

*Журнал включен в «Перечень периодических научных и научно-технических изданий РФ,
рекомендованных для публикации основных результатов диссертаций
на соискание ученой степени доктора наук»*

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Известия высших учебных заведений

ПРИКЛАДНАЯ НЕЛИНЕЙНАЯ ДИНАМИКА

научно-технический журнал

издается с 1993 года

Выходит 6 раз в год

Том 23, № 6, 2015, Саратов

СО Д Е Р Ж А Н И Е

От редактора. <i>Гуляев Ю. В.</i>	3
ПРИКЛАДНЫЕ ЗАДАЧИ НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ КОЛЕБАНИЙ И ВОЛН	
<i>Пономаренко В. И., Прохоров М. Д., Короновский А. А., Москаленко О. И., Храмов А. Е.</i> Метод диагностики обобщенной синхронизации и его прило- жение к системам передачи информации	4
<i>Тихомиров А. А., Мишагин К. Г., Лаптева Т. В., Канаков О. И.</i> Самолокализа- ция и бризеры в нелинейных колебательных решетках с беспорядком ...	16
<i>Мохаммад Я. Х., Павлов А. Н.</i> Расчет старшего показателя Ляпунова хаотичес- ких режимов колебаний по точечным процессам при наличии шума	31
<i>Зайцев В. В., Стулов И. В.</i> О влиянии подмененных гармоник на динамику автоколебаний в дискретном времени	40
НОВОЕ В ПРИКЛАДНОЙ ФИЗИКЕ	
<i>Безгина И. П., Ерёмка В. Д., Макулина Т. А., Мыценко И. М.</i> Бестоковая пере- стройка и стабилизация частоты автоколебаний клинотрона терагерцо- вого диапазона	47
НЕЛИНЕЙНАЯ ДИНАМИКА И ГУМАНИТАРНЫЕ НАУКИ	
<i>Трубецкова Е. Г.</i> Нелинейное пространство романа М. Булгакова «Мастер и Маргарита»	60
НЕЛИНЕЙНАЯ ДИНАМИКА В ЛИЦАХ. ИСТОРИЯ. PERSONALIA	
<i>Богатов Е. М., Мухин Р. Р.</i> О связи между нелинейным анализом, бифурка- циями и нелинейной динамикой: На примере Воронежской школы нели- нейного функционального анализа	74
PERSONALIA	
Из воспоминаний о Л.А. Вайнштейне	89
КОНФЕРЕНЦИИ. СЕМИНАРЫ. СИМПОЗИУМЫ. ШКОЛЫ	
Школа-конференция Нелинейные дни в Саратове для молодых – 2015. Россия, Саратов, 27–31.10.2015, 24–27.11.2015	97

C O N T E N T S

Editorial. <i>Gulyaev Yu.V.</i>	3
APPLIED PROBLEMS OF NONLINEAR OSCILLATION AND WAVE THEORY	
<i>Ponomarenko V.I., Prokhorov M.D., Koronovskii A.A., Moskalenko O.I., Hramov A.E.</i> Method for generalized synchronization detecting and its application to communication systems	4
<i>Tikhomirov A.A., Mishagin K.G., Laptyeva T.V., Kanakov O.I.</i> Self-trapping and breathers in disordered nonlinear oscillatory lattices	16
<i>Mohammad Y.K., Pavlov A.N.</i> Largest Lyapunov exponent of chaotic oscillatory regimes computing from point processes in the noise presence ...	31
<i>Zaitsev V.V., Stulov I.V.</i> About influence of the changed harmonics on dynamics of self-oscillations in discrete time	40
INNOVATIONS IN APPLIED PHYSICS	
<i>Bezgina I.P., Yeryomka V.D., Makulina T.A., Mytsenko I.M.</i> Current-less tuning and control of self-oscillations frequency terahertz range klynotron	47
NONLINEAR DYNAMICS AND HUMANITIES	
<i>Trubetskova E.G.</i> Nonlinear space of the M. Bulgakov's novel «The Master and Margarita»	60
HISTORY OF NONLINEAR DYNAMICS. PERSONALIA	
<i>Bogatov E.M., Mukhin R.R.</i> The relation between the nonlinear analysis, bifurcations and nonlinear dynamics: On the example of Voronezh school of nonlinear functional analysis	74
PERSONALIA	
From the reminiscences on L.A. Vainshtein	89
CONFERENCES. MEETINGS. SYMPOSIA. SCIENTIFIC SCHOOLS	
Scientific School «Nonlinear days in Saratov for youth – 2015». Russia, Saratov, 27–31.10.2015, 24–27.11.2015	97



МЕТОД ДИАГНОСТИКИ ОБОБЩЕННОЙ СИНХРОНИЗАЦИИ И ЕГО ПРИЛОЖЕНИЕ К СИСТЕМАМ ПЕРЕДАЧИ ИНФОРМАЦИИ

*В. И. Пономаренко^{1,2}, М. Д. Прохоров¹, А. А. Короновский²,
О. И. Москаленко², А. Е. Храмов^{2,3}*

¹Саратовский филиал Института радиотехники и электроники им. В.А. Котельникова РАН

²Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского

³Саратовский государственный технический университет им. Гагарина Ю.А.

Предложен метод диагностики обобщенной синхронизации, не использующий вспомогательную систему. Метод работает в реальном времени и основан на использовании лишь одной ведомой системы, на которую поочередно подаются сигнал ведущей системы и его задержанная копия. На основе предложенного метода построена система скрытой передачи информации, демонстрирующая высокую устойчивость к шумам в канале связи. Эффективность предложенной системы связи продемонстрирована при численном моделировании и в радиофизическом эксперименте.

Ключевые слова: Обобщенная синхронизация, системы скрытой передачи информации, системы с запаздыванием.

Введение

Разработка систем скрытой передачи информации, основанных на использовании различных видов хаотической синхронизации, является одним из актуальных направлений современной радиофизики и нелинейной динамики. К настоящему времени предложено большое количество разнообразных систем связи на основе синхронизации хаотических динамических систем [1–11]. Наряду с неоспоримыми достоинствами, такими как широкополосный спектр мощности, высокая скорость передачи информации и простота аппаратурной реализации, многие системы связи, основанные на явлении хаотической синхронизации, имеют и существенные недостатки. Основным недостатком абсолютного большинства известных систем связи, затрудняющим их использование на практике, является низкая устойчивость к шумам и искажениям сигнала в канале связи. Исключением из правила являются системы передачи информации, основанные на явлении обобщенной синхронизации [12–14], которые обладают очень высокой устойчивостью к шумам и флуктуациям в канале связи.

Обобщенная синхронизация может наблюдаться между двумя однонаправленно связанными хаотическими осцилляторами – ведущим $x(t)$ и ведомым $y(t)$ – и означает наличие функционального соотношения $y(t) = F[x(t)]$ [15]. Для диагностики режима обобщенной синхронизации применяют метод расчета условных ляпуновских экспонент [16], метод вспомогательной системы [17], метод ближайших соседей [15] и его дальнейшее развитие – метод фазовых трубок [18], а также методы, основанные на взаимной информации [19], расчете так называемого «обобщенного угла» [20], статистическом моделировании [21] и динамическом Байесовском подходе [22].

Наиболее широко используемым и относительно легко реализуемым из перечисленных методов является метод вспомогательной системы. Он наиболее привлекателен в физическом эксперименте, поскольку его можно использовать в реальном времени в отличие от других методов, требующих записи сигналов и их последующей обработки.

Метод вспомогательной системы заключается в использовании вспомогательной системы $v(t)$, являющейся точной копией системы $y(t)$. Начальные условия для $v(t)$ выбираются отличными от начального состояния для $y(t)$, однако лежащими в бассейне притяжения того же аттрактора. Если после завершения переходного процесса состояния ведомой и вспомогательной систем становятся идентичными, $y(t) \equiv v(t)$, то имеет место обобщенная синхронизация между системами $x(t)$ и $y(t)$. Однако для реализации этого метода в физическом эксперименте необходимо решить задачу построения двух идентичных автогенераторов (ведомого и вспомогательного). Это достаточно сложная техническая задача, особенно при работе на высоких частотах.

В настоящей работе предложен новый метод диагностики обобщенной синхронизации, позволяющий обойтись без использования вспомогательной системы. Так же, как и метод вспомогательной системы, предлагаемый подход может быть использован в реальном времени и применен к экспериментальным системам. На основе предложенного метода построена система скрытой передачи информации, демонстрирующая высокую устойчивость к шумам. Эта система связи исследована численно и реализована в физическом эксперименте, представляющем пример построения первой экспериментальной системы передачи информации на основе обобщенной синхронизации.

1. Описание метода и схема передачи информации на его основе

Мы предлагаем метод диагностики обобщенной синхронизации в системе двух однонаправленно связанных осцилляторов, который использует лишь одну ведомую систему, на которую поочередно подаются сигнал ведущей системы и его задержанная копия. Если мы подействуем на автоколебательную ведомую систему два раза одним и тем же сигналом ведущей системы и сравним ее динамику в первом и втором случаях, то мы увидим, что в отсутствие обобщенной синхронизации между ведущей и ведомой системами динамика ведомой системы будет разной. Однако при наличии обобщенной синхронизации ведомая система будет демонстрировать после

переходного процесса одинаковые колебания в обоих случаях воздействия на нее идентичным сигналом. Для воздействия на ведомую систему два раза одинаковым сигналом будем использовать линию задержки.

Сначала в течение времени τ будем воздействовать на ведомую систему $y(t)$ сигналом ведущей системы $x(t)$. Затем в течение того же времени τ будем воздействовать на ту же ведомую систему $y(t)$ сигналом системы $x(t)$, задержанным на время τ . Этот задержанный сигнал будем подавать на систему $y(t)$ с выхода линии задержки, имеющей время запаздывания, равное τ . Наконец, сравним динамику ведомой системы в этих двух случаях. Для этого найдем разность между сигналом на выходе ведомой системы и сигналом ведомой системы, прошедшим через еще одну линию задержки со временем запаздывания τ . При наличии обобщенной синхронизации эта разность будет равна нулю после завершения переходного процесса.

На основе описанного метода диагностики обобщенной синхронизации нами предложена система скрытой передачи информации. Блок-схема этой системы связи представлена на рис. 1.

Информационный сигнал $m(t)$, состоящий из последовательности битов 0 и 1, модулирует один из параметров ведущей системы. Хаотический сигнал $x(t)$ с выхода передатчика передается в канал связи. Приемник состоит из автоколебательной ведомой системы, двух одинаковых линий задержки со временем запаздывания τ , генератора прямоугольных импульсов, коммутатора и разностного усилителя. Параметры схемы выбраны таким образом, чтобы обобщенная синхронизация между приемником и передатчиком наблюдалась только при передаче бинарного 0.

Сигнал $z(t)$ генератора прямоугольных импульсов управляет коммутирующим устройством, которое переключает сигнал воздействия на ведомую систему. В течение одной половины периода сигнала $z(t)$ на ведомую систему подается сигнал $x(t)$ из канала связи, а в течение другой половины периода – сигнал $x(t - \tau)$ с выхода первой линии задержки ЛЗ-1. Период T сигнала $z(t)$ выбран таким, чтобы переходный процесс, предшествующий возникновению обобщенной синхронизации, закончился за время, меньшее $T/2$. Время запаздывания первой линии задержки равно $\tau = T/2$.

Для сравнения сигналов ведомой системы в случае воздействия на нее сигналами $x(t)$ и $x(t - \tau)$ мы использовали вторую линию задержки ЛЗ-2, имеющую такое же время запаздывания, как и ЛЗ-1. Мы поместили в приемник разностный усилитель и исследовали разность $\Delta(t) = y(t) - y(t - \tau)$ сигналов на его выходе. Во второй

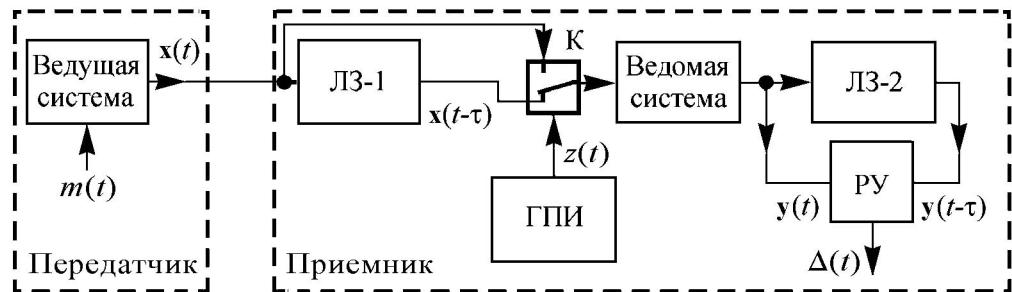


Рис. 1. Блок-схема системы передачи информации на основе обобщенной синхронизации. ЛЗ-1 и ЛЗ-2 – линии задержки, ГПИ – генератор прямоугольных импульсов, К – коммутатор, РУ – разностный усилитель

половине периода сигнала $z(t)$ разность $\Delta(t)$ обращается в нуль после завершения переходного процесса, если ведущая и ведомая системы находятся в режиме обобщенной синхронизации. В отсутствие обобщенной синхронизации разность $\Delta(t)$ отлична от нуля в течение всей второй половины периода сигнала $z(t)$. Для лучшей визуализации режима обобщенной синхронизации к выходу разностного усилителя можно дополнительно подключить детектор и фильтр нижних частот.

В течение первой половины периода сигнала $z(t)$ разность $\Delta(t)$ не содержит полезной информации для диагностики обобщенной синхронизации. В течение этого интервала времени $\Delta(t)$ демонстрирует незатухающие колебания, похожие на те, которые наблюдаются во второй половине периода $z(t)$ при отсутствии обобщенной синхронизации между $x(t)$ и $y(t)$.

2. Численное исследование системы передачи информации на основе обобщенной синхронизации

Проиллюстрируем работу предложенной системы передачи информации на основе обобщенной синхронизации (см. рис. 1) для случая, когда ведущая и ведомая системы представляют собой генераторы с запаздывающей обратной связью. На рис. 2, а приведена блок-схема ведущей системы, состоящей из двух линий задержки ЛЗ-3 и ЛЗ-4 с временами запаздывания τ_1 и τ_2 , соответственно, нелинейного элемента НЭ-1 и линейного фильтра нижних частот Ф-1. Бинарный информационный сигнал $m(t)$ управляет коммутатором, переключающим время запаздывания в системе таким образом, что, когда передается бинарный 0, время запаздывания равно τ_1 , а когда передается бинарная 1, оно равно $\tau_1 + \tau_2$. Ведущая система описывается дифференциальным уравнением первого порядка с запаздыванием

$$\varepsilon_1 \dot{x}(t) = -x(t) + f_1(x(t - (\tau_1 + m(t)\tau_2))), \quad (1)$$

где $x(t)$ – состояние системы в момент времени t ; ε_1 – параметр, характеризующий инерционность системы; f_1 – нелинейная функция. Сигнал $x(t)$ с выхода фильтра передается в канал связи. Отметим, что в интересах конфиденциальности передачи данных сигналы передатчика должны иметь сходные спектральные и статистические свойства при временах запаздывания τ_1 и $\tau_1 + \tau_2$.

Блок-схема ведомой системы, состоящей из линии задержки, нелинейного элемента и линейного фильтра нижних частот, приведена на рис. 2, б. Линия задержки ЛЗ-5 имеет такое же время запаздывания τ_1 , как и ЛЗ-3. Нелинейный элемент НЭ-2 и фильтр Ф-2 ведомой системы в общем случае могут

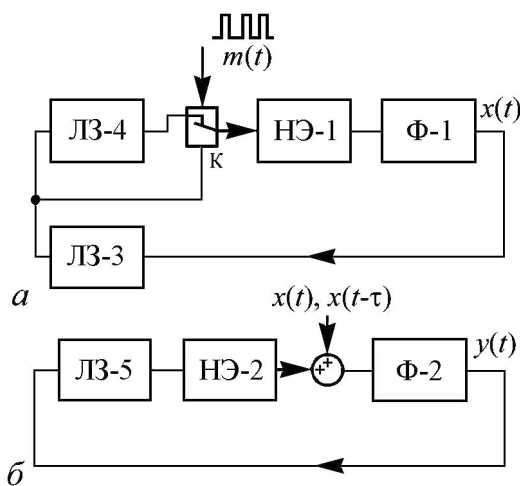


Рис. 2. Блок-схемы ведущей (а) и ведомой системы (б). ЛЗ-3, ЛЗ-4 и ЛЗ-5 – линии задержки, НЭ-1 и НЭ-2 – нелинейные элементы, Ф-1 и Ф-2 – фильтры, К – коммутатор

отличаться от НЭ-1 и Ф-1 ведущей системы. На ведомую систему по очереди действуют сигналы $x(t)$ и $x(t - \tau)$. Она описывается следующим уравнением:

$$\varepsilon_2 \dot{y}(t) = -y(t) + f_2(y(t - \tau_1)) + k \left(z(t)x(t) + \overline{z(t)}x(t - \tau) \right), \quad (2)$$

где ε_2 – параметр инерционности, f_2 – нелинейная функция, k – коэффициент связи, $\overline{z(t)}$ – инверсия сигнала $z(t)$ генератора прямоугольных импульсов. Одну половину периода $z(t)$ на ведомую систему воздействует сигнал $x(t)$ (в этом случае $z(t) = 1$, а $\overline{z(t)} = 0$), а другую половину периода – сигнал $x(t - \tau)$ (в этом случае $z(t) = 0$, а $\overline{z(t)} = 1$).

Рассмотрим случай, когда нелинейные элементы НЭ-1 и НЭ-2 обеспечивают квадратичное преобразование, а фильтры Ф-1 и Ф-2 представляют собой низкочастотные фильтры Баттерворта первого порядка с частотой среза $\nu_1 = 1/\varepsilon_1$ и $\nu_2 = 1/\varepsilon_2$, соответственно. Выберем следующие значения параметров системы связи: $\tau_1 = 100$, $\tau_2 = 10$, $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 2$ ($\nu_1 = \nu_2 = 0.5$), $f_1(x) = \lambda_1 - x^2$, $f_2(y) = \lambda_2 - y^2$, где $\lambda_1 = 1.7$ и $\lambda_2 = 1.3$ – параметры нелинейности, $k = 0.13$, $\tau = 20000$ ($T = 40000$). При этих параметрах передатчик генерирует хаотический сигнал $x(t)$ (рис. 3), а приемник демонстрирует в отсутствие связи ($k = 0$) периодические колебания. Было показано, что в системах передачи информации на основе обобщенной синхронизации использование периодического режима в приемнике имеет ряд преимуществ перед использованием хаотического режима [23].

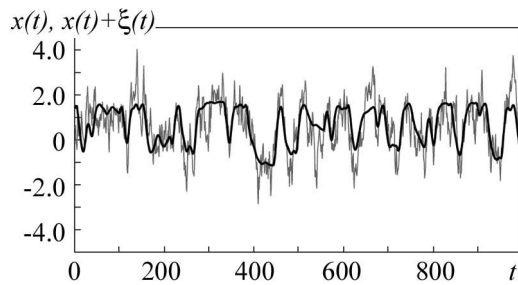


Рис. 3. Временные реализации хаотического сигнала $x(t)$ ведущей системы в отсутствие шума (черная кривая) и при наличии интенсивного аддитивного шума (серая кривая)

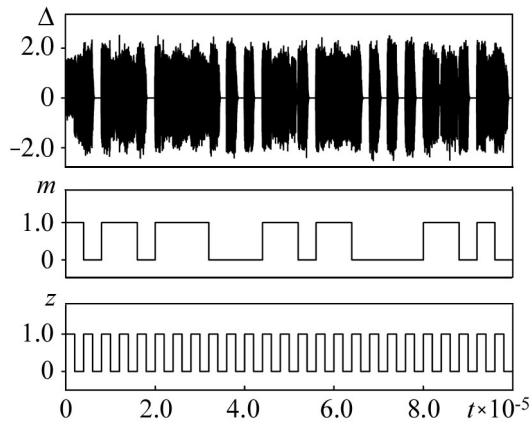


Рис. 4. Временные реализации сигналов $\Delta(t)$, $m(t)$ и $z(t)$

Для исследования устойчивости к шуму предложенной системы передачи информации мы добавляли к временно-му ряду хаотического сигнала $x(t)$, передаваемого в канал связи, гауссов шум $\xi(t)$ с нулевым средним, отфильтрованный в полосе частот хаотической несущей. На рис. 3 серым цветом показан фрагмент временной реализации зашумленного сигнала $x(t)$ для случая, когда дисперсия шумового сигнала $\xi(t)$ равняется дисперсии сигнала $x(t)$ на выходе передатчика, то есть отношение сигнал/шум равно 0 дБ.

На рис. 4 приведен фрагмент временной реализации сигнала $\Delta(t) = y(t) - y(t - \tau)$ на выходе приемника для случая, когда отношение сигнал/шум равно 0 дБ, а также фрагменты временных реализаций сигналов $m(t)$ и $z(t)$. При передаче бинарного нуля ($m(t) = 0$) разность $\Delta(t)$ отлична от нуля при $z(t) = 1$ и равна нулю при $z(t) = 0$, что указывает на наличие обобщенной

синхронизации между ведущей и ведомой системами. При $m(t) = 1$ сигнал $\Delta(t)$ отличен от нуля как при $z(t) = 1$, так и при $z(t) = 0$, что указывает на отсутствие обобщенной синхронизации между $x(t)$ и $y(t)$. Таким образом, предложенная система передачи информации остается работоспособной, несмотря на очень высокий уровень шума в канале связи.

3. Экспериментальное исследование системы связи на основе обобщенной синхронизации

Предложенная схема передачи информации реализована нами в радиофизическом эксперименте, в котором ведущая и ведомая системы с запаздыванием состояли из аналогового низкочастотного RC -фильтра первого порядка и цифровых линий задержки и нелинейного элемента, выполненных на программируемом микроконтроллере. Так же как и в численном эксперименте, нелинейные элементы экспериментальной схемы обеспечивали квадратичное преобразование.

Ведущая система описывается уравнением (1) со следующими значениями параметров: $\tau_1 = 930$ мкс, $\tau_2 = 93$ мкс, $\varepsilon_1 = R_1C_1 = 47$ мкс, $f_1(x) = \lambda_1 - x^2$, где $\lambda_1 = 1.7$, при которых она генерирует хаотический сигнал. Ведомая система описывается уравнением (2) с $\tau_1 = 930$ мкс, $\varepsilon_2 = R_2C_2 = 95$ мкс, $f_2(y) = \lambda_2 - y^2$, где $\lambda_2 = 1.3$, $k = 0.1$, $\tau = 90$ мс ($T = 180$ мс) и генерирует в отсутствие связи периодические колебания. Вспомогательные линии задержки ЛЗ-1 и ЛЗ-2 в приемнике (см. рис. 1) тоже выполнены на микроконтроллере с использованием встроенных 12-битных аналого-цифрового и цифро-аналогового преобразователей.

На рис. 5 приведены фрагменты экспериментальных временных реализаций сигнала $x(t)$ и разностного сигнала $\Delta(t)$, отфильтрованного фильтром нижних частот с частотой среза $\nu = 200$ Гц, для случая передачи бинарного нуля. На рис. 5 показан также фрагмент временной реализации сигнала $z(t)$. Временной масштаб по горизонтальной оси равен 200 мс/дел, а масштаб по вертикальной оси равен 1 В/дел, 5 В/дел и 200 мВ/дел для $x(t)$, $z(t)$ и $\Delta(t)$, соответственно.

Как видно из рис. 5, амплитуда колебаний сигнала $\Delta(t)$ заметно выше при более высоких значениях $z(t)$, чем при более низких значениях $z(t)$. Резкое уменьшение амплитуды $\Delta(t)$ при изменении $z(t)$ указывает на наличие обобщенной синхронизации между ведущей и ведомой системами.

На рис. 6 приведены фрагменты экспериментальных временных реализаций сигналов $x(t)$, $z(t)$ и $\Delta(t)$ для случая передачи бинарной единицы. Так же, как и в рассмотренном выше случае, разностный сигнал $\Delta(t)$ отфильтрован фильтром нижних частот с частотой среза $\nu = 200$ Гц. Масштабы по осям на рис. 6 такие же, как на рис. 5. В отличие от рис. 5, соответствующего передаче бинарного нуля, амплитуда колебаний сигнала $\Delta(t)$ на рис. 6 практически не зависит от амплитуды сигнала $z(t)$, что указывает на отсутствие обобщенной синхронизации между $x(t)$ и $y(t)$.

Рассмотренный пример является первой экспериментальной реализацией системы передачи информации на основе обобщенной синхронизации. В дальнейшем мы планируем исследовать эту систему более подробно. Следует отметить, что рассмотренная система связи имеет ограничение на скорость передачи информации. Это связано с длительным переходным процессом, предшествующим установлению ре-

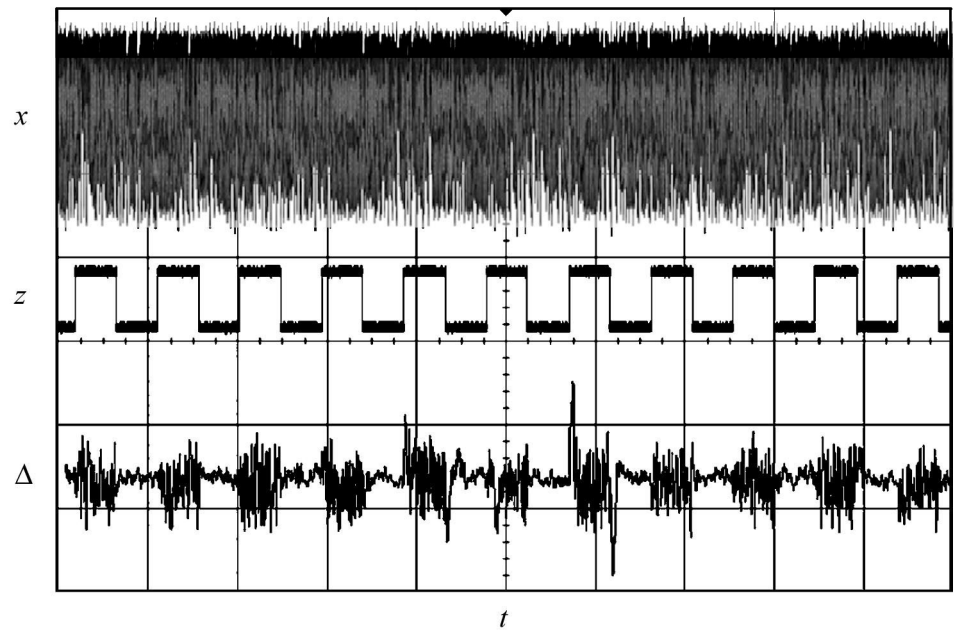


Рис. 5. Осциллограммы временных реализаций хаотического сигнала $x(t)$ в канале связи, сигнала $z(t)$ и фильтрованного разностного сигнала $\Delta(t)$ при $m(t) = 0$

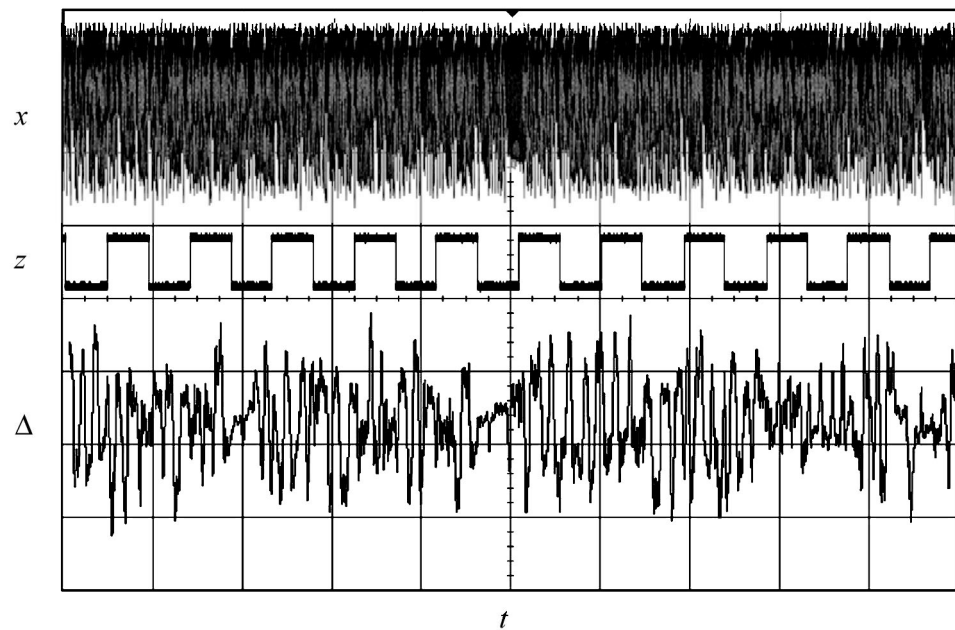


Рис. 6. Осциллограммы временных реализаций хаотического сигнала $x(t)$ в канале связи, сигнала $z(t)$ и фильтрованного разностного сигнала $\Delta(t)$ при $m(t) = 1$

жима обобщенной синхронизации в генераторах с запаздывающей обратной связью, использованных нами для построения ведущей и ведомой систем. Однако скорость передачи информации можно существенно повысить, выбрав в качестве ведущей и ведомой систем другие генераторы, имеющие небольшое время переходного процесса, предшествующего установлению обобщенной синхронизации.

Заключение

Нами предложен метод диагностики обобщенной синхронизации, который можно применять в реальном времени. Он не использует вспомогательную систему и не требует записи исследуемых сигналов для их последующей обработки. На основе предложенного метода построена система скрытой передачи информации, использующая режим обобщенной синхронизации между передатчиком и приемником. Приемник системы связи содержит лишь одну ведомую автоколебательную систему, на которую поочередно подаются сигнал ведущей системы и его задержанная копия. Работоспособность схемы продемонстрирована при использовании в качестве ведущей и ведомой систем генераторов с запаздывающей обратной связью.

Предложенная система передачи информации исследована численно и реализована в радиофизическом эксперименте. Проиллюстрирована ее эффективность при передаче бинарного информационного сигнала. Показано, что предложенная схема передачи информации обладает высокой устойчивостью к шумам в канале связи.

Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда, грант № 14-12-00324.

Библиографический список

1. *Kocarev L., Halle K.S., Eckert K., Chua L.O., Parlitz U.* Experimental demonstration of secure communications via chaotic synchronization // *Int. J. Bifurc. Chaos.* 1992. Vol. 2. P. 709.
2. *Parlitz U., Chua L.O., Kocarev L., Halle K.S., Shang A.* Transmission of digital signals by chaotic synchronization // *Int. J. Bifurc. Chaos.* 1992. Vol. 2. P. 973.
3. *Cuomo K.M., Oppenheim A.V.* Circuit implementation of synchronized chaos with applications to communications // *Phys. Rev. Lett.* 1993. Vol. 71. P. 65.
4. *Dmitriev A.S., Panas A.I., Starkov S.O.* Experiments on speech and music signals transmission using chaos // *Int. J. Bifurc. Chaos.* 1995. Vol. 5. P. 1249.
5. *Дмитриев А.С., Панас А.И.* Динамический хаос: новые носители информации для систем связи. Москва: Физматлит, 2002.
6. *Пономаренко В.И., Прохоров М.Д.* Кодирование и извлечение информации, замаскированной хаотическим сигналом системы с запаздыванием // *Радиотехника и электроника.* 2004. Т. 49. № 9. С. 1098.
7. *Tao Y.* A survey of chaotic secure communication systems // *Int. J. Comput. Cogn.* 2004. Vol. 2. P. 81.

8. *Argyris A., Syvridis D., Larger L., Annovazzi-Lodi V., Colet P., Fischer I., García-Ojalvo J., Mirasso C.R., Pesquera L., Shore K.A.* Chaos-based communications at high bit rates using commercial fibre-optic links // *Nature*. 2005. Vol. 437. P. 343.
9. *Короновский А.А., Москаленко О.И., Храмов А.Е.* О применении хаотической синхронизации для скрытой передачи информации // *УФН*. 2009. Т. 179. С. 1281.
10. *Ponomarenko V.I., Prokhorov M.D., Karavaev A.S., Kulminskiy D.D.* An experimental digital communication scheme based on chaotic time-delay system // *Nonlinear Dyn.* 2013. Vol. 74. P. 1013.
11. *Karavaev A.S., Kulminskiy D.D., Ponomarenko V.I., Prokhorov M.D.* An experimental communication scheme based on chaotic time-delay system with switched delay // *Int. J. Bifurc. Chaos*. 2015. Vol. 25. 1550134.
12. *Короновский А.А., Москаленко О.И., Понов П.В., Храмов А.Е.* Способ скрытой передачи информации, основанный на явлении обобщенной синхронизации // *Изв. РАН. Сер. физическая*. 2008. Т. 72. № 1. С. 143.
13. *Короновский А.А., Москаленко О.И., Храмов А.Е.* Скрытая передача информации на основе режима обобщенной синхронизации в присутствии шумов // *ЖТФ*. 2010. Т. 80. В. 4. С. 1.
14. *Moskalenko O.I., Koronovskii A.A., Hramov A.E.* Generalized synchronization of chaos for secure communication: Remarkable stability to noise // *Phys. Lett. A*. 2010. Vol. 374. P. 2925.
15. *Rulkov N.F., Sushchik M.M., Tsimring L.S., Abarbanel H.D.I.* Generalized synchronization of chaos in directionally coupled chaotic systems // *Phys. Rev. E*. 1995. Vol. 51. P. 980.
16. *Pyragas K.* Weak and strong synchronization of chaos // *Phys. Rev. E*. 1996. Vol. 54. P. R4508.
17. *Abarbanel H.D.I., Rulkov N.F., Sushchik M.M.* Generalized synchronization of chaos: The auxiliary system approach // *Phys. Rev. E*. 1996. Vol. 53. P. 4528.
18. *Koronovskii A.A., Moskalenko O.I., Hramov A.E.* Nearest neighbors, phase tubes, and generalized synchronization // *Phys. Rev. E*. 2011. Vol. 84. 037201.
19. *Paluš M., Komárek V., Hrnčíř Z., Štěrbová K.* Synchronization as adjustment of information rates: Detection from bivariate time series // *Phys. Rev. E*. 2001. Vol. 63. 046211.
20. *Liu Z., Zhou J., Munakata T.* Detecting generalized synchronization by the generalized angle // *Europhys. Lett.* 2009. Vol. 87. 50002.
21. *Schumacher J., Haslinger R., Pipa G.* Statistical modeling approach for detecting generalized synchronization // *Phys. Rev. E*. 2012. Vol. 85. 056215.
22. *Stankovski T., McClintock P.V.E., Stefanovska A.* Dynamical inference: Where phase synchronization and generalized synchronization meet // *Phys. Rev. E*. 2014. Vol. 89. 062909.
23. *Короновский А.А., Москаленко О.И., Павлов А.С., Фролов Н.С., Храмов А.Е.* Обобщенная синхронизация в случае воздействия хаотического сигнала на периодическую систему // *ЖТФ*. 2014. Т. 84. Вып. 5. С. 1.

Поступила в редакцию 2.11.2015

METHOD FOR GENERALIZED SYNCHRONIZATION DETECTING AND ITS APPLICATION TO COMMUNICATION SYSTEMS

*V.I. Ponomarenko^{1,2}, M.D. Prokhorov¹, A.A. Koronovskii²,
O.I. Moskalenko², A.E. Hramov^{2,3}*

¹Saratov Branch of Kotel'nikov Institute of Radio Engineering
and Electronics of Russian Academy of Sciences,

²Saratov State University

³Saratov State Technical University

A method is proposed for generalized synchronization detection which does not exploit an auxiliary system. The method operates in a real time and uses a single response system that is driven alternately by the drive system signal and its delayed copy. A system of secure communication based on the proposed method is developed that has high resistance to noises of a transmission channel. The proposed communication system is studied both numerically and experimentally.

Keywords: Generalized synchronization, systems of hidden data transmission, time-delay systems.

References

1. *Kocarev L., Halle K.S., Eckert K., Chua L.O., Parlitz U.* // Int. J. Bifurc. Chaos. 1992. Vol. 2. P. 709.
2. *Parlitz U., Chua L.O., Kocarev L., Halle K.S., Shang A.* // Int. J. Bifurc. Chaos. 1992. Vol. 2. P. 973.
3. *Cuomo K.M., Oppenheim A.V.* // Phys. Rev. Lett. 1993. Vol. 71. P. 65.
4. *Dmitriev A.S., Panas A.I., Starkov S.O.* // Int. J. Bifurc. Chaos. 1995. Vol. 5. P. 1249.
5. *Dmitriev A.S., Panas A.I.* Dynamical Chaos: New Information Carriers for Communication Systems. Moscow: Fizmatlit, 2002. (in Russian).
6. *Ponomarenko V.I., Prokhorov M.D.* // J. Commun. Technol. El. 2004. Vol. 49. P. 1031.
7. *Tao Y.* // Int. J. Comput. Cogn. 2004. Vol. 2. P. 81.
8. *Argyris A., Syvridis D., Larger L., Annovazzi-Lodi V., Colet P., Fischer I., García-Ojalvo J., Mirasso C.R., Pesquera L., Shore K.A.* // Nature. 2005. Vol. 437. P. 343.
9. *Koronovskii A.A., Moskalenko O.I., Hramov A.E.* // Physics-Uspekhi. 2009. Vol. 52. P. 1213.
10. *Ponomarenko V.I., Prokhorov M.D., Karavaev A.S., Kulminskiy D.D.* // Nonlinear Dyn. 2013. Vol. 74. P. 1013.
11. *Karavaev A.S., Kulminskiy D.D., Ponomarenko V.I., Prokhorov M.D.* // Int. J. Bifurc. Chaos. 2015. Vol. 25. 1550134.
12. *Koronovskii A.A., Moskalenko O.I., Popov P.V., Hramov A.E.* // Bull. Russ. Acad. Sci., Phys. 2008. Vol. 72. P. 131.
13. *Koronovskii A.A., Moskalenko O.I., Hramov A.E.* // Tech. Phys. 2010. Vol. 55. P. 435.
14. *Moskalenko O.I., Koronovskii A.A., Hramov A.E.* // Phys. Lett. A. 2010. Vol. 374. P. 2925.
15. *Rulkov N.F., Sushchik M.M., Tsimring L.S., Abarbanel H.D.I.* // Phys. Rev. E. 1995. Vol. 51. P. 980.

16. Pyragas K. // Phys. Rev. E. 1996. Vol. 54. P. R4508.
17. Abarbanel H.D.I., Rulkov N.F., Sushchik M.M. // Phys. Rev. E. 1996. Vol. 53. P. 4528.
18. Koronovskii A.A., Moskalenko O.I., Hramov A.E. // Phys. Rev. E. 2011. Vol. 84. 037201.
19. Paluš M., Komárek V., Hrnčíř Z., Štěrbová K. // Phys. Rev. E. 2001. Vol. 63. 046211.
20. Liu Z., Zhou J., Munakata T. // Europhys. Lett. 2009. Vol. 87. 50002.
21. Schumacher J., Haslinger R., Pipa G. // Phys. Rev. E. 2012. Vol. 85. 056215.
22. Stankovski T., McClintock P.V.E., Stefanovska A. // Phys. Rev. E. 2014. Vol. 89. 062909.
23. Koronovskii A.A., Moskalenko O.I., Pavlov A.S., Frolov N.S., Hramov A.E. // Tech. Phys. 2014. Vol. 59. P. 629.



Пономаренко Владимир Иванович – родился в Саратове (1960). Окончил Саратовский государственный университет (1982). Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук (1992) и доктора физико-математических наук (2008). Ведущий научный сотрудник Саратовского филиала Института радиотехники и электроники РАН. Профессор кафедры динамических систем СГУ. Область научных интересов – статистическая радиофизика, анализ временных рядов, нелинейная динамика и ее приложения. Автор более 200 научных публикаций.
410019 Саратов, ул. Зеленая, 38
Саратовский филиал ИРЭ им. В.А. Котельникова РАН
410012 Саратов, ул. Астраханская, 83
Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского
E-mail: ponomarenkovi@gmail.com



Прохоров Михаил Дмитриевич – родился в Саратове (1968). Окончил Саратовский государственный университет (1992). Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук (1997) и доктора физико-математических наук (2008). Заведующий лабораторией Саратовского филиала Института радиотехники и электроники им. В.А. Котельникова РАН. Область научных интересов – нелинейная динамика и ее приложения, математическое моделирование, анализ временных рядов. Имеет более 200 научных публикаций.
410019 Саратов, ул. Зеленая, 38
Саратовский филиал ИРЭ им. В.А. Котельникова РАН
E-mail: mdprokhorov@yandex.ru



Короновский Алексей Александрович – родился в Саратове (1972). Окончил физический факультет Саратовского государственного университета (1995), доктор физико-математических наук (2007), проректор по научно-исследовательской работе СГУ, заведующий кафедрой физики открытых систем СГУ. Область научных интересов – нелинейная динамика и ее проявления в различных сферах человеческой деятельности. Автор ряда статей в центральной печати, а также монографий (в соавторстве) «Нелинейная динамика в действии» и «Непрерывный вейвлетный анализ», вышедших в Издательстве ГосУНЦ «Колледж», двухтомной монографии «Методы нелинейной динамики и теории хаоса в задачах электроники сверхвысоких частот» (М.: Физматлит, 2009, под редакцией А.А. Короновского, А.А. Кураева, Д.И. Трубецкова и А.Е. Храмова), монографии «Моделирование нелинейной динамики глобальных процессов» (М.: Изд-во МГУ, 2010, под редакцией С.И. Ильина и Д.И. Трубецкова) и др.
410012 Саратов, ул. Астраханская, 83
Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского
E-mail: alexey.koronovskii@gmail.com

Москаленко Ольга Игоревна – родилась в Саратове (1984). Окончила факультет нелинейных процессов Саратовского госуниверситета (2006), кандидат физико-математических наук (2008). Доцент кафедры физики открытых систем СГУ (2012), начальник Управления научной деятельности СГУ. Область научных интересов – исследование классической и хаотической синхронизации и явлений, имеющих место на её границе, в нелинейных системах; применение непрерывного вейвлет- и фурье-анализа к проблеме хаотической синхронизации в системах с малым числом степеней свободы и пространственно-распределенных средах; изучение обобщенной синхронизации в системах с однонаправленной и взаимной связью и ее возможных приложений; влияние шума на установление синхронных режимов и характеристики перемежаемости; применение хаотической синхронизации для скрытой передачи информации; анализ хаотической синхронизации в сложных сетях, разработка методов анализа поведения систем по временным рядам и их применение к живым системам. Автор более 100 статей в центральных реферируемых отечественных и зарубежных научных журналах.



410012 Саратов, ул. Астраханская, 83
Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского
E-mail: o.i.moskalenko@gmail.com

Храмов Александр Евгеньевич – окончил физический факультет Саратовского госуниверситета (1996). Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата (1999) и доктора (2006) физико-математических наук. Профессор кафедры электроники, колебаний и волн факультета нелинейных процессов СГУ. Заведующий кафедрой автоматизации, управления, мехатроники Саратовского государственного технического университета. Научные интересы – нейронаука, теория сложных сетей, вейвлет-анализ и его приложения в нелинейной динамике и нейронауке, нелинейная динамика приборов и устройств электроники СВЧ- и ТГц-диапазонов. Опубликовал (с соавторами) книгу «Лекции по сверхвысокочастотной электронике для физиков» (Т. 1, М.: Физматлит, 2003; Т. 2, М.: Физматлит, 2004), монографию «Непрерывный вейвлетный анализ и его приложения» (Москва: Наука, Физматлит, 2003), двухтомную коллективную монографию «Методы нелинейной динамики и теории хаоса в задачах электроники сверхвысоких частот» (М.: Физматлит, 2009), коллективную монографию «Моделирование нелинейной динамики глобальных процессов» (М.: Изд-во МГУ, 2010) и др.



410054 Саратов, ул. Политехническая, 77
Саратовский государственный технический университет им. Гагарина Ю.А.
410012 Саратов, ул. Астраханская, 83
Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского
E-mail: hramovae@gmail.com



САМОЛОКАЛИЗАЦИЯ И БРИЗЕРЫ В НЕЛИНЕЙНЫХ КОЛЕБАТЕЛЬНЫХ РЕШЕТКАХ С БЕСПОРЯДКОМ

А. А. Тихомиров, К. Г. Мишагин, Т. В. Лантева, О. И. Канаков

Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского

Проведено сравнительное исследование двух классов решений в цепочечной модели Фрëлиха–Спенсера–Вейна со случайной пространственной неоднородностью (беспорядком): с одной стороны – самолокализованных волновых пакетов, с другой стороны – дискретных бризеров (решений, локализованных в пространстве и периодических во времени). Волновые пакеты получаются численным интегрированием уравнений движения из начальных условий, локализованных на одном узле решётки. При достаточной энергии пакет остается локализованным в пространстве на всём времени наблюдения. Бризерные решения строятся путём продолжения периодической орбиты по параметру взаимодействия, значение которого увеличивается последовательными шагами от нуля, и исследуются на устойчивость в линейном приближении. Показано, что в подавляющем большинстве реализаций беспорядка бризеры существуют и линейно устойчивы на интервале значений параметра связи от нуля до конечного порога, зависящего от реализации; исчезновение дискретного бризера связано с бифуркацией, при которой пара комплексно-сопряжённых мультипликаторов обращается в $+1$; при наличии дискретного бризера самолокализация волновых пакетов зависит от близости (в фазовом пространстве) траектории, соответствующей пакету, к бризерной орбите. Полученные результаты позволяют связать известное явление самолокализации с существованием устойчивых бризерных орбит и объяснить это явление влиянием этих орбит на структуру фазового пространства в их окрестности. Указанные результаты представляют интерес с точки зрения теоретического описания физических систем, характеризующихся одновременно нелинейностью, пространственной дискретностью и беспорядком (бозе-эйнштейновские конденсаты, решётки связанных оптических волноводов, микро- и наномеханические системы и др.).

Ключевые слова: Решёточные системы, локализация, беспорядок, бризеры.

Введение

Последние несколько лет проблема распространения и локализации волн в структурированных средах занимает центральное место в физике колебаний и волн. Этому способствует широкий интерес со стороны теоретической физики конденсированных сред, нелинейной оптики, а также интенсивная экспериментальная работа ведущих лабораторий в этих направлениях. Эти исследования стали возможны благодаря технологическим достижениям в производстве подобных систем (оптических решеток, фотонных кристаллов, решеток волноводов и т.п.), в способах

управления распространением света, в создании ультрахолодных атомарных газов (бозе-эйнштейновских конденсатов). В свою очередь, решение фундаментальных задач физики таких систем видится необходимым условием прогресса в прикладных областях. Основным теоретическим подходом в данной научной проблеме является исследование динамических моделей колебательных решеточных систем.

Одной из причин локализации волн в решеточных системах является наличие пространственного беспорядка, который приводит к экспоненциальной локализации линейных мод – андерсоновской локализации, к отсутствию распространяющихся волн [1]. Открытие этого явления позволило объяснить один из механизмов перехода металл–диэлектрик [2]. В последующие годы было показано, что андерсоновская локализация – фундаментальное волновое явление, наблюдаемое в системах различной природы. Эксперименты продемонстрировали локализацию света слабой интенсивности в фотонных пространственно неоднородных решетках [3–5], локализацию облака бозе-эйнштейновского конденсата невзаимодействующих частиц в оптических решетках с беспорядком [6–9].

Кроме того, локализация волн может происходить и в пространственно однородных решеточных системах в силу их нелинейности. А именно, в таких системах могут существовать дискретные бризеры – строго периодические во времени, локализованные в пространстве колебательные решения [10–12]. Наличие таких траекторий в многомерном фазовом пространстве системы оказывает сильное влияние на его структуру в целом; в переходных и равновесных режимах в численном эксперименте наблюдается формирование локализованных структур с конечным (в отличие от точных дискретных бризеров), но большим временем жизни [13]. Также примером пространственно локализованных, но непериодических во времени решений являются квазибризеры, введенные в рассмотрение и исследованные на примере различных физических моделей в работах [14–16]. Аналогичный эффект реализуется и в пространстве нормальных мод слабонелинейных колебательных систем: существование время-периодических решений (q -бризеров), локализованных в модовых переменных, приводит к долговременной модовой локализации других (непериодических) решений в их окрестности [17, 18] (в этом состоит одна из интерпретаций известной проблемы Ферми–Пасты–Улама). Существуют экспериментальные свидетельства возникновения локализованных возбуждений в различных физических системах, включая решетки спинов в антиферромагнетиках [19], решетки связанных нелинейных оптических волноводов [20], ансамбли микромеханических осцилляторов [21].

Однако в большинстве физических систем имеется и пространственный беспорядок, и нелинейность, что делает проблему исследования локализации волн исключительно сложной и многогранной.

Отметим, что в слабонелинейных решетках с беспорядком в теоретических и численных работах получены значительные результаты в исследовании проблемы андерсоновской локализации. Показана деструктивная роль нелинейности в андерсоновской локализации, обнаружено субдиффузионное расплывание изначально локализованных волновых пакетов [22–26]. Получены численные характеристики субдиффузии, установлено существование различных динамических режимов распространения волновых пакетов: слабого и сильного хаоса [22, 24–28]. Предложен вероятностный подход к решению проблемы разрушения андерсоновской локализации сколь угодно малой нелинейностью в средах с пространственным беспорядком [29].

Опубликованы первые экспериментальные работы по локализации взаимодействующих ультрахолодных атомарных конденсатов в неоднородных оптических решетках, в которых подтвердился ряд теоретических результатов. Например, в работе [30] экспериментально показано, что нелинейное взаимодействие приводит к субдиффузионному распространению волновых пакетов атомов.

Вместе с тем, необходимо констатировать существенный пробел в понимании волновой динамики в случае сильной нелинейности. В экспериментальных работах по распространению света высокой интенсивности в фотонных решетках с беспорядком отмечен, но не изучен детально так называемый эффект «самолокализации» начального возбуждения (англ. «self-trapping») [4, 31, 32]. В этом случае волновой пакет либо начинает диффундировать только после длительных локализованных колебаний, либо его существенная часть вообще остается локализованной в течение всего времени наблюдения. Имеются все основания ожидать, что аналогичные эффекты будут вскоре обнаружены и в экспериментах с бозе-эйнштейновскими конденсатами.

В численных экспериментах самолокализация также была отмечена, но детально не исследована [24–26, 28, 33, 34]. Теоретические соображения позволяют предположить, что самолокализация обусловлена нелинейными свойствами среды и ограниченностью линейного спектра задачи. Однако, помимо оценки значений нелинейности (или силы беспорядка), достаточных для самолокализации, другие количественные характеристики данного эффекта и его влияния на расплывание волновых пакетов отсутствуют.

Как отмечалось ранее, периодические во времени бризерные решения оказывают влияние на структуру фазового пространства в их окрестности, что приводит к существованию долгоживущих локализованных структур. Можно предположить, что явление самолокализации обусловлено именно этим механизмом. Теорема о существовании дискретных бризеров доказана для гамильтоновых нелинейных пространственно однородных решеточных систем весьма общего вида [35, 36] и сохраняет применимость в случае решеток с пространственным беспорядком [37]. В качестве основного её условия выступает отсутствие резонансов частоты бризера с парциальными частотами осцилляторов. При наличии жёсткой нелинейности (приводящей к росту частоты решения с увеличением энергии) выполнение этого условия обеспечивается для решений, имеющих достаточно большую энергию. Систематические исследования порогов существования и устойчивости таких решений, однако, отсутствуют. Также неизвестно, как эти пороги соотносятся с порогами самолокализации волновых пакетов.

В данной работе исследование механизмов самолокализации проведено путем сравнительного анализа порогов делокализации волновых пакетов и существования дискретных бризеров. Показано, что в пространственно неоднородных решетках осцилляторов эффект самолокализации, возникающий в условиях сильной нелинейности, определяется существованием и устойчивостью дискретных бризеров.

1. Модель

В данной работе численно исследуются условия самолокализации волновых пакетов в цепочечной модели Фрëлиха–Спенсера–Вейна [38], описываемой уравнением

$$\ddot{x}_n + \omega_n^2 x_n + \alpha x_n^3 = \gamma (x_{n+1} - x_n)^3 + \gamma (x_{n-1} - x_n)^3, \quad n = 1 \dots N, \quad (1)$$

где граничные условия – нулевые ($x_0 = x_{N+1} = 0$), ω_n – собственные частоты осцилляторов, составляющих цепочку, α – параметр нелинейности осциллятора, γ – сила нелинейной связи. С помощью замены переменных система (1) всегда может быть сведена к случаю $\alpha = 1$, что и подразумевается в дальнейшем. Следуя [24–26], введем пространственный беспорядок, полагая квадраты собственных частот ω_n^2 независимыми случайными величинами, равномерно распределенными на отрезке $[1/2; 3/2]$, причем для центрального узла (на котором, собственно, исследуется самолокализация) полагается $\omega_n^2 = 1$. В силу чисто нелинейных связей, линейные моды системы компактны (представляют собой независимые колебания отдельно взятых осцилляторов), а собственные частоты совпадают с частотами осцилляторов ω_n .

2. Методы

Для отыскания бризерных решений был использован метод продолжения точных периодических решений из антиконтинуального предела. На этом подходе основано как конструктивное доказательство существования дискретных бризеров [36], так и методы численного отыскания таких решений [37, 39]. В данном методе в качестве стартового приближения используется известное тривиальное локализованное решение в системе без взаимодействия, где один (далее – «центральный») осциллятор совершает колебания, остальные же находятся в покое. Значение параметра взаимодействия увеличивается последовательными шагами от нуля. На каждом шаге отыскивается периодическое решение, при этом в качестве начального приближения используется решение, найденное на предшествующем шаге. Периодическое решение ищется как неподвижная точка отображения Пуанкаре. Секущая Пуанкаре задается условием обращения в нуль обобщенной координаты центрального осциллятора. Для обеспечения единственности искомого решения поиск производится при дополнительном условии заданной энергии решения.

Поиск неподвижной точки отображения Пуанкаре осуществляется путём минимизации нормы невязки по методу Левенберга–Марквардта [40] с численной аппроксимацией якобиана. В качестве неизвестных, по которым осуществляется минимизация, выступают скорости всех осцилляторов, кроме центрального. Значения остальных фазовых переменных определяются следующими условиями: координата центрального осциллятора равна нулю по условию секущей; координаты всех остальных осцилляторов также полагаются обращающимися в нуль в момент пересечения решением секущей (этим предположением дополнительно ограничивается класс искомых решений, см. обсуждение ниже); скорость центрального осциллятора выражается из условия заданной энергии искомого решения. Таким образом, количество неизвестных, по которым осуществляется минимизация, составляет $N - 1$. Такое сокращение размерности задачи минимизации (по сравнению с полной размерностью секущей Пуанкаре, составляющей $2N - 1$) позволяет существенно снизить вычислительные затраты и улучшить сходимость метода.

Предположение об обращении в нуль координат *всех* осцилляторов при пересечении решением секущей (то есть, одновременно с обращением в нуль координаты *центрального* осциллятора) обосновывается следующим рассуждением. В самом деле, для стартового приближения (решения с единственным колеблющимся осциллятором в ансамбле невзаимодействующих осцилляторов) оно выполняется автома-

тически. Далее, в силу чётности потенциальной энергии, описывающей модель (1), те решения, которые *не удовлетворяют* этому предположению (то есть, характеризуются ненулевыми значениями координат в момент пересечения секущей), могут существовать только парами, симметричными относительно смены знака всех координат. При непрерывном продолжении решения по параметру, такие парные решения могут возникать в окрестности продолжаемого решения только в результате бифуркаций типа «вилка». Таким образом, рассматриваемое предположение, ограничивая класс искомых решений, при этом не ограничивает возможность продолжения решения по параметру, а наоборот, устраняя неединственность продолжаемого решения в точках возможных бифуркаций типа «вилка» (за счёт исключения из рассмотрения рождающейся симметричной пары дополнительных решений), позволяет преодолевать точки таких бифуркаций при продолжении решения.

Аналогичный подход, основанный на продолжении по параметру и минимизации нормы невязки в отображении Пуанкаре при дополнительных условиях, задающих подмногообразие сокращённой размерности внутри секущей Пуанкаре (таких, как условие заданной энергии и условия одновременного обращения в нуль всех координат либо всех скоростей) применялся ранее при построении q -бризеров [17, 18].

Во многом схожие подходы, подразумевающие минимизацию определённой целевой функции в пространстве начальных условий, применялись для построения движущихся бризеров [41] и уточнения квазibriзеров [16] (в последнем случае также использовалось сокращение размерности задачи минимизации для уменьшения вычислительных затрат).

Значение нормы невязки, достигнутое в результате минимизации, контролируется на каждом шаге по параметру, благодаря чему исключается попадание в нулевые локальные экстремумы целевой функции (нормы невязки). Величина шага по параметру варьируется адаптивно. В случае, если очередной шаг по параметру не приводит к отысканию бризерного решения (метод Левенберга–Марквардта расходится либо сходится к ненулевому экстремуму), производится возврат к последнему успешно найденному решению и последовательное дробление шага по параметру. Продолжение решения прекращается (решение считается исчезнувшим), когда величина шага в результате дроблений достигает заданного минимального значения, составляющего 10^{-8} . Если же в результате очередного дробления шага решение успешно продолжается, и удаётся преодолеть то значение параметра, на котором решение ранее (перед последним дроблением шага) было потеряно (плюс «запас», составляющий пятикратную величину шага перед последним дроблением), то восстанавливается величина шага, использованная перед последним дроблением.

Найденное периодическое решение исследуется на устойчивость путем расчета и диагонализации матрицы Флоке. В силу гамильтоновости системы, все мультипликаторы орбиты представлены комплексно-сопряжёнными парами, а в случае наличия значений, не лежащих на единичной окружности, такие значения всегда представлены парами, дающими единицу при перемножении. Асимптотическая устойчивость в таких системах невозможна, поэтому говорят лишь об «устойчивости в линейном приближении», когда все мультипликаторы лежат на единичной окружности. Это свойство не связано ни с устойчивостью по Ляпунову, ни с орбитальной устойчивостью, но характеризует поведение решений (наличие или отсутствие экспоненциального нарастания отклонений) вблизи дискретного бризера.

Вышеописанный алгоритм был реализован на языке программирования интегрированной среды научных вычислений *Scilab* с использованием библиотеки стандартных функций среды. В частности, использована входящая в состав *Scilab* реализация метода Левенберга–Марквардта с масштабированием переменных, изначально опубликованная в составе библиотеки *Minpack* [42].

3. Результаты

При помощи вышеописанного метода в цепочке (1) из $N = 499$ осцилляторов при значениях параметра связи в интервале $\gamma \in (0, 1)$ были найдены периодические локализованные решения, центр которых находится в центре цепочки. Искались решения, имеющие энергии $E = 1$, $E = 10$ (для 500 различных реализаций пространственного беспорядка), $E = 50$ (для 280 реализаций). Для оценки характерной ширины найденных решений было использовано «число возбуждения» [24–26]

$$P = \frac{(\sum_n \varepsilon_n)^2}{\sum_n \varepsilon_n^2}, \quad (2)$$

где

$$\varepsilon_n = \frac{\dot{x}_n^2}{2} + \frac{\omega_n^2 x_n^2}{2} + \frac{\alpha x_n^4}{4} + \frac{1}{8} [(x_{n-1} - x_n)^4 + (x_{n+1} - x_n)^4] \quad (3)$$

является энергией n -го осциллятора.

Для указанных значений энергии и для всех реализаций беспорядка полученные значения чисел возбуждения точками отмечены на плоскости параметров, где по горизонтальной оси отложена сила связи γ , а по вертикальной – число возбуждения P (рис. 1). Заметим, что с увеличением силы связи характерная ширина бризеров растет, но тем не менее остается порядка 1...2, то есть найденные решения сохраняют хорошую локализацию. В подавляющем большинстве реализаций¹ эти решения являются устойчивыми либо слабо неустойчивыми (модули численно найденных значений мультипликаторов отличаются от единицы не более, чем на 10^{-5}). Исключение составляют 1, 3 и 6 реализации при $E = 1, 10, 50$, соответственно, где наблюдается потеря устойчивости бризера (отличие мультипликатора от единицы более чем на 10^{-5} по модулю). В силу их маловероятности, режимы с неустойчивыми бризерами детально не исследовались и рассматривались наравне со случаями, где бризер не существует.

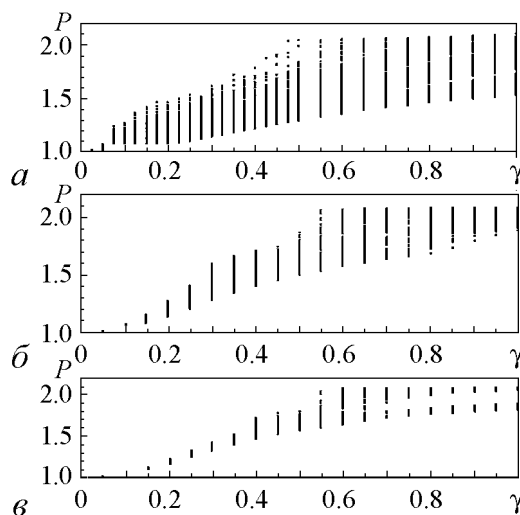


Рис. 1. Числа возбуждения P дискретных бризеров в зависимости от параметра взаимодействия γ при $E = 1$ (а), 10 (б), 50 (в)

¹Напомним, что в качестве «реализации беспорядка», вообще говоря, может выступать любая последовательность $\omega_n^2 \in [1/2; 3/2]$. Например, частным случаем может быть и пространственно однородная система. Поэтому все утверждения, зависящие от реализации беспорядка, могут носить лишь вероятностный характер.

При продолжении бризерного решения по параметру связи γ для большинства реализаций беспорядка бризер перестает существовать при превышении некоторого порогового значения. На рис. 2 в зависимости от силы связи показаны доли числа реализаций беспорядка (от общего их количества), при которых в центре цепочки существует бризер (устойчивый или слабо неустойчивый). Видно, что чем больше энергия найденных бризеров, тем выше лежит соответствующий этой энергии график. Таким образом, пороги существования бризеров (по параметру связи), как правило, возрастают с увеличением энергии.

Во всех случаях исчезновение дискретного бризера оказалось обусловленным бифуркацией, при которой пара комплексно-сопряженных мультипликаторов обращается в единицу (для динамической системы общего вида такая бифуркация имела бы коразмерность 2; в классе гамильтоновых систем, в силу упомянутой ранее структуры спектра мультипликаторов, она имеет коразмерность 1). Во всех случаях, когда решение при продолжении по параметру терялось без выполнения этого условия, его удавалось всё же продолжить вплоть до указанной бифуркации путём адаптивного дробления шага по параметру.

Динамика волновых пакетов исследовалась для тех же реализаций беспорядка (для которых найдены бризерные решения) путем численного моделирования

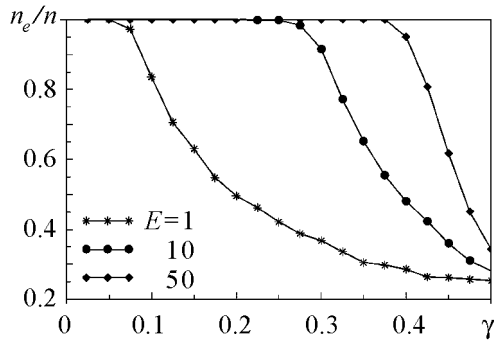


Рис. 2. Зависимость долей реализаций беспорядка, при которых существует бризерное решение, от силы связи γ между осцилляторами для трех значений энергии E

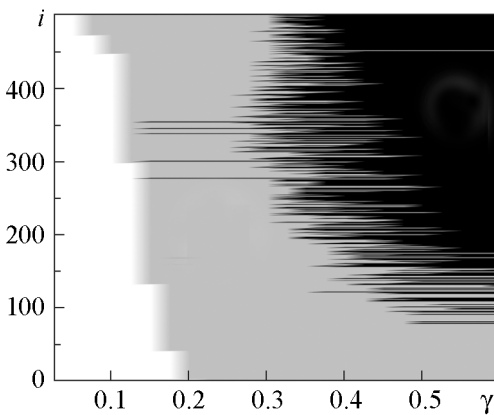


Рис. 3. Связь между существованием бризеров (белая и серая области) и самолокализацией волновых пакетов (только белая область) при $E = 10$

системы (1) из начальных условий, локализованных в центре цепочки: центральному осциллятору при нулевой начальной координате сообщалась начальная скорость $\dot{x} = \sqrt{2E}$; начальные координаты и скорости всех остальных осцилляторов принимались равными нулю. Для количественного анализа полученных результатов ширина волнового пакета оценивалась путем подсчета числа возбуждения $P = P(t_f)$ (см. уравнение (2)) в конечный момент времени $t_f = 10^8$. Пакет считался хорошо локализованным, если для него $P(t_f) \lesssim 2$. Данный критерий является приблизительным и рассчитан из условия, что не менее 50% от начальной энергии остаются локализованными в пределах локализационного объема [29]. Отметим, что для различных энергий системы при увеличении параметра нелинейной связи происходит постепенное уменьшение доли самолокализованных волновых пакетов от близких к 1 до близких к 0 значений.

Рис. 3 иллюстрирует связь между существованием бризерных решений и самолокализацией волновых пакетов. Здесь для энергии $E = 10$ на

плоскости параметров силы связи γ и «номера» реализации беспорядка i (уточним, что реализации были отсортированы по возрастанию числа возбуждения P) обозначены следующие области: белая – одновременное существование как бризерных решений, так и самолокализации волновых пакетов; серая – существование бризерных решений и отсутствие самолокализованных волновых пакетов; чёрная – отсутствие как бризерных решений, так и самолокализованных волновых пакетов.

Из представленных результатов следует, что самолокализация наблюдается только при существовании бризерного решения, локализованного на «центральном» осцилляторе, которому в эволюционном эксперименте сообщается начальная энергия. Отсутствие самолокализации при наличии бризера можно объяснить тем, что начальные условия, использованные для получения волнового пакета, не попадают в некоторую (не известную заранее) окрестность бризера в фазовом пространстве, занятую самолокализующимися решениями. Чтобы подтвердить это предположение, для одной из реализаций беспорядка был проведен численный эксперимент, в котором начальные условия получались линейной интерполяцией с переменными весами между бризерным решением и точечным возбуждением центрального узла

$$x_n(0) = 0, \quad v_n(0) = (1 - s)\delta_{l,n}\sqrt{2E} + sv_n^b, \quad (4)$$

где v_n^b – скорости бризерного решения в момент, когда все его координаты x_n^b равны нулю; параметр s пробегает значения $0 \leq s \leq 1$. На рис. 4 показаны зависимости логарифма числа возбуждения волнового пакета в конечный момент наблюдения от параметра s для трех значений силы связи: $\gamma = 0.1$ из белой области на рис. 3, $\gamma = 0.2$ и $\gamma = 0.25$ из серой области на рис. 3. Пунктирная линия показывает значение $P = 2.0$, используемое как критерий самолокализации волновых пакетов. Как и следовало ожидать, для $\gamma = 0.1$ при всех значениях s волновой пакет является самолокализованным. Для $\gamma = 0.2$ и $\gamma = 0.25$ при малых значениях s волновой пакет оказывается делокализованным. При увеличении s , то есть при приближении начальных условий к бризерному решению, начиная с некоторого порогового значения происходит резкое уменьшение числа возбуждения, что означает локализацию волнового пакета.

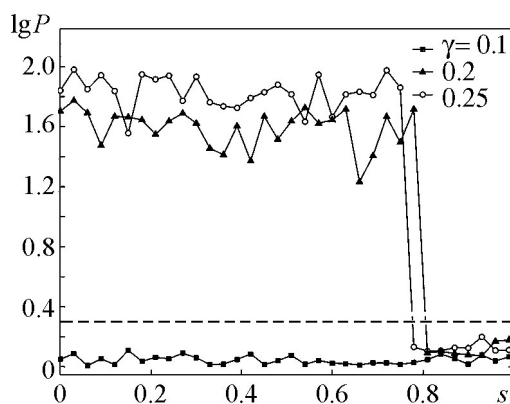


Рис. 4. Изменение логарифма числа возбуждения волнового пакета P при линейной интерполяции начальных условий между точечным возбуждением ($s = 0$) и бризерным решением ($s = 1$)

Заключение

Были исследованы условия самолокализации волновых пакетов, существования и устойчивости бризерных решений, локализованных в пространстве и периодических во времени, а также связи между этими условиями, для модели Фрёлиха–Спенсера–Вейна. Для разных реализаций пространственного беспорядка пороги де-

локализации волновых пакетов и исчезновения бризеров в центре цепочки различаются. При увеличении параметра нелинейной связи происходит постепенное и согласованное уменьшение долей самолокализованных волновых пакетов и продолжаемых дискретных бризеров.

Из представленных результатов следует, что самолокализация решения вблизи некоторого узла имеет место при условии существования бризерного решения, локализованного на том же узле. Множество начальных условий, приводящих к самолокализации, расположено в некоторой окрестности бризерного решения. В определенном диапазоне значений параметра связи это множество включает начальные условия типа «точечного возбуждения» – в этом случае наблюдается самолокализация пакета, эволюционирующего из таких начальных условий.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ № 14-02-31432.

Библиографический список

1. *Evers F. and Mirlin A.* Anderson transitions // *Rev. Mod. Phys.* 2008. Vol. 80. 1355.
2. *Anderson P.W.* Absence of diffusion in certain random lattices // *Physical Review.* 1958. Vol. 109. P. 1492.
3. *Schwartz T., Bartal G., Fishman S., and Segev M.* Transport and Anderson localization in disordered two-dimensional photonic lattices // *Nature.* 2007. Vol. 446. P. 52.
4. *Lahini Y., Avidan A., Pozzi F., Sorel M., Morandotti R., Christodoulides D.N., and Silberberg Y.* Anderson localization and nonlinearity in one-dimensional disordered photonic lattices // *Physical Review Letters.* 2008. Vol. 100. 013906.
5. *Segev M., Silberberg Y., and Christodoulides D.N.* Anderson localization of light // *Nature Photonics.* 2013. Vol. 7. P. 197.
6. *Billy J., Josse V., Zuo Z., Bernard A., Hambrecht B., Lugan P., Clement D., Sanchez-Palencia L., Bouyer P., and Aspect A.* Direct observation of Anderson localization of matter waves in a controlled disorder // *Nature.* 2008. Vol. 453. P. 891.
7. *Roati G., D'Errico C., Fallani L., Fattori M., Fort C., Zaccanti M., Modugno G., Modugno M., and Inguscio M.* Anderson localization of a non-interacting Bose-Einstein condensate // *Nature.* 2008. Vol. 453. 895898.
8. *Kondov S.S., McGehee W.R., Zirbel J.J., and DeMarco B.* Three-dimensional Anderson localization of ultracold matter // *Science.* 2011. Vol. 334. P. 66.
9. *Jendrzejewski F., Bernard A., Muller K., Cheinet P., Josse V., Piraud M., Pezze L., Sanchez-Palencia L., Aspect A., and Bouyer P.* Three-dimensional localization of ultracold atoms in an optical disordered potential // *Nature Physics.* 2012. Vol. 8. P. 398.
10. *Flach S. and Gorbach A.* Computational studies of discrete breathers – from basics to competing length scales // *Int. J. Bif. Chaos.* 2006. Vol. 16. P. 1645.
11. *Flach S. and Willis C.R.* Discrete breathers // *Physics Reports.* 1998. Vol. 295. P. 181.
12. *Flach S. and Gorbach A.* Discrete breathers – advances in theory and applications // *Physics Reports.* 2008. Vol. 467. P. 1.
13. *Ivanchenko M.V., Kanakov O.I., Shalfeev V.D., and Flach S.* Discrete breathers in

- transient processes and thermal equilibrium // *Physica D: Nonlinear Phenomena*. 2004. Vol. 198. P. 120.
14. *Chechin G.M., Dzhelauhova G.S., and Mehonoshina E.A.* Quasibreathers as a generalization of the concept of discrete breathers // *Physical Review E*. 2006. Vol. 74, № 3. 036608.
 15. *Chechin G.M. and Dzhelauhova G.S.* Discrete breathers and nonlinear normal modes in monoatomic chains // *Journal of Sound and Vibration*. 2009. Vol. 322, № 3. P. 490.
 16. *Chechin G.M. and Lobzenko I.P.* Ab initio refining of quasibreathers in graphane // *Letters on materials*. 2014. Vol. 4, № 4. P. 226.
 17. *Flach S., Ivanchenko M.V., and Kanakov O.I.* q-Breathers and the Fermi–Pasta–Ulam problem // *Physical Review Letters*. 2005. Vol. 95, № 6. P. 064102.
 18. *Flach S., Kanakov O.I., Mishagin K.G., and Ivanchenko M.V.* q-Breathers in FPU-lattices – scaling and properties for large systems // *International Journal of Modern Physics B*. 2007. Vol. 21, (23n24). P. 3925.
 19. *Sato M. and Sievers A.J.* Direct observation of the discrete character of intrinsic localized modes in an antiferromagnet // *Nature*. 2004. Vol. 432. P. 486.
 20. *Fleischer J.W., Carmon T., Segev M., Efremidis N.K., and Christodoulides D.N.* Observation of discrete solitons in optically induced real time waveguide arrays // *Physical Review Letters*. 2003. Vol. 90. 023902.
 21. *Sato M., Hubbard B.E., Sievers A.J., Ilic B., Czaplowski D.A., and Craighead H.G.* Observation of locked intrinsic localized vibrational modes in a micromechanical oscillator array // *Physical Review Letters*. 2003. Vol. 90. 044102.
 22. *Pikovskiy A.S. and Shepelyansky D.L.* Destruction of Anderson localization by a weak nonlinearity // *Physical Review Letters*. 2008. Vol. 100. 094101.
 23. *Veksler H., Krivolapov Y., and Fishman S.* Spreading for the generalized nonlinear Schrödinger equation with disorder // *Physical Review E*. 2009. Vol. 80. 037201.
 24. *Flach S., Krimer D.O., and Skokos Ch.* Universal spreading of wave packets in disordered nonlinear systems // *Physical Review Letters*. 2009. Vol. 102. 024101.
 25. *Skokos Ch., Krimer D.O., Komineas S., and Flach S.* Delocalization of wave packets in disordered nonlinear chains // *Physical Review E*. 2009. Vol. 79. 056211.
 26. *Laptyeva T.V., Bodyfelt J.D., Krimer D.O., Skokos Ch., and Flach S.* The crossover from strong to weak chaos for nonlinear waves in disordered systems // *Europhys. Lett.* 2010. Vol. 91. 30001.
 27. *Flach S.* Spreading of waves in nonlinear disordered media // *Chemical Physics*. 2010. Vol. 375. P. 548.
 28. *Bodyfelt J.D., Laptyeva T.V., Gligoric G., Krimer D.O., Skokos Ch., and Flach S.* Wave interactions in localizing media – a coin with many faces // *International Journal of Bifurcation and Chaos*. 2011. Vol. 21. 2107.
 29. *Ivanchenko M.V., Laptyeva T.V., and Flach S.* Anderson localization or nonlinear waves: A matter of probability // *Physical Review Letters*. 2011. Vol. 107. 240602.
 30. *Lucioni E., Deissler B., Tanzi L., Roati G., Zaccanti M., Modugno M., Larcher M., Dalfovo M., Inguscio M., and Modugno G.* Observation of subdiffusion in a disordered interacting system // *Physical Review Letters*. 2011. Vol. 106. 230403.
 31. *Pertsch T., Peschel U., Kobelke J., Schuster K., Bartelt H., Nolte S., Tünnermann A.,*

- and Lederer F.* Nonlinearity and disorder in fiber arrays // *Physical Review Letters*. 2004. Vol. 93. P. 053901.
32. *Naether U., Heinrich M., Lahini Y., Nolte S., Vicencio R.A., Molina M.I., and Szameit A.* Self-trapping threshold in disordered nonlinear photonic lattices // *Optics Letters*. 2013. Vol. 38. P. 1518.
 33. *Vicencio R.A. and Flach S.* Control of wave packet spreading in nonlinear finite disordered lattices // *Physical Review E*. 2009. Vol. 79. 016217.
 34. *Naether U., Martínez A.J., Guzmán-Silva D., Molina M.I., and Vicencio R.A.* Self-trapping transition in nonlinear cubic lattices // *Physical Review E*. 2013. Vol. 87. 062914.
 35. *Albanese C. and Fröhlich J.* Perturbation theory for periodic orbits in a class of infinite dimensional Hamiltonian systems // *Communications in Mathematical Physics*. 1991. Vol. 138. P. 193.
 36. *MacKay R.S. and Aubry S.* Proof of existence of breathers for time-reversible or Hamiltonian networks of weakly coupled oscillators // *Nonlinearity*. 1994. Vol. 7. P. 1623.
 37. *Kopidakis G. and Aubry S.* Intraband discrete breathers in disordered nonlinear systems // *Physica D: Nonlinear Phenomena*. 1999. Vol. 130. P. 155.
 38. *Fröhlich J., Spencer T., and Wayne C.E.* Localization in disordered, nonlinear dynamical systems // *J. Stat. Phys.* 1986. Vol. 42. P. 247.
 39. *Marin J.L. and Aubry S.* Breathers in nonlinear lattices: numerical calculation from the anticontinuous limit // *Nonlinearity*. 1996. Vol. 9, № 6. P. 1501.
 40. *Moré J.J.* The Levenberg–Marquardt algorithm: implementation and theory // *In Numerical analysis*. 1978. Springer. P. 105.
 41. *Лобзенко И.Б., Чечин Г.М.* Численное моделирование движущихся дискретных бризеров в монокристаллических цепочках // *Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского*. 2013. Т. 4, № 1. С. 67.
 42. *Moré J.J., Sorensen D.C., Hillstom K.E., and Garbow B.S.* The MINPACK project // *Sources and Development of Mathematical Software*. 1984. P. 88.

Поступила в редакцию 16.11.2015

SELF-TRAPPING AND BREATHERS IN DISORDERED NONLINEAR OSCILLATORY LATTICES

A. A. Tikhomirov, K. G. Mishagin, T. V. Lapyeva, O. I. Kanakov

Lobachevsky State University of Nizhni Novgorod

We present a comparative study of two classes of solutions to Fröhlich–Spencer–Wayne chain model with random spatial inhomogeneity (disorder): self-trapped wave packets on one hand, and discrete breathers (localized in space, time-periodic solutions) on the other. Wave packets are obtained by numerical integration of dynamical equations with single-site initial conditions. When given sufficient energy, the packet remains localized in space throughout the observation time. Breather solutions are constructed by continuation of a periodic orbit with coupling parameter increased from zero in successive small steps.

Found solutions are examined for linear stability. We demonstrate that the great majority of disorder realizations exhibit linearly stable breathers on an interval of coupling parameter values from zero up to a finite realization-dependent threshold. The disappearance of a discrete breather is associated with the bifurcation in which a complex-conjugate pair of Floquet multipliers becomes equal to $+1$. When a discrete breather exists, self-trapping of wave packets depends upon the proximity of the corresponding trajectory in the phase space to the breather orbit. These observations allow us to associate the well-known self-trapping effect with the existence of stable breather orbits and to explain this effect by the influence of breather orbits upon the phase space structure in their neighbourhood. The presented results are of interest for developing the theoretical description of physical systems characterized by the simultaneous presence of nonlinearity, spatial discreteness and disorder (Bose–Einstein condensates, lattices of coupled optical waveguides, micro- and nanomechanical systems etc.).

Keywords: Lattices, localization, disorder, breathers.

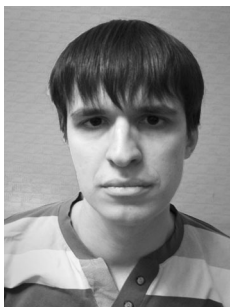
References

1. *Evers F. and Mirlin A.* Anderson transitions // *Rev. Mod. Phys.* 2008. Vol. 80. 1355.
2. *Anderson P.W.* Absence of diffusion in certain random lattices // *Physical Review*. 1958. Vol. 109. P. 1492.
3. *Schwartz T., Bartal G., Fishman S., and Segev M.* Transport and Anderson localization in disordered two-dimensional photonic lattices // *Nature*. 2007. Vol. 446. P. 52.
4. *Lahini Y., Avidan A., Pozzi F., Sorel M., Morandotti R., Christodoulides D.N., and Silberberg Y.* Anderson localization and nonlinearity in one-dimensional disordered photonic lattices // *Physical Review Letters*. 2008. Vol. 100. 013906.
5. *Segev M., Silberberg Y., and Christodoulides D.N.* Anderson localization of light // *Nature Photonics*. 2013. Vol. 7. P. 197.
6. *Billy J., Josse V., Zuo Z., Bernard A., Hambrecht B., Lugan P., Clement D., Sanchez-Palencia L., Bouyer P., and Aspect A.* Direct observation of Anderson localization of matter waves in a controlled disorder // *Nature*. 2008. Vol. 453. P. 891.
7. *Roati G., D’Errico C., Fallani L., Fattori M., Fort C., Zaccanti M., Modugno G., Modugno M., and Inguscio M.* Anderson localization of a non-interacting Bose–Einstein condensate // *Nature*. 2008. Vol. 453. 895898.
8. *Kondov S.S., McGehee W.R., Zirbel J.J., and DeMarco B.* Three-dimensional Anderson localization of ultracold matter // *Science*. 2011. Vol. 334. P. 66.
9. *Jendrzejewski F., Bernard A., Muller K., Cheinet P., Josse V., Piraud M., Pezze L., Sanchez-Palencia L., Aspect A., and Bouyer P.* Three-dimensional localization of ultracold atoms in an optical disordered potential // *Nature Physics*. 2012. Vol. 8. P. 398.
10. *Flach S. and Gorbach A.* Computational studies of discrete breathers – from basics to competing length scales // *Int. J. Bif. Chaos*. 2006. Vol. 16. P. 1645.
11. *Flach S. and Willis C.R.* Discrete breathers // *Physics Reports*. 1998. Vol. 295. P. 181.
12. *Flach S. and Gorbach A.* Discrete breathers – advances in theory and applications

// Physics Reports. 2008. Vol. 467. P. 1.

13. *Ivanchenko M.V., Kanakov O.I., Shalfeev V.D., and Flach S.* Discrete breathers in transient processes and thermal equilibrium // *Physica D: Nonlinear Phenomena*. 2004. Vol. 198. P. 120.
14. *Chechin G.M., Dzhelauhova G.S., and Mehonoshina E.A.* Quasibreathers as a generalization of the concept of discrete breathers // *Physical Review E*. 2006. Vol. 74, № 3. 036608.
15. *Chechin G.M. and Dzhelauhova G.S.* Discrete breathers and nonlinear normal modes in monoatomic chains // *Journal of Sound and Vibration*. 2009. Vol. 322, № 3. P. 490.
16. *Chechin G.M. and Lobzenko I.P.* Ab initio refining of quasibreathers in graphane // *Letters on materials*. 2014. Vol. 4, № 4. P. 226.
17. *Flach S., Ivanchenko M.V., and Kanakov O.I.* q-Breathers and the Fermi–Pasta–Ulam problem // *Physical Review Letters*. 2005. Vol. 95, № 6. P. 064102.
18. *Flach S., Kanakov O.I., Mishagin K.G., and Ivanchenko M.V.* q-Breathers in FPU-lattices – scaling and properties for large systems // *International Journal of Modern Physics B*. 2007. Vol. 21, (23n24). P. 3925.
19. *Sato M. and Sievers A.J.* Direct observation of the discrete character of intrinsic localized modes in an antiferromagnet // *Nature*. 2004. Vol. 432. P. 486.
20. *Fleischer J.W., Carmon T., Segev M., Efremidis N.K., and Christodoulides D.N.* Observation of discrete solitons in optically induced real time waveguide arrays // *Physical Review Letters*. 2003. Vol. 90. 023902.
21. *Sato M., Hubbard B.E., Sievers A.J., Ilic B., Czaplowski D.A., and Craighead H.G.* Observation of locked intrinsic localized vibrational modes in a micromechanical oscillator array // *Physical Review Letters*. 2003. Vol. 90. 044102.
22. *Pikovskiy A.S. and Shepelyansky D.L.* Destruction of Anderson localization by a weak nonlinearity // *Physical Review Letters*. 2008. Vol. 100. 094101.
23. *Veksler H., Krivolapov Y., and Fishman S.* Spreading for the generalized nonlinear Schrödinger equation with disorder // *Physical Review E*. 2009. Vol. 80. 037201.
24. *Flach S., Krimer D.O., and Skokos Ch.* Universal spreading of wave packets in disordered nonlinear systems // *Physical Review Letters*. 2009. Vol. 102. 024101.
25. *Skokos Ch., Krimer D.O., Komineas S., and Flach S.* Delocalization of wave packets in disordered nonlinear chains // *Physical Review E*. 2009. Vol. 79. 056211.
26. *Laptyeva T.V., Bodyfelt J.D., Krimer D.O., Skokos Ch., and Flach S.* The crossover from strong to weak chaos for nonlinear waves in disordered systems // *Europhys. Lett.* 2010. Vol. 91. 30001.
27. *Flach S.* Spreading of waves in nonlinear disordered media // *Chemical Physics*. 2010. Vol. 375. P. 548.
28. *Bodyfelt J.D., Laptyeva T.V., Gligoric G., Krimer D.O., Skokos Ch., and Flach S.* Wave interactions in localizing media – a coin with many faces // *International Journal of Bifurcation and Chaos*. 2011. Vol. 21. 2107.
29. *Ivanchenko M.V., Laptyeva T.V., and Flach S.* Anderson localization or nonlinear waves: A matter of probability // *Physical Review Letters*. 2011. Vol. 107. 240602.
30. *Lucioni E., Deissler B., Tanzi L., Roati G., Zaccanti M., Modugno M., Larcher M., Dalfovo M., Inguscio M., and Modugno G.* Observation of subdiffusion in a disor-

- dered interacting system // *Physical Review Letters*. 2011. Vol. 106. 230403.
31. *Pertsch T., Peschel U., Kobelke J., Schuster K., Bartelt H., Nolte S., Tünnermann A., and Lederer F.* Nonlinearity and disorder in fiber arrays // *Physical Review Letters*. 2004. Vol. 93. P. 053901.
 32. *Naether U., Heinrich M., Lahini Y., Nolte S., Vicencio R.A., Molina M.I., and Szameit A.* Self-trapping threshold in disordered nonlinear photonic lattices // *Optics Letters*. 2013. Vol. 38. P. 1518.
 33. *Vicencio R.A. and Flach S.* Control of wave packet spreading in nonlinear finite disordered lattices // *Physical Review E*. 2009. Vol. 79. 016217.
 34. *Naether U., Martínez A.J., Guzmán-Silva D., Molina M.I., and Vicencio R.A.* Self-trapping transition in nonlinear cubic lattices // *Physical Review E*. 2013. Vol. 87. 062914.
 35. *Albanese C. and Fröhlich J.* Perturbation theory for periodic orbits in a class of infinite dimensional Hamiltonian systems // *Communications in Mathematical Physics*. 1991. Vol. 138. P. 193.
 36. *MacKay R.S. and Aubry S.* Proof of existence of breathers for time-reversible or Hamiltonian networks of weakly coupled oscillators // *Nonlinearity*. 1994. Vol. 7. P. 1623.
 37. *Kopidakis G. and Aubry S.* Intraband discrete breathers in disordered nonlinear systems // *Physica D: Nonlinear Phenomena*. 1999. Vol. 130. P. 155.
 38. *Fröhlich J., Spencer T., and Wayne C.E.* Localization in disordered, nonlinear dynamical systems // *J. Stat. Phys.* 1986. Vol. 42. P. 247.
 39. *Marin J.L. and Aubry S.* Breathers in nonlinear lattices: numerical calculation from the anticontinuous limit // *Nonlinearity*. 1996. Vol. 9, № 6. P. 1501.
 40. *Moré J.J.* The Levenberg–Marquardt algorithm: implementation and theory // In *Numerical analysis*. 1978. Springer. P. 105.
 41. *Lobzenko I.P., Chechin G.M.* Numerical simulations of mobile discrete breathers in monoatomic chains // *Vestnik of Lobachevsky State University of Nizhni Novgorod*. 2013. Vol. 4, № 1. P. 67. (In Russian).
 42. *Moré J.J., Sorensen D.C., Hillstom K.E., and Garbow B.S.* The MINPACK project // *Sources and Development of Mathematical Software*. 1984. P. 88.



Тихомиров Андрей Александрович – родился в Нижнем Новгороде (1988), окончил Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского (2013), поступил в аспирантуру на кафедру теории колебаний и автоматического регулирования ННГУ. Область научных интересов: нелинейные колебания и волны, волновые неустойчивости, решеточные системы, дискретные бризеры. Является соавтором 3 научных статей по указанным выше направлениям.

603950 Нижний Новгород, пр. Гагарина, д. 23
 Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского
 E-mail: andreynn2006@yandex.ru



Мишагин Константин Геннадьевич – родился в Нижнем Новгороде (1981), окончил радиофизический факультет Нижегородского государственного университета (2004). Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по радиофизике (2007). В настоящее время работает по совместительству в должности доцента на кафедре теории колебаний и автоматического регулирования ННГУ, основное место работы – АО «Время-Ч». Автор 30 научных статей в области нелинейной динамики систем фазовой синхронизации и приложений, локализации энергии в гамильтоновых системах, динамики спиновых генераторов, анализа шумов квантовых стандартов частоты, методов измерений.

Россия 603105 Нижний Новгород, ул. Ошарская, д.67
АО «ВРЕМЯ-Ч»
603950 Нижний Новгород, пр. Гагарина, д. 23
Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского
E-mail: mishagin@vremya-ch.com



Лаптева Татьяна Владимировна – родилась в городе Брянка, Украина (1982). С отличием окончила магистратуру кафедры физики Луганского национального университета имени Тараса Шевченко (2005). В 2013 году закончила аспирантуру факультета математики и естественных наук Технического университета Дрездена, Германия (Technische Universitat Dresden), где 4 марта 2013 года с отличием (*magna cum laude*) защитила диссертацию на соискание степени доктора естественных наук (Dr. rer. nat.) по теме «Нелинейные волны в решетках с беспорядком: локализация и распространение» («Nonlinear waves in random lattices: localization and spreading»). С сентября 2013 года исполняет обязанности старшего преподавателя кафедры теории управления и динамики систем Института информационных технологий, математики и механики Нижегородского государственного университета им. Н.И. Лобачевского. Автор 19 научных статей, посвященных волновой динамике и численному моделированию сред с беспорядком и магнитных материалов, в отечественных и зарубежных научных журналах (в том числе, *Physical Review Letters*, *New Journal of Physics*, *Europhysics Letters*, Письма в ЖЭТФ, Известия РАН, ДАН, и т.д.).

603950 Нижний Новгород, пр. Гагарина, д. 23
Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского
E-mail: tetyana.laptyeva@gmail.com



Канаков Олег Игоревич – родился в Нижнем Новгороде (1981), окончил Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского (2004), защитил диссертацию на соискание степени кандидата физико-математических наук по специальности радиофизика (2007). С 2007 года – старший преподаватель, с 2009 – доцент кафедры теории колебаний и автоматического регулирования радиофизического факультета Нижегородского государственного университета им. Н.И. Лобачевского. Основные научные интересы – локализация и перенос энергии в решеточных системах, нелинейная динамика синтетических генных сетей, волновые неустойчивости в нелинейных решеточных системах. Является соавтором 22 статей по вышеуказанной тематике.

603950 Нижний Новгород, пр. Гагарина, д. 23
Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского
E-mail: okanakov@rf.unn.ru



РАСЧЕТ СТАРШЕГО ПОКАЗАТЕЛЯ ЛЯПУНОВА ХАОТИЧЕСКИХ РЕЖИМОВ КОЛЕБАНИЙ ПО ТОЧЕЧНЫМ ПРОЦЕССАМ ПРИ НАЛИЧИИ ШУМА

Я. Х. Мохаммад¹, А. Н. Павлов^{1,2}

¹Саратовский государственный университет имени Н.Г. Чернышевского

²Саратовский государственный технический университет имени Ю.А. Гагарина

Предложена модификация метода расчета старшего показателя Ляпунова хаотических режимов колебаний по точечным процессам при наличии измерительного шума, влияющего на динамику системы, которая позволяет проводить проверку достоверности вычисляемых динамических характеристик. На примере модели Ресслера в режиме фазокогерентного хаоса рассмотрены особенности применения данного подхода к точечным процессам моделей «накопление–сброс» и «пересечение порога».

Ключевые слова: Колебания, хаос, показатели Ляпунова, точечные процессы.

Введение

Точечные процессы, в которых носителями информации о динамике системы являются времена появления характерных событий, встречаются во многих областях естествознания. Характерным примером служит динамика сенсорных нейронов и нейронных ансамблей, где последовательности стереотипных импульсов (спайков) отражают информацию о внешних стимулах [1]. Генерация точечных процессов осуществляется при превышении входным сигналом порогового уровня и сопровождается частичной потерей информации. Вследствие этого возникает вопрос о том, насколько достаточно информации, содержащейся в выходном сигнале, для описания различных особенностей сложной динамики на входе порогового устройства, преобразующего аналоговый сигнал в последовательность стереотипных импульсов? В контексте теории динамических систем этот вопрос может быть сформулирован следующим образом: какая информация о динамике системы может быть извлечена из последовательностей времен возврата в секущую Пуанкаре, и что произойдет, если секущая поверхность задана таким образом, что ее пересекают не все фазовые траектории? Какова минимальная информация, достаточная для корректной оценки количественных мер сложной динамики по точечным процессам, например, показателей Ляпунова?

В ранее проводившихся исследованиях [2–6] изучалась задача расчета метрических и динамических характеристик хаотических режимов динамики на входе

пороговых устройств, описываемых моделями «накопление–сброс» (НС) и «пересечение порога» (ПП), по выходным последовательностям межспайковых интервалов. Соответствующие расчеты проводились на основе реконструкции динамических систем по точечным процессам после предварительной обработки регистрируемых сигналов. Задача реконструкции по точечным процессам НС-модели является более простой, и ее решение базируется на строгих математических результатах, таких как теорема Зауэра [7], которая является расширением стандартной техники реконструкции на случай точечных процессов. Используя последовательность межспайковых интервалов НС-модели, можно восстановить нелинейное преобразование входного сигнала при условии высокой частоты генерации спайков [8, 9]. Это позволяет проводить расчеты обобщенных фрактальных размерностей и показателей Ляпунова, используя стандартные подходы [10, 11]. В случае ПП-модели задача усложняется, и до настоящего времени отсутствуют строгие обоснования возможности реконструкции, аналогичные теореме Зауэра. В работах [8, 12] качество реконструкции проверялось на основе численных исследований различных режимов динамики. Тем не менее, это позволило проводить корректную диагностику режимов сложных колебаний, включая переходы «хаос–гиперхаос», по сравнительно короткой выборке [13, 14].

Следует отметить, что предыдущие исследования акцентировали внимание исключительно на детерминированных режимах динамики на входе НС- и ПП-моделей. Случай наличия шума во входных сигналах не был рассмотрен, несмотря на то, что шум может оказывать существенное влияние на вычисляемые характеристики. Стандартный метод расчета показателей Ляпунова по временным рядам [11] позволяет частично игнорировать влияние шума за счет задания минимального допустимого расстояния между фазовыми траекториями, которое уменьшает эффект дополнительного их разбегания за счет случайных флуктуаций. Обоснованное задание такого порога для точечных процессов представляет более сложную задачу вследствие того, что при анализе последовательностей межспайковых интервалов спектральные методы не позволяют четко разделить компоненты, связанные с детерминированной динамикой и с флуктуациями.

В данной работе изучается проблема расчета старшего показателя Ляпунова λ_1 хаотических режимов автоколебаний по точечным процессам при наличии измерительного шума, не влияющего на динамику системы. Такая задача позволяет, например, смоделировать ситуацию, когда на вход порогового устройства поступает сумма полезного сигнала и шума сравнительно небольшой интенсивности, и детерминированная динамика является доминирующей. Обсуждается возможность вычисления λ_1 по коротким последовательностям межспайковых интервалов и предлагается метод проверки достоверности проводимых вычислений.

1. Модели пороговых устройств

К числу стандартных моделей, описывающих преобразование аналогового сигнала в последовательность стереотипных импульсов, относится НС-модель, применяемая при описании динамики нейронов [6]. НС-модель предусматривает интегрирование входного аналогового сигнала $S(t)$ до тех пор, пока величина интеграла не достигнет порогового значения θ . При достижении порога генерируется характерный импульс (спайк), и интеграл обнуляется. Математическое описание времен генерации спайков задается уравнением

$$\int_{T_i}^{T_{i+1}} S(t)dt = \theta. \quad (1)$$

Последовательность временных интервалов $I_i = T_{i+1} - T_i$ позволяет восстановить нелинейное преобразование входного сигнала при высокой частоте генерации спайков в соответствии с приближенным равенством

$$\int_{T_i}^{T_{i+1}} S(t)dt \simeq S(T_i)I_i \Rightarrow S(T_i) \simeq \frac{\theta}{I_i}. \quad (2)$$

Таким образом, существует возможность восстановить входной сигнал в моменты времени T_i . С уменьшением частоты генерации импульсов растет погрешность оценки значений $S(T_i)$, и этот эффект аналогичен добавлению шума к сигналу $S(t)$. Вследствие того, что выборка $S(T_i)$ характеризуется неравномерным шагом по времени, осуществляется интерполяция соответствующих значений, позволяющая ввести постоянный шаг дискретизации Δt .

Другой базовой моделью пороговых устройств является ПП-модель, которая описывает преобразование входного аналогового сигнала в последовательность стереотипных импульсов (спайков), которые генерируются, когда входной сигнал превышает пороговое значение θ [4]. При анализе хаотических режимов автоколебаний последовательность временных интервалов между достижениями порогового уровня представляет собой последовательность времен возврата в секущую Пуанкаре. Отметим, что последовательность межспайковых интервалов ПП-модели является более общим случаем, так как учитывает возможность задания секущей плоскости $S(t) = \theta$, которую будут пересекать не все фазовые траектории (при больших значениях θ).

2. Расчет старшего показателя Ляпунова по точечным процессам

Оценки показателей Ляпунова по временным рядам обычно проводятся на основе метода [11], который предусматривает реконструкцию фазового портрета, после чего оценивается средняя скорость экспоненциального разбегания траекторий. Учитывая то обстоятельство, что экспоненциальный закон справедлив в линейном приближении, при выходе за границы линейного подхода проводятся перенормировки, предусматривающие задание нового вектора возмущения, сохраняющего ориентацию в фазовом пространстве, но имеющего меньшую длину $r(t)$. Однако из-за конечного числа точек в фазовом пространстве реконструированной фазовой траектории неизбежно возникают ошибки ориентации перенормированного вектора возмущения, приводящие к недооценке величины λ_1 . На практике исследователю приходится искать компромисс между минимизацией длины вектора возмущения и ошибки его ориентации. Эти две цели не могут быть достигнуты одновременно, так как ограничение на величину ошибки ориентации уменьшает вероятность выбора оптимального значения нового вектора возмущения и приводит к частым перенормировкам, что оказывает влияние на точность проводимых вычислений. Эта проблема детально рассмотрена в работе [11], где применяются различные варианты перенормировок. При анализе детерминированной динамики оптимизация выбора вектора возмущения часто проводится по критерию минимальной ошибки ориентации, учитывая,

что длина вектора $r(t)$ не выходит за границу линейного приближения l_{\max} . При наличии шума ограничения на длину вектора задаются в виде диапазона $[l_{\min}, l_{\max}]$, где l_{\min} представляет собой пороговое значение, вводимое для того, чтобы избежать дополнительного разбегания близлежащих траекторий, индуцируемого шумом.

Метод [11] может использоваться при анализе точечных процессов. Для НС-модели он применяется к последовательности отсчетов $S(T_i)$ после ее интерполяции с постоянным шагом Δt [8]. В случае ПП-модели используется подход, основанный на аппроксимации усредненной мгновенной частоты [12]. Если T_i – времена пересечения порога θ входным сигналом $S(t)$, а I_i – последовательность межспайковых интервалов, то значения усредненной мгновенной частоты могут быть определены следующим образом:

$$\omega(T_i) = \frac{2\pi}{I_i}. \quad (3)$$

По аналогии с НС-моделью, дискретные отсчеты $\omega(T_i)$ интерполируются гладкой функцией для перехода к сигналу с равномерной выборкой по времени. Такой подход позволяет проводить корректную диагностику режимов хаотической и гиперхаотической динамики [9, 14].

В данной работе мы предлагаем модификацию метода расчета старшего показателя Ляпунова по точечным процессам при наличии шума, который состоит в построении зависимостей λ_1 от максимально допустимой ошибки ориентации α , то есть угла между векторами возмущения до и после перенормировки, при условии, что новое возмущение выбирается путем минимизации длины вектора в диапазоне $[l_{\min}, l_{\max}]$. Из общих соображений мы ожидаем, что большие ошибки ориентации приводят к недооценке величины λ_1 . Кроме того, очень малые значения α существенно уменьшают возможность выбора подходящего вектора возмущения, что приводит к выходу за границы линейного приближения и, как следствие, снова к уменьшению вычисляемого значения показателя. Как будет далее показано, оптимальное значение α , соответствующее максимуму зависимости $\lambda_1(\alpha)$, позволяет проводить более точную оценку старшего показателя Ляпунова по точечным процессам, а характер данной зависимости отражает уровень шума в анализируемом точечном процессе.

3. Результаты исследований

В качестве примера системы, демонстрирующей хаотическую динамику, была выбрана модель Ресслера, которая описывается следующими уравнениями:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -y - z, \\ \frac{dy}{dt} &= x + ay, \\ \frac{dz}{dt} &= b + z(x - c). \end{aligned} \quad (4)$$

Для проведения исследований был рассмотрен режим фазокогерентного хаоса, наблюдающийся при следующих значениях управляющих параметров: $a = 0.15$,

$b = 0.2, c = 10.0$. В целях обеспечения высокой частоты генерации спайков в качестве входного сигнала выбиралось линейное преобразование первой координаты $S(t) = x(t) + 35$. Эффект шума учитывался путем добавления нормально распределенного случайного процесса, то есть сигнал на входе НС-модели задавался в виде $S(t) + D\xi(t)$.

Расчет старшего показателя Ляпунова проводился на основе метода [11] с использованием следующего варианта перенормировок: вектор возмущения выбирался с ошибкой ориентации, не превышающей α , при условии минимизации его длины в диапазоне $[l_{\min}, l_{\max}]$. Рис. 1 демонстрирует характерные зависимости $\lambda_1(\alpha)$ для порогового значения $\theta=5$ и различных интенсивностей шума D . В отсутствие шума данная зависимость имеет четко выраженный максимум в области сравнительно небольших значений α . Слева от максимума уменьшение значений старшего показателя Ляпунова связано с частыми перенормировками, так как для малых углов выбор вектора возмущения, длина которого находится вблизи нижней границы диапазона $[l_{\min}, l_{\max}]$, маловероятен. В результате этого приходится выбирать больший по модулю вектор возмущения, и значительно быстрее будет происходить выход за границы линейного подхода, что сопровождается недооценкой величины λ_1 . Справа от максимума $\lambda_1(\alpha)$ значения старшего показателя Ляпунова уменьшаются из-за возрастающей ошибки ориентации. Непосредственно в точке максимума зависимости $\lambda_1(\alpha)$ значение показателя приблизительно соответствует теоретически ожидаемому значению, вычисленному по уравнениям математической модели (4) с применением стандартного алгоритма [15]. Наличие оптимума зависимости $\lambda_1(\alpha)$ в области небольших значений α и последующий спад данной зависимости является маркером корректных оценок показателя Ляпунова λ_1 по точечным процессам НС-модели, что было подтверждено дополнительными исследованиями для разных режимов динамики модели (4) и при разных пороговых уровнях θ .

При добавлении слабого шума характер зависимости $\lambda_1(\alpha)$ меняется при больших значениях угла α : спадающее поведение $\lambda_1(\alpha)$ сменяется возрастанием величины показателя, начиная с некоторого значения α^* , которое зависит от уровня шума и от параметров алгоритма, таких как минимальное расстояние между фазовыми траекториями l_{\min} . С ростом интенсивности шума соответствующий наклон зависимости $\lambda_1(\alpha)$ увеличивается, а значение α^* приближается к оптимальному значению α_{\max} . Отметим, что данные выводы сделаны для случая, когда средний межспайковый интервал I_i не превышает 1/4 характерного периода хаотических колебаний в соответствии с ограничениями, рассмотренными в работах [9, 13]. Полученные

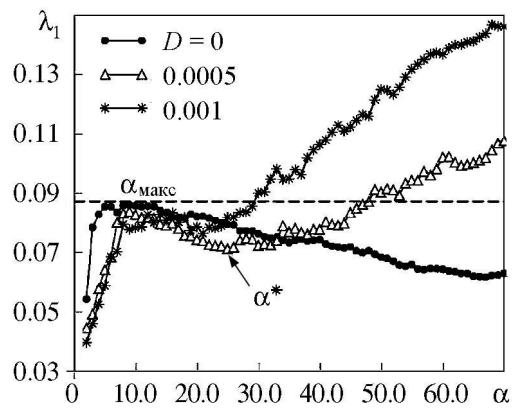


Рис. 1. Зависимости старшего показателя Ляпунова хаотического режима динамики системы Ресслера, вычисленные по последовательностям межспайковых интервалов НС-модели, от максимальной ошибки ориентации векторов возмущений при разных значениях интенсивности аддитивного шума. Здесь и далее значения α представлены в градусах, пунктир обозначает значение показателя, вычисленное по уравнениям системы (4) методом [15]. Здесь и далее расчеты проводились при значениях параметров алгоритма $l_{\min} = 0.01, l_{\max} = 0.1$ по последовательностям, содержащим 2000 межспайковых интервалов

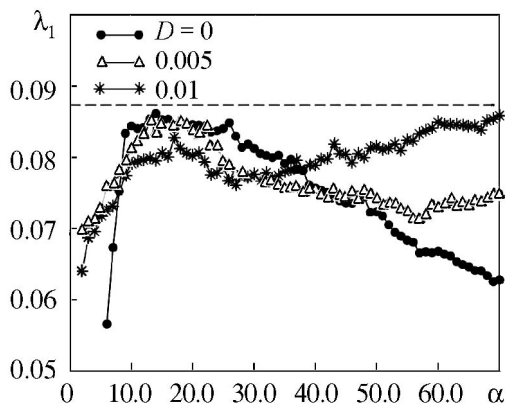


Рис. 2. Зависимости старшего показателя Ляпунова хаотического режима динамики системы Ресслера, вычисленные по последовательностям межспайковых интервалов ПП-модели, от максимальной ошибки ориентации векторов возмущений при разных значениях интенсивности аддитивного шума

на рис. 2. В отсутствие шума также наблюдается наличие оптимального значения угла α_{\max} , при котором значения старшего показателя Ляпунова приближаются к теоретически ожидаемой величине. Слева и справа от оптимума наблюдается спад показателя по аналогии с результатами, полученными для НС-модели. Добавление шума приводит к изменению характера соответствующей зависимости. Как и для НС-модели, с ростом интенсивности шума вначале меняется наклон $\lambda_1(\alpha)$ в области больших углов. При большой интенсивности шума оптимум зависимости $\lambda_1(\alpha)$ исчезает, и оценки старшего показателя Ляпунова по точечному процессу становятся недостоверными.

Заключение

В данной работе на примере модели Ресслера в режиме фазокогерентного хаоса исследовалась возможность расчета старшего показателя Ляпунова хаотических колебаний на входе пороговых устройств (модели «накопление–сброс» и «пересечение порога») по выходным последовательностям межспайковых интервалов в присутствии шума. Для НС-модели старший показатель сравнительно легко вычисляется при высокой частоте генерации спайков в случае детерминированной динамики. При наличии шума задача оценки величины показателя становится более сложной. Нами предложен подход для проверки достоверности проводимых вычислений в случае зашумленных данных, который предусматривает расчет зависимости старшего показателя Ляпунова λ_1 от максимально допустимой ошибки α ориентации (максимального угла между векторами возмущения до и после перенормировки). Наличие четко выраженного максимума соответствующей зависимости $\lambda_1(\alpha)$ является индикатором корректности проводимых расчетов. Аналогичный эффект наблюдается при расчете старшего показателя Ляпунова по точечным процессам ПП-модели. По-прежнему, обнаруживаются два информативных маркера: наличие оптимума зависимости $\lambda_1(\alpha)$ в области сравнительно небольших углов и изменение наклона $\lambda_1(\alpha)$

результаты качественно не зависят от таких параметров алгоритма, как l_{\min} , l_{\max} и объема выборки, однако варьирование этих параметров влияет на точность проводимых оценок, в частности, на величину α^* . Тем не менее общие закономерности, представленные на рис. 1, сохраняются.

Анализ межспайковых интервалов ПП-модели также проводился для модели (4) при условии, что в качестве входного сигнала была выбрана координата $x(t)$, а порог задан равенством $\theta = 0$. Для исследования эффекта влияния шума к последовательности межспайковых интервалов добавлялся нормально распределенный случайный процесс с интенсивностью D . Вычисленные зависимости $\lambda_1(\alpha)$ приведены

с ростом α при наличии шума в точечном процессе. Таким образом, предложенная модификация метода расчета старшего показателя Ляпунова может применяться для верификации проводимых оценок при анализе различных типов точечных процессов при наличии шума.

Отметим, что в данной работе представлены результаты исследований, проведенных на модели Ресслера. Однако, основываясь на данных предыдущих исследований [8,13,14] с использованием различных систем с хаотическим поведением (включая режимы развернутого хаоса и режимы хаотических и гиперхаотических колебаний в связанных автоколебательных системах), где в случае детерминированной динамики была показана эффективность методов реконструкции по точечным процессам, мы ожидаем, что для других моделей предложенная модификация метода также позволит проводить диагностику того, что исследуемая система является детерминированной маломерной системой с шумом, влияющим только на наблюдаемый точечный процесс (измерительный шум или шум наблюдений).

Проводимые исследования были поддержаны Российским научным фондом (Соглашение 14-12-00224).

Библиографический список

1. *Bialek W., Rieke F., De Ruyter van Steveninck R.R., and Warland D.* Reading a neural code // *Science*. 1991. Vol. 252. 1854.
2. *Sauer T.* Interspike interval embedding of chaotic signals // *Chaos*. 1995. Vol. 5. 127.
3. *Castro R. and Sauer T.* Correlation dimension of attractors through interspike intervals // *Phys. Rev. E*. 1997. Vol. 55. 287.
4. *Hegger R. and Kantz H.* Embedding of sequence of time intervals // *Europhys. Lett.* 1997. Vol. 38. 267.
5. *Castro R. and Sauer T.* Reconstructing chaotic dynamics through spike filters // *Phys. Rev. E*. 1999. Vol. 59. 2911.
6. *Racicot D.M. and Longtin A.* Interspike interval attractors from chaotically driven neuron models // *Physica D*. 1997. Vol. 104. 184.
7. *Sauer T.* Reconstruction of dynamical system from interspike intervals // *Phys. Rev. Lett.* 1994. Vol. 72. 3911.
8. *Pavlov A.N., Sosnovtseva O.V., Mosekilde E., and Anishchenko V.S.* Extracting dynamics from threshold-crossing interspike intervals: Possibilities and limitations // *Phys. Rev. E*. 2000. Vol. 61. 5033.
9. *Pavlov A.N., Sosnovtseva O.V., Mosekilde E., and Anishchenko V.S.* Chaotic dynamics from interspike intervals // *Phys. Rev. E*. 2001. Vol. 63. 036205.
10. *Sauer T., Yorke J.A., and Casdagli M.* Embedology // *J. Stat. Phys.* 1991. Vol. 65. 579.
11. *Wolf A., Swift J.B., Swinney H.L., and Vastano J.A.* Determining Lyapunov exponents from a time series // *Physica D*. 1985. Vol. 16. 285.
12. *Janson N.B., Pavlov A.N., Neiman A.B., and Anishchenko V.S.* Reconstruction of dynamical and geometrical properties of chaotic attractors from threshold-crossing interspike intervals // *Phys. Rev. E*. 1998. Vol. 58. R4.

13. *Pavlov A.N., Pavlova O.N., Mohammad Y.K., and Kurths J.* Quantifying chaotic dynamics from integrate-and-fire processes // *Chaos*. 2015. Vol. 25. 013118.
14. *Pavlov A.N., Pavlova O.N., Mohammad Y.K., and Kurths J.* Characterization of the chaos–hyperchaos transition based on return times // *Phys. Rev. E*. 2015. Vol. 91. 022921.
15. *Benettin G., Galgani L., Giorgilli A., and Strelcyn J.M.* Lyapunov characteristic exponents for smooth dynamical systems and for Hamiltonian systems: A method for computing all of them // *Meccanica*. 1980. Vol. 15. 9.

Поступила в редакцию 8.11.2015

После доработки 7.12.2015

LARGEST LYAPUNOV EXPONENT OF CHAOTIC OSCILLATORY REGIMES COMPUTING FROM POINT PROCESSES IN THE NOISE PRESENCE

Y. K. Mohammad¹, A. N. Pavlov^{1,2}

¹Saratov State University

²Saratov State Technical University

We propose a modified method for computing of the largest Lyapunov exponent of chaotic oscillatory regimes from point processes at the presence of measurement noise that does not influence on the system's dynamics. This modification allow a verification to be made of the estimated dynamical characteristics precision. Using the Rössler system in the regime of a phase-coherent chaos we consider features of application of this method to point processes of the integrate-and-fire and the threshold-crossing models.

Keywords: Oscillation, chaos, Lyapunov exponents, point processes.

References

1. *Bialek W., Rieke F., De Ruyter van Steveninck R.R., and Warland D.* Reading a neural code // *Science*. 1991. Vol. 252. 1854.
2. *Sauer T.* Interspike interval embedding of chaotic signals // *Chaos*. 1995. Vol. 5. 127.
3. *Castro R. and Sauer T.* Correlation dimension of attractors through interspike intervals // *Phys. Rev. E*. 1997. Vol. 55. 287.
4. *Hegger R. and Kantz H.* Embedding of sequence of time intervals // *Europhys. Lett.* 1997. Vol. 38. 267.
5. *Castro R. and Sauer T.* Reconstructing chaotic dynamics through spike filters // *Phys. Rev. E*. 1999. Vol. 59. 2911.
6. *Racicot D.M. and Longtin A.* Interspike interval attractors from chaotically driven neuron models // *Physica D*. 1997. Vol. 104. 184.
7. *Sauer T.* Reconstruction of dynamical system from interspike intervals // *Phys. Rev. Lett.* 1994. Vol. 72. 3911.
8. *Pavlov A.N., Sosnovtseva O.V., Mosekilde E., and Anishchenko V.S.* Extracting dynamics from threshold-crossing interspike intervals: Possibilities and limitations // *Phys. Rev. E*. 2000. Vol. 61. 5033.

9. *Pavlov A.N., Sosnovtseva O.V., Mosekilde E., and Anishchenko V.S.* Chaotic dynamics from interspike intervals // *Phys. Rev. E.* 2001. Vol. 63. 036205.
10. *Sauer T., Yorke J.A., and Casdagli M.* Embedology // *J. Stat. Phys.* 1991. Vol. 65. 579.
11. *Wolf A., Swift J.B., Swinney H.L., and Vastano J.A.* Determining Lyapunov exponents from a time series // *Physica D.* 1985. Vol. 16. 285.
12. *Janson N.B., Pavlov A.N., Neiman A.B., and Anishchenko V.S.* Reconstruction of dynamical and geometrical properties of chaotic attractors from threshold-crossing interspike intervals // *Phys. Rev. E.* 1998. Vol. 58. R4.
13. *Pavlov A.N., Pavlova O.N., Mohammad Y.K., and Kurths J.* Quantifying chaotic dynamics from integrate-and-fire processes // *Chaos.* 2015. Vol. 25. 013118.
14. *Pavlov A.N., Pavlova O.N., Mohammad Y.K., and Kurths J.* Characterization of the chaos–hyperchaos transition based on return times // *Phys. Rev. E.* 2015. Vol. 91. 022921.
15. *Benettin G., Galgani L., Giorgilli A., and Strelcyn J.M.* Lyapunov characteristic exponents for smooth dynamical systems and for Hamiltonian systems: A method for computing all of them // *Meccanica.* 1980. Vol. 15. 9.



Ясир Халаф Мохаммад родился в 1979 году в Багдаде (Ирак). Окончил физический факультет университета Тикрита, получив степени бакалавра (2002) и магистра (2005). Работал преподавателем факультета естественных наук университета Тикрита. В настоящее время обучается в аспирантуре Саратовского государственного университета имени Н.Г. Чернышевского на кафедре радиофизики и нелинейной динамики. Опубликовал в соавторстве несколько научных статей. Область научных интересов – нелинейная динамика, анализ структуры сигналов.

410012 Саратов, ул. Астраханская, 83
 Саратовский государственный университет имени Н.Г. Чернышевского
 E-mail: yasirkhalaf@yahoo.com



Павлов Алексей Николаевич – родился в Саратове (1973). Окончил физический факультет Саратовского государственного университета имени Н.Г. Чернышевского (1995). Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата (1998) и доктора (2009) физ.-мат. наук. Заведующий кафедрой «Электротехника и электроника» Саратовского государственного технического университета имени Гагарина Ю.А. Профессор кафедры радиофизики и нелинейной динамики СГУ. Область научных интересов: сложная динамика нелинейных систем, анализ структуры сигналов, приложения радиофизических методов в биологии и медицине. Автор более 150 научных статей, 8 монографий и учебных пособий.

410054 Саратов, ул. Политехническая, 77
 Саратовский государственный технический университет имени Гагарина Ю.А.
 410012 Саратов, ул. Астраханская, 83
 Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского
 E-mail: pavlov.alexeyn@gmail.com



О ВЛИЯНИИ ПОДМЕНЕННЫХ ГАРМОНИК НА ДИНАМИКУ АВТОКОЛЕБАНИЙ В ДИСКРЕТНОМ ВРЕМЕНИ

В. В. Зайцев, И. В. Стулов

Самарский государственный университет

Описан эффект, возникающий в дискретном времени при взаимодействии автоколебаний с подменными гармониками основной частоты. Показано, что он аналогичен эффекту захвата частоты (синхронизации) автоколебаний внешним гармоническим сигналом. Так как дискретный автогенератор формально является автономной системой, то эффект классифицирован как самозахват частоты или самосинхронизация. Самозахват проанализирован методом медленно меняющихся амплитуд. Указано на то, что через механизм самосинхронизации при определенных условиях осуществляется привязка частоты дискретных автоколебаний к частоте дискретизации.

Ключевые слова: Нелинейная динамика, автоколебательная система, дискретное время, подмена частот, синхронизация, захват частоты.

Введение

Известно, что в спектре дискретного во времени (ДВ) гармонического сигнала, частота которого превышает частоту Найквиста ω_N , наблюдается эффект подмены частот [1]. При дискретизации аналоговых сигналов с целью их последующей цифровой обработки подмена частот устраняется путем применения противоположенных фильтров. Если же частоту ω_N превышает частота ω гармоники, генерируемой в нелинейной дискретной системе, то такая гармоника должна рассматриваться как подменная. Она воспринимается системой как колебание с частотой ω' , вычисляемой с помощью выражения

$$\Omega' = F_t(\Omega - \text{floor}(\Omega)), \quad F_t(\Omega) = \begin{cases} \Omega, & 0 \leq \Omega < 0.5 \\ 1 - \Omega, & 0.5 \leq \Omega < 1 \end{cases}.$$

Оно содержит частоты, нормированные на частоту дискретизации ω_d : $\omega' = \omega_d \Omega'$, $\omega = \omega_d \Omega$. Влияние подмененных гармоник на динамику нелинейных ДВ-осцилляторов особенно велико, если их частоты попадают в полосы пропускания резонансных систем.

В настоящем сообщении анализируется эффект самосинхронизации автоколебательной системы (АКС) томсоновского типа, осциллирующей в дискретном времени. Эффект наблюдается в случае, когда частота подменной гармоники близка к частоте свободных автоколебаний. Внешний сигнал в этих условиях может «навязать» свою частоту автоколебательной системе, то есть имеет место синхронизация (захват частоты) АКС [2]. Стремление подменной гармоники захватить частоту основного сигнала приводит к тому, что в системе устанавливаются автоколебания с частотой Ω_{ss} , удовлетворяющей условию $\Omega_{ss} = F_t(N\Omega_{ss} - \text{floor}(N\Omega_{ss}))$, где N – номер гармоники. В частности, при $N = 3$ $\Omega_{ss} = 1/4$, а при $N = 5$ $\Omega_{ss} = 1/3$ или $\Omega_{ss} = 1/6$. Но так как АКС формально является автономной, то эффект можно классифицировать как самосинхронизацию, или самозахват частоты.

Исследования эффекта проведем радиофизическими методами, используя теорию колебаний, спектральный анализ и цифровую обработку сигналов.

1. Численный эксперимент с дискретным осциллятором ван дер Поля

В качестве объекта исследований примем предложенное в [3] дискретное отображение АКС томсоновского типа

$$\begin{aligned} y[n] - 2\alpha \cos(2\pi\Omega_0)y[n-1] + \alpha^2 y[n-2] = \\ = \gamma (\cos(2\pi\Omega_0)G(y[n-1]) - G(y[n-2])). \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь Ω_0 – нормированная на частоту дискретизации собственная частота контура, $\gamma > 0$ – параметр глубины положительной обратной связи, а параметр диссипации определяется добротностью Q аналогового прототипа

$$\alpha = \exp(-\pi\Omega_0/Q).$$

Функция нелинейности активного элемента АКС $G(y)$ в дальнейшем аппроксимируется неполным кубическим полиномом

$$G(y) = y - \frac{1}{3} y^3. \quad (2)$$

В таком случае отображение (1) следует считать одним из вариантов дискретного осциллятора ван дер Поля. Динамика осциллятора подробно исследована в статье [3] (за исключением рассматриваемой здесь самосинхронизации).

Численный эксперимент с ДВ-осциллятором (1) позволяет обнаружить эффект самозахвата. В эксперименте частота Ω_0 принимает ряд значений из заданного интервала. После завершения переходного процесса полученная реализация автоколебаний $y[n]$ обрабатывается по методу аналитического сигнала с использованием дискретного преобразования Гильберта. Таким способом выделяются действительная огибающая $|A[n]|$ и фаза $\psi[n]$ автоколебаний. Частота автоколебаний определяется по процессу изменения фазы $\psi[n]$

$$\Omega_a = \left\langle \frac{\psi[n] - \psi[n-1]}{2\pi} \right\rangle_N,$$

где угловые скобки означают усреднение по времени в пределах реализации длиной N . Физический смысл Ω_a состоит в том, что в гармоническом приближении – это мгновенная частота, а для квазигармонического режима – средняя частота автоколебаний.

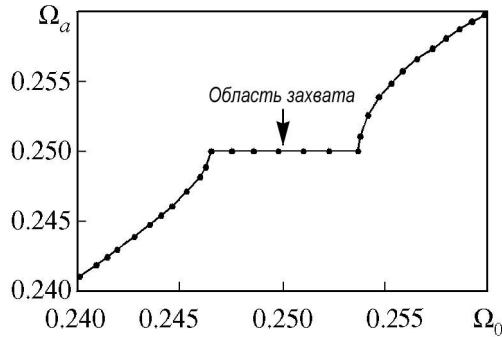


Рис. 1. Частото-частотная характеристика в окрестности $\Omega_{ss} = 0.25$

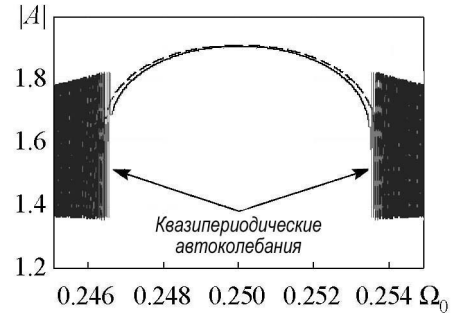


Рис. 2. Амплитудно-частотная характеристика в окрестности $\Omega_{ss} = 0.25$

На рис. 1 и рис. 2 представлены результаты численного эксперимента в ДВ-осцилляторе с параметрами $Q = 20$ и $\gamma = 0.2$, в котором частота Ω_0 меняется в окрестности $\Omega_{ss} = 0.25$. На рис. 1 показана зависимость Ω_a от собственной частоты контура.

Зависимость $\Omega_a = f(\Omega_0)$ типична для явления захвата частоты [2, 3]: в окрестности частоты Ω_{ss} расположена область захвата, в которой гармонические автоколебания совершаются с частотой $\Omega_a = \Omega_{ss}$, а при выходе из этой области устанавливается режим квазипериодических автоколебаний. Этот же вывод о типичности относится и к амплитудно-частотной характеристике АКС, изображенной на рис. 2 штриховой линией. А так как исследуемый автогенератор формально автономен, то речь в данном случае может идти о самозахвате (самосинхронизации).

Амплитудный спектр $S_y(\Omega)$ осцилляций $y[n]$ на рис. 3 позволяет выявить механизм самосинхронизации – это взаимодействие основной гармоники с подменной третьей гармоникой $3G$. При смещении спектральной линии автоколебаний на частоте Ω_a в направлении Ω_{ss} линия $3G$ перемещается во встречном направлении. В итоге происходит самозахват частоты. Во втором порядке теории возмущений этот эффект с участием подменной пятой гармоники наблюдается в окрестностях частот $\Omega_{ss} = 1/6$ и $\Omega_{ss} = 1/3$.

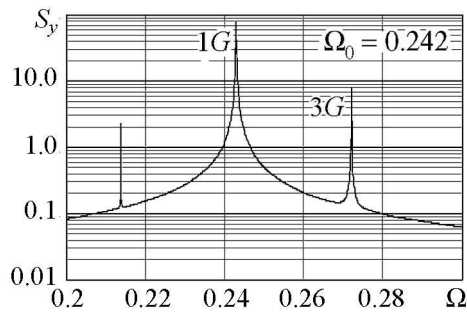


Рис. 3. Амплитудный спектр автоколебаний

2. Анализ самосинхронизации методом медленно меняющихся амплитуд

Динамику процесса самосинхронизации на частоте $\Omega_{ss} = 0.25$ проанализируем в приближении метода медленно меняющихся амплитуд (ММА). Метод широко используется в непрерывном времени. На ДВ-осцилляторы вида (1) он распространен в статье [4].

Генерируемые осциллятором автоколебания представим в виде

$$y[n] = \frac{1}{2}A[n]Z^n + \frac{1}{2}A^*[n]Z^{-n} = \frac{1}{2}A[n]Z^n + \text{к.с.}, \quad (3)$$

где $Z = \exp(j2\pi\Omega_{ss})$; $A[n]$ – комплексная амплитуда – медленная функция дискретного времени, связанная с действительными амплитудой $a[n]$ и фазой $\varphi[n]$ соотношением $A[n] = a[n] \exp(j\varphi[n])$.

Нелинейная функция (2) с аргументом (3) разлагается в ряд Фурье

$$G(y[n]) = \frac{1}{2} G_1(A)Z^n + \frac{1}{2} G_3(A)Z^{3n} + \text{к.с.}$$

с комплексными амплитудами гармоник

$$G_1(A) = \left(1 - \frac{1}{4}|A|^2\right)A, \quad G_3(A) = -\frac{1}{12}A^3. \quad (4)$$

Считая условием медленности приближенное выполнение равенств

$$A[n-1] - A[n-2] = A[n] - A[n-1],$$

для комплексной амплитуды автоколебаний (1) удается получить укороченное уравнение

$$A[n] = A[n-1] - \frac{\pi\Omega_{ss}}{Q}(1 - j\eta)A[n-1] + \frac{\gamma}{2}\left(G_1(A[n-1]) + G_3(A^*[n-1])\right), \quad (5)$$

где $\eta = 2Q(\Omega_0 - \Omega_{ss})/\Omega_{ss}$ – обобщенная расстройка частот. Следует особо отметить, что при выводе (5) учитывается равенство $Z^{-3n} = Z^n$, отражающее эффект подмены частот и обеспечивающее появление слагаемого $G_3(A^*)$ в укороченном уравнении.

Комплексному уравнению (5) (с учетом (4)) соответствует система из двух действительных уравнений для амплитуды $a[n]$ и фазы $\varphi[n]$

$$\begin{aligned} a[n] &= a[n-1] - \frac{\pi\Omega_{ss}}{Q}a[n-1] + \frac{\gamma}{2}G_1(a[n-1]) - \frac{\gamma}{24}a^3[n-1] \cos(4\varphi[n-1]), \\ \varphi[n] &= \varphi[n-1] + \eta \frac{\pi\Omega_{ss}}{Q} \frac{a[n-1]}{a[n]} + \frac{\gamma}{24} \frac{a^3[n-1]}{a[n]} \sin(4\varphi[n-1]). \end{aligned} \quad (6)$$

Некоторые результаты численного решения системы укороченных уравнений (6) отражены на рис. 2 и рис. 4.

На рис. 2 результат решения уравнений (6) для амплитуды $a[n]$ при квазистатическом возрастании частоты Ω_0 представлен непрерывной линией; штриховая линия показывает результат выделения огибающей осцилляций в отображении (1) с параметрами $Q = 20$, $\gamma = 0.2$. Близость графиков

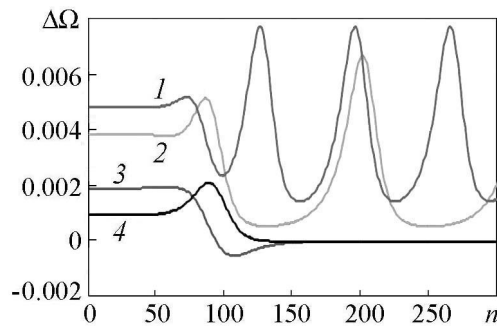


Рис. 4. Динамика поправки на частоту автоколебаний

является аргументом в пользу механизма самозахвата частоты с участием подмененных гармоник.

Рис. 4 иллюстрирует изменение мгновенной частоты автоколебаний в переходном процессе. На нем линиями 1–4 изображены графики временных зависимостей поправки на частоту

$$\Delta\Omega[n] = \frac{\varphi[n] - \varphi[n-1]}{2\pi}$$

для значений $\Omega_0 = 0.255; 0.254; 0.252$ и 0.251 . При этом мгновенная частота автоколебаний равна $\Omega_a[n] = \Omega_{ss} + \Delta\Omega[n]$.

Зависимости 1 и 2 имеют место в области квазипериодических автоколебаний (см. границы области захвата на рис. 1 и рис. 2). На начальных этапах зависимостей 3 и 4 наблюдаются процессы переходов к установившимся значениям φ_0 фазы захваченных автоколебаний. Для них из второго уравнения системы (6) следует соотношение

$$\sin(4\varphi_0) = -24\eta \frac{\pi\Omega_{ss}}{\gamma Q a_0^2}.$$

Устойчивым автоколебаниям соответствуют интервалы значений

$$-3\pi/8 + \pi m/2 < \varphi_0 < -\pi/8 + \pi m/2, \quad \text{где } m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots,$$

для которых $\cos(4\varphi_0) < 0$.

Амплитуда a_0 захваченных автоколебаний определяется из нелинейного алгебраического уравнения

$$-\frac{\pi\Omega_{ss}}{Q} + \frac{\gamma}{2a_0} G_1(a_0) + \sqrt{\left(\frac{\gamma}{24} a_0^2\right)^2 - \left(\eta \frac{\pi\Omega_{ss}}{Q}\right)^2} = 0,$$

которое имеет устойчивое решение

$$a_0 = \frac{3}{\sqrt{2}} \sqrt{1 - \frac{2\pi\Omega_{ss}}{\gamma Q} + \frac{1}{3} \sqrt{\left(1 - \frac{2\pi\Omega_{ss}}{\gamma Q}\right)^2 - 32\left(\frac{\pi\eta}{\gamma Q}\right)^2}}. \quad (7)$$

Расчет по формуле (7) дает график зависимости $a_0(\eta)$, совпадающий с графиком амплитудной характеристики захваченных автоколебаний на рис. 2 (непрерывная линия; $\Omega = 20, \gamma = 0.2$).

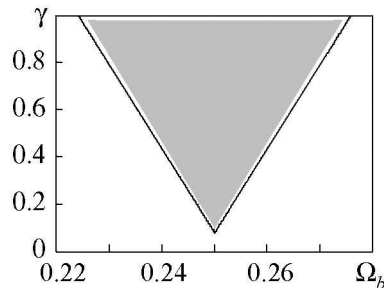


Рис. 5. Язык Арнольда для значений $Q = 20, \gamma = 0.2$ и $\Omega_{ss} = 0.25$

Условие неотрицательности второго подкоренного выражения в формуле (7) позволяет определить границы $\pm\eta_b$ области самозахвата

$$\eta_b = \frac{1}{2\sqrt{2}} \left(\frac{\gamma Q}{2\pi\Omega_{ss}} - 1 \right). \quad (8)$$

Область самозахвата (язык Арнольда) выделена на рис. 5 темным цветом. Отметим, что язык Арнольда не простирается до значений $\gamma = 0$, а начинается в

точке $\gamma_{st} = \pi/2Q$. Наличие такого порога имеет простое объяснение: значение γ_{st} – это порог самовозбуждения, ниже которого автоколебания отсутствуют. Поэтому отсутствует и самозахват.

Следует отметить, что полученные аналитические результаты справедливы в условиях применимости метода ММА. При значительных превышениях порога генерации (при $\gamma \sim 1$) эти условия нарушаются и, следовательно, зависимости (7) и (8) имеют лишь качественный характер.

Заключение

Рассмотренный здесь эффект самосинхронизации ДВ-автогенератора является спецификой нелинейной динамики в дискретном времени и не наблюдается во времени непрерывном. Дело в том, что в нелинейной ДВ-системе всегда присутствует сигнал тактовой частоты. Привязка частоты автоколебаний к субгармоникам тактовой частоты реализуется через механизм взаимодействия основной и подменных гармоник автоколебаний. Это же взаимодействие при высоких уровнях возбуждения в неизохронных системах может приводить к хаотизации ДВ-автоколебаний [5].

Заметим также, что проведенный анализ полностью согласуется с выводами качественной теории динамических систем. Действительно, в режиме самозахвата аттрактор дискретного отображения (1) на плоскости $(x[n-1], x[n])$ представляет собой совокупность неподвижных точек с рациональным числом вращения Ω_{ss} . По теореме о структурно устойчивых диффеоморфизмах окружности (см., например, [6]) такой аттрактор устойчив по отношению к малым вариациям параметров отображения, в частности, к вариациям частоты Ω_0 . Зависимость $\Omega_{ss} = f(\Omega_0)$ имеет вид так называемой чертовой лестницы. При этом горизонтальная часть графика на рис. 1 отображает одну ступеньку лестницы.

Библиографический список

1. *Оппенгейм А., Шафер Р.* Цифровая обработка сигналов. М.: Техносфера, 2006. 856 с.
2. *Пиковский А., Розенблюм М, Крутс Ю.* Синхронизация. Фундаментальное нелинейное явление. М.: Техносфера, 2003. 496 с.
3. *Анищенко В.С., Вадивасова Т.Е.* Лекции по нелинейной динамике. М.-Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2011. 516 с.
4. *Зайцев В.В.* О дискретных отображениях осциллятора ван дер Поля // Физика волновых процессов и радиотехнические системы. 2014. Т. 17, № 1. С. 35.
5. *Зайцев В.В., Зайцев О.В., Яровой Г.П.* Статистические оценки хаотических автоколебаний дискретного осциллятора ван дер Поля // Физика волновых процессов и радиотехнические системы. 2001. Т. 4, № 1. С. 18.
6. *Арнольд В.И.* Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978. 304 с.

Поступила в редакцию 7.09.2015
После доработки 9.12.2015

ABOUT INFLUENCE OF THE CHANGED HARMONICS ON DYNAMICS OF SELF-OSCILLATIONS IN DISCRETE TIME

V. V. Zaitsev, I. V. Stulov

Samara State University

The effect arising in discrete time at interaction of self-oscillations with higher harmonics of the main frequency is described. It is shown that it is similar to effect of capture of the frequency (synchronization) of self-oscillations by an external harmonic signal. As the discrete oscillator formally is autonomous system, the effect is classified as self-capture of frequency or self-synchronization. Self-capture is analysed by method of slow-changing amplitudes. It is specified that via the mechanism of self-synchronization the binding of frequency of discrete self-oscillations to sampling frequency is carried out.

Keywords: Nonlinear dynamics, self-oscillatory system, discrete time, change of frequencies, synchronization, capture of frequency.

References

1. *Oppenheim A., Schaffer R.* Discrete-time signal processing. Prentice-Hall Inc., New Jersey, 1999. 870 p.
2. *Pikovsky A., Rosenblum M., Kruhts J.* Synchronization: A universal concept in nonlinear sciences. Cambridge University Press, 2001. 402 p.
3. *Anishchenko V.S., Vadivasova T.E.* Lectures on nonlinear dynamics. M.-Izhevsk: SPC «Regular and chaotic dynamics», 2011. 516 p. (in Russian).
4. *Zaitsev V.V.* About discrete mapping the van der Pol oscillator. *Fizika volnovykh protsessov i radiotekhnicheskie sistemy.* 2014. Vol. 17, № 1. P. 35 (in Russian).
5. *Zaitsev V.V., Zaitsev O.V., Yarovoy G.P.* Statistical estimates of characteristics of chaotic self-oscillations of the discrete van der Pol oscillator // *Fizika volnovykh protsessov i radiotekhnicheskie sistemy.* 2001. Vol. 4, № 1. P. 18 (in Russian).
6. *Arnold V.I.* Additional chapters in the theory of ordinary differential equations. Nauka, Moscow, 1978. 304 p. (in Russian).



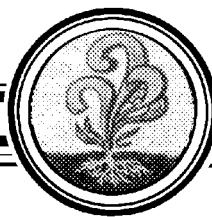
Зайцев Валерий Васильевич – родился в с. Борское Куйбышевской области (1952). Окончил Куйбышевский государственный университет (1975) и аспирантуру при Горьковском государственном университете (1980, кафедра А.Н. Малахова). Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук в ГГУ (1980). Профессор, заведующий кафедрой радиофизики Самарского государственного университета. Область научных интересов: автоколебательные системы, статистическая радиофизика, компьютерное моделирование а радиофизике. Автор более 100 статей в периодической печати.

443011 Самара, ул. Академика Павлова, д. 1
Самарский государственный университет
E-mail: zaitsev@samsu.ru



Стулов Игорь Валерьевич – родился в Самаре (1989). Окончил Самарский государственный университет (2011). Аспирант физического факультета СамГУ. Область научных интересов: автоколебательные системы.

443011 Самара, ул. Академика Павлова, д. 1
Самарский государственный университет
E-mail: stulov@ssu.samara.ru



БЕСТОКОВАЯ ПЕРЕСТРОЙКА И СТАБИЛИЗАЦИЯ ЧАСТОТЫ АВТОКОЛЕБАНИЙ КЛИНОТРОНА ТЕРАГЕРЦОВОГО ДИАПАЗОНА

И. П. Безгина, В. Д. Ерёмка, Т. А. Макулина, И. М. Мыценко

Институт радиофизики и электроники им. А.Я. Усикова, НАН Украины

Генераторные лампы обратной волны терагерцового диапазона, карсинотроны и клинотроны, находят широкое применение в радиоэлектронных системах при решении фундаментальных и прикладных задач. Нестабильность частоты выходного сигнала упомянутых ламп не хуже 10^{-4} . Перестройку частоты выходного сигнала карсинотронов и клинотронов, как правило, осуществляют путем изменения величины рабочего напряжения, то есть с затратами энергии в цепи управления. В статье описана конструкция клинотрона терагерцового диапазона, обеспечивающая перестройку и стабилизацию частоты выходного сигнала генератора без затрат мощности в цепи управления. На основании результатов выполненных исследований сделан вывод о возможности реализации перестройки частоты автоколебаний генераторных клинотронов терагерцового диапазона, который в отличие от традиционных способов: не приводит к увеличению в спектре излучения дополнительных спектральных составляющих; позволяет реализовать перестройку частоты автоколебаний в интервале от сотен МГц до единиц ГГц; обеспечить стабильность, близкую к стабильности частоты колебаний эталонного резонатора.

Ключевые слова: Клинотрон терагерцового диапазона, бестоковая перестройка и стабилизация частоты автоколебаний.

Введение

Значительный вклад в развитие теории и техники стабилизации частоты источников высокочастотных электромагнитных колебаний сделали пионерские работы многочисленных ученых и радиоинженеров XX века. В работах [1–3] сделана попытка систематизировать материалы по данной теме. Большинство способов стабилизации являются универсальными для всех диапазонов частот. Однако существует ряд особенностей в способах стабилизации частоты в коротковолновых диапазонах. Например, в терагерцовом диапазоне возбудить кварцевый резонатор затруднительно. Поэтому для реализации кварцевой стабильности в коротковолновых диапазонах применяют различные системы умножения частоты.

Эффективным способом стабилизации частоты в данном случае является применение пассивных эталонов частоты в виде объемных или высокодобротных открытых резонаторов. Сложности возрастают при обеспечении стабилизации в интервале частот, по сравнению с задачей стабилизации на фиксированной частоте. Свои специфические особенности имеют способы стабилизации частоты генераторов микроволнового излучения непрерывного действия с большой и малой мощностью выходного сигнала, а также генераторов импульсного действия. Среди существующих способов стабилизации частоты автоколебаний генераторов микроволнового излучения можно выделить три характерных группы:

- способы параметрической стабилизации;
- способы стабилизации с помощью электромеханических систем;
- способ стабилизации автоматической подстройкой частоты.

Для *параметрических* способов стабилизации частоты характерным является стремление по возможности сохранять неизменными параметры тех элементов и узлов генератора, которые наиболее ощутимо влияют на частоту автоколебаний генераторов. Резонаторная система стабилизируемого генератора должна обладать высокой эталонной добротностью. С этой целью применяют резонаторные системы с термокомпенсацией или с термостабилизацией. Способы термокомпенсации и термостабилизации обеспечивают достижение относительной нестабильности частоты ориентировочно 10^{-8} – 10^{-4} . Относительная нестабильность в пределах 10^{-8} – 10^{-9} достижима путем термостабилизации резонатора из материала, который становится сверхпроводящим при криогенных температурах. В предложенном в работе [4] способе стабилизации частоты высокая добротность объемного резонатора достигается при температуре окружающей среды, что обеспечивает относительную нестабильности частоты в пределах 10^{-4} – 10^{-5} .

Стабилизация частоты автоколебаний микроволновых генераторов *с помощью электромеханических колебательных контуров* основана на применении высоких эталонных колебательных свойств ряда минералов: кварца, сегнетовой соли, титаната бария, турмалина. Резонаторы из упомянутых материалов могут обеспечить высокую добротность Q_0 , приблизительно 10^6 . Однако применение таких резонаторов в схемах стабилизации генераторных клинотронов терагерцового диапазона весьма затруднительно из-за сложностей, возникающих при создании умножителей частоты с высоким коэффициентом умножения.

Способ стабилизации автоматической подстройкой частоты (АПЧ) является наиболее распространенным. Генераторы, стабилизированные способом АПЧ, могут работать не только в режиме генерирования автоколебаний с частотой повышенной стабильности, но и в режиме фазовой и частотной модуляции. Принцип стабилизации по схеме АПЧ основан на сравнении частоты или фазы стабилизируемого генератора с частотой или фазой колебаний эталонного резонатора. В предложенном ниже способе стабилизации частоты в качестве эталонного резонатора применен высокодобротный открытый резонатор, обладающий высокими качествами (пассивный эталон).

Цель данной статьи – представить информацию для потребителей вакуумных источников микроволнового излучения о разработке: способа стабилизации частоты автоколебаний клинотронов терагерцового диапазона и устройства генератора для реализации предложенного способа стабилизации без затрат мощности в цепи управления частотой.

1. Устройство клинотрона для реализации бестоковой перестройки и стабилизации частоты его автоколебаний

Клинотронный эффект в лампе обратной волны О-типа (ЛОВО) миллиметрового диапазона с ленточным электронным потоком и замедляющей системой (ЗС) в виде плоской гребенки первыми наблюдали А.Я. Кириченко, Г.Я. Левин и А.Я. Усиков (1956), исследуя в эксперименте характеристики разрабатываемых ЛОВ [5–8]. Клинотронный эффект проявляется в значительном увеличении мощности генерируемых электромагнитных колебаний при наличии острого угла между рабочей поверхностью ЗС и направлением движения ленточного электронного потока. В клинотроне функция периодической ЗС (гребенки) совмещена с функцией коллектора электронов [5–10]. Необходимость наклона ленточного электронного потока к рабочей поверхности плоских периодических ЗС для повышения эффективности энергообмена электронов с электрической компонентой замедленной волны электромагнитного поля в ЛОВО миллиметрового и субмиллиметрового диапазонов в настоящее время является неоспоримым требованием [7]. Известно, что в традиционных ЛОВО миллиметрового и субмиллиметрового диапазонов, таких как клинотрон [6] и карсинотрон [11], электрическая перестройка и стабилизация частоты автоколебаний осуществляется путем изменения величины рабочего высоковольтного напряжения (изменения рабочего тока). В ИРЭ им. А.Я. Усикова НАН Украины предложен генераторный клинотрон с бестоковой перестройкой частоты выходного сигнала, реализована его конструкция, исследованы энергетические и частотные характеристики экспериментальных образцов таких генераторов [9, 10].

На рис. 1 схематически показана конструкция клинотрона с электроннооптической системой (ЭОС) 1, формирующей ленточный электронный поток 2, падающий под острым углом α на рабочую поверхность плоской косой гребенки 3. Над рабочей поверхностью косой гребенки 3 установлен управляющий электрод 4 с вводом 5 управляющего сигнала, изолированным от вакуумплотного корпуса 6 генераторного клинотрона. Плоский управляющий электрод 4 установлен параллельно оси ЭОС 1. Путем подачи на ввод 5 управляющего сигнала осуществляется бестоковая подстройка и перестройка частоты автоколебаний клинотрона [9, 10].

Для обеспечения однозначности при изменении частоты автоколебаний генераторного клинотрона под действием управляющего сигнала, а также для увеличения крутизны частотно-вольтной характеристики генератора при бестоковой перестройке частоты ламели гребенки выполнены перпендикулярными к рабочей поверхности структуры и под углом θ к её продольной оси, как показано на рис. 2. Здесь же представлена векторная диаграмма скорос-

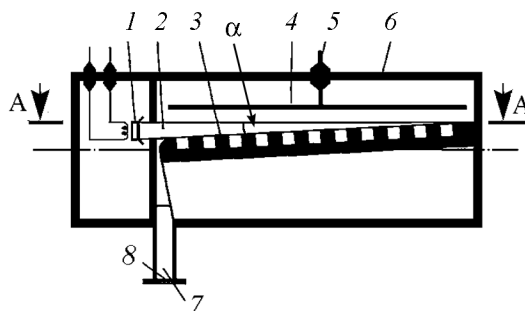


Рис. 1. Схематическое изображение генераторного клинотрона с бестоковым управлением частотой автоколебаний: 1 – ЭОС; 2 – ленточный электронный поток; 3 – ЗС типа плоская косая гребенка; 4 – плоский управляющий электрод; 5 – ввод управляющего сигнала; 6 – вакуумноплотный корпус клинотрона; 7 – волноводный вывод энергии; 8 – окно вывода энергии

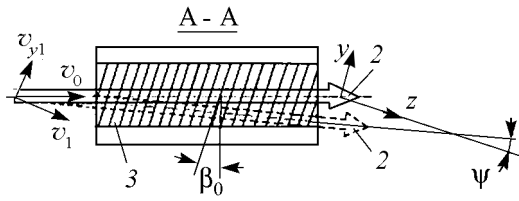


Рис. 2. Диаграмма составляющих скоростей электронов при перемещении ленточного электронного потока в скрещенных электрическом и магнитном полях над рабочей поверхностью плоской кривой гребенки

тей электронов ленточного электронного потока в системе координат кривой гребенки. Такой клинотрон терагерцового диапазона пакетирован с магнитной системой (на рис. 1 не показана).

До подачи управляющего сигнала электроны потока перемещаются в направлении оси η со скоростью \vec{v}_0 над рабочей поверхностью гребенки 3 в продольном магнитном поле \vec{B} . В потоке электрон e испытывает воздействие силы Лоренца

$$\vec{F} = e [\vec{v}_0 \times \vec{B}]. \quad (1)$$

Под действием силы Лоренца в плоскости периодической замедляющей структуры (кривой гребенки 3) происходит отклонение направления движения ленточного электронного потока 2 на угол ψ от направления движения вдоль оси η (см. рис. 2). При $\vec{E}_{упр} = 0$ заряженные частицы электронного потока 2 перемещаются со скоростью $v_0 = v_{e\theta}$. Так как электроны посредством компоненты скорости v_z взаимодействуют с электрической компонентой электромагнитного поля замедленной волны, то при изменении напряженности поля управляющего сигнала $\vec{E}_{упр} \neq 0$ характеристики клинотрона с управляющим электродом изменяются, изменится и компонента скорости v_z . Для того чтобы изменение компоненты v_z скорости электрона от угла ψ поворота ленточного электронного потока 2 было однозначным, ЗС выполнена в виде кривой гребенки. В периодической структуре (однородной вдоль оси Oy и периодической вдоль оси Oz) распространение поверхностной волны в плоскости $x = 0$ можно рассматривать в произвольном направлении [11]. Заметим, что фазовая скорость v_y распространения волны вдоль оси Oy равна скорости света c в свободном пространстве, а в направлении оси Oz скорость волны замедлена до величины v_z .

Выражение для скорости волны, распространяющейся относительно оси Oz под произвольным углом ψ , имеет вид [11]

$$v_\psi = \frac{v_z}{\cos \psi - v_z/v_y \sin \psi}. \quad (2)$$

В случае больших замедлений фазовой скорости ($c/v_z \geq 10$) для угла $\psi \leq 45^\circ$ соотношение (2) упрощается

$$v_\psi = \frac{v_z}{\cos \psi}. \quad (3)$$

Естественно, возбуждение волн электромагнитного поля в периодической структуре можно осуществить с помощью электронного потока, который движется над её рабочей поверхностью в плоскости $x = 0$ под произвольным углом ψ к оси Oz . Тогда, при условии выполнения соотношения (3), можно утверждать, что изменение направления движения электронного потока в плоскости $x = 0$ при $\vec{v}_{e\psi} = \text{const}$ приводит к изменению проекции вектора $\vec{v}_{e\psi}$ на ось Oz , то есть компоненты v_{ez} . Это равнозначно изменению величины периода ЗС (см. рис. 2). Если предположить,

что при этом выполняется условие примерного синхронизма скорости электронного потока и волны электромагнитного поля в периодической структуре ($\vec{v}_{e\psi} \approx \vec{v}_\psi$), то с изменением направления движения потока электронов должна измениться и частота возбуждаемых электромагнитных колебаний в соответствии с законом дисперсии периодической структуры [12].

При небольших изменениях длины генерируемой волны λ и возбуждении в клинотроне «косой гребенки», имеющей аномальную дисперсию на первой отрицательной пространственной гармонике, выполняется соотношение

$$\frac{c}{v_z} \cong \kappa \lambda, \quad (4)$$

где κ – коэффициент пропорциональности, зависящий от λ [9]. Таким образом, при пропускании вблизи рабочей поверхности гребенки потока электронов, перемещающегося с постоянной скоростью, и изменении направления его движения в плоскости $x = 0$ электронно-волнового взаимодействия путем изменения угла ψ можно управлять величиной длины волны генерируемых электромагнитных колебаний согласно соотношению

$$\lambda \cong \frac{c}{\kappa \vec{v}_{e\psi} \cos \psi}. \quad (5)$$

При изменении угла ψ в интервале от 0 до 10° можно производить изменение частоты на несколько десятых долей процента, что в восьмимиллиметровом диапазоне составляет около сотни МГц [12].

Если ленточный электронный поток в клинотроне сопровождают продольным магнитным полем \vec{B} конечной величины, то направление движения электронного потока над рабочей поверхностью периодической замедляющей структуры (в данном случае гребенки) можно изменять путем воздействия на него поперечным электрическим полем. Поперечное электрическое поле в пространстве взаимодействия клинотрона терагерцового диапазона можно создать, например, поместив на некотором расстоянии b над рабочей поверхностью гребенки ($x = 0$) электрод 4 (см. рис. 1) в виде проводящей пластины, снабженной вводом 5 для управляющего сигнала и изолированной от корпуса 6 генератора. Управляющий сигнал $U_{упр}$, поданный на ввод 5, создает между пластиной 4 и рабочей поверхностью плоской косой гребенки 3 электрическое поле \vec{E}_x . Вектор \vec{E}_x перпендикулярен направлению $O\eta$. В скрещенных электрическом и магнитном полях электронный поток 2 испытывает дрейф в направлении оси Oy или оси Oz (в зависимости от полярности управляющего сигнала). Скорость дрейфа $v_{др}$ заряженных частиц можно определить с помощью соотношения [12]

$$v_{др} = 10^8 \frac{E_x}{B} = \frac{U_{упр}}{Bb}. \quad (6)$$

До подачи управляющего сигнала $U_{упр}$ на электрод 4 ленточный электронный поток 2 перемещается вдоль оси $O\eta$ под углом $\theta \neq 0$ к оси Oz . Поданный на электрод 4 управляющий сигнал $U_{упр}$ изменит направление движения электронов на угол ψ относительно направления $O\eta$, при этом

$$v_{др} = \vec{v}_{e\psi} \sin \psi, \quad (7)$$

а проекция $\vec{v}_{e\psi}$ на ось Oz

$$v_{ez} = \vec{v}_{e\psi} \cos(\theta \pm \psi). \quad (8)$$

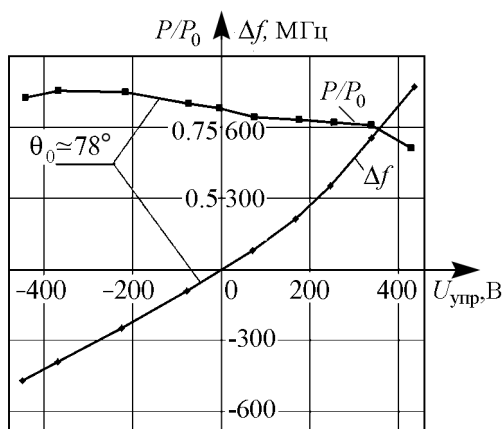


Рис. 3. Зависимость изменения Δf частоты автоколебаний генераторного клинотрона терагерцового диапазона от величины напряжения $U_{упр}$ управляющего сигнала на управляющем электроде

работы на длине волны $\lambda = 0.8$ мм, при $\theta \approx 78^\circ$ обеспечивает крутизну $\gamma = df/dv_{\psi} \approx 3.3$ Мг/В частотно-вольтовой характеристики генераторного клинотрона терагерцового диапазона с управляющим электродом. Диапазон бестоковой перестройки частоты автоколебаний генераторного клинотрона с управляющей пластиной составляет примерно 0.3% рабочей частоты и определяется, в основном, шириной резонансного участка дисперсионной характеристики. При упрощенном описании физики процессов бестоковой перестройки частоты в генераторном клинотроне с пластиной не учитываются следующие эффекты:

- влияние напряжения управляющего сигнала на клинотронный эффект,
- снос электронного потока,
- ортоклинотронное влияние на эффективность электронно-волнового взаимодействия,
- явления в пространстве взаимодействия клинотрона при изменении направления магнитного поля в зазоре магнита.

Зависимость изменения частоты автоколебаний $\Delta f = f(U_{упр})$ генераторного клинотрона с рабочей частотой $f_0 = 0.5$ ТГц представлена на рис. 3.

2. Схема бестоковой стабилизации частоты автоколебаний клинотрона терагерцового диапазона

Конструкция генераторного клинотрона терагерцового диапазона с бестоковой перестройкой частоты выходного сигнала реализована с применением оригинального способа бестоковой стабилизации частоты его автоколебаний. В работах [12, 13] рассмотрен способ, использующий амплитудную модуляцию части сигнала стабилизируемого генератора. Данный прием позволяет получить высокий коэффициент стабилизации при наличии затрат мощности в цепи управления, но без добавления в спектр автоколебаний дополнительных составляющих. Предлагаемая новая схема

С помощью управляющего сигнала, подаваемого на электрод 4, можно изменять частоту автоколебаний клинотрона согласно соотношению

$$f = \kappa \left(v_0 \cos \theta \pm 10^8 \frac{U}{bB} \sin \theta \right). \quad (9)$$

Величину угла θ нарезки прямоугольных щелевых резонаторов гребенки выбирают, исходя из необходимой крутизны частотно-вольтовой (по величине напряжения управляющего сигнала) характеристики генераторного клинотрона. Чем меньше угол θ , тем больше крутизна частотно-вольтовой характеристики клинотрона терагерцового диапазона. Косая гребенка, рассчитанная для

стабилизации (рис. 4) путем фазовой автоподстройки частоты автоколебаний генераторного клинотрона терагерцового диапазона исключает затраты мощности в цепи управления. Она содержит генераторный клинотрон *1* непрерывного действия, волноводный направленный ответвитель *2*, амплитудный модулятор *3*, эталонный резонатор *4*, амплитудный детектор *5*, избирательный усилитель *6*, опорный генератор *7*, фазовый детектор *8*, усилитель постоянного тока *9*. Устройство работает следующим образом. Выходной сигнал стабилизируемого генераторного клинотрона *1*

$$u_H(t) = U_H \cos(\omega t + \theta_0) \quad (10)$$

(здесь θ_0 – начальная фаза колебания) через направленный ответвитель *2* поступает на вход амплитудного модулятора *3*, где осуществляется модуляция его амплитуды сигналом с частотой Ω опорного генератора *7*

$$U_\Omega(t) = U_\Omega \cos(\Omega t + \gamma_0).$$

Здесь γ_0 – начальная фаза опорного напряжения. На выходе амплитудного модулятора *3* формируется сигнал, состоящий из трех гармонических составляющих

$$U(t) = U_H \cos(\omega_H t + \theta_0) + \frac{MU_H}{2} \cos[(\omega_H + \Omega)t + \theta_0 + \gamma] + \frac{MU_H}{2} \cos[(\omega_H - \Omega)t - \theta_0 - \gamma],$$

где M – коэффициент модуляции. Этот сигнал поступает на вход эталонного резонатора *4*, настроенного на центральную частоту ω_0 . Спектральная диаграмма входного напряжения, а также частотные зависимости модуля $Y(\omega)$ и аргумента $\arg Y(\omega)$ входной проводимости резонатора *4* для этого случая изображены на рис. 5 [13]. Так как частотные характеристики $Y(\omega)$ симметричны, то для боковых гармоник тока можно написать

$$I_{\text{верхн}} = I_{\text{нижн}} = \frac{M}{2} U_H y_\delta,$$

где $y_\delta = Y_H / \sqrt{1 + (2Q\Omega/\omega_H)^2}$ – модуль входной проводимости при расстройке $\Delta\omega = \pm\Omega$, Q – добротность резонатора. Фазовые сдвиги между боковыми гармониками напряжения и тока равны

$$\varphi_{\text{уверхн}} = -\arctg\left(2Q\frac{\Omega}{\omega_H}\right) = -\varphi_6,$$

$$\varphi_{\text{унижн}} = \arctg\left(2Q\frac{\Omega}{\omega_H}\right) = \varphi_6.$$

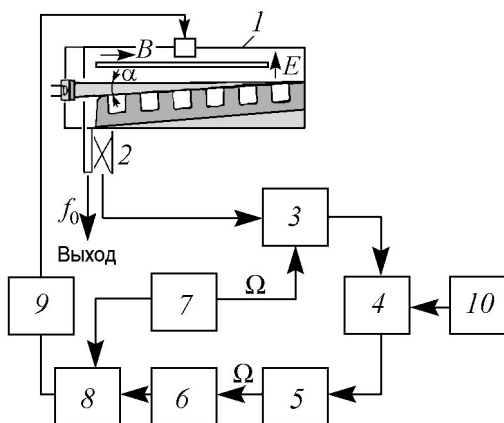


Рис. 4. Схема бестоковой стабилизации частоты автоколебаний клинотрона терагерцового диапазона: *1* – клинотрон с косою ЗС и ленточным электронным потоком, *2* – направленный ответвитель, *3* – амплитудный модулятор, *4* – эталонный резонатор, *5* – амплитудный детектор, *6* – избирательный усилитель, *7* – опорный генератор, *8* – фазовый детектор, *9* – усилитель постоянного тока, *10* – источник управляющего сигнала

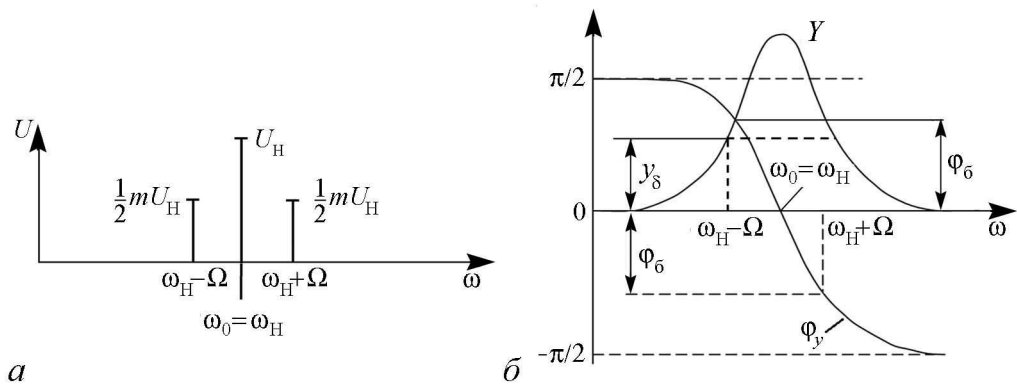


Рис. 5. *a* – спектральная диаграмма входного напряжения, *b* – частотная зависимость модуля $Y(\omega)$ и аргумента $\varphi(\omega)$ входной проводимости резонатора при $\omega_0 = \omega_H$ [13]

После прохождения через эталонный резонатор 4 сигнал (10) приобретает следующий вид:

$$U(t) = U_H \cos(\omega_H t + \theta_0) + \frac{M' U_H}{2} \cos[(\omega_H + \Omega)t + \theta_0 + \gamma] + \frac{M' U_H}{2} \cos[(\omega_H - \Omega)t - \theta_0 - \gamma],$$

где коэффициент модуляции в резонаторе

$$M' = \frac{M}{\sqrt{1 + (2Q(\Omega/\omega_H))^2}}.$$

Из формулы видно, что $M' < M$, то есть глубина модуляции меньше глубины модуляции приложенного напряжения.

Кроме этого, необходимо отметить, что огибающая выходного напряжения сдвинута по фазе относительно огибающей входного напряжения на угол φ_δ . Этот сдвиг по мере увеличения частоты опорного генератора 7 стремится к $\pi/2$.

В отличие от LC-контуров, для резонаторов не существует простых аналитических выражений для этих величин, справедливых в широкой полосе частот. Эти соотношения приемлемы при небольших расстройках $\Delta\omega = \omega_H - \omega_0$ по сравнению с ω_0 [14, 15].

В случае, если резонансная частота резонатора 4 ω_r не совпадает с несущей частотой ω_{H0} генератора 1, характер явлений изменяется. Расположение спектра входного сигнала относительно резонансной кривой резонатора 4 иллюстрируется рис. 5. Несовпадение частот ω_H и ω_r приводит к асимметрии боковых частот на выходе резонатора 4. Возникновение асимметрии поясняется векторной диаграммой выходных напряжений, представленной на рис. 6. На этой диаграмме вектор OD представляет собой несущее колебание, фаза которого запаздывает относительно фазы входного колебания (принятой равной нулю) на угол θ_0 , что соответствует положительной расстройке $\Delta\omega = \omega_H - \omega_0$. Амплитуда колебания верхней боковой частоты (вектор DC₁) значительно меньше, чем амплитуда колебания нижней боковой частоты (вектор DC₂). Длина равнодействующего вектора OF изменяется по сложному закону, не совпадающему с синусоидальным законом изменения огибающей входного колебания.

Сигнал с выхода резонатора 4 подается на амплитудный детектор 5, выходное напряжение которого пропорционально огибающей модулированного колебания. Нарушение симметрии амплитуд и фаз колебаний боковых частот приводит к нелинейным искажениям. Эти искажения проявляются в возникновении новых частот, кратных частоте Ω опорного генератора 7. Далее сигнал с выхода амплитудного детектора 5 поступает на вход избирательного усилителя 6, который настроен на частоту Ω опорного генератора 7. Усилитель выделяет и усиливает первую гармонику Ω , фаза которой зависит от расстройки $\Delta\omega$. Сигнал после усилителя 6 применяют в системе автоподстройки частоты генератора 1. Это происходит следующим образом. Уход частоты стабилизируемого генератора 1 и несовпадение частот ω_H и ω_p приводит к асимметрии боковых частот $\omega_H - \Omega$ и $\omega_p + \Omega$ на выходе резонатора 4. При этом огибающая выходного сигнала получает дополнительный угол сдвига фаз $\Delta\gamma(\Delta\omega)$, являющийся функцией расстройки $\Delta\omega$ и изменяющий знак при переходе через точку, соответствующую резонансной частоте ω_p . Выходной сигнал избирательного усилителя 6 подают на один вход фазового детектора 8, на его другой вход подают сигнал с частотой Ω от опорного генератора 7. В состав опорного генератора 7 входит регулируемый фазовращатель, который позволяет исключить влияние набега фаз и при $\Delta\omega = 0$ установить выходное напряжение фазового детектора 8 равным нулю. Далее сигнал рассогласования усиливают (усилителем 9) до необходимой величины и подают на ввод управляющего электрода (см. рис. 1) генераторного клинотрона 1. Перестройку частоты автоколебаний генераторного клинотрона 1 можно осуществить двумя способами.

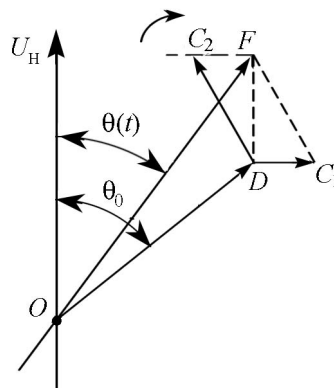


Рис. 6. Векторная диаграмма выходных напряжений

Первый способ содержит операцию перестройки частоты автоколебаний клинотрона путем изменения резонансной частоты ω_p эталонного резонатора 4 с помощью источника 10 управляющего сигнала, напряжение которого воздействует на реактивность эталонного резонатора 4.

Второй способ содержит операцию механической перестройки резонансной частоты ω_p эталонного резонатора 4. Второй способ обеспечивает возможность достижения более высокой стабильности резонансной частоты ω_p .

Описанная выше схема была применена для стабилизации частоты генератора дифракционного излучения ($\lambda = 8$ мм) [12] и способствовала процессу изучения спектра генерируемых им колебаний. Кроме того, было проведено макетирование схемы стабилизации на более низких частотах [13]. Как видно из рис. 5 и проведенной экспериментальной проверки, частота модуляции Ω должна быть соизмерима с полосой пропускания эталонного резонатора. Её можно определить с помощью соотношения

$$\Omega \approx \frac{\omega_H}{2Q}.$$

В этом случае боковые частоты $\omega_H \pm \Omega$ при $\omega_H = \omega_p$ попадут на склон амплитудно-

частотной характеристики резонатора 4 с наибольшей крутизной, где будем наблюдать максимальное изменение их амплитуд, а следовательно, угла сдвига фаз огибающей. В терагерцовом диапазоне радиоволн при реальных добротностях эталонных резонаторов частота модуляции может быть выбрана в пределах 100–1000 МГц, что требует применения высокочастотного фазового детектора.

Выводы

Предложена и описана оригинальная схема фазовой автоматической бестоковой подстройки частоты автоколебаний клинотронов терагерцового интервала частот. Описана конструкция ТГц клинотрона, обеспечивающая возможность осуществления бестоковой перестройки и модуляции частоты автоколебаний клинотрона терагерцового диапазона в полосе 0.3% относительно выбранной рабочей точки, а также бестоковой стабилизации частоты его автоколебаний без добавления в их спектр дополнительных составляющих. Показано, что описанная схема стабилизации частоты колебаний выходного сигнала генераторного клинотрона терагерцового диапазона может обеспечить относительную нестабильность не хуже относительной нестабильности частоты колебаний эталонного резонатора.

Библиографический список

1. *Нейман М.С.* Стабилизация частоты в радиотехнике. Связьиздат, 1937. 157 с.
2. *Грошковский Я.* Генерирование высокочастотных колебаний и стабилизация частоты. М.: ИЛ, 1953. 364 с.
3. *Бычков С.И., Буренин Н.И., Сафаров Р.Т.* Стабилизация частоты генераторов СВЧ. М.: Советское радио, 1962. 376 с.
4. *Ковшов Ю.С., Иванов А.И., Кишко С.А., Пономаренко С.С., Кулешов А.Н.* Стабилизация частоты электромагнитных колебаний в ЛОВ-генераторах субмиллиметрового диапазона // Вісник Харківського національного університету ім. В.Н. Каразіна. 2013. №1094. Сер. «Радіофізика та електроніка». Вып. 23. С. 77.
5. А. с. №341113 СССР, МПК Н01 J 25/00. Лампа обратной волны / Г.Я. Левин (СССР). Заявл. 17.12.1956 // Бюллетень. Открытия, изобретения. 1972. № 25. С. 201.
6. Клинотрон // Г.Я. Левин, А.И. Бородкин, А.Я. Кириченко и др. / Под ред. А.Я. Усикова. Киев: Наук. думка, 1992. 200 с.
7. *Кириченко А.Я., Яковенко В.М.* Клинотрону – 50 // Радиофизика и электроника. Сб. научн. тр. НАН Украины. ИРЭ им. А.Я. Усикова. Харьков, 2007. Т. 12, спец. вып. С. 5.
8. *Ерёмка В.Д.* Вакуумные источники электромагнитного излучения терагерцового интервала частот: Зигзаги развития от клинотрона до клиноорбитрона // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2013. Т. 21, № 1. С. 7.
9. *Альтиулер Ю.Г., Татаренко А.С.* Лампы малой мощности с обратной волной. М.: Сов. Радио, 1963. 296 с.
10. А. с. №555751 СССР, МКИ Н01 J 25/00. Лампа обратной волны / В.Д. Ерёмка, А.Я. Кириченко, В.А. Солодовник (СССР). Заявл. 08.01.1976 // Бюллетень. Открытия, изобретения. 1979. № 10. С. 189.

11. *Силин Р.А., Сазонов В.П.* Замедляющие системы. М.: Сов. радио, 1966. 632 с.
12. *Ерёмка В.Д., Кириченко А.Я., Солодовник В.А.* Исследование возможности бес-токового управления частотой ЛОВО – клинотрона // Труды Института радио-физики и электроники АН УССР. 1977. Т. 23. С. 60.
13. А. с. №892741 СССР, МПК H03 L 7/06. Устройство стабилизации частоты генератора / И.М. Балаклицкий, Ю.В. Майстренко, И.М. Мыщенко (СССР). Заявл. 29.10.1979 // Бюллетень. Открытия, изобретения. 1981. № 47. С. 171.
14. *Мыщенко И.М., Роечко А.Н., Чернявский И.Ю.* Устройство для стабилизации частоты генераторов СВЧ // 36. Наукових праць Харківський військовий універ-ситет. Харків, 2002. Вып. 3(41). С. 108.
15. *Гоноровский И.С.* Радиотехнические цепи и сигналы. М.: Сов. радио, 1971. 672 с.
16. *Семенов А.Н.* Техническая электродинамика. М.: Связь, 1973. 480 с.

Поступила в редакцию 25.06.2015

CURRENT-LESS TUNING AND CONTROL OF SELF-OSCILLATIONS FREQUENCY TERAHERTZ RANGE KLYNOTRON

I. P. Bezgina, V. D. Yeryomka, T. A. Makulina, I. M. Mytsenko

A.Ya. Usikov Institute of Radiophysics and Electronics, Kharkiv, NAS of Ukraine

Terahertz-range backward wave oscillator – carcinotrons and klynotrons are widely used in radioelectronics systems for solving fundamental and applied problems. Instability of the output signal frequency of the said lamps is not worse than 10^{-4} . The frequency of the carcinotron and klynotron output signal as a rule carried out by changing the operating voltage, i.e. with the expenditure of energy in the control circuit. In this paper, we report on the design of the terahertz electromagnetic radiation klynotron oscillator, which provides an implementation method current-less tuning and stabilization frequency of its output signal. Based on the results of studies concluded that the possibility of the process of restructuring oscillation frequency terahertz range klynotron oscillator, which, unlike traditional methods, does not lead to an increase in the emission spectrum of additional spectral components and allows for tuning of the frequency of self-oscillations in the range of hundreds of MHz – GHz units, provide stability close to the stability of the oscillation frequency of the reference resonator.

Keywords: Klynotron, method of current-less self-oscillations frequency tuning, terahertz range, method of current-less klynotron self-oscillations frequency control.

References

1. *Neumann M.S.* Frequency Stabilization in Radio. Svyaz'izdat. 1937. 157 p. (in Russian).
2. *Groszkowski Ya.* Generation of High-Frequency Oscillations and Frequency Stabili-zation. M.: Foreign Literature, 1953. 364 p. (in Russian).
3. *Bychkov S.I., Burenin N.I., Safarov R.T.* Frequency Stabilization of Microwave Oscillators. M.: Soviet Radio, 1962 . 376 p. (in Russian).

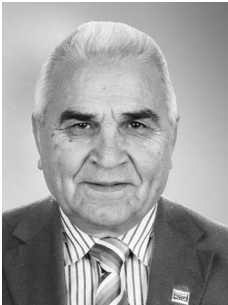
4. *Kovshov Y.S., Ivanov A.I., Kishko S.A., Ponomarenko S.S., Kuleshov A.N., Yephimov B.P.* Stabilization of the electromagnetic oscillations frequency in the submillimeter range BWT oscillators // News of the V.N. Karazin Kharkiv National University. 2013. №1094. Ser. «Radiophysics and electronics», Issue 23. P. 77 (in Russian).
5. Authorship Certificate №341113 from 12.17.1956 USSR. Backward Wave Tube / G.Ya. Levin (USSR) // Bull. Discoveries and Inventions. 1972. № 25. P. 201 (In Russian).
6. Klynotron / G.Ya.Levin. A.I.Borodkin, A.Ya.Kirichenko et al., Ed. A.Ya.Usikov. Kiev: Naukova Dumka, 1992. 200 p. (in Russian).
7. *Kirichenko A.Y., Yakovenko V.M.* Klynotron – 50 // Radio Physics and Electronics. Collection of Scientific Papers / NAS of Ukraine. A.Ya. Usikov Institute of Radiophysics and Electronics. Kharkiv, 2007. Vol.12, Special Issue. P.5 (in Russian).
8. *Yeryomka V.D.* Terahertz vacuum electromagnetic radiation sources: Evolution zig-zag from klynotron to klynorbictron // Izv. VUZ. Applied Nonlinear Dynamics. 2013. Vol. 21, № 1. P. 7 (in Russian).
9. *Altshuler Yu.G., Tatarenko A.S.* Tubes with Low-Power Backward Wave. M.: Sov. Radio, 1963. 296 p. (in Russian).
10. Authorship Certificate №555751 from 8.01.1976 USSR, ICI H01 J 25/00. Backward wave tube / V.D. Yeryomka, A.Ya.Kirichenko, V.A.Solodovnik (USSR) // Bull. Discoveries and Inventions. 1979. № 10. P. 189 (in Russian).
11. *Silin R.A., Sazonov V.P.* Slow Wave Systems. M.: Sov. Radio, 1966. 632 p. (in Russian).
12. *Yeryomka V.D., Kirichenko A.Ya., Solodovnik V.A.* Study the possibility of current-free frequency control O-type BWO-klynotron // Proceedings of the Institute of Radio Physics and Electronics AS of Ukrainian SSR. 1977. Vol. 23. P. 60 (in Russian).
13. Authorship Certificate №892741 from 29.10.1979 USSR, ICI H03 L 7/06. The Device Oscillator Frequency Stabilization / I.M. Balaklitsky, Yu.V. Maystrenko, I.M. Mytsenko (USSR) // Bull. Discoveries and Inventions. 1981. № 47. P. 171 (in Russian).
14. *Mytsenko I.M., Roenko A.N., Chernyavsky I.Y.* Device for stabilizing the frequency of the microwave oscillator // Collection of scientific works of the Kharkov Military University. Kharkiv, 2002. Issue 3 (41). P. 108 (in Russian).
15. *Gonorovsky I.S.* Radio Circuits and Signals. M.: Soviet Radio, 1971. 672 p. (in Russian).
16. *Semenov A.N.* Technical Electrodynamics. M.: Svyaz', 1973. 480 p. (in Russian).



Безгина Ирина Петровна родилась в Харькове, Украина (1970). Окончила Харьковский институт инженеров городского хозяйства (ХИИГХ, 1992). После окончания ХИИГХ работает в Институте радиофизики и электроники имени А.Я.Усикова Национальной академии наук Украины, сначала в должности инженера, затем ведущего инженера-конструктора в Отделе физических основ радиолокации. Занимается систематизацией и компьютерной обработкой результатов экспериментальных исследований. Соавтор двух научных статей в журналах «Радиофизика и электроника», «Telecommunication and Engineering».

61085 Украина, Харьков, ул. Академика Проскуры, 12
 Институт радиофизики и электроники им. А.Я. Усикова НАНУ
 E-mail: v.yeryomka@gmail.com

Ерёмка Виктор Данилович родился в Донецкой обл. Украины (1938). Окончил Киевский политехнический институт (1961). После окончания КПИ работает в Институте радиофизики и электроники имени А.Я. Усикова Национальной академии наук Украины. Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук (ХГУ, 1974) в области физической электроники. Руководил Лабораторией вакуумной СВЧ-электроники и микроэлектроники (1982–1996); Отделом вакуумной электроники (1996–2001). С 2001 года по настоящее время – старший научный сотрудник того же отдела. Соавтор монографий «Электровакуумные приборы диапазона миллиметровых волн» (2007), «Физические основы и радиоэлектронные средства контроля надводной обстановки и судоходства» (2012), «Особенности распространения радиоволн над морской поверхностью» (2013), «Нетрадиционные методы и средства радиолокации» (2015). Опубликовал более 130 научных статей по направлениям физической электроники и радиофизики. Автор 80 изобретений в области вакуумной микроволновой электроники. Область научных интересов – физическая электроника, вакуумная терагерцовая электроника и наноэлектроника, радиофизика, терагерцовая радиофизика, радиолокация. Член редколлегии журнала «Техника и приборы СВЧ», член Программного комитета Международной Крымской конференции «СВЧ-техника и телекоммуникационные технологии» (1994), член Программного комитета Международной зимней школы – семинара по радиофизике и электронике сверхвысоких частот (2012), член Украинского физического общества (2001), Member IEEE (1994), Senior Member IEEE (2003).



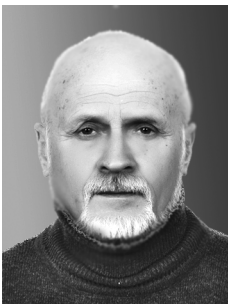
61085 Украина, Харьков, ул. Академика Проскуры, 12
Институт радиофизики и электроники им. А.Я. Усикова НАНУ
E-mail: v.yeryomka@gmail.com

Макулина Татьяна Алексеевна родилась в Харькове, Украина. Окончила Харьковского института радиоэлектроники имени академика М.К. Янгеля (ХИРЭ, 1972). После окончания ХИРЭ работает там же сначала в должности инженера, затем младшего научного сотрудника НИС (1972–1985), затем в должности ведущего инженера ОКБ ХГПЗ им. Т.Г. Шевченко (1986–2006); с 2006 года по настоящее время ведущий инженер-разработчик узлов приемопередающих измерительных комплексов Отдела физических основ радиолокации ИРЭ НАНУ. Автор и соавтор 7 научных статей и 3 патентов на изобретения. Область научных интересов: радиотехника, радиосистемы, радиолокация.



61085 Украина, Харьков, ул. Академика Проскуры, 12
Институт радиофизики и электроники им. А.Я. Усикова НАНУ
E-mail: v.yeryomka@gmail.com

Мыценко Игорь Михайлович родился в Харькове, Украина (1947). Окончил Харьковский институт радиоэлектроники имени академика М.К. Янгеля (ХИРЭ) (1974). После окончания ХИРЭ работает в Институте радиофизики и электроники имени А.Я.Усикова Национальной Академии наук Украины (ИРЭ НАНУ). Участвовал в 8 научных экспедициях в различных районах Мирового океана (1978–1997). Руководил отделом радиофизических исследований (1987–1997). Защитил диссертацию на соискание учёной степени кандидата физико-математических наук (ХГУ, 1990) в области радиофизики. С 1997 года по настоящее время старший научный сотрудник Отдела физических основ радиолокации ИРЭ НАНУ. Защитил диссертацию на соискание учёной степени доктора физико-математических наук (ИРЭ НАНУ, 2014) в области радиофизики. Соавтор монографий: «Диагностика условий распространения УКВ в тропосфере» (2010), «Физические основы и радиоэлектронные средства контроля надводной обстановки и судоходства» (2012), «Особенности распространения радиоволн над морской поверхностью» (2013), «Нетрадиционные методы и средства радиолокации» (2015). Опубликовал более 100 научных статей по направлениям радиофизики, радиолокации и физической электроники. Автор 15 изобретений в области радиофизики и электроники СВЧ. Область научных интересов: радиофизика, радиолокация, загоризонтное распространение радиоволн над морской поверхностью.



61085 Украина, Харьков, ул. Академика Проскуры, 12
Институт радиофизики и электроники им. А.Я. Усикова НАНУ
E-mail: v.yeryomka@gmail.com



НЕЛИНЕЙНОЕ ПРОСТРАНСТВО РОМАНА М. БУЛГАКОВА «МАСТЕР И МАРГАРИТА»

Е. Г. Трубецкова

Саратовский государственный университет

В статье рассматриваются эксперименты с художественным пространством в романе М. Булгакова «Мастер и Маргарита». Проводятся параллели с теорией П. Флоренского о двойной геометрической плоскости.

Ключевые слова: М. Булгаков, «Мастер и Маргарита», художественное пространство, П. Флоренский.

«Мастер и Маргарита» – одно из самых интересных, многогранных, неисчерпаемых произведений не только русской, но и мировой литературы. Роман не был опубликован при жизни писателя, как и большинство его произведений. В 1938 году Булгаков писал своей жене, Елене Сергеевне: «Что будет? – ты спрашиваешь. Не знаю. Вероятно, ты уложишь его (роман. – *Е.Т.*) в бюро или шкаф, где лежат убитые мои пьесы <...> Свой суд над этой вещью я завершил <...> Теперь меня интересует твой суд, а буду ли я знать суд читателей, никому не известно» [1, с. 445].

Текст романа был сохранен Еленой Сергеевной и опубликован только в середине шестидесятых, во время «оттепели» («Звезда», 1966, № 11; 1967, № 1). А до этого в официальной советской литературе прозаика Булгакова не существовало, он был известен только как автор нескольких пьес, прежде всего, «Дней Тубриных», по странному стечению обстоятельств, ставшей одной из любимых пьес Сталина. В вышедшем в 1956 году академическом словаре «Русские советские писатели-прозаики» имя Булгакова отсутствует. Ни один из его романов («Белая гвардия», «Записки покойника», «Жизнь господина де Мольера», «Мастер и Маргарита»), ставших позднее классикой литературы XX века, на тот момент не был известен читателю. Но когда «Мастер и Маргарита» все-таки вышел (с существенными купюрами в журнальной публикации), он сразу стал бестселлером, журнал невозможно было достать в библиотеках, текст перепечатывали на машинке, и, хотя со времени смерти писателя прошло более четверти века, его роман оказался очень актуальным и для контекста более поздней эпохи.

М.А. Булгаков работал над «Мастером и Маргаритой» 12 лет, с 1928 года до гибели в 1940 году. И известный нам вариант текста существенно отличается от

первоначального замысла. В 1928–1929 годах, когда Булгаков только начинал писать роман, название текста было совсем другим. Варианты, сохранившиеся в архиве: «Мания фурибунда», «Черный маг», «Копыто инженера», «Жонглер с копытом». Будущих заглавных героев – Мастера и Маргариты – в тексте не было. Первая редакция романа была уничтожена автором 18 марта 1930 года (после запрета и снятия с постановки всех его пьес, полной невозможности публикации его драматургических и прозаических произведений). В письме Правительству СССР Булгаков писал: «И лично я, своими руками, бросил в печку черновик романа о дьяволе...» [2, с. 448]. Возникают параллели с другим аналогичным поступком – сожжением второй части «Мертвых душ» Н. Гоголем.

Если первоначально роман был задуман в целом как продолжение линии сатирического гротеска и разработка темы современности, характерные для повестей Булгакова («Собачье сердце», «Роковые яйца», «Дьяволиада»), то появление нового героя-писателя внесло автобиографическую тему. Соединились два сюжетно-тематических пласта: сатирическая тема современной автору действительности и одна из центральных тем творчества Булгакова – проблема художника и власти, отраженная в «Багровом острове», «Кабале святош» и «Жизни господина де Мольера», «Пушкине» («Последние дни»). Любопытно, что окончательное имя героя – «Мастер» (варианты: «Поэт», «Фауст») – появляется в тексте в 1933–1934 годах. М.О. Чудакова видит здесь аллюзию на слова Сталина в телефонном разговоре с Пастернаком о Мандельштаме «Но ведь он мастер? Мастер?»

Композиция и повествовательная структура романа несколько раз коренным образом менялась Булгаковым. В первой редакции ершалаимская часть содержала только одну сцену суда и вводилась через рассказ загадочного иностранца в начале романа. Только в 1937 году возникла итоговая структура, когда ершалаимский и московский тексты разворачивались параллельно. Получился уже не «роман в романе», а «двойной роман». Именно так называют структуру романа зарубежные исследователи: Э. Баррат, Х. Риггенбах, Н. Тарановский-Джонсон.

Первообраз структуры «Мастера и Маргариты» можно видеть в первом романе писателя «Белая гвардия» в описании видения, явившегося Елене: «...совершенно неслышным пришел Тот, к кому через заступничество смуглой девы зывала Елена» [3, с. 410]. Для того чтобы изобразить современность, Булгаков возвращался к истокам новой истории, в ней искал ключ к объяснению и язык описания.

Странное, фантастическое пространство романа «Мастер и Маргарита» вписано в контекст исканий своего времени. Наложение разных эпох в булгаковском романе можно сопоставить с техникой монтажа в кинематографе. Особенно любопытен здесь фильм Гриффита «Нетерпимость», где четыре сюжета из разных эпох: Вавилонское царство времен Валтасара, Иудея, Варфоломеевская ночь и современная Гриффиту Америка поданы не последовательно, а чередуясь. Соединились сюжеты *повтором одного кадра*.

Необходимо отметить, что такое соотнесение времен, «вертикальное» осмысление истории параллельно с Михаилом Булгаковым использовалось и его современниками. Гайто Газданов в «Вечере у Клэр» соотнес в сознании героя-повествователя события гражданской войны с Русью времен раскола и реформы Никона: в роман были введены фрагменты «Исповеди протопопа Аввакума». Марк Алданов ввел в трилогию «Ключ. Бегство. Пещера» новеллу своего героя о Тридцатилетней войне

в Германии. У Михаила Кузмина в пьесе «Смерть Нерона» тоже сближались разные временные пласты: действие происходило в Риме 1919 года, Саратове 1924-го, и Риме времен Нерона (примечательно, что замысел пьесы возник у писателя на другой день после похорон Ленина). Подобное наложение событий разных эпох позволяет более глубоко осмыслить современность. С другой стороны, избранный для сопоставления материал свидетельствует об оценке писателем всего происходящего, в какой-то мере позволяет предвидеть и результат.

Итоговая структура романа создавала сложное многомерное пространство, представляющее собой два больших зеркала – Москву и Ершалаим. В этих зеркалах отражалась идея Булгакова о неизменности человеческой природы, о вечных проблемах: вины, ответственности, предательства.

Можно видеть параллель между композицией романа, которую Ж. Нива [4, с. 95] определяет как зеркальную, и функцией зеркала в живописи, где оно расширяет пространство, позволяет увидеть изображенный на картине предмет с другого ракурса, создать игру точками зрения. Например, на картине Диего Веласкеса «Менины» зеркало вводит двойной план, отражая персонажей, «не присутствующих» в основном пространстве произведения (рис. 1). Коренным образом изменяется и сюжет картины, становится понятным направление взглядов и жестов придворных, и центром изображения становится не инфанта, а отраженная в зеркале королевская чета – король Филипп IV и его супруга Марианна. В контексте булгаковского романа значимо и имя принцессы, изображенной на полотне, – Маргарита, а также при-



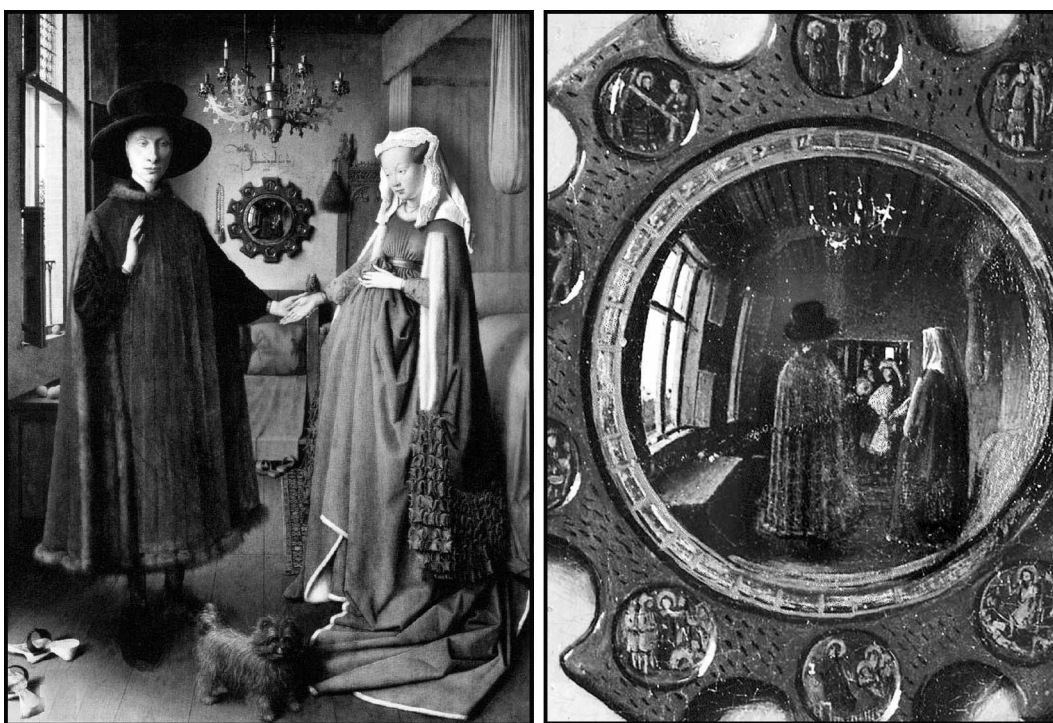
Рис. 1. Диего Веласкес. «Менины», 1654

сутствие на картине самого художника, создающего портрет королевской четы, что можно сопоставить с разработкой темы судьбы писателя в романе М.А. Булгакова.

Аналогичную функцию зеркало выполняет и на более ранней картине Яна ван Эйка «Чета Арнольфини» (рис. 2, а). Здесь художником сделан акцент еще и на кривизне пространства, отраженного в зеркале (рис. 2, б). (Сопоставление с живописными произведениями проведено в работе А. Вулиса [5, с. 179].) При этом, как убедительно показал знаменитый английский художник и искусствовед Дэвид Хокни, детальное изображение пространства картины воссоздано ван Эйком с помощью камеры-обскуры.

«Зеркальная композиция» романа порождает игру реальности/нереальности изображаемого. На первый взгляд, «реально» московское пространство и те события, которые в нем происходят. История ершалаимских глав – плод вымысла героев. Но, как справедливо писал Ю.М. Лотман, «Московский (“реальный”) текст наполняется самыми фантастическими событиями. В то время как выдуманный мир романа Мастера подчинен строгим законам бытового правдоподобия <...> Между двумя текстами устанавливается зеркальность, но то, что кажется реальным объектом, выступает лишь как искаженное отражение того, что само казалось отражением» [6, с. 159].

Московское пространство описано в романе достаточно подробно, в тексте отражены приметы реальных улиц, парков, зданий. Так, подвал Мастера был помещен Булгаковым в дом в Мансуровском переулке, где жил его друг Сергей Ермолинский. В особняке Маргариты московские краеведы видят черты разных знаменитых особняков Москвы, самый известный из которых – особняк Саввы Морозова, построен-



а б
Рис. 2. а – Ян ван Эйк. «Чета Арнольфини», 1434; б – центральный фрагмент картины с изображением зеркала



Рис. 3. Особняк З.Г. Морозовой, Спиридоновка, 17. Архитектор Ф. Шехтель



Рис. 4. МАССОЛИТ. Дом Герцена, Тверской бульвар, 25



Рис. 5. Дом Пигита, Большая Садовая, 10

ный Шехтелем (рис. 3). Не вызывает споров расположение МАССОЛИТа. Это Дом Герцена (Тверской бульвар, 25), где в 1920-е годы размещался ряд литературных организаций: РАПП (Российская ассоциация пролетарских писателей) и МАПП (Московская ассоциация пролетарских писателей), по образцу которых и создан вымышленный МАССОЛИТ (рис. 4). Знаменитой стала квартира № 50 (Большая Садовая, 10), в романе получившая адрес Большая Садовая, 302-бис. Сейчас там находится музей Михаила Булгакова. «Нехорошая квартира» была расположена Булгаковым в доме миллионера Пигита (рис. 5), связанном с именами Маяковского, Шляпина, Белого. В этом доме произошло знакомство Сергея Есенина и Айседоры Дункан, и в этом доме Булгаков жил в 1921 году со своей женой после переезда из Киева. Известный в артистической и художественной среде дом Пигита после революции был превращен в одну из первых коммуналок. Может быть, поэтому писатель, для которого Дом всегда был защитой от хаоса истории (вспомним «Белую гвардию»), именно здесь поместил «нехорошую квартиру».

Но «реальность» московского пространства оказывается фантазмагорической. Обычная квартира расширяется до немыслимых пределов, на что обращает внимание Маргарита, оказавшись на балу у Воланда: «Более всего меня поражает, где все это помещается. – Она повела рукой, подчеркивая при этом необъятность зала» [7, с. 243]. На что Коровьев парирует: «Тем, кто хорошо знаком с пятым измерением, ничего не стоит раздвинуть помещение до желательных пределов. Скажу вам более, уважаемая госпожа, до черт знает каких пределов!» [7, с. 243]. Булгаковский герой ссылается на открытую Теодором Калуца пяти-

мерную теорию поля, широко обсуждавшуюся не только в научных кругах, но и в публицистике: дискуссии о ней велись в газетах. Дальше идет перевод этой теории на язык логики повседневности, что создает блестящую сатиру: «Я, впрочем, знавал людей, не имевших никакого представления о пятом измерении, <...> и тем не менее, проделывавших чудеса в смысле расширения своего помещения. Так, например, один гражданин, получив трехкомнатную квартиру на Земляном валу, без всякого пятого измерения и прочих вещей, от которых ум заходит за разум, мгновенно превратил ее в четырехкомнатную, затем обменял ее на две отдельные квартиры в разных районах Москвы – одну в три и другую в две комнаты. Согласитесь, что их стало пять... Вот-с, каков проныра, а вы изволите толковать про пятое измерение» [7, с. 243].

В романе можно видеть отражение идеи нового нелинейного пространства, выраженной на разных «языках» философами, математиками, художниками: открытие Общей теории относительности Эйнштейна; переосмысление классического детерминизма в естественных науках и философии; введение сферической или расходящейся перспективы в русском авангарде – на картинах М. Шагала, К. Малевича; в литературоведении – введение М. Бахтиным категории «хронотопа» при анализе художественного текста. После открытий квантовой механики механика Ньютона перестает восприниматься как универсальная. В данном контексте дополнительные оттенки смысла получает фраза Коровьева: «Подумаешь, бином Ньютона!» [7, с. 203].

По-новому раскрывается пространство булгаковского романа при знакомстве с работой П. Флоренского «Мнимости в геометрии» (1922), где изложена концепция ученого и философа о существовании «двойной геометрической плоскости».

Павел Александрович Флоренский был мыслителем ренессансного типа. После окончания физико-математического факультета Московского университета (1904) он закончил Московскую Духовную Академию (1908), был рукоположен в священника (1911). Он одновременно был философом, богословом, искусствоведем, литературоведом, профессором математики. Классические его работы: «Столп и утверждение истины», «Иконостас», «Анализ пространственности и времени в художественно-изобразительных произведениях», «У водоразделов мысли», «Диэлектрики и их техническое применение». В 1933 году он был арестован, этапирован в Соловецкий лагерь особого назначения, работал в секретной лаборатории над получением дейтерия, летом 1937 года был увезен из лагеря и, предположительно, в ноябре 1937 года расстрелян.

Сопоставление работы Флоренского «Мнимости в геометрии» с романом Булгакова не является случайным, надуманным, его правомерность подтверждается творческой историей романа. Данный аспект относительно мало изучен в булгаковедении. Впервые на возможность сопоставления с теорией Флоренского указала М.О. Чудакова [8, с. 80]. Подробнее разработка темы отражена в статье чешского слависта П. Абрагама [9].

По свидетельству Е.С. Булгаковой, писатель не раз перечитывал «Мнимости в геометрии» во время работы над романом. В экземпляре, которым он пользовался, сохранились многочисленные подчеркивания, пометы на полях (цит. по [8, с. 83]).

При этом хочется подчеркнуть, что речь идет не о влиянии. Думается, что в книге Флоренского Булгаков увидел близость своим, уже сформировавшимся, идеям (вспомним в этой связи «Дьяволиаду»). Работа П. Флоренского станет для Булгакова выражением на ином – математическом – коде идеи двойного ломающегося пространства, идеи, которая так была близка самому писателю.

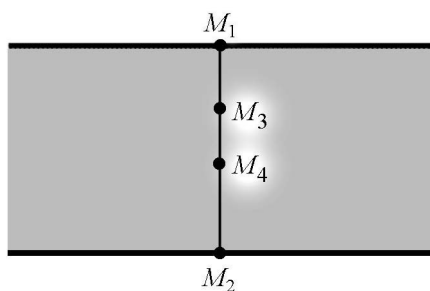


Рис. 6. Стрoение «двойной плоскости» M_1 – действительная точка, M_2 – мнимая точка, M_3 и M_4 – полумнимые точки, имеющие действительную ординату, мнимую абсциссу, или наоборот

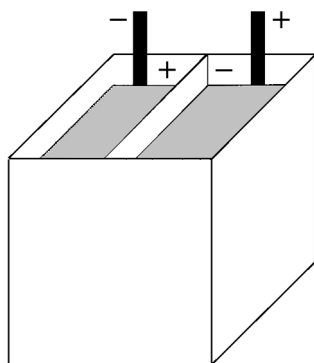


Рис. 7. Физический аналог двойной плоскости Флоренского



Рис. 8. Гравюра В. Фаворского к обложке книги П. Флоренского «Мнимости в геометрии»

M T I в слове «геометрия» отнесены к оборотной стороне, как начертанные белым штрихом, I T I в слове «мнимости» флюктуируют, частью оставаясь на лице, частью же проваливаясь на изнанку, как бы прошивая, простегивая собой толщину плоскости»

Корректируя геометрическую интерпретацию комплексных чисел Гаусса, Коши, Кьюна, Флоренский вводит понятие двусторонней плоскости, на одной стороне которой расположены действительные числа, на обратной – мнимые (рис. 6). «Таким образом, все пространство мы можем представить себе двойным, составленным из действительных и из совпадающих с ними гауссовых координатных поверхностей» [10, с. 29]. Физический смысл двойной плоскости можно уяснить, например, с помощью опыта с электролитом, в котором проходит ток и находится проводящий лист, разделяющий электроды (рис. 7). Одна сторона этого листа становится положительно заряженной, другая – отрицательно, как бы тонок этот лист ни был.

Флоренский ставит вопрос об обращении действительной точки в мнимую и о движении внутрь плоскости. «При достижении телом скорости света, стаянувшись до нуля, оно проваливается сквозь поверхность <...> и выворачивается через само себя, приобретая мнимые характеристики» [10, с. 36]. (Примечательно, что этот абзац был отчеркнут Булгаковым, на полях стоят восклицательные знаки [8, с. 80]).

Обложка к книге «Мнимости в геометрии» была создана художником В. Фаворским, постаравшимся передать языком графики суть концепции Флоренского (рис. 8). Флоренский высоко оценил работу художника и писал: «Надписям подлежит определять собой всю толщину плоскости. Фаворский достигает этого, приурочивая буквы или их элементы к разным сторонам плоскости, причем M H (в слове «мнимости») помещено явно на передней стороне плоскости,

[10, с. 58]. Здесь мы видим двойное перекодирование идеи: с языка математики на язык графики и затем на язык словесного описания.

Соотношение теории Флоренского и романа Булгакова можно проследить на разных уровнях романа: сюжетном пространстве московских глав, космогонии «Мастера и Маргариты» и на уровне повествовательной структуры романа.

Сюжетный уровень: Художественное пространство московских глав

В романе способностью «проваливаться сквозь плоскость» обладает Воланд и его свита. Так появляется Коровьев на Патриарших прудах: «И тут знойный воздух сгустился перед ним (Бездомным. – *Е.Т.*), и соткался из этого воздуха прозрачный гражданин престранного вида» [7, с. 8]. А вот его исчезновение: «Иван сделал попытку ухватить негодяя за рукав. Но промахнулся и ровно ничего не поймал. Регент как сквозь землю провалился» [7, с. 50]. После сеанса в Варьете «сцена внезапно опустела, и надувало Фагот, равно как и наглый котяра Бегемот, растаяли в воздухе, исчезли, как раньше исчез маг в кресле с полинявшей обивкой» [7, с. 129]. Воланд и его свита обладают способностью «ввинчиваться» в пространство. И эту способность они передают другим героям: как дар – Маргарите и как наказание – директору Варьете Степе Лиходееву.

Пространство московских глав превращается в двойную плоскость. Так, в полночь с пятницы на субботу в «нехорошую квартиру» на Садовой 302-бис прошел барон Майгель, спустя некоторое время в ней произвели обыск, «но не только хозяев в ней не нашли, но <...> не обнаружили и признаков барона Майгеля» [7, с. 328]. А в это время там идет грандиозный бал Воланда, пространство которого с огромными залами, бесконечными лестницами, бассейнами уходит, таким образом, в глубину плоскости – в пятое измерение.

По методу действительных и совпадающих с ними гауссовых координатных поверхностей изложены события в 24, 29 и 30 главах. Происходит извлечение Мастера из сумасшедшего дома, встреча с Маргаритой на балу у Воланда, ночь в подвальчике, смерть и переход в инобытие: «Он (Мастер – *Е.Т.*) еще видел, как смертельно побледневшая Маргарита, беспомощно простирая к нему руки, роняет голову на руки, потом сползает на пол. – Оравитель... – успел еще крикнуть мастер. Он хотел схватить нож со стола, чтобы ударить Азazelло им, но рука его беспомощно соскользнула со скатерти: он упал навзничь и, падая, рассек себе кожу на виске об угол доски бюро» [7, с. 359]. Параллельно дается «реальная» версия событий: «Когда отравленные зачихли, Азazelло начал действовать. Первым долгом он бросился в окно и через несколько мгновений был в особняке, в котором жила Маргарита Николаевна <...> И все оказалось в полном порядке. Азazelло увидел, как мрачная, дожидаящаяся мужа женщина вышла из своей спальни, внезапно побледнела, схватилась за сердце и, крикнув беспомощно: – Наташа! Кто-нибудь... Ко мне! – упала на пол в гостиной, не дойдя до кабинета» [7, с. 359]. В этой «реальной» плоскости Мастер и Маргарита так больше и не встретятся. «Скончался сосед ваш сейчас, – прошептала Прасковья Федоровна» [7, с. 364]. Мастер умрет в клинике Стравинского. Благодаря Воланду пространство московско-

го «анти-дома» (термин Ю.М. Лотмана [11, с. 210]) становится проницаемым. Точкой прорыва «из глубины плоскости» можно считать следующие материальные образы.

- Зеркало (традиционная граница семиотического пространства [12]): «Прямо из зеркала трюмо вышел маленький, но необыкновенно широкоплечий человек в котелке на голове и с торчащим изо рта клыком, безобразящим и без того мерзкую физиономию» [7, с. 83], – так появляется Азazelло.
- Окно: через него влетают/вылетают незваные гости Воланда – Варенуха, Николай Иванович, Алоизий Могарыч («...его перевернуло вверх ногами и вынесло из спальни Воланда через открытое окно» [7, с. 281]).
- Камин является неиссякаемым источником потока гостей на балу. Он становится прорывом в инобытие, совмещающая разные временные пласты.

Космогония «Мастера и Маргариты»

По философии П. Флоренского, мироздание традиционно имеет три сферы:

- «область земных явлений и земных движений», скорость тел здесь меньше скорости света ($v < c$);
- «граница Земли и Неба», где скорость тел приближается к скорости света ($v = c$), «длина всякого тела делается равной нулю, а время, наблюдаемое со стороны, бесконечно»;
- «Небесная сфера», где при скорости тел, большей скорости света ($v > c$), «время протекает в обратном смысле, <...> следствие предшествует причине <...> Это сфера Софийной памяти».

Подобные три сферы можно видеть и в булгаковском романе: это московское пространство романа, сфера Воланда и его свиты и хронотоп ершалаимских глав.

Остановимся на сфере Воланда. С точки зрения христианской философии, в вечности зло не существует. Из-за этого Ад должен быть «помещен» между временем и вечностью. П. Флоренский определяет Ад как «застывшее теперь», что можно сопоставить с границей Земли и Неба, где время абсолютно устойчиво. Примером такого абсолютно устойчивого времени является бал Воланда. Весь бал происходит, пока часы бьют полночь. Он начинается с первым ударом часов: «До полуночи не более десяти секунд, – добавил Коровьев, – сейчас начнется» [7, с. 256]. Затем «в конце третьего часа (курсив мой. – Е.Т.) Маргарита глянула вниз <...> и радостно вздрогнула: поток гостей редел». А спустя еще некоторое время она «услышала, что где-то бьет полночь, которая давным-давно, по ее понятиям, истекла» [7, с. 264]. И уже после встречи с Мастером при прощании с Воландом она заметила: «Что же это все полночь да полночь, а ведь давно уже должно быть утро? – Праздничную полночь приятно немного и задержать, – ответил Воланд» [7, с. 285].

То, что Воланд принадлежит второй – средней – сфере, подтверждается, думается, и тем, что его ведомство оказывается посредником в устройении судьбы Мастера, по просьбе «ведомства Света».

С другой стороны, можно говорить и о том, что второй сфере («границе Земли и Неба» в концепции Флоренского) соответствует последний приют Мастера – вечный покой, область между «ведомством Света» и «ведомством Тени».

Приведенные точки зрения не противоречат друг другу, как это может показаться на первый взгляд: ведь царство Воланда и вечный дом Мастера оказываются на одном «срезе» плоскости. Но вторая интерпретация скорее аксиологическая: «покой» понимается как недостижимость «Света». В ранних редакциях это было нагляднее выражено. Так в редакции 1933 года было: «Ты не поднимаешься до высот. Не будешь слушать мессы». В редакции 1936 года: «Ты никогда не поднимаешься выше, Иешуа, не покинешь свой приют» (цит. по [13, с. 49]). По-другому начинает осмысляться «последний приют мастера» – покой – при учете аллюзий к пушкинскому тексту. В названии тридцатой главы «Пора! Пора!» можно видеть отсылку к стихотворению «Пора мой друг, пора, покоя сердце просит», в котором есть очень значимые для понимания булгаковского романа строки: «на свете счастья нет, но есть *покой* и воля».

Мастер в финале оказывается в статическом пространстве, Воланд по-прежнему в динамическом: «Тогда черный Воланд, не разбирая дороги, кинулся в провал, и вслед за ним, шумя, обрушилась его свита. Ни скал, ни площадки, ни лунной дороги, ни Ершалаима не стало вокруг» [7, с. 372].

Пространство финала, как и в геометрии Флоренского, оказывается прерывным. Грани двойной плоскости постоянно переворачиваются. Герой романа Мастера, устремляющийся (вверх, как можно было бы предположить) по лунной дорожке к Иешуа, Га-Ноцри, оказывается, «ушел в бездну, ушел безвозвратно» [7, с. 372].

Метапространство романа: Повествовательная структура

Двусторонней плоскостью является и повествовательная структура романа. Введение ершалаимских глав трижды создает прорыв сквозь ее «лицевую сторону» (главы 2, 16, 25, 26). При этом определение реальная/мнимая сторона плоскости амбивалентно. И так же, как в концепции Флоренского при обращении действительной точки в мнимую «происходит выворачивание тела через само себя», в булгаковском романе в месте «разлома» времени и пространства последняя фраза московской главы становится первой фразой ершалаимской и наоборот: «...в белом плаще с кровавым подбоем, шаркающей кавалерийской походкой, ранним утром четырнадцатого числа весеннего месяца нисана ...» [7, с. 19], – конец главы 1. И начало главы 2: «В белом плаще с кровавым подбоем, шаркающей кавалерийской походкой, ранним утром четырнадцатого числа весеннего месяца нисана...» [7, с. 19]. Конец главы 2: «Было около десяти часов утра» [7, с. 43], и начало главы 3: «Да, было около десяти часов утра, досточтимый Иван Николаевич» [7, с. 43]. Этот же прием повторяется Булгаковым, когда история Понтия Пилата снится Иванушке в психиатрической клинике. Последняя фраза главы 15: «...и ему стало сниться, что солнце уже снижалось над Лысой Горой, и была эта гора оцеплена двойным оцеплением...» [7, с. 167]. Начало главы 16: «Солнце уже снижалось над Лысой Горой, и была эта гора оцеплена двойным оцеплением» [7, с. 167]. Правда, конец сна Иванушки: «Ни Левия, ни тела Иешуа на верху холма в это время уже не было» [7, с. 178], в следующей главе не повторяется. Глава 17 начинается так: «Утром в пятницу, то есть на другой день после проклятого сеанса, весь наличный состав служащих Варьете...» [7, с. 178]. Но это единственное исключение. В последний раз ершалаимские события входят в роман, когда Маргарита после бала читает рукопись Мастера. И снова последняя фраза

московской главы становится первой в ершалаимской и наоборот. Глава 24 заканчивается словами: «...всесильный Воланд был действительно всесилен, и сколько угодно, хотя бы до самого рассвета, могла Маргарита шелестеть листьями тетрадей, разглядывать их и целовать и перечитывать слова: – Тьма, пришедшая со Средиземного моря, накрыла ненавидимый прокуратором город... Да, тьма...» [7, с. 290]. Начало следующей главы (главы 25): «Тьма, пришедшая со Средиземного моря, накрыла ненавидимый прокуратором город» [7, с. 290]. Последние слова, которые читает Маргарита: «Так встретил рассвет пятнадцатого нисана пятый прокуратор Иудеи Понтий Пилат» [7, с. 321]. Это конец главы 26, а начало главы 27: «Когда Маргарита дошла до последних слов главы "Так встретил рассвет пятнадцатого нисана пятый прокуратор Иудеи Понтий Пилат", – наступило утро» [7, с. 321].

В дальнейшем, в главе 32, через движение в пространстве – полет – герои пронзают время. Ершалаим и Москва оказываются рядом: «Над черной бездной <...> загорелся необъятный город с царствующими над ним сверкающими идолами поверх пышно разросшегося за много тысяч лун садом...

– Мне туда, за ним? – спросил беспокойно мастер...

– Нет, – ответил Воланд. – Зачем же гнаться по следам того, что уже окончено?

– Так, значит, туда? – спросил мастер, повернулся и указал назад, туда, где соткался в тылу недавно покинутый город с монастырскими пряничными башнями, с разбитым вдребезги солнцем в стекле» [7, с. 370].

Происходит совмещение в «толщине плоскости» параллельно разворачивающихся сюжетных пластов, и автор, в данном случае Мастер, встречается с героем своего романа Пилатом. Но, соприкоснувшись на миг, грани двойной плоскости вновь расподобляются, образуя многомерный мир: «Кто-то отпускал на свободу мастера, как сам он только что отпустил им созданного героя. Этот герой ушел в бездну, ушел безвозвратно, прощенный в ночь на воскресенье сын короля-звездочета, жестокий пятый прокуратор Иудеи всадник Понтий Пилат» [7, с. 372].

Итак, «текст в тексте» в романе Булгакова, давая смещение планов изображения, создавая двойное пространство на уровне повествовательной структуры, позволяет запечатлеть в «Мастере и Маргарите» атмосферу времени не только на уровне содержания, но и воплотить ее в самой своей динамичной форме. Грани двойной плоскости «Мастера и Маргариты» уводят в бесконечность.

Семиотически значимыми становятся условия «прорыва сквозь плоскость» повествования. Воланд, буквально могущий уходить внутрь плоскости, как было показано, обладает этой способностью онтологически. Второй раз разрыв времени и пространства текста московских глав происходит во сне Иванушки. Здесь, во-первых, интересно использование врачом Булгаковым медицинского диагноза, поставленного Бездомному: шизофрения означает расслоение времени и пространства в сознании. Во-вторых, значимо введение ершалаимского текста через сон. Использование повествовательного модуса сна – излюбленный писателем прием (вспомним «Белую гвардию», «Бег», «Театральный роман»).

И, наконец, переход на другую сторону повествовательной структуры происходит при чтении романа Мастера. Это становится аксиологической характеристикой художника, способного *угадать* изначально существующий пратекст. В романе Булгакова история о Понтии Пилате независимо друг от друга рассказывается Воландом Берлиозу и Бездомному, является во сне Иванушке и, наконец, излагается в романе

Мастера. При чем, Воланд узнает о романе Мастера лишь в 24 главе: « – О чем, о чем? О ком? О Понтии Пилате? Вот теперь? Это потрясающе!» [7, с. 278].

Построение текста таким образом приводит к тому, что роман главного героя приобретает видимость некоего пратекста, лишь выведенного из тьмы забвения в светлое поле сознания художника. Мастер выступает не столько демиургом романа, сколько посредником между *истинным текстом* (высшей реальностью, существующей независимо от него, от его сознания: «О, как я угадал!» [7, с. 132]) и читателем.

В осмыслении творчества булгаковская эстетика неожиданно пересекается с эстетикой Набокова. В его романе «Дар» главный герой, тоже писатель, уверен, что «воплощение замысла уже существует в некоем другом мире, из которого он его переводил в этот» [16, с. 154]. Осмысление писания как наиболее точного перевода из «идеального измерения» чего-то уже существующего, совершенного и законченного, по-новому освещает отношение Булгакова к Слову, которое, в понимании писателя, обладает магической силой. Мастер находит единственные точные слова для своего романа. Не случайно его повествование совпадает с рассказом Воланда. Слово приобретает в романе высшую могущественную силу. «Он (мастер) сложил руки рупором и крикнул так, что эхо запрыгало по безлюдным и безлесым горам:

– Свободен! Свободен! Он ждет тебя!

Горы превратили голос мастера в гром, и этот же гром их разрушил» [7, с. 370]. Последнее слово романа Мастера освобождает Пилата. Здесь можно видеть еще одно сближение с концепцией Флоренского, для которого творчество – «восхождение в мир ноуменов, Логос, противостоящий процессу энтропии». По мысли Флоренского, творчество способно разрывать время и пространство: «разрывая время, “Божественная комедия” оказывается не позади, а впереди современной науки» [10, с. 42]. Это мы видим и в романе Булгакова: разрывает время творение Мастера. Разрывает время, оставаясь всегда современным, и сам роман «Мастер и Маргарита».

Итак, смещение планов изображения, двойное пространство романа, многочисленные интертекстуальные связи «Мастера и Маргариты» позволяют запечатлеть в романе *атмосферу времени* не только на уровне содержания, но и воплотить ее в самой динамичной форме. В произведении Булгакова мы видим, как незавершенный жанр романа ведет большой диалог со временем.

Библиографический список

1. Булгаков М. Письмо Е.С. Булгаковой, 15 июня 1938 г. // Михаил и Елена Булгаковы. Дневник Мастера и Маргариты. М., 2003. С. 445.
2. Булгаков М. Письмо Правительству СССР, 28 марта 1930 г. // М.Булгаков. Собр. соч.: В 5 т. М.: Художественная литература, 1990. Т. 5. С. 448.
3. Булгаков М. Белая гвардия // М. Булгаков. Собр. соч.: В 5 т. М.: Художественная литература, 1989. Т. 1. С. 410.
4. Нива Ж. Два «зеркальных» романа тридцатых годов, «Дар» и «Мастер и Маргарита» // La Literatura Russa del Novecento. Problemi di poetica. Napoli, 1990. P. 95.
5. Вулис А. В системе зеркал: Эпизод взаимодействия искусств // Звезда Востока. 1984. № 11.
6. Лотман Ю. Текст в тексте // Ю. Лотман. Избранные статьи: В 3 т. Таллинн:

- Александрия, 1992. Т. 1. С. 159.
7. *Булгаков М.* Мастер и Маргарита // М. Булгаков. Собр. соч.: В 5 т. М.: Художественная литература, 1990. Т. 5. С. 243.
 8. *Чудакова М.* Условие существования // В мире книг. 1974. № 12. С. 80.
 9. *Абрагам П.* Флоренский и Булгаков // Философские науки. 1990. № 7. С. 96.
 10. *Флоренский П.* Мнимости в геометрии. Опыт нового истолкования мнимостей. М., 1922. С. 29.
 11. *Лотман Ю.* Дом в «Мастере и Маргарите» // Ю. Лотман. Семиосфера. СПб., 2000.
 12. Зеркало. Семиотика зеркальности // Ученые записки Тартуского университета. Труды по знаковым системам. 1988. Вып. 831.
 13. *Соколов Б.* Андрей Белый и Михаил Булгаков: Сопоставительный анализ творчества писателей-современников// Русская литература. 1992. № 2. С. 49.
 14. *Гаспаров Б.* Из наблюдений над мотивной структурой романа М.А. Булгакова «Мастер и Маргарита» // Б. Гаспаров. Литературные лейтмотивы. М.: Наука, 1994.
 15. *Утехин Н.* «Мастер и Маргарита» М. Булгакова. Об источниках действительных и мнимых // Русская литература. 1979. № 4. С. 89.
 16. *Набоков В.* Дар // В. Набоков. Собр. соч.: В 4 т. М.: Правда, 1990. Т. 3. С. 154.

Поступила в редакцию 23.12.2015

NONLINEAR SPACE OF THE M. BULGAKOV'S NOVEL «THE MASTER AND MARGARITA»

E. G. Trubetskova

Saratov State University

The article deals with experiments with artistic space in the M. Bulgakov's novel «The Master and Margarita». The parallel with P.Florensky's theory about the double geometric plane is drawn.

Keywords: M. Bulgakov, «The Master and Margarita», artistic space, P. Florensky.

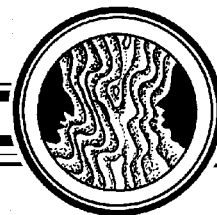
References

1. *Bulgakov M.* Pis'mo E. Bulgakovoy, 15.06.1938 // Mikhail i Elena Bulgakovy. Dnevnik Mastera i Margarity. M., 2003. S. 445 (in Russian).
2. *Bulgakov M.* Pis'mo Pravitel'stvu SSSR, 18. 03. 1930 // М. Булгаков. Sbornie Sochinenii: V 5 T. M., 1990. T. 5. S. 448 (in Russian).
3. *Bulgakov M.* Belaya Gvardiya // Bulgakov M. . Sbornie Sochinenii: V 5 T. M., 1989. T. 1. S. 410 (in Russian).
4. *Niva G.* // La Literatura Russa del Novecento. Problemi di poetica. Napoli, 1990. P. 95 (in Russian).

5. *Vulis. A.* // *Zvezda Vostoka*. 1984. № 11 (in Russian).
6. *Lotman Yuri* // *Yuri Lotmani. Izbrannye Stat'i: V 3 T.* Tallinn: Aleksandriya, 1992. T. 1. S. 159 (in Russian).
7. *Bulgakov M. Master and Margarita* // *M. Bulgakov. Sobranie Sochinenii: V 5 T.* M., 1990. T. 1. S. 243 (in Russian).
8. *Chudakova M.* // *V Mire Knig*. 1974. № 12. S. 80 (in Russian).
9. *Abragam P.* // *Philosophskiye Nauki*. 1990. № 7. S. 96 (in Russian).
10. *Florensky P. Mnimosti v Geometrii.* M., 1922. S. 29 (in Russian).
11. *Lotman Yuri* // *Yuri Lotman. Semiosphere.* SPb., 2000 (in Russian).
12. *Zerkalo. Semiotika zerkalnosti* // *Uchenye Zapiski Tartuskogo Universiteta. Trudy po Znakovym Sistemam.* 1988. Vyp. 831 (in Russian).
13. *Sokolov B.* // *Russkaja Literatura*. 1992. № 2. S. 49 (in Russian).
14. *Gasparov B. Literaturnyje Leitmotivy.* M., 1994 (in Russian).
15. *Utechin N.* // *Russkaja Literatura*. 1979. № 4. S. 89 (in Russian).
16. *Nabokov V. Dar* // *Sobranie Sochinenii: V 4 T.* M., 1990. T. 3. S. 154 (in Russian).



Трубецкова Елена Геннадиевна – родилась в Саратове (1973). Окончила Саратовский государственный университет (1995). Защитила кандидатскую диссертацию «“Текст в тексте” в русском романе 1930-х годов» (1998). Работает доцентом кафедры русской и зарубежной литературы Института филологии и журналистики Саратовского университета. Автор более 50 статей по истории романа XX века, творчеству В. Набокова, М. Булгакова, С. Кржижановского, М. Алданова, по смене научных и культурных парадигм.
410012 Саратов, Астраханская, 83
Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского
E-mail: etrubetskova@gmail.com



**О СВЯЗИ МЕЖДУ НЕЛИНЕЙНЫМ АНАЛИЗОМ,
БИФУРКАЦИЯМИ И НЕЛИНЕЙНОЙ ДИНАМИКОЙ
(На примере Воронежской школы
нелинейного функционального анализа)**

Е. М. Богатов, Р. Р. Мухин

Старооскольский технологический институт им. А.А. Угарова,
филиал Национального исследовательского технологического университета «МИСИС»

Работа посвящена некоторым историческим аспектам интенсивно развивающейся области современной математики – нелинейному функциональному анализу, который представляется как основа математического аппарата нелинейной динамики. Его методы продемонстрированы на примере анализа бифуркаций, рассмотрена исторически первая задача о бифуркациях – задача Эйлера об упругой неустойчивости стержня под действием продольных сжимающих сил. Обсуждается становление Воронежской школы функционального анализа и её роль в развитии нелинейного анализа в целом.

Ключевые слова: Нелинейный функциональный анализ, банахово пространство, нелинейный оператор, бифуркации, теорема Красносельского, неустойчивость, советская математика, Воронежская школа функционального анализа.

Введение

Развитие науки, как и любой исторический процесс, не происходит линейным и непрерывным образом. При ближайшем рассмотрении становятся видны скачки, отходы в сторону, тупиковые направления, влияние случайных факторов. События могут происходить и по следующему сценарию: какая-то область формируется самостоятельно, согласно своим внутренним законам, ее возможности скрыты, находятся в латентной форме. Но проходит время, когда результаты и методы этой области оказываются широко востребованными и находят широкое применение далеко за пределами самой этой области. Таким примером является нелинейный функциональный анализ, который развивался в разных городах Советского Союза, в том числе в Воронеже. Речь идет о Воронежской школе функционального анализа, которая стала заметным явлением математической жизни Советского Союза. Настоящая работа имеет своей целью продемонстрировать богатый потенциал указанной школы на примере теории бифуркаций в контексте параллелей исторического развития нелинейной динамики и топологических методов нелинейного анализа второй половины XX века.

1. Из ранней истории функционального анализа

Функциональный анализ, как раздел математики сложился на рубеже XIX–XX веков. Этому способствовали следующие обстоятельства.

- Появление новых ветвей математического анализа и выявившиеся при этом замечательные аналогии в разных областях алгебры, геометрии и классического анализа (анalogии между конечномерными и бесконечномерными объектами, что привело, например, к теории разложения произвольных функций в ряды Фурье, к построению теории интегральных уравнений).
- Углубление геометрических представлений, превратившее в объекты геометрии пространства более общей природы, и в соединении с теорией множеств Кантора это привело к созданию теории общих абстрактных пространств.
- Развитие теории функций действительного переменного и современной алгебры, что позволило изучать алгебраические операции над объектами произвольной природы (общая теория групп, колец и т.д.) [1, с. 608; 2, с. 644].

Функциональный анализ к середине ушедшего века стал фундаментом и идеологией значительной части математики, он дает возможность установить связи между далекими, на первый взгляд, разделами математики, например, топологией и вариационным исчислением, теорией групп и интегральными уравнениями [1, с. 609].

Бурное развитие функционального анализа в 1920–1930 годах, не в последнюю очередь, было мотивировано физическими задачами. Функциональный анализ лёг в основу математического аппарата квантовой механики, а затем квантовой теории поля. Условной датой рождения функционального анализа можно считать 1932 год, когда появилась монография С. Банаха «Теория линейных операций» [3], где он систематизировал и изложил с единых позиций главные результаты. Тогда всему математическому сообществу стало ясно, что сложилась новая область математики. Значение монографии Банаха можно сравнить с двумя другими великими трудами «Динамические системы» Дж. Биркгофа (1927) и «Теория колебаний» А.А. Андроннова, А.А. Витта и С.Э. Хайкина (1937), появление которых ознаменовало рождение новой области науки – нелинейной динамики. В последующее активное распространение функционального анализа весомый вклад внесла отечественная математика. Если даже ограничиться довоенным периодом, то можно привести ставшие классическими работы Н.Н. Боголюбова и Н.М. Крылова, Л.В. Канторовича, С.Л. Соболева, М.Г. Крейна, И.М. Гельфанда и др.

Функциональный анализ развивался не только в главных математических центрах – Москве и Ленинграде, но и в Харькове, Одессе, Киеве, а с 1950-х годов сюда надо добавить и Воронеж.

2. Возникновение Воронежской школы функционального анализа

В 1930-е годы Воронежский университет был очень молодым, он был основан в 1918 году на базе эвакуированного в Воронеж Юрьевского университета (город Юрьев, ныне Тарту, Эстония) [4]. Первые профессора приехали в Воронеж ещё из Юрьева, но в начале 1930-х годов стали вливаться новые силы, и если говорить о математике, то это были молодые воспитанники Московского университета. Ещё

большее значение имели приезды ряда самых крупных отечественных математиков, которые читали лекции, выступали на семинарах. Студенты, аспиранты, молодые преподаватели имели возможность получить новейшую информацию «из первых рук», от людей, непосредственно делавших науку. Первым приехал Л.А. Люстерник, затем неоднократно бывали А.Н. Колмогоров, Л.С. Понтрягин, В.В. Степанов, А.Н. Тихонов, В.И. Арнольд; этот список можно продолжить.

Дадим краткую биографическую справку об учёных, которые сыграли, с нашей точки зрения, ключевую роль в образовании воронежской школы нелинейного функционального анализа.

Лазарь Аронович Люстерник (1899–1981) – одна из самых ярких фигур в отечественной математике. У него был широкий диапазон научных интересов, он рано добился крупных успехов. В 1920–1930-е годы Люстерник (совместно с Л.Г. Шнирельманом) заложил основы совершенно новой области – топологических методов нелинейного анализа [5–7]. Итогом их исследований явилось решение классической проблемы Пуанкаре о трех геодезических. Этот результат вошел в число высших мировых достижений прошлого века в математике [8, с. 114]. Весной 1935 года Л.А. Люстерник прочёл в Воронежском университете курс функционального анализа, это был один из первых систематических курсов новой области математики. Эти переработанные лекции изложены в большой статье Л.А. Люстерника, которой открывается первый выпуск только что созданных «Успехов математических наук» [9]. В отсутствие в то время учебников эта статья стала на целые годы основным пособием по функциональному анализу в стране [10, с. 7]. К новой области потянулись способные студенты Воронежского госуниверситета. Пройдя аспирантуру в Москве, они вернулись в Воронеж. Одним из них был аспирант Л.А. Люстерника Владимир Иванович Соболев, которого можно считать организатором Воронежской школы функционального анализа. Именно по его инициативе была приглашена в Воронеж целая группа молодых математиков, главным образом, из Украины. Во главе школы встали М.А. Красносельский и С.Г. Крейн. Первым в 1952 году приехал М.А. Красносельский, затем С.Г. Крейн, Я.Б. Рудицкий, П.А. Соболевский, Ю.Г. Борисович и др. [11, с. 32]. Все это имело решающее значение, в 1950-е годы функциональный анализ пустил в Воронеже глубокие корни.

Марк Александрович Красносельский (1920–1997) после окончания Объединённого украинского университета в городе Кзыл-Орда в 1942 году и затем службы в Советской Армии стал в 1947 году сотрудником Института математики АН УССР в Киеве. Там он попал в обстановку интенсивной научной жизни, слушал лекции и принимал участие в работе семинаров крупнейших математиков, механиков, физиков (назовём лишь несколько имён – Н.Н. Боголюбов, А.Ю. Ишлинский, А.Н. Колмогоров, М.Г. Крейн, М.А. Лаврентьев, А.Г. Курош). Красносельский был учеником Марка Григорьевича Крейна – одной из крупнейших фигур в функциональном анализе. В 1948 году Марк Александрович защитил кандидатскую диссертацию по теории расширения операторов, а в 1950 – докторскую диссертацию по топологическим методам нелинейного анализа [12, с. 215]. С начала 1930-х годов в Институте математики начали интенсивно изучать нелинейные задачи. Н.М. Крылов и Н.Н. Боголюбов заложили основы нелинейной механики. И в последующие десятилетия нелинейная проблематика заняла самое видное место в деятельности Института. Так что обращение Красносельского к нелинейному анализу было неслучайным.

3. О роли топологических методов в функциональном анализе и нелинейной динамике

В математике постоянно идёт конкуренция сменяющих друг друга тенденций: первой – построение наиболее общих теорий и концепций, нового мировоззрения и нового понятийного аппарата; второй – изучение на созданном фундаменте конкретных задач, часто стимулированных другими областями математики и её приложений [13, с. 81]. Сказанное относится и к развитию функционального анализа. К началу 1950-х годов закончился период «бури и натиска» – создание новых теорий, доказательство фундаментальных теорем, формирование принципиально новых методов – и наступил период более спокойного развития. Новые методы последовательно обобщались на более широкий класс объектов, расширялись области применимости. К числу таких обобщений относится нелинейный функциональный анализ, в котором на первый план вышли топологические методы.

Если линейный функциональный анализ в конце 1940-х–начале 1950-х годов являлся хорошо развитой областью, то нелинейный функциональный анализ ещё только формировался. Особое место нелинейного функционального анализа в Советском Союзе было ещё обусловлено влиянием московской топологической школы. К нелинейным задачам относятся исследования П.С. Александрова, В.В. Немыцкого, А.Н. Тихонова по принципам неподвижных точек. В 1928–1930-е годы появились результаты Л.А. Люстерника и Л.Г. Шнирельмана по топологическим методам вариационного исчисления [2, с. 646].

Топология – один из самых абстрактных разделов математики – явилась тем инструментом, который наилучшим образом оказался приспособленным для анализа поведения динамических систем, когда не удаётся в явном виде решить уравнения или даже неизвестны сами уравнения, описывающие систему. Топология изучает свойства фигур и их взаимного расположения, сохраняющиеся при гомеоморфизмах – взаимно-однозначных и непрерывных в обе стороны отображениях. Адекватность топологических методов обусловлена двумя аспектами изучаемых систем. Суть первого из них заключается в том, что внимание концентрируется на глобальных, глубинных свойствах; система рассматривается «в целом», когда можно пренебрегать локальными вариациями. Вследствие этого на первое место выходит качественное поведение, а не количественное различие. Неизбежная потеря части информации – такова цена, которую приходится платить за возможное рассмотрение сложных случаев. Другой аспект, тесно связанный с первым, состоит в том, что от отдельного объекта переходят к изучению целого класса объектов, обладающих какими-либо общими чертами, отсюда унифицирующие, универсальные свойства. Такой в значительной степени является общая тенденция в развитии современной математики и теоретической физики [14, с. 65].

Важнейшую часть качественных методов составляет теория устойчивости, основы которой были заложены А. Пуанкаре и А.М. Ляпуновым. Один из типов глобальной устойчивости изучался Пуанкаре в серии работ в связи с восходящими ещё к Ньютону задачами о фигурах равновесия вращающихся жидких масс. При этом было введено понятие, имеющее общенаучное значение, – *бифуркация*. В общем случае понятие бифуркации возникает в ситуации, когда некоторый объект $D = D(\lambda)$ зависит от параметра λ (не обязательно скалярно) и в любой окрестности некото-

рого значения λ_0 последнего (*бифуркационное значение*) исследуемые качественные свойства объекта $D(\lambda)$ не являются одинаковыми для всех λ [15, с. 496].

Указанные задачи привели Ляпунова к первому глубокому исследованию нелинейных интегральных уравнений (1906) [16], которые позднее стали трактоваться как частный случай уравнений вида

$$\varphi = A\varphi, \quad (1)$$

где A – некоторый нелинейный оператор (дифференциальный, интегральный, интегродифференциальный и т.п.).

Непосредственное отношение к важнейшей задаче качественных методов – классификации различных объектов – имеет понятие инвариантов и построение их полной совокупности, позволяющее различать любые два объекта из рассматриваемого множества. Такой подход приводит к понятиям *топологической эквивалентности и топологических инвариантов*. Топологическими инвариантами являются свойства, которые сохраняются при любых гомеоморфизмах одного топологического пространства на другое. К таким инвариантам относятся связность, замкнутость, размерность, компактность и др. Важнейший топологический инвариант, оказавший значительное влияние на развитие нелинейной динамики, был предложен А.А. Андроновым и Л.С. Понтрягиным. Они ввели понятие *грубости* (структурной устойчивости) (1937) [17]. *Грубые системы* – класс динамических систем, у которых топологическая структура фазовых траекторий не меняется при малых изменениях уравнений. Задача для уравнения (1) будет корректно поставлена, если при малых изменениях оператора A мало изменится решение. Отсюда естественным образом вытекает, что каждая корректно поставленная для уравнения (1) задача должна формулироваться в терминах топологических инвариантов [18, с. 13].

Подчеркнём, что топологические методы в нелинейном функциональном анализе возникли в связи с теоремами существования решения нелинейных уравнений (первые результаты в этом направлении принадлежат Дж. Биркгофу и О. Келлогу [19] и Ю. Шаудеру [20]). Начиная с работ М.А. Красносельского, топологические методы становятся универсальным способом решения самых разнообразных нелинейных задач. Итог исследований к началу 1950-х годов был подведён в получившей во всём мире широкую известность монографии М.А. Красносельского «Топологические методы в теории нелинейных интегральных уравнений» (1956) [18].

Отметим, что в настоящее время в физике изменилось отношение к теоремам существования и единственности решений уравнений. В сложившейся физической идеологии, которой придерживалось большинство физиков, существование решения обычно считалось само собой разумеющимся, недавно даже само слово «теорема» вообще считалось недопустимым в физических статьях [21, с. 737]. Такая точка зрения являлась вполне оправданной, пока не столкнулись с сильно нелинейными задачами. Здесь положение иное – нельзя быть заранее уверенным, что решение существует, его может совсем не быть в интересующей области. Поэтому доказательство наличия решения представляет совершенно нетривиальную и нередко самую трудную часть решения задачи. Теперь в целом ряде задач нелинейной динамики на первый план выходят теоремы существования и единственности. Так, в фундаментальной нерешённой проблеме макроскопической физики – возникновения турбулентного движения – выяснение вопроса существования и единственности решений

уравнений Навье–Стокса явилось бы огромным прогрессом. Топологические методы дают возможность не только установить теоремы существования и единственности решений нелинейных уравнений в самых разных случаях, но и разработать методы оценки числа решений, выяснить структуру множества решений и условия его связности, сходимости приближённых методов и др.

4. Из истории теории бифуркаций

Исаак Ньютон после открытия закона всемирного тяготения задался следующим вопросом: может ли жидкая однородная масса, не зависящая от внешних сил, двигаться как твёрдое тело, так чтобы взаимные расстояния всех её частиц оставались неизменными? Если такое движение существует, то какова будет форма жидкости? Более общий вопрос состоит в изучении возможности движения такого рода и определения фигуры равновесия, если жидкость находится под постоянным внешним давлением. Ответ на вопрос о характере движения прост: центр масс жидкости движется равномерно и прямолинейно, а вся масса вращается с постоянной угловой скоростью вокруг оси, проходящей через центр масс и имеющей постоянное направление, причём эта ось будет одной из главных осей инерции. Что касается определения возможных форм жидкости, эта задача, несмотря на усилия крупнейших математиков и механиков, полностью не решена, не проведён полный нелинейный анализ проблемы.

Кроме самого Ньютона, указанной проблемой занимались К. Маклорен, А. Клеро, Т. Симпсон, П.С. Лаплас, Ж.Л. Лагранж, Ж. Даламбер, А.М. Лежандр, С.Д. Пуассон, Ж. Лиувилль, К.Г. Якоби, П. Дирихле, Б. Риман, В. Томпсон (лорд Кельвин), П. Тэт, П.Л. Чебышев [14, с. 49]. Проблема фигур равновесия вращающейся жидкости привела А.М. Ляпунова к серии замечательных работ по бифуркационной тематике и нелинейным интегральным уравнениям, где им были созданы ставшие классическими методы анализа.

Насколько известно авторам, *первая* задача о бифуркациях восходит к XVIII веку и была решена Леонардом Эйлером. Это задача об упругой неустойчивости стержня, подверженного воздействию продольных сжимающих сил. Уравнения равновесия сжатого стержня даются в виде

$$\begin{aligned} I_2 E X''' - T X' - K_x &= 0, \\ I_1 E Y''' - T Y' - K_y &= 0, \end{aligned} \quad (2)$$

где X , Y – компоненты единичного вектора, направленного по касательной к стержню; производные берутся по переменной z , направленной вдоль стержня; I_1 , I_2 – главные моменты инерции сечения стержня; E – модуль Юнга; T – продольная сила. При отсутствии поперечных изгибающих внешних сил K_x , K_y уравнения равновесия (2) имеют очевидное решение $X = Y = 0$, что соответствует стержню, остающемуся при воздействии продольной силы прямолинейным. Такое устойчивое равновесие возможно лишь до тех пор, пока сжимающая сила $|T|$ будет меньше некоторого критического значения, то есть при $|T| < T_{кр}$ прямолинейная форма стержня устойчива по отношению к малым возмущениям. Но при $|T| > T_{кр}$ пря-

молинейная форма отвечает *неустойчивому* равновесию, при бесконечно малом воздействии (изгибе) это равновесие нарушается и происходит сильный изгиб стержня [23, с. 118, с. 124].

Степан Тимошенко, одна из крупнейших фигур в области механики XX века, писал, что внимание Леонарда Эйлера к задачам теории упругости привлёк Даниил Бернулли [24, с. 42]. Основные результаты Эйлера о равновесии упругих стержней и пластинок приведены в обширном приложении «Об упругих кривых» в его книге [25]. До Эйлера подобными задачами занимался Якоб Бернулли. Как известно, Эйлер является одним из основоположников вариационного исчисления. Используя созданные им вариационные методы, Эйлер вывел уравнение упругой линии (ранее полученное Бернулли), которое в привычных нам обозначениях имеет вид [24, с. 452; 23, с. 45]

$$C \frac{y'}{(1 + y'^2)^{3/2}} = P_x, \quad (3)$$

где P_x – нагрузка; C – постоянная («абсолютная упругость»), зависящая от упругих свойств материала. В отличие от Я. Бернулли, Эйлер не ограничился случаем малых деформаций и рассмотрел задачу в общем виде. Тогда в знаменателе (3) уже нельзя пренебречь членом y'^2 по сравнению с единицей, что значительно осложняет задачу. Эйлер отыскал приближённое решение с помощью разложения в ряд и определил значение предельной нагрузки, при превышении которой происходит продольный изгиб стержня. Здесь было главным учесть все принципиально важные, даже самые малые члены, определяющие эффект.

Подобные ситуации повторялись и в дальнейшем. Вспомним, что А. Пуанкаре при изучении фигур равновесия жидкой массы искал решение в виде поправок к известному решению (в данном случае к эллипсоидам Якоби). Пуанкаре решил задачу во втором приближении, но получение конкретных результатов требовали сложных численных расчётов по общим формулам Пуанкаре. Это было сделано английским астрономом Джорджем Дарвином (сыном Чарльза Дарвина), который пришёл к выводу об устойчивости получающихся грушевидных форм равновесия. Полученный результат составлял краеугольный камень космогонической теории Дарвина об эволюции и дальнейшем распаде грушевидных фигур на несколько частей. Отсюда можно было объяснять образование двойных звёзд и планетных систем. А.М. Ляпунов пришёл к противоположному заключению, при этом он исходил из точных формул, а не ограничивался, как Дарвин, вторым приближением. Разгорелась полемика, продолжившаяся несколько лет. Она утихла лишь после того, как Дж. Джинс повторил вычисления Дарвина с учётом третьего приближения и показал, что в этом случае грушевидные фигуры равновесия неустойчивы, в соответствии с результатами Ляпунова [14, с. 50].

Из сказанного видна сложность и деликатность бифуркационных задач. Умение «поймать эффект» оказывалось в определённой степени искусством, доступным далеко не каждому. Было необходимо разработать чёткие критерии алгоритмического характера на прочном математическом фундаменте, чтобы решение бифуркационных задач стало доступным для широких масс. Один из путей решения проблемы был проложен методами нелинейного функционального анализа.

5. Теорема Красносельского и её использование

Для изучения заданного конкретного нелинейного оператора оказывается полезным построить функциональное пространство, в котором этот оператор обладает «хорошими» свойствами (непрерывность, дифференцируемость и т.д.); эта идея восходит ещё к Шаудеру [18, с. 20]. Для многих задач нелинейного анализа и его приложений таким пространством является *банахово пространство* – полное линейное нормированное пространство, которое представляет собой глубокое обобщение на бесконечномерный случай пространства Минковского, лежащего в основе теории относительности. Элементы банахова пространства называют точками или векторами. Нулевой вектор будем обозначать через θ .

Вернёмся к уравнению (1) $\varphi = A\varphi$ или, что равноценно, к векторному полю $\varphi - A\varphi$. Для его исследования требуется изучить топологические инварианты геометрических объектов, которые могут быть поставлены в соответствие указанному уравнению. Обратим внимание на следующее обстоятельство. Существование решения у уравнения будет эквивалентно существованию неподвижной точки при некотором преобразовании или существовании нулевого вектора у некоторого векторного поля.

Для иллюстрации существования решений (1) будем использовать теорию бифуркаций, для чего нам понадобится несколько понятий.

Для наших целей особое значение имеют вполне непрерывные операторы, преобразующие ограниченные множества в компактные¹, поскольку в банаховых пространствах теория разрешимости уравнения $\varphi - A\varphi = \psi$ аналогична теории, созданной для конечномерного случая.

Ещё одно необходимое понятие – дифференцирование оператора по Фреше.

Пусть оператор A действует из банахова пространства E в банахово пространство E_1 и

$$A(x_0 + h) - A(x_0) = B(x_0)h + (x_0, h), \quad (4)$$

где $B(x_0)$ – линейный ограниченный оператор из E в E_1 и $\lim_{\|h\| \rightarrow 0} \frac{\|\omega(x_0, h)\|}{\|h\|} = 0$.

Тогда оператор $B(x_0)$ называют *производной Фреше* оператора A в точке x_0 .

Теперь можно привести классический результат М.А. Красносельского (*теорема Красносельского*) в теории бифуркаций.

Пусть A – вполне непрерывный оператор, имеющий в точке θ производную Фреше B и $A\theta = \theta$. Предполагается также, что оператор A можно представить в виде

$$A = B + C + D, \quad (5)$$

где B – линейный оператор, C – члены следующего порядка малости, D – члены высшего порядка малости.

Тогда каждое характеристическое значение λ_0 нечётной кратности оператора B является точкой бифуркации оператора A , причём этой точке соответствует непрерывная ветвь собственных векторов оператора A , а само множество точек бифуркации дискретно [18, с. 199; 25, с. 104].

¹Множество точек называется компактным, если из всякого его бесконечного подмножества можно выделить последовательность, сходящуюся к некоторой точке пространства.

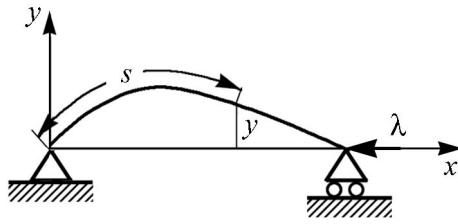


Рис. Изгиб стержня сосредоточенной силой [26, с. 203]

оператора B не являются точками бифуркации. Было полная неясность, когда же такая линейаризация будет законной [22, с. 102]. Теорема Красносельского расставила все точки над «и».

Рассмотрим задачу о бифуркации сжатого стержня с применением топологических методов нелинейного анализа, исходя из работ М.А. Красносельского [18, гл. 4; 27, с. 338]. Пусть A – нелинейный вполне непрерывный оператор, действующий в вещественном банаховом пространстве. Уравнение

$$\varphi = \lambda A\varphi \quad (6)$$

имеет нулевое решение θ при всех значениях параметра λ . Для нас интересен вопрос, при каких значениях λ уравнение (6) имеет малые ненулевые решения. Форма сжатого стержня единичной длины и переменной жёсткости $\rho(s)$ под воздействием силы λ (рис.) определяется из краевой задачи

$$y'(s) + \lambda\rho(s)y(s)\sqrt{1 - y'^2(s)} = 0, y(0) = y(1) = 0. \quad (7)$$

Введём обозначение $y'(s) = -\varphi(s)$. Краевую задачу (7) можно свести к нелинейному интегральному уравнению (см., например, [28, гл. 5, часть 14])

$$\varphi(s) = \lambda\rho(s) \int_0^1 K(s,t)\varphi(t)dt \sqrt{1 - \left[\int_0^1 K'_s(s,t)\varphi(t)dt \right]^2}, \quad (8)$$

где $K(s,t)$ – функция Грина.

Уравнение (8) имеет нулевое решение при всех значениях параметра λ . При некоторых значениях нагрузки λ уравнение может иметь ненулевые решения, которые определяют формы потери устойчивости. Нагрузка λ_0 будет *критической нагрузкой Эйлера*, если при некоторых близких к λ_0 нагрузках уравнение (8) имеет малые ненулевые решения, то есть λ_0 будет точкой бифуркации для уравнения изгиба стержня.

Для дальнейшего анализа задачу требуется линейаризовать, что приводит к уравнению

$$\varphi(s) = \lambda\rho(s) \int_0^1 K(s,t)\varphi(t)dt. \quad (9)$$

Если $l(s)$ – ненулевое решение уравнения (9) при $\lambda = \lambda_0$, то функция

$$y(s) = \int_0^1 K(s,t)l(t)dt \quad (10)$$

Таким образом, для изучения точек бифуркации об уравнениях требуется лишь информация весьма общего характера – знание свойств линейаризованных в нуле уравнений.

До работ М.А. Красносельского при отыскании точек бифуркации нелинейного оператора A задачу обычно линейаризовывали и считали точками бифуркации собственные значения оператора B . Однако были известны случаи, когда собственные значения

будет решением уравнения

$$y''(s) + \lambda_0 \rho(s)y(s) = 0 \quad (11)$$

с нулевыми граничными условиями. Каждое характеристическое значение линеаризованного уравнения является простым и, следовательно, будет точкой бифуркации. Соответствующие значения λ дают критические нагрузки.

Оператор C (см. (5)) представляется в виде

$$C(x(s), \lambda) = -\frac{\lambda \rho(s)}{2} \int_0^1 K(s, t)x(t)dt \left[\int_0^1 K'_s(s, t)x(t)dt \right]^2 \quad (12)$$

и имеет третий порядок малости ($k = 3$). Величина

$$x = -\frac{1}{2} \int_0^1 e^2(s) \left[\int_0^1 K'_s(s, t)x(t)dt \right]^2 ds \quad (13)$$

отрицательна, вследствие чего ненулевые решения появляются при $\lambda > \lambda_0$. Это соответствует физическому смыслу задачи: потеря устойчивости происходит при превышении критического значения нагрузки.

Обратим внимание на следующий факт. Иногда в задаче об изгибе стержня пренебрегают при малых деформациях продольным сдвигом точек стержня [27, с. 339]. Тогда $y(s)$ определяется из краевой задачи

$$\begin{aligned} y'(x) + \lambda \rho(x)y(x)[1 + y'^2(x)]^{3/2} &= 0, \\ y(0) = y(1) &= 0. \end{aligned} \quad (14)$$

Здесь y выражена не как функция длины дуги s , а как функция координаты x . При этом приближённо считается, что $\rho(s) = \rho(x)$, и в граничных условиях не учитывается изменение координаты незакреплённого конца стержня, представляющее собой величину третьего порядка малости по сравнению с прогибом стержня. Однако эта величина третьего порядка сказывается на знаке координаты x , задаваемой в этом случае выражением

$$x = \frac{3}{2} \int_0^1 e^2(x) \left[\int_0^1 K(x, u)e(u)du \right] dx > 0. \quad (15)$$

Это приводит к появлению у соответствующего интегрального уравнения ненулевых решений при $\lambda > \lambda_0$, что противоречит физическому смыслу задачи. Указанный факт ещё раз подтверждает справедливость тезиса о сложности и нетривиальности бифуркационных задач.

Заключение

В настоящее время нелинейный функциональный анализ является интенсивно развивающейся областью как в математическом плане, так и в отношении приложений; он составляет существенную часть математического аппарата при исследовании нелинейных систем².

²Об этом свидетельствует, к примеру, очень представительный симпозиум по нелинейному функциональному анализу и его приложениям, проходивший в Беркли [29].

Немалая часть результатов в этой области была получена в рамках научной школы М.А. Красносельского во второй половине XX века [30]. Среди них можно выделить следующие результаты:

- исследование ветвления решений нелинейных уравнений и бифуркаций вариационными и топологическими методами анализа;
- нахождение точных и приближенных решений нелинейных операторных уравнений с вполне непрерывными и положительными операторами;
- исследование нелинейных интегральных уравнений – доказательство существования решений уравнений Гаммерштейна, Урысона;
- развитие теории функциональных пространств, интерполяции и пространства Орлича;
- изучение абстрактных нелинейных дифференциальных уравнений в банаховых пространствах с неограниченными операторами;
- решение нелинейных задач теории колебаний; исследование периодических, почти периодических, ограниченных решений;
- развитие теории систем с гистерезисом, устойчивости дискретных рассинхронизованных систем.

В качестве наиболее характерных приложений работ Красносельского, помимо вышеупомянутых по упруго-механическим задачам, можно привести следующие приложения [31]:

- моделирование периодических колебаний и ограниченных режимов в различных нелинейных системах;
- моделирование электрических цепей с диодными нелинейностями;
- моделирование нелинейных почти периодических колебаний с приложениями к теории маятников, задачам авторегулирования;
- применение теории уравнений с вогнутыми операторами при анализе процессов в атомных реакторах.

В связи с проблемой вычисления вращения векторных полей, порождаемых динамической системой, М.А. Красносельским был предложен метод *направляющих функций*, обобщающий метод функций Ляпунова в теории устойчивости [32].

Имя М.А. Красносельского неизменно ассоциируется с нелинейным функциональным анализом и теорией бифуркаций не только в республиках бывшего СССР, но и во всём научном мире [33, с. 46; с. 348], [34, с. 341; с. 546]. Его многочисленные ученики и последователи продолжают обогащать нелинейную науку новыми открытиями, расширяя горизонты познания и находя новые интересные приложения математическим теориям.

Библиографический список

1. Крейн М.Г., Люстерник Л.А. Функциональный анализ // Математика в СССР за 30 лет. М.–Л.: ГИТТЛ, 1948.
2. История отечественной математики. В 4-х т., в 5-и кн.; кн. 1. Киев: Наукова думка, 1970.
3. Banach S. Théorie des opérations linéaires. Warszawa, 1932.
4. Карпачёв М.Д. Воронежский университет. Воронеж: Изд-во ВГУ, 2003.
5. Люстерник Л.А., Шнирельман Л.Г. Топологические методы в вариационных задачах // Труды научно-исслед. инст. математики и механики, 1930. Отд. издание.

6. *Lusternik L., Schnirelmann L.* Existence des trois lignes géodésiques fermées sur la chaque surface de genre 0 // *Comp. Ren.* 1929. Vol. 188. P. 534.
7. *Lusternik L., Schnirelmann L.* Sur la problém des trois géodésiques fermées sur la chaque surface de genre 0 // *Comp. Ren.* 1929. Vol. 189. P. 269.
8. *Тихомиров В.М.* Из «Созвездия полубогов» (К 100-летию Л.А.Люстерника) // *Истор.-матем. исследования. II серия, вып. 5 (40).* М.: «Янус-К», 2000. С. 112.
9. *Люстерник Л.А.* Основные понятия функционального анализа// *УМН* 1936. № 1. С. 77.
10. *Лазарь Аронович Люстерник (К 80-летию со дня рождения)* // *УМН.* 1980. Т. 35, вып. 6. С.3.
11. *Бахтин И.А.* Об основных направлениях работы М.А. Красносельского // *Материалы к истории математического факультета ВГУ. Воронеж, 1998.*
12. *Марк Александрович Красносельский (К 60-летию со дня рождения)* // *УМН.* 1981. Т. 36, вып. 2. С. 215.
13. *Вершик А.М.* Жизнь и судьба функционального анализа в XX веке // *Математические события XX века.* М.: ФАЗИС, 2003. С.81.
14. *Мухин Р.Р.* Очерки по истории динамического хаоса. М.: URSS, 2012.
15. *Аносов Д.В., Треногин В.А.* Бифуркация // *Мат. энциклопедия. Т.1.* М.: Сов. Энциклопедия, 1977. С. 496.
16. *Liapounoff A.M.* Sur les figures d'équilibre pen différentes des ellipsoïds d'une masse liquid' de homogène doulée d'un mouvement de rotation. I partie. Etude générale du problème // *St.-Pbg. Imprim. de l'Acad. des Sc.-1906.* IV+225p.
17. *Андронов А.А., Понтрягин Л.С.* Грубые системы // *ДАН СССР.* 1937. Т. 14, № 5. С. 247.
18. *Красносельский М.А.* Топологические методы в теории интегральных уравнений. М.: ГИТЛ, 1956.
19. *Birkhoff G.D., Kellog O.D.* Invariant points in function space // *Trans. AMS.* 1922. Vol. 23. P. 96.
20. *Schauder J.* Der Fixpunktsatz in Funktinalraumen // *Studia Math.* 1930. № 2. S. 171.
21. *Арнольд В.И.* От суперпозиций до теории КАМ // *В.И. Арнольд. Избранное—60.* М.: ФАЗИС, 1997.
22. *Красносельский М.А.* Некоторые задачи нелинейного анализа // *УМН.* 1954. Т. 9, вып. 3. С.57.
23. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теория упругости. М.: Наука, 1965.
24. *Тимошенко С.П.* История науки о сопротивлении материалов. М.: ГИТТЛ, 1957.
25. Метод нахождения кривых линий, обладающих свойствами максимума либо минимума, или решение изопериметрической задачи, взятой в самом широком смысле Леонарда Эйлера, королевского профессора и члена Императорской Петербургской Академии наук. М.-Л.: ГТТИ, 1934.
26. *Красносельский М.А.* Рассмотрение спектра нелинейного оператора в окрестности точки бифуркации и применение к задаче о продольном изгибе сжатого стержня // *УМН.* 1957. Т.12, вып. 1. С. 203.
27. *Забрейко П.П., Красносельский М.А., Рутецкий Я.Б.* Нелинейные интегральные уравнения // *Функциональный анализ. Под ред. С.Г. Крейна.* М.: Наука, 1972.

28. *Курант Р., Гильберт Д.* Методы математической физики. Т.1. М.-Л.: ГТТИ, 1933.
29. Nonlinear functional analysis and its applications. Proceedings of symposia in pure mathematics. Berkley, California. July 11–29, 1983. Providence, Rhode Island, 1986.
30. Памяти М.А. Красносельского URL: <http://www.aha.ru/amkr/obitrus.html> (дата обращения 05.11.15)
31. *Красносельский М.А., Бурд В.Ш., Колесов Ю.С.* Нелинейные почти периодические колебания. М.: Наука, 1970.
32. *Борисович Ю.Г.* М.А. Красносельский – выдающийся ученый и педагог URL: <http://nan.vstu.edu.ru/research-1.htm> (дата обращения 05.11.15)
33. *Ziedler E.* Nonlinear Functional Analysis and Its Applications. I: Fixed-Point Theorems. New York: Springer-Verlag, 1986.
34. *Ziedler E.* Nonlinear Functional Analysis and Its Applications. III: Variational Methods and Optimization. New York : Springer-Verlag, 1985.

Поступила в редакцию 25.05.2015
После доработки 21.12.2015

**THE RELATION BETWEEN THE NONLINEAR ANALYSIS,
 BIFURCATIONS AND NONLINEAR DYNAMICS
 (On the example of Voronezh school
 of nonlinear functional analysis)**

E. M. Bogatov, R. R. Mukhin

Sary Oskol Technological Institute named after A.A.Ugarov,
 the Branch of National Research Technological University «MISIS»

The paper is devoted to some historical aspects of the rapidly developing field of modern mathematics – nonlinear functional analysis, which is presented as the basis of the mathematical apparatus of nonlinear dynamics. Its methods are demonstrated on the example of bifurcation. The first bifurcations problem – Euler problem on elastic instability rod under longitudinal compressive forces is considered. The formation of Voronezh school of functional analysis and its role in the development of nonlinear analysis in general is also discussed.

Keywords: Nonlinear functional analysis, Banach space, nonlinear operator, bifurcation, instability, Voronezh school of functional analysis, Soviet mathematics, Krasnosel'skii theorem.

References

1. *Krein M.G., Lyusternik L.A.* Functional analysis // Mathematics in the USSR for 30 Years. Moscow–Leningrad: GITTL, 1948 (in Russian).
2. *Istoriya Otechestvennoy Matematiki. V 4 Tomah, 5 Knigah. Kniga 1.* Kiev: Naukova dumka, 1970 (in Russian).
3. *Banach S.* Théorie des opérations linéaires. Warszawa, 1932.
4. *Karpachev M.D.* Voronezh University. Voronezh: Izd-vo VGU, 2003 (in Russian).

5. *Lyusternik L.A., Shnirelman L.G.* Proceedings of the Scientific-Research. Inst. Math. and Mech., 1930 (in Russian).
6. *Lyusternik L., Schnirelmann L.* Existence des trois lignes géodésiques fermées sur la chaque surface de genre 0 // *Comp. Ren.* 1929. Vol. 188. P. 534.
7. *Lyusternik L., Schnirelmann L.* Sur la problém des trois géodésiques fermées sur la chaque surface de genre 0 // *Comp. Ren.* 1929. Vol. 189. P. 269.
8. *Tikhomirov V.M.* Hist. and Mathemat. Studies. 2 Ser., Iss. 5 (40). Moscow: Yanus-K, 2000. P. 112 (in Russian).
9. *Lyusternik L.A.* // *Uspekhi Mat. Nauk.* 1936. Vol. 1. P. 77 (in Russian).
10. *Aleksandrov P.S., Vishik M.I., Ditkin V.A., Kolmogorov A.N., Lavrent'ev M.A., Oleinik O.A.* Lazar' Aronovich Lyusternik (To the 80th Birthday) // *Uspekhi Mat. Nauk.* 1980. Vol. 35, Iss. 6(216). P. 3 (in Russian).
11. *Bakhtin I.A.* Materials to the history of mathematical department of VSU. Voronezh, 1998 (in Russian).
12. *Bogolyubov N.N., Ishlinskii A.Yu., Kantorovich L.V., Sadovskii B.N., Sobolev S.L., Trapeznikov V.A., Bobylev N.A.* // *Uspekhi Mat. Nauk* 1981. Vol. 36, Iss. 2(218). P. 215 (in Russian).
13. *Vershik A.M.* The Life and Fate of Functional Analysis in the Twentieth Century. Mathematical Events of the Twentieth Century. Springer-PHISIS, 2006. P. 437.
14. *Mukhin R.R.* Essays on the History of Dynamic Chaos. Moscow: URSS, 2012 (in Russian).
15. *Anosov D.V., Trenogin V.A.* Bifurcation // *Math. Encyclopedia.* Vol. 1. Moscow: Sov. Encyclopedia, 1977. P. 496 (in Russian).
16. *Liapounoff A.M.* Sur les figures d'équilibre pen différentes des ellipsoïds d'une masse liquid' de homogène doublée d'un mouvement de rotation. I partie. Etude générale du problème // *St.-Pbg. Imprim. de l'Acad. des Sc.* 1906. IV+225p.
17. *Andronov A.A., Pontryagin L.S.* Rough systems // *Dokl. Akad. Nauk SSSR.* 1937. Vol. 14, № 5. P. 247 (in Russian).
18. *Krasnosel'skii M.A.* Topological Methods in the Theory of Nonlinear Integral Equations. Oxford: Pergamon Press, 1964.
19. *Birkhoff G.D., Kellog O.D.* Invariant points in function space // *Trans. AMS.* 1922. Vol.23. P. 96.
20. *Schauder J.* Der Fixpunktsatz in Funktinalraumen // *Studia Math.* 1930. № 2. S. 171.
21. *Arnold V.I.* From Superpositions to the KAM Theory // *V.I. Arnold. Selected Works – 60.* Moscow: PHASIS, 1997 (in Russian).
22. *M. A. Krasnosel'skii* // *Uspekhi Mat. Nauk.* 1954. Vol. 9, Iss. 3(61). P. 57 (in Russian).
23. *Landau L.D., Lifshitz E.M.* Theory of Elasticity: Vol. 7 of a Course of Theoretical Physics. Pergamon Press, 1970.
24. *Timoshenko S.P.* The History of the Science of Strength of Materials. Moscow: GITTL, 1957 (in Russian).
25. A Method for Finding Curves Having the Properties of Maximum or Minimum or Isoperimetric Problem Decision, Taken in the Broadest Sense of Leonhard Euler, a Royal Professor and Member of the St. Petersburg Imperial Academy of Sciences. Moscow-Leningrad: GTTI, 1934 (in Russian).

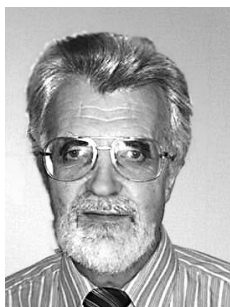
26. *Krasnosel'skii M. A.* // *Uspekhi Mat. Nauk.* 1957. Vol. 12, Iss. 1(73). P. 203 (in Russian).
27. *Krasnosel'skii M.A. and colleagues.* *Functional Analysis.* Wolters-Noordhoff Publ., Groningen, 1972. 379p.
28. *Curant R., Hilbert D.* *Methods of Mathematical Physics.* Vol. 1. John Wiley & Sons Inc, 1953.
29. *Nonlinear functional analysis and its applications* // *Proc. of symposia in pure math.* California, Berkley, July 11-29, 1983. Providence, Rhode Island, 1986.
30. *To the Memory of M.A. Krasnosel'skii* [Online] <http://www.aha.ru/amkr/obitrus.html> (accessed 05.11.15) (in Russian).
31. *Krasnosel'skii M.A., Burd V.Sh., Kolesov Yu.S.* *Nonlinear Almost Periodic Oscillations.* New York: Wiley & Sons, 1973.
32. *Borisovitch, Yu.G.* *M.A. Krasnosel'skii – an Outstanding Scientist and Educator* [Online] URL: <http://nan.vstu.edu.ru/research-1.htm> (accessed 05.11.15) (in Russian).
33. *Ziedler E.* *Nonlinear Functional Analysis and Its Applications. I: Fixed-Point Theorems.* New York: Springer-Verlag, 1986.
34. *Ziedler E.* *Nonlinear Functional Analysis and Its Applications. III: Variational Methods and Optimization.* New York : Springer-Verlag, 1985.

Богатов Егор Михайлович – родился в Волгограде (1974). Окончил Воронежский государственный университет (1997). После окончания ВГУ работал преподавателем в Воронежской государственной архитектурно-строительной академии и в ВГУ. Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук (ВГУ, 2000) по специальности «Дифференциальные уравнения». После защиты диссертации работает на кафедре высшей математики Старооскольского технологического института им. А.А. Угарова (филиал) Национального исследовательского технологического университета «МИСИС» в должности доцента. Автор учебника «Организация эксперимента» (в соавторстве с В.П. Соловьёвым). Руководитель научного проекта РФФИ по теме «Математическое моделирование процессов теплопереноса в нелинейных периодических двухфазных средах вида газ–металл» (2006–2008). Опубликовал более 30 научных статей по дифференциальным уравнениям и их приложениям. Имеет сертификат инструктора Wolfram Research Mathematica по обучению пакетам компьютерной математики в странах Восточной Европы. Область научных интересов: математическое моделирование физических процессов в неоднородных средах, история функционального анализа.

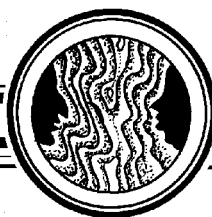


309516 Белгородская обл., Старый Оскол, мкр-н Макаренко, 42
 Старооскольский технологический институт им. А.А. Угарова,
 филиал Национального исследовательского технологического университета
 «Московский институт стали и сплавов»
 E-mail: embogatov@inbox.ru

Мухин Равиль Рафкатович – родился в Челябинской области (1947), окончил Московский инженерно-физический институт (1976). Защитил кандидатскую диссертацию по химической физике (1991, Институт органического синтеза и углехимии АН Казахстана) и докторскую диссертацию по истории динамического хаоса (2011, ИИЕТ РАН). Автор монографии «Очерки по истории динамического хаоса» (2007, 2012). Область научных интересов: история физико-математических наук. В настоящее время профессор Старооскольского технологического института (НИТУ МИСИС).



309516 Белгородская обл., Старый Оскол, мкр-н Макаренко, 42
 Старооскольский технологический институт им. А.А. Угарова, филиал
 Национального исследовательского технологического университета
 «Московский институт стали и сплавов»
 E-mail: mukhiny@mail.ru



ИЗ ВОСПОМИНАНИЙ О Л.А. ВАЙНШТЕЙНЕ

Лев Альбертович Вайнштейн (6.12.1920–8.09.1989) – советский учёный-радиофизик, член-корреспондент Академии наук СССР по Отделению общей и прикладной физики, специализация «радиофизика и радиотехника». Научные труды Л.А. Вайнштейна относятся к теории дифракции, теории открытых резонаторов, распространению волн в околоземном пространстве, сверхвысокочастотной электронике (им разработана нелинейная теория лампы бегущей волны), теории передачи сигналов. Теоретические методы, разработанные Вайнштейном, имели большое значение для проектирования систем радиолокации, устройств техники СВЧ, лазеров. Внёс значительный вклад в становление саратовской научной школы по электронике СВЧ.

Ниже приведены выдержки из ряда изданий, посвященных памяти Л.А. Вайнштейна.

Ключевые слова: Л.А. Вайнштейн, воспоминания коллег, стихи Л.А. Вайнштейна.

Д.И. Трубецков [1]

Увидел и услышал Л.А. я впервые в 1962 году в Москве на конференции, проходившей в гостинице «Советская». Конференция стала знаменита тем, что на ней П.Л. Капица впервые рассказал о своем варианте электроники больших мощностей. Л.А. выступил с сообщением о работах по СВЧ-электронике, проводимых в Институте физпроблем. От этой встречи запомнились его манера говорить и несколько странная одежда: шинель и армейская шапка-ушанка.

Вторая встреча – в мокрый декабрь 1966 года в Ленинграде, семинар, организуемый Ю.А. Кацманом. Л.А. публично похвалил меня за доклад, чему я был несказанно рад. Все это время Л.А. казался мне мэтром, живым классиком. далеким по месту в научной иерархии и по возрасту. Я не общался с ним, а лишь уважительно ему внимал.

Наше общение началось осенью 1967 года на первой (оставшейся единственной) Всесоюзной школе по СВЧ-электронике, проходившей в Аштараке. Л.А. прочитал прекрасные лекции в общем (с В.А. Солнцевым) курсе «Введение в СВЧ-электронику и теорию ЛБВ». Это был первый шаг к их совместной книге. Л.А. участвовал практически во всех дискуссиях, стремясь к ясности, был порою резок и не стеснялся в выражениях. Кто-то из почтенных профессоров, извинившись, задал вопрос. Л.А.: «Чем глупее вопрос, тем большую информацию несет ответ на него». Профессор (растерянно): «Но ведь это – не глупый вопрос?».

В докладе – «темное» место. Л.А. задает вопрос. Докладчик отвечает правильно, но невнятно. Л.А.: «Я задал вопрос, потому что у меня есть хороший ответ на него». После чего следует объяснение «темного» места.<...>

В начале 1970 года мы впервые провели в Саратове Зимнюю школу-семинар инженеров по теоретической электронике СВЧ. Работа Л.А. для наших Школ, а их за двадцать лет прошло восемь, была по-настоящему подвижнической и необычайно важной не только для саратовцев, но и для всех электронщиков Союза. Л.А. прочел на этой школе десять лекций по основам электроники сверхвысоких частот, которые превратились в книгу «Лекции по сверхвысокочастотной электронике», на мой взгляд, лучшую книгу из всех известных в этой области.

К сожалению, многое из прочитанного на школах осталось лишь в книжках лекций. Так, уникальным остается курс (совместно с А.С. Рошалем) «Пространственный заряд в магнетронных приборах»* (2-я Зимняя школа-семинар инженеров, 1972).

<...> в 1956–1957 годах Лев Альбертович построил нелинейную теорию лампы с бегущей волной, результаты которой были доложены в Париже на Международном конгрессе по СВЧ-электронике. В области электроники СВЧ почти все его работы были «нелинейными».

Круг вопросов, которыми он занимался в области электроники, весьма широк. В статье**, посвященной памяти Л.А. Вайнштейна, есть такие слова: «Он любил повторять, что в науке действует своеобразный закон сохранения: для большинства ученых примерно одинакова площадь на графике, по осям которого отложены широта знаний и их глубина. Увеличить этот интеграл можно только в том случае, если всерьез работать в различных областях науки. Сам Лев Альбертович всю жизнь следовал этому правилу, живо увлекался различными проблемами, особенно теми, в которых, как он выражался, оставалось много грязи»***.

Я.Н. Фельд [2]

Наряду с чисто научной работой он много времени уделял организации науки. Так, в течение нескольких десятилетий он был бессменным председателем оргкомитетов Всесоюзных симпозиумов по дифракции и распространению волн и активным участником симпозиумов по электронике. Большую пользу приносил он, регулярно посещая общемосковский семинар по дифракции и распространению волн и постоянно выступая на нем. Лев Альбертович был активным туристом и до болезни проводил отпуска в походах в горы, плавании по рекам и путешествиях. Он любил поэзию и сам в стихах комментировал различные жизненные ситуации. Мне запомнилось одно его четверостишие, написанное в связи с поведением сотрудника лаборатории:

О, Берман – язва здешних мест.
Попеременно всех он ест –
И мы несем свой тяжкий крест,
Не в силах выразить протест.

Тяжелая, смертельная болезнь свалилась на него в последние годы его жизни. Диагноз и безнадежность лечения ему были известны. Но это не сломило его. Лев Альбертович продолжал заниматься наукой, ходить на работу, участвовать в семинарах и симпозиумах, и все это в промежутках между пребываниями в больнице.

* Недавно я попытался вновь обратить внимание на эту работу (УФН, т. 179, № 3, март, 2009, с. 255–277).

** УФН, 1990, т. 160, вып. 4, с. 88–89.

*** Я не касаюсь классических работ Льва Альбертовича в области электродинамики, нашедших отражение в его монографиях: «Дифракция электромагнитных волн на открытом конце волновода» (1953), «Теория дифракции и метод факторизации» (1966), «Открытые резонаторы и открытые волноводы» (1966), а также монографий «Выделение сигналов на фоне случайных помех» (1960, совместно с В.Д. Зубаковым) и «Разделение частот в теории колебаний и волн» (1983, совместно с Д.Е. Вакманом).

В одной из книг Льва Альбертовича есть эпитафия, последние две строчки которого я приведу:

Здорова и сильна моя основа,
В тяжелый час она спасет меня.

Но, к сожалению, не спасла.

Б.3. Каценеленбаум [2]

Как ученый Л. А. обладал четырьмя свойствами, редко сочетающимися в одном человеке – он был талантлив, трудолюбив, эрудирован и удачлив. Приведенные ниже примеры относятся к деталям и потому особенно убедительно доказывают наличие этих качеств, так как именно мелочи отчетливее всего передают сущность человека и его судьбу.

а) В теории возбуждения волноводов существует тонкость – в продольные компоненты полей входят дополнительные слагаемые, пропорциональные продольным компонентам возбуждающих токов. Этот результат, принадлежащий Л.А., решающе важен в теории электронных ламп. Л.А. получил его не непосредственно из уравнений, а рассматривая некий мысленный опыт с удалением бесконечно тонкого слоя тока. При этом токи рвутся, возникают заряды в поперечных сечениях и соответственно порождаемые ими продольные поля. Этот результат и этот способ мышления кажутся элементарными только потому, что они известны.

б) В задаче о полубесконечном волноводе Л.А. применил метод Винера–Хопфа. Решение получается в виде трехкратного интеграла в комплексной плоскости. Для того чтобы решение представляло интерес и могло быть проанализировано, надо взять хотя бы внутренние интегралы. А для этого надо производить деформацию контура на двуплоскостной поверхности Римана. Л.А. склеил эту поверхность из картона, материализовав понятия «разрез», «точка ветвления», «контур интегрирования». Напомню, что это было 45 лет тому назад, и применение этих методов еще не перешло из работ академиков и докторских диссертаций в студенческие дипломы.

с) Работа над электродинамическими задачами научила Л.А. технике решения интегральных уравнений с ядром, зависящим от разности аргументов. В совершенно другой области радиофизики – в теории фильтров – многое тоже основывается на таких уравнениях. Л.А. не просто перенес свои результаты в новую для себя область – он освоил ее настолько, что написанная им монография долго была основным пособием по этому кругу вопросов.

д) Разумеется, к тем, кто талантлив, эрудирован и трудолюбив, удача приходит чаще, чем к тем, кто не обладает всеми этими качествами, но корреляция не очень велика и удачливость можно рассматривать как независимое свойство. Все работы Л.А. по дифракции на открытом конце полубесконечных линий публиковались примерно на год раньше, чем аналогичные (часто менее полные) результаты американцев. Кстати, американцев было человек 5–6, а Л.А. помогал один вычислитель.

Если бы Л.А. прочел эти заметки, он, вероятно, охарактеризовал бы их своим любимым выражением, которое он применял к бессодержательным сообщениям:

Вот бежит за лесом заяц –
Ты поймай и обобщи,
И скорей клади во щи.

В КОРИДОРАХ НАУКИ [3]
Эпиграммы и стихотворения Л.А. Вайнштейна

Готгольд Эфраим Лессинг

К читателю

Клопштока классиком считали.
Но кто прочтет его сейчас?
О, если б меньше почитали
И больше бы читали нас!

Карл Маркс

Гегель

Кант и Фихте плавали в эфире,
Там ища заветный идеал.
Лишь одно хочу понять я в мире –
То, что я на улице собрал.

Франц Грильпарцер

Мировоззрение

Бык вышел на цветущий луг
И ест подряд, что есть вокруг.
Зеленое многообразие –
Все для него трава. А разве
Неправ он, наш рогатый друг?

Юбилей

Он семьдесят лет отмечает.
А что юбилей означает?
С семи до семидесяти
Лишь нулик он смог наскрести!

Рудольф Пресбер

Большой человек

За что известность он обрел
Во всем ученом мире?
Он из санскрита перевел,
Что дважды два – четыре.

Людвиг Фульда

Патология

Оригинальной кажется смесь
Бреда и пустословья;
Болезней много на свете есть,
Но только одно здоровье.

Мифология

В стойла Авгия кто ни зайдет,
Тотчас победный клич издает.
Думаешь: так Геркулес появляется,
А от него лишь дерьма прибавляется.

Христиан Моргенштерн

Кто это?

Смердел он у печки шлепанцем бросовым
И назывался при этом философом.

Пауль Гейзе

Этика и эстетика

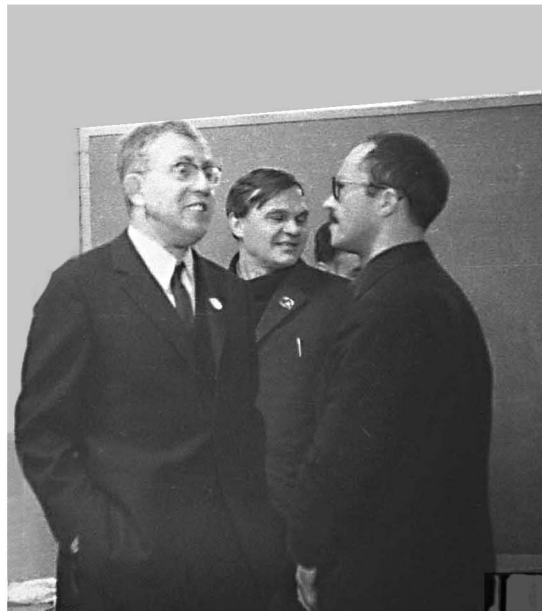
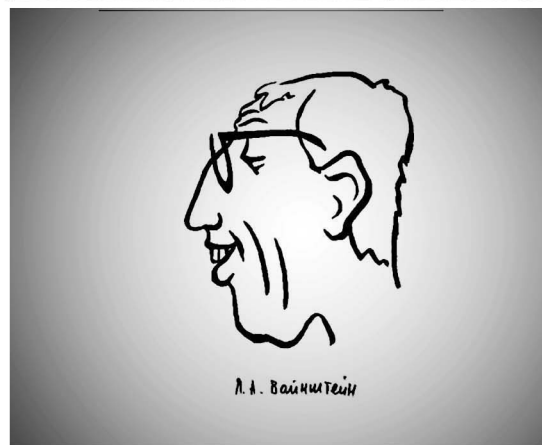
«Все понять – значит все простить» –
В быту так бывает, действительно.
Но это в искусство переносить
Глупо и непростительно.

Историкам

Ругают бабу-непоседу:
Не суй свой нос в горшок соседу.
Но крайне важно знать, коллеги,
Что там варили в прошлом веке!



Теоретический отдел ИФП АН СССР, 1956. Стоят (слева направо):
С.С. Герштейн, Л.П. Питаевский, Л.А. Вайнштейн, Р.Г. Архипов, И.Е. Дзялошинский.
Сидят: Л.А. Прозорова, А.А. Абрикосов, И.М. Халатников, Л.Д. Ландау и Е.М. Лифшиц



На 2-й Зимней школе-семинаре по СВЧ электронике, Саратов, Волжские Дали, январь-февраль, 1972. 1. Вопрос к лектору. 2. Со слушателями школы, слева направо: И.А.Накрап и Н.П.Демченко (СГУ). 3. После лекции, слева направо: Л.А.Вайнштейн, В.С.Андрушкевич и Д.И.Трубецков (СГУ). 4. Шарж для стенгазеты. Автор Д.В.Соколов. 5. Между лекциями. 6. С Г.П.Прудковским (ИФПАН) и Г.Г.Моносовым ("Исток")

Курт Барч

Смелое выступление

Я хотел бы высказать
Мнение свое... Такого начала не ждал никто.
«...Еще Карл Маркс сказал, что...»

Николаус Ленау

Биологам

Секрет всего живого	Под хохолком. И вдаль
От взора скрыт людского:	Пичужка улетела;
В орехе скатана	Поймать бы – но едва ль
Записка	Удастся это дело.
И в море спрятана	Кто знает, может быть, она
Неблизко.	Сидит у твоего окна
Огромно море, мал орех,	И весело весенним днем
А чудный ларчик манит всех.	Поет, поет, и песни эти
Пльви за ним, не проскочи –	Тебе расскажут о секрете,
Ищи! Ищи! Секрет всего живого	Записанном под хохолком!
От взора скрыт людского	Следи за птичкой и молчи –
На маковке у птички-	Ищи! Ищи!
Невелички	

* * *

Человек в свирепой жажде нового,
Чтоб стереть о прошлом даже память,
Все стремится переименовывать,
Расправляясь с прежними столпами.

Изменений видимо-невидимо	Но никто словам не поклоняется,
В том, что вечным нам казалось с вами...	Факты – вещь простая и упрямая,
В нашей жизни трудно что-то выдумать,	И чем больше это все меняется,
Легче взять и подменить название.	Тем ясней, что это то же самое

1962

Сонет о женщине

Пенорожденная! Андиомена!
К жертвам привыкшая Эроса мать!
Валерий Брюсов

Во всех несчастьях и при всех потерях	Опять тоска не так уж нестерпима,
Я вспоминаю об Андиомене	Опять, как в ранней юности, томленье.
И вижу: вот, родившись в белой пене,	Опять волнуют бедра и колени
Она выходит на отлогий берег.	Любой девчонки, проходящей мимо.
Да, в женщине есть жизненная сила,	Но слишком много женщин под луной.
Она не только чаша наслаждений.	Куда достойней думать об одной.
Одних она ввергала в бездну лени,	
Других – к высоким звездам возносила.	

Смерть

Слова, слова... Поверьте:
Мне мало осталось жить.
Черная бабочка смерти
У меня на губах дрожит.

Шумит человеческий улей.
Но – через пустоту
Слышу за гулом улиц
Быстрых копыт стук.

За мною рыцарь несется.
Он без щита и меча,
Но шлем его, словно солнце,
Весь в золотых лучах.

Но как душе ни хотелось,
Как ни просит – нельзя
Бессильно лежащее тело
В дорогу с собой взять.

17 июля 1989 г.

* * *

Библиографический список

1. Трубецков Д.И. «Воспоминаний свет, пронзающий года...». Серия «След вдохновений и трудов упорных...». Вып. 7. Саратов: ООО ИЦ «Наука», 2011. 100 с.
2. Воспоминания / Л.А. Вайнштейн. Теория дифракции. Электроника СВЧ. М.: Радио и связь, 1995. С. 580–583.
3. В коридорах науки / Л.А. Вайнштейн. Теория дифракции. Электроника СВЧ. М.: Радио и связь, 1995. С. 576–579.

FROM THE REMINISCENCES ON L.A. VAINSHTEIN

Lev Al'bertovich Vainshtein (6.12.1920–8.09.1989) – the Soviet scientist, radio-physicist, Corresponding Member of the Russian Academy of Sciences. The paper is the extracts from any books dedicated to the memory of L.A. Vainshtein.

Keywords: L.A. Vainshtein, reminiscences of the colleagues, verses of L.A. Vainshtein.

References

1. Trubetskov D.I. «Vospominanii Svet, Pronzajushchii Goda...». Serija «Sled Vdohnovenii i Trudov Upornyh...». Vyp. 7. Saratov: ООО ITs «Наука», 2011. 100 s. (In Russian).
2. Vospominanija / L.A. Vainshtein. Teorija Difractsii. Electronica SVCh. M.: Radio i Svjaz', 1995. S. 580–583. (In Russian).
3. V Koridorah Nauki / L.A. Vainshtein. Teorija Difractsii. Electronica SVCh. M.: Radio i Svjaz', 1995. S. 576–579. (In Russian).



Научная школа-конференция

НЕЛИНЕЙНЫЕ ДНИ В САРАТОВЕ ДЛЯ МОЛОДЫХ – 2015

Саратов, 27–31.10.2015, 24–27.11.2015

Организаторы

- Факультет нелинейных процессов Саратовского государственного университета имени Н.Г. Чернышевского
- при поддержке Фонда некоммерческих программ «Династия»

Программный комитет

Трубецков Д.И., председатель, чл.-корр. РАН, заведующий кафедрой электроники, колебаний и волн ФНП СГУ

Левин Ю.И., зам. председателя, профессор, декан ФНП СГУ

Шараевский Ю.П., д.ф.-м.н., заведующий кафедрой нелинейной физики ФНП СГУ

Рыскин Н.М., д.ф.-м.н., профессор кафедры нелинейной физики ФНП СГУ

Савин А.В., к.ф.-м.н., доцент кафедры нелинейной физики ФНП СГУ

Оргкомитет

Трубецков Д.И., председатель, чл.-корр. РАН, заведующий кафедрой электроники, колебаний и волн ФНП СГУ

Левин Ю.И., зам. председателя, профессор, декан ФНП СГУ

Рыскин Н.М., д.ф.-м.н., профессор кафедры нелинейной физики ФНП СГУ

Савин А.В., к.ф.-м.н., доцент кафедры нелинейной физики ФНП СГУ

Марнопольская В.П., вед. программист ФНП СГУ

Савин Д.В., аспирант ФНП СГУ

Кузнецов Н.Н., вед. программист ФНП СГУ

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА

Секция школьников

Саратов, Гостинично-оздоровительный комплекс «Сокол»,
27–31 октября 2015

27 октября, вторник

Открытие Школы-конференции

Лекции

Трубецков Д.И., член-корр. РАН, профессор СГУ. О турбулентности:

От Леонардо да Винчи до Фейгенбаума. ч. 1
Шараевский Ю.П., профессор, СГУ. Левые среды
Савин А.В., доцент СГУ. Физика и музыка
Организационное собрание участников

28 октября, среда

Лекции

Короновский А.А., профессор, СГУ. Нелинейная динамика общества

Трубецков Д.И., член-корр. РАН, СГУ. О турбулентности:

От Леонардо да Винчи до Фейгенбаума. ч. 2

Трубецкова Е.Г., доцент, СГУ. Пространство и время в романе

М.А. Булгакова «Мастер и Маргарита»

Доклады участников

Сидоров Кирилл, лицей № 37, Саратов. Как решить задачу без интеграла?

Новоселова Дарья, ЛПН, Саратов. Модель двух взаимодействующих партнеров – государства и населения, «борющихся» за здоровье населения

Дворцов Александр, ЛПН, Саратов. Численное моделирование динамики

систем нейронов при помощи модели Винера–Розенблюта

Возлеев Юрий, *Кротова Юлия*, ФТЛ № 1, Саратов. Задача о колебаниях металлического шара в поле трех магнитов

Чекмарева Альфия, ФТЛ № 1, Саратов. Моделирование процесса образования пробки перед светофором

Гребенькова Ольга, лицей № 37, Саратов. Трансформатор Тесла и опыты с ним

Махова Ульяна, лицей № 15, Саратов. Торможение магнита в наведенных полях

Дубровский Константин, *Кицелло Дмитрий*, лицей № 47, Саратов. Самодельный фонарик

Гембицкий Никита, лицей № 37, Саратов. Магнитогидродинамический движитель

Крылов Александр, ФТЛ № 1, Саратов. Фонтанирующая цепочка

Лебедева Екатерина, лицей № 40, Н. Новгород. Кривые постоянной ширины. Многоугольники Рёло

Мартыненко Екатерина, ЛПН, Саратов. Модель взаимодействующих спинов – система Изинга

Матюшкина Анна, лицей № 37, Саратов. Спектры и качественный анализ

Интеллектуальная игра «Что? Где? Когда?»

29 октября, четверг

Олимпиада по физике

Разбор задач олимпиады

Лекции

Гурия Г.Т., профессор, ГНЦ РАН, Москва. Биофизика свертывания крови

Круглый стол «Нелинейная наука и образование»

30 октября, пятница

Лекции

Савин А.В., доцент, СГУ. Математика и музыка

Рожнев А.Г., доцент, СГУ. Как увидеть волну света на компьютере (современный метод моделирования электромагнитных полей)

Академбой

Демонстрация научно-популярного фильма

31 октября, суббота

Лекция

Савин Д.В., доцент, СГУ. Нелинейные явления и самоорганизация в моделях динамики популяций

Заккрытие Школы-конференции

Секция студентов

Саратовский университет, корпус VIII, 24–26 ноября 2015

24 ноября, вторник

Устные доклады

Секция «Нелинейные явления в радиофизике и электронике»

Тышкун А.В., 4 курс, ФНП, *Мельникова М.М.*, аспирант, ФНП. Стабилизация частоты гиротрона запаздывающим сигналом, отраженным от нагрузки

Бубликов К.В., аспирант, ФНП. Исследование поперечных мод гибридных волн в слоистых мультиферроидных структурах при помощи Мандельштам–Бриллюэновского рассеяния света

Садовников С.А., инженер, ФНП. Клистронный автогенератор под шумовым и гармоническим воздействием

Волощук С.С., аспирант, ФНП. Нелинейная модель взаимодействия двух электронных потоков и ее тестирование

Фунтов А.А., аспирант, ФНП. Некоторые вопросы теории резистивного усилителя М-типа.

25 ноября, среда

Секция «Нелинейная динамика»

Чекмарева А.Ж., 4 курс, ФНП. Образование аттракторов при нарушении симметрии в системе фазовых уравнений

Андреев А.В., магистрант, ФНП. Сложная динамика в цепочке связанных ридберговских атомов

Дорошенко В.М., аспирант, ФНП. Странный нехаотический аттрактор Ханта–Отта в неавтономной системе взаимодействующих осцилляторов и его спектральные свойства

Чуб Р.О., аспирант, СФ ИРЭ РАН, *Кульминский Д.Д.*, аспирант, ФНБМТ. Способ передачи информации, основанный на моделировании приемника по сигналу передатчика

Астахов О.В., аспирант, СГУ, *Гулай А.П.*, магистрант, СГТУ. Динамика генератора с дополнительным контуром при нагрузочной и перекрестной связи

Туркин Я.В., аспирант, СГТУ. Продольно-поперечные волны Ганна–Холла в полупроводниках

Бадарин А.А., магистрант, ФНП. Образование вихревых структур в релятивистском электронном потоке со сверхкритическим током

26 ноября, четверг

Стендовая секция

Асанов К.Р., магистрант, физфак СГУ. Оптические наноантенны на графеновых нанолентах

Бенедик А.И., аспирант, ФНП СГУ. Расчет электродинамических характеристик фотонно-кристаллического резонатора для диодного генератора с автоэмиссионным катодом

Грачев А.А., магистрант, ФНП СГУ. Управляемый ответвитель мощности на основе латерально связанной структуры

Грищенко А.А., 2 курс, ФНБМТ СГУ. Исследование внутричерепных электроэнцефалограмм крыс при абсансной эпилепсии методом корреляционного анализа

Гулай А.П., магистрант, СГТУ, *Астахов О.В.*, аспирант, СГУ. Формирование мультистабильности в трехмодовом генераторе

Гуцевич Д.Е., 4 курс, СГТУ. Идентификация параметров макета «Робот на качелях» лаборатории кибернетической физики

Зоткина А.С., аспирант, СГТУ. Спектральные характеристики пропускания, отражения и поглощения излучения нанометрового слоя гиперболического метаматериала на основании графена и SiC при учете его динамических характеристик

Зыктин А.А., 3 курс, физфак СГУ, *Савостьянов Г.В.*, аспирант, физфак СГУ. Перспективы использования молекулярного комплекса на основе ДНК и углеродной наноструктуры в качестве элементной базы биоэлектроники: Мультимасштабное моделирование

Ковалев М.С., 4 курс, СГТУ. Идентификация параметров макета «Маятник в колесе» лаборатории кибернетической физики

Колосов Д.А., магистрант, физфак СГУ. Методика расчета рабочих параметров высоковольтного импульсного модулятора микросекундного диапазона с учетом нелинейности зарядного дросселя

Корнишина А.А., магистрант, ФНП СГУ. Моделирование электродинамических параметров периодических замедляющих систем с использованием программы Comsol Multiphysics

Курьлева А.С., 3 курс, физфак СГУ. Изучение атомного строения и прогнозирование термодинамической стабильности молекулярного графен+фосфолипид

Миних Т.А., 2 курс, ФНП СГУ. Изучение свойств логистического отображения

Митрофанов В.В., аспирант, физфак СГУ. Эффект возникновения циклического тока на графеновой платформе при движении заряженного фуллерена

Одинцов С.А., магистрант, ФНП СГУ. Коллимация спиновых волн в магнетонных кристаллах

Соломин М.А., 4 курс, СГТУ. Разработка макета «Самодвижущийся скейт» лаборатории кибернетической физики

Тамбовцева М.А., 2 курс, ФНП СГУ. Ознакомление с работой осциллятора с затуханием с использованием методов численного интегрирования и визуализации данных

Фельк Е.В., аспирант, ФНП СГУ. Хаотические переходные режимы в слабодиссипативном аналоге многомерной гамильтоновой системы

Хаджиева Л.М.-Б., магистрант, ФНП СГУ, *Круглов В.П.*, аспирант, ФНП СГУ. Гиперболический аттрактор в системе связанных модифицированных осцилляторов Неймарка

Шараевская А.Ю., аспирант, ФНП СГУ. Управление запрещенными зонами в периодической структуре из двух магнетонных кристаллов

Из Отчета о реализации

Проекта «Нелинейная наука для школьников» в 2015 году

Проект «Нелинейная наука для школьников» реализован факультетом нелинейных процессов Саратовского государственного университета имени Н.Г. Чернышевского при финансовой поддержке Фонда некоммерческих программ «Династия».

В рамках Проекта проведены следующие мероприятия для учащихся 8–11 классов средних общеобразовательных учебных заведений Саратова и

Саратовской области.

Научная Олимпиада «Физик-исследователь». В рамках заочной Олимпиады «Физик-исследователь», проводившейся совместно с сотрудниками Саратовского филиала Института радиотехники и электроники РАН в феврале–апреле 2015 года, участникам предлагалось решить одну или несколько задач исследовательского характера, связанных с физикой и/или компьютерным моделированием. В Олимпиаде приняли участие 10 учащихся 8–11 классов школ, лицеев и гимназий Саратова, Балашова (Сар. обл.), Озюнок (Сар. обл.).

Дипломом I степени награждена работа учащихся гимназии № 1 Балашова Матвея Шеина (8 кл.), Артура Чеботкова (9 кл.) и Валентины Беляевой (10 кл.).

Дипломом II степени – работа ученика гимназии № 87 Саратова Павла Дунаева (8 кл.)

Задачи Олимпиады доступны в сети Интернет по адресу <http://sgtnd.narod.ru/wts/rus/Olymp2015.pdf>

Турнир Академбоев по физике. Турнир Академбоев представляет собой комплексное командное соревнование по физике, целью которого является развитие у учащихся способности грамотно излагать свои мысли и вести научную дискуссию. В текущем году Турнир проходил с марта по май 2015 года, в нем принимали участие 3 команды: Физико-технического лицея № 1, Лицея прикладных наук и объединенная команда лицея № 37 и гимназии № 4, которые сыграли друг с другом по круговой системе в два круга. Всего состоялось 6 игр, в которых приняли участие 46 учащихся 8–11 классов. Подробная информация о Турнире, в том числе правила проведения и предлагавшиеся задачи, доступна на сайте Турнира <http://sarphys.narod.ru/Pages/akademboi.html>.

Школа-конференция «Нелинейные дни в Саратове для молодых – 2015». Школа-конференция проходила 27–31 октября 2015 года в Гостинично-оздорови-

тельном комплексе «Сокол» (Саратов). На Школу были приглашены авторы лучших работ Олимпиады «Физик-исследователь», лучшие игроки Турнира Академбоев, а также школьники, представившие доклады либо успешно выполнившие вступительное задание (<http://sarphys.narod.ru/files/ND2015.pdf>).

Всего в работе Школы участвовало 37 учащихся 9–11 классов, представлявших 12 средних учебных заведений Н. Новгорода, Саратова и городов Саратовской обл.: Балаково, Аркадака, Вольска, Энгельса.

Лекции для участников Школы-конференции прочитали сотрудники факультета нелинейных процессов СГУ член-корр. РАН, профессор Д.И. Трубецков, профессор Ю.П. Шараевский, профессор А.А. Короновский, доценты А.В. Савин, А.Г. Рожнев, Д.В. Савин, а также профессор Г.Т. Гурия (ГНЦ РАН, Москва) и доцент Е.Г. Трубецкова (ИФиЖ СГУ). Были проведены личные (Олимпиада) и командные (Академбой) соревнования по решению фи-

зических задач.

Участниками школы было представлено 15 докладов по материалам собственных исследований.

Дипломом I степени награжден доклад «Торможение магнита в наведенных полях» (Ульяна Махова, 11 кл., лицей № 15, Саратов; рук. учитель физики

А.А. Князев).

Дипломы II степени получили доклады «Кривые постоянной ширины. Многоугольники Рёло» (Екатерина Лебедева, 10 кл. лицей № 40, Н. Новгород; рук. к.ф.-м.н., доц. А.М. Рейман) и «Модель взаимодействующих спинов – система Изинга» (Екатерина Мартыненко, 11 кл. Лицей прикладных наук, Саратов; рук. к.ф.-м.н., доц. А.В. Савин).

Дипломами III степени награждены доклады «Трансформатор Тесла и опыты с ним» (Ольга Гребенькова, 10 кл., лицей № 37, Саратов; рук. учитель физики Ю.Н. Сычев); «Магнитогидродинамический движитель» (Никита Гембицкий, 10 кл., лицей № 37, Саратов; рук. учитель физики Ю.Н. Сычев); «Модель двух взаимодействующих партнеров – государства и населения, “борющихся” за здоровье населения» (Дарья Новоселова, 11 кл. Лицей прикладных наук, Саратов; рук. член-корр. РАН, проф. Д.И. Трубецков) и «Моделирование процесса образования пробки перед светофором» (Альфия Чекмарева, 11 кл., ФТЛ № 1, Саратов; рук. к.ф.-м.н., доц. А.В. Савин).

Информация о результатах реализации Проекта размещена на сайте СГУ: <http://www.sgu.ru/structure/non-linearprocesses/news/2015-12-08/nelineynye-dni-2015>

Ю.И. Левин, декан Факультета нелинейных процессов СГУ, к.ф.-м.н., профессор
А.В. Савин, ответственный исполнитель проекта, доцент кафедры нелинейной физики СГУ, к.ф.-м.н., доцент

Зав. редакцией *Н.Н. Левина*
Редакторы *Н.Н. Левина, Л.А. Сидорова*
Оформление художника *Д.В. Соколова*
Оригинал-макет подготовлен
И.А. Пономаревой, О.Н. Строгановой
в пакете *L^AT_EX*

Подписка на 1-е полугодие 2016 года осуществляется
по каталогу Агентства Роспечати
«Газеты. Журналы», индекс 73498

Подписка на 2-е полугодие 2016 года осуществляется
по Объединенному Каталогу «Пресса России» 2016/2
Раздел: 30. «Научно-технические издания.
Известия РАН. Известия ВУЗов»
и по Интернет-Каталогу Агентства «Книга-Сервис» 2016/2
а также по Договору между Подписчиком
(юридическим или физическим лицом)
и Издателем (Саратовским государственным университетом)

Стоимость подписки на 2016 год 1080 руб. (6 номеров)
Заявки на заключение Договора принимаются
по почте, по телефону редакции, по эл. почте редакции

Адрес редакции: 410012 Саратов, Астраханская, 83
Тел./факс: (845-2) 52-38-64
E-mail: and@nonlin.sgu.ru
Сайт журнала <http://andjournal.sgu.ru>

Распространение журнала осуществляется
редакцией журнала по адресной системе

**Условия подписки на электронную версию журнала на сайте
Научной электронной библиотеки <http://elibrary.ru>**

Сдано в набор 15.03.2016. Подписано к печати 22.04.2016
Формат 70x108/16. Бумага офсетная. Печать офсетная
Усл. печ. л. 9,10 (6,5). Уч.-изд. л. 6,0. Заказ № –Т.

Отпечатано в Типографии ФГБОУ ВО СНИГУ
410012 Саратов, Б.Казачья, 112А, тел. (845-2) 27-33-85

© Редакция журнала
«Известия вузов. ПНД», 2016
© Оформление художника
Д.В. Соколова, 2016