



СИСТЕМА ИТЕРАТИВНЫХ ФУНКЦИЙ И МАРКОВСКИЙ ПРОГНОЗ ВРЕМЕННЫХ РЯДОВ

Н.Г. Макаренко, Л.М. Каримова, С.А. Мухамеджанова, И.С. Князева

В статье изложена методика вероятностного прогноза временных рядов на основе системы случайных итеративных функций из теории фракталов. Итерации приводят к аттрактору (фракталу) в пространстве компактов. Аттрактор является носителем инвариантной вероятностной меры (мультифрактала) в пространстве борелевых мер. Обратная задача состоит в нахождении системы итеративных функций и их вероятностей по оценкам эмпирической меры. Такие оценки можно получить из временного ряда, используя методы символической динамики. Кроме необходимых математических сведений, мы приводим пример практического предсказания пороговых значений геомагнитных возмущений.

Решающим для всякой идеи является не то, как она осуществляется, но что, по существу, в ней содержится.

Стефан Цвейг

Введение

Теоретические основы предсказания на основе системы итеративных функций (*iterated function system, IFS*) опираются на элементы теории меры и некоторые разделы фрактальной геометрии, выходящие за рамки пособий и монографий по теории фракталов, популярных среди большинства физиков. Заполнить этот пробел мы попытались в настоящей статье¹. Наша главная цель – резюмировать математические сведения о *фундаментальной теореме IFS* и вещах вокруг нее на уровне технической строгости. Поэтому большая часть статьи имеет методический характер. В последнем разделе мы иллюстрируем теорию нашими оригинальными результатами по предсказанию магнитных бурь.

Современные методы *детерминированного* прогноза временных рядов основаны на реконструкции топологической модели динамической системы в евклидовом пространстве R^m . Для этого, предполагается, что система описывается пото-

¹Основой послужила лекция первого автора на XIII школе-конференции «Нелинейные волны–2006», Нижний Новгород, 1–7 марта 2006.

ком $\phi^t(\mathbf{y}) : M \rightarrow M$ на n -мерном компактном² многообразии M . Мы наблюдаем проекцию траектории $\phi^t(\mathbf{y}_0)$ как гладкую морсову функцию³ фазовых точек: $x_i \equiv h(\mathbf{y}(i\tau)) : M \rightarrow R$ и получаем временной ряд $\{x_i\}$, $x_i = x(i\tau)$, $i = 0, 1, \dots$. Тогда, отображение $F : M \rightarrow R^m$

$$F(\mathbf{y}) = (h(\mathbf{y}), h(\phi(\mathbf{y})), \dots, h(\phi^{m\tau}(\mathbf{y}))),$$

с точностью до предположения о типичности, является топологическим вложением $F(M) \subset R^m$, если $m = 2n + 1$ [1, 2]. В общем случае, когда фазовое пространство M имеет произвольную размерность, для вложения требуется существование n -мерного аттрактора [3]. Состояние полученной модели задается вектором $\mathbf{x}_i = \{x_{i\tau}, x_{(i+1)\tau}, \dots, x_{(i+m-1)\tau}\}$, составленным из отсчетов ряда в *пространстве вложения* R^m , а динамика описывается уравнением $\mathbf{x}_{i+1} = \Phi(\mathbf{x}_i)$, где $\Phi = F \circ \phi^t \circ F^{-1}$. Образ вложения $F(M)$ является гладким подмногообразием в R^m и диффеоморфен M . Следовательно, полученная копия наследует все топологические характеристики оригинала [2–4]. Предиктором служит единственная нетривиальная компонента $x_{i+m} = \Phi(\mathbf{x}_i)$ векторного уравнения, а предсказание заключается в поиске подходящей аппроксимации Φ [5, 6], относительно которой известно лишь, что это непрерывная и, возможно, дифференцируемая функция m переменных, определенная на конечной «обучающей» выборке $\{x_{i+m}, \Phi(\mathbf{x}_i)\}$. При этих условиях задача аппроксимации не является корректной [6, 7] и решается только на уровне математически правдоподобных утверждений с помощью локальных [8–10] или глобальных методов [6, 11]. Нестационарность временного ряда и присутствие шумов существенно влияют на ошибку модели, выбор которой является сложной проблемой [5, 11–13].

Вероятностное предсказание используют в более общих ситуациях, когда не выполняется *кредо идеального экспериментатора* [3], необходимое для корректной реализации описанного подхода. Для предиктора чаще всего используют стохастические модели, основанные на *марковских* процессах [10, 14].

Рассмотрим простую авторегрессионную модель: $x_{n+1} = Tx_n = (ax_n + \xi_n)$, где случайная переменная ξ_n подчиняется гауссову распределению $\mathcal{N}(\xi, \sigma)$ с нулевым средним и дисперсией σ^2 . Эволюция точки $x_n \rightarrow x_{n+1}$ полностью описывается условной переходной вероятностью [10]

$$p(x_{n+1} | x_n) = p(x_{n+1}, x_n) / p(x_n),$$

где $p(x_{n+1}, x_n) = \int p(x_n) \mathcal{N}(\xi, \sigma) \delta(x_{n+1} - ax_n - \xi) d\xi = \mathcal{N}(x_{n+1} - ax_n, \sigma)$. Если следовать принципу марковских цепей⁴ – *будущее зависит от прошлого только через настоящее*, $p(x_{n+1} | x_n, x_{n-1}, \dots, x_0) = p(x_{n+1} | x_n)$. Этот пример иллюстрирует идею *случайной динамической системы* [15, 16]. Последняя определяется набором непрерывных преобразований $T \equiv \{T_k\}$, $T_i : X \rightarrow X$, $k = \overline{1, N}$, заданных на компактном подмножестве $X \in R^n$ так, что каждое T_k выбирается с помощью некоторого случайного процесса. Пусть $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \dots \in \{1, 2, \dots, N\}$ – последовательность символов, снабженных вероятностями $p_n = P(\sigma_n = n)$, а $x_0 \in X$ –

²Компактом называют ограниченное и замкнутое множество.

³Гладкая морсова функция либо не имеет критических точек, либо все они изолированные и невырожденные.

⁴Цепью называют марковский процесс с дискретным временем.

начальная точка. Тогда динамика случайной системы описывается уравнениями вида: $x_{n+1} = T_{\sigma_{n+1}} x_n$. Мы получим марковский процесс, если каждый текущий выбор отображения зависит от предыдущего, то есть $p_n = P(\sigma_n = n) = p_{n, \sigma_{n-1}}$. Состояние случайной системы (X, T, P) можно идентифицировать лишь в некотором грубом приближении. Пусть $\{A_1, \dots, A_n\}, X \subseteq \bigcup A_i$ – разбиение пространства X на конечное число клеток A_i . Игнорируя эволюцию внутри клетки, будем считать, что система имеет состояние⁵ i , если ее орбита находится в клетке A_i . Марковская динамика полностью описывается $(n \times n)$ – матрицей вероятностей $P_{ij} = \text{Prob}_\mu \{Tx \in A_j | x \in A_i\}$, где P_{ij} – вероятность перехода $i \rightarrow j$. Очевидно, что вероятности определяются долей тех точек A_i , которые попали в A_j под действием T

$$P_{ij} = \mu(A_i \cap T^{-1}A_j) / \mu(A_i).$$

Здесь $\mu(B)$ инвариантная мера, которую можно определить для почти каждой случайной орбиты x_1, x_2, \dots, x_l и множества $B \subset X$, как предел величины $\#(B \cap x_1, x_2, \dots, x_l) / l$, где числитель – число точек орбиты, которые попали в множество B , а знаменатель l – длина орбиты [16].

Вероятностное предсказание с помощью марковской модели сводится к двум задачам.

Первая задача заключается в построении грубого разбиения состояний системы на основе наблюдаемого временного ряда для эмпирической оценки инвариантной меры. Это удобно сделать, используя методы символической динамики [17]. Идея заключается в преобразовании ряда в последовательность символов из конечного алфавита $\Sigma = \{s_1, \dots, s_n\}$, кодирующего крупнозернистое разбиение X . Проще всего преобразовать временной ряд $\{x_i\}$ в бинарный «текст», состоящий из слов $S = s_1, s_2, \dots, s_K$, где $s_i \in \{0, 1\}$; обобщение на $n > 2$ тривиально. Выберем некоторое пороговое значение ординаты $x_i = h$ и трансформируем все отсчеты ряда в символы по правилу: $s_i = 0$, если $x_i < h$ и $s_i = 1$, если $x_i \geq h$. Разделим единичный отрезок $[0, 1)$ на 2^K интервалов и каждому из 2^K возможных слов длины K поставим в соответствие полуоткрытый сегмент $[x_l, x_r)$, определенный двоичным представлением слова S [17, 18]

$$x_l(S) = \sum_{i=1}^K s_i / 2^i; \quad x_r(S) = x_l(S) + 1/2^K.$$

Теперь подсчитаем частоту встречаемости различных слов S на единичном отрезке. Если полученная гистограмма $\hat{\mu}(x)$ стационарна⁶, то ее можно считать оценкой инвариантной меры $\mu(x)$. Для многих процессов полученная таким способом мера имеет мультифрактальные свойства [18–20].

Второй задачей марковского предсказания является построение теоретической модели, в которой мера генерируется случайной динамической системой, реализованной набором сжимающих линейных отображений $\{T_k\}$, снабженных вероятностями. Такие отображения хорошо известны в геометрии фракталов. Они называются *гиперболическими*⁷ IFS [21, 22] и были введены в 1985 году М. Барнсли

⁵Мы отождествляем состояние i с i -м моментом времени.

⁶То есть гистограммы для двух фрагментов ряда практически совпадают.

⁷Набор линейных отображений подобия $\{f_i\}, i = \overline{1, N}, f_i : (X, d) \rightarrow (X, d)$ таких, что $d(f_i(x), f_i(y)) = r_i d(x, y)$ называют *гиперболическим*, если $\forall i, |r_i| < 1$.

и С. Демко [23], но, фактически, уже использовались в 1981 году Дж. Хатчинсоном [24]. *IFS* рассматривают фракталы как предельные образы – аттракторы *коллективной непрерывной динамики* линейных отображений [21–24]. Таким образом, исключается столь непривычное в континуальной математике «хирургическое» удаление фрагментов геометрического объекта для построения некоторых фракталов. Например, канторово множество \mathcal{K} является пределом бесконечного числа итераций объединения двух отображений $T_1x = (1/3)x$ и $T_2x = (1/3)x + 2/3$, приводящих к самоподобному и фрактальному множеству $\mathcal{K} = T_1(\mathcal{K}) \cup T_2(\mathcal{K})$. Если снабдить *IFS* вероятностями, то ее динамика продуцирует мультифрактальную меру на аттракторе [21], которая является единственной и инвариантной относительно действия *марковского оператора* [21, 23, 25]. Случайные *IFS* нашли интересные применения для генерации и сжатия изображений [21, 25, 26], моделирования геномов [20, 27] и анализа текстов в лингвистике [28, 29]. Если известен аттрактор и мера на нем, то *обратная задача* в теории *IFS* заключается в поиске коэффициентов отображений и их сопутствующих вероятностей [30]. Предположим, что мы имеем дело с бинарной символической последовательностью слов фиксированной длины, составленных из символов $\{0, 1\}$. Если относительная частота встречаемости различных слов стационарна и статистически самоподобна, полученную гистограмму можно рассматривать как эмпирическую оценку мультифрактальной меры $\hat{\mu}(x)$ на единичном отрезке. С другой стороны, *IFS* отображений $T_1x = (1/2)x, T_2x = (1/2)x + (1/2)$ с вероятностями p_1, p_2 позволяют генерировать инвариантную мультифрактальную меру $\mu(x)$ на аттракторе $[0, 1]$. При этом (T_1, p_1) , действуя на слово – точку x , генерируют символ (0) в префиксе, а (T_2, p_2) – символ (1). Последовательные итерации можно сделать марковскими, выбирая текущее $T_i, i = 1, 2$ в соответствии с матрицей переходных вероятностей. Полагая $\mu(x) \approx \hat{\mu}(x)$, можно найти неизвестные вероятности и, следовательно, предсказать очередной символ в слове. Рассмотрим теперь подробно элементы описанной схемы.

1. Система итеративных функций

Пусть $X \equiv (X, d)$ – полное⁸ метрическое пространство, например, $X \subset R^n$. Отображение $S : X \rightarrow X$ удовлетворяет *условию Литшица*, если для всех $x, y \in X$ существует такое число $c \geq 0$, что

$$d(S(x), S(y)) \leq cd(x, y). \quad (1)$$

Постоянной Литшица $LipS$ называют минимальное c , для которого выполняется условие (1). Отображение S называется *сжатием*, если $LipS < 1$. *Принцип сжимающих отображений* утверждает, что в полном метрическом пространстве (X, d) сжатие $S : X \rightarrow X$ имеет единственную неподвижную точку $x_0 = S(x_0)$ [32]. Более того, для любой точки $y_0 \in X$ последовательность точек $y_k = S^{\circ k} = S(S^{\circ(k-1)})$, $k = 0, 1, 2, \dots$ сходится к x_0 в метрике d .

Пусть $\mathcal{H}(X)$ – пространство непустых компактных подмножеств из X . Определим расстояние от точки $x \in X$ до $A \in \mathcal{H}(X)$ (рис. 1) как

$$d(x, A) = \inf_{y \in A} d(x, y). \quad (2)$$

⁸То есть предел любой сходящейся последовательности Коши в X принадлежит X .

Тогда для любых $A, B \in \mathcal{H}(X)$ выражение

$$d_H(A, B) = \sup \{d(x, B), d(y, A) \mid x \in A, y \in B\} \quad (3)$$

называется *метрикой Хаусдорфа* и пара $(\mathcal{H}(X), d_H)$ является полным метрическим пространством [21, 22, 33].

Конечный набор $\{w_i\}, i = \overline{1, N}$ сжимающих отображений $w_i : X \rightarrow X$ с коэффициентами сжатия $\{c_i\}, i = \overline{1, N}$ называют *системой гиперболических IFS* [21, 23, 33–35]. Пусть $w_i(A) \equiv \{w_i(x) \mid \forall x \in A\}$. Коллективное действие IFS на $A \in \mathcal{H}(X)$ описывает *оператор Хатчинсона* [21, 34, 35]

$$\mathbf{w}(A) = \bigcup_{i=1}^N w_i(A). \quad (4)$$

Интуитивно понятно, что объединение сжимающих отображений должно быть сжатием. Действительно, используя неравенство треугольника, легко показать [21, 22, 35], что оператор \mathbf{w} определяет сжатие в $(\mathcal{H}(X), d_H)$

$$d_H(\mathbf{w}(A), \mathbf{w}(B)) \leq s d_H(A, B), \quad s = \max \{c_i\}, i = \overline{1, N}. \quad (5)$$

Фундаментальная теорема теории IFS [21, 35] обобщает принцип сжимающих отображений на $(\mathcal{H}(X), d_H)$:

Пусть $\{w_i\}, i = \overline{1, N}$ система итеративных функций на $X \subset R^n$. Тогда существует единственное непустое инвариантное множество $A \in (\mathcal{H}(X), d_H)$ такое, что

$$A = \mathbf{w}(A) \equiv \bigcup_{i=1}^N w_i(A) \quad (6)$$

и для любой точки $B \in \mathcal{H}$ последовательность $B, \mathbf{w}(B), \mathbf{w}^{\circ 2}(B), \dots, \mathbf{w}^{\circ n}(B)$ сходится к A в метрике Хаусдорфа d_H при $n \rightarrow \infty$. Множество A называют *аттрактором IFS*.

Уравнение (6) выражает свойство *самоподобия* аттрактора: A является объединением⁹ собственных, уменьшенных, копий

$$A = w_1(A) \cup w_2(A) \cup \dots \cup w_N(A) = w_1(w_1(A) \cup w_2(A) \cup \dots \cup w_N(A)) \cup \\ \cup w_2(w_1(A) \cup w_2(A) \cup \dots \cup w_N(A)) \cup \dots \cup w_N(w_1(A) \cup w_2(A) \cup \dots \cup w_N(A)) \dots$$

Большую роль в теории IFS играет *теорема о коллаже* [21, 32]:

Пусть $B \in \mathcal{H}(X)$ и $\{w_i\}, i = \overline{1, N}$ – IFS, с максимальной константой Липшица $c = \max \{c_i\}$, имеет аттрактор $A = \mathbf{w}(A)$. Тогда

$$d_H(A, B) \leq (1 - c)^{-1} d_H(B, \mathbf{w}(B)). \quad (7)$$

Иными словами, чем меньше расстояние (его называют *коллаж-расстояние*) между произвольным начальным множеством B и его образом $\mathbf{w}(B)$, тем ближе B к аттрактору A .

⁹Такое объединение называют *коллажем*.

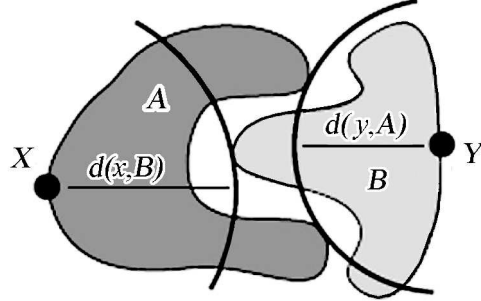


Рис. 1. Определение метрики Хаусдорфа. Точка $x \in A$ наиболее удалена от B , точка $y \in B$ наиболее удалена от A

2. Оператор Маркова: действие IFS на меру

Представим себе массу, распределенную на некотором топологическом пространстве X . Мерой называют неотрицательное число, измеряющее ее количество в каждом подмножестве, из некоторого выделенного класса $\mathcal{B}(X) \subset X$ элементарных борелевых подмножеств [22, 36]. Этот класс содержит подмножества, которые можно представить комбинацией не более чем счетного числа объединений и пересечений открытых и замкнутых подмножеств из X . Примером для $X \subseteq \mathbb{R}$ служит набор интервалов вида (x_i, x_j) , $[x_i, x_j)$, $(x_i, x_j]$, $[x_i, x_j]$, дополненный пустым множеством \emptyset . Борелевой мерой μ на $\mathcal{B}(X)$ называется функция $\mu : \mathcal{B}(X) \rightarrow [0, \infty]$ такая, что $\mu(\emptyset) = 0$ и для счетного набора борелевых непересекающихся множеств $\{A_i\} \in \mathcal{B}(X)$, $A_i \cap A_j = \emptyset$, $i \neq j$ выполняется условие аддитивности

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i).$$

Мера называется единичной или вероятностной, если $\mu(X) = 1$. Частным случаем борелевой меры является мера Лебега – длина интервала. Однако мерой может быть не только длина. Борелеву меру можно ввести, используя динамику отображения $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$. Орбитой f длины $n + 1$ является последовательность точек $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$, где $x_n = f^{\circ n}(x_0) = f(f^{\circ(n-1)}(x_0))$. Пусть $\{I_k\}_{k=1}^N$, $I_k = [(k-1)/N, k/N]$ – разбиение единичного интервала. В результате итераций $f^{\circ n}(x_0)$, некоторое число точек $n_k = I_k \cap \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ попадает в I_k . Если каждой итерации поставить в соответствие единицу времени, то n_k – время пребывания орбиты в I_k . Можно надеяться, что при большом n и типичных начальных значениях x_0 числа $p_k(n, x_0) = n_k/(n+1)$ не зависят от n и выбора x_0 . В этом случае почти для всех орбит их можно считать вероятностной мерой μ_k для интервала I_k

$$p_k(n, x_0) \approx \mu_k = \lim_{n \rightarrow \infty} (\#(I_k \cap \{x_0, x_1, \dots, x_n\})/n), \quad \sum_k \mu_k = 1.$$

Заметим, что точка $y = f(x)$ принадлежит некоторому объединению интервалов $U = I_m \cup I_p \cup \dots \cup I_s$ тогда и только тогда, когда $x \in f^{-1}(U)$. Это означает, что число точек последовательности x_1, \dots, x_{n+1} , которые попали в U , совпадает с числом тех точек из x_0, x_1, \dots, x_n , которые принадлежали $f^{-1}(U)$. Числа μ_k не должны зависеть от сдвига последовательности, так что выражение $\mu(U) = \mu(f^{-1}(U))$ констатирует инвариантность меры.

Рассмотрим теперь вопрос о действии отображения на меру. В случае абсолютно непрерывной меры ν существует интегрируемая функция (плотность) ρ такая, что $\nu(I) = \int_I \rho(x) dx$ и для любой непрерывной функции ϕ интеграл относительно меры ν определяется выражением

$$\langle \phi, \nu \rangle = \int_I \phi(x) \rho(x) dx.$$

Пусть $F(x)$ кусочно-дифференцируемое отображение; $A \subset I$ – интервал, который не содержит точек $|F'(x)| = 0$, и $F^{-1}(A)$ состоит из конечного числа интервалов J_k , каждый из которых монотонно отображается в A . Тогда для любой функции $y = \phi(y)$ можно записать уравнение

$$\int_A \varphi(y) dy = \int_{J_k} \varphi(F(x)) |F'(x)| dx,$$

где $y = F(x)$. Полагая $\varphi(y) = \rho(x) |1/F'(x)|$, получим

$$\int \rho(x) |F'(x)|^{-1} dy = \int_{J_k} \rho(x) dx = \nu(J_k).$$

Если $\nu = \mu$, то есть является инвариантной мерой, то действие на μ отображения F (суммирование по всем k) дает уравнение Фробениуса – Перрона, определяющее плотность меры $\rho(y)$,

$$\rho(y) = \sum_{F(x_k)=y} \rho(x) |1/F'(x)|.$$

Для дискретного случая, который нас интересует, интеграл¹⁰ $\int g\nu$ от произвольной функции $g(x)$ по мере ν понимается как сумма

$$\int g\nu = \sum_{x_k} g(x_k) m(x_k), \quad (8)$$

где $m(x_k)$ – мера, определенная в точке x_k , и ряд сходится в абсолютном смысле [36]. Пусть $\{y_l\}$ значения функции $y = f(x_k)$. Их может быть несколько для каждой точки x_k . Тогда меру точек y_l естественно определить как меру их прообразов x_k выражением

$$m(y_l) = \sum_{x_k=f^{-1}(y_l)} m(x_k), \quad (9)$$

которое имеет смысл, если число точек $f^{-1}(y_l)$ не бесконечно велико.

Символически действие функции на меру называют *push forward map* и записывают как $f * \mu = \mu(f^{-1})$, где правая часть является мерой точек x , которые отобразились в точки $y = f(x)$. Для *IFS* с вероятностями $\{w_i; p_i\}$, $i = \overline{1, N}$, $p_1 + \dots + p_N = 1$ естественным обобщением такого действия является *марковский оператор* [21, 24, 35]

$$\mathbf{M}(\mu) = \sum_{i=1}^N p_i \mu \circ w_i^{-1}, \quad (10)$$

где (\circ) - знак композиции. Для любой непрерывной функции $f : X \rightarrow R$ справедливо выражение

$$\begin{aligned} \int_X f d(\mathbf{M}(\mu)) &= \sum_{i=1}^N p_i \int_X f d(\mu \circ w_i^{-1}) = \\ &= \sum_{i=1}^N p_i \int_{w_i(X)} f(x) d(\mu \circ w_i^{-1}) = \sum_{i=1}^N p_i \int_X f \circ w_i(x) d\mu. \end{aligned} \quad (11)$$

Заметим, что $\mu \circ w_i^{-1}$ – мера тех точек $x \in X$, которые генерируют образы $x \rightarrow w_i(x)$. Согласно (9), это можно записать как $\delta(x - w_i(x))$, что и приводит к замене $f(x) \rightarrow f \circ w_i(x)$ в (11). Мера μ называется «самоподобной», если ее можно представить как линейную взвешенную комбинацию ее самой: $\mu = p_1 \mu \circ w_1^{-1} + \dots + p_N \mu \circ w_N^{-1}$.

¹⁰Традиционная запись $\int g d\nu$ не имеет особого смысла для нашего случая.

3. Метрика Монжа – Канторовича в пространстве борелевых мер

Пусть $\mathcal{M} = \mathcal{M}(\mathcal{B}(X))$ – пространство борелевых мер, и $g : X \rightarrow R$ функции с $Lip g \leq 1$. Метрика Монжа – Канторовича в \mathcal{M} определяет расстояние между двумя мерами μ и ν как

$$d_M(\mu, \nu) = \sup \left\{ \left| \int g d\mu - \int g d\nu \right| \mid \|g(x) - g(y)\| \leq |x - y|, \forall x, y \in X \right\}. \quad (12)$$

Пара (\mathcal{M}, d_M) – полное метрическое пространство. Для любых $\mu, \nu \in \mathcal{M}$ марковский оператор \mathbf{M} является сжатием в (\mathcal{M}, d_M) [21,35]

$$d_M(\mathbf{M}(\nu_1), \mathbf{M}(\nu_2)) \leq c d_M(\nu_1, \nu_2).$$

Фундаментальная теорема утверждает [21, 35]:

Для IFS с вероятностями $\{w_i; p_i\}$, $\sum_{i=1}^N p_i = 1$ существует единственная борелева вероятностная мера μ такая, что для любого подмножества $A \in \mathcal{B}(X)$

$$\mu(A) = \mathbf{M}(A) \equiv \sum_{i=1}^N p_i \mu \circ w_i^{-1}(A),$$

и для любой меры $\nu_0 \in \mathcal{M}$ последовательность $\nu_0, \mathbf{M}\nu_0, \mathbf{M}^2\nu_0, \dots, \mathbf{M}^n\nu_0$ сходится к μ в метрике d_M , когда $n \rightarrow \infty$. Носителем инвариантной меры является аттрактор A . Кроме того, для всех непрерывных функций $g : X \rightarrow R$

$$\int g(x) d\mu(x) = \sum_{i=1}^N p_i \int g \circ w_i(x) d\mu(x). \quad (13)$$

Численный вариант метрики Монжа – Канторовича известен как «экскаваторное расстояние» (*earth-moving distance, EMD*)¹¹ [37, 38]. Идея его вычисления заключается в следующем. Аппроксимируем две меры μ и ν зеркальными гистограммами с общим основанием. Пусть верхняя из них представляет собой кучи грунта μ , насыпанного в каждый бин. Вторая, «опрокинутая» гистограмма, моделирует емкость ν . Если площади гистограмм совпадают, то ν способна вместить весь грунт μ . Задача заключается в перемещении грунта из верхней гистограммы в ямы нижней с минимальными затратами. Последние зависят от выбранного «плана» перемещения и его «стоимости», которая определяется расстоянием d_{ij} (*ground distance*) между i -м бином, где находится грунт, и j -м бином ямы. Таким образом, вычисление *EMD* сводится к стандартной транспортной задаче линейного программирования (см., например, [39]) о минимизации транспортных расходов

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n f_{ij} \cdot d_{ij} &\rightarrow \min, & \sum_{j=1}^n x_{ij} &= a_i, \\ \sum_{i=1}^m f_{ij} &= b_j, & f_{ij} &\geq 0, \quad i = \overline{1, m}, \quad j = \overline{1, n}, \end{aligned}$$

где d_{ij} – стоимость перевозки единицы продукции из пункта i в пункт j , f_{ij} – план перевозок $i \rightarrow j$, b_j – потребности в продукте в пункте j , a_i – запасы в пункте i . Для модели закрытого типа $\sum_{j=1}^n b_j = \sum_{i=1}^m a_i$. Основной трудностью решения задачи является большое число переменных и ограничений. Поэтому используются специальные алгоритмы [39, 40], которые с успехом адаптированы для вычисления расстояния между изображениями [41, 42].

¹¹Earth-moving machine – экскаватор.

4. Обратная задача IFS

Выше были описаны три ипостаси *теоремы о сжимающем отображении*. В евклидовом метрическом пространстве (X, d) сжатием является отображение Липшица (1), которое имеет единственную неподвижную точку. В пространстве компактов (H, d_H) сжатием в метрике Хаусдорфа d_H является оператор Хатчинсона (4) – объединение сжимающих отображений, а неподвижную точку называют аттрактором IFS. Наконец, в пространстве борелевых мер (\mathcal{M}, d_M) сжатие в метрике Монжа – Канторовича задает оператор Маркова (10) для IFS с вероятностями. Здесь неподвижной точкой является инвариантная единственная мера, носитель которой – аттрактор IFS.

Предположим, что мера μ и аттрактор \mathcal{A} известны. Обратная задача IFS состоит в нахождении параметров $\{w_i\}$, $w_i = c_i x + a_i$, $i = \overline{1, N}$ и вероятностей $\{p_i\}$ или P_{ij} . Рассмотрим вначале случай, когда выбор отображений в динамике случайных IFS производится независимо с помощью испытаний Бернулли, и опишем схему решения обратной задачи методом моментов, следуя работе [30]. Вопросы существования и сходимости решения подробно обсуждаются в статьях [43–45].

Для случайной переменной $x \in [0, 1]$ определим набор статистических моментов

$$\mu_k = \int x^k d\mu, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (14)$$

где интеграл понимается в смысле формулы (8). Для вероятностной меры нулевой момент $\mu_0 = 1$. В уравнении (13) выберем $g(x) = x^k$. Тогда

$$(g \circ w_i)(x) = (c_i x + a_i)^k = \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} c_i^{k-j} x^{k-j} a_i^j. \quad (15)$$

Следовательно, уравнение (13) для инвариантной меры примет вид

$$\mu_k = \int g(x) d\mu(x) = \sum_{i=1}^N p_i \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} c_i^{k-j} a_i^j \mu_{k-j}. \quad (16)$$

Последнее выражение приводит к рекурсивной формуле для моментов

$$\left(1 - \sum_{i=1}^N p_i c_i^k\right) \mu_k = \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} \mu_{k-j} \left(\sum_{i=1}^N p_i c_i^{k-j} a_i^j\right). \quad (17)$$

Для марковской схемы приведенные формулы усложняются [53]. Прежде всего статистические моменты в (17) выражаются как сумма частичных моментов по числу IFS: $\mu_n = \mu_n^{(1)} + \dots + \mu_n^{(N)}$, где $\mu_n^{(j)}$ – решения системы уравнений, аналогичной (17),

$$\sum_{j=1}^N (p_{ji} c_i^j - \delta_{ij}) \mu_n^{(j)} = - \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} \left(\sum_{j=1}^N c_i^k a_i^{n-k} p_{ji} \mu_k^{(j)}\right), \quad (18)$$

$$i = 1, \dots, N, n \geq 1.$$

Здесь p_{ji} – марковские переходные вероятности и δ_{ij} – символ Кронекера. Нулевой момент для i -го IFS определяется выражением $\mu_0^{(i)} = m_i$, где m_i – решения уравнений

$$\sum_{j=1}^N p_{ji} m_j = m_i, \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad \mu_0 = m_1 + \dots + m_N = 1. \quad (19)$$

Теоретические моменты в (17)–(19) содержат искомые параметры: коэффициенты *IFS* и вероятности. Функционал обратной задачи основан на сравнении этих моментов с эмпирическими моментами $\hat{\mu}_k$, вычисленными по эмпирической мере $\hat{\mu}$, для $k = 1, 2, \dots, M$. В случае линейной оптимизационной задачи для функционала можно использовать L_1 -метрику ($\sum_{i=1}^M |\mu_i - \hat{\mu}_i| \rightarrow \min$), L_2 -метрику, коллаж-расстояние (7) или *EMD*. Задачу можно свести к квадратичной, используя «расстояние в шаре» ($\sum_{k=1}^M (\mu_k - \hat{\mu}_k)^2 / k \rightarrow \min$) [31]. Для численного решения используют стандартные оптимизационные пакеты или генетический алгоритм [46]. Критерием оптимального решения служит либо разность моментов (эмпирических и модельных), либо разности гистограмм эмпирической и модельной меры.

Для большинства практических задач проблема существенно упрощается. Так, например, если речь идет о предсказании пороговых значений некоторой величины, естественно использовать бинарный алфавит $\{0, 1\}$. Следовательно, в уравнениях (17)–(19) достаточно ограничиться $N = 2$. Эмпирическая мера, полученная представлением слов в двоичном коде, имеет в качестве носителя единичный интервал. Поэтому можно выбрать *IFS* с фиксированными коэффициентами в виде $w_1(x) = (1/2)x$, $w_2(x) = (1/2)x + 1/2$ и аттрактором $[0, 1]$. Обратная задача сводится тогда или к нахождению вероятностей p_1, p_2 , или в марковском варианте вероятностей p_{11} и p_{22} переходов символов $0 \rightarrow 0$ и $1 \rightarrow 1$, соответственно. Сопряженная пара вероятностей вычисляется из соотношений $p_{12} = 1 - p_{11}$ и $p_{21} = 1 - p_{22}$.

5. Практические приложения

Рассмотрим пример практического применения марковской *IFS*-схемы для прогноза магнитных бурь по вариациям индекса геомагнитной активности. Для тестирования модели предсказывались известные значения, которые не входили в обучающую выборку, то есть, фактически, делался эпигноз¹².

Магнитные бури – это возмущения магнитного поля Земли, которые отслеживаются различными локальными и планетарными геомагнитными индексами [47]. Причинами бурь являются геоэффективные межпланетные возмущения солнечного происхождения: солнечные вспышки, выбросы корональных масс и межпланетные направленные взрывы, связанные с инверсиями межпланетного магнитного поля. Главная фаза геомагнитной бури представляет собой уменьшение *H*-компоненты поля от 50 до 400 нанотеслов (нТ), которое продолжается от нескольких часов до суток и более. Депрессия вызвана пересоединением силовых линий межпланетного и геомагнитного полей и флуктуациями размеров магнитосферы под действием потоков солнечного ветра. Эти процессы приводят к ускорению имеющейся в ней плазмы до энергий порядка нескольких тысяч электрон-вольт, формируя таким образом *кольцевой ток* на расстоянии от 3 до 5 радиусов Земли. В северном полушарии в окрестности Земли он течет в западном направлении и порождает магнитное поле, направленное противоположно геомагнитному, и, следовательно, ослабляет его [48, 49].

В настоящей работе использован среднесуточный D_{st} -индекс¹³, который является мерой интенсивности кольцевого тока и вычисляется как усредненная величина

¹²Эпигнозом называют предсказание известных в прошлом значений, палегнозом (postdiction) – предсказание неизвестной истории ряда.

¹³ D_{st} -индекс доступен на сайте <http://swdcd.db.kugi.kyoto-u.ac.jp/dstdir>.

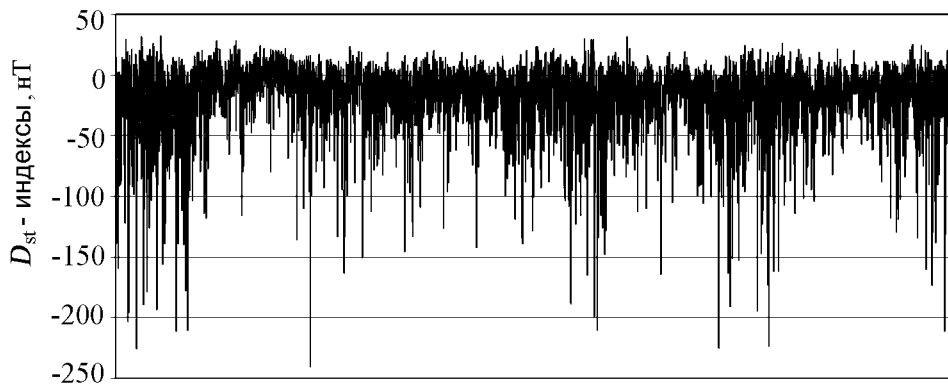


Рис. 2. График среднесуточных значений D_{st} -индекса (1957–2002 годы). По вертикали, напряженность поля в нТ

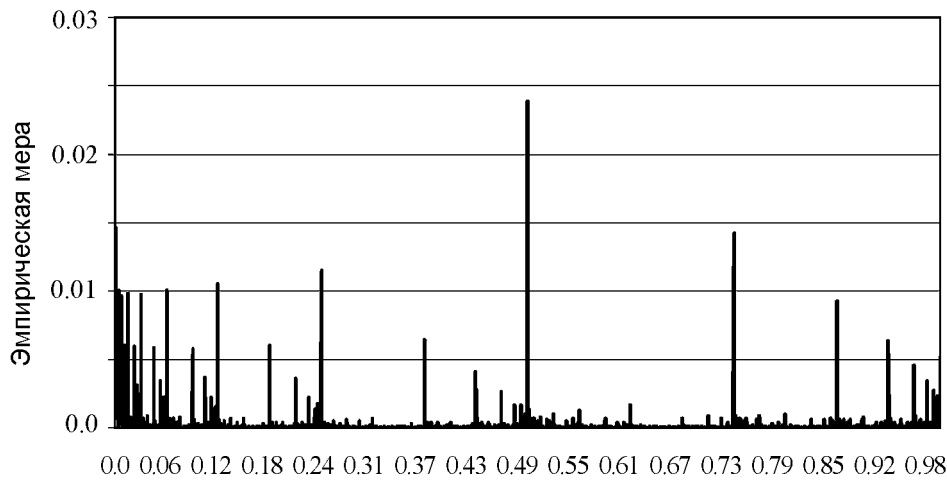


Рис. 3. Гистограмма распределения бинарных слов $K = 12$ для ряда D_{st} -индекса (1957–2002 годы) с порогом -30 нТ

возмущений (рис. 2), отсчитываемых от спокойного уровня, по данным четырех магнитных обсерваторий, расположенных приблизительно вдоль магнитного экватора. В магнито-спокойные дни величина D_{st} лежит в пределах ± 20 нТ. Обычно, магнитной бурей считают значение $D_{st} \geq -30$ нТ; для сильных бурь $D_{st} \geq -50$ нТ и очень сильных¹⁴ $D_{st} \geq -100$ нТ.

Существуют различные подходы к предсказанию магнитных бурь [50–52]. В недавней работе [53] приведены результаты марковского прогноза магнитных бурь за период 1981–2002 годов по D_{st} -индексу на основе *IFS* и метода моментов. Ниже приводятся оригинальные результаты, полученные авторами для тех же данных двумя методами с целью проверки воспроизводимости результатов [53] и сравнения решений, полученных методами моментов и нашим методом, основанным на теореме о коллаже. Как отмечено выше, магнитная буря – сложный динамический процесс, однако ниже, как и в работах [18, 52], под «бурей» упрощенно понимается событие $D_{st} \geq -30$ нТ. На рис. 3 приведена оценка эмпирической меры, полученная по 16801 значениям временного ряда среднесуточных значений D_{st} -индекса для бинарного алфавита (порог -30 нТ) и длины слова $K=12$, как и в [53]. Мульти-

¹⁴Во время сильной бури 11.02.1958 индекс D_{st} достиг величины -409 нТ.

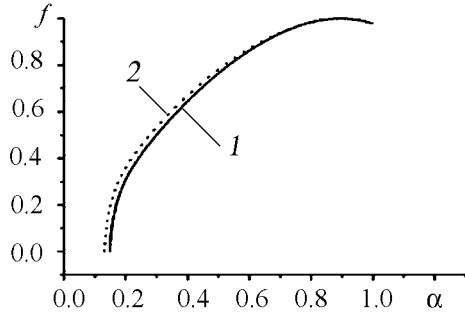


Рис. 4. Мультифрактальные спектры больших отклонений для эмпирической меры D_{st} -индекса: 1 – 1981–1991 годы, 2 – 1992–2002 годы

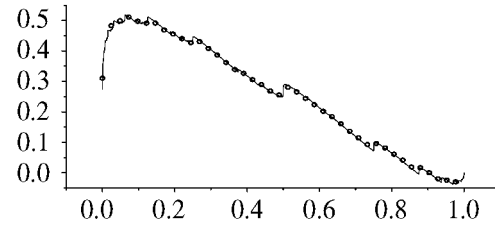


Рис. 5. Кумулятивные гистограммы для эмпирической меры (кружки) и IFS -модели (сплошная линия)

фрактальные спектры больших отклонений [54] для этой меры, полученные в пакете FracLab для двух различных интервалов времени (1981–1991 годы и 1992–2002 годы) практически совпадают (рис. 4). Таким образом, меру можно считать эмпирически стационарной.

Для построения модели использовался D_{st} -индекс с 1981 по 1996 год (всего 5844 значения). Обратная задача для IFS методом моментов решалась в среде MatLab 7.0 с использованием первых 15 моментов¹⁵ с помощью пакета Pattern search tool. Этот пакет содержит 5 методов поиска минимума оптимизационной задачи, включая генетический алгоритм. Все они дали оценки переходных вероятностей, совпадающие с точностью до 5 знаков после запятой. Наиболее устойчивый из полученных результатов¹⁶: $p_{11} = 0.91079904$, $p_{22} = 0.72421173$. Для моделирования меры использовались $2 \cdot 10^5$ рекуррентных точек с указанными вероятностями.

В качестве второго метода решения обратной задачи использовалась теорема о коллаже в следующей модифицированной форме.

Оценка эмпирической меры $\hat{\mu}$ рассматривалась как неподвижная точка марковского оператора. Переходные вероятности находились минимизацией функционала $d(\hat{\mu}, M^{on}\hat{\mu}) \rightarrow \min$, где в качестве расстояния между двумя гистограммами $H = \{h_i\}$ и $K = \{k_i\}$ использовалась L_1 -метрика¹⁷ $d(H, K) = \sum_i |h_i - k_i|$. Полученные значения вероятностей $p_{11} = 0.91611578125$, $p_{22} = 0.69755109375$ использовались для моделирования $2 \cdot 10^5$ рекуррентных точек модельной меры. Сравнение модели с эмпирической мерой проведено по графикам (рис. 5) соответствующих кумулятивных гистограмм¹⁸ $F = \sum_i |h_i - \bar{h}|$, построенных по аналогии с моделью случайного блуждания. Для тестирования модели использовался эпигноз 1095 значений нулей и единиц на временном интервале 1997–1999 годов. С практической точки зрения, ошибки в предсказании бури и ее отсутствия не равнозначны. Поэтому, для оценки качества прогноза использовались следующие три коэффициента, предложенные в работе [53]:

$r_1 = n_1/n$, где n_1 – количество *правильно* предсказанных суффиксов¹⁹, n – общее количество прогнозов;

$r_2 = n_2/n_3$, где n_2 – количество *правильно* предсказанных суффиксов, если

¹⁵Именно это число моментов было использовано в [53].

¹⁶Напомним, что $p_{12} = 1 - p_{11}$, $p_{21} = 1 - p_{22}$.

¹⁷Эксперименты показали, что EMD не дает здесь существенного преимущества.

¹⁸Здесь \bar{h} – среднее по гистограмме.

¹⁹ k -суффиксом называют предсказанные $k = 1, 2, \dots$ символов в слове длиной $K - k$.

соответствующие реальные значения содержали единицу, n_3 – количество прогнозов слов, реально содержащих единицу;

$r_3 = n_4/n_3$, где n_4 – количество «частично предсказанных» суффиксов, если соответствующие реальные значения содержали единицу. Частичное предсказание успешно, если независимо от длины суффикса была предсказана хотя бы одна единица. Таким образом, при вычислении r_2 и r_3 исключались слова, состоящие только из нулей. Полученные результаты для интервалов в 1–3 дня сведены в таблицу, где в качестве сравнения приведены значения коэффициентов для эпигноза по эмпирической мере. В последнем блоке жирным шрифтом приведены результаты, полученные в [53].

Таблица

Сравнение качества эпигноза на 1, 2 и 3 дня для D_{st} -индекса

%	Эмпирическая мера			Коллаж-метод			Метод моментов		
	1 день	2 дня	3 дня	1 день	2 дня	3 дня	1 день	2 дня	3 дня
r_1	86.43	76.62	69.29	86.98	77.26	69.66	86.52/ 75.83	77.26/ 58.12	69.66/ 43.73
r_2	58.00	27.75	14.61	70.00	35.08	19.63	68.67/ 67.24	34.03/ 34.89	19.18/ 19.47
r_3	58.00	50.79	46.12	70.00	59.69	54.79	68.67/ 67.24	59.16/ 55.78	54.79/ 48.44

Приведенные оценки показывают, что результаты вероятностного предсказания воспроизводимы и не слишком зависят от метода решения обратной задачи. Коллаж-метод дает лучшие результаты для краткосрочного предсказания.

Заключение

Марковское предсказание, основанное на решении обратной задачи IFS с вероятностями, эффективно в случаях, когда в отчетах временного ряда можно обоснованно выделить несколько диапазонов величин, согласованных с некоторым «грубым» разбиением пространства состояний динамической системы. Процедура марковского предсказания содержит следующие этапы.

- Выбор объема $|\Sigma|$ алфавита, порога (уровней) и длины слова K . Порог, или уровни, выбираются обычно из физических соображений; их число определяет $|\Sigma|$. Длина слова K должна обеспечивать статистически значимое заполнение всех $|\Sigma|^K$ бин гистограммы.

- Построение эмпирической меры. Проверка ее стационарности и наличия мультифрактальных свойств. Стационарность меры проверяется совпадением гистограмм, построенных для двух фрагментов ряда. Мультифрактальные свойства меры обнаруживаются вычислением лежандровского спектра, либо спектра больших отклонений.

- Решение обратной задачи для IFS с вероятностями на основе эмпирической меры. Число отображений N , входящих в IFS , выбирается равным объему алфавита $N = |\Sigma|$. При фиксированных коэффициентах IFS в методе моментов свободным параметром является номер M максимального момента. Увеличение M уменьшает ошибку функционала. Однако чрезвычайно большие M могут приводить к неустойчивости численного алгоритма, поскольку x^M , $x < 1$ умножаются в (17), (18) на большие значения биномиальных коэффициентов. Результатом решения является матрица переходных вероятностей.

- Генерация модельной меры с помощью рекуррентной последовательности *IFS* с полученными значениями p_{ij} с объемом, превышающим объем эмпирической меры. Проверка модели реализуется сравнением гистограмм, эмпирической и модельной.

- Модельная мера, на которой основано предсказание, должна хорошо представлять все возможные слова. В случае бинарного алфавита, успешное предсказание получается, когда гистограмма имеет форму «корыта», приводящего к сравнимым вероятностям p_{11} и p_{22} . Для прогноза на один символ²⁰ рассматривается фрагмент слова длины $K - 1 : s_1, s_2, \dots, s_{K-1}$. Альтернатива (0 или 1) для s_K выбирается на основе модельной меры как $\max\{P(s_1, s_2, \dots, s_{K-1}, 1), P(s_1, s_2, \dots, s_{K-1}, 0)\}$.

Обобщение на прогноз двух и более символов очевидно. В качестве возможного варианта можно делать упрощенный прогноз, опираясь только на эмпирическую меру. Однако его качество всегда хуже, поскольку в реальной выборке могут быть плохо представлены или вообще отсутствуют некоторые из возможных слов.

Приведенный практический пример показывает, что коллективная линейная динамика гиперболических отображений с вероятностями может быть полезна для обоснованного вероятностного предсказания сложных природных процессов. Возможные использования обобщенных фрактальных преобразований [55] и *IFS* с коэффициентами $c_i > 1/2$ еще ждут своих исследователей.

Библиографический список

1. *Noakes L.* The Takens embedding theorem // *Inter. J. Bifurcation and Chaos.* 1991. Vol. 1. P. 867.
2. *Sauer T., Yorke J.A., Casdagli M.* Embedology // *J. Statist. Phys.* 1991. Vol. 65. P. 579.
3. *Афраймович В.С., Рейман А.М.* Размерности и энтропии в многомерных системах // *Нелинейные волны. Динамика и эволюция.* М.: Наука, 1989. С. 238.
4. *Макаренко Н.Г.* Реконструкция динамических систем по хаотическим временным рядам // *Нелинейные волны* 2004. Нижний Новгород, 2004. С. 398.
5. *Stark J.* Delay reconstruction: dynamics versus statistics // *Nonlinear dynamics and statistics* /A.I. Mees ed. Birkhauser, 2001. P. 81.
6. *Макаренко Н.Г.* Эмбедология и нейропрогноз // *Лекции по нейроинформатике.* Ч. 1. *Нейроинформатика–2003.* Москва, 2003. С. 86.
7. *Poggio T., Girosi F.* A theory of networks for approximation and learning // *MIT AI Lab. Techn. Rep.* 1989. Memo №1140. <https://hpds1.mit.edu/bitstream/1721.1/6511/2/AIM-1140.pdf>
8. *Малинецкий Г.Г., Потанов А.Б.* Современные проблемы нелинейной динамики. М.: УРСС, 2002. 358 с.
9. *Farmer J.D., Sidorovich J.J.* Predicting chaotic time series // *Phys. Rev. Lett.* 1987. Vol. 59. P. 845.
10. *Kantz H., Schreiber Th.* *Nonlinear time series analysis.* Cambridge Univ.Press, 2004. 369 p.

²⁰В случае бинарного алфавита.

11. *McSharry P.E.* Innovations in consistent nonlinear deterministic prediction. D.Phil. Thesis. University of Oxford, 1999.
12. *Nakamura T., Kilminster D., Judd K., Mees A.* A comparative study of model selection methods for nonlinear time series // *Int. J. of Bifur. and Chaos.* 2004. Vol. 14. P. 1129.
13. *Mukhin D.N., Feigin A.M., Loscutov E.M., Molkov Y.I.* Modified Bayesian approach for the reconstruction of dynamical systems from time series // *Phys.Rev.E.* 2006. Vol. 73(3 Pt 2):036211.
14. *Kantz H., Ragwitz M.* Phase space reconstruction and nonlinear predictions for stationary and nonstationary Markovian processes // *Intern. Journal of Bifurcation and Chaos.* 2004. Vol. 14, № 6. P. 1935.
15. *Froyland G.* Extracting dynamical behaviour via Markov models // *Nonlinear dynamics and statistics / A.I. Mees ed.* Birkhauser, 2001. P. 283.
16. *Froyland G.* Markov modelling for random dynamical systems. 1998.
<http://www.maths.unsw.edu.au/froyland>
17. *Daw C.S., Finney C.E.A., Tracy E.R.* A review of symbolic analysis of experimental data // *Rev. of Scientific Instruments.* 2003. Vol. 74. P. 916.
18. *Wanliss J.A., Ahn V.V., Yu Z.G., Watson S.* Multifractal modeling of magnetic storms via symbolic dynamics analysis // *J. Geophys. Res.* 2005. Vol.110. P. AO814.
19. *Anh Vo, Lau Ka-Sing, Yu Zu-Gao.* Multifractal characterization of complete genomes // *J.Phys. A: Math.Gen.* 2001. Vol. 34. P. 7127.
20. *Tino P.* Multifractal properties of Hao's geometric representations of sequences // *Physica A.* 2002. Vol. 304(3–4). P. 480.
21. *Barnsley M.* Fractals everywhere. N.Y.: Academic Press, 1988. 531p.
22. *Falconer K.* Fractal geometry. Mathematical Foundations and Applications. Wiley, 2003. 337 p.
23. *Barnsley M.F., Demko S.* Iterated function systems and the global construction of fractals // *Proc. Roy. Soc. London A.* 1985. Vol. 399. P. 243.
24. *Hutchinson J.E.* Fractals and self-similarity // *Indiana Univ. Math.* 1981. Vol. 30. P. 713.
25. *Diaconis P.* Iterated random function // *SIAM Review.* 1999. Vol. 41. P. 45.
<http://www.stat.berkeley.edu/census/511.pdf>
26. *Vrscay E.R.* From fractal image compression to fractal-based methods in mathematics // *Fractals in Multimedia /ed. by M.F. Barnsley, D. Saupe and E.R. Vrscay.* New York: Springer-Verlag, 2002.
27. *Jeffrey H.J.* Chaos game representation of gene structure// *Nucleic Acids Research.* 1990. Vol. 18. P. 2163.
28. *Tino P.* Spatial representation of symbolic sequences through iterative function systems // *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Part A: Systems and Humans,* 1999. Vol. 29(4). P. 386.
29. *Tino P., Dorffner G.* Predicting the future of discrete sequences from fractal representations of the past // *Machine Learning.* 2001. Vol. 45(2). P. 187.
<http://www.cs.bham.ac.uk/pxt/my.publ.html>.

30. *Barnsley M.F., Ervin V., Hardin D., Lancaster J.* Solution of an inverse problem for fractals and other sets //Proc. Nat. Acad. Sci. USA. 1986. Vol. 83. P. 1975.
31. *Iacus St. M., Torre D.L.* Approximating distribution functions by iterated function systems// Departemental Working Papers 2002–03, Department of Economics University of Milan Italy. <http://ideas.repec.org/e/pla155.html>.
32. *Hart J.C.* Computer display of linear fractal surfaces // Doctor Thesis. University of Illinois at Chicago, 1991. <http://graphics.cs.uiuc.edu/jch/papers/diss.pdf>.
33. *Макаренко Н.Г.* Фракталы, мультифрактальные меры и аттракторы // Нелинейные волны'2002. Нижний Новгород, 2003. С. 381.
34. *Макаренко Н.Г.* Фракталы, аттракторы, нейронные сети и все такое // Лекции по нейроинформатике. Ч.2. // Нейроинформатика–2002. Москва, 2002. С. 121.
35. *Falconer K.* Techniques in fractal geometry. Wiley & Sons, 1997. 256 p.
36. *Hutchinson J.E.* Measure Theory. 1995.
http://www.maths.anu.edu.au/~john/lecture_notes.html.
37. *Rubner Y., Tomasi C., Guibas L.J.* The Earth mover's distance as a metric for image retrieval // Technical Rep. STAN-CS-TN-98-86.
38. *Kaijser T.* Computing the Kantorovich distance for images // J. Mathematical Imaging and Vision. 1998. Vol. 9. P. 173.
39. *Лемешко Б.Ю.* Методы оптимизации. Конспект лекций.
<http://www.ami.nstu.ru/headrd/>
40. *Stark J.* A neural network to compute the Hutchinson metric in fractal image processing // IEEE Trans. Neural Networks. 1991. Vol 2. P. 156.
41. *Wadstromer N.* Coding of fractal binary images with contractive set mappings composed of affine transformations // PhD Theses. Linkopings univer. 2001.
42. *Ling H., Okada K.* EMD-L1: An efficient and robust algorithm for comparing histogram-based descriptors //European Conference on Computer Vision. 2006.
<http://www.cs.umd.edu/hbling/main.htm>.
43. *Forte B., Vrscay E. R.* Solving the inverse problem for function/image approximations using iterated function systems. I.Theoretical basis; II. Algorithm and computations // Fractals. 1994. Vol. 2,3. P. 325; P. 346.
44. *Handy C.R., Mantica G.* Inverse problems in fractal construction: moment method solution // Phys. D. 1990. Vol. 43. P. 17.
45. *Abendat S., Demko S., Turchetti G.* Local moments and inverse problem for fractal measures // Inverse Problems. 1992. Vol. 8. P. 739.
46. *Lutton E., Levy-Vehel J., Cretin G., Glevarec Ph., Roll C.* Mixed IFS: Resolution of the inverse problem using genetic programming // Complex Systems. 1995. Vol. 9. P. 375.
47. *Заболотная Н.А.* Индексы геомагнитной активности. М.: Гидрометиздат, 1977. 39 с.
48. *Яновский Б.М.* Земной магнетизм. Ленинград: ЛГУ, 1978. 592 с.
49. *Пудовкин М.И., Распопов О.М., Клейменова Н.Т.* Возмущения электромагнитного поля Земли. Ленинград: ЛГУ, 1976. 247 с.
50. *Watanabe Sh., Sagawa E., Ohtaka K., Shimazu H.* Prediction of the D_{st} index from

solar wind parameters by a neural network method // Earth Planets Space. 2002. Vol. 54. P. 1263.

51. *Stepanova M., Antonova E., Troshichev O.* Prediction of D_{st} variations from Polar Cap indices using time-delay neural network // J.Atmosph. and Solar-Terrestrial Phys. 2005. Vol. 67. P. 1658.
52. *Strivastava N.* A logistic regression model for predicting the occurrence of intense geomagnetic storms // Ann.Geophys. 2005. Vol.23. P.2969.
53. *Ahn V.V., Yu Z.G., Wanliss J.A., Watson S.M.* Prediction of magnetic storm events using the D_{st} index // Nonlinear Processes in Geophysics. 2005. Vol. 12. P. 799.
54. *Levy Vehel J.* Numerical computation of the large deviation multifractal spectrum // URL: <http://www-rocq.inria.fr/fractales>.
55. *Forte B., Vrscay E.R.* Theory of generalized fractal transforms. Fractal Image Encoding and Analysis / Edited by Y. Fisher. Heidelberg: Springer Verlag, 1998. <http://links.uwaterloo.ca/person.ed.html>

*Институт математики, Алма-Ата,
Казахстан
Санкт-Петербургский государственный
университет*

*Поступила в редакцию 19.06.06
После доработки 15.07.06*

ITERATED FUNCTION SYSTEM AND MARCOVIAN PREDICTION OF TIME SERIES

N.G. Makarenko, L.M. Karimova, S.A. Mukhamejanova, I.S. Knyazeva

This paper demonstrates a tool for prediction time series on a base of iterated function system of the theory of fractals. Iterations result in an attractor or fractal in a space of compacts. The attractor is a support of invariant probabilistic measure or multifractal in a space of Borel measures. An inverse problem consists of finding iterated function system and its probabilities by means of empirical measure. The estimates might be obtained from time series by symbolic dynamics methods. In addition to necessary mathematical material two practical results of predictions of threshold values for financial time series and geomagnetic storms are represented.



Макаренко Николай Григорьевич – родился в Троицке (1945). Окончил Уральский государственный университет им. Горького (Свердловск) по специальности «астрономия». Ведущий научный сотрудник, д.ф.-м.н. ГАО РАН (Пулково, Санкт-Петербург). Главный научный сотрудник, д.т.н. Лаборатории компьютерного моделирования (Институт математики, Алма-Ата, Казахстан). Область научных интересов: фрактальная геометрия, вычислительная топология, детерминированный хаос, нейронные сети, физика Солнца. Имеет более 70 научных публикаций. E-mail:ng-makar@mail.ru



Каримова Лаиля Митхатовна – родилась в Алма-Ате (1948). Окончила Ленинградский государственный университет по специальности «радиофизика». Старший научный сотрудник, к. ф.-м.-н., Лаборатории Компьютерного Моделирования (Институт Математики, Алма-Ата, Казахстан) Область научных интересов фрактальная геометрия, нейронные сети, математическая морфология. Имеет более 40 научных публикаций.



Мухамеджанова Светлана Адиковна – 1979 года рождения, окончила механико-математический факультет Казахского Государственного Национального Университета, младший научный сотрудник Лаборатории Компьютерного Моделирования (Институт Математики, Алма-Ата, Казахстан) Область научных интересов – фрактальная геометрия, нейронные сети, прогноз временных рядов.



Князева Ирина Сергеевна – 1983 года рождения, студентка 2-го курса магистратуры физического факультета Санкт-Петербургского государственного университета. Область научных интересов – фрактальная геометрия, нейронные сети, прогноз временных рядов.



ПЕРЕХОДНЫЕ ПРОЦЕССЫ И АВТОКОЛЕБАТЕЛЬНЫЕ РЕЖИМЫ ВБЛИЗИ МЕМБРАНЫ КЛЕТКИ ВОДОРОСЛИ *CHARA CORALLINA*

А.И. Лаврова, Т.Ю. Плюснина, Г.Ю. Ризниченко

Исследуется математическая модель ионных потоков через клеточную мембрану водоросли *Chara corallina*. Рассматриваются переходные процессы и автоколебательные режимы, связанные с потенциалозависимым транспортом протонов через мембрану клетки. Обсуждается значение таких процессов для растительной клетки.

Введение

Гигантские клетки харовых водорослей (*Chara corallina* и *Nitellopsys obtusa*) уже на протяжении многих лет являются удобным объектом биофизических исследований, поскольку имеют большие размеры (6–8 см в длину, 1–2 мм в диаметре). На мембране клеток харовых водорослей наблюдается генерация потенциала действия с амплитудой порядка 200 мВ в ответ на стимуляцию электрическим током, точечным тепловым раздражением или локальным интенсивным облучением [1]. Транспортная система мембраны, которая отвечает за проведение возбуждения, хорошо исследована, это система калиевых и хлорных каналов [2]. После освещения клетки в примембранной области вдоль ее поверхности наблюдается перераспределение рН и трансмембранного потенциала. Возникают «щелочные» (рН от 9.5 до 10.5) и «кислые» (рН от 6.5 до 8) зоны шириной 1–3 мм [3–9]. Значение трансмембранного потенциала в «щелочных» зонах составляет $\varphi = -220$ мВ и в «кислых» $\varphi = -250$ мВ. Разница в трансмембранных потенциалах между зонами (около 30 мВ) существенно ниже потенциалов действия. Эти зоны в терминах нелинейной динамики рассматриваются как диссипативные структуры [10, 11].

Диссипативные структуры вблизи мембраны изучены не так подробно, как генерация потенциала действия. Становление диссипативных структур и переходные процессы, предшествующие их появлению в примембранной области клеток водоросли, были исследованы в работах [10–13]. Физиологическое значение таких нелинейных режимов до конца не ясно. Предполагается, что возникновение областей с различным значением рН предшествует ростовым процессам в клетке, а также необходимо для отложения солей кальция в «щелочных» зонах, что обеспечивает структурную поддержку клетке.

Экспериментально были получены как затухающие, так и незатухающие колебания мембранного потенциала [14, 15], которые обычно измеряются в выбранной точке на мембране. Колебания длительностью несколько минут могут возникать после выключения и быстрого последующего включения света [15, 16]; они также могут существовать долговременно, в течение часа, при слабом освещении [15]. Колебательные переходные процессы могут возникать спонтанно, независимо от изменения интенсивности света, проводимости ионных каналов, потенциала покоя и т.д. (например, колебания рН и потенциала при неизменном составе среды и постоянной освещенности).

В процессе возникновения диссипативных структур (зон рН) изменения рН и трансмембранного потенциала снаружи клетки происходят, в основном, за счет работы активного транспортера протонов – АТФ-азы (аденозинтрифосфатаза), которая переносит протоны через плазматическую мембрану из цитоплазмы во внешнюю среду, а также за счет работы протонных каналов, через которые осуществляется поток протонов внутрь клетки [17, 18].

В работе [19] нами была разработана математическая модель, позволяющая описать как колебательные режимы, так и возникновение диссипативных структур вдоль клеточной мембраны водоросли *Chara corallina*. В качестве переменных были выбраны концентрация протонов снаружи клетки и трансмембранный потенциал. Изменение рН снаружи клетки вблизи мембраны зависит от диффузии протонов вдоль мембраны, работы протонной АТФ-азы и протонных каналов. Чтобы описать перенос протонов через мембрану, мы принимали во внимание клеточные процессы, показанные на рис. 1. На модели было исследовано образование рН структур, их свойства, зависимость их роста от интенсивности света [19, 20]. Были получены колебания рН и потенциала в примембранной области. Существенное отличие модели, предложенной в работе [19], от моделей, в которых описываются генерация и рас-

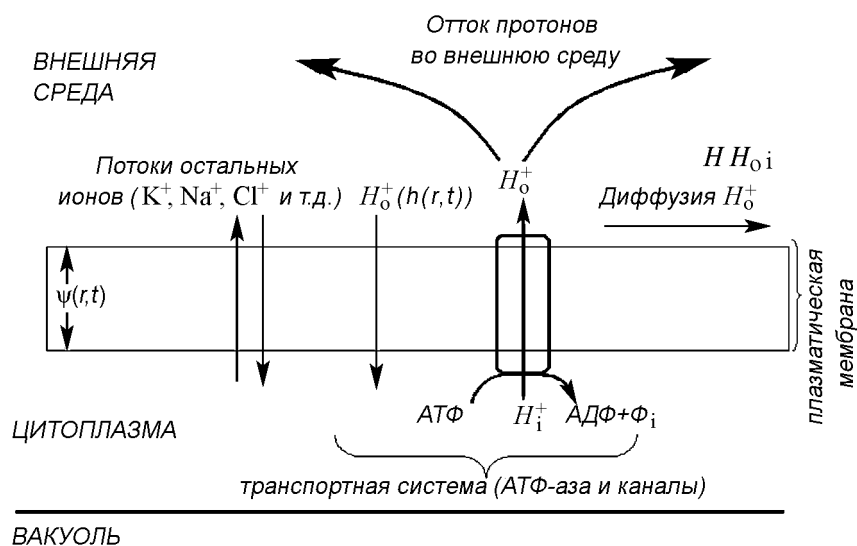


Рис. 1. Процессы вблизи мембраны клетки водоросли *Chara corallina*, которые рассматривались в модели. H_i – концентрация протонов в цитоплазме, $H_o(h(r,t))$ – концентрация протонов снаружи клетки, $\psi(r,t)$ – мембранный потенциал, АДФ – аденозиндифосфат

пространение потенциалов действия, состоит в том, что механизм возникновения диссипативных структур определяется, в основном, работой протонной транспортной системы, тогда как в генерации потенциала действия, в основном, участвует система калиевых и хлорных каналов.

Основное внимание в данной работе уделено исследованию переходных процессов, предшествующих возникновению диссипативных структур. На математической модели было проведено детальное исследование переходных и автоколебательных процессов при малых интенсивностях света, когда в системе еще нет диссипативных структур.

1. Математическая модель

Изучение переходных процессов проводилось на разработанной нами [19] модели (*), описывающей возникновение диссипативных структур и колебаний потенциала и pH вблизи мембраны.

$$\begin{aligned} \frac{dh}{dt} &= \frac{he^\Psi(1-n)}{2qh + e^{2\Psi}(1+h)^2(n+1)} - \gamma h + D_1 \frac{\partial^2 h}{\partial r^2}, \\ \frac{d\Psi}{dt} &= \frac{-he^\Psi(1-n)}{2qh + e^{2\Psi}(1+h)^2(n+1)} z - g(\Psi - \Psi_0) + D_2 \frac{\partial^2 \Psi}{\partial r^2}. \end{aligned} \quad (*)$$

Переменными модели являются концентрация протонов вблизи внешней стороны мембраны h и безразмерный трансмембранный потенциал $\Psi = \frac{\varphi F}{2RT}$.

Первое уравнение описывает изменение концентрации протонов вблизи мембраны, которое происходит за счет потока протонов через АТФ-азу (функция $\frac{he^\Psi(1-n)}{2qh + e^{2\Psi}(1+h)^2(n+1)}$), за счет обмена протонов между средой и клеткой (γh) и за счет диффузии вдоль мембраны $\left(D_1 \frac{\partial^2 h}{\partial r^2}\right)$. Чтобы вывести выражение для потока через АТФ-азу, мы рассматривали кинетическую схему работы фермента (рис. 2, [19]).

В ходе вывода было сделано допущение о том, что процессы переноса протонов с одной стороны мембраны на другую ($E_3 \leftrightarrow E_4$; $E_6 \leftrightarrow E_5$) происходят гораздо медленнее по сравнению с процессами присоединения и отщепления протонов ($E_1 \leftrightarrow E_3$; $E_3 \leftrightarrow E_5$; $E_2 \leftrightarrow E_4$; $E_4 \leftrightarrow E_6$). Элементарные константы переноса протонов с одной стороны мембраны на другую зависят от трансмембранного потенциала: $k_{-2} = k_{-2}^0 \exp\left(-\frac{F\varphi}{2RT}\right)$, $k_2 = k_2^0 \exp\left(\frac{F\varphi}{2RT}\right)$ и $k_3 = k_3^0 \exp\left(\frac{F\varphi}{2RT}\right)$.

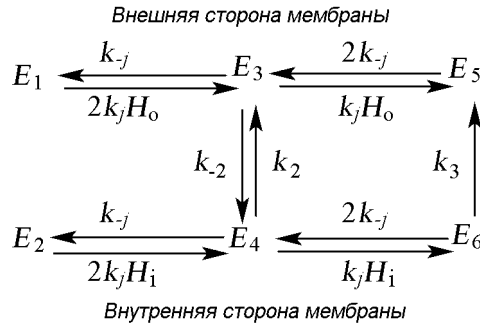


Рис. 2. Кинетическая схема работы фермента (АТФ-азы), в которой реализуются шесть конформационных состояний: $E_1, E_2, E_3, E_4, E_5, E_6$. H_i – концентрация протонов в цитоплазме, H_o – концентрация протонов снаружи клетки; k_2, k_{-2}, k_3 – потенциало-зависимые константы переноса протона с внутренней стороны мембраны на внешнюю

Второе уравнение описывает изменение трансмембранного потенциала вдоль мембраны за счет тока через АТФ-азу, тока утечки ($g(\psi - \psi_0)$) и распределения потенциала вдоль мембраны $\left(D_2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2}\right)$.

Безразмерные переменные модели: $h = \frac{[H_0]}{K_1}$ – концентрация протонов вблизи внешней стороны мембраны; $\tau = \frac{t}{t_0}$ – время; $r = \frac{x}{L}$ – пространственная координата; ψ – трансмембранный потенциал.

Параметры модели: $K_1 = \frac{k_{-1}}{k_1}$, $n = \frac{1}{K_3 h_i + 1}$, $q = \frac{(1 + h_i)^2 K_2 n}{h_i}$, $K_2 = \frac{k_{-2}}{k_2}$, $K_3 = \frac{k_3}{2k_2}$, $h_i = \frac{[H_i]}{K_1}$, $\bar{g} = \frac{gt_0}{C}$, $z = \frac{pF^2 K_1}{CRT}$, $\psi_0 = \frac{\varphi_0 F}{2RT}$, $D_1 = \frac{Dt_0}{L^2}$, $D_2 = \frac{pt_0}{2L^2 R_i C}$, где \bar{g} – проводимость пассивных каналов, C – емкость мембраны, p – диаметр клетки, F – число Фарадея, φ_0 – потенциал покоя на плазматической мембране, L – длина клетки, R_i – сопротивление цитоплазмы, $[H_i]$ – концентрация протонов в цитоплазме (в данной модели $[H_i]$ является параметром). Как было показано выше, все нелинейные режимы (автоколебания, переходные процессы, диссипативные структуры) наблюдаются при изменении интенсивности света. В лабораторных экспериментах [21] было показано, что при включении света концентрация протонов в цитоплазме изменяется. Поэтому для проведения численных экспериментов мы ввели феноменологическую зависимость концентрации протонов в цитоплазме h_i от интенсивности света I . Мы предположили, что такая зависимость является экспоненциальной и имеет вид $h_i = h_i^0 e^{-I}$, где h_i^0 – безразмерный параметр, соответствующий концентрации протонов в цитоплазме в темноте; I – параметр интенсивности света. Таким образом, параметры модели n и q будут зависеть от интенсивности света сложным, нелинейным образом.

Интервалы изменения безразмерных параметров модели для численного счета были оценены в статье [17]: $K_1 = 5.02 \cdot 10^{-7}$ моль \cdot м $^{-3}$, $k_{-2} = 3.36 \cdot 10^9$ с $^{-1}$, $K_2 = 8.484 \cdot 10^{-4}$, $K_3 = 0.007$, $\bar{g} = 0.03 \div 0.08$, $\psi_0 = -5 \div -1.335$, $h_i = 8.3 \div 40$, $n = 0.5 \div 0.92$, $q = 0.001 \div 0.005$.

2. Результаты моделирования

Как было сказано выше, предложенная система (*) позволяет описать распределение рН и потенциала (диссипативные структуры) вблизи мембраны [19, 20], рис. 3. Для получения диссипативных структур система была линеаризована и найдена область неустойчивости Тьюринга. Затем численно решалась нелинейная система при следующих граничных условиях: $\frac{dh_0}{dr}(0, \tau) = \frac{dh_0}{dr}(1, \tau) = 0$, $\frac{d\psi}{dr}(0, \tau) = \frac{d\psi}{dr}(1, \tau) = 0$. Далее в численном счете была детально исследована точечная модель. При этом предполагалось, что клетка равномерно освещена и рассматриваются синхронные во времени процессы вдоль всей мембраны.

Исследование системы показало, что в ней возможно несколько стационарных состояний (триггер). Ввиду сложности системы не представляется возможным ана-

литически найти общее выражение для стационарных значений переменных $\bar{\psi}$ и \bar{h} . Поэтому для дальнейшего аналитического исследования были выбраны фиксированные стационарные значения переменных $\bar{\psi} = -4.7$, $\bar{h} = 21$, реализующиеся в темновых условиях ($I = 0$). Для исследования существования различных режимов в качестве управляющего параметра была выбрана интенсивность света I при фиксированных значениях остальных параметров. Далее для ряда значений интенсивности I (интенсивность изменялась в интервале от 0 до 0.2 с шагом 0.01) был получен численный ряд стационарных значений переменных. Для каждого стационарного состояния был проведен линейный анализ системы с помощью программы MathCad 5.0. Для некоторых состояний были найдены критические значения параметра интенсивности света I , при которых устойчивый фокус переходит в неустойчивый (предположительно, реализуется бифуркация Хопфа).

Далее система была исследована численно вблизи выбранных особых точек. Для проведения численного эксперимента использовалась программа TRAX для решения обыкновенных дифференциальных уравнений. В ходе численного эксперимента было получено, что при $I = 0$ в системе реализуется устойчивый узел (рис. 4, а, состояние 1). При повышении интенсивности света до $I = 0.02$ в системе возникает мультистационарность, появляются неустойчивый фокус и седло (рис. 4, б, состояния 2 и 3). При дальнейшем увеличении интенсивности от 0.05 до 0.053 происходит бифуркация, в результате которой неустойчивый фокус переходит в устойчивый, вокруг которого возникает неустойчивый предельный цикл (рис. 4, в). При значении $I = 0.054$ стационарное состояние 1 из устойчивого узла превращается в устойчивый фокус (данные не приведены). При изменении I от 0.061 до 0.068 вокруг особой точки 1 возникает неустойчивый предельный цикл, при этом рождается предельный устойчивый цикл, охватывающий оба стационарных состояния (см. рис. 4, в). При дальнейшем увеличении I до 0.07 в системе остается одно стационарное состояние – устойчивый фокус (рис. 4, д), которое затем при $I = 0.2$ переходит в устойчивый узел (рис. 4, е). Таким образом, переход от одного устойчивого стационарного состояния $\bar{\psi} = -4.7$, $\bar{h} = 21$ до другого $\bar{\psi} = -2.2$, $\bar{h} = 6.7$ при изменении освещенности от $I = 0$ до $I = 0.2$ характеризуется многоэтапностью и многообразием нелинейных режимов. Пунктирными линиями на рисунках указаны нуль-изоклины системы

$$\psi' = \frac{d\psi}{d\tau} \Big|_{h=\bar{h}, \psi=\bar{\psi}} = 0, \quad h' = \frac{dh}{d\tau} \Big|_{h=\bar{h}, \psi=\bar{\psi}} = 0.$$

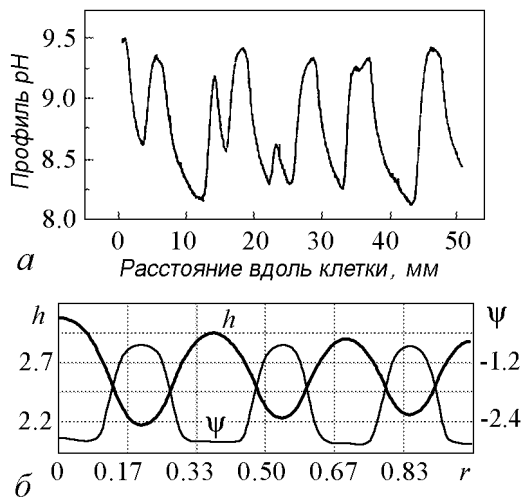


Рис. 3. а – профиль $\text{pH} = -\lg H_o^+$ вдоль клетки водоросли *Chara corallina*. Экспериментальные данные [13]. б – распределение концентрации протонов h и потенциала ψ вдоль клетки водоросли *Chara corallina*, полученное на модели. Параметры системы: $z = 0.65$, $n = 0.9$, $q = 0.001$, $\gamma = 0.01$, $g = 0.035$, $\psi_0 = -1.301$, $D_1 = 1.44 \cdot 10^{-3}$, $D_2 = 3.6 \cdot 10^{-4}$; r – расстояние вдоль клетки

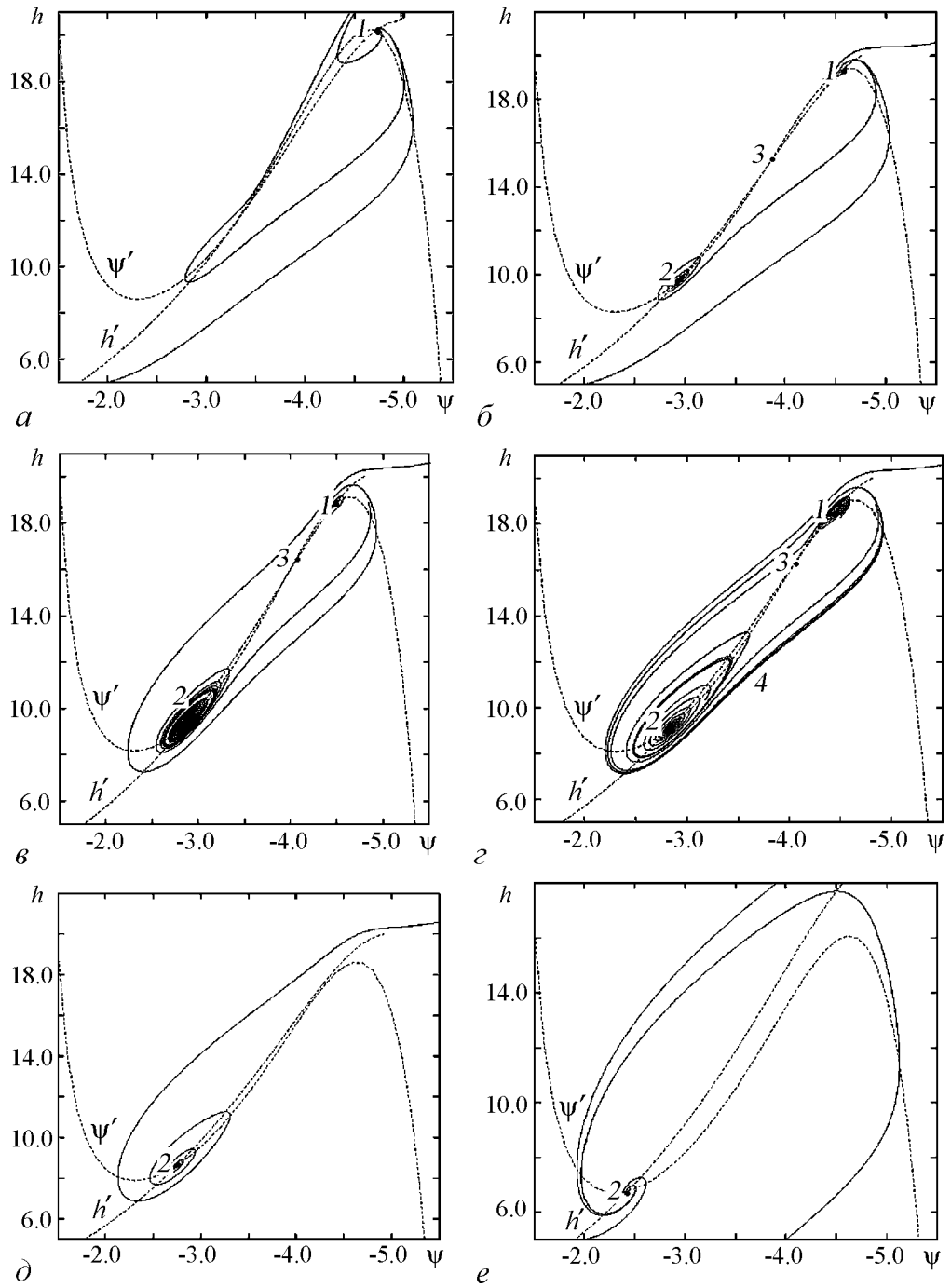


Рис. 4. Фазовые портреты системы при постепенном повышении интенсивности света. Параметры системы: $K_2 = 5.1 \cdot 10^{-5}$, $g = 0.03$, $K_3 = 0.005573$, $\gamma = 0.0085$, $\psi_0 = -1.28$, $z = 0.6$, $h_1^0 = 21$. $a - I = 0$, устойчивый узел I ; $b - I = 0.02 \div 0.04$, I - устойчивый узел $\bar{\psi} = -4.6$, $\bar{h} = 19.8$, 2 - неустойчивый фокус $\bar{\psi} = -2.9$, $\bar{h} = 9.8$, 3 - седло $\bar{\psi} = -3.79$, $\bar{h} = 14.75$; $c - I = 0.045 \div 0.048$, I - устойчивый фокус $\bar{\psi} = -4.4$, $\bar{h} = 19.6$, 2 - устойчивый фокус $\bar{\psi} = -2.8$, $\bar{h} = 9.5$ с неустойчивым предельным циклом, 3 - седло $\bar{\psi} = -4$, $\bar{h} = 15.9$; $d - I = 0.048 \div 0.05$, $I, 2$ - устойчивые фокусы $\bar{\psi} = -4.4$, $\bar{h} = 18.6$ и $\bar{\psi} = -2.8$, $\bar{h} = 9.1$ с неустойчивыми предельными циклами, 3 - седло $\bar{\psi} = -4.06$, $\bar{h} = 16.35$, 4 - устойчивый предельный цикл; $e - I = 0.065$, устойчивый фокус $\bar{\psi} = -2.74$, $\bar{h} = 8.59$; $e - I = 0.2$, устойчивый узел $\bar{\psi} = -2.42$, $\bar{h} = 6.66$

Обсуждение и заключение

В рассматриваемой точечной системе (*) при изменении интенсивности света I были получены колебательные режимы, сходные с описанными ранее экспериментальными данными [14, 15]. При исследовании системы мы получили, что при постепенном изменении параметра интенсивности света в системе реализуется множественность стационарных состояний. «Уходя» от одного устойчивого состояния (устойчивый узел I) при изменении I и «приближаясь» к другому устойчивому состоянию, система «проходит» через ряд колебательных режимов. При определенных значениях интенсивности в системе начинает «работать» положительная обратная связь, обуславливающая возникновение колебаний концентрации протонов и мембранного потенциала. Увеличение потока протонов через АТФ-азу наружу клетки приводит к увеличению (по модулю) мембранного потенциала, что, в свою очередь, активирует АТФ-азу и приводит к еще большему увеличению потока протонов наружу. Возникающие колебания, по-видимому, являются переходным процессом к возникновению диссипативных структур (зон рН).

Клетка всегда «стремится» установить баланс процессов, при котором возможно ее функционирование. Возможно, автоколебания – это некоторый переходный процесс, позволяющий живой системе при резком изменении внешних условий (например, при выключении света) перейти в новое состояние не скачкообразно, что могло бы негативно отразиться на физиологических функциях клетки, а постепенно «подстраивая» все параметры к новому состоянию. Существование таких колебаний связано как с внутренним метаболизмом клетки, так и с мембранными процессами транспорта протонов, в частности с изменением активности АТФ-азы. Колебания, возникающие при включении света, предшествуют возникновению диссипативных структур (зон рН). Существование «кислых» и «щелочных» зон способствует накоплению кальция в щелочных зонах, поскольку, как показано в [5, 22, 23], соли кальция проникают в клетку именно в щелочных зонах, что приводит к отложению кристаллов кальция в клетке.

Подробное количественное сравнение полученных колебательных и переходных процессов с экспериментально наблюдаемыми и описанными в разных публикациях провести не удастся, так как результаты лабораторных экспериментов, как правило, бывают получены при различных экспериментальных условиях. Важна не только фиксированная интенсивность облучения, но и спектральный состав действующего света, температура и т. д. Важна «предыстория» функционирования клетки. Поскольку в лабораторных экспериментах такая многоэтапность и разнообразие нелинейных режимов до настоящего времени не прослеживались, было бы интересно провести эталонные эксперименты.

В дальнейшем нами предполагается рассмотреть взаимосвязь мембранных потоков и движения цитоплазмы, влияющего на процессы клеточного метаболизма. По-видимому, имеется связь генерации потенциалов действия и возникновения более «тонких» процессов, определяемых проводимостью АТФ-азы.

Авторы выражают благодарность профессору Ю.М. Романовскому за полезные обсуждения.

Работа поддержана грантом РФФИ № 03-04-04000.

Библиографический список

1. *Tasaki I., Watanabe A., Hallet M.* Fluorescence of squid axon membrane labelled with hydrophobic probes // *J. Membr. Biol.* 1972. Vol. 8. P. 109.
2. *Кольс О.Р., Максимов Г.В., Раденович Ч.Н.* Биофизика ритмического возбуждения. М.: Изд. МГУ, 1993.
3. *Spear D.G., Barr J.K., Barr C.E.* Localization of hydrogen ions and chloride fluxes in *Nitella* // *J. Gen. Physiol.* 1969. Vol. 54. P. 397.
4. *Smith F.A., Walker N.A.* Chloride transport in *Chara corallina* and the electrochemical potential difference for hydrogen ions // *Exp. Bot.* 1976. Vol. 27. P. 451.
5. *Lucas W. J.* Photosynthetic assimilation of exogenous HCO_3^- by aquatic plants // *Ann. Rev. Plant Physiol.* 1983. Vol. 34. P. 71.
6. *Lucas W.J. and Dainty J.* Spatial distribution of functional. OH^- carriers along a characean internodal cell: Determined by the effect of cytochalasin B on $\text{H}^{14}\text{CO}_3^-$ assimilation // *J. Membrane Biol.* 1977. Vol. 32. P. 75.
7. *Fisahn J., Lucas W.J.* Direct measurement of the reversal potential and the current-voltage characteristics in the acid and alkaline regions of *Chara corallina* // *Planta*, 1992. Vol. 186. P. 506.
8. *Fisahn J., Lucas W.J.* Spatial organization of transport domains and subdomain formation in the plasma membrane of *Chara corallina* // *J. Memb. Biol.* 1995. Vol. 147. P. 275.
9. *Булычев А.А., Черкашин А.А., Рубин А.Б., Мюллер С.* Распределение кислых и щелочных зон на поверхности клеток *Chara corallina* при стационарном и локальном освещении // *Физиология растений.* 2002. Т. 49. С. 805.
10. *Toko K., Hayashi K., Yoshida T., Fujiyoshi T., Yamafuji K.* Oscillations of electric spatial patterns emerging from the homogeneous state in characean cells // *Eur. Biophys. J.* 1988. Vol. 1. P. 11.
11. *Toko K., Chosa H., Yamafuji K.* Dissipative structure in the *Characeae*: Spatial pattern of proton flux as a dissipative structure in characean cells // *J. Teor. Biol.* 1985. Vol. 114. P. 127.
12. *Leonetti M., Pelce P.* On the theory of pH bands in characean algae // *C.R. Acad. Sci. Paris, Science de la vie/Life Sciences.* 1994. Vol. 317. P. 801.
13. *Bulychev A.A., Polezhaev A.A., Zykov S.V., Pljusnina T.Yu., Riznichenko G.Yu., Rubin A.B., Jantoss W., Zykov V.S., Muller S.C.* Light-triggered pH banding profile in *Chara* cells revealed with a scanning pH microprobe and its relation to self-organization phenomena // *J. Theor. Biol.* 2001. Vol. 7. P. 275.
14. *Fisahn J., McConnaughey T., Lucas W.J.* Oscillations in extracellular current, external pH and membrane potential and conductance in the alkaline bands of *Nitella* and *Chara* // *J. Exp. Bot.* 1989. Vol. 40. P. 1185.
15. *Fisahn J., Mikschl E., Hansen U.P.* Separate oscillations of the electrogenic pump and of a K-channel in *Nitella* as revealed by simultaneous measurement of membrane potential and of resistance // *J. Exp. Bot.* 1986. Vol. 37. P. 34.
16. *Boels H.D., Hansen U.P.* Light and electrical current stimulate the same feed-back system in *Nitella* // *Plant Cell Physiol.* 1982. Vol. 23. P. 343.

17. Sanders D., Smith F.A., Walker N.A. Proton/chloride cotransport in Chara: mechanism of enhanced influx after rapid external acidification // *Planta*. 1985. Vol. 163. P. 411.
18. Shartzner S.A., Fisahn J., Lucas W.J. Simultaneous measurements of extracellular current and membrane potential of *Chara corallina* internodal cells during light-dependent modulation of H⁺ transport // *C. R. Acad. Sci. Paris*. 1992. Vol. 315, Serie III. P. 247.
19. Плюснина Т.Ю., Лаврова А.И., Ризниченко Г.Ю., Рубин А.Б. Моделирование неоднородного распределения и колебаний трансмембранного потенциала и рН вблизи внешней стороны мембраны клетки водоросли *Chara corallina* // *Биофизика*. 2005. Т. 50, № 3. С. 492.
20. Лаврова А.И., Плюснина Т.Ю., Булычев А.А., Ризниченко Г.Ю., Рубин А.Б. Моделирование гистерезиса в распределении рН вблизи мембраны клетки водоросли *Chara corallina* // *Биофизика*. 2005. Т. 50, № 6. С. 1088.
21. Felle H., Bertl A. Light-induced cytoplasmic pH changes and their interrelation to the activity of the electrogenic proton pump in *Riccia fluitans* // *BBA*. 1986. Vol. 848. P. 176.
22. Lucas W.J. Plasmalemma transport HCO₃⁻ and OH⁻ in *Chara corallina*: non-antiporter systems // *J. Exp. Bot.* 1976. Vol. 27. P. 19.
23. Walker N.A. Smith F.A. Circulating electric current between acid and alkaline zones associated with HCO₃⁻ assimilation in *Chara* // *J. Exp. Bot.* 1977. Vol. 28. P. 1190.

Московский государственный
университет им. М.В. Ломоносова

Поступила в редакцию 27.06.2006

TRANSIENT STATES AND SELF-OSCILLATING MODES ALONG THE CELL MEMBRANE OF ALGAE *CHARA CORALLINA*

A.I. Lavrova, T.Yu. Plusnina, G.Yu. Riznichenko

Mathematical model of ion fluxes across the cell membrane of algae *Chara corallina* is developed. The transient processes and self-oscillating modes connected with potential-dependent transport of protons across the membrane are considered. Important role of these processes for plant cell is discussed.



Лаврова Анастасия Игоревна – родилась в г. Люберцы Московской области (1978), окончила биологический факультет (2001, кафедра биофизики) МГУ им. М.В. Ломоносова. Защитила диссертацию на соискание ученой степени кандидата биологических наук в МГУ (2005) в области математического моделирования диссипативных структур в примембранном слое растительной клетки. В настоящее время является научным сотрудником кафедры биофизики биологического факультета МГУ им. М.В. Ломоносова. Область научных интересов: математическое моделирование в иммунологии и метаболических процессов, мембранные процессы и электрофизиология клетки, диссипативные структуры в биологических системах.



Плюснина Татьяна Юрьевна – родилась в Усть-Каменогорске (1966), окончила биологический факультет (1991) и факультет прикладной математики (1995) МГУ им. М.В. Ломоносова. Защитила диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук в МГУ (1995) в области моделирования мембранного транспорта и действия слабых электромагнитных полей на процессы мембранного переноса. В настоящее время является доцентом кафедры биофизики биологического факультета МГУ им. М.В. Ломоносова. Область научных интересов связана с изучением электрофизиологических явлений на клеточной мембране и их взаимосвязи с метаболическими процессами внутри клетки. Опубликовала 20 научных статей по направлениям, указанным выше.



Ризниченко Галина Юрьевна – родилась в Москве (1946), окончила физический факультет Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова (1972). После окончания работает на кафедре биофизики биологического факультета МГУ. Защитила диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук (1978) и доктора физико-математических наук (1990) в области математического моделирования первичных процессов фотосинтеза. Автор учебника «Лекции по математическим моделям в биологии» (2002), монографий «Математические модели первичных процессов фотосинтеза» (1991) и «Математические модели в биофизике и экологии» (2003); учебных пособий: «Кинетика биологических процессов» (1978, 1987; в соавторстве с Н.Ф. Пытьевой, А.Б. Рубиным), «Математические модели биологических продукционных процессов» (1993; в соавторстве с А.Б. Рубиным), «Биофизическая динамика продукционных процессов» (2004; в соавторстве с А.Б. Рубиным), более 80 научных статей по математическому моделированию субклеточных процессов. Председатель и сопредседатель оргкомитетов более 40 междисциплинарных конференций по сериям «Математика. Компьютер. Образование», «Нелинейный мир», «Математика. Информатика. Экология».



СКЕЙЛИНГ В ДИНАМИКЕ ОСЦИЛЛЯТОРА ДУФФИНГА ПОД ДЕЙСТВИЕМ ИМПУЛЬСОВ СО СЛУЧАЙНОЙ МОДУЛЯЦИЕЙ ПАРАМЕТРОВ ВОЗДЕЙСТВИЯ

А.П. Кузнецов, Ю.В. Седова

В работе рассмотрен нелинейный осциллятор Дуффинга под импульсным возбуждением с двумя способами введения случайной имитирующей шум добавки – посредством модуляции амплитуды и периода следования импульсов. Продемонстрировано свойство скейлинга как по сценарию Фейгенбаума, так и в «трикритическом» случае.

Введение

Известно несколько основных сценариев перехода нелинейных систем от регулярного поведения к хаосу. Все они допускают описание с помощью метода ренормгруппы и поэтому обладают свойством универсальности относительно конкретного вида системы [1]. Одним из следствий возможности ренормгруппового подхода является свойство скейлинга – воспроизводимость во все более мелких и мелких масштабах характеристик динамики в окрестности критической точки перехода к хаосу. Свойство скейлинга можно наблюдать в устройстве бифуркационного дерева, на графике показателя Ляпунова, в структуре аттрактора и др. [1]. В реальных системах, однако, всегда присутствуют шумы, которые могут значительно повлиять на картину перехода. Так, в случае удвоения периода шумы «размывают» тонкую структуру бифуркационного дерева, в результате чего может наблюдаться лишь конечное число удвоений периода (тем большее, чем меньше уровень шума). При этом известные иллюстрации скейлинга, вообще говоря, становятся невозможными, поскольку предполагают сколь угодно близкое приближение к критической точке. Замечательно, однако, что метод ренормгруппы может быть обобщен и на случай систем с шумом (например, [2–7]). Благодаря этому удастся распространить на стохастические системы и свойство скейлинга. Для этого при переходе с одного уровня иерархии на другой следует перенормировать амплитуду шума на новые универсальные константы. Для ряда классов универсальности такие постоянные установлены [2, 5–8]. В то же время представляется важным дать соответствующие иллюстрации не только для формальных «канонических» моделей, но и для отображений, полученных «из первых принципов» для физических систем, когда установлена связь параметров с параметрами исходной физической системы. Кроме того, было бы интересно

представить иллюстрации свойства самоподобия в системах с удвоениями периода под действием шума на плоскости существенных параметров системы. В работе в этом контексте изучается нелинейный осциллятор Дуффинга с периодическим импульсным воздействием. Шум вносится в систему как случайная модуляция либо амплитуды импульсов, либо промежутков времени между соседними импульсами. Это позволяет получить соответствующие одномерные отображения аналитически.

Нами рассмотрены два класса универсальности, связанные с удвоениями периода. Первый является классическим фейгенбаумовским типом поведения и характеризуется, наряду с константами Фейгенбаума $\delta_F = 4.669201609\dots$ и $\alpha_F = -2.502907875\dots$, константой шума $\mu_F = 6.61903\dots$, найденной в работах Кратчфилда и др. [2] и Шраймана и др. [8]. Второй тип поведения предполагает обобщение сценария Фейгенбаума на случай двухпараметрических отображений. Он характеризуется универсальным самоподобным устройством плоскости параметров системы в окрестности концевых точек фейгенбаумовских линий – трикритических точек. Это устройство для систем без шума с помощью карт динамических режимов обсуждалось в [9]. Продемонстрированы закономерности скейлинга с помощью исследования двумерной картины распределения показателя Ляпунова как в системах без шума, так и в системах с шумом. Указаны соответствующие универсальные константы: $\delta_T = 7.284686217\dots$, $\alpha_T = -1.69030297\dots$ и константа шума $\mu_T = 8.2439\dots$

1. Исследуемая система

Итак, рассмотрим нелинейный осциллятор Дуффинга с периодическим импульсным воздействием. Предположим, что действие импульсов занимает очень короткое время, так что за это время координата осциллятора практически не успевает измениться, а скорость получает добавку, определяемую амплитудой импульса. Поведение такого осциллятора описывается следующим дифференциальным уравнением:

$$\ddot{X} + \gamma\dot{X} + \omega_0^2 X + \beta X^3 = \sum_n C\delta(t - nT), \quad (1)$$

где X – динамическая переменная, γ – коэффициент затухания, ω_0 – собственная частота, β – параметр нелинейности, T – период следования внешних импульсов, C – их амплитуда.

В промежутке между импульсами динамика осциллятора является автономной, и в приближении метода медленно меняющихся амплитуд можно получить следующие зависимости координаты X и скорости V от времени t (подробный вывод см. в [10, 11]):

$$X(t) = R_n e^{-\gamma t/2} \cos\left(\omega_0 t + \frac{3\beta^2}{8\omega_0} R_n^2 \frac{1 - e^{-\gamma t}}{\gamma} + \varphi_n\right), \quad (2)$$

$$V(t) = -\omega_0 R_n e^{-\gamma t/2} \sin\left(\omega_0 t + \frac{3\beta^2}{8\omega_0} R_n^2 \frac{1 - e^{-\gamma t}}{\gamma} + \varphi_n\right). \quad (3)$$

Здесь R_n и φ_n – «начальные» амплитуда и фаза колебаний сразу после n -го импульса. После очередного, $(n+1)$ -го импульса скорость в соответствии с (1) получает

добавку C . Используя это обстоятельство, можно аналитически прийти к отображению Икеды¹ [10, 11]:

$$Z_{n+1} = A + BZ_n \exp \left(i \left(|Z_n|^2 + \psi \right) \right). \quad (4)$$

Здесь комплексная переменная Z выражается через координату и скорость осциллятора с помощью соотношения

$$Z = \left(iX + \frac{V}{\omega_0} \right) \sqrt{\frac{3\beta}{8\omega_0} \left(\frac{1 - e^{-\gamma T}}{\gamma} \right)}. \quad (5)$$

Параметры A , B и ψ определяются через параметры осциллятора следующим образом:

$$\begin{aligned} A &= \frac{C}{\omega_0} \sqrt{\frac{3\beta}{8\omega_0} \left(\frac{1 - e^{-\gamma T}}{\gamma} \right)}, \\ B &= e^{-\gamma T/2}, \\ \psi &= \omega_0 T. \end{aligned} \quad (6)$$

Пусть теперь амплитуды импульсов промодулированы случайным образом так, что ΔC_n – случайная добавка к амплитуде n -го импульса:

$$\ddot{X} + \gamma \dot{X} + \omega_0^2 X + \beta X^3 = \sum (C + \Delta C_n) \delta(t - nT). \quad (7)$$

Для системы (7) под действием импульсов со случайной амплитудой по аналогии с (4) без труда получаем следующее отображение:

$$Z_{n+1} = A \left(1 + \frac{\Delta C_n}{C} \right) + BZ_n \exp \left(i \left(|Z_n|^2 + \psi \right) \right). \quad (8)$$

Можно рассмотреть и другой способ введения флуктуаций в рассматриваемую систему. Считаем, что длительность промежутков времени между импульсами $T + \Delta T_n$ слегка колеблется около среднего периода T (ΔT_n – малая случайная величина), и что параметр γ много меньше собственной частоты ω_0 , что естественно для осциллятора. Тогда нетрудно видеть из (2), (3), что по истечении времени $T + \Delta T_n$ случайной добавкой к амплитуде осциллятора можно пренебречь по сравнению с добавкой к его полной фазе. Это значит, что мы приходим к следующей форме отображения Икеды со случайным воздействием

$$Z_{n+1} = A + BZ_n \exp \left(i \left(|Z_n|^2 + \psi + \omega_0 \Delta T_n \right) \right). \quad (9)$$

Отображения (8) и (9) пока еще двумерные (поскольку Z – комплексная переменная, содержащая действительную и мнимую части). Известно, однако, что в широкой области значений параметров (тем точнее, чем больше A) отображение Икеды

¹Подробное обсуждение вопроса о переходе от исходной дифференциальной системы (1) к двумерному отображению Икеды см. в [10].

допускает описание с помощью одномерного отображения [9–11]. Прделаем соответствующую процедуру для отображения (9). Вслед за [10–12] положим

$$Z = A + \tilde{Z}, \quad (10)$$

где \tilde{Z} - малая добавка. Подставим это выражение в левую и правую части уравнения (9) с учетом малости \tilde{Z} :

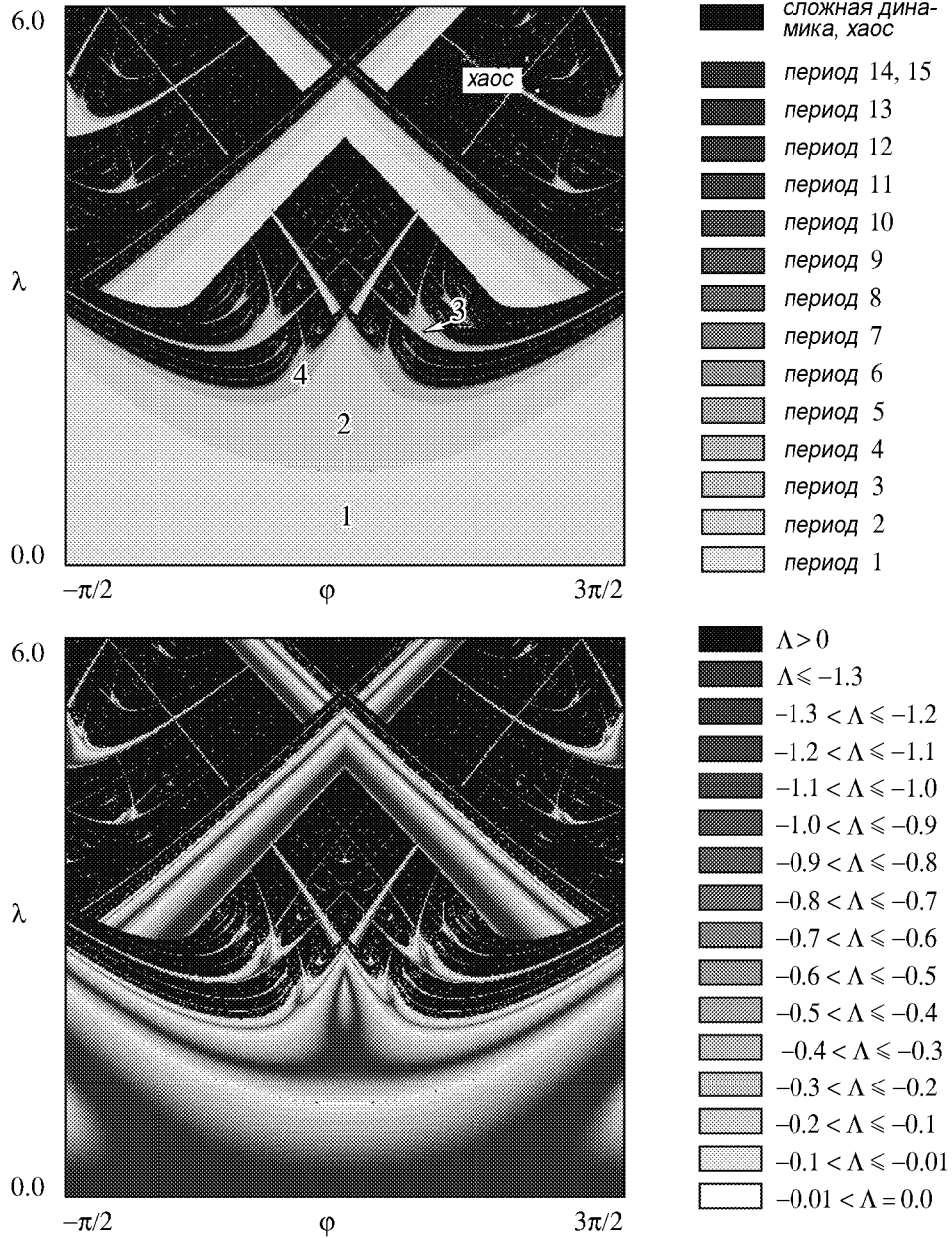


Рис. 1. Карта режимов (а) и карта показателя Ляпунова Λ (б), построенные для отображения косинуса (12) в отсутствие шума. Цифрами на фрагменте (а) обозначены области существования циклов основных периодов

$$\tilde{Z}_{n+1} = BA \exp \left(i \left(A^2 + 2ARe\tilde{Z}_n + \psi + \omega_0\Delta T_n \right) \right). \quad (11)$$

Положив далее $X_n = 2ARe\tilde{Z}_n + A^2 + \psi$, приходим к следующему одномерному отображению с шумовым воздействием:

$$X_{n+1} = \lambda \cos(X_n + \omega_0\Delta T_n) + \varphi, \quad (12)$$

где введены новые параметры

$$\lambda = 2A^2B, \quad \varphi = A^2 + \psi. \quad (13)$$

Далее мы полагаем, что $\omega_0\Delta T_n = \varepsilon\xi_n$, где ε - безразмерная амплитуда модуляции периода внешнего воздействия, а ξ_n - случайная величина.

Карты динамических режимов и показателя Ляпунова для отображения косинуса (12) при отсутствии внешнего шумового воздействия приведены на рис. 1. Диапазон изменения параметра φ выбран $(-\pi/2, 3\pi/2)$ в силу 2π -периодичности косинуса.

2. Однопараметрический переход к хаосу и скейлинг

Отображение косинуса (12) в отсутствие флуктуаций $X_{n+1} = \lambda \cos X_n + \varphi$ имеет множество квадратичных экстремумов. Поэтому для него характерным является сценарий перехода к хаосу через удвоения периода. При пересечении границы хаоса по типичному маршруту на плоскости параметров (λ, φ) будет наблюдаться классический каскад удвоений, характеризующийся закономерностями Фейгенбаума. Например, при $\varphi = 0$ фейгенбаумовский каскад накапливается к критической точке $\lambda = 1.974133\dots$ Иллюстрация скейлинга в системе с шумом на графике бифуркационного дерева дана на рис. 2. Самоподобие иллюстрируется серией рисунков, причем каждый последующий рисунок серии представляет собой увеличенный фрагмент предыдущего. При этом масштаб по оси динамической переменной X

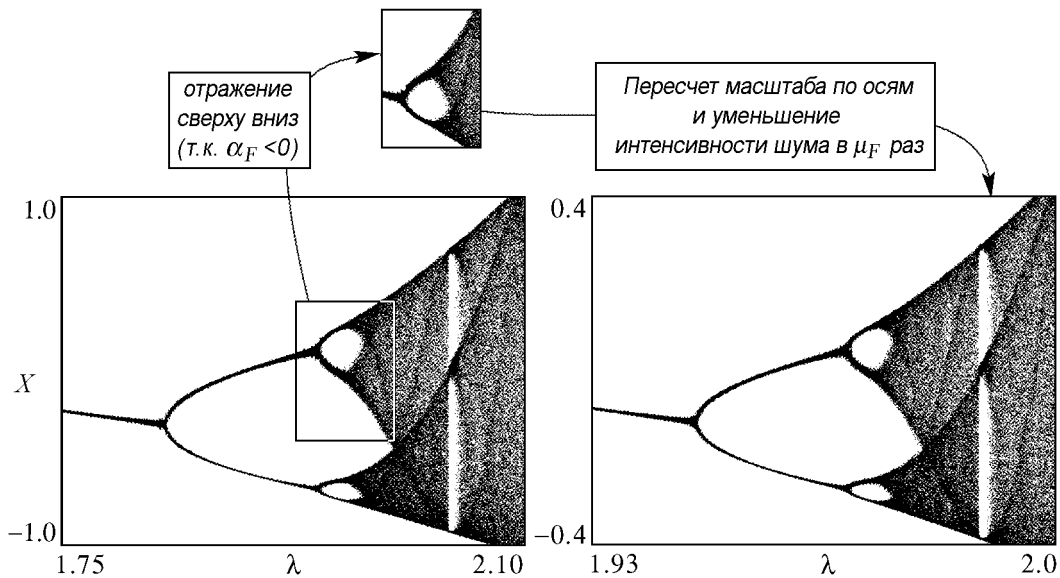


Рис. 2. Иллюстрация свойства фейгенбаумовского скейлинга на бифуркационном дереве отображения косинуса. Исходная интенсивность шума равна 0.003

пересчитывается в α_F раз относительно точки $X=0$ – одного из экстремумов отображения косинуса, а по оси управляющего параметра λ – в δ_F раз относительно критической точки $1.974133\dots$ В соответствии с изложенным во введении подходом, при переходе на более глубокий уровень иерархической картины исходная амплитуда шума уменьшается на константу Кратчфилда $\mu_F = 6.61903\dots$

Однако отображение (12) характеризуется двумя параметрами – λ и φ , поэтому на плоскости параметров можно наблюдать и трикритические точки. Как мы уже отмечали во введении, они являются для фейгенбаумовских линий «атрибутом» отображений, имеющих два квадратичных экстремума и более. В эти точки можно прийти также, наблюдая каскады удвоений вдоль линий, на которых максимум отображается точно в минимум [1]. Причина нефейгенбаумовского характера сходимости в этом случае состоит в том, что двукратно проитерированное отображение при таком условии имеет не квадратичный экстремум, а экстремум четвертой степени. Так, для отображения косинуса (12) при условии $\lambda = \pi - \varphi$ квадратичный максимум $X=0$ отображается точно в квадратичный минимум $X = \pi$. Таким образом, вдоль линии $\lambda = \pi - \varphi$ на плоскости параметров (λ, φ) должен наблюдаться нефейгенбаумовский каскад удвоений периода, накапливающийся к трикритической точке $\lambda_T = 2.18603861533\dots$, $\varphi_T = 0.9555540392\dots$ [9]. Рис. 3 представляет иллюстрацию скейлинга на графике бифуркационного дерева отображения (12) с характерными для трикритичности константами $\delta_T = 7.284686217\dots$ вдоль оси управляющего параметра и $\alpha_T = -1.6903029714\dots$ вдоль оси динамической переменной X . При переходе от одного уровня удвоений к другому величина ε уменьшается в $\mu_T = 8.2439\dots$ раз [13]. Итак, можно видеть, что скейлинг в системе с шумом хорошо выполняется, что свидетельствует об универсальности свойства скейлинга относительно конкретного вида отображения с перенормировкой уровня шума как для фейгенбаумовской, так и для трикритической динамики.

Отдельно стоит упомянуть о том, что были проведены исследования по чувствительности полученных результатов к различным видам шумового воздействия. Для этого был использован бинарный шум, шум с равномерным распределением и шум с гауссовым распределением. Как оказалось, во всех случаях свойство самоподобия выполняется, что говорит об универсальности свойства скейлинга и по отношению к виду шума. Для иллюстрации результатов данной работы для определенности было выбрано шумовое воздействие с равномерным распределением.

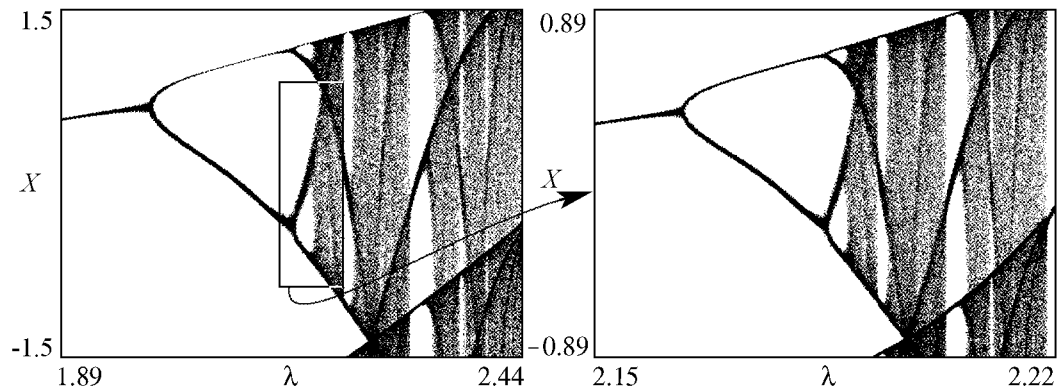


Рис. 3. «Трикритический» скейлинг на бифуркационном дереве отображения косинуса (12) в присутствии шума с исходной амплитудой 0.01

3. Двухпараметрический переход к хаосу и скейлинг

Перейдем теперь к двухпараметрическому анализу. Для систем без шума он предполагает либо анализ бифуркаций (построение бифуркационных линий на плоскости параметров), либо анализ карт динамических режимов. Для систем с шумом и тот и другой подходы невозможны. Поэтому используем построение карт показателя Ляпунова или «ляпуновских пространств» [14–17]. Для построения такой карты в каждой точке пространства параметров значение показателя Ляпунова Λ вычисляется и кодируется в соответствии с этим в градациях серого: значению Λ , близкому к нулю, ставится в соответствие белый цвет, а отрицательным значениям – оттенок тем более темный, чем больше Λ по модулю. Белым цветом обозначены также точки, в которых расходится итерационный процесс. Положительному показателю Ляпунова соответствует черный цвет. Семейство карт показателя Ляпунова отображения (12) при различных значениях ε показано на рис. 4. Пределы изменения φ лежат в границах от $\pi/2$ до π , параметра λ – от 1.5 до 3.5.

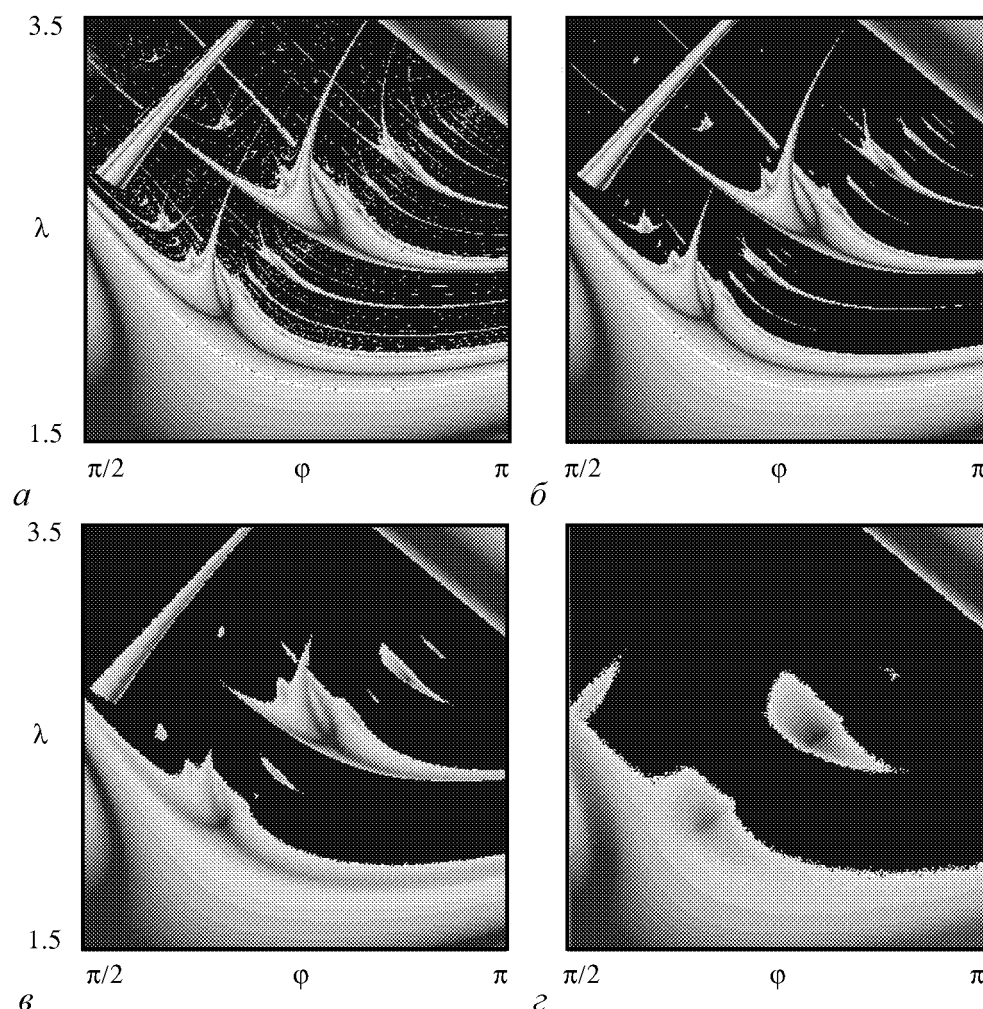


Рис. 4. Семейство карт ляпуновского показателя отображения (12) для различных значений амплитуды шума $\varepsilon = 0.005$ (а), 0.01 (б), 0.05 (в) и 0.2 (г)

Случаю достаточно малого шума ε (рис. 4, *a*) соответствует сравнительно четкая структура «ляпуновского пространства»: различаются границы между определенными значениями показателя Ляпунова; резко выделяются области с нулевым Λ ; в области хаоса хорошо видны участки, соответствующие периодическим режимам. Шум «средней» интенсивности приводит к исчезновению некоторых регулярных режимов в области хаоса, хотя и сохраняет вид карты в целом (рис. 4, *б*, *в*). При дальнейшем увеличении амплитуды шума наблюдается почти полное исчезновение регулярных режимов в области хаоса, структура карты размыта, на всей плоскости происходит увеличение значений показателя Ляпунова (рис. 4, *з*).

Представленные карты характеризуются тонкой и сложной организацией. Они содержат множество мелких (в отсутствие шума – сколь угодно мелких) деталей. Наиболее представительными в этом отношении являются трикритические точки, в окрестности которых плоскость параметров характеризуется иерархической организацией, подчиняющейся свойству самоподобия. Его иллюстрация требует, однако, введения на плоскости параметров специальной (скейлинговой) системы координат. Чтобы опираться на уже полученные ранее результаты, еще несколько упростим отображение (12). Для этого положим

$$X_n = \pi/2 + y_n - \varepsilon \xi_n. \quad (14)$$

В результате получим

$$y_{n+1} = -\lambda \sin y_n + \varphi - \pi/2 + \varepsilon \xi_n. \quad (15)$$

Разложим функцию синуса в ряд до кубического члена включительно и введем новую переменную и параметры в соответствии с соотношениями

$$X = y\sqrt{\lambda/6}, \quad a = (\varphi - \pi/2)\sqrt{\lambda/6}, \quad b = \lambda,$$

а амплитуду шума отнормируем на фактор $\sqrt{\lambda/6}$. Тогда приходим к отображению

$$X_{n+1} = a - bX_n + X_n^3 + \varepsilon \xi_n. \quad (16)$$

Ляпуновская карта этого отображения представлена слева на рис. 5. Можно видеть, что сделанные нами приближения несущественны с точки зрения вида карты. (Это же относится и к характеристикам трикритической динамики, поскольку она является «грубым» феноменом в системе с двумя квадратичными экстремумами. Переход же от отображения «косинуса» (12) к кубическому отображению (16) лишь несколько сдвигает координаты двух таких экстремумов.)

Иллюстрация свойства скейлинга на плоскости параметров для карты показателя Ляпунова отображения (16) приведена на рис. 5. На большом левом фрагменте по осям координат отложены параметры исходного отображения (a, b); выделенный параллелепипед, в центре которого располагается трикритическая точка, образован координатными линиями $C_1 = \pm 0.15$ и $C_2 = \pm 0.25$. Здесь (C_1, C_2) – специальные координаты, в которые необходимо перейти для наблюдения самоподобия. Связь между параметрами исходного отображения (a, b) и «скейлинговыми координатами» (C_1, C_2) определяется следующим образом [18, 19]:

$$a - a_T = 0.5998610C_1 - 0.2192807C_2, \quad b - b_T = C_1 + C_2. \quad (17)$$

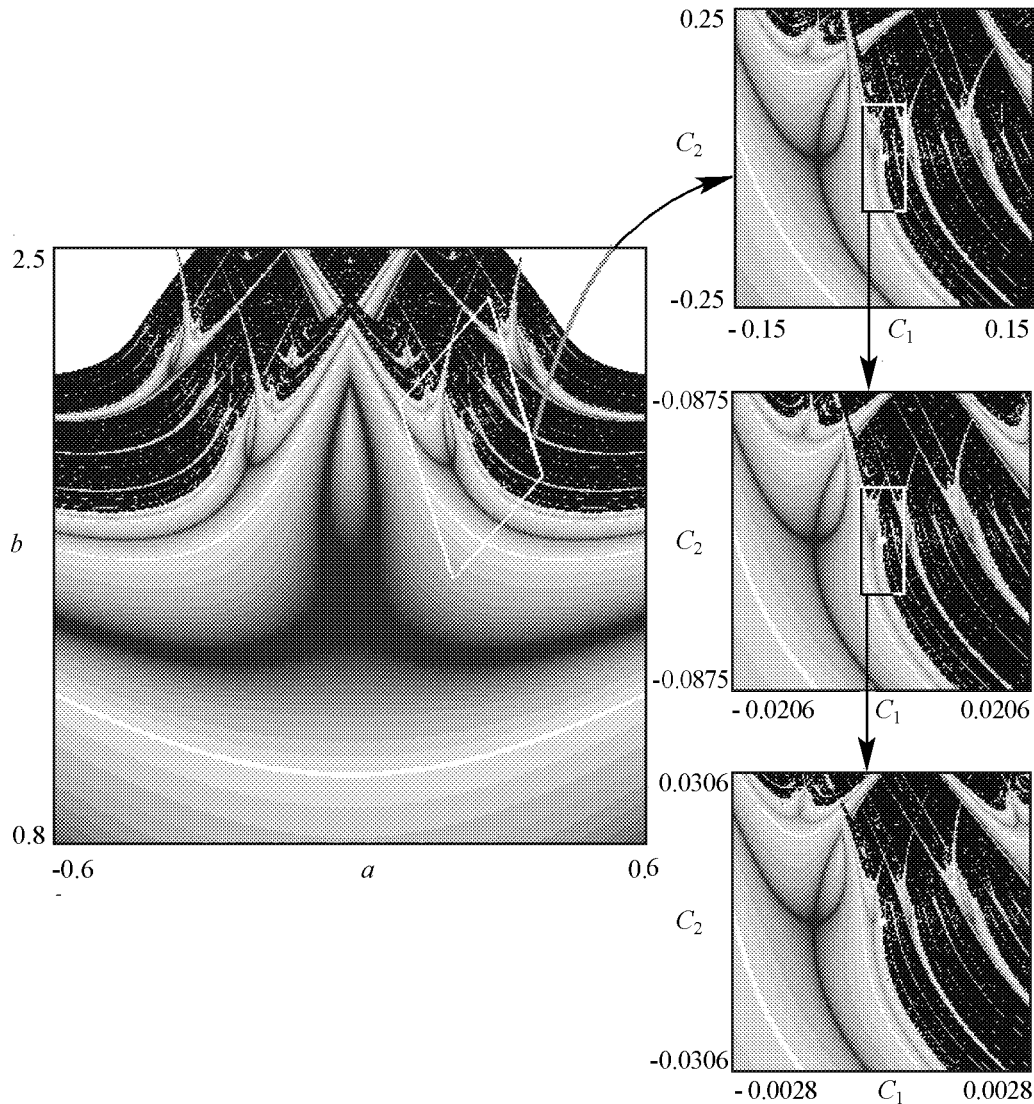


Рис. 5. Скейлинг отображения (16) на карте показателя Ляпунова в отсутствие шума

Попавшая внутрь упомянутого четырехугольника часть плоскости параметров показана отдельно на верхнем правом фрагменте уже в «скейлинговых координатах», а затем дважды воспроизведена с пересчетом масштаба по оси C_1 в δ_T раз, а по оси C_2 в α_T^2 раз относительно центра скейлинга – трикритической точки. Для наблюдения скейлинга при переходе от уровня к уровню значение показателя Ляпунова пересчитывалось в 2 раза по сравнению с предыдущим фрагментом, в соответствии с этим изменялась цветовая гамма.

Для наблюдения скейлинговых свойств кубического отображения с шумом (16) на карте показателя Ляпунова надо совершить тот же самый пересчет, как и в случае без шума, плюс ко всему необходимо уменьшать исходную амплитуду шума на каждом новом фрагменте по сравнению с предыдущим в $\mu_T = 8.2439\dots$ раз. Соответствующие иллюстрации для исходной интенсивности шума $\varepsilon = 0.02$ приведены на рис. 6. Видно, что каждый фрагмент с высокой точностью повторяет структуру предыдущего. Это и является иллюстрацией двухпараметрического скейлинга в системе с шумом.

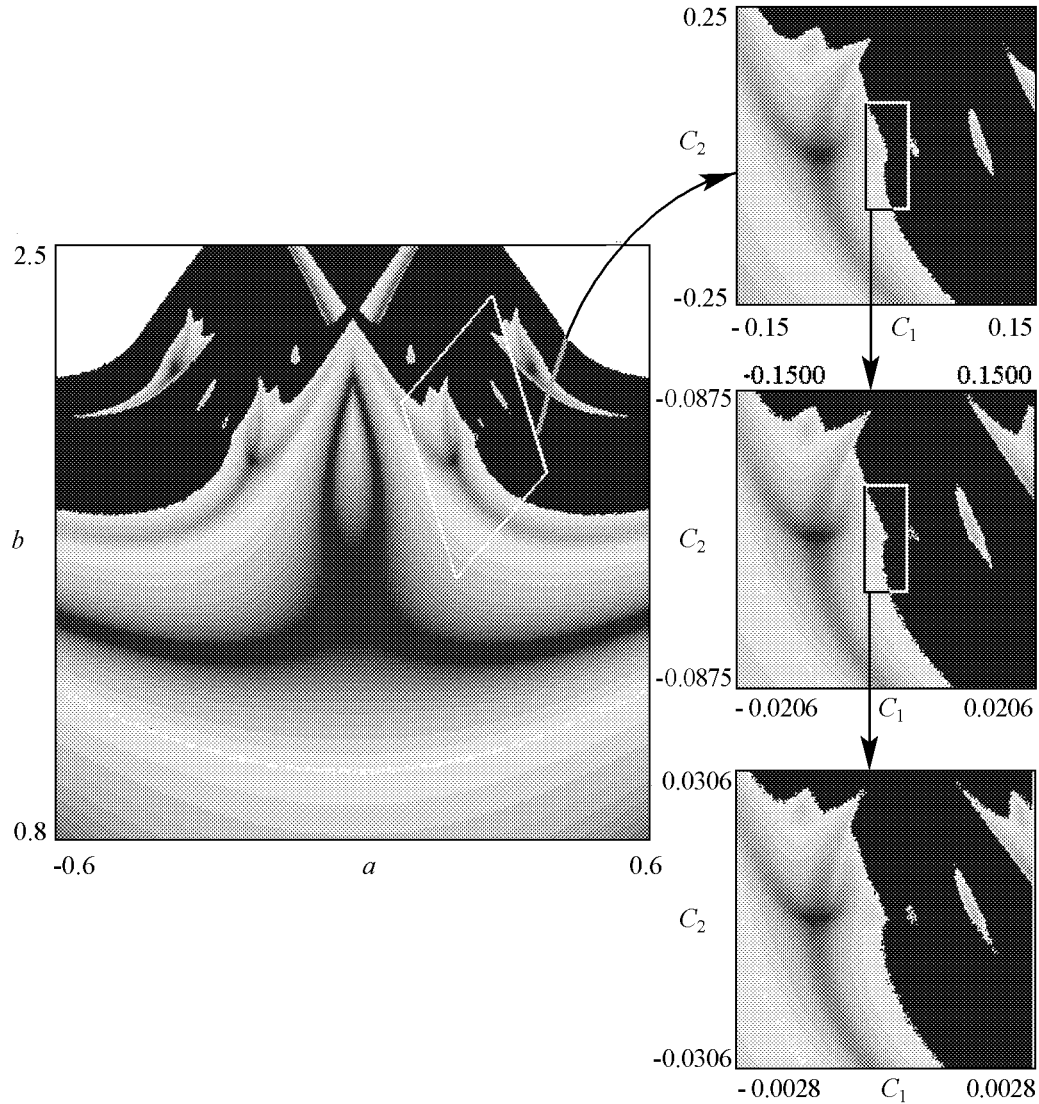


Рис. 6. Скейлинг кубического отображения (16) на карте показателя Ляпунова в присутствии шума с исходной интенсивностью $\varepsilon = 0.02$

Заключение

Таким образом, нелинейный осциллятор Дуффинга с импульсным возбуждением со случайно модулированной амплитудой или периодом следования импульсов является удобной моделью для изучения критических явлений при переходе порядок – хаос в системах с шумом. Полученные для этой системы отображения демонстрируют как однопараметрический скейлинг по Фейгенбауму, но с дополнительной константой шума $\mu_F = 6.61903\dots$, так и скейлинг на плоскости параметров (на карте показателей Ляпунова) с константой шума $\mu_T = 8.2439\dots$

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 06-02-16619) Фонда содействия отечественной науке, аналитической ведомственной программы Минобрнауки РФ и CRDF (CRDF BRHE REC-006 SR-006-X1/BF5M06 Y3-P-06-07) и гранта Президента РФ (МК-4162.2006.2).

Библиографический список

1. Кузнецов С.П. Динамический хаос (курс лекций). 2-е изд., испр. и доп. М.: Физматлит. 2006. 356 с.
2. Crutchfield J.P., Nauenberg M., Rudnik J. Scaling for external noise at the onset of chaos // Phys. Rev. Lett. 1981. Vol. 46, № 14. P. 933.
3. Hirsch J.E., Nauenberg M., Scalapino D.J. Intermittency in the presence of noise: A renormalization group formulation // Phys. Lett. A. 1982. Vol. 87. P. 391.
4. Györgyi G., Tishby N. Scaling in stochastic Hamiltonian systems: A renormalization approach // Phys. Rev. Lett. 1987. Vol. 58, № 6. P. 527.
5. Hamm A., Graham R. Scaling for small random perturbations of golden critical circle maps // Phys. Rev. A. 1992. Vol. 46, № 10. P. 6323.
6. Kapustina J.V., Kuznetsov A.P., Kuznetsov S.P., Mosekilde E. Scaling properties of bicritical dynamics in unidirectionally coupled period-doubling systems in presence of noise // Phys. Rev. E. 2001. Vol. 64, 066207.
7. Isaeva O.B., Kuznetsov S.P., Osbaldestin A.H. Effect of noise on the dynamics of a complex map at the period-tripling accumulation point // Phys. Rev. E. 2004. Vol. 69, 036216.
8. Shraiman B., Wayne C.E., Martin P.C. Scaling theory for noisy period-doubling transitions to chaos // Phys. Rev. Lett. 1981. Vol. 46, №14. P. 935.
9. Kuznetsov A.P., Kuznetsov S.P., Turukina L.V., Mosekilde E. Two-parameter analysis of the scaling behavior at the onset of chaos: Tricritical and pseudo-tricritical points // Physica A. 2001. Vol. 300, № 3-4. P. 367.
10. Kuznetsov A.P., Turukina L.V., Mosekilde E. Dynamical systems of different classes as models of the kicked nonlinear oscillators // Int. J. of Bifurcation and Chaos. 2001. Vol. 11, №4. P. 1065.
11. Кузнецов А.П., Тюрюкина Л.В. Динамические системы разных классов как модели нелинейного осциллятора с импульсным воздействием // Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2000. Том 8, № 2. С. 31-42.
12. Carr Y., Eilbech Y.C. One-dimensional approximations for a quadratic Ikeda map // Phys. Lett. A. 1984. Vol. 104. P. 59.
13. Кузнецов А.П., Капустина Ю.В. Свойства скейлинга при переходе к хаосу в модельных отображениях с шумом // Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2000. Том 8, № 6. С. 78.
14. Marcus M., Hess B. Lyapunov exponents of the logistic map with periodic forcing // Computers & Graphics. 1989. Vol. 13, № 4. P. 553.
15. Rössler J., Kiwi M., Hess B., Marcus M. Modulated nonlinear processes and a novel mechanism to induce chaos // Phys. Rev. A. 1989. Vol. 39, № 11. P. 5954.
16. Marcus M. Chaos in maps with continuous and discontinuous maxima // Computers in physics. 1990. September/October. P. 481.
17. Bastos de Figueireido J.C., Malta C.P. Lyapunov graph for two-parameter map: Application to the circle map // Int. J. of Bifurcation and Chaos. 1998. Vol. 8, № 2. P. 281.

18. *Kuznetsov A.P., Kuznetsov S.P., Sataev I.R.* A variety of period-doubling universality classes in multi-parameter analysis of transition to chaos // *Physica D.* 1997. Vol. 109. P. 91.
19. *Kuznetsov A.P., Kuznetsov S.P., Sataev I.R.* Three-parameter scaling for one-dimensional maps // *Phys. Lett. A.* 1994. Vol. 189. P. 367.

*Саратовский филиал ИРЭ РАН
Саратовский государственный
университет*

*Поступила в редакцию 3.05.2006
После доработки 27.06.2006*

SCALING IN DYNAMICS OF DUFFING OSCILLATOR UNDER IMPULSES INFLUENCE WITH RANDOM MODULATION OF PARAMETERS

A.P. Kuznetsov, J.V. Sedova

In the work nonlinear Duffing oscillator is considered under impulse excitation with two ways of introduction of the random additive term simulating noise, - with help of amplitude modulation and modulation of period of impulses sequence. The scaling properties both in the Feigenbaum scenario and in the tricritical case are shown.

Кузнецов Александр Петрович – родился в 1957 году. Доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник Саратовского филиала Института радиотехники и электроники РАН, профессор Саратовского государственного университета, заведующий базовой кафедрой динамических систем СГУ в СФ ИРЭ РАН. Специалист по нелинейной динамике, теории динамического хаоса и теории критических явлений. Занимается использованием идей теории катастроф и теории бифуркаций, а также развитием концепции сценариев перехода к хаосу применительно к многопараметрическим модельным и физическим нелинейным системам. Соросовский профессор (2000, 2001), научный руководитель студенческой лаборатории «Теоретическая нелинейная динамика» и заочной школы факультета нелинейных процессов. Опубликовал более 100 научных работ. Автор нескольких оригинальных учебных курсов для факультета нелинейных процессов и лицея прикладных наук СГУ, шести учебных пособий и монографии «Нелинейные колебания» (совместно с С.П. Кузнецовым и Н.М. Рыскиным. М.: Физматлит, 2002). Член редколлегии журнала «Империя математики». E-mail: alkuz@sgu.ru; www.sgtnd.tserv.ru



Седова Юлия Викторовна – родилась в 1979 году. Окончила Саратовский государственный университет (2001). Кандидат физико-математических наук (СГУ, 2004), научный сотрудник Саратовского филиала Института радиотехники и электроники РАН. Научные интересы – влияние шума на динамические системы, дискретные отображения, связанные системы, динамический хаос. Автор 11 статей в отечественной и зарубежной печати.



ОСОБЕННОСТИ КАРТИНЫ СИНХРОНИЗАЦИИ ИМПУЛЬСАМИ В СИСТЕМЕ С ТРЕХМЕРНЫМ ФАЗОВЫМ ПРОСТРАНСТВОМ НА ПРИМЕРЕ СИСТЕМЫ РЕССЛЕРА

А.П. Кузнецов, Н.В. Станкевич, Л.В. Тюрюкина

Рассмотрены особенности картины синхронизации в системе, предельный цикл которой вложен в трехмерное фазовое пространство. На примере системы Ресслера под воздействием периодической последовательности δ -функций показано, что картина синхронизации существенно зависит от направления действия внешней силы. Выяснены особенности устройства языков синхронизации.

Введение: краткий обзор и постановка проблемы

Ситуации, когда система с предельным циклом подвержена внешнему периодическому воздействию, широко распространены в радиофизике, электронике, биологии, химии и других областях естествознания [1–7]. С точки зрения теории колебаний и теории динамических систем, это задачи о возникновении квазипериодических движений и явления синхронизации [1–9]. Среди них выделяется класс задач, когда внешнее воздействие носит характер коротких по длительности импульсов. Подобные задачи не только привлекательны с точки зрения приложений, но и существенны для теории колебаний и нелинейной динамики с позиций возможной специфики картины синхронизации. В работах [10–19] такая ситуация была изучена в рамках модели, представляющей собой в автономном режиме простейшее укороченное уравнение с предельным циклом в виде окружности

$$\begin{aligned} \dot{r} &= sr(1 - r^2), \\ \dot{\varphi} &= 1. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь r и φ – амплитуда и фаза колебаний, s – управляющий параметр. Такая система подвергалась импульсному воздействию вдоль оси x . Заменой переменных $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ и $\tan \varphi = \frac{y}{x}$ от системы (1) можно перейти к системе

$$\begin{aligned} \dot{x} &= sx(1 - x^2 - y^2) + C \sum \delta(t - nT), \\ \dot{y} &= x + sy(1 - x^2 - y^2). \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь C и T – амплитуда и период импульсов, $\delta(t)$ – дельта-функция Дирака. В случае, когда изображающая точка в промежутке между импульсами успевает вернуться на предельный цикл, Л. Глассом (L. Glass) для системы (2) получено приближенное отображение для фазы следующего вида:

$$\theta_{n+1} = \arctan\left(\frac{\sin \theta_n + C}{\cos \theta_n}\right) - T, \quad (3)$$

где $\theta_n = -\varphi_n - T$. Дальнейший вклад в изучение систем (2) и (3) внесли сам Гласс [17], Динг (Ding) с соавторами [11–15] и ряд других исследователей, которые показали, что картина синхронизации в рамках этих моделей обладает рядом особенностей. (Удвоения периода внутри языков наблюдаются при уменьшении, а не увеличении амплитуды воздействия, структура «чертовой лестницы» на пороге хаоса иная, чем для стандартного синус-отображения окружности и т.д.) В то же время модель (2) обладает и универсальными чертами, поскольку она может быть применена для различных автоколебательных систем вблизи порога бифуркации Андронова – Хопфа. Например, ее можно получить, рассмотрев задачу о воздействии на осциллятора ван дер Поля периодической последовательностью δ -функций [20]

$$\ddot{x} - (\lambda - x^2)\dot{x} + x = B \sum \delta(t - nT). \quad (4)$$

Здесь x – динамическая переменная, λ – управляющий параметр, T – период следования внешних импульсов, B – их амплитуда. Если же в уравнении (4) учесть нелинейную зависимость фазы колебаний от времени (неизохронность систем), то есть рассмотреть осциллятор ван дер Поля – Дуффинга [21]

$$\ddot{x} - (\lambda - x^2)\dot{x} + x + \beta x^3 = B \sum \delta(t - nT), \quad (5)$$

где β – параметр нелинейности осциллятора, то для этой системы, применяя метод медленно меняющихся амплитуд, можно получить новую разновидность отображения окружности

$$\theta_{n+1} = \arctan\left(\frac{\sin \theta_n + C}{\cos \theta_n}\right) - \Omega - \frac{3}{2}\beta \ln(1 + 2C \sin \theta_n + C^2), \quad (6)$$

где $C = \frac{B}{2\sqrt{\lambda}}$ и $\Omega = T(1 + \frac{3}{2}\beta\mu\lambda)$. Отметим, что отображение (6) в случае нулевой фазовой нелинейности ($\beta = 0$) переходит в отображение Гласса, а в случае большой ($\beta = 1$) – в стандартное синус-отображение окружности [8, 22]

$$\theta_{n+1} = \theta_n + \Omega - \sqrt{1 + 9\beta^2 C \sin \theta_n}. \quad (7)$$

Детальный анализ систем (4) и (5) и ее моделей (2) и (6) дан в [20, 21].

Подчеркнем еще раз, что модели (2) и (6) и результаты их исследования имеют определенную степень универсальности, поскольку фактически касаются исследования системы у порога бифуркации Андронова – Хопфа. При этом воздействующий импульс может быть направлен не только вдоль оси x , а и в любом направлении в двумерном фазовом пространстве, поскольку аттрактором системы является окружность. Для дифференциальных систем (4), (5) с ростом управляющего параметра λ предельный цикл деформируется, но при умеренных λ картина качественно не меняется.

Иная ситуация имеет место в более общем случае, когда мы рассматриваем автоколебательную систему, для которой предельный цикл вложен в трехмерное фазовое пространство. Действительно, пусть реализуется ситуация, когда предельный цикл лежит преимущественно в некоторой плоскости (а это обычно так у порога бифуркации Андронова – Хопфа). В этом случае, действие импульса в любом направлении в этой плоскости должно приводить к одному и тому же результату, качественно близкому к результатам анализа моделей (2), (6). Совершенно иная ситуация возникает, если импульс действует в направлении, перпендикулярном плоскости, в которой лежит предельный цикл. Можно ожидать какую-то иную картину синхронизации, которая, в частности, будет отличаться как от даваемой моделью (2), так и от даваемой стандартным синус-отображением. В настоящей работе эта проблематика исследована на примере трехмерной потоковой системы – системы Ресслера [1-4, 22].

1. Система Ресслера под воздействием периодической последовательности δ -функций, действующих в плоскости, содержащей предельный цикл

Начнем со случая, когда внешнее воздействие – периодическая последовательность δ -функций – действует в плоскости, в которой преимущественно лежит предельный цикл автономной системы Ресслера. Тогда неавтономная система будет описываться следующими уравнениями:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -x - z + A \sum \delta(t - nT), \\ \dot{y} &= x + py, \\ \dot{z} &= q + (x - r)z, \end{aligned} \tag{8}$$

где x, y, z – динамические переменные; p, q, r – параметры системы; A и T – соответственно амплитуда и период внешнего воздействия. Выберем значения параметров p, q , и r такими, чтобы в автономной системе имел место однооборотный предельный цикл. Его большая часть будет лежать в плоскости (x, y) , и лишь небольшая часть – выступать из этой плоскости в направлении оси z . В зависимости от значений параметров высота «выступа» аттрактора автономной системы в направлении оси z может быть разной. Как мы покажем далее, картина синхронизации в неавтономной системе зависит так же и от величины этого «выступа».

Итак, пусть $p = 0.2, q = 0.1, r = 1.5$. В этом случае величина «выступа» аттрактора в направлении оси z $\Delta z \approx 3.5$. Период колебаний в автономной системе в этом случае можно определить численно, и он составляет $T = 5.4368309\dots$

На рис. 1 представлены полученная в результате компьютерного моделирования карта динамических режимов системы (8) на плоскости параметров (амплитуда A – период T внешнего воздействия) и ее увеличенные фрагменты. На этих и на всех последующих картах белым цветом обозначен режим периода 1, светло-серым – режим периода 2 и т.д., черный цвет отвечает хаосу, а область убегания траектории на бесконечность обозначена одним из оттенков серого. (Характер режима определяется в соответствующем сечении Пуанкаре, так что период 1 отвечает однооборотному предельному циклу в трехмерном фазовом пространстве.) Первое

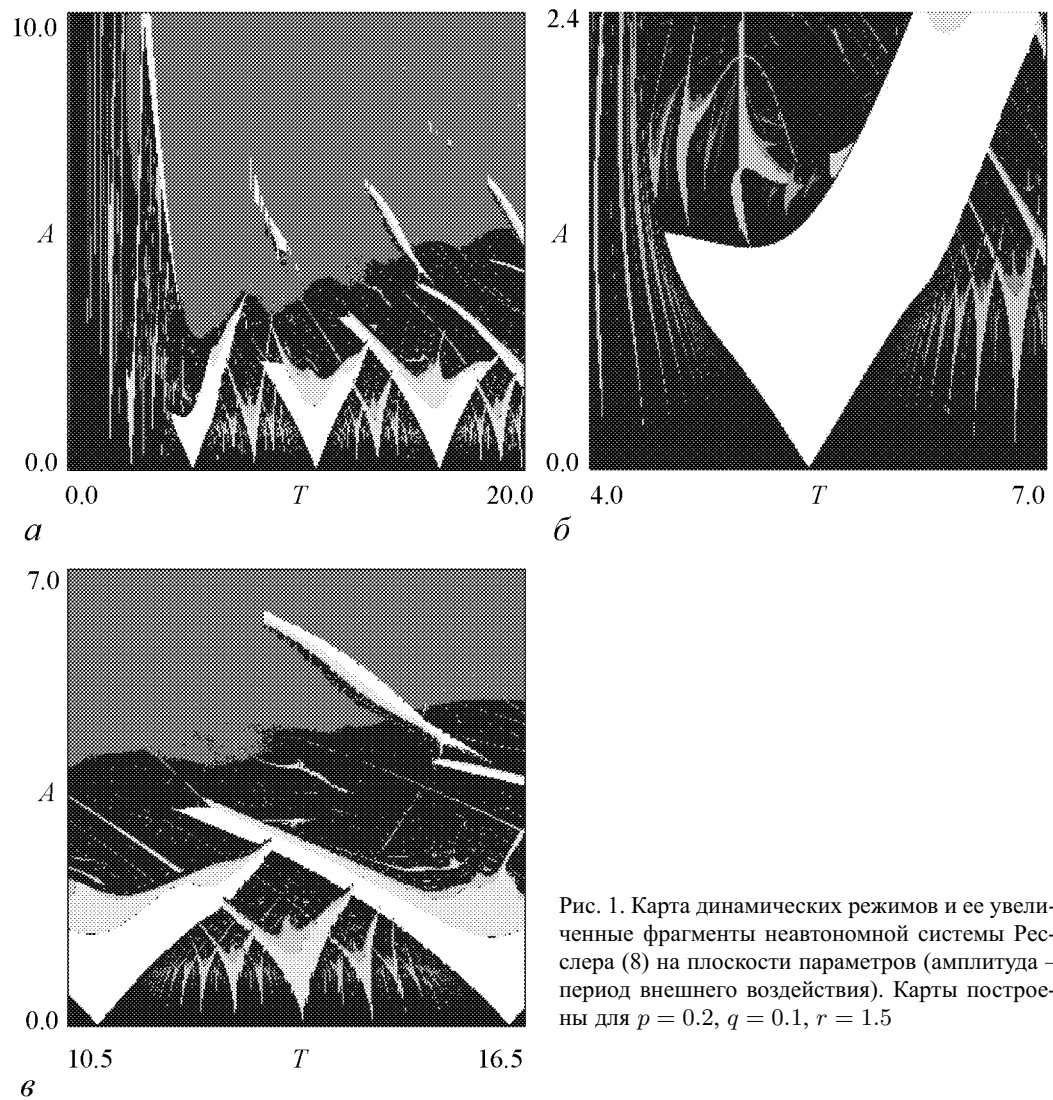


Рис. 1. Карта динамических режимов и ее увеличенные фрагменты неавтономной системы Ресслера (8) на плоскости параметров (амплитуда – период внешнего воздействия). Карты построены для $p = 0.2$, $q = 0.1$, $r = 1.5$

существенное отличие от системы (5) и ее моделей состоит в том, что появляются области, которые отвечают убеганию траектории на бесконечность. Это связано с тем, что предельный цикл автономной системы Ресслера, в отличие от упомянутых моделей, имеет ограниченный бассейн притяжения в трехмерном фазовом пространстве. Поэтому сильный импульс может выбросить изображающую точку за пределы этого бассейна, и она в итоге уйдет на бесконечность.

На карте, представленной на рис. 1, можно видеть достаточно традиционную картину языков Арнольда. Увеличенные фрагменты карты демонстрируют следующие особенности системы. Так при достаточно больших периодах внешней силы (по сравнению с собственным периодом системы $T = 5.43\dots$) картина синхронизации близка к классической, даваемой простейшим одномерным синус-отображением окружности [8, 22] (рис. 1, в). Внутреннее устройство языков синхронизации также традиционное – можно видеть удвоения периода и характерные конфигурации «crossroad area», по терминологии [22]. С другой стороны, при воздействии с пе-

риодом, близким к собственному, основной язык синхронизации хотя и окружен системой классических по форме языков, но внутри устроен иначе (рис. 1, б). Хорошо видна линия вторичной бифуркации Андронова – Хопфа на «вершине» языка и отвечающая ей вторичная система языков синхронизации.

На рис. 2 приведены аттракторы неавтономной системы Ресслера (8). На рис. 2 а, б представлены различные конфигурации аттракторов периода 3, а на рис. 2 в, г аттракторы периода 2 и 4, соответственно. Все перечисленные рисунки относятся к случаю, когда амплитуда внешнего воздействия является весьма существенной. Если же амплитуда воздействия мала, аттрактор неавтономной системы не будет сильно отличаться от автономного случая. Импульс, не сильно изменяя траекторию автономной системы, переместит изображающую точку в фазовом пространстве на небольшую величину. Таким образом, увеличится период режима неавтономной системы, но при этом форма самого аттрактора изменится мало.

Теперь изменим параметры автономной системы так, чтобы величина «выступа» аттрактора в направлении оси z увеличилась: $p = 0.3$, $q = 0.1$, $r = 2.0$. В этом случае $\Delta z \approx 6.7$. На рис. 3 изображены карта динамических режимов и ее увеличенные фрагменты неавтономной системы Ресслера (8) для указанных выше параметров. Видно, что в этом случае, также как и в предыдущем, наблюдаются языки синхронизации, однако, значительно увеличилась область разбегания траекторий, а явления синхронизации и квазипериодические режимы реализуются при гораздо меньших значениях амплитуды внешнего воздействия A (рис. 3, а). Также языки Арнольда несколько деформировались (рис. 3, б, в): они стали более узкими, нарушается их симметрия, и они несколько наклонены в левую сторону.

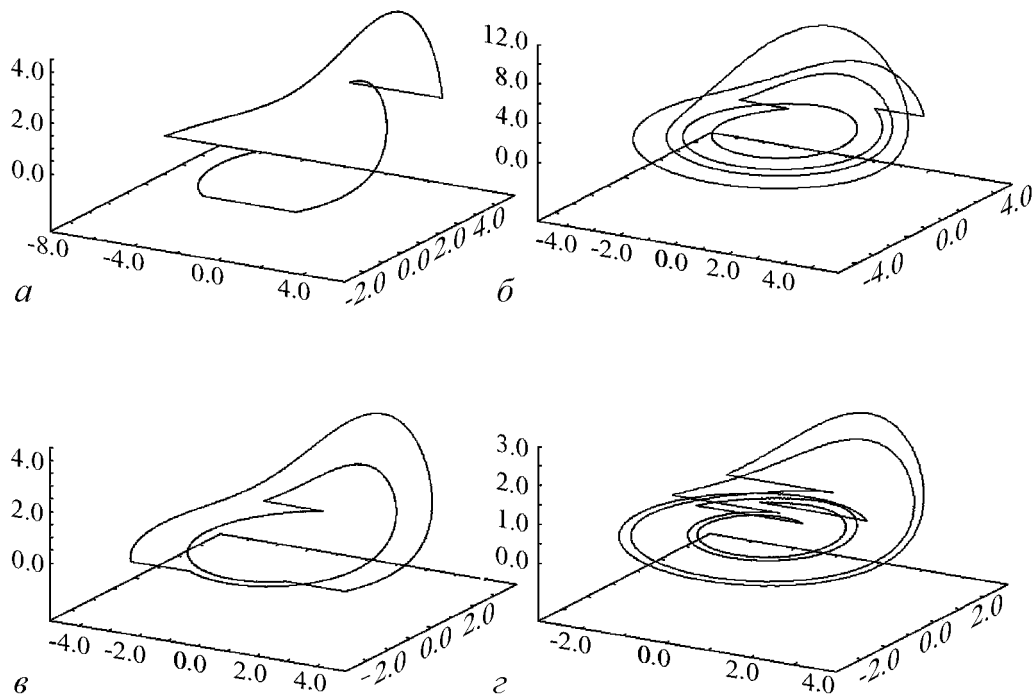


Рис. 2. Аттракторы неавтономной системы Ресслера (8) для различных значений амплитуды A и периода T внешнего воздействия, соответственно: а – 4.4, 1.8; б – 1.8, 10.9; в – 2.0, 3.7; г – 2.5, 7.1

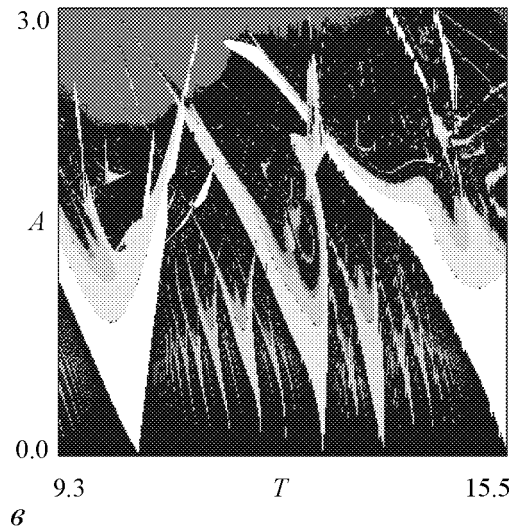
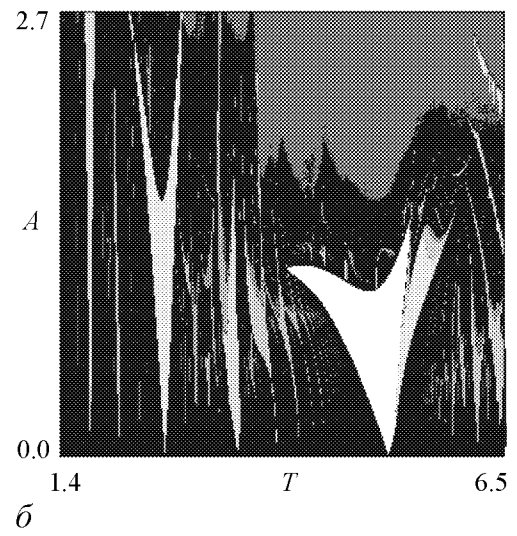
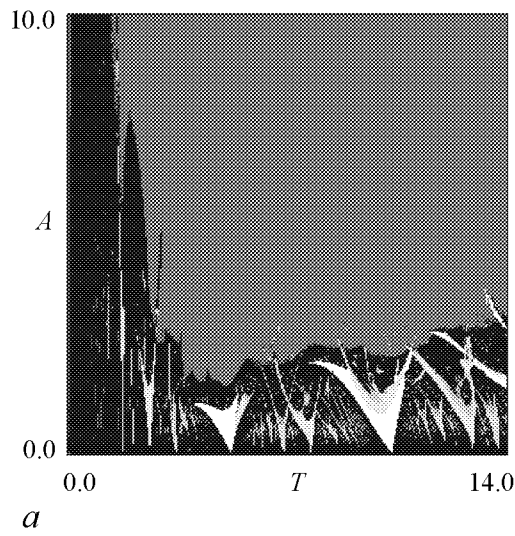


Рис. 3. Карта динамических режимов и ее увеличенные фрагменты для неавтономной системы Рёсслера (8) на плоскости параметров (амплитуда – период внешнего воздействия). Карты построены для $p = 0.3$, $q = 0.1$, $r = 2.0$

2. Система Рёсслера под воздействием периодической последовательности δ -функций, действующих перпендикулярно плоскости, содержащей предельный цикл

Рассмотрим, как изменится картина синхронизации в неавтономной системе Рёсслера, если импульсы действуют вдоль оси z , то есть перпендикулярно плоскости, в которой в основном лежит предельный цикл,

$$\begin{aligned}
 \dot{x} &= -x - z, \\
 \dot{y} &= x + py, \\
 \dot{z} &= q + (x - r)z + A \sum \delta(t - nT).
 \end{aligned}
 \tag{9}$$

Снова начнем со случая, когда в автономной системе реализуется цикл периода 1, а величина «выступа» в направлении оси z есть $\Delta z \approx 3.5$, то есть $p = 0.2$, $q = 0.1$, $r = 1.5$. На рис. 4 изображены соответствующая карта динамических режимов и ее увеличенные фрагменты, построенные для тех же значений параметров автономной системы. Если сопоставить рис. 1 и 4, то видно, что картина синхронизации стала существенно иной. Так на карте, построенной для системы (9), помимо языков синхронизации и области квазипериодических режимов, расположенных в нижней части карты, наблюдаются достаточно большие области режимов периода 1 и 2, расположенные при больших значениях амплитуды внешнего воздействия. Нижняя граница области периода 1 является линией бифуркации Неймарка – Сакера, и к ней подходят языки Арнольда, имеющие острия не только у основания, но и у вершины (рис. 4, б). Справа имеется небольшая система языков, образующих незамкну-

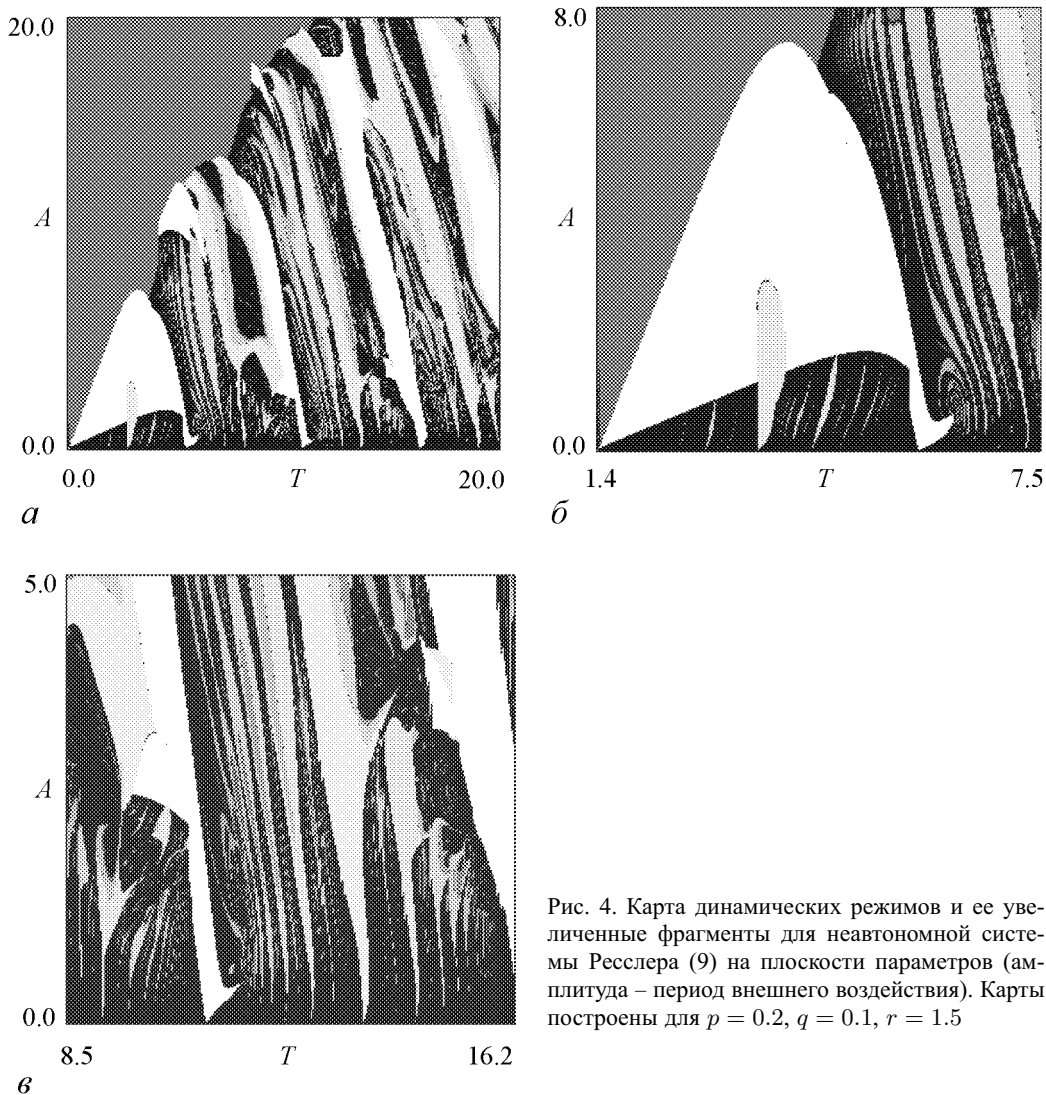


Рис. 4. Карта динамических режимов и ее увеличенные фрагменты для неавтономной системы Ресслера (9) на плоскости параметров (амплитуда – период внешнего воздействия). Карты построены для $p = 0.2$, $q = 0.1$, $r = 1.5$

тые кольца. Остальные языки, лежащие справа от основного, имеют вид некоторых полос. При больших амплитудах эти языки трансформируются в большие области режимов различных периодов (рис. 4, *а, в*). Заметим, что при малых периодах воздействия, порог «убегания» траекторий стремится к нулю, что также отличается от случая, представленного на рис. 1. На рис. 5 изображены аттракторы для неавтономной системы (9) периодов 1, 2, 3 и 5, которые следует сопоставить с аттракторами, изображенными на рис. 2.

Теперь опять изменим параметры так, чтобы величина «выступа» увеличилась: $\Delta z \approx 6.7$. На рис. 6 представлена соответствующая карта динамических режимов и ее увеличенные фрагменты. Сопоставление рисунков 4 и 6 показывает, что в этом случае увеличивается область, в которой траектория «убегает» на бесконечность и, как следствие, уменьшается область периодических и квазипериодических режимов, что особенно хорошо видно в области относительно больших значений периода внешнего воздействия T . Кроме того, языки становятся уже и наклоняются влево, усложняется их внутренне устройство. Исключение составляет область небольших значений периода внешнего воздействия ($T < 6.0$). Здесь область периодических и квазипериодических режимов наоборот увеличивается, а внутри многих языков наблюдается образование островов режимов удвоенного периода с последующим переходом к хаосу по Фейгенбауму.

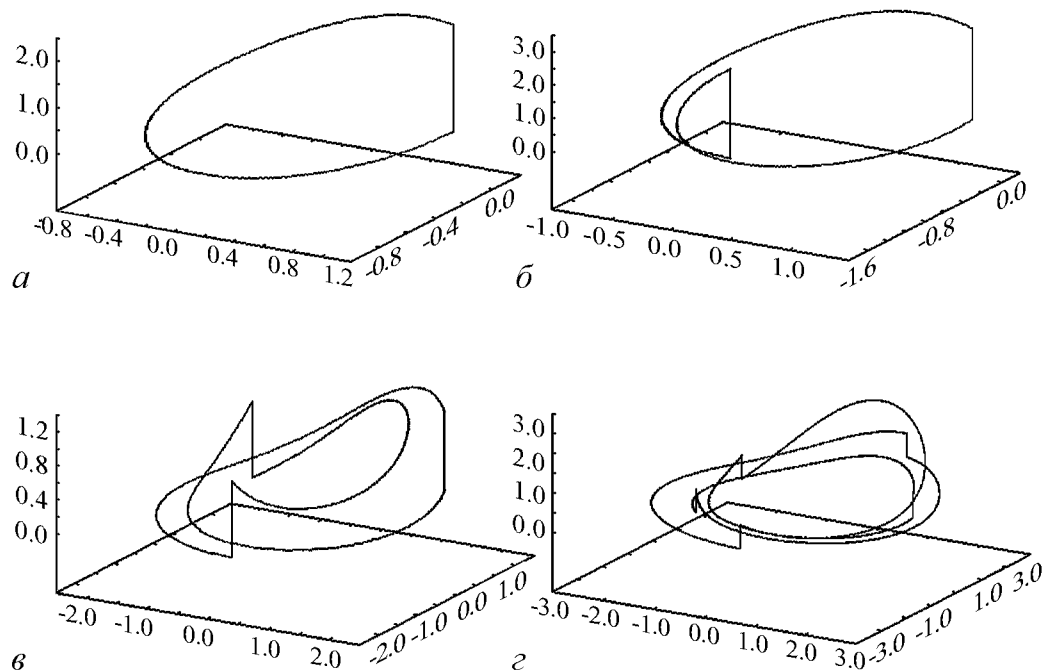


Рис. 5. Аттракторы неавтономной системы Ресслера (9) для различных значений амплитуды A и периода T внешнего воздействия, соответственно: *а* – 2.3, 4.3; *б* – 2.7, 2.8; *в* – 3.9, 0.9; *г* – 0.6, 3.4

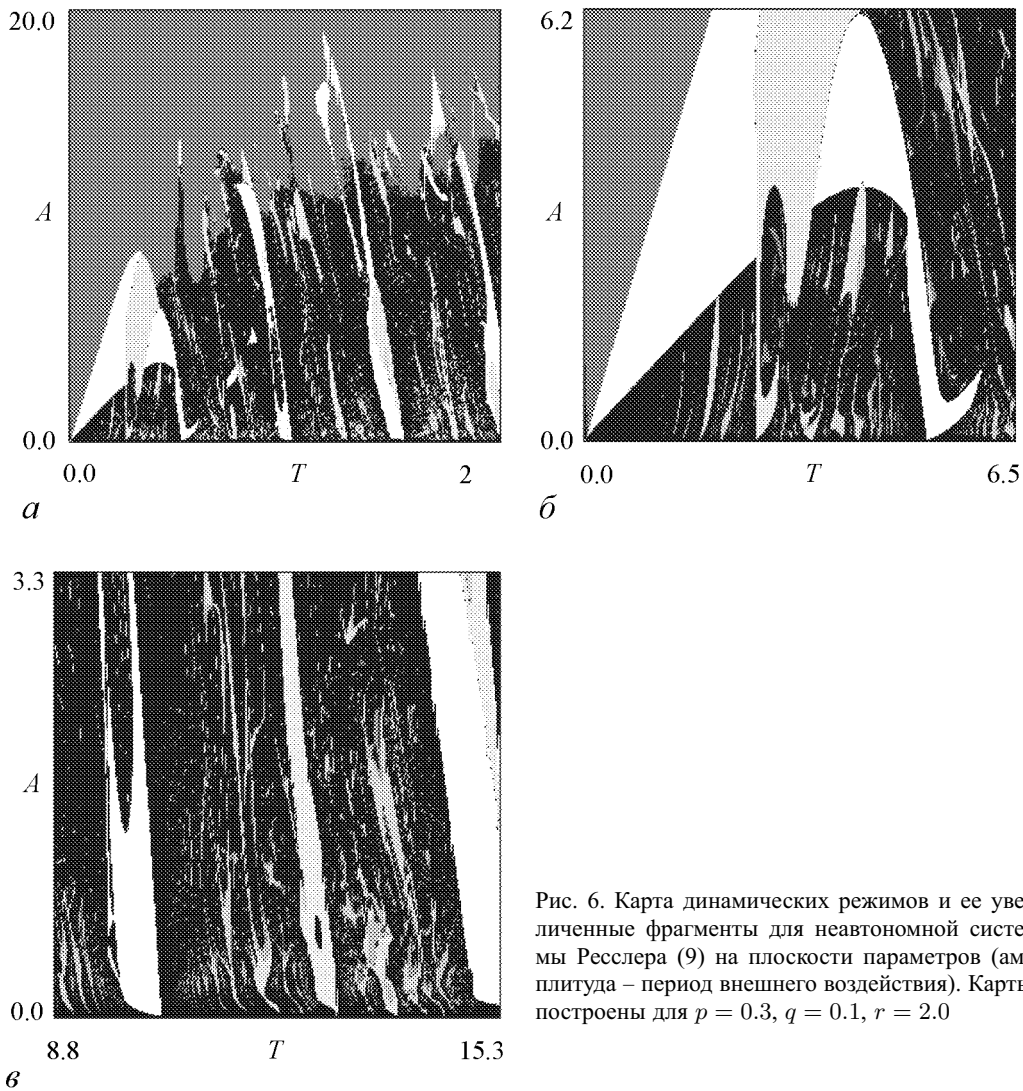


Рис. 6. Карта динамических режимов и ее увеличенные фрагменты для неавтономной системы Ресслера (9) на плоскости параметров (амплитуда – период внешнего воздействия). Карты построены для $p = 0.3$, $q = 0.1$, $r = 2.0$

Заключение

Таким образом, на примере системы Ресслера показано, что картина синхронизации автоколебательных систем с трехмерным фазовым пространством существенно зависит от направления действия внешних импульсов. Она оказывается классической лишь в том случае, если импульсы действуют в плоскости, в которой в основном расположен предельный цикл. Но даже тогда внутреннее устройство основного языка, реализующегося при периоде воздействия, примерно равном собственному, оказывается специфическим. Если же внешние импульсы действуют перпендикулярно этой плоскости, имеет место иная картина языков синхронизации и областей периодических режимов. Кроме того, происходит определенное изменение картины синхронизации при «развитии» аттрактора в третьем измерении в фазовом пространстве: увеличивается область «разбегания» траекторий, языки синхронизации стано-

вяться более узкими, а их внутреннее устройство усложняется. Полученные закономерности могут быть полезны при исследовании других автоколебательных систем с трехмерным фазовым пространством.

Работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований грант № 04-02-04011 и грантом CRDF BRHE REC-006 № Y2-P-06-13.

Библиографический список

1. Берже П., Помо И., Видаль К. Порядок в хаосе. М.: Мир, 1991. 368 с.
2. Шустер Г. Детерминированный хаос. М.: Мир, 1990, 240с.
3. Ott E. Chaos in dynamical systems. Cambridge university press, 1993.
4. Анищенко В.С. Сложные колебания в простых системах. М.: Наука, 1990.
5. Winfree A.T. The geometry of biological time. Springer Berlin, 1980.
6. Caldas I.L., Tasson H. Limit cycles of periodically forced oscillations // Phys. Lett, 1989. Vol. A135. p.264-266.
7. Steeb W.H., Kunick A. Chaos in limit-cycle systems with external periodic excitation // Int. J of Nonlinear Mechanics, 1987. № 22. P. 349.
8. Пиковский А., Розенблюм М., Куртс Ю. Синхронизация. Фундаментальное нелинейное явление. М.: Техносфера, 2003.
9. Pikovsky A.S., Rosenblum M.G., Osipov G.V., Kurths J. Phase synchronization of chaotic oscillators by external driving // Physica, 1997. Vol. D104. P. 219.
10. Gonzalez D.L. and Piro O. Chaos in a nonlinear driven oscillator with exact solution // Phys. Rev. Lett., 1983. Vol. 50, № 12. P. 870.
11. Ding E.J. Analytic treatment of periodic orbit systematics for a nonlinear driven oscillator // Phys. Rev., 1986. Vol. A34, № 4. P. 3547.
12. Ding E.J. Analytic treatment of a driven oscillator with a limit cycle // Phys. Rev., 1987. Vol. A35, № 6. P. 2669.
13. Ding E.J. Structure of parameter space for a prototype nonlinear oscillator // Phys. Rev., 1987. Vol. A36, № 3. P. 1488.
14. Ding E.J. Structure of the parameter space for the van der Pol oscillator // Physica Scripta, 1988. Vol. 38. P. 9.
15. Ullmann K. and Caldas I.L. Transitions in the parameter space of a periodically forced dissipative system // Chaos, Solitons & Fractals, 1996. № 11. P. 1913.
16. Keener J.P., Glass L. Global bifurcation of a periodically forced nonlinear oscillator // J. Math. Biology, 1984. № 21. P. 175.
17. Glass L., Sun J. Periodic forcing of a limit-cycle oscillator: Fixed points, Arnold tongues, and the global organization of bifurcations // Phys. Rev., 1994. Vol. 50, № 6. P. 5077.
18. Ding E.J. and Hemmer P.C. Exact treatment of mode locking for a piecewise linear map // Journal of Statistical Physics, 1987. Vol. 46, № 1-2. P. 99.
19. Glass L. et. all. Global bifurcations of a periodically forced biological oscillator // Phys. Rev. A., 1983. № 29. P. 1348.

20. Кузнецов А.П., Тюрюкина Л.В. Осциллятор ван-дер-Поля с импульсным воздействием: от потока к отображениям // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика, 2001. № 6. С. 69.
21. Кузнецов А.П., Тюрюкина Л.В. Синхронизация автоколебательной системы ван дер Поля – Дуффинга короткими импульсами // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика, 2004. № 5. С. 16.
22. Кузнецов С.П. Динамический хаос. М.:Физматлит, 2001. 296 с.

Саратовский филиал ИРЭ РАН
Саратовский государственный
университет

Поступила в редакцию
После доработки

02.12.05
10.07.06

FEATURES OF THE SYNCHRONIZATION PICTURE BY THE PULSES IN THE SYSTEM WITH 3-DIMENSIONAL PHASE SPACE BY THE EXAMPLE OF THE RESSLER SYSTEM

A.P. Kuznetsov, N.V. Stankevich, L.V. Turukina

Features of the synchronization picture in the system which limit cycle lied in three-dimensional phase space are considered. By the example of Ressler system with the periodic sequence of δ -Functions it is shown, that the synchronization picture essentially depends on a direction of the external force. Features of the synchronization tongues are found.



Станкевич Наталья Владимировна – родилась в 1985 году. С 2000 по 2002 год обучалась в Лицее прикладных наук Саратова. В 2002 году поступила в Саратовский госуниверситет на факультет нелинейных процессов. В настоящее время студентка 5 курса факультета нелинейных процессов СГУ. Занимается исследованием особенностей синхронизации короткими импульсами в многомерных автоколебательных системах. Принимала участие в конференциях разного уровня. Автор 6 публикаций, в том числе 2-х статей.



Тюрюкина Людмила Владимировна – родилась в 1977 году. Кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник Саратовского филиала Института радиотехники и электроники РАН, ассистент базовой кафедры динамических систем СГУ в СФ ИРЭ РАН. Область научных интересов – динамический хаос, критические явления на пороге хаоса, сложная динамика нелинейных осцилляторов и автоколебательных систем с внешним периодическим воздействием в контексте сопоставления различных подходов к их описанию, синхронизация короткими импульсами и управление неустойчивыми режимами посредством коротких импульсов. Автор 26 научных публикаций, в том числе 7 статей в российских и зарубежных журналах. Лауреат стипендии Президента РФ для студентов и аспирантов. В 2001 и 2002 годах получила персональные гранты РФФИ для молодых исследователей. Принимает участие в работе международных научных коллективов.
E-mail: ludmila@forpost.ru



ИЗМЕНЕНИЕ ХАРАКТЕРА СЕРДЕЧНОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ ПРИ ПОДАВЛЕНИИ НИСТАГМА В ПРОЦЕССЕ ПЕРИОДИЧЕСКОГО СВЕТОВОГО ВОЗДЕЙСТВИЯ

Д.А. Усанов, А.В. Скрипаль, Т.Б. Усанова, А.П. Рытик

Представлены результаты экспериментальных исследований изменения электрокардиограммы для пациентов с нистагмом при его уменьшении в процессе периодического воздействия света. Приведены формы электрокардиосигнала и его спектр, индексы Бавевского, нистагмограммы до и в момент воздействия света. Показано, что периодическое световое воздействие на глаза в момент подавления нистагма приводит к увеличению уровня тонуса симпатической нервной системы в регуляции сердечной активности и одновременно к уменьшению шумовых составляющих спектра электрокардиограммы.

Введение

Известно, что патологический нистагм (непроизвольные колебательные движения глаз) может возникнуть при поражении вестибулярного аппарата, при патологическом процессе в мозжечке, воспалительном процессе внутреннего уха, черепно-мозговой травме, инфекционных и токсических поражениях мозга, а также может быть следствием патологии зрительно-нервного анализатора [1].

Глаз человека является сложной биологической системой управления, состоящей из взаимодействующих между собой подсистем. Представляются интересными исследования изменений в функционировании жизненно важных органов, в частности сердца, при хирургическом, медикаментозном или другом воздействии на орган зрения [2, 3].

В работах [4-6] было показано, что для ряда больных с нистагмом периодическое световое воздействие может изменять амплитуду и частоту колебательных движений глаза в сторону их уменьшения или полного исчезновения нистагма. При этом не обсуждалась возможность связанного с этим изменения функционирования других подсистем организма в момент подавления нистагма.

Известно, что в ответ на любой раздражитель эндогенной или экзогенной природы в живом организме возникают реакции, являющиеся по своей сути защитно-приспособительными (адаптационными). Характер этих реакций определяется, прежде всего, изменениями нервной и гуморальной регуляции кровообращения, которые предшествуют энергетическим сдвигам [7, 8]. Наиболее доступным для регистрации защитно-приспособительных реакций физиологическим параметром, отражающим процессы вегетативной регуляции в сердечно-сосудистой системе и организме

в целом, является ритм сердечных сокращений. Изменение ритма сердца, по мнению авторов [8], может быть связано с интенсивностью процессов активации отделов вегетативной нервной системы по отношению к сердечно-сосудистой системе и позволяет судить о степени адаптационной реакции организма на то или иное воздействие в целом. При этом главная функция вегетативной нервной системы заключается в поддержании постоянства (или гомеостаза) внутренней среды при различных воздействиях на организм. На основе функциональных различий в вегетативной нервной системе выделяют два отдела – симпатический и парасимпатический. При повышении тонуса симпатической нервной системы в ответ на внешний раздражитель усиливаются сердечные сокращения и учащается их ритм.

Цель настоящей работы – исследование характера нистагмограммы и соответствующих изменений тонуса регуляторных систем по данным электрокардиограммы (ЭКГ) в процессе периодического светового воздействия на пациентов с нистагмом.

1. Методика и аппаратура

Для регистрации движений глаз при нистагме использовался программно-аппаратный комплекс, схема которого приведена на рис. 1. В состав программно-аппаратного комплекса входит цифровая видеокамера 4, регистрирующая угловое смещение глаза пациента 1 в орбите. При этом голова пациента фиксировалась в специальном держателе 2 для обеспечения неподвижности относительно видеокамеры. С помощью осветителя 3, в качестве которого использовалась лампа дневного света, обеспечивалось безбликовое освещение зрачка глаза и переменное воздействие светом. Частота переключения осветителя могла регулироваться от 0.5 до 5.0 Гц; при значении частоты переменного светового воздействия, равной частоте нистагма, происходила остановка нистагма. Видеоизображение движущегося глаза вводилось через USB-порт в персональный компьютер 5 и анализировалось с помощью специально разработанной программы под названием *euemotion.exe*. Изображение вводилось со скоростью 25 кадров в секунду в формате AVI. Программная часть включала специализированную программу *euemotion.exe*, функционирующую в среде Windows XP и осуществляющую анализ введенного изображения в формате AVI. С помощью этой программы определялось положение центра зрачка глаза и осу-

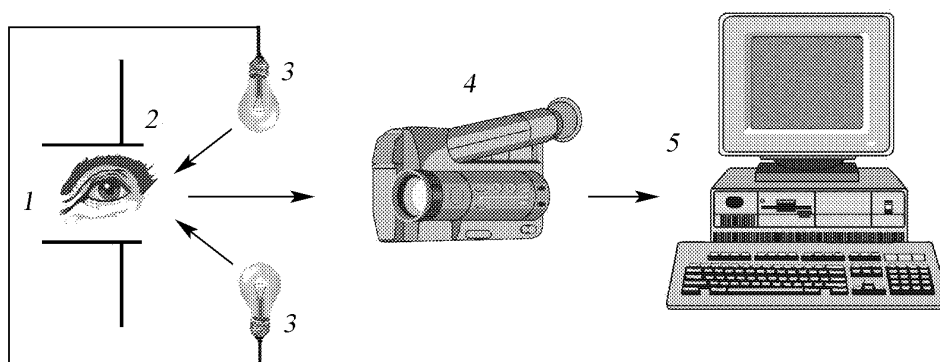


Рис. 1. Схема установки: 1 – глаз пациента, 2 – держатель головы, 3 – осветитель, 4 – цифровая видеокамера, 5 – компьютер

ществлялась запись и спектральный анализ траектории его движения. Результаты анализа сохранялись на носителе информации [6].

Одновременно с регистрацией видеоокулограммы с помощью программно-аппаратного комплекса происходила запись ЭКГ компьютерным электрокардиографом «Полиспектр 8/12», разработанным фирмой «Нейрософт», г. Иваново. Кардиограф подключался к тому же компьютеру, что позволяло одновременно следить за процессом изменения нистагма, происходящего в результате воздействия на пациента периодически изменяющимся световым сигналом, и за параметрами ЭКГ. С помощью специально разработанной программы можно было осуществлять детальное построение электрокардиосигнала и его спектра.

Перед проведением исследований пациент располагался на кушетке и находился в состоянии покоя в течение 15 минут. Затем измерялась ЭКГ и при периодическом световом воздействии и при его отсутствии с одновременной записью видеоокулограммы. Далее осуществлялась обработка результатов исследований: построение нистагмограммы, ЭКГ, спектра ЭКГ, расчет параметров вегетативной нервной системы по ЭКГ.

2. Результаты исследований

Исследования проводились на шести пациентах возрастной группы от 5 до 17 лет с нистагмом, при их добровольном согласии. Фиксировались также параметры для пациентов без нистагма – контрольная группа.

На рис. 2 показана нистагмограмма для пациента до и в момент периодического воздействия света с частотой 2 Гц, близкой к частоте колебательных движений

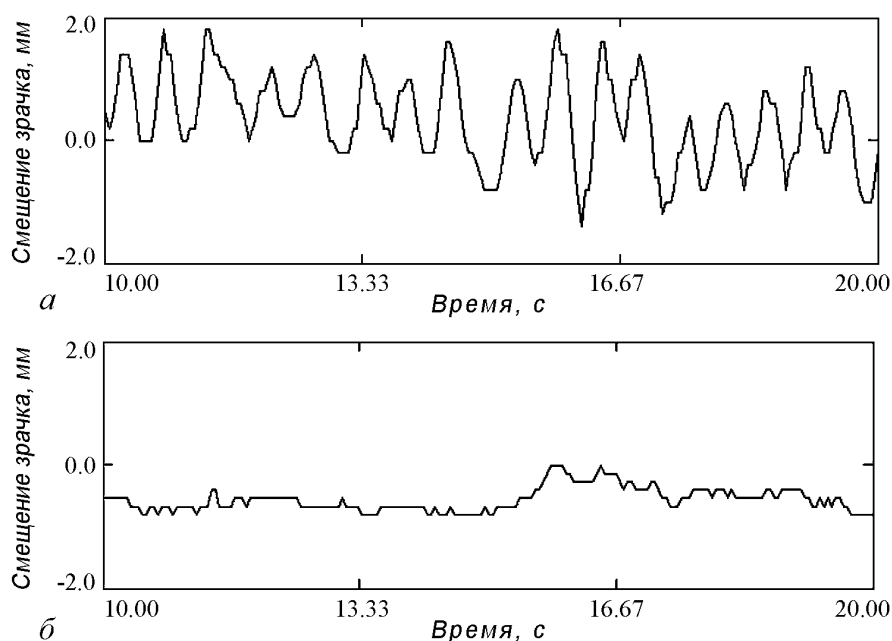


Рис. 2. Нистагмограмма для пациента А.: *a* – пациент в покое, *b* – во время светового воздействия с частотой 2 Гц

глаз [9]. Как следует из рисунка, при воздействии света амплитуда нистагма уменьшается практически до полного подавления (*b*).

Одновременно с регистрацией нистагмограммы происходила запись ЭКГ. На рис. 3 представлены ЭКГ пациентов с нистагмом до и в момент светового воздействия, приводящего к изменению характеристик нистагма. Как видно из рисунка, формы ЭКГ, зафиксированных для пациентов во время светового воздействия, несколько отличаются от аналогичных ЭКГ в «нормальных» (без светового воздействия) условиях. В частности, у пациентов А. и Д. (соответственно, ЭКГ на рис. 3, *a* и *b*) RR-кардиоинтервалы значительно больше отличаются друг от друга по величине во время светового воздействия, чем RR-кардиоинтервалы без светового воздействия. У пациентов Д. и Л. (соответственно, ЭКГ на рис. 3, *b* и *в*) задержка между Р- и Q-максимумами во время светового воздействия становится больше, чем эта же задержка без светового воздействия. Для всех пациентов до и во время воздействия света было зафиксировано уменьшение времени между S- и T-экстремумами.

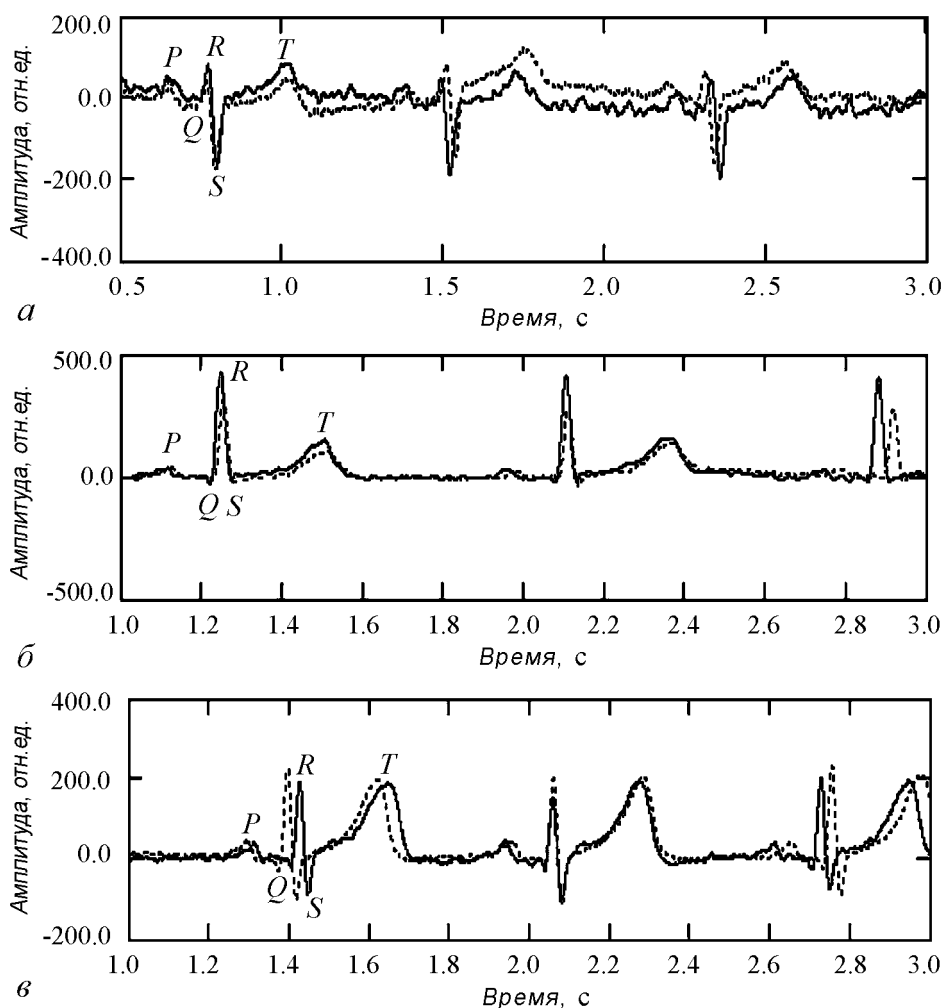


Рис. 3. Сигнал ЭКГ для трех пациентов до (сплошная линия) и во время (штриховая линия) светового воздействия: *a* – пациент А. 17 лет, *b* – пациент Д. 6 лет, *в* – пациент Л. 5 лет

Изменяется также и форма самого кардиосигнала, что свидетельствует об измененном характере формирования электрических биопотенциалов в сердечной мышце.

Поскольку во время воздействия света изменяется форма кардиосигнала, интересно определение характера изменения спектра ЭКГ во время воздействия. На рис. 4. представлен спектр ЭКГ трех пациентов. Из рисунка следует, что во время светового воздействия, приводящего к уменьшению амплитуды нистагма, наблюдается существенное изменение амплитуды шумовой составляющей спектра.

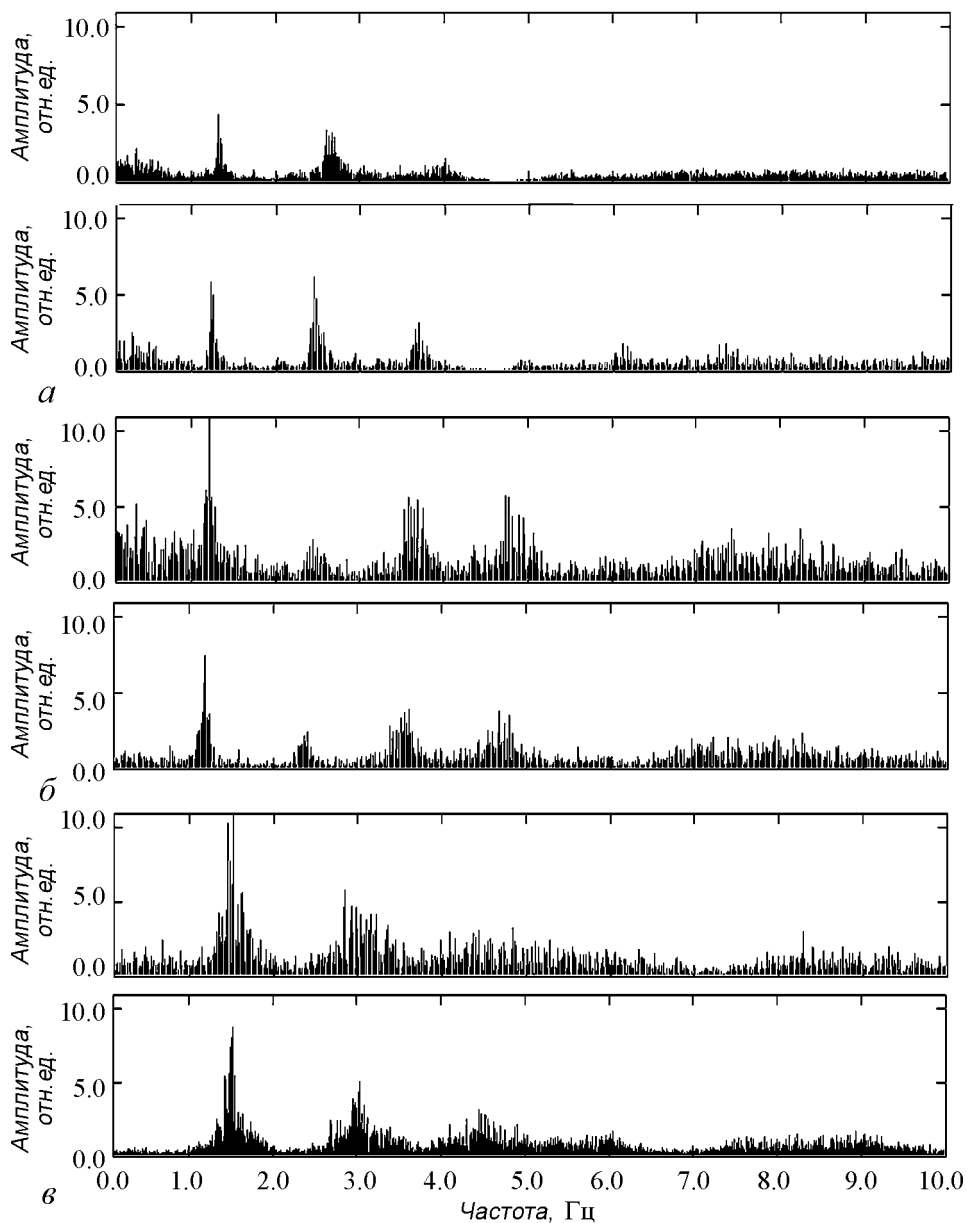


Рис. 4. Спектр ЭКГ для пациентов А. (а), Д. (б), Л. (в) в ходе исследований: верхний график – пациент в покое, нижний – во время светового воздействия

Для регистрации активности нервной вегетативной регуляции, проявляющейся в изменении показателей временных параметров электрокардосигнала, то есть в изменении длительности RR-интервалов, определялись индексы Баевского [7, 8] до и во время светового воздействия. В таблице представлены усредненные индексы Баевского для пациентов с нистагмом и без него.

Таблица

Индексы Баевского

Параметр	До воздействия		Во время воздействия	
	пациенты		пациенты	
	с нистагмом	без нистагма	с нистагмом	без нистагма
ЧСС, уд./мин	80	58	74	64
М, с	0.756	1.03	0.813	0.981
Мо, с	0.766	1.03	0.817	0.968
АМо, %	40.7	39.3	55.6	27.1
ВР, с	0.243	0.334	0.135	0.947
ИВР, отн.ед.	167	118	412	28.6
ПАПР, отн.ед.	53.1	38.2	68	28
ВПР, отн.ед.	5.36	2.91	9.06	1.09
ИН, отн.ед.	109	57.2	252	14.8

В таблице использованы следующие обозначения.

- ЧСС – частота сердечных сокращений в минуту.
- М – математическое ожидание, которое отражает конечный результат всех регуляторных влияний на сердце и систему кровоснабжения в целом. Этот показатель связан со средней частотой сердечных сокращений и обладает наименьшей изменчивостью среди всех медико-статистических показателей. Его отклонение от индивидуальной нормы обычно сигнализирует об увеличении нагрузки на аппарат кровообращения или о наличии патологических отклонений.
- Мо – мода – наиболее часто встречающееся значение RR-интервалов, указывающее на доминирующий уровень функционирования синусового узла. При симпатикотонии (преобладание симпатической нервной системы в регуляции тонуса сосудов) Мо меньше, при ваготонии (преобладание парасимпатической нервной системы в регуляции тонуса сосудов) – больше.
- ВР – вариационный размах, который вычисляется как разница между максимальным и минимальным значениями RR; отражает степень варибельности или размах колебаний значений кардиоинтервалов.
- АМо – амплитуда моды – число кардиоинтервалов (в %), соответствующих диапазону моды, отражающее меру мобилизирующего влияния симпатического отдела.
- ИВР – индекс вегетативного равновесия, который указывает на соотношение между активностью симпатического и парасимпатического отделов.

- ПАПР – показатель адекватности процессов регуляции, который отражает соответствие между активностью симпатического отдела вегетативной нервной системы и ведущим уровнем функционирования синусового узла.

- ВПР – вегетативный показатель ритма, который позволяет судить о парасимпатических сдвигах вегетативного баланса. Чем меньше ВПР, тем больше вегетативный баланс смещен в парасимпатическую сторону.

- ИН – индекс напряжения регуляторных систем, который отражает степень централизации управления сердечным ритмом.

Из таблицы следует, что при подавлении нистагма во время периодического светового воздействия средняя частота сердечных сокращений у пациентов с нистагмом уменьшается, в то время как у пациентов контрольной группы частота в этих же условиях увеличивается. Значение индекса М до и во время воздействия для пациентов без нистагма составило соответственно 1.03 и 0.981, а для пациентов с нистагмом соответственно – 0.756 и 0.813, что может говорить об увеличении нагрузки на регуляторный аппарат пациентов с нистагмом [7, 8]. Индекс Мо при периодическом световом воздействии для пациентов без нистагма уменьшается, а с нистагмом увеличивается, что позволяет говорить об активации симпатической нервной системы [7, 8]. Другие индексы, например АМо, ВР, ИВР, ПАПР, ВПР также свидетельствуют о смещении вегетативного баланса в симпатическую сторону для пациентов с нистагмом, а для пациентов без нистагма – в парасимпатическую.

Таким образом, при периодическом световом воздействии на пациента с нистагмом наблюдаются изменения характера электрокардиограммы и ее спектра, проявляющиеся в изменении длительности соответствующих участков электрокардиограммы и их амплитудных значений, а также амплитуды шумовой составляющей спектра. При этом изменение кардиоинтервалов ЭКГ в момент подавления нистагма пациента свидетельствует об увеличении уровня тонуса симпатической нервной системы в регуляции сердечной активности.

Библиографический список

1. Аветисов Э.С. Нистагм. М.: ГЭОТАР-МЕД, 2001. 96 с.
2. Гиппенрейтер Ю.Б. Движения человеческого глаза. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1978. 256 с.
3. Филин В.А. Автоматия саккад. М: Изд-во МГУ, 2002. 240 с.
4. Усанов Д.А., Кащенко Т.П., Скрипаль А.В., Рабичев И.Э., Усанова Т.Б., Абрамов А.В., Ячменева Е.И., Губкина Г.Л. Влияние периодических световых воздействий на параметры нистагма глаз // Вестник офтальмологии. 2004. № 5. С. 42-43.
5. Усанов Д.А., Кащенко Т.П., Скрипаль А.В., Рабичев И.Э., Усанова Т.Б., Абрамов А.В., Ячменева Е.И., Губкина Г.Л. Исследование влияния световых воздействий на характеристики нистагма глаз // Материалы IV семинара «Биомеханика глаза», 12 марта 2004 г. Москва - СПб: Изд-во НИИХ СПбГУ, с.145-149.
6. Усанова Т.Б., Скрипаль А.В., Усанов Д.А., Абрамов А.В. Видеотехнология количественного контроля движения глазного яблока при нистагме // Вестник офтальмологии. 2002. № 4. С. 38-42.

7. Коркушко О.В., Писарук А.В., Шатило В.Б., Лишневская В.Ю., Чеботарев Н.Д., Погорецкий Ю.Н. Анализ variability ритма сердца в клинической практике. Киев, 2002. 192 с.
8. Баевский Р.М., Кириллов О.И., Клецкин С.З. Математический анализ изменений сердечного ритма при стрессе. М.: Наука, 1984. 221с.
9. Патент на изобретение РФ № 2221475. Способ исследования движения глаз по бинокулярному изображению и устройство для его реализации / Усанов Д.А., Скрипаль Ал.В., Скрипаль Ан.В., Абрамов А.В., Усанова Т.Б., Феклистов В.Б. Опубл. 20.01.2004. Бюл. № 2.

Саратовский государственный
университет
Саратовский государственный
медицинский университет
ОАО ЦНИИИА

Поступила в редакцию 15.05.2006
После доработки 20.07.2006

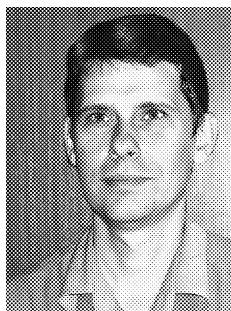
THE CHANGE OF THE HEART ACTIVITY CHARACTER UNDER NYSTAGMUS SUPPRESSION DURING PERIODIC LIGHT INFLUENCE

D.A. Usanov, A.V. Skripal, T.B. Usanova, A.P. Rytik

Results of experimental investigations of the electrocardiogram change for, patients with nystagmus which decreases during periodic light influence are presented. Forms of electrocardiosignal and its spectrum, Baevsky indexes, nystagmusgrams before-and in the moment of light influence are given. Periodic light influence on the eyes in the moment of nystagmus suppression leads to the increase of the tone level, of the sympathetic nervous system in the regulation of the heart activity and simultaneously to the decrease of the noise components of the electrocardiogram spectrum is shown.



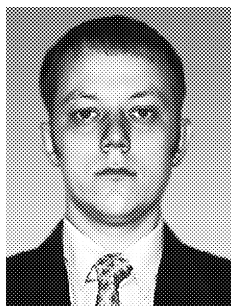
Усанов Дмитрий Александрович – родился в г. Менделеевске (1943), окончил Саратовский государственный университет (1965), куда после нескольких лет службы на предприятии электронной промышленности поступил на работу и где работает заведующим кафедрой физики твердого тела по настоящее время. Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук в области физики полупроводников и диэлектриков (1972) и доктора физико-математических наук в области радиофизики, включая квантовую радиофизику (1989). Профессор СГУ, академик МАН ВШ, заслуженный деятель науки РФ. Область научных интересов – твердотельная СВЧ-электроника, радиоволновые и оптические методы контроля, применение нелинейной динамики в полупроводниковой электронике СВЧ. Автор многих статей, патентов и изобретений по указанным выше направлениям.
E-mail: UsanovDA@info.sgu.ru



Скрипаль Анатолий Владимирович – родился в Саратове (1960). Окончил физический факультет Саратовского госуниверситета (1982), защитил диссертацию на звание кандидата физико-математических наук по специальности «Оптика» (1991) и доктора физико-математических наук (1998). Профессор кафедры физики твердого тела Саратовского госуниверситета. Автор более 100 научных трудов в области когерентной оптики, вибродиагностики и квантовой электроники.



Усанова Татьяна Борисовна – родилась в Саратове (1947), окончила Саратовский государственный медицинский университет (1971). С 1972 года окулист клиники глазных болезней при СГМУ. Защитила диссертацию на соискание ученой степени кандидата медицинских наук (2004). Один из авторов монографии, многих печатных работ, 4 патентов на изобретение, свидетельства на полезную модель. Область научных интересов – офтальмология, медицинская физика.



Рытик Андрей Петрович – родился в Саратовской области (1980), окончил с отличием Саратовский государственный университет (2003). С 2004 года работает в Центральном научно-исследовательском институте измерительной аппаратуры (ОАО ЦНИИИА). Защитил диссертацию на соискание степени кандидата физико-математических наук (2006). С 2005 года – заведующий лабораторией спектральных измерений при ЦНИИИА. Область научных интересов – биомедицинская физика, физика взаимодействия терагерцевого излучения с биологическими объектами.
E-mail: RA4CSZ@yandex.ru



КОЛЕБАНИЯ В АВТОНОМНЫХ ДВУМЕРНЫХ РЕКУРСИВНЫХ ЦИФРОВЫХ СИСТЕМАХ ПЕРВОГО ПОРЯДКА С ТРЕМЯ УРОВНЯМИ КВАНТОВАНИЯ

Ю.А. Брюханов, Д.В. Рудых, А.Л. Приоров

Исследованы процессы в автономных двумерных рекурсивных цифровых системах первого порядка с тремя уровнями квантования. Числа представляются в прямом коде, а результаты суммирования округляются. Сумматор имеет характеристику с насыщением. В рамках детерминированного подхода предложена методика построения бифуркационной диаграммы системы. С ее помощью найдены условия существования заданных типов выходных движений, выраженные через коэффициенты системы.

1. Двумерные цифровые системы рекурсивного и нерекурсивного типов широко используются для обработки многомерных цифровых сигналов, статических и динамических изображений [1]. На их основе создаются как двумерные цифровые фильтры [2], так и генераторы двумерных цифровых сигналов. Благодаря простоте исполнения и возможности работать в реальном масштабе времени, двумерные цифровые системы малых порядков могут использоваться самостоятельно, а также в качестве базовых компонентов более сложных устройств цифровой фильтрации и генерации сигналов и изображений.

Принципиальным отличием цифровых систем от аналоговых является обусловленная ограниченным числом используемых двоичных разрядов конечная точность выполнения арифметических операций и задания коэффициентов, что вызывает специфические ошибки квантования. Исследование процессов в таких системах может быть осуществлено с помощью линейной статистической модели ошибок. Это справедливо в том случае, если последовательность ошибок квантования является совокупностью выборок стационарного случайного процесса, если она не коррелирована с последовательностью точных значений сигнала, а сами значения ошибки не коррелированы между собой (представляют собой белый шум) и при этом распределение вероятностей ошибки равномерно во всем диапазоне ошибок квантования [3]. Эти условия нарушаются при малом количестве разрядов (и связанном с ним количестве уровней квантования), а также при воздействии, например, постоянного сигнала или синусоидального сигнала, дискретизированного с частотой, рационально кратной частоте синусоиды. В этих случаях задача исследования процессов в системах очень сложна и является существенно нелинейной [4].

2. В общем случае движения в автономных двумерных рекурсивных цифровых системах первого порядка описываются нелинейным разностным уравнением

$$x(m, n) = f(ax(m-1, n) + bx(m, n-1) + cx(m-1, n-1)) \quad (1)$$

с ненулевыми начальными условиями. Здесь m и n дискретные переменные, принимающие значения от -1 до бесконечности; a , b и c – независимые коэффициенты; функция f описывает нелинейные свойства сумматора. Структурная схема системы представлена на рис. 1.

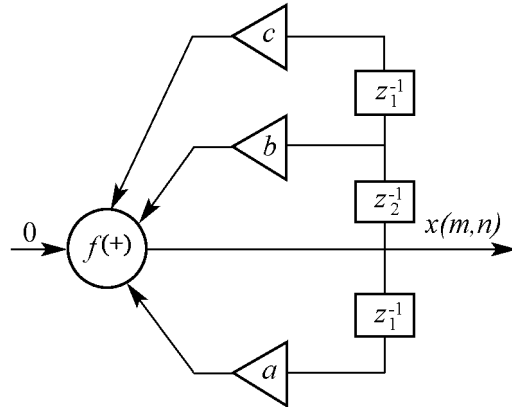


Рис. 1. Структурная схема автономной двумерной рекурсивной цифровой системы первого порядка

Однако для некоторых задач (например, генерации) это свойство может оказаться полезным. Полагается, что коэффициенты системы a , b и c задаются без ошибки, квантование осуществляется с округлением, переменные представляются в форме чисел, выровненных справа (то есть в виде целых чисел), а сумматор без учета квантования имеет характеристику с насыщением.

В качестве характеристики сумматора рассматривается функция

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0.5, \\ 0, & |x| < 0.5, \\ -1, & x \leq -0.5. \end{cases} \quad (2)$$

Участки характеристики, соответствующие $x \leq -0.5$, $|x| < 0.5$ и $x \geq 0.5$, назовем зонами I, II и III, соответственно. Подобные функции нелинейности широко используются в системах цифровой автокорреляции [5].

3. Для исследования систем с нелинейным сумматором и квантователями используется детерминированный подход. В частности, он применялся при изучении нелинейных свойств одномерных цифровых фильтров [6-7]. Такой подход используется для решения задач, связанных с изучением условий зарождения предельных циклов разных периодов из-за нелинейной характеристики сумматора и в двумерных системах [8].

Суть подхода заключается в следующем [6]. Область определения функции нелинейности разбивается на зоны с различными значениями. Далее путем последовательного перебора возможных переходов системы по этим зонам находятся ограничения на параметры системы, соответствующие определенным типам движений на выходе. В результате все пространство параметров системы делится на области с различными типами движений.

Следует отметить, что любое начальное условие для двумерной системы первого порядка представляет собой две бесконечные последовательности ($x(-1, n)$ и $x(m, -1)$), поэтому перебрать все возможные начальные условия при анализе видов движений в такой системе нереально. В связи с этим, при исследовании двумерных систем с произвольными начальными условиями предлагается находить условия возникновения на выходе системы только каких-либо одних типов движений (каждому типу может соответствовать бесконечное число видов движений), например, двумерных предельных циклов (ДПЦ) [8]. В этом случае достаточно основываться на определении этих циклов и аналитическом виде функции нелинейности.

4. Рассмотрим это более подробно на примере нахождения областей существования таких типов движений, как ДПЦ с периодами 1×0 , 0×1 и 1×1 . Первое число обозначает период по переменной m , а второе – по переменной n . В случае, если одно из чисел равно нулю, сигнал может быть как периодическим по соответствующей переменной, так и непериодическим. Предполагается, что отсутствие сигнала на выходе является частным случаем циклов данных периодов.

ДПЦ с периодом 1×0 . Исходя из уравнения (1) и определения данного ДПЦ, найдем область существования цикла периода 1×0

$$\begin{cases} x(m, n) = f(ax(m-1, n) + bx(m, n-1) + cx(m-1, n-1)), \\ x(m, n) = x(m-1, n). \end{cases}$$

Согласно (2), отсчет $x(m, n)$ может принадлежать одной из трех зон функции нелинейности. Рассмотрим каждый случай отдельно.

Пусть $x(m, n)$ принадлежит зоне III, то есть

$$\begin{cases} x(m, n) = f(ax(m-1, n) + bx(m, n-1) + cx(m-1, n-1)), \\ x(m, n) = x(m-1, n) = 1, \end{cases}$$

что равносильно выражению

$$1 = f(a + bx(m, n-1) + cx(m-1, n-1)).$$

Следовательно, согласно (2), имеем

$$a + bx(m, n-1) + cx(m-1, n-1) \geq 0.5.$$

Отсчеты $x(m, n-1)$ и $x(m-1, n-1)$ также могут принимать одно из трех значений. Для каждого из них получим набор условий на коэффициенты (табл. 1), соответствующих различным комбинациям значений данных отсчетов.

Таблица 1

Условия на коэффициенты, соответствующие различным значениям отсчетов при $x(m, n)$, принадлежащих зоне III, для цикла периода 1×0

№	$x(m, n - 1)$	$x(m - 1, n - 1)$	Условия на коэффициенты
1	-1	-1	$a - b - c \geq 0.5$
2	-1	0	$a - b \geq 0.5$
3	-1	1	$a - b + c \geq 0.5$
4	0	-1	$a - c \geq 0.5$
5	0	0	$a \geq 0.5$
6	0	1	$a + c \geq 0.5$
7	1	-1	$a + b - c \geq 0.5$
8	1	0	$a + b \geq 0.5$
9	1	1	$a + b + c \geq 0.5$

При выполнении этих условий и $x(m-1, n)$, принадлежащим зоне III функции нелинейности, $x(m, n)$ для любых значений переменных m и n будет также принадлежать той же зоне. На плоскости коэффициентов (a, b) при фиксированном коэффициенте $c = 0.25$ данным ограничениям соответствует заштрихованная область на рис. 2.

Вследствие симметричности функции (2) для $x(m, n)$, принадлежащих зоне I, имеет место такой же набор неравенств, как и в предыдущем случае. В связи с этим разбиение пространства коэффициентов сохраняет вид, показанный на рис. 2.

Для $x(m, n)$, принадлежащих зоне II, имеем

$$\begin{cases} x(m, n) = f(ax(m-1, n) + bx(m, n-1) + cx(m-1, n-1)), \\ x(m, n) = x(m-1, n) = 0. \end{cases}$$

Этому соответствует набор неравенств, приведенный в табл. 2.

Таблица 2

Условия на коэффициенты, соответствующие различным значениям отсчетов при $x(m, n)$, принадлежащих зоне II, для цикла периода 1×0

№	$x(m, n - 1)$	$x(m - 1, n - 1)$	Условия на коэффициенты
1	1	1	$-0.5 < b + c < 0.5$
2	1	0	$-0.5 < b < 0.5$
3	1	-1	$-0.5 < b - c < 0.5$
4	0	1	$-0.5 < c < 0.5$
5	0	0	$-0.5 < 0 < 0.5$
6	0	-1	$-0.5 < -c < 0.5$
7	-1	1	$-0.5 < -b + c < 0.5$
8	-1	0	$-0.5 < -b < 0.5$
9	-1	-1	$-0.5 < -b - c < 0.5$

На плоскости (a, b) при $c = 0.25$ данным условиям соответствует заштрихованная область, показанная на рис. 3.

Пересечение областей, представленных на рис. 2 и рис. 3, задает результирующую область на плоскости (a, b) , соответствующую циклам периода 1×0 на выходе системы (рис. 4).

Следует отметить, что полученные результаты справедливы для произвольного вида начальных условий.

ДПЦ с периодом 0×1 . Вследствие симметричности относительно переменных m и n коэффициентов a и b (см. (1)) замена $m \rightarrow n$ соответствует замене $a \rightarrow b$. Таким образом, с учетом соответствующих переобозначений для ДПЦ с периодом 0×1 полученный набор неравенств остается справедливым. На плоскости коэффициентов (a, b) при $c = 0.25$ данным циклам на выходе системы соответствует заштрихованная область на рис. 5.

Для существования невырожденных циклов 1×0 и 0×1 необходимо, чтобы минимум один из отчетов последовательностей $(-1, n)$ и $(m, -1)$ был ненулевым (в противном случае, сигнал на выходе будет отсутствовать). Причем, каждый из этих ненулевых отчетов начальных условий создает аналогичный по знаку столбец или строку в зависимости от периода ДПЦ.

ДПЦ с периодом 1×1 . Найдем условия на коэффициенты, соответствующие ДПЦ периода 1×1 . Согласно определению данного ДПЦ и уравнению (1), справедлива система уравнений

$$\begin{cases} x(m, n) = f(ax(m-1, n) + bx(m, n-1) + cx(m-1, n-1)), \\ x(m, n) = x(m-1, n-1). \end{cases}$$

Отсчет $x(m, n)$ может принадлежать одной из трех зон характеристики сумматора. Рассмотрим каждый случай отдельно.

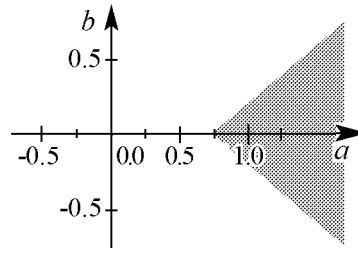


Рис. 2. Область циклов 1×0 , $x(m, n)$ принадлежат зоне III, $c = 0.25$

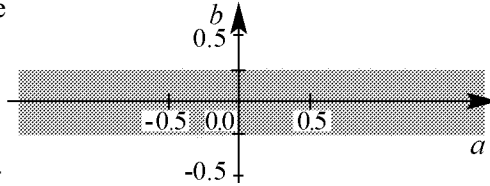


Рис. 3. Область циклов 1×0 , $x(m, n)$ принадлежат зоне II, $c = 0.25$

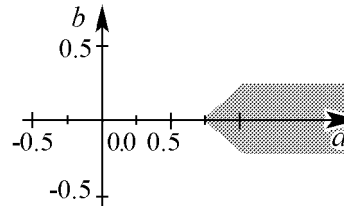


Рис. 4. Область существования циклов периода 1×0 , $c = 0.25$

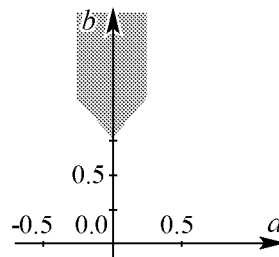


Рис. 5. Область существования циклов периода 0×1 , $c = 0.25$

Пусть $x(m, n)$ принадлежит зоне III, тогда

$$\begin{cases} x(m, n) = f(ax(m-1, n) + bx(m, n-1) + cx(m-1, n-1)), \\ x(m, n) = x(m-1, n-1) = 1, \end{cases}$$

что равносильно набору условий на коэффициенты, приведенным в табл. 3.

Таблица 3

Условия на коэффициенты, соответствующие различным значениям отсчетов при $x(m, n)$, принадлежащих зоне III, для цикла периода 1×1

№	$x(m-1, n)$	$x(m, n-1)$	Условия на коэффициенты
1	-1	-1	$-a - b + c \geq 0.5$
2	-1	0	$-a + c \geq 0.5$
3	-1	1	$-a + b + c \geq 0.5$
4	0	-1	$-b + c \geq 0.5$
5	0	0	$c \geq 0.5$
6	0	1	$b + c \geq 0.5$
7	1	-1	$a - b + c \geq 0.5$
8	1	0	$a + c \geq 0.5$
9	1	1	$a + b + c \geq 0.5$

На плоскости (a, b) этим условиям соответствует заштрихованная область на рис. 6. Следует отметить, что в отличие от предыдущих случаев здесь коэффициент $c = 0.75$, так как одно из неравенств требует выполнения условия $c \geq 0.5$. Вследствие симметричности функции нелинейности (2) набор условий и разбиение плоскости (a, b) для $x(m, n)$, принадлежащих зоне I, сохраняются неизменными.

Случаю $x(m, n)$, принадлежащих зоне II, соответствует набор условий на коэффициенты, приведенный в табл. 4.

Таблица 4

Условия на коэффициенты, соответствующие различным значениям отсчетов при $x(m, n)$, принадлежащих зоне II, для цикла периода 1×1

№	$x(m-1, n)$	$x(m, n-1)$	Условия на коэффициенты
1	1	1	$-0.5 < a + b < 0.5$
2	1	0	$-0.5 < a < 0.5$
3	1	-1	$-0.5 < a - b < 0.5$
4	0	1	$-0.5 < b < 0.5$
5	0	0	$-0.5 < 0 < 0.5$
6	0	-1	$-0.5 < -b < 0.5$
7	-1	1	$-0.5 < -a + b < 0.5$
8	-1	0	$-0.5 < -a < 0.5$
9	-1	-1	$-0.5 < -a - b < 0.5$

Таким образом, представленная на рис. 6 область соответствует циклам периода 1×1 для $x(m, n)$, принадлежащего любой из зон функции нелинейности. В отличие от циклов других периодов для ДПЦ с таким периодом любой ненулевой отсчет последовательностей начальных условий приводит к образованию диагонали аналогичных отсчетов на выходе фильтра.

Следует отметить, что если один из коэффициентов больше единицы, а два других лежат в интервале между -0.25 и 0.25 , на выходе возникает ДПЦ с периодом, зависящим от того, какой именно из коэффициентов превосходит единицу. В случае $a > 1$ это ДПЦ периода 1×0 ; если $b > 1$, то имеем цикл периода 0×1 ; условию $c > 1$ соответствует ДПЦ периода 1×1 .

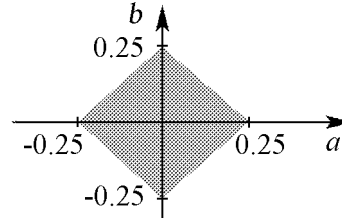


Рис. 6. Область циклов 1×1 , $x(m, n)$ принадлежат зоне III, $c = 0.75$

ДПЦ с периодом 2×0 . Пусть $x(m, n) = -x(m - 1, n)$, что соответствует ДПЦ периода 2×0 . Ограничения на коэффициенты, соответствующие данному типу движений, совпадают с набором условий для ДПЦ периода 1×0 с учетом замены $b \rightarrow -b$. Область, соответствующая таким ДПЦ, будет симметрична относительно оси b заштрихованной области на рис. 4.

ДПЦ с периодом 0×2 . В случае ДПЦ периода 0×2 прослеживается аналогичная закономерность. Для них справедливы условия существования ДПЦ периода 0×1 с учетом замены $a \rightarrow -a$. Им соответствует область, симметричная относительно оси a заштрихованной области на рис. 5.

Отдельно следует рассмотреть область, соответствующую отсутствию свободных колебаний на выходе системы при ненулевых начальных условиях. Этот случай описывается условием вида

$$\begin{cases} x(m, n) = f(ax(m - 1, n) + bx(m, n - 1) + cx(m - 1, n - 1)), \\ x(m, n) = 0, \end{cases}$$

что равносильно неравенству

$$-0.5 < ax(m - 1, n) + bx(m, n - 1) + cx(m - 1, n - 1) < 0.5.$$

С учетом функции нелинейности это приводит к условию

$$|a| + |b| + |c| < 0.5 \quad (3)$$

При выполнении (3) на выходе отсутствуют паразитные колебания, и рекурсивная система работает как фильтр. Следует отметить, что в области коэффициентов фигура, соответствующая (3), представляет собой октаэдр устойчивости (рис. 7), подобный найденному в [9].

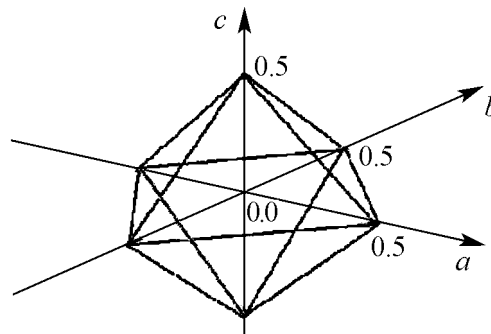


Рис. 7. Область отсутствия паразитных колебаний на выходе

5. Движения, соответствующие остальным областям пространства коэффициентов, не подходят под определение ДППЦ. В общем случае, для однозначного определения типа движений на выходе системы с тремя уровнями квантования необходимо определить значения отсчета $x(m, n)$ для всех возможных комбинаций отсчетов $x(m - 1, n)$, $x(m, n - 1)$ и $x(m - 1, n - 1)$. При функции нелинейности (2) число таких комбинаций равно 27. Однако вследствие симметричности характеристики сумматора их можно сократить до 13.

Рассмотрим это более подробно на примере одного из типов движений. Пусть движения на выходе происходят согласно правилам, содержащимся в табл. 5.

Разные типы выходных движений будут отличаться значениями правого столбца данной таблицы. Зная отсчеты сигнала $x(m - 1, n)$, $x(m, n - 1)$ и $x(m - 1, n - 1)$, с ее помощью можно однозначно определить отсчет $x(m, n)$ без решения разностного

Таблица 5

Правила движения на выходе системы

№	$x(m - 1, n)$	$x(m, n - 1)$	$x(m - 1, n - 1)$	$x(m, n)$
1	1	1	1	0
2	1	0	1	-1
3	1	-1	1	-1
4	0	1	1	1
5	0	0	1	0
6	0	-1	1	-1
7	-1	1	1	1
8	-1	0	1	1
9	-1	-1	1	1
10	1	1	0	0
11	1	0	0	-1
12	1	-1	0	-1
13	0	1	0	1
14	0	0	0	0
15	0	-1	0	-1
16	-1	1	0	1
17	-1	0	0	1
18	-1	-1	0	0
19	1	1	-1	1
20	1	0	-1	-1
21	1	-1	-1	-1
22	0	1	-1	1
23	0	0	-1	0
24	0	-1	-1	-1
25	1	1	-1	1
26	1	0	-1	1
27	-1	-1	-1	0

уравнения (1). Кроме того, эти правила полностью определяют движения на выходе, так как задают отсчет $x(m, n)$ для всех возможных комбинаций отсчетов из правой части разностного уравнения (1). Данному в табл. 5 набору соответствует система условий на коэффициенты, которые определяют область в пространстве коэффициентов, соответствующую этому типу движений на выходе системы.

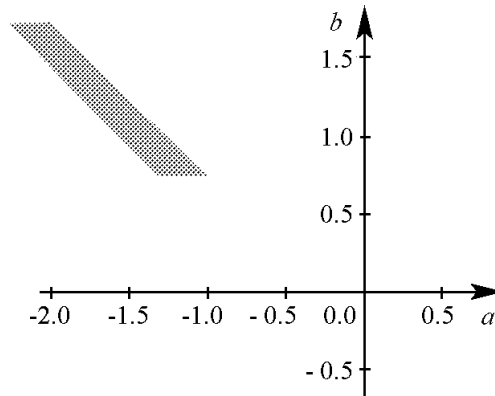


Рис. 8. Область существования заданного типа движений на выходе, $c = 0.25$

В связи с симметричностью функции нелинейности при нахождении области в пространстве коэффициентов, соответствующей данному типу движения, достаточно рассмотреть только первые 13 условий. Каждое из них можно сопоставить с условием на коэффициенты. Рассмотрим это более подробно на примере первого условия из табл. 5.

$$x(m-1, n) = 1, \quad x(m, n-1) = 1, \quad x(m-1, n-1) = 1, \quad x(m, n) = 0.$$

Так как $x(m, n) = 0$, справедливо неравенство

$$-0.5 < ax(m-1, n) + bx(m, n-1) + cx(m-1, n-1) < 0.5.$$

Подставив в него значения соответствующих отсчетов, получим

$$-0.5 < a + b + c < 0.5.$$

Найдя аналогичным образом оставшиеся 12 ограничений на коэффициенты, получим результирующий набор неравенств

$$\left\{ \begin{array}{l} -0.5 < a + b + c < 0.5 \\ a + c \leq -0.5 \\ a - b + c \leq -0.5 \\ b + c \geq 0.5 \\ -0.5 < c < 0.5 \\ -b + c \leq -0.5 \\ -a + b + c \geq 0.5 \\ -a + c \geq 0.5 \\ -a - b + c \geq 0.5 \\ -a + b \geq 0.5 \\ a \leq -0.5 \\ a - b \leq -0.5 \\ b \geq 0.5. \end{array} \right.$$

На плоскости (a, b) данному типу движений на выходе при $c = 0.25$ соответствует заштрихованная область, показанная на рис. 8.

При изменении вида начальных условий внешний вид сигнала тоже будет изменяться, однако правила движений в указанной области останутся неизменными.

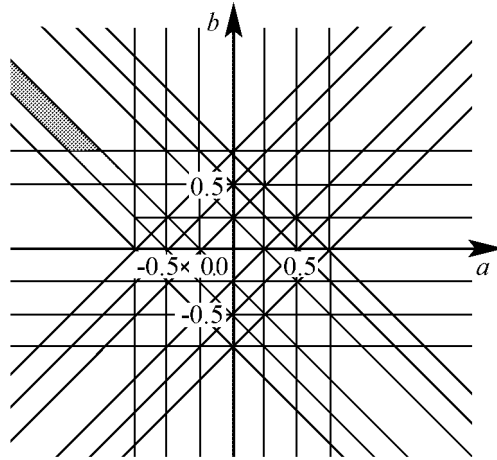


Рис. 9. Бифуркационная диаграмма двумерной рекурсивной цифровой системы первого порядка с характеристикой сумматора с насыщением и тремя уровнями квантования, $c = 0.25$

Аналогичным образом можно найти области существования всех остальных возможных типов движений на выходе. Уравнения плоскостей, разбивающих пространство коэффициентов фильтра на области определенных типов движений, представлены в табл. 6.

Общий вид бифуркационной диаграммы двумерной рекурсивной цифровой системы первого порядка при коэффициенте $c = 0.25$ представлен на рис. 9. Здесь каждой выделенной области пространства коэффициентов соответствует определенный тип движения, независимый от начальных условий. Выделенная область совпадает с областью, изображенной на рис. 8. Следует отметить, что оси координат a и b границами данных областей не являются.

Таблица 6

Уравнения плоскостей, разбивающих пространство коэффициентов системы на области определенных типов движений

№	Уравнение	№	Уравнение
1	$a = 0.5$	14	$a = -0.5$
2	$b = 0.5$	15	$b = -0.5$
3	$c = 0.5$	16	$c = -0.5$
4	$a + b = 0.5$	17	$a + b = -0.5$
5	$a + c = 0.5$	18	$a + c = -0.5$
6	$b + c = 0.5$	19	$b + c = -0.5$
7	$a - b = 0.5$	20	$a - b = -0.5$
8	$a - c = 0.5$	21	$a - c = -0.5$
9	$b - c = 0.5$	22	$b - c = -0.5$
10	$a + b + c = 0.5$	23	$a + b + c = -0.5$
11	$a + b - c = 0.5$	24	$a + b - c = -0.5$
12	$a - b + c = 0.5$	25	$a - b + c = -0.5$
13	$a - b - c = 0.5$	26	$a - b - c = -0.5$

6. Таким образом, представлена методика, позволяющая находить области в пространстве коэффициентов, соответствующие заданным типам движений. С ее помощью определены области двумерных предельных циклов различных периодов. Следует отметить, что данные типы движений являются паразитными для двумерных рекурсивных цифровых фильтров, основанных на исследуемых системах. Найдены аналитические условия на коэффициенты, соответствующие каждому из двумерных предельных циклов. Определена область отсутствия паразитных колебаний на выходе фильтра. Построена бифуркационная диаграмма системы. Результаты работы могут быть использованы для дальнейших исследований систем с большим числом уровней квантования, что позволит рассматривать данные системы как с помощью статистической, так и с помощью детерминированной моделей. Кроме того, они могут быть использованы при построении генераторов двумерных цифровых сигналов и изображений. Теоретические результаты подтверждены компьютерным моделированием.

Библиографический список

1. Даджион Д., Мерсеро Р. Цифровая обработка многомерных сигналов. М.: Мир, 1988. 488 с.
2. Chang T. Limit cycles in a two-dimensional first-order digital filter // IEEE Trans. Circuits Syst. 1977. Vol. CAS-24, № 1. P. 15.
3. Каппелини В., Константинодис А., Эмилиани П. Цифровые фильтры и их применение. М.: Энергоатомиздат, 1983. 360 с.
4. Bose T., Brown D. Zero-input limit cycles due to rounding in digital filters // IEEE Trans. Circuits Syst. 1989. Vol. 6. P. 931.
5. D'Addario L., Thompson A., Schwab F., Granlund J. Complex cross correlators with three-level quantization design tolerances // Radio Sci. 1984. Vol. 19. P. 931.
6. Брюханов Ю.А. Эффекты квантования в цифровых рекурсивных фильтрах первого порядка с усечением по величине // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2002. Т. 10, № 6. С. 35.
7. Брюханов Ю.А. Колебания в цифровых рекурсивных фильтрах первого порядка с представлением чисел в дополнительном коде с округлением // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2004. Т. 12, № 1-2. С. 10.
8. Rudyh D.V., Lebedev M.V., Khryashchev V.V., Priorov A.L. Investigation of the two-dimensional first-order recursive digital filters with saturation nonlinearity // Proc. of the 11-th Workshop on «Nonlinear Dynamics of Electronic Systems» (NDES'2003), Switzerland, 2003. P. 213.
9. Брюханов Ю.А., Приоров А.Л., Мясников Е.А., Калинин С.А. Частотные свойства двумерных рекурсивных цифровых систем первого порядка // Изв. вузов. Радиоэлектроника. 1995. № 4. С. 26.

Ярославский государственный
университет им. П.Г. Демидова

Поступила в редакцию
После доработки

1.02.2005
4.07.2005

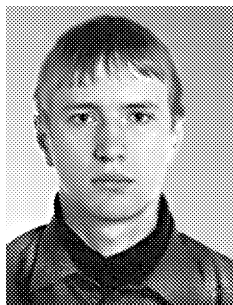
OSCILLATIONS IN AUTONOMOUS 2-D RECURSIVE DIGITAL SYSTEMS OF FIRST ORDER WITH THREE LEVELS OF QUANTIZATION

Yu.A. Bryhanov, D.V. Rudykh, A.L. Priorov

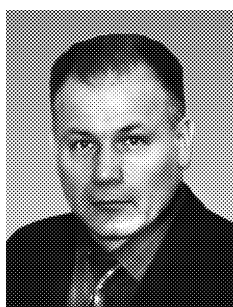
Processes in autonomous 2-D digital recursive filters of first order with three levels of quantization are investigated. Method of bifurcation diagram construction is proposed. With its help conditions of existence of the determine input movements types expressed through coefficients of the filter are found.



Брюханов Юрий Александрович – родился в Красноярске (1941), окончил Красноярский политехнический институт (1967) и аспирантуру Воронежского государственного университета (1970). С 1971 года работает в Ярославском государственном университете, в настоящее время заведует кафедрой динамики электронных систем. Защитил кандидатскую диссертацию (1971) и докторскую диссертацию (1989) в области применения теории колебаний в задачах радиопизики и электроники. Область научных интересов – нелинейная динамика электронных систем дискретного времени. Автор монографии «Управление динамическим режимом колебательных систем» и более 180 статей. Заслуженный деятель науки РФ.



Рудых Дмитрий Владимирович – родился в 1979 году в Ярославле. В 2002 году окончил физический факультет Ярославского государственного университета им. П.Г. Демидова. Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата технических наук (2006 г.). Область научных интересов – нелинейная динамика двумерных цифровых фильтров.



Приоров Андрей Леонидович – родился в 1959 году в Ярославской области. В 1986 году окончил физический факультет Ярославского государственного университета им. П.Г. Демидова. Кандидат технических наук, доцент кафедры динамики электронных систем. Область научных интересов – нелинейная динамика двумерных цифровых систем, цифровая обработка речевых сигналов и изображений.



ЭФФЕКТЫ ВЛИЯНИЯ НИЗКОЧАСТОТНОГО МАГНИТНОГО ПОЛЯ НА ХАРАКТЕРИСТИКИ ФИЗИОЛОГИЧЕСКОГО ТРЕМОРА

О.Н. Павлова, А.Н. Тупицын, А.Н. Павлов

На основе техники вейвлет-анализа проведено исследование изменений характеристик физиологического тремора при воздействии слабого низкочастотного магнитного поля. Рассмотрены различные возможности анализа структуры экспериментальных данных с помощью действительных и комплексных базисных функций вейвлет-преобразования. Обнаружено, что магнитное поле оказывает влияние на локальную регулярность исследуемых процессов и на их энергетические характеристики.

Введение

В повседневной жизни человек постоянно встречается с различными источниками низкочастотного магнитного поля, такими как домашние электрические приборы, линии электропередачи или бытовая электропроводка. Сотрудники электрических компаний, например, регулярно работают в непосредственной близости от оборудования, которое генерирует магнитные поля от нескольких единиц до нескольких сотен мкТл [9]. При использовании бытовой техники (электробритва, фен и т.п.) магнитные поля, создаваемые этими приборами, могут достигать 1500-2000 мкТл [2]. Реакции организма на наличие магнитных полей характеризуются разнообразием и неустойчивостью. Это в значительной степени определяется большими различиями индивидуальной чувствительности к ним как организма в целом, так и отдельных его систем. Направленность реакции на воздействие магнитного поля зависит от исходного состояния организма и его важнейших функциональных систем. Например, воздействие на фоне повышенной функции приводит к ее снижению, а в условиях угнетения функции сопровождается ее повышением. С этих позиций действие слабого магнитного поля может рассматриваться как нормализующее. Наиболее чувствительной к наличию магнитного поля считается центральная нервная система, прежде всего гипоталамус, таламус, кора головного мозга [3]. Под влиянием магнитного поля изменяется условно-рефлекторная деятельность мозга с преимущественным развитием тормозных процессов в центральной нервной системе, что оказывает благоприятное влияние на сон, уменьшение эмоционального напряжения. Эти обстоятельства являются причиной использования магнитных полей в терапевтических

целях. В частности, при магнитотерапии понижается чувствительность периферических рецепторов и улучшается функция проводимости. Следствием первого можно считать обезболивающее действие магнитного поля, следствием второго – благоприятное влияние на восстановление функций травмированных периферических нервов. В то же время длительное воздействие сильных высокочастотных магнитных полей оказывает негативное влияние на центральную нервную систему, приводя к повышенной утомляемости, головным болям и т.п. В зависимости от частоты и напряженности магнитного поля в коре больших полушарий мозга могут развиваться процессы торможения и возбуждения, происходить изменения суммации возбуждения в нервных клетках головного и спинного мозга [3].

Эффекты воздействия полей с малым значением индукции (до 2000 мкТл) на центральную и периферическую нервную систему человека до сих пор остаются малоизученными. Главная причина этого состоит в сложности их анализа на основе классических нейрофизиологических данных, таких как электроэнцефалограмма или вызванные потенциалы. Экспериментальные записи электрической активности мозга «загрязняются» самим магнитным полем [4], что очень затрудняет выявление возможных изменений нейрофизиологических параметров. Одна из возможностей обойти данную проблему состоит в косвенном изучении эффектов влияния поля на моторные функции, которые являются индикаторами функционирования нервной системы человека [5, 6], в частности, на характеристики физиологического тремора.

Тремор представляет собой произвольные, нерегулярные и непрерывные движения конечностей тела и характеризуется амплитудой (обычно очень малой и различающейся у разных людей) и частотой, составляющей примерно 8-12 Гц [7]. Известно, что физиологический тремор чувствителен более чем к 30 различным факторам [6], в том числе и к влиянию центральной нервной системы. Это влияние в значительной степени зависит от состояния человека и условий окружающей среды, однако механизмы, лежащие в его основе, еще недостаточно хорошо установлены [8]. Тремор можно наблюдать, например, когда человек старается держать неподвижными пальцы вытянутых рук. Эффекты влияния слабого магнитного поля (1000 мкТл, 50 Гц), генерируемого на уровне головы человека, на характеристики физиологического тремора изучались в работе [9] с помощью стандартного аппарата статистического анализа экспериментальных данных. Нами исследованы изменения характеристик тремора при включении переменного магнитного поля с помощью техники вейвлет-анализа, представляющей собой наиболее мощный в настоящее время инструмент исследования структуры нестационарных процессов [10, 11].

1. Эксперименты

Эксперименты по исследованию влияния низкочастотного магнитного поля на характеристики физиологического тремора проводились на добровольцах из числа сотрудников французской компании «Electricité De France», соответствующие экспериментальные данные были предоставлены нам коллегами из университета г. Бордо. В исследованиях принимали участие 24 человека в возрасте от 20 до 50 лет. Все участники проходили предварительный медицинский осмотр в своей компании для того, чтобы удостовериться, что они не имеют хронических заболеваний сердечно-

сосудистой или нервной системы. Эксперименты проводились в одно и то же время суток при одинаковой комнатной температуре. Испытуемые садились на стул, расположенный в центре специальной установки, генерирующей переменное магнитное поле 1000 мкТл, 50 Гц на уровне головы человека. Установка была экранирована от внешних магнитных полей. Правая рука испытуемого помещалась на подлокотник ладонью к полу. На ногте указательного пальца был закреплен маленький кусочек белого картона, а над кусочком картона на высоте 8 см располагался лазерный датчик LM10 (серия ARN12, Япония), являющийся одновременно и излучателем (лазер) и приемником, на вход которого поступает отраженный от объекта лазерный луч. Специальная конструкция асферических линз обеспечивала высокое качество измерения. В первую очередь, это относилось к высокой степени линейности характеристики измерителя. Лазерный датчик позволял записывать вертикальные перемещения пальца с разрешением 5 мкм и оцифровкой по времени 5 мс. Впереди испытуемого находился осциллограф, который демонстрировал развертку траектории движения указательного пальца и горизонтальную линию, которая отмечала «рекомендуемое» расположение указательного пальца. Поскольку эксперимент длился долго, испытуемый мог в процессе сместить руку. Осциллограф был нужен для того, чтобы контролировать эти смещения. На участников исследования надевали антишумовые шлемы для изоляции от окружающего шума. В ходе каждого эксперимента (длительностью 65 минут) проводились две последовательности измерений. Первая из них («real») содержала два включения и два выключения магнитного поля, то есть по два перехода «on/off» и «off/on» (рис. 1, *a*). Вторая последовательность («sham») являлась тестовой – испытуемый считал, что она ничем не отличается от первой, но на самом деле магнитное поле при переходе «off/on» не включалось. Ход эксперимента управлялся компьютером, и испытуемый не знал, присутствует ли поле на самом деле или нет. Это делалось для того, чтобы выявить возможные изменения характеристик тремора, обусловленные непосредственно влиянием магнитного поля.

Для анализа выбирались временные зависимости мгновенной скорости движения указательного пальца, которые были получены путем дифференцирования записей значений координаты его вертикального перемещения. Выбор данных сигналов был обусловлен несколькими причинами. Во-первых, временной ряд вертикального перемещения является сильно нестационарным, поскольку указательный палец не фиксируется, и испытуемый может совершать его произвольные перемещения, которые оказываются очень существенными по сравнению с амплитудой тремора.

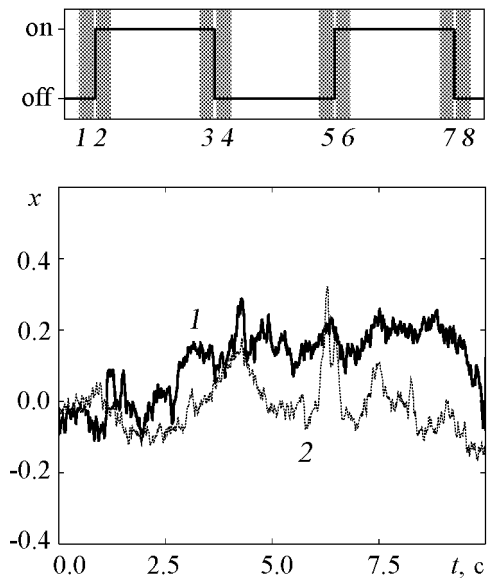


Рис. 1. *a* – экспериментальная последовательность, содержащая два включения и два выключения магнитного поля; *b* – примеры экспериментальных данных, соответствующих состояниям 2 и 4

С точки зрения техники вейвлет-анализа, используемого в настоящей работе, данная нестационарность не является принципиальным моментом и, фактически, просто фильтруется, однако для стандартных методов обработки данных (анализ амплитудных характеристик и т.п.) использование временного ряда вертикального перемещения способно приводить к некорректной интерпретации результатов. Во-вторых, в известных нам работах по исследованию характеристик тремора (например, [3, 9]) исследовалась именно структура временного ряда скорости вертикального перемещения. В целях сопоставления полученных результатов с результатами аналогичных работ по данной тематике нам представляется целесообразным проведение исследований на сигналах одной и той же структуры. Для дифференцирования зашумленного сигнала рассматривался подход, хорошо зарекомендовавший себя в ранее проводимых нами исследованиях [12], а именно, производная в данной точке оценивалась с помощью метода наименьших квадратов по нескольким ближайшим соседям. Более детальное описание приводится, в частности, в [12].

Наличие магнитного поля приводило к появлению артефактов на частоте 50 Гц. Поскольку тремор соответствует диапазону меньших частот, проводилась предварительная фильтрация данных с помощью полосового фильтра, устраняющего динамику выше 40 Гц (высокочастотный шум) и ниже 2 Гц (медленная нестационарность или тренд).

2. Вейвлет-анализ

Исследования характеристик физиологического тремора при воздействии переменного низкочастотного магнитного поля проводились в работе [9] на основе стандартных методов статистической обработки сигналов мгновенной скорости движения указательного пальца, включая вычисление амплитуды и частоты, различных характеристик функции плотности распределения и энергии в разных частотных диапазонах. Эти характеристики не выявили значительных изменений в структуре сигналов для переходов «on/off» и «off/on». Учитывая, что речь идет о слабых магнитных полях, отсутствие существенных различий не является неожиданным результатом – если происходят изменения характеристик тремора, то они будут небольшими. В то же время необходимо отметить, что анализируемые данные являются нестационарными (рис. 1, б), что снижает достоверность оценок статистических характеристик, приводя, в частности, к «расплыванию» функции плотности распределения, уменьшению надежности расчета амплитуды и т.д. Для исследования нестационарных процессов в динамике живых систем целесообразно применять специальные методы, эффективность которых не зависит от свойства стационарности анализируемых сигналов. Наиболее универсальным методом исследования структуры нестационарных данных в настоящее время является вейвлет-анализ [10, 11].

Вейвлет-преобразование сигнала $x(t)$ имеет следующий вид:

$$W(a, b) = \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \psi^* \left(\frac{t-b}{a} \right) dt. \quad (1)$$

Здесь $W(a, b)$ – коэффициенты преобразования, ψ – базисная функция (вейвлет), a – масштаб наблюдения, b – параметр смещения вдоль оси времени, символом «*» обо-

значена операция комплексного сопряжения. Выбор функции ψ определяется целями исследования. Каждая функция имеет свои особенности во временной и в частотной областях, поэтому с помощью разных функций можно лучше выявить те или иные свойства рассматриваемого процесса.

2.1. Анализ на основе действительных базисных функций. Некоторые особенности сигнала $x(t)$ не зависят от выбора базисной функции ψ , в частности, локальная регулярность, анализ которой осуществляется в рамках концепции мультифрактального формализма [13, 14]. Данный анализ проводится с помощью действительных вейвлетов, сконструированных, например, на основе производных функции Гаусса

$$\psi^{(m)}(\tau) = (-1)^m \frac{\partial^m}{\partial \tau^m} \left[\exp\left(-\frac{\tau^2}{2}\right) \right]. \quad (2)$$

Результатом преобразования (1) является поверхность в 3-мерном пространстве. Ее визуализация часто проводится в виде проекции на плоскость (a, b) , в которой разные значения коэффициентов $W(a, b)$ изображаются разными оттенками цвета. Считается, что наиболее важная информация об этой поверхности содержится в скелетоне – линиях локальных экстремумов вейвлет-коэффициентов $W(a, b)$, которые можно выявить, фиксируя масштаб a и двигаясь вдоль параметра b . В результате получается множество линий разной длины: одни из них обрываются на малых масштабах, другие являются значительно более длинными (рис. 2). Каждая из линий при $a \rightarrow 0$ выходит из точки, в которой исходный сигнал имеет какую-то особенность (сингулярное поведение). Статистический анализ сингулярностей нестационарных процессов проводится с помощью метода максимумов модулей вейвлет-преобразования (ММВП) [14]. Детали данного подхода и особенности его применения к экспериментальным данным можно найти в работах [15].

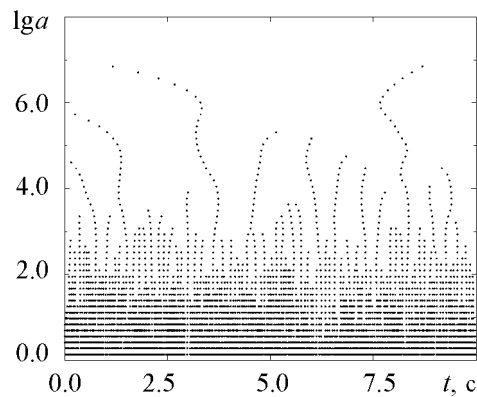


Рис. 2. Характерный вид скелетона, вычисленного для одного из сигналов, изображенных на рис. 1,б

Основная идея метода ММВП состоит в следующем. После выделения скелетона осуществляется построение частичных функций по формуле

$$Z(q, a) = \sum_{l \in L(a)} |W(a, b_l(a))|^q, \quad (3)$$

где $L(a)$ – множество всех линий (l) максимумов модулей вейвлет-коэффициентов, существующих на масштабе a . Значение $b_l(a)$ характеризует расположение на этом масштабе максимума, относящегося к линии l . Для частичных сумм выполняется степенная зависимость вида

$$Z(q, a) \sim a^{\tau(q)}, \quad (4)$$

в которой показатели степени $\tau(q)$ называют скейлинговыми экспонентами. Статистический анализ сингулярного поведения процесса $x(t)$ осуществляется в терминах экспонент Хелдера $h(q) = d\tau(q)/dq$ и спектра сингулярностей $D(h) = qh - \tau(q)$. Более подробное описание данных характеристик и метода ММВП приводится в [14]. Отметим, что значения экспонент Хелдера характеризуют наличие корреляций разной длительности в анализируемом процессе, например, антикоррелированную ($h < 0.5$) и коррелированную динамику ($h > 0.5$), отсутствие корреляций ($h = 0.5$), а также соответствие сигнала $x(t)$ по своим статистическим свойствам известным примерам случайных процессов – (1/f)-шуму ($h = 1$), броуновскому движению ($h = 1.5$) и т.д. Частичные функции $Z(q, a)$ при $q < 0$ характеризуют степенные закономерности вида (2) для слабых сингулярностей (малых флуктуаций в анализируемом процессе), а при $q > 0$ – для сильных сингулярностей (больших флуктуаций).

2.2. Анализ на основе комплексных базисных функций. Спектральный анализ нестационарных процессов в настоящее время обычно проводится на основе вейвлет-преобразования с использованием комплексных базисных функций [16]. Преимущества данного подхода по сравнению с классическим спектральным анализом, базирующемся на финитном преобразовании Фурье, неоднократно обсуждались в печати. Если исследователя интересует только факт наличия каких-либо периодических составляющих в анализируемом процессе, то для их выявления можно использовать классические методы. Если же необходимо получить информацию о временной эволюции ритмических компонент и изменении структуры сигнала во времени, то вейвлеты, несомненно, оказываются предпочтительнее.

Наиболее популярной комплексной базисной функцией является вейвлет Морле, формулу которого упрощенно можно записать следующим образом:

$$\psi(\tau) = \pi^{-1/4} \exp(j2\pi f_0\tau) \exp\left[-\frac{\tau^2}{2}\right]. \quad (5)$$

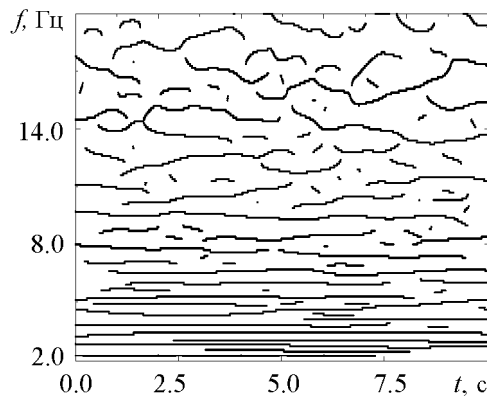


Рис. 3. Частотно-временной спектр, иллюстрирующий сложную структуру спектральных линий в анализируемом процессе

энергетическим спектром. Наиболее важная информация об этой поверхности содержится в поведении локальных максимумов, то есть во временной эволюции мгновен-

Преобразование (1) представляет собой двумерное разложение скалярного сигнала, при котором частота $f = f_0/a$ и время, определяющееся величиной параметра b , интерпретируются как независимые переменные. В отличие от случая действительных базисных функций при проведении спектрального анализа с помощью вейвлета (5) вместо коэффициентов $W(a, b)$ обычно анализируют плотность энергии $E(f, b) = |W(f, b)|^2$. Плотность энергии также представляет собой поверхность в 3-мерном пространстве, сечения которой в фиксированные моменты времени соответствуют локальным

ных частот характерных ритмов. Их выделение проводится по аналогии с выделением скелетона в разделе 2.1, однако различие состоит в том, что теперь фиксируется параметр b , и поиск локальных максимумов поверхности $E(f, b)$ (пиков локальных энергетических спектров) осуществляется при движении вдоль параметра масштаба a (или частоты $f = f_0/a$). В результате данной процедуры в каждый момент времени регистрируются значения мгновенных частот всех ритмов, присутствующих в анализируемом процессе (рис. 3).

Наряду с локальными энергетическими спектрами через плотность энергии вычисляется еще ряд характеристик, в частности, мера локальной перемежаемости (локальных отклонений от среднего значения на каждом масштабе), характеризующая степень неравномерности распределения энергии [16]

$$I(f, b) = \frac{E(f, b)}{\langle E(f, b) \rangle}. \quad (6)$$

Здесь угловыми скобками обозначена операция усреднения по времени, то есть по параметру b . В качестве количественной характеристики неравномерности распределения энергии для каждой частоты f можно вычислить величину стандартного отклонения меры $I(f, b)$ от среднего значения $\langle I(f, b) \rangle = 1$. Для сложных шумоподобных процессов, изображенных на рис. 1, b , имеет смысл провести дополнительное усреднение в пределах некоторого частотного окна, которое позволит сгладить сильные вариации данной характеристики.

3. Результаты

3.1. Анализ локальной регулярности с помощью действительных вейвлетов. Учитывая способность живых организмов к адаптации, исследование возможных изменений в характеристиках физиологического тремора проводилось на небольших интервалах времени сразу после включения поля (состояния 2 и 6 на рис. 1, a) по сравнению с динамикой при выключенном поле (состояния 4 и 8). Как отмечается в работе [9], зафиксировать эффекты воздействия магнитного поля можно по первым 10 секундам экспериментальной записи после переходов «off/on» и «on/off». Этот диапазон времени соответствует переходной динамике, то есть нестационарному процессу, что обуславливает необходимость применения специальных методов анализа структуры сигналов.

На рис. 4 приведены результаты, демонстрирующие изменения характеристик тремора при наличии магнитного поля. Они свидетельствуют об изменении локальной регулярности сигналов и корреляционных свойств. В данном случае в отсутствие поля временная зависимость мгновенной скорости движения указательного пальца представляет собой неоднородный случайный процесс, близкий по статистическим характеристикам к нормальному броуновскому движению на малых масштабах и к $(1/f)$ -шуму на больших. Включения поля приводят к увеличению значений экспонент Хелдера (рис. 4, a) и соответствующему смещению спектра сингулярностей (рис. 4, b), что свидетельствует о том, что сигнал становится более «гладким».

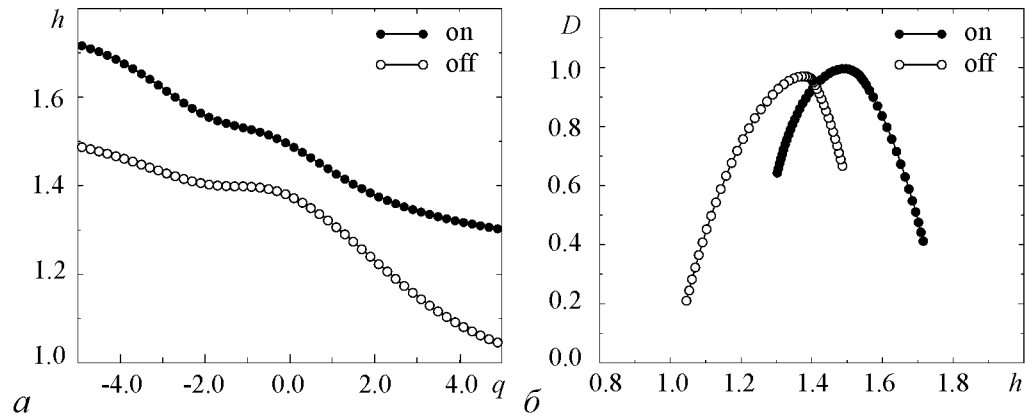


Рис. 4. Пример изменений локальной регулярности сигналов при наличии магнитного поля. Расчеты экспонент Хелдера (а) и спектров сингулярностей (б) приведены для сигналов, изображенных на рис. 1, б

Следует отметить, что характеристики физиологического тремора заметно варьируются у разных людей, в связи с чем необходимо проведение статистического анализа по группе. Несмотря на то, что разброс экспонент Хелдера при этом оказывается достаточно велик, в среднем продемонстрированная тенденция роста значений h при включении поля сохраняется (рис. 5, черные точки). Таким образом, наличие слабого низкочастотного магнитного поля приводит к незначительному увеличению «гладкости» анализируемых сигналов. Отметим, что в тестовой последовательности («sham»), когда поле не включалось при переходе «off/on» (а испытуемый полагал, что оно присутствует), изменений локальной регулярности сигналов не было зафиксировано (рис. 5, белые точки).

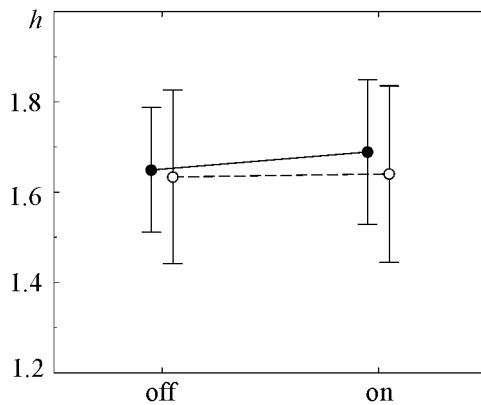


Рис. 5. Статистический анализ изменений локальной регулярности сигналов. Здесь и далее черные точки соответствуют последовательности «real», белые – последовательности «sham». Незначительное увеличение экспонент Хелдера происходит только для первой последовательности

Приведенные результаты статистического анализа получены для базисной функции «WAVE», представляющей собой первую производную функции Гаусса (2), то есть $m = 1$. Использование других вейвлетов, например, «МНАТ» ($m = 2$) позволяет сделать аналогичные выводы. Отметим, что достоверное изменение структуры скелетона для состояний «on» и «off», то есть числа линий L локальных экстремумов (для одного и того же базисного вейвлета) не было обнаружено, существующие различия проявлялись только в скейлинговом поведении частных функций $Z(q, a)$ и, как следствие, в спектре сингулярностей.

3.2. Анализ структуры сигналов на основе комплексного базиса. Использование комплексных вейвлетов позволяет проводить локальный спектральный анализ нестационарных процессов и оценивать глобальный энергетический спектр, который является аналогом классического спектра мощности [16]. Поиск различий в харак-

теристиках физиологического тремора по экспериментальным спектрам проводилась путем вычисления величины средней энергии в разных частотных диапазонах. Такой анализ не позволил выявить достоверные отличия, в связи с чем основное внимание было уделено анализу локальной перемежаемости. С этой целью вейвлет-преобразование проводилось с разрешением по частоте 0.1 Гц, $f_0 = 5$ Гц. Стандартное отклонение (σ_I) меры $I(f, b)$ оценивалось внутри частотного окна шириной 2 Гц, центр которого перемещался в диапазоне от 3 до 15 Гц. Это позволило уменьшить сильные вариации оцениваемой величины, получив достаточно гладкие зависимости σ_I от частоты (рис. 6, *a*). Как видно из данного рисунка, при включенном поле наблюдается незначительное уменьшение неравномерности распределения энергии, характеризующее слабо выраженный эффект перехода к более упорядоченной динамике.

Так же, как и при расчете экспонент Хелдера, результаты вычисления σ_I значительно варьируются для разных экспериментальных данных (рис. 6, *б*). Тем не менее можно отметить, что эффект уменьшения неравномерности распределения энергии наблюдается при включенном магнитном поле (последовательность «real») и отсутствует в случае, когда поле не включалось при переходе «off/on» (последовательность «sham»). Для оценки значимости изменений характеристик тремора, обусловленных включением поля, нами был проведен статистический дисперсионный анализ (ANOVA). В частности, при исследовании характеристик локальной перемежаемости (последовательность «real») для уровня значимости $p = 0.05$ получено значение статистического критерия Фишера $F = 3.92$, позволяющее сделать вывод о том, что наблюдаемые изменения характеристик можно считать значительными (то есть эти изменения продиктованы не случайными причинами или погрешностями, а влиянием магнитного поля). Для тестовой последовательности «sham» достоверные изменения не наблюдаются ($F = 1.2$).

Еще одним вариантом изменения динамики может служить появление дополнительных спектральных пиков в частотно-временных спектрах (см. рис. 3). Увеличение числа точек на этом рисунке может иметь разную интерпретацию. Оно может свидетельствовать либо о появлении новых спектральных компонент, либо

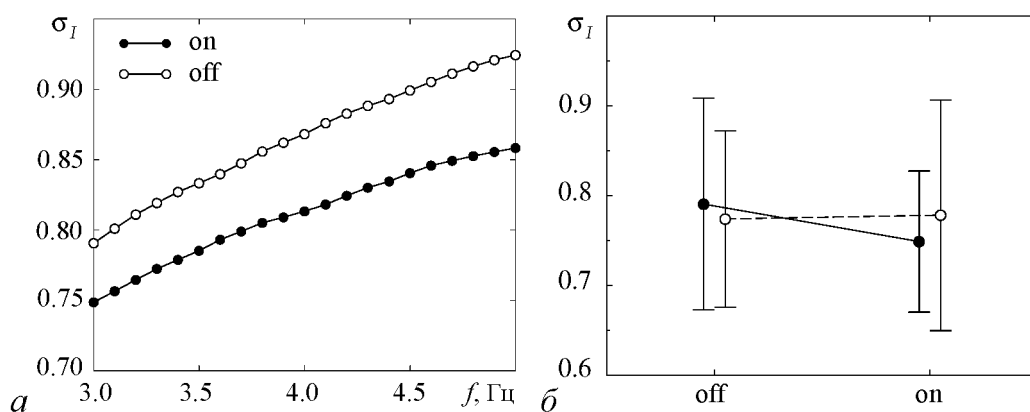


Рис. 6. Усредненные значения стандартного отклонения меры локальной перемежаемости (*a*) и результаты статистического анализа (*б*). Наличие магнитного поля приводит к уменьшению разброса значений $I(f, b)$. Соответствующий эффект наблюдается только для экспериментальных последовательностей «real» и отсутствует для тестовых последовательностей «sham»

о большей стабильности существующих спектральных линий (в ситуации, когда какой-нибудь ритм то появляется, то исчезает, его стабилизация будет сопровождаться отсутствием «прерываний», что приводит к увеличению числа локальных пиков частотно-временных спектров). Поэтому соответствующие изменения нельзя однозначно трактовать в терминах увеличения или уменьшения сложности динамики. Более корректно будет говорить о количественной характеристике вейвлет-спектров, позволяющей отслеживать изменения в структуре анализируемых процессов.

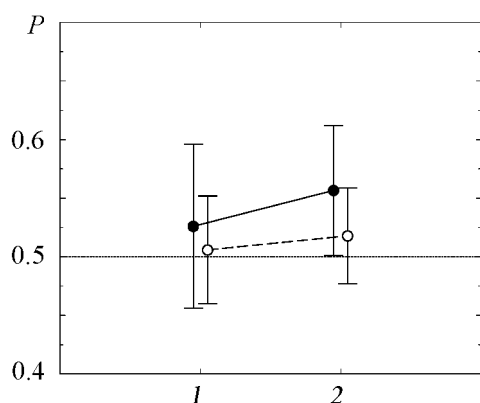


Рис. 7. Изменение вероятности увеличения числа пиков локальных энергетических спектров в состоянии «on» по сравнению с «off» до (1) и после (2) моментов переключения поля

Данная количественная характеристика оценивалась следующим образом. Вначале проводилось вычисление разности числа локальных пиков частотно-временных спектров между состояниями «on» и «off» перед моментами переключения поля в пределах скользящего частотного окна шириной 2 Гц. Путем усреднения по группе определялась вероятность увеличения числа пиков локальных энергетических спектров в состоянии «on» по сравнению с «off». Затем анализировалось, как изменится эта вероятность после моментов переключения поля. Рис. 7 демонстрирует полученные для частотного диапазона 2-5 Гц

результаты. Мы видим, что после переключения поля вероятность увеличивается (см. рис. 7, черные точки). Для последовательности «sham» такой эффект не наблюдается – вычисленные значения близки к 0.5, что отражает отсутствие достоверных различий в структуре вейвлет-спектров между «on» и «off»: примерно в половине случаев число пиков локальных энергетических спектров увеличивается в состоянии «on» по сравнению с «off», в половине – уменьшается (см. рис. 7, белые точки). Соответствующие изменения для последовательности экспериментов «real» являются более четко выраженными.

Заключение

В данной работе на основе методов вейвлет-анализа было проведено исследование чувствительности характеристик физиологического тремора к воздействию слабого низкочастотного магнитного поля. Влияние сильных полей на моторные функции организма ранее описывалось в научной литературе, однако эффекты, обусловленные полями с малым значением индукции, до сих пор детально не изучались. В связи с этим на данном этапе представляется важным выявить сам факт наличия достоверных изменений характеристик тремора, вызванных магнитным полем, с тем чтобы в дальнейшем обнаруженные эффекты могли получить физиологическую интерпретацию.

Учитывая нестационарный характер анализируемых процессов, исследования проводились на основе методов вейвлет-анализа с различными базисными

функциями как действительными, так и комплексными. Было показано, что слабое магнитное поле приводит к следующим эффектам:

- слабому увеличению локальной регулярности сигналов и, как следствие, к изменению корреляционных свойств анализируемых процессов;
- уменьшению разброса количественных характеристик локальной перемежаемости, то есть более равномерному распределению энергии;
- увеличению количества пиков локальных энергетических спектров в области 2-5 Гц.

Отмеченные эффекты являются весьма незначительными в связи с тем, что воздействующее магнитное поле было слабым. Тем не менее они позволяют говорить о том, что включение магнитного поля действительно находит отражение в характеристиках физиологического тремора.

Полученные результаты позволяют определить ряд перспективных задач, которые могут быть решены после проведения дополнительных экспериментов. В частности, представляет интерес оценить длительности последствий – насколько быстро характеристики тремора возвращаются к исходным значениям после выключения поля. Другой открытый вопрос состоит в оценке величины задержки между моментом включения поля и откликом организма на данное воздействие. Мы надеемся, что эти задачи будут решены в ходе дальнейших исследований.

Авторы благодарят А. Beuter и А. Legros за предоставленные экспериментальные данные, а также О.В. Сосновцеву и Е. Mosekilde за обсуждение результатов и многочисленные дискуссии.

Проводимые исследования были поддержаны Министерством образования и науки РФ по программе «Развитие научного потенциала высшей школы (2006-2008 гг.)».

Библиографический список

1. *Gandhi O.P., Kang G., Wu D., Lazzi G.* Currents induced in anatomic models of the human for uniform and nonuniform power frequency magnetic fields // *Bioelectromagnetics*. 2001. Vol. 22(2). P. 112.
2. *Gauger J.R.* Household appliance magnetic field survey // *IEEE Transactions on Power apparatus and systems*. 1985. Vol. 104. P. 9.
3. *Beuter A., Glass L., Mackey M.C., Titcombe M.S.* *Nonlinear Dynamics in Physiology and Medicine* (Springer-Verlag, New York, 2003).
4. *Cook C.M., Thomas A.W., Prato F.S.* Resting EEG is affected by exposure to a pulsed ELF magnetic field // *Bioelectromagnetics*. 2004. Vol. 25(3). P. 196.
5. *Thomas A.W., Drost D.J., Prato F.S.* Human subjects exposed to a specific pulsed (200 microT) magnetic field: effects on normal standing balance // *Neurosci. Lett*. 2001. Vol. 297. P. 121.
6. *Wachs H., Boshes B.* Tremor studies in normals and in Parkinsonism // *Arch. Neurol*. 1961. Vol. 4. P. 66.
7. *Elble R.J., Koller W.C.* *Tremor*. The John Hopkins University press, London, 1990.

8. *McAuley J.H., Marsden C.D.* Physiological and pathological tremors and rhythmic central motor control // *Brain*. 2000. Vol. 123. P. 1545.
9. *Legros A., Beuter A.* Effect of a low intensity magnetic field on human behavior // *Bioelectromagnetics*. 2006 (in press).
10. *Grossman A., Morlet J.* Decomposition of hardy functions into square integrable wavelets of constant shape // *S.I.A.M. J. Math. Anal.* 1984. Vol. 15. P. 723; *Daubchies I.* Ten lectures on Wavelets. Philadelphie, S.I.A.M., 1992; *Meyer Y. (ed.)* Wavelets and Applications. Springer-Verlag, Berlin, 1992.
11. *Chui C.K.* An Introduction to Wavelets. New York, Academic Press, 1992; *Столниц Э., ДеРоуз Т., Салезин Д.* Вейвлеты в компьютерной графике. Ижевск. НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2002; *Короновский А.А., Храмов А.Е.* Непрерывный вейвлетный анализ. Саратов, изд-во ГосУНЦ «Колледж», 2002.
12. *Janson N.B., Pavlov A.N., Anishchenko V.S.* Global reconstruction: application to biological data and secure communication // Invited chapter in book *Chaos and its reconstruction* / Eds. G.Gouesbet, S.Meunier-Guttin-Cluzel. Novascience publishers, New York, 2003. P. 287.
13. *Mallat S.G.* A Wavelet Tour of Signal Processing. San Diego, Academic Press, 1998.
14. *Muzy J.F., Bacry E., Arneodo A.* The multifractal formalism revisited with wavelets // *Int. J. Bifurcation and Chaos*. 1994. Vol. 4. P. 245.
15. *Muzy J.F., Bacry E., Arneodo A.* Multifractal formalism for fractal signals: the structure-function approach versus the wavelet-transform modulus-maxima method // *Phys. Rev. E*. 1993. Vol. 47. P. 875; *Ivanov P.Ch., Nunes Amaral L.A., Goldberger A.L., Havlin S., Rosenblum M.G., Struzik Z.R., Stanley H.E.* Multifractality in human heartbeat dynamics // *Nature*. 1999. Vol. 399. P. 461; *Павлов А.Н., Зиганшин А.Р., Анищенко В.С.* Мультифрактальный анализ временных рядов // *Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика*. 2001. Т. 9. № 3. С. 39; *Pavlov A.N., Sosnovtseva O.V., Ziganshin A.R., Holstein-Rathlou N.-H., Mosekilde E.* Multiscality in the dynamics of coupled chaotic systems// *Physica A*. 2002. Vol. 316, P. 233.
16. *Астафьева Н.М.* Вейвлет-анализ: основы теории и примеры применения // *Успехи физических наук*. 1996. Т. 166. № 11. С. 1145.

Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского *Поступила в редакцию* 8.05.2006
После доработки 1.09.2006

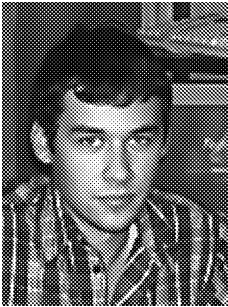
INFLUENCE OF LOW-FREQUENCY MAGNETIC FIELD ON CHARACTERISTICS OF PHYSIOLOGICAL TREMOR

O.N. Pavlova, A.N. Tupitsyn, A.N. Pavlov

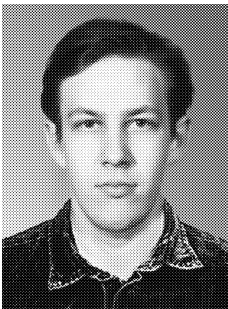
Based on the wavelet-analysis technique, a study is performed of how characteristics of physiological tremor are changed at the influence of a weak low-frequency magnetic field. Different approaches to analyze the structure of experimental data are considered using both, real and complex wavelet-transform basic functions. It is shown that magnetic field has an effect on a local regularity of analyzed processes and on their energy characteristics.



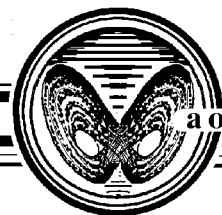
Павлова Ольга Николаевна – студентка 5-го курса факультета нелинейных процессов и нелинейной динамики Саратовского государственного университета им. Н.Г. Чернышевского (кафедра радиофизики и нелинейной динамики, специальность «биохимическая физика»). Область научных интересов – применение методов нелинейной динамики в исследованиях биологических систем. Имеет 3 научные публикации.



Тутцын Анатолий Николаевич – родился в Саратове (1983). Окончил Саратовский государственный университет по специальности «биохимическая физика» (2005). В настоящее время аспирант кафедры радиофизики и нелинейной динамики СГУ. Область научных интересов: нелинейная динамика, анализ временных рядов.



Павлов Алексей Николаевич – родился в Саратове (1973). Окончил физический факультет Саратовского университета по специальности радиофизика и электроника (1995). Кандидат физико-математических наук (1998). В настоящее время работает доцентом на кафедре радиофизики и нелинейной динамики. Область научных интересов: анализ временных рядов. Имеет более 40 работ, опубликованных в отечественной и зарубежной печати.
E-mail: pavlov@chaos.ssu.runnet.ru



ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ МОДЕЛИ ЛОРЕНЦА КОНВЕКТИВНОЙ НЕУСТОЙЧИВОСТИ ЖИДКОСТИ В ВЕРТИКАЛЬНОЙ ТОРОИДАЛЬНОЙ ЯЧЕЙКЕ

Р.А. Браже, О.Н. Куделин

Экспериментально исследованы режимы устойчивой и неустойчивой конвекции глицерина в вертикальной тороидальной ячейке. Представлены результаты фурье-анализа, DFA, вейвлет- и корреляционного анализа особенностей движения жидкости в тороиде. Построен хаотический аттрактор с признаками аттрактора Лоренца.

1. Требования к эксперименту

С тех пор как Э. Лоренц (1963, [1]) при построении математической модели турбулентности в атмосфере получил систему из трех сравнительно простых обыкновенных дифференциальных уравнений, допускающих детерминированные непериодические решения (детерминированный хаос), не прекращаются попытки экспериментальной реализации такой модели. Вот эти уравнения:

$$\begin{aligned} \dot{X} &= \sigma(Y - X), \\ \dot{Y} &= -XZ + rX - Y, \\ \dot{Z} &= XY - bZ. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь $\sigma = \nu/\chi$ – число Прандтля, ν – кинематическая вязкость, χ – температуропроводность; $r = Ra/Ra_c$, Ra – число Рэлея, Ra_c – критическое число Рэлея; b – параметр, зависящий от формы конвективной ячейки (в случае тороидальной ячейки [2] $b = 1$); X – скорость движения жидкости; Y – температура в средней по высоте части тора; Z – температура в нижней (нагреваемой) части тора.

Устойчивое конвективное течение (по часовой стрелке или против часовой стрелки) в ячейке наблюдается в диапазоне следующих значений r [1]:

$$1 < r < r^*, \quad (2)$$

где

$$r^* = \frac{\sigma(\sigma + b + 3)}{\sigma - b - 1} = \frac{\sigma(\sigma + 4)}{\sigma - 2}. \quad (3)$$

При $r \geq r^*$ конвекция становится неустойчивой.

Результаты многочисленных ранних попыток экспериментального получения неустойчивых, в особенности стохастических, режимов конвекции жидкости в подогреваемых снизу вертикальных ячейках [2-6] не соответствовали модели Лоренца. Как показано в [7], это связано с нарушением предположения об одномерном квази-пуазейлевском характере течения жидкости в канале и изменением температуры по сечению канала. Таким образом, в этих экспериментах не реализовался случай трех степеней свободы, заложенный в основу модели Лоренца (1).

С.М. Дроздов [7] вывел два критерия, обеспечивающих физическую реализацию модели Лоренца для неустойчивых течений, а именно, ограничение по величине:

1) числа Тейлора

$$Te = Re \left(\frac{r_0}{R_c} \right)^{1/2} \leq 84, \quad (4)$$

где Re – число Рейнольдса, r_0 и R_c – соответственно радиус сечения канала и радиус самого тора;

2) числа Рэлея

$$Ra \leq 544. \quad (5)$$

Чтобы удовлетворить этим условиям, ему пришлось изготовить сложную конструкцию [7] в виде многослойного тора с $r_0 = 2.0$ мм и $R_c = 100$ мм, заполненного ртутью. Рабочий канал был окружен последовательными слоями пенопласта и алюминия, и вся система помещалась в воду, служащую для выравнивания температуры на внешней поверхности тора. Нагрев ртути в нижней части канала осуществлялся пропусканием через нее электрического тока.

На наш взгляд, предложенная конструкция вызывает серьезные замечания. Во-первых, протекание электрического тока в проводящей среде провоцирует ее дополнительное течение по каналу и, как минимум, мешает конвекции. Во-вторых, ртуть обладает очень большой температуропроводностью, так что для нее число Прандтля $\sigma \approx 0.008$ и, согласно (3), $r^* = -0.016$. Таким образом, для ртути выполнение условия (2) для исследования устойчивой конвекции невозможно.

В нашей работе тороидальный канал радиусом $R_c = 30$ мм и радиусом сечения $r_0 = 2.0$ мм был заполнен глицерином. Выбор жидкости обусловлен тем, что для наблюдения конвекции на границе порядка и хаоса, когда

$$r = \frac{\alpha g R^3 \Delta T}{8\pi\chi\nu} \geq r^*,$$

радиус тороидального канала

$$R_c \propto \left(\frac{8\pi\chi\nu}{\alpha g} \frac{r^*}{\Delta T} \right)^{1/3}. \quad (6)$$

Здесь α – температурный коэффициент объемного расширения, g – ускорение свободного падения, ΔT – разность температур в подогреваемой и охлаждаемой частях тора. Для глицерина $\alpha = 5.0 \cdot 10^{-4} \text{K}^{-1}$; $\chi = 9.36 \cdot 10^{-8} \text{m}^2/\text{c}$; $\nu = 1.10 \cdot 10^{-3} \text{m}^2/\text{c}$; $\sigma = 1.18 \cdot 10^4$ и, согласно (3), $r^* \approx \sigma = 1.18 \cdot 10^4$. Тогда из (6) для $\Delta T = 30$ К получаем $R_c = 3.1 \cdot 10^{-2} \text{м}$. Использование критерия (4) дает значение $Te_c = 84$ при максимальной скорости вращения жидкости $v_{\max} = 0.2$ м/с. Следовательно, использование такой вязкой жидкости, как глицерин, вполне обеспечивает выполнение требования (4). Условие (5), накладываемое на число Рэлея, также выполняется: в нашем случае $Ra = 1.28$.

2. Экспериментальная установка и методика измерений

Схема экспериментальной установки показана на рис. 1. В качестве тепловых резервуаров использованы дюралюминиевые бруски шириной 25 мм. В них просверлены сквозные отверстия диаметром 4 мм, равным внутреннему диаметру полипропиленовой трубки. Для возможности крепления трубок с каждой стороны бруска были сделаны дополнительные углубления, соосные каналам, диаметром,

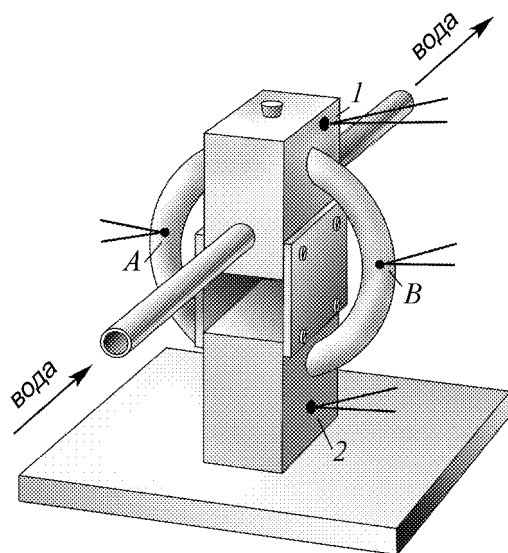


Рис. 1. Схема эксперимента; 1, 2 и A, B – точки подключения термопар

равным внешнему диаметру трубки, что позволило точно совместить внутренний канал в трубке и в бруске. Верхний брусок охлаждался проточной водой. Нижний брусок был прикреплен к дюралюминиевой подставке для уменьшения колебания температуры при нагреве. Обе секции были разнесены с помощью крепежных пластин с низкой теплопроводностью. Радиус тороида в установке равнялся $R_c = 30$ мм. Измерение температуры осуществлялось с помощью термопар типа хромель-алюмель. В тепловых резервуарах они помещались в специально высверленные отверстия малого диаметра. Сигнал с термопар снимался 4-канальным измерителем температуры Center-309, который в реальном масштабе времени отправлял значения измеренной температуры на COM-порт компьютера. Разрешение прибора составляет 0.1 К. Абсолютная погрешность измерения температуры складывается из погрешности измерения прибора и погрешности, вносимой термопреобразователем. Общая абсолютная погрешность измерения температуры составляла ± 1 К. Отсчеты температуры производились через каждые 5 секунд. На нижней секции поддерживалась постоянная температура при помощи нагревателя, управляемого компьютером. Верхняя секция охлаждалась проточной водой из городского водопровода.

После включения установки верхняя секция охлаждалась до температуры холодной воды в городской магистрали, нижняя же нагревалась до заданной температуры, которая поддерживалась с точностью до 1 градуса включением и выключением нагревателя. Температура воды зависела от времени суток и интенсивности расхода воды в водопроводе. На рис. 2 представлены зависимости $\Delta T_{12} = T_2 - T_1$ и $\Delta T_{AB} = T_A - T_B$ от времени наблюдения, которое в различных экспериментах составляло от 4 часов до 1.5 суток. Тем не менее точность поддержания разности температур ΔT_{12} в течение эксперимента оказалась вполне удовлетворительной.

В серии из более чем 20 опытов установлено, что однонаправленная (вправо или влево по случайному принципу) конвекция в описанной установке наблюдается до значений $\Delta T_{12} \approx 47$ К. При больших значениях ΔT_{12} наблюдалась неустойчивая конвекция с неожиданными, не связанными с колебаниями ΔT_{12} , инверсиями на-

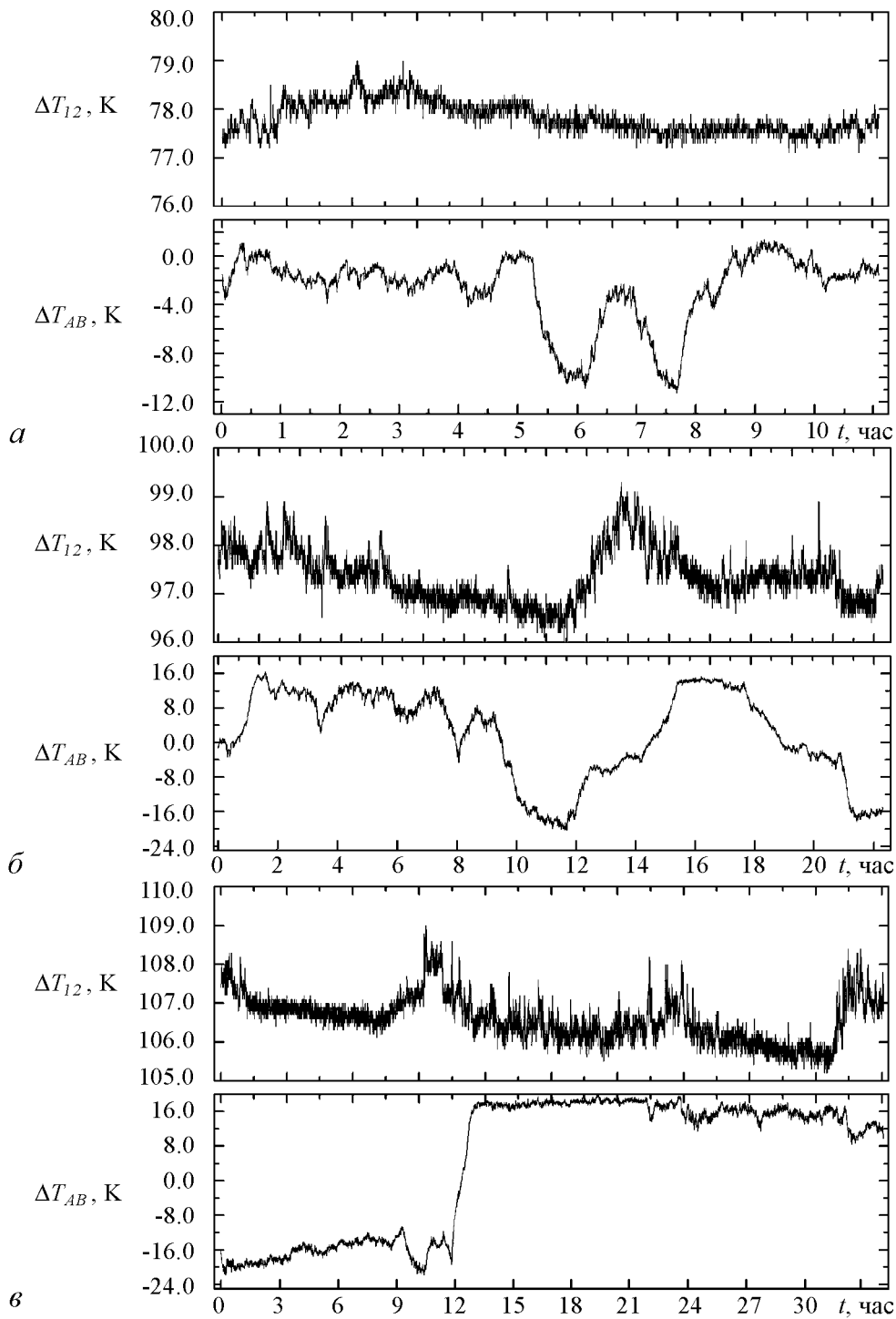


Рис. 2. Наиболее характерные виды зависимостей ΔT_{12} и ΔT_{AB} от времени наблюдения, демонстрирующих неустойчивую конвекцию; средние значения $\overline{\Delta T_{12}} = 78$ К (а); $\overline{\Delta T_{12}} = 97,5$ К (б); $\overline{\Delta T_{12}} = 107$ К (в)

правления течения жидкости в кольце. О скорости течения и его направлении можно было судить по значениям ΔT_{AB} . Такого рода скачки становились более частыми и масштабными по достижении $\Delta T_{12} \approx 90$ К.

3. Анализ экспериментальных результатов

На рис. 3 представлены результаты фурье-анализа спектров мощности ΔT_{12} и ΔT_{AB} для $\overline{\Delta T_{12}} = 107$ К (см. рис. 2, в). В двойном логарифмическом масштабе оба спектра обнаруживают линейную зависимость от частоты. Из этого можно сделать вывод, что соответствующие временные ряды характеризуются распределением с «тяжелыми хвостами» в виде гиперболической зависимости мощности спектральных гармоник P от частоты f (распределение Леви – Парето – Ципфа)

$$P(f) \sim \frac{1}{f^\beta}. \quad (7)$$

Спектральный показатель β в (7), найденный по тангенсу угла наклона графиков для ΔT_{12} и ΔT_{AB} , соответственно равен $\beta_{12} = 1.4$ и $\beta_{AB} = 1.7$. Повышение удельного веса низкочастотных гармоник во временной зависимости ΔT_{12} по сравнению с белым шумом ($\beta = 0$) связано с включением и выключением время от времени нагревателя. Это производится с целью остановки дрейфа ΔT_{12} , вызванного, в основном, колебаниями температуры воды в водопроводе, и поддержания этой разности температур в заданных пределах: $\Delta T_{12} = \overline{\Delta T_{12}} \pm \delta$. Рис. 2 показывает, что наиболее заметные понижения температуры воды в магистрали, и соответственно рост ΔT_{12} , происходит с периодичностью, близкой к 12 часам. Это связано с ростом потребления воды в утренние и вечерние часы. Добавление этих низкочастотных (по сравнению с прочими, случайными факторами) процессов во временные ряды трансформирует их спектр вышеуказанным образом. Полученные значения β показывают, что оба временных ряда обладают признаками розового шума, причем интересующий нас процесс конвекции по своим шумовым характеристикам приближается к коричневому (броуновскому) шуму, для которого $\beta = 2$.

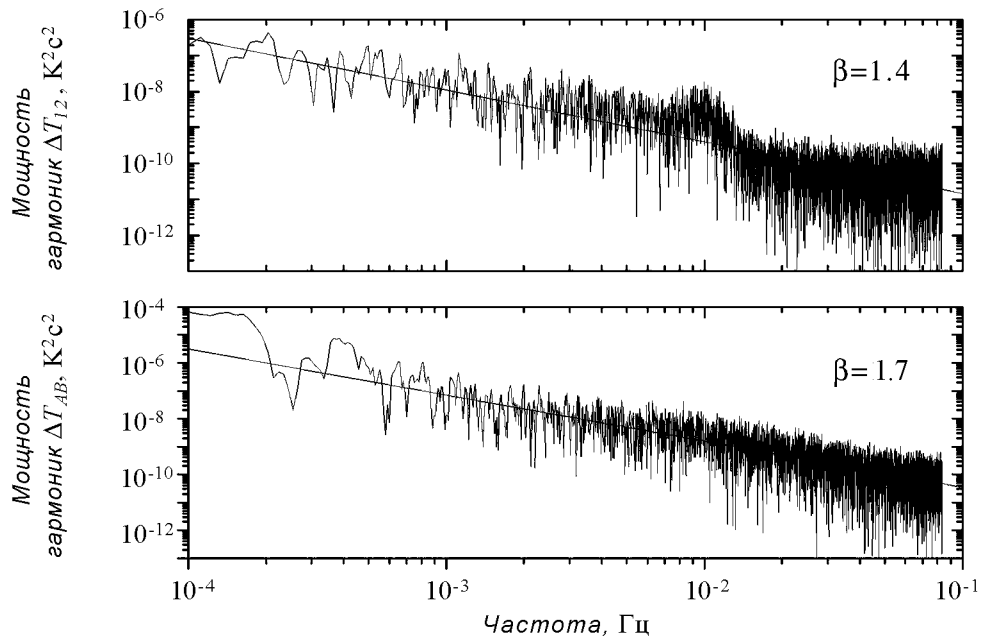


Рис. 3. Фурье-спектры мощностей временных зависимостей ΔT_{12} (вверху) и ΔT_{AB} (внизу) для случая, изображенного на рис. 2, в

Степень отклонения значений временного ряда от случайных изменений и наличие долговременной памяти в системе позволяет оценить херст-анализ [8]. Однако, как показано в [9, 10], большей устойчивостью к шуму, более эффективным вычитанием трендов и большей статистической достоверностью при сигналах одинаковой длины обладает модификация херст-анализа – DFA (detrended fluctuation analysis – флуктуационный анализ с удалением трендов). В этом методе вычисляется среднеквадратичная ошибка линейной аппроксимации случайных блужданий

$$y(k) = \sum_{i=1}^k |z(i) - \bar{z}| \text{ исследуемого временного ряда } z(i) = 1, 2, \dots, N$$

$$F(n) = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N |y(k) - y_n(k)|^2}$$

и считается, что при наличии масштабной инвариантности (скейлинга) $F(n) \sim n^\alpha$, где α – так называемая скейлинговая экспонента. Она связана со спектральным показателем β соотношением

$$\beta = 2\alpha - 1. \quad (8)$$

На рис. 4, *а* показаны результаты применения этого метода к тем же временным рядам, которые использовались выше для фурье-анализа. По тангенсу угла наклона соответствующих прямых найдены $\alpha_{I2} = 1.2$ и $\alpha_{AB} = 1.5$. Тогда, по формуле (8), $\beta_{I2} = 1.4$ и $\beta_{AB} = 2.0$. Это, в целом, подтверждает выводы, сделанные из фурье-анализа. Для сравнения на рис. 4, *б* приведены результаты DFA хаотизированных (с помощью генератора случайных чисел) временных рядов, полученных из исходных рядов. Так как в хаотизированных рядах значения α оказались равными 0.5, то можно сделать вывод, что исходные ряды имели долговременную память, которая разрушилась в результате рандомизации.

Ни фурье-анализ, ни DFA не позволяют ответить на вопрос о степени влияния колебаний разности температур ΔT_{I2} в ячейке на процесс конвекции. Для этого следует сравнить характерные частоты в рядах ΔT_{I2} и ΔT_{AB} и их временную динамику, что позволяет сделать вейвлет-анализ [11]. На рис. 5 представлены результаты этого анализа при использовании в качестве базисных вейвлетов гауссианов (рис. 5, *а*) и вейвлетов Морле (рис. 5, *б*). Первые лучше локализованы во временном пространстве и поэтому точнее отображают низкочастотные особенности временного ряда. Вторые, напротив, лучше локализованы в частотном пространстве и поэтому точнее отображают его высокочастотные особенности. По оси абсцисс отложены временные отсчеты, по оси ординат – масштаб скейлинга a (в логарифмическом виде). Распределение значений вейвлет-преобразования функции $f(t)$, в качестве которой выступают ΔT_{I2} и ΔT_{AB} ,

$$Wf(t, a) = \frac{1}{a} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{\psi}\left(\frac{t-x}{a}\right) f(x) dx$$

условно показано разными оттенками серого цвета.

Анализ скейлограмм приводит к заключению, что на высоких частотах, соответствующих временным интервалам в несколько минут, во временной зависимости

ΔT_{12} разности температур нагреваемой и охлаждаемой частей ячейки присутствует больше шумовых составляющих, чем в зависимости ΔT_{AB} , характеризующей скорость конвективного движения жидкости. На более низких частотах, с характерными временами в десятки минут, возмущения обеих зависимостей имеют близкие пери-

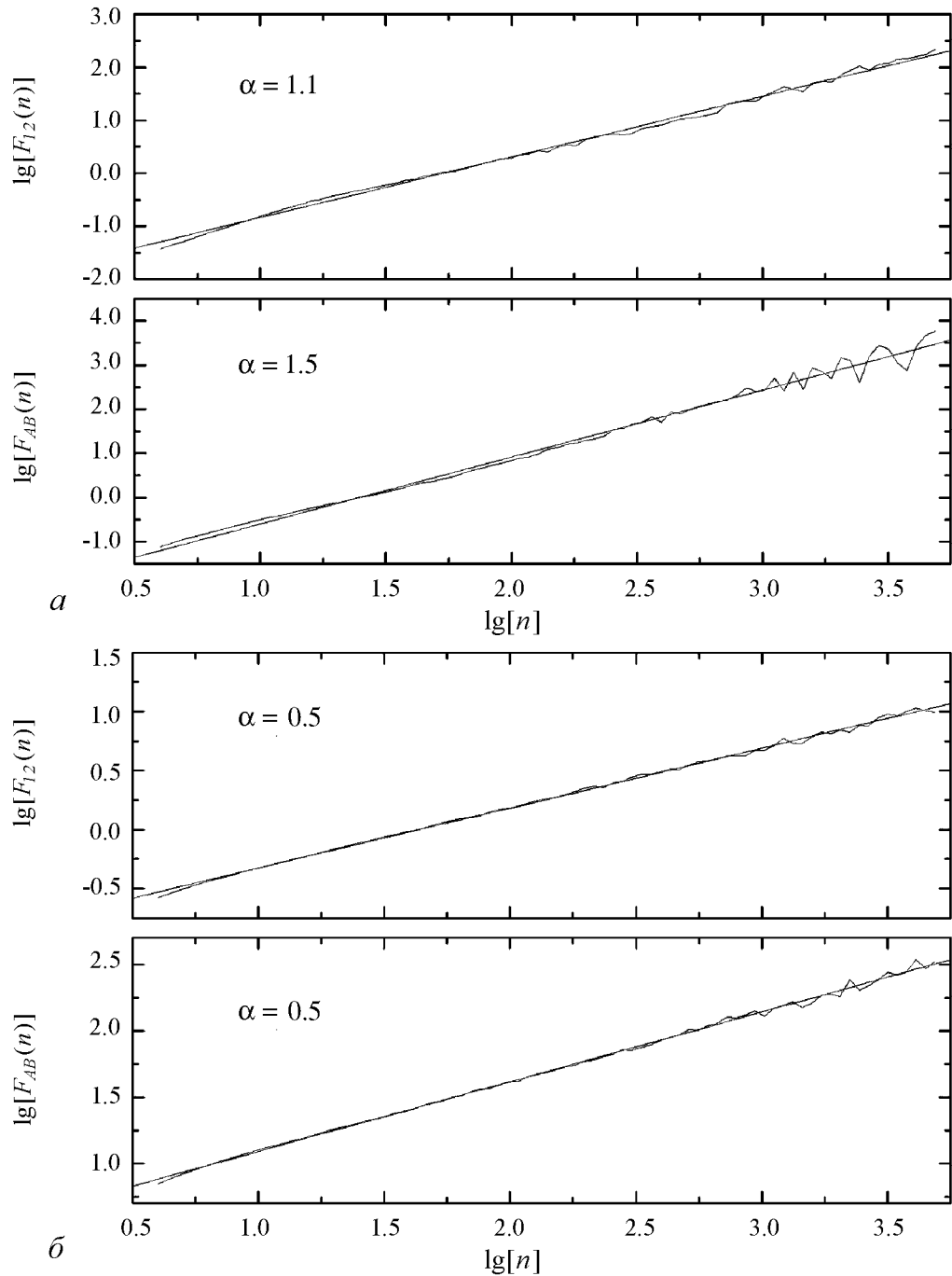


Рис. 4. *a* – Результаты DFA для временных зависимостей ΔT_{12} (вверху) и ΔT_{AB} (внизу) из рис. 2, *б* – то же для рандомизированных рядов из этих же измерений

оды, что свидетельствует о возможном влиянии условий нагрева на характер нарушения стационарности конвективного движения. Но наиболее низкочастотные изменения, с характерными временами в несколько часов, не согласованы друг с другом. Отсюда следует, что скачки в направлении и скорости вращения жидкости в то-

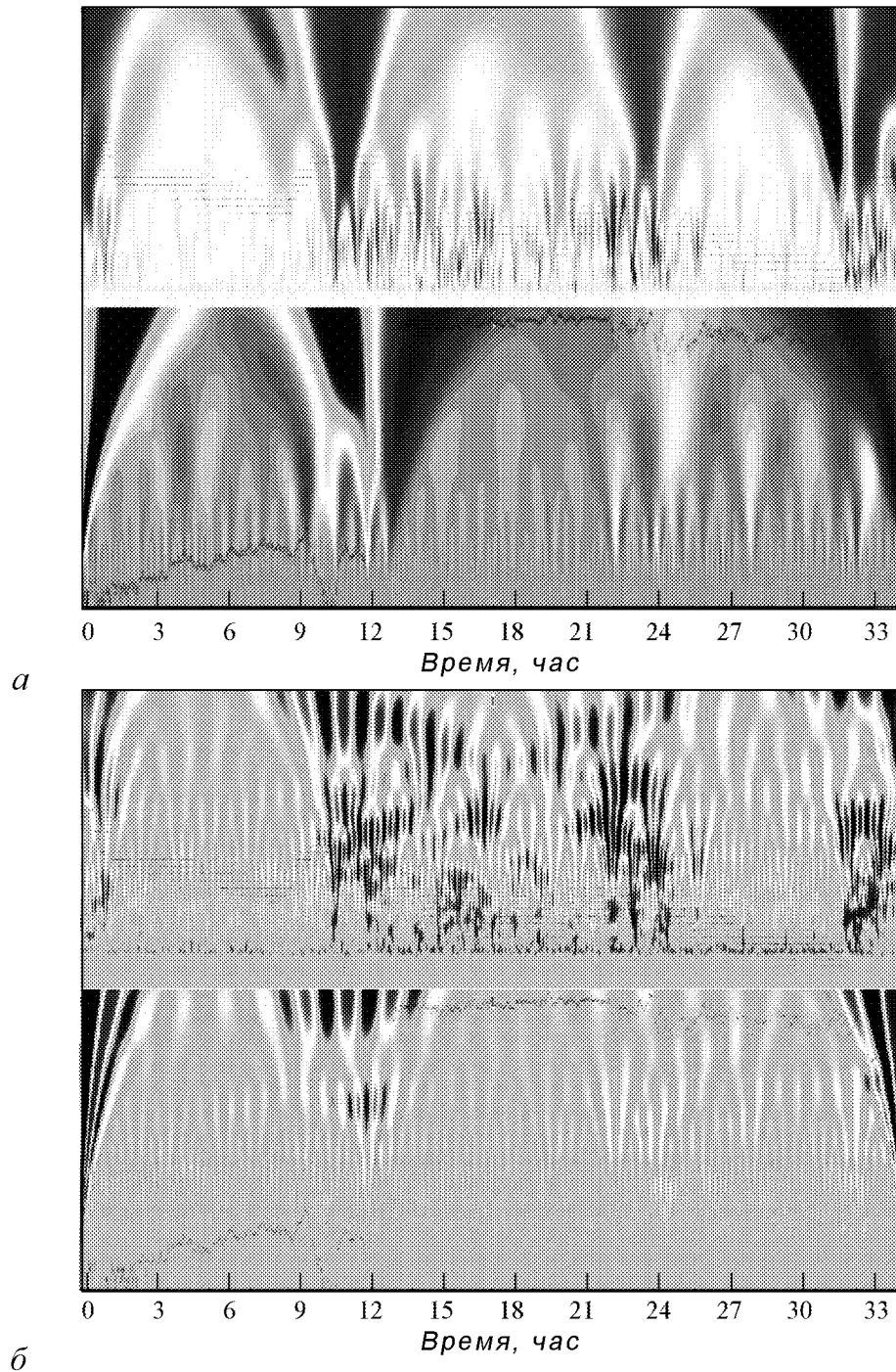


Рис. 5. Гауссиан- (*a*) и Морле- (*б*) скейлограммы зависимостей ΔT_{12} (вверху) и ΔT_{AB} (внизу) из рис. 2, *в*

роидальной ячейке обусловлены не флуктуациями нагрева, а являются следствием неустойчивостей в характере самой конвекции.

В дополнение к вейвлет-анализу изучаемых временных рядов проведен их корреляционный анализ. Связь между значениями одного и того же случайного процесса в разные моменты времени (наличие и продолжительность памяти системы о своих прошлых состояниях) позволяет выявить автокорреляционная функция (АКФ) [12, 13], вычисляемая здесь по формуле

$$r_x(k) = \frac{\sum_i (x_i - \bar{x})(x_{i+k} - \bar{x})}{\sum_i (x_i - \bar{x})^2},$$

где \bar{x} – выборочное среднее временного ряда, а $k = 0, 1, 2 \dots$ – сдвиг (lag) между отсчетами. Степень связи различных случайных процессов (в нашем случае ΔT_{12} и ΔT_{AB}) позволяет установить кросскорреляционная функция (ККФ)

$$r_{xy}(k) = \frac{\sum_i (x_i - \bar{x})(y_{i+k} - \bar{y})}{\sqrt{\sum_i (x_i - \bar{x})^2} \sqrt{\sum_i (y_{i+k} - \bar{y})^2}}.$$

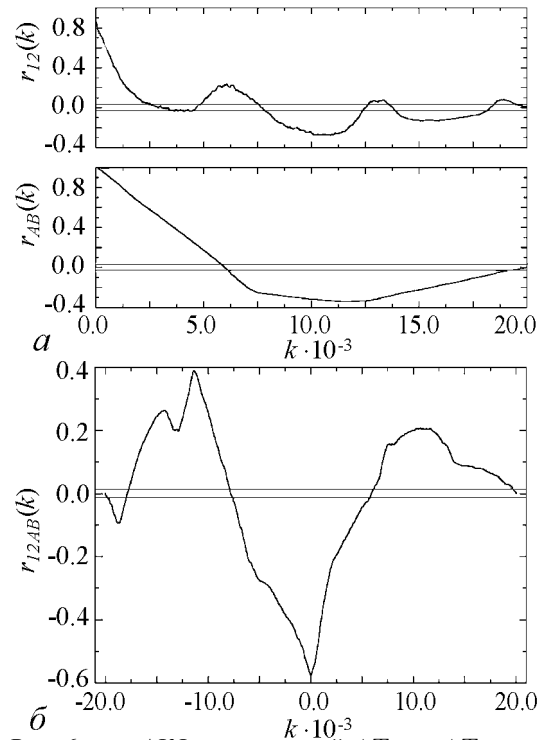


Рис. 6. *a* – АКФ зависимостей ΔT_{12} и ΔT_{AB} из рис. 2, *б* – ККФ обеих зависимостей; k – сдвиг между отсчетами

наибольшая корреляция обеих зависимостей наблюдается до и после скачка ΔT_{AB} (соответственно $r_{12AB}(k)$ достигает значений 0.4 и 0.2). Наоборот, в области скачка обе функции максимально некоррелированы.

На рис. 6, *a* представлены АКФ для рассмотренных выше временных рядов ΔT_{12} , ΔT_{AB} . АКФ разности температур между нижней и верхней точками тороида $r_{12}(k)$ имеет вид, близкий к гиперболе, но с тремя локальными максимумами, соответствующими всплескам на графике зависимости $\Delta T_{12}(t)$ (см. рис. 2, *в*). Наибольшая корреляция между текущими и предшествующими значениями этой зависимости наблюдается перед первым всплеском. Для доверительного интервала по уровню 5% совпадения величина сдвига составляет около 10^3 отсчетов или 1.4 часа. АКФ разности температур между боковыми точками тороида $r_2(k)$ имеет провал в диапазоне значений $k = 0.8 \div 2.0$ в область отрицательных значений, что соответствует изменению направления движения жидкости в тороиде.

Кросскорреляционная функция r_{12AB} зависимостей ΔT_{12} и ΔT_{AB} показана на рис. 6, *б*, из которого видно, что

Полученные результаты кросскорреляционного анализа говорят, что, хотя и имеется слабая взаимная корреляция (в пределах 20-40%) неустойчивостей в конвективном движении жидкости в тороиде и флуктуаций разности температур в его нижней и верхней точках, тем не менее крупномасштабные нарушения стационарности процесса связаны с внутренними свойствами системы. Это вполне согласуется с выводами вейвлет-анализа.

По результатам эксперимента построен хаотический аттрактор в системе координат, осями которой являются: температура нижней части тора T_2 , температура в одной из боковых точек T_A и разность температур в боковых точках тороида ΔT_{AB} , пропорциональная угловой скорости вращения жидкости (рис. 7). В данном эксперименте за 36 часов измерений удалось наблюдать лишь одну инверсию потока, причем с несоразмерным с начальным значением периодом вращения. Тем не менее на рисунке отчетливо видно различие в плоскостях изменения фазовых траекторий: $(T_A, \Delta T_{AB})$ для вращений в одну сторону и (T_A, T_2) для вращений в другую сторону. Это свойство восстановленной по экспериментальным данным проекции аттрактора на трехмерное пространство сближает его с аттрактором Лоренца. Об истинной размерности вложения данного аттрактора судить сложно из-за сильной зашумленности исходного временного ряда.

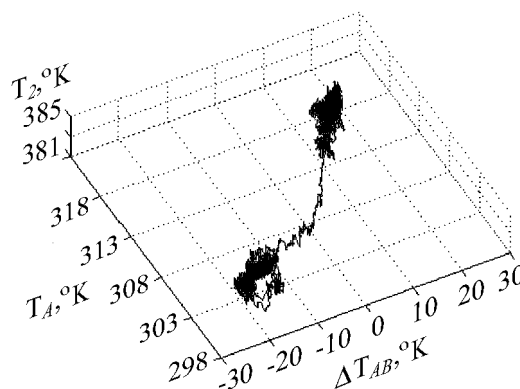


Рис. 7. Хаотический аттрактор, построенный по экспериментальным данным из рис. 2, в

Заключение

Осуществлена экспериментальная реализация модели Лоренца на основе тороидальной ячейки радиусом 30 мм с глицерином. С помощью различных методов математической обработки временных рядов измерений (фурье-анализ, DFA, вейвлет- и корреляционный анализы) были исследованы возможные режимы конвекции жидкости в ячейке. Выяснилось, что при разности температур в нижней и верхней точках ячейки $\Delta T_{12} \leq 47$ К конвективное течение имеет преимущественно регулярный характер: по или против часовой стрелки. Причем, в выборе направления вращения нет никакой закономерности, оно носит случайный характер. Начиная с $\Delta T_{12} > 47$ К, и в особенности с 80-90 К, конвекция становится неустойчивой, с неожиданными инверсиями направления вращения жидкости. Было доказано наличие долговременной памяти в рядах значений ΔT_{12} , постоянство которых поддерживалось с точностью ± 1 К, и в рядах самой измеренной величины ΔT_{AB} , пропорциональной скорости вращения жидкости. Фурье-анализ и DFA показали, что в условиях нагрева, близкого к розовому шуму, хаотические свойства конвективного движения жидкости близки к броуновскому шуму. Вейвлет-анализ и корреляционный анализ позволили установить, что конвективный процесс слабо коррелирует с особенностями условий нагрева ячейки: все долгопериодические закономерности, характеризующие

неустойчивые режимы конвекции, развиваются самостоятельно. По результатам измерений можно построить хаотический аттрактор, похожий на аттрактор Лоренца. Правда, за 36 часов наблюдений удалось наблюдать лишь однократный перескок из одной плоскости фазового пространства в другую.

Таким образом, в лабораторном макете модели Лоренца на основе вертикального тороида с глицерином можно наблюдать ряд теоретически предсказываемых данной моделью случаев регулярной и хаотической конвекции, в том числе явление детерминированного хаоса.

Библиографический список

1. *Lorenz E.N.* Deterministic nonperiodic flow // *J. Atmos. Sci.* 1963. Vol. 20, № 2. P. 130.
2. *Welander P.* On the oscillatory instability of a differentially heated loop // *J. Fluid Mech.* 1967. Vol. 29, Pt 1. P. 17.
3. *Creveling H.F. et al.* Stability characteristics of a single-phase free convection loop // *J. Fluid Mech.* 1975. Vol. 67, Pt 1. P. 65.
4. *Gorman M., Widman P.J., Robins K.A.* Chaotic flow regimes in a convective loop // *Phys. Rev. Lett.* 1984. Vol. 52, № 25. P. 2241.
5. *Wang Y., Singer I., Bau H.* Controlling chaos in thermal convecting loop // *J. Fluid Mech.* 1992. Vol. 237. P. 479.
6. *Дроздов С.М.* Экспериментальное исследование конвекции жидкости в замкнутом тороидальном канале // *Изв. РАН. МЖГ.* 1995, № 4. С. 20.
7. *Дроздов С.М.* Моделирование возникновения нестационарности и хаоса в гидродинамической системе, управляемой небольшим числом степеней свободы // *Изв. РАН. МЖГ.* 2001, № 1. С. 31.
8. *Шредер М.* Фракталы, хаос, степенные шумы. Миниатюры из бесконечного рая. Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2001.
9. *Peng C.-K., Buldyrev S.V., Havlin S., Simons M., Stanley H.E., Goldberger A.L.* Mosaic organization of DNA nucleotides // *Phys. Rev. E.* 1994. Vol. 49. P. 1685.
10. *Peng C.-K., Havlin S., Stanley H.E., Goldberger A.L.* Quantification of scaling exponents and crossover phenomena in nonstationary heartbeat time series // *Chaos.* 1995. Vol. 5. P. 82.
11. *Астафьева Н.М.* Вейвлет-анализ: основы теории и примеры применения // *УФН.* 1996. Т. 166, № 11. С. 1145.
12. *Hamilton J.D.* Time series analysis. Princeton University Press, 1994.
13. *Box G.E.P., Jenkins G.M., Reinsel G.C.* Time series analysis: Forecasting and control. Third edition. Prentice Hall, 1994.

Ульяновский государственный
технический университет
ФНЦП ОАО «Марс», Ульяновск

Поступила в редакцию 27.04.2006
После доработки 4.07.2006

EXPERIMENTAL REALIZATION OF LORENZ MODEL OF LIQUID'S CONVECTIVE INSTABILITY IN VERTICAL TOROIDAL LOOP

R.A. Brazhe, O.N. Kudelin

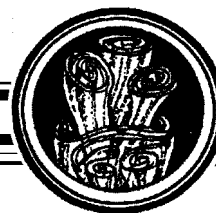
Stable and unstable regimes of glycerine convection in vertical toroidal loop are investigated experimentally. The results of Fourier-analysis, DFA, wavelet-, and correlation analysis of liquid's motion peculiarities are presented. Chaotic attractor with Lorenz-attractor signs is constructed.



Бразже Рудольф Александрович – родился в селе Ковалево Омской области (1948), окончил Саратовский государственный университет (1971) и там же аспирантуру по специальности «радиофизика» (1974). С 1974 года работает в Ульяновском государственном техническом университете; с 1993 года – заведующий кафедрой физики. Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук в СГУ (1975) и доктора физико-математических наук в УлГТУ (2002) в области радиофизики и математического моделирования нелинейных процессов. Автор более 250 научных трудов, в том числе одной монографии и нескольких учебных пособий. Член-корреспондент РАЕН.



Куделин Олег Николаевич – родился в Ульяновске (1979), окончил Ульяновский государственный университет по специальности «физика твердого тела» (2001). Работает на ФНЦП ОАО НПО «Марс» инженером-программистом, автор 15 научных работ.



БИФУРКАЦИОННЫЕ МЕХАНИЗМЫ РАЗРУШЕНИЯ ПРОТИВОФАЗНОЙ СИНХРОНИЗАЦИИ ХАОСА В СВЯЗАННЫХ СИСТЕМАХ С ДИСКРЕТНЫМ ВРЕМЕНЕМ

В.В. Астахов, А.В. Шабунин, П.А. Стальмахов

В работе рассматриваются бифуркационные механизмы, ответственные за выход из режима противофазной синхронизации хаоса. Рассматривается два кубических отображения с симметричной диффузионной связью и дополнительным управляющим слагаемым обратной связи для обеспечения устойчивой противофазной синхронизации. Исследуются бифуркации седловых периодических орбит, встроенных в хаотический аттрактор.

Введение

Синхронизация хаоса – весьма емкое понятие, вобравшее в себя целый круг разнообразных явлений, таких как подавление хаотической динамики при периодическом воздействии на систему [3], захват базовой частоты спектра [2] и мгновенной фазы хаотических колебаний [3] (частотно-фазовая синхронизация), установление некоторой функциональной зависимости между колебаниями подсистем [4] (обобщенная синхронизация), которая может в частности выражаться в их полном совпадении в каждый момент времени [1, 2, 4, 7] (полная синхронизация) или в совпадении с обратным знаком [7, 8] (полная противофазная синхронизация). Из всего спектра определений синхронизации хаоса самым востребованным является, пожалуй, полная синхронизация, не только в силу того, что ее строгое определение ($x_1(t) = x_2(t)$) дает возможность применения теоретических методов, включая математический аппарат теории симметрии и теории устойчивости, но и в силу того, что это явление чрезвычайно распространено и может быть легко обнаружено даже в случае развитого хаоса. В настоящий момент известно огромное число работ, рассматривающих различные аспекты полной синхронизации хаоса, включая бифуркационные механизмы ее формирования и разрушения [11]. Полная противофазная синхронизация хаоса – более редкое явление и, соответственно, оно гораздо менее изучено. В работе [8] рассматривалась собственная и управляемая противофазная синхронизация в системе двух отображений с переходом к хаосу через каскад субгармонических бифуркаций. Было обнаружено, что выход из режима противофазной синхронизации хаоса при уменьшении параметра управления сопровождается эффектом «пузырения хаотического аттрактора» [12] точно так же, как это имеет место для полной

синфазной синхронизации. Однако бифуркационные механизмы этого явления не были изучены. Определению бифуркационных механизмов, ответственных за разрушение режима управляемой противофазной синхронизации хаоса, и посвящена данная работа.

1. Противофазная синхронизация в системе диффузионно связанных кубических отображений

Рассмотрим систему двух идентичных кубических отображений с симметричной диффузионной связью

$$\begin{aligned}x_{n+1} &= f(x_n) + \gamma(f(y_n) - f(x_n)), \\y_{n+1} &= f(y_n) + \gamma(f(x_n) - f(y_n)),\end{aligned}\quad (1)$$

где x_n, y_n – динамические переменные первой и второй подсистемы; $n = 0, 1, 2, 3, \dots$ – дискретное время; γ – коэффициент связи; функция $f(x_n) = (a - 1)x_n - ax_n^3$ задает одиночное кубическое отображение; a – его управляющий параметр.

Кубическое отображение является антисимметричным, то есть инвариантным относительно преобразования $x \leftrightarrow -x$. Следствием этого, а также симметрии связи, является возможность в системе (1) появления режимов противофазной синхронизации, удовлетворяющих условию $x = -y$. Траектории противофазных режимов располагаются в одномерном инвариантном подпространстве $I_a : x = -y$ полного фазового пространства системы (1).

В работе [8] подробно исследовался вопрос об устойчивости противофазных колебаний для отображений с диффузионной связью и были получены аналитические выражения для тангенциального (Λ_{\parallel}) и трансверсального (Λ_{\perp}) показателей Ляпунова, ответственных за устойчивость противофазных колебаний к тангенциальным и трансверсальным возмущениям, соответственно. Эти выражения имеют вид

$$\Lambda_{\parallel} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \ln \left| (1 - 2\gamma) f' \left(\frac{x_n + y_n}{2} \right) \right|, \quad (2)$$

$$\Lambda_{\perp} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \ln \left| f' \left(\frac{x_n + y_n}{2} \right) \right|. \quad (3)$$

Из сопоставления (2) и (3) видно, что оба показателя связаны соотношением

$$\Lambda_{\perp} = \Lambda_{\parallel} - \ln |1 - 2\gamma|, \quad (4)$$

а значит, для небольших положительных значений γ ($0 \leq \gamma \leq 0.5$) будет выполняться неравенство

$$\Lambda_{\perp} \geq \Lambda_{\parallel}. \quad (5)$$

Тангенциальный показатель Ляпунова определяет динамику системы внутри симметричного подпространства I_a . Он является отрицательным для периодических колебаний и положительным – для хаотических. Трансверсальный показатель Ляпунова определяет так называемую трансверсальную устойчивость колебаний: он отрицателен для трансверсально устойчивых противофазных колебаний и положителен

для трансверсально неустойчивых. Чтобы противофазные колебания могли наблюдаться в эксперименте, соответствующее им предельное множество должно быть аттрактором в полном фазовом пространстве системы, что предполагает их трансверсальную устойчивость. Таким образом, противофазные хаотические колебания будут наблюдаться только в том случае, если тангенциальный показатель Ляпунова будет положителен, а трансверсальный – отрицателен. Из выражения (6) видно, что при положительной диффузионной связи это невозможно, а значит, режимы противофазной хаотической синхронизации в системе (1) не реализуются: противофазные хаотические колебания всегда трансверсально неустойчивы. Для того чтобы их стабилизировать, можно использовать методы управления хаосом.

2. Управляемая противофазная синхронизация хаоса

Существует достаточно много способов управления, основная цель которых – сделать определенные хаотические подмножества, соответствующие синхронным движениям, устойчивыми по одним собственным направлениям при сохранении неустойчивости по другим собственным направлениям. Стабилизацию неустойчивых движений в симметричном подпространстве полного фазового пространства взаимодействующих бистабильных осцилляторов, соответствующих противофазной синхронизации хаоса, можно обеспечить путем введения в систему дополнительной петли обратной связи. Причем такую обратную связь можно реализовать либо для каждой подсистемы, обеспечивая взаимное воздействие между ними, либо для одной из подсистем, обеспечивая однонаправленное управляющее воздействие (так называемая «master – slave» система). В данном случае будет рассмотрено взаимное симметричное управляющее воздействие между подсистемами. Применительно к рассматриваемой математической модели это будет соответствовать добавлению к правым частям первого и второго уравнения системы (1) слагаемых обратной связи, которые мы предлагаем выбрать в виде $r(f(x_n) + f(y_n))$:

$$\begin{aligned}x_{n+1} &= f(x_n) + \gamma(f(y_n) - f(x_n)) + r(f(x_n) + f(y_n)), \\y_{n+1} &= f(y_n) + \gamma(f(x_n) - f(y_n)) + r(f(x_n) + f(y_n)).\end{aligned}\quad (6)$$

Данное воздействие выбрано таким образом, чтобы при достижении цели управления, то есть режима противофазной синхронизации, дополнительное слагаемое связи обращалось в ноль. С другой стороны, оно, как показано ниже, меняет значение трансверсального показателя Ляпунова. Вследствие этого управляющее воздействие не оказывает влияние на форму противофазных колебаний, а только на их устойчивость по отношению к трансверсальным возмущениям.

Для исследования устойчивости данной системы перейдем к новым переменным u и v , записав линеаризованные в окрестности I_a уравнения

$$u_{n+1} = (1 + 2r)f'(v_n)u_n, \quad (7)$$

$$v_{n+1} = (1 - 2\gamma)f'(v_n). \quad (8)$$

Из уравнения (7) определяется трансверсальный показатель Ляпунова синхронных

движений в системе с управлением

$$\Lambda_{\perp c} = \lim_{N \rightarrow \infty} (1/N) \sum_{n=1}^N \ln|(1 + 2r)f'(v_n)| \quad (9)$$

или

$$\Lambda_{\perp c} = \Lambda_{\perp} + \ln|1 + 2r|. \quad (10)$$

Выбирая r достаточно близким к значению -0.5 , можно сделать трансверсальный показатель Ляпунова сколь угодно малым и, следовательно, сделать противофазный режим устойчивым при любых значениях параметров a и γ .

Выберем значения $a = 3.8$ и $\gamma = 0.04$, которые соответствуют режиму объединенного несинхронного хаотического аттрактора (рис. 1, *a*). Тангенциальный и трансверсальный показатели Ляпунова, подсчитанные для синхронного хаотического множества, соответствующего этим параметрам, имеют значения: $\Lambda_{\parallel} = 0.61$, $\Lambda_{\perp} = 0.69$, что свидетельствует как о хаотическом характере синхронных колебаний, так и об их трансверсальной неустойчивости.

На рис. 2 построена зависимость трансверсального показателя Ляпунова от управляющего параметра r . Как видно из рис. 2, существует интервал значений по параметру r , внутри которого трансверсальный показатель Ляпунова отрицателен. Если выбрать значение r из указанного диапазона, то в системе будут наблюдаться противофазные хаотические колебания, устойчивые по отношению к постоянно действующим малым возмущениям. Например, при $r = -0.3$ значение трансверсального показателя Ляпунова становится равным -0.306 , что приводит к стабилизации синхронных колебаний. На рис. 1, *б* показан фазовый портрет, соответствующий данному параметру управления. При уменьшении (или увеличении) параметра управления r синхронизация нарушается. Как известно, разрушение режима полной синхронизации хаоса может сопровождаться явлениями пузырения хаотического аттрактора и изрешечивания его бассейна притяжения. В частности, указанные переходы наблюдались при разрушении режима синфазной синхронизации хаоса [8, 11].

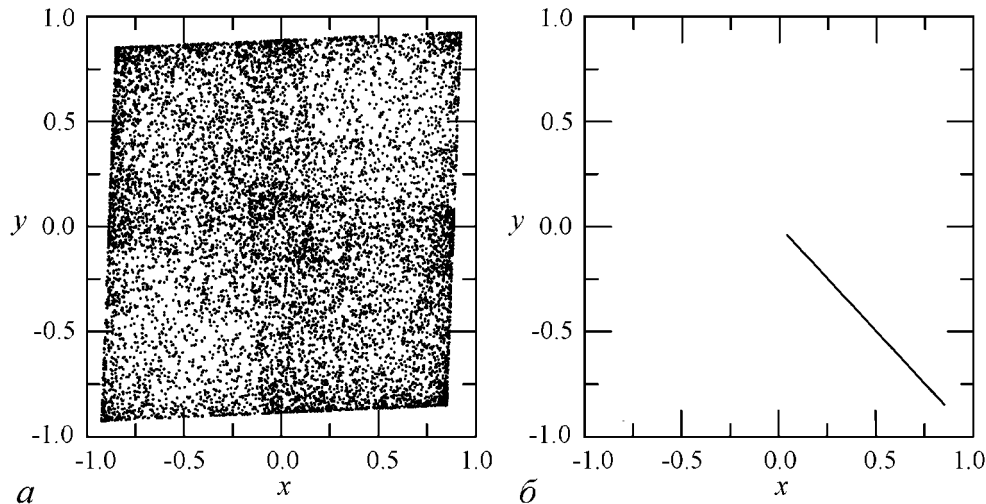


Рис. 1. Фазовые портреты при значении параметров $a = 3.8$, $\gamma = 0.04$; $r = 0$ (*a*); $r = -0.3$ (*b*)

Представляется интересным провести исследование процесса потери управляемой полной противофазной синхронизации хаоса, следя за изменениями хаотического

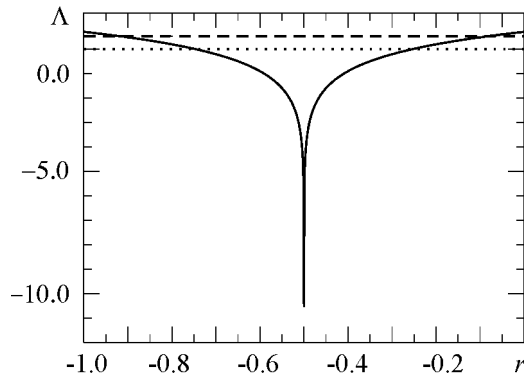


Рис. 2. Зависимость трансверсального показателя Ляпунова от параметра управления при $a = 3.8$, $\gamma = 0.04$. Пунктирной линией отмечен уровень нулевого значения

аттрактора в зависимости от значений коэффициента r . Для проведения этого исследования начальные условия выбирались вблизи антисимметричного подпространства I_a , а параметр управления r первоначально задавался внутри интервала значений $-0.5 < r < -0.286$, где трансверсальный показатель Ляпунова отрицателен, а хаотический аттрактор, располагающийся в антисимметричном подпространстве, является устойчивым к трансверсальным возмущениям. Проведенные численные эксперименты подтверждают, что в указанном интервале значений управляющего параметра режимы противофазной синхронизации хаоса являются устойчивыми и грубыми. Малые отклонения от синхронного аттрактора в начальных условиях быстро затухают во времени и изображающая точка втягивается в антисимметричное подпространство. Добавление в систему малого шума (интенсивностью порядка 0.0001) не приводит к заметным изменениям в ее поведении. Так, на рис. 3, *a* показана временная реализация суммы динамических переменных $x + y$ при добавлении шума в систему (до вертикальной пунктирной линии) и без шума (после нее). Видно, что и в том и в другом случае колебания остаются почти синхронными, что можно также увидеть по фазовому портрету в правой части рисунка. При увеличении управляющего параметра ($r > -0.265$) режим противофазной синхронизации хаоса становится негрубым. Добавление в систему малого шума приводит к существенной перестройке фазового портрета аттрактора. Если в самом начале области пузырения аттрактора это различие еще не очень заметно, то при дальнейшем изменении r оно становится значительным. На рис. 3, *b* построены временные реализации и фазовые портреты при $r = -0.26$. Зависимость $x + y$ от времени в системе с шумом теперь значительно отличается от таковой при его отсутствии. Из анализа временных зависимостей можно увидеть, что при наличии малого шума изображающая точка в течение долгого времени движется в окрестности подпространства I_a , затем следует короткий «выброс» в сторону от него, после чего траектория возвращается снова в окрестность симметричного подпространства. Такое поведение получило название «режим перемежающейся синхронизации» («on-off intermittency» в англоязычной литературе). Средняя частота выбросов увеличивается при приближении параметра r к границе области синхронизации. Наконец, при $r = -0.25$ происходит «бифуркация прорыва», когда трансверсальный показатель Ляпунова становится положительным, а значит, хаотический аттрактор внутри антисимметричного подпространства перестает быть притягивающим в трансверсальном направлении и трансформируется в хаотическое седло. Синхронные колебания перестают наблюдаться в системе как при наличии шума, так и при его отсутствии (рис. 3, *c*). Хаотический аттрактор имеет фазовый портрет сходный с портретом пузырящегося аттрактора. При дальнейшем увеличении параметра r (при $r = -0.233$) в системе наблюдается жесткий

переход на орбиту периода четыре, $4C^2$, расположенную вне антисимметричного подпространства (рис. 4). При приближении r к нулю в фазовом пространстве системы рождаются устойчивые орбиты различных периодов. Эволюция этих режимов заканчивается формированием несинхронного объединенного хаотического аттрактора (рис. 4, в).

Выход из режима синхронизации при уменьшении r происходит по тому же сценарию, что и при его увеличении. При изменении управляющего параметра в

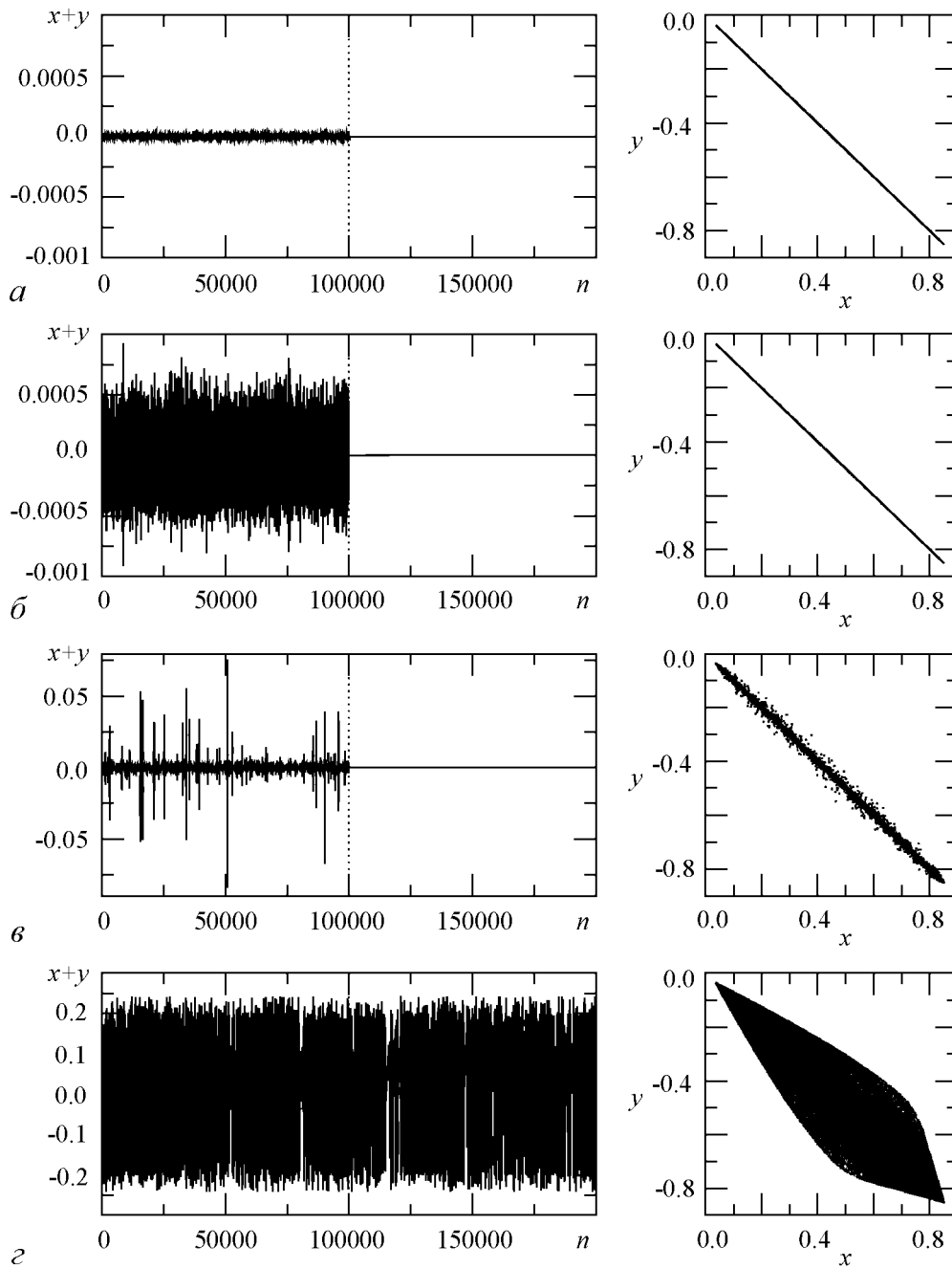


Рис. 3. Временные реализации и фазовые портреты управляемой противофазной синхронизации

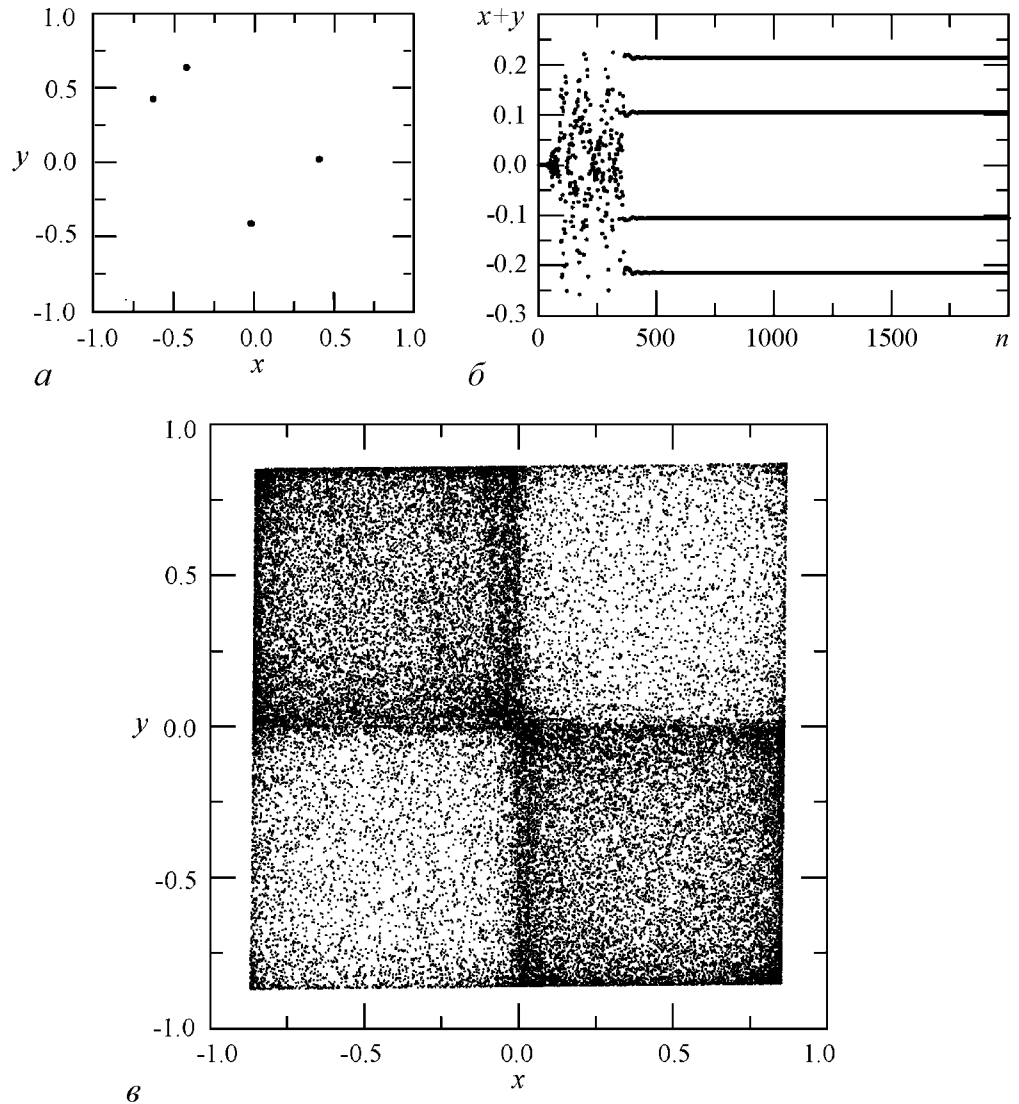


Рис. 4. *a* – фазовый портрет орбиты $4C^2$, *б* – переход с режима пузырения на режим периодических колебаний, соответствующий орбите $4C^2$, *в* – обобщенный хаотический аттрактор

сторону уменьшения, при $r < -0.745$ также наблюдается переход от грубого устойчивого режима противофазной синхронизации к пузырящемуся аттрактору. Затем, при $r = -0.7475$ происходит «бифуркация прорыва». При дальнейшем изменении параметра r происходит жесткий переход на орбиту периода четыре ($r = -0.767$). Далее на базе этих орбит формируется хаотическое множество. Заканчивается этот процесс формированием несинхронного хаотического аттрактора.

3. Бифуркационный механизм потери управляемой противофазной синхронизации

Результаты предыдущего раздела показывают, что при выходе из области управляемой противофазной синхронизации хаоса прослеживаются определенные закономерности. При изменении коэффициента дополнительной обратной связи режим противофазной синхронизации сменяется сначала регулярными движениями, не ле-

жащими в антисимметричном подпространстве, а затем происходит переход к несинхронному хаотическому режиму. Однако остается открытым вопрос о бифуркационных механизмах, приводящих к потере управляемой противофазной синхронизации хаоса. Проведем исследование бифуркаций, происходящих на базе седловых периодических орбит, встроенных в синхронный хаотический аттрактор, которые определяют потерю синхронизации хаоса.

В области противофазной синхронизации хаоса, например, при значениях параметров $a = 3.8$, $\gamma = 0.04$ и $-0.7137 < r < -0.2862$ в противофазном симметричном подпространстве $x_n = -y_n$ системы (6) существует два симметричных друг другу синхронных одноленточных хаотических аттрактора A_{10} и A_{20} . Они были сформированы в результате каскада бифуркаций удвоения периода антисимметричных периодических орбит: аттрактор A_{10} – на базе семейства $2^N C_{10}$, A_{20} – на базе семейства $2^N C_{20}$. Поскольку данные семейства режимов полностью симметричны, то достаточно провести бифуркационный анализ только для одного из них, например, A_{10} . В указанной области значений параметров периодические орбиты $2^N C_{10}$ являются седловыми. Они встроены в хаотический аттрактор A_{10} и определяют его «скелет». При выходе из области синхронизации седловые орбиты семейства $2^N C_{10}$ теряют устойчивость в нормальном к антисимметричному подпространству направлении. При увеличении параметра r орбиты $1C_{10}$, $2C_{10}$, $4C_{10}$, $8C_{10}$, не меняя своих координат, претерпевают бифуркации при значениях $r = -0.2862454$, -0.2774312 , -0.2798463 , -0.2787813 , соответственно. Рассмотрим эти бифуркации более подробно.

Потеря устойчивости режима хаотической управляемой синхронизации начинается с бифуркации неподвижной точки $1C_{10}$. При $r = -0.2862454$ ее второе собственное значение становится равным -1 , что соответствует бифуркации удвоения периода. В результате $1C_{10}$ превращается в репеллер и в его окрестности вне симметричного подпространства мягко рождается седловая орбита удвоенного периода $2C_{10}^1$. С увеличением r точки этой орбиты плавно расходятся от антисимметричного подпространства. На рис. 5 показана диаграмма бифуркационных переходов на базе этой седловой точки. Точки седловых орбит (трансверсально устойчивых) показаны сплошными линиями, точки репеллерных орбит – штриховыми линиями, а устойчивых – штрихпунктирными линиями. Теперь в малой окрестности репеллера C_{10} имеются начальные условия, стартуя с которых, фазовые траектории уходят

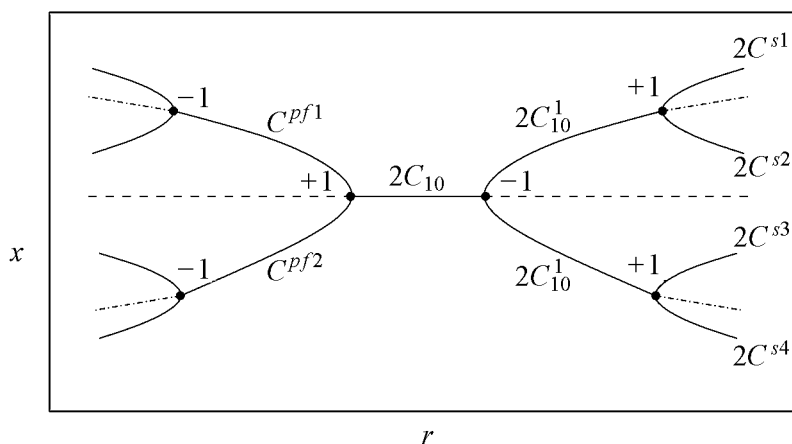


Рис. 5. Диаграмма бифуркаций, происходящих на базе орбиты $1C^0$

из окрестности симметричного подпространства в сторону седловой орбиты $2C_{10}^1$. Седловая орбита $2C_{10}^1$ и ее неустойчивые многообразия ограничивают область вблизи симметричного подпространства, которую траектории не могут покинуть. После этой бифуркации в рассматриваемой системе может наблюдаться пузырящееся поведение, индуцированное шумом малой интенсивности.

При дальнейшем увеличении параметра r происходят бифуркации удвоения седловых циклов с более высокими периодами $2C_{10}$, $4C_{10}$ и $8C_{10}$, встроенных в хаотический аттрактор. Их вторые собственные значения выходят за единичную окружность через -1 . В результате они становятся репеллерами и в их окрестностях вне антисимметричного подпространства мягко рождаются седловые циклы удвоенных периодов. С увеличением r точки седловых циклов плавно расходятся от антисимметричного подпространства. Пузырящееся поведение становится более развитым. Однако без внешнего шума после переходных процессов в системе наблюдаются синхронные противофазные хаотические колебания. На рис. 6 показана бифуркационная диаграмма на базе орбиты $2C_{10}$. Из рисунка видно, что структура бифуркаций на базе этой орбиты повторяет соответствующую структуру на базе орбиты $1C_{10}$. Дальнейшее изменение коэффициента r приводит к бифуркациям удвоения орбит более высокого периода, и при $r = -0.2525$ количество орбит, потерявших трансверсальную устойчивость, таково, что трансверсальный показатель Ляпунова хаотического аттрактора A_{10} становится положительным, хаотический аттрактор трансформируется в хаотическое седло и теряет бассейн притяжения. Седло-

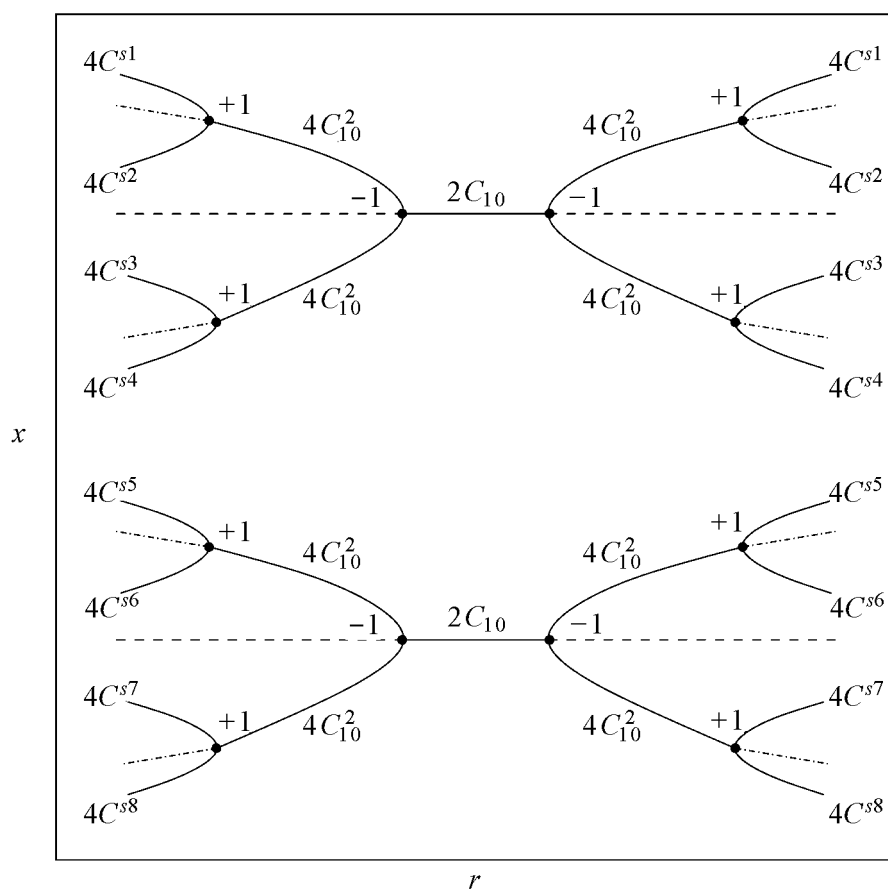


Рис. 6. Диаграмма бифуркаций, происходящих на базе орбиты $2C^0$

вые циклы, расположенные вне симметричного подпространства, но возникшие в результате бифуркаций периодических орбит, встроенных в антисимметричное хаотическое множество A_{10} , еще не стали устойчивыми. В фазовом пространстве системы формируется притягивающее множество, включающее в себя несинхронные орбиты, появившиеся в результате трансверсальных бифуркаций удвоения периода синхронных орбит.

Однако перестройка фазового пространства на этом не заканчивается. При $r = -0.2330$ собственное значение седлового цикла $4C_{10}^2$ (см. рис. 6) входит в единичную окружность через $+1$. Цикл $4C_{10}^2$ становится устойчивым, а в его окрестности мягко рождается пара седловых циклов того же периода (на рис.6 элементы соответствующих орбит отмечены как $4C^{si}$, где $i = 1...8$). При обратном движении по параметру данная бифуркация соответствует субкритической бифуркации вил. После бифуркации вил цикл $4C_{10}^2$ является единственным устойчивым циклом в исследуемой области фазового пространства системы. Бассейн притяжения цикла $4C_{10}^2$ занимает практически всю эту область фазового пространства. Здесь любая фазовая траектория притягивается к устойчивому циклу $4C_{10}^2$.

При $r = -0.2294$ цикл $2C_{10}^1$ претерпевает ту же бифуркацию вил. Он становится устойчивым, а в его окрестности мягко рождаются седловые циклы того же периода $2C^{si}$, где $i = 1..4$ (см. рис. 5). При обратном движении по параметру данная бифуркация соответствует субкритической бифуркации вил. Таким образом, в фазовом пространстве системы формируется мультистабильность.

При движении по управляющему параметру в другом направлении, в области, где $r < -0.5$, наблюдается подобный сценарий потери трансверсальной устойчивости хаотического аттрактора A_{10} . Однако имеются отличия в бифуркациях некоторых седловых циклов, но они также приводят к пузырящемуся переходу. При $r = -0.7137$ седловая точка C_{10} вместо бифуркации удвоения периода, как это наблюдалось в области $r > -0.5$, претерпевает суперкритическую бифуркацию вил. Ее второе собственное значение становится равным $+1$ (см. рис. 5). Седловая точка превращается в репеллер. В ее окрестности вне симметричного подпространства рождается пара седловых неподвижных точек C^{pf1} и C^{pf2} . Эта бифуркация индуцирует в системе пузырящийся переход. После точки бифуркации прорыва в фазовом пространстве системы происходит стабилизация седловых циклов, лежащих вне антисимметричного подпространства. Так при $r = -0.7705$ старшие собственные значения седловых точек C^{pf1} и C^{pf2} входят в единичную окружность через -1 . Они становятся устойчивыми и в их окрестностях рождаются седловые циклы удвоенного периода (см. рис. 5). Механизм стабилизации седловых орбит $2C_{10}$, $4C_{10}$ и $8C_{10}$ полностью совпадает с бифуркационным механизмом при $r > -0.5$, и происходит это при значениях параметра $r = -0.7225, -0.7201, -0.7212$, соответственно.

Заключение

Таким образом, для связанных идентичных кубических отображений 1 исследован механизм потери полной противофазной управляемой синхронизации хаоса. Показано, что при выходе из области синхронизации происходит последовательность мягких бифуркаций определенного семейства седловых циклов $2^N C_{10}$, которое формирует «скелет» хаотического аттрактора. Потеря устойчивости симметричного хаотического множества в трансверсальном направлении начинается с бифуркации седловой точки C_{10} , которая индуцирует в системе пузырящийся переход.

Бифуркации седловых циклов более высокого периода усиливают эффект пузыря. Описанный бифуркационный сценарий является достаточно общим для взаимодействующих систем с удвоением периода. Однако необходимо отметить и отличие. Например, в бифуркационном сценарии разрушения синфазной синхронизации хаоса в связанных кубических отображениях присутствует явление изрешечивания бассейна притяжения. Изрешечивание бассейна притяжения происходит благодаря тому, что стабилизация периодических орбит, лежащих вне симметричного подпространства происходит до бифуркации прорыва. При потере управляемой противофазной синхронизации хаоса с симметричными управляющими воздействиями на подсистемы это происходит уже после бифуркации прорыва, и изрешечивающего перехода в системе не наблюдается.

Работа поддержана программой «Развитие научного потенциала высшей школы» Министерства образования и науки РФ.

Библиографический список

1. Кузнецов Ю.И., Ланда П.С., Ольховой А.Ф. Амплитудный порог синхронизации как мера хаоса в стохастических автоколебательных системах // ДАН СССР. 1985. Т. 281. С. 1164.
2. Анищенко В.С., Вадивасова Т.Е., Постнов Д.Э., Сафонова М.А. Вынужденная и взаимная синхронизация хаоса // Радиотехника и электроника. 1991. Т. 36. С. 338.
3. Rosenblum M.G., Pikovsky A.S., Kurths J. Phase synchronization of chaotic oscillators // Phys. Rev. Lett. 1996. Vol. 76. P. 1804.
4. Abarbanel H.D.I., Rulkov N.F., Sushchik M.M. Generalized synchronization of chaos: The auxiliary system approach // Phys. Rev. E. 1996. Vol. 53. P. 4528.
5. Fujisaka H., Yamada T. Stability theory of synchronized motion in coupled-oscillator systems // Progress of theoretical physics. 1983. Vol. 69, № 1. P. 32.
6. Пиковский А.С. О взаимодействии странных аттракторов // Препринт № 79, ИПФ АН СССР, Горький, 1983.
7. Кузнецов С.П. Универсальность и подобие в поведении связанных систем Фейгенбаума // Изв. вузов: Радиофизика. 1985. Т. 28, № 8. С. 991.
8. Афраймович В.С., Веричев Н.Н., Рабинович М.И. Стохастическая синхронизация колебаний в диссипативных системах // Изв. вузов: Радиофизика. 1986. Т. 29, № 9. С. 1050.
9. Cao L.-Y., Lai Y.-C. // Phys. Rev. E. 1998. Vol. 58, № 1. P. 382.
10. Astakhov V., Shabunin A., Stalmakhov P. // Известия ВУЗов: Прикладная нелинейная динамика. 2002. Т. 10, № 3. С. 63.
11. Astakhov V., Shabunin A., Kapitaniak T., Anishchenko V. «Loss of chaos synchronization through the sequence of bifurcations of saddle periodic orbits», Physical Review Letters, 1997. Vol. 79, № 6. P. 1014.
12. Ashvin P., Buescu J., Stewart I. «Bubbling of attractors and synchronization of chaotic oscillators» // Physics Letters A. 1994. № 193. P. 126.

Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского

Поступила в редакцию 28.07.2006

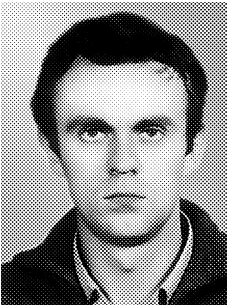
BIFURCATIONAL MECHANISMS OF DESTRUCTION OF ANTI PHASE CHAOTIC SYNCHRONIZATION IN COUPLED DISCRETE-TIME SYSTEMS

V.V. Astakhov, A.V. Shabunin, P.A. Stalmakhov

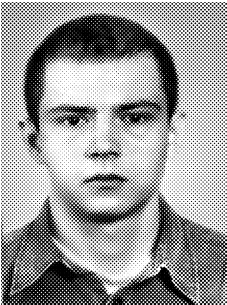
Bifurcational mechanisms responsible for destruction of antiphase synchronization of chaos are studied. Two cubic discrete maps with symmetric diffusive coupling and additional control term are used as a model. Phenomenon of synchronization formation and destruction are explored in connection with bifurcations of principal periodic orbits embedded in the chaotic attractor.



Астахов Владимир Владимирович – окончил Саратовский государственный университет (1980). Доктор физико-математических наук (1999), профессор кафедры радиофизики и нелинейной динамики СГУ. Область научных интересов – теория колебаний и динамический хаос, синхронизация и управление хаосом. Имеет более 80 публикаций в отечественных и зарубежных изданиях. E-mail: astakhov@chaos.ssu.runnet.ru



Шабунин Алексей Владимирович – окончил Саратовский государственный университет (1990). Доцент кафедры радиофизики и нелинейной динамики СГУ, кандидат физико-математических наук (1998). Научные интересы – нелинейная динамика, теория колебаний, синхронизация и управление хаосом. Автор более 40 научных публикаций. E-mail: alexey@chaos.ssu.runnet.ru



Стальмахов Петр Андреевич – окончил Саратовский государственный университет (2001, кафедра радиофизики и нелинейной динамики), аспирантуру, защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук (2006, СГУ). Область научных интересов – хаотическая динамика, синхронизация, управление хаосом. Имеет 8 научных публикаций.



ПРОТИВОФАЗНАЯ СИНХРОНИЗАЦИЯ И ФОРМИРОВАНИЕ МУЛЬТИСТАБИЛЬНОСТИ В СИММЕТРИЧНО СВЯЗАННЫХ БИСТАБИЛЬНЫХ СИСТЕМАХ

В.В. Астахов, А.В. Шабунин, П.А. Стальмахов

В работе рассматривается бифуркационный механизм формирования мультистабильности на базе режимов противофазной синхронизации в кубических отображениях с симметричной диффузионной связью. Исследуются бифуркации периодических орбит, располагающихся в инвариантном симметричном подпространстве, содержащем аттракторы, соответствующие синхронным колебаниям.

Введение

Исследования диффузионно связанных систем, переход к хаосу в которых осуществляется через каскад бифуркаций удвоения периода, показали, что для них типичны такие явления, как: полная синхронизация регулярных и хаотических колебаний [1–4] и фазовая мультистабильность [5]. Причем, как было затем обнаружено [6], оба явления связаны между собой – они являются следствием единого бифуркационного механизма, который при малой связи ведет к рождению новых устойчивых колебательных режимов, а при большей связи – к локальной изрешеченности хаотических аттракторов, соответствующих синхронным колебаниям. Для систем, уравнения которых антисимметричны относительно инверсии фазовых координат $x \leftrightarrow -x$, возможен и другой тип полностью синхронного поведения – противофазная синхронизация [7], при которой траектория в каждый момент времени подчиняется соотношению $x_1 = -x_2$ ($x_{1,2}$ – динамические переменные первого и второго осциллятора, соответственно). В работе [8] исследовались особенности противофазной синхронизации хаоса в системах с дискретным временем с симметричной диффузионной связью и было показано, что в подобных осцилляторах возможна противофазная синхронизация только регулярных колебаний, в то время как хаотические противофазные колебания трансверсально неустойчивы. Однако в области регулярных колебаний между эволюцией синфазных и противофазных режимов много общего. И в том и в другом случае бифуркации синхронных режимов дают начало формированию развитой фазовой мультистабильности. В то время как закономерности формирования мультистабильности на базе синфазных режимов многократно исследовались и

подробно описаны [9–11], особенности формирования мультистабильности на базе противофазных режимов остаются неизученными. Их рассмотрению и посвящена настоящая работа.

1. Исследуемая система, свойства симметрии и устойчивость противофазных решений

Будем рассматривать систему двух идентичных кубических отображений с симметричной диффузионной связью

$$\begin{aligned}x_{n+1} &= f(x_n) + \gamma(f(y_n) - f(x_n)), \\y_{n+1} &= f(y_n) + \gamma(f(x_n) - f(y_n)),\end{aligned}\tag{1}$$

где x_n, y_n – динамические переменные первой и второй подсистемы; $n = 0, 1, 2, 3, \dots$ – дискретное время; γ – коэффициент связи; функция $f(x_n) = (a - 1)x_n - ax_n^3$ задает одиночное кубическое отображение, a – его управляющий параметр.

Одиночное кубическое отображение обладает симметрией относительно преобразования координат $x \leftrightarrow -x$, следствием чего и является возможность в системе (1) появления режимов противофазной синхронизации. Траектории противофазных режимов располагаются в одномерном инвариантном подпространстве $I_a : x = -y$ полного фазового пространства системы (1). Кроме того, вследствие идентичности осцилляторов и симметрии связи в системе также возможны режимы синфазной синхронизации, траектории которых располагаются в инвариантном подпространстве $I_i : x = y$. Явления, связанные с синфазной синхронизацией в этой и аналогичных системах, детально описаны в литературе и в настоящей работе затрагиваться не будут. В дальнейшем при упоминании синхронных режимов имеются в виду только режимы противофазной синхронизации.

Одиночное кубическое отображение – система, демонстрирующая переход к хаосу через каскад субгармонических бифуркаций. При любых значениях параметра a в системе существует неподвижная точка периода один

$$C_0 : x = 0,$$

являющаяся при $a < 2$ устойчивой. При $a = 2$ ее мультипликатор $\mu = a - 1$ принимает значение $+1$, что приводит к бифуркации потери симметрии (бифуркация вил), в результате которой неподвижная точка становится неустойчивой и в ее окрестности рождается пара устойчивых неподвижных точек периода один, симметричных друг другу:

$$C_{1,2} : x = \pm \sqrt{\frac{a-2}{a}}.$$

При дальнейшем увеличении a на базе неподвижных точек C_1 и C_2 наблюдается каскад бифуркаций удвоения периода, завершающийся при $a = 3.3$ возникновением хаотических аттракторов. При $a = 3.6$ два симметричных друг другу хаотических аттрактора объединяются в один.

При введении связи динамика системы (1) существенно усложняется. В системе связанных отображений при $0 < a < 2$ существует устойчивая неподвижная

точка в начале координат

$$C_{00} : x = 0, y = 0.$$

С увеличением параметра a , при $a = 2$ эта точка претерпевает бифуркацию потери симметрии (бифуркацию вил), ее мультипликатор

$$\mu_{||} = a - 1$$

становится равным $+1$. В ее окрестности в симметричном подпространстве ($x = y$) рождается пара устойчивых симметричных друг другу неподвижных точек

$$C_{01} : x = y = \sqrt{\frac{a-2}{a}},$$

$$C_{02} : x = y = -\sqrt{\frac{a-2}{a}}.$$

После бифуркации неподвижная точка C_{00} становится неустойчивой в тангенциальном к I_i направлении, но остается устойчивой в трансверсальном (перпендикулярном) направлении. Затем, при дальнейшем увеличении a седловая точка C_{00} претерпевает вторую бифуркацию потери симметрии, ее второй мультипликатор

$$\mu_{\perp} = (1 - 2\gamma)(a - 1)$$

также становится равным $+1$. В окрестности C_{00} в подпространстве I_a рождается пара седловых симметричных друг другу неподвижных точек

$$C_{10} : x = -y = \sqrt{1 - \frac{1-\gamma}{a(0.5-\gamma)}},$$

$$C_{20} : x = -y = -\sqrt{1 - \frac{1-\gamma}{a(0.5-\gamma)}},$$

после чего точка C_{00} превращается в репеллер. Регулярные и хаотические режимы синфазной синхронизации формируются на базе неподвижных точек C_{01} и C_{02} . Противофазные режимы формируются на базе неподвижных точек C_{10} и C_{20} .

Для анализа устойчивости противофазных колебаний удобно рассмотреть отдельно устойчивость к тангенциальным и трансверсальным к I_a возмущениям. Удобнее всего перейти к переменным, ориентированным вдоль и перпендикулярно I_a :

$$u = \frac{(x+y)}{2},$$

$$v = \frac{(x-y)}{2}.$$

Уравнения в новых переменных в непосредственной окрестности инвариантного подпространства выглядят следующим образом:

$$u_{n+1} = f'(v_n)u_n, \quad (2)$$

$$v_{n+1} = (1 - 2\gamma)f(v_n). \quad (3)$$

В новых переменных базисный вектор \bar{u} направлен перпендикулярно I_a , а базисный вектор \bar{v} - тангенциально к нему. Уравнение (3) задает движение внутри инвариантного подпространства, то есть определяет вид синхронных колебаний. Независимость этого уравнения от переменной u отражает факт инвариантности антисимметричного подпространства относительно оператора эволюции исходной системы (1). В отличие от случая синфазной синхронизации форма синхронных колебаний зависит от коэффициента связи. При нулевой связи противофазные колебания повторяют колебания в одиночном отображении. При стремлении γ к 0.5 колебания при любых начальных условиях и значениях a стягиваются к нулевой неподвижной точке. Из (3) легко определить выражение для тангенциального показателя Ляпунова:

$$\Lambda_{\parallel} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \ln |(1 - \gamma)f'(v_n)|, \quad (4)$$

который определяет устойчивость в тангенциальном к I_a направлении.

Уравнение (2) определяет движение в нормальном направлении к инвариантному подпространству. Параметр связи не входит в него явным образом, однако зависимость от v_n предполагает неявную зависимость от коэффициента связи (поскольку от него зависит вид решения v_n). Нулевое решение (2) $u = 0$ соответствует противофазным колебаниям. Устойчивость этого решения определяет устойчивость противофазных колебаний к трансверсальным возмущениям. Эта устойчивость определяется трансверсальным показателем Ляпунова

$$\Lambda_{\perp} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \ln |f'(v_n)|. \quad (5)$$

Из выражений (4) и (5) видно что соотношение между тангенциальным и трансверсальным показателями Ляпунова задается уравнением:

$$\Lambda_{\perp} = \Lambda_{\parallel} - \ln |1 - 2\gamma|, \quad (6)$$

а значит, для небольших положительных значений γ ($0 \leq \gamma \leq 0.5$) верно соотношение

$$\Lambda_{\perp} \geq \Lambda_{\parallel}. \quad (7)$$

Неравенство (7) противоположно соответствующему соотношению для синфазной синхронизации [8], при которой тангенциальный показатель Ляпунова всегда обгоняет трансверсальный. Из (7) можно сделать следующие выводы:

- каждая локальная бифуркация, сопровождающаяся сменой знака показателя Ляпунова, происходит в системе (1) дважды: вначале в нормальном к I_a направлении, а затем в тангенциальном;
- любые синхронные хаотические предельные множества трансверсально неустойчивы.

Проведенные исследования противофазных синхронных режимов в системе связанных кубических отображений показали существование устойчивых противофазных периодических движений с любым конечным периодом. Наряду с этим установлено, что в таких системах режимы противофазной самосинхронизации хаоса отсутствуют. Рассмотрим подробнее бифуркации противофазных колебательных режимов.

2. Бифуркации синхронных колебаний

Рассмотрим динамику исследуемой системы (1) в инвариантном подпространстве I_a . Как было показано в разделе 1, в результате второй бифуркации потери симметрии седловой точки C_{00} в подпространстве $(x = -y)$ рождается пара седловых точек (C_{10}, C_{20}), симметричных друг другу, на базе которых происходит развитие всех режимов противофазной синхронизации. Предельные множества, сформированные на базе этих двух точек, идентичны с точностью до преобразования симметрии $x \leftrightarrow -y$. Поэтому ограничимся рассмотрением только одного семейства режимов, например, сформированного около неподвижной точки C_{10} .

В ходе исследований был проведен двухпараметрический бифуркационный анализ периодических орбит, расположенных внутри подпространства I_a , а также несинхронных орбит, возникших в окрестности инвариантного подпространства в результате трансверсальных бифуркаций. Общая картина расположения бифуркационных линий представлена на рис. 1. Рассмотрим подробнее характер имеющих

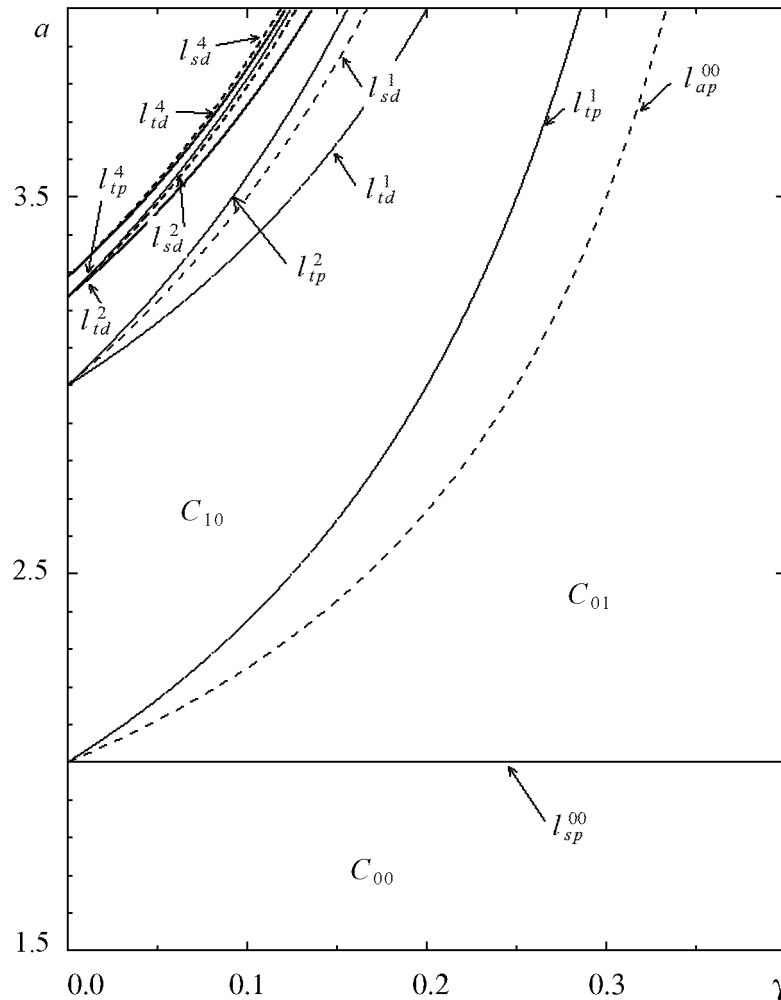


Рис. 1. Линии бифуркаций противофазных режимов на плоскости параметров $\gamma - a$

место бифуркаций противофазных режимов. Как уже отмечалось, седловая неподвижная точка C_{10} рождается из седловой неподвижной точки, расположенной в начале координат (C_{00}), в результате бифуркации потери симметрии (линия l_{ap}^{00}).

Структура фазового пространства после этой бифуркации показана на рис. 2, *а*. На нем схематически изображено взаимное расположение указанных выше орбит, а также показаны направления их устойчивых и неустойчивых инвариантных многообразий. Синхронная орбита C_{10} является устойчивой по отношению к возмущениям внутри подпространства I_a и неустойчивой по отношению к трансверсальным возмущениям. Для того чтобы данная орбита стала аттрактором, необходима еще одна бифуркация в трансверсальном направлении. В данном случае такой бифуркацией является бифуркация вил на линии l_{tp}^1 . В результате нее в окрестности точки C_{10} вне инвариантного подпространства рождается пара седловых орбит C_{10}^+ и C_{10}^- , симметричных друг другу, а исходная орбита C_{10} , претерпевшая бифуркацию вил, становится устойчивой. Структура фазового пространства после бифуркации представлена на рис. 2, *б*. При изменении управляющих параметров на базе устойчивой орбиты C_{10} наблюдается каскад бифуркаций удвоения периода. Каждая из орбит, участвующих в каскаде, претерпевает бифуркацию удвоения периода дважды. Вначале, будучи устойчивой, – по одному мультипликатору, собственный вектор которого перпендикулярен к I_a , затем, уже став седловой, – по второму, собственный вектор которого касателен к I_a . В результате первой бифуркации орбита теряет устойчивость в направлении, трансверсальном к симметричному подпространству. В ее окрестности вне симметричного подпространства рождается устойчивая орбита удвоенного периода. В результате второго удвоения седловая орбита теряет устойчивость в тангенциальном к подпространству направлении. Она становится репеллером, и в ее окрестности внутри антисимметричного подпространства рождается седловая орбита удвоенного периода. На рис. 1 сплошные кривые – это линии трансверсальных бифуркаций: l_{td}^1 – для орбиты периода 1, l_{td}^2 – для орбиты периода два и l_{td}^4 – для орбиты периода четыре; а штриховые – линии тангенциальных бифуркаций: l_{sd}^1 – для орбиты периода один, l_{sd}^2 – для орбиты периода два и l_{sd}^4 – для орбиты периода четыре. Поскольку бифуркации удвоения внутри инвариантного подпространства происходят с уже неустойчивыми орбитами, вновь появившиеся орбиты удвоенных

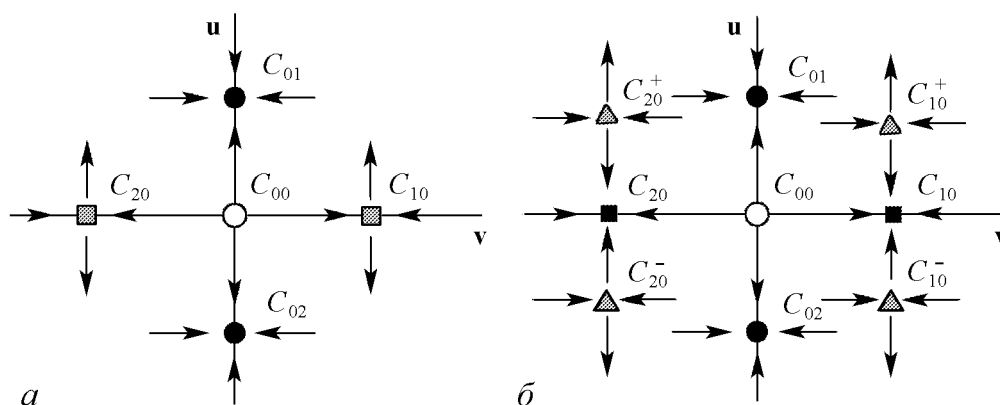


Рис. 2. Схематическое изображение структуры фазового пространства после второй бифуркации потери симметрии неподвижной точки в начале координат (*а*) и после бифуркации вил точки C_{10} (*б*)

периодов также трансверсально неустойчивы. Структура фазового пространства около каждой из таких орбит схожа с изображенной на рис. 2, *a* для орбиты периода один, с той разницей, что теперь каждая орбита состоит из нескольких точек. Затем, при изменении параметров появившиеся внутри симметричного подпространства седловые орбиты становятся устойчивыми через субкритические бифуркации вил (аналогично бифуркации орбиты C_{10}). Линии этих бифуркаций обозначены: l_{tp}^2 , l_{tp}^4 . Таким образом, на плоскости параметров в области между линиями l_{tp}^1 и l_{td}^1 существует устойчивая противофазная орбита периода 1, между линиями l_{tp}^2 и l_{td}^2 – устойчивая противофазная орбита периода 2, между линиями l_{tp}^4 и l_{td}^4 – устойчивая противофазная орбита периода 4. Бифуркации орбит более высоких периодов происходят аналогично. Таким образом, до перехода к хаосу на плоскости параметров существуют полосы устойчивости для противофазных периодических орбит, все более и более сужающиеся с ростом периода орбиты. Эти области разделены полосами неустойчивости для тех же орбит. Похожий бифуркационный сценарий наблюдался в ряде систем для случая синфазной синхронизации [6, 8]. Однако в том случае бифуркации удвоения внутри симметричного подпространства предшествовали бифуркациям удвоения в трансверсальном направлении и поэтому отмеченное чередование полос устойчивости и неустойчивости отсутствовало.

Таким образом, анализ бифуркаций орбит в симметричном подпространстве I_a показал, что в системе существуют устойчивые противофазные периодические движения с любым конечным периодом 2^N . Области существования этих колебаний на плоскости параметров сужаются при увеличении периода орбиты, и при переходе к хаосу их ширина становится нулевой. В результате трансверсальных бифуркаций удвоения периода в окрестности инвариантного подпространства появляются устойчивые несинхронные орбиты, каждая из которых является родоначальником своего семейства регулярных и хаотических режимов.

3. Формирование мультистабильности в окрестности инвариантного подпространства

Рассмотрим формирование новых устойчивых режимов в окрестности инвариантного подпространства I_a . В предыдущем разделе было показано, что в рассматриваемой системе в результате трансверсальных бифуркаций удвоения периода в окрестности предельных множеств, соответствующих синхронным колебаниям, появляются аттракторы несинхронных колебаний. При изменении параметров, на базе каждой из этих орбит, в результате последовательности мягких бифуркаций образуется свое семейство регулярных и хаотических режимов. Для более наглядного представления о формировании мультистабильности разделим все множество наблюдаемых режимов на несколько характерных семейств. Для каждого семейства построим отдельную карту режимов на плоскости параметров $a - \gamma$. Общая карта режимов будет состоять из нескольких листов. Первый из этих листов относится к режимам, образованным в результате бифуркаций орбиты $1C_{10}$. Так, на линии l_{td}^1 (см. рис. 1) после бифуркации удвоения периода устойчивой орбиты C_{10} в ее окрестности в перпендикулярном к I_a направлении появляется устойчивая орбита удвоенного периода $2C_{10}^1$. Расположение точек орбиты $2C_{10}^1$ показано на рис. 3, *a*.

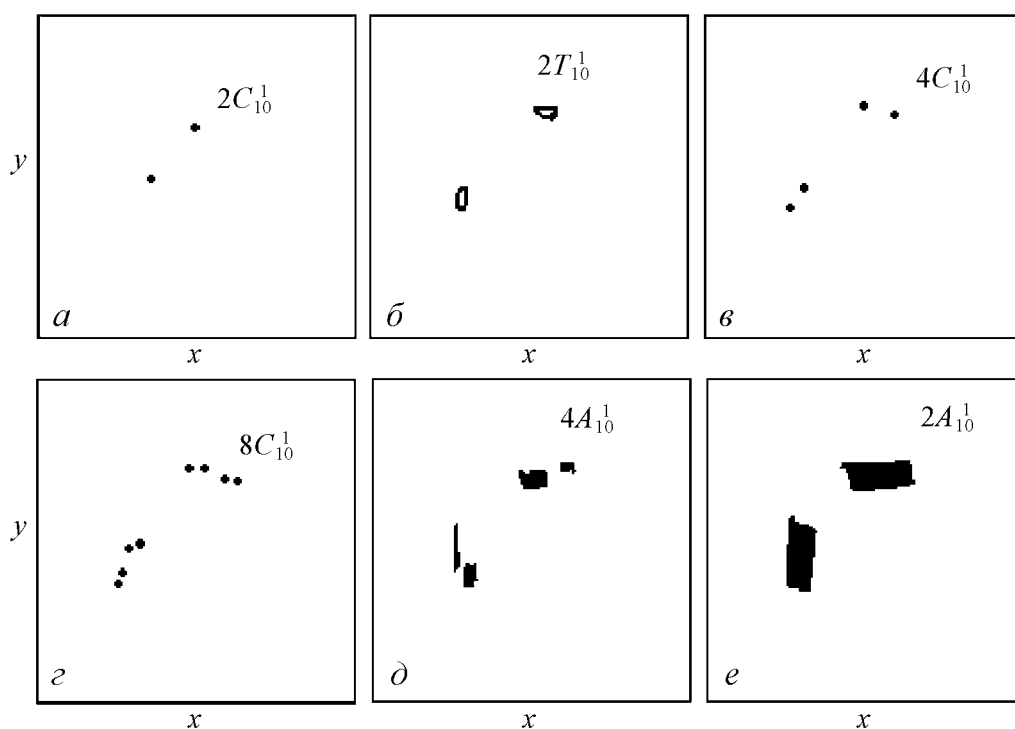


Рис. 3. Фазовые портреты режимов, сформированных на базе орбиты $2C_{10}^1$

Данная орбита порождает семейство регулярных и хаотических режимов, фазовые портреты которых представлены на рис. 3, а карта динамических режимов этого семейства на плоскости управляющих параметров построена на рис. 4, а (лист ANS1). Область параметров, занимаемая режимами данного семейства, отмечена на рисунке серым цветом. Линия l_1 повторяет линию l_{td}^1 рис. 1. При изменении управляющих параметров на линии l_2 устойчивая орбита $2C_{10}^1$ в результате бифуркации Неймарка – Сакера мягко сменяется квазипериодическими движениями $2T_{10}^1$ (рис. 3, б). При значениях a больше 3.55 с уменьшением коэффициента связи γ происходит переход к двухленточному хаотическому аттрактору $2A_{10}^1$ через разрушение квазипериодических движений (рис. 3, в). При a меньше 3.55 с уменьшением γ в результате синхронизации движений на торе $2T_{10}^1$ возникает устойчивая орбита периода четыре $4C_{10}^1$ (рис. 3, в) и симметричная ей орбита $4C_{10}^3$. Далее на базе этих орбит наблюдается каскад бифуркаций удвоения периода и переход к хаосу, завершающийся образованием четырехленточных аттракторов $4A_{10}^1$ (рис. 3, д) и $4A_{10}^3$. При увеличении a эти два аттрактора объединяются с образованием двухленточного аттрактора $2A_{10}^1$. Таким образом, эволюция режимов на базе орбиты $2C_{10}^1$ заканчивается формированием двухленточного хаотического аттрактора, фазовый портрет которого изображен на рис. 3, е. При дальнейшем изменении управляющих параметров на линии l_4 происходит жесткий переход на другое семейство режимов: несинхронные колебания, сформированные на базе орбиты $2C_{10}^1$ сменяются режимами на базе орбиты $4C_{10}^2$, то есть происходит перескок с листа ANS1 на лист ANS2 (рис. 4, б).

Рассмотрим теперь следующее семейство несинхронных режимов, сформированных на базе орбиты $4C_{10}^2$, которая образовалась в результате трансверсальной бифуркации удвоения периода синхронной орбиты $2C_{10}$ (линия l_{td}^2 на рис. 1). На

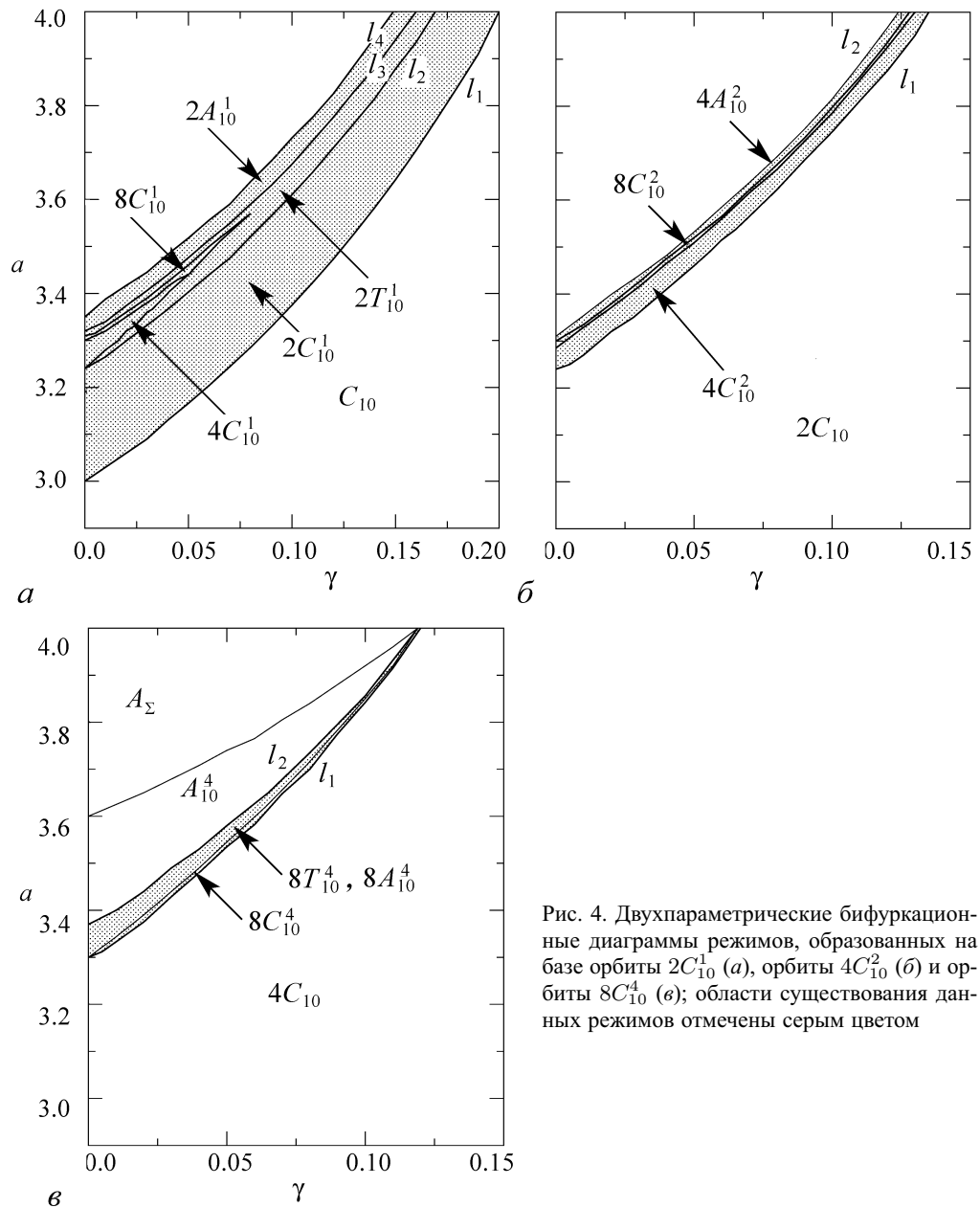


Рис. 4. Двухпараметрические бифуркационные диаграммы режимов, образованных на базе орбиты $2C_{10}^1$ (а), орбиты $4C_{10}^2$ (б) и орбиты $8C_{10}^4$ (в); области существования данных режимов отмечены серым цветом

рис. 4, б показана карта семейства несинхронных режимов, сформированных на базе устойчивой орбиты $4C_{10}^2$ (область существования этих режимов отмечена серым цветом). Структура пространства параметров для этого семейства схожа с аналогичной структурой листа ANS1. Различия заключаются в том, что режимы этого семейства образуются на базе орбиты периода четыре и соответственно эволюционируют к четырехленточному хаотическому аттрактору. Фазовые портреты показаны на рис. 5.

Здесь также возможны два пути усложнения колебаний: через разрушение квазипериодических колебаний $4T_{10}^2$ (рис. 5, в) и через бифуркации удвоения периода орбиты $8C_{10}^2$, возникшей в результате синхронизации движений на торе $4T_{10}^2$. Эволюция несинхронных режимов на базе $4C_{10}^2$ заканчивается образованием хаотического

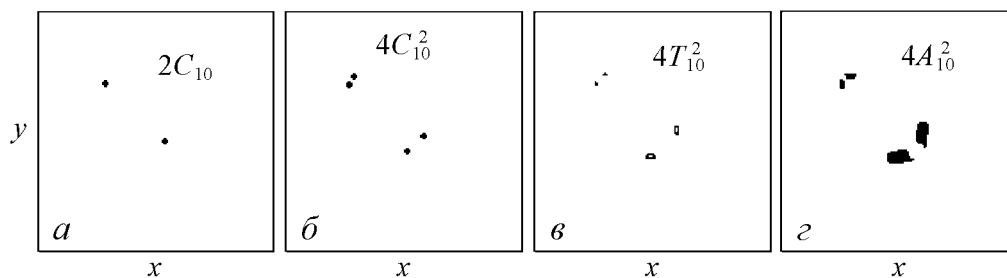


Рис. 5. Орбиты, принадлежащие листу ANS2 (см. рис. 4, б)

аттрактора $4A_{10}^2$, фазовый портрет которого изображен на рис. 5, д. Дальнейшее увеличение параметра a или уменьшение γ приводит (линия l_2 на рис. 4, б) к жесткому переходу на другое семейство циклов, области существования которых показаны на листе ANS3 (рис. 4, в). Это семейство режимов образовалось в результате трансверсальной бифуркации удвоения периода орбиты $4C_{10}$: $4C_{10} \rightarrow 8C_{10}^4$. Фазовый портрет орбиты $8C_{10}^4$ показан на рис. 6, а.

Впоследствии на базе этой орбиты возникает семейство регулярных и хаотических режимов, завершающихся образованием восьмиленточного хаотического аттрактора $8A_{10}^4$ (рис. 6, б). Область существования режимов данного семейства отмечена на рис. 4, в серым цветом. При дальнейшем изменении параметров возможен перескок с этого листа на лист, образованный на базе орбиты $16C_{10}^8$, затем с него – на семейство, сформированное на базе орбиты $32C_{10}^{16}$ и т.д. Таким образом, в пространстве параметров существует бесконечное число листов, относящихся к

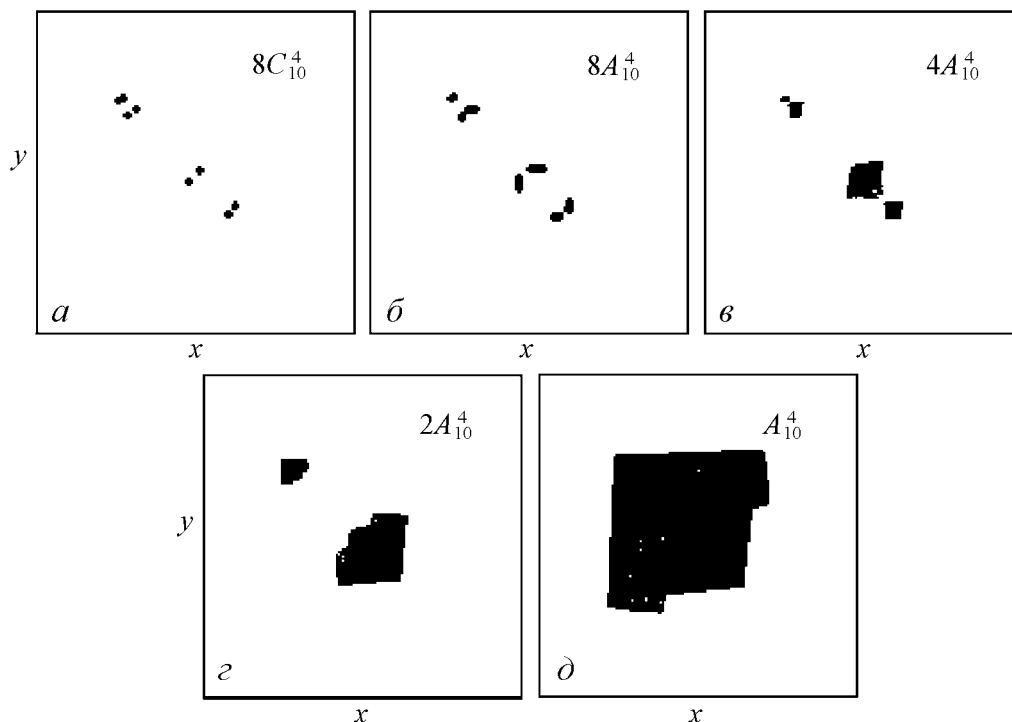


Рис. 6. а, б – орбиты, принадлежащие листу ANS3 (см. рис. 4, в); в, г, д – объединенные хаотические аттракторы

режимам, сформированным на базе несинхронных орбит все большего и большего периода. Однако нетрудно заметить, что с ростом номера листа область существования семейства режимов все более и более сужается. Фактически, в районе линии l_2 (см. рис. 4, в) мы имеем накопление бифуркационных линий перескоков с одного листа режимов на другой. На практике, при конечной скорости движения по параметрам, можно пронаблюдать только конечное число перескоков с листа на лист. В наших экспериментах мы ограничились листом ANS3. После пересечения линии l_2 наблюдается последовательное объединение хаотических аттракторов различных семейств. При таком объединении вначале формируются хаотические аттракторы в окрестности противофазного подпространства $4A_{10}^4, 2A_{10}^4, A_{10}^4$ (рис. 6, в, з, д). Дальнейшее изменение параметров системы приводит к образованию несинхронного хаотического аттрактора A_Σ , объединяющего хаотические множества, расположенные в синфазном и противофазном симметричных подпространствах (а также в их окрестности) и соответствующие всем ранее наблюдаемым режимам.

Из сравнения карт динамических режимов на рис. 4, а, б и в видно, что имеются области значений параметров, где листы ANS1, ANS2 и ANS3 перекрываются. То есть в фазовом пространстве системы одновременно существуют аттракторы различных семейств. Также из сравнения карт режимов видно, что лист ANS3 занимает наименьшую область на плоскости параметров. А лист ANS1, напротив, – наибольшую область. Область мультистабильности ограничена нижним краем листа ANS1. Наибольшее число сосуществующих аттракторов наблюдается при малой связи в окрестности точки перехода к хаосу в индивидуальной системе.

Таким образом, в системе связанных идентичных кубических отображений в окрестности антисимметричного подпространства при изменении управляющих параметров системы наблюдается процесс формирования фазовой мультистабильности. В фазовом пространстве системы одновременно существуют различные регулярные и хаотические аттракторы.

Заключение

Мы исследовали процесс формирования мультистабильности в системе диффузионно связанных отображений в окрестности режимов противофазных колебаний. Установлено, что новые устойчивые несинхронные орбиты появляются в результате трансверсальных бифуркаций удвоения периода синхронных орбит. В результате каждой из таких бифуркаций в окрестности потерявшей устойчивость синхронной орбиты появляется несинхронная, самосимметричная орбита удвоенного периода. В дальнейшем из этой орбиты в результате бифуркации Неймарка – Сакера возникает многосвязная инвариантная кривая, соответствующая квазипериодическим колебаниям. Переход к хаосу происходит двумя путями: при малой связи – через синхронизацию на торе и последовательность бифуркаций удвоения периода, при большей связи – через разрушение квазипериодических движений. Развитие семейства режимов завершается жестким переходом на другое семейство, возникшее на базе орбиты более высокого периода.

Работа поддержана Министерством образования и науки РФ в рамках программы «Развитие научного потенциала высшей школы».

Библиографический список

1. *Fujisaka H., Yamada T.* Stability theory of synchronized motion in coupled-oscillator systems // Progress of theoretical physics. 1983. Vol. 69, № 1. P. 32.
2. *Пиковский А.С.* О взаимодействии странных аттракторов // Препринт № 79. ИПФ АН СССР. Горький. 1983.
3. *Кузнецов С.П.* Универсальность и подобие в поведении связанных систем Фейгенбаума // Изв. вузов: Радиофизика. 1985. Т. 28, № 8. С. 991.
4. *Афраймович В.С., Веричев Н.Н., Рабинович М.И.* Стохастическая синхронизация колебаний в диссипативных системах // Изв. вузов: Радиофизика. 1986. Т. 29, № 9. С. 1050.
5. *Астахов В.В., Безручко Б.П., Пономаренко В.И., Селезнев Е.П.* Квазиоднородные стохастические движения и их разрушение в системе связанных нелинейных осцилляторов // Изв. вузов: Радиофизика. 1988. Т. 31, № 10. С. 627.
6. *Astakhov V., Shabunin A., Uhm W., Kim S.* Multistability formation and synchronization loss in coupled Hennon maps: Two sides of the single bifurcational mechanism // Phys. Rev. E. 2001. Vol. 63. 056212.
7. *Caio L.-Y., Lai Y.-C.* Antiphase synchronism in chaotic systems // Phys. Rev. E. 1998. Vol. 58, № 1. P. 382.
8. *Астахов В.В., Шабунин А.В., Стальмахов П.А.* Мультистабильность, синфазная и противофазная синхронизация в системах с бифуркациями удвоения периода // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2002. Т. 10, № 3. С. 63.
9. *Астахов В.В., Безручко Б.П., Гуляев Ю.П., Селезнев Е.П.* Мультистабильные состояния в диссипативно связанных Фейгенбаумовских системах // Письма в ЖТФ. 1989. Т. 15, № 3. С. 60.
10. *Астахов В.В., Безручко Б.П., Пономаренко В.И., Селезнев Е.П.* Мультистабильность в системе радиотехнических генераторов с емкостной связью // Радиотехника и Электроника. 1991. Т. 36, № 11. С. 2167.
11. *Астахов В.В., Шабунин А.В., Анищенко В.С.* Спектральные закономерности при формировании мультистабильности в связанных генераторах с удвоением периода // Радиотехника и Электроника. 1997. Т. 42, № 8. С. 974.

Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского

Поступила в редакцию 7.07.2006

ANTIPHASE SYNCHRONIZATION AND MULTISTABILITY FORMATION IN SYMMETRICALLY COUPLED BISTABLE SYSTEMS

V.V. Astakhov, A.V. Shabunin, P.A. Stalmakhov

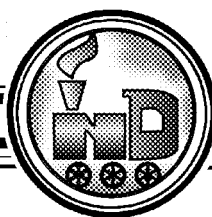
Bifurcational mechanisms of multistability formation on base of regimes of antiphase synchronization in diffusively coupled cubic maps are considered. Bifurcations of periodic orbits inside symmetric invariant subspace, which contains attractors of synchronous oscillations, are studied.

Виталий Георгиевич Очев. 1931 – 2004

В.Г. Очев – один из наиболее известных в Саратовском университете, подлинно университетский человек с многогранностью интересов и широким кругозором – заслуженный деятель науки РФ, член-корреспондент РАЕН, доктор геолого-минералогических наук, профессор. Основная область научных интересов связана с изучением ископаемых позвоночных, вопросами палеобиогеографии, стратиграфии, палеоэкологии. В.Г. Очев долгое время заведовал отделом биостратиграфии и палеонтологии НИИ геологии СГУ, позднее длительное время возглавлял кафедру исторической геологии и палеонтологии на геологическом факультете СГУ (подробнее о В.Г. Очеве см., например, Палеонтологический журнал, 2004, № 6).

Будучи вдумчивым и серьезным исследователем, В.Г. Очев незамедлительно реагировал на появляющиеся в современной науке новые идеи и течения, изучая и критически оценивая их, консультируясь со специалистами разных направлений, осмысливая возможности и перспективы. Синергетический бум и интенсивное проникновение синергетических идей в другие науки, в том числе науки о жизни и науки о Земле (а он, будучи прежде всего палеонтологом, работал на их стыке), не могло не привлечь его внимания. Последние годы жизни осмысление синергетических идей в геологии и биологии стало одним из направлений его деятельности, закономерным элементом которой явилась организация семинара, которому посвящена предлагаемая читателю статья В.Г. Очева, представляющая собой определенный итог его работы и попытку осмысления поднятых проблем по результатам общения геологической аудитории со специалистами по нелинейной динамике. Это последняя работа Виталия Георгиевича. Он оставил набросок текста, который был несколько доработан и отредактирован нами с минимальными изменениями и дополнениями. Был составлен также список цитированной литературы.

Коллеги



**РАЗМЫШЛЕНИЯ ПО ИТОГАМ
ОБЩЕДОСТУПНОГО НЕЛИНЕЙНОГО СЕМИНАРА
ГЕОЛОГИЧЕСКОГО ФАКУЛЬТЕТА И НИИ ГЕОЛОГИИ СГУ ***

В.Г. Очев

Новые направления в физике, связанные у нас, прежде всего, с именем И.Р. Пригожина, в статье Е.Н. Князевой и А.Л. Туробова (2000) рассматриваются как путь к «единой науке о единой природе». В качестве обобщающего названия для этих новых направлений предлагаются различные понятия. Наиболее часто мы сталкиваемся с двумя: «нелинейная динамика» (термин И.Р. Пригожина) и «синергетика» (термин Г. Хакена). Обращает на себя внимание тот факт, что, когда речь идет о связанных с ними проблемах, обсуждаются вещи близкие, но, вместе с тем, не совсем тождественные. На вопрос – одно и то же нелинейная динамика и синергетика или нет – физики отвечают различно. Эти термины могут иметь более узкий и более широкий смысл.

Природные системы могут быть детерминированными (то есть предсказуемыми, с причинно-следственными связями) и при этом линейными или нелинейными, а также недетерминированными (непредсказуемыми, случайными процессами) – естественно, всегда нелинейными. Собственно нелинейная динамика изучает нелинейное поведение детерминированных систем, то есть систем с предсказуемым нелинейным поведением. Связанные с ними процессы элементарно сводятся к колебаниям и волнам. Поведение детерминированных систем может быть упорядоченным, то есть с повторяющейся во времени периодичностью. Но оно может представлять собой и «детерминированный хаос» при отсутствии упорядоченности – периодичности, повторяемости во времени. У специалистов по нелинейной динамике «детерминированный хаос» и просто хаос – понятия очень близкие. Нелинейность недетерминированных систем, где отсутствуют причинно-следственные связи (хрестоматийный пример – броуновое движение) физики не рассматривают. Эти процессы могут быть условно названы «природным хаосом» по аналогии с мифологическим.

Синергетика в узком смысле изучает другие природные явления – смену устойчивых состояний и рассматривает такие понятия, как «бифуркация» и «самооргани-

*Подробнее об «Общедоступном нелинейном семинаре», одним из организаторов которого был профессор Саратовского университета Виталий Георгиевич Очев, см. в журнале Известия вузов. ПНД, 2005, т. 13, № 4, с. 90-91.

зация». Вместе с тем, проблемы нелинейной динамики и синергетики в узком смысле, естественно, тесно пересекаются. Они взаимосвязаны, так как смена устойчивых состояний системы рассматривается как нелинейность.

Д.И. Трубецков в своем докладе на семинаре, используя для этих новых направлений как обобщающий термин нелинейная динамика, сказал, что это «не наука, а движение». Развивая эту мысль, – движение к более полной общенаучной идеологии, общей картине устройства мира. Такая общая картина на философском уровне описана диалектикой. Здесь же речь должна идти об уровне между философией и конкретными науками. В литературе по философским вопросам в геологии, в обилии появившейся особенно в 1960-е годы, этот уровень называли то «метанаучным», то «онтологическим». Философы отсылали к нему такие проблемы, как формы движения материи. Рассматриваемые нами новые идеи в физике не формируют эту общую идеологию целиком. Ранее основу ее составляла физическая картина мира Ньютона. Она была дополнена идеями относительности, эволюционизма. Наукой эту идеологию можно было бы назвать лишь условно, как и в целом философию. Но, если подбирать для нее общее название, то наверное стоит предпочесть термин синергетика как этимологически наиболее обобщенный.

Поскольку речь ведется о внедрении достижений этих новых направлений в физику и иные науки, это требует рассмотрения трех основных вопросов: внедрение понятийной системы, внедрение методов исследований и идеологическая роль этих направлений. Обратимся последовательно к каждому из них.

Внедрение понятийного аппарата. Внедрение, в частности, в геологию терминов нелинейной динамики и синергетики стало теперь даже модным. Здесь есть такие самые общие простые понятия, которые поставили специалистов этих других наук в положение мольеровского господина Журдена. Эти явления были известны, но не знали, что их можно так называть. Это касается, в том числе, и собственно понятий линейности и нелинейности. И у геологов на этот счет масса очевидных примеров. Но с внедрением более сложных понятий возникают проблемы. Приведем ряд примеров.

Автоколебания. У физиков так называется процесс, идущий без внешнего воздействия. Предложить подобную модель в геологии на примере процесса седиментогенеза попытался А.В. Лукьянов (1998). Например, с источника сноса в бассейн поступает осадочный материал. В бассейне имеется перепад глубин с определенным углом поверхности дна. Когда масса накопившегося в мелководной части осадка достигнет какой-то критической величины, то произойдет его обрушение на глубины под воздействием гравитации. Затем вновь в мелководной части продолжится процесс накопления новой порции осадков. Здесь сразу же возникает вопрос о реальности отсутствия внешнего воздействия. Ведь в пределах источника сноса задействовано поступление туда водных масс из окружающей атмосферы и гидросферы и т.д. Здесь нет замкнутости системы. Таким образом, наблюдается что-то близкое к модели физиков, но, в принципе, не тождественное, чтобы внедрять строгий физический термин.

Волны. Специфика волн заключается в распространении энергии в пространстве без перемещения вещества. Примеры в процессах природных масштабов хорошо известны: сейсмические волны, волны в гидросфере. Но иногда им пытаются уподобить в принципе иные процессы. Возникали, например, идеи, что многие тече-

ния, несущие теплые воды, тоже в действительности не течения, а имеют волновую природу. Но это не так. Течения исследуются с помощью дрейфующих буев и измерены их скорости.

Такое вольное широкое применение термина наблюдается не только в науках о Земле. Совершенно условно использование термина волны в социальной сфере. Это «волны Токорева» в экономике или «великие демографические волны» Фишера. В первом случае это колебания величин во времени. «Демографические волны» связаны с переселением людей, то есть с перемещением. Их можно, скажем, из физических явлений сравнить с солнечными вспышками – потоком корпускул, но не с имеющей действительно волновую природу светимостью солнца. Такая терминология здесь больше образная, чем научная.

Хаос. Сделаны попытки использования этого понятия, наряду с бифуркацией и с самоорганизацией, при рассмотрении экосистемных перестроек в эволюции биосферы. В элементарном физическом процессе переход из одного устойчивого состояния в другое это просто достижение определенной пороговой точки – «точки бифуркации». Здесь может и не быть какого-то выбора дальнейшего пути, нет раздвоения. И здесь нет места для какой-либо самоорганизации. Но если процесс усложняется, то «точка расплывается», может появиться интервал, область бифуркации как во времени, так и в пространстве. А при экосистемных перестройках в истории жизни путь саморегуляции до достижения нового устойчивого состояния может длиться миллионы лет. Здесь нетрудно представить себе процессы бифуркации (выбор новых исторических путей) и самоорганизации как освобождение и занятие новыми хозяевами экологических ниш и преобразование набора самих этих экологических ниш. Но можно ли весь этот процесс перестройки назвать хаосом, как это сделал недавно на сессии Всероссийского палеонтологического общества в Санкт-Петербурге один профессор-географ, предложивший палеонтологам свой доклад? В каком смысле хаос? В смысле нелинейной динамики, терминологию которой в процессы истории жизни он стремился в докладе внедрить. Или в широком условном смысле «природного хаоса»? Возможно и очень вероятно, что присутствует и этот последний, как атрибут любой перестройки. А что-то при жестких перестройках может оказаться и упорядоченным. Конечно, просто объявление экосистемных перестроек хаосом нельзя считать корректным внедрением этого термина как научного.

Опыт внедрения понятий порядка и хаоса в геодинамике предпринят в статье С.В. Аплонова и Б.А. Лебедева (2003). Они в качестве порядка приводят закономерный ряд литологических формаций, а ряды с нестандартным чередованием из-за стратиграфических перерывов рассматривают как хаос. Далее, синхронность в поднятиях и опусканиях континентов – порядок, а различный до противоположного характер их перемещений – хаос. Последний пример – необычная для физиков модель. В ней рассматривается не процесс, идущий во времени, а сравниваются процессы, происходящие в пространстве. Однако, с точки зрения физиков, если имеется «не повторяющаяся нелинейность», то еще надо исследовать и посчитать, что это – есть ли здесь детерминированный хаос, то есть хаос в смысле нелинейной динамики, или это просто случайные процессы. Эволюция Земли по С.В. Аплонову и Б.А. Лебедеву предстает как прерывание состояния порядка хаосом. Получается примерно то же, что и у выше упоминавшегося географа. В каком смысле понимается хаос? Если в самом широком, тогда что эта терминология дает научного?

Вывод из всего сказанного – процесс внедрения синергетических идей и соответствующей терминологии в другие науки (и в геологию в частности) пошел слишком поверхностно. В системах иного структурного уровня, чем системы физиков, все может оказаться намного сложнее.

Геология уже переживала период внедрения языка другой науки. Это произошло, когда она становилась эволюционной, восприняв из биологии идею эволюции. Законодателем здесь наверное можно назвать И. Вальтера, написавшего в 90-х годах XIX века книгу «Геология как историческая наука». Его подход – изложение геологии на языке дарвиновой теории эволюции. Он предложил использовать в геологии многие биологические термины. Большинство из них не удержалось. Термин онтогенез понадобился минералогам. А где в геологии, например, аналоги филогенеза? При внедрении чужого языка необходима крайняя осторожность, хотя, конечно, иногда целесообразны и смелые шаги. Время все поставит на место.

Методы нелинейной динамики. Естественно, прямое внедрение их возможно лишь в математизированные области наук. Уже в XIX веке было известно три нелинейных уравнения, но они не были решаемы. И хотя уже в начале XX века у физиков в ходу было выражение – «это нелинейщина», нелинейной динамики как науки не было. Когда появилась компьютерная техника и такие уравнения стали решаться, появилась и соответствующая наука. Аналогично, просто перечислять явно нелинейные геологические процессы, что очевидно качественно, это не значит заниматься в геологии нелинейной динамикой (нелинейной геодинамикой – термин Ю.М. Пушаровского).

В палеонтологии, где до недавнего времени использовалась лишь математическая статистика при исследованиях систематики различных групп организмов, появилось новое течение, которое стали называть количественной палеонтологией. Имеется в виду анализ динамики таксономического разнообразия в фанерозое. Отстраиваемые явно нелинейные временные ряды анализируются палеонтологами пока лишь качественно. Конечно, эти ряды могут анализироваться далее совместно с физиками и математиками, и возможны определенные полезные выводы. Видимо, значительна перспектива внедрения таких методов в более математизированные петрографию и геохимию, о чем написана книга (Ф.А. Летников, 1992). Но в нематематизированной области все общие рассуждения в терминах нелинейной динамики, строго говоря, еще не являются изучением нелинейных процессов. Поэтому наиболее восприимчивы к нелинейным идеям наиболее математизированные области наук о Земле – прежде всего геофизика. Здесь можно говорить сегодня о полноценном изучении нелинейных процессов с практическим выходом (М.И. Рыскин, А.В. Иванов, 2003).

Идеология. Любое крупное научное направление несет в себе какую-либо общенаучную идеологическую ценность. Особое место здесь занимает физика, которая уже дала ряд общенаучных принципов. Но не следует лишь ее роль абсолютизировать. Пожалуй, это есть в оценке И.Р. Пригожиным физики И. Ньютона, ставшей основой общей картиной мира. Но не она первая создавала некоторые ее черты. Пригожин приводит позицию одного из политических деятелей того времени, который полагал, что законы Ньютона открыли необходимость разработки строгих законов и в жизни общества. Правда, он делает оговорку, что в этом есть доля и роли религии. Эта оговорка очень кстати. Разве не было ранее ньютоновской эпохи римского права,

где требования законности восходили к воле богов? У М. Горького есть пьеса «Достигаев и другие», в которой купец Достигаев видит, что привычный мир рушится. Он человек читающий, читает словарь Брокгауза и Эфрона и выясняет, что Дарвин утверждал – все живое приспосабливается. Он делает для себя открытие: Что делать? – приспосабливаться. Другие и «без Дарвина» это интуитивно открыли. Через Дарвина – специфический путь Достигаева. То же можно сказать и об упоминаемом И.Р. Пригожиным политике – это его сугубо личный путь к истине – через Ньютона.

Справедливо утверждать, что в формировании общей картины мира, общей идеологии в разной степени участвуют разные науки, часто параллельно движутся к этому с разной степенью успеха. Пример – уже упоминавшийся пришедший из биологии эволюционизм. В палеонтологии закон необратимости эволюции Л. Долло опередил физиков. О необратимости времени речь не шла и у А. Эйнштейна. А «стрела времени» Эддингтона появилась в физике еще позже (правда, как быть с эйнштейновым искривлением времени, принимая этот термин?).

Другой путь интеграции наук – рассмотрение их на системном уровне, сравнительный анализ систем из самых разных областей науки. Такое интегрирующее направление – тектология – было заложено еще российским философом А. Богдановым, которого В.И. Ленин громил в «Материализме и эмпириокритицизме». Но эти идеи живут и недавно развиты в книге А.Л. Тахтаджяна «Principia Tectologica» (2001). Это особый путь интеграции знаний, шедший давно помимо рассматриваемых новых идей в физике.

Но, конечно, роль физики в формировании этой общенаучной идеологии является ведущей. Она интегрирует все достижения. Это не случайно, ибо физика занимается наиболее простыми явлениями в природе. Сведение к ним сложного – путь, давший громадные достижения в понимании вещей. Это редукционистский метод, которым пугали марксистские философы. Здесь могут быть утрачены качественные различия и это реальная опасность. Но ни один метод нельзя абсолютизировать. Везде нужна осторожность и надо вовремя остановиться. В принципе редукционизм оказался великим методом в изучении мира.

Если говорить о достижениях в рассматриваемых нами новых направлениях в физике, то с позиции общенаучной идеологии, в связи с вопросами геологии, близкими авторам, можно выделить как наибольшие ценности два положения: самоорганизация и гораздо большая, чем ранее полагали, роль случайностей.

В механизме направленности филогенетической эволюции органического мира самоорганизация выглядит как внутренний процесс в отличие от рассматриваемой дарвинизмом роли лишь внешней среды. Существование таких внутренних процессов побудило Л.С. Берга создать концепцию номогенеза. Истинный механизм таких процессов вырисовывался из представлений о целостности организма в индивидуальном и историческом развитии И.И. Шмальгаузена (1938) и реализован в эпигенетической теории эволюции, окончательно сформулированной М.А. Шишкиным (1988) и др. И то, что самоорганизация присуща природе вообще, создает для всех этих представлений прочный фундамент.

О том, что законы природы в действительности имеют стохастическую природу, заговорили еще в 1960-е годы. Это обсуждали и палеонтологи, на практике оставаясь абсолютными детерминистами. Теперь же описанный синергетикой механизм бифуркаций открыл большую роль случайностей. Палеонтологи шли к этому

робко. При обсуждении причин вымирания организмов появилось такое понятие, как «случайное вымирание». Но если в природе существует такой процесс при смене устойчивых состояний, как лавинное нарастание числа бифуркаций, то этого нельзя исключать как ожидаемый результат и при реконструкциях экосистемных перестроек. Тогда тщетно стремление все разложить по полочкам причинно-следственных связей.

Надо подчеркнуть, что идеологические основы нельзя путать с методами и что-то определенное решать с их помощью. Это лишь ориентиры для выбора альтернативных гипотез, оценки возможностей ожидаемых результатов. Когда И.Р. Пригожин анализирует биологические модели, то он на основе представлений синергетики ничего не решает методически. Он лишь показывает, что результаты исследования биологов соответствуют представлениям синергетики и ее идеология здесь правомочна. Использование идеологических положений в качестве конкретной методики (то есть фактически создание догм) может привести к серьезным ошибкам, ибо ничто не без исключений, ничто не абсолютно. Пример – биологи на основании принципа развития жизни от простого к сложному считают «пластинчатых» наиболее примитивными многоклеточными. Но остатков подобных организмов нет в палеонтологической летописи. Исследования биологов-молекулярщиков недавно показали, что «пластинчатые» являются результатом очень длительного процесса дегенерации и происходят от кишечнополостных, отделившись от них, видимо, в палеозое. Столь далеко идущие процессы дегенерации вообще не характерны для истории жизни, но, оказывается, возможны. Так что здесь идеологию нельзя абсолютизировать и превращать в конкретный метод, который может доказать истинное систематическое положение «пластинчатых».

Завершая, отметим следующее.

- Рассмотренными достижениями физики в науках о Земле пока не создана какая-то принципиально новая картина мира. Они лишь дополнили прежние парадигмы и усложнили их.

- Мир и линеен и нелинеен одновременно. Один и тот же процесс может при рассмотрении в одном масштабе выглядеть нелинейным, а в другом – линейным. Не говоря уже о том, что линейность невозможна без нелинейности и наоборот и как явление и как понятие. Если для физиков изучение линейных процессов уже давно решенная проблема и на этой стороне устройства мира можно не сосредотачивать внимание, то, например, для эволюционного процесса в биологии линейность – еще важная проблема.

- Роль нелинейной динамики сейчас несколько излишне раскручена. Она еще займет в формировании общенаучной идеологии свое важное, но определенное место, и придут иные новые актуальные проблемы.

- Важен образовательный аспект – общенаучной идеологии в каждой науке надо учить в конце программы, как это делалось раньше, в частности, на геологическом факультете Саратовского университета на 5-м курсе в «Истории и методологии геологических наук». Необходимо возродить этот курс в учебных планах, обобщив его для всех Наук о Земле и дополнив синергетическими идеями.

Библиографический список

1. *Аплонов С.В., Лебедев Б.А.* Порядок, хаос и эволюция в геологической истории Земли // *Геофизика* 2003. № 1, С. 56-62.
2. *Иванов А.В.* Периодическое изменение признаков в эволюции некоторых групп организмов. Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 1998. 76 с.
3. *Князева Е.Н., Туробов А.Л.* Единая наука о единой природе // *Новый мир.* 2000. № 3. С. 161-178.
4. *Летников Ф.А.* Синергетика геологических систем. Новосибирск: Наука, 1992. 230 с.
5. *Лукьянов А.В.* // Вопросы нелинейной геологии и геодинамики. М.: ГЕОС, 1998. С.
6. *Рыскин М.И., Иванов А.В.* Нелинейная динамика в науках о Земле: информация к размышлению // *Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика.* 2003. Т. 11, № 6. С. 138-148.
7. *Тахтаджян А.Л.* Principia Tectologica. Принципы организации и трансформации сложных систем: эволюционный подход. СПб.: СПХФА, 2001. 121 с.
8. *Шишкин М.А.* Эволюция как эпигенетический процесс // *Современная палеонтология* / Ред. В.В.Меннер, В.П.Макридин. М.: Недра, 1988. С. 142-169.
9. *Шмальгаузен И.И.* Организм как целое в индивидуальном и историческом развитии. М.;Л.: Изд-во АН СССР, 1938. 144 с.

Саратовский государственный университет Поступила в редакцию 12.09.2006

Зав. редакцией *Н.Н. Левина*
Редакторы *Л.А. Сидорова, Н.Н. Левина*
Оформление художника *Д.В. Соколова*
Оригинал-макет подготовлен
И.А. Пономаревой, Н.Н. Васевой, О.Н. Строгановой
в пакете *L^AT_EX*

Подписка на 2007 год осуществляется
по каталогу Агентства Роспечать
«Газеты. Журналы», индекс 73498
и Саратовским государственным университетом
по заключению договора между Подписчиком
(юридическим и физическим лицом) и Издателем

Стоимость подписки на 2007 год 450 руб. (6 номеров)
Заявки на заключение договора принимаются
по почте, по телефону редакции, по эл. почте редакции

Адрес редакции: 410012, Саратов, Астраханская, 83
Тел./факс: (845-2) 52-38-64
E-mail: and@nonlin.sgu.ru

Распространение журнала осуществляется
редакцией журнала по адресной системе

Сдано в набор 01.12.06. Подписано к печати 29.12.06
Формат 70x108/16. Бумага «Снегурочка». Печать трафаретная
Усл. печ. л. 11,55(8,25). Уч.-изд. л. 11,0. Тираж 200. Заказ 387

Отпечатано на ризографе GR 3750 редакции журнала

© Редакция журнала
«Известия вузов. ПНД», 2006
© Оформление художника
Д.В. Соколова, 2006