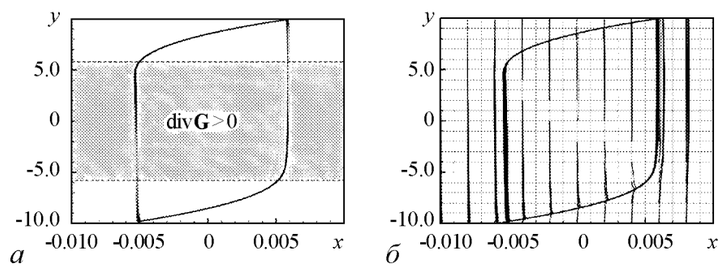


Рис. 14. Проекция аттрактора системы ФХН на плоскость переменных, отвечающая времени интегрирования $\tau = 1000$ (*а*); результат интегрирования с различными начальными данными, свидетельствующий о наличии области притяжения аттрактора (*б*)

Дивергенция векторного поля $\mathbf{G}$ в линейном приближении характеризует наличие подкачки ($\operatorname{div}\mathbf{G} > 0$) или диссипации ($\operatorname{div}\mathbf{G} < 0$) энергии. Как видно из выражения (8), $\operatorname{div}\mathbf{G}$ является функцией переменной y и может изменять знак. Из (8) следует, что $\operatorname{div}\mathbf{G} = 0$ при $y^2 = (\gamma g - ac)/3\alpha g$. При значениях параметров, отвечающих рис. 14, *а*, получаем

$$\begin{aligned} &\operatorname{div}\mathbf{G} > 0, \quad \text{если} \quad |y| \le 5.16, \\ &\operatorname{div}\mathbf{G} < 0, \quad \text{если} \quad |y| > 5.16. \end{aligned} \tag{9}$$

На рис. 14, *а* выделена область значений координаты y, в которой дивергенция векторного поля положительна. Это означает, что в этой области имеет место подкачка энергии от источника. В областях, где $\operatorname{div}\mathbf{G} < 0$ (для $|y| > 5.16$), полученная энергия рассеивается.

С физической точки зрения условия подкачки энергии выполняются, когда начальное положение рабочей точки отвечает значениям падающего участка характеристики нелинейного элемента $R_{\text{н}}$ (см. рис. 3). На этом участке $-4.0 \le U \le 4.0$ В система характеризуется отрицательным сопротивлением и энергия источника увеличивает энергию колебаний.

Приведенные рассуждения свидетельствуют о том, что под действием шума система ФХН поддерживает колебательный режим, осуществляя синхронную нелинейную подкачку энергии от источника. Расчеты и измерения подтвердили важный факт: мощность колебательного процесса, которая пропорциональна $x^2(t)$, существенно превышает мощность источника шума. В численных экспериментах это превышение составляло три и более порядков в зависимости от уровня порога возбуждения системы ФХН. В физическом эксперименте мы получили превышение примерно в 20 раз. Это отличие вполне объяснимо, так как в физическом эксперименте подключение измерительных приборов к цепи ФХН шунтировало схему и приводило к расстройке управляющих параметров.

Выводы

Таким образом, приведенные выше результаты позволяют сделать важный вывод: неавтономный режим функционирования системы ФХН реализует независимо от начальных условий автоколебательный процесс, преобразуя энергию источника в режим незатухающих почти периодических колебаний. Роль шума заключается в том, что под действием флуктуаций система «выбивается» из устойчивого состояния равновесия в область фазового пространства, где включается нелинейный процесс подкачки энергии, приводящий к автоколебаниям.

Теперь становятся понятными результаты экспериментов по анализу внешней и взаимной синхронизации. Хорошо известно, что синхронизация возможна исключительно в автоколебательных системах. Наличие эффекта синхронизации как при подаче внешнего гармонического сигнала на одиночную систему ФХН, так и при взаимодействии двух связанных систем убедительно доказывает автоколебательный характер процессов в этих системах. В связи с изложенным мы можем констатировать: индуцированные шумом колебания в нелинейных диссипативных системах,

Далее из алгебраической системы уравнений (20)–(21), с учетом решений (22) и (23), определяем направления поляризации волн в кристалле:

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{D_y^\circ}{D_x^\circ} = \frac{\varepsilon_\perp r_{22} E_x^{\text{ст}}}{\upsilon_1^2\left(\dfrac{1}{\upsilon_1^2} - \dfrac{1}{\left(\upsilon_{x,y}^\circ\right)^2}\right)} = \frac{\varepsilon_\perp r_{22} E_x^{\text{ст}}}{1 - \dfrac{\upsilon_1^2}{\left(\upsilon_{x,y}^\circ\right)^2}} = 1. \tag{24}$$

Таким образом, при распространении светового пучка вдоль оси z электрическое поле, приложенное по оси x ($E_x^{\text{ст}}$), вызывает электрооптический эффект для световых волн, поляризованных в направлениях x' и y', причем оси x' и y' повернуты на угол $\beta = 45^\circ$ относительно осей x и y кристаллической структуры, соответственно (данный случай представлен на рисунке). Скорости рассматриваемых волн, находящихся под влиянием, например положительного статического поля $E_x^{\text{ст}}$, различны: одна волна («медленная») со скоростью υ_1 тормозится внешним электрическим полем, другая волна («быстрая») со скоростью υ_2 им ускоряется. При смене знака поля $E_x^{\text{ст}}$ ситуация меняется на противоположную. Следовательно, модулирующее электрическое поле $E_x^{\text{ст}}$ может изменять состояние поляризации падающего пучка и обеспечивает одинаковый (но не максимальный) фазовый набег для волн, поляризованных в направлениях x' и y' и распространяющихся вдоль оптической оси z, в соответствии с выражением:

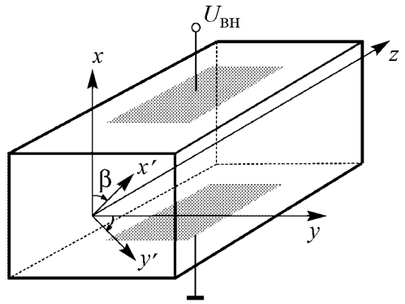


Рис. Геометрия поперечного электрооптического эффекта для случая, когда внешнее поле с разностью потенциалов $U_{\text{вн}}$ приложено по оси x ($E_x^{\text{ст}}$), а световой пучок распространяется в направлении оптической оси z

$$\Delta\varphi_{x'} = \Delta\varphi_{y'} = n_o^3 r_{22} \frac{E_x^{\text{ст}}}{2} kl. \tag{25}$$

2.2. Электрическое поле приложено вдоль оси x, и световой пучок распространяется по x . Получаем волновые уравнения в виде:

$$\frac{\partial^2 D_z}{\partial x^2} - \frac{1}{\left(\upsilon_z^\circ\right)^2}\frac{\partial^2 D_z}{\partial t^2} = 0, \tag{26}$$

$$\frac{\partial^2 D_y}{\partial x^2} - \frac{1}{\left(\upsilon_y^\circ\right)^2}\frac{\partial^2 D_y}{\partial t^2} = 0, \tag{27}$$

где $\left(\upsilon_z^\circ\right)^2 = c^2/n_e^2$, $\left(\upsilon_y^\circ\right)^2 = c^2/n_o^2$ – фазовые скорости необыкновенной волны, поляризованной по z, и обыкновенной волны, поляризованной по y, соответственно, в отсутствие эффекта Поккельса.

Таким образом, при заданной конфигурации приложения внешнего электрического поля $E_x^{\text{ст}}$ и распространения светового пучка по x электрооптический эффект не проявляется.

Здесь μ – магнитная проницаемость среды, μ_0 – магнитная постоянная.

Подставим в уравнения (8) выражения (6) для компонент напряженности электрического поля волны, распространяющейся в кристалле $LiNbO_3$ при наличии эффекта Поккельса. Уравнения примут вид

$$\langle r_{51}E_x^{\text{ст}}\rangle \frac{\partial D_x}{\partial y} + \left\langle r_{51}E_y^{\text{ст}}\right\rangle \frac{\partial D_y}{\partial y} + \langle \eta_{zz}^{\circ} + r_{33}E_z^{\text{ст}}\rangle \frac{\partial D_z}{\partial y} - \langle(-r_{22})\,E_x^{\text{ст}}\rangle \frac{\partial D_x}{\partial z} -$$
$$- \left\langle \eta_{yy}^{\circ} + r_{22}E_y^{\text{ст}} + r_{13}E_z^{\text{ст}}\right\rangle \frac{\partial D_y}{\partial z} - \left\langle r_{51}E_y^{\text{ст}}\right\rangle \frac{\partial D_z}{\partial z} = -\mu\mu_0\varepsilon_0 \frac{\partial H_x}{\partial t};$$

$$\left\langle \eta_{xx}^{\circ} + (-r_{22})\,E_y^{\text{ст}} + r_{13}E_z^{\text{ст}}\right\rangle \frac{\partial D_x}{\partial z} + \langle(-r_{22})\,E_x^{\text{ст}}\rangle \frac{\partial D_y}{\partial z} + \langle r_{51}E_x^{\text{ст}}\rangle \frac{\partial D_z}{\partial z} -$$
$$- \langle r_{51}E_x^{\text{ст}}\rangle \frac{\partial D_x}{\partial x} - \left\langle r_{51}E_y^{\text{ст}}\right\rangle \frac{\partial D_y}{\partial x} - \langle \eta_{zz}^{\circ} + r_{33}E_z^{\text{ст}}\rangle \frac{\partial D_z}{\partial x} = -\mu\mu_0\varepsilon_0 \frac{\partial H_y}{\partial t}; \qquad (9)$$

$$\langle(-r_{22})\,E_x^{\text{ст}}\rangle \frac{\partial D_x}{\partial x} + \left\langle \eta_{yy}^{\circ} + r_{22}E_y^{\text{ст}} + r_{13}E_z^{\text{ст}}\right\rangle \frac{\partial D_y}{\partial x} + \left\langle r_{51}E_y^{\text{ст}}\right\rangle \frac{\partial D_z}{\partial x} -$$
$$- \left\langle \eta_{xx}^{\circ} + (-r_{22})\,E_y^{\text{ст}} + r_{13}E_z^{\text{ст}}\right\rangle \frac{\partial D_x}{\partial y} - \langle(-r_{22})\,E_x^{\text{ст}}\rangle \frac{\partial D_y}{\partial y} - \langle r_{51}E_x^{\text{ст}}\rangle \frac{\partial D_z}{\partial y} =$$
$$= -\mu\mu_0\varepsilon_0 \frac{\partial H_z}{\partial t}.$$

Итак, мы получили 6 скалярных уравнений Максвелла (7), (9) относительно искомых компонент электрического смещенияD_x,D_y,D_z и напряженности магнитного поля H_x,H_y,H_z плоской световой волны с учетом эффекта Поккельса для $LiNbO_3$. Далее перейдем к волновым уравнениям, исключив H_x,H_y,H_z из уравнений (7) и (9), и определим их решения.

2. Волновые уравнения для исследования эффекта Поккельса в кристалле ниобата лития и их анализ

1.1. Электрическое поле приложено вдоль оси z ($E_z^{\text{ст}} \neq 0$), а световой пучок распространяется по оси x (или y). В этом случае из уравнений Максвелла (7)–(9) следуют две системы уравнений, которые преобразуются к уравнениям, по виду представляющим собой волновые уравнения

$$\frac{\partial^2 D_z}{\partial x^2} - \left(\frac{\mu\mu_0\varepsilon_0}{\eta_{zz}^{\circ} + r_{33}E_z^{\text{ст}}}\right)\frac{\partial^2 D_z}{\partial t^2} = 0, \qquad (10)$$

$$\frac{\partial^2 D_y}{\partial x^2} - \left(\frac{\mu\mu_0\varepsilon_0}{\eta_{yy}^{\circ} + r_{13}E_z^{\text{ст}}}\right)\frac{\partial^2 D_y}{\partial t^2} = 0, \qquad (11)$$

где $\upsilon_z^2 = (\eta_{zz}^{\circ} + r_{33}E_z^{\text{ст}})/(\mu\mu_0\varepsilon_0) = c^2\left(1/n_e^2 + r_{33}E_z^{\text{ст}}\right)$ – фазовая скорость необыкновенной волны, поляризованной вдоль оси z и находящейся под влиянием поля $E_z^{\text{ст}}$, $\upsilon_y^2 = (\eta_{yy}^{\circ} + r_{13}E_z^{\text{ст}})/(\mu\mu_0\varepsilon_0) = c^2\left(1/n_o^2 + r_{13}E_z^{\text{ст}}\right)$ – фазовая скорость обыкновенной волны, поляризованной вдоль y и находящейся под влиянием поля $E_z^{\text{ст}}$. При

Прикладные задачи нелинейной теории колебаний и волн

Изв. вузов «ПНД», т. 18, № 5, 2010 УДК 517.9

ОСОБЕННОСТИ МУЛЬТИСТАБИЛЬНЫХ РЕЖИМОВ НЕСИММЕТРИЧНО СВЯЗАННЫХ ЛОГИСТИЧЕСКИХ ОТОБРАЖЕНИЙ

М.В. Поздняков, А.В. Савин

Исследуется явление мультистабильности в несимметрично связанных логистических отображениях. Выявлена эволюция областей существования мультистабильности в пространстве параметров, а также бассейнов притяжения сосуществующих режимов при введении асимметрии связи.

Ключевые слова: Мультистабильность, удвоения периода.

Введение

Как хорошо известно, многие динамические системы демонстрируют мультистабильность – сосуществование нескольких (а иногда очень многих) аттракторов при одних значениях параметров [1–4]. При этом реализация какого-либо аттрактора в конкретном натурном либо численном эксперименте определяется выбором начальных условий, соответствующих бассейну притяжения этого аттрактора. Помимо практического интереса к исследованию мультистабильности, вызванного необходимостью оценить типичность исследуемого режима при произвольном выборе начальных условий, такое исследование является важной теоретической задачей, позволяющей углубить представления о вариантах эволюции различных динамических режимов. Отметим, что интерес к явлению мультистабильности не ослабевает (см., например, обзорную работу [5]).

Особый тип мультистабильности, исследуемый наиболее активно, возникает в связанных системах и выражается в сосуществовании аттракторов, для которых колебания различаются сдвигом фаз между подсистемами (фазовая мультистабильность) [3,4,6]. В системах с дискретным временем в этом случае сосуществуют синхронные (соответствующие идентичной динамике подсистем) и несинхронные аттракторы. Устройству бассейнов притяжения синхронного и несинхронного аттракторов, а также закономерностям появления и эволюции несинхронных аттракторов в

случае симметрично связанных систем с удвоениями периода посвящена обширная литература (см., например, [2–10]). В то же время явления, происходящие при введении несимметричной связи, изучены существенно меньше. Целью настоящей статьи и является некоторое восполнение этого пробела путем исследования эволюции как областей в пространстве параметров, в которых реализуется мультистабильность, так и бассейнов притяжения соответствующих аттракторов при отстройке связи от симметричной.

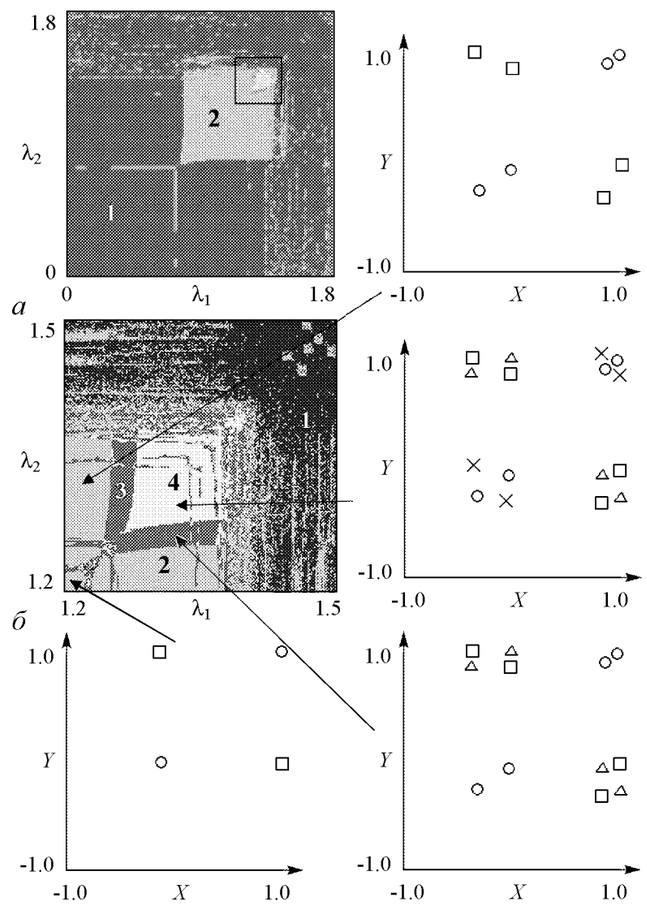


Рис. 1. Карта мультистабильности (*а*) и ее увеличенный фрагмент (*б*) системы (1) в симметричном случае ($\varepsilon = 0.01$; $\delta = 0$). Цифрами обозначено количество сосуществующих в каждой области аттракторов, сами аттракторы в некоторых точках карты приведены на выносных рисунках; различные символы (кружки, квадратики, треугольники и крестики) обозначают положение элементов различных аттракторов

шем в виде

$$\begin{aligned} &\eta_{xx} = \eta^{\circ}_{xx} + \Delta\eta_{xx}; \quad \eta_{xy} = \Delta\eta_{xy}; \quad \eta_{xz} = \Delta\eta_{xz}; \\ &\eta_{yx} = \Delta\eta_{yx}; \quad \eta_{yy} = \eta^{\circ}_{yy} + \Delta\eta_{yy}; \quad \eta_{yz} = \Delta\eta_{yz}; \\ &\eta_{zx} = \Delta\eta_{zx}; \quad \eta_{zy} = \Delta\eta_{zy}; \quad \eta_{zz} = \eta^{\circ}_{zz} + \Delta\eta_{zz}. \end{aligned} \tag{3}$$

Поправки к компонентам тензора непроницаемости $\Delta\eta_{ij}$, обусловленные эффектом Поккельса, в общем виде определяются выражениями

$$\begin{aligned} \Delta\eta_{xx} &= r_{11}E_x^{\text{ст}} + r_{12}E_y^{\text{ст}} + r_{13}E_z^{\text{ст}}, \\ \Delta\eta_{xy} &= \Delta\eta_{yx} = r_{61}E_x^{\text{ст}} + r_{62}E_y^{\text{ст}} + r_{63}E_z^{\text{ст}}, \\ \Delta\eta_{xz} &= \Delta\eta_{zx} = r_{51}E_x^{\text{ст}} + r_{52}E_y^{\text{ст}} + r_{53}E_z^{\text{ст}}, \\ \Delta\eta_{yy} &= r_{21}E_x^{\text{ст}} + r_{22}E_y^{\text{ст}} + r_{23}E_z^{\text{ст}}, \\ \Delta\eta_{yz} &= \Delta\eta_{zy} = r_{41}E_x^{\text{ст}} + r_{42}E_y^{\text{ст}} + r_{43}E_z^{\text{ст}}, \\ \Delta\eta_{zz} &= r_{31}E_x^{\text{ст}} + r_{32}E_y^{\text{ст}} + r_{33}E_z^{\text{ст}}. \end{aligned} \tag{4}$$

Для кристалла *ниобата лития* ($LiNbO_3$) поправки к тензору непроницаемости принимают вид

$$\begin{aligned} &\Delta\eta_{xx} = (-r_{22})\,E_y^{\text{ст}} + r_{13}E_z^{\text{ст}}; \quad \Delta\eta_{xy} = \Delta\eta_{yx} = (-r_{22})\,E_x^{\text{ст}}; \\ &\Delta\eta_{xz} = \Delta\eta_{zx} = r_{51}E_x^{\text{ст}}; \quad \Delta\eta_{yy} = r_{22}E_y^{\text{ст}} + r_{13}E_z^{\text{ст}}; \\ &\Delta\eta_{yz} = \Delta\eta_{zy} = r_{51}E_y^{\text{ст}}; \quad \Delta\eta_{zz} = r_{33}E_z^{\text{ст}}. \end{aligned} \tag{5}$$

Здесь $r_{13} = 8.6 \cdot 10^{-12}$ м/В, $r_{33} = 30.8 \cdot 10^{-12}$ м/В, $r_{22} = 3.4 \cdot 10^{-12}$ м/В, $r_{51} = 28 \cdot 10^{-12}$ м/В – значения электрооптических коэффициентов при длине световой волны $\lambda = 0.633$ мкм [7]. Тогда компоненты вектора напряженности $\mathbf{E}$ электрического поля плоской световой волны, распространяющейся в данном кристалле, с учетом эффекта Поккельса запишутся, согласно выражениям (2), в виде

$$\begin{aligned} E_x &= \frac{1}{\varepsilon_0}\left(\left\langle\eta^{\circ}_{xx} + (-r_{22})\,E_y^{\text{ст}} + r_{13}E_z^{\text{ст}}\right\rangle D_x + \left\langle(-r_{22})\,E_x^{\text{ст}}\right\rangle D_y + \left\langle r_{51}E_x^{\text{ст}}\right\rangle D_z\right), \\ E_y &= \frac{1}{\varepsilon_0}\left(\left\langle(-r_{22})\,E_x^{\text{ст}}\right\rangle D_x + \left\langle\eta^{\circ}_{yy} + r_{22}E_y^{\text{ст}} + r_{13}E_z^{\text{ст}}\right\rangle D_y + \left\langle r_{51}E_y^{\text{ст}}\right\rangle D_z\right), \\ E_z &= \frac{1}{\varepsilon_0}\left(\left\langle r_{51}E_x^{\text{ст}}\right\rangle D_x + \left\langle r_{51}E_y^{\text{ст}}\right\rangle D_y + \left\langle\eta^{\circ}_{zz} + r_{33}E_z^{\text{ст}}\right\rangle D_z\right). \end{aligned} \tag{6}$$

Обратимся теперь к системе однородных уравнений Максвелла и запишем первые два уравнения в декартовой системе координат

$$\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} = \frac{\partial D_x}{\partial t}; \quad \frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} = \frac{\partial D_y}{\partial t}; \quad \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} = \frac{\partial D_z}{\partial t}, \tag{7}$$

$$\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} = -\mu\mu_0\frac{\partial H_x}{\partial t}; \quad \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} = -\mu\mu_0\frac{\partial H_y}{\partial t}; \quad \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = -\mu\mu_0\frac{\partial H_z}{\partial t}. \tag{8}$$

Морозова (Малюгина) Мария Александровна – родилась в Саратове (1977). Окончила Высший колледж прикладных наук Саратовского государственного университета им. Н.Г. Чернышевского (1999), защитила диссертацию на соискание учёной степени кандидата физ.-мат. наук по теме «Нелинейные магнитостатические волны в связанных ферромагнитных структурах» (2004). В настоящее время занимает должность доцента на кафедре нелинейной физики факультета нелинейных процессов СГУ, имеет ученое звание доцента по этой кафедре. Область научных интересов – волновые явления в тонких ферромагнитных пленках, физика магнитных явлений, нелинейные процессы в ферромагнетиках. Имеет ряд публикаций по данной тематике.

410012 Саратов, ул. Астраханская, 83
Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского
E-mail: maluginama@sgu.ru

Шараевский Юрий Павлович – родился в 1942 году в Николаевске на Амуре Хабаровского края. Доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой нелинейной физики Саратовского государственного университета. Работал в области электроники и радиофизики сверхвысоких частот, в настоящее время область научный интересов – нелинейная динамика волновых процессов в тонких магнитных пленках и в композитных структурах на их основе. Автор более 130 научных и научно-методических работ, двух коллективных монографий.

410012 Саратов, ул. Астраханская, 83
Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского
E-mail: sharaevskyYP@info.sgu.ru

Шешукова Светлана Евгеньевна – родилась в Саратове (1987), окончила Саратовский государственный университет (2009), продолжает обучение в аспирантуре и работает ассистентом на кафедре нелинейной физики факультета нелинейных процессов СГУ. Принимает активное участие во всероссийских и международных конференциях, таких как «Нелинейные дни в Саратове для молодых», «Нелинейные волны», «СВЧ-техника и телекоммуникационные технологии», «Наноэлектроника, нанофотоника и нелинейная физика», «Хаос».

410012 Саратов, ул. Астраханская, 83
Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского
E-mail: SheshukovaSE@ya.ru

отстройки по параметру связи $\delta = 0.02$, и соответствующая ей карта динамических режимов, на которой жирными линиями обведены области мультистабильности с тремя аттракторами. Видно, что эти области начинают расходиться перпендикулярно диагонали $\lambda_1 = \lambda_2$, а их площадь сокращается по сравнению с симметричным случаем. При этом соответствующие вновь образующимся аттракторам линии на бифуркационных деревьях (рис. 5) в отличие от симметричного случая не выходят из центральной линии. Причиной служит тот факт, что основание листов мультистабильности в этом случае не лежит на диагонали, поэтому при движении вдоль нее мы не наблюдаем самого момента отделения несимметричного аттрактора от диагонали.

При дальнейшем увеличении расстройки ($\delta = 0.03$) листы, соответствующие сосуществованию трех аттракторов, перестают перекрываться, и сосуществования четырёх аттракторов не наблюдается (рис. 6, *а*), а затем (при $\delta = 0.05$, рис. 6, *б*) эти листы существенно уменьшаются по площади.

Была также исследована эволюция листа, соответствующего сосуществованию двух аттракторов, на примере значения параметра связи $\varepsilon = 0.1$. Начиная со значения отстройки по параметру связи $\delta = 0.05$, становится заметным искажение этого

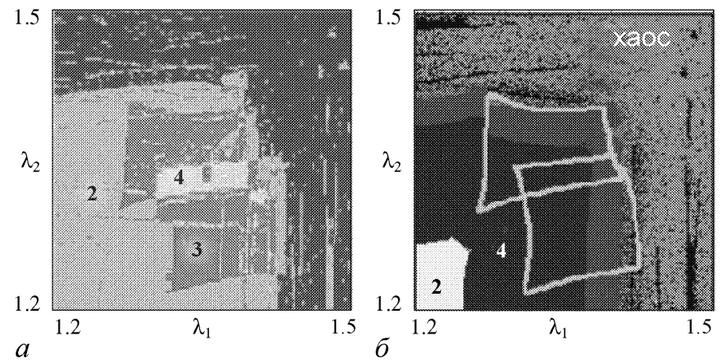


Рис. 4. Карта мультистабильности (*а*) и карта динамических режимов (*б*) отображения (1) при $\varepsilon = 0.01$ и $\delta = 0.02$. На карте динамических режимов отмечены контуры, ограничивающие области сосуществования трех аттракторов

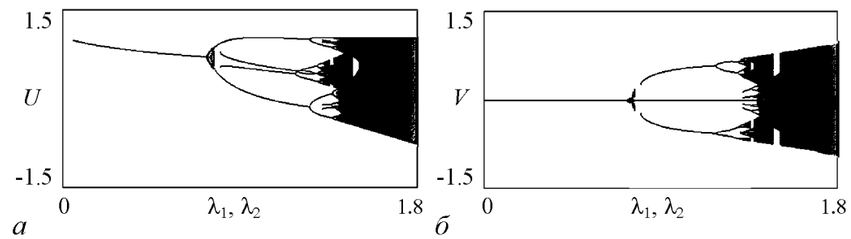


Рис. 5. Бифуркационные деревья системы (1) в переменных U (*а*) и V (*б*), построенные вдоль диагонали плоскости управляющих параметров отображения (1) при $\varepsilon = 0.01$, $\delta = 0.02$

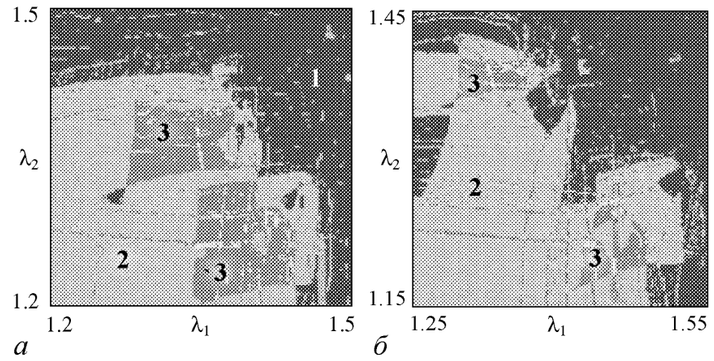


Рис. 6. Карта мультистабильности отображения (1) при различных значениях параметров: *а* – $\varepsilon = 0.01$, $\delta = 0.03$; *б* – $\varepsilon = 0.01$, $\delta = 0.05$

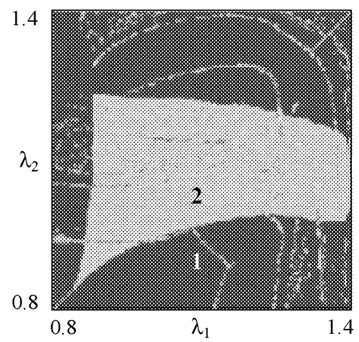


Рис. 7. Карта мультистабильности отображения (1) при $\varepsilon = 0.1$ и $\delta = 0.05$

листа относительно диагонали (рис. 7). С ростом δ сокращается его площадь, он становится несимметричным, но, в отличие от областей сосуществования трех аттракторов, продолжает опираться на диагональ.

Таким образом, можно заметить, что площадь областей мультистабильности сокращается при введении несимметричности связи. На рис. 8 приведены графики зависимости площади, занимаемой областями мультистабильности в пространстве параметров, от величины расстройки связи. Площадь оценивалась следующим образом: плоскость управляющих параметров сканировалась с определённым шагом по параметрам λ_1, λ_2, затем подсчитывалось количество N точек плоскости, в которых сосуществует требуемое число аттракторов (то есть 2, 3 или 4). Полученное число умножалось на шаг по параметру λ_1 ($\Delta\lambda_1$) и по параметру λ_2 ($\Delta\lambda_2$)

$$S = N\Delta\lambda_1\Delta\lambda_2. \qquad (3)$$

При этом площадь области сосуществования двух аттракторов в случае $\varepsilon = 0.01$ определялась как сумма площадей всех мультистабильных состояний (с сосуществованием 2-х, 3-х и 4-х аттракторов), поскольку лист, на котором сосуществуют три аттрактора, образуется в результате удвоения периода несимметричного аттрактора и фактически является продолжением области сосуществования двух аттракторов. Общая площадь листов сосуществования трех аттракторов определялась как сумма площади области сосуществования трех аттракторов и удвоенной площади областей сосуществования четырех, так как последняя представляет собой перекрытие двух разных листов сосуществования трех аттракторов. Из графиков видно, что

6. *Lyubchanskii I.L., Dadoenkova N.N., Lyubchanskii M.I., Shapovalov E.A. and Rasing Th.* Magnetic photonic crystals// J. Phys.D: Appl.Phys. 2003. Vol. 26. P. 277.
7. *Гуляев Ю.В., Никитов С.А., Животовский Л.В. и др.* Ферромагнитные пленки с периодическими структурами с магнонной запрещенной зоной – магнонные кристаллы// Письма в ЖЭТФ. 2003. Т. 77, № 10. С. 670.
8. *Григорьева Н.Ю., Устинов А.Б., Калиникос Б.А.* Наблюдение солитонов огибающей спиновых волн в периодических магнитных пленочных структурах // Письма в ЖЭТФ. 2008. Т. 88, № 1. С. 34.
9. *Vasseur J.O., Dobrzynski L., Dijafari-Rouhani B., Puszkarski H.* Magnon band structure of periodic composites // Phys. Rev. B. 1996. Vol. 54. P. 1043.
10. *Niu-Niu Chen, Slavin A.N. and Cottam M.G.* Gap solitons in periodic structures: Modulated magnetic thin films// Phys. Rev. 1993. Vol. 47. P. 8667.
11. *Дроздовский А.В., Черкасский М.А, Устинов А.Б., Ковшиков Н.Г., Калиникос Б.А.* Образование солитонов огибающей при распространении спин-волновых пакетов в тонкопленочных магнонных кристаллах // Письма в ЖЭТФ. 2010. Т. 91, № 1. С. 17.
12. *Вашковский А.В., Стальмахов В.С., Шараевский Ю.П.* Магнитостатические волны в электронике СВЧ. Саратов: Изд-во СГУ, 1993.
13. *Виноградова М.Б., Руденко О.В., Сухоруков А.П.* Теория волн. М.: Наука, 1979.
14. *Thirring W.E.* A soluble relativistic field theory // Ann. Phys. (NY). 1958. Vol. 3. P. 91.
15. *Aceves A.B., Wabnitz S.* Self-induced transparency solitons in nonlinear refractive periodic media // Phys. Lett. A. 1989. Vol. 141. P. 37.

Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского

Поступила в редакцию 25.06.2010
После доработки 1.07.2010

MECHANISMS OF FORMATION OF ENVELOPE SOLITONS IN PERIODIC FERROMAGNETIC STRUCTURES

M.A. Morozova, Yu.P. Sharaevsky, S.E. Sheshukova

Features of envelope solitons formation in one-dimensional periodic ferromagnetic structure were considered. The model based on the coupled nonlinear Schrodinger equations was used for investigation. The parameter region was calculated in which solitons similar Bragg solitons with different features can arise. Mechanisms of the formation of the solitons localized on the limited length of the structure with different excitation technique were considered.

Keywords: Bragg soliton, magnon crystal, coupled nonlinear Schrodinger equations, bandgap, periodic ferromagnetic structure, magnetostatic wave.

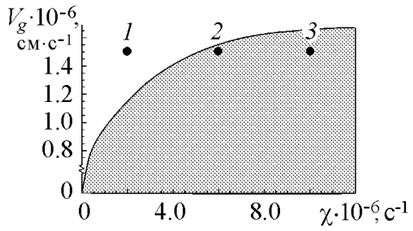


Рис. 6. Область параметров (χ,$V_{\rm g}$), соответствующая образованию солитонов ($\varphi_{0\rm f} = \varphi_{0\rm b} = 0.04$)

При параметрах, лежащих справа от серой области (точка 3 на рис. 3), импульсы также не локализованы в пространстве и сносятся с некоторой скоростью. Это связано с тем, что при больших χ период T становится настолько малым, что сравнивается с периодом солитона $T_{\rm s} \approx 1/\varphi_o$ (периодом солитона называется время между двумя последовательными пульсациями солитона, являющегося решением одиночного НУШ [4]). Два эффекта накладываются друг на друга, что приводит к нарушению периодичности перекачки мощности и, как следствие, к сносу солитонов.

Далее остановимся на результатах, которые относятся к случаю, когда на входе системы амплитуды обеих волн отличны от нуля, то есть $\varphi_{\rm f}(0,y) = \varphi_{\rm b}(0,y) = \varphi_0 \exp\left(-y^2/y^2_{\text{имп}}\right)$. При таком способе возбуждения также существует область параметров (χ, $V_{\rm g}$), при которых имеет место формирование импульсов, локализованных в пространстве (см. область серого цвета на рис. 6). В отличие от рассмотренного выше случая, эта область соответствует конечным значениям $V_{\rm g}$ при $\chi = 0$ и захватывает больший диапазон значений $V_{\rm g}$ при $\chi \neq 0$. Существование локализованных солитонов в отсутствие линейной связи между волнами ($\chi = 0$) объясняется так называемым эффектом захвата только за счет нелинейной связи между волнами [3]. В этом случае импульсы, двигающиеся в разные стороны, при больших амплитудах и сравнительно небольших значениях $V_{\rm g}$ могут захватить друг друга и далее двигаться с $V_{\rm s} = 0$.

Механизм формирования солитонов, подобных брэгговским, при одновременном возбуждении прямой и встречной волн на входе структуры также несколько отличается от рассмотренного выше случая. Рассмотрим особенности волновой эволюции при фиксированном значении $V_{\rm g}$ в зависимости от параметра χ. На рис. 7 *а, б* показана волновая динамика для параметров, соответствующих точке 1, расположенной в белой области рис. 6. В этом случае при малых значениях χ энергообмен между волнами незначителен и импульсы на прямой и встречной волне двигаются в разные стороны. С увеличением значения χ (точка 2 на рис. 6) импульс, возбужденный на прямой волне, сначала движется в положительном направлении оси y (рис. 7, *в* – правая полуплоскость) и с течением времени перекачивается в импульс на встречной волне, движущейся в ту же сторону (рис. 7, *г* – правая полуплоскость). Через промежуток времени $T/2$ (как только мощности импульсов на прямой и встречной волнах сравниваются), импульсы останавливаются, после чего продолжают движение в отрицательном направлении оси y, так как мощность в импульсе на обратной волне становится больше. В свою очередь, импульс, в начальный момент времени возбужденный на встречной волне, начинает движение в отрицательном направлении оси y и с течением времени перекачивается в импульс на прямой волне, после чего оба импульса останавливаются и продолжают движение в положительном направлении оси y (см. результаты на рис. 7, *в, г* – левая полуплоскость). Наблюдается

Заключение

Для исследования мультистабильных состояний связанных (как симметричным, так и несимметричным образом) логистических отображений предложено осуществлять построение «карт мультистабильности», которые на плоскости управляющих параметров фиксируют число мультистабильных состояний. Такие карты удобно дополнять построением семейств бифуркационных деревьев, построенных не для одного, а для целого набора начальных условий. Введение несимметричной компоненты связи между взаимодействующими логистическими отображениями заметно сказывается на картине динамических режимов: области мультистабильности на плоскости управляющих параметров при введении отстройки связи смещаются относительно диагонали и становятся несимметричными, при этом их площадь спадает до нуля, демонстрируя незначительный максимум при малой, но ненулевой величине расстройки связи. Это говорит о заметном уменьшении числа мультистабильных состояний при введении асимметрии связи. При введении асимметрии связи существенно искажаются бассейны притяжения аттракторов. При небольшой асимметрии возможно слияние различных частей бассейнов в одну связную область, а при большой – появление «изрешечивания» бассейнов и фрактализация их границ.

Авторы благодарят профессора А.П. Кузнецова и к.ф.-м.н. И.Р. Сатаева за полезные консультации.

Работа поддержана АВЦП «Развитие научного потенциала высшей школы» (проект № 2.1.1./1738) Минобрнауки РФ и РФФИ (грант 09-02-00707).

Библиографический список

1. *Анищенко В.С., Вадивасова Т.Е., Астахов В.В.* Нелинейная динамика хаотических и стохастических систем. Саратов: Изд-во СГУ, 1999.
2. *Астахов В.В., Безручко Б.П., Ерастова Е.Н., Селезнёв Е.П.* Виды колебаний и их эволюция в диссипативно связанных фейгенбаумовских системах // ЖТФ. 1990. Т. 60, вып. 10. С. 19.
3. *Астахов В.В., Безручко Б.П., Гуляев Ю.В., Селезнёв Е.П.* Мультистабильные состояния диссипативно связанных фейгенбаумовских систем // Письма в ЖТФ. 1989. Т. 15, вып. 3. С. 60.
4. *Безручко Б.П., Селезнёв Е.П.* Бассейны притяжения хаотических аттракторов в связанных системах с удвоением периодов // Письма в ЖТФ. 1997. Т. 23, №4. С. 40.
5. *Feudel U.* Complex dynamics in multistable systems // International Journal of Bifurcation and Chaos. 2008. Vol. 18, № 6. P. 1607.
6. *Fujisaka H., Yamada Y.* Stability theory of synchronized motions in coupled oscillatory systems // Progr. Theor. Phys. 1983. Vol. 69. P. 32.
7. *Postnov D.E., Vadivasova T.E., Sosnovstseva O.V., Balanov A.G., and Mosekilde E.* Role of multistability in the transition to chaotic phase synchronization // Chaos. 1999. Vol. 9. P. 227.
8. *Vadivasova T.E., Sosnovtseva O.V., Balanov A.G., and Astakhov V.V.* Phase multistability of synchronous chaotic oscillations // Discrete dynamics in Society and Nature. 2000. Vol. 4. P. 231.

9. *Sosnovtseva O.V., Postnov D.E., Nekrasov A.M., Mosekilde E., Holstein-Rathlou N.H.* Phase multistability of self-modulated oscillators // Phys. Rev. E. 2002. Vol. 66. P. 0362.
10. *Постнов Д.Э., Некрасов А.М.* Механизмы фазовой мультистабильности при синхронизации 3D-осцилляторов // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2005. Т.13, № 1–2. С. 47.
11. *Кузнецов С.П.* О критическом поведении одномерных цепочек //Письма в ЖТФ. 1983. Т. 9, №2. С. 94.
12. *Кузнецов С.П.* Динамический хаос. М.: Физматлит, 2006. 356 с.
13. *Feudel U., Grebogi C., Hunt B.R., Yorke J.A.* Map with more than 100 coexisting low-period periodic attractors //Phys. Rev. E. 1996. Vol. 54, № 1. P. 71.
14. *Кузнецов А.П., Савин А.В., Савин Д.В.* Особенности динамики почти консервативного отображения Икеды //Письма в ЖТФ. 2007. Т. 33, вып. 3. С. 57.

Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского

Поступила в редакцию 3.12.2009
После доработки 20.05.2010

MULTISTABLE REGIMES IN ASYMMETRICALLY COUPLED PERIOD-DOUBLING SYSTEMS

M.V. Pozdnyakov, A.V. Savin

Multistable regimes in asymmetrically coupled logistic maps are investigated. The evolution of the multistability regions in the parameter plane and the basins of coexisting attractors are revealed.

Keywords: Multistability, period-doublings.

Поздняков Михаил Валерьевич – родился в Саратове (1986). Окончил факультет нелинейных процессов Саратовского государственного университета им. Н.Г. Чернышевского (2008). В настоящее время аспирант кафедры динамических систем факультета нелинейных процессов СГУ. Область научных интересов – динамические режимы и мультистабильность в несимметрично связанных системах. Принимал участие в нескольких международных конференциях. Имеет 9 научных публикаций.

410012 Саратов, ул. Астраханская, 83
Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского
E-mail: mpozdnyakov@yandex.ru

Савин Алексей Владимирович – родился в Саратове в 1980 году. Окончил физический факультет Саратовского государственного университета (2002) и аспирантуру факультета нелинейных процессов СГУ. Кандидат физико-математических наук (2005). Доцент факультета нелинейных процессов СГУ, старший научный сотрудник Саратовского филиала ИРЭ РАН. Имеет более 20 научных публикаций в журналах. Область научных интересов – особенности поведения близких к консервативным нелинейных динамических систем.

410012 Саратов, ул. Астраханская, 83
Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского
E-mail: savinA@info.sgu.ru

На рис. 5 показана динамика формирования солитонов для параметров, соответствующих точке 2 рис. 3. При значениях χ, соответствующих точке 2, возникает полная перекачка мощности между волнами с периодом T (рис. 5, *а*). На прямой волне сначала формируется импульс, движущийся в положительном направлении оси y (рис. 5, *в* и серые кривые на рис. 5, *б*). При этом мощность сразу перекачивается в импульс на встречной волне (рис. 5, *г* и черные кривые на рис. 5, *б*), движущийся в ту же сторону. Через промежуток времени $T/2$ мощности импульсов на прямой и встречной волнах становятся равными и импульсы останавливаются. Таким образом, с течением времени импульсы периодически меняют направление, двигаясь в сторону той волны, мощность которой больше. На рис. 5, *б, г* можно видеть при этом «петляние» импульсов, которые тем не менее остаются локализованными на некоторой длине структуры. В этом случае комбинация импульсов на прямой и встречной волнах образует единую структуру, которая движется с общей скоростью, подобно брэгговскому солитону [3].

С увеличением χ период T уменьшается, что приводит к сжатию области по y, в которой локализован солитон. В результате «зигзаги» сглаживаются и солитон может «стоять» на месте ($V_s = 0$).

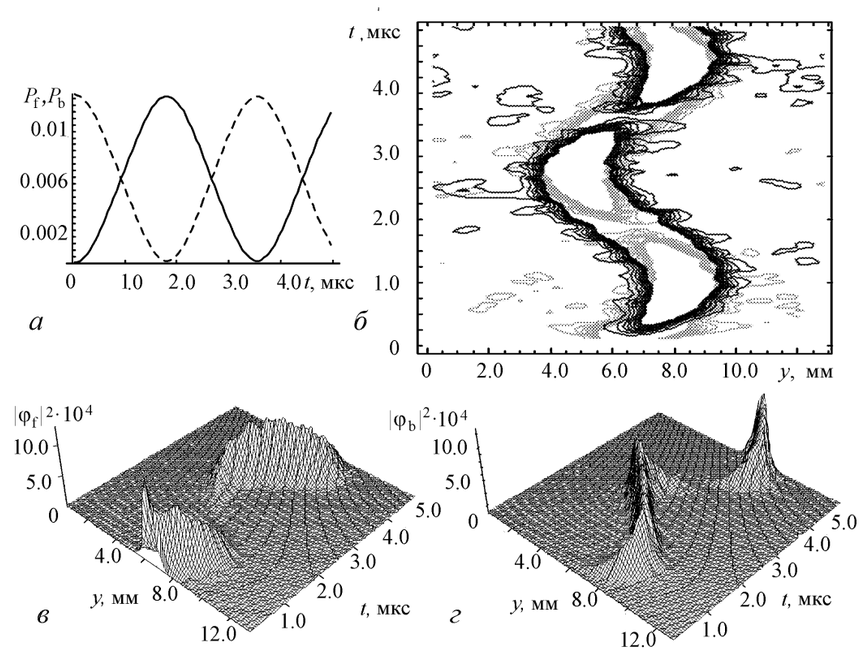


Рис. 5. Изменение мощности прямой (пунктирная кривая) и встречной (сплошная) волн с течением времени (*а*); линии равного уровня амплитуд огибающей для φ_f (показано серым цветом) и φ_b (показано черным) (*б*); пространственно-временная эволюция огибающих φ_f (*в*) и φ_b (*г*) при $\chi = 2.5 \cdot 10^6$ с$^{-1}$, $V_g = 0.3 \cdot 10^6$ см $\cdot$ с$^{-1}$ ($\varphi_{0f} = 0.04$, $\varphi_{0b} = 0$)

где $\varphi_{\mathrm{f}}(y,t)$, $\varphi_{\mathrm{b}}(y,t)$ – медленно меняющиеся комплексные амплитуды огибающих прямой (падающей) и встречной (отраженной) волн, соответственно.

С учетом (3) в приближении слабой нелинейности и без учета потерь в структуре нелинейные уравнения для огибающих прямой и встречной волн можно представить в виде:

$$\begin{cases} i\left(\dfrac{\partial\varphi_{\mathrm{f}}}{\partial t}+V_{\mathrm{g}}\dfrac{\partial\varphi_{\mathrm{f}}}{\partial y}\right)-\beta\dfrac{\partial^2\varphi_{\mathrm{f}}}{\partial y^2}+\eta\varphi_{\mathrm{f}}+\chi\varphi_{\mathrm{b}}+\gamma\left(|\varphi_{\mathrm{f}}|^2+\sigma|\varphi_{\mathrm{b}}|^2\right)\varphi_{\mathrm{f}}=0, \\ i\left(\dfrac{\partial\varphi_{\mathrm{b}}}{\partial t}-V_{\mathrm{g}}\dfrac{\partial\varphi_{\mathrm{b}}}{\partial y}\right)-\beta\dfrac{\partial^2\varphi_{\mathrm{b}}}{\partial y^2}+\eta\varphi_{\mathrm{b}}+\chi\varphi_{\mathrm{f}}+\gamma\left(|\varphi_{\mathrm{b}}|^2+\sigma|\varphi_{\mathrm{f}}|^2\right)\varphi_{\mathrm{b}}=0, \end{cases} \tag{4}$$

где V_{g} – групповая скорость; β – коэффициент дисперсии; χ – коэффициент связи; γ – коэффициент нелинейности (характеризует фазовую автомодуляцию); σ – коэффициент кросс-фазовой модуляции; $\eta=\omega_0-\omega_{\mathrm{B}}$ – отстройка ($\omega_{\mathrm{B}}=V_{\mathrm{ph}}K_{\mathrm{B}}$, ω_0 – центральная частота импульса, V_{ph} – фазовая скорость МСВ в однородной структуре).

Уравнения (4) аналогичны системе двух связанных НУШ, описывающих распространение падающей и отраженной волн в брэгговских оптических решетках [2–3]. Необходимо отметить, что без учета дисперсии ($\beta=0$) и, если обратить в нуль член фазовой кроссмодуляции ($\sigma=0$), то уравнения (4) совпадают с точно интегрируемой моделью Тирринга и дают солитонные решения [14]. Сохраняющие форму уединенные волны могут быть получены и при $\sigma\neq0$ с использованием модели Тирринга в виде [15]:

$$\varphi_{\mathrm{f,b}}(y,t)=\varphi_{+,-}\,\mathrm{sch}\,(\zeta\mp i\psi/2)\,e^{i\theta}, \tag{5}$$

где $\varphi_{\pm}=\pm\left(\dfrac{1\pm v}{1\mp v}\right)^{1/4}\sqrt{\dfrac{\chi(1-v^2)}{\gamma(3-v^2)}}\sin\psi$,

$\zeta=\dfrac{y-V_{\mathrm{g}}t}{\sqrt{1-v^2}}\chi\sin\psi$,

$\theta=\dfrac{v(y-V_{\mathrm{g}}t)}{\sqrt{1-v^2}}\chi\cos\psi-\dfrac{4v}{3-v^2}\,\mathrm{arctg}[|\,\mathrm{ctg}(\psi/2)|\,\mathrm{cth}(\zeta)]$ с параметрами $-1<v<1$ и $0<\psi<\pi$.

Решение (5) – семейство брэгговских солитонов, которые представляют собой определенные комбинации двух волн, движущихся вместе как вперед, так и назад. В случае $\varphi_{\mathrm{f}}(y,t)=\varphi_{\mathrm{b}}(y,t)$ солитон не движется – стационарный щелевой солитон. В отсутствие связи между волнами (при $\chi=0$) солитоны в такой модели существовать не могут.

В случае возбуждения магнитостатических волн с несущей частотой вблизи запрещенной зоны наряду с дисперсией, вызванной наличием периодической структуры, определенную роль играет также дисперсия среды ($\beta\neq0$). Причем как коэффициент связи χ, так и групповая скорость V_{g}, коэффициенты дисперсии β и нелинейности γ будут зависеть существенным образом от типа МСВ, возбуждаемой в ферромагнитной пленке (от направления внешнего магнитного поля $\vec{H}_0$) [12].

1. Связанные автоколебательные осцилляторы – ван дер Поля и брюсселятор. Характер связи

Пусть имеются две разнотипные автоколебательные системы – осциллятор ван дер Поля и брюсселятор. Введем связь между ними через первую переменную брюсселятора

$$\begin{aligned} &\frac{dx}{dt}=a-(b+1)x+x^2y+\mu\left(\frac{dz}{dt}-x+a\right), \\ &\frac{dy}{dt}=bx-x^2y, \\ &\frac{d^2z}{dt^2}-(\lambda-z^2)\frac{dz}{dt}+(1+\Delta)z=\mu\left(x-a-\frac{dz}{dt}\right). \end{aligned} \tag{1}$$

Здесь a, b – внутренние параметры брюсселятора [18], λ – управляющий параметр осциллятора ван дер Поля, отвечающий за отрицательное трение, параметр Δ характеризует отстройку собственной частоты осциллятора ван дер Поля от единичной, μ – параметр связи.

Введение связи между разнотипными моделями автоколебательных систем представляется априорно нетривиальной задачей. Действительно, переменные разных осцилляторов имеют разный смысл. Поэтому, если связь вводить эмпирически, то есть не подбирать некоторым специальным образом, то она, скорее всего, будет иметь как диссипативную компоненту, так и реактивную, и, возможно, будет асимметричной. Продемонстрируем это на примере системы (1).

Чтобы выяснить характер связи в (1), воспользуемся линейным приближением, описывающим динамику брюсселятора вблизи состояния равновесия. Автономный брюсселятор имеет неподвижную точку[2]

$$x_0=a,\,y_0=\frac{b}{a}. \tag{2}$$

Рассмотрим динамику малых возмущений вблизи этой точки, положив

$$x=a+\xi,\quad y=\frac{b}{a}+\eta. \tag{3}$$

Подставим соотношения (3) в (1) и, пренебрегая членами второго порядка по возмущениям, после некоторых преобразований получим

$$\begin{aligned} &\frac{d\xi}{dt}=(b-1)\xi+a^2\eta+\mu\left(\frac{dz}{dt}-\xi\right), \\ &\frac{d\eta}{dt}=-b\xi-a^2\eta, \\ &\frac{d^2z}{dt^2}-(\lambda-z^2)\frac{dz}{dt}+(1+\Delta)z+\mu\left(\frac{dz}{dt}-\xi\right)=0. \end{aligned} \tag{4}$$

[2]Неподвижная точка брюсселятора не совпадает с началом координат. Поэтому связь в системе (1) организована так, чтобы она реагировала на отклонение переменной брюсселятора от состояния равновесия.

Введем теперь новую переменную θ, так что $\xi = d\theta/dt$. Тогда из первого уравнения (4) получаем

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} - (b-1)\frac{d\theta}{dt} - a^2\eta + \mu\left(\frac{d\theta}{dt} - \frac{dz}{dt}\right) = 0. \tag{5}$$

Проинтегрируем второе уравнение (4)

$$\eta = -b\theta - a^2\int \eta dt. \tag{6}$$

Аналогично, интегрируя (5), находим

$$\frac{d\theta}{dt} + (1-b)\theta - a^2\int \eta dt + \mu(\theta - z) = 0. \tag{7}$$

Если из (6) и (7) исключить $\int \eta dt$, то получим

$$\eta = -\frac{d\theta}{dt} - \theta - \mu(\theta - z). \tag{8}$$

Подставляем этот результат в (5). Тогда, совместно с третьим уравнением (4) имеем

$$\begin{aligned} &\frac{d^2\theta}{dt^2} - (b - a^2 - 1)\frac{d\theta}{dt} + a^2\theta + \mu\left(\frac{d\theta}{dt} - \frac{dz}{dt}\right) + a^2\mu(\theta - z) = 0, \\ &\frac{d^2z}{dt^2} - (\lambda - z^2)\frac{dz}{dt} + (1+\Delta)z + \mu\left(\frac{dz}{dt} - \frac{d\theta}{dt}\right) = 0. \end{aligned} \tag{9}$$

Таким образом, мы получили два связанных осциллятора. Первый из них – линеаризованный брюсселятор. Как видно из (9), для него возможность бифуркации Андронова–Хопфа определяется фактором

$$\Lambda = b - a^2 - 1, \tag{10}$$

а частота колебаний – параметром a. При этом связь имеет взаимную диссипативную компоненту, регулируемую параметром μ. Имеется также и реактивная односторонняя компонента связи, отвечающая воздействию осциллятора ван дер Поля на брюсселятор[3].

2. Устройство плоскости параметров частотная расстройка – величина связи

Обратимся теперь к устройству плоскости параметров частотная расстройка–величина связи (Δ, μ) системы (1). Для ее исследования используем метод карт динамических режимов [19]. В рамках этого метода в каждой точке плоскости параметров численно определяется период режима в сечении Пуанкаре, а затем эта точка окрашивается в определенный цвет, свой для каждого периода цикла в сечении Пуанкаре. При этом непериодические режимы (квазипериодическая динамика и хаос) обозначаются белым цветом. Система (1) является четырехмерной, так что сечением Пуанкаре для нее является некоторая гиперповерхность, в качестве которой удобно

[3]Эти оценки справедливы, однако, только вблизи порога бифуркации Андронова–Хопфа.

выбиралось таким образом, чтобы в пленке в направлении оси y распространялась прямая объемная МСВ (ПОМСВ). Дисперсионное уравнение, описывающее характеристики ПОМСВ в однородной ферромагнитной пленке, нагруженной с двух сторон на полубесконечные диэлектрические слои, можно записать таким образом [12]:

$$\operatorname{tg}(\xi k d) = \frac{2\xi}{\xi^2 - 1}, \tag{1}$$

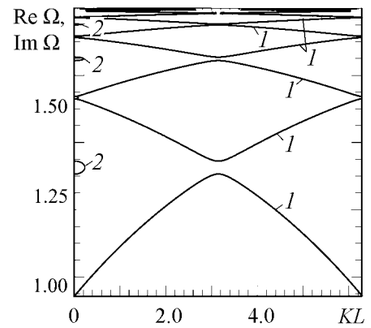


Рис. 2. Дисперсионная диаграмма периодической структуры при $\Omega_M = 2$, $a_1 = 0.5$, $d_1 = 0.1$, $d_2 = 0.08$; Re Ω – кривые *1*, Im Ω – кривые *2*

где $\xi^2 = \dfrac{\omega^2 - \omega_H(\omega_H + \omega_M)}{\omega_H^2 - \omega^2}$, ω – частота сигнала, $\omega_H = \gamma H_0$, $\omega_M = 4\pi\gamma M_0$ (M_0 – намагниченность насыщения), γ – гиромагнитное отношение, k – постоянная распространения ПОМСВ, d – толщина пленки.

Согласно [5,8,13], дисперсионная зависимость $\omega(K)$ в одномерной системе, состоящей из чередующихся слоев двух сред с различными скоростями распространения волны, может быть записана в виде:

$$\cos(KL) = \cos(k_1(\omega)a_1)\cos(k_2(\omega)a_2) - \frac{k_1^2(\omega) + k_2^2(\omega)}{2k_1(\omega)k_2(\omega)}\sin(k_1(\omega)a_1)\sin(k_2(\omega)a_2), \tag{2}$$

где K – волновое число для волны, распространяющейся в структуре с периодом $L = a_1 + a_2$, a_2 – ширина канавки; функции $k_1(\omega)$, $k_2(\omega)$ представляют собой определенные соотношением (1) дисперсионные зависимости ПОМСВ в пленках толщиной d_1 и d_2, соответственно.

Результаты решения уравнения (2) с учетом дисперсионного соотношения (1) при определенных геометрических размерах рассматриваемой одномерной периодической структуры приведены на рис. 2 (показано поведение действительной и мнимой частей $\Omega(KL)$ в полосе пропускания ПОМСВ при изменении частоты $\Omega = \omega/\omega_H$). Геометрические размеры структуры нормированы на период структуры $L = 1$. Как видно из рис. 2, периодичность структуры приводит к появлению на дисперсионных зависимостях при $KL = \pi$ в определенных частотных областях запрещенных зон (полос непропускания). Из условия Брэгга [3] следует, что $K_\mathrm{B} = \pi/L = 2\pi/\lambda_\mathrm{B}$, где K_B и λ_B – брэгговские постоянная распространения и длина волны, соответственно. Условие Брэгга обеспечивает сложение в фазе слабых отраженных волн по всей длине решетки, что и приводит к эффективному отражению падающей волны.

Для построения нелинейной модели рассматриваемой периодической ферромагнитной структуры используем, аналогично оптическим системам [3,4], приближение связанных волн и представим распределение магнитостатического потенциала вблизи запрещенной зоны в виде суммы прямой и встречной волн

$$\psi(y,t) = \varphi_\mathrm{f}(y,t)\exp(i(\omega t - K_\mathrm{B}y)) + \varphi_\mathrm{b}(y,t)\exp(i(\omega t + K_\mathrm{B}y)), \tag{3}$$

COMPUTATION OF LYAPUNOV EXPONENTS FOR SPATIALLY EXTENDED SYSTEMS: ADVANTAGES AND LIMITATIONS OF VARIOUS NUMERICAL METHODS

P.V. Kuptsov

Problems emerging in computations of Lyapunov exponents for spatially extended systems are considered. We concentrate on the incorrect orthogonalization of high sized ill conditioned matrices appearing in course of the computation, and on large errors emerging under certain conditions if the finite difference numerical method is applied to solve equations. The practical guidelines helping to avoid the mentioned problems are represented.

Keywords: Lyapunov exponents, spatio-temporal chaos, finite difference method, complex Ginzburg–Landau equation, QR-decomposition.

Павел Владимирович Купцов – родился в Саратове (1972), окончил физический факультет Саратовского государственного университета (1994), защитил кандидатскую диссертацию (1998). В настоящее время – доцент кафедры технической кибернетики и информатики Саратовского государственного технического университета, а также сотрудник научной группы теоретической нелинейной динамики в Саратовском филиале Института радиотехники и электроники РАН. Область научных интересов – сложные колебания в распределённых системах, хаотическая динамика высокой размерности, численные методы.

410054 Саратов, ул. Политехническая, 77
Саратовский государственный технический университет
E-mail: p.kuptsov@rambler.ru

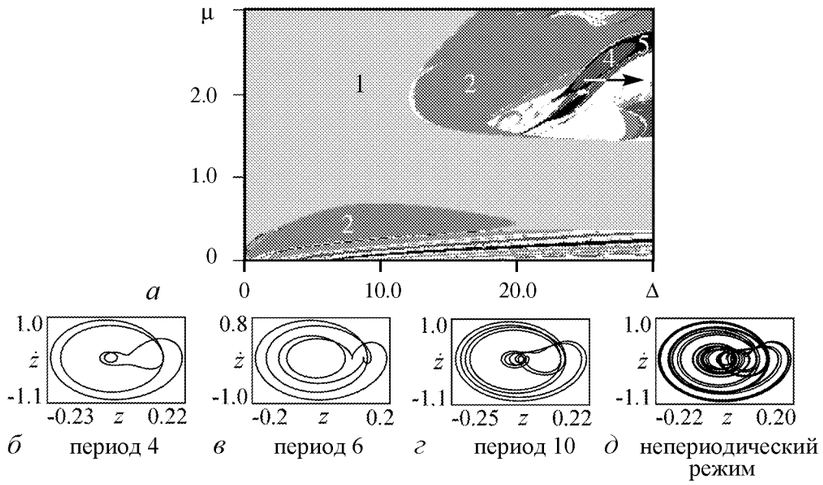


Рис. 2. Карта динамических режимов системы (1) для $b = 5$, $\lambda = 1.5$, $a = 1.0$ (*а*); фазовые портреты осциллятора ван дер Поля вдоль маршрута, отмеченного стрелкой на карте (*б–д*)

но примерным «равноправием» осцилляторов, что приводит к достаточно сложному устройству и того, и другого аттрактора – оба они заметно возмущают друг друга. При этом, однако, никакого типичного сценария (удвоения периода, система языков Арнольда) не наблюдается.

3. Связанные автоколебательные осцилляторы с разными временными масштабами

Выше был рассмотрен случай, когда второй параметр брюсселятора $a = 1.0$, что в соответствии с п. 1 отвечает примерному равенству его собственной частоты и частоты осциллятора ван дер Поля при $\Delta = 0$. Если уменьшить этот параметр до значения $a = 0.4$, то собственные частоты подсистем будут сильно разнесены. Частота брюсселятора теперь заметно уменьшилась, так что осциллятор ван дер Поля относительно него «вращается» быстрее. Этот факт сказывается заметным образом как на карте режимов, так и на фазовых портретах, показанных на рис. 3. Теперь область «гибели колебаний» окружена достаточно широкой полосой режимов, которые на карте фиксируются как непериодические.

В этой области реализуются весьма характерные фазовые портреты. Изображающая точка на фазовом портрете осциллятора ван дер Поля быстро вращается вокруг начала координат и очень медленно приближается к нему (рис. 3, *б*). Эта стадия эволюции напоминает режим гибели колебаний. Однако, когда, совершив большое число оборотов, точка подходит к началу координат, она резко выбрасывается, и затем процесс повторяется. Возникает своего рода режим «пульсирующей генерации», который иллюстрирует показанная на рис. 4 зависимость от времени переменной осциллятора ван дер Поля.

Портрет соответствующего режима для брюсселятора представлен слева на рис. 3, *б*. Медленное движение брюсселятора происходит в окрестности неподвиж-

ной точки $x_0 = a = 0.4$ с малой амплитудой $|x| \leq 0.5$. Это значит, что брюсселятор слабо возмущает осциллятор ван дер Поля, который при данной величине параметра μ оказывается слабо диссипативным ($\lambda < \mu$). Поэтому он и совершает колебания с медленно убывающей амплитудой. Когда эта фаза колебаний брюсселятора заканчивается, его изображающая точка уходит от $x = x_0$, и начинается быстрая стадия, которая существенно возмущает осциллятор ван дер Поля.

На рис. 5 показаны трехмерные фазовые портреты осцилляторов, на которых пара фазовых переменных каждого автономного осциллятора дополнена переменной другого. Из соответствующего портрета осциллятора ван дер Поля (рис. 5, *б*) можно видеть, что режим пульсирующей генерации отвечает (по крайней мере, на качественном уровне) ситуации разрушения гомоклинической петли [19].

Для более корректной характеристики наблюдаемых режимов на рис. 6 показаны графики зависимости старшего показателя Ляпунова от частотной расстройки осцилляторов для двух значений связи $\mu = 1.3$ и $\mu = 1.7$. При $\mu = 1.3$ на рис. 6, *а* для значений расстройки Δ, отвечающих областям периода 2 и 1, показатель Ляпу-

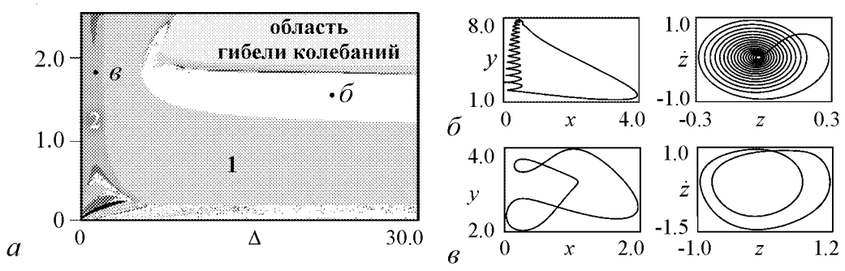


Рис. 3. Карта динамических режимов системы (1) (*а*) и характерные фазовые портреты (*б–в*) брюсселятора (слева) и осциллятора ван дер Поля (справа); $b = 3$, $\lambda = 1.16$, $a = 0.4$

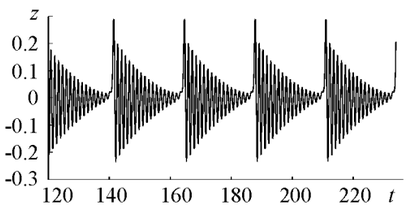


Рис. 4. Реализации осциллятора ван дер Поля в режиме «пульсирующей генерации». Параметры отвечают рис. 3, *б*

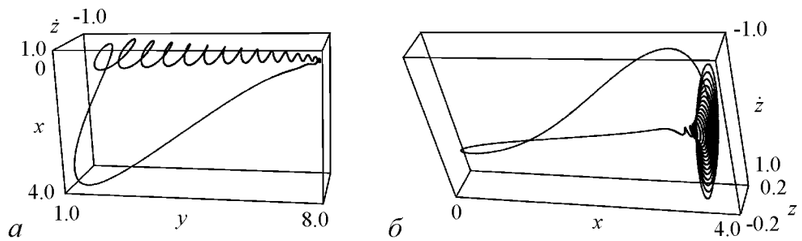


Рис. 5. Трехмерные фазовые портреты брюсселятора (*а*) и осциллятора ван дер Поля (*б*). Значения параметров отвечают рис. 3, *б*

паразитное возбуждение возникало при использовании явной или частично явной (то есть смешанной) схемы. По всей вероятности, подобный эффект может иметь место и в других случаях, когда решение ищется с применением явной схемы. В частности, его следует ожидать при использовании метода Рунге–Кутты для решения системы большого числа связанных обыкновенных дифференциальных уравнений.

Автор выражает признательность С.П. Кузнецову за полезное обсуждение этой работы.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ-ННИО № 08–02–91963.

Библиографический список

1. *Оселедец В.И.* Мультипликативная эргодическая теорема. характеристические показатели Ляпунова динамических систем // Труды Моск. матем. об-ва. 1968. Т. 19. С. 197.
2. *Eckmann J.P., Ruelle D.* Ergodic theory of chaos and strange attractors// Rev. Mod. Phys. 1985. Jul. Vol. 57, № 3. P 617.
3. *Schaumlöffel K.-U.* Multiplicative ergodic theorems in infinite dimensions // Lyapunov Exponents. Springer Berlin / Heidelberg, 1991. T. 1486/1991. Lecture Notes in Mathematics. C. 187.
4. *Robinson J.C.* Finite dimensional behavior in dissipative partial differential equations // Chaos. 1995. Vol. 5. P. 330.
5. *Yang H.-L., Takeuchi K.A., Ginelli F., Chaté H., Radons G.* Hyperbolicity and the effective dimension of spatially-extended dissipative systems // Phys. Rev. Lett. 2009. Vol. 102. P. 074102.
6. *Kuptsov P.V., Parlitz U.* Strict and fussy modes splitting in the tangent space of the Ginzburg–Landau equation // Phys. Rev. E. 2010. Vol. 81. P. 036214.
7. *Benettin G., Galgani L., Giorgilli A., Strelcyn J.M.* Lyapunov characteristic exponents for smooth dynamical systems and for hamiltonian systems: A method for computing all of them. Part I: Theory. Part II: Numerical application // Meccanica. 1980. Vol. 15. P. 9.
8. *Parker T.S., Chua L.O.* Practical numerical algorithms for chaotic systems. Springer-Verlag, 1989. P. 348.
9. *Golub G.H., van Loan C.F.* Matrix computations. Third Edition. The Johns Hopkins University Press, Baltimore, MD. 1996. P. 694.
10. *Geist K., Parlitz U., Lauterborn W.* Comparision of different methods for computing Lyapunov exponents // Prog. Theor. Phys. 1990. Vol. 83, № 5. P. 875.
11. Numerical recipes in C / *W.H. Press, S.A. Teukolsky, W.T. Vettering, B.P. Flannery.* Cambridge University Press, 1992. P. 994.
12. *Aranson I.S., Kramer L.* The world of the complex Ginzburg–Landau equation // Rev. Mod. Phys. 2002. Vol. 74. P. 99.
13. *Калиткин Н.Н.* Численные методы: Учебное пособие. М.: Наука, 1978. С. 512.

Саратовский государственный технический университет

Поступила в редакцию *26.02.2010*
После доработки *14.05.2010*

при $i = 1$, то есть ни один из вычисленных таким образом показателей Ляпунова не является достоверным.

Как обсуждалось в разделе 3.2, для поиска показателей Ляпунова недостаточно одной только устойчивости численной схемы. Необходимо, чтобы множитель роста убывал монотонно на интервале от нуля до единицы. Это имеет место, когда точка минимума функции $\alpha^2(\nu)$ находится справа от единицы, то есть $\nu_0 > 1$. Отсюда следует условие монотонности

$$\Delta t < \Delta x^2 \left(\frac{\mathrm{Re}\, d}{4|d|^2} \right). \tag{25}$$

На рис. 8 кривая *2* демонстрирует поведение функции $\alpha^2(\nu)$ когда числовая схема устойчива, а условие монотонности нарушено. Видно, что, хотя множитель роста всюду меньше единицы, начиная с точки ν_1 для каждой гармоники существует пара с одинаковым α. При вычислении показателей Ляпунова это приводит к паразитному возбуждению коротковолновых гармоник, что, как обсуждалось в разделе 3.2, делает недостоверным значения младших показателей. Кривая *3* на этом рисунке представляет случай, когда условие монотонности (25) выполняется, так что все показатели Ляпунова являются достоверными.

Найдём количество вычисляемых достоверно показателей Ляпунова в случае, когда условие устойчивости выполнено, а условие монотонности нарушено. Воспроизводя рассуждения раздела 3.2, найдём номер гармоники ν_1, имеющей такой же показатель роста, что и коротковолновая гармоника при $\nu = 1$

$$\nu_1 = \frac{\delta + \delta^*}{\delta\delta^*} - 1. \tag{26}$$

Далее, используя формулы (14) и (19), получим, что количество достоверных показателей Ляпунова можно оценить как

$$i_1 = \left\lfloor \frac{2cM}{\pi} \arcsin \sqrt{\frac{\Delta x^2 \mathrm{Re}\, d}{2\Delta t |d|^2} - 1} \right\rfloor. \tag{27}$$

Зафиксируем Δx и будем увеличивать Δt. При этом выражение под знаком корня может обратиться в нуль и, следовательно, i_1 тоже станет равным нулю. Как видно из неравенства (24), при дальнейшем увеличении шага численная схема становится неустойчивой и вычисление показателей Ляпунова невозможно. Если уменьшать Δt, то подкоренное выражение достигнет единицы. При этом значение i_1 будет максимальным. Неравенство (25) показывает, что при дальнейшем уменьшении шага выполняется условие монотонности и все вычисляемые показатели являются достоверными. Отметим, что замечания, сделанные в разделе 3.2 относительно границ применимости оценки (20), справедливы и для формулы (27).

На рис. 10 построены спектры показателей Ляпунова, вычисленные для уравнения Гинзбурга–Ландау с использованием явной схемы. Кривая *1* изображает «правильный» ляпуновский спектр, вычисленный при Δt, удовлетворяющем условию монотонности (25). Если немного увеличить Δt (кривая *2*), то условие монотон-

Заключение

На примере связанных осциллятора ван дер Поля и брюсселятора показано, что при взаимодействии автоколебательных систем разной природы динамика будет иметь черты, характерные для связанных систем с неидентичными управляющими параметрами и параметрами, ответственными за нелинейную диссипацию. При этом на плоскости параметров частотная расстройка – величина связи основной язык синхронизации имеет «отросток» в виде сколь угодно широкой полосы по частоте и конечной ширины по величине связи. Выше этой полосы происходит смена доминирующего осциллятора. При этом возникает система достаточно протяженных по частоте областей, которые отвечают увеличению числа петель на фазовом портрете одного из осцилляторов и, соответственно, разным периодам в сечении Пуанкаре. Выше этих областей подавленными оказываются колебания обоих осцилляторов. Если собственные частоты связывающихся систем существенно различаются, то полоса режима основной синхронизации отделена от области гибели колебаний полосой хаотических режимов. Динамика осциллятора ван дер Поля состоит в этом случае из стадии медленного приближения к положению равновесия и стадии быстрого выброса изображающей точки из его окрестности и носит характер «пульсирующей генерации». Вид аттрактора при этом качественно отвечает ситуации разрушения гомоклинической петли. С ростом уровня связи наблюдаются режимы «слабого хаоса» с малыми значениями показателя Ляпунова.

Работа поддержана грантом РФФИ 09-02-00707-а и программой «Развитие научного потенциала высшей школы» № 2.1.1/1738.

Библиографический список

1. *Пиковский А., Розенблюм М., Куртс Ю.* Синхронизация: фундаментальное нелинейное явление. М.: Техносфера, 2003. 508 с.
2. *Ланда П.С.* Нелинейные колебания и волны. М.: Наука, 1997. 495 с.
3. *Ланда П.С.* Автоколебания в системах с конечным числом степеней свободы. М.: Наука, 1980. 360 с.
4. *Блехман И.И.* Синхронизация в природе и технике. М.: Наука, 1981. 351 с.
5. *Aronson D.G., Ermentrout G.B., Kopell N.* Amplitude response of coupled oscillators // Physica D. 1990. Vol. 41. P. 403.
6. *Rand R., Holmes P.J.* Bifurcation of periodic motions in two weakly coupled van der Pol oscillators // Int. J. Non-Linear Mechanics, 1980. Vol. 15. P. 387.
7. *Storti D.W., Rand R.H.* Dynamics of two strongly coupled van der Pol oscillators // Int. J. Non-Linear Mechanics. 1982. Vol. 17 (3). P. 143.
8. *Chakraborty T., Rand R.H.* The transition from phase locking to drift in a system of two weakly coupled van der Pol oscillators // Int. J. Non-Linear Mechanics. 1988. Vol. 23, № 5/6. P. 369.
9. *Pastor I., Perez-Garcia V.M., Encinas-Sanz F., Guerra J.M.* Ordered and chaotic behavior of two coupled van der Pol oscillators // Phys. Rev. E. 1993. Vol. 48. P. 171.

10. *Кузнецов А.П., Паксютов В.И.* О динамике двух связанных осцилляторов ван дер Поля – Дуффинга с диссипативной связью // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2003. Т. 11, № 6. С. 48.
11. *Ivanchenko M.V., Osipov G.V., Shalfeev V.D., Kurths J.* Synchronization of two non-scalar-coupled limit-cycle oscillators // Physica D. 2004. Vol. 189, № 1–2. P. 8.
12. *Кузнецов А.П., Паксютов В.И., Роман Ю.П.* Особенности синхронизации в системе связанных осцилляторов ван дер Поля, неидентичных по управляющему параметру // Письма в ЖТФ. 2007. Т. 33. Вып. 15. С. 15.
13. *Кузнецов А.П., Паксютов В.И., Роман Ю.П.* Особенности синхронизации в системе неидентичных связанных осцилляторов ван дер Поля и ван дер Поля–Дуффинга. Широкополосная синхронизация // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2007. Т. 15, № 4. С. 3.
14. *Kuznetsov A.P., Roman Ju. P.* Properties of synchronization in the systems of non-identical coupled van der Pol and van der Pol–Duffing oscillators. Broadband synchronization // Physica D238. 2009. № 16. P. 1499.
15. *Астахов В.В., Коблянский С.А Вадивасова Т.Е., Анищенко В.С.* Бифуркационный анализ динамики диссипативно связанных генераторов ван дер Поля // Успехи современной радиоэлектроники. 2008. Вып. 9. С. 61.
16. *Астахов В.В, Коблянский С.А, Шабунин А.В.* Бифуркационный анализ режимов синхронизации и гашения колебаний в связанных генераторах с инерционной нелинейностью // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2010. Т. 18, № 2. С.79.
17. *Кузнецов А.П., Емельянова Ю.П., Селезнев Е.П.* Синхронизация связанных автоколебательных осцилляторов с неидентичными параметрами // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2010. Т. 18, № 2. С.62.
18. *Кузнецов А.П., Кузнецов С.П., Рыскин Н.М.* Нелинейные колебания. Сер. Современная теория колебаний и волн. 2-е изд. М.: Физматлит, 2006. 292 с.
19. *Кузнецов С.П.* Динамический хаос. Сер. Современная теория колебаний и волн. 2-е изд. перераб. и доп. М.: Физматлит, 2006. 356 с.
20. *Иванченко М.В.* Генерация и синхронизация колебаний в системах с «многомасштабным» хаосом. Нижний Новгород: Изд-во Нижегородского университета. 138 с.

Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского

Поступила в редакцию 25.03.2010

COUPLED SELF-SUSTAINED OSCILLATORS OF DIFFERENT NATURE BY EXAMPLE OF VAN DER POL SYSTEM AND BRUSSELATOR

Yu.P. Emelianova, A.P. Kuznetzov

Problem of interaction between self-sustained oscillating systems of different nature is discussed by an example of coupled brusselator and van der Pol oscillator. Picture of leading oscillator changing with the growth of coupling parameter is shown. Areas of

Если $\mathrm{Re}\ d = 0$, то все пространственные гармоники, кроме нулевой, неустойчивы. При этом α растёт с ростом ν, так что максимальный множитель роста имеет коротковолновая гармоника с $\nu = 1$.

Пусть $\mathrm{Re}\ d > 0$. Тогда при $\nu = 0$ функция $\alpha^2(\nu) = 1$, убывает до точки минимума ν_0

$$\nu_0 = \frac{\delta + \delta^*}{2\delta\delta^*}, \tag{22}$$

затем растёт и в точке ν_2

$$\nu_2 = \frac{\delta + \delta^*}{\delta\delta^*} \tag{23}$$

снова проходит через единицу.

Когда $\nu_2 < 1$, коротковолновые гармоники с номерами $\nu > \nu_2$, неустойчивы и решение расходится. Из требования $\nu_2 > 1$ можно найти стандартное условие устойчивости явной схемы [11, 13]

$$\Delta t < \Delta x^2 \left(\frac{\mathrm{Re}\ d}{2|d|^2} \right). \tag{24}$$

На рис. 8 кривая *1* иллюстрирует поведение $\alpha^2(\nu)$, когда условие устойчивости (24) нарушено. Вертикальная пунктирная линия отмечает точку $\nu = \nu_2$, в которой множитель роста проходит через единицу.

Когда ищется решение одного уравнения, неустойчивость явной схемы проявляется очевидным образом: решение расходится, и программа перестаёт нормально работать. В случае же поиска показателей Ляпунова расходимость будет завуалирована вследствие периодических перенормировок решений. Поэтому вычисления будут происходить в нормальном режиме, даже когда условие устойчивости не выполняется или когда в спектре собственных чисел D есть нули или чисто мнимые значение. При этом вместо ожидаемого для диффузионных задач доминирования длинноволновых структур, значения старших показателей Ляпунова будут определяться скоростью роста гармоник с наименьшими длинами волн.

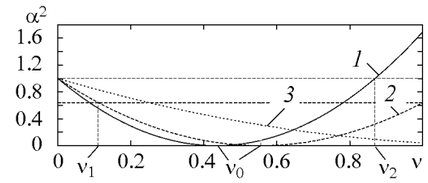


Рис. 8. Множитель роста пространственных гармоник для различных δ: *1* – 2.3, *2* – 1.8, *3* – 0.8; явная схема при $\sigma = 0$

На рис. 9 показано, как выглядят фурье-спектры столбцов матрицы Q, вычисленной для уравнения Гинзбурга–Ландау на одном из шагов процедуры поиска показателей Ляпунова при нарушенном условии устойчивости (24). Видно, что паразитное возбуждение коротковолновых гармоник возникает уже

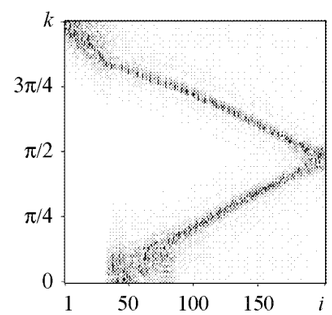


Рис. 9. Фурье-спектры столбцов матрицы Q. Явная схема. Параметры как на рис. 5, за исключением $\Delta t = 0.007$. Условие устойчивости (24) нарушено

основания полагать, что наблюдаемая динамика системы в значительной степени обусловлена взаимным расположением этих мод. Диагональная структура в центре представляет изолированные моды, которые являются касательными к траекториям, отвечающим за переходные процессы [5, 6]. Сгущение в правом верхнем углу, по всей вероятности, также соответствует активным модам, которые задействованы, когда динамика рассматривается в обратном времени [6].

Предположим теперь, что условие монотонности (17) нарушено. В этом случае существует такая гармоника $\nu_1 < \nu_0$, множитель роста которой совпадает с множителем роста коротковолновой гармоники $\nu = 1$. Это иллюстрирует кривая *2* на рис. 4. Из уравнения $\alpha^2(\nu_1) = \alpha^2(1)$ можно найти значение ν_1:

$$\nu_1 = 4/|\delta|^2. \tag{18}$$

Все гармоники с номерами в диапазоне от ν_1 до ν_0, имеют коротковолновых «двойников» с одинаковыми множителями роста. Когда решается одиночное уравнение и шаги пространственно-временной сетки выбраны «разумно», так что точка ν_1 расположена достаточно далеко от нуля, то наличие пар пространственных гармоник с одинаковыми α не играет существенной роли. Они все сравнительно быстро затухают, и в решении преобладают длинноволновые гармоники с более высокими значениями множителя роста. Именно это делает возможным использование смешанной схемы несмотря на аномальное поведение α.

Существенно иная ситуация возникает, когда для нахождения показателей Ляпунова численно решается система уравнений вида (10) и периодически применяется ортогонализация с целью исключить доминирование старших показателей над младшими. Представляется естественным предположение о том, что значение множителя роста связано с величиной показателя Ляпунова. Это значит, что в процессе ортогонализации должно происходить исключение гармоник с высокими множителями роста. Для нахождения первого показателя мы решаем первое уравнение без какого-либо вмешательства в структуру решения; в решении второго уравнения, связанного со вторым показателем, несколько первых гармоник должны быть удалены; в решении третьего уравнения извлекаются ещё несколько длинноволновых гармоник и так далее.

Последовательное удаление из структуры решений длинноволновых гармоник ведёт к тому, что решение с номером n_1, связанное с вычислением показателя n_1, не будет иметь быстрорастущих гармоник с волновыми числами $\nu < \nu_1$. Следовательно, это и все последующие решения с номерами $n \geqslant n_1$ будут содержать пары гармоник – с каждой гармоникой из нижней части спектра будет сосуществовать её коротковолновый «двойник» с одинаковым множителем роста. Такое паразитное возбуждение коротковолновых гармоник искажает значения соответствующих показателей.

На рис. 6 построена плоскость фурье-спектров столбцов матрицы Q уравнения Гинзбурга–Ландау для случая, когда условие монотонности (17) нарушено. Параметры и граничные условия те же, что и на рис. 5. Видно, что столбцы из левой половины рисунка имеют «нормальную» фурье-структуру, а именно: доминирующее волновое число пропорционально номеру столбца. В центре плоскости мы видим

В последнее время широко исследуются процессы, происходящие в поперечном сечении световой волны, распространяющейся в широкоапертурных лазерных и пассивных оптических системах [6]. Большая область таких явлений, включающая возникновение в поперечном сечении широкоапертурных резонаторов упорядоченных или хаотических пространственно-временных оптических структур, в настоящее время образует направление названное поперечной нелинейной оптикой. В [7–9] теоретически и экспериментально было показано, что с увеличением числа Френеля или параметра накачки в широкоапертурном резонаторе неодимового лазера происходит переход от стационарных поперечных картин к периодическим, квазипериодическим и сильно нерегулярным, возможно, хаотическим картинам. Аналогичные результаты были получены в [9–11] для электроразрядного CO_2 лазера, а также широкоапертурного полупроводникового лазера [12].

Для описания этих явлений необходимо проведение исследований уже не точечных, а распределенных динамических систем. В [11, 13–15] было показано, что наблюдаемые эффекты могут быть качественно объяснены на основе простой системы уравнений Максвелла–Блоха с отстроенной продольной частотой. Были найдены условия рождения бегущих периодических волн в результате бифуркации Андронова–Хопфа.

В работе [16] найдено условие, при котором возможно адиабатически исключить поляризацию из уравнений Максвелла–Блоха. Исследование таких упрощенных уравнений с исключенной поляризацией также показало, что при отрицательно отстроенной частоте возможно возникновение периодических оптических волн, бегущих поперек апертуры, найдены инкременты нарастания, частота и скорость этих волн в аналитическом виде [17–19].

В [20] впервые математически строго показано, что в автомодельной системе уравнений Максвелла–Блоха с адиабатически исключенной поляризацией переход к хаотическому режиму (при изменении скорости распространения волны поперек апертуры) осуществляется через бифуркации удвоения эргодического двумерного тора. Ранее в [21] было показано, что при выполнении условий неустойчивости режима стационарной генерации в лазере с отстройкой частоты фазовый портрет, построенный в любой пространственной точке на апертуре в координатах {мнимая и реальные части амплитуды электрического поля, коэффициент усиления}, имеет вид тора. Это соответствует квазипериодическому режиму колебаний компонент поля. Однако причина такого поведения компонент поля и их возможные дальнейшие бифуркации рассмотрены не были.

В настоящей работе предложен механизм возникновения квазипериодических колебаний в автомодельной системе Максвелла–Блоха, предусматривающий рождение устойчивого двумерного тора из особой замкнутой кривой, и проведено детальное исследование его дальнейших бифуркаций.

1. Основные уравнения. Линейный анализ устойчивости

Как и в [17,20], в качестве исходной рассмотрим систему уравнений Максвелла–Блоха с адиабатически исключенной поляризацией

$$\frac{\partial E}{\partial t} - i\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} = \frac{\nu}{2}E\left(\frac{N}{1+\Delta_0^2} - 1\right)(1 - i\Delta_0)\,,$$
$$\frac{\partial N}{\partial t} = N_{un} - N\left(1 + \frac{J}{1+\Delta_0^2}\right). \tag{1}$$

Модель (1) описывает пространственно-временную динамику лазера в двухуровневом приближении в предположении, что поляризация мгновенно следует за изменениями оптического поля. Предполагается также, что генерация происходит на одной продольной моде резонатора Фабри–Перо. Здесь E – медленно меняющаяся амплитуда поля в широкоапертурном лазере в одномерном (планарном) приближении, нормированная на величину E_s, E_s – амплитуда поля насыщения в активной среде; $N = g/g_t$, g и g_t – коэффициенты усиления активной среды на центральной частоте лазерного перехода и потери, усредненные по длине резонатора; безразмерное время и координата связаны с размерными величинами t_d и x_d, как $t = t_d/T_i$, $x = x_d(2k/T_i c)^{1/2}$, k – волновое число, c – скорость света, T_i – скорость релаксации населенности уровней активной среды; $\nu = cT_i g_t$ – коэффициент, определяющий отношение времени релаксации населенности активной среды ко времени жизни фотонов в резонаторе; $\Delta_0 = (\omega_0 - \omega)/T_p$ – отстройка частоты генерации от центра линии усиления активной среды, нормированная на полуширину линии усиления, T_p – время релаксации поляризации; J=$|E|^2$, $N_{un} = g_{un}/g_t$, g_{un} – ненасыщенный коэффициент усиления на частоте ω_0.

Перейдем к автомодельной системе координат и с учетом, что $E = E_1 + iE_2$, получим

$$\begin{aligned}
&\frac{dE_1}{d\xi} = Y,\\
&\frac{dE_2}{d\xi} = Z,\\
&\frac{dN}{d\xi} = N_{un} - N\left[1 + \frac{E_1^2 + E_2^2}{1+\Delta_0^2}\right],\\
&\frac{dY}{d\xi} = -\frac{1}{\beta^2}\left[\frac{\nu}{2}\left(\frac{N}{1+\Delta_0^2} - 1\right)(E_2 - \Delta_0 E_1) - Z\right],\\
&\frac{dZ}{d\xi} = \frac{1}{\beta^2}\left[\frac{\nu}{2}\left(\frac{N}{1+\Delta_0^2} - 1\right)(E_1 + \Delta_0 E_2) - Y\right].
\end{aligned} \tag{2}$$

Здесь $\xi = t - \beta x$, где $1/\beta$ – скорость волны, распространяющейся в поперечном к оси резонатора направлении.

Динамическая система (2) имеет два состояния равновесия. Первое состояние равновесия соответствует отсутствию генерации: $E = 0$, $N = N_{un}$. В данной работе исследуется второе состояние равновесия системы (2) – нетривиальный стационарный режим генерации с постоянной интенсивностью J_{st}. Интересующему нас режиму стационарной генерации в фазовом объеме соответствует особая окружность: $E_{1st}^2 + E_{2st}^2 = J_{st} = N_{un} - 1 - \Delta_0^2$, $N_{st} = 1 + \Delta_0^2$, $Y_{st} = 0$, $Z_{st} = 0$. Нетрудно убедиться в том, что собственные значения матрицы линеаризации различных особых точек, принадлежащих особой замкнутой кривой, не зависят от угла поворота $\phi = \mathrm{arctg}(E_2/E_1)$ и являются постоянными для любой точки на особой окружности при фиксированном значении параметров модели. От точки к точке будут изменяться лишь собственные векторы матрицы линеаризации. В [17] показано, что стационарное состояние (J_{st}, N_{st}) становится неустойчивым при

$$\beta > \beta_{bif} = \left[-\frac{(1+I_{st})\,\Delta_0}{(1+I_{st})^2 + \Delta_0^2 \nu I_{st}}\right]^{\frac{1}{2}},$$

комплексное, а если d вещественное, то эта особенность находится на отрицательной полуоси из-за того, что мы рассматриваем только $d > 0$. Поэтому имеет значение только положение минимума. Если $|\delta| < 2$, то минимум находится правее единицы, и, следовательно, в интересующей нас области изменения $\nu \in [0, 1]$ множитель роста монотонно убывает, что качественно соответствует поведению множителя роста гармоник α для аналитического решения уравнения (11). Принимая во внимание выражение для δ (14), можно записать условие монотонности $\nu_0 > 1$ в следующей форме:

$$\Delta t < \frac{\Delta x^2}{2|d|}. \tag{17}$$

Это условие накладывает достаточно сильное ограничение на допустимые значения Δt и Δx. Если $\Delta x = 0.1$ и $|d|$ принять равным единице, то $\Delta t < 0.005$.

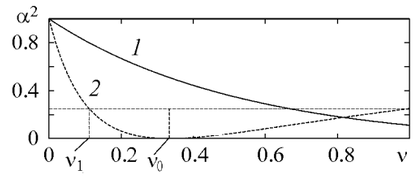


Рис. 4. Множитель роста пространственных гармоник для различных δ: *1* – 1.0, *2* – 6.0; смешанная схема при $\sigma = 1/2$

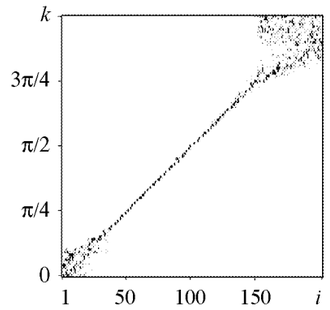


Рис. 5. Фурье-спектры столбцов матрицы Q для уравнения Гинзбурга–Ландау. Смешанная схема. Длина системы $X = 25$, параметры $c = 3$, $b = -2$, граничные условия (7). $\Delta x = 0.25$, $\Delta t = 0.013$. Условие монотонности (17) выполняется

На рис. 4 построены графики зависимости $\alpha^2(\nu)$ при различных значениях δ, которые для простоты считаются вещественными. Кривая *1* иллюстрирует случай, когда $|\delta|$ мало и условие монотонности (17) выполняется.

Для иллюстрации случая монотонного поведения множителя роста обратимся к уравнению Гинзбурга–Ландау (6) с граничными условиями (7). Как и раньше, будем решать это уравнение при помощи смешанного нелинейного метода, идея которого описана в разделе 2. Значения Δx и Δt подберём так, чтобы выполнялось условие монотонности (17). Чтобы найти d, разложим уравнение на вещественную и мнимую части и, построив матрицу D в явном виде, получим: $d = 1 \pm \mathrm{i}b$. Вместе с основным уравнением будем решать систему уравнений вида (8), используя смешанную схему Кранка–Николсона и выполняя QR-разложения матрицы решений по методу Хаусхолдера после каждых T единиц времени. На рис. 5 изображены фурье-спектры столбцов матрицы Q, полученной после очередной QR-процедуры. По горизонтальной оси отложены номера столбцов, которые соответствуют номерам показателей Ляпунова, а вдоль вертикальной оси отложены значения волнового числа. Оттенки серого показывают значения фурье-амплитуд. Для вычисления спектров из каждого столбца Q отбирались элементы, соответствующие только вещественным частям переменной u.

Из рисунка видно, что спектры имеют чётко выраженное основное волновое число и его значение пропорционально номеру столбца, то есть номеру показателя Ляпунова. Устройство спектров обусловлено разбиением касательного пространства уравнения Гинзбурга–Ландау на активные, или физические, и изолированные моды. Сгущение в левом нижнем углу плоскости образовано активными модам. Есть

при слишком большом T, нужно в процессе накопления диагональных элементов R проверять их значения – они должны быть хотя бы на несколько порядков больше машинного эпсилон.

Основным недостатком методов Грама–Шмидта является рост погрешности с увеличением интервала T. Особенно существенно это для классического метода. Применение методов Грама–Шмидта для вычисления показателей Ляпунова допустимо, если количество искомых показателей много меньше размерности фазового пространства дискретного представления системы. В случае, когда требуется найти все или почти все показатели, нужно выполнять ортогонализации достаточно часто, так чтобы число обусловленности матрицы решений уравнений для инфинитезимальных возмущений оставалось низким.

3. Паразитное возбуждение коротковолновых пространственных гармоник

Вычисляя показатели Ляпунова, мы должны решать систему уравнений для инфинитезимальных возмущений. Если для этого используется метод конечных разностей, то при неправильном выборе шага по времени по сравнению с шагом по координате, в решениях могут быть возбуждены коротковолновые гармоники, что приводит к вычислению некорректных значений показателей. В этом разделе мы найдём условия, которые должны быть наложены на величины шагов, чтобы избежать паразитного возбуждения.

3.1. Множитель роста пространственных гармоник. Рассмотрим распределённую систему, заданную уравнением в частных производных

$$\partial_t \vec{u} = f(\vec{u}, x, t) + \mathrm{D}\partial_x^2 \vec{u}, \tag{9}$$

где $\vec{u} \equiv \vec{u}(x,t)$ – вектор динамических переменных, $f(\vec{u}, x, t)$ – нелинейная векторная функция, и D – матрица с неотрицательными вещественными частями собственных чисел. Если матрица D диагональная, то уравнение (9) описывает класс реакционно-диффузионных систем. Эти системы широко используются в качестве моделей активных сред и могут демонстрировать как различные виды структурообразования, так и хаотическую динамику. Комплексное уравнение Гинзбурга–Ландау (6), представленное в виде пары уравнений для вещественной и мнимой частей, также имеет структуру, задаваемую уравнением (9).

Уравнение для инфинитезимальных возмущений $\vec{v} \equiv \vec{v}(x,t)$ имеет вид:

$$\partial_t \vec{v} = \mathrm{J}(\vec{u}, x, t)\vec{v} + \mathrm{D}\partial_x^2 \vec{v}, \tag{10}$$

где $\mathrm{J}(\vec{u}, t)$ – матрица Якоби, построенная из производных компонент векторной функции $f(\vec{u}, x, t)$ по компонентам вектора $\vec{u}$. Это уравнение можно интерпретировать как линейную систему под внешним параметрическим воздействием, за включение которого отвечает матрица Якоби. Выбирая разные начальные распределения, мы можем наблюдать экспоненциальный рост или затухание решения, причём усреднённый показатель экспоненты равен одному из показателей Ляпунова системы (9).

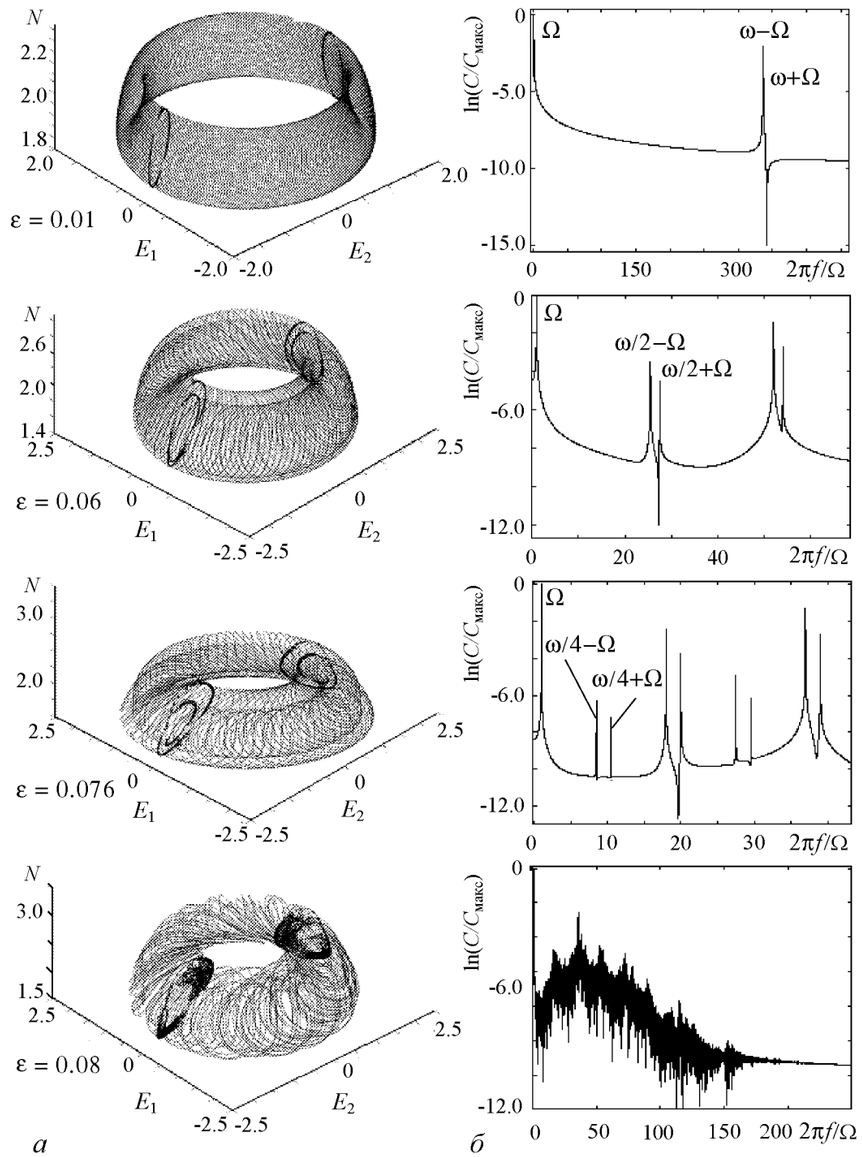


Рис. 2. Последовательность бифуркаций удвоения тора при увеличении параметра ε в пространстве (E_1, E_2, N): фазовый объем (*а*), спектр колебаний E_1 (*б*). C – мощность спектра, $C_{\max}$ – максимальное значение мощности, f – линейная частота

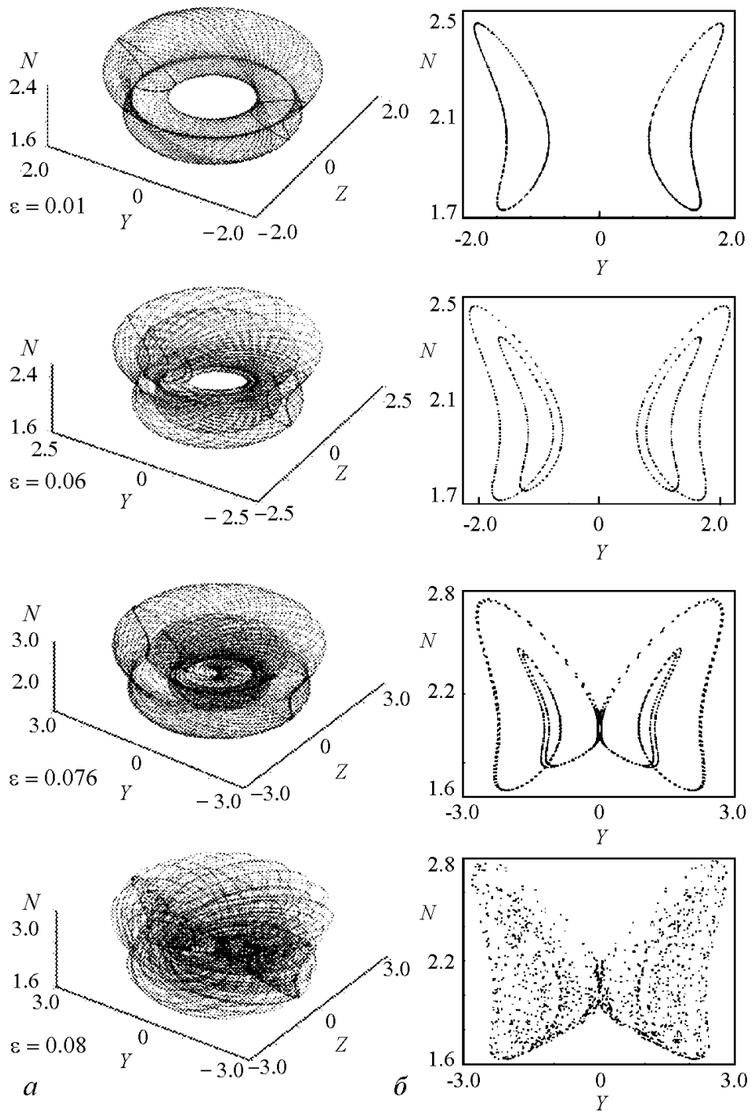


Рис. 3. Последовательность бифуркаций удвоения тора при увеличении параметра ε в пространстве (Y, Z, N): фазовый объем (*а*), сечение Пуанкаре (*б*)

составляет несколько единиц, при $n = m = 150$ оно достигает нескольких десятков, а при $n = m = 250$ его значение имеет порядок 10^6. Как видно из рис. 2, в последнем случае погрешность методов Грама–Шмидта быстро нарастает с ростом n. При этом погрешность классического метода достигает неприемлемо высоких значений. Иными словами, методы Грама–Шмидта работают в данном случае хорошо, только если число искомых показателей n много меньше их полного количества m.

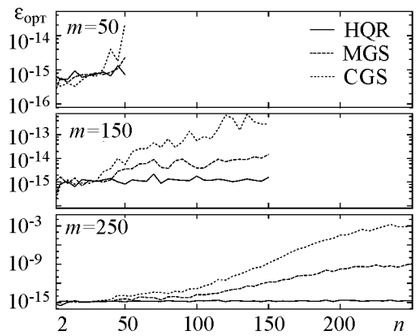


Рис. 2. То же, что на рис. 1, при $T = 0.6$

Метод на основе преобразования Хаусхолдера хорошо работает даже когда число обусловленности ортогонализируемой матрицы велико. Его погрешность находится на уровне 10^{-15}. Это значение близко к машинному эпсилон*, которое для чисел двойной точности приблизительно равно 10^{-16}. Такая точность, по всей вероятности, является максимально возможной.

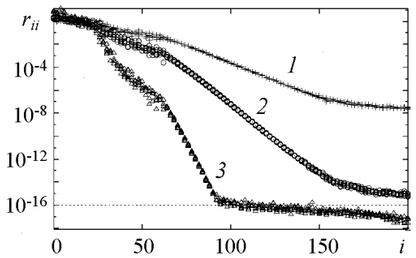


Рис. 3. Диагональные элементы матриц R, полученных после нескольких QR-шагов, выполненных с использованием вращения Хаусхолдера при различных T: *1* – 1.0; *2* – 2.0; *3* – 5.0. По вертикальной оси использован логарифмический масштаб. Горизонтальная пунктирная линия проведена на уровне машинного эпсилон 10^{-16}

Для выяснения границ применимости метода Хаусхолдера на рис. 3 построены значения диагональных элементов матриц R, полученных в результате выполнения нескольких QR-шагов. Вычисления производились при $\Delta x = 0.5$. Зависимости *1* и *2* представляют по 10 наборов значений r_{ii}, вычисленных при $T = 1.0$ и $T = 2.0$, соответственно. Так как зависимости *1* и *2* получены при разных T, то они имеют разные масштабы. Однако их структура одинакова и, если выполнить усреднение их логарифмов за время счёта, получим одни и те же значения показателей Ляпунова. Диагональные элементы r_{ii}, рассчитанные при $T = 5.0$, выглядят иначе: примерно при $i = 100$ зависимость претерпевает излом (см. кривую *3*), которого нет на двух других кривых. Это происходит, когда r_{ii} становится меньше машинного эпсилон, отмеченного на рисунке горизонтальной пунктирной линией. Так как диагональные элементы R суть составляющие векторов $\vec{v}_i$ вдоль $\vec{q}_i$, то можно сделать вывод, что ортогонализация на основе преобразования Хаусхолдера перестаёт корректно работать, когда угол между векторами настолько мал, что ортогональные их направлениям проекции имеют величину меньше машинного эпсилон.

Таким образом, можно заключить, что наилучшим является метод ортогонализации на основе преобразования Хаусхолдера. Однако, чтобы избежать ошибки

*Напомним, что машинное эпсилон – это величина шага дискретизации машинного представления вещественных чисел в окрестности единицы.

5. После достаточно большого числа повторов усредняем накопленные логарифмы за время счёта и получаем показатели Ляпунова.

Для того чтобы инициализировать эту процедуру, можно сгенерировать случайную матрицу V и выполнить её QR-разложение. Полученную матрицу R нужно отбросить, а Q использовать как стартовое значение для итераций.

Описанная процедура как таковая не зависит ни от природы решаемых уравнений, ни от метода поиска решений. Единственное требование состоит в том, что мы должны использовать столбцы матрицы Q как начальные состояния уравнений для инфинитезимальных возмущений, а найдя решения этих уравнений за время T, представить их в виде матрицы V. Поэтому, если система задана уравнением в частных производных и её решение ищется численно, то показатели Ляпунова для такой системы могут быть найдены при помощи данного алгоритма.

2. Выбор метода вычисления QR-разложения

Основная проблема при вычислении показателей Ляпунова состоит в том, что из-за доминирования старших показателей над младшими столбцы матрицы V стремятся выстроиться вдоль одного и того же направления. Для предотвращения этого должна быть использована процедура ортогонализации, которая хорошо справляется с матрицами, имеющими столбцы почти параллельные друг другу. Широко применяются следующие методы [9]:

- преобразование Хаусхолдера (HQR);
- модифицированный метод Грама–Шмидта (MGS);
- классический метод Грама–Шмидта (CGS).

Известно, что наиболее высокую точность имеет метод на основе преобразования Хаусхолдера [9]. Именно его рекомендуется использовать при вычислении показателей Ляпунова [10]. Однако исторически сложилось так, что чаще всего применяются методы Грама–Шмидта, которые, как известно из учебников по численным методам, могут иметь большую погрешность [9]. Поэтому далее мы протестируем три упомянутых метода применительно к системе с высокой размерностью фазового пространства, чтобы выяснить, в каких случаях методы Грама–Шмидта работают хорошо, а когда их использование нежелательно.

Идея классического метода Грама–Шмидта такова. Первый вектор-столбец $\vec{v}_1$ матрицы V мы только нормируем на единицу, получая $\vec{q}_1$. Второй вектор $\vec{v}_2$ мы поворачиваем в плоскости векторов $\vec{q}_1$ и $\vec{v}_2$ таким образом, чтобы он стал перпендикулярным $\vec{q}_1$, а затем нормируем его на единицу и получаем $\vec{q}_2$. Тем самым мы сохраняем подпространство, которому принадлежали векторы $\vec{v}_1$ и $\vec{v}_2$ до ортогонализации, и поэтому $\vec{v}_2$ может быть выражен как линейная комбинация $\vec{q}_1$ и $\vec{q}_2$. Далее, третий вектор точно также поворачиваем в пространстве векторов $\vec{q}_1$, $\vec{q}_2$ и $\vec{v}_3$ так, чтобы он стал перпендикулярным $\vec{q}_1$ и $\vec{q}_2$, нормируем его и получаем $\vec{q}_3$. С остальными поступаем аналогичным образом. После того как процедура выполнена, мы получаем матрицу Q, столбцами которой являются $\vec{q}_i$. Одновременно мы находим проекции $\vec{v}_i$ на $\vec{q}_i$, которые являются диагональными элементами матрицы R. Все прочие элементы этой матрицы не используются при вычислении показателей Ляпунова.

Модифицированный метод Грама–Шмидта работает точно так же, за тем ис-

Заключение

Рассмотренная модель реализует, не описанную в литературе, бифуркацию рождения устойчивого двумерного эргодического тора из особой замкнутой кривой. Исследуемая модель близка к бифуркации рождения тора из предельного цикла тем, что совокупность «слепленных» циклов составляет аттрактор в виде устойчивого двумерного тора. Заметим, что особая кривая в плоскости (E_1, E_2) не является чем-то уникальным, по крайней мере, для лазерных систем. Такая кривая всегда существует в лазерной системе, где состоянием равновесия является режим стационарной генерации с постоянной интенсивностью. Однако существование такой кривой не всегда означает существование аттрактора в виде тора. Примером может служить хорошо известная точечная модель Лоренца. При отсутствии отстройки частоты генерации фаза не меняется во времени [28], а следовательно, амплитуды поля и поляризации можно считать чисто действительными величинами. Введение ненулевой отстройки в тех же самых уравнениях сразу приводит к динамике фазы во времени, вращению фазовых траекторий вокруг особой кривой, квазипериодическому движению [5]. Представляет интерес поиск других типов фазовой нелинейности в лазерной системе, приводящих к рождению тора из особой замкнутой кривой.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Федеральной целевой программы «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 годы, НК-387П/27, ГК П1930, аналитической целевой программы «Развитие научного потенциала высшей школы» (2009–2010), проект 2.1.1/309, НОЦ 14.

Библиографический список

1. *Lorenz E.N.* Deterministic nonperiodic flow // J. Atm. Sci. 1963. Vol. 20 P. 130.
2. *Грасюк А.З., Ораевский А.Н.* // Труды IV Международного конгресса по лампам СВЧ. Голландия, Шевининген, 1962. Труды 31 курса летней школы Энрико Ферми. Италия, Варенна, 1963.
3. *Ораевский А.Н.* Мазеры, лазеры и странные аттракторы // Квантовая электроника. 1981. Т. 8, № 1. С. 130.
4. *Haken H.* Analogy between higher instabilities in fluids and lasers // Phys. Lett. A. 1975. Vol. 53. P. 77.
5. *Letellier C.* Modding out a continuous rotation symmetry for disentangling a laser dynamics // International Journal of Bifurcation and Chaos. 2003. Vol. 13, № 6. P. 1573.
6. *Weiss C.O., Larionova Ye.* Pattern formation in optical resonators // Rep. Prog. Phys. 2007. Vol. 70. P. 255.
7. *Hollinger F., Jung Chr., Weber H.* Simple mathematical model describing multi-transversal solid-state lasers // J. Opt. Soc. Am. B. 1990. Vol. 7, № 6. P. 1013.
8. *Hollinger F., Jung Chr.* Single-longitudinal-mode laser as a discrete dynamical system // J. Opt. Soc. Am. B. 1985. Vol. 2, № 1. P. 218.
9. *Cabrera E., Calderon O.G., Melle S., Guerra J.M.* Development of spatial turbulence from boundary-controlled patterns in class-B lasers // Phys. Rev. A. 2006. Vol. 73. 053820.

10. *Huyet G., Tredicce J.R.* Spatio-temporal chaos in the transverse section of lasers // Physica D. 1996. Vol. 96. P. 209.
11. *Huyet G., Martinoni M.C., Tredicce J.R., Rica S.* Spatiotemporal dynamics of lasers with a large Fresnel number // Phys. Rev. Lett. 1995. Vol. 55. P. 738.
12. *O'Neil E., Houlihan J., McInerney J.G., Huyet G.* Dynamics of traveling waves in the transverse section of a laser // Phys. Rev. Lett. 2005. Vol. 94. 143901.
13. *Jacobsen P.K., Moloney J.V., Newell A.C., Indik R.* Space-time dynamics of wide-gain-section lasers // Phys. Rev. A. 1992. Vol. 45, № 11. P. 8129.
14. *Jacobsen P.K., Lega J., Feng Q., Staley M., Moloney J.V., Newell A.C.* Nonlinear transverse modes of large-aspect-ratio homogeneously broadened lasers: I. Analysis and numerical simulation // Phys. Rev. A. 1994. Vol. 49, № 5. P. 4189.
15. *Jacobsen P.K., Lega J., Feng Q., Staley M., Moloney J.V., Newell A.C.* Nonlinear transverse modes of large-aspect-ratio homogeneously broadened lasers: II. Pattern analysis near and beyond threshold // Phys. Rev. A. 1994. Vol. 49, № 5. P. 4201.
16. *Заикин А.П., Молевич Н.Е.* Влияние скорости кросс-релаксации на поперечную динамику излучения широкоапертурного лазера // Квантовая электроника. 2004. Т. 34, № 8. С. 731.
17. *Заикин А.П., Кургузкин А.А., Молевич Н.Е.* Периодические автоволновые структуры в широкоапертурном лазере с отстройкой частоты. 1. Бифуркационный анализ // Квантовая электроника. 1999. Т. 27, № 3. С. 246.
18. *Заикин А.П., Кургузкин А.А., Молевич Н.Е.* Периодические автоволновые структуры в широкоапертурном лазере с отстройкой частоты. 2. Распределенная модель // Квантовая электроника. 1999. Т. 27, №3. С. 249.
19. *Заикин А.П., Кургузкин А.А., Молевич Н.Е.* Влияние отстройки частоты на пространственно-временную структуру оптического поля широкоапертурного лазера // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 1999. Т. 7, № 5. С. 87.
20. *Кренц А.А., Молевич Н.Е.* Каскад бифуркаций удвоения тора в лазере с отстройкой частоты // Квантовая электроника. 2009. Т. 39, № 8. С. 751.
21. *Amroun D., Brunel M., Letellier C., Leblond H., Sanchez F.* Complex intermittent dynamics in large-aspect-ratio homogeneously broadened single-mode lasers // Physica D. 2005. Vol. 203. P. 185.
22. *Lugiato L.A., Oldano C., Narducci L.M.* Cooperative frequency locking and stationary spatial structures in lasers // J. Opt. Soc. Am. B. 1988. Vol. 5. P. 879.
23. *Эрроусмит Д., Плейс К.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. Качественная теория с приложениями. М.: Мир, 1986.
24. *Кузнецов С.П.* Динамический хаос: Курс лекций. М.: Изд-во Физико-математической литературы, 2001.
25. *Шустер Г.* Детерминированный хаос: Введение. М.: Мир, 1988.
26. *Анищенко В.С., Николаев С.М.* Генератор квазипериодических колебаний. Бифуркация удвоения двумерного тора // Письма в ЖЭТФ. 2005. Т. 31, вып. 19. С. 88.
27. *Анищенко В.С.* Сложные колебания в простых системах. М.: Наука, 1990.
28. *Zeghlache H., Mandel P.* Influence of detuning on properties of laser equations // J. Opt. Soc. Am. B. 1985. Vol. 2, № 1. P. 18.

Самарский филиал Физического института РАН

Поступила в редакцию 8.02.2010
После доработки 25.05.2010

само уравнение (2) – вариационным уравнением. Векторы $\vec{v}$ представляют собой касательные к траекториям исходной системы. Всевозможные касательные векторы образуют пространство, которое называется тангенциальным или касательным и имеет размерность, равную размерности фазового пространства m. Говорят, что уравнение (2) описывает динамику в касательном пространстве.

В зависимости от направления приложения возмущения и свойств системы, вектор $\vec{v}$ нарастает или затухает, причём в силу линейности уравнения (2), это происходит в среднем по экспоненциальному закону. Как гласит мультипликативная эргодическая теорема Оселедца [1], существует набор чисел $\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \ldots \geqslant \lambda_m$, количество которых равно размерности касательного пространства, таких что для любого начального возмущений $\vec{v}(0)$ существует показатель

$$\lambda(\vec{v}(0)) = \lim_{t\to\infty} t^{-1} \ln\left(\|\vec{v}(t)\|/\|\vec{v}(0)\|\right), \tag{3}$$

где $\lambda(\vec{v}(0))$ принимает значения из набора λ_i в зависимости от выбора $\vec{v}(0)$. Числа λ_i называют показателями Ляпунова. Также из мультипликативной эргодической теоремы следует, что сумма первых k показателей Ляпунова представляет собой средний показатель экспоненциального сжатия или растяжения k-мерного фазового объёма.

Старший показатель Ляпунова λ_1 вычисляется следующим образом. Мы должны в течение достаточно большого промежутка времени решать совместно уравнения (1) и (2), периодически выполняя перенормировки $\vec{v}$ и накапливая логарифмы норм, а затем усреднить накопленные значения за время счёта. Однако эта процедура не годится, когда нужно вычислить два или более показателей. Если попробовать решать сразу несколько уравнений вида (2), то независимо от выбора начальных условий все решения после некоторого времени счёта будут вести себя одинаковым образом и выстраиваться вдоль одного и того же направления, соответствующего λ_1. Это связано с тем, что старший показатель доминирует над всеми остальными. Чтобы этого избежать, в работе [7] было предложено периодически выполнять ортогонализацию системы решений таким способом, чтобы минимизировать это доминирование.

Алгоритм вычисления показателей Ляпунова выглядит следующим образом [7, 8].

1. В течение интервала времени T решаем уравнение (1) совместно с n уравнениями для инфинитезимальных возмущений (2), где n – количество показателей Ляпунова, которые мы хотим найти, $n \leqslant m$. Из полученных решений уравнений (2) строим матрицу V.

2. Выполняем QR-разложение [9] матрицы V, представляя её в виде произведения $\mathrm{V} = \mathrm{QR}$. Матрица Q является ортогональной, причём k-й столбец V является линейной комбинацией первых k столбцов Q. Матрица R имеет верхнюю треугольную структуру, её элементы суть проекции столбцов V на столбцы Q.

3. Произведение первых k диагональных элементов матрицы R равно объёму k-мерного параллелепипеда в касательном пространстве, в который трансформируется k-мерный единичный куб за время T. Поэтому для вычисления показателей Ляпунова мы накапливаем логарифмы диагональных элементов R.

4. Используем матрицу Q в качестве начального состояния уравнений для инфинитезимальных возмущений, решаем их в течение времени T и повторяем процедуру ортогонализации.

Кузнецов Сергей Петрович – родился в Москве (1951). Окончил Саратовский государственный университет (1973). С 1988 – сотрудник Саратовского филиала Института радиотехники и электроники РАН, в настоящее время – заведующий лабораторией теоретической нелинейной динамики. Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук в СГУ (1977) и доктора (1987) по специальности радиофизика. Профессор кафедры динамических систем. Автор учебно-научной монографии «Динамический хаос» и учебника «Нелинейные колебания» (в соавторстве с А.П. Кузнецовым и Н.М. Рыскиным). Опубликовал свыше 180 научных статей по нелинейной динамике, радиофизике и электронике. Под руководством С.П. Кузнецова защищены восемь кандидатских диссертаций. Лауреат государственной научной стипендии для ученых России (1994–1996), Соросовский доцент (1998), Соросовский профессор (2000, 2001). Член редакционной коллегии журнала «Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика».

410019 Саратов, ул. Зеленая, 38
Саратовский филиал Института радиотехники
и электроники РАН им. В.А. Котельникова
E-mail: spkuz@rambler.ru

Тюрюкина Людмила Владимировна – родилась в 1977 году. Окончила факультет нелинейных процессов СГУ (2000) и аспирантуру СГУ, защитив диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук (2003). В настоящее время старший научный сотрудник Саратовского филиала Института радиотехники и электроники РАН, ассистент базовой кафедры динамических систем СГУ в СО ИРЭ РАН. Получила звание доцента по специальности «Радиофизика». Область научных интересов – новые аспекты явления синхронизации и их выявление в системах различной физической природы (радиофизические системы, модели турбулентности, модели биофизических систем и др.); контроль (управление) неустойчивыми режимами; динамический хаос; физические системы с гиперболическими аттракторами. Автор более 80 научных публикаций, в том числе 30 статей в российских и зарубежных журналах и 3 учебно-методических пособий.

410019 Саратов, ул. Зеленая, д. 38
Саратовский филиал Института радиотехники
и электроники им. В.А. Котельникова РАН
E-mail: lvtur@rambler.ru

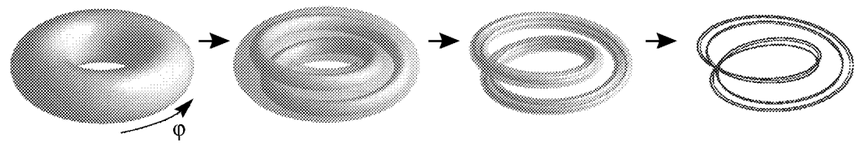


Рис. 1. Тороидальная область в трехмерном пространстве (слева), результат ее преобразования на двух итерациях и соленоид Смейла–Вильямса, получающийся при многократном применении отображения (справа)

Первоначально ожидалось, что гиперболические аттракторы обеспечат адекватное математическое описание многих физических ситуаций, где встречается хаос. Однако по мере накопления примеров конкретных систем с хаотической динамикой стало ясно, что они не вписываются в рамки ранней гиперболической теории. Лишь в самое последнее время появились примеры физически реализуемых систем с гиперболическими аттракторами, причем указано несколько возможных подходов к конструированию таких примеров [9–17].

В настоящей работе предлагается ряд моделей с гиперболическими аттракторами на основе диссипативных систем в присутствии периодических импульсных толчков. Для данного класса систем как вполне естественный выступает способ описания динамики в дискретном времени с помощью стробоскопического отображения (отображения Пуанкаре), задающего изменение состояния за период внешнего воздействия. Ранее такого рода модели успешно привлекались для построения физически реализуемых примеров, описываемых отображениями Эно и Заславского [18–19].

В первом разделе статьи вводится механическая модель, динамика которой состоит в движении частицы на плоскости с вязким трением под действием периодических импульсных толчков, причем их интенсивность и направление зависят от мгновенного положения частицы. Кроме того, присутствует постоянное во времени потенциальное поле, обладающее вращательной симметрией. Во втором разделе обсуждается модель на основе осциллятора ван дер Поля, на который воздействует вспомогательная инерционная диссипативная подсистема, возбуждаемая периодическими импульсными толчками, сила которых зависит от мгновенной обобщенной координаты осциллятора.

1. Механическая модель с гиперболическим аттрактором

Пусть на плоскости (x, y) частица единичной массы может перемещаться, испытывая вязкое трение, с силой, пропорциональной скорости. Для простоты примем коэффициент трения равным единице. Полагаем, что движение имеет место в потенциальном поле $U(x, y)$, обладающем вращательной симметрией относительно начала координат, причем минимум потенциала реализуется на окружности единичного радиуса. Кроме того, с периодом T производится на короткое время включение силового поля, величина и направление которого зависит от мгновенного положения частицы, в результате чего она получает импульс $\mathbf{P}(x, y) = P_x(x, y)\mathbf{i} + P_y(x, y)\mathbf{j}$.

В этих предположениях уравнения движения запишутся в виде:

$$\begin{aligned} \ddot{x} + \dot{x} &= -\frac{\partial U(x,y)}{\partial x} + P_x(x,y)\sum_n \delta(t-nT), \\ \ddot{y} + \dot{y} &= -\frac{\partial U(x,y)}{\partial y} + P_y(x,y)\sum_n \delta(t-nT). \end{aligned} \tag{1}$$

Конкретное пространственное распределение силового поля $\mathbf{P}(x,y)$ подберем из следующих соображений. Пусть в начальный момент имеем кольцо из частиц, покоящихся на единичной окружности с координатами $x = \cos\varphi$ и $y = \sin\varphi$. После толчка, вызванного включением силового поля, частица, характеризуемая начальным углом φ, получит импульс с компонентами $P_x(x,y)$ и $P_y(x,y)$, что приведет через некоторое время к изменению ее координат. Если считать пока потенциальное поле отсутствующим, нетрудно показать, что частица, сместившись по плоскости, остановится из-за трения в точке с координатами

$$x' = x + P_x(x,y), \quad y' = y + P_y(x,y). \tag{2}$$

Потребуем, чтобы при этом частицы расположились опять по единичной окружности, но так, чтобы однократный обход исходного кольца соответствовал двукратному обходу окружности при новом их размещении, то есть угловая координата претерпевала преобразование согласно соотношению

$$\varphi' = 2\varphi \qquad (\mathrm{mod}\ 2\pi). \tag{3}$$

Для этого новые координаты частицы должны быть

$$x' = \cos\varphi' = \cos 2\varphi, \quad y' = \sin\varphi' = \sin 2\varphi. \tag{4}$$

Нужный результат будет достигнут, если задать функции, характеризующие распределение силового поля, через угловую координату

$$\begin{aligned} P_x(x,y) &= x' - x = \cos 2\varphi - \cos\varphi, \\ P_y(x,y) &= y' - y = \sin 2\varphi - \sin\varphi. \end{aligned} \tag{5}$$

Согласно известным соотношениям для тригонометрических функций, имеем $P_x(x,y) = 2\cos^2\varphi - 1 - \cos\varphi$, $P_y(x,y) = 2\sin\varphi\cos\varphi - \sin\varphi$. Принимая во внимание связь декартовых координат с угловой координатой при расположении частицы на единичной окружности $x = \cos\varphi$ и $y = \sin\varphi$, положим

$$P_x(x,y) = 2x^2 - x - 1, \quad P_y(x,y) = 2xy - y. \tag{6}$$

Далее добавим постоянное во времени потенциальное поле, обладающее вращательной симметрией, так чтобы минимум потенциала имел место на окружности единичного радиуса. Для этого введем потенциальную функцию

$$U(x,y) = -\frac{1}{2}\mu(x^2+y^2) + \frac{1}{4}\mu(x^2+y^2)^2, \tag{7}$$

10. *Kuznetsov S.P.* Example of a physical system with a hyperbolic attractor of a Smale–Williams type // Phys. Rev. Lett. 2005. Vol. 95. 144101.
11. *Кузнецов С.П., Селезнев Е.П.* Хаотическая динамика в физической системе со странным аттрактором типа Смейла–Вильямса // ЖТЭФ. 2006. Т. 129, № 2. С. 400.
12. *Кузнецов С.П., Сатаев И.Р.* Проверка устойчивости гиперболичности хаотического аттрактора в системе связанных неавтономных осцилляторов ван дер Поля // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2006. Т. 14, № 5. С. 3.
13. *Купцов П.В., Кузнецов С.П.* О феноменах, сопровождающих переход к режиму синхронного хаоса в связанных неавтономных осцилляторах, представленных уравнениями для комплексных амплитуд // Нелинейная динамика. 2006. Т. 2, № 3. С. 307.
14. *Kuznetsov S.P., Pikovsky A.S.* Autonomous coupled oscillators with hyperbolic strange attractors // Physica D. 2007. Vol. 232. P. 87.
15. *Кузнецов А.П., Кузнецов С.П., Пиковский А.С., Тюрюкина Л.В.* Хаотическая динамика в системах связанных неавтономных осцилляторов с резонансным и нерезонансным механизмом передачи возбуждения // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2007. Т. 15, № 6. С. 75.
16. *Кузнецов С.П., Пономаренко В.И.* О возможности реализации странного аттрактора типа Смейла–Вильямса в радиотехническом генераторе с запаздыванием // Письма в ЖТФ. 2008. Т. 34. Вып.18, 1-8.
17. *Kuznetsov S.P., Pikovsky A.S.* Hyperbolic chaos in the phase dynamics of a Q-switched oscillator with delayed nonlinear feedbacks // Europhysics Letters. 2008. № 28. 10013.
18. *Heagy J.F.* A physical interpretation of the Hénon map // Physica D57. 1992. P. 436.
19. *Кузнецов С.П.* Динамический хаос. М.: Физматлит, 2006. 356 с.
20. *Benettin G., Galgani L., Giorgilli A., Strelcyn J.-M.* Lyapunov characteristic exponents for smooth dynamical systems and for Hamiltonian systems: A method for computing all of them. Part I: Theory. Part II: Numerical application // Meccanica. 1980. Vol. 15. P. 9.

СФ ИРЭ им. В.А. Котельникова РАН
Университет Потсдама

Поступила в редакцию *10.12.2009*
После доработки *30.04.2010*

ATTRACTORS OF SMALE–WILLIAMS TYPE IN PERIODICALLY KICKED MODEL SYSTEMS

S.P. Kuznetsov, L.V. Turukina

Examples of model non-autonomous systems are constructed and studied possessing hyperbolic attractors of Smale–Williams type in their stroboscopic maps. The dynamics is determined by application of a periodic sequence of kicks, in such way that on one period of the external driving the angular coordinate, or the phase of oscillations, behaves in accordance with an expanding circle map with chaotic dynamics.

Keywords: Chaos, hyperbolic attractor, kicked pulse, Lyapunov exponent, oscillator.

Отправляясь от уравнений (17), введем в рассмотрение следующую систему трех дифференциальных уравнений первого порядка, содержащую дополнительную динамическую переменную z:

$$\begin{aligned} &\dot{x} = \omega_0 y + z, \\ &\dot{y} = -\omega_0 x + (A - x^2)y, \\ &\gamma^{-1}\dot{z} + z = (4x^3 - 4x)\sum_n \delta(t - nT) + (-4x^3 + 2x)\sum_n \delta(t - \pi/2\omega_0 - nT). \end{aligned} \tag{18}$$

Первые два уравнения относительно динамических переменных x и y задают осциллятор ван дер Поля, на который воздействует вспомогательная подсистема, описываемая переменной z. Динамика этой подсистемы состоит в релаксации к положению равновесия в нуле с характерным временем, которое полагаем малым в сравнении с периодом колебаний осциллятора, то есть $\gamma^{-1} \ll 2\pi/\omega_0$. Она возбуждается последовательностью импульсных толчков с периодом $T \gg 2\pi/\omega_0$ и амплитудой, зависящей от мгновенного значения x обобщенной координаты осциллятора ван дер Поля. При этом на каждом полном периоде внешнего воздействия T имеет место пара толчков, разнесенных на четверть периода основной частоты осциллятора, $\pi/(2\omega_0)$. Поскольку четверть периода отвечает на фазовой плоскости повороту на 90°, то результат действия пары толчков приблизительно соответствует действию двух одновременных толчков в поперечных направлениях, как в модели (15). Если рассмотреть ансамбль идентичных осцилляторов, начальные состояния которых равномерно распределены по предельному циклу, то после воздействия пары импульсных толчков и релаксации с характерным временем γ^{-1} состояния систем ансамбля в проекции на фазовую плоскость образуют тройное кольцо. Динамика фазы осциллятора ван дер Поля будет описываться одномерным отображением типа Бернулли $\varphi' = 3\varphi \pmod 2)\pi$. Следовательно, можно ожидать, что в качестве аттрактора стробоскопического отображения будет иметь место объект типа соленоида Смейла–Вильямса, подобно предыдущей механической модели, но в трехмерном пространстве состояний (x, y, z). На одном шаге реализуется растяжение некоторой тороидальной области, охватывающей предельный цикл осциллятора ван дер Поля втрое, сжатие в поперечном направлении и вложение образа в виде тройного кольца в исходный тор.

В процессе эволюции во времени третья переменная z испытывает скачки, обусловленные присутствующими в системе уравнений (18) членами с дельта-функцией Дирака. Зависимость от времени переменных x и y непрерывная (хотя для x временная зависимость имеет изломы, то есть разрывы первой производной, а для y присутствуют разрывы второй производной). Численное решение уравнений на компьютере производится на интервалах времени между дельта-толчками обычным конечно-разностным методом с достаточно мелким шагом. Параметры системы и шаг разностной схемы выбраны так, чтобы эти интервалы содержали целое число шагов. В момент толчка переменные x и y не меняются, но производится переопределение переменной z с учетом приобретаемой ей конечной добавки. Далее вычисления продолжаются с новыми начальными условиями, отвечающими состоянию (x, y, z) сразу после толчка.

На рис. 3 показан портрет аттрактора и его увеличенный фрагмент в проекции на плоскость (x, y) в стробоскопическом сечении, отвечающем моменту непосредственно перед действием очередного импульса. На рисунке хорошо различима поперечная фрактальная структура аттрактора, который демонстрирует очевидное визуальное сходство с соленоидом Смейла–Вильямса. Оценка фрактальной размерности хаотического аттрактора, представленного на рис. 3, проводилась двумя методами: по спектру показателей Ляпунова с использованием формулы Каплана–Йорке, которая в данном случае имеет вид $D_\lambda = 1 + \lambda_1/|\lambda_2|$ (ляпуновская размерность), и численно на основе обработки временного ряда, порождаемого динамикой стробоскопического отображения, с применением алгоритма Грассбергера–Прокаччиа (корреляционная размерность) [7,19]. Проведенные вычисления показали, что обе размерности находятся в неплохом соответствии. Ляпуновская размерность составила $D_\lambda = 1.328$, а корреляционная размерность $D_c = 1.325$.

Обратимся к другой модификации модели (1) и зададим силовое поле таким образом, чтобы кольцо из частиц в результате импульсного толчка трансформировалось не в двойное, а в тройное кольцо. По аналогии с предыдущим случаем, если $x = \cos\varphi$ и $y = \sin\varphi$ есть начальные координаты частиц на единичной окружности, то их новые координаты должны удовлетворять соотношениям

$$x' = \cos\varphi', \quad y' = \sin\varphi', \tag{11}$$

где

$$\varphi' = 3\varphi \pmod{2\pi}. \tag{12}$$

Это достигается, если компоненты импульса задать через угловую координату в виде

$$\begin{aligned} P_x(x, y) &= x' - x = \cos 3\varphi - \cos\varphi, \\ P_y(x, y) &= y' - y = \sin 3\varphi - \sin\varphi. \end{aligned} \tag{13}$$

Используя известные соотношения для тригонометрических функций, можно переписать выражения для составляющих в декартовых координатах. Это дает

$$P_x(x, y) = 4x^3 - 4x, P_y(x, y) = -4y^3 + 2y. \tag{14}$$

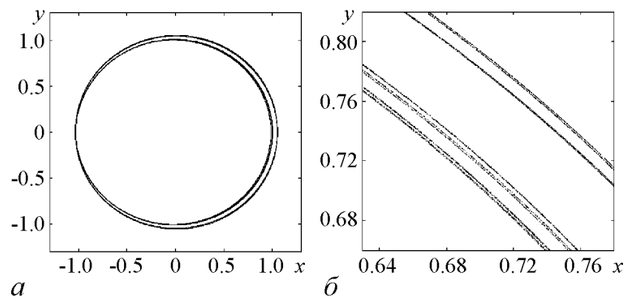


Рис. 3. Аттрактор (*а*) и его увеличенный фрагмент (*б*) в сечении Пуанкаре, отвечающем моменту непосредственно перед включением очередного импульса, в системе (8). Значения параметров $\mu = 0.44$ и $T = 5$

Постоянно действующее потенциальное поле оставим таким же, как и в предыдущем случае, см. формулу (7). Тогда уравнения (1) примут вид

$$\begin{aligned} \ddot{x} + \dot{x} &= \mu x(1 - x^2 - y^2) + (4x^3 - 4x)\sum_n \delta(t - nT), \\ \ddot{y} + \dot{y} &= \mu y(1 - x^2 - y^2) + (-4y^3 + 2y)\sum_n \delta(t - nT). \end{aligned} \tag{15}$$

Обратим внимание, что в данном случае потенциальным является не только постоянное поле, но и импульсное силовое поле тоже. При этом x-компонента и y-компонента силового поля зависят только от соответствующей координаты, что можно рассматривать как достоинство модели с точки зрения простоты ее практической реализации.

Как и в предыдущем случае, эволюция состояния системы за период описывается четырехмерным обратимым диссипативным отображением. Теперь, однако, в качестве аттрактора выступает разновидность соленоида Смейла–Вильямса, получающаяся растяжением некоторой тороидальной области втрое, сжатием в поперечном направлении и вложением образа в виде тройной петли внутрь исходного тора. На рис. 4 показан аттрактор системы (15) в проекции на плоскость (x, y) в стробоскопическом сечении, отвечающем моментам непосредственно перед включением каждого очередного импульса, а также фрагмент аттрактора с увеличенным разрешением. Из рисунка можно видеть, что аттрактор обладает поперечной фрактальной структурой.

На рис. 5, *а* приводится построенная численно итерационная диаграмма для угловых координат точек на аттракторе системы (15), вычисляемых по формуле (10) непосредственно перед включением каждого очередного импульса. Она демонстрирует хорошее соответствие с соотношением (12) – отображением типа Бернулли.

Чтобы количественно охарактеризовать хаотическую динамику, для системы (15) была построена зависимость показателей Ляпунова от параметра μ при фиксированной величине периода следования импульсов $T = 8$ (рис. 5, *б*). Видно, что старший показатель остается почти постоянным в достаточно широком диапазоне изменения параметра μ и близок к величине $\lambda_1 = (\ln 3)/T \approx 0.1373...$, что

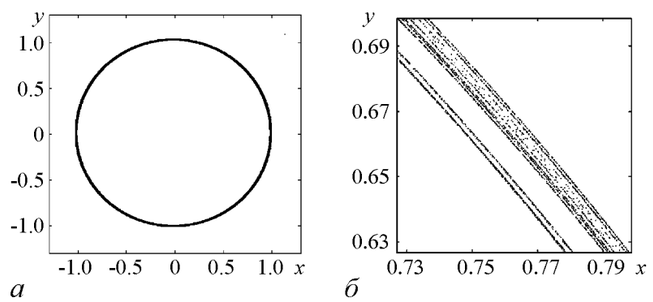


Рис. 4. Аттрактор (*а*) и его увеличенный фрагмент (*б*) системы (15) в сечении Пуанкаре, отвечающем моменту непосредственно перед включением импульсного воздействия. Аттрактор построен для $\mu = 0.22$ и $T = 8$

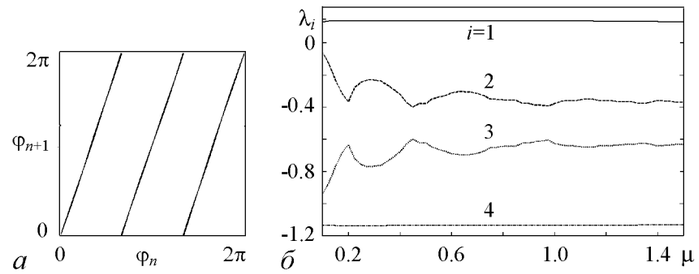


Рис. 5. *а* – Численно построенная итерационная диаграмма для угловой координаты φ точек на аттракторе системы (15) для $\mu = 0.22$ и $T = 8$. Угловая координата φ вычислялась в моменты времени перед включением импульсного воздействия. *б* – Полученная численно зависимость показателей Ляпунова от параметра μ для системы (15) при $T = 8$

соответствует приближенному описанию с помощью отображения утроения угловой переменной (12). Вычисление ляпуновской и корреляционной размерностей для хаотического аттрактора, представленного на рис. 4, дает результат, соответственно, $D_\lambda = 1.47$ и $D_c = 1.42$.

2. Система с гиперболическим аттрактором на основе осциллятора ван дер Поля

Достоинством рассмотренных выше механических моделей является их простота, однако, полная размерность фазового пространства отображений, описывающих эволюцию за период внешнего воздействия, в них на единицу больше минимальной размерности, требуемой для реализации аттрактора Смейла–Вильямса. Чтобы сконструировать пример с минимально необходимой размерностью фазового пространства, обратимся к модели на основе осциллятора ван дер Поля. В этом случае более естественной представляется скорее радиотехническая, нежели механическая интерпретация.

Классический осциллятор ван дер Поля задается дифференциальным уравнением второго порядка

$$\ddot{x} - (A - x^2)\dot{x} + \omega_0^2 x = 0. \tag{16}$$

Или, что эквивалентно, системой двух уравнений первого порядка

$$\dot{x} = \omega_0 y, \quad \dot{y} = -\omega_0 x + (A - x^2)y. \tag{17}$$

Здесь x и y – динамические переменные, ω_0 – собственная частота осциллятора, A – управляющий параметр. В области отрицательных A на фазовой плоскости (x, y) имеется устойчивая неподвижная точка в начале координат. При постепенном увеличении параметра, при $A = 0$ имеет место бифуркация рождения предельного цикла, размер которого увеличивается пропорционально $\sqrt{A}$. В частности, при $A = 0.25$ предельный цикл на плоскости (x, y) приближенно совпадает с единичной окружностью.

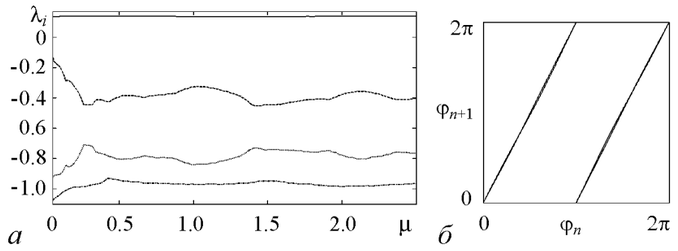


Рис. 2. *а* – Полученная численно зависимость показателей Ляпунова от параметра μ для системы (8) при $T = 5$. В широком диапазоне старший показатель остается почти постоянным и хорошо согласуется с оценкой $\lambda_1 = T^{-1} \ln 2 \approx 0.1386...$ *б* – Итерационная диаграмма для угловой координаты точек на аттракторе системы (8) при $\mu = 0.44$ и $T = 5$. Угловая координата φ вычисляется в момент перед включением очередного импульса

Ляпунова был реализован алгоритм Бенеттина [19,20], состоящий в одновременном решении системы (8) и полученных из нее линеаризованных уравнений для возмущений в промежутке между импульсами. (Период T полагается содержащим целое число шагов разностной схемы.) Действие импульса учитывается при задании начальных условий для каждой следующей стадии эволюции, а именно надлежащим пересчетом обобщенных скоростей и их вариаций под действием импульсного толчка. На каждом периоде непосредственно перед включением импульса выполняется ортогонализация Грама–Шмидта и нормализация для четырех векторов возмущения. Показатели Ляпунова получаются как средние скорости роста или уменьшения накапливающихся сумм логарифмов норм векторов возмущения (после ортогонализации, но до нормализации).

Показатели Ляпунова для дифференциальных уравнений λ_k и для стробоскопического отображения Λ_k связаны очевидным соотношением $\lambda_k = \Lambda_k/T$, $k = 1, 2, 3, 4$. Из рис. 2, *а* видно, что в широком диапазоне изменения параметра μ старший показатель Ляпунова Λ_1 остается практически постоянным и находится в хорошем соответствии с оценкой $\lambda_1 = \ln 2/T \approx 0.1386...$, где $\Lambda_1 = \ln 2$ – показатель для одномерного отображения Бернулли (3), описывающего динамику угловой координаты φ. Остальные показатели отрицательны. Спектр показателей Ляпунова указывает на наличие приблизительно двукратного локального растяжения по одному направлению, соответствующему угловой координате, и сжатия по остальным направлениям.

На рис. 2, *б* приводится итерационная диаграмма для угловой координаты, определяемой по формуле

$$\varphi = \arg(x + iy) \tag{10}$$

при динамике на аттракторе по результатам численных расчетов при $\mu = 0.44$ и $T = 5$. (Величина φ вычисляется в момент непосредственно перед включением каждого очередного импульсного толчка.) Как можно видеть из рисунка, отображение для угловой координаты соответствует по топологическому типу отображению Бернулли, поскольку однократный обход окружности для прообраза отвечает двукратному обходу для образа.

На рис. 6 в проекции на плоскость (x, y) показан аттрактор системы в стробоскопическом сечении, соответствующем моменту времени перед первым импульсом за период. Аттрактор построен для значений параметров $\omega_0 = 2\pi$, $\gamma = 35$, $A = 0.25$ и $T = 36$. Из рисунка видно, что аттрактор имеет вид, характерный для соленоида Смейла–Вильямса, и обладает фрактальной поперечной структурой. На рис. 7 показаны построенная численно итерационная диаграмма для фазы осциллятора ван дер Поля и график зависимости показателей Ляпунова от параметра A. Фаза осциллятора определялась в стробоскопическом сечении, соответствующем моменту перед началом первого за период импульса и вычислялась по формуле $\varphi = \arg(x + iy)$. Как можно видеть, полученное численно отображение для фазы топологически соответствует отображению типа Бернулли: однократный обход окружности при вариации фаз для прообраза отвечает трехкратному обходу для образа.

На графике зависимости показателей Ляпунова от параметра A можно видеть две области, в которых старший показатель остается почти постоянным и близок к величине, получаемой из оценки, основанной на отображении для фазы, а именно $\lambda_1 = (\ln 3)/T \approx 0.03052...$, где $T = 36$. Ляпуновская размерность аттрактора, показанного на рис. 6, составляет $D_\lambda = 1.119$, а корреляционная размерность, согласно результатам численных расчетов по методу Грассбергера–Прокаччиа, $D_c = 1.12$.

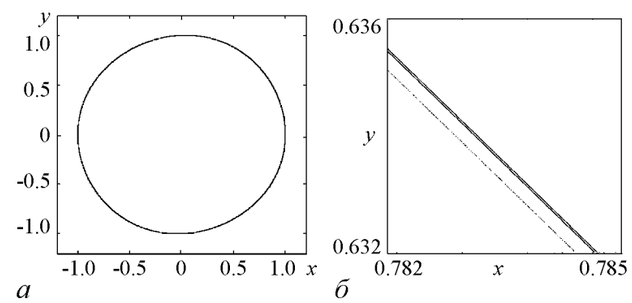


Рис. 6. Проекция аттрактора системы (18) на плоскость (x, y) (*а*) и ее увеличенный фрагмент (*б*) в сечении Пуанкаре, отвечающем моменту непосредственно перед включением первого за период импульса. Значения параметров: $\omega_0 = 2\pi$, $\gamma = 35$, $A = 0.25$ и $T = 36$

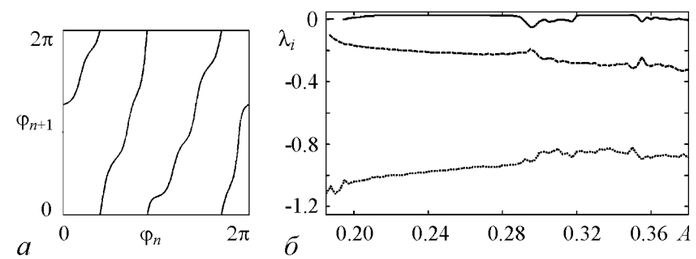


Рис. 7. *а* – Численно построенная итерационная диаграмма для фазы осциллятора ван дер Поля в стробоскопическом сечении, отвечающем моментам времени непосредственно перед началом первого за период импульса при $A = 0.25$. *б* – Полученная численно зависимость показателей Ляпунова от параметра A для системы (18). Значения остальных параметров $\omega_0 = 2\pi$, $\gamma = 35$, и $T = 36$

Заключение

Предложен принцип построения моделей с гиперболическими аттракторами типа Смейла–Вильямса на основе диссипативных систем с периодическим импульсным воздействием.

Представлена механическая модель движения частицы на плоскости с вязким трением в потенциальном поле с вращательной симметрией и минимумом на окружности при действии импульсных толчков, величина и направление которых зависят от мгновенного положения частицы. При этом аттрактор стробоскопического отображения вложен в четырехмерное пространство состояний.

Введена также модель на основе осциллятора ван дер Поля при наличии действующей на него вспомогательной диссипативной подсистемы, возбуждаемой периодической последовательностью попарно действующих импульсов, интенсивность которых зависит от мгновенной обобщенной координаты осциллятора. В этом случае стробоскопическое отображение трехмерное, что соответствует минимальной размерности, необходимой для присутствия аттрактора типа Смейла–Вильямса.

Предложенные модели с гиперболическими аттракторами просты и наглядны, почти тривиальны, благодаря чему могут представлять интерес в методических целях, в том числе для включения в учебные курсы и компьютерные практикумы.

Авторы благодарят профессора А.С. Пиковского за внимание к работе и полезное обсуждение.

Работа выполнена в ходе визитов авторов в университет Потсдама при поддержке гранта РФФИ-ННИО 08-02-91963.

Библиографический список

1. *Синай Я.Г.* Стохастичность динамических систем // В кн. Нелинейные волны. М.: Наука, 1979. 192 с.
2. *Гукенхеймер Дж., Холмс П.* Нелинейные колебания, динамические системы и бифуркации векторных полей. М.; Ижевск: Ин-т компьютерных исследований, 2002. 559 с.
3. *Devaney R.L.* An Introduction to Chaotic Dynamical Systems. NY: Addison–Wesley, 1989.
4. *Shilnikov L.* Mathematical problems of nonlinear dynamics: A Tutorial // Int. J. of Bif. & Chaos. 1997. Vol. 7, № 9. P. 1353.
5. *Каток А.Б., Хасселблат Б.* Введение в современную теорию динамических систем / Пер. с англ. М.: Факториал, 1999. 768 с.
6. *Afraimovich V. and Hsu S.-B.* Lectures on chaotic dynamical systems // AMS/IP Studies in Advanced Mathematics, Vol.28. American Mathematical Society, Providence RI, International Press, Somerville, MA, 2003.
7. *Ott E.* Chaos in Dynamical Systems. Cambridge University Press, 1993.
8. *Анищенко В.С., Астахов В.В., Вадивасова Т.Е., Нейман А.Б., Стрелкова Г.И., Шиманский-Гайер Л.* Нелинейные эффекты в хаотических и стохастических системах. Москва; Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2003.
9. *Кузнецов С.П.* Гиперболические странные аттракторы систем, допускающих физическую реализацию // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2009. Т. 17, № 4. P. 5.

где μ – некоторый параметр. Тогда динамические уравнения (1), описывающие динамику частицы на плоскости (x, y), примут вид

$$\begin{aligned} \ddot{x} + \dot{x} - \mu x(1 - x^2 - y^2) &= (2x^2 - x - 1)\sum_n \delta(t - nT), \\ \ddot{y} + \dot{y} - \mu y(1 - x^2 - y^2) &= (2xy - y)\sum_n \delta(t - nT). \end{aligned} \tag{8}$$

Параметр μ выберем относительно малым, чтобы за характерное время, в течение которого происходит движение частицы вследствие импульсного толчка (в принятой нормировке оно порядка единицы), смещение под действием потенциального поля $U(x, y)$ было невелико. Кроме того, выберем достаточно большой интервал времени между толчками T так, чтобы за это время частица успевала подойти к минимуму потенциального поля. Эти условия не очень жесткие, и их достаточно обеспечить хотя бы в грубом приближении.

Существенным является топологическое свойство ансамбля частиц после трансформации, а именно образование конфигурации, дважды охватывающей начало координат. Именно в связи с этим в отображении за период воздействия следует ожидать присутствия аттрактора типа Смейла–Вильямса. Сжатие в поперечном направлении в фазовом пространстве обеспечивается трением и действием потенциального поля, благодаря которому имеет место смещение частицы к единичной окружности, где реализуется минимум потенциала.

Мгновенное состояние системы в момент, непосредственно предшествующий очередному n-му толчку, задается четырехмерным вектором $\mathbf{x}_n = \{x, y, \dot{x}, \dot{y}\}_{t=nT-0}$. Изменение состояния за время до следующего толчка определяется некоторым четырехмерным отображением

$$\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{f}(\mathbf{x}_n). \tag{9}$$

Это стробоскопическое отображение Пуанкаре для данной системы. Его можно мыслить как результат последовательного выполнения двух отображений. Сначала имеет место аддитивная добавка к компонентам скорости частицы $\dot{x}, \dot{y}$ без изменения ее координат x, y. Затем, в промежутке времени между импульсами происходит плавная эволюция четырехмерного вектора состояния, описываемая дифференциальными уравнениями (8) с нулевыми правыми частями. Отображение на первом этапе имеет вид $\{x', y', \dot{x}', \dot{y}'\} = \{x, y, \dot{x} + P_x(x, y), \dot{y} + P_y(x, y)\}$. Заметим, что оно обратимое: обратное преобразование $\{x, y, \dot{x}, \dot{y}\} = \{x', y', \dot{x}' - P_x(x', y'), \dot{y}' - P_y(x', y')\}$. Отображение, производимое на втором этапе, также обратимое, что является следствием теоремы существования и единственности решения системы дифференциальных уравнений. Получить его в аналитической форме не удается, но можно реализовать как выполняемую на компьютере процедуру путем численного решения дифференциальных уравнений на интервале времени T. При этом начальные условия для компонент скорости задаются с учетом добавок, полученных в результате действия импульсного толчка. Как композиция двух обратимых преобразований, отображение (9) также является обратимым, как это и требуется для реализации аттрактора Смейла–Вильямса.

На рис. 2, *а* представлены графики показателей Ляпунова, количественно характеризующих хаотическую динамику системы, в зависимости от параметра μ при фиксированном периоде следования импульсов $T = 5$. Для вычисления показателей

Изв. вузов «ПНД», т. 18, № 5, 2010 УДК 517.9

АТТРАКТОРЫ ТИПА СМЕЙЛА–ВИЛЬЯМСА В МОДЕЛЬНЫХ СИСТЕМАХ С ИМПУЛЬСНЫМ ПЕРИОДИЧЕСКИМ ВОЗДЕЙСТВИЕМ

С.П. Кузнецов, Л.В. Тюрюкина

Сконструировано и исследовано несколько примеров модельных неавтономных систем с гиперболическими аттракторами типа Смейла–Вильямса в стробоскопическом отображении. Их динамика определяется присутствием внешнего воздействия в виде периодической последовательности коротких импульсов, причем за период воздействия угловая координата или фаза ведет себя соответственно итерациям растягивающего отображения окружности с хаотической динамикой.

Ключевые слова: Хаос, гиперболический аттрактор, импульсное воздействие, показатель Ляпунова, осциллятор.

Введение

В математической теории динамических систем известен класс *однородно гиперболических аттракторов* [1–6]. Это аттракторы, состоящие исключительно из траекторий седлового типа, причем хаотическая природа динамики для них строго математически обоснована. Они обладают свойством структурной устойчивости, то есть устройство фазового пространства и характеристики хаоса нечувствительны к вариации параметров и функций в уравнениях, определяющих динамику. В учебниках и обзорах по нелинейной динамике в качестве примеров с гиперболическими аттракторами обычно фигурируют модели с дискретным временем на основе геометрических конструкций [1–8]. Например, аттрактор Смейла–Вильямса в простейшем случае имеет место в трехмерном отображении, определенном так, что при его действии некоторая область в форме тора, претерпев продольное растяжение и поперечное сжатие, оказывается вложенной в виде двойной петли внутрь исходного тора (рис. 1). При этом угловая координата φ претерпевает преобразование удвоения: $\varphi' = 2\varphi(\bmod 2\pi)$, о котором говорят как о растягивающем отображении окружности или отображении Бернулли. При многократном применении отображения результатом оказывается так называемый соленоид, содержащий бесконечное число витков с тонкой поперечной фрактальной структурой (типа канторова множества).

Изв. вузов «ПНД», т. 18, № 5, 2010 УДК 517.9

ВЫЧИСЛЕНИЕ ПОКАЗАТЕЛЕЙ ЛЯПУНОВА ДЛЯ РАСПРЕДЕЛЁННЫХ СИСТЕМ: ПРЕИМУЩЕСТВА И НЕДОСТАТКИ РАЗЛИЧНЫХ ЧИСЛЕННЫХ МЕТОДОВ

П.В. Купцов

При вычислении показателей Ляпунова для распределённых систем возникают специфические сложности, обусловленные природой этих систем. В этой статье обсуждается точность разных алгоритмов ортогонализации применительно к возникающим в ходе расчётов плохо обусловленным матрицам большого размера. Также исследуется паразитное возбуждение коротковолновых пространственных гармоник, которое, как было обнаружено, может происходить при использовании для решения уравнений метода конечных разностей и приводит к грубым ошибкам вычисления показателей. На основе результатов выполненного анализа формулируются практические рекомендации по выбору оптимальных численных методов.

Ключевые слова: Показатели Ляпунова, пространственно-временной хаос, метод конечных разностей, комплексное уравнение Гинзбурга–Ландау, QR-разложение.

Введение

Показатели Ляпунова характеризуют устойчивость движения динамических систем в фазовом пространстве. Математическое обоснование существования этих показателей для сосредоточенных систем даёт мультипликативная эргодическая теорема Оселедца [1, 2]. Распределённые системы имеют бесконечное число степеней свободы, и поэтому теорема Оселедца напрямую к ним не применима. В работе [3] обсуждаются обобщения теоремы для случая бесконечномерного фазового пространства.

Рассуждая нестрого, можно сказать, что если протяжённость распределённой системы конечна, то для неё можно построить спектральное представление, получив при этом вместо уравнения в частных производных бесконечную систему обыкновенных дифференциальных уравнений. Далее можно перейти к приближенному описанию с сохранением только конечного числа уравнений. Для такой приближённой модели показатели Ляпунова уже будут хорошо определены.

Если рассматривается диссипативная распределённая система, которая в ходе своей эволюции осуществляет сжатие фазового объёма, то её аттрактор может

быть вложенным в так называемое инерциальное многообразие, имеющее конечную размерность [4]. Это означает, что динамику такой системы можно, по крайней мере, в принципе описать при помощи обыкновенных дифференциальных уравнений. И снова это означает возможность вычисления показателей Ляпунова для распределённой системы.

Пока не известна практически реализуемая процедура нахождения инерциальных многообразий. Однако в недавней работе [5] было показано, что в касательном пространстве аттракторов диссипативных систем можно при помощи численной процедуры выделить конечное число активных направлений, взаимное расположение которых, по всей видимости, в значительно степени определяет динамику системы на аттракторе. Все прочие направления (их имеется бесконечно количество) участвуют только в переходных процессах и представляют собой собственные моды однородного состояния равновесия [6]. В работе [5] высказано предположение, что обнаруженное конечное множество активных направлений есть не что иное как локальный базис инерциального многообразия.

Вычисление показателей Ляпунова для распределённых систем кажется на первый взгляд вполне «понятной» процедурой. Действительно, ставший фактически стандартным для сосредоточенных систем алгоритм Бенетти [7] естественным образом переносится на случай систем, заданных уравнениями в частных производных. Тем не менее, аккуратный анализ показывает, что при этом требуется соблюдать определённую осторожность. Цель настоящей работы состоит в том, чтобы выявить, какие проблемы могут возникнуть при воспроизведении алгоритма Бенетти применительно к распределённым системам.

В разделе 1 приводится определение показателей Ляпунова и описывается стандартный алгоритм Бенетти, используемый для их вычисления. Раздел 2 посвящён рассмотрению преимуществ и недостатков различных процедур ортогонализации, применяемых в процессе вычисления показателей. В разделе 3 анализируется паразитное возбуждение коротковолновых пространственных гармоник, возникновение которого вызывает грубые ошибки при вычислении показателей Ляпунова. Наконец, в разделе 3 приводятся практические рекомендации, выработанные по результатам выполненного исследования.

1. Показатели Ляпунова

Пусть имеется система, заданная обыкновенным дифференциальным уравнением

$$\dot{\vec{u}} = f(\vec{u}, t), \tag{1}$$

где $\vec{u} \equiv \vec{u}(t) \in \mathbb{R}^m$ – m-мерный вектор, описывающий состояние системы в момент времени t, а $f(\vec{u}, t) \in \mathbb{R}^m$ – нелинейная векторная функция. Рассмотрим возмущения, которые можно придать траектории этой системы. Если их амплитуда всё время остаётся бесконечно малой по отношению к исходному фазовому пространству, то такие возмущения называются инфинитезимальными и описываются линейным уравнением вида

$$\dot{\vec{v}} = \mathrm{J}(\vec{u}, t)\vec{v}, \tag{2}$$

где $\vec{v} \equiv \vec{v}(t) \in \mathbb{R}^m$ – m-мерный вектор возмущения, а $\mathrm{J}(\vec{u}, t)$ – якобиан, то есть матрица, построенная из производных компонент векторной функции $f(\vec{u}, t)$ по компонентам вектора $\vec{u}$. Такие возмущения называют также вариациями траектории, а

BIRTH OF A STABLE TORUS FROM THE CRITICAL CLOSED CURVE AND ITS BIFURCATIONS IN A LASER SYSTEM WITH FREQUENCY DETUNING

A.A. Krents, N.E. Molevich

Realization of stable two-frequency oscillations is shown in the Maxwell–Bloch model. Birth of a stable ergodic two-dimensional torus from the critical closed curve is observed. The conditions of the passage to chaos via a cascade of torus doubling bifurcations are obtained. It is established that at bifurcations points a structurally unstable three-dimensional torus is produced, which gives rise to a stable doubled ergodic torus. Analytical approximation describing dynamics of the system near a point of torus birth is found.

Keywords: Wide-aperture lasers, torus doubling bifurcation, ergodic torus, chaos.

Кренц Антон Анатольевич – родился в Тольятти (1986), окончил магистратуру Самарского государственного аэрокосмического университета им. академика С.П. Королева по направлению прикладные математика и физика. В настоящее время является инженером теоретического сектора СФ ФИАН и очным аспирантом СГАУ. Область научных интересов – нелинейная динамика лазерных систем. Имеет 17 научных работ.

443011 Самара, ул. Ново-Садовая, 221
Самарский филиал Физического института РАН
E-mail: krenz86@mail.ru

Молевич Нонна Евгеньевна – родилась в Семипалатинске (1959), окончила Специальный факультет (высшую школу физики) МИФИ-ФИАН (1982). Защитила диссертацию на соискание ученой степени доктора физико-математических наук (МИФИ, 2002) по специальности теоретическая физика. В настоящее время является заведующим теоретическим сектором СФ ФИАН и профессором кафедры физики СГАУ. Область научных интересов – динамика оптических и акустических активных сред. Имеет 180 научных работ. Лауреат губернской премии Самарской области в области естественных наук (2002) за цикл работ «Акустика неравновесных сред»

443011 Самара, ул. Ново-Садовая, 221
Самарский филиал Физического института РАН
E-mail: molevich@fian.smr.ru

не хуже, чем 10%. На рис. 5 показаны фазовые портреты (*а*), (*б*), фаза поля (*в*) и временная зависимость E_1 (*г*), построенные по формулам (4), (5). Также для сравнения приведены результаты расчета при значении управляющего параметра, близкого к бифуркационному, то есть когда тор еще не удвоен. Из приведенного рисунка видно, что аппроксимация решения подобрана удовлетворительно.

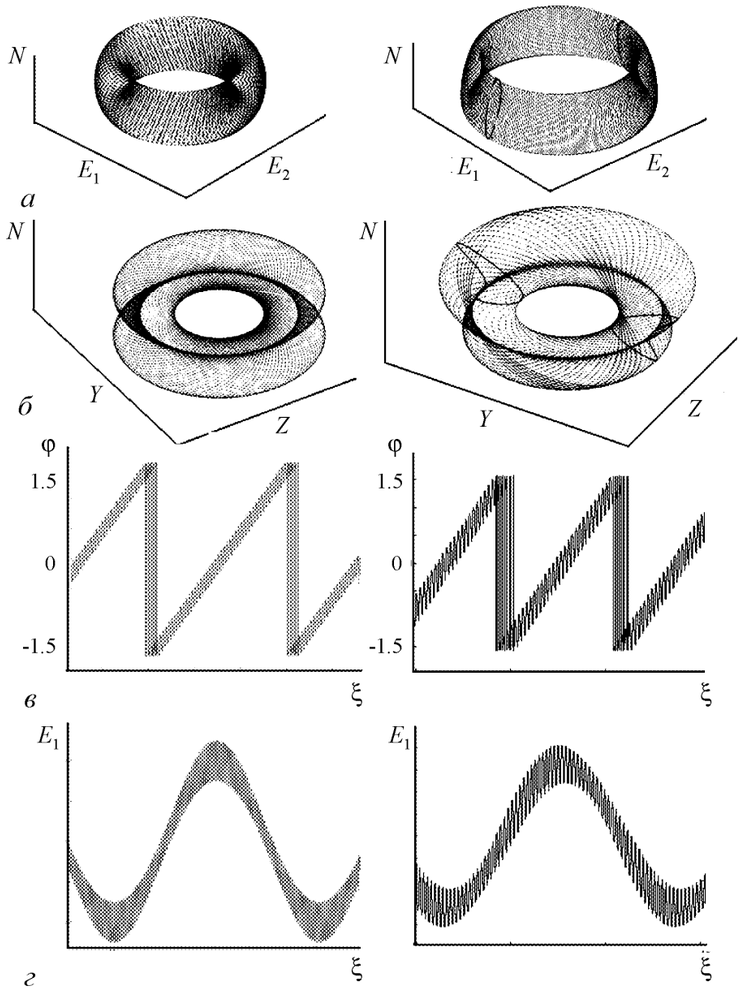


Рис. 5. Аппроксимация (слева) и компьютерный счет вблизи точки рождения тора (справа): *а* – фазовый портрет в пространстве (E_1, E_2, N), *б* – фазовый портрет в пространстве (Y, Z, N), *в* – фаза поля, *г* – временная зависимость $E_1(\xi)$

ключением, что на k-м шаге процедуры мы одновременно поворачиваем сразу все пока не обработанные векторы $\vec{v}_j$, $j = k, k+1, \ldots$ так, чтобы $\vec{v}_k$ занял правильное положение.

Существенной частью процедур Грама–Шмидта является вычисление скалярных произведений, что фактически означает нахождение косинусов углов между векторами. Так как производная косинуса в нуле обращается в нуль, то в случае малых углов их косинусы достаточно быстро становятся неразличимыми. Поэтому, если углы между столбцами исходной матрицы малы, то процедура Грама–Шмидта даёт неверный результат. Частично эту проблему решает модифицированный метод Грама–Шмидта, в котором удаётся получить более высокую точность за счёт изменения порядка вычисления скалярных произведений.

Вращение Хаусхолдера состоит в том, что для вектора $\vec{v}$ ищется такая ортогональная матрица H (она называется матрицей Хаусхолдера), что $\mathrm{H}\vec{v} = \|\vec{v}\|\vec{e}_1$, где $\vec{e}_1 = (1, 0, \ldots)$. Иными словами, умножение на соответствующую матрицу Хаусхолдера приводит к тому, что вектор $\vec{v}$ ориентируется вдоль первой координатной оси. Существенно, что процедура нахождения H очень проста и выполняется достаточно быстро и с высокой точностью [9]. В общем случае матрица вращения кроме косинусов угла поворота содержит также и синусы, которые хорошо определены для малых углов. По этой причине преобразование Хаусхолдера хорошо работает даже когда поворот осуществляется на малый угол.

При вычислении QR-разложения сначала ищется матрица Хаусхолдера для первого столбца исходной матрицы V. После умножения её на V получается матрица, у которой в первом столбце все элементы, кроме первого, равны нулю. Далее строится новая матрица вращения, которая оставляет без изменения первый столбец, а остальные преобразует таким образом, что во втором столбце ниже главной диагонали появляются нули. Затем строится матрица, поворачивающая все столбцы, кроме первых двух, и в результате в третьем столбце ниже главной диагонали также появляются нули. В конечном итоге вместо исходной матрицы получается верхняя треугольная матрица R, а перемноженные матрицы Хаусхолдера образуют матрицу Q^{T} [9].

Для проверки качества работы методов QR-разложения вычисляем погрешность ортогонализации по следующей формуле:

$$\varepsilon_{\mathrm{ort}} = \|\mathrm{Q}^{\mathrm{T}}\mathrm{Q} - \mathrm{I}\|_{\max}, \tag{4}$$

где $||\mathrm{A}||_{\max} = \max_{i,j} |a_{ij}|$ – норма матрицы. Вычислим также число обусловленности ортогонализируемых матриц по формуле

$$C = \|\mathrm{A}\|_{\max}\|\mathrm{A}^{-1}\|_{\max}. \tag{5}$$

Большое значение C в нашем случае означает малость углов между столбцами матрицы. При вычислении C следует принимать во внимание, что инверсия плохо обусловленной матрицы может быть вычислена с большой погрешностью. Мы будем искать обратные матрицы, используя LU-разложение, как описано в книге [11], и проверять точность выполненного обращения, вычисляя величину $\varepsilon_{\mathrm{inv}} = \|\mathrm{A}^{-1}\mathrm{A} - I\|_{\max}$. Максимальной приемлемой погрешностью будем считать $\varepsilon_{\mathrm{inv}} = 10^{-3}$.

Рассмотрим комплексное уравнение Гинзбурга–Ландау

$$\partial_t u = u - (1 + \mathrm{i}c)|u|^2 u + (1 + \mathrm{i}b)\partial_x^2 u, \tag{6}$$

где $u \equiv u(x,t)$ – комплексная динамическая переменная, а c и b – управляющие параметры. В зависимости от выбора значений c и b это уравнение может демонстрировать большое количество различных видов поведения. Мы возьмём $c = 3$, $b = -2$, что соответствует одному из хаотических режимов, а именно режиму амплитудного хаоса [12]. Протяжённость системы в пространстве возьмём равной $X = 50$, на границах положим

$$\partial_x u_{|x=0,X} = 0. \tag{7}$$

Будем решать это уравнение численно с шагом дискретизации по времени $\Delta t = 0.01$ и шагом по координате $\Delta x = X/(M-1)$, где M – число точек пространственной сетки. Так как переменная u комплексная, то размерность фазового пространства численной модели равна $m = 2M$.

Для решения уравнения (6) будем применять метод конечных разностей и использовать нелинейную смешанную схему. Идея состоит в том, что для перехода от временнóго слоя t к слою $t + \Delta t$ строится система из m алгебраических уравнений выражающих решение на новом слое через m уже известных значений переменной u на предыдущем слое. При этом, в силу нелинейности уравнения (6), система алгебраических уравнений также получается нелинейной, и для её решения применяется метод Ньютона.

Совместно с основным уравнением будем решать n уравнений для инфинитезимальных возмущений $v \equiv v(x,t)$:

$$\partial_t v = v - 2(1+\mathrm{i}c)|u|^2 v - (1+\mathrm{i}c)u^2 v^* + (1+\mathrm{i}b)\partial_x^2 v. \tag{8}$$

Для вычисления решения мы будем применять неявную схему, описание которой приведено ниже, в разделе 3.4. Решения образуют столбцы матрицы V, которая, для предотвращения расхождения и выстраивания, после каждых T единиц времени подвергается QR-разложению одним из описанных выше методов. Чем больше интервал T, тем сильнее проявляется выстраивание и тем меньше могут быть углы между столбцами V. Иными словами, число обусловленности этой матрицы растёт с ростом T.

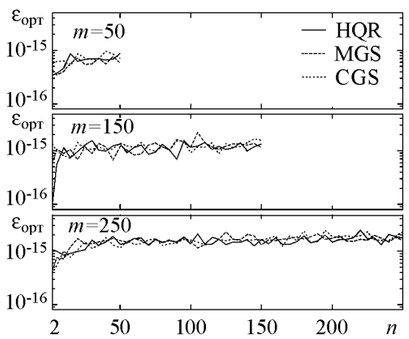


Рис. 1. Погрешность ортогонализации матрицы решений n уравнений для инфинитезимальных возмущений (8); m – размерность фазового пространства численной модели; HQR – преобразование Хаусхолдера, MGS и CGS – модифицированный и классический методы Грама–Шмидта, соответственно. Интервал между QR-процедурами $T = 0.1$

На рис. 1 показана зависимость погрешности ортогонализации, выполненной различными методами, от размерности фазового пространства m и количества уравнений n. Интервал между QR-процедурами T равен 0.1. При таком T максимальное число обусловленности матрицы V при $n = m = 250$ не превышает нескольких единиц. Из рисунка видно, что в данном случае все три QR-метода имеют очень низкую погрешность.

Если увеличить T до 0.6, то число обусловленности при $n = m = 50$

Гипотеза о том, что аттрактор в виде устойчивого двумерного тора родился в результате рождения множества «слепленных предельных циклов», не объясняет почему фазовые траектории начинают двигаться вдоль особой окружности, то есть не ясна природа частоты Ω (см. рис. 1, *а*). Заметим, что в случае бифуркации рождения тора из предельного цикла направление и скорость вращения по тору уже заданы – направление совпадает, а частота примерно равна частоте предельного цикла ω_1 (см. рис. 1, *б*). Попробуем найти аналитическое значение для частоты Ω. Простая структура спектра мощности временных реализаций (см. рис. 2, *б*), а также простейший случай режима двухчастотных биений [27] подсказывают вид аппроксимации решений вблизи точки бифуркации рождения тора

$$E = E_0 \left(1 + m_1 e^{i\omega\xi} + m_2 e^{-i\omega\xi}\right) e^{i\Omega\xi}, \tag{4}$$

$$N = N_0 (1 + m_N \frac{e^{i\omega\xi} - e^{-i\omega\xi}}{2i}), \tag{5}$$

при этом $m_2 > m_1$. Такое условие на амплитуды гармоник необходимо для воспроизведения структуры спектра (см. рис. 2, *б*), на котором четко видно, что гармоника $\omega + \Omega$ имеет меньшую, чем $\omega - \Omega$ амплитуду (следует отметить, что в [20] на рис. 4, *в* были ошибочно указаны частоты ω и $\omega + 2\Omega$ вместо $\omega \pm \Omega$). Также это неравенство между m_2 и m_1 обеспечивает отличие фазового портрета в проекции (Y, Z, N) (см. рис. 3, *а*) от (E_1, E_2, N) (см. рис. 2, *а*) и вид сечения Пуанкаре (см. рис. 3, *б*) напоминающего бабочку.

Такой вид аппроксимации учитывает гармоники $\omega + \Omega$ и $\omega - \Omega$, так как из спектра E_1 (см. рис. 2, *б*) хорошо видно, что высшие гармоники $2\omega + \Omega$, $2\omega - \Omega$ и т.д. имеют гораздо меньшую амплитуду и ими можно пренебречь. Прямая подстановка выражений (4), (5) в систему (2) дает комплексное значение частоты Ω. Однако, если положить, что физический смысл имеет только действительная часть, то получим

$$\Omega = \frac{\nu}{8} m_I m_N, \tag{6}$$

где m_I и m_N глубина модуляции интенсивности и коэффициента усиления, соответственно. Выражение (6) совпадает с результатами компьютерного счета с ошибкой

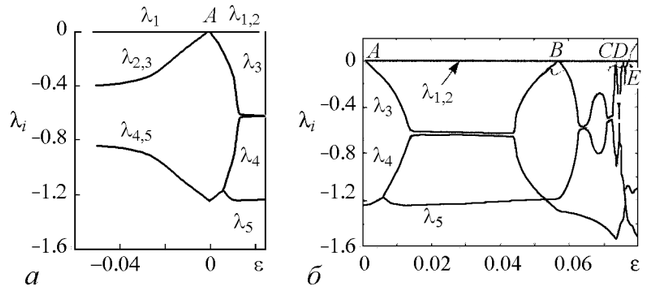


Рис. 4. Спектр характеристических показателей Ляпунова

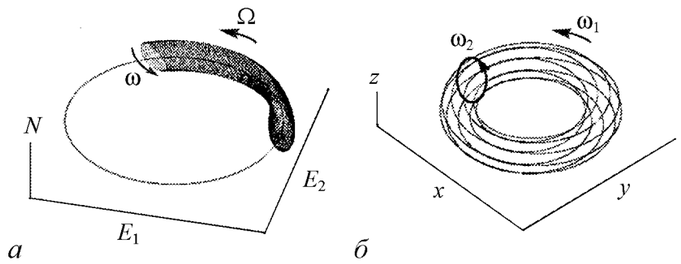


Рис. 1. Бифуркация рождения двумерного тора: *а* – из особой кривой; *б* – из предельного цикла

отметить, что приведенное неравенство для частот $\Omega \ll \omega_{bif}$ должно четко выполняться и в других моделях, реализующих предложенный механизм рождения тора. Для сравнения, в результате хорошо известной бифуркации Неймарка [24] из периодического режима частоты ω_1 рождается квазипериодический режим с частотами ω_1, ω_2 (рис. 1, *б*), причем экспериментально наблюдалось обратное неравенство для частот $\omega_1 > \omega_2$ [25].

При дальнейшем увеличении управляющего параметра ε происходит каскад бифуркаций удвоения периода тора, приводящий к хаотическому режиму (рис. 2, *а*). Об удвоении периода тора ясно свидетельствует структура сечения Пуанкаре и спектры мощности (рис. 2, *б*). Следует отметить, что бифуркации удвоения претерпевает только одна частота ω.

В фазовом объеме (Y, Z, N) фазовые траектории также притягиваются к аттрактору – устойчивому эргодическому тору (рис. 3, *а*). При росте управляющего параметра в сечении Пуанкаре происходит каскад бифуркаций удвоения инвариантной кривой с ее последующим разрушением (рис. 3, *б*). В исходной системе происходит каскад бифуркаций удвоения тора приводящий к режиму динамического хаоса.

Полный спектр характеристических показателей Ляпунова (рис. 4) показывает, что система (2) описывает бифуркацию нового типа: непростое стационарное состояние в виде особой замкнутой кривой – структурно неустойчивый трехмерный тор – устойчивый двумерный тор. Как показано на (рис. 4, *а*), сигнатура спектра характеристических показателей Ляпунова меняется при этой бифуркации (точка A) как

$$0, -, -, -, - \to 0, 0, 0, -, - \to 0, 0, -, -, -.$$

В точках бифуркаций удвоения тора (точки B, C, D) сигнатура меняется (рис. 4, *б*) как

$$0, 0, -, -, - \to 0, 0, 0, -, - \to 0, 0, -, -, -.$$

Такое изменение сигнатуры спектра характеристических показателей Ляпунова соответствует рождению в точке бифуркации структурно-неустойчивого трехмерного тора, который порождает устойчивый удвоенный эргодический двумерный тор [26]. В точке E происходит переход к хаотическому режиму

$$0, 0, -, -, - \to 0, 0, 0, -, - \to +, 0, 0, -, -.$$

Рассмотрим диффузионную подсистему системы (10), отбросив слагаемое, пропорциональное матрице Якоби

$$\partial_t \vec{v} = \mathrm{D}\partial_x^2 \vec{v}. \tag{11}$$

Разложим решение этого уравнения по пространственным гармоникам вида $\vec{v} = \vec{V}\alpha^t \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t + \varkappa x)}$. Здесь $\vec{V}$ – некоторый постоянный вектор, в общем случае имеющий комплексные компоненты, ω и $\varkappa$ – вещественные частота и волновое число, соответственно, а $\alpha > 0$ – вещественный множитель роста гармоники. Подставив выражение для гармоники в уравнение (11), получим $\alpha = \mathrm{e}^{-\varkappa^2 \mathrm{Re}\, d}$, где d – одно из собственных чисел матрицы D. Если $\mathrm{Re}\, d < 0$, то все пространственные гармоники неустойчивы, что не представляет для нас интереса, и далее этот случай рассматриваться не будет. Когда $\mathrm{Re}\, d = 0$, все гармоники находятся в состоянии безразличного равновесия. При $\mathrm{Re}\, d > 0$ имеет место диффузионный процесс, когда исходное распределение затухает и стремится к однородному состоянию. При этом коротковолновые гармоники затухают быстрее, так что длинноволновые гармоники преобладают.

Вычисляя показатели Ляпунова, мы строим конечно-разностное уравнение, приближённо соответствующее уравнению (10). Для того чтобы такое приближение было адекватным, необходимо, в частности, добиться, чтобы диффузионная подсистема численной модели вела себя качественно подобно диффузионной подсистеме (11), полученной для непрерывной системы. А именно, если решение соответствует собственному числу с $\mathrm{Re}\, d > 0$, то в его структуре должны преобладать длинноволновые гармоники, а если $\mathrm{Re}\, d = 0$, то все пространственные гармоники должны быть безразлично устойчивыми.

Пусть протяжённость системы равна X. Введём пространственную сетку из M точек. Шаг сетки равен $\Delta x = X/(M-1)$. Шаг дискретизации по времени обозначим как Δt. Пусть s есть номер точки в пространстве и j – номер шага по времени. Запишем конечно-разностное представление уравнения (11) в следующем виде:

$$\vec{v}_{s,j+1} - \vec{v}_{s,j} = \Delta t\big[(1-\sigma)\mathrm{D}\Lambda\vec{v}_{s,j} + \sigma\mathrm{D}\Lambda\vec{v}_{s,j+1}\big], \tag{12}$$

где $\vec{v}_{s,j}$ – значение вектора $\vec{v}$ в точке сетки s на шаге времени j, а $\Lambda\vec{v}_{s,j} = (\vec{v}_{s+1,j} - 2\vec{v}_{s,j} + \vec{v}_{s-1,j})/\Delta x^2$ есть кончено-разностная вторая производная по координате. Параметр σ позволяет выбирать вариант численной схемы: $\sigma = 0$ – явная схема Эйлера; $\sigma = 1$ – неявная схема; $\sigma = 1/2$ – смешанная схема Кранка–Николсона [11, 13].

По аналогии с рассмотренным выше непрерывным случаем, запишем пространственную гармонику для уравнения (12) как $\vec{v}_{s,j} = \vec{V}\alpha^j \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega j + ks)}$, где волновое число обозначено буквой k. Подставляя выражение для гармоники в уравнение, получим

$$\alpha^2 = \frac{1 - \nu(1-\sigma)(\delta + \delta^*) + \nu^2(1-\sigma)^2\delta\delta^*}{1 + \nu\sigma(\delta + \delta^*) + \nu^2\sigma^2\delta\delta^*}, \tag{13}$$

где «*» обозначает комплексное сопряжение,

$$\nu = \sin^2(k/2), \quad \delta = 4d\Delta t/\Delta x^2. \tag{14}$$

Комплексный, в общем случае, параметр δ характеризует пространственно-временную решётку, на которой ищется решение. Его значение определяется значениями шагов

по времени и по координате, а также одним из собственных чисел d матрицы D. Разным d соответствуют разные ветви решения и разные значения множителя роста.

Величина ν зависит от волнового числа k и всегда принимает значения в диапазоне от 0 до 1. Её удобно использовать в качестве номера гармоники. Обсудим, как соотносятся значения ν с длинами волн гармоник. Если на границах либо само решение, либо его первые производные по координате обращаются в нуль, то волновое число непрерывной системы будет принимать значения $\varkappa = l\pi/X$, где $l = 0, 1, 2, \ldots$ – номер гармоники. Переходя к дискретной системе, получим: $\varkappa x = (l\pi/X)(sX/(M-1)) = ks$, где $k = l\pi/(M-1)$. Следовательно, волновое число k пробегает дискретный ряд значений от 0 до π. При этом ν меняется монотонно от 0 до 1. Это значит, что близкие к нулю ν соответствуют длинноволновым гармоникам с малым k, а ν вблизи единицы отвечают коротковолновым гармоникам. Если на систему наложены периодические граничные условия, то, рассуждая аналогично, получим, что волновое число k пробегает значения от 0 до 2π. При этом ν сначала растёт, достигает максимума $\nu = 1$ при $k = \pi$, а потом убывает и обращается снова в нуль при $k = 2\pi$. Заметим, однако, что гармоники, расположенные симметрично относительно точки $k = \pi$, с одной стороны, имеют одинаковые длины волн, так как $\mathrm{e}^{\mathrm{i}(2\pi-k)s} = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}ks}$, а с другой – им соответствуют одинаковые значения ν. Таким образом, интерпретация значений ν сохраняется – малые ν отвечают длинноволновым гармоникам, а ν вблизи единицы соответствуют коротковолновой части спектра.

Рассмотрим поведение множителя роста для различных численных схем, соответствующих разным значениям σ.

3.2. Смешанная схема Кранка–Николсона. Пусть $\sigma = 1/2$, что даёт смешанную схему Кранка–Николсона. Квадрат множителя роста (13) при таком σ преобразуется к виду

$$\alpha^2 = \frac{4 - 2\nu(\delta + \delta^*) + \nu^2\delta\delta^*}{4 + 2\nu(\delta + \delta^*) + \nu^2\delta\delta^*}. \tag{15}$$

Смешанная схема имеет второй порядок точности локальной аппроксимации производных по времени и по координате и, кроме того, она абсолютно устойчива, так как независимо от δ множитель роста меньше или равен единице для всех пространственных гармоник. В силу этого именно смешанная схема традиционно считается предпочтительной для решения уравнений вида (9).

Предположим сначала, что $\mathrm{Re}\ d = 0$. Тогда $\alpha \equiv 1$ независимо от ν. Это в точности соответствует тому, что мы получили для множителя роста гармоник непрерывной системы (11).

Если $\mathrm{Re}\ d > 0$, то, в отличие от непрерывного случая, функция $\alpha^2(\nu)$ (15) немонотонно зависит от ν. Она равна единице при $\nu = 0$, убывает и достигает минимума в точке

$$\nu_0 = 2/|\delta|. \tag{16}$$

Отметим, что функция $\alpha^2(\nu)$ имеет также особенности в точках, где её знаменатель обращается в нуль. Однако в случае комплексного d в этих точках ν также

где

$$I_{st} = \frac{J_{st}}{1 + \Delta_0^2}, \quad \Delta_0 < 0, \quad \omega_{bif} = \sqrt{\frac{N_{un}^2 + \Delta_0 \nu I_{st}}{|\Delta_0|}}. \tag{3}$$

В [17] показано также, что при $\beta = \beta_{bif}$ выполняются условия теоремы Андронова–Хопфа о рождении предельного цикла. На фазовой плоскости (J, N) происходит мягкая бифуркация Андронова–Хопфа и рождение устойчивого предельного цикла бесконечно малой амплитуды. Однако, как показано в [20], для оптического поля $E = E_1 + iE_2$ наблюдается более сложная динамика. В фазовом объеме при $\beta = \beta_{bif}$ рождается аттрактор в виде бесконечно тонкой трубки, которая окружает особую замкнутую кривую. Подобную бифуркацию состояния равновесия можно объяснить следующим. Собственные числа для всего множества точек особой окружности равны между собой, и при $\beta = \beta_{bif}$ одновременно для всех точек особой кривой пара комплексно сопряженных собственных значений пересекает мнимую ось. В результате в каждой особой точке рождается устойчивый «предельный цикл» (кавычки здесь уместны, так как согласно [23] предельным циклом называется замкнутая траектория, изолированная от всех остальных замкнутых траекторий). Такие «слепленные предельные циклы» и образуют аттрактор в виде двумерного тора. Однако в данном случае, по-видимому, нельзя ссылаться на бифуркацию Андронова–Хопфа, так как оказывается не выполненным одно из условий теоремы – особая точка не изолирована.

2. Бифуркации квазипериодических решений

Нелинейную динамику модели (2) в зависимости от управляющего параметра $\varepsilon = (\beta - \beta_{bif})/\beta_{bif}$ исследуем численно.

При $\varepsilon < 0$ режим стационарной генерации устойчив, малые отклонения от положения равновесия притягиваются к особой окружности, что подтверждает результаты линейного анализа устойчивости. При малых положительных значениях параметра ε на фазовой плоскости $(J, dJ/d\xi)$ наблюдается рождение предельного цикла, при этом частота модуляции интенсивности $J = E_1^2 + E_2^2$ совпадает с аналитически рассчитанной (3). Как показано в [20], при увеличении управляющего параметра ε в численном эксперименте для интенсивности наблюдается каскад бифуркаций удвоения периода, при этом в спектре появляются субгармоники основной частоты ω_{bif}. Существует критическое значение управляющего параметра, при котором движение становится апериодическим, а спектр сплошным. Также, в работе [20] построена фазопараметрическая диаграмма, характерная для систем с каскадом удвоений периодов, приводящим к хаосу.

Более сложная динамика наблюдается, если рассматривать не интенсивность поля, а его компоненты E_1 и E_2. В фазовом объеме (E_1, E_2, N) при малых положительных значениях параметра ε, малые отклонения от положения равновесия притягиваются к аттрактору – устойчивому эргодическому двумерному тору. С ростом управляющего параметра тор сначала разбухает, подобно надуваемой шине. При этом фазовая точка движется с частотой $\omega \approx \omega_{bif}$ вокруг особой кривой и с частотой вращения $\Omega \ll \omega_{bif}$ вдоль особой кривой (рис. 1, *a*). Такой динамический режим соответствует квазипериодическим волнам оптического поля $E_1(\xi), E_2(\xi)$. Следует

Бифуркации в динамических системах

Изв. вузов «ПНД», т. 18, № 5, 2010 УДК 535.374:621.375.8

РОЖДЕНИЕ УСТОЙЧИВОГО ТОРА ИЗ ЗАМКНУТОЙ ОСОБОЙ КРИВОЙ И ЕГО БИФУРКАЦИИ В ЛАЗЕРНОЙ СИСТЕМЕ С ОТСТРОЙКОЙ ЧАСТОТЫ

А.А. Кренц, Н.Е. Молевич

Показано, что в модели Максвелла–Блоха реализуется режим устойчивых двухчастотных колебаний. Установлено, что происходит рождение устойчивого двумерного эргодического тора из замкнутой особой кривой. Найдены условия перехода к хаосу через каскад бифуркаций удвоения периода тора. Установлено, что в точках бифуркаций удвоения рождается структурно неустойчивый трехмерный тор, который порождает устойчивый удвоенный эргодический тор. Найдена аналитическая аппроксимация, удовлетворительно описывающая динамику системы вблизи точки рождения тора.

Ключевые слова: Широкоапертурные лазеры, бифуркация удвоения периода тора, эргодический тор, хаос.

Введение

Открытие странного аттрактора связывают обычно с работой Лоренца [1], в которой были обнаружены и исследованы хаотические решения нелинейных уравнений, описывающих процесс конвекции. Однако еще раньше хаотические решения были численно получены Грасюком и Ораевским при решении трех точечных уравнений неадиабатической теории мазеров и лазеров. Результаты этих исследований были представлены на международных конференциях (см., например, [2]) и затем подробно опубликованы в ряде изданий, обзор которых можно найти в [3]. Как было затем показано Хакеном [4], эта модель лазера математически точно совпадает с более поздней моделью Лоренца. После этой работы было осознано, что лазер принадлежит к числу систем способных демонстрировать сложное хаотическое поведение и является удобным объектом для исследования различных сценариев перехода к хаосу.

В [5] было показано, что при условиях точечной лазерной системы, соответствующих существованию в фазовом пространстве странного аттрактора Лоренца, траектории лазерного поля обладают при наличии отстройки частоты генерации непрерывной вращательной симметрией и могут наблюдаться окна регулярности, в которых происходят бифуркации удвоения тора.

очень чёткую границу, правее которой возникает паразитное возбуждение гармоник из коротковолновой части спектра. Волновое число k_1, при котором это происходит, можно вычислить, используя формулу (18) и выражение для ν (14). Правее границы спектры содержат по два набора гармоник, которые приближаются друг к другу с ростом номера i и сливаются при k_0 в точке минимума множителя роста, который можно найти из (16). Найденные таким образом k_0 и k_1 на рисунке обозначены горизонтальными пунктирными линиями. Видно, что они очень хорошо соответствуют моменту начала паразитного возбуждения и точке слияния двух ветвей спектра.

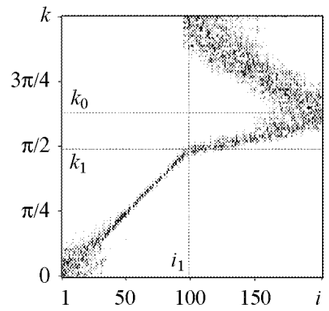


Рис. 6. То же, что на рис. 5 при $\Delta t = 0.02$. Условие монотонности (17) нарушено. Горизонтальные пунктирные линии отмечают возникновение паразитного возбуждения при $k_1 \approx 1.55$ и точку минимума множителя роста при $k_0 \approx 1.98$. Вертикальная пунктирная линия отмечает количество ($i_1 = 99$) достоверных показателей Ляпунова, вычисленное по формуле (20)

Из рис. 5 видно, что волновое число k гармоники, преобладающей в решении с номером i, пропорционально этому номеру. Такую закономерность можно записать как

$$i = cMk/\pi, \tag{19}$$

где c – количество компонент системы уравнений, в нашем случае равное двум, а M – число точек пространственной сетки. Иными словами, произведение cM есть максимальное значение, которое может принимать номер i, а π в знаменателе появляется из-за того, что мы рассматриваем граничные условия (7), при которых максимальное значение k есть π. Этим соотношением можно воспользоваться, чтобы получить оценку количества достоверных показателей Ляпунова, вычисляемых по смешанной схеме при заданных значениях Δx и Δt. Сначала из (14) и (18) выразим k_1, а затем воспользуемся нашим феноменологическим соотношением (19). В итоге получим

$$i_1 = \left\lfloor \frac{2cM}{\pi} \arcsin \frac{\Delta x^2}{2|d|\Delta t} \right\rfloor, \tag{20}$$

где $\lfloor\cdot\rfloor$ обозначает операцию нахождения целой части числа. Если при постоянном Δx менять значение Δt, то с ростом Δt i_1 стремится к нулю. Если Δt уменьшается, то i_1 растёт и достигает максимального значения, когда выражение под знаком $\arcsin$ становится равным единице. Это соответствует попаданию минимума множителя роста в точку $\nu = 1$. При ещё меньших значениях Δt выполняется условие монотонности (17) и, следовательно, все вычисляемые показатели Ляпунова являются достоверными.

На рис. 6 значение i_1 отмечено вертикальной пунктирной линией. Видно, что, хотя паразитное возбуждение возникает немного раньше, чем предсказывает формула (20), тем не менее оценка работает достаточно хорошо. Отметим, что формула (20) справедлива только для граничных условий вида (7). Однако аналогичные оценки можно получить и для других граничных условий.

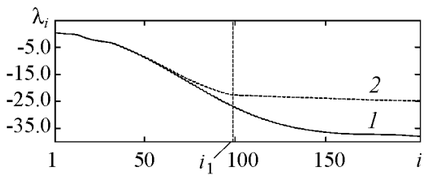


Рис. 7. Показатели Ляпунова уравнения Гинзбурга–Ландау, вычисленные при помощи смешанной схемы с различными значениями Δt: *1* – 0.013, *2* – 0.020. Значения параметров соответствуют рис. 5 и 6.

Формула (20) получена в предположении, что в спектре решения уравнения возмущения (10), связанного с вычислением i-го показателя, есть чётко выраженное ведущее волновое число и оно пропорционально i, формула (19). Основанием для такого предположения служит уже упоминавшееся разбиение касательного пространства на активные и изолированные моды [5]. Действительно, изолированные моды в центральной части спектра образуют структуру, которая описывается формулой (19) (см. рис. 5 и 6). Однако из тех же рисунков видно, что если i_1 попадает в область активных мод в левом нижнем углу, то соотношение (19) и, следовательно, оценка (20) работают уже не так хорошо. Кроме того в работе [6] показано, что если, решая уравнение Гинзбурга–Ландау, взять достаточно большой шаг в пространстве, то изолированные моды вообще исчезают. Это значит, что оценка (20) вообще перестаёт быть адекватной. Отсюда следует, что этой оценкой следует пользоваться с осторожностью, так как существуют случаи, когда она не работает.

На рис. 7 показаны спектры показателей Ляпунова, вычисленные для уравнения Гинзбурга–Ландау, когда выполняется (кривая *1*) и не выполняется (кривая *2*) условие монотонности (17). Левые части обеих кривых совпадают, а в точке возникновения паразитного возбуждения, отмеченной вертикальной линией i_1 (20), на кривой *2* происходит излом. Правее точки излома она идёт практически горизонтально над кривой *1*. Это значит, что соответствующие показатели Ляпунова оказываются существенно завышенными. Такой излом – типичное проявление паразитного возбуждения. Появление этой особенности на кривой спектра показателей Ляпунова может служить качественным критерием недостоверности найденных значений правее точки излома.

Таким образом, используя смешанную схему для вычисления полного спектра показателей Ляпунова, необходимо подобрать значения Δx и Δt так, чтобы выполнялось условие монотонности (17). Однако это условие требует, чтобы значение шага по времени было достаточно малым, что может существенно замедлить вычисления. В случае, когда полный спектр не нужен, можно допустить нарушение условия монотонности, выбрав большее значение Δt.

Если среди собственных чисел матрицы D есть такие, что $\mathrm{Re}\ d = 0$, то соответствующие ветви решения, полученные при помощи смешанной схемы, ведут себя правильно: все пространственные гармоники таких решений имеют множитель роста $\alpha = 1$.

3.3. Явная схема Эйлера. Рассмотрим явную схему, которая возникает при $\sigma = 0$. Эта схема имеет первый порядок точности локальной аппроксимации производной по времени и второй порядок – по координате. Квадрат множителя роста для явной схемы имеет вид

$$\alpha^2 = 1 - \nu(\delta + \delta^*) + \nu^2\delta\delta^*. \qquad (21)$$

different types of dynamics are indicated in the parameter space. The case of essentially different eigenfrequencies is discussed.

Keywords: Self-oscillations, coupled oscillators, synchronization, quasiperiodic dynamics.

Емельянова Юлия Павловна – родилась 17 февраля 1987 года в Венгрии г. Секешфехервар, окончила факультет нелинейных процессов Саратовского государственного университета им. Н.Г. Чернышевского с красным дипломом в 2009 году. Занимается научной работой под руководством профессора, д.ф.-м.н. А.П. Кузнецова с 2002 года. Научные интересы – исследование особенностей синхронизации в связанных осцилляторах ван дер Поля. Победитель студенческих научных конференций факультета нелинейных процессов СГУ, лауреат фонда поддержки фундаментальной физики «Династия» (2008), признана лучшим студентом ФНП в 2006/07 и 2007/08 учебных годах. Лауреат стипендии Президента РФ как «студент – отличник, проявивший выдающиеся способности в учебной и научной деятельности» (2008/09). Автор 17 публикаций, в том числе 5-ти статей в российских и международных журналах.

410019 Саратов, ул. Зеленая, 38
Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского
E-mail: yuliaem@gmail.com

Кузнецов Александр Петрович – родился в 1957 году. Доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник Саратовского филиала Института радиотехники и электроники РАН, профессор Саратовского госуниверситета, заведующий базовой кафедрой динамических систем СГУ в СФ ИРЭ РАН. Специалист по нелинейной динамике, теории динамического хаоса и теории критических явлений. Занимается использованием идей теории катастроф и теории бифуркаций, а также развитием концепции сценариев перехода к хаосу применительно к многопараметрическим модельным и физическим нелинейным системам. Лауреат гранта Президента Российской Федерации для молодых российских ученых – докторов наук. Лауреат персонального гранта Фонда содействия отечественной науки. Соросовский профессор (2000, 2001), научный руководитель студенческой лаборатории «Теоретическая нелинейная динамика». Опубликовал более 100 научных работ. Автор нескольких оригинальных учебных курсов для факультета нелинейных процессов и Лицея прикладных наук СГУ, 10 учебных пособий и монографии «Нелинейные колебания» (совместно с С.П. Кузнецовым и Н.М. Рыскиным. М.: Физматлит, 2002).

410012, Саратов, ул. Астраханская, 83
Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского
E-mail: apkuz@rambler.ru

ворит о доминировании брюсселятора – размер аттрактора осциллятора ван дер Поля очень мал. При этом он сильно возмущен и сильно трансформируется даже при малом изменении расстройки. Возникающий при движении по указанному маршруту хаотический режим отвечает очень слабо выраженной поперечной структуре обоих аттракторов, что хорошо видно на нижних фазовых портретах. Таким образом, это режимы «слабого хаоса», для которых, как мы отмечали, ляпуновский показатель очень мал. Интересно, что переход к хаосу в определенной мере стабилизирует фазовый портрет осциллятора ван дер Поля, что видно из сравнения рис. 7, *г*, *д* и рис. 7, *в* – большое количество петель, охватывающих начало координат, исчезает.

Вернемся к карте на рис. 3, *а*. При малой частотной расстройке Δ на этой карте реализуется режим периода 2, фазовый портрет которого приведен на рис. 3, *в*. Это и понятно: в этом случае частота брюсселятора примерно в 2 раза меньше частоты осциллятора ван дер Поля. При уменьшении связи из этого режима возникает режим периода 4. Увеличенный фрагмент карты в этой области представлен на рис. 8, *а*. Фазовые портреты брюсселятора на рис. 8, *б–г* иллюстрируют удвоения периода с переходом к хаосу по Фейгенбауму.

Еще ниже на карте рис. 8, *а* можно видеть систему языков синхронизации разных периодов. Фазовые портреты брюсселятора и осциллятора ван дер Поля для режима синхронизации периода 3 показаны на рис. 8, *д*. В этом случае доминирует осциллятор ван дер Поля – его фазовый портрет выглядит невозмущенным, но увеличенный фрагмент орбиты демонстрирует структуру, отвечающую периоду 3.

Рассмотренный в этом разделе случай дает интересный пример взаимодействия автоколебательных осцилляторов с существенно разными временными масштабами. (Собственная частота осциллятора ван дер Поля примерно в 12 раз больше собственной частоты брюсселятора, если $\Delta \approx 25$, $a = 0.4$). Отметим, что задачи о взаимодействии автоколебательных осцилляторов с разными временными масштабами интересны как с «общеколебательной» точки зрения, так важны и для приложений, в частности, в биофизике [20].

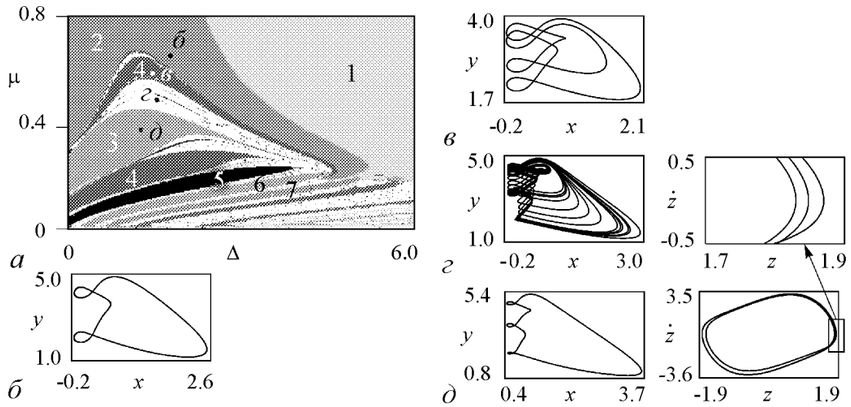


Рис. 8. Фрагмент карты динамических режимов рис. 3 (*а*); характерные фазовые портреты (*б–д*) брюсселятора (левая колонка), в правой колонке показан фазовый портрет осциллятора ван дер Поля для точки *д* и его увеличенный фрагмент)

ности перестаёт выполняться, а условие устойчивости (24) выполняется. В точке i_1 кривая спектра претерпевает излом по причине паразитного возбуждения коротковолновых гармоник. Видно, что паразитное возбуждение проявляется точно также, как и в смешанной схеме (ср. с кривой *2* на рис. 7). В этом случае достаточно хорошей оценкой количества достоверных показателей Ляпунова является величина i_1, вычисляемая по формуле (27). При дальнейшем увеличении Δt нарушается условие устойчивости (24). Как уже обсуждалось выше, в этом случае все найденные показатели Ляпунова оказываются недостоверными. Иллюстрирующая этот случая кривая *3* проходит значительно выше двух других кривых.

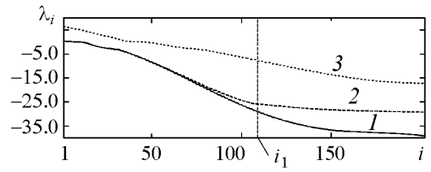


Рис. 10. Показатели Ляпунова уравнения Гинзбурга–Ландау, вычисленные при помощи явной схемы с различными значениями Δt: *1* – 0.003, 2 – 0.004, 3 – 0.007. Значения параметров соответствуют рис. 9

Таким образом, если среди собственных чисел матрицы D есть такие, что $\mathrm{Re}\ d = 0$, то явную схему использовать нельзя, так как показатели Ляпунова, соответствующие этой ветке решения, будут вычислены некорректно – их значения будут завышены. Если же $\mathrm{Re}\ d > 0$, то, применяя явную схему, необходимо обязательно добиться выполнения условия устойчивости (24). Для вычисления полного спектра требуется также выполнение условия монотонности.

3.4. Неявная схема. Пусть теперь $\sigma = 1$. Получающаяся в этом случае схема называется неявной. Она, так же как и явная схема, имеет первый порядок точности локальной аппроксимации производных по времени и второй порядок – по координате. Множитель роста для этой схемы имеет вид

$$\alpha^2 = (1 + \nu(\delta + \delta^*) + \nu^2\delta\delta^*)^{-1}. \qquad (28)$$

При $\mathrm{Re}\ d \geqslant 0$ множитель роста в точке $\nu = 0$ равен 1 и убывает при увеличении ν. Все особые точки этой функции находятся либо на комплексной плоскости, либо на отрицательной полуоси. Таким образом, при любом δ множитель роста убывает монотонно на отрезке от нуля до единицы, что иллюстрирует рис. 11.

Следовательно, неявная схема позволяет находить показатели Ляпунова при любой комбинации Δx и Δt. Тем не менее не следует забывать, что точность вычисления существенным образом зависит от значения шагов численной сетки. Так как схема имеет первый порядок по t, высокую точность можно достичь, если взять $\Delta t < \Delta x^2$, что по сути дела накладывает на Δt такое же сильное ограничение, что и условия монотонности (17) и (25). Отчасти это снижает преимущества неявной схемы, так как мы снова вынуждены брать достаточно малый шаг по времени. Ещё один недостаток

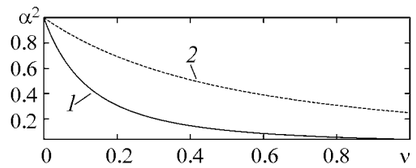


Рис. 11. Множитель роста пространственных гармоник, неявная схема при $\sigma = 1$ и различных значениях δ: *1* – 4.0, *2* – 1.0

неявной схемы – «неправильное» поведение множителя роста при $\mathrm{Re}\ d = 0$. Он убывает, и, следовательно, только несколько старших показателей могут будут вычислены в этом случае достаточно хорошо, тогда как все другие будут иметь заниженные значения.

Заключение

Проанализированы численные методы, используемые для нахождения показателей Ляпунова для распределённых систем. По результатам выполненного анализа можно сформулировать следующие практические рекомендации.

Для вычисления показателей Ляпунова требуется периодически выполнять ортогонализацию матрицы решений уравнений для инфинитезимальных возмущений. При этом предпочтительнее всего использовать метод на основе преобразования Хаусхолдера, который имеет очень высокую точность даже когда интервал между ортогонализациями выбран достаточно большим и матрицы плохо обусловлены. Однако при этом нужно обязательно проверять значения накапливаемых для вычисления показателей величин. Они должны быть хотя бы на несколько порядков больше значения машинного эпсилон.

Методы Грама–Шмидта, классический и модифицированный, могут работать с высокой точностью при условии, что матрицы хорошо обусловлены. Этого можно добиться, выполняя процедуры ортогонализации достаточно часто. Кроме того, эти методы хорошо работают, когда количество вычисляемых показателей много меньше размерности фазового пространства. Тем не менее, чтобы получить гарантированно хороший результат, применяя эти методы, весьма желательно проверить погрешность ортогонализации, по крайней мере, на нескольких первых шага счёта.

Если показатели Ляпунова ищутся для уравнения реакционно-диффузионного типа, и уравнения для возмущений решаются методом конечных разностей, то выбор слишком большого шага по времени по сравнению с шагом по координате может вызвать паразитное возбуждение коротковолновых пространственных гармоник, что, в свою очередь, приводит к грубым ошибкам при вычислении показателей. Надёжный способ избежать этого – использовать чистую неявную схему, которая не подвержена этому эффекту. Чтобы воспользоваться смешанной или явной схемами для вычисления полного спектра показателей, требуется подобрать шаги по времени и по координате таким образом, чтобы выполнялись условия монотонности, разные для разных схем. Если же полный спектр не требуется, то можно допустить нарушение условия монотонности, взяв шаг по времени немного большим.

Однако, если в спектре собственных чисел матрицы диффузии системы имеются нули или чисто мнимые значения, то наилучшим методом является смешанная схема, так как только она обеспечивает безразличное равновесие для соответствующих пространственных гармоник. Сформулированные выше требования отсутствия влияния паразитного возбуждения должны также выполняться, чтобы обеспечить правильное поведение гармоник, соответствующих другим веткам решения.

Анализ паразитного возбуждения был выполнен для реакционно-диффузионной системы общего вида, решаемой при помощи метода конечных разностей. При этом

нова отрицателен. При переходе в область непериодического режима показатель Ляпунова становится положительным. Таким образом, наблюдаемые непериодические режимы являются хаотическими. При увеличении связи и приближении к области гибели колебаний характер зависимости в определенной мере меняется (рис. 6, *б*). Теперь на графике имеются выраженные окна хаотических режимов (на рис. 6, *б* четко видны три таких окна). Между ними показатель осциллирует, при этом его средний уровень очень мал, например, в области между первым и вторым хаотическими «всплесками» составляет примерно 0.003. Таким образом, при приближении к области гибели колебаний хаос становится слабым.

На рис. 3, *а* область непериодических режимов и область гибели колебаний на самом деле разделены узкими полосами режимов разных периодов, что можно видеть на увеличенном фрагменте карты на рис. 7, *а*. Характер фазовых портретов го-

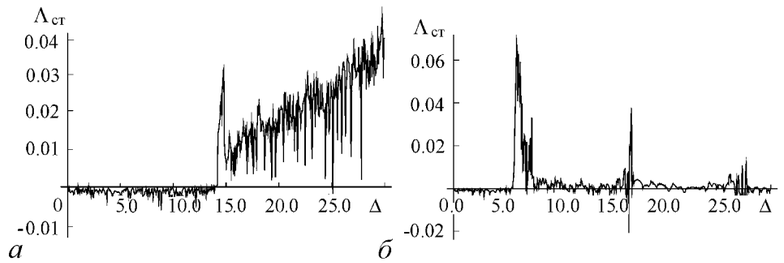


Рис. 6. Зависимость старшего показателя Ляпунова от частотной расстройки осцилляторов Δ при μ = 1.3 (*а*), μ = 1.7 (*б*)

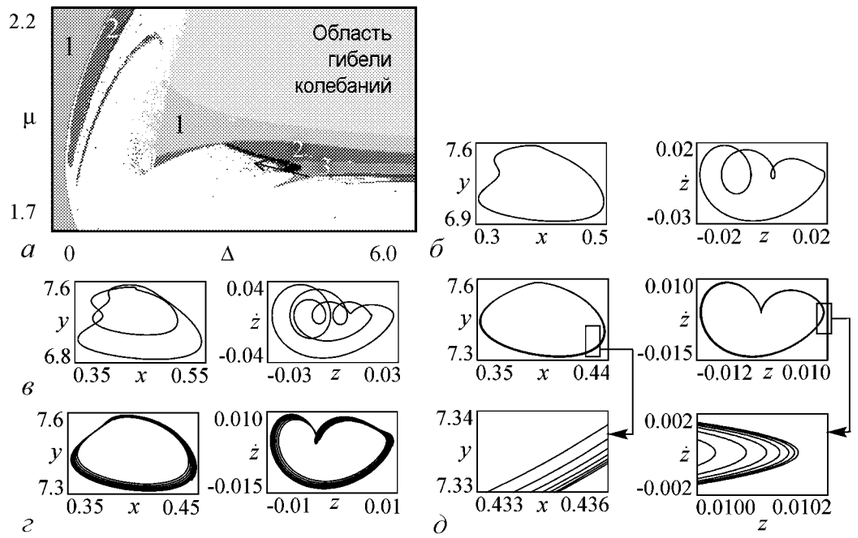


Рис. 7. Фрагмент карты динамических режимов рис. 3 (*а*); характерные фазовые портреты брюсселятора (слева) и осциллятора ван дер Поля (справа) вдоль маршрута, указанного стрелкой на карте (*б–д*)

Таким образом, в области малых значений связи доминирует осциллятор ван дер Поля, хотя брюсселятор и является более возбужденным. Поэтому наблюдаемую картину нельзя объяснить только на основе различий управляющих параметров λ и Λ. В этом случае определенную роль играют различия в размерах предельных циклов «разнотипных» осцилляторов. (Сравните характерные масштабы на фазовых портретах брюсселятора и осциллятора ван дер Поля на рис. 1, *в*). Так же проявляется наличие односторонней компоненты реактивной связи, отвечающей действию осциллятора ван дер Поля на брюсселятор (см. пункт 1).

Если теперь увеличить связь, то попадаем в область периода 1. На рис. 1, *а* она имеет вид языка с характерным, очень широким по связи «отростком». Внутри этой области по-прежнему доминирует осциллятор ван дер Поля, однако его предельный цикл с ростом величины связи на рис. 1, *г* немного искажается по форме по сравнению с рис. 1, *б*, *в*, что отвечает более существенному влиянию брюсселятора.

Верхняя граница области периода 1 отвечает условию равенства величины связи управляющему параметру осциллятора ван дер Поля, $\mu \approx \lambda$, так что выше нее этот осциллятор становится сильно диссипативным, и его колебания оказываются подавленными. Возникает режим широкополосной синхронизации с доминированием брюсселятора. При этом для значений $\mu > \lambda$ наблюдается еще одна система областей более высоких периодов. Несколько отвечающих ей фазовых портретов показаны на рис. 1, *д*, *е*. Теперь слабо возмущенным выглядит фазовый портрет брюсселятора. Фазовый портрет осциллятора ван дер Поля, наоборот, становится сильно возмущенным и представляет собой двухоборотный предельный цикл на рис. 1, *д*. При этом размер предельного цикла осциллятора ван дер Поля резко падает (примерно в 30 раз при переходе от рис. 1, *в* к рис. 1, *д*). Если увеличить теперь частоту осциллятора ван дер Поля (то есть параметр Δ), то можно наблюдать увеличение числа петель на фазовом портрете осциллятора ван дер Поля на рис. 1, *е*, что характерно для динамики ведомого осциллятора. Это подтверждает тот факт, что в этой области доминирует брюсселятор. Таким образом, в данной системе возможна смена доминирующего осциллятора: в области малых значений связи доминирует осциллятор ван дер Поля, а больших – брюсселятор.

Описанная картина на качественном уровне в определенной мере укладывается в ту, которая характерна для неидентичных по управляющим параметрам и параметрам нелинейной диссипации осцилляторов ван дер Поля [17]. Это не удивительно: если системы разнотипны, то, как мы уже отмечали, добиться ситуации с идентичными параметрами можно только каким-то их специальным выбором. Поэтому режимы широкополосной синхронизации с характерными особенностями устройства плоскости параметров будут типичными для связанных автоколебательных элементов разной природы.

Увеличим теперь параметр брюсселятора до значения $b = 5$, и обратимся к карте на рис. 2, *а*. В этом случае брюсселятор еще более возбужден и, соответственно, в поле зрения на карте область гибели колебаний отсутствует. При этом устройство системы областей, лежащих выше полосы периода 1, существенно усложняется. Кроме отмеченных при обсуждении рис. 1 циклов периода 2 и 3 появляются циклы более высоких периодов, примеры которых для осциллятора ван дер Поля даны на рис. 2, *б–г*. При этом могут реализоваться как достаточно долгопериодические режимы (например, период 10), так и непериодические режимы. Их появление обусловле-

Изв. вузов «ПНД», т. 18, № 5, 2010 УДК 539.216.2:537.635.001

МЕХАНИЗМЫ ФОРМИРОВАНИЯ СОЛИТОНОВ ОГИБАЮЩЕЙ В ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФЕРРОМАГНИТНЫХ СТРУКТУРАХ

М.А. Морозова, Ю.П. Шараевский, С.Е. Шешукова

В работе приведены результаты исследования особенностей формирования солитонов огибающей в одномерной периодической ферромагнитной структуре при возбуждении магнитостатических волн. На основе модели в виде связанных нелинейных уравнений Шредингера рассчитаны области параметров, при которых возможно формирование солитонов, подобных брэгговским, с различными свойствами. Рассмотрены механизмы формирования солитонов, локализованных на ограниченной длине структуры, при различных способах возбуждения.

Ключевые слова: Брэгговский солитон, магнонный кристалл, связанные нелинейные уравнения Шредингера, запрещенная зона, периодическая ферромагнитная структура, магнитостатические волны.

Введение

В настоящее время широкий интерес представляют исследования, направленные на изучение наблюдаемых в различных средах локализованных волновых пакетов – солитонов огибающей, формирующихся при распространении импульсного возмущения в средах с нелинейностью и дисперсией [1]. Новый тип солитонов, получивших название брэгговских или щелевых солитонов, может формироваться в нелинейных средах, свойства которых периодически изменяются в зависимости от длины [2]. Примером такой среды в оптике являются фотонные кристаллы, в которых показатель преломления является периодической функцией пространственных координат (см., например, монографию [3] и библиографию к ней). Исследование брэгговских солитонов представляет интерес не только с фундаментальной точки зрения, но и имеет широкие потенциальные возможности для практического использования таких структур в телекоммуникационных системах, в частности, в оптических линиях связи [4].

В последнее годы, благодаря успехам в технологии выращивания пленочных магнитных материалов и новым подходам в получении периодических структур,

большой интерес вызывает получение кристаллов, подобных фотонным, на основе магнитных материалов – магнонных кристаллов [5–9], в которых распространяющимися волнами являются спиновые волны (магноны). Магнонные кристаллы имеют ряд существенных преимуществ по сравнению с фотонными кристаллами: возможно управление их свойствами внешним магнитным полем; можно создавать кристаллы с магнонной запрещенной зоной в диапазоне сверхвысоких частот; нелинейные эффекты в ферромагнитных пленках проявляются при сравнительно небольших уровнях мощности; при создании магнонных кристаллов возможно применение планарной технологии [7].

Магнонные кристаллы, по аналогии с фотонными кристаллами, должны демонстрировать более широкий спектр нелинейных явлений по сравнению с наблюдаемыми эффектами в однородных ферромагнитных пленках при возбуждении в них магнитостатических спиновых волн (МСВ). Однако можно констатировать, что нелинейные процессы в таких периодических структурах, в том числе связанные с особенностями формирования солитонов огибающей, исследованы недостаточно. Можно указать лишь отдельные работы в этом направлении [10,11], в которых приведены экспериментальные результаты и результаты численного моделирования на основе одиночного нелинейного уравнения Шредингера (НУШ), коэффициенты дисперсии и нелинейности в котором рассчитывались исходя из предположения, что в ферромагнитной пленке распространяется одна магнитостатическая волна, дисперсия которой зависит от параметров периодической структуры.

При исследовании волоконно-оптических решеток широко используется подход, основанный на методе связанных мод [3], когда предполагается, что нелинейные волновые процессы в таких структурах, в основном, обусловлены суперпозицией падающей и отраженной волн и для их описания используется система связанных НУШ. В этом случае использование одного НУШ представляет упрощенный подход к описанию нелинейной динамики волн в периодических структурах.

Целью настоящей работы являлось исследование особенностей формирования солитонов огибающей в одномерной периодической ферромагнитной структуре при возбуждении магнитостатических волн на основе численного моделирования с использованием системы связанных нелинейных уравнений Шредингера для амплитуд огибающей прямой и встречной волн. Причем основное внимание уделено описанию условий формирования солитонов, подобных брэгговским или щелевым солитонам.

1. Исследуемая периодическая структура и используемая модель

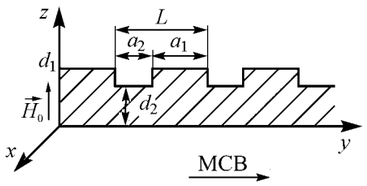


Рис. 1. Схема периодической ферромагнитной структуры с геометрическими размерами: L – период; d_1 – толщина пленки; $\Delta d = d_1 - d_2$ – глубина канавки; $a_2 = L - a_1$ – ширина канавки

Рассматриваемая структура представляет собой ферромагнитную пленку, на верхней поверхности которой вдоль оси y создана периодическая неоднородность в виде канавок (рис. 1). Структура бесконечна в направлении осей x и y. Постоянное магнитное поле $\vec{H}_0$ приложено перпендикулярно к поверхности пленки и значение $\vec{H}_0$

выбирать условие равенства нулю скорости одного из осцилляторов [12–14]. В нашем случае будем выполнять сечение по осциллятору ван дер Поля, так что $\dot{z} = 0$.

Карта динамических режимов системы (1) на плоскости параметров (Δ, μ) для $b = 4$, $a = 1$, $\lambda = 1.5$ показана на рис. 1, *а*. Прежде всего отметим, что в системе наблюдается эффект гибели колебаний, что обусловлено диссипативной компонентой связи. При выбранных значениях параметров $b = 4$, $a = 1$ в соответствии с (10) $\Lambda = 2$. Таким образом, $\Lambda > \lambda$, и брюсселятор является более возбужденным, нежели осциллятор ван дер Поля. В рамках этой оценки нижняя граница области гибели колебаний должна отвечать величине диссипативной составляющей связи, равной управляющему параметру наиболее возбужденного осциллятора. В этом случае $\mu \approx \Lambda = 2$, что согласуется с рис. 1, *а*.

В области малой связи на рис. 1, *а* наблюдаются квазипериодические режимы с системой языков Арнольда, из которых самый широкий имеет период 2 в сечении Пуанкаре. На фазовом портрете брюсселятора хорошо проявляются возмущения, определяющие характер режима: периода 2 на рис. 1, *б* и квазипериодического на рис. 1, *в*. В последнем случае возмущение очень сильное, оно разрушает полностью исходный предельный цикл брюсселятора. При этом осциллятор ван дер Поля возмущен слабо, и его фазовый портрет на рис. 1, *б*, *в* выглядит невозмущенным. Однако, если рассмотреть его с существенным увеличением, как показано на фрагментах рис. 1, *б*, *в*, то можно зафиксировать структуру, характерную для режима периода 2 и квазипериодического режима.

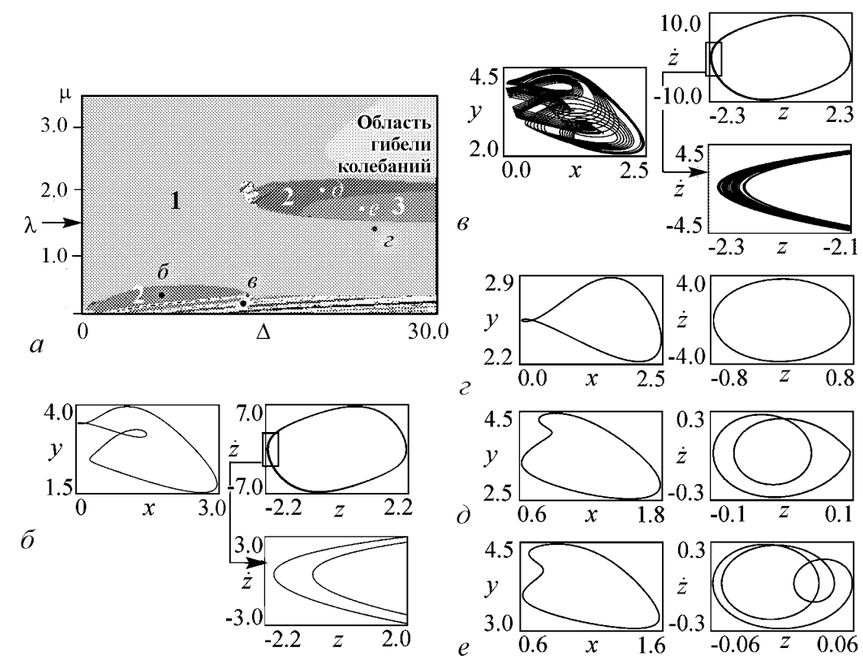


Рис. 1. Карта динамических режимов системы (1) связанных осциллятора ван дер Поля и брюсселятора (*а*); характерные фазовые портреты (*б*–*е*) брюсселятора (слева) и осциллятора ван дер Поля (справа). Значения параметров $b = 4$, $a = 1$, $\lambda = 1.5$

в [12–14] был предложен термин «режим широкополосной синхронизации». В этом режиме один из осцилляторов в определенной мере доминирует. Различные аспекты такого режима обсуждались в [12–14]: построены карты динамических режимов, исследована эволюция чисел вращения с ростом частотной расстройки и т.д. Бифуркационный анализ неидентичных автоколебательных систем проведен в [15–16]. Он выявил, что языки синхронизации в таком случае бывают двух типов, причем для одного из них характерны как области захвата, так и области подавления. Благодаря этому внутри области широкополосной синхронизации возможен эволюционный механизм изменения числа вращения при изменении частотной расстройки. Для идентичных же систем с диссипативной связью характерны нетипичные вырожденные бифуркации, которые появляются за счет того, что связь одновременно подавляет колебания обоих осцилляторов [11, 15, 16]. В этом плане задача оказывается существенно иной, чем в случае вынужденной синхронизации. В работе [17] обращено внимание еще на один фактор, влияющий на картину синхронизации – это неидентичность по параметрам нелинейной диссипации, отвечающим за насыщение нелинейных колебаний. В такой системе возможно доминирование как одного, так и второго осциллятора, а также ситуация постепенной смены доминирующего осциллятора при увеличении связи. Эти физические особенности системы существенным образом проявляются в устройстве плоскости частотная расстройка – величина связи осцилляторов. Соответствующая картина наблюдалась в радиофизическом эксперименте [17].

В этой работе мы хотим обратить внимание на еще один важный аспект проблемы взаимодействия автоколебательных осцилляторов, а именно на ситуацию, когда взаимосвязаны осцилляторы разных типов. В картине взаимодействия таких систем можно ожидать появления черт, описанных в [17] и характерных именно для подсистем, неидентичных по обоим указанным параметрам. Действительно, хотя каждая из подсистем по отдельности у порога возникновения автоколебаний может быть приведена к нормальной форме бифуркации Андронова–Хопфа, но в типичном случае соответствующие параметры окажутся разными. Для реализации случая одинаковых параметров необходимо как-то специально настраивать разнотипные системы. Более того, если отойти от порога бифуркации, свойства автономной динамики подсистем будут изменяться также по-разному. Описание взаимодействия разных автоколебательных систем важно как с позиции теории колебаний, так и для приложений. Действительно, если говорить о хрестоматийном примере с «недобросовестными часовщиками» [18], то в случае разных часов, связанных через малые колебания стены, приходим именно к этой ситуации. Аналогично многие связанные биофизические процессы (классический пример о синхронизации взмахов крыла и частоты дыхания летящей утки [1]) – это взаимодействие различных автоколебательных элементов. Введение связи между разнотипными автогенераторами может представлять интерес и в радиофизике с точки зрения формирования сигнала с более широким спектром свойств и возможностей управления. В настоящей работе мы рассматриваем в указанном контексте задачу о взаимодействии осциллятора ван дер Поля и брюсселятора, являющихся эталонными автоколебательными моделями теории колебаний.

При возбуждении прямой объемной МСВ в периодической структуре коэффициент $\beta = \partial^2\omega/\partial k^2$ и групповая скорость волн $V_{\mathrm{g}} = \partial\omega/\partial k$ рассчитываются из (1) в предположении, что эффективная толщина пленки $d = d_0 = (a_1 d_1 + a_2 d_2)/L$. Коэффициент нелинейности для ПОМСВ, как показано в [12], при $kd \ll 1$ можно записать в виде $\gamma = -1/4\left(1 + \omega_H^2/\omega^2\right)\omega_M\,(kd/2)^2$.

Для вычисления коэффициента связи χ будем считать, что толщина пленки в направлении распространения волны в периодической структуре описывается выражением

$$d = d_2 + \delta\,(y)\,, \tag{6}$$

где $\delta\,(y) = \delta\,(y + L) = \begin{cases} \Delta d = d_1 - d_2, & 0 \le y \le a_1; \\ 0, & a_1 \le y \le L. \end{cases}$

Раскладывая $\delta\,(y)$ в ряд Фурье и ограничиваясь членами разложения с номерами $n = 0, \pm 1$, соотношение (6) можно представить в виде:

$$d = d_0\left[1 + \delta d\ \cos\left(\frac{2\pi}{L}y\right)\right], \tag{7}$$

где $\delta d = [2\Delta d/(\pi d_0)]\sin(\pi a_1/L)$.

С учетом (7), следуя [3], можно записать коэффициент связи для одномерной периодической решетки 1–го порядка при $kd_0 \ll 1$

$$\chi = \frac{\pi V_{\mathrm{g}}}{\lambda}\delta d, \tag{8}$$

где λ – длина волны ПОМСВ на частоте ω.

2. Результаты численного моделирования

Ниже приведены результаты численного решения системы связанных НУШ (4) SSFM-методом [4] при импульсном возбуждении ПОМСВ, относящиеся к формированию в такой системе солитонов, подобных брэгговским. Результаты расчетов даны для разных значений коэффициентов связи χ и групповой скорости V_{g}. Остальные коэффициенты в (4) были рассчитаны с учетом соотношений (1), (7): $\beta = -2\cdot 10^4$ см^{2}с$^{-1}$, $\gamma = 3\cdot 10^{10}$ с$^{-1}$, $\delta = 1\cdot 10^6$ с$^{-1}$, $\sigma = 2$.

На первом этапе анализировался случай, когда в качестве начальных условий задавался импульс только на прямой волне, а именно $\varphi_{\mathrm{f}}\,(y, 0) = \varphi_0 \exp\left(-y^2/y_{\text{имп}}^2\right)$, $\varphi_{\mathrm{b}}\,(y, 0) = 0$, где $y_{\text{имп}}$ – ширина импульса, φ_0 – безразмерная амплитуда импульса в начальный момент времени, которая выбиралась выше порога солитонообразования [3].

Рассмотрим особенности волновой эволюции при фиксированном значении V_{g} в зависимости от параметра χ, характеризующего геометрические параметры периодической структуры, и, соответственно, связь между прямой и встречной волнами. Предельный случай $\chi = 0$ соответствует однородной пленке ($d_1 = d_2$), при этом

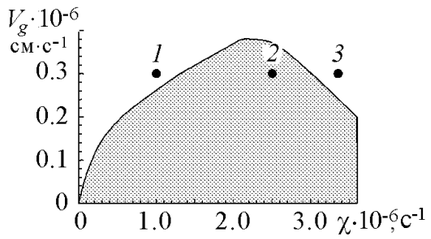


Рис. 3. Область параметров (χ, $V_{\rm g}$), соответствующая образованию солитонов ($\varphi_{0\rm f} = 0.04$, $\varphi_{0\rm b} = 0$)

встречная волна в структуре не возбуждается, вся мощность остается сосредоточенной в прямой волне, на которой формируется солитон, двигающийся с групповой скоростью $V_{\rm g}$ в положительном направлении оси y. При $\chi \neq 0$ линейная связь приводит к обмену мощностями между волнами, возбуждается встречная волна и формируются солитоны, подобные брэгговским. На рис. 3 приведены области параметров (χ, $V_{\rm g}$), соответствующие формированию солитонов различного типа. Белым цветом отмечена область параметров, в которой солитоны двигаются с некоторой скоростью $V_{\rm s}$ в одну сторону, причем $V_{\rm s} < V_{\rm g}$. Серым цветом показана область параметров, соответствующих формированию солитонов, которые с течением времени остаются локализованными на ограниченной длине структуры.

На рис. 4 показана волновая динамика для параметров, соответствующих точке 1, расположенной в белой области рис. 3. При малых значениях χ имеет место неполная перекачка мощности между прямой волной $P_{\rm f} = \int\limits_0^l |\varphi_{\rm f}|^2\, dy$ и встречной волной $P_{\rm b} = \int\limits_0^l |\varphi_{\rm b}|^2\, dy$, где l – длина структуры (рис. 4, *а*). Прямая волна преобладает, и импульсы на прямой волне (серые кривые на рис. 4, *б*) и импульсы на встречной волне (черные кривые на рис. 4, *б*) двигаются в положительном направлении оси y с общей скоростью $V_{\rm s} < V_{\rm g}$, образуя единую структуру, подобную брэгговскому солитону.

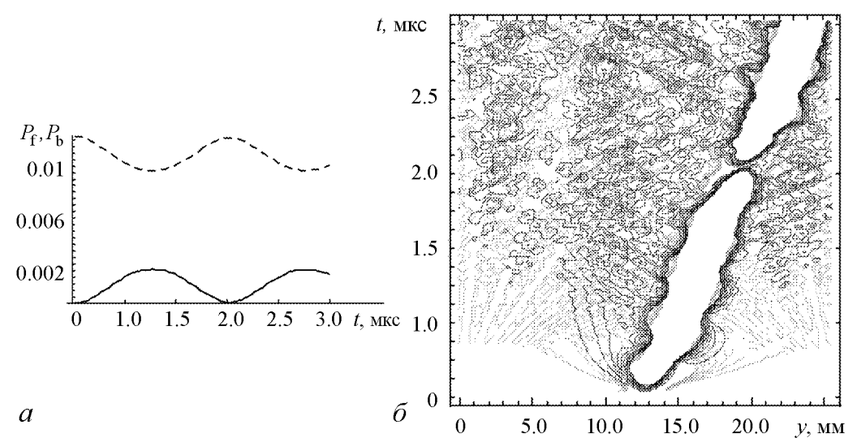


Рис. 4. Изменение мощности прямой (пунктирная кривая) и встречной (сплошная) волн с течением времени (*а*); линии равного уровня амплитуд огибающей для $\varphi_{\rm f}$(показано серым цветом) и $\varphi_{\rm b}$ (показано черным) (*б*) при $\chi = 1 \cdot 10^6$ с$^{-1}$, $V_{\rm g} = 0.3 \cdot 10^6$ см $\cdot$ с$^{-1}$ ($\varphi_{0\rm f} = 0.04$, $\varphi_{0\rm b} = 0$)

Прикладные задачи нелинейной теории колебаний и волн

Изв. вузов «ПНД», т. 18, № 5, 2010 УДК 517.9

СВЯЗАННЫЕ АВТОКОЛЕБАТЕЛЬНЫЕ ОСЦИЛЛЯТОРЫ РАЗНОЙ ПРИРОДЫ НА ПРИМЕРЕ СИСТЕМЫ ВАН ДЕР ПОЛЯ И БРЮССЕЛЯТОРА

Ю.П. Емельянова, А.П. Кузнецов

На примере связанных осцилляторов ван дер Поля и брюсселятора рассматривается задача о взаимодействии автоколебательных элементов разной природы. Выявлена картина смены доминирующего осциллятора при увеличении параметра связи. Указаны области различных типов динамики в пространстве параметров. Обсуждается случай существенно разных собственных частот.

Ключевые слова: Автоколебания, связанные осцилляторы, синхронизация, квазипериодическая динамика.

Введение

Задача о динамике двух диссипативно связанных автоколебательных осцилляторов (автогенераторов) является фундаментальной в теории колебаний и нелинейной динамике (см. [1–11] и цитированную там литературу). Основные эффекты, которые демонстрируют такие осцилляторы – это взаимный захват с различным соотношением частот, квазипериодические колебания и эффект гашения («гибели») колебаний, имеющий место при достаточно большой величине диссипативной связи. Этим режимам отвечают различные области на плоскости параметров частотная расстройка осцилляторов – величина связи.

Значительная часть литературы посвящена различным аспектам задачи, относящимся к случаю осцилляторов, идентичных по параметру возбуждения[1]. Сравнительно недавно выяснилось, что случай неидентичных осцилляторов важен и требует специального дополнительного анализа [11–17]. Такой анализ выявил еще один своеобразный тип поведения, которому на плоскости параметров отвечает область, разделяющая области гибели колебаний и квазипериодической динамики. Для него

[1]Параметру, отвечающему за отрицательное трение в осцилляторах.

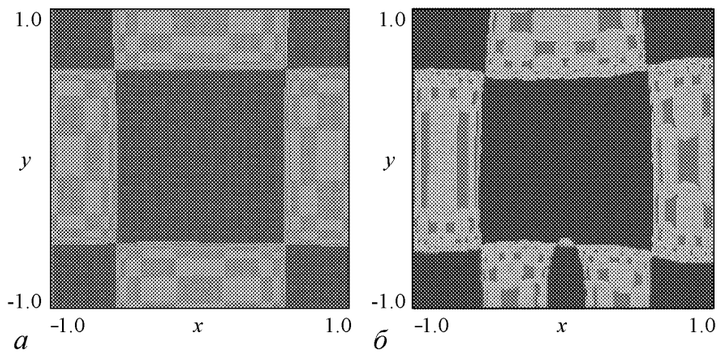


Рис. 9. Бассейны притяжения отображения (1) при значении амплитуды связи $\varepsilon = 0.01$ и различных управляющих параметров: *а* – $\lambda_1 = 1.3$, $\lambda_2 = 1.27$, $\delta = 0$; *б* – $\lambda_1 = 1.485$, $\lambda_2 = 1.2$, $\delta = 0.05$. Темным оттенком отмечен бассейн притяжения синхронного аттрактора, светлым – двух сосуществующих несинхронных аттракторов

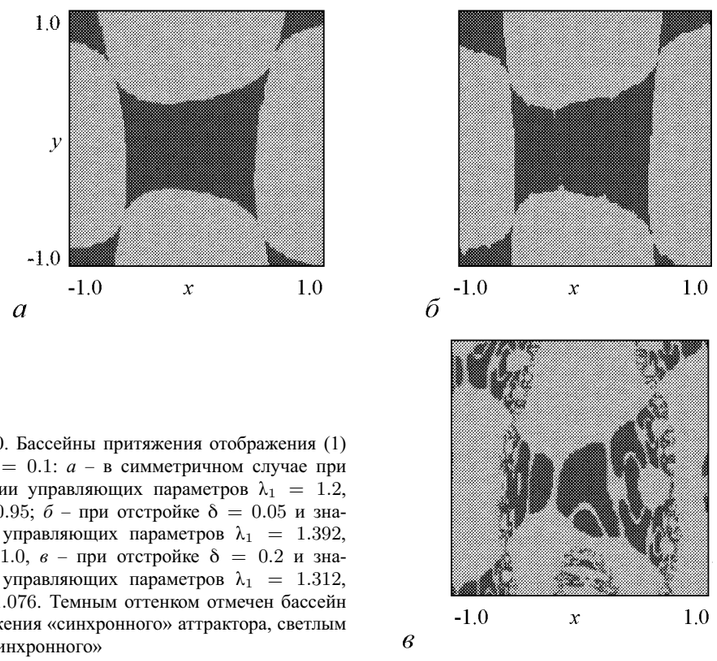


Рис. 10. Бассейны притяжения отображения (1) при $\varepsilon = 0.1$: *а* – в симметричном случае при значении управляющих параметров $\lambda_1 = 1.2$, $\lambda_2 = 0.95$; *б* – при отстройке $\delta = 0.05$ и значении управляющих параметров $\lambda_1 = 1.392$, $\lambda_2 = 1.0$, *в* – при отстройке $\delta = 0.2$ и значении управляющих параметров $\lambda_1 = 1.312$, $\lambda_2 = 1.076$. Темным оттенком отмечен бассейн притяжения «синхронного» аттрактора, светлым – «несинхронного»

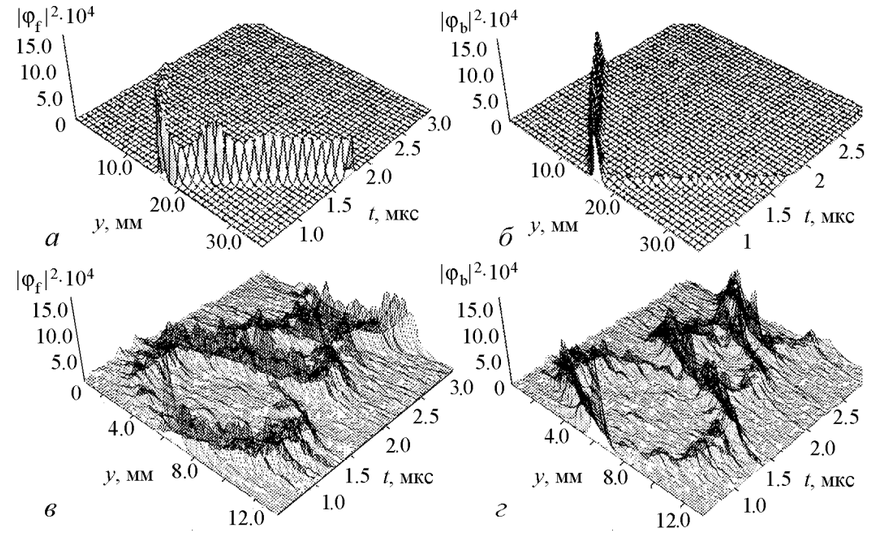


Рис. 7. Пространственно-временная эволюция огибающих при $\chi = 2 \cdot 10^6 \text{с}^{-1}$ (*а*) и (*б*); при $\chi = 6 \cdot 10^6$ с^{-1} (*в*) и (*г*) ($V_\text{g} = 1.5 \cdot 10^6$ см $\cdot$ с^{-1}, $\varphi_{0\text{f}} = \varphi_{0\text{b}} = 0.04$)

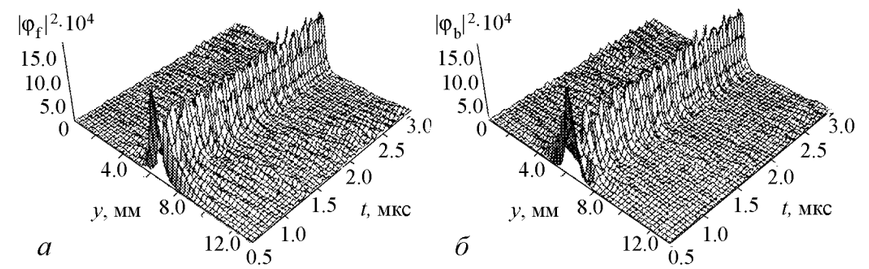


Рис. 8. Пространственно-временная эволюция огибающих φ_f (*а*) и φ_b (*б*) при $\chi = 10 \cdot 10^6$ с^{-1} , $V_\text{g} = 1.5 \cdot 10^6$ см $\cdot$ с^{-1} ($\varphi_{0\text{f}} = \varphi_{0\text{b}} = 0.04$)

симметричная динамика поведения импульсов на прямой и встречной волнах, при этом импульсы остаются локализованными в пространстве, и их комбинация ведет себя подобно брэгговскому солитону.

На рис. 8 показана динамика формирования импульсов для параметров, соответствующих точке 3 рис. 6. С увеличением значения χ период T уменьшается, импульсы чаще меняют направление движения, и область по y, в которой локализованы импульсы, сжимается. В результате формируется один солитон на прямой волне и один солитон на встречной волне, которые «стоят» на месте ($V_\text{s} = 0$).

Кратко остановимся на особенностях волновой эволюции импульсов на прямой и встречной волнах в зависимости от V_g при фиксированном χ. При увеличении

V_g перекачка мощности становится менее эффективна (уменьшается период T и перекачка становится неполной), что приводит к сносу импульсов при увеличении V_g. Увеличение V_g в этом смысле влияет на волновую эволюцию аналогично уменьшению χ. Значение V_g, соответствующее границе области локализованных солитонов, растет с увеличением χ (см. рис. 6 – при одновременном возбуждении прямой и встречной волн) и имеет максимум при некотором χ (см. рис. 3 – при возбуждении только прямой волны).

Выводы

Таким образом, в работе с использованием модели в виде связанных нелинейных уравнений Шредингера для амплитуд огибающей прямой и встречной волн рассчитаны области параметров периодической ферромагнитной структуры, при которых возможно формирование солитонов, подобных брэгговским, с различными свойствами. В частности, основным механизмом формирования солитонов, подобных брэгговским, и локализованных на ограниченной длине структуры, является взаимный захват импульсов на прямой и встречной волнах, которые движутся с общей скоростью (скорость, в свою очередь, определяется относительной мощностью двух волн), и наличие перекачки мощности между прямой и встречной волнами, которая определяется величиной коэффициента связи между волнами. Выявлены особенности волновой эволюции в зависимости от параметра связи и от величины групповой скорости и рассчитаны области параметров, соответствующие формированию импульсов, подобных брэгговским солитонам, и локализованных на ограниченной длине структуры, при различных способах возбуждения периодической структуры.

Работа выполнена при поддержке Министерства образования и науки РФ ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 годы (проект № 2010-1.2.2-123-019-002) и АВЦП «Развитие научного потенциала высшей школы» (проект РНП № 2.1.1/2695).

Библиографический список

1. *Ахмедиев Н.Н., Анкевич А.* Солитоны. Нелинейные импульсы и пучки / Пер. с англ. под ред. Островского Н.В. М.: Физматлит, 2003.
2. *Маломед Б.А.* Контроль солитонов в периодических средах / Пер. с англ. под ред. А.И. Маймистова. М.: Физматлит, 2009.
3. *Кившарь Ю.С., Агравал Г.П.* Оптические солитоны. От волоконных световодов до фотонных кристаллов / Пер. с англ. под ред. Н.Н. Розанова. М.: Физматлит, 2005.
4. *Agrawal G.P.* Lightwave Technology. Telecommunication. NewJersey: John Wiley and Sons. Inc, 2005. С. 315.
5. *Гуляев Ю.В., Никитов С.А.* Магнонные кристаллы и спиновые волны в периодических структурах// ДАН. 2001. Т. 380. С. 469.

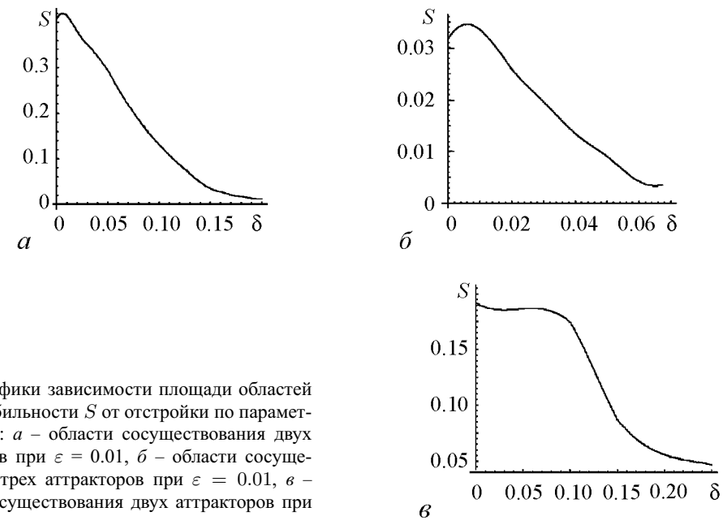


Рис. 8. Графики зависимости площади областей мультистабильности S от отстройки по параметру связи δ: *а* – области сосуществования двух аттракторов при $\varepsilon = 0.01$, *б* – области сосуществования трех аттракторов при $\varepsilon = 0.01$, *в* – области сосуществования двух аттракторов при $\varepsilon = 0.1$

изменение площади областей сосуществования двух и трех аттракторов происходит одинаково: вблизи значения отстройки по параметру связи, равному амплитуде связи, наблюдается некоторое увеличение площади, а при дальнейшем увеличении δ происходит равномерное ее уменьшение.

При значениях отстройки $\delta \approx 0.3$ мультистабильность переставала наблюдаться для обоих рассмотренных случаев величины связи ($\varepsilon = 0.01$ и $\varepsilon = 0.1$).

Наряду с исследованием областей пространства параметров, в которых возможна мультистабильность, существенный интерес представляет исследование бассейнов притяжения сосуществующих аттракторов.

Были построены бассейны притяжения аттракторов отображения (1) для значений амплитуды связи $\varepsilon = 0.01$ и $\varepsilon = 0.1$ (рис. 9 и 10, соответственно). В симметричном случае они даже вблизи границ листов мультистабильности (рис. 9, *а*, 10, *а*) имеют типичный для связанных систем вид, который сохраняется при введении небольшой отстройки по параметру связи $\delta \sim 0.01 - 0.02$. Однако с ростом отстройки, по мере того как листы мультистабильности с тремя аттракторами на плоскости управляющих параметров удаляются от диагонали, их бассейны притяжения существенно искажаются. При небольшом значении параметра связи возможно увеличение площади бассейна одного несинхронного* аттрактора и уменьшение площади другого, в том числе слияние нескольких частей бассейна в одну связную область (рис. 9, *б*). При большем его значении возможны более интересные трансформации бассейнов, в том числе «изрешечивание» бассейнов притяжения и фрактализация их границ (рис. 10, *б, в*).

*Здесь мы продолжаем употреблять термины «синхронный» и «несинхронный» для обозначения аттракторов, хотя строго говоря, в случае несимметричной связи они не вполне корректны. В данном случае под синхронным следует понимать аттрактор, расположенный на диагонали при симметричной связи и вблизи нее при слабо несимметричной связи.

заны на выносных рисунках. Следует также отметить, что с ростом амплитуды связи ε листы сосуществования трех аттракторов смещаются вдоль диагонали, уменьшаясь при этом по площади, и при несколько бóльших значениях амплитуды связи перекрывания листов не происходит.

Для анализа структуры аттрактора в зависимости от параметра в нелинейной динамике традиционно применяется метод построения бифуркационных деревьев [11]. В нашей работе была использована модификация этого метода [13,14], заключающаяся в построении на одном рисунке набора бифуркационных деревьев, различающихся выбранными начальными условиями.

Для удобства анализа синхронных и несинхронных режимов была использована замена динамических переменных в виде

$$U = \frac{x+y}{2}, \qquad V = \frac{x-y}{2}, \tag{2}$$

соответствующая выбору осей координат на фазовой плоскости вдоль главной диагонали и перпендикулярно к ней.

Построенные в этих переменных деревья, соответствующие изменению параметров вдоль главной диагонали, приведены на рис. 3. Отметим, что на дереве для «поперечной» переменной V видна линия $V = 0$, соответствующая синхронному аттрактору. Остальные структуры отображают динамику на несинхронных аттракторах. В частности, можно видеть возникновение несинхронного аттрактора периода 2, а также возникновение одновременно с его удвоением еще двух несинхронных аттракторов периода 4.

Дерево для «продольной» переменной U отображает преимущественно динамику основного синхронного аттрактора, претерпевающего каскад бифуркаций удвоения периода. Сохраняющаяся после первой бифуркации удвоения центральная линия соответствует несинхронному аттрактору периода 2, так как вследствие присущей рассматриваемой системе симметрии значения переменной U в обеих точках этого аттрактора совпадают.

Теперь рассмотрим влияние введения отстройки связи от симметричной на мультистабильность. На рис. 4 приведены карта мультистабильности отображения (1) на плоскости управляющих параметров для значения амплитуды связи $\varepsilon = 0.01$ и

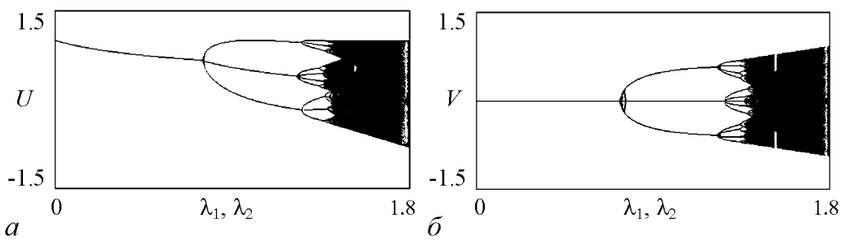


Рис. 3. Бифуркационные деревья системы (1) в переменных U (*а*) и V (*б*), построенные вдоль диагонали плоскости управляющих параметров отображения (1) при $\varepsilon = 0.01$, $\delta = 0$

Новое в прикладной физике

Изв. вузов «ПНД», т. 18, № 5, 2010 УДК 535.5; 537.87

ВОЛНОВЫЕ УРАВНЕНИЯ ДЛЯ ОПИСАНИЯ ЭФФЕКТА ПОККЕЛЬСА В КРИСТАЛЛАХ И ИХ АНАЛИЗ НА ПРИМЕРЕ КРИСТАЛЛА НИОБАТА ЛИТИЯ

Ю.А. Зюрюкин, М.В. Павлова, Д.Р. Древко

Предложено теоретическое описание эффекта Поккельса, в котором постановка задачи в форме уравнений Максвелла позволяет переходить непосредственно к волновым уравнениям и находить их решения. Получены аналитические выражения, определяющие фазовые скорости и поляризацию плоских световых волн, распространяющихся в кристалле ниобата лития в главных кристаллофизических направлениях для различных случаев влияния внешнего статического электрического поля. Сделаны соответствующие выводы о наиболее оптимальном использовании эффекта Поккельса для управления работой модулятора оптического излучения, в частности на кристалле ниобата лития.

Ключевые слова: Электрооптический эффект, электромагнитные волны, волновое уравнение, ниобат лития.

Введение

Для выбора оптимальных режимов модуляции света на конкретном кристалле необходимо провести исследование электрооптических свойств этого кристалла. Традиционно при изучении распространения электромагнитных волн в анизотропных средах, в том числе и при наличии внешнего электрического поля, используется метод эллипсоида показателей преломления (или оптической индикатрисы) [1–6]. Данный метод, хотя и является следствием электромагнитной теории света, однако не всегда удобен и нагляден для количественной оценки эффекта, поскольку предусматривает графическую интерпретацию и в большей степени качественный анализ особенностей распространения электромагнитных волн в анизотропных средах, в частности в электрооптических кристаллах.

В настоящей работе ставится задача теоретического описания эффекта Поккельса в кристаллах на основе электромагнитной теории. Именно постановка задачи

в форме уравнений Максвелла позволила нам перейти непосредственно к волновым уравнениям и найти их решения, то есть получить выражения, определяющие фазовые скорости и поляризацию плоских световых волн, распространяющихся в электрооптическом кристалле в произвольном направлении для различных случаев влияния внешнего статического электрического поля. На основе проведенного исследования и анализа полученных результатов сделаны выводы о наиболее оптимальном использовании эффекта Поккельса для управления работой модулятора света, в частности на кристалле ниобата лития.

1. Постановка задачи об эффекте Поккельса в форме уравнений Максвелла на примере кристалла ниобата лития

Считаем, что кристалл является однородной, непоглощающей и магнитно-изотропной средой, электрические и оптические свойства которого в различных направлениях определяются тензором непроницаемости. В случае эффекта Поккельса наложение внешнего статического электрического поля $\mathbf{E}^{\text{ст}}$ приведет к линейному изменению тензора непроницаемости:

$$\Delta\eta_{ij} = \eta_{ij}(\mathbf{E}^{\text{ст}}) - \eta_{ij}\,(0) = r_{ijk}E_k^{\text{ст}}, \tag{1}$$

где индекс суммирования k означает: $1 = x$, $2 = y$, $3 = z$;

$\hat{\eta}(0) = \hat{\eta}^{\circ} = \begin{pmatrix} \eta_{xx}^{\circ} & 0 & 0 \\ 0 & \eta_{yy}^{\circ} & 0 \\ 0 & 0 & \eta_{zz}^{\circ} \end{pmatrix}$ – тензор непроницаемости в отсутствие $\mathbf{E}^{\text{ст}}$;

$\hat{\eta}(\mathbf{E}^{\text{ст}}) = \hat{\eta} = \begin{pmatrix} \eta_{xx} & \eta_{xy} & \eta_{xz} \\ \eta_{yx} & \eta_{yy} & \eta_{yz} \\ \eta_{zx} & \eta_{zy} & \eta_{zz} \end{pmatrix}$ – тензор непроницаемости при наличии $\mathbf{E}^{\text{ст}}$;

$\hat{r}$– электрооптический тензор третьего ранга, который в оптически неактивной среде без потерь является симметричным [1].

Напряженность электрического поля плоской световой волны, распространяющейся в произвольном кристалле при наличии эффекта Поккельса, определяется в декартовой системе координат, оси которой совпадают с главными диэлектрическими осями в невозмущенном кристалле (то есть в отсутствие внешнего электрического поля)

$$\begin{aligned} E_x &= \frac{1}{\varepsilon_0}\left(\eta_{xx}D_x + \eta_{xy}D_y + \eta_{xz}D_z\right), \\ E_y &= \frac{1}{\varepsilon_0}\left(\eta_{yx}D_x + \eta_{yy}D_y + \eta_{yz}D_z\right), \\ E_z &= \frac{1}{\varepsilon_0}\left(\eta_{zx}D_x + \eta_{zy}D_y + \eta_{zz}D_z\right), \end{aligned} \tag{2}$$

где D_k – компоненты вектора электрического смещения; ε_0 – электрическая постоянная. Компоненты возмущенного тензора непроницаемости в выражениях (2) запи-

1. Исследование мультистабильности в несимметрично связанных логистических отображениях

В настоящей работе исследования проводились на примере системы связанных логистических отображений с инерционной связью [11]

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= 1 - \lambda_1 x_n^2 + \varepsilon_1(y_n - x_n), \\ y_{n+1} &= 1 - \lambda_2 y_n^2 + \varepsilon_2(x_n - y_n). \end{aligned} \tag{1}$$

Для случая несимметричной связи коэффициенты ε_1, ε_2 выбирались в виде $\varepsilon_1 = \varepsilon - \delta$, $\varepsilon_2 = \varepsilon + \delta$. Параметр δ имеет в этом случае смысл расстройки связи.

Для численного исследования мультистабильности построим плоскость параметров системы, на которой различными оттенками серого будем обозначать области, соответствующие сосуществованию различного количества аттракторов. (Далее будем называть такую плоскость параметров «картой мультистабильности».) Для численного построения такой карты в каждой точке плоскости параметров путем итерации большого числа начальных условий определялись количество и тип сосуществующих аттракторов. Соответствующие карты для случая симметричной связи малой величины ($\varepsilon = 0.01$) приведены на рис. 1. Для идентификации сосуществующих режимов на рис. 2 приведена «традиционная» карта динамических режимов [12] системы (1), на которой различными оттенками серого обозначены области устойчивости различных динамических режимов, при этом для моделирования в каждой точке плоскости параметров используется только один набор начальных условий $x_0 = 0.1$, $y_0 = 0.3$.

Сравнивая карту режимов с картой мультистабильности (см. рис. 1), можно видеть, что область сосуществования двух аттракторов опирается на линию бифуркации удвоения периода неподвижной точки, а после удвоения цикла периода два появляются области сосуществования трёх и четырёх аттракторов, что согласуется с результатами, полученными в [1–3].

Области мультистабильности располагаются вдоль диагонали $\lambda_1 = \lambda_2$. Имеется одна область сосуществования двух аттракторов, опирающаяся на линию рождения цикла периода два. Если двигаться дальше вдоль диагонали, то после следующего удвоения периода появляются две смещенные относительно друг друга области сосуществования трех аттракторов, а в области их перекрывания наблюдается сосуществование четырех аттракторов. Сосуществующие в этих областях аттракторы пока-

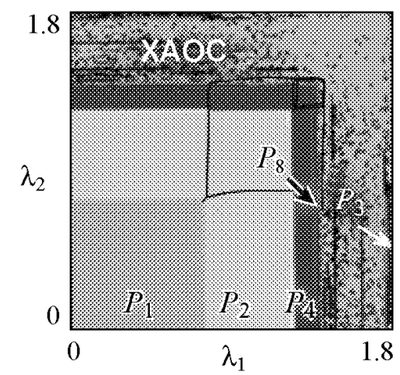


Рис. 2. Карта динамических режимов системы (1) в симметричном случае ($\varepsilon = 0.01$, $\delta = 0$). Различными оттенками серого отмечены области устойчивости циклов различных периодов (P1 – неподвижная точка, P2 – цикл периода 2 и т.д.). Области сосуществования нескольких аттракторов обведены жирными линиями, сосуществующие в них аттракторы приведены на рис. 1

COHERENCE RESONANCE AND SYNCHRONIZATION OF STOCHASTIC SELF-SUSTAINED OSCILLATIONS IN THE FITZHUGH–NAGUMO SYSTEM

A.V. Feoktistov, S.V. Astakhov, V.S. Anishchenko

In present paper the phenomena of coherence resonance, mutual and external synchronization of noise-induced stochastic oscillations in FitzHugh–Nagumo system are studied by means of numerical and natural experiments. The properties of attractor in the system as well as energy exchange processes are analyzed. Self-sustained character of stochastic oscillations in non-autonomous FitzHugh–Nagumo system justified.

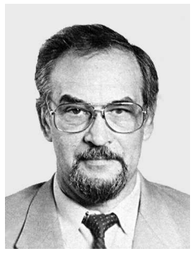
Keywords: Coherence resonance, synchronization, stochastic self-sustained oscillations, FitzHugh–Nagumo system, noise-induced oscillations.

Феоктистов Алексей Владимирович – родился в 1987 году в Сердобске, окончил Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского (2009). После окончания СГУ обучается в аспирантуре на кафедре радиофизики и нелинейной динамики. Научные интересны главным образом связаны с возбудимыми системами, стохастическими колебаниями, эффектами синхронизации и радиофизическими экспериментами.

410012 Саратов, ул. Астраханская, 83
Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского
E-mail: feoktistov_a_v@mail.ru

Астахов Сергей Владимирович – родился в Саратове (1984). Окончил физический факультет Саратовского университета по специальности радиофизика и электроника (2006). Поступил в аспирантуру по специальности «Радиофизика» (2007). Область научных интересов: хаос в сосредоточенных и распределенных системах, статистические характеристики хаоса, динамика систем с задержкой.

410012 Саратов, ул. Астраханская, 83
Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского
E-mail: astakhovsv@chaos.ssu.runnet.ru



Анищенко Вадим Семенович – родился в 1943 году. Окончил физический факультет СГУ (1966). Защитил диссертацию на звание кандидата физико-математических наук (1970) и доктора физико-математических наук (1986). С 1988 года – заведующий кафедрой радиофизики и нелинейной динамики СГУ. С 1979 и по настоящее время работает в области исследования нелинейной динамики и стохастических процессов в нелинейных системах. Является автором более 300 научных работ, среди которых 7 монографий на русском и английском языках и 4 учебника. Неоднократно читал лекции в ведущих вузах Германии в качестве приглашенного профессора. Член-корреспондент РАЕН, заслуженный деятель науки РФ (1995), Соросовский профессор, лауреат премии Фонда Александра Гумбольдта (1999).

410012 Саратов, ул. Астраханская, 83
Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского
E-mail: wadim@info.sgu.ru

этом учли, что $\eta^{\circ}_{xx} = \eta^{\circ}_{yy} = 1/\varepsilon_{\perp} = 1/n_o^2$, $\eta^{\circ}_{zz} = 1/\varepsilon_{||} = \dfrac{1}{n_e^2}$, $\mu \approx 1$, где $\varepsilon_{\perp}$, $\varepsilon_{||}$ – поперечная и продольная составляющие тензора диэлектрической проницаемости.

Отсюда следует, что для светового пучка, поляризованного по оси z и распространяющегося вдоль оси x или y, или в любом направлении в плоскости xy, значение показателя преломления задается выражением

$$n_z = \frac{c}{v_z} = \frac{n_e}{\sqrt{1 + r_{33} E_z^{\text{ст}} n_e^2}} \cong n_e - n_e^3 r_{33} \frac{E_z^{\text{ст}}}{2}, \tag{12}$$

где учтено, что $r_{33} E_z^{\text{ст}} n_e^2 \ll 1$. Для пучка, поляризованного ортогонально рассмотренному (то есть по оси x или y)

$$n_x = n_y = \frac{c}{v_y} = \frac{n_o}{\sqrt{1 + r_{13} E_z^{\text{ст}} n_o^2}} \cong n_o - n_o^3 r_{13} \frac{E_z^{\text{ст}}}{2}. \tag{13}$$

Изменение фазы световой волны в соответствующих направлениях, вызванное внешним электрическим полем,

$$\Delta\varphi_z = n_e^3 r_{33} \frac{E_z^{\text{ст}}}{2} kl, \quad \Delta\varphi_y = \Delta\varphi_x = n_o^3 r_{13} \frac{E_z^{\text{ст}}}{2} kl. \tag{14}$$

Здесь k – волновое число, l – расстояние, проходимое волной в кристалле.

Таким образом, если при направлении внешнего электрического поля по оси z ($E_z^{\text{ст}}$) световой пучок, поляризованный тоже по оси z, распространяется вдоль оси x или y, или в любом направлении в плоскости xy, то возникшая в результате двойного лучепреломления необыкновенная волна имеет *максимальный фазовый набег* (так как r_{33} – наибольший коэффициент), который пропорционален расстоянию, проходимому световой волной в кристалле. Следовательно, такую конфигурацию (в условиях *поперечного эффекта Поккельса*) можно использовать для создания модулятора лазерного пучка с *низким управляющим напряжением*.

1.2. Электрическое поле приложено вдоль оси z ($E_z^{\text{ст}} \neq 0$) и световой пучок распространяется тоже вдоль оптической оси z. Уравнения Максвелла приводят к волновым уравнениям

$$\frac{\partial^2 D_x}{\partial z^2} - \left(\frac{\mu\mu_0\varepsilon_0}{\eta^{\circ}_{xx} + r_{13} E_z^{\text{ст}}} \right) \frac{\partial^2 D_x}{\partial t^2} = 0, \tag{15}$$

$$\frac{\partial^2 D_y}{\partial z^2} - \left(\frac{\mu\mu_0\varepsilon_0}{\eta^{\circ}_{yy} + r_{13} E_z^{\text{ст}}} \right) \frac{\partial^2 D_y}{\partial t^2} = 0. \tag{16}$$

Отсюда следует, что и в условиях существования эффекта Поккельса при распространении световой волны вдоль оптической оси z двойное лучепреломление наблюдаться не будет. Для волн исходной поляризации по x или по y, или любой поляризации в плоскости (xy) фазовая скорость будет определяться выражением

$$v_x^2 = v_y^2 = \frac{\eta^{\circ}_{xx} + r_{13} E_z^{\text{ст}}}{\mu\mu_0\varepsilon_0} = c^2 \left(\frac{1}{n_o^2} + r_{13} E_z^{\text{ст}} \right). \tag{17}$$

Таким образом, если модулирующее электрическое поле приложено по направлению оси z, то световой пучок, распространяющийся вдоль оси z, будет иметь один и тот

же фазовый набег независимо от его поляризации. Следовательно, такой модулятор (*на продольном эффекте Поккельса)* может *модулировать фазу неполяризованного лазерного пучка*.

2.1. Электрическое поле приложено вдоль оси x, а световой пучок распространяется вдоль оптической оси z. В этом случае уравнения Максвелла приводят к следующим уравнениям:

$$\frac{\partial^2 D_y}{\partial z^2} - \frac{\mu\mu_0\varepsilon_0}{\eta^\circ_{yy}}\frac{\partial^2 D_y}{\partial t^2} = \frac{r_{22}E_x^{\text{ст}}}{\eta^\circ_{yy}}\frac{\partial^2 D_x}{\partial z^2}, \tag{18}$$

$$\frac{\partial^2 D_x}{\partial z^2} - \frac{\mu\mu_0\varepsilon_0}{\eta^\circ_{xx}}\frac{\partial^2 D_x}{\partial t^2} = \frac{r_{22}E_x^{\text{ст}}}{\eta^\circ_{xx}}\frac{\partial^2 D_y}{\partial z^2}. \tag{19}$$

Как видно, эти уравнения связаны между собой, то есть поляризация волн, возникающих в результате двойного лучепреломления в кристалле, уже не будет совпадать с главными направлениями кристалла (x или y).

Для нахождения фазовых скоростей и определения направления поляризаций используем подстановку Эйлера:

$$\left\{\begin{array}{c} D_x \\ D_y \end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{c} D_x^\circ \\ D_y^\circ \end{array}\right\} \cdot \exp\left(j(\omega t - kz)\right) = \left\{\begin{array}{c} D_x^\circ \\ D_y^\circ \end{array}\right\} \cdot \exp\left(j\left(\omega t - \frac{\omega}{\upsilon}z\right)\right),$$

D° – амплитудные значения.

В результате подстановки уравнения (18) и (19) примут вид

$$-\frac{\varepsilon_\perp r_{22}E_x^{\text{ст}}}{\upsilon^2}D_x^\circ + \left(\frac{1}{\upsilon^2} - \frac{1}{\left(\upsilon^\circ_{x,y}\right)^2}\right)D_y^\circ = 0, \tag{20}$$

$$\left(\frac{1}{\upsilon^2} - \frac{1}{\left(\upsilon^\circ_{x,y}\right)^2}\right)D_x^\circ - \frac{\varepsilon_\perp r_{22}E_x^{\text{ст}}}{\upsilon^2}D_y^\circ = 0, \tag{21}$$

где $\left(\upsilon^\circ_{x,y}\right)^2 = \left(\upsilon^\circ_x\right)^2 = \left(\upsilon^\circ_y\right)^2 = 1/(\mu\mu_0\varepsilon_0\varepsilon_\perp) = c^2/n_o^2$.

Система уравнений (20)–(21) позволяет определить как фазовые скорости (υ_1 и υ_2) волн, распространяющихся в кристалле в условиях существования эффекта Поккельса, так и направление поляризации для каждой волны. Ненулевое решение этой однородной системы уравнений для D_x° и D_y° существует, когда ее определитель равен нулю. Отсюда получаем уравнение для нахождения υ

$$\left(\upsilon^2\right)^2 - 2\left(\upsilon^\circ_{x,y}\right)^2\upsilon^2 + \left(\upsilon^\circ_{x,y}\right)^4\left(1 - (\varepsilon_\perp r_{22}E_x^{\text{ст}})^2\right) = 0$$

и определяем имеющие физический смысл решения

$$\upsilon_1^2 = \left(\upsilon^\circ_{x,y}\right)^2\left(1 - \varepsilon_\perp r_{22}E_x^{\text{ст}}\right) = c^2\left(\frac{1}{n_o^2} - r_{22}E_x^{\text{ст}}\right), \tag{22}$$

$$\upsilon_2^2 = \left(\upsilon^\circ_{x,y}\right)^2\left(1 + \varepsilon_\perp r_{22}E_x^{\text{ст}}\right) = c^2\left(\frac{1}{n_o^2} + r_{22}E_x^{\text{ст}}\right). \tag{23}$$

для которых существует аттрактор и которые демонстрируют эффект синхронизации, можно назвать стохастическими автоколебаниями.

Авторы выражают глубокую благодарность профессору Т.Е. Вадивасовой за плодотворные обсуждения результатов работы и ряд полезных замечаний.

Работа выполнена в рамках АВЦП «Развитие научного потенциала высшей школы на 2009–2010 годы» Министерства образования и науки РФ (грант № 2.2.2.2/229) и при поддержке Американского фонда гражданских исследований и развития (CRDF).

Библиографический список

1. *Pikovsky A.S. and Kurths J.* Coherence resonance in a noise-driven excitable system // Phys. Rev. Lett. 1997. Vol. 78. P. 775.
2. *Linder B., Schimansky-Geier L.* Analytical approach to the stochastic FitzHugh–Nagumo system and coherence resonance // Phys. Rev. E. 1999. Vol. 60, № 6. P. 7270.
3. *Izhikevich E.M.* Dynamical Systems in Neuroscience: The Geometry of Excitability and Bursting. The MIT Press. Cambridge. MA, 2007.
4. *FitzHugh R.* Mathematical models of threshold phenomena in the nerve membrane // Bull. Math. Biophysics. 1955. Vol. 17. P. 257.
5. *Scott A.C.* The electrophysics of a nerve fiber // Rev. Mod. Phys. 1975. Vol. 47. P. 487.
6. *Longtin A.* Stochastic resonance in neuron models // J. Stat. Phys. 1993. Vol. 70. P. 309.
7. *Baltanas J.P., Casado J.M.* Bursting behaviour of the FitzHugh–Nagumo neuron model subject to quasi-monochromatic noise // Phys. D. 1998. Vol. 122, № 1. P. 231.
8. *Han S.K., Yim T.G., Postnov D.E., Sosnovtseva O.V.* Interacting coherence resonance oscillators // Phys. Rev. Lett. 1999. Vol. 83, № 9. P. 1771.
9. *Neiman A., Schimansky-Geier L., Cornell-Bell A., Moss F.* Noise-enhanced phase synchronization in excitable media // Phys. Rev. Lett. 1999. Vol. 83, № 23. P. 4896.
10. *Hu B., Zhou Ch.* Phase synchronization in coupled nonidentical excitable systems and array-enhanced coherence resonance // Phys. Rev. E. 2000. Vol. 61, № 2. R1001-R1004.
11. *Андронов А.А., Витт А.А., Хайкин С.Э.* Теория колебаний. М.: Наука, 1981.
12. *Makarov V.A., del Rio E., Ebeling W., and Velarde M.G.* Dissipative Toda-Rayleigh lattice and its oscillatory modes // Phys. Rev. E. 2001. Vol. 64. 036601.
13. *Анищенко В.С., Вадивасова Т.Е., Стрелкова Г.И.* Автоколебания динамических и стохастических систем и их математический образ–аттрактор // Нелинейная динамика, 2010 (принята к публикации).

Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского

Поступила в редакцию *26.03.2010*
После доработки *3.11.2010*

в которой введены безразмерные параметры

$$a = \frac{U_0}{i_0}\sqrt{\frac{L_0 C}{L_{1,2}^2}}, \quad b_{1,2} = \frac{V_{C_{1,2}}}{u_o}, \quad c = R\frac{i_0}{u_0},$$
$$g = \frac{i_0}{u_0}\sqrt{\frac{L_0}{C}}, \quad D = \frac{u_0^2 C L_0}{2 i_0^2 L_{1,2}^2} A_\xi^2. \tag{7}$$

При проведении как численного, так и физического экспериментов парциальные подсистемы настраивались в режим когерентного резонанса. Поскольку расстройка между подсистемами ФХН в экспериментах была выбрана небольшой, то при одной и той же интенсивности шума обе подсистемы находились в окрестности когерентного резонанса. Это связано с достаточно слабой зависимостью степени когерентности от интенсивности шума вблизи оптимальной шумовой накачки (см. рис. 6 и 7).

Натурные и численные эксперименты демонстрируют эффект захвата частоты с увеличением коэффициента связи (рис. 13).

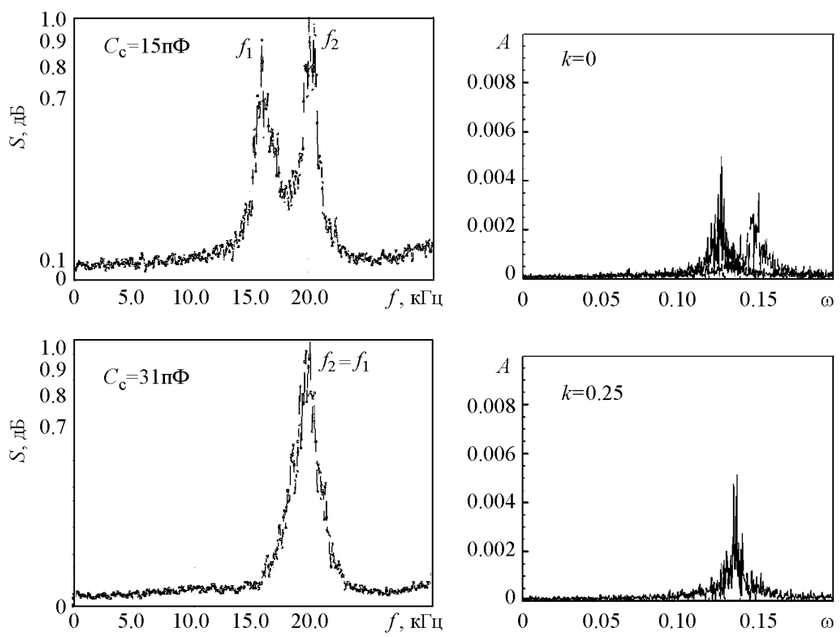


Рис. 13. Спектры мощности, демонстрирующие эффект взаимной синхронизации двух связанных систем ФХН в физическом (*а*) и численном (*б*) экспериментах. Здесь ω – безразмерная частота; k – параметр связи; A – спектральная плотность мощности

Выявившаяся ситуация приводит фактически к квадратичному электрооптическому эффекту (Керра), хотя в исходных позициях предполагался линейный электрооптический эффект (Поккельса).

Направления поляризации x' и z' световых волн, распространяющихся в кристалле вдоль оси y под действием внешнего электрического поля $E_x^{\text{ст}}$ со скоростями υ_1 и υ_2, соответственно, определяются из уравнений (30), (31) с учетом решений (35), (36), следующим выражением:

$$\operatorname{tg}\gamma = \frac{D_z^\circ}{D_x^\circ} = \frac{\varepsilon_{||} r_{51} E_x^{\text{ст}}}{\upsilon_1^2\left(\dfrac{1}{(\upsilon_z^\circ)^2} - \dfrac{1}{\upsilon_1^2}\right)} = \frac{\varepsilon_{||} r_{51} E_x^{\text{ст}}}{\dfrac{\upsilon_1^2}{(\upsilon_z^\circ)^2} - 1} = \frac{r_{51} E_x^{\text{ст}}}{\dfrac{1}{n_o^2} - \dfrac{1}{n_e^2} + \dfrac{n_e^2 \left(r_{51} E_x^{\text{ст}}\right)^2}{(n_o/n_e)^2 - 1}}, \tag{37}$$

где γ – угол, определяющий индуцированные направления поляризации x' и z', относительно кристаллофизических направлений x и z. Как показывают расчеты, значение γ очень мало даже для умеренно сильных электрических полей ($\gamma = -0.11^\circ$ при $E_x = 10^6$ В/м) и поэтому является физически несущественным проявлением электрооптического эффекта в данном кристалле, связанным с поворотом плоскости поляризации.

3.1. Электрическое поле приложено вдоль оси y, а световой пучок распространяется вдоль оптической оси z. В этом случае уравнения Максвелла приводят к волновым уравнениям

$$\frac{\partial^2 D_y}{\partial z^2} - \frac{\mu\mu_0\varepsilon_0}{\eta_{yy}^\circ + r_{22} E_y^{\text{ст}}}\frac{\partial^2 D_y}{\partial t^2} = 0, \tag{38}$$

$$\frac{\partial^2 D_x}{\partial z^2} - \frac{\mu\mu_0\varepsilon_0}{\eta_{xx}^\circ - r_{22} E_y^{\text{ст}}}\frac{\partial^2 D_x}{\partial t^2} = 0. \tag{39}$$

где $\upsilon_y^2 = (\eta_{yy}^\circ + r_{22}E_y^{\text{ст}})/(\mu\mu_0\varepsilon_0) = c^2\left(1/n_o^2 + r_{22}E_y^{\text{ст}}\right)$ – фазовая скорость волны, поляризованной по y, $\upsilon_x^2 = (\eta_{xx}^\circ - r_{22}E_y^{\text{ст}})/(\mu\mu_0\varepsilon_0) = c^2\left(1/n_o^2 - r_{22}E_y^{\text{ст}}\right)$ – фазовая скорость волны, поляризованной по x, в условиях существования эффекта Поккельса.

Таким образом, при выбранной конфигурации электрического поля и светового пучка, возникает индуцированное полем $E_y^{\text{ст}}$ двойное лучепреломление, то есть исходный световой пучок, распространяющийся вдоль оптической оси z, распадается на две волны, движущиеся с разными фазовыми скоростями. Волна, поляризованная по оси y, будет ускоряться, а по оси x – замедляться. Наведенный фазовый набег для обеих волн одинаков

$$\Delta\varphi_x = \Delta\varphi_y = n_o^3 r_{22}\frac{E_y}{2}kl. \tag{40}$$

3.2. Электрическое поле приложено вдоль оси y, а световой пучок распространяется по направлению оси y. В этом случае уравнения Максвелла приводят к

волновым уравнениям

$$\frac{\partial^2 D_z}{\partial y^2} - \frac{\mu\mu_0\varepsilon_0}{\eta^\circ_{zz}}\frac{\partial^2 D_z}{\partial t^2} = 0, \tag{41}$$

$$\frac{\partial^2 D_x}{\partial y^2} - \frac{\mu\mu_0\varepsilon_0}{\eta^\circ_{xx} - r_{22}E_y^{\text{ст}}}\frac{\partial^2 D_x}{\partial t^2} = 0, \tag{42}$$

где $\upsilon_z^2 = (\upsilon_z^\circ)^2 = 1/(\mu\mu_0\varepsilon_0\varepsilon\varepsilon_{||}) = c^2/n_e^2$ – фазовая скорость волны, поляризованной по оси z; $\upsilon_x^2 = (\eta^\circ_{xx} - r_{22}E_y^{\text{ст}})/(\mu\mu_0\varepsilon_0) = c^2\left(1/n_o^2 - r_{22}E_y^{\text{ст}}\right)$– фазовая скорость волны, поляризованной по оси x при наличии статического электрического поля $E_y^{\text{ст}}$.

Видим, что электрическое поле $E_y^{\text{ст}}$ оказывает влияние только на волну, поляризованную по оси x. Скорость волны, поляризованной вдоль оптической оси z, не изменяется, как для необыкновенной волны в отсутствие эффекта Поккельса.

3.3. Электрическое поле приложено вдоль оси y, а световой пучок распространяется по направлению оси x. В этом случае уравнения Максвелла приводят к следующим уравнениям:

$$\frac{\partial^2 D_z}{\partial x^2} - \frac{1}{(\upsilon_z^\circ)^2}\frac{\partial^2 D_z}{\partial t^2} = \varepsilon_{||}r_{51}E_y^{\text{ст}}\frac{\partial^2 D_y}{\partial x^2}, \tag{43}$$

$$\frac{\partial^2 D_y}{\partial x^2} - \frac{1}{\left(\upsilon_y^\circ\right)^2\left(1+\varepsilon_\perp r_{22}E_y^{\text{ст}}\right)}\frac{\partial^2 D_y}{\partial t^2} = -\frac{\varepsilon_\perp r_{51}E_y^{\text{ст}}}{\left(1+\varepsilon_\perp r_{22}E_y^{\text{ст}}\right)}\frac{\partial^2 D_z}{\partial x^2}. \tag{44}$$

Аналогично выше рассмотренным ситуациям для нахождения фазовых скоростей и определения направления поляризаций используем подстановку Эйлера. В результате система уравнений (43)–(44) примет вид

$$\frac{\varepsilon_{||}r_{51}E_y^{\text{ст}}}{\upsilon^2}D_y^\circ + \left[\frac{1}{(\upsilon_z^\circ)^2} - \frac{1}{\upsilon^2}\right]D_z^\circ = 0, \tag{45}$$

$$\left[\frac{1}{\left(\upsilon_y^\circ\right)^2\left[1+\varepsilon_\perp r_{22}E_y^{\text{ст}}\right]} - \frac{1}{\upsilon^2}\right]D_y^\circ - \frac{\varepsilon_\perp r_{51}E_y^{\text{ст}}}{\upsilon^2[1+\varepsilon_\perp r_{22}E_y^{\text{ст}}]}D_z^\circ = 0. \tag{46}$$

Из равенства нулю определителя системы уравнений находим решения

$$\upsilon_{1,2}^2 = \frac{\left(\upsilon_y^\circ\right)^2\left[1+\varepsilon_\perp r_{22}E_y^{\text{ст}}\right] + (\upsilon_z^\circ)^2}{2} \pm \frac{\left(\upsilon_y^\circ\right)^2\left[1+\varepsilon_\perp r_{22}E_y^{\text{ст}}\right] - (\upsilon_z^\circ)^2}{2}\sqrt{1-2\left(\Delta^*\right)^2}, \tag{47}$$

где $(\Delta^*)^2 = \dfrac{2\left(\upsilon_y^\circ\right)^2(\upsilon_z^\circ)^2\left(\varepsilon_\perp\varepsilon_{||}(r_{51}E_y^{\text{ст}})^2\right)}{\left(\left(\upsilon_y^\circ\right)^2\left[1+\varepsilon_\perp r_{22}E_y^{\text{ст}}\right] - (\upsilon_z^\circ)^2\right)^2} = \dfrac{2\left(r_{51}E_y^{\text{ст}}\right)^2}{\left(\dfrac{1}{n_o^2} - \dfrac{1}{n_e^2} + r_{22}E_y^{\text{ст}}\right)^2}.$

4. Взаимная синхронизация двух связанных систем ФХН

Рассмотрим две симметрично связанные системы ФХН. С целью исключения сильного взаимодействия парциальных подсистем, способного изменить эффективные значения параметров, была разработана специальная схема симметричной связи (рис. 4.). Эта схема позволила в эксперименте вводить слабую связь между подсистемами, уровень которой плавно менялся с помощью емкости связи C_{c}. Для расстройки по базовым частотам парциальных подсистем их параметры были выбраны различными: $L_1 = 6.2$ мГн, $L_2 = 3.9$ мГн, $V_{C_1} = 7.2$ В, $V_{C_2} = 7.91$ В, $R_1 = R_2 = 91$ Ом. Все другие параметры схемы соответствовали значениям экспериментов с одиночной системой (см. рис. 4).

Уравнения системы в физических переменных имеют вид

$$\begin{aligned}
\frac{di_1}{dt} &= \frac{1}{L_1}(V_{C_1} - Ri_1 - u_1) + \frac{A_\xi}{L_1}\xi(t),\\
\frac{du_1}{dt} &= \frac{1}{C}(i_1 - I(u_1) + \frac{C_{\text{c}}}{C+2C_{\text{c}}}((i_2 - i_1) - (I(u_2) - I(u_1)))),\\
\frac{di_2}{dt} &= \frac{1}{L_2}(V_{C_2} - Ri_2 - u_2) + \frac{A_\xi}{L_2}\xi(t),\\
\frac{du_2}{dt} &= \frac{1}{C}(i_2 - I(u_2) + \frac{C_{\text{c}}}{C+2C_{\text{c}}}((i_1 - i_2) - (I(u_1) - I(u_2)))).
\end{aligned} \tag{5}$$

В безразмерной форме путем перенормировки из (5.2) получается динамическая система вида

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= a_1(b_1 - cx_1 - y_1) + \sqrt{2D_1}\eta(\tau),\\
\dot{y}_1 &= g(x_1 - F(y_1)) + k((x_2 - x_1) - (F(y_2) - F(y_1))),\\
\dot{x}_2 &= a_2(b_2 - cx_2 - y_2) + \sqrt{2D_2}\eta(\tau),\\
\dot{y}_2 &= g(x_2 - F(y_2)) + k((x_1 - x_2) - (F(y_1) - F(y_2))),
\end{aligned} \tag{6}$$

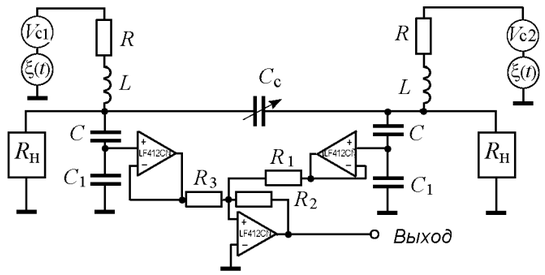


Рис. 12. Экспериментальная схема двух связанных систем ФХН: $R = 91$ Ом, $L = 6.8$ мГн, $C = 68$ пФ, $R_1 = R_2 = R_3 = 100$ кОм, $C_1 = 5.6$ пФ

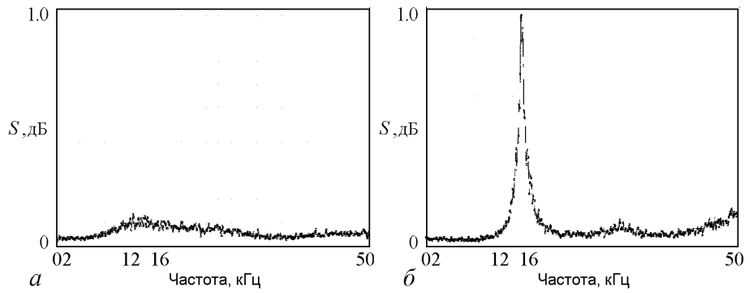


Рис. 5. Эволюция спектров мощности колебаний при увеличении шумового напряжения: *а* – спектр мощности вблизи порога возбуждения колебаний, $A_\xi = 900$ мВ; *б* – спектр мощности в режиме когерентного резонанса, $A_\xi = 1300$ мВ

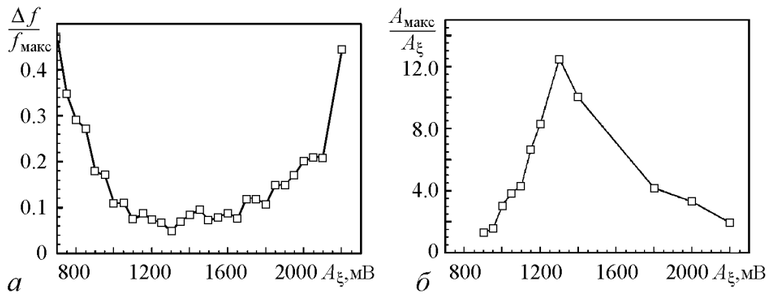


Рис. 6. Зависимости относительной ширины спектра от уровня шума (*а*) и нормированной амплитуды спектральной плотности мощности (*б*) от величины шумового среднеквадратичного напряжения накачки A_ξ

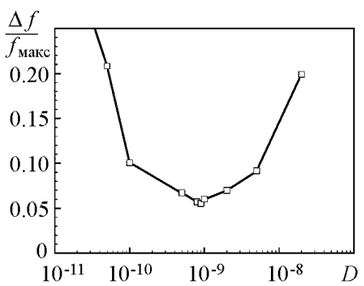


Рис. 7. Эффект когерентного резонанса в численном эксперименте

Эффект когерентного резонанса иллюстрирует, главным образом, рис. 6, *а*, который свидетельствует о наличии оптимального уровня шума ($A_\xi \simeq 1300mV$), при котором ширина спектра минимальна, и, следовательно, достигается наивысшая степень когерентности колебаний. Эффекту увеличения степени когерентности отвечает рост степени периодичности, о котором свидетельствуют реализации процессов колебаний (не приведены). Представленные выше экспериментальные данные полностью подтверждаются результатами компьютерного моделирования динамической системы (2). Имеет место хорошее качественное совпадение экспериментальных и расчетных данных. В качестве примера на рис. 7 представлены результаты расчетов ширины спектра в зависимости от уровня шума, полученные в численном эксперименте для значений параметров, отвечающих условиям физического эксперимента (ср. рис. 7 и рис. 6, *а*).

of the optical plane waves, propagating in crystal of lithium niobate in principal crystallographic directions, for different cases of influence of an exterior static electric field are gained. Appropriate conclusions about optimal use of the Pockels effect for process control of the optical modulation device, in particular on a crystal of lithium niobate, are performed.

Keywords: Electro-optical effect, electromagnetic waves, wave equation, lithium niobate.

Зюрюкин Юрий Анатольевич (1940–2010) – профессор, доктор физико-математических наук, член-корреспондент РАЕН. С 1957 по 1984 гг. обучался и работал на физическом факультете Саратовского государственного университета им. Н.Г. Чернышевского. Выполнил ряд оригинальных научных разработок в области вакуумной электроники СВЧ и электродинамики, послуживших основой его кандидатской диссертации (1967), читал курсы лекций по электронике СВЧ и электродинамике, руководил работой аспирантов, проводил исследования в области своей будущей докторской диссертации (1987). Первым начал развивать принципиально новое для Саратова научное направление – СВЧ акустооптоэлектронику, заложив начало большой научно-исследовательской школы под его руководством. Продолжил научную и преподавательскую деятельность в Саратовском государственном техническом университете. Ю.А. Зюрюкин являлся заведующим кафедрой общей физики СГТУ (1985–2010). Защитил докторскую диссертацию (1987), получил ученое звание профессора (1989). В 1994 году избран членом-корреспондентом Российской академии естественных наук. В эти годы стал официальным членом Российского и Европейского акустических обществ, продолжил начатую им в середине 1960-х годов активную работу в секциях научного и головного советов Российской академии наук по проблеме «Ультразвук» и МВ и ССО РФ по проблеме «Приборостроение». Вел активную преподавательскую и научную деятельность со студентами, аспирантами и преподавателями кафедры общей физики СГТУ, разрабатывал физические основы работы приборов СВЧ акустоэлектроники и акустооптики и их новые модификации. Автор свыше 160 научных работ по указанным направлениям.

Павлова Мария Валентиновна – родилась в 1977 году, окончила физический факультет Саратовского государственного университета им. Н.Г. Чернышевского по специальности «Радиофизика и электроника» (1999), кандидат физико-математических наук (2003), доцент кафедры общей физики Саратовского государственного технического университета. Область научных интересов – радиофизика, электродинамика СВЧ, физическая оптика.

410054 Саратов, Политехническая, 77
Саратовский государственный технический университет
E-mail: pavlova@sstu.ru

Древко Дмитрий Романович – родился в 1981 году, окончил физический факультет Саратовского государственного университета им. Н.Г. Чернышевского (2004), аспирант (2006–2009), а затем ассистент кафедры общей физики Саратовского государственного технического университета. Область научных интересов – электрооптика.

410054 Саратов, Политехническая, 77
Саратовский государственный технический университет
E-mail: dmdrevko@gmail.com

Д е б ю т

Изв. вузов «ПНД», т. 18, № 5, 2010 УДК 517.9

КОЛЬЦЕВОЙ НЕАВТОНОМНЫЙ ГЕНЕРАТОР ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ХАОСА

В.П. Круглов

Предложена схема кольцевой системы, генерирующей, как предполагается, гиперболический хаос. Принцип работы основан на удвоении фазы колебаний за полный цикл передачи сигнала по кольцу обратной связи, что является условием существования аттрактора Смейла–Вильямса в фазовом пространстве. Математически модель описывается неавтономной системой обыкновенных дифференциальных уравнений четвертого порядка. Произведен также переход к уравнениям для медленных комплексных амплитуд и к отображению возврата Пуанкаре. В работе представлены результаты численного моделирования системы. В сечении Пуанкаре наблюдается аттрактор, предположительно, типа Смейла–Вильямса. Расчеты подтверждают, что динамика фазы колебаний приближенно описывается отображением Бернулли. Вычислены показатели Ляпунова для аттрактора отображения Пуанкаре и построены графики их зависимости от параметров системы. Отмечается гладкая зависимость старшего показателя Ляпунова от параметров, что подтверждает структурную устойчивость реализующегося аттрактора.

Ключевые слова: Гиперболический хаос, аттрактор Смейла–Вильямса, отображение Бернулли, структурная устойчивость.

Введение

Возникновение хаоса в диссипативных динамических системах связано с существованием в фазовом пространстве странного аттрактора – сложно устроенного притягивающего множества, к которому стремятся все траектории внутри некоторой области фазового пространства. В математической теории динамических систем наиболее изученным является класс однородно гиперболических аттракторов [1–5]. Такие аттракторы состоят только из седловых (гиперболических) траекторий.

Траектория в фазовом пространстве называется седловой, если в векторном пространстве всевозможных бесконечно малых возмущений любой точки данной траектории существует подпространство векторов, норма которых экспоненциально убывает при эволюции в прямом времени, и подпространство векторов, норма которых экспоненциально убывает при эволюции в обратном времени [1–5]. Эти

1.1. Уравнения модели. На основе законов Кирхгофа нетрудно получить уравнения, описывающие динамику системы с учетом введения источника шумового напряжения $\xi(t)$ (как это показано на рис. 4). Уравнения получаются в виде

$$\begin{aligned} \frac{dI}{dt} &= \frac{1}{L}(V_{\text{c}} - RI - U) + \frac{A_\xi}{L}\xi(t), \\ \frac{dU}{dt} &= \frac{1}{C}(I - I(U)), \quad I(U) = \alpha' U^3 - \gamma' U, \end{aligned} \tag{1}$$

где номинальные значения элементов схемы, напряжение питания и параметры нелинейной характеристики соответствуют указанным на рис. 4, A_ξ – среднеквадратичная величина напряжения сигнала с шумового генератора, V_{c} – напряжение смещения.

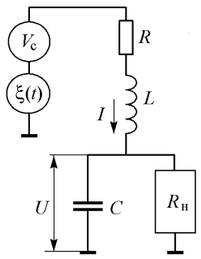


Рис. 4. Схема экспериментальной системы с включением источника шумового напряжения $\xi(t)$ и номинальные значения элементов схемы. $R = 91$ Ом, $L = 6.8 \cdot 10^{-3}$ Гн, $C = 6.8 \cdot 10^{-11}$ Ф, $V_{\text{c}} = 7.2$ В, $\alpha' = 2.22 \cdot 10^{-5}$ Ом$^{-3}$, $\gamma' = 1.61 \cdot 10^{-3}$ Ом$^{-1}$

Для проведения компьютерных расчетов уравнения (1) путем соответствующей перенормировки сводились к безразмерной форме вида

$$\begin{aligned} \dot{x} &= a(b - cx - y) + \sqrt{2D}\eta(\tau), \\ \dot{y} &= g[x - F(y)], \quad F(y) = \alpha y^3 - \gamma y, \end{aligned} \tag{2}$$

где введены следующие обозначения:

$$\begin{aligned} a &= \frac{U_0}{i_0}\sqrt{\frac{C}{L}}, \quad b = \frac{Vc}{U_o}, \quad c = R\frac{i_0}{U_0}, \\ g &= \frac{i_0}{U_0}\sqrt{\frac{L}{C}}, \quad \alpha = \frac{\alpha' U_0^3}{i_0}, \quad \gamma = \frac{\gamma' U_0}{i_0}, \\ \tau &= \frac{t}{\sqrt{LC}}, \quad U_0 = 1\text{В}, \quad i_0 = 1\text{А}, \end{aligned} \tag{3}$$

$\eta(\tau)$ – белый гауссов шум интенсивности D.

2. Исследование когерентного резонанса

Рассмотрим индуцированные шумом стохастические колебания в системе изображенной на рис. 4. С этой целью будем регистрировать спектр мощности колебаний $S_i(f)$ тока $i(t)$ при вариации напряжения шумовой накачки A_ξ. На рис. 5 представлены экспериментальные результаты эволюции спектра $S_i(f)$ с ростом напряжения шума A_ξ. Как видно из рисунка, с ростом интенсивности шума вначале возбуждаются стохастические колебания с достаточно широким спектром (рис. 5, *а*). Далее формируется ярко выраженный пик в спектре колебаний (рис. 5, *б*), который имеет минимальную ширину при оптимальном уровне шума и далее ширина этого пика вновь увеличивается. На основании измерений, представленных частично на рис. 5, были постоены графики зависимостей ширины полосы спектра $S_i(f)$ и спектральной плотности мощности в максимуме спектральной функции. Результаты представлены на рис. 6.

Комаров Максим Андреевич – родился в 1985 году, окончил Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского (2008). Аспирант кафедры теории управления и динамики машин факультета ВМК ННГУ. Область научных интересов: нейродинамика, синхронизация и последовательная активность в осцилляторных сетях, моделирование адаптивного и целенаправленного поведения. Имеет 18 публикаций (в соавторстве) в том числе 4 журнальных. Лауреат стипендии имени академика Г.А. Разуваева (2009).

603950 Россия, Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23
Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского
E-mail: maxim.a.komarov@gmail.com

Осипов Григорий Владимирович – родился в 1960 году в Нижнем Новгороде, окончил Нижегородский государственный университет (ННГУ) им. Н.И. Лобачевского в 1982 году. В 1986–1988 годах учился в аспирантуре Научного совета по комплексной проблеме «Кибернетика» (НСК) АН СССР. Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук в НСК (1988) по математическому моделированию и доктора физико-математических наук в ННГУ (2004) по радиофизике. С 1988 года работает в ННГУ, с 2007 года в качестве заведующего кафедрой «Теории управления и динамики машин». Соавтор монографий «Устойчивость, структуры и хаос в нелинейных сетях синхронизации» и «Synchronization in oscillatory networks». Опубликовал 120 научных статей (в том числе 2 обзора) по теории колебаний и волн и математическому моделированию.

603950 Россия, Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23
Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского
E-mail: osipov@vmk.unn.ru

на ω_0, а второго – $2\omega_0$. Функция, описывающая преобразование сигнала на первом нелинейном элементе, имеет вид

$$f\left(x^2\right) = \frac{x^2}{1+x^2}.$$

Функция

$$g\left(t\right) = \begin{cases} a^2 \sin \omega_0 t, & 0 \le t \le \tau, \\ 0, & \tau \le t \le T \end{cases}$$

описывает внешний сигнал, который включается с периодом $T = 2\pi N/\omega_0$ (N – целое число) на короткий временной интервал τ, a – коэффициент усиления. Введя дополнительно переменные u и v, можно перейти от уравнений (1) к системе уравнений первого порядка

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -\omega_0 u - \gamma x + \gamma g\left(t\right) y, \\ \frac{du}{dt} &= \omega_0 x, \\ \frac{dy}{dt} &= -2\omega_0 v - \gamma y + \gamma \frac{x^2}{1+x^2}, \\ \frac{dv}{dt} &= 2\omega_0 y. \end{aligned} \tag{2}$$

Рассмотрим принцип работы системы. Пусть сначала внешний сигнал выключен, а первый осциллятор совершает затухающие гармонические колебания на частоте ω_0 с фазой φ. Когда сигнал от первого осциллятора проходит через первый нелинейный элемент, возникают постоянная составляющая сигнала и его вторая гармоника с удвоенной фазой и частотой. Вторая гармоника находится в резонансе с собственной частотой второго осциллятора и возбуждает в нем колебания. При включении вспомогательного сигнала происходит смешение этих колебаний с сигналом от второго осциллятора на втором нелинейном элементе. В результате появляется составляющая сигнала с фазой 2φ и частотой, близкой к ω_0. Эта составляющая воздействует на первый осциллятор и передает ему свою фазу. Таким образом, через каждый период внешнего воздействия фаза колебаний удваивается, и ее динамика приближенно описывается отображением Бернулли

$$\varphi_{n+1} = 2\varphi_n + \mathrm{const}\left(\mathrm{mod}\ 2\pi\right), \tag{3}$$

где n – номер периода, а константа учитывает добавку к фазе при передаче сигнала от одного осциллятора к другому (ее можно устранить сдвигом начала отсчета переменной φ). Это отображение называют также растягивающим отображением окружности.

2. Результаты численного моделирования

Система уравнений (2) решалась численно методом Рунге–Кутты. На рис. 2 представлены временные зависимости динамических переменных x и y в установившемся режиме на протяжении трех периодов внешнего воздействия при значениях параметров $\omega_0 = 6\pi$, $\tau = 3$, $T = 13$, $a = 24$, $\gamma = 0.4$. Представлен также график функции $g(t)$, описывающей внешний сигнал.

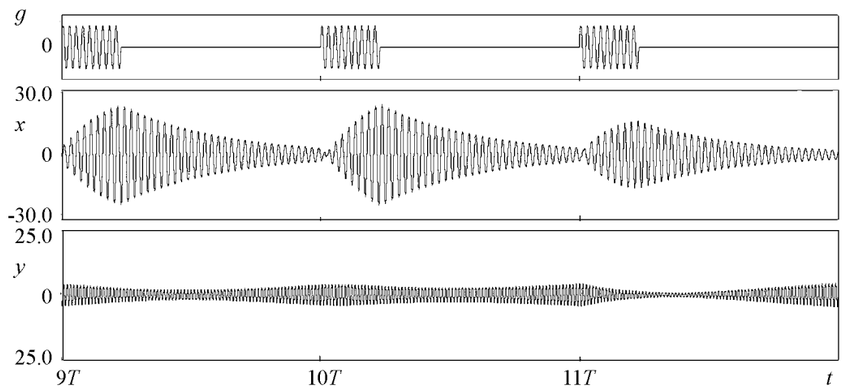


Рис. 2. График функции $g(t)$ и временные зависимости динамических переменных x и y в установившемся режиме, полученные при численном решении системы уравнений (3) при значениях параметров $\omega_0 = 6\pi$, $\tau = 3$, $T = 13$, $a = 24$, $\gamma = 0.4$

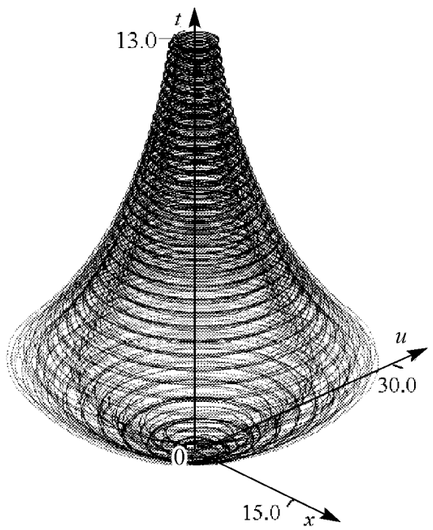


Рис. 3. Аттрактор исходной системы (2) в расширенном фазовом пространстве, представленный в трехмерной проекции (x, u, t) при значениях параметров $\omega_0 = 6\pi$, $\tau = 3$, $T = 13$, $a = 24$, $\gamma = 0.4$.

На рис. 3 показан аттрактор системы в расширенном фазовом пространстве в трехмерной проекции (x, u, t), выполненный в технике кодирования плотности распределения тонами серого цвета. Для этого на каждом шаге вычисления фазовой траектории на экран выводилась точка, которой присваивался оттенок серого цвета, зависящий от оттенка пикселя в предыдущий момент. При попадании новой точки в данный пиксель число, кодирующее яркость, увеличивается на единицу.

Для перехода к описанию с помощью отображения возврата Пуанкаре в качестве секущей поверхности в расширенном фазовом пространстве бралась гиперплоскость $t_n = nT$, где T – период внешнего воздействия, n – номер периода. На рис. 4 представлена итерационная диаграмма отображения для фазы колебаний второго осциллятора при значениях параметров $\omega_0 = 6\pi$, $\tau = 3$, $T = 13$, $a = 24$, $\gamma = 0.4$ и ее увеличенный фрагмент. Фаза отнесена к интервалу от 0 до 2π и определяется выражением

$$\psi = \begin{cases} \operatorname{arctg}(v/y), & y \geq 0, \quad v \geq 0, \\ \operatorname{arctg}(v/y) + \pi, & y < 0, \\ \operatorname{arctg}(v/y) + 2\pi & y \geq 0, \quad v < 0. \end{cases}$$

ensembles and the winnerless competition principle // Int. J. Bifurcation Chaos. 2004. Vol. 14. 1195.

8. *Afraimovich V.S., Zhigulin V.P., and Rabinovich M.I.* On the origin of reproducible sequential activity in neural circuits // Chaos. 2004. Vol. 14. 1123.
9. *Rabinovich M.I., Huerta R., Varona P., and Afraimovich V.S.* Transient cognitive dynamics, metastability, and decision making // PLOS Comput. Biol. 2008. Vol. 4. e1000072.
10. *Rabinovich M., Volkovskii A., Lecandra P., Huerta R., Abarbanel H.D.I., and Laurent G.* Dynamical encoding by networks of competing neuron groups: Winnerless competition // Phys. Rev. Lett. 2001. Vol. 87. 068102.
11. *Komarov M.A., Osipov G.V., and Suykens J.A.K.* Sequentially activated groups in neural networks // Europhys. Lett. 2009. Vol. 86. 60006.
12. *Bonhoeffer K.F.* Modelle der nervenerregung // Naturwissenschaften. 1953. Vol. 40. P. 301.
13. *Morris C. and Lecar H.* Voltage oscillations in the barnacle giant muscle fiber // Biophys. J. 1981. Vol. 35. P. 193.
14. *Jones L.M., Fontanini A., Sadacca B.F., Miller P., and Katz D.B.* Natural stimuli evoke dynamic sequences of states in sensory cortical ensembles // Proc. Natl. Acad. Sci. U.S.A. 2007. Vol. 104. 18772.
15. *Rabinovich M., Huerta R., and Laurent G.* Transient dynamics for neural processing // Science. 2008. Vol. 321. 48.

Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского

Поступила в редакцию *10.02.2010*
После доработки *10.06.2010*

GENERATION OF SLOW RHYTHMS AND SEQUENTIAL ACTIVITY IN ENSEMBLES OF NEURON-LIKE OSCILLATORS

M.A. Komarov, G.V. Osipov

Recent experimental and theoretical studies indicate that slow brain rhythms are generated by simple inhibitory neural networks. Sequential switching of tonic spiking activity is a widespread phenomenon underlying such rhythms. In this paper, we analyze a minimal, reciprocally connected circuit of three spiking units in the cases of different excitability classes of models. It is shown that in both types arising of stable heteroclinic contour produces sequential activation and slow rhythm generation in neural microcircuit. Bifurcation of heteroclinic contour arising is investigated.

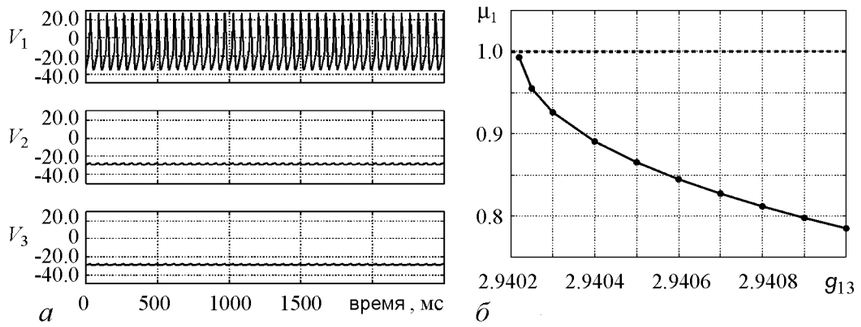


Рис. 11. *а* – Временная реализация динамики, соответствующая предельному циклу L_1. Параметры: $g_{ij} = 5.0$, $g_{ii} = 0$, $i, j = 1, 2, 3$; *б* –Зависимость действительного мультипликатора μ_1 предельного цикла L_1 от g_{13}. Остальные коэффициенты связей оставались постоянными $g_{ij} = 5.0$

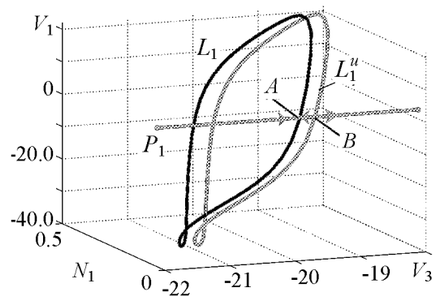


Рис. 12. Проекция устойчивого предельного цикла L_1 и седлового цикла L_1^u. Параметры: $g_{13} = 2.9041$, $g_{ij} = 5.0$

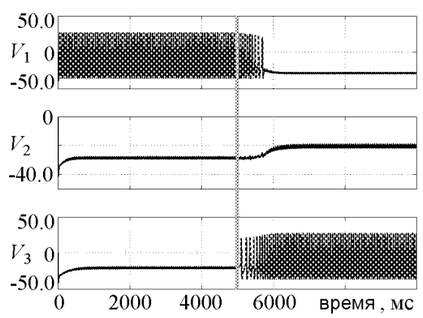


Рис. 13. Переход от устойчивого предельного цикла L_1 к устойчивому предельному циклу L_3. Вертикальная линия символизирует момент времени, в который были изменены начальные условия. Они изменены таким образом, что изображающая точка пересекла устойчивое многообразие седлового цикла и затем устремилась к устойчивому предельному циклу L_3. Параметры: $g_{13} = 2.9041$, $g_{ij} = 5.0$

были изменены таким образом, что изображающая точка пересекла устойчивое многообразие седлового цикла L_1^u. Это привело к переходу на устойчивый предельный цикл L_3. Такая же ситуация наблюдается при уменьшении параметра g_{12} при неизменном $g_{13} = 5.0$. Однако в этом случае устойчивый предельный цикл L_1 сливается с седловым циклом, который образует гетероклинические траектории на предельный цикл L_2. Таким образом, меняя одновременно все три проводимости, направленные против часовой стрелки ($g_1 = g_{13} = g_{32} = g_{21}$), мы получим следующую картину: седловые циклы $L_{1,2,3}^u$ одновременно приближаются к устойчивым предельным циклам $L_{1,2,3}$. На рис. 14 сплошные кривые обозначают устойчивые предельные циклы $L_{1,2,3}$ и седловые циклы $L_{1,2,3}^u$. Поскольку при $g_1 > g^*$ существуют гетероклинические орбиты (черные кривые на рис. 14), идущие от седловых циклов L_1^u, L_2^u, L_3^u к предельным циклам L_3, L_1 и L_2, соответственно, то при $g_1 = g^*$ между полуустойчивыми циклами образуется замкнутый гетероклинический контур [7]. При дальнейшем уменьшении g_1 контур разрушается и в его окрестности образуется устойчивый предельный цикл [8] (рис. 15, *а*). Соответствующие временные реализации приведены на рис. 15, *б*.

ной размерности $D_C \approx 1.74$. Эта величина несколько меньше размерности Ляпунова, вычисленной по формуле Каплана–Йорке, но все же находится с ней в неплохом соответствии.

3. Вывод уравнений для медленно меняющихся амплитуд

Для рассматриваемого устройства как радиотехнической схемы уместно обратиться к описанию динамики в рамках метода медленно меняющихся амплитуд [12–15]. Метод медленных амплитуд применим в данном случае, если характерное время затухания колебаний $1/\gamma$ и период вспомогательного сигнала τ велики по сравнению с периодом высокочастотного заполнения, в то время как нелинейные члены относительно малы. В рамках этого метода достигается уменьшение количества параметров, характеризующих динамику системы. Метод медленных амплитуд является приближенным. Однако, если аттрактор гиперболический и, следовательно, структурно устойчивый, можно ожидать, что неточности, привносимые при приближенном описании, не повлияют существенным образом на качественный характер динамики. Приведенные ниже расчеты подтверждают это предположение. Описание в терминах медленных амплитуд можно рекомендовать как предпочтительное для систем, построенных по предложенной схеме в диапазоне высоких и сверхвысоких частот, где метод является разумным и адекватным.

Для получения укороченных уравнений системы (1) представим временные зависимости динамических переменных x и y и обобщенные скорости в следующем виде:

$$\begin{aligned} x(t) &= A_1(t)\, e^{i\omega_0 t} + A_1^*(t)\, e^{-i\omega_0 t}, \\ y(t) &= A_2(t)\, e^{2i\omega_0 t} + A_2^*(t)\, e^{-2i\omega_0 t}, \\ \dot{x}(t) &= i\omega_0 A_1(t)\, e^{i\omega_0 t} - i\omega_0 A_1^*(t)\, e^{-i\omega_0 t}, \\ \dot{y}(t) &= 2i\omega_0 A_2(t)\, e^{2i\omega_0 t} - 2i\omega_0 A_2^*(t)\, e^{-2i\omega_0 t}. \end{aligned} \tag{4}$$

В этой записи $A_1(t)$ и $A_2(t)$ – комплексные амплитуды колебаний, медленно зависящие от времени, а звездочка означает комплексное сопряжение. Для вторых производных получаем

$$\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} &= -\omega_0^2 \left(A_1 e^{i\omega_0 t} + A_1^* e^{-i\omega_0 t}\right) + 2i\omega_0 \frac{dA_1}{dt} e^{i\omega_0 t}, \\ \frac{d^2y}{dt^2} &= -4\omega_0^2 \left(A_2 e^{2i\omega_0 t} + A_2^* e^{-2i\omega_0 t}\right) + 4i\omega_0 \frac{dA_2}{dt} e^{2i\omega_0 t}. \end{aligned} \tag{5}$$

Для производных, стоящих в правых частях уравнений (1), имеем

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} yg &= g\frac{dy}{dt} + y\frac{dg}{dt} = \begin{cases} 3A_2 e^{3i\omega_0 t} + 3A_2^* e^{-3i\omega_0 t} - A_2 e^{i\omega_0 t} - A_2^* e^{-i\omega_0 t}, \; 0 \le t \le \tau, \\ 0, \; \tau \le t \le T, \end{cases} \\ \frac{d}{dt} f &= \frac{d}{dt}\left(\frac{x^2}{1+x^2}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{A_1^2 e^{2i\omega_0 t} + A_1^{*2} e^{-2i\omega_0 t} + 2A_1 A_1^*}{A_1^2 e^{2i\omega_0 t} + A_1^{*2} e^{-2i\omega_0 t} + 2A_1 A_1^* + 1}\right). \end{aligned} \tag{6}$$

В последнем выражении функцию под знаком производной можно разложить в ряд Фурье, пренебрегая зависимостью от времени на периоде для амплитуды A_1,

$$\frac{A_1^2 e^{2i\omega_0 t} + A_1^{*2} e^{-2i\omega_0 t} + 2A_1 A_1^*}{A_1^2 e^{2i\omega_0 t} + A_1^{*2} e^{-2i\omega_0 t} + 2A_1 A_1^* + 1} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} I_n e^{in\omega_0 t},$$

$$I_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{A_1^2 e^{2i\omega_0 t} + A_1^{*2} e^{-2i\omega_0 t} + 2A_1 A_1^*}{A_1^2 e^{2i\omega_0 t} + A_1^{*2} e^{-2i\omega_0 t} + 2A_1 A_1^* + 1} e^{-in\omega_0 t} d(\omega_0 t).$$

Так как нерезонансные члены при усреднении обратятся в нуль, оставим только слагаемое $I_2 e^{2i\omega_0 t}$. Применяя замену $e^{-2i\omega_0 t} = z$, интеграл I_2 можно вычислить, используя теорию вычетов,

$$I_2 = \frac{2A_1^2}{\sqrt{4|A_1|^2 + 1}\left(\sqrt{4|A_1|^2 + 1} + 2|A_1|^2 + 1\right)}.$$

Подставив выражения (4), (6) и (7) в исходные уравнения (1), получим

$$\frac{dA_1}{dt} e^{i\omega_0 t} + \frac{\gamma}{2}\left(A_1 e^{i\omega_0 t} - A_1^* e^{-i\omega_0 t}\right) =$$

$$= \begin{cases} -\dfrac{i\gamma a^2}{4}\left(3A_2 e^{3i\omega_0 t} + 3A_2^* e^{-3i\omega_0 t} - A_2 e^{i\omega_0 t} - A_2^* e^{-i\omega_0 t}\right), & 0 \le t \le \tau, \\ 0, & \tau \le t \le T, \end{cases}$$

$$\frac{dA_2}{dt} e^{2i\omega_0 t} + \frac{\gamma}{2}\left(A_2 e^{2i\omega_0 t} - A_2^* e^{-2i\omega_0 t}\right) =$$

$$= \frac{\gamma A_1^2 e^{2i\omega_0 t}}{\sqrt{4|A_1|^2 + 1}\left(\sqrt{4|A_1|^2 + 1} + 2|A_1|^2 + 1\right)} + \sum_{n=-\infty}^{1} I_n e^{in\omega_0 t} + \sum_{n=3}^{+\infty} I_n e^{in\omega_0 t}. \tag{7}$$

Считая, что A_1, A_2 и их производные почти не меняются за период, умножим первое уравнение (7) на $e^{-i\omega_0 t}$, а второе на $e^{-2i\omega_0 t}$ и усредним их по периодам основных частот. В результате придем к системе уравнений для медленных комплексных амплитуд

$$\begin{aligned} &\frac{dA_1}{dt} + \frac{\gamma}{2} A_1 = \begin{cases} \dfrac{i\gamma a^2}{4} A_2, & 0 \le t \le \tau, \\ 0, & \tau \le t \le T, \end{cases} \\ &\frac{dA_2}{dt} + \frac{\gamma}{2} A_2 = \frac{\gamma A_1^2}{\sqrt{4|A_1|^2 + 1}\left(\sqrt{4|A_1|^2 + 1} + 2|A_1|^2 + 1\right)}. \end{aligned} \tag{8}$$

Заметим, что комплексные амплитуды выражаются через вещественные амплитуды r_1 и r_2 и фазы колебаний φ и ψ следующим образом:

$$A_1(t) = \frac{r_1(t)}{2} e^{i\varphi(t)}, \quad A_2(t) = \frac{r_2(t)}{2} e^{i\psi(t)}. \tag{9}$$

зависящие от мембранного потенциала: $M_\infty(V_j) = 0.5((1 + \tanh(V_j - V_1))/V_2)$, $N_\infty(V_j) = 0.5((1 + \tanh(V_j - V_3))/V_4)$, $\lambda_N(V_j) = \tilde{\lambda}_N \cosh((V_j - V_3)/2V_4))$. Параметры модели: $g_l = 2.0$, $g_{Ca} = 4.0$, $g_k = 8.0$, $V_l = -50.0$, $V_{Ca} = 100.0$, $V_k = -70.0$, $V_1 = -1.0$, $V_2 = 15.0$, $V_3 = 10.0$, $V_4 = 14.5$, $C = 20.0$, $\tilde{\lambda}_N = 1.0/15.0$, $I_{\mathtt{ext}} = 50$. Данная модель имеет свойства, аналогичные модели (1), однако при увеличении внешнего тока (параметр $I_{\mathtt{ext}}$) предельный цикл в системе рождается вследствие бифуркации петли сепаратрисы седло-узла, что соответствует модели первого класса возбудимости. Как и прежде, синаптическая связь между элементами описывается дополнительным слагаемым $\sum_{i=1}^{i=N} g_{ij} S_j (E_{\text{syn}} - V_j)$ в уравнении, определяющем динамику мембранного потенциала; g_{ij} – параметры, определяющие силы ингибиторных связей между элементами; $E_{\text{syn}} = -40$ – параметр в модели, определяет потенциал реверсии синапсов. Величины S_j представляют собой долю открытых каналов в синапсе и описываются стандартным кинетическим уравнением:

$$\left\{ \frac{dS_j}{dt} = \alpha F(V_j)(1 - S_j) - \beta S_j. \right. \tag{4}$$

Здесь $F(V) = 1/(1 + \exp(-0.5(V - 20)))$ – активационная функция, параметры $\alpha = 0.03125$, $\beta = 0.001625$. Так же, как и в случае модели Бонхофера–ван дер Поля, рассматривается ансамбль из трех элементов со взаимными ингибиторными связями (см. рис. 1). Рассмотрим случай достаточно сильных и симметричных ингибиторных связей, то есть таких связей, при которых в системе наблюдаются три устойчивых предельных цикла (обозначим $L_{1,2,3}$), соответствующие периодическим спайковым колебаниям одного элемента и подпороговым осцилляциям двух других элементов. На рис. 11, *а* проиллюстрирована динамика, соответствующая предельному циклу L_1. Для того чтобы определить бифуркацию, ведущую к режиму последовательных переключений активности, мы исследовали поведение мультипликаторов предельного цикла L_1 при изменении проводимости g_{13}. Выяснилось, что один из действительных мультипликаторов μ_1 предельного цикла L_1 растет при уменьшении коэффициента связи g_{13} и достигает значения $+1$ при $g_{13} = g^* \approx 2.0922$ (рис. 11, *б*). Локальный анализ позволяет сделать предположение, что в системе также существует седловой цикл L_1^u, который приближаются к устойчивому циклу L_1 при уменьшении g_{13}. На рис. 12 изображены устойчивый предельный цикл L_1 и седловой цикл L_1^u. При уменьшении g_{13} седловой цикл L_1^u по направлению, коллинеарному прямой P_1, приближается к предельному циклу L_1 и при бифуркационном значении параметра циклы L_1 и L_1^u сливаются, образуя полуустойчивый цикл. При дальнейшем уменьшении g_{13} полуустойчивый цикл исчезает. Точки *A* и *B* на рис. 12 – это точки пересечения прямой P_1 и циклов L_1 и L_1^u, соответственно. Седловой предельный цикл L_1^u имеет важную особенность – его устойчивое многообразие разделяет бассейны притяжения устойчивых предельных циклов L_1 и L_3. Это подтверждается следующим фактом: начальные условия на прямой P_1 между точками *A* и *B* приводят к тому, что изображающая точка приходит на предельный цикл L_1. Однако если начальные условия находятся за точкой *B*, то изображающая точка покидает окрестность седлового цикла L_1^u и приходит к циклу L_3. На рис. 13 изображена реализация подобного перехода: первые 5000 мс система находилась на цикле L_1, затем при $t = 5000$ мс начальные условия

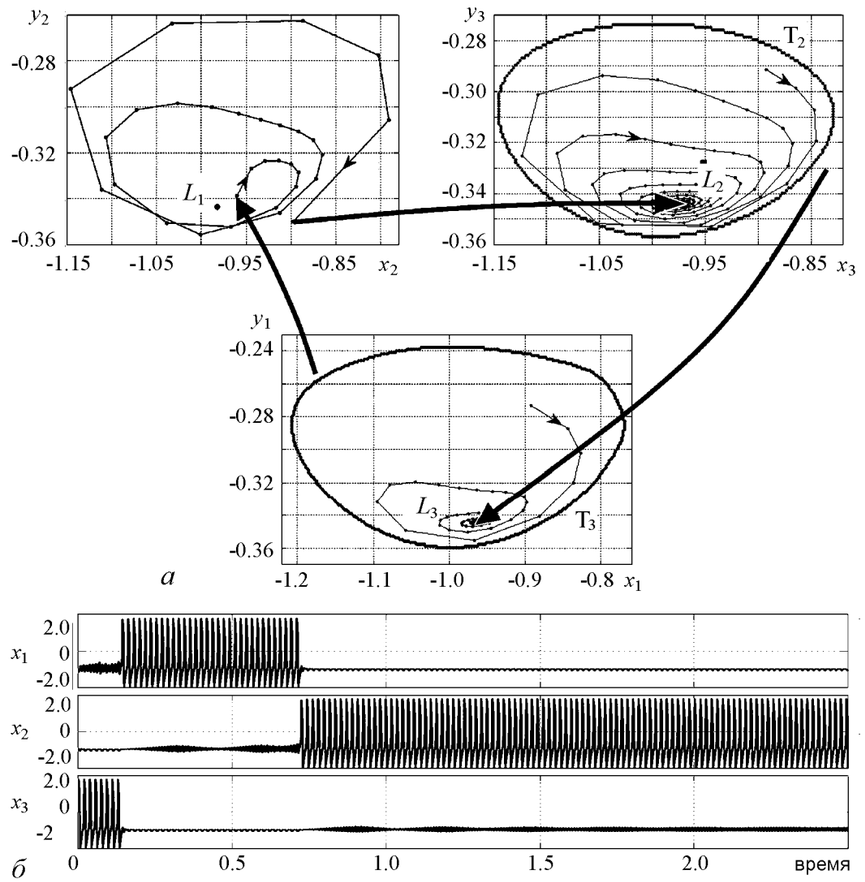


Рис. 8. *а* – Иллюстрация поведения траекторий при $g_{12} = 0.059$, $g_{23} = 0.062$, $g_{31} = 0.065$, $g_{21} = g_{13} = g_{32} = 0.5$. *б* – Последовательные переключения активности, вызванные образованием гетероклинической орбиты

ния возникает последовательность гетероклинических орбит: гетероклиническая орбита между седловым тором T_3 и седловым циклом L_1, гетероклиническая орбита между седловым циклом L_1 и седловым циклом L_2. Такая последовательность также разрушается при дальнейшем уменьшении параметров связи, однако гетероклинический канал остается устойчивым вплоть до нулевых значений g_{12} и g_{23}. Глобальное поведение траекторий и динамику в этом случае иллюстрирует рис. 9. Генерация последовательной активности также конечна во времени, но теперь охватывает всю сеть. Заметим, что гетероклинические последовательности являются конструкциями в фазовом пространстве, способными описать временные генерации пачечных волн в ансамблях нейронов, в отличие от устойчивых предельных циклов, которые яв-

Полученные результаты позволяют предполагать существование гиперболического аттрактора в фазовом пространстве рассмотренной системы. Для подтверждения этого предположения представляется необходимой численная проверка выполнения критерия конусов [1,3,8] и более детальное исследование динамики системы. Тем не менее представленные в данной статье результаты уже свидетельствуют о том, что предложенная модель генератора может найти применение в радиотехнике, электронике и нелинейной оптике, поскольку позволяет реализовать хаотические режимы, нечувствительные к выбору параметров и характеристик системы. Одно из достоинств с точки зрения возможных информационно-коммуникационных приложений состоит в том, что для динамики на аттракторе типа Смейла–Вильямса, который реализуется в данной системе, естественным образом строится символическая динамика с бинарным кодированием принадлежащих аттрактору траекторий, каждой из которых однозначно сопоставляется бесконечная последовательность двух символов (например, 0 и 1).

Автор выражает благодарность руководителю работы профессору С.П. Кузнецову, а также И.Р. Сатаеву за полезные обсуждения и ценные замечания.

Работа выполнена при поддержке гранта Президента РФ МК–905.2010.2.

Библиографический список

1. *Кузнецов С.П.* Гиперболические странные аттракторы систем, допускающих физическую реализацию // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2009. Т. 17, № 4. С. 5.
2. *Синай Я.Г.* Как математики изучают хаос // Математическое просвещение. 2001. Сер. 3, вып. 5. С. 32.
3. *Синай Я.Г.* Стохастичность динамических систем // Нелинейные волны. М.: Наука, 1979. 192 с.
4. *Кузнецов С.П.* Динамический хаос. М.: Физматлит, 2006. 290 с.
5. *Shilnikov L.* Mathematical Problems of Nonlinear Dynamics: Tutorial // International Journal of Bifurcation and Chaos, Vol.7, № 9, 1997. P. 1953.
6. *Лоскутов А.Ю, Михайлов А.С.* Основы теории сложных систем. Москва-Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», Институт компьютерных исследований, 2007. 620 с.
7. *Kuznetsov S.P.* Example of a physical system with a hyperbolic attractor of the Smale-Williams type // Phys. Rev. Lett. 2005. Vol. 95. 144101.
8. *Кузнецов С.П., Селезнев Е.П.* Хаотическая динамика в физической системе со странным аттрактором типа Смейла–Вильямса // ЖЭТФ. 2006. Т. 129, № 2. С. 400.
9. *Кузнецов С.П., Сатаев И.Р.* Проверка условий гиперболичности хаотического аттрактора в системе связанных неавтономных осцилляторов ван дер Поля // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2006. Т. 14, № 5. С. 3.
10. *Дмитриев А.С., Кислов В.Я.* Стохастические колебания в радиофизике и электронике. М.: Наука, 1989. 280 с.

11. TSTOOL Home Page: http://www.physik3.gwdg.de/tstool/
12. *Van der Pol B.* A theory of the amplitude of free and forced triode vibrations // Radio Review. 1920. Vol. 1. P. 701, 754.
13. *Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. Гостехиздат, 1958. 406 с.
14. *Андронов А.А., Витт А.А., Хайкин С.Ю.* Теория колебаний: 2-е изд. М: Физматгиз, 1959. 916 с.
15. *Кузнецов А.П., Кузнецов С.П., Рыскин Н.М.* Нелинейные колебания. М.: Физматлит, 2005. 292 с.

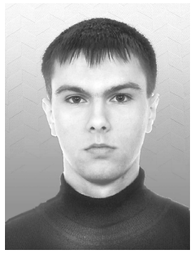
Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского
Поступила в редакцию 4.03.2010
После доработки 14.05.2010

CIRCULAR NON-AUTONOMOUS GENERATOR OF HYPERBOLIC CHAOS

V.P. Kruglov

A scheme of circular system is introduced, which is supposed to generate hyperbolic chaos. Its operation is based on doubling of phase on each complete cycle of the signal transmission through the feedback ring. That is a criterion for the attractor of Smale–Williams type to exist. Mathematically, the model is described by the fourth order non-autonomous system of ordinary differential equations. The equations for slowly varying complex amplitudes are derived, and the Poincaré return map is obtained. Numerical simulation data are presented. The attractor of Smale–Williams type is observed in the Poincaré cross-section. The computations indicate that the dynamics of phases is described approximately by the Bernoulli map. Lyapunov exponents for the Poincaré map are estimated, and their dependence on parameters is plotted. Smooth dependence of the largest Lyapunov exponent on parameters supports the structural stability of the observed attractor.

Keywords: Hyperbolic chaos, Smale–Williams attractor, Bernoulli map, structural stability.



Круглов Вячеслав Павлович – родился в 1990 году. В 2007 году окончил среднюю школу № 8 Саратова. В настоящее время студент 3 курса факультета нелинейных процессов Саратовского государственного университета им. Н.Г. Чернышевского. В 2009 году участвовал в научных конференциях «Нелинейные дни для молодых» и «Наноэлектроника, нанофотоника и нелинейная физика».

410012 Саратов, ул. Астраханская, 83
Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского
E-mail: kruglovyacheslav@gmail.com

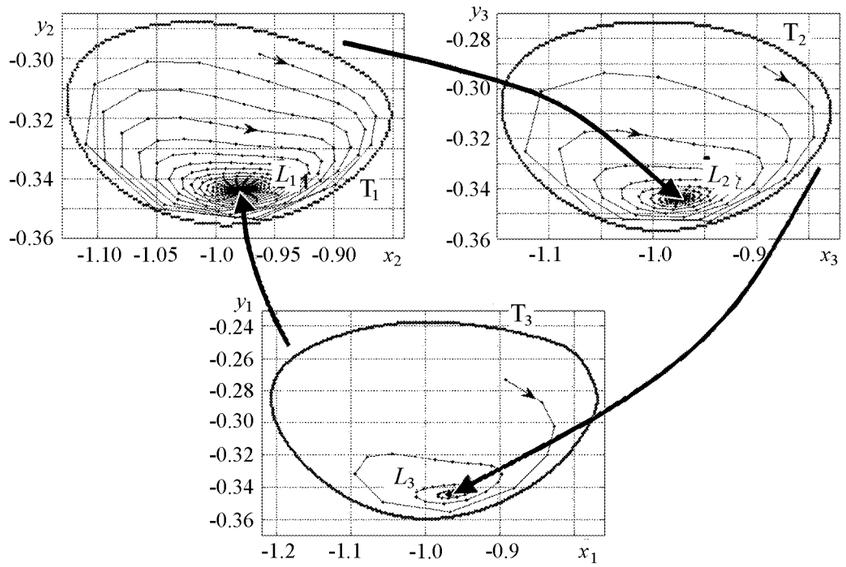


Рис. 7. Схематическая иллюстрация поведения траекторий при $g_{12} = 0.061$, $g_{23} = 0.062$, $g_{31} = 0.065$, $g_{21} = g_{13} = g_{32} = 0.5$. Черные линии со стрелками символизируют траектории из окрестности седловых торов к устойчивым предельным циклам, изображенные на рис. 6

время, это обеспечивает активность первого нейрона в течение конечного интервала времени, после чего изображающая точка перемещается к устойчивому циклу L_2 (бесконечные во времени спайковые колебания второго нейрона). При дальнейшем уменьшении g_{12} гетероклиническая орбита между T_3 и L_1 разрушается, но подобное поведение остается устойчивым [7, 8]. В этом случае в фазовом пространстве образуется устойчивый гетероклинический канал. Следует отметить, что термин «гетероклинический канал» был впервые введен в работе [9] для системы, содержащей седловые состояния равновесия в фазовом пространстве. В такой системе гетероклинический канал образуется в результате возмущения системы, содержащей устойчивый гетероклинический контур. Вследствие возмущения гетероклинический контур разрушается и в его окрестности образуется гетероклинический канал, который представляет собой множество траекторий, находящихся в окрестности исходящих сепаратрис и проходящих через малые окрестности седловых состояний равновесия [9]. В нашем случае в численном эксперименте наблюдается аналогичная картина: после разрушения гетероклинических орбит существует множество траекторий, последовательно посещающих малые окрестности седловых предельных циклов. Поведение траекторий и динамику нейронов иллюстрирует рис. 8. Таким образом, субкритическая бифуркация Неймарка–Сакера и образование гетероклинической орбиты являются причиной конечной во времени генерации волны пачечной активности. При одновременном уменьшении g_{12} и g_{23} до бифуркационного значе-

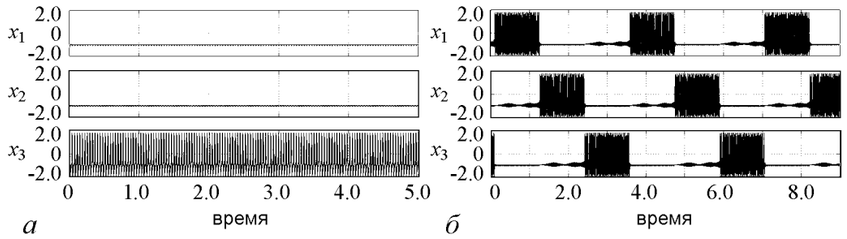


Рис. 2. *а* – Временные реализации в системе (1),(2) в случае симметричных связей: один нейрон активен и подавляет активность других элементов сети. Параметры: $g_{ij} = g_{ji} = 0.5$. *б* – Динамика в случае несимметричных связей: генерация периодической последовательной активности в ансамбле. Параметры: $g_{12} = g_{23} = g_{31} = 0.05,\ g_{21} = g_{13} = g_{32} = 0.5$

автоколебательный режим (ему соответствует периодическая спайковая активность) – в фазовом пространстве существует устойчивый предельный цикл, рождающийся вследствие суперкритической бифуркации Андронова–Хопфа. Такая бифуркация перехода к автоколебательной активности свидетельствует о том, что данная модель принадлежит к моделям второго класса возбудимости. В рассматриваемом нами случае ансамбля из трех нейронов внешние стимулы таковы, что при отсутствии связей нейроны находятся в автоколебательном режиме ($S_i > 0.35$). В ансамбле из трех элементов, объединенных взаимными ингибиторными синапсами, в случае достаточно сильных ($g_{ij} > 0.06$) и симметричных связей, динамика сети такова, что один из трех нейронов активен (находится в режиме генерации периодических импульсов большой амплитуды – спайков) и подавляет активность других нейронов (в них имеют место подпороговые колебания малой амплитуды вблизи потенциала покоя $x \approx -1.2$). В зависимости от начальных условий один из трех нейронов может «захватить» активность в сети и подавить спайковые колебания в соседних нейронах (рис. 2, *а*) [6]. Таким образом, в случае симметричных связей ($g_{ij} = g_{ji} = 0.5,\ i \neq j$) в фазовом пространстве рассматриваемой динамической системы сосуществуют три устойчивых предельных цикла L_1, L_2, L_3, каждый из которых соответствует активности одного из нейронов: L_1 – доминирующей активности первого нейрона, L_2 – второго, L_3 – третьего (на рис. 2, *а* представлена реализация для цикла L_3). При введении асимметрии в связях (например, $g_{12} = g_{23} = g_{31} = 0.05$, $g_{21} = g_{13} = g_{32} = 0.5$) динамика сети существенно меняется. В ансамбле возникают последовательные переключения активности между элементами (рис. 2, *б*). Подобный тип динамики носит название «конкуренция без победителя» [2]. Исследуем его подробно.

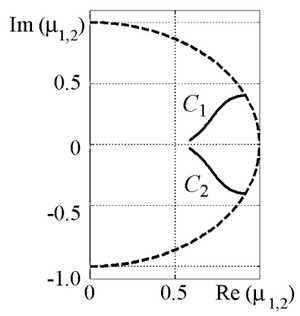


Рис. 3. Эволюция действительной и мнимой частей мультипликаторов $\mu_{1,2}$ предельного цикла L_1 при изменении параметра g_{12} (сплошные линии $C_{1,2}$, каждая точка линии соответствует различным значениям g_{12}). При уменьшении параметра g_{12} мультипликаторы выходят на единичную окружность (бифуркационное значение $g_{12} \approx 0.0599$)

так и для случая, когда он движется в продольном магнитном поле, выражения для полей пространственного заряда будут иметь один и тот же вид.

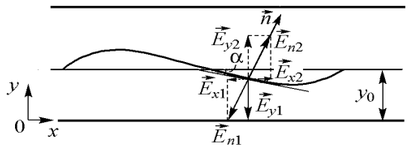


Рис. 2. Дрейфующий электронный пучок. Компоненты напряжённости поля пространственного заряда

Предположим, что бесконечно тонкий электронный пучок, который промодулирован ВЧ сигналом, далее движется в области, где ВЧ поля отсутствуют. Пусть модулирующая входная секция для определенности представляет собой отрезок плоской замедляющей системы. Тогда на входе в область, где ВЧ полей нет, пучок имеет в общем случае как продольное $\tilde{x}$, так и поперечное $\tilde{y}$ ВЧ смещения. Поэтому при дальнейшем своем движении пучок остается криволинейным и форма его изменяется лишь под действием ВЧ полей пространственного заряда.

Нормальная составляющая напряженности поля пространственного заряда E_{n} терпит разрыв на поверхности пучка на величину σ/ε_0 ($\sigma = \sigma_0 + \tilde{\sigma}$ – поверхностная плотность заряда, ε_0 – диэлектрическая проницаемость), то есть продольная составляющая терпит разрыв на величину $\sigma/\varepsilon_0 \sin\alpha$ (рис. 2). Поперечная – на $\sigma/\varepsilon_0 \cos\alpha$, где α– угол наклона электронного пучка к оси x, причем $\operatorname{tg}\alpha = \partial\tilde{y}/\partial x$. В линейном приближении $\operatorname{tg}\alpha \approx \sin\alpha \approx \partial\tilde{y}/\partial x$, $\cos\alpha \approx 1$ и условия разрыва нормальной составляющей напряженности поля ПЗ в плоскости пучка запишутся в виде ($\tilde{\sigma} = -\sigma_0 \partial\tilde{x}/\partial x$):

$$E_{y2} - E_{y1} = -\frac{\sigma_0}{\varepsilon_0}\frac{\partial\tilde{x}}{\partial x}, \quad E_{x2} - E_{x1} = -\frac{\sigma_0}{\varepsilon_0}\frac{\partial\tilde{y}}{\partial x} \tag{4}$$

В соотношениях (4) E_{x1}, E_{y1} и E_{x2}, E_{y2} – значения компонент напряженности поля пространственного заряда ниже и выше пучка, соответственно. Будем искать волны, которые могут распространяться выше и ниже пучка, в виде $E = E(y)\, e^{j(\omega t - \beta x)}$. Тогда

при $y > y_0$

$$E_x = A\operatorname{sh}(\beta y) + B\operatorname{ch}(\beta y), \quad E_y = jA\operatorname{ch}(\beta y) + jB\operatorname{sh}(\beta y); \tag{5.1}$$

при $y < y_0$

$$E_x = A_1\operatorname{sh}(\beta y) + B_1\operatorname{ch}(\beta y), \quad E_y = jA_1\operatorname{ch}(\beta y) + jB_1\operatorname{sh}(\beta y), \tag{5.2}$$

где $|\beta| \gg \omega/c$, c – скорость света; y_0 – координата точки влёта (центра) пучка.

При граничных условиях $E_x = 0$ в плоскостях $y = 0$ и $y = d$ соотношения (5.1), (5.2) позволяют найти связь между компонентами напряженности поля пространственного заряда:

$$E_{y1} = jE_{x1}\operatorname{cth}(\beta_0 y_0), \quad E_{y2} = -E_{x2}\operatorname{cth}[\beta_0(d - y_0)]. \tag{6}$$

Предположение, что

$$E_{y\text{ПЗ}} = \frac{E_{y2} + E_{y1}}{2}, \quad E_{x\text{ПЗ}} = \frac{E_{x2} + E_{x1}}{2}, \tag{7}$$

является отходом от исходной модели бесконечно тонкого пучка: приходится рассматривать пучок конечной толщины, а точнее, те электроны, которые находятся в статическом состоянии на его оси. Поскольку в рамках линейной теории траектории электронов не пересекаются, то можно считать, что над электронами, которые первоначально находились на оси пучка, заряд всегда остается таким же, как и под ними, и что электроны, первоначально близкие к границам пучка, отклоняются от оси незначительно. Тогда естественно считать поле пространственного заряда средним арифметическим полем над и под пучком. Используя (4), (6) и (7), находим для составляющих поля пространственного заряда

$$E_{x\text{ПЗ}} = -\frac{\sigma_0}{2\varepsilon_0} g \frac{\partial \tilde{y}}{\partial x} - j\frac{\sigma_0}{2\varepsilon_0}\frac{\partial \tilde{x}}{\partial x}\frac{2\,\mathrm{th}\,(\beta_0 y_0)\,\mathrm{th}\,[\beta_0\,(d-y_0)]}{\mathrm{th}\,(\beta_0 y_0) + \mathrm{th}\,[\beta_0\,(d-y_0)]},$$

$$E_{y\text{ПЗ}} = \frac{\sigma_0}{2\varepsilon_0} g \frac{\partial \tilde{x}}{\partial x} + \frac{\sigma_0}{2\varepsilon_0}\frac{\partial \tilde{y}}{\partial x}\frac{2j}{\mathrm{th}\,(\beta_0 y_0) + \mathrm{th}\,[\beta_0\,(d-y_0)]}, \tag{8}$$

где $g = \{\mathrm{th}\,[\beta_0\,(d-y_0)] - \mathrm{th}\,(\beta_0 y_0)\}/\{\mathrm{th}\,[\beta_0\,(d-y_0)] + \mathrm{th}\,(\beta_0 y_0)\}$. Выражения для компонент поля пространственного заряда в предположении, что пучок движется в системе ровно посередине ($g = 0$), выглядят так:

$$E_{x\text{ПЗ}} = -B\omega_{pH}\tilde{x}\,\mathrm{th}\,(\beta_0 y_0)\,, \quad E_{y\text{ПЗ}} = B\omega_{pH}\tilde{y}\frac{1}{\mathrm{th}\,(\beta_0 y_0)}, \tag{9}$$

где $\sigma_0\beta_0/(2\varepsilon_0 B) \approx \sigma_0\beta_\mathrm{e}/(2\varepsilon_0 B) = \omega_{pH}$ – плазменная частота.

3. Дисперсионное уравнение дрейфующего электронного потока

В силу того, что рассматривается двумерная задача, высокочастотное возмущение $\tilde{z}$ на процесс взаимодействия не влияет. Комбинируя уравнения (3.2) и (3.3) и учитывая, что $\partial/\partial t = j\omega$, приходим к двум уравнениям для ВЧ смещений электронов

$$\frac{\partial^2 \tilde{x}}{\partial x^2} + 2j\beta_\mathrm{e}\frac{\partial \tilde{x}}{\partial x} - \beta_\mathrm{e}^2\tilde{x} = -\eta B\frac{\omega_{pH}}{\upsilon_0^2}\tilde{x}\,\mathrm{th}\,(\beta_0 y_0)\,, \tag{10.1}$$

$$\frac{\partial^2 \tilde{y}}{\partial x^2} + 2j\beta_\mathrm{e}\frac{\partial \tilde{y}}{\partial x} - \left(\beta_\mathrm{e}^2 - \beta_\mathrm{c}^2\right)\tilde{y} = \eta B\frac{\omega_{pH}}{\upsilon_0^2}\tilde{y}\frac{1}{\mathrm{th}\,(\beta_0 y_0)}, \tag{10.2}$$

где β_e – фазовая постоянная волны в системе с пучком ($\beta_\mathrm{e} = \omega/\upsilon_0$), β_c – фазовая постоянная циклотронной волны ($\beta_\mathrm{c} = \omega_\mathrm{c}/\upsilon_0$).

Предполагая, что искомые функции $\tilde{x}(x)$ и $\tilde{y}(x)$ пропорциональны $\exp(-j\beta x)$, переходим к дисперсионным уравнениям и соответствующим им решениям (здесь $\beta_p^2 = \eta B(\omega_{pH}/\upsilon_0^2)\mathrm{th}\,(\beta_0 y_0)$):

$$(\beta - \beta_\mathrm{e})^2 - \beta_p^2 = 0 \to \beta_{1,2} = \beta_\mathrm{e} \pm \beta_p; \tag{11.1}$$

$$\left[(\beta - \beta_\mathrm{e})^2 - \beta_\mathrm{c}^2\right] + \beta_p^2\mathrm{cth}^2(\beta_0 y_0) = 0 \to \beta_{3,4} = \beta_\mathrm{e} \pm \sqrt{\beta_\mathrm{c}^2 - \beta_p^2\mathrm{cth}^2(\beta_0 y_0)}. \tag{11.2}$$

Условием неустойчивости, как следует из (11.2), является выполнение неравенства:

$$\beta_\mathrm{c}^2 - \beta_p^2\mathrm{cth}^2(\beta_0 y_0) < 0. \tag{12}$$

Именно этому случаю будет уделено особое внимание при расчетах.

нейронной активности были рассмотрены системы первого и второго типа возбудимости, воспроизводящие (в изолированном состоянии) периодическую спайковую активность. Показано, что в случае *модели первого типа возбудимости* седлоузловая бифуркация предельных циклов приводит к образованию устойчивого гетероклинического контура, а в случае *модели второго типа возбудимости* образование гетероклинического контура обеспечивает субкритическая бифуркация Неймарка–Сакера. Подобные бифуркации ведут к появлению структурно-устойчивого режима генерации последовательной пачечной активности. Пачечная нейронная активность характеризуется наличием длительных межспайковых интервалов и поэтому переход от тонической спайковой активности к последовательной пачечной активности может рассматриваться как возникновение медленного ритма в динамике нейронного ансамбля.

1. Образование гетероклинических контуров и последовательной активности в ансамблях Бонхоффера–ван дер Поля

Рассмотрим ансамбль из трех нейронов, объединенных взаимными ингибиторными связями (рис. 1). Каждый нейрон описывается уравнениями Бонхоффера–ван дер Поля [12] ($z_i = 0$)

$$\begin{cases} \tau_1\dfrac{dx_i(t)}{dt} = x_i - \dfrac{1}{3}x_i^3(t) - y_i(t) - z_i(t)(x_i(t) - v) + S_i, \\ \dfrac{dy_i(t)}{dt} = x_i(t) - by_i(t) + a. \end{cases} \tag{1}$$

Здесь $x_i(t)$ – мембранный потенциал нейрона; $y_i(t)$ – совокупность действия ионных токов; $z_i(t)$ – синаптическая связь между нейронами; S_i– внешние стимулы, прикладываемые к нейронам. Химическая связь между нейронами описывается слагаемым $z_i(t)(x_i(t) - v)$ в первом уравнении системы (1). Величина z_i является динамической переменной и подчиняется уравнению первого порядка [2]

$$\left\{\ \tau_2\frac{dz_i(t)}{dt} = \textstyle\sum_j(g_{ij}F(x_j)) - z_i(t). \right. \tag{2}$$

v – параметр в модели, представляет собой потенциал реверсии синаптического канала; $\{g_{ij}\}$ – матрица коэффициентов, определяющих силу и топологию связей в нейронной сети; $F(x_j)$ – функция Хевисайда. Значения параметров, неизменных во всех численных экспериментах, были следующими: $a = 0.7$, $b = 0.8$, $\tau_1 = 0.08$, $\tau_2 = 3.1$, $v = -1.5$. Отдельный нейрон, моделируемый с помощью уравнений (1), может находиться в двух режимах, в зависимости от параметра S_i: *возбудимый режим* (ему соответствует генерация единичного импульса при изменении начальных условий) – в фазовом пространстве существует только устойчивое состояние равновесия;

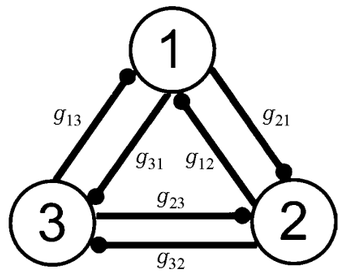


Рис. 1. Топология связей: три нейрона, объединенные взаимными ингибиторными синапсами

12. *Tian Y.-C., Gao F.* Extraction of delay information from chaotic time series based on information entropy // Physica D. 1997. Vol. 108. P. 113.
13. *Kaplan D.T., Glass L.* Coarse-grained embeddings of time series: Random walks, gaussian random process, and deterministic chaos // Physica D. 1993. Vol. 64. P. 431.
14. *Bünner M.J., Popp M., Meyer Th., Kittel A., Rau U., Parisi J.* Recovery of scalar time-delay systems from time series // Phys. Lett. A. 1996. Vol. 211. P. 345.
15. *Bünner M.J., Ciofini M., Giaquinta A., Hegger R., Kantz H., Meucci R., Politi A.* Reconstruction of systems with delayed feedback: (I) Theory // Eur. Phys. J. D. 2000. Vol. 10. P. 165.
16. *Voss H., Kurths J.* Reconstruction of non-linear time delay models from data by the use of optimal transformations // Phys. Lett. A. 1997. Vol. 234. P. 336.
17. *Ellner S.P., Kendall B.E., Wood S.N., McCauley E., Briggs C.J.* Inferring mechanism from time-series data: Delay differential equations // Physica D. 1997. Vol. 110. P. 182.
18. *Voss H.U., Schwache A., Kurths J., Mitschke F.* Equations of motion from chaotic data: A driven optical fiber ring resonator // Phys. Lett. A. 1999. Vol. 256. P. 47.
19. *Horbelt W., Timmer J., Voss H.U.* Parameter estimation in nonlinear delayed feedback systems from noisy data // Phys. Lett. A. 2002. Vol. 299. P. 513.
20. *Ortín S., Gutiérrez J.M., Pesquera L., Vasquez H.* Nonlinear dynamics extraction for time-delay systems using modular neural networks synchronization and prediction // Physica A. 2005. Vol. 351. P. 133.
21. *Bezruchko B.P., Karavaev A.S., Ponomarenko V.I., Prokhorov M.D.* Reconstruction of time-delay systems from chaotic time series // Phys. Rev. E. 2001. Vol. 64. 056216.
22. *Prokhorov M.D., Ponomarenko V.I., Karavaev A.S., Bezruchko B.P.* Reconstruction of time-delayed feedback systems from time series // Physica D. 2005. Vol. 203. P. 209.
23. *Mensour B., Longtin A.* Synchronization of delay-differential equations with application to private communication // Phys. Lett. A. 1998. Vol. 244. P. 59.
24. *Shahverdiev E.M., Sivaprakasam S., Shore K.A.* Parameter mismatches and perfect anticipating synchronization in bidirectionally coupled external cavity laser diodes // Phys. Rev. E. 2002. Vol. 66. 017206.
25. *Bocharov G.A., Rihan F.A.* Numerical modelling in biosciences using delay differential equations // J. Comp. Appl. Math. 2000. Vol. 125. P. 183.
26. *Kotani K., Takamasu K., Ashkenazy Y., Stanley H.E., Yamamoto Y.* Model for cardiorespiratory synchronization in humans // Phys. Rev. E. 2002. Vol. 65. 051923.
27. *Yanchuk S., Perlikowski P.* Delay and periodicity // Phys. Rev. E. 2009. Vol. 79. 046221.
28. *Prokhorov M.D., Ponomarenko V.I.* Estimation of coupling between time-delay systems from time series // Phys. Rev. E. 2005. Vol. 72. 016210.
29. *Prokhorov M.D., Ponomarenko V.I.* Reconstruction of time-delay systems using small impulsive disturbances // Phys. Rev. E. 2009. Vol. 80. 066206.

где $\xi_y = \dfrac{E^0 l \cdot ch(\beta_0 y_0)}{V_0}$, $\bar{\varphi}_0 = \beta_e l$, $P_0 = I_0 V_0$, $\theta_p = \beta_p l$, $\Phi_0 = (\beta_e - \beta_0)\cdot l$, $\phi_c = \beta_c l$ – циклотронный угол пролета. Функция $F\left(\Phi_0, \phi_c, \theta_p\right)$ имеет вид:

$$F(\Phi_0, \phi_c, \theta_p) = \frac{\exp[-j(\Phi_0 + q)] - 1}{2q(\Phi_0 + q)^2} - \frac{\exp[-j(\Phi_0 - q)] - 1}{2q(\Phi_0 - q)^2} - \frac{j}{\Phi_0^2 - q^2}, \qquad (21)$$

где $q = j\sqrt{\theta_p^2 - \phi_c^2}$.

При предельном переходе ($\theta_p \to 0$) вновь получаются выражения, полученные в двумерной линейной теории без учета полей пространственного заряда [2, соотношения (III.31) – (III.32), в которых θ_p заменено на ϕ_c].

Анализ выражений для реальной и мнимой частей функций $F\left(\Phi_0, \theta_p\right)$ и $F\left(\Phi_0, \phi_c, \theta_p\right)$ оказывается интересным в силу того, что от мощностей взаимодействия можно перейти к возбужденным полям, для которых эти функции и будут содержать основную зависимость от угла пролета Φ_0. Получив выражения для возбужденных полей, можно найти коэффициент усиления.

6. Графики функций угла пролета

Подробнее рассмотрим графики функций относительного угла пролёта электронов и волны, циклотронного угла пролёта и параметра пространственного заряда.

На рис. 3 представлены графики функций (19.1)–(19.2). При устремлении параметра пространственного заряда к нулевому значению кривые приближаются к графикам функций, которым соответствует значение параметра пространственного заряда $\theta_p = 0$.

Влияние пространственного заряда на сгруппированный ток пучка в этом случае формально такое же, как и влияние конечного фокусирующего магнитного поля на поперечное смещение электронов. Увеличение параметра θ_p приводит к уменьшению продольных смещений, а следовательно, и к уменьшению максимума кривых активной мощности взаимодействия за счет возрастающей разгруппировки электронных уплотнений вследствие расталкивающих сил. Кроме того, первые максимумы кривых смещаются в сторону больших по абсолютной величине значений Φ_0

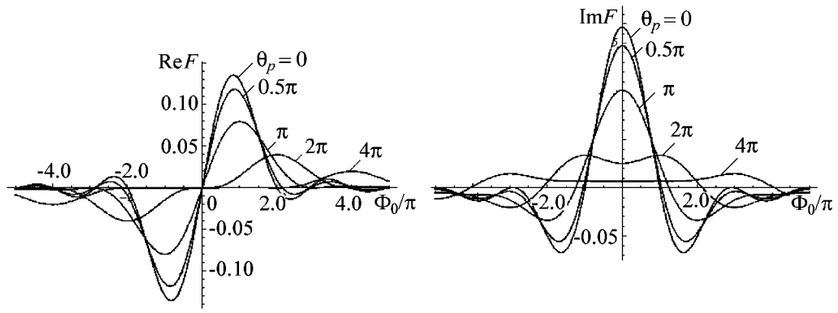


Рис. 3. Зависимости реальной и мнимой частей функции $F\left(\Phi_0, \theta_p\right)$ при различных значениях параметра пространственного заряда θ_p

и достигаются при значениях θ_p, близких к Φ_0. Это соответствует тому, что при выполнении условия $\Phi_0 = \pm\theta_p$ должны иметь место резонансные эффекты, как и видно из представленных зависимостей.

Обратимся к выражению (21). В силу того, что q – комплексная величина (см. условие (12)), представление отдельно выраженных реальной и мнимой частей $F\left(\Phi_0, \phi_c, \theta_p\right)$ довольно громоздко. Однако их зависимости удается построить с помощью специальных компьютерных программ и приложений. В данном случае для построения зависимостей была использована программа Mathematica 7. На рис. 4

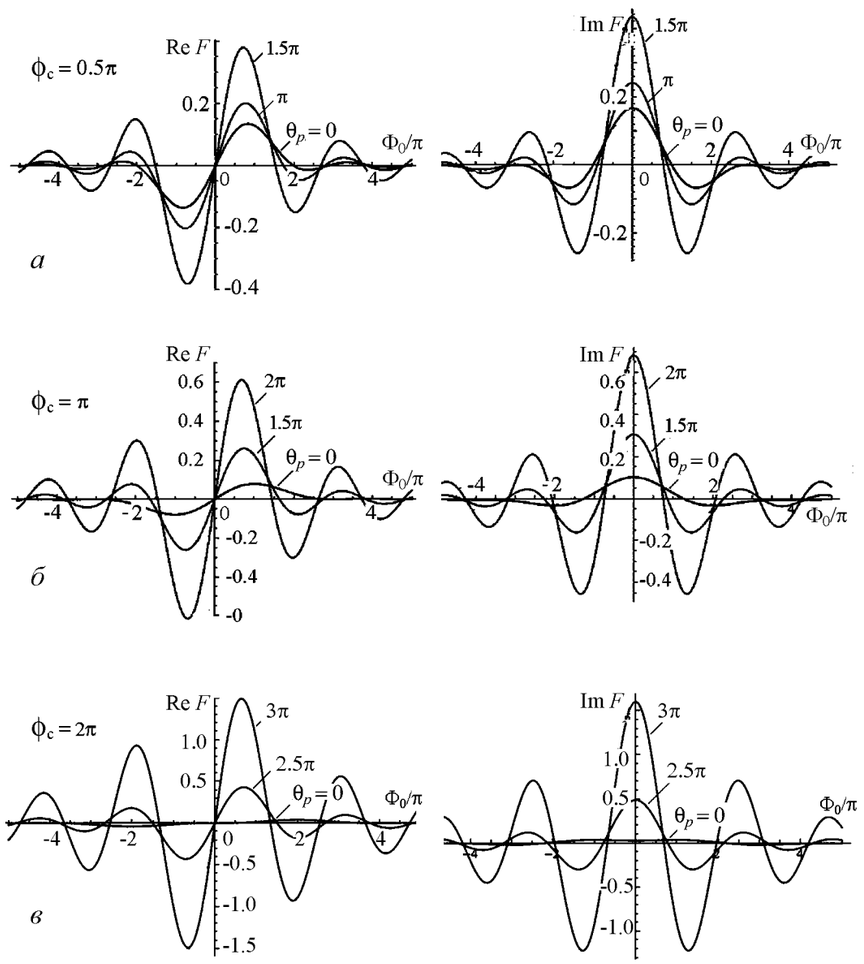


Рис. 4. Зависимости реальной и мнимой частей функции $F\left(\Phi_0, \phi_c, \theta_p\right)$ от невозмущённого относительного угла пролёта при различных значениях параметра пространственного заряда θ_p и циклотронного угла пролета ϕ_c

запаздыванием для случаев однонаправленной и взаимной связи элементов, в том числе с добавленным шумом, а также на примере экспериментальных временных рядов цепочки связанных радиотехнических генераторов с запаздывающей обратной связью.

Описанный подход не имеет ограничений на число элементов в цепочке. Кроме того, метод может быть распространен на связанные системы с запаздыванием высокого порядка и с несколькими временами задержки. Однако вычислительные затраты при этом существенно возрастают, так как требуется восстанавливать больше параметров. В случае синхронизации элементов цепочки диффузионно связанных систем с запаздыванием метод позволяет восстановить параметры локальных элементов, но коэффициенты связи определить не удается.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант № 10–02–00980, и аналитической ведомственной целевой программы «Развитие научного потенциала высшей школы (2009–2010 годы)», проект № 2.1.1/1738.

Библиографический список

1. *Kuang Y.* Delay Differential Equations with Applications in Population Dynamics. Boston: Academic Press, 1993.
2. *Glass L., Mackey M.C.* From Clocks to Chaos: The Rhythms of Life. Princeton: Princeton University Press, 1988.
3. *Mokhov I.I., Smirnov D.A.* El Nino Southern Oscillation drives North Atlantic Oscillation as revealed with nonlinear techniques from climatic indices // Geophys. Res. Lett. 2006. Vol. 33. L03708.
4. *Ikeda K.* Multiple-valued stationary state and its instability of the transmitted light by a ring cavity system // Opt. Commun. 1979. Vol. 30. P. 257.
5. Lang R., Kobayashi K. External optical feedback effects on semiconductor injection lasers // IEEE J. Quantum Electron. 1980. Vol. 16. P. 347.
6. *Peil M., Jacquot M., Chembo Y.K., Larger L., Erneux T.* Routes to chaos and multiple time scale dynamics in broadband bandpass nonlinear delay electro-optic oscillators // Phys. Rev. E. 2009. Vol. 79. 026208.
7. *Hale J.K., Lunel S.M.V.* Introduction to Functional Differential Equations. New York: Springer, 1993.
8. *Рубаник В.П.* Колебания квазилинейных систем с запаздыванием. М.: Наука, 1969.
9. *Fowler A.C., Kember G.* Delay recognition in chaotic time series // Phys. Lett. A. 1993. Vol. 175. P. 402.
10. *Hegger R., Bünner M.J., Kantz H., Giaquinta A.* Identifying and modeling delay feedback systems // Phys. Rev. Lett. 1998. Vol. 81. P. 558.
11. *Udaltsov V.S., Goedgebuer J.-P., Larger L., Cuenot J.-B., Levy P., Rhodes W.T.* Cracking chaos-based encryption systems ruled by nonlinear time delay differential equations // Phys. Lett. A. 2003. Vol. 308. P. 54.

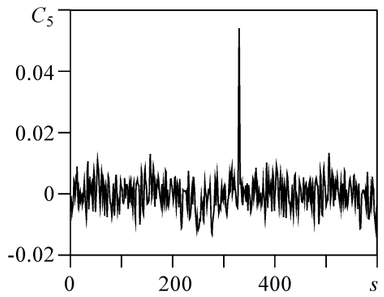


Рис. 4. Взаимная корреляционная функция (6) для случая, когда взаимно связанные системы Маккея–Гласса (2) совершают хаотические колебания при высоком уровне шума, $C_{5\,\max}(s) = C_5(330)$

ные импульсы, таким образом, что динамика возбуждаемого элемента описывается уравнением (8). На рис. 4 построена взаимная корреляционная функция (6) для случая, когда возмущающий импульсный сигнал имеет амплитуду $A_5 = 0.2$, период $T_5 = 700$ и длительность $M_5 = T_5/2$. При шаге изменения s, равном 1, график $C_5(s)$ имеет максимум при $s = 330$, то есть время запаздывания восстанавливается точно. Метод остается эффективным и при более интенсивном шуме, но с увеличением уровня шума требуется увеличить амплитуду импульсного воздействия.

3. Реконструкция цепочки связанных экспериментальных радиотехнических генераторов с запаздывающей обратной связью

Мы применили метод к экспериментальным временным рядам цепочки связанных радиотехнических генераторов с запаздывающей обратной связью. Блок-схема экспериментальной установки приведена на рис. 5. Она состоит из трех связанных между собой кольцевых генераторов, каждый из которых состоит из линии задержки, нелинейного элемента и низкочастотного RC-фильтра первого порядка. Нелинейные элементы и линии задержки выполнены на цифровых элементах, а фильтры на аналоговых. Аналоговые и цифровые элементы схемы сопрягались с помощью аналого-цифровых и цифро-аналоговых преобразователей. Связь генераторов осуществляется с помощью резисторов R_c. Модельное уравнение для второго элемента цепочки имеет следующий вид:

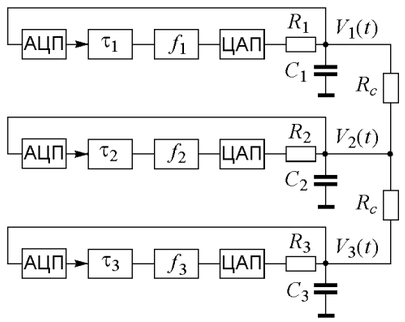


Рис. 5. Блок-схема экспериментальной установки. Линии задержки генераторов обозначены как τ_1, τ_2 и τ_3, а нелинейные элементы как f_1, f_2 и f_3. АЦП – аналого-цифровые преобразователи, ЦАП – цифро-аналоговые преобразователи

$$R_2C_2\dot{V}_2(t) = -V_2(t) + f_2\left(V_2(t-\tau_2)\right) + \\ + \frac{R_2}{R_c}\left[V_3(t) - 2V_2(t) + V_1(t)\right], \tag{13}$$

где $V_2(t)$ и $V_2(t-\tau_2)$ – напряжения соответственно на входе и выходе линии задержки второго элемента, R_2 и C_2 – сопротивление и емкость элементов его фильтра. Уравнение (13) имеет вид (2) с $\varepsilon_2 = R_2C_2$ и $k_2 = R_2/R_c$.

Все три нелинейных элемента имели квадратичную передаточную характеристику f_i. При следующих значениях параметров $\tau_1 = 13.6$ мс,

Изв. вузов «ПНД», т. 18, № 5, 2010

IV Всероссийская школа с международным участием

«НЕЛИНЕЙНАЯ ДИНАМИКА В ФИЗИОЛОГИИ И МЕДИЦИНЕ»

VI Всероссийский симпозиум

«ВАРИАБЕЛЬНОСТЬ РИТМА СЕРДЦА И МЕДЛЕННЫЕ КОЛЕБАТЕЛЬНЫЕ ПРОЦЕССЫ В ОРГАНИЗМЕ ЧЕЛОВЕКА»

Новокузнецк, 24–27 мая 2011

Организаторы

- НИИ комплексных проблем гигиены и профессиональных заболеваний СО РАМН
- Кузбасский научный центр
- ГОУ ДПО «Новокузнецкий институт усовершенствования врачей»
- Сибирский государственный индустриальный университет
- Департамент охраны здоровья населения Кемеровской области

Программный комитет

Баевский Р.М., д.м.н., профессор, Институт медико-биологических проблем РАН, Москва, Россия; *Трубецков Д.И.*, чл.-корр. РАН, проф., Саратовский госуниверситет, Саратов, Россия; *Куклин С.Г.*, д.м.н., проф. кафедры терапии и кардиологии, Институт усовершенствования врачей, Иркутск, Россия; *Илюхина В.А.*, зав. лабораторией физиологии состояний головного мозга и организма, Институт мозга человека РАН, д.б.н., профессор, лауреат Гос. премии СССР, Санкт-Петербург, Россия; *Астахов А.А.*, д.м.н., профессор, анестезиолог-реаниматолог, заведующий кафедрой анестезиологии-реаниматологии УГМАДО, Челябинск, Россия; *Семке В.Я.*, директор НИИ психического здоровья СО РАМН, доктор медицинских наук, профессор, академик РАМН; *Киселева Т.В.*, д.т.н., профессор, заведующая кафедрой систем информатики и управления Сиб ГИУ, Новокузнецк, Россия; *Огарков М.Ю.*, д.м.н., заведующий кафедрой кардиологии ГОУ ДПО Новокузнецкий ГИУВ Росздрава, директор филиала НИИ КПССЗ, директор отдела эпидемиологии сердечно-сосудистых заболеваний, Россия; *Захаренков В.В.*, д.м.н., профессор, заслуженный врач РФ, директор НИИ КПГПЗ СО РАМН; *Флейшман А.Н.*, д.м.н., зав. лабораторией НИИ КПГПЗ СО РАМН, профессор кафедры мануальной терапии, рефлексотерапии и неврологии, ГОУ ДПО Новокузнецкий ГИУВ (председатель программного комитета); *Куликов В.Ю.*, д.м.н., зав. кафедрой нормальной физиологии Новосибирского государственного медицинского университета.

Оргкомитет

Захаренков В.В., д.м.н., профессор, заслуженный врач РФ, директор НИИ КПГПЗ СО РАМН (председатель); *Флейшман А.Н.*, д.м.н., зав. лаб., НИИ КПГПЗ СО РАМН, профессор каф. мануальной терапии, рефлексотерапии и неврологии, ГОУ ДПО Новокузнецкий ГИУВ (заместитель председателя); *Олещенко А.М.*, д.м.н., зам директора НИИ КПГПЗ СО РАМН по науке; *Онищенко А.Л.*, д.м.н., профессор, проректор НГИУВА по научно-исследовательской работе, Новокузнецк, Россия; *Панев Н.И.*, к.м.н., ученый секретарь НИИ КПГПЗ СО РАМН, врач высшей категории; *Шабалина Г.М.*, зам. директора по АХЧ; *Данилов И.П.*, к.м.н., зав. лаб. общей и профессиональной патологии; *Логунова Т.Д.*, руководитель научно-организационного отдела.

IV Всероссийская школа с международным участием «Нелинейная динамика в физиологии и медицине» и VI Всероссийский симпозиум «Вариабельность ритма сердца и медленные колебательные процессы в организме человека» проводятся в Новокузнецке с целью дальнейшей разработки фундаментальных основ данного направления и решения прикладных задач в области охраны здоровья и профилактики. Теоретические и методические аспекты будут рассмотрены в рамках школы ведущими специалистами в этой области. Прикладные клинические аспекты будут рассмотрены в докладах участников симпозиума в рамках нейровегетативной регуляции функции организма.

Теоретические исследования в области сложных систем, медленно-волновой нелинейной динамики, хаоса и фрактальности, самоорганизации, синергетики, информационных и нанотехнологий открыли новую эру научно-технического развития современного общества. Новые междисциплинарные направления имеют прогностический аспект, открывают новые закономерности устройства общества и окружающего мира, имеют своей целью улучшение качества жизни, помогают в борьбе с болезнями, продлевают активный образ жизни человека до глубокой старости. Эффективное продвижение новых технологий, в частности, в анализе кардиодинамики и в решении прикладных задач медицины требует значительных усилий как в научно-исследовательской работе, так и в практической реализации методик, создании новых практических руководств. Этим задачам и служит очередная IV Всероссийская школа с привлечением квалифицированных специалистов и зарубежных ученых.

Симпозиумы и школы, посвященные медленным колебательным процессам в организме человека, теоретическим и прикладным аспектам нелинейной динамики, хаосу и фрактальности в физиологии и медицине проходили в Новокузнецке в 1997, 1999, 2001, 2005, 2007 годах. В них приняли участие научные сотрудники и врачи НИИ РАН, РАМН, высшей школы и зарубежные ученые (США, Японии, Литвы и др.). Каждый новый этап сопровождается расширением тематики, постановкой и решением новых задач как методологического, так и теоретического характера.

В школе 2005 года значительное внимание было уделено энергодефицитным состояниям. В 2007 году в школе была рассмотрена проблема устойчивости физиологических процессов и прогнозированию патологических изменений. Вариабельность ритма сердца является одной из важных областей этой тематики. Однако медленные волновые процессы охватывают почти все физиологические системы и их взаимодействие в едином организме является перспективой дальнейших исследований и наших достижений в борьбе с болезнями и их профилактике.

В рамках этой школы планируется обсуждение проблем нелинейной динамики социально-экономических и информационных процессов в связи со здоровьем населения.

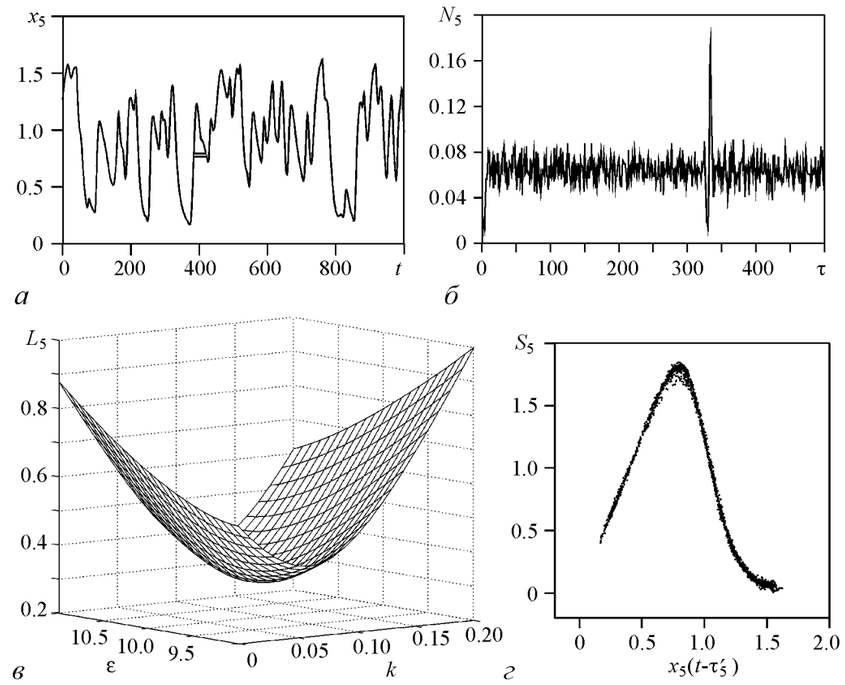


Рис. 3. Восстановление элемента цепочки взаимно связанных уравнений Маккея–Гласса в присутствии 10% аддитивного гауссова белого шума: *а* – временной ряд переменной $x_5(t)$; *б* – число N_5 пар экстремумов временного ряда переменной $x_5(t)$ на удалении τ друг от друга, нормированное на общее число экстремумов в ряде, $N_{5\,\min}(\tau) = N_5(330)$; *в* – зависимость $L_5(\varepsilon, k)$, нормированная на максимальную длину $L_{5\,\max}(\varepsilon, k) = L_5(9.0, 0.20)$ в исследуемом интервале параметров, $L_{5\,\min}(\varepsilon, k) = L_5(10.2, 0.10)$; *г* – восстановленная нелинейная функция f_5 при $\tau_5' = 330$, $\varepsilon_5' = 10.2$, $k_5' = 0.10$. $S_5 = \varepsilon_5'\dot{x}_5(t) + x_5(t) - k_5'\left(x_6(t) - 2x_5(t) + x_4(t)\right)$

реализаций $x_4(t)$, $x_5(t)$ и $x_6(t)$. Аналогичным образом удается получить высокое качество восстановления остальных элементов цепочки.

Использованный нами метод восстановления времени запаздывания, основанный на статистическом анализе экстремумов временного ряда системы, хорошо работает, если уровень измерительного и динамического шума не слишком высок. С увеличением уровня шума растет количество экстремумов во временном ряде. Эти экстремумы не связаны с собственной динамикой системы и временные интервалы между ними носят случайный характер. В результате, абсолютный минимум зависимости $N_i(\tau)$ при $\tau = \tau_i$ становится менее выраженным с увеличением шума и начиная с некоторого уровня шума исчезает совсем. Например, в рассмотренном примере взаимно связанных систем Маккея–Гласса метод не позволяет точно восстановить τ_i, если вместо 10% шума добавить к временным рядам элементов цепочки 30% гауссов белый шум (отношение сигнал/шум около 10 дБ).

В этом случае для восстановления τ_i можно использовать метод, основанный на возмущении системы внешним воздействием и анализе ее отклика. Подействуем на переменную $x_5(t)$ внешним сигналом $y_5(t)$, представляющим собой прямоуголь-

ный шаг изменения параметров ε и k можно выбрать большим, а затем уменьшить его в окрестности минимума $L_i(\varepsilon, k)$.

В случае синхронизации диффузионно связанных систем с запаздыванием (1) и (2) предложенный подход позволяет восстановить параметры локальных элементов, но коэффициенты связи определить не удается.

2. Применение методов

2.1. Восстановление цепочки однонаправлено связанных уравнений Икеды. Рассмотрим в качестве примера цепочку однонаправлено связанных уравнений Икеды, описываемую уравнением

$$\dot{x}_i(t) = -x_i(t) + \mu_i \sin\left(x_i(t-\tau_i) - x_{0i}\right) + k_i\left[x_{i+1}(t) - x_i(t)\right], \qquad (11)$$

где $i = 1, ..., J$, $J = 10$. Уравнение Икеды описывает сдвиг x фазы электрического поля в нелинейной поглощающей среде кольцевого резонатора. Параметр μ характеризует интенсивность лазерного излучения, подаваемого на вход резонатора; τ – время запаздывания; x_0 – постоянный фазовый сдвиг. Использовано кольцевое граничное условие $x_1 = x_{J+1}$. Параметры всех уравнений Икеды выбраны одинаковыми: $\mu_i = 20$, $\tau_i = 2$, $x_{0i} = \pi/3$, а начальные условия различными. При этих параметрах элементы системы демонстрируют движение на хаотическом аттракторе высокой размерности [32]. Для уравнения (11) $\varepsilon_i = 1$. Коэффициенты связи между элементами цепочки различны. Они выбраны произвольным образом и принимали значения от 0.5 до 2.0. Во все связанные системы добавлен динамический гауссов белый шум с нулевым средним значением и среднеквадратичным отклонением, составляющим 20% от среднеквадратичного отклонения временного ряда без шума (отношение сигнал/шум около 14 дБ).

На рис. 1, *а* приведен фрагмент временного ряда колебаний в пятом элементе цепочки при $k_5 = 1.5$. Масштабы таковы, что 200 точек ряда занимали временной интервал, равный времени задержки. Весь ряд состоял из 20000 точек и содержал около 800 экстремумов.

Подсчитав число N_5 одновременных обращений в нуль $\dot{x}_5(t)$ и $\dot{x}_5(t-\tau)$ для различных значений τ, перебираемых с шагом, равным шагу интегрирования $h = 0.01$, построим зависимость $N_5(\tau)$, введя нормировку N_5 на общее число экстремумов в ряде (рис. 1, *б*). Для оценки производной по временному ряду мы использовали локальную параболическую аппроксимацию. Отметим, что для сглаживания временного ряда и уменьшения числа обусловленных шумом экстремумов при оценке производной использовалось 7 соседних точек в процедуре локальной аппроксимации. Несмотря на высокий уровень шума, зависимость $N_5(\tau)$ демонстрирует четко выраженный минимум при $\tau = \tau_5 = 2.00$, что в точности соответствует времени запаздывания.

При построении зависимости $L_5(\varepsilon, k)$ шаг изменения ε и k также выбирался равным 0.01. Длина $L_5(\varepsilon, k)$ линии, соединяющей упорядоченные по величине абсциссы точки на плоскости $(x_5(t-\tau_5), \varepsilon\dot{x}_5(t) + x_5(t) - k\left[x_6(t) - x_5(t)\right])$, минимальна при $\varepsilon = 0.99$ и $k = 1.45$ (рис. 1, *в*), что достаточно близко к истинным значениям $\varepsilon_5 = 1$ и $k_5 = 1.5$.

ные области, ввести ряд новых физических понятий и получить ценные физические результаты. Можно сказать, что этот труд знаменует собой начало превращения макроскопической кинетики в самостоятельный раздел науки. Автору удалось показать, что рассматриваемые вопросы имеют не только частное и прикладное, но и общее научное значение, представляют общий теоретический интерес».

Развитие науки за последние 35–40 лет полностью подтвердило эту оценку Н.Н. Семенова. Макроскопическая кинетика под новыми названиями «синергетика», «теория диссипативных структур», «теория катастроф» бурно развивается. При этом, естественно, возникают новые задачи и получаются новые результаты. Однако для глубокого понимания новых отраслей науки с их историческими корнями необходимо обратиться к основам, к пионерским работам в области макроскопической кинетики – и здесь книга Франк-Каменецкого является лучшим пособием.

В настоящее время все меньше остается людей, знавших Д.А. Франк-Каменецкого лично. Не все читатели книги представляют себе творческий путь и облик автора, не все знают о широте научных интересов Давида Альбертовича и, в частности, о его результатах в других областях науки – в физике плазмы, в астрофизике и космологии. В предлагаемом очерке сделана попытка восполнить этот пробел. Думается, что такой рассказ поможет лучше оценить и предлагаемую монографию «Диффузия и теплопередача в химической кинетике».

Давид Альбертович начал свою научную деятельность при не совсем обычных обстоятельствах. Детство и юность он провел в Сибири, там же получил диплом инженера-металлурга (окончил Томский технологический институт) и стал работать на горно-обогатительном заводе. В начале 1935 г. Давид Альбертович написал академику Н.Н. Семенову письмо, в котором обсуждались проблемы химической термодинамики. Талант автора был настолько очевиден, что его пригласили в Институт химической физики. Сознательный поиск и привлечение способных молодых людей, особенно с периферии, широко и с успехом применялись тогда в Ленинградском физико-техническом институте и в тех институтах, в частности в Институте химической физики, которые от него отпочковались.

Давид Альбертович в составе большого коллектива принял участие в работе по проблеме окисления и фиксации атмосферного азота при горении и взрывах. Упоминания об этой проблеме, например у Кавендиша, появились сразу после открытия азота и вслед за тем, как был установлен состав воздуха. К исследованию этого процесса обращались такие крупные химики, как Ф. Габер, В. Нернст (Германия), Р. Бон (Англия). В связи с развитием теории цепных реакций вставал вопрос о возможности прямого использования энергии горения для превращения азота в окись азота. Исследования, проведенные при участии Давида Альбертовича, показали, что процесс связан с механизмом цепной реакции при участии атомов N и O, однако при этом выход окислов азота ограничен условиями термодинамического равновесия. Вполне естественно наметились направления последующей работы Давида Альбертовича: с одной стороны – теория горения и взрыва, с другой – общие основы химической технологии. К этим вопросам Давид Альбертович был близок и по своему инженерному образованию и опыту.

В фундаментальной работе 1939 г. (Журн. физ. химии. 1939. Т. 13. С. 738) Давид Альбертович ставит задачу о тепловом взрыве с учетом пространственного

распределения температуры в среде, в которой протекает химическая реакция. Решение этой задачи завершило почти вековое исследование. Появилась возможность точно предвычислить условия возникновения взрыва. Многочисленные эксперименты полностью подтвердили теорию Д.А. Франк-Каменецкого. Благодаря этой теории были получены важные результаты в химической кинетике.

В упомянутой работе таилось, однако, более глубокое содержание, выходящее за пределы вопроса о взрыве. Только спустя много лет была понята плодотворность постановки задачи о критических условиях как о границе существования решения. На примере теплового взрыва Давид Альбертович развил теорию подобия процессов выделения и отвода энергии. Он предложил асимптотическое выражение $\kappa_1 \exp[\alpha(\mathrm{T}-\mathrm{T}_1)]$, заменяющее экспоненциальную зависимость $\kappa_2 \exp(-A/RT)$, при котором решение, относящееся к некоторой температуре, получается преобразованием подобия из решения, относящегося к другой температуре. По современной терминологии Давид Альбертович использовал групповые свойства уравнений и сознательно выбрал аппроксимацию, необходимую для возникновения группы, аддитивной по температуре и мультипликативной по координатам.

Эти общие физические и математические идеи были широко использованы в работах по теории горения, выполненных как при непосредственном участии Д.А. Франк-Каменецкого, так и в порядке продолжения его исследований.

Исследования Давида Альбертовича, относящиеся к основам химической технологии, подытожены в его замечательной монографии. Теплопередача, диффузия, гидродинамика представляют собой разделы классической физики. Монография замечательно сочетает аналитические решения, теорию подобия и полуэмпирический подход к явлениям и процессам различной степени сложности. Широкая научная программа физико-математического подхода к технологии, осуществляемая в настоящее время, во многом использует глубокие идеи и методы, изложенные в этой работе.

С 1948 по 1956 г. Д.А. Франк-Каменецкий работает под общим руководством академика И.В. Курчатова по атомной проблеме. Он внес большой вклад в создание новой техники. Но даже в эти годы страшно напряженной практической работы он продолжает думать о фундаментальных научных проблемах. Его интересы перемещаются в область астрофизики. В этом он предвосхитил путь, по которому позже пошли очень многие теоретики, в том числе и автор этих строк.

Проблемы спокойной эволюции звезд мастерски изложены в монографии «Физические процессы внутри звезд». Д.А. Франк-Каменецкий также решил задачу о том, как при взрыве звезды ударная волна усиливается во внешних слоях. Это явление существенно связано с законами изменения блеска сверхновых звезд, а также, может быть, с процессом первичного ускорения космических лучей. Одним из первых Давид Альбертович понял, как об этом свидетельствуют работы об «эпиплазме», роль, которую играет в астрофизике и, в частности, в космологии процесс рождения пар частица–античастица в экстремальных условиях.

В 1956 г. Д.А. Франк-Каменецкий по приглашению И.В. Курчатова переходит в Институт атомной энергии, где возглавляет новое направление – исследование взаимодействия волн с плазмой. Здесь им впервые была четко сформулирована задача о нагреве плазмы за счет диссипации волн, возбуждаемых в ней внешним источником колебаний.

для восстановления τ_i. Если в отсутствие связи для восстановления времени запаздывания τ_i изолированной системы достаточно взять импульсное воздействие $y_i(t)$ с амплитудой A_i на два порядка меньшей амплитуды собственных колебаний системы $x_i(t)$ [29], то при сильной линейной связи, такой что воздействие со стороны соседних элементов сравнимо по амплитуде с собственными колебаниями изолированной системы, для восстановления τ_i требуется на порядок увеличить амплитуду воздействия A_i. Зато, метод определения времени запаздывания, основанный на анализе отклика системы на воздействие прямоугольными импульсами, можно использовать при любых значениях коэффициентов связи k_i, в том числе при сильной линейной связи, когда предыдущий метод не работает. Кроме того, метод может быть применен не только к системам, находящимся в режиме периодических колебаний, но и к системам, совершающим хаотические колебания. Еще одним достоинством метода является то, что он остается эффективным при высоких уровнях шума.

Определив тем или иным способом время задержки i-го элемента ансамбля связанных систем с запаздыванием, мы можем восстановить его параметр ε_i, коэффициент связи k_i и нелинейную функцию f_i по временным рядам колебаний i-го и связанных с ним элементов. Для этого будем использовать следующий подход. Запишем уравнения (1) и (2) в виде

$$\varepsilon_i \dot{x}_i(t) + x_i(t) - k_i\left[x_{i+1}(t) - x_i(t)\right] = f_i\left(x_i(t-\tau_i)\right), \tag{9}$$

$$\varepsilon_i \dot{x}_i(t) + x_i(t) - k_i\left[x_{i+1}(t) - 2x_i(t) + x_{i-1}(t)\right] = f_i\left(x_i(t-\tau_i)\right), \tag{10}$$

соответственно. Из уравнения (9) следует, что если построить на плоскости множество точек с координатами $(x_i(t-\tau_i), \varepsilon_i \dot{x}_i(t) + x_i(t) - k_i\left[x_{i+1}(t) - x_i(t)\right])$, то оно воспроизведет функцию f_i. Поскольку заранее величины ε_i и k_i неизвестны, будем строить зависимости $\varepsilon \dot{x}_i(t) + x_i(t) - k\left[x_{i+1}(t) - x_i(t)\right]$ от $x_i(t-\tau_i)$ для различных значений ε и k, добиваясь однозначного соответствия на плоскости $(x_i(t-\tau_i),\ \varepsilon \dot{x}_i(t) + x_i(t) - k\left[x_{i+1}(t) - x_i(t)\right])$, которая возможна лишь при $\varepsilon = \varepsilon_i$, $k = k_i$. А из уравнения (10) следует, что функцию f_i можно восстановить, построив на плоскости множество точек с координатами $(x_i(t-\tau_i), \varepsilon_i \dot{x}_i(t) + x_i(t) - k_i\left[x_{i+1}(t) - 2x_i(t) + x_{i-1}(t)\right])$. Так как значения ε_i и k_i неизвестны, будем перебирать их из некоторого интервала, добиваясь однозначности на выбранной плоскости, которое возможно лишь при правильном выборе параметров.

В качестве количественного критерия однозначности при таком поиске ε_i и k_i будем использовать минимальную длину $L_i(\varepsilon, k)$ линии, последовательно соединяющей точки на перебираемых плоскостях вложения, упорядоченные по величине абсциссы. Минимум зависимости $L_i(\varepsilon, k)$ будет наблюдаться при правильном выборе параметров, а построенное при этом значении множество точек на плоскости воспроизведет нелинейную функцию, которую при необходимости можно аппроксимировать. При ошибочном выборе значений ε_i и k_i получаем на плоскости набор точек, не связанных между собой функционально. Чем менее точно определены параметры, тем более беспорядочно расположены точки, а соединяющая их ломаная линия имеет большую длину, чем в случае, когда множество точек ложится на одномерную кривую. Похожий подход использовался нами в [28] при реконструкции двух линейно связанных систем с запаздыванием. Для уменьшения времени счета началь-

энтропии [12] или различные меры сложности спроецированного временного ряда [13–15]. Известны также методы восстановления параметров систем с запаздыванием, основанные на применении регрессионного анализа [16–18], метода множественной стрельбы [19], нейронных сетей [20] и статистического анализа экстремумов временного ряда [21,22].

Однако почти все эти подходы ориентированы на восстановление изолированных систем с запаздыванием по их хаотическим временным рядам. Вместе с тем ситуация, когда несколько систем с запаздыванием взаимодействуют между собой, является типичной в ряде практически важных задач [23–26]. Достаточно распространена ситуация, когда системы с запаздыванием функционируют в периодических или близких к периодическим режимах [2,8,27]. Ранее нами был предложен метод восстановления двух линейно связанных систем с запаздыванием по их хаотическим временным рядам [28] и метод реконструкции изолированных систем с запаздыванием, находящихся в режиме периодических колебаний [29]. В настоящей работе нами исследована возможность применения этих методов для реконструкции произвольного числа связанных между собой систем с запаздыванием и определены границы применимости методов. С помощью этих методов по хаотическим и периодическим временным рядам проведена реконструкция модельных уравнений для цепочек связанных систем с задержкой при различных способах связи элементов цепочки.

1. Описание методов

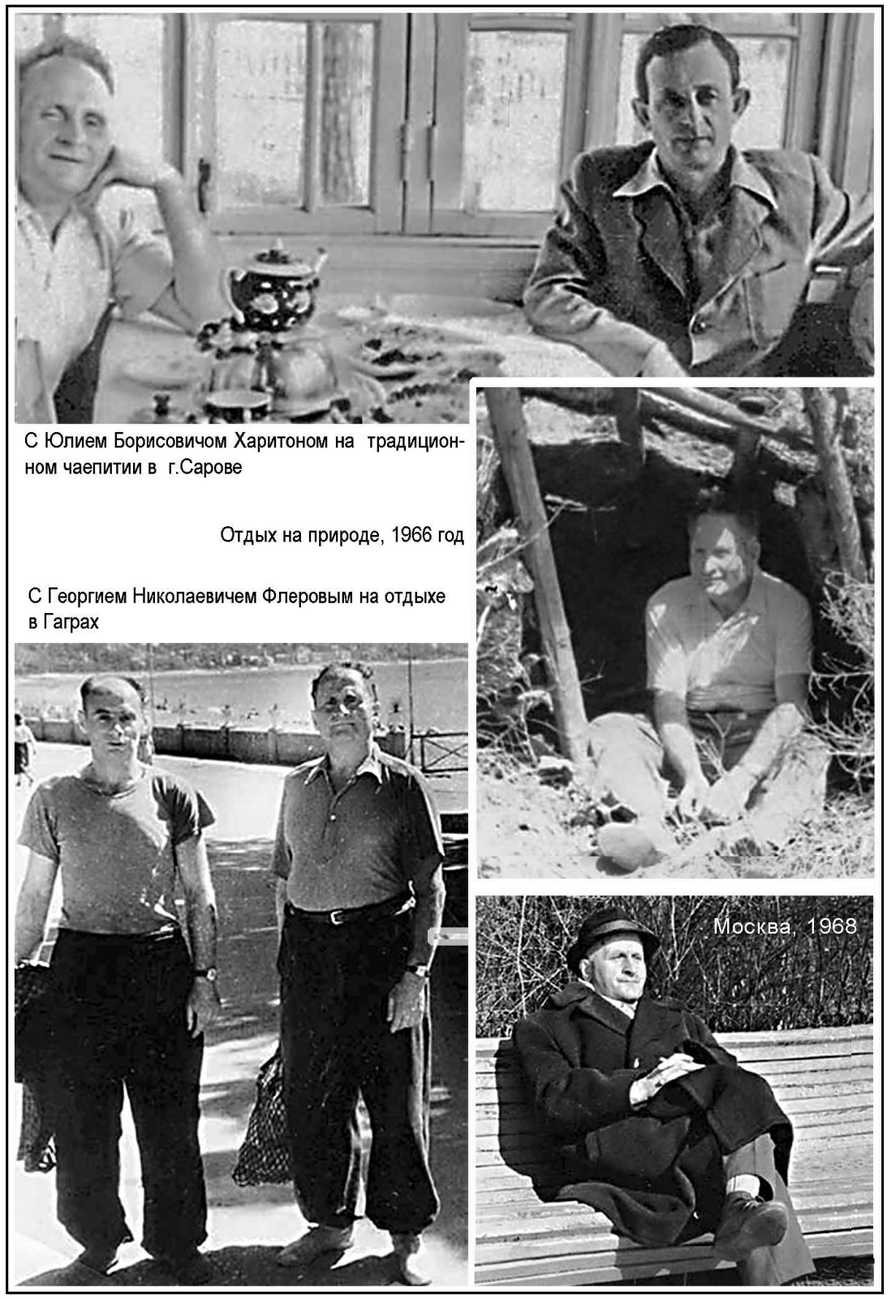
Рассмотрим цепочки, состоящие из диффузионно связанных систем с запаздыванием, описываемые уравнениями

$$\varepsilon_i \dot{x}_i(t) = -x_i(t) + f_i\left(x_i(t-\tau_i)\right) + k_i\left[x_{i+1}(t) - x_i(t)\right], \tag{1}$$

$$\varepsilon_i \dot{x}_i(t) = -x_i(t) + f_i\left(x_i(t-\tau_i)\right) + k_i\left[x_{i+1}(t) - 2x_i(t) + x_{i-1}(t)\right], \tag{2}$$

где τ_i – времена запаздывания; ε_i – параметры, характеризующие инерционные свойства элементов системы; f_i – нелинейные функции; k_i – коэффициенты связи. Граничные условия выбраны периодическими $x_1 = x_{J+1}$, где J – число элементов в цепочке. Модельное уравнение (1) описывает однонаправлено связанные системы с запаздыванием. Такой способ связи систем с запаздыванием и возникающая в этом случае синхронизация колебаний элементов цепочки исследовались в [23,30]. Уравнение (2) описывает динамику цепочек взаимно связанных систем с запаздыванием. Исследование синхронизации таких систем проводилось в [31].

Ранее нами было установлено, что во временных реализациях изолированных ($k_i = 0$) систем с запаздыванием вида (1) и (2) практически отсутствуют экстремумы, удаленные друг от друга на время запаздывания [21]. Если такая система совершает хаотические колебания, то экстремумы в ее временном ряде расположены нерегулярно и расстояние между ними принимает различные значения. На основе этого свойства нами был предложен метод определения времени задержки τ_i, использующий статистический анализ временных интервалов между экстремумами хаотического временного ряда системы с запаздыванием. Сначала определяем для



С Юлием Борисовичом Харитоном на традиционном чаепитии в г.Сарове

Отдых на природе, 1966 год

С Георгием Николаевичем Флеровым на отдыхе в Гаграх

В последние годы он возглавлял организованную им кафедру физики плазмы в Московском физико-техническом институте. Давид Альбертович – автор учебника «Лекции по физике плазмы».

Советское правительство высоко оценило заслуги Д.А. Франк-Каменецкого: он был награжден орденами Ленина и Трудового Красного Знамени и трижды Государственной премией.

Простое перечисление научных работ Давида Альбертовича еще не дает полного представления об авторитете и научном влиянии Д.А. Франк-Каменецкого, которые во многом зависели от его личных качеств. Он щедро передавал свои идеи не только ученикам и сотрудникам, но любому, обращавшемуся за советом.

Огромный оптимизм и доброжелательность, душевное благородство и внимательность – эти качества Давида Альбертовича хорошо известны не только его сотрудникам и ученикам, но и широкому кругу физиков и химиков. Его отличали полное отсутствие ревности или зависти к чужим результатам. Естественное для ученого активное желание раскрыть свои способности и получить важный результат у Давида Альбертовича гармонично сливалось с интересом к сути дела, с интересом к природе.

Давид Альбертович прожил яркую и счастливую жизнь. Память о нем навсегда останется в наших сердцах.

Время подтвердило те оценки, которые приведены выше.

Вопросы диффузии и теплопередачи в химической кинетике по-прежнему находятся в центре внимания химической технологии и теории горения. В последней главе книги «Диффузия и теплопередача в химической кинетике» Давид Альбертович уделяет большое внимание периодическим химическим реакциям. В настоящее время в нашей стране проведен большой цикл исследований периодической реакции Белоусова–Жаботинского.

На международной конференции «Синергетика 1983» (август 1983) в Биологическом центре АН СССР в Пущине под Москвой стало особенно ясно, что исследования периодических реакций и связанных с ними пространственных картин вырастают в самостоятельную область науки – синергетику. Теория теплового взрыва была первой ласточкой современной теории катастроф. Благодаря развитию теории катастроф результаты Давида Альбертовича и его сотрудников обобщаются на множество областей, на первый взгляд, внешне далеких от горения и взрыва, – от механики полимеров до биологических явлений. Большое значение имеют работы Давида Альбертовича по теории плазмы. Его популярная книга «Плазма – четвертое состояние вещества» остается и сегодня лучшим введением для молодежи в физику плазмы. Глубокое проникновение в физику диссипативных процессов позволило ему сделать существенный вклад в теорию диффузии и теплопроводности плазмы.

Ему принадлежит ряд методических пособий по вопросам переноса и волн в плазме. Он автор одного из методов нагрева плазмы, использующего звуковой резонанс.

Книга «Физические процессы внутри звезд» (1959 г.) не имеет себе равных по ясности и проникновению в суть вопросов, по рациональному применению теории подобия. Более того, рассмотрение водородных звезд оказалось более важным, чем это казалось 20 лет тому назад. В настоящее время установлено, что в космологическом нуклеосинтезе тяжелые элементы не образуются. Следовательно, звезды первого поколения состояли из водородно-гелиевой смеси без более тяжелых ионов.

Прикладные задачи нелинейной теории колебаний и волн

Изв. вузов «ПНД», т. 18, № 5, 2010 УДК 537.86

РЕКОНСТРУКЦИЯ АНСАМБЛЕЙ СВЯЗАННЫХ СИСТЕМ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ ПО ВРЕМЕННЫМ РЯДАМ

М.Д. Прохоров, В.И. Пономаренко

Предложены методы реконструкции модельных дифференциальных уравнений с запаздыванием для ансамблей связанных систем с задержкой по их временным рядам. Эффективность методов продемонстрирована на примере хаотических и периодических временных рядов цепочек диффузионно связанных модельных и экспериментальных систем с запаздыванием для случаев однонаправленной и взаимной связи элементов.

Ключевые слова: Реконструкция уравнений, анализ временных рядов, динамическое моделирование, запаздывающая обратная связь.

Введение

Автоколебательные системы с запаздывающей обратной связью очень широко распространены в природе [1–3] и технике [4–6]. Обычно они моделируются дифференциальными уравнениями с запаздывающим аргументом. Динамика модельных систем с задержкой достаточно подробно исследована [7,8]. Не менее важной является задача восстановления модельных уравнений систем с запаздыванием по экспериментальным временным рядам. Решение этой задачи позволяет не только предсказать поведение исследуемых систем при изменении параметров, но и оценить адекватность заложенных в модели представлений об объекте, осуществить классификацию систем и режимов их функционирования, определить значения параметров, недоступных непосредственному измерению в эксперименте.

Так как даже простые системы с запаздыванием могут демонстрировать хаотические колебания очень высокой размерности, универсальные методы реконструкции оказываются неэффективными, и для восстановления уравнений систем с задержкой требуется разрабатывать специальные подходы. Большинство из них основано на проецировании бесконечномерного фазового пространства системы с запаздыванием в подпространства малой размерности. При этом используются такие критерии качества реконструкции системы с запаздыванием, как минимальная ошибка прогноза построенной модели [9–11], минимальная величина информационной