МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Известия высших учебных заведений
ПРИКЛАДНАЯ НЕЛИНЕЙНАЯ ДИНАМИКА
научно-технический журнал
издается с 1993 года
Выходит 6 раз в год Том 15, № 6, 2007, Саратов

С О Д Е Р Ж А Н И Е

ПРИКЛАДНЫЕ ЗАДАЧИ НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ КОЛЕБАНИЙ И ВОЛН

Балякин А.А., Рыскин Н.М. Особенности расчета спектров показателей Ляпунова в распределенных автоколебательных системах с запаздывающей обратной связью 3

Байбурин В.Б., Каминский К.В. Неустойчивость электронных траекторий и шумы в многорезонаторном магнетроне 22

Муштаков А.В. Генерация и усиление широкополосных хаотических колебаний СВЧ-диапазона в гибридной системе «лампа бегущей волны с коллектором-генератором» 28

Блашке Д.Б., Прозоркевч А.В., Смолянский С.А., Филатов А.В. Кинетическая теория рождения пионов в области малых импульсов из кваркового конденсата 38

Усанов Д.А., Кащенко Т.П., Скрипаль Ан.В., Рабичев И.Э., Усанова Т.Б., Ячменева Е.И., Горшков А.М., Губкина Г.Л. Изменение параметров колебательных движений глазного яблока в результате периодического светового воздействия при сложном характере нистагма 45

НЕЛИНЕЙНЫЕ ВОЛНЫ. СОЛИТОНЫ

Гончаров. Т.П., Джелаухова Г.С., Чечин Г.М. Дискретные бизеры и квазибизеры в нелинейных цепочках 57

Кузнецов А.П., Кузнецов С.П., Пиковский А.С., Тюрюкина Л.В. Хаотическая динамика в системах связанных неавтономных осцилляторов с резонансным и нерезонансным механизмом передачи возбуждения 75

АВТОВОЛНЫ. САМООРГАНИЗАЦИЯ

Пономаренко В.И., Прохоров М.Д., Селезнев Е.П. Оценка характеристик автоколебательных систем с запаздыванием в периодическом режиме 86

МЕТОДИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ ПО НЕЛИНЕЙНОЙ ДИНАМИКЕ

Анищенко В.С., Николаев С.М. Экспериментальное исследование синхронизации двухчастотных квазипериодических колебаний 93

КНИЖНОЕ ОБОЗРЕНИЕ

Опередивший время. Сборник статей, посвященный 100-летию со дня рождения О.В. Лосева 102

Профессор Р. Л. Стратонович: воспоминания родных, коллег и друзей 107

DEPARTMENT OF EDUCATION AND SCIENCE OF RUSSIAN FEDERATION
Izvestiya VUZ
APPLIED NONLINEAR DYNAMICS
scientific-technical journal
published since 1993

Published 6 times a year Vol. 15, № 6, 2007, Saratov

C O N T E N T S

APPLIED PROBLEMS OF NONLINEAR OSCILLATION AND WAVE THEORY

Balyakin A.A., Ryskin N.M. Peculiarities of calculation of the Lyapunov exponents set in distributed self-oscillated systems with delayed feedback 3
Bayburin V.B., Kaminsky K.V. Electron trajectories instability and noises in magnetron 22
Mushtakov A.V. Generation and amplification of microwave chaotic oscillations in the hybrid system «traveling wave tube with collector-generator» 28
Blaschke D.B., Prozorkevich A.V., Smolyansky S.A. and Filatov A.V. Kinetic theory of low momentum π-meson production from quark condensate 38
Usanov D.A., Kashenko T.P., Skripal An.V., Rabichev I.E., Usanova T.B., Yachmeneva I.E., Gorshkov A.M., Gubkina G.L. Change of parameters of fluctuating motions of eyeball as a result of periodic light influence at difficult character of nistagm 45

NONLINEAR WAVES. SOLITONS

Goncharov P.P., Dzhelauhova G.S., Chechin G.M. Discrete breathers and quasi-breathers in nonlinear monoatomic chains 57
Kuznetsov A.P., Kuznetsov S.P., Pikovski A.S., Turukina L.V. Chaotic dynamics in the systems of coupling nonautonomous oscillators with resonance and nonresonance communicator of the signal 75

AUTOWAVES. SELF-ORGANIZATION

Ponomarenko V.I., Prokhorov M.D., Seleznev Ye.P. Estimation of characteristics of self-oscillating time-delay systems in periodic regime 86

METHODICAL PAPERS IN NONLINEAR DYNAMICS

Anishchenko V.S., Nikolaev S.M. Experimental research of synchronization of two-frequency quasiperiodic motions 93

BOOK REVIEW

In advance of the time. Collected articles to centennial of O.V. Lossev 102
Professor R.L. Stratonovich: Reminiscences of relatives, colleagues, and friends 107

Прикладные задачи нелинейной теории колебаний и волн

Изв. вузов «ПНД», т. 15, № 6, 2007 УДК 517.9

ОСОБЕННОСТИ РАСЧЕТА СПЕКТРОВ ПОКАЗАТЕЛЕЙ ЛЯПУНОВА В РАСПРЕДЕЛЕННЫХ АВТОКОЛЕБАТЕЛЬНЫХ СИСТЕМАХ С ЗАПАЗДЫВАЮЩЕЙ ОБРАТНОЙ СВЯЗЬЮ

А.А. Балякин, Н.М. Рыскин

Описана численная схема расчета спектра показателей Ляпунова для распределенных систем с запаздыванием, основанная на модификации метода Бенеттина. Приведены результаты численного моделирования двух моделей подобных систем (автогенератор с кубичной нелинейностью и автогенератор клистронного типа). Анализируются спектры показателей Ляпунова в различных режимах, прежде всего, в режимах «слабого» и «развитого» хаоса. Обсуждаются характерные особенности, возникающие при вычислении спектра показателей Ляпунова в системах с запаздыванием.

Введение

Изучение сложной динамики распределенных систем является одной из наиболее актуальных проблем нелинейной физики, однако представляет собой весьма трудоемкую задачу, так что в настоящее время распределенные системы изучены значительно слабее, чем системы с небольшим числом степеней свободы. В частности, значительные трудности представляет надежное определение каких-либо количественных характеристик хаотических колебаний. Одним из главных атрибутов динамического хаоса, как известно, является неустойчивость фазовых траекторий, то есть наличие высокой чувствительности движения к вариации начальных условий. Для количественной характеристики неустойчивости используют показатели Ляпунова (ЛП), которые определяют экспоненциальный в среднем рост (или затухание) возмущений вблизи типичной принадлежащей аттрактору фазовой траектории [1–4]. При этом полное число ЛП отвечает размерности фазового пространства системы. Критерием хаоса является присутствие в спектре хотя бы одного положительного показателя. Если имеется более одного положительного ЛП, говорят о гиперхаосе. В случае распределенных систем, фазовое пространство которых является бесконечномерным, число показателей также будет бесконечным. Однако во многих случаях исследования показывают, что колебания (в том числе хаотические) в распределенных системах характеризуются аттрактором, имеющим конечную, причем небольшую, размерность. Соответственно, конечной будет и эффективная размерность фазового пространства, то есть на динамику системы будут существенно влиять лишь несколько старших показателей Ляпунова.

К настоящему времени имеется много работ по расчету спектра ЛП для конечномерных систем; для них детально развиты численные методики (см., например, монографии [1–4] и содержащуюся в них библиографию), однако для распределенных систем расчет спектра ЛП по-прежнему представляет собой трудоемкую и нетривиальную задачу. Сложности заключаются как в больших затратах компьютерного времени (для расчета D показателей необходимо численно решать $D+1$ систему исходных уравнений с последующей перенормировкой переменных), так и с заданием вектора возмущений в гильбертовом пространстве и подбором параметров численной схемы, обеспечивающих наилучшую сходимость результатов.

Первоначальные исследования распределенных систем ограничивались, как правило, расчетом лишь старшего показателя Ляпунова. В ранних работах [5, 6] были представлены результаты расчетов для модели вакуумного микроволнового генератора – лампы обратной волны (ЛОВ), которые подтвердили, что в хаотических режимах показатель Ляпунова является положительным и растет с ростом параметра неустойчивости. В работе [7] была исследована другая система электронной природы: диод Пирса – простая модель системы, содержащей электронный пучок с виртуальным катодом. В [7] было обнаружено, что в диоде Пирса существуют различные типы хаотического поведения: так называемые режимы «слабого» и «развитого» хаоса. Под последним подразумевают сильно нерегулярную динамику, характеризующуюся резким возрастанием значения старшего ЛП.

Кроме того, в некоторых работах приводились результаты расчета спектров ЛП для систем с запаздыванием [8, 9]. Однако в них, в основном, изучался вопрос о поведении показателей при больших значениях времени запаздывания. Было установлено, что число положительных показателей в целом растет с ростом этого параметра и может достигать $8\ldots10$, хотя энтропия Колмогорова (сумма положительных показателей) остается приблизительно постоянной.

Недавно появились работы, в которых представлены результаты расчета спектра показателей Ляпунова для моделей ЛОВ [10] и гиротрона с нефиксированной структурой поля [11, 12]. Для этих систем также характерно наличие режимов слабого и развитого хаоса, что, по-видимому, является универсальной закономерностью сложной динамики распределенных систем. В [10–12] было обнаружено, что развитые хаотические режимы, как правило, характеризуются более чем одним положительным ЛП, то есть являются гиперхаотическими. Интересной особенностью является то, что возникающий в модели гиротрона развитый хаотический аттрактор имеет аномально высокую размерность вложения ($20\ldots40$). Такое необычное поведение связано с существованием большого числа высокодобротных собственных мод резонатора, слабо взаимодействующих с электронным пучком. Их наличие приводит к появлению соответствующего количества малых по абсолютной величине ЛП, и в результате размерность аттрактора, вычисленная по показателям Ляпунова с помощью формулы Каплана–Йорке [3, 4], оказывается существенно больше, чем в случае систем, имеющих низкую собственную добротность электродинамической структуры, например, ЛОВ [10] или диода Пирса [7].

Таким образом, расчет спектра показателей Ляпунова является важным инструментом анализа хаотических колебаний в распределенных системах, позволяющим выявить многие особенности их «тонкой структуры». Настоящая работа посвящена расчету спектра ЛП для ряда моделей распределенных автоколебательных

систем с запаздывающей обратной связью (ЗОС). Подобные системы играют важную роль во многих областях физики: радиофизике, нелинейной оптике, биофизике и т.д. (см., например, [2, 4, 13, 14]). В частности, автогенераторы с ЗОС составляют обширный класс приборов микроволновой электроники. Хорошо известно, что подобные системы способны генерировать сложные, в том числе хаотические колебания. В данной работе описана модификация известного метода Бенеттина для подобных систем и приведена численная схема расчета спектра ЛП для дифференциальных уравнений с запаздыванием (раздел 1), продемонстрировано ее применение на примерах автогенератора с кубичной нелинейностью и автогенератора клистронного типа, нелинейная динамика которых исследовалась ранее в работах [15–17] (раздел 2). В разделе 3 обсуждаются некоторые типичные особенности, обнаруженные при расчете спектра ЛП для распределенных систем с запаздыванием.

1. Методика расчета спектра показателей Ляпунова для распределенных автоколебательных систем с запаздыванием

Опишем, следуя [3, 10, 11], процедуру получения нескольких старших показателей Ляпунова для распределенной автоколебательной системы с запаздыванием, основанную на модификации известного метода Бенеттина. Будем рассматривать систему, которая описывается дифференциальным уравнением вида

$$\dot{x} + x = f\left[x\left(t - \tau\right)\right]. \tag{1}$$

Здесь $x\left(t\right)$ – некоторая динамическая переменная, точка означает дифференцирование по t , f – некоторая нелинейная функция, τ – время запаздывания. Хорошо известно, что для корректного решения задачи Коши для уравнения (1) необходимо задать начальное распределение x на интервале длительностью τ (см., например, [13, 18]). При численном моделировании указанный интервал искусственно разбивается на N отрезков. Как правило, расстояние между точками разбиения принимается за шаг дискретизации по времени

$$dt = \tau/N.$$

При расчетах спектра ЛП в качестве возмущения принимался вектор с размерностью N, компоненты которого задаются на отрезке $(t - \tau, t)$ в N точках $t_1, ..., t_N$, разделенных шагом dt,

$$\tilde{\mathbf{x}}_k\left(t\right) = \left(\tilde{x}_k\left(t_1\right), \ldots, \tilde{x}_k\left(t_N\right)\right), \qquad k = 1, \ldots, D,$$

где D – число рассчитываемых ЛП. Фактически в этом случае речь идет об искусственной дискретизации распределенной системы. Соответственно, максимально возможное число ЛП, которое можно рассчитать в рамках предлагаемого метода, совпадает с N , то есть $D \leq N$.

Таким образом, для возмущенных систем распределение амплитуды поля на интервале $(t - \tau, t)$ задается при помощи набора векторов $\mathbf{x}_k\left(t\right) = \mathbf{x}\left(t\right) + \varepsilon\tilde{\mathbf{x}}_k\left(t\right)$, где

$$\|\tilde{\mathbf{x}}_k\| = \int\limits_{t-\tau}^{t} |\tilde{\mathbf{x}}_k|^2 \, dt = 1, \tag{2}$$

$\varepsilon \ll 1$ – норма возмущения, а $\mathbf{x}\,(t)$ отвечает невозмущенной системе. В ходе численного моделирования, после того как окончился переходный процесс и фазовая траектория вышла на некоторый аттрактор, формируется $D \leq N$ ортогональных векторов возмущений (подробнее см. раздел 3.1), с помощью которых вычисляются возмущенные векторы состояния. Практически D есть размерность пространства вложения, в которое помещается аттрактор исследуемой системы. После этого уравнение (1) решается для каждой из $D+1$ систем (одна исходная и D возмущенных) раздельно на протяжении L шагов по времени, и для следующего момента времени $t' = t + Ldt$ получается новый набор функций

$$\tilde{\mathbf{x}}_k\left(t'\right) = \frac{\mathbf{x}_k\left(t'\right) - \mathbf{x}\left(t'\right)}{\varepsilon}. \tag{3}$$

При этом число шагов L выбирается небольшим, чтобы возмущение по модулю оставалось малым. Далее по методу Грама–Шмидта проводится ортогонализация и перенормировка получившихся векторов возмущений

$$\begin{gathered} \tilde{\mathbf{x}}_1^0 = \tilde{\mathbf{x}}_1 / \|\tilde{\mathbf{x}}_1\|\,, \\ \tilde{\mathbf{x}}_2' = \tilde{\mathbf{x}}_2 - \left(\tilde{\mathbf{x}}_2, \tilde{\mathbf{x}}_1^0\right) \tilde{\mathbf{x}}_1^0, \quad \tilde{\mathbf{x}}_2^0 = \tilde{\mathbf{x}}_2' / \|\tilde{\mathbf{x}}_2'\|\,, \\ \tilde{\mathbf{x}}_3' = \tilde{\mathbf{x}}_3 - \left(\tilde{\mathbf{x}}_3, \tilde{\mathbf{x}}_1^0\right) \tilde{\mathbf{x}}_1^0 - \left(\tilde{\mathbf{x}}_3, \tilde{\mathbf{x}}_2^0\right) \tilde{\mathbf{x}}_2^0, \quad \tilde{\mathbf{x}}_3^0 = \tilde{\mathbf{x}}_3' / \|\tilde{\mathbf{x}}_3'\|\,, \\ \ldots \end{gathered} \tag{4}$$

Здесь круглые скобки означают скалярное произведение

$$(f, g) = \int\limits_{t-\tau}^{t} f\,(\zeta) g^*\,(\zeta)\, d\zeta.$$

Отметим, что переход от непрерывной функции возмущения к конечномерному вектору $\tilde{\mathbf{x}}_k(t)$ автоматически означает переход от скалярного произведения в гильбертовом пространстве к обычному скалярному произведению векторов. Далее вычисления повторяются на следующей стадии алгоритма длительностью $L \cdot dt$ с переопределенными возмущениями

$$\mathbf{x}_k \leftarrow \mathbf{x}_k + \varepsilon \tilde{\mathbf{x}}_k^0. \tag{5}$$

Вся процедура повторяется многократно, на протяжении большого числа шагов. Произведения

$$\Sigma_k = \prod_{m=1}^{M} \|\tilde{\mathbf{x}}_k\|_{t=m\Delta t}$$

показывают, во сколько раз изменилась бы норма k-го вектора возмущения в линейном приближении за M шагов алгоритма, и называются накапливающимися сумма-

ми. Соответствующий ЛП выражается через предел отношения логарифма накапливающейся суммы ко времени [1, 3]

$$\Lambda_k = \lim_{t\to\infty}\left[\frac{\ln\Sigma_k}{t}\right]. \tag{6}$$

Отметим, что точное значение ЛП можно получить лишь при устремлении времени расчета к бесконечности. Численное моделирование проводилось в течение достаточно большого числа шагов M, когда зависимость накапливающихся сумм от времени близка к линейной и можно говорить о выходе значения ЛП на определенный уровень с заданной точностью. Чтобы избежать ошибок расчета, связанных с незначительными флуктуациями, вычисление показателей производилось не непосредственно по формуле (6), а путем усреднения накапливающихся сумм методом наименьших квадратов.

В качестве тестовых расчетов для проверки разработанных алгоритмов были воспроизведены хорошо известные результаты для конечномерных систем (системы Ресслера, Лоренца), а также повторены расчеты для распределенной системы – ЛОВ, выполненные в работе [10].

2. Результаты расчета спектра показателей Ляпунова

Расчеты спектра ЛП проведем на примере двух достаточно простых модельных систем, которые демонстрируют основные особенности сложной динамики автогенераторов с ЗОС. Рассмотрим генератор с кубичной нелинейностью и запаздыванием, подробно исследованный в [15, 16]

$$\dot{A} + \gamma A = \alpha e^{i\psi}\left(1 - |A(t-1)|^2\right)A(t-1), \tag{7}$$

где комплексная переменная A имеет смысл медленно меняющейся амплитуды колебаний, α и γ – параметры, характеризующие неравновесность и диссипацию, ψ – набег фазы в цепи обратной связи. Правая часть (7) зависит от значений амплитуды в запаздывающий момент времени $t-1$ (всегда можно выбрать такую нормировку переменных, в которой время запаздывания равно единице). Уравнение (7) приближенно описывает, например, динамику триодного генератора ван дер Поля с линией задержки в анодной цепи в случае, когда анодно-сеточная характеристика лампы аппроксимируется кубическим полиномом.

Интересно также рассмотреть модель автогенератора клистронного типа, описываемую уравнением

$$\dot{A} + \gamma A = 2\alpha e^{i\psi} J_1\left(|A(t-1)|\right)\frac{A(t-1)}{|A(t-1)|}, \tag{8}$$

где J_1 – функция Бесселя первого рода 1-го порядка, остальные обозначения имеют тот же смысл, что и для уравнения (7). Сложная динамика этой модели изучалась ранее в [16, 17]. Поскольку генераторы на базе двух- и многорезонаторных клистронов с ЗОС описываются системами из соответствующего числа подобных уравнений

[19–21], будем называть (8) моделью «однорезонаторного клистрона». В случае слабой нелинейности, когда можно разложить функцию J_1 в ряд и ограничиться двумя первыми членами разложения, уравнение (8) приводится к виду (7). Отметим, что уравнениями, аналогичными (7), (8), но с иными типами нелинейности можно описать и другие микроволновые генераторы с ЗОС, например, на основе лампы бегущей волны [22, 23].

Как было показано в работах [15–17], граница самовозбуждения на плоскости параметров α, ψ для этих систем имеет вид периодически расположенных областей – зон генерации. Каждая из зон соответствует резонансу с одной из собственных мод генератора, в ее центре полный набег фазы за время прохождения сигнала по кольцу обратной связи равен $2\pi n$, при этом пороговое значение параметра α минимально, $\alpha = \gamma$. Выше порога самовозбуждения вначале наблюдаются стационарные одночастотные колебания. При дальнейшем увеличении α этот режим становится неустойчивым и сменяется сначала периодической, а затем хаотической автомодуляцией. В центрах зон генерации переход к хаосу происходит, как правило, по сценарию Фейгенбаума, то есть через последовательность бифуркаций удвоения периода автомодуляции. Вблизи границ зон генерации наблюдается значительно более сложное поведение, обусловленное тем, что границы соседних зон начинают перекрываться и возникает мультистабильность. Переход к хаосу здесь возможен как по сценарию Фейгенбаума, так и через разрушение квазипериодического движения. Эта картина была достаточно подробно описана в [15], а также в [19, 20] для двухрезонаторного клистрона с ЗОС. Кроме того, при больших значениях параметра неравновесности α в этой области может происходить объединение двух аттракторов, сформировавшихся на базе различных собственных мод, в единый хаотический аттрактор (см. [15, 16, 19, 20], а также [24], где этот эффект впервые обсуждался применительно к модели генератора с кубичной нелинейностью). При этом зависимость выходного сигнала от времени является сильно нерегулярной и, по сути, представляет собой случайные переключения между двумя «парциальными» аттракторами. Это явление известно как перемежаемость «хаос–хаос» (см., например, [1, 4]). В спектре имеется два отчетливых пика на частотах соответствующих мод на фоне достаточно однородного шумового пьедестала, а на проекции фазового портрета не удается различить какую-либо крупномасштабную структуру. Подобные режимы естественно отнести к упомянутым выше режимам развитого хаоса, для анализа которых особый интерес представляет расчет спектра показателей Ляпунова.

Обсудим результаты расчета ЛП для типичных режимов динамики систем (7) и (8)[1]. Отметим, что решения этих уравнений инвариантны относительно сдвига начала отсчета времени, а также относительно фазового сдвига $A \to Ae^{i\varphi}$. Каждая из этих симметрий соответствует возмущению, которое не нарастает и не затухает, следовательно, в спектре Ляпунова должны присутствовать как минимум два нулевых показателя. Исключение составляют режимы стационарной генерации, когда симметрия относительно сдвига начала отсчета времени вырождается (в этом случае имеется лишь один нулевой показатель), и режимы отсутствия генерации, когда вы-

[1]Все представленные ниже результаты, за исключением некоторых специально оговоренных случаев в разделе 3.4, получены при следующих значениях параметров численной схемы: норма возмущения $\varepsilon = 10^{-2}$, шаг по времени $dt = 10^{-2}$, число шагов, через которые выполняется перенормировка $L = 5$, что обеспечивает достаточную точность вычислений.

Таблица 1

Пять старших показателей Ляпунова
в типичных режимах динамики автогенератора
с кубичной нелинейностью

	Периодическая автомодуляция $\gamma = 0.3$, $\alpha = 2.35$, $\psi = 0.1\pi$	Квазипериодическая автомодуляция $\gamma = 0.3$, $\alpha = 3.77$, $\psi = 0.9\pi$	Хаос $\gamma = 0.3$, $\alpha = 2.38$, $\psi = 0.1\pi$	Гиперхаос $\gamma = 1.0$, $\alpha = 5.68$, $\psi = 0.9\pi$
Λ_1	0.00	0.00	0.08	0.29
Λ_2	0.00	0.00	0.00	0.14
Λ_3	-0.02	0.00	0.00	0.01
Λ_4	-0.89	-0.08	-0.91	-0.01
Λ_5	-1.11	-1.41	-0.94	-0.52

рождаются обе симметрии и все ЛП отрицательны [3, 10, 22]. Эти свойства вообще типичны для систем, описываемых в терминах медленно меняющихся амплитуд.

Результаты расчетов хорошо согласуются с приведенными выше теоретическими соображениями. В табл. 1 приведены значения пяти старших показателей Ляпунова для модели генератора с кубичной нелинейностью в характерных режимах генерации: периодической и квазипериодической автомодуляции, слабого и развитого хаоса. Зависимости выходного сигнала от времени, спектры и фазовые портреты, иллюстрирующие эти режимы, приведены на рис. 1, а соответствующие графики зависимостей накапливающихся сумм от времени – на рис. 2. Как видно из табл. 1, в периодических автомодуляционных режимах все показатели (не считая двух нулевых) отрицательны, в квазипериодических появляется третий нулевой показатель, а в режиме хаотических колебаний, возникших в результате последовательности бифуркаций удвоения периода (слабый хаос), спектр содержит один положительный и два нулевых показателя. Разумеется, из-за конечной точности вычислений нулевые показатели принимают конечные, хотя и малые по абсолютной величине, значения.

Особый интерес, как уже говорилось, представляют режимы развитого хаоса. Расчет показывает, что для аттрактора, образовавшегося в результате объединения хаотических аттракторов на базе различных мод, имеется два положительных показателя, следовательно, можно говорить о режиме гиперхаоса. Наибольшие трудности возникают в этом случае при расчете нулевых показателей. Соответствующие накапливающиеся суммы не остаются постоянными, а возрастают или убывают, хотя и достаточно медленно. Однако этот рост носит немонотонный характер: накапливающаяся сумма не меняется в течение какого-то интервала времени, после чего скачком изменяется. В результате расчеты позволяют определить нулевые показатели в режиме гиперхаоса ($\Lambda_{3,4}$) с точностью до величины порядка нормы возмущения. Подробнее эта ситуация обсуждается в разделе 3.3.

Модель «однорезонаторного клистрона» (8) имеет еще один механизм образования развитого хаоса [16, 17]. Для нее характерна мультистабильность стационарных состояний, соответствующих одной и той же собственной моде колебаний. Действительно, анализ одночастотных режимов вида $A = A_0 \exp\left[i\left(\omega t + \varphi\right)\right]$ при-

водит к трансцендентному уравнению для амплитуды стационарной генерации A_0 (которую без ограничения общности можно считать вещественной)

$$\sqrt{\omega^2+\gamma^2}A_0 = 2\alpha J_1\left(A_0\right). \tag{9}$$

Число вещественных корней этого уравнения с ростом α увеличивается, то есть по-

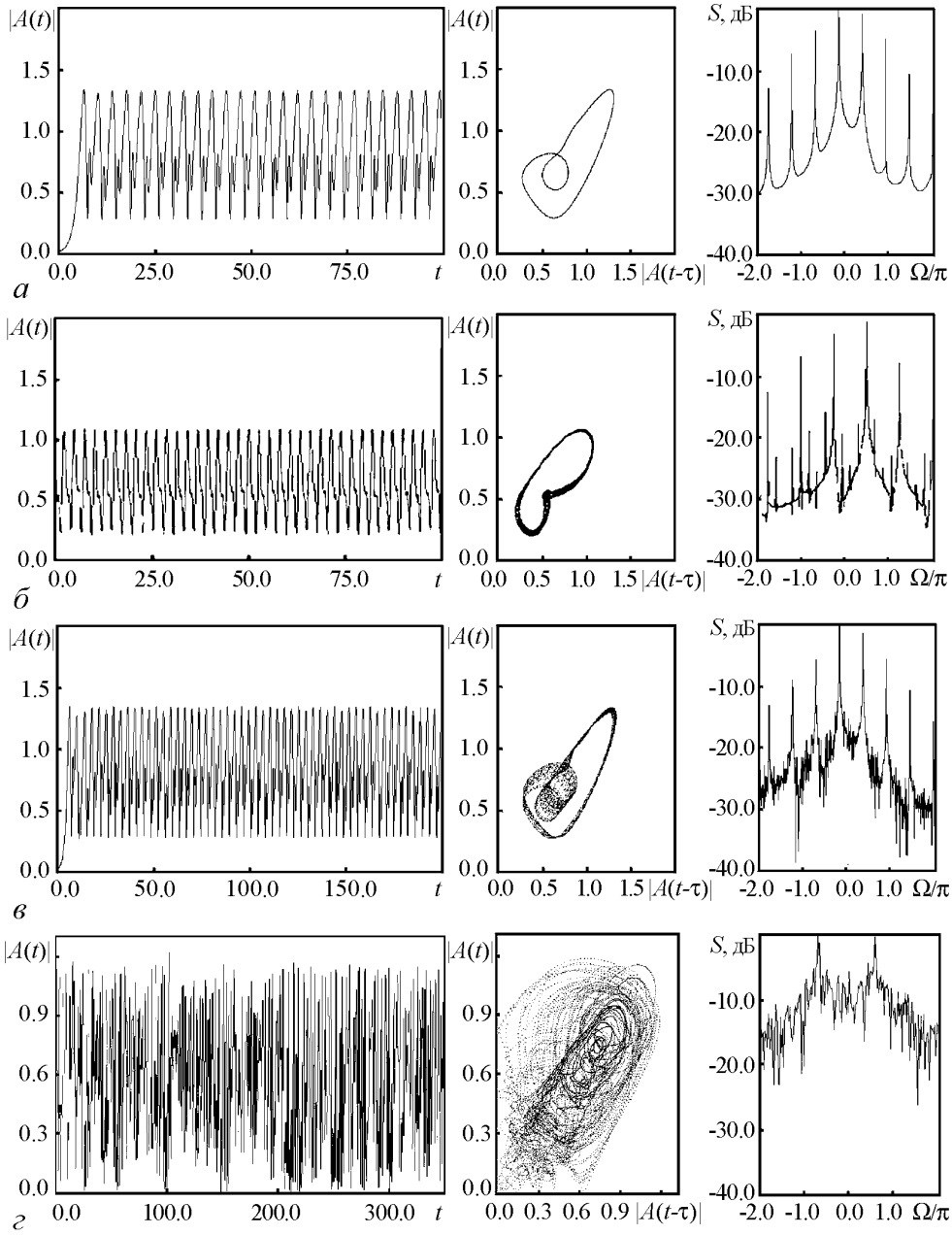


Рис. 1. Зависимости амплитуды выходного сигнала от времени, спектры и фазовые портреты для типичных режимов динамики автогенератора с кубичной нелинейностью: *а* – периодическая автомодуляция; *б* – квазипериодическая автомодуляция; *в* – слабый хаос; *г* – развитый хаос. Значения параметров приведены в табл. 1

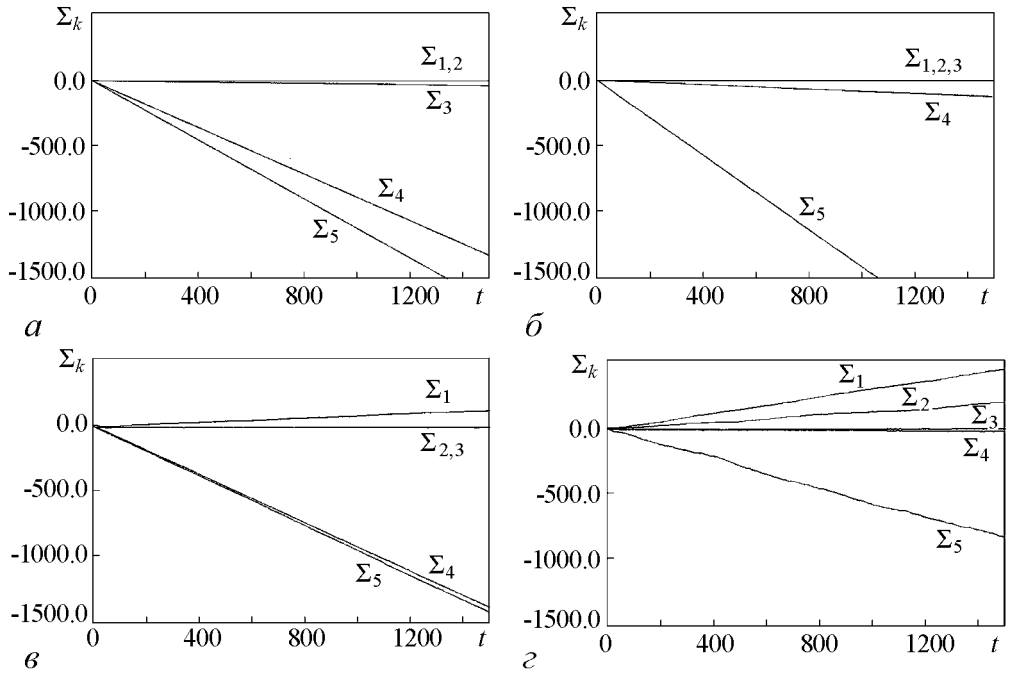


Рис. 2. Зависимости накапливающихся сумм от времени для пяти старших показателей Ляпунова, соответствующие рис. 1

являются все новые и новые стационарные состояния (см. [16, 17], а также [19, 20], где обсуждается аналогичное поведение для двухрезонаторного клистрона). Очевидно, это обусловлено более сложным видом нелинейности, которая отражает эффект многократной перегруппировки электронов в пространстве дрейфа клистрона.

Следуя [16, 17, 19, 20], будем обозначать состояния равновесия, соответствующие корням (9), расположенным на возрастающих участках функции Бесселя, как S_n, а на падающих участках – как P_n. Отметим, что в принятых обозначениях S_0 соответствует тривиальному решению с нулевой амплитудой. Можно показать, что S_n всегда неустойчивы, тогда как P_n в некоторой области изменения параметра α устойчивы, а затем теряют устойчивость в результате бифуркации Андронова–Хопфа, что соответствует возникновению автомодуляции. При дальнейшем увеличении α имеет место переход к хаосу, который преимущественно происходит по сценарию Фейгенбаума. В определенном диапазоне параметров аттракторы, сформировавшиеся на базе различных состояний равновесия P_n, могут сосуществовать, затем при увеличении α происходит их слияние в единый аттрактор [16, 17]. При этом зависимость выходного сигнала от времени напоминает перемежаемость и состоит из случайно чередующихся переключений от одного «парциального» аттрактора к другому. Подобные режимы также можно отнести к режимам развитого хаоса, так как визуально хаотические колебания являются более нерегулярными по сравнению с режимами, сформировавшимися на базе одного из положений равновесия.

Описанную ситуацию иллюстрируют рис. 3 и 4. На рис. 3 приведены проекции фазовых портретов, восстановленные по методу Паккарда–Такенса, для хаотических режимов, сформировавшихся на базе стационарных состояний P_0 и P_1. Для удобства на рисунке также нанесена проекция состояния равновесия S_n. На рис. 4 приведе-

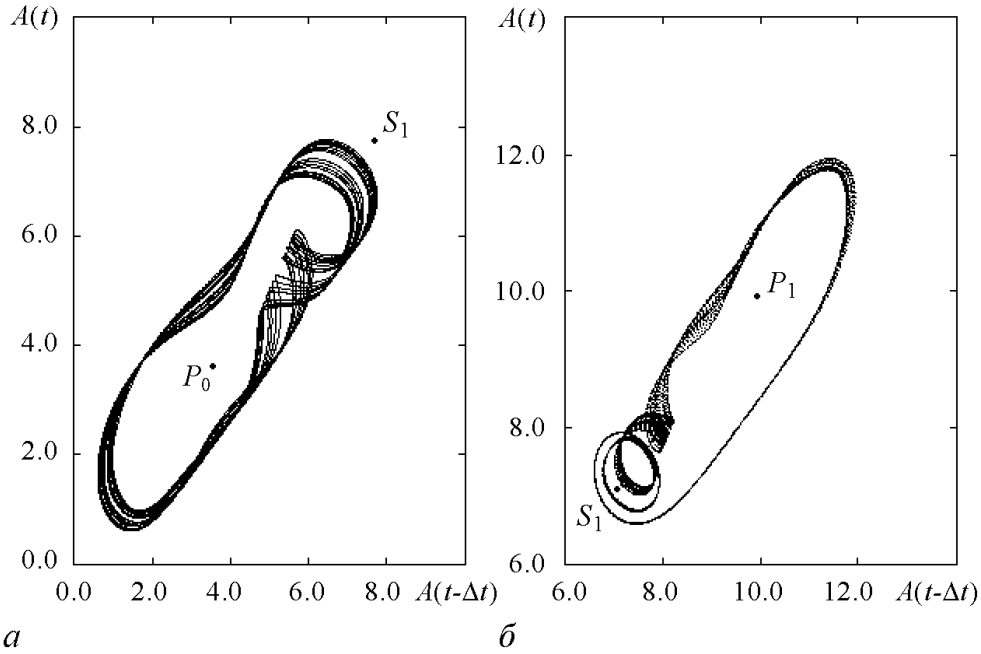


Рис. 3. Проекции фазовых портретов в различных хаотических режимах для модели однорезонаторного клистрона: $\gamma = 0.1$, $\psi = 0$, $\alpha = 5.1$ (*а*) и 6.94 (*б*)

ны зависимость выходного сигнала от времени, фазовый портрет и спектр после объединения двух аттракторов.

Результаты расчета спектра показателей Ляпунова для модели (8) показывают, что для развитых хаотических режимов, сформировавшихся в результате объединения аттракторов на базе различных состояний равновесия, имеется только один положительный показатель, то есть они не являются гиперхаотическими. Однако величина положительного показателя при переходе в режим развитого хаоса резко возрастает (примерно в пять раз). Соответствующие иллюстрации приведены на рис. 5, а значения пяти старших показателей – в табл. 2. Здесь следует подчеркнуть, что режим, о котором идет речь, все равно является по существу одномодовым.

Таблица 2

Пять старших показателей Ляпунова
в различных режимах хаотической динамики
модели «однорезонаторного клистрона»

	Хаотическая динамика на базе одного положения равновесия $\gamma = 0.1$, $\alpha = 5.1$, $\psi = 0.0$	Хаотическая динамика на базе двух положений равновесия $\gamma = 0.1$, $\alpha = 7.6$, $\psi = 0.0$
Λ_1	0.08	0.37
Λ_2	0.00	0.00
Λ_3	0.00	0.00
Λ_4	-1.09	-0.63
Λ_5	-1.35	-1.34

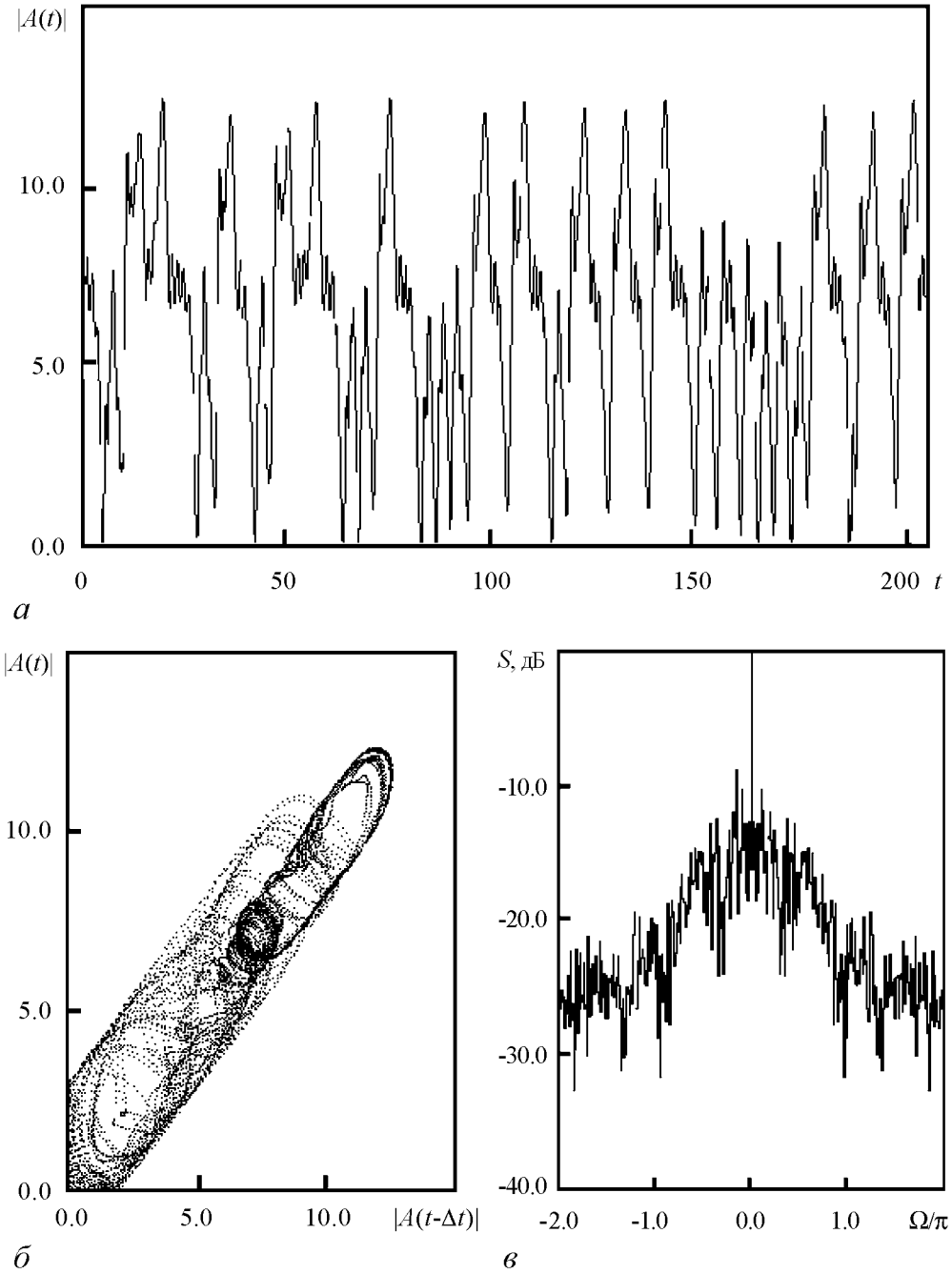


Рис. 4. Зависимость выходного сигнала от времени, фазовый портрет и спектр после объединения двух аттракторов на базе различных положений равновесия, $\gamma = 0.1$, $\psi = 0$, $\alpha = 7.6$

Действительно, состояния равновесия S_n и P_n, обсуждавшиеся выше, соответствуют одной и той же собственной моде, и хаос возникает в результате автомодуляции этой моды. В спектре на рис. 4, *в* хорошо видна спектральная составляющая на собственной частоте основной моды (точно в центре зоны генерации эта частота в принятых обозначениях равна нулю, то есть соответствует центральной частоте полосы

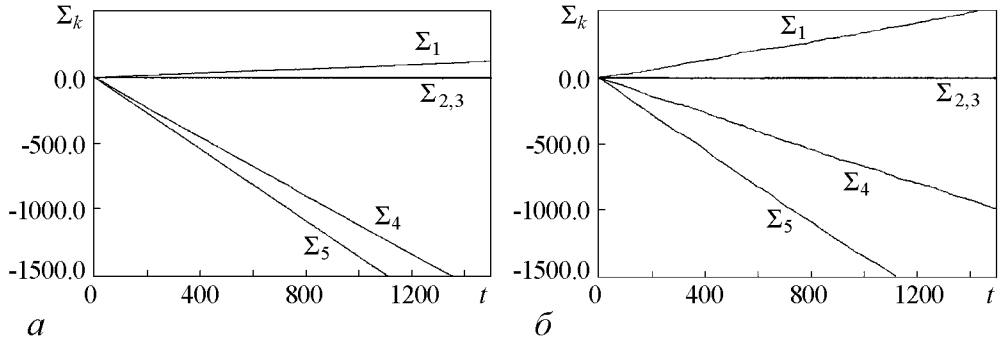


Рис. 5. Поведение накапливающихся сумм старших пяти показателей Ляпунова для модели однорезонаторного клистрона: *а* – хаотическая динамика на базе одного положения равновесия; *б* – хаотическая динамика после объединения аттракторов на базе различных положений равновесия. Параметры соответствуют рис. 2, *а* и рис. 3

пропускания системы). Таким образом, можно сделать вывод о том, что режимами гиперхаоса являются только принципиально многомодовые хаотические колебания, для которых, по терминологии работы [13], не сохраняется фазовый топологический инвариант.

3. Типичные особенности процедуры расчета спектра показателей Ляпунова

В данном разделе обсудим некоторые особенности процедуры расчета спектра ЛП, которые характерны для автоколебательных систем с запаздыванием. Остановимся на следующих вопросах: как зависят получаемые значения ЛП от вида начального возмущения, от числа рассчитываемых ЛП и от параметров численной схемы. Также обсудим особенности расчета нулевых показателей Ляпунова, которые наиболее чувствительны к изменению перечисленных выше параметров. Для определенности все представленные ниже результаты соответствуют модели генератора с кубичной нелинейностью (7) и (за исключением некоторых специально оговоренных случаев в разделе 3.4), получены при следующих значениях параметров численной схемы: норма возмущения $\varepsilon = 10^{-2}$, шаг по времени $dt = 10^{-2}$, число шагов, через которые выполняется перенормировка $L = 5$.

3.1. Зависимость от вида начального возмущения. Как уже говорилось, начальные векторы возмущения должны выбираться ортогональными. Как известно, задать ортогональный набор векторов можно разными способами. Пусть, как в разделе 1, на интервале длительностью τ укладывается N шагов по времени и требуется рассчитать D показателей Ляпунова, причем $D \leq N$. Было проведено несколько серий расчетов, в которых D ортогональных векторов возмущений задавались различным образом: в виде полиномов Лагранжа, Лагерра, тригонометрических функций, а также в виде

$$\tilde{\mathbf{x}}_k = \big(0, \ldots, 0, x_{(k-1)d}, \ldots, x_{kd}, 0, \ldots, 0\big)\,,$$

где число ненулевых компонент k-го вектора возмущений d есть целая часть отношения N/D, а их значения могут выбираться случайными, постоянными, и т.д. (очевидно, это не повлияет на ортогональность векторов), но так, чтобы выполнялось условие нормировки (2). Сравнение результатов показало, что они не зависят от вида начальных возмущений (аналогичный вывод был сделан в [7] при изучении

диода Пирса, хотя в этой работе рассчитывался только старший показатель). Более того, было установлено, что требование ортогональности компонент возмущения на первом шаге не является критическим, поскольку уже на следующем шаге происходит его ортогонализация.

Конкретный вид начального возмущения сказывается лишь на скорости выхода зависимости накапливающихся сумм от времени на линейный закон. При этом расчеты могут быть существенно ускорены, если векторы первоначальных возмущений сразу ориентировать по направлениям главных осей N-мерного эллипсоида изображающих точек в фазовом пространстве, растяжение и сжатие которого характеризует спектр ЛП (см. [3]). Однако эти направления, как правило, заранее не известны (за исключением некоторых простых модельных систем типа точечных отображений, где их удается найти аналитически [3]). Тем не менее, может оказаться полезным, например, задание начального возмущения в виде разложения по линейным собственным модам. Подобная методика, в частности, применялась в [11, 12] для ускорения расчетов. Другое полезное замечание состоит в следующем. Как правило, требуется рассчитать показатели Ляпунова не при каких-то одних значениях управляющих параметров, а в диапазоне их изменения, например, построить зависимость ЛП от какого-либо параметра. В этом случае следует при переходе к новой точке в пространстве управляющих параметров сохранять начальную ориентацию векторов $\tilde{\mathbf{x}}_k$ той же, что и на последнем шаге в какой-либо близлежащей точке. Это своего рода аналог процедуры расчета с наследованием начальных условий, но в данном случае не только для исходной, но и для возмущенных систем.

3.2. Число рассчитываемых показателей Ляпунова. В качестве одного из критериев правильности расчета спектров ЛП можно проверить, зависят ли значения ЛП от размерности пространства вложения D (то есть от числа рассчитываемых показателей). Расчеты показали, что предложенная схема хорошо работает вплоть до случая $D \sim N$. При изменении размерности пространства вложения показатели остаются постоянными с точностью до величины порядка нормы возмущения ε. Наибольшие отклонения (сравнимые с ε) имеют место для нулевых ЛП в режимах гиперхаоса, что связано с наличием в фазовом пространстве нескольких неустойчивых направлений.

В табл. 3 представлены результаты расчетов одного (старшего) ЛП, пяти и десяти показателей Ляпунова в режимах периодической автомодуляции и гиперхаоса для модели генератора с кубичной нелинейностью. Видно, что точность расчета остается постоянной.

Таблица 3

Значения ЛП в режимах периодической автомодуляции
и гиперхаоса для модели автогенератора с кубичной нелинейностью
при различных значениях размерности пространства вложения D

Периодическая автомодуляция, $\gamma = 0.3$, $\alpha = 2.35$, $\psi = 0.1\pi$	$D = 1$	0.00
	$D = 5$	0.00, 0.00, -0.02, -0.89, -1.11
	$D = 10$	0.00, 0.00, -0.03, -0.88, -1.11, -1.12, -1.72, -1.75, -1.91, -1.94
Гиперхаос, $\gamma = 1.0$, $\alpha = 5.68$, $\psi = 0.9\pi$	$D = 1$	0.30
	$D = 5$	0.29, 0.14, 0.01, -0.01, -0.52
	$D = 10$	0.30, 0.13, 0.00, -0.01, -0.49, -0.80, -0.99, -1.19, -1.35, -1.45

3.3. Поведение нулевых показателей Ляпунова. Как уже отмечалось в разделе 2, для распределенных систем с запаздыванием, рассматриваемых в настоящей работе, должны присутствовать два нулевых показателя, что связано с симметрией относительно сдвига начала отсчета времени и симметрией относительно фазового сдвига. Однако в режимах стационарной генерации (в случае $|A| = \mathrm{const}$), когда симметрия относительно сдвига начала отсчета времени вырождается, имеется лишь один нулевой показатель; в отсутствие генерации ($A = 0$), когда вырождаются обе симметрии, все ЛП отрицательны. Таким образом, как уже указывалось выше, наличие соответствующего числа нулевых показателей является одним из критериев правильности расчетов.

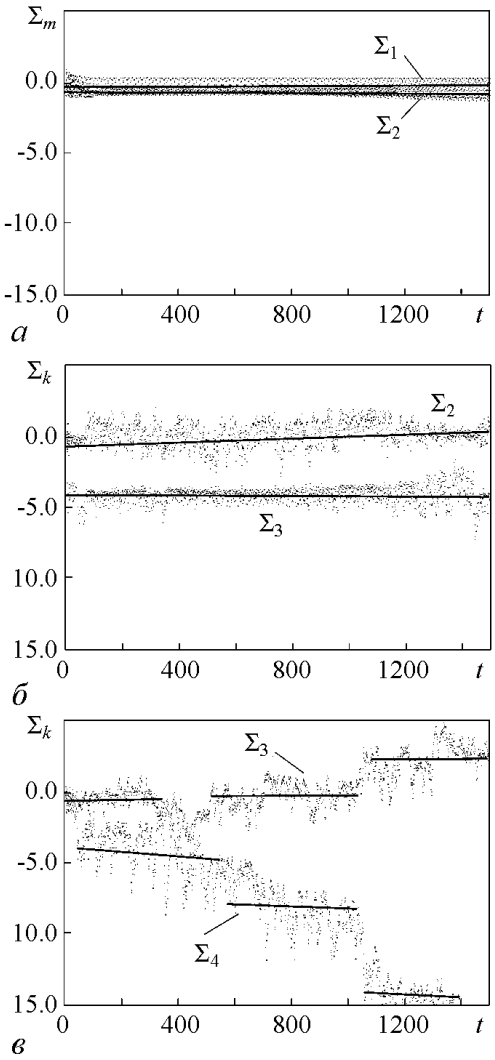


Рис. 6. Поведение накапливающихся сумм, отвечающих нулевым ЛП, в трех различных режимах генерации в модели автогенератора с кубичной нелинейностью: *а* – периодическая автомодуляция ($\gamma = 0.3$, $\alpha = 2.35$, $\psi = 0.1\pi$), *б* – хаос ($\gamma = 0.3$, $\alpha = 2.38$, $\psi = 0.1\pi$), *в* – гиперхаос ($\gamma = 1$, $\alpha = 5.68$, $\psi = 0.9\pi$). Нанесены линии усреднения накапливающихся сумм по методу наименьших квадратов на всем времени счета (*а, б*) и в областях с различным типом поведения (*в*)

Было обнаружено, что накапливающиеся суммы, отвечающие нулевым ЛП, ведут себя по-разному в различных режимах. Так, в случаях стационарной генерации и в периодической автомодуляции накапливающиеся суммы быстро выходят на линейную зависимость, причем значения соответствующих ЛП получаются нулевыми с высокой точностью (до 10^{-5} при шаге $dt = 10^{-2}$ и $\varepsilon = 10^{-2}$). В случае хаотических колебаний поведение накапливающихся сумм $\Sigma_k(t)$ является более сложным и в ряде случаев может носить ступенчатый характер: в течение некоторого времени величина Σ_k является практически постоянной, после чего скачком изменяет свое значение.

На рис. 6 приведены для сравнения графики зависимости накапливающихся сумм, отвечающих нулевым ЛП, в трех режимах генерации: периодической автомодуляции, хаотическом и гиперхаотическом. Хорошо видно, что в первом случае накапливающиеся суммы слабо колеблются вблизи нулевого значения. Имеющийся монотонный рост происходит чрезвычайно медленно, так что получающиеся при усреднении методом наименьших квадратов значения показателей Ляпунова оказываются на 2–3 порядка меньше, чем норма возмущения ε.

Таблица 4

Значения нулевых ЛП в различных режимах генерации
для модели автогенератора с кубичной нелинейностью

Периодическая автомодуляция $\gamma = 0.3$, $\alpha = 2.35$, $\psi = 0.1\pi$	Хаос $\gamma = 0.3$, $\alpha = 2.38$, $\psi = 0.1\pi$	Гиперхаос $\gamma = 1$, $\alpha = 5.68$, $\psi = 0.9\pi$
$\Lambda_1 = 0.00002$, $\Lambda_2 = 0.00015$	$\Lambda_1 = 0.001$, $\Lambda_2 = -0.007$	$\Lambda_1 = 0.009$, $\Lambda_2 = -0.02$

В режимах хаоса и гиперхаоса (рис. 6, *б, в*) зависимость $\Sigma_k(t)$ носит гораздо более сложный характер. Видны области, где накапливающиеся суммы ведут себя по-разному, убывая или возрастая с различной скоростью. Соответственно, падает точность вычисления ЛП, и значение нулевых показателей оказывается порядка ε. Точность расчета нулевых ЛП в сложных режимах можно существенно улучшить, если проводить усреднение методом наименьших квадратов не на всей области расчетов, а разбивать ее на участки, в которых поведение накапливающихся сумм остается приблизительно одинаковым (см. рис. 6, *в*). Значения нулевых показателей Ляпунова, отвечающих представленным на рис. 6 режимам, приведены в табл. 4. Видно уменьшение точности с переходом от режима периодической модуляции к хаосу и затем к гиперхаосу. Отметим, однако, что все равно точность остается сравнимой с величиной нормы возмущения.

3.4. Зависимость показателей Ляпунова от параметров численной схемы. В ходе численного моделирования проверялась зависимость ЛП от параметров численной схемы: шага по времени dt, нормы начального возмущения ε и числа шагов между перенормировками L. Наименее чувствительным к изменению параметров схемы оказывается старший показатель Ляпунова, наиболее чувствительными, как уже отмечалось, – нулевые показатели в случае сложных режимов. С другой стороны, благодаря этой чувствительности можно идентифицировать нулевые ЛП. При одинаковом значении управляющих параметров, но при разном выборе параметров численной схемы сильно изменяются лишь два элемента спектра ЛП, которые и следует ассоциировать с нулевыми показателями. Это, в свою очередь, позволяет различать режимы хаоса и гиперхаоса: после того как найдены нулевые ЛП, становится ясно, сколько имеется положительных показателей.

В табл. 5 приведены результаты расчетов спектра ЛП в режиме гиперхаоса, при изменении числа шагов между перенормировками L. Видно, что с ростом L в большинстве случаев имеет место небольшой рост ЛП. Это вызвано тем, что с увеличением времени между перенормировками в каждом векторе возмущения начинает доминировать составляющая с максимальным ЛП. Более того, если L слишком велико, все векторы возмущений окажутся ориентированными вдоль наиболее неустойчивого направления, отвечающего старшему ЛП, вследствие чего провести их ортогонализацию и вычислить спектр ЛП не удастся. Это обстоятельство объясняет хорошую точность расчета старшего ЛП и высокую чувствительность нулевых ЛП к изменению параметров численной схемы. Отметим также, что выбор слишком больших значений L (порядка 10) в режимах хаоса и гиперхаоса приводит к тому, что возмущение начинает сильно расходиться и численная схема оказывается неустойчивой.

Наконец, остановимся на зависимости результатов от шага по времени dt (или, что то же самое, числа шагов, приходящихся на интервал запаздывания $N = \tau/dt$). Разумеется, при дискретизации мы фактически переходим от распределенной систе-

Таблица 5

Значения пяти старших ЛП для модели автогенератора с кубичной нелинейностью в режиме гиперхаоса ($\gamma = 1$, $\alpha = 5.68$, $\psi = 0.9\pi$) при различном количестве шагов между перенормировками

	$L = 1$	$L = 2$	$L = 5$
Λ_1	0.29	0.30	0.30
Λ_2	0.14	0.15	0.12
Λ_3	0.01	0.02	0.03
Λ_4	-0.01	-0.02	-0.01
Λ_5	-0.52	-0.52	-0.47

мы к конечномерной (что, впрочем, так или иначе имеет место при использовании любой численной схемы). Возникает вопрос, насколько правомерным является такой переход. Здесь следует выделить два обстоятельства. Во-первых, число степеней свободы (равное N) все равно остается весьма большим. Большинство расчетов, как уже отмечалось, проводилось при $N = 100$, и их достоверность контролировалась уменьшением шага. Во-вторых, следует отметить, что при переходе к конечно-разностной аппроксимации в первую очередь отбрасываются ЛП, соответствующие наиболее высокочастотным модам, которые для рассматриваемых систем являются быстрозатухающими. Действительно, уравнения (7), (8) полезно представить как математические модели кольцевых генераторов, состоящих из нелинейного усилителя, линии задержки и фильтра низких частот с шириной полосы пропускания порядка γ^{-1} [2]. Точнее, поскольку переменная A имеет смысл медленно меняющейся амплитуды колебаний, в данном случае, скорее, следует вести речь о полосовом фильтре, центральная частота которого совпадает с несущей частотой сигнала. Понятно, что основную роль будут играть моды, частоты которых попадают в полосу пропускания фильтра, а высокочастотные моды, частоты которых находятся далеко за пределами полосы пропускания, несущественны (см. обсуждение этого вопроса в [2]). Как следствие, аттрактор в подобных системах имеет конечную размерность порядка числа мод, попадающих в полосу пропускания [2, 8]. Конечно, такая ситуация имеет место не всегда. Например, как показали исследования [11, 12], в гиротроне с нефиксированной структурой поля присутствует большое число слабо затухающих мод, что приводит к аномально большой размерности аттрактора, то есть к аномально большому числу степеней свободы, которые необходимо учитывать.

Расчеты показали, что изменение шага по времени dt и нормы возмущения ε практически не влияет на значения показателей Ляпунова при постоянном произведении $\varepsilon L dt$. Для обеспечения удовлетворительной точности расчетов эта величина должна быть достаточно небольшой в случае хаотических режимов ($\varepsilon L dt \sim 10^{-4}$). В регулярных режимах ее можно выбирать на порядок большей.

Заключение

В настоящей работе изучены особенности спектра показателей Ляпунова для двух простых моделей распределенных автоколебательных систем с запаздывающей обратной связью. Представленные результаты показали, что спектр ЛП является эффективным инструментом для анализа «тонкой структуры» хаотических режимов, позволяющим количественно охарактеризовать качественно различные типы хаоти-

ческого поведения. Показано, что режимы развитого хаоса, образовавшиеся при объединении хаотических аттракторов на базе различных собственных мод, являются гиперхаотическими, то есть характеризуются наличием двух положительных ляпуновских показателей. С другой стороны, для режимов развитого хаоса, возникающих при объединении аттракторов на базе различных стационарных состояний в модели однорезонаторного клистрона (8), имеется только один положительный показатель, величина которого резко возрастает по сравнению с режимами «слабого» хаоса. Таким образом, к режимам гиперхаоса можно отнести лишь принципиально многомодовые колебания, для которых не сохраняется фазовый топологический инвариант, введенный в работе [13].

В статье обсуждены типичные особенности процедуры расчета спектра ЛП, характерные для автоколебательных систем с запаздыванием. Показано, что конкретный вид начального возмущения не влияет на точность получаемых значений спектра ЛП и сказывается лишь на скорости выхода зависимости накапливающихся сумм от времени на линейный закон. Установлено, что число рассчитываемых ЛП не влияет на точность вычислений и предложенная численная схема хорошо работает для любого значения пространства вложения, вплоть до случая $D \sim N$. Описана высокая чувствительность нулевых ЛП к изменению параметров численной схемы, что может облегчить различение режимов «слабого» хаоса с единственным положительным ЛП и гиперхаоса. Обсуждается зависимость результатов компьютерного моделирования от параметров численной схемы, эмпирически найдена связь параметров численной схемы $\varepsilon L dt \sim 10^{-4}$, обеспечивающая достаточно высокую точность и скорость расчетов.

В заключение отметим, что аналогичные расчеты для систем с запаздыванием предпринимались и ранее [8, 9]. Однако в этих работах, в основном, изучался вопрос о поведении показателей при больших значениях времени запаздывания (что в используемой здесь нормировке переменных соответствует большим значениям γ и α). На наш взгляд, вопросы о том, насколько применимы в этом случае использовавшиеся численные алгоритмы и насколько велико может быть число положительных показателей в распределенных системах, требуют дальнейшего изучения. Большое время запаздывания для кольцевых автогенераторов с ЗОС эквивалентно тому, что в полосу пропускания попадает чрезвычайно много собственных мод, то есть следует ожидать, что поведение системы будет особенно сложным. Однако эта ситуация представляется нетипичной для устройств с узкополосными резонансными колебательными системами и в данной работе не затрагивалась.

Авторы благодарны Е.В. Блохиной за обсуждение результатов работы и полезные замечания.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ № 06-02-16773. Работа Балякина А.А. была также поддержана грантом CRD F Y3-P-06-02 и грантом Президента Российской Федерации для поддержки молодых кандидатов наук МК-4945.2006.2

Библиографический список

1. *Анищенко В.С.* Сложные колебания в простых системах. М.: Наука, 1990.
2. *Дмитриев А.С., Кислов В.Я.* Стохастические колебания в радиофизике и электронике. М.: Наука, 1989.

3. *Кузнецов С.П.* Динамический хаос. М.: Физматлит, 2001.
4. *Неймарк Ю.И., Ланда П.С.* Стохастические и хаотические колебания. М.: Наука, 1987.
5. *Безручко Б.П., Булгакова Л.В., Кузнецов С.П., Трубецков Д.И.* Экспериментальное и теоретическое исследование стохастических автоколебаний в лампе обратной волны // Лекции по электронике СВЧ и радиофизике (5-я зимняя школа-семинар инженеров). Кн. 5. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 1980. С. 25.
6. *Безручко Б.П., Булгакова Л.В., Кузнецов С.П., Трубецков Д.И.* Стохастические автоколебания и неустойчивость в лампе обратной волны // Радиотехника и электроника. 1983. Т. 28, № 6. С. 1136.
7. *Анфиногентов В.Г.* Хаотические колебания в электронном потоке с виртуальным катодом // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 1994. Т. 2, № 5. С. 69.
8. *Farmer J.D.* Chaotic attractors of an infinite-dimensional dynamical system // Physica D. 1982. Vol. 4, № 3. P. 366.
9. *Cenys A., Tamasevicius A., Mykolaitis G., Blumeliene S.* Coupled VHF delay line chaos generators // Proc. First International Workshop on the Noise Radar Technology (NRTW-2002). Yalta, Ukraine, September 18–20, 2002. P. 136.
10. *Кузнецов С.П., Трубецков Д.И.* Хаос и гиперхаос в лампе обратной волны // Изв. вузов. Радиофизика. 2004. Т. 48, № 5–6. С. 383.
11. *Блохина Е.В., Кузнецов С.П., Рожнев А.Г.* Высокая размерность хаотических аттракторов в гиротроне с нефиксированной структурой поля // Письма в ЖТФ. 2006. Т. 32, № 8. С. 83.
12. *Blokhina E.V., Kuznetsov S.P., Rozhnev A.G.* High-dimensional chaos in a gyrotron // IEEE Trans. on Electron Devices. 2007. Vol. 54, № 2. P. 188.
13. *Кузнецов С.П.* Сложная динамика генераторов с запаздывающей обратной связью // Изв. вузов. Радиофизика. 1982. Т. 25, № 12. С. 1410.
14. *Ланда П.С.* Нелинейные колебания и волны. М.: Наука. Физматлит, 1997.
15. *Рыскин Н.М., Шигаев А.М.* Сложная динамика простой модели распределенной автоколебательной системы с запаздыванием // ЖТФ. 2002. Т. 72, № 7. С. 1.
16. *Dmitrieva T.V., Ryskin N.M., Shigaev A.M.* Complex dynamics of simple models of distributed self-oscillating delayed feedback systems // Nonlinear Phenomena in Complex Systems. 2001. Vol. 4, № 4. P. 376.
17. *Дмитриева Т.В., Рыскин Н.М., Титов В.Н., Шигаев А.М.* Сложная динамика простых моделей распределенных электронно-волновых систем // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 1999. Т. 7, № 6. С. 66.
18. *Эльсгольц Л.Э., Норкин С.Б.* Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. М.: Наука, 1971.
19. *Shigaev A.M., Dmitriev B.S., Zharkov Y.D., Ryskin N.M.* Chaotic dynamics of delayed feedback klystron oscillator and its control by external signal // IEEE Trans. Electron Devices. 2005. Vol. 52, № 5. P. 790.
20. *Рыскин Н.М., Шигаев А.М.* Сложная динамика двухрезонаторного клистрона-генератора с запаздывающей обратной связью // ЖТФ. 2006. Т. 76, № 1. С. 72.
21. *Дмитриев Б.С., Жарков Ю.Д., Кижаева К.К., Клокотов Д.В., Рыскин Н.М., Шигаев А.М.* Сложная динамика многорезонаторных клистронных автогенера-

торов с запаздывающей обратной связью // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2002. Т. 10, № 5. С. 37.

22. *Dronov V., Hendrey M.R., Antonsen T.M., Ott E.* Communication with a chaotic traveling wave tube microwave generator // Chaos. 2004. Vol. 14, № 1. P. 30.
23. *Marchewka C., Larsen P., Bhattacharjee S. Booske J., Sengele S., Ryskin N.M., Titov V.N.* Generation of chaotic radiation in a driven traveling wave tube amplifier with time-delayed feedback // Phys. Plasmas. 2006. Vol. 13, № 1. 013104.
24. *Кац В.А., Кузнецов С.П.* Переход к многомодовому хаосу в простой модели генератора с запаздыванием // Письма в ЖТФ. 1987. Т. 13, № 12. С. 727.

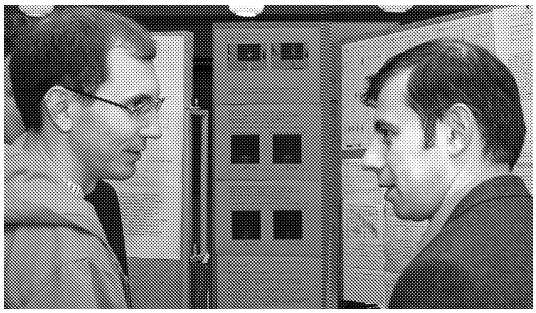
Саратовский государственный университет

Поступила в редакцию *7.05.2007*
После доработки *7.09.2007*

PECULIARITIES OF CALCULATION OF THE LYAPUNOV EXPONENTS SET IN DISTRIBUTED SELF-OSCILLATED SYSTEMS WITH DELAYED FEEDBACK

A.A. Balyakin, N.M. Ryskin

The numerical scheme for calculation the set of Lyapunov exponents in distributed systems with delayed feedback based on a modification of Benettine algorithm is described. The results of numerical simulation of two such systems (active oscillator with cubic nonlinearity and active oscillator of klystron type) are presented. The sets of Lyapunov exponents in different regimes, particularly in regimes of «weak» and «developed» chaos are analyzed. The calculation peculiarities of the set of Lyapunov exponents in the systems with delayed feedback are discussed.



Балякин Артем Александрович – окончил факультет нелинейных процессов Саратовского государственного университета в 2001 г. с отличием, кандидат физико-математических наук (2004), доцент кафедры нелинейной физики СГУ. Область научных интересов - нелинейная динамика распределенных систем, анализ количесвенных характеристик сложных режимов. Имеет 11 научных публикаций.

Рыскин Никита Михайлович – родился в 1966 г. в Саратове. Окончил физический факультет Саратовского госуниверситета (1991). Защитил кандидатскую (1996) и докторскую (2005) диссертации. С 1997 г. работает на факультете нелинейных процессов СГУ, в настоящее время — профессор кафедры нелинейной физики. Область научных интересов — нелинейная динамика распределенных систем, нелинейные волны и солитоны, ваккумная сверхвысокочастотная электроника и микроэлектроника. Имеет более 100 научных публикаций по указанным выше направлениям, в том числе учебные пособия «Нелинейные волны» (в соавторстве с Д.И. Трубецковым; М.: Физматлит, 2000) и «Нелинейные колебания» (в соавторстве с А.П. Кузнецовым и С.П. Кузнецовым; М.: Физматлит, 2002, 2005).
E-mail: RyskinNM@info.sgu.ru

Прикладные задачи нелинейной теории колебаний и волн

Изв. вузов «ПНД», т. 15, № 6, 2007 УДК 621.385.01

НЕУСТОЙЧИВОСТЬ ЭЛЕКТРОННЫХ ТРАЕКТОРИЙ И ШУМЫ В МНОГОРЕЗОНАТОРНОМ МАГНЕТРОНЕ

В.Б. Байбурин, К.В. Каминский

Рассмотрены режимы многорезонаторного магнетрона, соответствующие условиям температурного ограничения эмиссии и ограничению эмиссии пространственным зарядом. Установлено, что в последнем случае наблюдается большая хаотичность траекторий зарядов и более длительное их пребывание в прикатодной области, что, как показали расчеты, может являться причиной «аномального» шума в приборах магнетронного типа с центральным катодом.

В работах [1–3] исследованы траектории зарядов в динамических системах со скрещенными электрическими и магнитными полями при различных видах их неоднородности в пространстве и времени. Одним из наиболее распространенных приборов магнетронного типа является многорезонаторный магнетрон, используемый как генератор мощных электромагнитных колебаний.

Существенной особенностью работы многорезонаторных магнетронов является так называемый «аномальный» шум, уровень которого значительно превышает шумы других приборов СВЧ, в частности, ЛБВ [4, 5]. Природа аномального шума до сих пор полностью не ясна, различным аспектам этого вопроса посвящено значительное число публикаций [4–10].

В сравнительно недавних работах [4, 5] экспериментально показано, что аномальный шум в многорезонаторных магнетронах возникает в режиме ограничения эмиссии пространственным зарядом, в котором электрическое поле на катоде полностью компенсируется полем пространственного заряда (см., например, [11]). В режиме температурного ограничения эмиссии [11] (поле пространственного заряда пренебрежимо мало) аномальный шум исчезает.

В связи с изложенным представляется целесообразным рассмотреть особенности траекторий зарядов (в частности, их устойчивость) в указанных режимах и оценить их влияние на уровень шумов.

Как известно, уравнения движения зарядов в многорезонаторном магнетроне в двумерном случае в полярной системе координат (r, φ) можно записать в виде

$$\begin{aligned} \ddot{r} &= r\dot{r}^2 + \frac{e}{m}E_r - \Omega r\dot{\varphi}, \\ \ddot{\varphi} &= \frac{1}{r}\Omega\dot{r} + \frac{1}{r^2}\frac{e}{m}E_\varphi - 2\frac{1}{r}\dot{r}\dot{\varphi}, \end{aligned} \tag{1}$$

где точка обозначает дифференцирование по времени, t – время, E_r и E_φ – компоненты электрического поля в радиальном и азимутальном направлении, соответственно, Ω – циклотронная частота.

Перейдя от выражения (1) к системе дифференциальных уравнений первого порядка, будем иметь

$$\begin{aligned} &\dot{r} = v_r, \\ &\dot{\varphi} = v_\varphi, \\ &\dot{v_r} = r{v_r}^2 + E_r - \Omega r v_\varphi, \\ &\dot{v_\varphi} = \frac{1}{r}\Omega v_r + \frac{1}{r^2}E_\varphi - 2\frac{1}{r}v_r v_\varphi. \end{aligned} \tag{2}$$

Для определенности рассмотрим восьмирезонаторный магнетрон, работающий в режиме, при котором два соседних резонатора колеблются в противофазе, то есть с фазовым сдвигом π – так называемый π-вид колебаний [12]. Тогда для компонент поля можно записать следующие уравнения:

$$\begin{aligned} &E_r = E_d + E_q + E_0 e^\gamma \cos(\beta r)\sin(\omega t), \\ &E_\varphi = -E_0 e^\gamma \sin(\beta r)\sin(\omega t), \end{aligned} \tag{3}$$

где β – постоянная распространения, ω – частота высокочастотного поля, E_0 – амплитуда высокочастотного поля, E_d и E_q – постоянное электрическое поле в магнетроне и поле пространственного заряда, соответственно.

Для E_d можно записать

$$E_d(r) = \frac{U_0}{r}, \qquad \text{где } U_0 = \frac{U_a}{\ln(r_a/r_k)}, \qquad U_a \ - \ \text{анодное напряжение.}$$

При рассмотрении режима температурного ограничения эмиссии полем пространственного заряда можно пренебречь, поэтому в этом случае полагалось E_q=0.

В режиме ограничения эмиссии пространственным зарядом, как известно, поле пространственного заряда на катоде равно постоянному электрическому полю на катоде и противоположно ему по знаку. Кроме того, как показывают расчеты на моделях, основная часть пространственного заряда сосредоточена в так называемой цилиндрической «втулке» (ее примерная граница показана ниже, на рис. 2).

Учитывая отмеченные обстоятельства, можно записать простые аналитические выражения для поля пространственного заряда втулки в следующем виде

$$E_q(r) = \begin{cases} -E_d(r_k) + 2E_d(r_k)\dfrac{r - r_k}{r_0 - r_k} & \text{при } r_k \le r \le r_0, \\ \dfrac{U_0}{r - (r_0 - r_k)} & \text{при } r_0 \le r \le r_a, \end{cases} \tag{4}$$

где r_k – радиус катода, r_a – радиус анода, r_0 – радиус верхней границы втулки.

В расчетах значения безразмерных параметров в уравнениях (2), (3) и (4) были заданы соответствующими стационарным номинальным режимам работы многорезонаторного магнетрона. При имитационном моделировании использовались

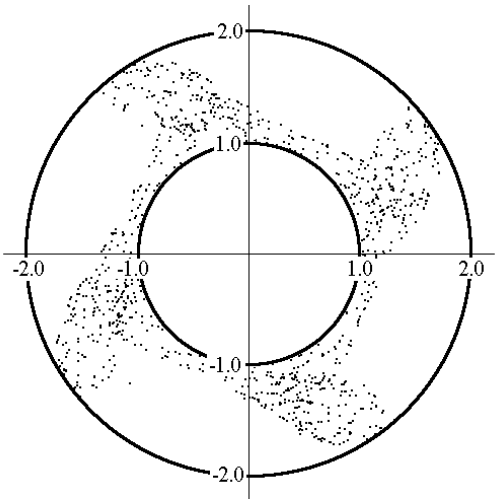


Рис. 1. Конфигурация спиц в режиме температурного ограничения эмиссии

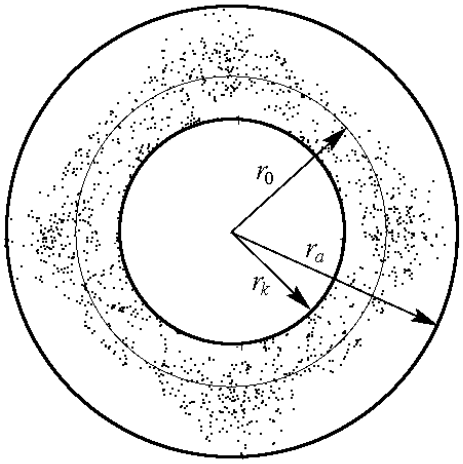


Рис. 2. Конфигурация спиц в режиме ограничения эмиссии пространственным зарядом

10000 крупных частиц. Уравнения движения решались методом Рунге–Кутты 4-го порядка точности с шагом интегрирования 0.005 для каждой крупной частицы.

На рис. 1, 2 представлены типичные конфигурации электронных спиц в режиме температурного ограничения эмиссии и ограничения эмиссии пространственным зарядом, соответственно. На рис. 3 показано для последнего случая распределение по радиусу суммарного электрического поля с учетом компенсирующего поля пространственного заряда.

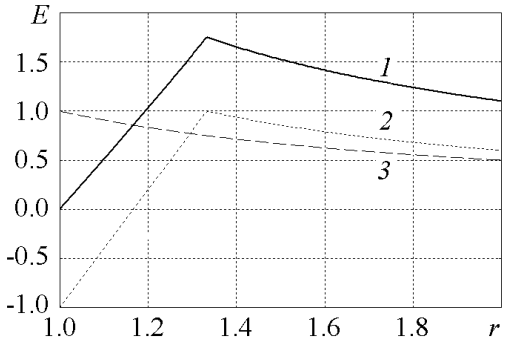


Рис. 3. Распределение электрического поля в пространстве взаимодействия по радиусу: *1* – суммарное поле; *2* – поле пространственного заряда; *3* – поле диода без пространственного заряда

На рис. 4, 5 представлены типичные траектории зарядов для режимов температурного ограничения и ограничения пространственным зарядом, соответственно. Для каждого из режимов производился расчет старшего показателя Ляпунова и автокорреляционной функции по временной реализации $r(t)$. Сплошная и пунктирная линии на этих рисунках соответствуют траекториям, выходящим из одной точки на катоде, но имеющим небольшие различия в начальных скоростях (в пределах значений начальных скоростей вылета электронов из катода, не превышающих, как известно, 0.03–0.05 от скоростей бомбардировки анода).

Из сравнения траекторий видно, что в режиме ограничения эмиссии пространственным зарядом (см. рис. 5) заряды значительную часть времени проводят в малоскоростной прикатодной области, для которой, в частности, хаотичность траектории выше, чем на рис. 4.

Пунктирные траектории на рис. 4, 5 соответствуют незначительному изменению начальных условий. Видно, что на рис. 5 имеет место более существенное расхождение траекторий с близкими начальными условиями.

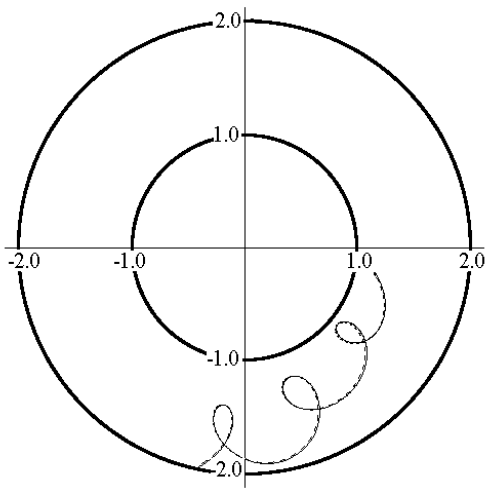


Рис. 4. Траектория заряда в режиме температурного ограничения эмиссии. Старший показатель Ляпунова равен 0.127

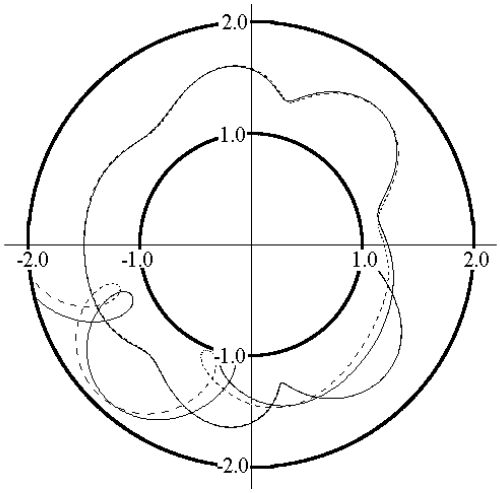


Рис. 5. Траектория заряда в режиме ограничения эмиссии пространственным зарядом. Старший показатель Ляпунова равен 0.232

В обоих случаях автокорреляционная функция является спадающей, старший ляпуновский показатель положителен, причем для случая на рис. 5 старший показатель Ляпунова почти в 2 раза больше.

Расчеты, проведенные в данной работе, а также в работах [1–3], показывают, что траектории зарядов в динамических системах со скрещенными электрическими и магнитными полями, входящими нелинейным образом в исходные фазовые уравнения размерности больше трех (например, как в системе (2)), принципиально неустойчивы.

Рассмотрим отдельный заряд q_i, эмитируемый катодом с некоторой начальной (в том числе нулевой) скоростью. Двигаясь в условиях действующих полей (магнитных и электрических), заряд создает некоторую величину наведенного тока $I^i_{\text{н}}$ (наведенной ВЧ-мощности $P^i_{\text{н}}$) в резонаторной системе магнетрона, по существу определяемой траекторией заряда. Даже при весьма малом изменении начальной скорости, как показывают расчеты, траектория заряда смещается (см. рис. 5). Соответственно изменяется величина наведенного тока и величина наведенной ВЧ-мощности, пропорциональной квадрату наведенного тока. Отношение разности наведенных токов (ВЧ-мощностей) к средней величине наведенного тока (ВЧ-мощности) можно рассматривать как количественную оценку шума, связанную с отдельным зарядом.

В расчетах использовалось $N = 10000$ зарядов (крупных частиц), для каждого из них рассчитывался наведенный ток $I^i_{\text{н}0}$ и ВЧ-мощность $P^i_{\text{н}0}$ при нулевых начальных скоростях. Затем для каждого из зарядов рассчитывались наведенный ток $I^i_{\text{н}M}$ и ВЧ-мощность $P^i_{\text{н}M}$ при максимальных величинах начальных скоростей, составляющих обычно 0.03–0.05 от скорости бомбардировки анода. Эти результаты суммировались по всем зарядам, что определяло наведенные токи и ВЧ-мощность, создаваемые всеми зарядами.

Величину шума S (дБ), создаваемого всем множеством зарядов, можно оценить по формуле

$$S = 10\log_{10}\frac{\left|\sum\limits_{i=1}^{N} P^i_{\text{н}0} - \sum\limits_{i=1}^{N} P^i_{\text{н}M}\right|}{\overline{P}^i_{\text{н}}}, \text{ где } \overline{P}^i_{\text{н}} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{N} P^i_{\text{н}0} + \sum\limits_{i=1}^{N} P^i_{\text{н}M}}{2}.$$

Проведенные расчеты показали, что в режиме ограничения эмиссии пространственным зарядом мощность шума на 35–40 дБ больше мощности шума в режиме ограничения эмиссии температурой, что количественно согласуется с экспериментальными данными, полученными в работах [4, 5]. Следует отметить, что качественная трактовка источников шума в работах [4, 5] отличается от изложенной выше.

Таким образом, проведенный численный анализ позволяет сделать вывод о принципиальной неустойчивости траекторий зарядов в режиме больших амплитуд многорезонаторного магнетрона и возможности рассматривать эту неустойчивость как один из физически допустимых механизмов возникновения аномального шума.

Библиографический список

1. *Байбурин В.Б., Мантуров А.О., Юдин А.В.* Хаотическое поведение зарядов в скрещенных полях // Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2002. Т. 10, № 6. С. 62.
2. *Хороводова Н.Ю., Байбурин В.Б.* Хаотические режимы в магнетронном диоде с пространственно неоднородными электрическим и магнитным полями // Вестник СГТУ. 2005. Т. 6, № 1. С. 103.
3. *Байбурин В.Б., Юдин А.В.* Влияние хаоса на время удержания заряженных частиц в магнитной ловушке // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2005. Т. 13, № 1–2. С. 38.
4. *Каржавин И.А., Гундобин Г.С., Вислов В.И.* Об аналогии шумовых процессов в приборах М-типа с центральным катодом и в магнетронных инжекторных пушках с длинной оптикой // Актуальные проблемы электронного приборостроения: Материалы Междунар. науч.-техн. конф. Саратов: СГТУ, 2002. С. 149.
5. *Каржавин И.А., Гундобин Г.С., Вислов В.И.* О модуляционном механизме аномального шума в приборах М-типа с центральным катодом //Актуальные проблемы электронного приборостроения: Материалы Междунар. науч.-техн. конф. Саратов: СГТУ, 2002. С. 144.
6. *Трубецков Д.И., Шараевский Ю.П., Шевчик В.Н.* Шумовые явления в лучевых усилителях магнетронного типа // Обзор по ЭТ. Вып.101. М.: Ин-т «Электроника», 1970. С. 122.
7. *Ван Дузер У.* Шум в электронных лучах при движении в поперечных скрещенных полях // Электронные сверхвысокочастотные приборы со скрещенными полями / Пер. с англ. под ред. М.М. Федорова. Т. 1. М.: Изд-во иностр. лит., 1961. С. 278.
8. *Par J. Arnaud.* Bruit anomal dans les canons electroniques a champs electroniques et magnetiques croises // Ann. Radioelect. Vol. 19. P. 3, January 1964.
9. *Monossov H.G.* The two dimensional mathematical model of electron interaction with UHF field in magnetron and high-voltage UHF oscillations breakdowns // Proceeding of International University Conference «Electronics and Radiophysics of Ultra-High Frequencies», St. Peterburg, Russia, May 24-28, 1999, p. 97.
10. *Riopoulos S.A.* Feedback-induced noise in crossed field devices // IEEE Trans. On Plasma Sci. 1992. Vol. 20, № 3. P. 360.

11. *Власов В.Ф.* Электронные и ионные приборы. М.: Гос. изд. лит. по вопросам связи и радио, 1960.
12. *Фиск Д., Хагструм Г., Гатман П.* Магнетроны / Пер. с англ. М.: Сов. радио, 1948.

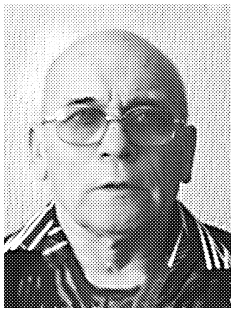
Саратовский государственный технический университет

Поступила в редакцию *26.06.2007*
После доработки *17.07.2007*

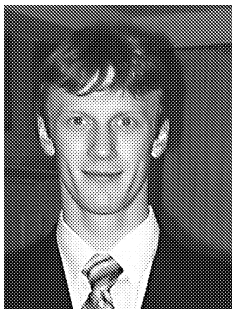
ELECTRON TRAJECTORIES INSTABILITY AND NOISES IN MAGNETRON

V.B. Bayburin, K.V. Kaminsky

We examine regimes of magnetron corresponding to the temperature limitation conditions and spatial charge emission limitation. We discover the greater chaos of trajectories and their long presence near cathode to be in the later case; as calculations show this phenomenon may cause the abnormal noise to appear in devices of magnetron type with a central cathode.



Байбурин Вил Бариевич – родился в Оренбурге (1935). Окончил физический факультет Саратовского государственного университета (1957). Защитил диссертации на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук в СГУ (1969) и доктора физико-математических наук в ИРЭ РАН в Москве (1984) в области электроники СВЧ. Заведующий кафедрой Саратовского государственного технического университета, профессор, Заслуженный деятель науки РФ, действительный член РАЕН. Области научных интересов – компьютерное моделирование, электроника СВЧ, сканирующая зондовая микроскопия, применение СВЧ-энергии в технологических процессах. Автор более 300 научных публикаций, в том числе 6 монографий.



Каминский Константин Вячеславович – родился в Саратове (1983). Окончил факультет нелинейных процессов Саратовского государственного университета (2006). Аспирант кафедры программного обеспечения вычислительной техники и автоматизированных систем СГТУ. Области научных интересов – компьютерное моделирование, электроника СВЧ.

Изв. вузов «ПНД», т. 15, № 6, 2007 УДК 621.385

ГЕНЕРАЦИЯ И УСИЛЕНИЕ ШИРОКОПОЛОСНЫХ ХАОТИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЙ СВЧ-ДИАПАЗОНА В ГИБРИДНОЙ СИСТЕМЕ «ЛАМПА БЕГУЩЕЙ ВОЛНЫ С КОЛЛЕКТОРОМ-ГЕНЕРАТОРОМ»

А.В. Муштаков

Предложен и экспериментально исследован новый гибридный электровакуумный прибор диапазона сверхвысоких частот на основе широкополосного СВЧ-усилителя – лампы бегущей волны, включающего в качестве одного из элементов многоступенчатый коллектор-генератор с возможностью формирования в его пространстве виртуального катода за счет торможения пучка электронов, выходящих из пространства взаимодействия ЛБВ. Показано, что такой прибор позволяет генерировать и усиливать широкополосные хаотические сигналы сантиметрового диапазона длин волн с шириной полосы одна-две октавы со слабой изрезанностью спектра мощности генерации. Определены характеристики генерируемых хаотических сигналов (спектральный состав и интегральная мощность) в различных режимах работы гибридного прибора.

Введение

Электронно-волновые системы, в которых в качестве активной среды используется электронный пучок с виртуальным катодом (ВК), представляются в настоящее время одним из перспективных источников сверхвысокочастотного (СВЧ) излучения среднего и высокого уровня мощности [1–5].

В работах [5–8] предложен и детально исследован генератор широкополосного шумоподобного сигнала на основе электронного пучка с виртуальным катодом, формирующимся в тормозящем статическом поле, так называемый низковольтный виркатор. Предложенные технические решения низковольтного виркатора защищены патентами РФ [9–13]. Принцип функционирования генератора заключается в том, что нерелятивистский интенсивный электронный пучок инжектируется в пространство взаимодействия с тормозящим потенциалом. В результате этого в электронном пучке возникает виртуальный катод, колебания которого регистрируются широкополосной электродинамической системой. Подобный генератор способен демонстрировать различные режимы – от генерации монохроматического сигнала до генерации хаотических сигналов с шириной полосы частот до двух октав [6, 7, 14]. Однако уровень выходной СВЧ-мощности такого генератора достаточно низкий [15]. В экспериментальном макете низковольтного виркатора при токе пучка $I_0 = 100...300$ мА

и ускоряющем напряжении $V_0 = 1...3$ кВ были обнаружены СВЧ-колебания в диапазоне 1...5 ГГц с мощностью порядка 0.2...1.0 Вт при электронном КПД, не превышающем несколько процентов.

В данной работе представлены результаты экспериментального исследования нового «гибридного» прибора СВЧ на основе широкополосного СВЧ-усилителя – лампы бегущей волны (ЛБВ), включающего в качестве одного из элементов многоступенчатый коллектор с возможностью формирования в его пространстве виртуального катода за счет торможения пучка электронов, выходящих из пространства взаимодействия ЛБВ. Новый прибор обладает высокой мощностью, достижимой в ЛБВ, наряду с возможностями низковольтного виркатора в различных режимах колебаний, включая режимы широкополосной хаотической генерации со слабой изрезанностью спектра мощности в диапазоне частот более октавы.

1. Схема прибора

На рис. 1 представлены конструктивные элементы и блок-схема предложенного многофункционального СВЧ-прибора на основе широкополосного электронного усилителя с коллектором-генератором. Прибор состоит из нескольких основных

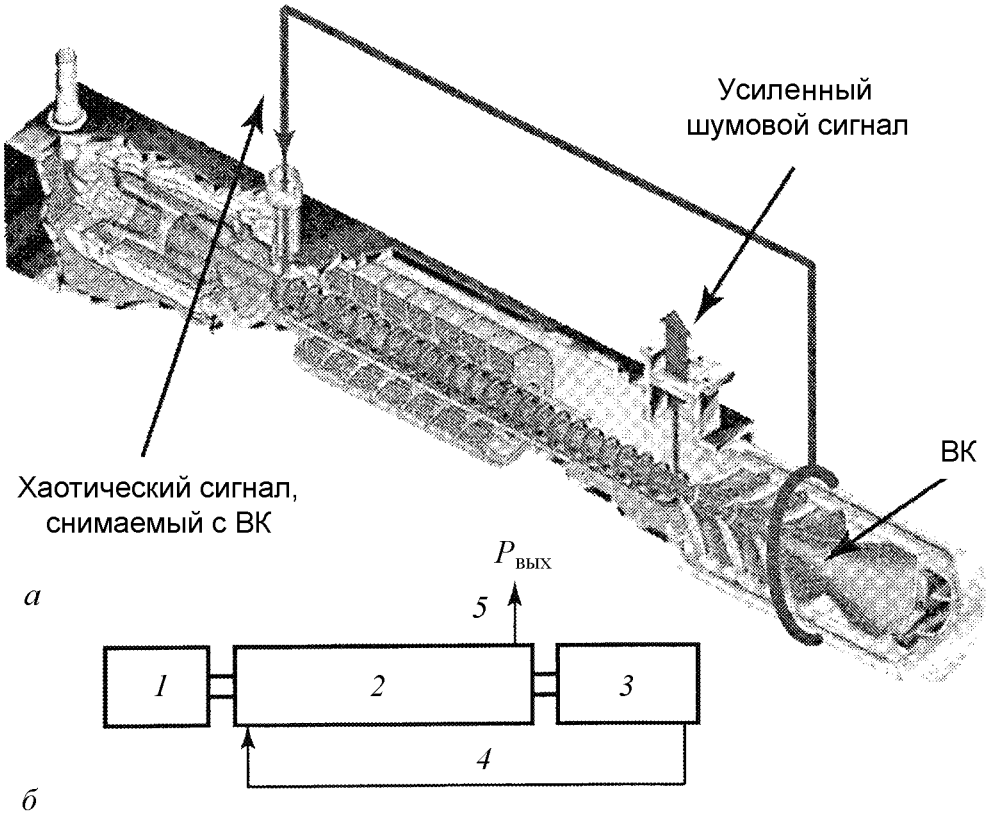


Рис. 1. *а* – Внешний вид генератора широкополосных хаотических колебаний СВЧ-диапазона на основе гибридной системы «лампа бегущей волны с коллектором-генератором». *б* – Блок-схема гибридного многофункционального прибора: *1* – источник электронов (электронная пушка), *2* – мощный широкополосный усилитель СВЧ-сигнала, *3* – коллектор-генератор, *4* – элемент связи, *5* – вывод усиленного СВЧ-сигнала

функциональных модулей – источника электронов (электронной пушки) *1*, мощного широкополосного усилителя СВЧ-сигнала *2*, коллектора-генератора *3* и элемента связи *4*. Усилительный модуль прибора (ЛБВ) содержит источник электронов *1*, формирующий электронный пучок с током I_0, который попадает в пространство взаимодействия *2*. Пространство взаимодействия представляет собой отрезок электродинамической замедляющей системы, в котором происходит взаимодействие электронного потока с синхронной электромагнитной волной, за счет чего имеет место усиление СВЧ-сигнала; одновременно электроны пучка теряют часть своей кинетической энергии [3]. Далее отработанный пучок на выходе из замедляющей системы попадает в область многоступенчатого коллектора электронов *3*, совмещающего функции генератора СВЧ-сигналов на основе ВК (низковольтного виркатора). СВЧ-сигнал, снимаемый в коллекторе-генераторе с помощью широкополосного элемента связи *4* (отрезок спирали или диафрагма, нагруженные на коаксиальную линию), попадает на вход усилительного модуля (ЛБВ) и, усиливаясь в ЛБВ до мощности $P_{\text{вых}}$, выводится через элемент вывода энергии *5* в нагрузку.

Таким образом, мы получаем комбинированный многофункциональный вакуумный СВЧ-прибор, в котором с помощью одного электронного пучка осуществляется генерация и усиление СВЧ-сигналов с различным спектральным составом и мощностью. Отметим, что в рассматриваемом устройстве отсутствует как таковая цепь *обратной* связи, что позволяет создать генератор СВЧ-сигналов с возможностью перестройки режимов генерации от монохроматического до широкополосного шумоподобного сигнала с малой изрезанностью спектра и шириной полосы частот в одну-две октавы. Малая изрезанность спектра и широкая полоса генерируемых частот связана с отсутствием строгих фазовых условий, определяемых цепью запаздывающей обратной связи, как это имеет место в источниках хаотического сигнала типа ЛБВ с обратной связью (шумотронов), в которых связываются цепью обратной связи непосредственно выход и вход ЛБВ, в результате чего система превращается в распределенный резонатор [16–17]. Источником СВЧ-колебаний в предложенной системе на основе ЛБВ с коллектором-генератором служит нестационарный виртуальный катод, формируемый в коллекторе-рекуператоре со специально предусмотренным широкополосным выводом энергии. Управление режимами колебаний ВК возможно путем изменения тормозящего потенциала на ступенях коллектора.

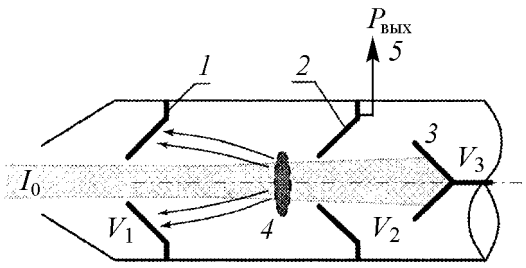


Рис. 2. Схема трехступенчатого коллектора-генератора ЛБВ: *1–3* – секции коллектора-рекуператора с потенциалами $V_{1,2,3}$, *4* – схематичное изображение образующегося в пучке ВК, *5* – широкополосный вывод энергии СВЧ-колебаний из коллектора-рекуператора

На рис. 2 представлена схема используемого в нашем эксперименте коллектора-генератора ЛБВ. Отработанный в пространстве взаимодействия ЛБВ электронный пучок с током I_0 попадает в область трехступенчатого коллектора. На первую секцию коллектора-рекуператора подается потенциал $V_1 < V_0$ (V_0 – ускоряющий потенциал электронов пучка); на вторую – потенциал $V_2 < V_1$; на третью – потенциал $V_3 < V_2$. Образующийся в коллекторе виртуальный катод в зависимости от соотношения потенциалов секций

коллектора может возникнуть как во второй, так и в третьей секциях коллектора. Для вывода мощности в рассматриваемой в статье конструкции коллектора-генератора используется коаксиальная линия, подключенная к диафрагме второй секции коллектора.

Рассмотрим кратко принцип действия многофункционального прибора «электронный усилитель (ЛБВ) с коллектором-генератором». Отработанный в ЛБВ электронный пучок с большим разбросом по скоростям попадает в пространство взаимодействия коллектора-генератора. Далее, в коллекторе-генераторе отработанный электронный пучок попадает в область тормозящего поля, образованного разностью потенциалов $V_1 - V_3$ ($V_3 \leq V_2 \leq V_1$), в результате чего в пучке формируется нестационарный ВК [6] (см. также [7], где обсуждается формирование и нестационарные колебания ВК в пучке с большим разбросом электронов по скоростям, как это имеет место в ЛБВ). Пространственно-временные колебания ВК регистрируются отрезком широкополосной электродинамической системы коллектора-генератора. Характер колебаний изменяется от одночастотных и многочастотных до шумоподобных, в зависимости от соотношения потенциалов $V_{1,2,3}$ секций коллектора. При этом, как было показано в работе [7], значительный разброс электронов пучка по скоростям, который имеет место за счет группирования и взаимодействия пучка с синхронной электромагнитной волной в ЛБВ, позволяет значительно улучшить характеристики СВЧ-сигнала в режиме хаотической генерации, то есть ширина полосы частот генерируемых колебаний расширяется, а изрезанность спектра мощности хаотического сигнала уменьшается.

СВЧ-сигнал колебаний ВК, снимаемый с коллектора-генератора, через элемент вывода энергии и элемент связи поступает на вход ЛБВ, где происходит его усиление. Усиленный хаотический широкополосный сигнал выводится из комбинированного прибора с выхода ЛБВ в полезную нагрузку. За счет такой схемы имеется возможность значительно увеличить выходную мощность данного комбинированного прибора ЛБВ с коллектором-генератором по сравнению с низковольтным виркатором при использовании тех же токов пучка и ускоряющих напряжений [5, 6, 15].

2. Результаты исследований генерации и усиления широкополосных хаотических сигналов в комбинированной системе ЛБВ с коллектором-генератором

Рассмотрим результаты экспериментального исследования генерации и усиления широкополосного хаотического сигнала в электронно-волновой системе «ЛБВ-усилитель с коллектором-генератором». В качестве исследуемой ЛБВ использовались пакетированные спиральные ЛБВ сантиметрового диапазона длин волн (рабочая полоса частот 1...2 ГГц) с трехступенчатым электростатическим коллектором. Основные характеристики ЛБВ следующие. Ускоряющее напряжение $V_0 = 2...2.5$ кВ, ток пучка $I_0 = 100...150$ мА. Коэффициент усиления в одночастотном режиме составляет $K_{\text{у}} = 40...45$ дБ, выходная мощность $P_{\text{вых}} = 40...55$ Вт, электронный КПД $\eta_e = 22...24$ %, технический КПД $\eta_T = 35...42$ %. Рассматривались ЛБВ с положительной дисперсией замедляющей системы (+6 %) и с отрицательной (−4 %).

Для анализа широкополосных хаотических сигналов, генерируемых в системе, использовался высокочастотный анализатор спектра Agilent ESA E4402B (диапазон частот от 10 кГц до 3 ГГц) и ваттметр поглощаемой мощности М3-51. Для анализа также использовались высокодобротные (полоса частот 2...4 МГц) фильтры с записью детектируемого сигнала с помощью ЭПП–09. Это позволяло определить спектральную плотность мощности шума колебаний, генерируемых электронным пучком с виртуальным катодом в коллекторе-генераторе и усиливаемых широкополосной ЛБВ среднего уровня мощности.

Соответствующие спектры колебаний в пучке с виртуальным катодом, регистрируемые на выходе коллектора-генератора, в статическом и динамическом режимах работы ЛБВ показаны на рис. 3. Под статическим режимом работы ЛБВ понимается режим, когда на вход ЛБВ не подается входной сигнал для усиления, и соответственно отсутствует разброс электронов по скоростям на выходе из замедляющей системы – на входе коллектора-генератора. В динамическом режиме работы на вход ЛБВ-усилителя подается для усиления СВЧ-сигнал, генерируемый коллектором-генератором. В этом случае разброс по скоростям электронов на входе в коллектор-генератор достаточно велик.

Спектры на рис. 3, *а, б* получены по сигналу, снятому с выхода коллектора-генератора в статическом режиме, на рис. 3, *в, г* – в динамическом режиме работы ЛБВ. Рис. 3, *а* и *в* построены при малых тормозящих потенциалах на ступенях кол-

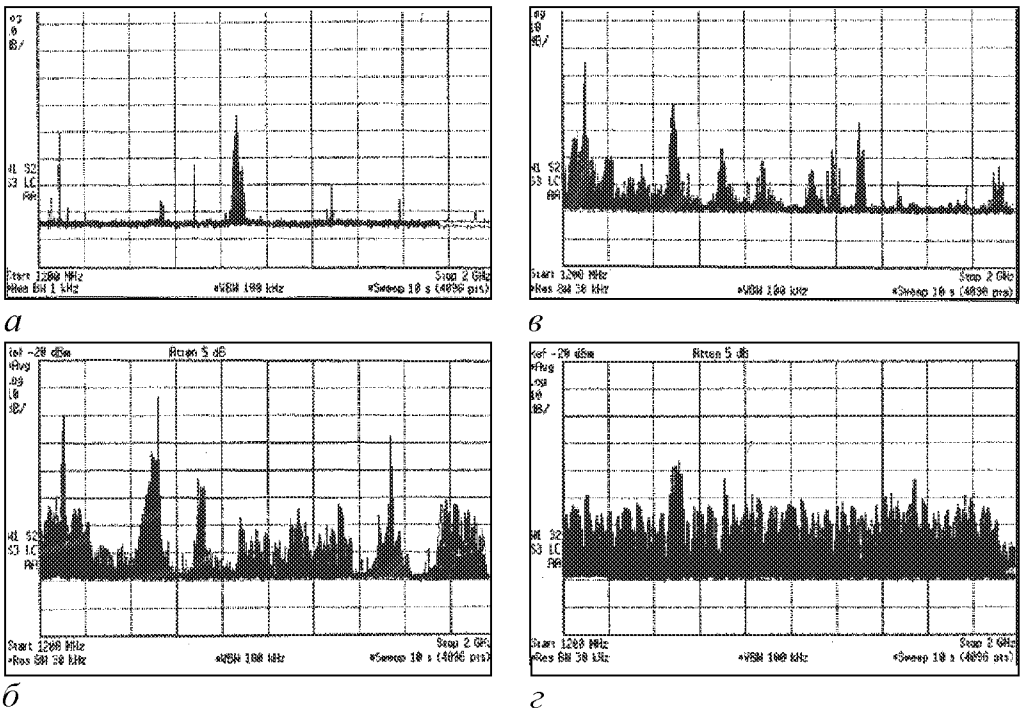


Рис. 3. Спектры регистрируемых колебаний в коллекторе-генераторе в статическом режиме работы ЛБВ при потенциалах коллектора $V_1/V_0 = 0.7$, $V_2/V_0 = 0.5$: *а* – $V_3/V_0 = 0.45$; *б* – $V_3/V_2 = 0.25$; в динамическом режиме работы при $V_1/V_2 = 0.7$, $V_2/V_0 = 0.5$: *в* – $V_3/V_0 = 0.7$; *г* – $V_3/V_0 = 0.6$. Диапазон частот, представленный на спектрах, равен 1200...2000 МГц

лектора, рис. 3, *б* и *г* – при большом торможении пучка в коллекторе. Видно, что при малом торможении в статическом режиме работы ЛБВ наблюдается генерация, близкая к одночастотному сигналу (см. рис. 3, *а*). С увеличением торможения электронов в коллекторе или увеличением разброса электронов по скоростям (динамический режим работы ЛБВ) СВЧ-колебания ВК в коллекторе-генераторе начинают характеризоваться многочастотным хаотическим спектром генерации (см. рис. 3, *б–г*). Однако в динамическом режиме работы ЛБВ, который характеризуется значительным разбросом электронов по скоростям на входе в коллектор-генератор, генерируемый сигнал демонстрирует сплошной спектр в полосе частот $\Delta f > 1$ ГГц и существенно меньшую изрезанность $N = P_{\text{макс}}/P_{\text{мин}}$ в рабочей полосе частот ($P_{\text{макс}}$ и $P_{\text{мин}}$ – максимальная и минимальная спектральные мощности в рассматриваемой полосе частот генерации). Последнее показывает, что, изменяя тормозящие потенциалы, подаваемые на ступени коллектора, можно управлять не только мощностью генерируемых колебаний, но и их спектральным составом.

На рис. 4 показаны зависимости от потенциала на второй ступени коллектора выходной мощности и КПД (электронного η_e и технического η_T) многофункционального прибора, измеренные по характеристикам, снимаемым с выхода ЛБВ-усилителя с нормальной дисперсией замедляющей системы, которые позволяют продемонстрировать преимущества конструкции предложенного многофункционального прибора. Таким образом, на рис. 4 показаны характеристики всего прибора в целом, а не только коллектора-генератора, как на предыдущих рисунках. Видно, что интегральная мощность $P_{\text{вых}}$ широкополосных хаотических колебаний, регистрируемых в коллекторе-генераторе, усиливается более чем в сто раз, достигая 50 Вт, что составляет усиление по мощности около 30 дБ. При этом технический КПД такого «гибридного» прибора увеличивается более чем в два раза, до 30%, а максимальный электронный КПД составляет величину порядка 25%.

Рассмотрим подробнее результаты усиления СВЧ-сигналов с различной полосой частот с помощью ЛБВ-усилителя с нормальной и аномальной дисперсией.

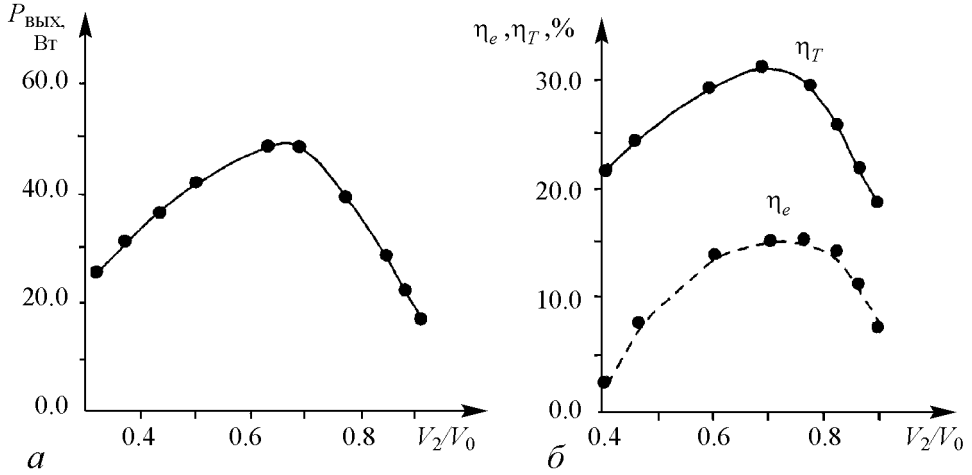


Рис. 4. Зависимости интегральной выходной мощности усиливаемого сигнала $P_{\text{вых}}$ (*а*), электронного η_e и технического η_T КПД (*б*) гибридного прибора от потенциала V_2/V_0 второй секции коллектора-генератора

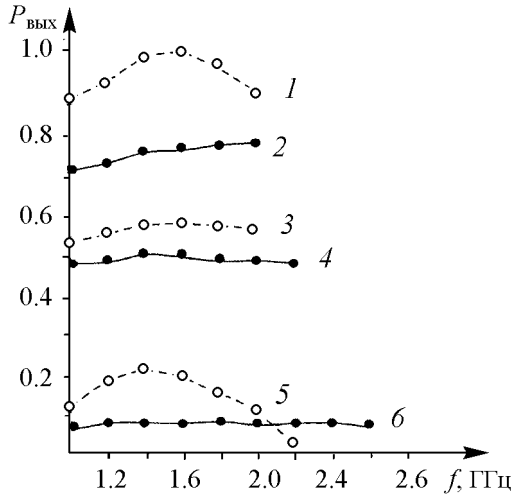


Рис. 5. Зависимости выходной мощности (в относительных единицах) от частоты на выходе ЛБВ для следующих видов входного сигнала: *1, 2* – одночастотный усиливаемый входной сигнал; *3, 4* – широкополосный хаотический входной сигнал (полоса частот входного сигнала $\Delta f/f = 0.5$); *5, 6* – широкополосный хаотический входной сигнал (полоса частот $\Delta f/f = 1.5$). Кривые *1, 3, 5* соответствуют ЛБВ с нормальной (+6%) дисперсией спиральной замедляющей системы; *2, 4, 6* – с аномальной (−4%) дисперсией

На рис. 5 показаны зависимости выходной мощности для различных усиливаемых СВЧ-сигналов – одночастотных и широкополосных хаотических (с шириной полосы $\Delta f/f$ от 0.5 до 1.5), генерируемых в области коллектора-генератора при различных потенциалах на секциях коллектора. Из рисунка видно, что с ростом ширины полосы усиливаемого сигнала выходная мощность быстро падает как для ЛБВ с нормальной, так и с аномальной дисперсией. При усилении узкополосных сигналов $\Delta f/f < 1.0$ с точки зрения максимальной интегральной мощности предпочтительнее использовать ЛБВ с нормальной дисперсией (кривые *1, 3, 5* на рис. 5), которая характеризуется большей выходной мощностью на всех частотах в рабочей полосе ЛБВ. Однако при усилении широкополосных хаотических сигналов $\Delta f/f > 1.0$ использование спиральной замедляющей системы с аномальной дисперсией позволяет получить более широкую полосу усиливаемых частот выходного сигнала: ср. кривые *5* и *6*, построенные при ширине полосы $\Delta f/f = 1.5$ входного (генерируемого в коллекторе-генераторе) сигнала. В заключение заметим, что вопрос усиления широкополосных хаотических сигналов со сплошным спектром в усилителе бегущей волны (ЛБВ) представляет важный самостоятельный интерес и требует дальнейшего теоретического и экспериментального анализа, поэтому здесь ограничимся только приведением предварительных экспериментальных данных по этому вопросу.

Выводы

Предложен и экспериментально исследован новый «гибридный» многофункциональный электронно-волновой прибор СВЧ-диапазона на основе лампы бегущей волны с коллектором-генератором. Данный прибор предназначен для получения широкополосных хаотических СВЧ-сигналов сантиметрового и миллиметрового диапазона длин волн среднего и большого уровня мощности. Для генерации широкополосных хаотических колебаний в приборе используется принцип низковольтного виркатора [6, 7], то есть генерация маломощных колебаний в пучке с нестационарным виртуальным катодом, формируемым в статическом тормозящем поле. Нестационарный виртуальный катод в новом гибридном приборе формируется в коллекторе-рекуператоре ЛБВ. Сигнал, генерируемый ВК, снимается с помощью широкополосного элемента связи и подается на вход ЛБВ, где и усиливается до среднего уровня мощности. К преимуществам нового прибора можно отнести следующее.

• Предложенный гибридный прибор сочетает достоинства низковольтного виркатора в плане получения сверхширокополосных хаотических сигналов в

СВЧ-диапазоне и большую выходную мощность, характеризующую лампу бегущей волны. При этом принципиально широкая рабочая полоса усиливаемых частот в ЛБВ позволяет эффективно усиливать широкополосный хаотический СВЧ-сигнал, генерируемый с помощью колебаний виртуального катода в коллекторе. Одновременно в предлагаемой схеме нет необходимости формировать отдельный электронный пучок для создания нестационарного ВК в низковольтном виркаторе, который формируется в отработанном в ЛБВ электронном потоке, поступающем в коллектор-генератор. Последнее позволяет создать компактную многофункциональную систему с одним электронным пучком. КПД всей системы определяется, в первую очередь, КПД ЛБВ и может достигать 30–50%.

• Характеристики хаотической генерации в предложенной схеме в плане расширения полосы частот и уменьшения изрезанности спектра улучшаются по сравнению с ранее предложенным низковольтным виркатором, так как в динамическом режиме работы ЛБВ разброс скоростей электронов на входе в коллектор-генератор может быть весьма значителен. Как показано в работе [7], это позволяет значительно улучшить спектральные характеристики широкополосной хаотической генерации в системе с ВК.

• Ширина и изрезанность (неравномерность) спектра генерации предложенной системы на основе ЛБВ с коллектором-генератором в отличие от ЛБВ-генератора с обратной связью (шумотрона) ограничены только шириной полосы генерируемых частот в пучке с ВК (который достигает при оптимальных условиях двух октав) и шириной полосы усиления ЛБВ и никак не определяются фазовыми и амплитудными условиями в цепи обратной связи, благодаря ее отсутствию. Элемент связи между коллектором-генератором и входом ЛБВ фактически не является элементом обратной связи, обеспечивая только подачу маломощного хаотического сигнала, генерируемого ВК, на вход усилителя.

В заключение отметим, что существует возможность значительно увеличить выходную мощность широкополосного хаотического сигнала в такой схеме путем использования более мощных ЛБВ-усилителей. В частности, представляется весьма перспективным рассмотрение подобных гибридных генераторов широкополосных хаотических СВЧ-сигналов на основе плазменнозаполненных ЛБВ [18] или пасотрона – мощного пучково-плазменного усилителя, который имеет возможность работы без фокусирующих магнитных полей [19]. В последнем случае существует возможность создания широкополосного мощного компактного генератора хаотических сигналов дециметрового и сантиметрового диапазона длин волн без использования фокусирующих электронный пучок магнитных систем.

Автор выражает благодарность профессору Ю.А. Калинину и профессору А.Е. Храмову за полезные обсуждения данной работы.

Работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований (проекты №№ 05-02-16286-а, 06-02-81013-Бел-а), а также Президентской программой поддержки Ведущих научных школ РФ (проект НШ-4167.2006.2).

Библиографический список

1. *Рухадзе А.А., Столбецов С.Д., Тараканов В.П.* Виркаторы (обзор) // Радиотехника и электроника. 1992. Т. 37, № 3. С. 385.
2. *Дубинов А.Е., Селемир В.Д.* Электронные приборы с виртуальным катодом // Радиотехника и электроника. 2002. Т. 47, № 6. С. 575.

3. *Трубецков Д.И., Храмов А.Е.* Лекции по сверхвысокочастотной электронике для физиков. В 2-х томах. М.: Физматлит, 2003, 2004.
4. *Дубинов А.Е., Ефимова И.А., Корнилова И.Ю., Сайков С.К., Селемир В.Д., Тараканов В.П.* Нелинейная динамика электронных пучков с виртуальным катодом // ФЭЧАЯ. 2004. Т. 35, № 2. С. 462.
5. *Егоров Е.Н., Калинин Ю.А., Левин Ю.И., Трубецков Д.И., Храмов А.Е.* Вакуумные генераторы широкополосных хаотических колебаний на основе нерелятивистских электронных пучков с виртуальным катодом // Изв. РАН. Сер. физическая. 2005. Т. 69, № 12. С. 1724.
6. *Калинин Ю.А., Короновский А.А., Храмов А.Е., Егоров Е.Н., Филатов Р.А.* Экспериментальное и теоретическое исследование хаотических колебательных явлений в нерелятивистском электронном потоке с виртуальным катодом // Физика плазмы. 2005. Т. 31, № 11. С. 1009.
7. *Калинин Ю.А., Храмов А.Е.* Экспериментальное и теоретическое исследование влияния распределения электронов по скорости на хаотические колебания в электронном потоке в режиме образования виртуального катода // ЖТФ. 2006. Т. 76, № 5. С. 25.
8. *Филатов Р.А., Калинин Ю.А., Храмов А.Е.* Исследование влияния положительных ионов на СВЧ-генерацию в низковольтном виркаторе // Письма в ЖТФ. 2006. Т. 32, № 11. С. 61.
9. Патент РФ на полезную модель № 59323. СВЧ генератор хаотического широкополосного сигнала на виртуальных катодах / *Филатов Р.А., Храмов А.Е., Калинин Ю.А.* // Официальный бюллетень Федеральной службы по интеллектуальной собственности, патентам и товарным знакам. Москва: ФИПС. 10.12.2006.
10. Патент на изобретение № 2288519. Генератор шумоподобного широкополосного СВЧ-сигнала на виртуальном катоде / *Калинин Ю.А., Храмов А.Е., Егоров Е.Н.* // Официальный бюллетень Федеральной службы по интеллектуальной собственности, патентам и товарным знакам. Москва: ФИПС. 27.11.2006. Бюллетень № 33.
11. Патент на изобретение № 2288518. Электровакуумный прибор СВЧ-диапазона / *Калинин Ю.А., Храмов А.Е., Короновский А.А., Егоров Е.Н.* // Официальный бюллетень Федеральной службы по интеллектуальной собственности, патентам и товарным знакам. Москва: ФИПС. 27.11.2006. Бюллетень № 33.
12. Патент РФ на полезную модель № 46884. СВЧ-генератор на виртуальном катоде / *Калинин Ю.А., Храмов А.Е., Трубецков Д.И., Егоров Е.Н.* // Изобретения. Полезные модели: Официальный бюллетень Федеральной службы по интеллектуальной собственности, патентам и товарным знакам. Москва: ФИПС. 2005. № 21.
13. Патент РФ на полезную модель № 48672. СВЧ-генератор широкополосных шумоподобных колебаний на виртуальном катоде / *Калинин Ю.А., Храмов А.Е., Короновский А.А., Егоров Е.Н.* // Изобретения. Полезные модели: Официальный бюллетень Федеральной службы по интеллектуальной собственности, патентам и товарным знакам. Москва: ФИПС. 2005. № 30.
14. *Егоров Е.Н., Калинин Ю.А., Короновский А.А., Левин Ю.И., Храмов А.Е.* Исследование образования структур и хаотической динамики в нерелятивистском

электронном пучке с виртуальным катодом в тормозящем электронном поле // Радиотехника и электроника. 2007. Т. 52, № 1. С. 51.

15. *Егоров Е.Н., Калинин Ю.А., Короновский А.А., Храмов А.Е., Морозов М.Ю.* Исследование мощности СВЧ-генерации в нерелятивистском электронном пучке с виртуальным катодом в тормозящем поле // Письма в ЖТФ. 2006. Т. 32, № 9. С. 71.
16. *Кислов В.Я., Мясин Е.А., Залогин Е.Н.* Исследование стохастических автоколебательных процессов в автогенераторах с запаздыванием // Радиотехника и электроника. 1979. Т. 24, № 6. С. 1118.
17. *Кузнецов С.П.* Сложная динамика генераторов с запаздывающей обратной связью // Известия вузов. Радиофизика. 1982. Т. 25, № 12. С. 1410.
18. *Переводчиков В.И., Боровиков П.В., Гусев С.И., Завьялов М.А., Конкин В.А., Кузнецов Ю.А., Мартынов В.Ф., Тюрюканов П.М., Шапиро А.Л.* Мощные широкополосные пучково-плазменные усилители СВЧ-колебаний // Прикладная физика. 2001. Т. 5. С. 57.
19. *Трубецков Д.И., Храмов А.Е.* Линейная теория взаимодействия электронного пучка с электромагнитными волнами при ионной фокусировке в пазотроне // Физика плазмы. 2004. Т. 30, № 1. С. 80.

Саратовский государственный университет

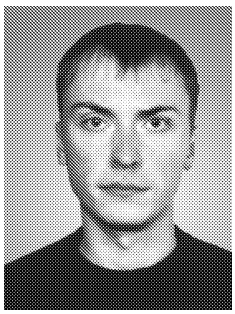
Поступила в редакцию *25.05.2007*
После доработки *3.09.2007*

GENERATION AND AMPLIFICATION OF MICROWAVE CHAOTIC OSCILLATIONS IN THE HYBRID SYSTEM «TRAVELING WAVE TUBE WITH COLLECTOR-GENERATOR»

A.V. Mushtakov

In the paper, the noval hybrid microwave electronic device based on a traveling wave tube and multisectional collector with virtual cathode is suggested and experimentally investigated. The virtual cathode is formed in the electron beam by applying a braking electric field in the collector, i.e. in the part of the device following to the interaction space of traveling wave tube.

It is shown, that microwave broad band chaotic signals are generated and amplified in the device. The corresponding curve has the negligible cutting. Spectral and powers characteristics of the signals for various regimes of the device operation have been found.



Муштаков Александр Владимирович – родился в Саратове (1982). Окончил Саратовский государственный университет по специальности радиофизика и электроника (2004). Аспирант кафедры электроники, колебаний и волн СГУ. Область научных интересов: явления в системах с виртуальном катодом.

Прикладные задачи нелинейной теории колебаний и волн

Изв. вузов «ПНД», т. 15, № 6, 2007 УДК 530.145

КИНЕТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ РОЖДЕНИЯ ПИОНОВ В ОБЛАСТИ МАЛЫХ ИМПУЛЬСОВ ИЗ КВАРКОВОГО КОНДЕНСАТА

Д.Б. Блашке, А.В. Прозоркевич, С.А. Смолянский, А.В. Филатов

Исследована нелинейная система кинетических уравнений немарковского типа, описывающих рождение частиц с переменной массой в рамках модели Nambu–Jona-Lasinio для случая рождения пионов в процессе распада σ-мезонов в горячей и плотной ядерной материи. Вычислено увеличение числа π-мезонов в области малых импульсов, вызванное дополнительным рождением σ-мезонов под действием «инерциального» механизма с учетом нелинейной зависимости массы σ-мезонов от температуры в уравнении состояния вблизи точки $m_\sigma \approx 2m_\pi$. Показано, что соответствующий вклад может быть значительным.

Введение

В последние годы были обнаружены некоторые свойства кирального фазового перехода, такие как, например, избыток π-мезонов, вызванный быстрым достижением термо- и химического равновесия в симметричной фазе [1], избыток низкоэнергетических пар фотонов, рожденных аннигиляцией π-мезонов в горячей и плотной материи [2], увеличение числа дилептонов за счет лептонного распада σ-мезонов [3]. Для своего объяснения эти и многие другие свойства материи вблизи точки фазового перехода адронной материи в состояние кварк-глюонной плазмы требуют более детального теоретического исследования.

Наиболее доступным в настоящее время способом достичь необходимых энергий и плотностей для изучения этих свойств ядерной материи являются эксперименты по столкновению релятивистских тяжелых ионов, в которых происходят процессы деконфайнмента из адронного газа в состояние кварк-глюонной плазмы. При охлаждении такая система проходит через киральный фазовый переход: из фазы с нарушенной киральной симметрией в фазу, где она восстанавливается [4]. Рассмотрим мезонный файербол[1], образованный при столкновении тяжелых ионов, например, в условиях ускорителя SPS[2]. Можно полагать, что он эволюционирует от начальной высокой температуры в область «вымораживания» (freeze out) в соответствии со сценарием гидродинамики Бьеркена [5, 6].

[1]Под файерболом подразумевается сгусток горячей и плотной ядерной материи, образованный в результате столкновения ядер.

[2]Super Proton Synchrotron (ЦЕРН, Женева).

В процессе расширения и охлаждения адронной системы, образующейся при столкновении релятивистских тяжелых ядер, масса σ-мезонов, в соответствии с моделью Nambu–Jona-Lasinio (NJL) [7], увеличивается и стремится к своему вакуумному значению, при этом она быстро переходит пороговое значение $2m_\pi$, когда может происходить распад σ-мезонов на два π-мезона. Поскольку взаимодействие $\sigma \to \pi\pi$ достаточно интенсивное, этот процесс распада проходит достаточно быстро. До наступления фазы «вымораживания» рожденные π-мезоны термализуются в «тепловой бане». В соответствии с кинетическим подходом [8, 9] зависимость массы σ-мезонов от времени приводит к вакуумному рождению этих частиц посредством так называемого «инерциального механизма».

Целью работы является построение и исследование нелинейной системы кинетических уравнений модели, описывающей поведение системы π-σ, и оценка влияния дополнительного механизма рождения σ-мезонов (инерциального механизма) на процесс генерации π-мезонов (процесс $\sigma \to \pi\pi$)– одного из возможных источников наблюдаемой в экспериментах множественности π-мезонов. Рассмотренный в работе сильно неравновесный процесс привлекается для объяснения экспериментально наблюдаемой множественности от теоретического предсказания, основанного на гипотезе теплового равновесия π-мезонного газа в области малых импульсов.

В работе используется естественная система единиц: $\hbar = c = k = 1$, где k – постоянная Больцмана.

1. Кинетика составной системы σ-π

Рассмотрим эволюцию составной системы σ- и π-мезонов после прохождения через точку кирального фазового перехода. Предположим также, что система достаточно плотная и при условии пространственной однородности быстро достигает состояния локального равновесия с распределением Бозе–Эйнштейна

$$f_\alpha^{eq}(\mathbf{p}, t) = \{\exp[\omega_\alpha(\mathbf{p}, t)/T_\alpha(t)] - 1\}^{-1},$$

где $\omega_\alpha(\mathbf{p}, t)$ – энергия частицы, α есть σ или π. Зависимость от времени температуры подсистем $T_\alpha(t)$ определяется расширением и одновременным охлаждением файербола и задается уравнениями гидродинамики [5]. Зависимость $m_\sigma(T(t))$ массы σ-мезонов от времени определяется моделью NJL [6]

$$\omega_\sigma(\mathbf{p}, t) = \sqrt{m_\sigma^2(T(t)) + \mathbf{p}^2}. \tag{1}$$

Учет процессов вакуумного рождения σ-мезонов под действием инерциального механизма в кинетическом описании приводит к появлению ненулевой функции источника в кинетическом уравнении подсистемы σ-мезонов [8]

$$I_\sigma^{vac}(\mathbf{p}, t) = \frac{1}{2}\Delta_\sigma(\mathbf{p}, t)\int_{t_0}^{t} dt'\Delta_\sigma(\mathbf{p}, t')[1 + 2f_\sigma(\mathbf{p}, t')]\cos[2\theta_\sigma(\mathbf{p}; t, t')], \tag{2}$$

где $\Delta_\sigma(\mathbf{p}, t')$ – амплитуда перехода между состояниями с положительной и отрицательной энергией

$$\Delta_\sigma(\mathbf{p}, t) = \frac{\dot{\omega}_\sigma(\mathbf{p}, t)}{\omega_\sigma(\mathbf{p}, t)} = \frac{m_\sigma(t)\dot{m}_\sigma(t)}{\omega_\sigma^2(\mathbf{p}, t)}, \tag{3}$$

а $\theta_\sigma(\mathbf{p}; t, t')$ – динамическая фаза

$$\theta_\sigma(\mathbf{p}; t, t') = \int_{t'}^{t} dt'' \omega_\sigma(\mathbf{p}, t''). \tag{4}$$

Возникающие в результате вакуумного рождения нестабильные σ-мезоны могут распадаться на два π-мезона или фотона, что приводит к возникновению динамической связи между мезонными подсистемами. Ниже будем учитывать только первый канал и предположим, что эти процессы происходят в термализованном мезонном газе. Полная амплитуда распада $\Gamma_{\sigma\to\pi\pi}$ для процессов $\sigma \to \pi^+\pi^-$ и $\sigma \to 2\pi^0$ была получена при конечных температуре и плотности в системе центра масс [10]. Используя функцию $\Gamma_{\sigma\to\pi\pi}$, можно записать выражение для потерь в подсистеме σ-мезонов

$$I_\sigma^{loss}(\mathbf{p}, t) = -\int \frac{d\mathbf{p_1} d\mathbf{p_2}}{\omega_\pi(\mathbf{p_1}, t)\omega_\pi(\mathbf{p_2}, t)} \Gamma_{\sigma\to\pi\pi}(\mathbf{p}, \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2; t) f_\sigma(\mathbf{p}, t)[1 + f_\pi(\mathbf{p}_1, t)] \times$$

$$\times [1 + f_\pi(\mathbf{p}_2, t)]\delta\{\omega_\sigma(\mathbf{p}, t) - \omega_\pi(\mathbf{p}_1, t) - \omega_\pi(\mathbf{p}_2, t)\}\delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2) \tag{5}$$

и соответствующее выражение для прихода в π-мезонную подсистему

$$I_\pi^{com}(\mathbf{p}, t) = \int \frac{d\mathbf{p_1} d\mathbf{p_2}}{\omega_\pi(\mathbf{p_1}, t)\omega_\sigma(\mathbf{p_2}, t)} \Gamma_{\sigma\to\pi\pi}(\mathbf{p_2}, \mathbf{p}, \mathbf{p}_1; t) f_\sigma(\mathbf{p_2}, t)[1 + f_\pi(\mathbf{p}_1, t)] \times$$

$$\times [1 + f_\pi(\mathbf{p}, t)]\delta\{\omega_\sigma(\mathbf{p_2}, t) - \omega_\pi(\mathbf{p}, t) - \omega_\pi(\mathbf{p}_1, t)\}\delta(\mathbf{p_2} - \mathbf{p} - \mathbf{p}_1). \tag{6}$$

Здесь были учтены законы сохранения энергии и импульса при распаде σ-мезонов.

Запишем итоговое кинетическое уравнение для описания совместной эволюции подсистем π- и σ-мезонов

$$\dot{f}_\alpha = I_\alpha^{vac} + I_\alpha^{\sigma\to\pi\pi} + I_\alpha^{ex}. \tag{7}$$

Функции источников I_α^{vac} и $I_\alpha^{\sigma\to\pi\pi}$ определяются уравнениями (2), (5) и (6) (для π-мезонов $I_\pi^{vac} = 0$). Наконец, последний член соответствует изменению локального квазиравновесного распределения мезонов в импульсном пространстве, обусловленного термодинамическим охлаждением системы,

$$I_\alpha^{ex} = \dot{f}_\alpha^{eq}. \tag{8}$$

В общем случае интегралы (5) и (6) сильно затрудняют численный анализ кинетического уравнения (7), поэтому сделаем некоторые упрощения. В области малых импульсов в выражении для потерь в σ-подсистеме (5) можно пренебречь зависимостью от импульса: $I_\sigma^{loss}(\mathbf{p}, t) \approx I_\sigma^{loss}(t)$,

$$I_\sigma^{loss}(t) = \pi \left[\frac{4p_{tr}(t)}{m_\sigma(t)}\right]^3 \Gamma_{\sigma\to\pi\pi}(p_{tr}, t)[1 + f_\pi(p_{tr}, t)]^2, \tag{9}$$

где $p_{tr}(t)$ пороговое значение для импульса π-мезонов

$$p_{tr}(t) = \sqrt{m_\sigma^2(t)/4 - m_\pi^2(t)}. \tag{10}$$

В уравнении (9) предполагается, что $f_\pi(-\mathbf{p}) = f_\pi(\mathbf{p})$ благодаря изотропии системы. Кроме того было принято во внимание, что $m_\sigma(t) = 2\,\omega_\pi(p_{tr}, t)$ и

$$\Gamma_{\sigma\to\pi\pi}(p_{tr}, t) = \Gamma_{\sigma\to\pi\pi}(\mathbf{p} = 0, \mathbf{p}_1, -\mathbf{p}_1; t)|_{|\mathbf{p}_1|=p_{tr}}. \tag{11}$$

Эта функция была вычислена в работе [10]. Теперь можно произвести упрощение и убрать зависимость от импульса в выражении для амплитуды распада, что приводит к следующей оценке:

$$\Gamma_{\sigma\to\pi\pi}(t) = 0.274\frac{p_{tr}(t)}{m_\sigma(t)}. \tag{12}$$

Аналогичные процедуры упрощения в выражении для прихода в подсистему π-мезонов (6) приводят к следующим соотношениям, справедливым в области малых импульсов:

$$I_\pi^{com}(\mathbf{p}, t) = \frac{\pi m_\sigma(t) p_{tr}(t)}{m_\pi^2(t)}\Gamma_{\sigma\to\pi\pi}(t)[1 + f_\pi(p, t)]f_\sigma(q_{tr}, t)[1 + f_\pi(q_{tr}, t)], \tag{13}$$

где

$$q_{tr}(t) = \frac{m_\sigma(t)}{m_\pi(t)}p_{tr}. \tag{14}$$

Различие в величине порогового момента (p_{tr} в уравнении (9) и уравнении (13)) обусловлено предположением, что σ-мезон в уравнении (9) и оба π-мезона, родившиеся в результате распада σ-мезона, в уравнении (13) находятся в состоянии покоя.

На рис. 1–3 представлены результаты численных расчетов временной эволюции системы π- и σ-мезонов. Рис. 1 отображает зависимость массы σ-мезонов в соответствии с моделью NJL и гидродинамическим расширением ядерного файербола в рамках решений Бьеркена. На рис. 2 показано сравнение равновесной функции распределения π-мезонов с конечным распределением, по оценкам кинетического подхода (7). На этих рисунках можно видеть существенный прирост рожденных π-мезонов в области малых импульсов. На рис. 3 представлены результаты численного моделирования решения кинетических уравнений системы мезонов $\pi - \sigma$ для различных начальных условий подсистемы σ-мезонов. На рис. 3, *а* показано различие между конечным распределением π-мезонов и равновесным распределением

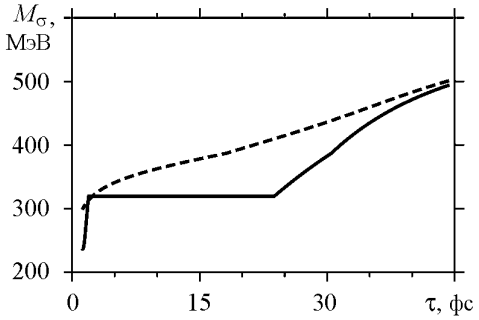


Рис. 1. Эволюция m_σ в рамках гидродинамики Бьеркена и модели NJL. Показаны два случая для фазовых переходов первого рода (сплошная линия) и второго рода (штриховая линия) [6]

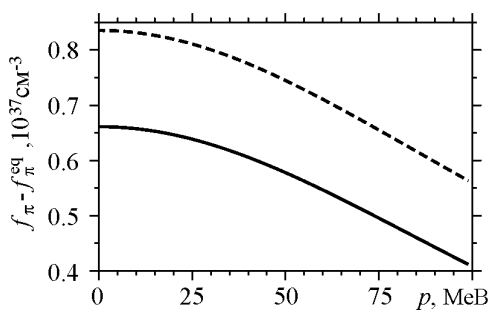


Рис. 2. Конечное распределение π-мезонов при действии инерциального механизма (штриховая линия) и начальное равновесное распределение σ-мезонов (сплошная линия)

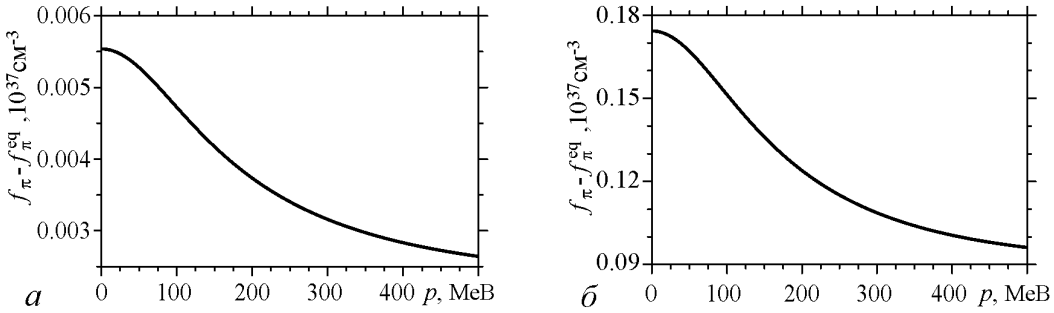


Рис. 3. Разница между конечным распределением π-мезонов и равновесным распределением Бозе–Эйнштейна, соответствующем конечной температуре системы, с нулевым начальным распределением σ-мезонов (*а*) и тепловым равновесным распределением Бозе–Эйнштейна, соответствующем начальной температуре системы (*б*)

Бозе–Эйнштейна, соответствующем конечной температуре системы, при нулевом начальном распределении σ-мезонов. На рис. 3, *б* показано различие между конечным распределением π-мезонов и равновесным распределением Бозе–Эйнштейна для начальной температуры системы σ-мезонов. Из этих рисунков видно, что полученные в работе кинетические уравнения (7) с использованием ненулевых начальных условий для подсистемы σ-мезонов демонстрируют увеличение плотности π-мезонов в области малых импульсов относительно равновесного теплового распределения, что соответствует экспериментальным данным [12].

Заключение

Полученная в работе система интегро-дифференциальных кинетических уравнений немарковского типа, описывающих процесс эволюции связанных систем π- и σ-мезонов, содержит квадратичную нелинейность по функции распределения π-мезонов. Использование гидродинамики Бьеркена и модели Nambu–Jona-Lasinio привносит дополнительные источники нелинейности. Для численного решения этой системы уравнений в работе использовался ряд упрощающих модельных предположений, не влияющих на область малых импульсов. Оценки показывают, что в результате процесса распада σ-мезонов на два π-мезона с учетом дополнительного вакуумного рождения σ-мезонов под действием инерциального механизма возможен значительный прирост плотности π-мезонов в области малых импульсов.

Таким образом, инерциальный механизм в данной системе может служить дополнительным источником наблюдаемой множественности π-мезонов в экспериментах по столкновению релятивистских ядер тяжелых элементов.

Мы благодарны Ю.А. Калиновскому за полезные обсуждения при выполнении данной работы.

Библиографический список

1. *Song Ch., Koch V.* Excess of pions with chiral symmetry restoration // Phys. Lett. B. 1997. Vol. 404. P. 1.; arXiv:nucl-th/9703010.
2. *Volkov M.K. et al.* Excess low energy photon pairs from pion annihilation at the chiral phase transition // Phys. Lett. B. 1998. Vol. 424. P. 235; arXiv:hep-ph/9706350.

3. *Weldon H.A.* Dilepton enhancement at $2m_\pi$ and chiral symmetry restoration // Phys. Lett. B. 1992. Vol. 274. P. 133.
4. *Koch V.* Aspects of chiral symmetry // Int. J. Mod. Phys. E. 1997. Vol. 6. P. 203; arXiv:hucl-th/9706075.
5. *Bjorken J.D.* Highly relativistic nucleus-nucleus collisions: The central rapidity region // Phys. Rev. D. 1983. Vol. 27. P. 140.
6. *Rehnberg P., Kalinovsky Yu. L., Blaschke D.* Critical scattering and two photon spectra for a quark-meson plasma // Nucl. Phys. A. 1997. Vol. 622. P. 478; arXiv: hep-ph/9705299.
7. *Nambu Y., Jona-Lasinio G.* Dynamical model of elementary particles based on an analogy with superconductivity. I // Phys. Rev. 1961. Vol. 122. P .345;
Nambu Y., Jona-Lasinio G. Dynamical model of elementary particles based on an analogy with superconductivity. II // Phys. Rev. 1961. Vol. 124. P. 246.
8. *Pervushin V.N. et al.* The kinetic description of vacuum particle creation in the oscillator representation // Int. J. Mod. Phys. A. 2005. Vol. 20. P. 5689; arXiv: hep-ph/0307200.
9. *Blaschke D., Prozorkevich A.V., Reichel A.V., Smolyansky S.A.* Vacuum creation of massive vector bosons and its application to a conformal cosmological model // Яд. физ. 2005. Т. 68. С. 6; arXiv:hep-ph/0411383.
10. *Klevansky S.P., Quack E., and Zhuang P.* Hadronization cross-sections at the chiral phase transition of a quark plasma // Phys. Lett. B. 1994. Vol. 337. P. 30;
Zhuang P., Huang M., and Yang Z. Thermal and nonthermal pion enhancements with chiral symmetry restoration // Phys. Rev. D. 2001. Vol. 63. P. 016004; arXiv:nucl-th/0008044.
11. *Klevansky S.P.* The Nambu–Jona-Lasinio model of quantum chromodynamics // Rev. Mod. Phys. 1992. Vol. 64. P. 649.
12. *Zhuang P.* Low-momentum pion enhancement induced by chiral symmetry restoration // Int. J. Mod. Phys. A. 2004. Vol. 19. P. 341.

Саратовский государственный университет

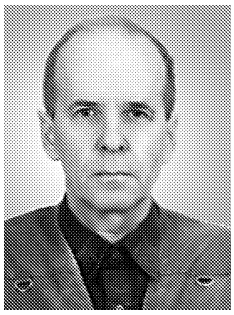
Поступила в редакцию *30.10.2007*
После доработки *12.11.2007*

KINETIC THEORY OF LOW MOMENTUM π-MESON PRODUCTION FROM QUARK CONDENSATE

D.B. Blaschke, A.V. Prozorkevich, S.A. Smolyansky and A.V. Filatov

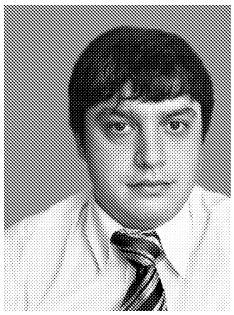
The nonlinear system of non-markovian type kinetic equations, describing the particles production with varying masses in framework of Nambu–Jona-Lasinio model is investigated for the case of π-meson production by σ-meson decay in hot and dense nuclear matter. The π-meson enhancement in a low-momentum region due to additional σ-mesons creation via intertial mechanism using the nonlinear dependence of sigmas mass from the temperature in equation of state in vicinity of $m_\sigma \approx 2m_\pi$ is calculated.

Блашке Давид Бернхард – родился в 1959 году в Гюстрове, (Германия). Окончил университет в Ростоке (1983). Защитил диссертацию на соискание звания кандидата физико-математических наук (1987) и доктора физико-математических наук («Квантовая статистика эффективных кварковых моделей адронной материи», 1995). С 1981 года член Германского физического общества, с 1990 – член Европейского физического общества, с 1995 – член Европейского центра теоретических исследований в ядерной физике и связанных областях (Тренто, Италия). Работает в университете Вроцлава (Польша). Опубликовал более 60 научных работ, редактор двух книг: «Understanding Deconfinement in QCD» (World Scientific, Singapore, 2000), «Physics of Neutrons Star Interiors» (Springer, Heidelberg, 2001).



Прозоркевич Александр Васильевич – родился в 1947 году в Калининграде. В 1970 году закончил физический факультет Саратовского государственного университета (кафедра теоретической физики). В 1981 году защитил кандидатскую диссертацию. Работает доцентом кафедры теоретической и математической физики СГУ.

Смолянский Станислав Александрович – родился в 1936 году в Саратове. Окончил Саратовский государственный университет (1960). После окончания СГУ работал в Физико-энергетическом институте Обнинска, а с 1963 года – в СГУ. Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук в СГУ (1971) и доктора физико-математических наук в ИТФ (Киев, 1988) в области релятивистской кинетики и гидродинамики с приложениями в области экстремальных состояний вещества. Автор монографии «Введение в релятивистскую статистическую гидродинамику нормальной жидкости» (в соавторстве с А.Д. Панферовым). Опубликовал около 150 научных работ. Заведующий кафедрой теоретической и математической физики СГУ.



Филатов Андрей Викторович – родился в 1982 году в Саратове. Окончил факультет нелинейных процессов Саратовского государственного университета (2004). Аспирант кафедры теоретической и математической физики СГУ.

Прикладные задачи нелинейной теории колебаний и волн

Изв. вузов «ПНД», т. 15, № 6, 2007 УДК 577.3.08

ИЗМЕНЕНИЕ ПАРАМЕТРОВ КОЛЕБАТЕЛЬНЫХ ДВИЖЕНИЙ ГЛАЗНОГО ЯБЛОКА В РЕЗУЛЬТАТЕ ПЕРИОДИЧЕСКОГО СВЕТОВОГО ВОЗДЕЙСТВИЯ ПРИ СЛОЖНОМ ХАРАКТЕРЕ НИСТАГМА

Д.А. Усанов, Т.П. Кащенко, А.В. Скрипаль, И.Э. Рабичев, Т.Б. Усанова, Е.И. Ячменева, А.М. Горшков, Г.Л. Губкина

Исследуются сложные колебательные движения глаз при нистагме. Анализируется характер их изменений при периодическом световом воздействии. Установлено, что при наличии сразу обеих соизмеримых по величине составляющих движения (вертикальной и горизонтальной) может наблюдаться одновременное уменьшение амплитуд обеих составляющих или преимущественное подавление одной из составляющих движения при сравнительно небольшом изменении другой.

Введение

Согласно определению, нистагм – быстрые непроизвольные колебательные движения глаз. Выделяют несколько типов нистагма, в частности: толчкообразный, маятникообразный, ротаторный. Толчкообразный и маятникообразный нистагм характеризуются движением глазного яблока преимущественно вдоль одной координаты (горизонтальный или вертикальный нистагм). В случае ротаторного нистагма движение глазного яблока осуществляется различными группами мышц, ответственными за движение по горизонтали и вертикали. Для анализа наиболее сложным является ротаторный тип нистагма.

На практике для лечения нистагма используют хирургический метод. Суть метода заключается в проведении резекции (иссечении переднего отрезка брюшка) глазодвигательных мышц, содержащих мышечные веретена. Удаление мышечных веретен позволяет уменьшить нервно-импульсное воздействие на мышцу и, соответственно, амплитуду нистагма.

В работах [1–2] сообщалось о возможности частичного или даже полного подавления нистагма при периодическом световом воздействии. Частота и интенсивность светового воздействия, при которых максимальным образом проявлялся этот эффект, подбирались для каждого пациента индивидуально. Наблюдающийся эффект может быть объяснен тем, что патологический сигнал, управляющий движением глазодвигательных мышц, как бы «подавляется» в результате периодического светового воздействия.

Примеры успешной экспериментальной реализации этой идеи были описаны в работах [2, 4, 5] для наиболее распространенных типов нистагма: толчкообразного и маятникообразного. Сеанс светового воздействия с целью лечения проводился в течение 5–7 минут. Подбор частоты светового воздействия осуществлялся перед каждым сеансом. Процедуры проводились ежедневно в течение 10 дней. Курсы лечения повторялись через 3–6 месяцев.

Подавление нистагма у различных пациентов после однократного сеанса сохранялось различное время (от нескольких секунд до нескольких минут), после чего восстановление нистагма обычно происходило до значений амплитуд меньших, чем перед началом сеанса. Результатом повторного проведения процедур было дальнейшее уменьшение амплитуд нистагма и увеличение времени сохранения эффекта подавления.

Предложенный способ лечения нистагма глаз запатентован [6]. Его применение в практике осуществляется в клинике глазных болезней Саратовского государственного медицинского университета, в Московском НИИ глазных болезней им. Гельмгольца, на кафедре глазных болезней Курского государственного медицинского университета [7–9].

К настоящему времени проведено лечение 36 больных в возрасте от 5 до 14 лет с различным видом нистагма. Из них у 22 пациентов нистагм был толчкообразным, у 9 пациентов – маятникообразным, у 5 – ротаторным. У 30 наблюдавшихся пациентов проявлялся эффект подавления нистагма, при этом уменьшение амплитуды нистагма происходило в 1.2÷1.6 раз. У 19 пациентов острота зрения увеличилась в среднем на 0.1. Отдаленные результаты прослежены у 5 детей. Повторный курс воздействия проводился примерно через 6 месяцев. У 3 пациентов эффект продержался до второго курса; у 2 – примерно 3 месяца. У пациентов с ротаторным нистагмом эффект периодического светового воздействия имел свою специфику.

1. Метод изменения параметров колебательных движений глазного яблока

Патологическое колебательное движение глазного яблока обусловлено поступающим на двигательные мышцы возбуждающим их электрическим сигналом. Исходя из предположения о возможности преобразования света в электрический сигнал, способный подавить сигнал патологического возбуждения, нами было предложено использование светового воздействия на специально подбираемой для каждого пациента частоте.

Как отмечалось выше, в случае ротаторного нистагма движение глазного яблока осуществляется различными группами мышц, ответственными за движение по горизонтали и вертикали [3]. Управление этими группами мышц электрическим сигналом, поступающим от мозга, может осуществляться раздельно. Отсюда могут быть различными и характеристики колебательных движений по горизонтали и вертикали. Поэтому выбор параметров светового воздействия, оптимальных для подавления колебательных движений в горизонтальной плоскости, может оказаться совершенно неприемлемым для подавления колебаний в вертикальной плоскости и наоборот. Ясно, что для рассмотрения движений глазного яблока при ротаторном нистагме необходимо анализировать горизонтальную и вертикальную составляющие движения на нистагмограммах пациентов одновременно.

В большинстве наблюдавшихся случаев движение левого и правого глаз происходит с высокой степенью синхронности. Асинхронность движения глаз может быть связана со сложной неврологической симптоматикой и, тем самым, послужить диагностическим основанием для ее исследования.

Кроме того, нам удалось выяснить, что во время лечебного сеанса нередко происходит изменение колебательных параметров движения глазного яблока. Возможно, при сложном характере нистагма в течении всего лечебного сеанса необходимо проводить корректировку частоты светового воздействия.

Для ротаторного типа нистагма предлагаемый нами метод лечения включал: регистрацию нистагмограммы, внешнее периодическое световое воздействие, изменение частоты светового воздействия, непрерывную регистрацию колебательных параметров движения глаз, непрерывный подбор частоты светового воздействия, при котором происходит уменьшение как горизонтальной, так и вертикальной составляющих движения глаз.

2. Экспериментальная установка для анализа движения глаз при нистагме при наличии внешнего светового воздействия

Для регистрации движений глаз при нистагме использовалась установка, включающая видеоокулограф, схема которой приведена на рис. 1. Одним из основных компонентов установки является генератор импульсов *1* регулируемой частоты, предназначенный для управления световым воздействием. В состав видеоокулографа входит цифровая видеокамера *5*, регистрирующая угловое смещение глаз пациента *2* в глазницах. Голова пациента фиксировалась в специальном держателе *3* для обеспечения неподвижности видеокамеры относительно глазницы. С двух сторон от глаз обследуемого на расстоянии 50 см под углом 45° от линии взора (по горизонтали к нормалям глазных яблок) устанавливали два источника света *4* (60-ватные лампы накаливания), которые выступали в роли раздражителя зрительной системы.

Видеоизображение движущегося глаза вводилось в персональный компьютер *6* через USB порт и анализировалось с помощью специально разработанной программы. Изображение вводилось со скоростью 25 кадров в секунду в формате AVI. Про-

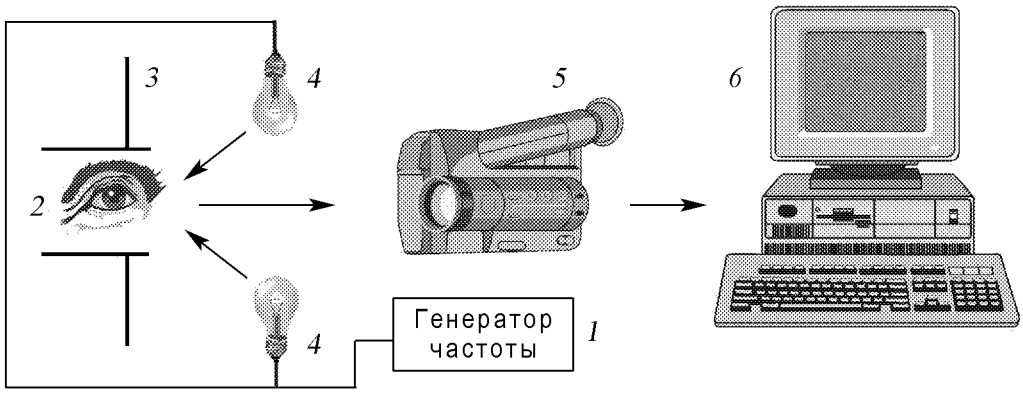


Рис. 1. Схема установки для регистрации колебаний глаз: *1* – генератор регулируемой частоты; *2* – глаз пациента; *3* – держатель головы пациента; *4* – лампы накаливания; *5* – цифровая видеокамера; *6* – компьютер

граммная часть состояла из специализированной программы eyemotion.exe, функционирующей в среде Windows XP и осуществляющей анализ введенного изображения в формате AVI. С помощью этой программы определялось положение центра зрачка глаза и осуществлялась запись и спектральный анализ траектории его движения. Результаты анализа сохранялись на носителе информации.

3. Регистрация изменения параметров колебательных движений глазного яблока при подавлении сложного вида нистагма глаз внешним световым воздействием

Исследовался наиболее сложный вид нистагма – ротаторный. Наблюдались 3 пациента детского возраста с таким видом нистагма. Сравнительно малое число обследованных пациентов объясняется тем, что данный вид нистагма встречается сравнительно редко.

«Пациент А», диагноз: ротаторный нистагм, частичная атрофия зрительного нерва обоих глаз, содружественное сходящееся косоглазие. В ходе исследования пациента при отсутствии внешнего светового воздействия среднеквадратическое отклонение амплитуды колебаний в горизонтальной плоскости у правого глаза составляло $X_R = 0.36$ мм, у левого глаза – $X_L = 0.38$ мм (рис. 2, *а*); соответственно

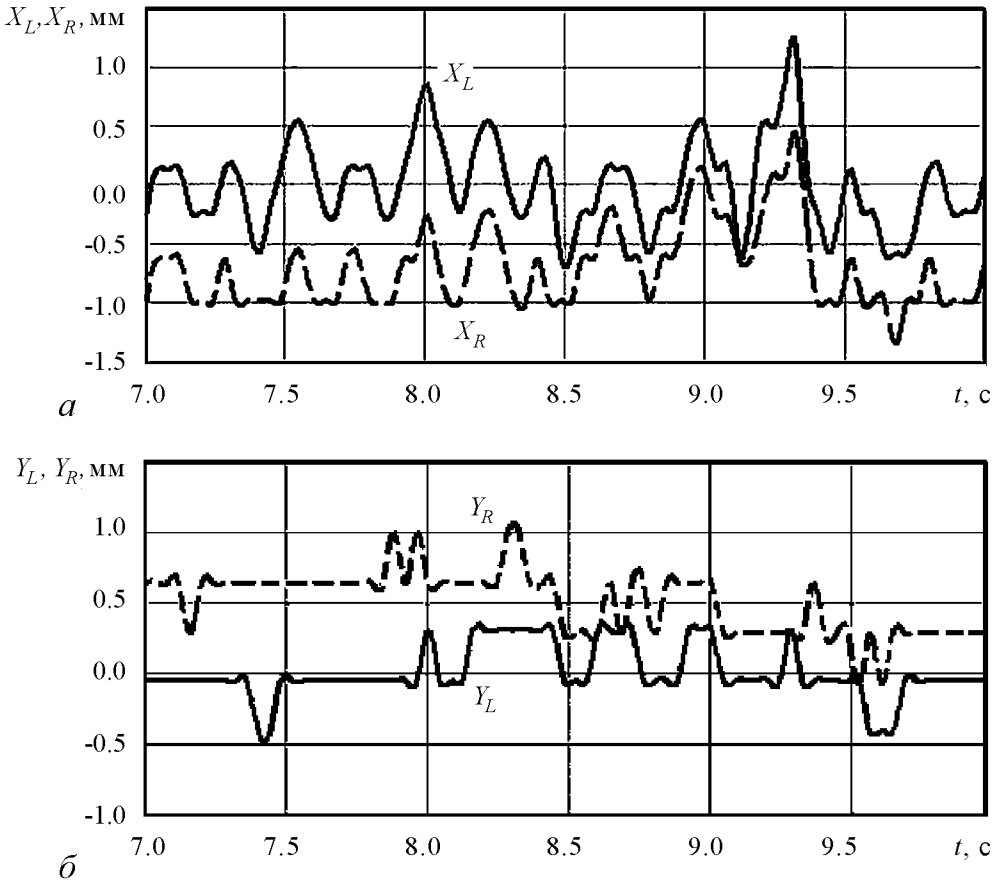


Рис. 2. Фрагмент нистагмограммы «пациента А» в отсутствие периодического светового воздействия: *а* – колебания в горизонтальной плоскости; *б* – колебания в вертикальной плоскости

в вертикальной плоскости – $Y_R = 0.23$ мм, $Y_L = 0.19$ мм (рис. 2, *б*). Частота колебаний в горизонтальной плоскости составляла в среднем 5 Гц; в вертикальной плоскости наблюдались колебания с частотой около 10 Гц.

При частоте внешнего светового воздействия 2 Гц у «пациента А» наблюдалось изменение характера колебаний глаз, а именно: уменьшение амплитуды колебаний как в горизонтальной, так и в вертикальной плоскостях (рис. 3). Так, среднеквадратические отклонения амплитуд колебаний в горизонтальной плоскости стали равны $X_R = 0.18$ мм, $X_L = 0.23$ мм (рис. 3, *а*); в вертикальной плоскости среднеквадратические отклонения амплитуд колебаний стали, примерно, одинаковыми $Y_R \approx Y_L \approx 0.1$ мм (рис. 3, *б*). Отметим, что частота колебаний в горизонтальной плоскости при этом практически не изменилась (около 5 Гц). Такой результат светового воздействия может свидетельствовать о том, что для эффективного подавления колебаний в горизонтальной плоскости, возможно, требуется одновременно воздействие светом большей интенсивности и индивидуальный подбор частоты воздействия. Следует отметить, что в данном случае наблюдался ряд интересных подробностей, таких как несовпадение характера движения правого и левого глаза в вертикальной плоскости (см. рис. 2, *б*) и разный период колебаний правого и левого глаза в горизонтальном направлении (см. рис. 3, *а*). Такие особенности нистагмограмм могут быть связаны с наличием косоглазия у пациента, что, безусловно, имеет важное диагностическое значение.

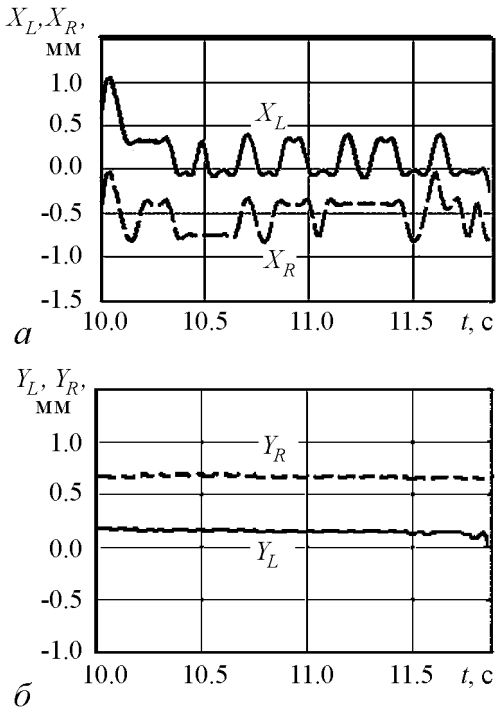


Рис. 3. Фрагмент нистагмограммы «пациента А» при частоте светового воздействия 2 Гц: *а* – колебания в горизонтальной плоскости; *б* – колебания в вертикальной плоскости

«Пациент Б», диагноз: врожденный ротаторный нистагм, смешанный астигматизм. При отсутствии внешнего светового воздействия получены нистагмограммы, которые приведены на рис. 4. Среднеквадратические отклонения амплитуд колебаний в горизонтальной плоскости составляли $X_R \approx X_L \approx 0.3$ мм, а частота 7.5 Гц (рис. 4, *а*); в вертикальной плоскости наблюдались, соответственно, колебания со среднеквадратическими отклонениями амплитуд $Y_R = 0.36$ мм и $Y_L = 0.35$ мм.

При наличии внешнего светового воздействия (частота светового воздействия 4 Гц) у данного пациента амплитуда и частота колебаний глаз в горизонтальной плоскости не изменилась (рис. 5, *а*). Однако характер вертикальных колебаний глаз пациента изменился (рис. 5, *б*): колебания потеряли скачкообразный характер, амплитуда колебаний в вертикальной плоскости снизилась в среднем до уровня $Y = 0.21$ мм.

На рис. 6 приведены траектории движения глаз «пациента Б» в отсутствие внешнего светового воздействия (*а*) и при изменении амплитуды нистагма глаз в

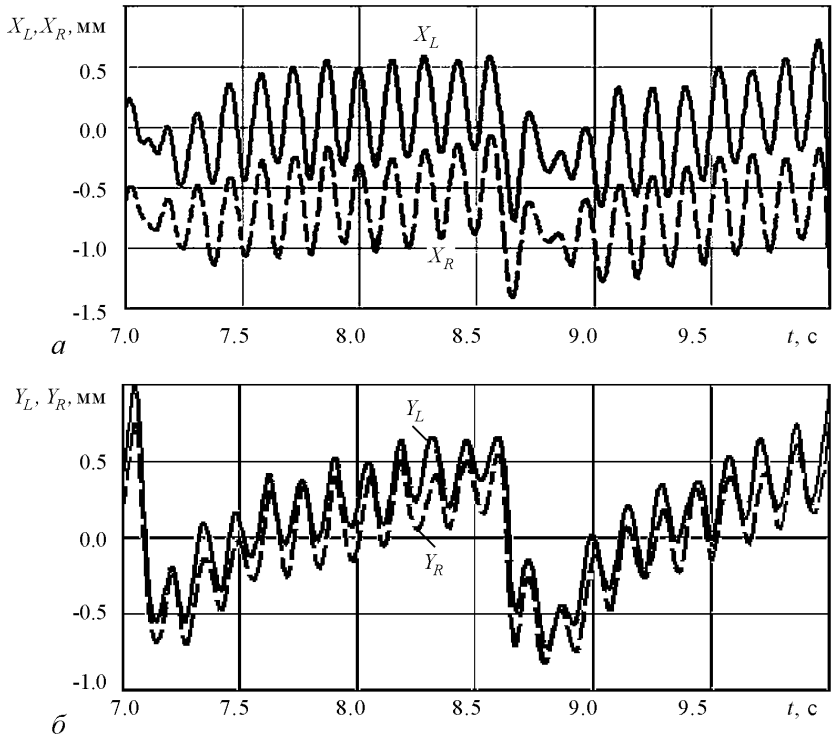


Рис. 4. Фрагмент нистагмограммы «пациента Б» в отсутствие внешнего светового воздействия: *а* – колебания в горизонтальной плоскости; *б* – колебания в вертикальной плоскости

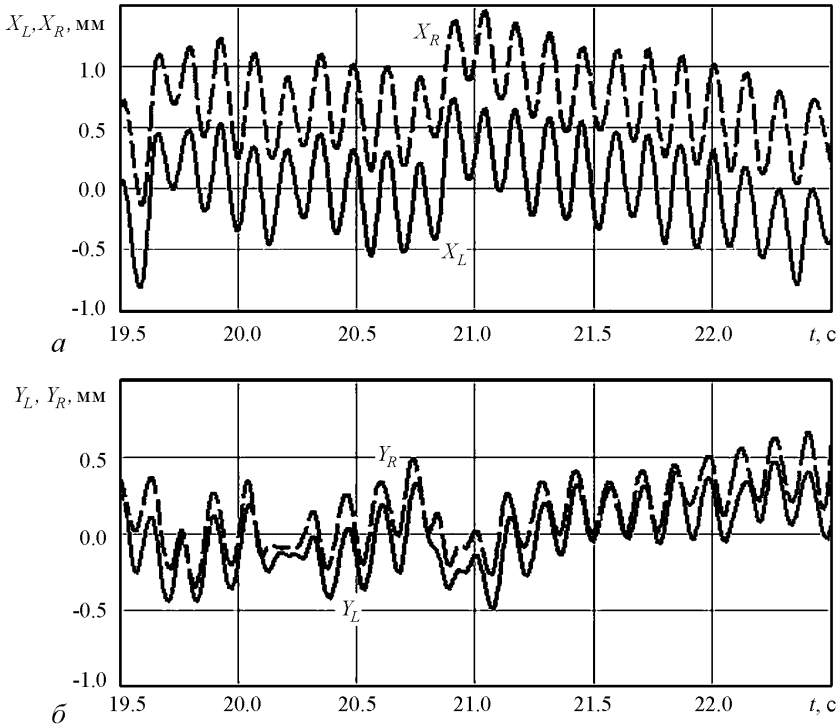


Рис. 5. Фрагмент нистагмограммы «пациента Б» при периодическом внешнем световом воздействии с частотой 4 Гц: *а* – колебания в горизонтальной плоскости; *б* – колебания в вертикальной плоскости

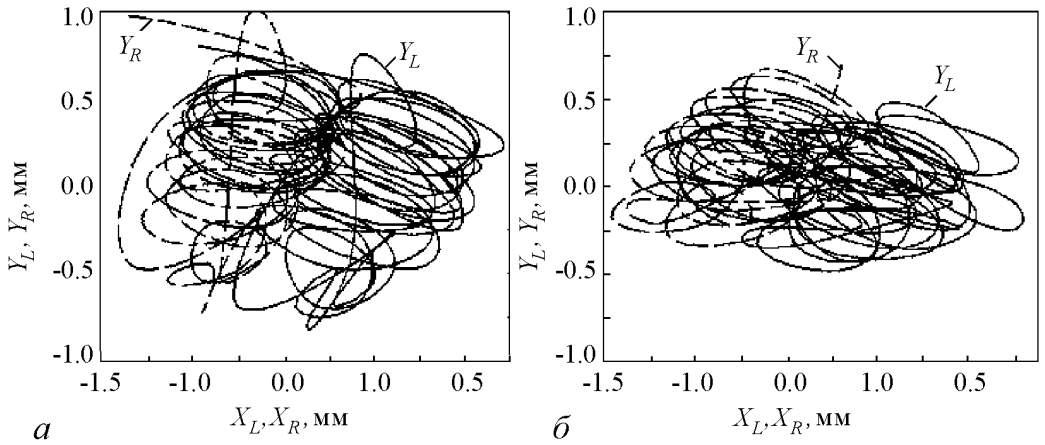


Рис. 6. Траектории движения глаз «пациента Б»: *а* – в отсутствие внешнего светового воздействия; *б* – при периодическом внешнем световом воздействии с частотой 4 Гц

процессе внешнего светового воздействия (*б*), наглядно иллюстрирующие характер изменения нистагма.

«Пациент В», диагноз: врожденный ротаторный нистагм, смешанный астигматизм. При исследовании среднеквадратические отклонения амплитуд колебаний в горизонтальном направлении составляли $X_R = 0.52$ мм, $X_L = 0.57$ мм (рис. 7, *а*); в вертикальном направлении колебания глаз были существенно меньше, соответственно, $Y_R = 0.12$ мм, $Y_L = 0.13$ мм (рис. 7, *б*).

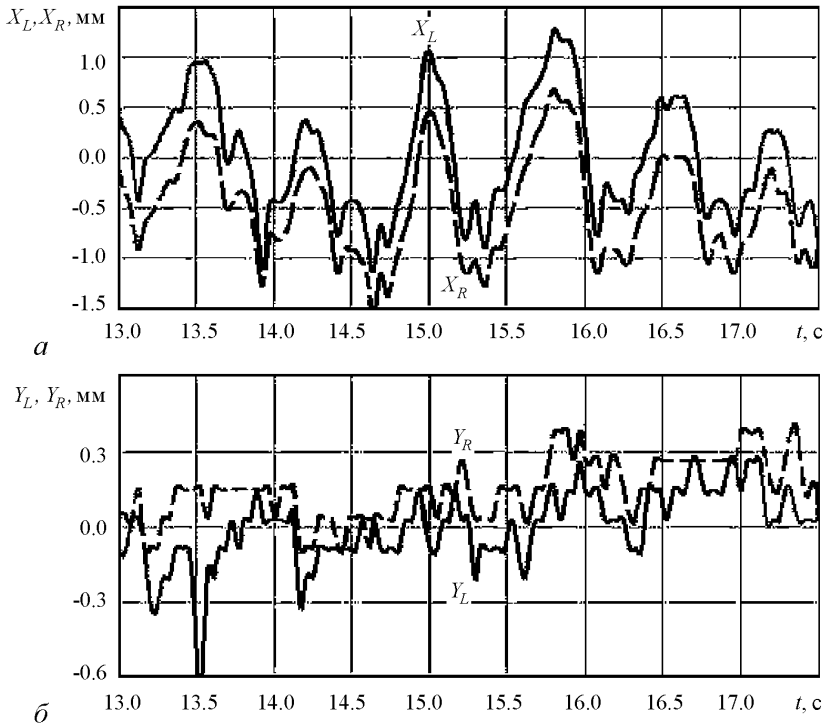


Рис. 7. Фрагмент нистагмограммы «пациента В» в отсутствие внешнего светового воздействия: *а* – колебания в горизонтальной плоскости; *б* – колебания в вертикальной плоскости

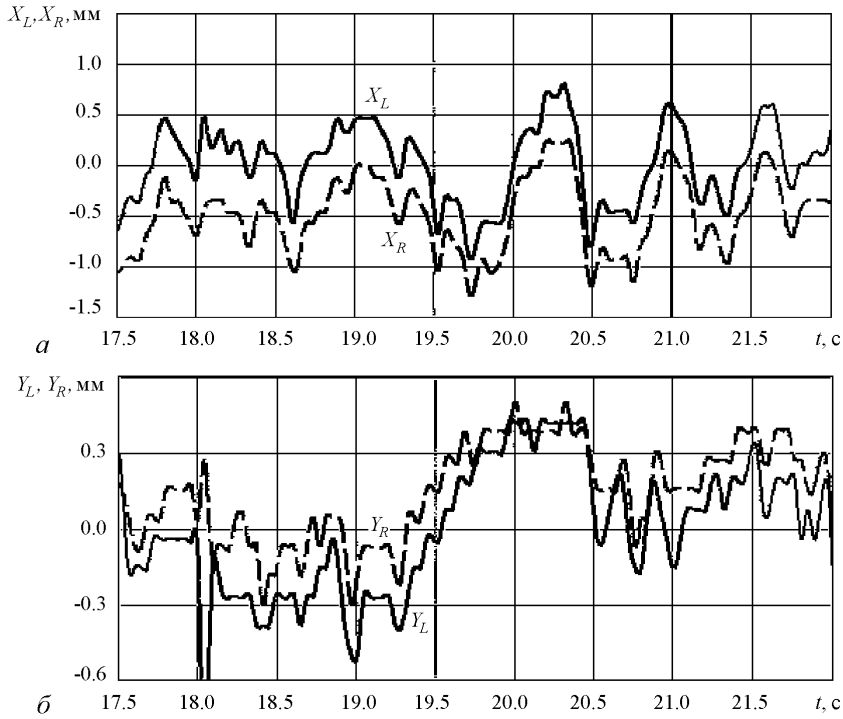


Рис. 8. Фрагмент нистагмограммы «пациента В» левого и правого глаза при внешнем световом воздействии с частотой 5 Гц: *а* – колебания в горизонтальной плоскости; *б* – колебания в вертикальной плоскости

При наличии внешнего светового воздействия с частотой 5 Гц у «пациента В» среднеквадратические отклонения амплитуд колебаний в горизонтальном направлении снизились до значений $X_R = 0.36$ и $X_L = 0.38$ (рис. 8, *а*); в вертикальном направлении среднеквадратические отклонения амплитуд колебаний, наоборот, увеличились и составили величины $Y_R = 0.2$ мм, $Y_L = 0.26$ мм (рис. 8, *б*).

Изменение соотношения горизонтальной и вертикальной составляющей траектории движения глаз при внешнем световом воздействии у «пациента В» иллюстрируется данными, приведенными на рис. 9.

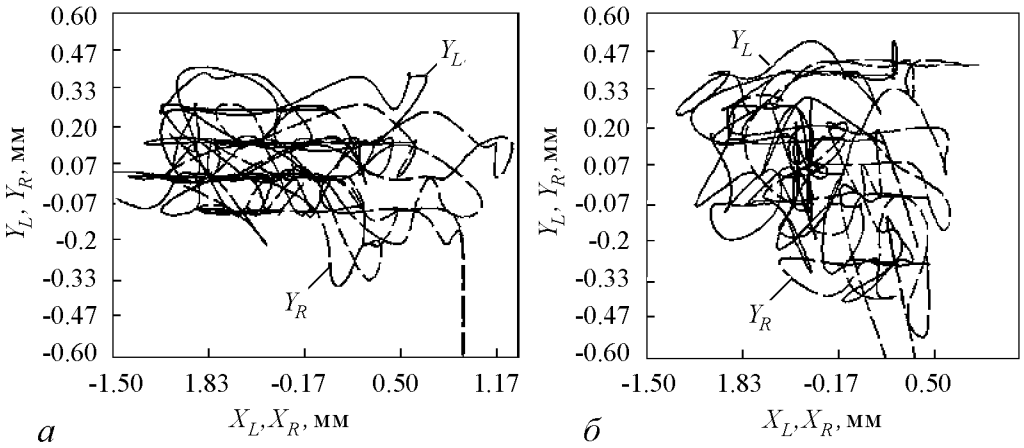


Рис. 9. Траектории движения глаз «пациента В»: *а* – в отсутствие внешнего светового воздействия; *б* – при внешнем световом воздействии с частотой 5 Гц

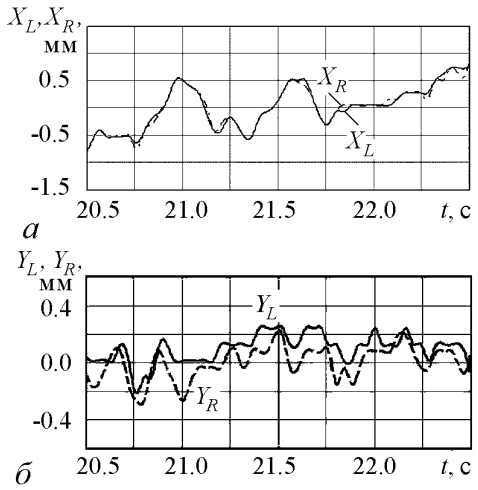


Рис. 10. Фрагмент нистагмограммы «пациента В» левого и правого глаза при внешнем световом воздействии с частотой 6 Гц: *а* – колебания в горизонтальной плоскости; *б* – колебания в вертикальной плоскости

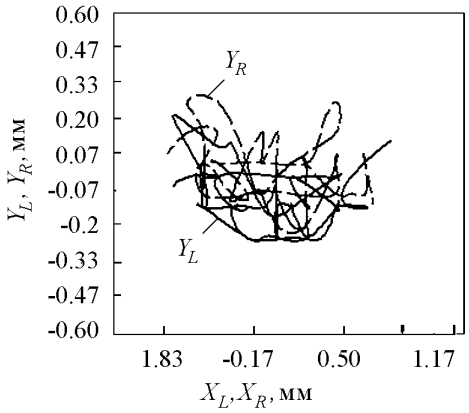


Рис. 11. Траектории движения глаз «пациента В» при внешнем световом воздействии с частотой 6 Гц

Дальнейшие исследования показали, что подбором частоты внешнего светового воздействия можно достичь уменьшения амплитуды нистагма как горизонтальной, так и вертикальной составляющих и в этом случае. В частности, обнаружено, что если для «пациента В» после светового воздействия с частотой 5 Гц повысить частоту до 6 Гц, то наблюдается уменьшение амплитуд как горизонтальной, так и вертикальной составляющих. На рис. 10 приведен фрагмент нистагмограммы «пациента В» при частоте внешнего светового воздействия 6 Гц, на рис. 11 – траектории движения глаз. Как видно из приведенных графиков (ср. рис. 9 и 11), при частоте внешнего воздействия 6 Гц наблюдается уменьшение амплитуды горизонтальной составляющей на 30% и вертикальной составляющей на 28%.

Заключение

Таким образом, установлено, что у пациентов с ротаторным нистагмом, при котором имеются в наличии одновременно как горизонтальная, так и вертикальная составляющие движения, может наблюдаться как одновременное уменьшение амплитуд горизонтальной и вертикальной составляющих колебаний, так и преимущественное подавление одной из составляющих движения при сравнительно небольшом изменении другой.

Показано, что во время лечебного сеанса нередко происходит изменение колебательных параметров движения глазного яблока. Для ротаторного типа нистагма подбор частоты светового воздействия необходимо проводить в течение всего лечебного сеанса.

Приведенные в настоящей работе результаты способствуют выработке рекомендаций по расширению группы больных, для которых имеет перспективу применение предложенной методики.

Библиографический список

1. *Усанова Т.Б., Скрипаль А.В., Усанов Д.А., Абрамов А.В.* Видеотехнология количественного контроля движения глазного яблока при нистагме // Вестник офтальмологии. 2002. № 4. С. 38.
2. *Усанов Д.А., Скрипаль А.В., Усанова Т.Б., Рытик А.П.* Изменение характера сердечной деятельности при подавлении нистагма в процессе светового воздействия // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2006. Т. 14, № 6. С. 54.
3. *Гиппенрейтер Ю.Б.* Движения человеческого глаза. М.: Изд-во Моск. ун-та., 1978. 256 с.
4. *Усанов Д.А., Кащенко Т.П., Скрипаль А.В., Рабичев И.Э., Усанова Т.Б., Абрамов А.В., Ячменева Е.И., Губкина Г.Л.* Влияние периодических световых воздействий на параметры нистагма глаз // Вестник офтальмологии. 2004. № 5. С. 42.
5. *Усанов Д.А., Кащенко Т.П., Скрипаль А.В., Рабичев И.Э., Усанова Т.Б., Абрамов А.В., Ячменева Е.И., Губкина Г.Л.* Эффект уменьшения амплитуды нистагма у детей при периодическом световом воздействии // Вестник офтальмологии. 2006. № 5. С. 21.
6. Патент РФ № 2288676. Способ лечения нистагма глаз / Усанов Д.А., Кащенко Т.П., Скрипаль А.В., Рабичев И.Э., Усанова Т.Б., Ячменева Е.И., Абрамов А.В., Губкина Г.Л. Опубл. 10.12.2006. Бюл. № 34.
7. *Усанов Д.А., Кащенко Т.П., Скрипаль А.В., Усанова Т.Б., Ячменева Е.И., Аклаева Н.А., Рабичев И.Э., Губкина Г.Л., Ларина Т.Ю.* Возможности метода периодических световых воздействий при лечении оптического нистагма // Труды межд. конф. «Рефракционные и глазодвигательные нарушения», Москва 25–26 сентября 2007. М.: Изд-во «ФГУ Московский НИИ глазных болезней им. Гельмгольца», 2007. С. 71.
8. *Кащенко Т.П.* О тенденциях развития идей Э.С. Аветисова в исследовании бинокулярной зрительной системы в норме и патологии // Труды межд. конф. «Рефракционные и глазодвигательные нарушения», Москва 25–26 сентября 2007 М.: Изд-во «ФГУ Московский НИИ глазных болезней им. Гельмгольца», 2007. С. 33.9–33.14.
9. *Баранов В.И., Землянских Л.Г., Брежнев А.Ю., Иваненко И.Ю.* Клиническая эффективность биоуправляемой светостимуляции в лечении врожденного нистагма у детей // Труды межд. конф. «Рефракционные и глазодвигательные нарушения», Москва 25–26 сентября 2007 М.: Изд-во «ФГУ Московский НИИ глазных болезней им. Гельмгольца», 2007. С. 16.

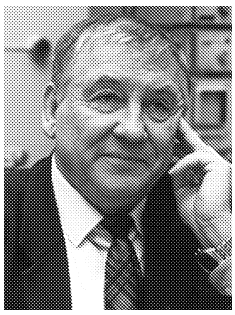
Саратовский государственный университет
Московский НИИ глазных болезней им. Гельмгольца
Саратовский государственный медицинский университет

Поступила в редакцию *25.07.2007*
После доработки *12.11.2007*

CHANGE OF PARAMETERS OF FLUCTUATING MOTIONS OF EYEBALL AS A RESULT OF PERIODIC LIGHT INFLUENCE AT DIFFICULT CHARACTER OF NISTAGM

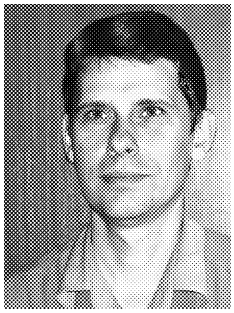
D.A. Usanov, T.P. Kashenko, A.V. Skripal, I.E. Rabichev,
T.B. Usanova, I.E. Yachmeneva, A.M Gorshkov., G.L. Gubkina

The complex oscillatory movements of eyes at nistagm are investigated. The results of analysis of difficult fluctuating motions of eyes at nistagm and character of changes at periodic light influence are resulted. The type of nistagm for patients, at which present simultaneously both horizontal and vertical motions, it's described.

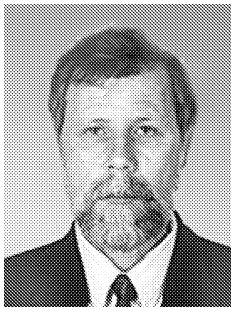


Усанов Дмитрий Александрович – родился в 1943 году, доктор физико-математических наук, профессор, проректор по НИР СГУ, заведующий кафедрой физики твердого тела, академик МАН ВШ, РАЕН. Область научных интересов: твердотельная, микро- и наноэлектроника, радиофизика, медицинская физика. Опубликовал более 200 статей по указанным выше направлениям.

Кащенко Тамара Павловна – родилась в 1938 году, доктор медицинских наук, профессор, окончила 1-й Московский медицинский институт им. Сеченова (1957). Защитила докторскую диссертацию (1979) по патологии бинокулярного зрения. Член редколлегии Российского Педиатрического журнала. Область научных интересов: офтальмология, физиология зрения. Опубликовано более 120 работ по указанным выше направлениям.



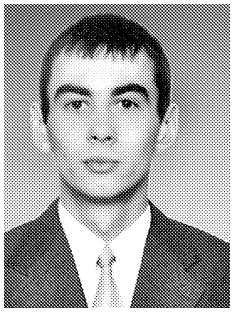
Скрипаль Анатолий Владимирович – родился в 1960 году, доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой медицинской физики СГУ. Область научных интересов: биомедицинская физика, лазерная физика, физика магнитных жидкостей, нанотехнологии. Опубликовал более 100 статей по указанным выше направлениям.



Рабичев Игорь Энгелевич – родился в Иркутске (1953). Окончил Иркутский государственный университет (1975). Биолог, преподаватель биологии химии. Работал в Иркутском государственном университете. Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата биологических наук (1984) в области физиологии зрения и диссертацию на соискание ученой степени доктора биологических наук (1998) в области физиологии и патологии зрения по специальностям нормальная физиология зрения и глазные болезни. Один из авторов монографии «Информационные модели функциональных систем» (под общей редакцией проф. К.В. Судакова и проф. А.А. Гусарова. М.: Фонд «Новое тысячелетие», 2004. 304 с.). Имеет 97 научных публикаций.

Усанова Татьяна Борисовна – родилась в 1947 году, кандидат медицинских наук, врач высшей категории Клиники глазных болезней Саратовского государственного медицинского университета. Область научных интересов: офтальмология, медицинская физика. Имеет более 20 работ по офтальмологии.

Ячменева Елена Ивановна – родилась в 1956 году. Окончила 1-й Московский медицинский институт им. Сеченова (1983). Защитила кандидатскую диссертацию (1994) по глазодвигательной патологии. Область научных интересов: офтальмология, физиология зрения. Имеет более 50 работ по указанным выше направлениям.



Горшков Александр Михайлович – родился в 1983 году в Саратове, окончил физический факультет Саратовского государственного университета им. Н.Г. Чернышевского (2005). Аспирант кафедры физики твердого тела физического факультета СГУ. Имеет ряд статей по компьютерной диагностики и лечению нистагма глаз. Область научных интересов - медицинская физика.

Губкина Галина Леонидовна – родилась в 1959 году, кандидат медицинских наук, окончила Хабаровский медицинский институт. Защитила кандидатскую диссертацию (1993) по лазерной стимуляции при миопии. Область научных интересов: близорукость, физиология зрения. Имеет более 40 работ по указанным выше направлениям.

Изв. вузов «ПНД», т. 15, № 6, 2007 УДК 530.182

ДИСКРЕТНЫЕ БРИЗЕРЫ В НЕЛИНЕЙНЫХ МОНОАТОМНЫХ ЦЕПОЧКАХ

П.П. Гончаров, Г.С. Джелаухова, Г.М. Чечин

Проведено сравнительное исследование устойчивости симметричных и антисимметричных дискретных бризеров в моноатомной цепочке с потенциалом, представляющим собой однородную функцию четвертой степени. Показано, что изменения характера устойчивости этих двух динамических объектов (известных в литературе под названием мод Сиверса–Такено и Пейджа, соответственно) происходят при одном и том же значении силы межчастичного взаимодействия по отношению к силе локального взаимодействия частиц с узлами решетки. Предложен новый метод (метод «парной синхронизации») построения точных дискретных бризеров в нелинейных гамильтоновых решетках, имеющий ясный физический смысл. Техника его применения продемонстрирована на примере цепочки линейно связанных осцилляторов Дуффинга. Кратко обсуждается концепция квазибризеров, возникающих при малых возмущениях точных бризерных решений.

Введение

Дискретные бризеры представляют собой локализованные в пространстве и периодические во времени колебания нелинейных однородных (без примесей) гамильтоновых решеток [1, 2]. Со времени их открытия в 1988 году [3] исследованию этих динамических объектов было посвящено огромное количество теоретических, вычислительных и экспериментальных работ (см., например, обзорные статьи [1, 2, 4, 5] и содержащиеся в них ссылки на оригинальные работы).

Принято считать, что дискретные бризеры могут играть существенную роль в динамических процессах, протекающих во многих физических и биофизических системах. В качестве примера можно сослаться на некоторые квазиодномерные кристаллы типа PtCl, антиферромагнетики, массивы контактов Джозефсона, волоконные световоды, различные микромеханические системы, биополимеры и т.д. Полные ссылки на соответствующие работы можно найти в [4, 6, 7].

Сама по себе возможность существования дискретных бризеров не является слишком очевидной. Действительно, в силу пространственной локализации, частицы, участвующие в бризерном колебании, имеют существенно *различные амплитуды*. С другой стороны, для нелинейной динамики типичным является то, что частицы, колеблющиеся с различными амплитудами, имеют *разные частоты* (подробное обсуждение этого вопроса имеется в работе [8]), в то время как, по определению, дискретный бризер является *периодическим* динамическим объектом[1]. Тем не менее в ряде теоретических работ [9, 10] были даны строгие математические доказательства существования дискретных бризеров в нескольких достаточно широких классах динамических моделей. Более того, были развиты и специальные вычислительные схемы построения бризерных решений со сколь угодно высокой степенью точности [5, 11].

Тем не менее, существование локализованных в пространстве и в то же время периодических во времени решений является, с нашей точки зрения, весьма исключительным явлением [8]. Действительно, для построения таких решений в многомерном пространстве всех возможных начальных условий необходимо попасть *точно* на некоторое, чаще всего *одномерное*, многообразие, что не представляется возможным ни в одном физическом эксперименте.

В работе [8] нами был проанализирован ряд динамических объектов, обычно трактуемых в литературе как дискретные бризеры, и выяснено, что на самом деле различные частицы цепочки имеют при этом близкие, но все-таки *различные*, частоты колебаний, причем такое различие заведомо превышает возможные вычислительные ошибки. В связи с этим в [8] было введено понятие «квазибризеров» – локализованных в пространстве, но не строго периодических, динамических объектов. В этой же работе нами было исследовано существование и устойчивость бризеров и квазибризеров в цепочке типа K_4, для которой можно получить ряд точных аналитических результатов. Однако в [8] был исследован лишь один из возможных видов дискретных бризеров («симметричный» бризер), который в литературе часто называют модой Сиверса–Такено. В настоящей работе для цепочки K_4 проведено исследование существования и устойчивости «антисимметричного» бризера (моды Пейджа). Получены диаграммы, из которых видна зависимость устойчивости бризеров обоих вышеуказанных типов от силы межчастичного взаимодействия по отношению к силе взаимодействия частиц с узлами решетки.

Дискретные бризеры на решетке с однородным потенциалом, каковой является цепочка K_4-типа, представляют собой локализованные моды Розенберга [12]. В более общем случае, когда потенциал не является однородной функцией и моды Розенберга, вообще говоря, не существуют, *точные* дискретные бризеры все-таки могут существовать.

В настоящей работе нами развит достаточно общий метод численного построения бризерных решений с любой степенью точности, который существенным образом отличается от известных методов [5, 10, 11] и является, с нашей точки зрения, более простым и физически более прозрачным. В то же время этот метод проливает вполне определенный свет на физическую причину возможности существования дискретных бризеров. Этот вопрос будет рассмотрен в отдельной статье.

[1] В ряде работ встречается более вольное толкование термина «дискретные бризеры». Этим термином иногда называют локализованные в пространстве динамические объекты, которые при детальном исследовании оказываются лишь приближенно периодическими [8].

1. Простейшие дискретные бризеры в цепочке типа K_4

1.1. Модель. Будем рассматривать *продольные* колебания в цепочке, состоящей из N одинаковых частиц (атомов), расположенных в состоянии равновесия на равных расстояниях друг от друга. Обозначим через $x_n(t)$ смещение n-ой частицы из своего равновесного положения в момент времени t.

Потенциальная энергия U цепочки типа K_4 определяется формулой

$$U(x_1, x_2, ..., x_N) = \frac{\alpha}{4}\sum_n x_n^4 + \frac{\beta}{4}\sum_n (x_n - x_{n-1})^4, \tag{1}$$

в силу чего соответствующие динамические уравнения $\ddot{x} = -\partial U/\partial x_n \quad (n = 1..N)$ имеют следующий явный вид:

$$\ddot{x}_n + \alpha x_n^3 + \beta[(x_{n+1} - x_n)^3 - (x_n - x_{n-1})^3] = 0. \tag{2}$$

Не вдаваясь в обсуждение возможных физических реализаций рассматриваемой модели, заметим, что ее можно формально трактовать как механическую систему грузиков, связанных нелинейными пружинками[2] как с равноотстоящими друг от друга узлами некоторой одномерной решетки, так и со своими ближайшими соседями. Заметим, что на обсуждаемую модель (2) можно смотреть и как на систему нелинейных осцилляторов, связанных нелинейными потенциальными силами.

Разумеется, в зависимости от конкретной задачи, рассматриваемой нами, модели (2) можно придать и другой физический смысл. В дальнейшем мы будем рассматривать систему (2) (и аналогичную ей систему (20)) как некоторую абстрактную динамическую модель. Тем не менее, результаты вычислений удобно интерпретировать в терминах смещений $x_i(t)$ частиц некоторой «моноатомной» цепочки.

Потенциальная энергия (1) представляет собой однородную функцию 4-й степени, что и определяет название рассматриваемой нами цепочки. Первая сумма в правой части формулы (1) (перед ней стоит множитель α) описывает связь каждой частицы с тем узлом цепочки, в котором она находится в положении равновесия, а вторая сумма (с множителем β) описывает взаимодействие частиц со своими ближайшими соседями. В соответствии с принятой в зарубежной литературе терминологией, будем называть первую сумму *онсайтовой* (on-site) частью, а вторую – *интерсайтовой* (inter-site) частью потенциальной энергии[3]. Очевидно, что отношение $\tilde{\beta} = \beta/\alpha$ характеризует интенсивность интерсайтового взаимодействия по отношению к онсайтовому взаимодействию.

При $n = 1$ и $n = N$ в уравнениях (2) возникают «несуществующие» переменные $x_0(t)$ и $x_{N+1}(t)$, которые мы доопределяем с помощью периодических граничных условий

$$x_{N+1} = x_1, \quad x_0 = x_N.$$

Из формулы (2) очевидно, что в нашей модели учитывается взаимодействие каждой частицы лишь с двумя ее ближайшими соседями.

[2]Предполагается, что модуль упругой силы F пропорционален третьей степени деформации пружины Δx: $[F(\Delta x) \sim (\Delta x)^3]$.

[3]В отечественной литературе в первом случае обычно говорят об энергии отдельных осцилляторов, а во втором случае – об энергии взаимодействия между ними.

Разные аспекты бризерной динамики в модели (2) при $\alpha = 0$ рассматривались в работах [10, 11, 13, 14]. В работе [8] нами была получена практически точная форма «симметричного» (см. далее) дискретного бризера и изучена зависимость его устойчивости от силы интерсайтового взаимодействия, а также проведен анализ поведения *квазибризеров* – динамических объектов близких к точным дискретным бризерам. В настоящей работе мы будем использовать развитые в [8] методы для анализа в цепочке K_4 бризеров и квазибризеров другого типа.

1.2. Нелинейные нормальные моды Розенберга. Мы будем строить решения системы (2), используя концепцию нелинейных нормальных мод Розенберга (ННМ)[4], введенную в [12]. ННМ представляют собой такие периодические режимы N-частичной нелинейной механической системы, при которых смещения $x_n(t)$ всех ее частиц из своих положений равновесия в любой момент времени пропорциональны (с постоянными коэффициентами k_n) смещению одной произвольно выбранной (например, первой) частицы

$$x_n(t) = k_n x_1(t), \quad n = 1..N. \tag{3}$$

Подставляя соотношения (3) в динамические уравнения (2), получим набор дифференциальных уравнений относительно одной и той же «ведущей» переменной $x_1(t)$. Требуя, чтобы все эти уравнения были эквивалентны друг другу, получим одно дифференциальное уравнение для переменной $x_1(t)$, которое будем называть «ведущим» уравнением, и систему $N-1$ нелинейных алгебраических уравнений относительно неизвестных коэффициентов пропорциональности k_n $(n = 2..N)$

$$\alpha k_n^3 + \beta[(k_{n+1} - k_n)^3 - (k_n - k_{n-1})^3] = k_n\{\alpha + \beta[(k_2 - 1)^3 - (1 - k_N)^3]\}. \tag{4}$$

Здесь учтено, что $k_1 = 1$ в силу соотношения (3). Ведущее дифференциальное уравнение при этом имеет вид

$$\ddot{x}_1 + x_1^3\{\alpha + \beta[(k_2 - 1)^3 - (1 - k_N)^3]\} = 0. \tag{5}$$

Возможность существования в произвольных нелинейных механических системах динамических режимов, описываемых нелинейными нормальными модами, отнюдь не очевидна. Для большинства таких систем ННМ вообще не существуют, а если они есть, то их число может быть как меньше, так и больше общего числа степеней свободы рассматриваемой системы. Розенбергом были выделены некоторые классы механических систем, для которых ННМ заведомо существуют. Наиболее важным является класс гамильтоновых систем, у которых потенциальная энергия представляет собой *однородную* функцию всех своих аргументов (рассматриваемая нами цепочка типа K_4 относится именно к этому типу систем). Подробное изложение теории мод Розенберга можно найти в книгах [15, 16].

Среди ННМ в нелинейных гамильтоновых решетках могут быть как делокализованные, так и локализованные в пространстве моды. По определению, последние есть ничто иное, как дискретные бризеры. Обратное утверждение не верно: дискретные бризеры могут существовать и в тех случаях, когда нелинейных нормальных мод не существует.

[4]Сам Розенберг назвает их «similar nonlinear normal modes».

Заметим в заключение, что «буши мод» введенные в [17] для систем с дискретной симметрией и исследованные в целом ряде последующих работ (см., например, [18–20]) определяют *квазипериодические* динамические режимы, поскольку для m-мерного буша мы имеем m ведущих дифференциальных уравнений[5]. В этом смысле *одномерные буши* представляют собой симметрийно обусловленные нелинейные нормальные моды Розенберга.

1.3. Пространственные профили дискретных бризеров. В силу формулы (3) бризерное колебание можно представить в форме

$$\mathbf{x}(t) = \{x_1(t), x_2(t), x_3(t), ..., x_N(t)\} = \{k_1, k_2, k_3, ..., k_N\} \cdot x_1(t). \tag{6}$$

Вектор $\mathbf{k} = \{k_1, k_2, k_3, ..., k_N\}$ будем называть пространственным профилем данного бризера. Временная зависимость бризерного решения определяется ведущим уравнением (5), которое можно переписать в виде

$$\ddot{x}_1 + p^2 x_1^3 = 0, \tag{7}$$

где $p = p(\mathbf{k})$. Предполагая, что амплитуда колебаний первой частицы есть A_1 (будем называть ее амплитудой бризера), получим при начальных условиях

$$x_1(0) = A_1, \quad \dot{x}_1(0) = 0 \tag{8}$$

решение этого уравнения, выраженное через эллиптическую функцию Якоби $\mathrm{cn}\Big(\tau, 1/\sqrt{2}\Big)$,

$$x_1(t) = A_1 \mathrm{cn}\Big(\omega t, \frac{1}{\sqrt{2}}\Big), \tag{9}$$

где частота колебаний ω является линейной функцией амплитуды бризера A_1 [8, 13]

$$\omega = pA_1. \tag{10}$$

Система уравнений (4) имеет много разных решений, среди которых есть как делокализованные, так и локализованные, которые и являются дискретными бризерами.

В работе [8] нами были детально изучены «симметричные» бризеры, с пространственным профилем вида $\mathbf{k} = \{..., \gamma_3, \gamma_2, \gamma_1, 1, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, ...\}$, где γ_i суть некоторые постоянные величины (в качестве ведущей здесь выбрана центральная частица бризера). Заметим, что говоря о симметричности этого бризера относительно своего центра, мы имеем в виду, что смещения частиц отложены не вдоль цепочки, а в перпендикулярном направлении (рис. 1). В настоящей работе будут исследованы «антисимметричные» бризеры с профилем вида $\mathbf{k} = \{..., -\gamma_3, -\gamma_2, -\gamma_1, -1, 1, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, ...\}$ и будет проведен сравнительный анализ устойчивости симметричных и антисимметричных бризеров по отношению к силе интерсайтового взаимодействия. Напомним,

[5]Буши мод суть инвариантные многообразия исходной динамической системы, разложенные по базисным векторам неприводимых представлений группы ее симметрии. Теория этих динамических объектов подробно обсуждается в работе [18] для общего случая и в работах [19, 21] для цепочек Ферми–Пасты–Улама.

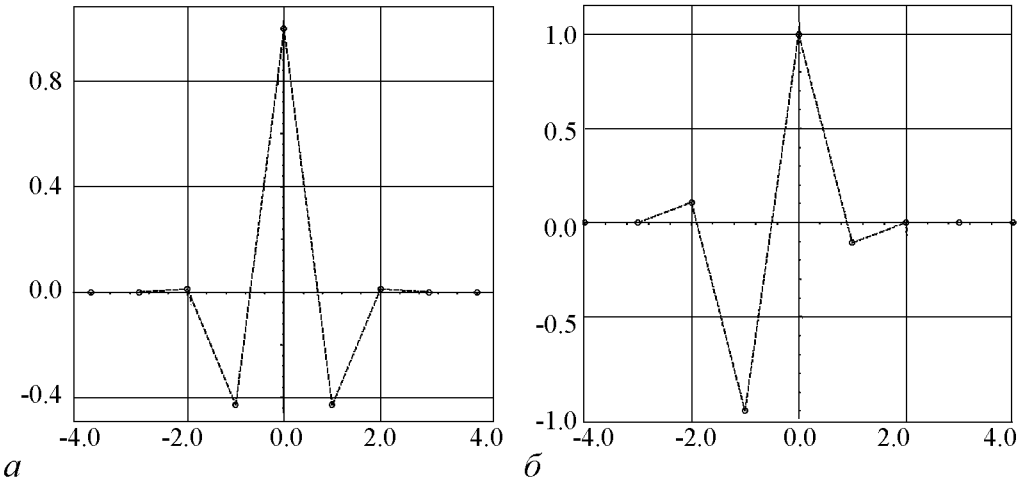


Рис. 1. Пространственные профили бризеров: симметричного (а) и антисимметричного (б)

что бризеры первого типа часто называют модами Сиверса–Такено, а бризеры второго типа – модами Пейджа. Заметим, что среди решений системы (4) можно найти и много других («мультибризерных») решений, однако, вышеуказанные бризеры являются наиболее простыми и именно они чаще всего рассматриваются в литературе по дискретным бризерам.

Поскольку система уравнений (4) является алгебраической, ее решения могут быть получены с высокой степенью точности с помощью различных итерационных методов. Мы использовали для ее решения стандартные возможности математического пакета MAPLE. При этом находились профили для серии цепочек с последовательным увеличением числа образующих их частиц. Рассмотрим эту процедуру в случае построения симметричного бризера для цепочки K_4 без онсайтовой части потенциала ($\alpha = 0$). Начальное приближение для построения такого бризера можно получить, исходя из рассмотрения цепочки из $N = 3$ частиц (с периодическими граничными условиями). Тогда вектор $\mathbf{k}$, определяющий бризер, имеет вид $\mathbf{k}_3 = (-1/2, 1, -1/2)$, причем в рассматриваемом нами сейчас случае ($\alpha = 0$) он задает точный профиль. Этот вектор далее используется в качестве начального приближения для построения профиля $\mathbf{k}_5$ цепочки из $N = 5$ частиц. Полученный вектор $\mathbf{k}_5$ служит начальным приближением при построении $\mathbf{k}_7$ в случае цепочки из $N = 7$ частиц и т.д. Совершено аналогично реализуется процедура построения антисимметричного бризера для цепочки с произвольным N, исходя из начального профиля $\mathbf{k}_4 = (0, -1, 1, 0)$ для цепочки из 4 частиц.

Заметим, что наши результаты для случая $\alpha = 0$ (отсутствие онсайтового потенциала) полностью согласуются с формой дискретных бризеров, полученных другим методом (но также с очень высокой степенью точности) в работе [11].

Описанным выше методом можно получить пространственные профили дискретных бризеров и в случае произвольных значений α и β в формуле (1). В табл. 1, 2 приведены результаты, соответствующие случаю $\alpha = 1$, $\beta = 0.3$.

Отметим два существенных момента, связанные с формой исследуемых бризеров.

Таблица 1

Пространственные профили для симметричных бризеров в цепочке K_4 с $N = 5, 9, 15$ частицами при $\tilde{\beta} = 0.3$

	$N = 5$	$N = 9$	$N = 15$
k_{-7}			*
k_{-6}			*
k_{-5}			*
k_{-4}		*	*
k_{-3}		-0.6040174714·10^{-8}	-0.6040174714·10^{-8}
k_{-2}	0.0035993414	0.0035993477	0.0035993477
k_{-1}	-0.2992883116	-0.2992883120	-0.2992883120
k_0	1	1	1
k_1	-0.2992883116	-0.2992883120	-0.2992883120
k_2	0.0035993414	0.0035993477	0.0035993477
k_3		-0.6040174714·10^{-8}	-0.6040174714·10^{-8}
k_4		*	*
k_5			*
k_6			*
k_7			*

Таблица 2

Пространственные профили для антисимметричных бризеров в цепочке K_4 с $N = 4, 6, 10$ частицами при $\alpha = 1$, $\beta = 0.3$

	$N = 4$	$N = 6$	$N = 10$
k_{-5}			*
k_{-4}			0.1150827549·10^{-10}
k_{-3}		-0.4795767441·10^{-3}	-0.4795766628·10^{-3}
k_{-2}	0.1715728752	0.1657879024	0.1657879024
k_{-1}	-1	-1	-1
k_0	1	1	1
k_1	-0.1715728752	-0.1657879024	-0.1657879024
k_2		0.4795767441·10^{-3}	0.4795766628·10^{-3}
k_3			-0.1150827549·10^{-10}
k_4			*

Во-первых, полученные бризерные решения оказываются столь *сильно локализованными*, что уже на расстоянии 4 узлов решетки от центра бризера амплитуды колебаний частиц становятся ничтожно малыми (они не превышают 10^{-20} и в табл. 1, 2 обозначены звездочками). В работах [10, 14] столь сильная локализация называется «суперэкспоненциальной».

Во-вторых, сравнивая симметричные бризерные профили из табл. 1, построенные для цепочек с $N = 9$ и $N = 15$ частицами, приходим к выводу, что дальнейшее увеличение количества частиц цепочки практически никак не сказывается на профиле соответствующего бризерного решения. В результате профиль, полученный для $N = 9$ (а для большинства разумных целей даже для $N = 7$) можно считать практически точным профилем и для *бесконечной цепочки* ($N = \infty$). Аналогичный вывод можно сделать и для случая антисимметричного бризера (см. табл. 2).

1.4. Устойчивость дискретных бризеров в цепочке K_4. В соответствии со стандартным рецептом линейного анализа устойчивости периодического динамического режима, каковым в нашем случае является точное бризерное решение

$$\mathbf{x}_b(t) = \{k_1, k_2, k_3, ..., k_N\} \cdot x_1(t), \tag{11}$$

введем бесконечно малое его возмущение

$$\boldsymbol{\delta}(t) = \{\delta_1(t), \delta_2(t), \delta_3(t), ..., \delta_N(t)\} \tag{12}$$

и положим $\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_b(t) + \boldsymbol{\delta}(t)$.

Подставляя это выражение для вектора $\mathbf{x}(\mathbf{t})$ в исходную систему нелинейных динамических уравнений (2) и линеаризуя ее по возмущению $\boldsymbol{\delta}(t)$, получим систему линейных дифференциальных уравнений с периодически зависящими от времени коэффициентами

$$\ddot{\boldsymbol{\delta}}(t) = -3x_1^2(t)\mathrm{B}\,\boldsymbol{\delta}(t), \tag{13}$$

где B есть некоторая *симметричная* $N \times N$ матрица. Явный вид матриц B для цепочек K_4, состоящих из $N = 3$ и $N = 5$ частиц, в случае исследования устойчивости симметричного бризера приведен в работе [8].

Специфическая структура системы (13) позволяет ее *полностью расщепить*, то есть разбить на N независимых друг от друга уравнений, если с помощью соответствующего ортогонального преобразования S привести симметричную матрицу B к диагональному виду. Действительно, положив $\boldsymbol{\delta}(t) = \mathrm{S}\,\tilde{\boldsymbol{\delta}}(t)$, где матрица S *не зависит от времени*, получим для компонент $\tilde{\delta_j}(t)$ нового инфинитезимального вектора $\tilde{\boldsymbol{\delta}}(t)$ уравнения

$$\ddot{\tilde{\delta}}_j + 3x_1^2(t)\lambda_j\tilde{\delta}_j = 0, \quad j = 1..N. \tag{14}$$

Здесь λ_j суть собственные значения матрицы B.

Заметим, что осуществить процедуру полного расщепления линеаризованной вблизи некоторого периодического режима системы на независимые уравнения в общем случае невозможно. Тем не менее, в ряде случаев можно добиться весьма существенного ее упрощения, используя теорию неприводимых представлений групп симметрии [20].

Уравнения (14) можно представить в виде[6] [8]

$$z_j'' + \Lambda_j x^2(\tau) \cdot z_j(\tau) = 0, \tag{15}$$

где $z_j(\tau) = \tilde{\delta}_j\Big(\tau/(pA_1)\Big)$, $x(\tau) = \mathrm{cn}\left(\tau, 1/\sqrt{2}\right)$, $\Lambda_j = 3\lambda_j/p^2$, $\tau = pA_1 t$ (величина A_1 определяется начальным условием (8)).

Таким образом, исследование устойчивости наших бризерных решений сводится к исследованию устойчивости *нулевого решения* некоторого «базового» уравнения

$$z'' + \Lambda \mathrm{cn}^2\left(\tau, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) z(\tau) = 0 \tag{16}$$

[6]Здесь и далее штрихом обозначено дифференцирование по новому временному аргументу τ, в отличие от точки, соответствующей дифференцированию по t.

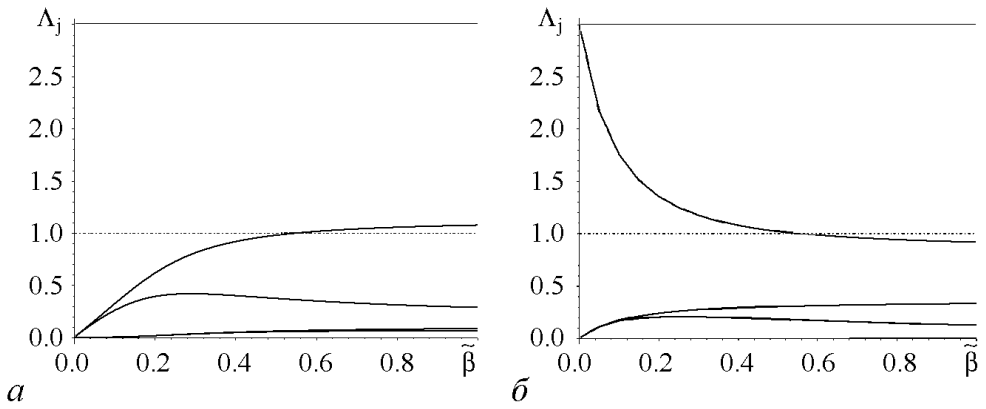


Рис. 2. Зависимость значений параметра Λ от относительной силы интерсайтового взаимодействия ($\tilde{\beta}$) для симметричного (*а*) и антисимметричного бризеров (*б*) в цепочке K_4

при разных значениях параметра Λ, которые непосредственным образом связаны с собственными значениями матрицы B линеаризованной системы (13).

Как показано в работе [8], для решений уравнения (16) можно получить некоторые *строгие* математические результаты, поскольку оно представляет собой уравнение Ляме в форме Якоби [22]. Значения $\Lambda = (1/2)n(n+1)$, где n – натуральное число, отвечают границам, разделяющим области устойчивого и неустойчивого движений. На этих границах решения уравнений (16) являются периодическими функциями Ляме. Более того, оказывается, что при

$$0 < \Lambda \leqslant 1 \ \text{ и } \ 3 \leqslant \Lambda \leqslant 6 \tag{17}$$

движение является устойчивым, а при

$$1 < \Lambda < 3 \ \text{ и } \ 6 < \Lambda < 10, \tag{18}$$

наоборот – неустойчивым. Эти свойства уравнения Ляме (16) позволяют достаточно просто судить об устойчивости бризерных решений по собственным значениям λ_j матрицы B линеаризованной системы уравнений (13), поскольку, каждому значению λ_j отвечает вполне определенное значение параметра Λ из уравнения (16).

С другой стороны, элементы матрицы B существенным образом зависят от параметра $\tilde{\beta} = \beta/\alpha$, который определяет относительную силу интерсайтовой части потенциальной энергии по отношению к ее онсайтовой части (см. формулу (1)). Поэтому собственные значения $\lambda_j = \lambda_j(\tilde{\beta})$ матрицы B являются функциями параметра $\tilde{\beta}$ и их приходится определять каким-либо численным методом[7] для каждого значения $\tilde{\beta}$.

В табл. 3 приведены значения $\Lambda_j(\tilde{\beta})$ при $\tilde{\beta} = 0.3$ для цепочек типа K_4 с различным количеством частиц для случая рассматриваемых нами *антисимметричных* бризеров, профили которых определяются данными из табл. 2. Эта таблица соответствует табл. VIII из работы [8], где приведены аналогичные данные для *симметричных* бризеров.

На рис. 2 показаны графики функций $\Lambda_j(\tilde{\beta})$ для симметричного и антисимметричного бризеров. Все $\Lambda_j(\tilde{\beta})$, соответствующие собственным значениям $\lambda_j(\tilde{\beta})$

[7]Мы использовали для этого стандартные процедуры пакета MAPLE.

Таблица 3

Значения параметра Λ из уравнения (16) для собственных значений λ_j матрицы B в случае антисимметричного бризера для цепочки K_4 с различным числом частиц N при $\tilde{\beta} = 0.3$

$N = 4$	$N = 6$
$\Lambda_1 = 3$ $\Lambda_2 = 1.174380299$ $\Lambda_3 = 0.2903225809$ $\Lambda_4 = 0.2032288097$	$\Lambda_1 = 3$ $\Lambda_2 = 1.174158240$ $\Lambda_3 = 0.2706091431$ $\Lambda_4 = 0.2054306666$ $\Lambda_5 = 0.2705947721 \cdot 10^{-2}$ $\Lambda_6 = 0.2699701623 \cdot 10^{-2}$
$N = 8$	$N = 9$
$\Lambda_1 = 3$ $\Lambda_2 = 1.174158240$ $\Lambda_3 = 0.2706091431$ $\Lambda_4 = 0.2054306666$ $\Lambda_5 = 0.2705931835 \cdot 10^{-2}$ $\Lambda_6 = 0.2699703891 \cdot 10^{-2}$ $\Lambda_7 = 0.2269482819 \cdot 10^{-8}$ $\Lambda_8 = 0.2269482814 \cdot 10^{-8}$	$\Lambda_1 = 3$ $\Lambda_2 = 1.174158240$ $\Lambda_3 = 0.2706091431$ $\Lambda_4 = 0.2054306666$ $\Lambda_5 = 0.2705931835 \cdot 10^{-2}$ $\Lambda_6 = 0.2699703891 \cdot 10^{-2}$ $\Lambda_7 = 0.2269482817 \cdot 10^{-8}$ $\Lambda_8 = 0.2269482782 \cdot 10^{-8}$ $\Lambda_9 \sim 10^{-26}$ $\Lambda_{10} \sim 10^{-26}$

матрицы B, для всех возможных N находятся в интервале $0 < \Lambda_j(\tilde{\beta}) \leqslant 3$. Согласно (17)-(18), этот интервал состоит из первой зоны устойчивости уравнения Ляме ($0 < \Lambda \leqslant 1$) и первой зоны неустойчивости ($1 < \Lambda < 3$).

Итак, устойчивость рассматриваемых нами дискретных бризеров зависит от попадания параметров $\Lambda_j(\tilde{\beta})$, которые, в свою очередь, определяются собственными значениями $\lambda_j(\tilde{\beta})$ матрицы B линеаризованной системы (13), в те или иные области устойчивого движения базового уравнения (16). Рассмотрим в связи с этим табл. 3. Из приведенных в ней данных видно, что одно значение параметра Λ, а именно, $\Lambda_1 = 3$, при любом числе частиц в цепочке попадает *точно* на границу между первой зоной неустойчивости и второй зоной устойчивости. Этому значению Λ_1 отвечает периодическое решение, которому соответствует собственный вектор $\mathbf{V}_1$ матрицы B, пропорциональный *самому бризерному профилю*. Это значит, что инфинитезимальное возмущение, пропорциональное $\mathbf{V}_1$, может только слегка изменить (увеличить или уменьшить) амплитуду рассматриваемого бризера, но никак не связано с проблемой его устойчивости. Иными словами, устойчивость дискретного бризера зависит только от возмущений в трансверсальном к вектору $\mathbf{V}_1$ подпространстве всех возможных смещений частиц.

Далее, все значения параметра Λ (см. табл. 3) оказываются положительными величинами, и при увеличении числа частиц N в цепочке первые собственные значения λ_j остаются практически неизменными, но к ним лишь добавляются положительные собственные значения все более маленькой величины.

Для *симметричного* бризера на рис. 2, *а* изображены значения параметра Λ для всех собственных значений $\lambda_j(\tilde{\beta})$ матрицы B, которые имеют сколько-нибудь существенные величины ($\Lambda_2 \div \Lambda_5$), как функции параметра $\tilde{\beta}$ относительной силы

интерсайтового взаимодействия. Из этого рисунка видно, что *только одно* значение параметра Λ, именно, Λ_2, имеет тенденцию к росту при увеличении $\tilde{\beta}$, причем, оно достигает границы первой зоны устойчивости ($\Lambda = 1$) при $\tilde{\beta} = \tilde{\beta}_c = 0.554....$ Выход $\Lambda_2(\tilde{\beta})$ в зону неустойчивого движения при $\tilde{\beta} > \tilde{\beta}_c$ означает *потерю устойчивости* рассматриваемого бризера.

На рис. 2, *б* показано поведение $\Lambda_j(\tilde{\beta})$ для *антисимметричного* бризера в зависимости от параметра $\tilde{\beta}$. Сравнение рис. 2, *а* и 2, *б* выявляет очень интересную закономерность. Действительно, если симметричный бризер был *устойчивым* при малых значениях $\tilde{\beta}$, то антисимметричный бризер, наоборот, является при этом *неустойчивым*, поскольку для него параметр Λ_2 вплоть до того же самого критического значения $\tilde{\beta} = \tilde{\beta}_c = 0.554...$ лежит в первой зоне неустойчивости ($1 < \Lambda < 3$) базового уравнения (все остальные значения Λ_j лежат в первой зоне устойчивости). При $\tilde{\beta} > \tilde{\beta}_c$ антисимметричный бризер становится устойчивым, в то время как симметричный бризер свою устойчивость теряет. Наиболее интригующим является тот факт, что происходит это явление *изменения характера устойчивости* для обоих бризеров *при одном и том же* значении параметра $\tilde{\beta}$, именно, при $\tilde{\beta}_c = 0.554....$

Таким образом, симметричный бризер является устойчивым при малых значениях параметра $\tilde{\beta}$, то есть в случае малости интерсайтового взаимодействия по отношению к онсайтовому, в то время как для антисимметричного бризера дело обстоит как раз наоборот – он является устойчивым динамическим объектом лишь в случае, если интерсайтовое взаимодействие больше онсайтового (точнее, при условии $\tilde{\beta} > \tilde{\beta}_c = 0.554...$).

2. Дискретные бризеры для других динамических моделей

2.1. Дискретные бризеры и нелинейные нормальные моды. При рассмотрении цепочки K_4 мы имеем дело с дискретными бризерам, которые представляют собой моды Розенберга (6). Динамика каждой частицы описывается *одной и той же* временной функцией $\mu(t) = x_1(t)$ и, стало быть, все они имеют одинаковые частоты колебаний. Очевидно, такой вид бризера не является самым общим. Действительно, если рассматривать бризер как периодический во времени динамический объект, то вектор $\mathbf{x}(t)$, определяющий колебания всех частиц цепочки, принимает, в отличие от (6), вид

$$\mathbf{x}(t) = \{k_1\mu_1(t), k_2\mu_2(t), ..., k_N\mu_N(t)\}, \tag{19}$$

где все функции $\mu_i(t)$ могут быть *разными*, но при этом они должны иметь *равные* или *соразмерные* периоды.

В случае решеток с *однородным* потенциалом любой степени дискретные бризеры в форме нелинейных нормальных мод, для которых $\mu_1(t) = \mu_2(t) = ... = \mu_2(t) = \mu(t)$, заведомо существуют в силу теории Розенберга [12]. Для решеток с потенциалом более общего вида существование мод Розенберга (по крайней мере, локализованных) обычно оказывается невозможным. Тем не менее, точные бризерные решения могут существовать и в этом случае. Строгие математические доказательства этого факта для случая слабо связанных нелинейных осцилляторов можно найти в работах [9, 10]. Эти доказательства, однако, носят довольно формальный

характер и не проливают свет на вопрос о том, как может реализоваться бризерное решение, при котором все частицы должны колебаться с одинаковой частотой, несмотря на то, что амплитуды этих колебаний существенно различны в силу пространственной локализации бризера.

Как уже отмечалось во введении, существуют и вычислительные схемы для построения бризерных решений с высокой степенью точности [5, 10, 11]. С нашей точки зрения, эти схемы не являются достаточно простыми и наглядными, в силу чего в настоящей работе предлагается некоторый, как нам представляется, более простой метод построения дискретных бризеров типа (19). Более того, предлагаемый метод приводит к очень прозрачной *физической интерпретации* возможности существования дискретных бризеров как периодических динамических объектов, несмотря на их пространственную локализацию (этот вопрос будет рассмотрен в отдельной публикации). Ниже излагается основная идея вышеупомянутого метода построения дискретных бризеров и приводятся примеры его применения.

Будем по-прежнему рассматривать моноатомные цепочки и для простоты изложения ограничимся построением только *моночастотных* бризеров, понимая под этим термином такие локализованные в пространстве динамические объекты, все частицы которых совершают колебания с *одинаковой* частотой. Таким образом, все временные функции $\mu_j(t)$ $(j = 1..N)$ в формуле (19) имеют *одинаковые периоды*.

Начнем с демонстрации готового результата для цепочки линейно связанных друг с другом жестких осцилляторов Дуффинга (связь предполагается диффузионной). Динамические уравнения для такой механической модели имеют вид

$$\ddot{x}_i + x_i + x_i^3 = \gamma(x_{i+1} - 2x_i + x_{i-1}), \quad i = 1..N. \tag{20}$$

Как и ранее, предполагается наличие периодических граничных условий

$$x_{N+1} = x_1, \quad x_0 = x_N. \tag{21}$$

Постоянная γ в уравнениях (20) определяет величину связи между соседними осцилляторами.

Как и в случае модели (2), можно считать, что уравнения (20) описывают динамику системы одинаковых грузиков (частиц), связанных друг с другом и с узлами некоторой одномерной решетки нелинейными пружинами. Получаемые решения будем трактовать именно в терминах смещений частиц такой «моноатомной» цепочки.

На рис. 3, *а* изображено полученное бризерное решение для цепочки из $N = 9$ частиц при $\gamma = 0.3$. Из этого рисунка видна временная зависимость отклонений $x_i(t)$ нескольких центральных частиц симметричного бризера, амплитуды которых имеют существенную величину. Поскольку эти амплитуды экспоненциально убывают по мере удаления частицы от центра бризера и не все $x_i(t)$ видны на рис. 3, *а*, на рис. 3, *б* приводим в логарифмическом масштабе для симметричных бризеров зависимость амплитуд колебаний A_i отдельных частиц цепочки от номера частицы i при нескольких значениях параметра γ. Из этих рисунков хорошо видна одинаковость периодов колебаний всех частиц цепочки и пространственная локализация бризера, определяемая быстрым убыванием амплитуд колебаний периферийных частиц.

Рассмотрим теперь метод построения моночастотных бризеров для нелинейных цепочек с произвольным видом потенциальной энергии.

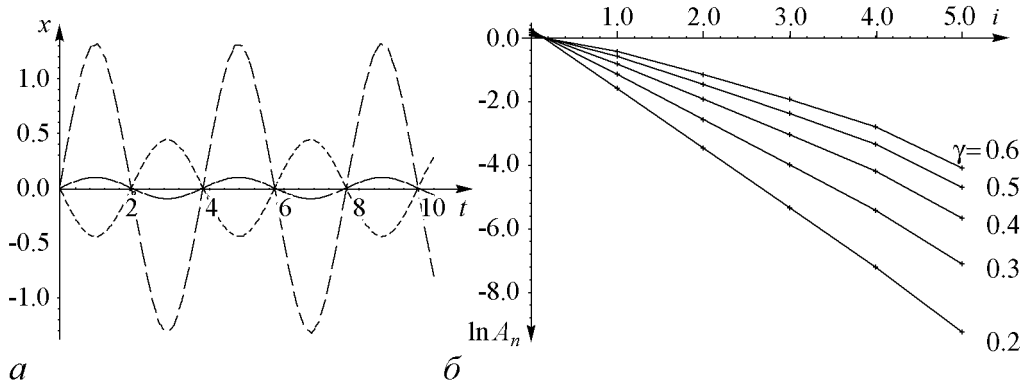


Рис. 3. Дискретный бризер для модели (20)–(21): *а* – временная эволюция бризера при $\gamma = 0.3$; *б* – зависимость амплитуды колебаний от номера частицы

В большинстве работ по численному моделированию дискретный бризер определяют заданием его профиля в начальный момент времени при нулевом значении кинетической энергии, то есть решают задачу Коши вида $x_i(0) = k_i$, $\dot{x}_i(0) = 0$, $i = 1..N$. Заметим, что мы поступали именно так, обсуждая процедуру построения нелинейных нормальных мод для цепочки K_4. Однако далее будем рассматривать другую задачу Коши, полагая

$$x_i(0) = 0,\ \dot{x}_i(0) = \alpha_i,\ \ i = 1..N, \tag{22}$$

где α_i – начальные скорости частиц цепочки. Таким образом, предполагаем, что в начальный момент времени все частицы цепочки находятся в своих положениях равновесия, но им сообщаются скорости α_i, которые и подлежат определению из условия возникновения при этом некоторого моночастотного бризера. Из моночастотности бризерного решения следует, что все частицы цепочки имеют одинаковый период колебаний T и, следовательно, при $t = T$ выполняются условия

$$x_i(T) = x_i(0) = 0,\ \ i = 1..N, \tag{23}$$

то есть снова все частицы должны одновременно проходить через свои положения равновесия.

Проиллюстрируем наш метод на примере построения симметричного бризерного решения для системы (20), предполагая, что центр бризера приходится на первую частицу ($n = 1$).

Выбрав некоторое «разумное» значение параметра α_1, который определяет начальную скорость первой частицы $\dot{x}_1(0) = \alpha_1$, и полагая скорости всех других частиц равными нулю $\dot{x}_i(0) = 0$ при $i \neq 1$, построим решение системы (20) вплоть до того момента времени t, при котором вырисовывается, по крайней мере, один полный период функции $x_1(t)$. В результате получим картину типа изображенной на рис. 4, *а*, где приведены графики функций $x_1(t)$ и $x_2(t)$, соответствующие колебаниям первой и второй частиц бризера[8].

[8]На самом деле, *двум* ближайшим к центру симметричного бризера частицам.

Варьируя начальную скорость $\dot{x}_2(0) = \alpha_2$ второй частицы, стремимся *синхронизировать* ее движение с движением первой частицы, то есть стремимся к *совпадению периодов* их колебаний, не обращая пока что внимания на периоды колебаний других частиц цепочки. При этом требуем, чтобы $|\alpha_2| < |\alpha_1|$ (или даже $|\alpha_2| \ll |\alpha_1|$), поскольку амплитуды колебаний частиц по мере удаления от центра бризера должны *убывать*, что является необходимым условием для пространственной локализации искомого решения. Разумеется, при изменении α_2 несколько изменяется и период колебаний первой частицы, а стало быть, и точка пересечения графика $x_1(t)$ с осью абсцисс. Тем не менее, при достаточно малой константе связи γ в уравнениях (20) можно ожидать, что, в силу пространственной локализации бризера $\big(|x_1(t)| > |x_2(t)|\big)$, «обратное» влияние переменной $x_2(t)$ на переменную $x_1(t)$ будет меньше, чем «прямое» воздействие $x_1(t)$ на $x_2(t)$. В результате оказывается возможным создать некоторую сходящуюся *итерационную* процедуру синхронизации движения двух первых частиц бризера, которую будем называть $S[1,2]$ процедурой. Она может быть построена на основе, например, метода дихотомии для совмещения ближайших к $t = 0$ точек пересечения функций $x_1(t)$ и $x_2(t)$ с осью абсцисс (см. точки A и B на рис. 4, *а*). Сами же эти точки пересечения можно находить методом касательных Ньютона или любыми другими известными численными методами. На каждом итерационном цикле процедуры $S[1,2]$ приходится численно решать (например, методом Рунге–Кутты) систему дифференциальных уравнений (20) на *достаточно малых* временных интервалах.

Очевидно, что после окончания процедуры $S[1,2]$ колебания других частиц цепочки оказываются, вообще говоря, несинхронизированными с колебаниями первых двух частиц. Это хорошо видно по расхождению точек B и C на рис. 4, *б*, где изображены графики функций $x_2(t)$ и $x_3(t)$ после завершения процедуры $S[1,2]$. Применим теперь к системе (20) процедуру $S[2,3]$, полностью аналогичную процедуре $S[1,2]$, для синхронизации второй и третьей частицы (при этом не заботимся об их синхронизации ни с первой частицей, ни со всеми другими). Продолжая такого рода *парную* синхронизацию, то есть применяя процедуры $S[3,4]$, $S[4,5]$ и т.д. вплоть до тех номеров частиц, амплитуды колебаний которых оказываются менее наперед заданной малой величины ε, закончим первый *большой итерационный цикл* синхронизации колебаний частиц искомого бризера.

Поскольку в результате проведения этого цикла колебания первых частиц бризера становятся слегка рассинхронизованными, начнем следующий большой итера-

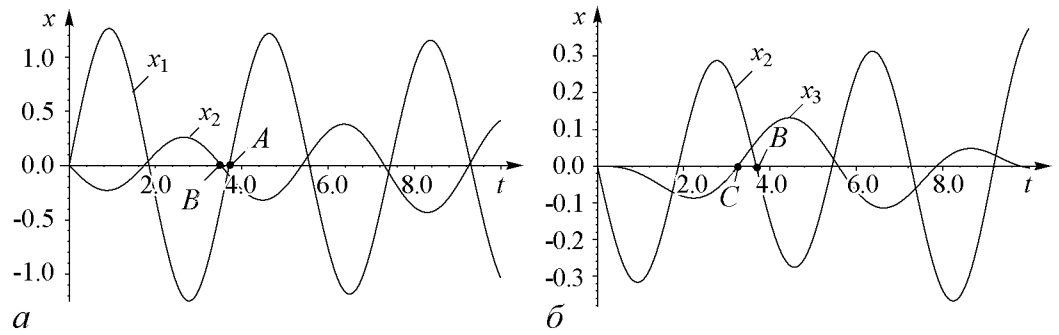


Рис. 4. К методу парной синхронизации для построения симметричного бризера в цепочке связанных осцилляторов Дуффинга

ционный цикл синхронизации, то есть вновь синхронизируем попарно колебания частиц 1 и 2, 2 и 3, 3 и 4 и т.д. Повторяем большие итерационные циклы до *сходимости* всего процесса синхронизации с *заданной степенью точности*.

Вышеописанную вычислительную схему назовем методом *парной синхронизации*. Заметим, что она представляет собой реализацию некоторого варианта хорошо известной в численном анализе идеи *релаксации* при решении различных систем уравнений.

Наш опыт показывает, что метод парной синхронизации сходится в достаточно широком диапазоне значений γ системы (20).

В заключение заметим, что метод парной синхронизации можно успешно использовать для построения точных бризерных решений в решеточных моделях гораздо более общего вида, нежели рассмотренные в качестве примера модели моноатомных цепочек. Этот вопрос будет обсужден в последующих публикациях.

2.2. Квазибризеры. Из предыдущих разделов настоящей работы ясно, что дискретный бризер, как строго периодический во времени объект, получается при численном моделировании лишь в случае *идеальной настройки* начальных условий задачи Коши на некоторое многообразие малой размерности в многомерном пространстве всех возможных начальных значений координат отдельных частиц и их скоростей. Такую точную настройку трудно осуществить даже при проведении вычислительного эксперимента, что хорошо видно из процедуры реализации метода парной синхронизации частот колебаний частиц бризера (см. раздел 2.1). Тем более это практически невозможно сделать при постановке любых физических экспериментов (особенно в тех случаях, когда бризероподобные объекты возникают спонтанно [7, 23, 24]).

В связи с этим, в работе [8] была выдвинута концепция квазибризеров, как некоторых локализованных в пространстве, но не строго периодических во времени динамических объектов. При этом был сформулирован определенный *критерий близости* квазибризера к соответствующему ему точному бризеру, основанный на вычислении среднеквадратичного отклонения $\eta(t_k)$ частот колебаний отдельных частиц бризера, найденных на некотором интервале в окрестности момента t_k, и вычислении среднеквадратичного отклонения σ_j частот колебаний выделенной j-й частицы бризера на различных временных интервалах (для частиц квазибризера имеет место некоторый временной дрейф частоты колебаний)[9].

Следует заметить, что практически все обсуждаемые в литературе динамические объекты, которые принято называть дискретными бризерами, на самом деле, являются лишь квазибризерами с большей или меньшей величиной среднеквадратичных отклонений $\eta(t)$ и σ_j частот колебаний отдельных частиц решетки. Эта идея была нами проиллюстрирована в работе [8] на примере бризеров Джеймса [25] в цепочке типа $K_2 - K_3 - K_4$.

[9]Смысл, который мы вкладываем в настоящей работе в понятие «частота», лучше всего объяснить, указав процедуру вычисления этой величины. Рассматривая колебания i-й частицы, находим последовательные нули функции $x_i(t)$ и в качестве «периода» колебаний $T(t_k)$ выбираем временной интервал между ближайшими нулями функции $x_i(t)$ одинаковой четности. «Частота» колебаний при этом определяется по формуле $\omega(t_k) = 2\pi/T(t_k)$. В случае идеального бризера период $T(t_k)$ является постоянной величиной, не зависящей от момента времени t_k, в окрестности которого вычисляются нули функции $x_i(t)$. В случае же квазибризеров величины $T(t_k)$, вычисленные в окрестности разных моментов t_k, будут различными, то есть введенный выше период $T(t_k)$ и соответствующая ему частота $\omega(t_k)$ изменяются при изменении t_k.

Заключение

В настоящей работе получены строгие результаты исследования устойчивости дискретных бризеров (локализованных в пространстве и периодических во времени динамических объектов) для нелинейной моноатомной цепочки с однородным потенциалом четвертой степени. При этом показано различие в характере устойчивости симметричных бризеров (мод Сиверса–Такено) и антисимметричных бризеров (мод Пейджа) в зависимости от силы межчастичного взаимодействия по отношению к локальному взаимодействию частиц с узлами решетки. Изменение характера устойчивости этих двух дискретных бризеров происходит при одном и том же значении параметра $\tilde{\beta}$ ($\tilde{\beta} = 0.554...$), который характеризует относительную силу межчастичного взаимодействия.

В работе также предложен новый метод построения дискретных бризеров – метод «парной синхронизации», **техника применения** которого продемонстрирована на примере модели, представляющей собой цепочку линейно связанных осцилляторов Дуффинга.

Наконец, кратко рассмотрена концепция квазибризеров, с неизбежностью возникающих при малых возмущениях точных бризерных решений и являющихся более релевантными динамическими объектами при обсуждении экспериментальных данных (более подробно эта концепция была проанализирована в работе авторов [8]).

Авторы выражают свою благодарность В.П. Сахненко за постоянную дружескую поддержку и обсуждение результатов работы, а также С. Флаху за ценные дискуссии и за гостеприимство во время пребывания авторов в институте Макса Планка физики сложных систем (Дрезден, Германия) в декабре 2006 г. Благодарим фонд некоммерческих программ «Династия» за финансовую поддержку.

Настоящая работа выполнена в рамках гранта К-07-Т-25 Южного Федерального Университета.

Библиографический список

1. *Aubry S.* Breathers in nonlinear lattices: existence, linear stability and quantization // Physica D. 1997. Vol. 103. P. 201.
2. *Flach S. and Willis C. R.* Discrete breathers // Phys. Rep. 1998. Vol. 295. P. 181.
3. *Sievers A.J., Takeno S.* Intrinsic localized modes in anharmonic crystals // Phys. Lett. 1988. Vol. 61. P. 970.
4. *Aubry S.* Discrete breathers: localization and transfer of energy in discrete Hamiltonian nonlinear systems // Physica D. 2006. Vol. 216. P. 1.
5. *Flach S.* Computational studies of discrete breathers // Energy Localization and Transfer / Eds. T. Dauxois, A. Litvak-Hinenzon, R. MacKay and A. Spanoudaki. World Scientific, 2004. P. 1.
6. *Tsironis G.P.* If «discrete breathers» is the answer, what is the question? // Chaos. 2003. Vol. 13. P. 657.
7. *Sato M., Hubbard B.E., Sievers A.T.* Nonlinear energy localization and its manipulation in micromechanical oscillator arrays // Rev. Mod. Phys. 2006. Vol. 78. P. 13.
8. *Chechin G.M., Dzhelauhova G.S., and Mehonoshina E.A.* Quasibreathers as a gene-

ralization of the concept of discrete breathers // Phys. Rev. E. 2006. Vol. 74. P. 36608.

9. *MacKay R.S. and Aubry S.* Proof of existence of breathers for time-reversible or Hamiltonian networks of weakly coupled oscillators // Nonlinearity. 1994. Vol. 7. P. 1623.
10. *Flach S.* Conditions on the existence of localized excitations in nonlinear discrete systems // Phys. Rev. E. 1994. Vol. 50. P. 3134.
11. *Marin J.L. and Aubry S.* Breathers in nonlinear lattices: numerical calculation from the anticontinuous limit // Nonlinearity. 1996. Vol. 9. P. 1501.
12. *Rosenberg R.M.* On nonlinear vibrations of systems with many degrees of freedom // Adv. Appl. Mech. 1966. Vol. 9. P. 155.
13. *Kivshar Yu.S.* Intrinsic localized modes as solitons with a compact support // Phys. Rev. E. 1993. Vol. 48. P. R43.
14. *Gorbach A.V. and Flach S.* Compactlike discrete breathers in systems with nonlinear and nonlocal dispersive terms // Phys. Rev. E. 2005. Vol. 72. P. 56607.
15. *Маневич Л.Н., Михлин Ю.В., Пилипчук В.Н.* Метод нормальных колебаний для существенно нелинейных систем. М.: Наука, 1989. 216 с.
16. *Vakakis A.F., Manevich L.I., Mikhlin Yu.V., Pilipchuk V.K., Zevin A.A.* Normal modes and localization in nonlinear systems. New York: Wiley, 1996.
17. *Сахненко В.П., Чечин Г.М.* Симметрийные правила отбора в нелинейной динамике атомных систем // ДАН. 1993. Т. 330. С. 308.
18. *Chechin G.M. and Sakhnenko V.P.* Interactions between normal modes in nonlinear dynamical systems with discrete symmetry. Exact results // Physica D. 1998. Vol. 117. P. 43.
19. *Chechin G.M., Ryabov D.S., Zhukov K.G.* Stability of low dimensional bushes of vibrational modes in the Fermi–Pasta–Ulam chains // Physica D. 2005. Vol. 203. P. 121.
20. *Chechin G.M., Zhukov K.G.* Stability analysis of dynamical regimes in nonlinear systems with discrete symmetries // Phys. Rev. E. 2006. Vol. 73. P. 36216.
21. *Chechin G.M., Novikova N.V., Abramenko A.A.* Bushes of vibrational modes for Fermi–Pasta–Ulam chains // Physica D. 2002. Vol. 166. P. 208.
22. *Уиттекер Э.Т., Ватсон Дж.Н.* Курс современного анализа. В 2-х частях. Ч. 2: Трансцендентные функции. Пер. с англ. М.: 1963. 516 с.
23. *Rossler T., Page J.B.* Optical creation of vibrational intrinsic localized modes in anharmonic lattices with realistic interatomic potentials // Phys. Rev. B. 2000. Vol. 62. P. 11460.
24. *Cretegny T., Dauxois T., Ruffo S., Torcini A.* Localization and equipartion of energy in the b-FPU chain: Chaotic breathers // Physica D. 1998. Vol. 121. P. 109.
25. *James G.* Existence of breathers on FPU lattices // C.R. Acad. Sci. Paris. 2001. T. 332, Ser. 1. P. 581.

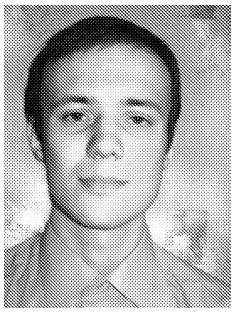
Южный федеральный университет,
физический факультет и НИИ физики,
Ростов-на-Дону

Поступила в редакцию *20.06.2007*
После доработки *31.10.2007*

DISCRETE BREATHERS AND QUASIBREATHERS IN NONLINEAR MONOATOMIC CHAINS

P.P. Goncharov, G.S. Dzhelauhova, G.M. Chechin

We study the stability of the symmetric and antisymmetric discrete breathers in the monoatomic chain described by potential energy which is a uniform function of the fourth order. It is shown that the change of the stability properties of these two dynamical objects (known as Sievers-Takeno and Page modes, respectively) takes place at the same strength of the inter-site interactions with respect to the on-site interactions. We also present a new method (the «pair synchronization» method) for the discrete breather construction in the arbitrary nonlinear Hamiltonian lattices. This method possesses an explicit physical sense. Its application technique is demonstrated with the chain of linear coupled Duffing oscillators. The concept of quasibreathers which represent the dynamical objects corresponded to small deviations from the exact breather solutions is briefly discussed.



Гончаров Пётр Петрович – родился в Донецке Ростовской области в 1986 году. В настоящее время – студент 4 курса физического факультета Южного федерального университета. Специализируется на кафедре теоретической и вычислительной физики. Область научных интересов – нелинейная динамика и вычислительная физика.
E-mail: petro_zzz@rambler.ru

Джелаухова Галина Сергеевна – родилась в Ростове-на-Дону в 1985 году. Студентка 1 курса магистратуры физического факультета Южного федерального университета. Стипендиат Фонда некоммерческих программ «Династия». Область научных интересов – нелинейная динамика, теоретико-групповые методы в физике, вычислительная физика.
E-mail: djel@rambler.ru

Чечин Георгий Михайлович – родился в Новочеркасске (1937), окончил РГУ (1960), кандидат физико-математических наук, доцент кафедры теоретической и вычислительной физики Южного федерального университета. Научный руководитель студенческой лаборатории нелинейной кристаллофизики при НИИ физики РГУ. Соросовский доцент. Читает лекции по численным методам, вычислительной и нелинейной физике. Область научных интересов – теоретико-групповые методы в физике, теория фазовых переходов, нелинейная динамика и вычислительная физика. Автор около 100 научных публикаций.
E-mail: chechin@phys.rsu.ru

Изв. вузов «ПНД», т. 15, № 6, 2007 УДК 517.9

ХАОТИЧЕСКАЯ ДИНАМИКА В СИСТЕМАХ СВЯЗАННЫХ НЕАВТОНОМНЫХ ОСЦИЛЛЯТОРОВ С РЕЗОНАНСНЫМ И НЕРЕЗОНАНСНЫМ МЕХАНИЗМОМ ПЕРЕДАЧИ ВОЗБУЖДЕНИЯ

А.П. Кузнецов, С.П. Кузнецов, А.С. Пиковский, Л.В. Тюрюкина

Рассмотрена хаотическая динамика в системах связанных неавтономных осцилляторов ван дер Поля с резонансным и нерезонансным механизмом передачи возбуждения. Для обеих моделей отображение для фазы осцилляторов за период внешнего воздействия демонстрирует гиперболический аттрактор, который представляет собой вариант соленоида Смейла–Вильямса с четырьмя оборотами вкладываемого в исходный объем образа после растяжения и поперечного сжатия. Исследованы особенности хаотической динамики в указанных моделях в зависимости от типа передачи возбуждения.

Существенной частью математической теории динамического хаоса в нелинейных системах является концепция гиперболичности [1–6]. Она подразумевает, что все существенные траектории в фазовом пространстве имеют седловой тип (гиперболические траектории). В гиперболических системах диссипативного типа реализуются странные хаотические аттракторы, состоящие из гиперболических траекторий. Такие аттракторы характеризуются свойством грубости или структурной устойчивости. Это означает нечувствительность характера динамики и структуры объектов в фазовом пространстве по отношению к вариации фигурирующих в уравнениях функций и параметров. В учебниках и монографиях по нелинейной динамике гиперболические аттракторы представлены искусственными математическими конструкциями, такими как аттрактор Плыкина, соленоид Смейла–Вильямса и др. [1–8]. Однако в последние годы появился ряд работ, в которых обсуждается возможность реализации указанных выше гиперболических аттракторов в физических системах [9–12]. Эти работы «сигнализируют» о возможности реализации гиперболического аттрактора в системе двух связанных неавтономных осцилляторов ван дер Поля с различающими вдвое рабочими частотами. Оба осциллятора становятся активными попеременно в силу принудительного периодического изменения во времени параметра, отвечающего за бифуркацию рождения предельного цикла, а возбуждение по

очереди передается от одного осциллятора к другому. При этом существует два способа передачи возбуждения: первый, когда возбуждение передается на рабочей частоте осциллятора, и второй, когда частота, на которой передается возбуждение, отличается от рабочей частоты осциллятора. В четырехмерном отображении Пуанкаре, описывающем изменение состояния системы за период внешнего воздействия, обнаруживается хаотический гиперболический аттрактор. По характеру трансформации фазового пространства в процессе эволюции во времени и по виду фазового портрета в сечении Пуанкаре этот аттрактор аналогичен аттрактору Смейла–Вильямса.

В настоящей работе рассматриваются и сопоставляются системы связанных неавтономных осцилляторов ван дер Поля с одинаковыми рабочими частотами, но разными способами (резонансным и нерезонансным) передачи возбуждения.

1. Система связанных осцилляторов с нерезонансной передачей возбуждения

Рассмотрим систему, представляющую собой связанные осцилляторы ван дер Поля с одинаковыми рабочими частотами следующего вида

$$\begin{aligned} &\ddot{x} - (A\cos(\Omega t) - x^2 - \dot{x}^2/\omega_0^2)\dot{x} + \omega_0^2 x = \varepsilon y\dot{y}, \\ &\ddot{y} - (-A\cos(\Omega t) - y^2 - \dot{y}^2/\omega_0^2)\dot{y} + \omega_0^2 y = \varepsilon x\dot{x}. \end{aligned} \tag{1}$$

Здесь x и y динамические переменные первого и второго осцилляторов, ω_0 – рабочая частота осцилляторов. Для обоих осцилляторов параметр, отвечающий за бифуркацию рождения предельного цикла в автономной подсистеме, медленно меняется во времени с амплитудой A и частотой Ω. Вариация параметра происходит в противофазе, в результате чего осцилляторы возбуждаются попеременно, каждый на своей половине периода внешнего воздействия $T = 2\pi/\Omega$. Связь между подсистемами характеризуется параметром ε. Предполагается далее, что период внешнего воздействия T содержит целое число собственных периодов подсистем, то есть $T = N2\pi/\omega_0$.

Следуя методологии работы [9], функционирование системы (1) можно описать качественно следующим образом. Пусть колебания первого осциллятора на активной стадии (первый полупериод) имеют некоторую фазу φ, то есть $x \propto \cos(\omega_0 t + \varphi)$. Через половину периода начинает генерировать второй осциллятор, получая возбуждение от первого. «Затравкой» служит сигнал вида $\varepsilon x\dot{x} \propto \sin(2\omega_0 t + 2\varphi)$. В этом случае хорошо видно, что возникшие во втором осцилляторе колебания получают фазу 2φ, однако передача возбуждения от первого осциллятора ко второму происходит на частоте вдвое большей рабочей, то есть не резонансным образом. Когда активная стадия второго осциллятора подходит к концу, он передает возбуждение первому, который как раз в указанный момент времени начинает генерировать. Затравкой для первого осциллятора, в свою очередь, служит сигнал вида $\varepsilon y\dot{y}$. Если предположить, что колебания второго осциллятора происходят по закону $y \propto \cos(\omega_0 t + 2\varphi)$, то первому осциллятору будет передаваться сигнал вида $\sin(2\omega_0 + 4\varphi)$. Тогда через период внешнего воздействия T, на новой стадии возбуждения первого осциллятора ему передается фаза, равная 4φ. Таким образом, динамика фазы первого осциллятора,

определяемая через период внешнего воздействия, будет описываться отображением

$$\varphi_{n+1} = 4\varphi_n + \mathrm{const}, \qquad (\mathrm{mod}2\pi). \tag{2}$$

Соотношение (2) представляет собой одну из простейших моделей хаоса – отображение Бернулли [13]. Константа в отображении (2) учитывает добавку к фазе, возникающую при эстафетной передаче возбуждения от одного осциллятора к другому. Отметим, что эту константу всегда можно устранить заменой переменных, отвечающей сдвигу начала отсчета фазовой переменной.

Исследуем теперь динамику рассматриваемой системы. Зафиксируем собственную частоту осцилляторов и положим ее равной $\omega_0 = 2\pi$. Как следствие, собственный период осцилляторов $T_0 = 1$, а период внешнего воздействия $T = N$ ($\Omega = 2\pi/N$). На рис. 1 представлена типичная зависимость динамических переменных первого и второго осцилляторов от времени и численно построенное отображение для фазы первого осциллятора. Фаза определялась в сечении Пуанкаре, заданном условием $t_n = nT$, и вычислялась по следующей формуле:

$$\varphi = \begin{cases} \arctan(-\omega_0^{-1}\dot{x}/x), & x > 0, \\ \arctan(-\omega_0^{-1}\dot{x}/x) + \pi, & x < 0. \end{cases} \tag{3}$$

Из рисунка видно, что осцилляторы действительно генерируют колебания попеременно, а отображение для фазы первого осциллятора качественно эквивалентно отображению (2). Помимо приведенных выше иллюстраций для системы (1) была построена проекция странного хаотического аттрактора в четырехмерном сечении Пуанкаре на плоскость $(x, \dot{x})$ (рис. 2). Можно видеть, что аттрактор качественно выглядит как гиперболический аттрактор Смейла–Вильямса [13]. Увеличенный фрагмент аттрактора свидетельствует о наличии у него канторовой структуры.

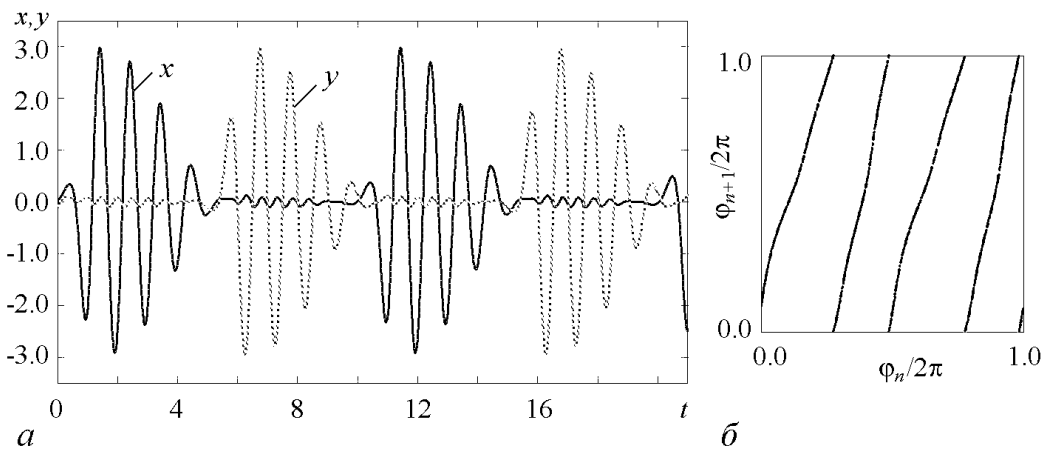


Рис. 1. *а* – Типичные временные зависимости динамических переменных x и y, полученные при численном решении системы (1) для следующих значений параметров: $\omega_0 = 2\pi$, $N = T = 10$, $A = 8.0$ и $\varepsilon = 0.5$. *б* – Численно построенное при тех же значениях параметров отображение для фазы первого осциллятора, определенной в моменты времени $t_n = nT$

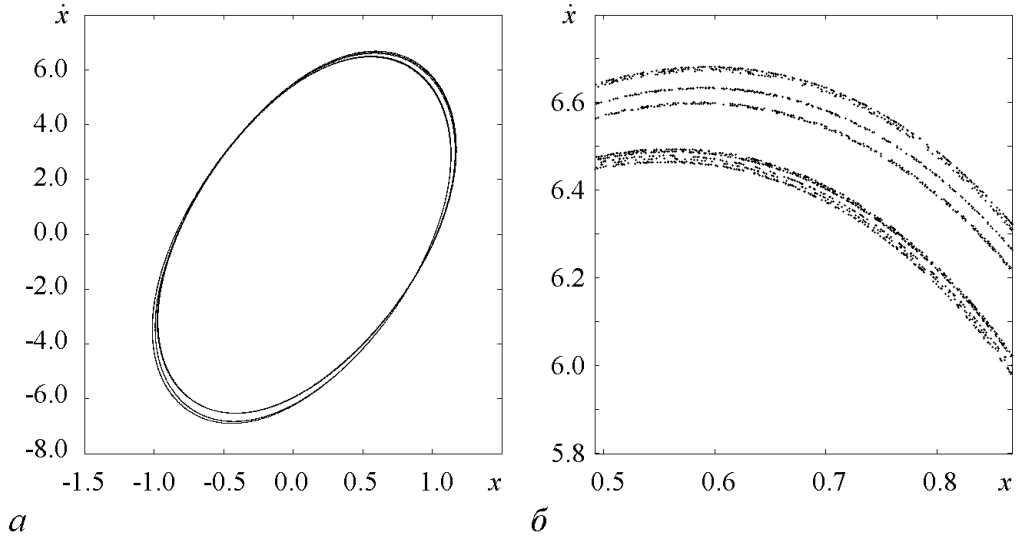


Рис. 2. Проекция странного хаотического аттрактора системы (1) в четырехмерном сечении Пуанкаре ($t_n = nT$) на плоскость $(x, \dot{x})$ (*а*) и его увеличенный фрагмент (*б*). Аттрактор построен для следующих значений параметров: $\omega_0 = 2\pi$, $N = T = 10$, $A = 7.2$ и $\varepsilon = 0.5$

Для того чтобы охарактеризовать хаотическую динамику количественно, для системы (1) была построена зависимость спектра показателей Ляпунова от параметра A (рис. 3). Для вычисления спектра показателей был реализован алгоритм Бенеттина [13], состоящий в одновременном решении системы (1) и полученных для нее линеаризованных уравнений для возмущений. Через определенное число итераций выполнялась ортогонализация Грама–Шмидта и нормализация для четырех векторов, определяющих средние скорости роста или уменьшения накапливающихся сумм логарифмов норм векторов возмущения (после ортогонализации, но до нормализации). Отметим, что показатели Ляпунова для дифференциальных уравнений λ_k и для стробоскопического отображения Λ_k связаны соотношением $\lambda_k = \Lambda_k/T$. Для старшего показателя верно следующее равенство: $\lambda_1 = \ln 4/T$. Представленная на рис. 3 зависимость спектра показателей Ляпунова системы (1) от параметра A построена для следующих значений параметров системы $\omega_0 = 2\pi$, $N = T = 10$ и $\varepsilon = 0.5$. Из рисунка хорошо видно, что старший показатель Ляпунова остается почти постоянным в достаточно широком диапазоне изменения параметра A и близок к величине $\lambda_1 = \ln 4/10 \approx 0.1386\ldots$, а остальные показатели демонстрируют достаточно плавную убывающую зависимость от параметра. Такое поведение показателей Ляпунова согласуется с предположением о гиперболической природе наблюдаемого аттрактора [9, 10, 12]. Наличие же положительного показателя служит количественным подтвер-

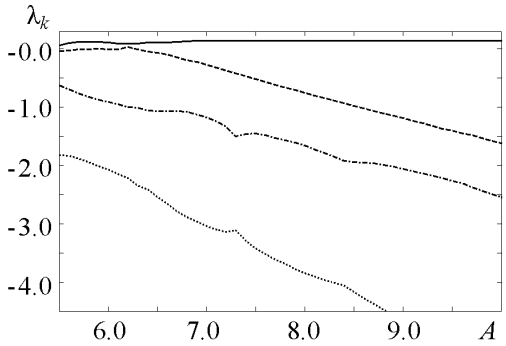


Рис. 3. Полученная численно зависимость спектра ляпуновских показателей системы (1) от параметра A при $\omega_0 = 2\pi$, $N = T = 10$ и $\varepsilon = 0.5$. В достаточно широком диапазоне старший ляпуновский показатель остается почти постоянным и находится в хорошем соответствии с оценкой $\lambda_1 = \ln 4/N \approx$ $\approx 0.1386...$

ждением наличия хаоса. Ляпуновские показатели для аттрактора, представленного на рис. 2, равны следующим значениям: $\lambda_1 = 0.1382$, $\lambda_2 = -0.3727$, $\lambda_3 = -1.3339$ и $\lambda_4 = -3.1448$.

Если хаотический аттрактор действительно гиперболический, то хаотическая динамика должна быть грубой, а значит, должна сохранять свой характер при вариации параметров. Численное исследование показало, что это действительно так. Система (1) демонстрирует хаотическое поведение аналогичной природы и при других значениях параметров N и ε. Например, на рис. 4 представлена проекция стробоскопического сечения хаотического аттрактора системы (1) и численно построенное отображение для фазы первого осциллятора. Обе иллюстрации построены для случая $\omega_0 = 2\pi$, $N = T = 10$, $A = 8.0$ и $\varepsilon = 0.05$. Хорошо видно, что ни вид аттрактора, ни отображение для фазы качественно не изменились.

Помимо вычисления показателей Ляпунова была проведена оценка размерности для представленных хаотических аттракторов. Оценка проводилась двумя методами: по формуле Каплана–Йорке и численно по алгоритму Грассбергера–Прокаччиа [7, 13]. В первом случае определялась фрактальная размерность аттрактора как объекта в стробоскопическом сечении по формуле $D_\lambda = 1 + \lambda_1/|\lambda_2|$ (так называемая ляпуновская размерность), а во втором – корреляционная размерность аттрактора в стробоскопическом сечении. Проведенные вычисления показали, что обе размерности находятся в неплохом соответствии. Так, например, для аттрактора, представленного на рис. 2, ляпуновская размерность $D_\lambda = 1.37$, а корреляционная $D_\text{к} = 1.36$, а для аттрактора, представленного на рис. 4, $D_\lambda = 1.398$ и $D_\text{к} = 1.368$.

Отметим, что при достаточно сильном изменении параметра (в область больших значений), например при $N = 100$, динамика системы (1) существенно меняется и она уже не демонстрирует хаотического аттрактора гиперболического типа. Кроме того, нарушается отображение для фазы и оно перестает удовлетворять формуле (2). Как мы покажем далее, это связано с нерезонансной передачей возбуждения от одной подсистемы к другой.

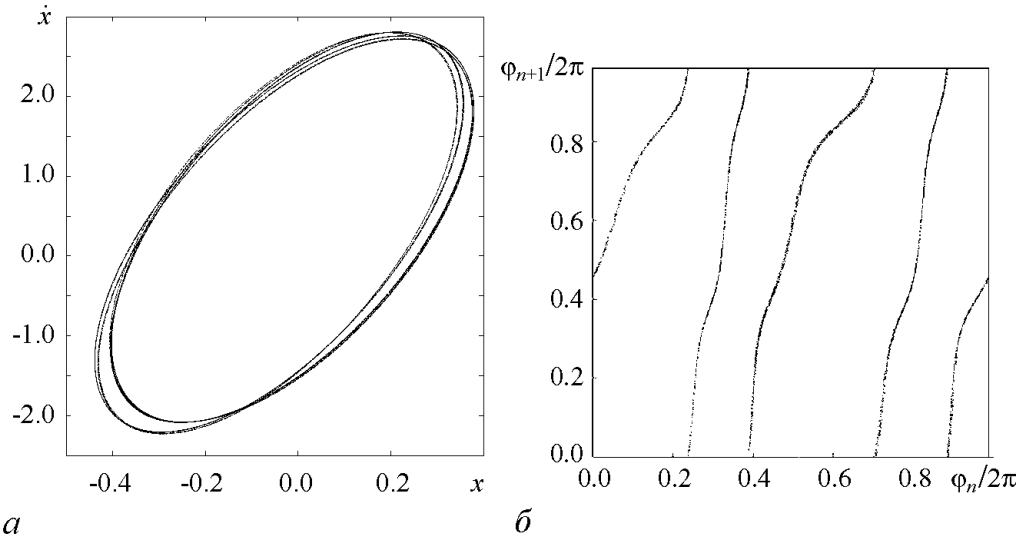


Рис. 4. Проекция странного хаотического аттрактора системы (1) в четырехмерном сечении Пуанкаре ($t_n = nT$) на плоскость $(x, \dot{x})$ (*а*) и численно построенное отображение для фазы первого осциллятора (*б*), определенной в моменты времени $t_n = nT$, при $\omega_0 = 2\pi$, $N = T = 10$, $A = 8.0$ и $\varepsilon = 0.05$

2. Система связанных осцилляторов с резонансной передачей возбуждения

Модифицируем систему (1) так, чтобы передача возбуждения от одной подсистемы к другой стала резонансной. Для этого умножим правые части обоих уравнений на вспомогательный сигнал вида $\cos\omega_0 t$. В этом случае система (1) примет вид

$$\begin{aligned} &\ddot{x} - (A\cos(\Omega t) - x^2 - \dot{x}^2/\omega_0^2)\dot{x} + \omega_0^2 x = \varepsilon y\dot{y}\cos\omega_0 t, \\ &\ddot{y} - (-A\cos(\Omega t) - y^2 - \dot{y}^2/\omega_0^2)\dot{y} + \omega_0^2 y = \varepsilon x\dot{x}\cos\omega_0 t. \end{aligned} \tag{4}$$

Соответственно такая модификация системы не приведет к изменению отображения для фазы первого осциллятора, определяемого через период внешнего воздействия.

На рис. 5 представлена типичная зависимость динамических переменных первого и второго осцилляторов от времени для системы (4). На рис. 6 показано численно построенное отображение для фазы первого осциллятора, определяемой в моменты времени $t_n = nT$ и вычисленной по формуле (3), а также проекция стробоскопического сечения хаотического аттрактора на плоскость $(x, \dot{x})$. Все иллюстрации построены для следующих значений параметров: $\omega_0 = 2\pi$, $N = T = 10$, $\varepsilon = 0.3$ и $A = 3$. Из рисунков хорошо видно, что, как и в предыдущем случае (см. раздел 1), система (4) демонстрирует хаотический аттрактор, по внешнему виду напоминающий гиперболический аттрактор Смейла–Вильямса с канторовой структурой. При этом фрактальная структура аттрактора более ярко выражена: для ее наблюдения нет необходимости строить увеличенные фрагменты аттрактора, а отображение для фазы имеет более «прямые» участки.

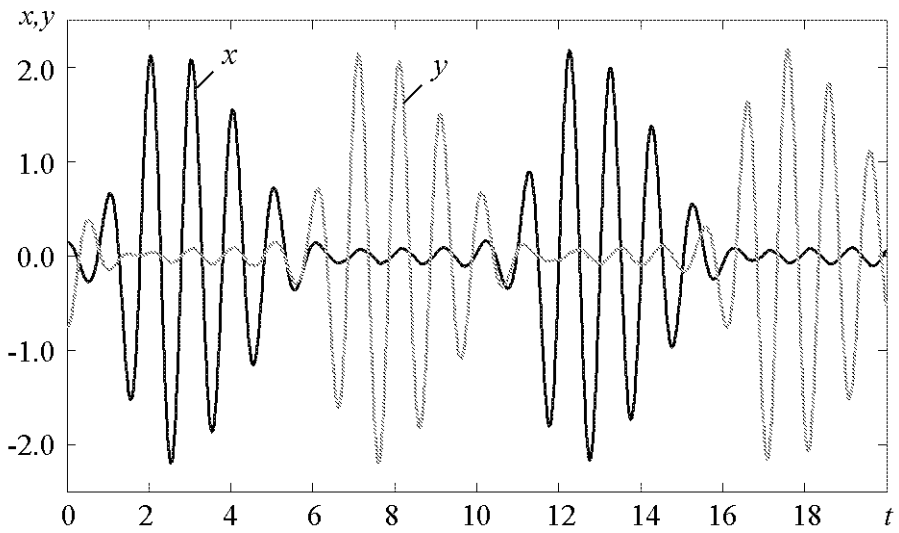


Рис. 5. Типичные временные зависимости динамических переменных x и y, полученные при численном решении системы (4) для следующих значений параметров: $\omega_0 = 2\pi$, $N = T = 10$, $A = 3.0$ и $\varepsilon = 0.3$

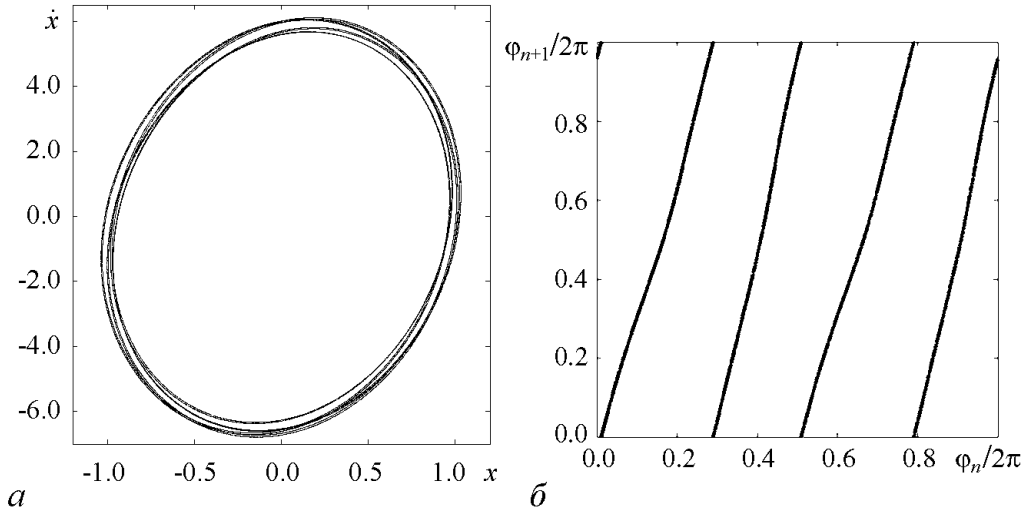


Рис. 6. Проекция странного хаотического аттрактора системы (4) в четырехмерном сечении Пуанкаре ($t_n = nT$) на плоскость $(x, \dot{x})$ (*а*) и численно построенное отображение для фазы первого осциллятора, определенной в моменты времени $t_n = nT$ (*б*), при $\omega_0 = 2\pi$, $N = T = 10$, $A = 3.0$ и $\varepsilon = 0.3$

Для системы (4) была также построена зависимость спектра показателей Ляпунова от параметра A (рис. 7). Из рисунка хорошо видно, что у системы (4), как и у предыдущей модели, существует большой диапазон по параметру A, в котором старший показатель Ляпунова остается почти постоянным и близок к величине $\lambda_1 = \ln 4/10 \approx 0.1386...$, а остальные показатели демонстрируют плавно убывающую зависимость от параметров. Этот диапазон оказывается более широким, чем в предыдущем случае. Так, старший показатель Ляпунова для системы (4) выходит на постоянное значение, близкое к величине $\lambda_1 = \ln 4/10$, при существенно меньших значениях параметра A. Помимо зависимости ляпуновских показателей для хаотического аттрактора системы (4), представленного на рис. 7, были оценены ляпуновская и корреляционная размерности. Так ляпуновская размерность оказалась $D_\lambda = 1.321$, а корреляционная – $D_к = 1.319$. Таким образом, по величине размерность аттрактора слабо зависит от типа передачи возбуждения.

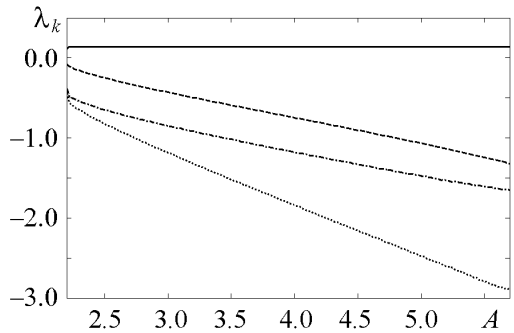


Рис. 7. Полученная численно зависимость спектра ляпуновских показателей системы (4) от параметра A при следующих значениях остальных параметров: $\omega_0 = 2\pi$, $N = T = 10$ и $\varepsilon = 0.3$. В достаточно широком диапазоне старший ляпуновский показатель остается почти постоянным и находится в хорошем соответствии с оценкой $\lambda_1 = \ln 4/N \approx \approx 0.1386...$

Основное существенное отличие модели (4) от модели (1), однако, состоит именно в более широкой области структурной устойчивости хаотического аттрактора гиперболического типа. Причем эта область расширяется не только в область меньших значений N и ε, но, что более существенно, и в область достаточно больших значений N. Так, в случае нерезонансной передачи возбуждения между подси-

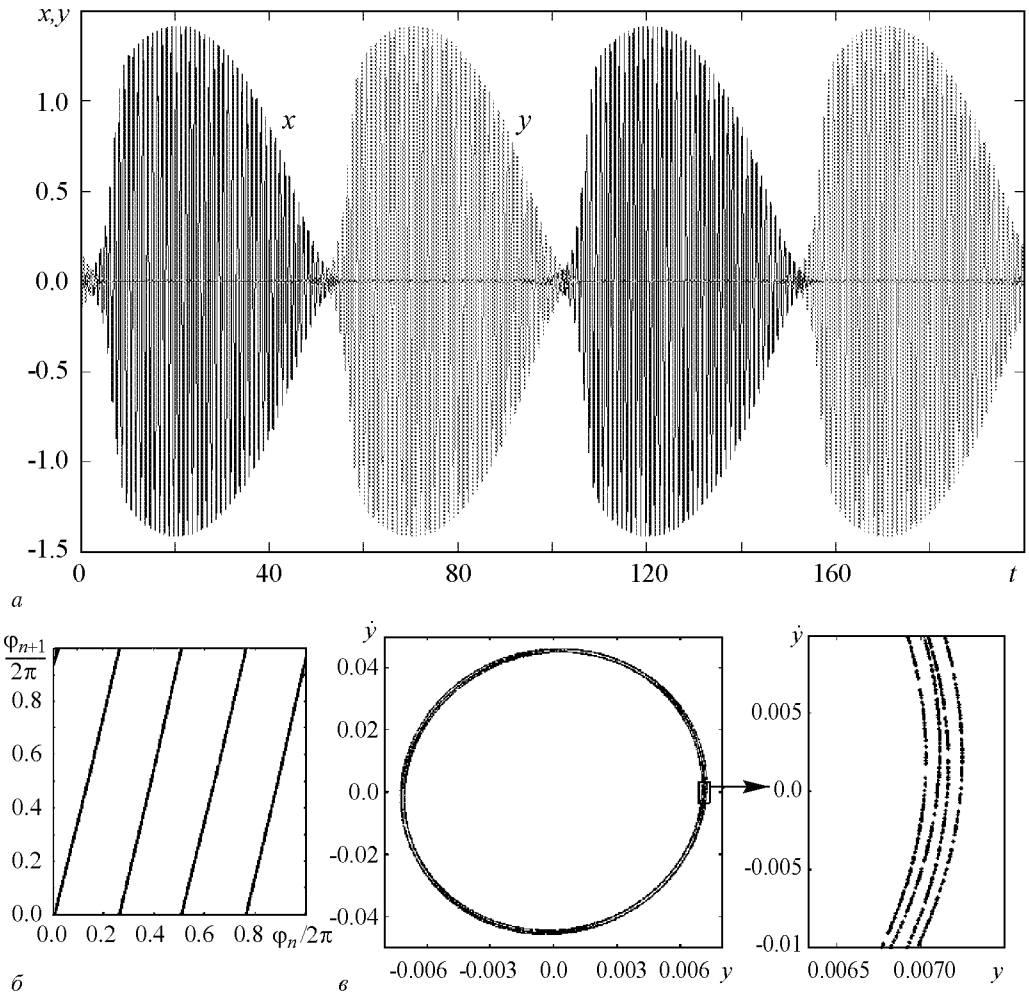


Рис. 8. *а* – Типичные временные зависимости динамических переменных x и y, полученные при численном решении системы (4) для следующих значений параметров: $\omega_0 = 2\pi$, $N = T = 100$, $A = 2.0$ и $\varepsilon = 0.03$. *б* – Численно построенное при тех же значениях параметров отображение для фазы первого осциллятора, определенной в моменты времени $t_n = nT$. *в, г* – Проекция странного хаотического аттрактора системы (4) в четырехмерном сечении Пуанкаре ($t_n = nT$) на плоскость $(y, \dot{y})$ и ее увеличенный фрагмент. Аттрактор построен для следующих значений параметров: $\omega_0 = 2\pi$, $N = T = 100$, $A = 1.0$ и $\varepsilon = 0.03$

стемами при больших N ($N = 100$), хаотический аттрактор гиперболического типа не наблюдался, а в случае резонансного он имеет место. Соответствующие иллюстрации для значений параметров $\omega_0 = 2\pi$, $N = T = 100$ и $\varepsilon = 0.03$ представлены на рис. 8 и 9. На них представлены типичная зависимость динамических переменных первого и второго осцилляторов от времени, численно построенное отображение для фазы первого осциллятора, определяемой в моменты времени $t_n = nT$, проекция странного хаотического аттрактора системы (4) в четырехмерном сечении Пуанкаре на плоскость $(y, \dot{y})$ и его увеличенный фрагмент. На рис. 9 представлена зависимость спектра ляпуновских показателей от параметра. Основные особенности этого случая от предыдущих состоят в том, что теперь проекция хаотического аттрактора, построенного в четырехмерном сечении Пуанкаре, представляет собой почти правильную окружность небольшого радиуса. Характерно также более сильное

убывание ляпуновских показателей при изменении параметра (естественно, кроме старшего, который во всем рассматриваемом диапазоне постоянен и равен величине $\lambda_1 = \ln 4/N \approx 0.01386...$). Еще одно отличие состоит в том, что значительно изменилось соотношение между старшим ляпуновским показателем и остальными показателями. Если для небольших N они отличались на порядок, то теперь на два (а то и более) порядка. Как следствие, уменьшилась размерность странного хаотического аттрактора. Так, показатели Ляпунова для представленного на рис. 8, *в* аттрактора имеют следующие значения: $\lambda_1 = 0.01386$, $\lambda_2 = -0.2357$, $\lambda_3 = -0.2817$ и $\lambda_4 = -0.5154$, а ляпуновская размерность $D_\lambda = 1.059$. При этом она находится, хоть и в худшем, но приемлемом соответствии с корреляционной размерностью $D_к = 1.02$. Это связано с увеличением периода внешнего воздействия, приводящего к медленной модуляции параметра, отвечающего за бифуркацию рождения предельного цикла.

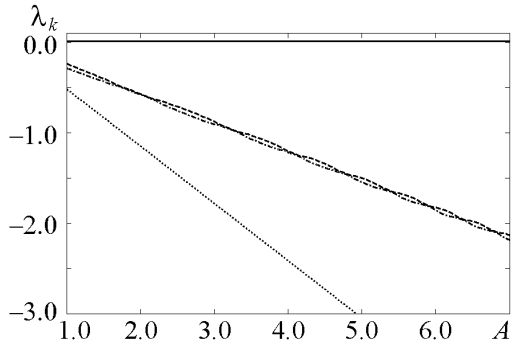


Рис. 9. Полученная численно зависимость спектра ляпуновских показателей системы (4) от параметра A при следующих значениях остальных параметров: $\omega_0 = 2\pi$, $N = T = 100$ и $\varepsilon = 0.03$. В достаточно широком диапазоне старший ляпуновский показатель остается почти постоянным и находится в хорошем соответствии с оценкой $\lambda_1 = \ln 4/N \approx \approx 0.01386...$

Наконец, при больших N существуют небольшие интервалы времени (они расположены в небольшой окрестности тех моментов времени, когда происходит передача возбуждения от одной подсистемы к другой), когда генерируют, пусть и слабо, обе подсистемы.

Выводы

Таким образом, в работе проведено исследование двух моделей системы связанных осцилляторов ван дер Поля с одинаковой рабочей частотой, но с разными типами (резонансным и нерезонансным) передачи возбуждения от одной подсистемы к другой. Для обеих моделей представлены существенные доказательства того, что они демонстрируют странный хаотический аттрактор гиперболического типа, который представляет собой разновидность аттрактора Смейла–Вильямса с четырьмя оборотами вкладываемого в исходный объем образа после растяжения и поперечного сжатия. Динамика фазы, определяемой через период внешнего воздействия, описывается отображением Бернулли. Свойства аттрактора не сильно зависят от типа передачи возбуждения. Однако области в пространстве параметров, внутри которых хаотический аттрактор является структурно устойчивым, наоборот, существенно зависят от типа связи. При резонансной передаче возбуждения они существенно больше, особенно по параметру N, который задает отношение периода внешнего воздействия к собственному периоду колебаний осцилляторов.

Работа выполнена при поддержке грантов РФФИ № 06-02-16619 и № 04-02-04011.

Библиографический список

1. *Синай Я.Г.* Стохастичность динамических систем. В кн. Нелинейные волны. М.: Наука, 1979, 192 с.
2. *Гукенхеймер Дж., Холмс П.* Нелинейные колебания, динамические системы и бифуркации векторных полей. М.; Ижевск: Институт компьютерных исследований. 2002. 559 с.
3. *Devaney R.L.* An Introduction to Chaotic Dynamical Systems. NY: Addison – Wesley, 1989.
4. *Shilnikov L.* Mathematical problems of nonlinear dynamics: a tutorial // Int. J. of Bif. & Chaos. 1997. Vol. 7, № 9. P. 1353.
5. *Каток А.Б., Хасселблат Б.* Введение в современную теорию динамических систем. Пер. с англ. М.: Факториал. 1999, 768 с.
6. *Afraimovich V. and Hsu S.-B.* Lectures on chaotic dynamical systems. AMS/IP Studies in Advanced Mathematics, Vol.28. American Mathematical Society, Providence RI, International Press, Somerville, MA, 2003.
7. *Ott E.* Chaos in Dynamical Systems. Cambridge University Press, 1993.
8. *Анищенко В.С. и д.р.* Нелинейные эффекты в хаотических и стохастических системах. М.; Ижевск: Институт компьютерных исследований. 2003.
9. *Kuznetsov S.P.* Example of a physical system with a hyperbolic attractor of a Smale–Williams type // Phys. Rev. Lett. 2005. Vol. 95. P. 44101.
10. *Belykh V., Belykh I. and Mosekilde E.* The hyperbolic Plykin attractor can exist in neuron models // Int. J. of Bif. & Chaos. 2005. Vol. 15, № 11. P. 3567.
11. *Кузнецов С.П., Селезнев Е.П.* Хаотическая динамика в физической системе со странным аттрактором типа Смейла–Вильямса // ЖТЭФ. 2006. Вып. 129, № 2. С. 400.
12. *Кузнецов С.П., Сатаев И.Р.* Проверка устойчивости гиперболичности хаотического аттрактора в системе связанных неавтономных осцилляторов ван дер Поля // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2006. Т. 14, № 5. С. 3.
13. *Кузнецов С.П.* Динамический хаос. М.: Физматлит, 2006. 356 с.

Саратовский государственный университет

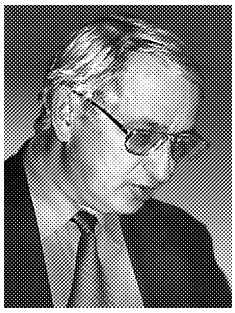
Поступила в редакцию 26.06.2007

CHAOTIC DYNAMICS IN THE SYSTEMS OF COUPLING NONAUTONOMOUS OSCILLATORS WITH RESONANCE AND NONRESONANCE COMMUNICATOR OF THE SIGNAL

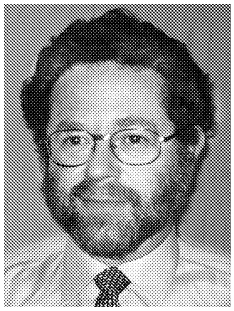
A.P. Kuznetsov, S.P. Kuznetsov, A.S. Pikovski, L.V. Turukina

Chaotic dynamics in the systems of coupling nonautonomous van der Pol oscillators with resonance and nonresonance communicator of the signal is considered. For the both models phase map for the period of the external force are show hyperbolic attractor of the Smale–Williams type. In these models features of chaotic dynamics investigated depending on type of the communicator of the signal.

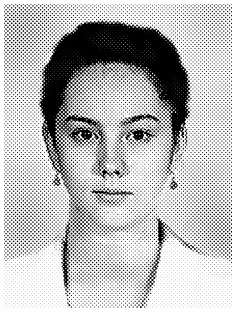
Кузнецов Александр Петрович – родился в 1957 году. Доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник Саратовского филиала Института радиотехники и электроники РАН, профессор Саратовского госуниверситета, заведующий базовой кафедрой динамических систем СГУ в СФ ИРЭ РАН. Специалист по нелинейной динамике, теории динамического хаоса и теории критических явлений. Занимается использованием идей теории катастроф и теории бифуркаций, а также развитием концепции сценариев перехода к хаосу применительно к многопараметрическим модельным и физическим нелинейным системам. Соросовский профессор (2000, 2001), научный руководитель студенческой лаборатории «Теоретическая нелинейная динамика» и школьной научной лаборатории. Опубликовал более 100 научных работ. Автор нескольких оригинальных учебных курсов для факультета нелинейных процессов и лицея прикладных наук СГУ, 10 учебных пособий и монографии «Нелинейные колебания» (совместно с С.П. Кузнецовым и Н.М. Рыскиным. М.: Физматлит, 2002). E-mail: alkuz@sgu.ru; www.sgtnd.narod.ru



Кузнецов Сергей Петрович – родился в Москве (1951). Окончил Саратовский государственный университет (1973). С 1988 – сотрудник Саратовского филиала Института радиотехники и электроники РАН, в настоящее время – заведующий лабораторией теоретической нелинейной динамики. Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук в СГУ (1977) и доктора наук (1987) по специальности радиофизика. Профессор кафедры динамических систем. Автор учебно-научной монографии «Динамический хаос» и «Нелинейные колебания» (в соавторстве с А.П. Кузнецовым и Н.М. Рыскиным). Опубликовал свыше 150 научных статей по нелинейной динамике, радиофизике и электронике. Под руководством С.П. Кузнецова защищены семь кандидатских диссертаций. Лауреат государственной научной стипендии для ученых России (1994–1996), Соросовский доцент (1998), Соросовский профессор (2000, 2001). Член редакционной коллегии журнала «Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика». E-mail:spkuz@rambler.ru



Пиковский Аркадий Самуилович – родился в Горьком (1956), окончил Горьковский государственный университет (1977). После окончания работал в Институте прикладной физики АН, затем в университетах Вупперталя и Потсдама. Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук (ГГУ,1982). Область научных интересов – нелинейная динамика, статистическая физика и теория хаоса.



Тюрюкина Людмила Владимировна – родилась в 1977 году. Кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник Саратовского филиала Института радиотехники и электроники РАН, ассистент базовой кафедры динамических систем СГУ в СФ ИРЭ РАН. Область научных интересов – динамический хаос, критические явления на пороге хаоса, сложная динамика нелинейных осцилляторов и автоколебательных систем с внешним периодическим воздействием в контексте сопоставления различных подходов к их описанию, синхронизация короткими импульсами и управление неустойчивыми режимами посредством коротких импульсов. Автор более 50 научных публикаций, из них около 20 статей в российских и зарубежных журналах. Лауреат стипендии Президента РФ для студентов и аспирантов. В 2001 и 2002 годах получила персональные гранты РФФИ для молодых исследователей. Принимает участие в работе международных научных коллективов.
E-mail:ludmila@forpost.ru

Изв. вузов «ПНД», т. 15, № 6, 2007 УДК 537.86

ОЦЕНКА ХАРАКТЕРИСТИК АВТОКОЛЕБАТЕЛЬНЫХ СИСТЕМ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ В ПЕРИОДИЧЕСКОМ РЕЖИМЕ

В.И. Пономаренко, М.Д. Прохоров, Е.П. Селезнев

Предложен метод восстановления систем с запаздыванием, находящихся в периодическом режиме колебаний. Метод основан на анализе отклика этих систем на слабое периодическое импульсное воздействие. Показано, что при помощи слабого внешнего воздействия предложенный метод позволяет восстановить время задержки в кольцевой автоколебательной системе с запаздыванием и определить порядок модельного дифференциального уравнения с запаздывающим аргументом.

Автоколебательные системы с запаздывающей обратной связью широко распространены в природе и технике [1]. Их распространенность обусловлена тем, что запаздывание реакции на сигнал и обратная связь с запаздыванием присущи многим физическим, химическим и биологическим объектам и процессам. В последние годы внимание многих исследователей привлекает задача определения параметров систем с запаздыванием по экспериментальным временным рядам. Для решения этой задачи были предложены различные методы, позволяющие восстановить модельные уравнения систем с запаздыванием по временным рядам хаотических колебаний этих систем [2–9]. Однако в случаях, когда системы с запаздыванием находятся в периодических режимах, эти методы оказываются неэффективными. Вместе с тем, задача оценки времени задержки и остальных управляющих параметров системы с запаздыванием по периодическому временному ряду является актуальной, поскольку многие практически важные системы с запаздыванием функционируют в периодических или близких к периодическим режимах [10]. Например, близки к периодическим колебания артериального давления в сердечно-сосудистой системе человека, характеризуемой наличием запаздывающих обратных связей [11], и колебания многих других физиологических систем [12]. В данной работе предложен метод определения параметров систем с запаздыванием, совершающих периодические колебания.

В основе предлагаемого метода лежит исследование отклика системы с запаздыванием на внешнее воздействие. Если внешнее воздействие достаточно сильное, то оно приводит к возникновению переходного процесса. В результате движение системы проходит в более широкой области фазового пространства, что позволяет получить дополнительную информацию о динамике системы и может помочь восстановить ее параметры [13]. Однако во многих случаях сильное воздействие на

систему является нежелательным, так как может привести к ее разрушению или существенному изменению поведения. В этих случаях предпочтительнее оказывается воздействие слабым сигналом. Нами предложена методика оценки характеристик автоколебательных систем с запаздыванием, заключающаяся в воздействии на систему слабым периодическим импульсным сигналом. Поскольку при слабом воздействии на систему шумы могут быть соизмеримы по величине с сигналом воздействия, при анализе отклика системы использован метод накопления [14].

Рассмотрим кольцевую автоколебательную систему с запаздыванием, состоящую из линии задержки, нелинейного элемента и фильтра (рис. 1, *а*) совершающую периодические автоколебания $x(t)$ с периодом T_a (рис. 1, *б*). Будем воздействовать на систему внешним сигналом $y(t)$, представляющим собой прямоугольные радиоимпульсы с линейно увеличивающейся частотой заполнения (рис. 1, *в*). Период заполнения при этом всегда остается намного меньше периода колебаний T_a, а период следования радиоимпульсов T_p значительно превышает предварительную оценку времени запаздывания системы (время задержки всегда меньше $T_a/2$). Вид модельного уравнения, описывающего такую систему, определяется параметрами фильтра и тем, в какой точке внешний сигнал вводится в кольцевую систему с запаздыванием. В случае, когда фильтр состоит из трех последовательно соединенных низкочастотных фильтров первого порядка, а сигнал $y(t)$ вводится в систему между фильтром и линией задержки (рис. 1, *а*), рассматриваемая автоколебательная система описывается дифференциальным уравнением третьего порядка с запаздыванием:

$$\varepsilon_3 \dddot{x}(t) + \varepsilon_2 \ddot{x}(t) + \varepsilon_1 \dot{x}(t) = -x(t) + f\left(x(t-\tau) + y(t-\tau)\right), \qquad (1)$$

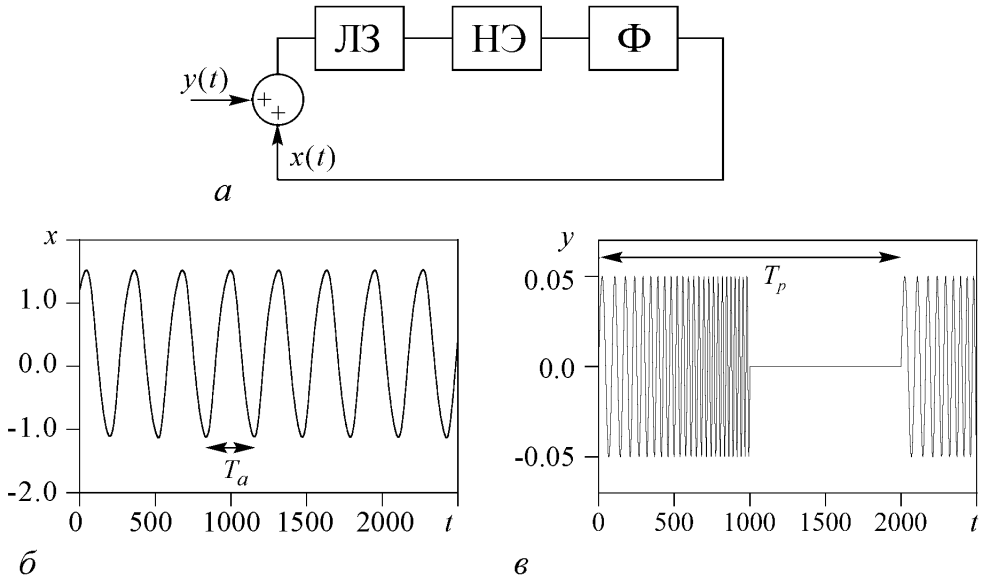


Рис. 1. *а* – блок-схема кольцевой автоколебательной системы с запаздывающей обратной связью под внешним воздействием. ЛЗ – линия задержки, НЭ – нелинейный элемент, Ф – фильтр; *б* – временная реализация периодических автоколебаний системы; *в* – временная реализация внешнего периодического импульсного сигнала с линейно увеличивающейся частотой заполнения

где τ – время запаздывания; ε_1, ε_2, ε_3 – параметры, характеризующие инерционные свойства системы; f – нелинейная функция. Если в качестве фильтра используется двухзвенный фильтр, то $\varepsilon_3 = 0$, а в случае однозвенного фильтра $\varepsilon_2 = \varepsilon_3 = 0$ и модельное уравнение принимает вид уравнения с запаздыванием первого порядка. Так как нас интересует периодический режим колебаний системы, мы выбрали сигмоидную нелинейную функцию

$$f(x) = \frac{c}{(1 + a\exp\left[-b\left(x - x^*\right)\right])} - \frac{c}{(1 + a\exp\left[b\left(x - x^*\right)\right])}, \tag{2}$$

обеспечивающую устойчивые периодические колебания в широком диапазоне изменения управляющих параметров. Исследования проводились при времени задержки $\tau = 120$ с, частоте среза фильтров $f_F = 0.0032$ Гц и параметрах нелинейной функции $a = 1$, $b = 2$, $c = -2$, $x^* = 0.5$. Радиоимпульсы имели амплитуду $A = 0.05$, период следования $T_p = 2000$ с, длительность 1000 с и частоту заполнения f_r, линейно изменяющуюся от 0.01 до 0.04 Гц. Амплитуда колебаний в автогенераторе была близка к 1, а период колебаний T_a принимал значения 320, 410 и 510 секунд для систем первого, второго и третьего порядка, соответственно.

Следует отметить, что для линейных систем существует ряд методов, позволяющих определить их характеристики (импульсную, фазочастотную и амплитудно-частотную) по отклику системы на некоторое воздействие [15]. При применении аналогичных подходов к нелинейным автоколебательным системам необходимо разделять собственную динамику системы (в данном случае это периодическое поведение автогенератора) и отклик на тестирующий импульс. Поэтому сигналы внешнего воздействия и автоколебаний фильтровались высокочастотным фильтром высокого порядка с частотой среза $f_c = 0.01$ Гц, намного большей основной частоты автоколебаний $f_a = 1/T_a$, но не превышающей частоту заполнения радиоимпульса f_r. Затем проводилось сложение участков временного ряда отфильтрованных автоколебаний, начала которых соответствуют началам радиоимпульса (рис. 2, *а*). Такой подход, основанный на методе накопления, позволяет существенно увеличить амплитуду импульса, прошедшего по кольцу обратной связи, так как сложение высокочастотных радиоимпульсов происходит в одинаковой фазе. Собственные колебания системы, напротив, складываются в разных фазах и компенсируют друг друга. В результате удается выделить слабый сигнал воздействия в отклике системы даже при наличии шумов, которые имеют случайные амплитуды разного знака и при наложении стремятся к нулю при увеличении числа складываемых участков ряда. На следующем шаге строилась взаимная корреляционная функция сигналов воздействия $y(t)$ и отклика $z(t)$ системы

$$C(s) = \frac{\langle y(t)z(t+s)\rangle}{\sqrt{\langle y(t)^2\rangle\,\langle z(t)^2\rangle}}, \tag{3}$$

где угловые скобки обозначают усреднение по времени. По ее виду можно определить время запаздывания и порядок фильтра в цепи обратной связи системы с задержкой.

Рассмотрим изменения, которые претерпевает тестовый сигнал воздействия $y(t)$, проходя по кольцу обратной связи системы с запаздыванием (см. рис. 1, *а*). Во-первых, он задерживается линией задержки. Взаимная корреляционная функция

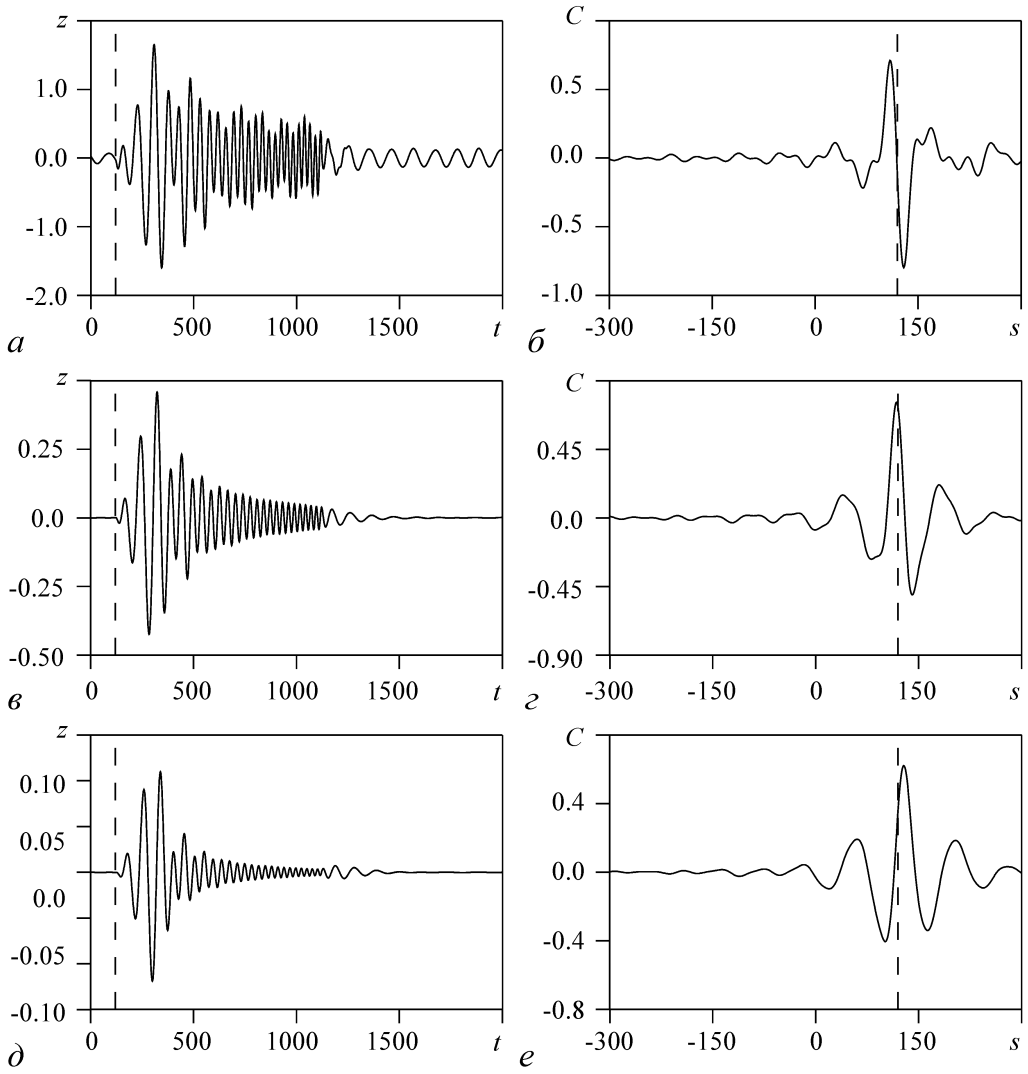


Рис. 2. Накопленный за 100 наложений отклик $z(t)$ системы с запаздыванием на периодическое импульсное воздействие и взаимная корреляционная функция $C(s)$ сигналов воздействия и отклика системы с запаздыванием первого (*а, б*), второго (*в, г*) и третьего (*д, е*) порядка. Пунктирными линиями показано время, соответствующее времени задержки $\tau = 120$ с

между сигналом $y(t)$ и откликом, выделенным из автоколебаний после линии задержки, будет иметь максимум, сдвинутый относительно нуля на время задержки. Во-вторых, тестовый сигнал проходит через нелинейный элемент. Так как нелинейная функция (2) имеет отрицательный наклон, нелинейный элемент изменяет фазу сигнала на π [16]. Это приводит к тому, что взаимная корреляционная функция между сигналом $y(t)$ и откликом, выделенным из автоколебаний после нелинейного элемента, вместо максимума будет иметь минимум на времени задержки. В-третьих, тестовый сигнал проходит через фильтр, который изменяет фазу сигнала, причем, поскольку частота f_r сигнала $y(t)$ больше частоты среза фильтра в цепи обратной связи f_F, то сдвиг фазы для всего радиоимпульса с переменной частотой заполнения почти одинаков для начала и конца импульса. Для фильтра первого порядка

изменение фазы сигнала составляет около $-\pi/2$. В результате, взаимная корреляционная функция сигналов воздействия и отклика системы сдвигается относительно нуля таким образом, что времени запаздывания соответствует положение нуля корреляционной функции $C(s)$, расположенного слева от самого глубокого минимума (рис. 2, *б*). Для фильтра второго порядка дополнительный сдвиг фазы составляет почти $-\pi$, а значит, в этом случае времени задержки вновь соответствует положение максимума взаимной корреляционной функции сигналов воздействия и отклика системы (рис. 2, *г*). Для фильтра третьего порядка дополнительный сдвиг фазы составляет почти $-3\pi/2$. При этом время запаздывания определяется положением нуля корреляционной функции (3), расположенным слева от самого большого максимума (рис. 2, *е*). Заметим, что фильтр высоких частот не изменяет фазовые соотношения между сигналом воздействия и откликом системы, поскольку оба этих сигнала проходят через одинаковые фильтры.

Оценить время задержки и порядок фильтра в цепи обратной связи системы с запаздыванием можно не только по виду взаимной корреляционной функции сигналов воздействия и отклика системы, но и по виду самого отклика системы на внешнее воздействие. На рис. 2 *а*, *в* и *д* приведен накопленный за 100 наложений отклик на внешнее воздействие системы с запаздыванием первого, второго и третьего порядка, соответственно. Задержка отклика позволяет оценить время запаздывания системы. С ростом частоты заполнения тестового радиоимпульса хорошо заметно уменьшение амплитуды отклика. Свойства такого поведения отклика определяются амплитудно-частотной характеристикой фильтра. Ослабление сигнала вне области пропускания низкочастотного фильтра увеличивается со скоростью примерно $-6n$ дБ/октава, где n – порядок фильтра [15]. Мы получили следующую оценку уменьшения амплитуды: 7.5 дБ/октава для рис. 2, *а*, 13.5 дБ/октава для рис. 2, *в* и 16.8 дБ/октава для рис. 2, *д*, что позволяет уверенно определить порядок фильтра и модельного уравнения.

При тестировании метода в присутствии как аддитивного, так и динамического шума, дисперсия которого до 40 раз превышала дисперсию радиоимпульса, мы получили результаты, качественно подобные представленным. При дальнейшем увеличении уровня шума требовалось суммировать большее число откликов системы на тестирующий импульс для выделения слабого сигнала воздействия в отклике системы методом накопления.

Предложенный метод позволяет оценить время задержки и порядок модельного дифференциального уравнения с запаздыванием и в случае, когда система с запаздыванием находится в хаотическом режиме колебаний. Однако, в отличие от известных методов восстановления систем с запаздыванием по хаотическим временным рядам [2–9], такой подход связан с оказанием на систему внешнего воздействия, что не всегда является возможным.

Таким образом, нами предложен и апробирован на системах с запаздыванием первого, второго и третьего порядка метод оценки времени задержки и порядка модельного дифференциального уравнения с запаздыванием для автоколебательных систем с запаздыванием, находящихся в периодическом режиме колебаний.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, гранты № 07-02-00589 и № 08-02-00081.

Библиографический список

1. *Hale J.K., Lunel S.M.V.* Introduction to Functional Differential Equations. New York: Springer, 1993.
2. *Bunner M.J., Popp M., Meyer Th., Kittel A., Rau U., Parisi J.* Recovery of scalar time-delay systems from time series // Phys. Lett. A. 1996. Vol. 211. P. 345.
3. *Voss H., Kurths J.* Reconstruction of non-linear time delay models from data by the use of optimal transformations // Phys. Lett. A. 1997. Vol. 234. P. 336.
4. *Hegger R., Bunner M.J., Kantz H., Giaquinta A.* Identifying and modeling delay feedback systems // Phys. Rev. Lett. 1998. Vol. 81. P. 558.
5. *Bezruchko B.P., Karavaev A.S., Ponomarenko V.I., Prokhorov M.D.* Reconstruction of time-delay systems from chaotic time series // Phys. Rev. E. 2001. Vol. 64. 056216.
6. *Horbelt W., Timmer J., Voss H.U.* Parameter estimation in nonlinear delayed feedback systems from noisy data // Phys. Lett. A. 2002. Vol. 299. P. 513.
7. *Udaltsov V.S., Larger L., Goedgebuer J.P., Locquet A., Citrin D.S.* Time delay identification in chaotic cryptosystems ruled by delay-differential equations // J. of Optical Technology. 2005. Vol. 72. P. 373.
8. *Ortin S., Gutierrez J.M., Pesquera L., Vasquez H.* Nonlinear dynamics extraction for time-delay systems using modular neural networks synchronization and prediction // Physica A. 2005. Vol. 351. P. 133.
9. *Prokhorov M.D., Ponomarenko V.I., Karavaev A.S., Bezruchko B.P.* Reconstruction of time-delayed feedback systems from time series // Physica D. 2005. Vol. 203. P. 209.
10. *Рубаник В.П.* Колебания квазилинейных систем с запаздыванием. М.: Наука, 1969.
11. *Ringwood J.V., Malpas S.C.* Slow oscillations in blood pressure via a nonlinear feedback model // Am. J. Physiol. Regulatory Integrative Comp. Physiol. 2001. Vol. 280. P. 1105.
12. *Bocharov G.A., Rihan F.A.* Numerical modelling in biosciences using delay differential equations // J. Comp. Appl. Math. 2000. Vol. 125. P. 183.
13. *Bezruchko B.P., Dikanev T.V., Smirnov D.A.* Role of transient processes for reconstruction of model equations from time series // Phys. Rev. E. 2001. Vol. 64. 036210.
14. *Харкевич А.А.* Борьба с помехами. М.: Наука, 1965.
15. *Баскаков С.И.* Радиотехнические цепи и сигналы. М.: Высшая школа, 2000.
16. *Войшвилло Г.В.* Усилительные устройства. М.: Радио и связь,1983.

Саратовский филиал Института радиотехники и электроники РАН

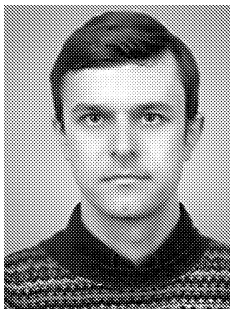
Поступила в редакцию 29.08.2007

ESTIMATION OF CHARACTERISTICS OF SELF-OSCILLATING TIME-DELAY SYSTEMS IN PERIODIC REGIME

V.I. Ponomarenko, M.D. Prokhorov, Ye.P. Seleznev

A method is proposed for reconstructing time-delay systems in periodic regime of oscillations. The method is based on the analysis of these systems response to a weak periodic pulse driving. It is shown that proposed method with using of weak driving allows one to recover the delay time of a ring self-oscillating system with time-delayed feedback and to define the order of a model delay-differential equation.

Пономаренко Владимир Иванович – родился в 1960 году в Саратове, окончил Саратовский государственный университет (1982). Кандидат физико-математических наук (1992). Старший научный сотрудник Саратовского филиала Института радиотехники и электроники РАН. Область научных интересов – статистическая радиофизика, анализ временных рядов, нелинейная динамика и ее приложения. Автор более 130 научных публикаций.



Прохоров Михаил Дмитриевич – родился в 1968 году в Саратове, окончил Саратовский государственный университет (1992). После окончания СГУ работает старшим научным сотрудником Саратовского филиала Института радиотехники и электроники РАН. Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук в СГУ (1997). Область научных интересов – математическое моделирование, анализ временных рядов, синхронизация. Опубликовал более 100 научных работ.

Селезнев Евгений Петрович – родился в 1960 году в Саратове, окончил Саратовский государственный университет (1982). После окончания СГУ работает ведущим научным сотрудником Саратовского филиала Института радиотехники и электроники РАН. Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук (1990) и доктора физико-математических наук (2006). Область научных интересов – радиофизика, экспериментальное исследование нелинейных явлений. Имеет более 120 научных публикаций.

Изв. вузов «ПНД», т. 15, № 6, 2007 УДК 517.9

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ СИНХРОНИЗАЦИИ ДВУХЧАСТОТНЫХ КВАЗИПЕРИОДИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЙ

В.С. Анищенко, С.М. Николаев

Приводится электронная схема автономного генератора двухчастотных квазипериодических колебаний и результаты экспериментальных исследований эффекта синхронизации квазипериодических колебаний внешним двухчастотным сигналом.

Введение

Квазипериодическими колебаниями называют колебания вида

$$x(t) = f[\varphi_1(t), \varphi_2(t), ..., \varphi_n(t)],$$

где $\varphi_i(t) = \omega_i(t)$, $i = 1, 2, ..., n$. Функция $x(t)$ имеет период 2π по каждому из аргументов $\varphi_i(t)$:

$$x(\varphi_i + 2\pi) = x(\varphi_i).$$

Все частоты ω_i являются независимыми в том смысле, что между ними не существует рациональных соотношений. В фазовом пространстве n-мерному квазипериодическому колебанию отвечает n-мерный эргодический тор.

Исследуем двухчастотные квазипериодические автоколебания, то есть колебания с двумя независимыми частотами, возникающие в автономной нелинейной диссипативной динамической системе. Математически, модель такой системы была введена нами в [1]. В работе [2] представлены результаты численного исследования динамики генератора двухчастотных колебаний описанного в [1]. Установлено, что введенная в рассмотрение модель генератора [2] реализует режим устойчивых двухчастотных колебаний, последовательность бифуркаций удвоения двумерного тора и переход к хаосу [2]. С использованием модели генератора [1] установлено новое явление – эффект синхронизации квазипериодических колебаний в виде захвата числа вращения на двумерном торе [2].

Целью настоящей работы является экспериментальная проверка всех численных результатов, полученных в работах [1, 2]. Введем в рассмотрение электронную схему генератора квазипериодических колебаний, покажем ее соответствие математической модели, предложенной в [1], и исследуем экспериментально явление синхронизации двухчастотных квазипериодических колебаний. В итоге демонстрируется полное соответствие экспериментальных и численных результатов.

1. Автономный генератор квазипериодических колебаний

Рассмотрим в качестве исходной известную модель генератора Анищенко–Астахова [3], схема которого представлена на рис. 1, *а*. Схема включает классический генератор ван дер Поля, в котором введена дополнительная нелинейная инерционная обратная связь. Уравнения генератора представляют собой трехмерную динамическую систему с тремя параметрами

$$\begin{aligned} \dot{x} &= mx + y - xz - dx^3, \\ \dot{y} &= -x, \\ \dot{z} &= -gz + g\Phi(x). \end{aligned} \tag{1}$$

Первые два уравнения системы (1) описывают генератор ван дер Поля. В этом легко убедиться, положив $\dot{z} = 0$ и используя $\Phi(x) = x^2$. Как было показано, система (1) реализует переход к хаосу в соответствии с теоремой Шильникова [4] при условии, что нелинейная функция $\Phi(x)$ является асимметричной относительно переменной x и задается в виде [3]

$$\Phi(x) = I(x)x^2, \qquad I(x) = \begin{cases} 1, \ x > 0, \\ 0, \ x \le 0, \end{cases} \tag{2}$$

или, например,

$$\Phi(x) = \exp x - 1.$$

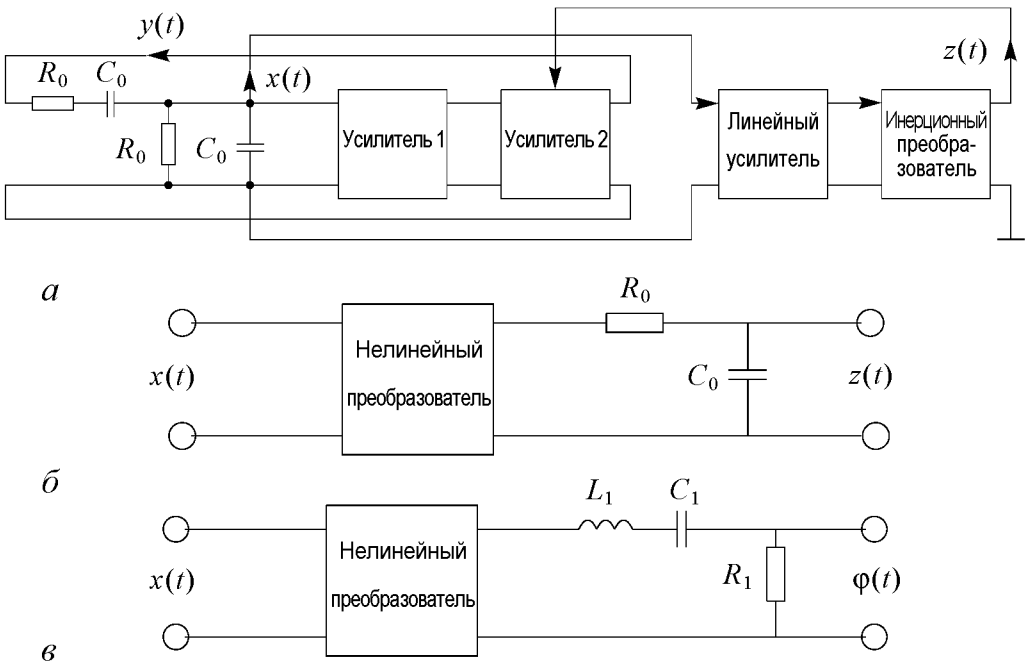


Рис. 1. Схемы: *а* – генератора Анищенко–Астахова, *б* – инерционного каскада дополнительной обратной связи генератора Анищенко–Астахова, *в* – инерционного каскада дополнительной обратной связи генератора квазипериодических колебаний

Условия асимметрии (2) обеспечивают существование в системе (1) особого решения в виде петли сепаратрисы седло-фокуса и, как следствие, реализацию режима спирального хаоса. С физической точки зрения, это достигается за счет самосогласованного воздействия на основной усилитель со стороны обратной связи, заданной третьим уравнением в системе (1). При малых амплитудах сигнала $x(t)$ это воздействие незначительно, и система (1) генерирует предельный цикл. С ростом параметра возбуждения m интенсивность колебаний $x(t)$ растет, сигнал обратной связи $z(t)$ нарастает тоже и более активно начинает управлять коэффициентом усиления основного усилителя. Система реализует последовательность бифуркаций удвоения периода циклов и переход к хаосу.

С целью обеспечения незатухающих двухчастотных колебаний в систему (1) необходимо ввести элемент, характеризуемый собственной частотой, отличающейся от резонансной частоты контура генератора. Одним из возможных способов является использование колебательного контура в цепи дополнительной обратной связи. Необходимо сделать так, чтобы сигнал обратной связи $z(t)$ включал колебания независимой частоты, которые будут модулировать коэффициент усиления и обеспечивать квазипериодические автоколебания. Эта идея получила практическое воплощение [1].

2. Экспериментальная реализация генератора

Рассмотрим схемы, представленные на рис. 1, *б, в*. На рис. 1, *б* показана схема инерционного каскада дополнительной обратной связи генератора Анищенко–Астахова. Каскад представляет собой нелинейный преобразователь и RC-фильтр, описываемые одномерным дифференциальным уравнением (третье уравнение в системе (1)). На рис. 1, *в* представлена схема нового инерционного каскада, который вместо RC-фильтра включает диссипативный колебательный контур некоторой резонансной частоты. Уравнения, описывающие схему рис. 1, *в*, имеют вид

$$\begin{aligned} \dot{z} &= \varphi, \\ \dot{\varphi} &= -\gamma\varphi + \gamma\Phi(x) - gz, \end{aligned} \tag{3}$$

где γ – параметр затухания; g – параметр, представляющий нормированную резонансную частоту нового фильтра. Нетрудно убедиться, что уравнения (3) описывают диссипативный колебательный контур в режиме вынужденных колебаний

$$\ddot{z} + \gamma\dot{z} + gz = \gamma\Phi(x). \tag{4}$$

Экспериментальная реализация генератора квазипериодических колебаний, соответствующая схеме генератора Анищенко–Астахова (см. рис. 1, *а*), с учетом предложенных изменений (см. рис. 1, *в*) представляет собой RC-генератор с дополнительной обратной связью, состоящей из квадратичного детектора и LCR-контура. При этом сигнал с дополнительной обратной связи модулирует коэффициент усиления усилителя RC-генератора.

На рис. 2. представлена электронная схема генератора квазипериодических колебаний. RC-генератор включает RC-цепь, состоящую из элементов R_1, C_1, R_2, C_2,

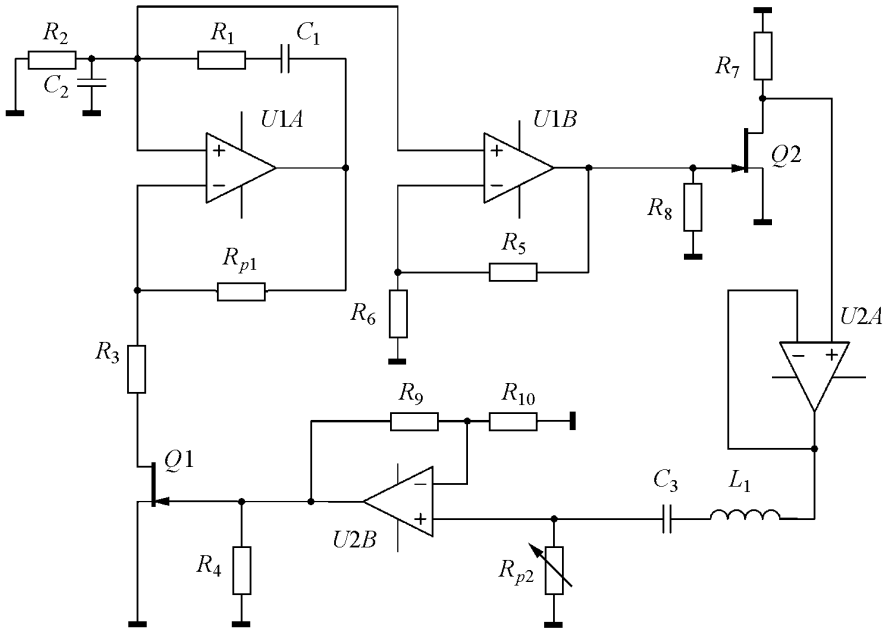


Рис. 2. Электронная схема генератора квазипериодических колебаний

и операционный усилитель U1A, коэффициент усиления которого определяется подстроечным резистором R_{p_1} и сопротивлением R_Q полевого транзистора Q_1. Дополнительная обратная связь состоит из усилителей U1B и U2B, однополупериодного квадратичного детектора, в качестве которого используется полевой транзистор Q_2, и LCR-контура, включающего элементы L_1, C_3 и R_{p_2}.

Уравнение RC-генератора имеет вид

$$\ddot{U}_0 + \frac{1}{RC}(2 - \frac{R_{p_1}}{R_3 + R_Q})\dot{U}_0 - \frac{1}{R^2C^2}U_0 = 0, \tag{5}$$

где $R = R_1 = R_2$ и $C = C_1 = C_2$ – элементы RC-цепи, U_0 – потенциал на неинвертирующем входе операционного усилителя U1A.

Уравнение дополнительной обратной связи

$$\ddot{U}_1 + \frac{R_{p_2}}{L_1}\dot{U}_1 + \frac{1}{L_1C_3}U_1 = \frac{R_{p_2}}{L_1}f_1(U_0), \tag{6}$$

где U_1 – потенциал на выходе LCR-контура, оказывающий влияние на сопротивление R_Q полевого транзистора Q_1 (см. рис. 2) (аппроксимируется экспоненциальной зависимостью); $f_1(U_0)$ – функция, описывающая работу однополупериодного квадратичного детектора.

Переходя от уравнений (5) и (6) к уравнениям в первых производных в безразмерном времени $t = \tau/(RC)$, получим

$$\begin{aligned} \dot{x} &= (\frac{m}{f_2(z)} - 2)x + y - dx^3, \\ \dot{y} &= -x, \\ \dot{z} &= \varphi, \\ \dot{\varphi} &= -\gamma\varphi + \gamma f_1(x) - gz. \end{aligned} \tag{7}$$

Были введены следующие переобозначения: $m = R_{p_1}$, $f_2(z) = R_1 + R_Q$, $\gamma = RCR_{p_2}/L_1$, $g = R^2C^2/(L_1C_3)$, параметр d характеризует диссипативную нелинейность усилителя RC-генератора и ограничивает амплитуду колебаний в контуре. Как и в случае генератора Анищенко–Астахова (1), в генераторе квазипериодических колебаний (7) с ростом параметра возбуждения m растет амплитуда колебаний и, соответственно, сигнал $f_2(z)$ на выходе цепи дополнительной обратной связи, который начинает оказывать все большее влияние на параметр возбуждения m. В результате система претерпевает бифуркацию мягкого рождения тора, который характеризуется двумя основными частотами, одна из которых определяется RC-цепью генератора, а вторая – LCR-контуром в дополнительной обратной связи. В ходе экспериментов было установлено, что помимо бифуркаций рождения тора и перехода к хаосу через его разрушение, предложенная установка (см. рис. 2.) демонстрирует также последовательность бифуркаций удвоения квазипериодических колебаний [1].

3. Синхронизация квазипериодических колебаний

Проведенные ранее численные эксперименты по внешней и взаимной синхронизации двух генераторов квазипериодических колебаний [2] показали, что область захвата частот модуляции генераторов лежит внутри клюва синхронизации несущих частот. При сближении значений управляющих параметров генераторов в колебаниях системы сначала возникают четыре независимые частоты, затем после захвата несущих частот остаются три независимые частоты, а затем захватываются частоты модуляции и, соответственно, числа вращения. Расчеты полного спектра характеристических показателей Ляпунова показали, что при отсутствии синхронизации система демонстрирует колебания с четырьмя независимыми частотами, затем при частичной синхронизации наблюдаются три независимые частоты, при полной синхронизации – две независимые частоты [2].

Однако остается неясным, от чего зависит взаимное расположение областей захвата частот генератора. Для ответа на этот вопрос будем рассматривать наиболее общий случай, при котором частоты внешнего воздействия и собственные частоты колебаний генератора не равны, а также не совпадают и их числа вращения. Будем менять несущую частоту воздействия, соответственно, будет меняться число вращения. По спектрам мощности колебаний будем исследовать области захвата частот генератора, при этом оставляя без изменений управляющие параметра системы.

Уравнения генератора квазипериодических колебаний под воздействием внешнего возмущения имеют вид

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \frac{m}{f_1(z)}x + y - dx^3 + kF(t), \\ \dot{y} &= -x, \\ \dot{z} &= \varphi, \\ \dot{\varphi} &= -\gamma\varphi + \gamma f_2(x) - gz, \end{aligned} \tag{8}$$

где $F(t) = A_0(1 + K_{\mathrm{mod}} \sin \Omega t) \sin \omega t$ – квазипериодический сигнал от внешнего источника, k – параметр связи. На рис. 3 представлена схема экспериментальной

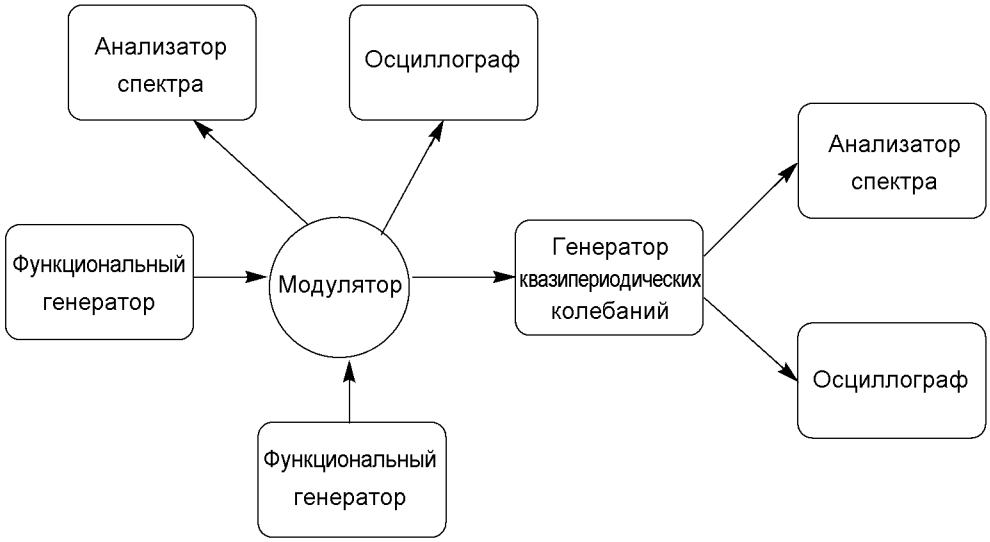


Рис. 3. Общая схема экспериментальной установки

установки, на которой исследовалось явление синхронизации квазипериодических колебаний. Сигнал от внешнего источника представляет собой квазипериодические двухчастотные колебания. Несущая и огибающая сигнала являются синусоидальными, что соответствует классическому примеру двухчастотных колебаний.

Подадим на генератор внешний амплитудно-модулированный сигнал с частотой огибающей $f_{1\mathrm{e}} = 3.06$ кГц и коэффициентом модуляции $K_{\mathrm{mod}} = 0.5$. При этом значения параметров генератора соответствуют коэффициенту модуляции примерно 0.3, собственная частота несущей $f_{0\mathrm{g}} = 10.69$ кГц, собственная частота модуляции $f_{1\mathrm{g}} = 2.82$ кГц. Будем менять частоту несущей внешнего воздействия $f_{0\mathrm{e}}$ в диапазоне $10 \div 11$ кГц.

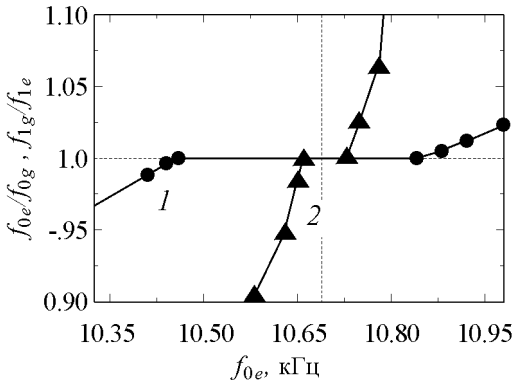
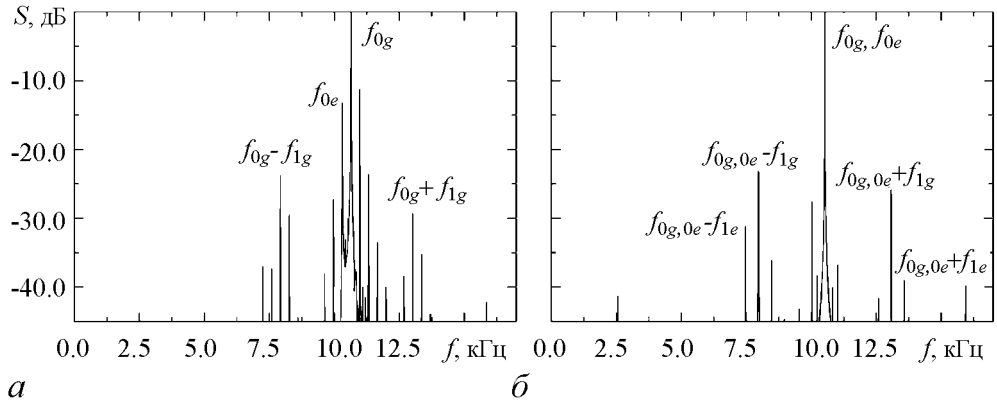


Рис. 4. Зависимость отношения частоты модуляции *2* и частоты несущей *1* генератора от частоты несущей сигнала внешнего возмущения

На рис. 4 показана зависимость отношения частот модуляции, несущей генератора и внешнего воздействия от несущей частоты внешнего сигнала. Как и в случае синхронизации двух генераторов, в данном случае при изменении частоты несущей внешнего сигнала сначала захватывается частота несущей генератора, а затем – его частота модуляции. На рис. 5, *а–в* показаны соответствующие спектры мощности колебаний генератора для трех режимов. Как говорилось выше: при несинхронном режиме наблюдаются четыре независимые частоты; при частично синхронном режиме наблюдаются три независимые частоты (несущая и две частоты модуляции); в случае полной синхронизации – две независимые частоты (несущая и модуляции).



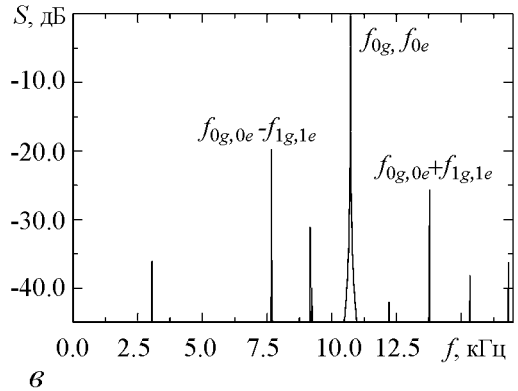


Рис. 5. Спектры мощности колебаний на выходе генератора: *а* – несинхронный режим, $f_{0\mathrm{e}} = 10.28$ кГц; *б* – частично синхронный режим, $f_{0\mathrm{e}} = 10.5$ кГц; *в* – синхронный режим, $f_{0\mathrm{e}} = 10.69$ кГц

На рис. 6, *а, б* представлены области синхронизации соответствующих частот генератора и внешнего воздействия в зависимости от параметра связи, снятые при различных значениях глубины модуляции внешнего воздействия. Как видно из рисунка, взаимное расположение областей захвата несущей частоты и частоты модуляции зависит не только от параметра связи, но и от глубины модуляции. На рис. 7

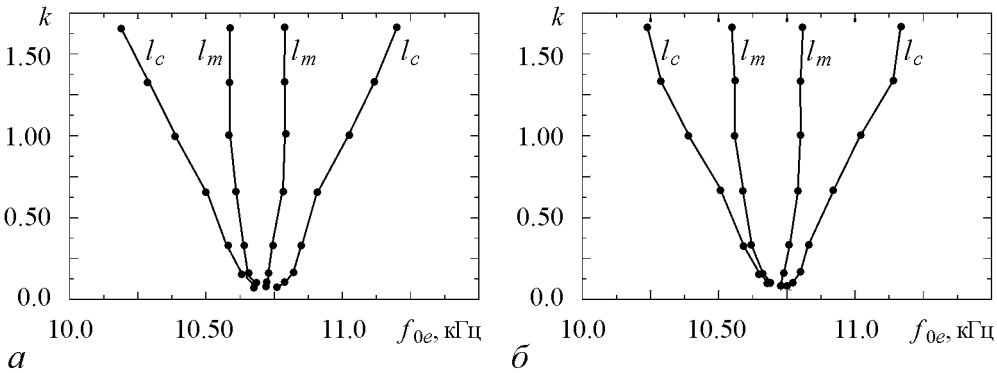


Рис. 6. Области синхронизации соответствующих сигналов генератора и воздействия при различных значениях глубины модуляции сигнала воздействия: *а* – $K_{\mathrm{mod}} \approx 0.7$, *б* – $K_{\mathrm{mod}} \approx 0.9$. Линиями l_c ограничена область синхронизации частот несущей, линиями l_m – частот модуляции

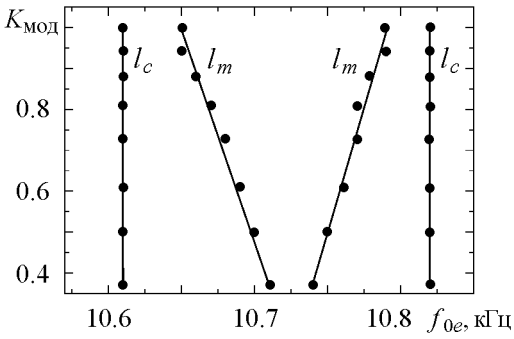


Рис. 7. Зависимость расположения областей синхронизации от коэффициента модуляции K_{mod} при фиксированном параметре связи k; линиями l_c ограничена область синхронизации частот несущей, линиями l_m – частот модуляции

представлены области захвата несущих частот и частот модуляции в зависимости от глубины модуляции. Увеличение глубины модуляции не влияет на ширину области захвата несущей частоты, тогда как ширина области захвата частоты модуляции растет.

Следует также отметить тот факт, что в ходе эксперимента не удалось выявить режимы, при которых ширина области захвата частоты модуляции была бы шире области захвата несущей частоты. С дальнейшим ростом коэффициента модуляции области захвата несущей частоты и частоты модуляции совпадают.

Заключение

В результате проведенных исследований предложена и экспериментально апробирована радиотехническая схема генератора двухчастотных квазипериодических колебаний, соответствующая динамической системе, введенной в [1]. Экспериментально исследовано явление внешней синхронизации квазипериодических колебаний модулированным сигналом с различной глубиной модуляции. Подтверждено явление захвата числа вращения на двумерном торе, впервые установленное численно в [2].

В данной работе изучалось явление синхронизации двухчастотных автоколебаний с иррациональным соотношением частот. Синхронизация резонансных структур, возникающих на торе в случае рационального соотношения его частот, является предметом дальнейших исследований.

Работа финансировалась из средств грантов по программам «Развитие потенциала высшей школы» и BRHE.

Библиографический список

1. *Анищенко В.С., Николаев С.М.* Генератор квазипериодических колебаний. Бифуркация удвоения двумерного тора. // Письма в ЖТФ. 2005. Т. 31, вып. 19. С. 88.
2. *Anishchenko V., Nikolaev S. and Kurths J.* Winding number locking on two-dimensional torus. Synchronization of quasiperiodic motions // Phys. Rev. E. 2006. Vol. 73. P. 056202.

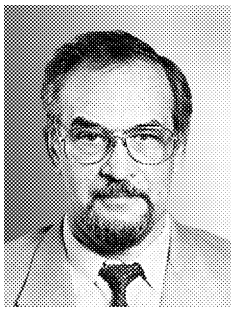
3. *Анищенко В.С.* Сложные колебания в простых системах. М.: Наука, 1990.
4. *Shilnikov L.* Mathematical problems of nonlinear dynamics: A tutorial // Int. J. of Bifurcation and Chaos. 1997. Vol. 7(9). P. 1953.

Саратовский государственный университет *Поступила в редакцию 15.10.2007*

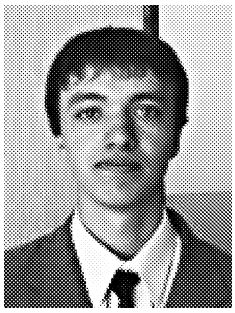
EXPERIMENTAL RESEARCH OF SYNCHRONIZATION OF TWO-FREQUENCY QUASIPERIODIC MOTIONS

V.S. Anishchenko, S.M. Nikolaev

We present the electronic scheme of autonomous generator of two-frequency quasi-periodic motions and the experimental research results of effect of quasi-periodic motions synchronization under the external two-frequency force.



Анищенко Вадим Семенович – родился в 1943 году. Окончил физический факультет СГУ (1966). Защитил диссертацию на звание кандидата физико-математических наук (1970) и доктора физико-математических наук (1986). С 1988 года – заведующий кафедрой радиофизики и нелинейной динамики СГУ. С 1979 и по настоящее время работает в области исследования нелинейной динамики и стохастических процессов в нелинейных системах. Является автором более 300 научных работ, среди которых 7 монографий на русском и английском языках и 4 учебника. Неоднократно читал лекции в ведущих вузах Германии в качестве приглашенного профессора. Член-корреспондент РАЕН, заслуженный деятель науки РФ (1995), Соросовский профессор, лауреат премии Фонда Александра Гумбольдта (1999).
E-mail:wadim@chaos.ssu.runnet.ru



Николаев Сергей Михайлович – аспирант кафедры радиофизики и нелинейной динамики СГУ. Область научных интересов – нелинейная динамика, хаотические и квазипериодические колебания. E-mail: sergeyn@chaos.ssu.runnet.ru

Изв. вузов «ПНД», т. 15, № 6, 2007 УДК 51 (092)

ОПЕРЕДИВШИЙ ВРЕМЯ

Сборник статей, посвященный 100-летию со дня рождения О.В. Лосева

Ответственный редактор Р.Г. Стронгин

©Нижегородский госуниверситет им. Н.И. Лобачевского, 2006

Н. Новгород: Изд-во ННГУ, 2006. 432 с.

ISBN 5-85746-856-6

В сборнике анализируется научное творчество Олега Владимировича Лосева – выдающегося ученого и изобретателя в области полупроводниковой электроники. Публикуются практически все работы О.В. Лосева, а также статьи современных известных ученых-физиков, в которых оценивается его роль в развитии современной радиоэлектроники и оптоэлектроники, составляющих основу современного научно-технического прогресса.

Книга представляет особый интерес для молодых ученых и студентов, для которых жизнь и научный подвиг О.В. Лосева могут быть вдохновляющим примером. Она предназначена и для широкого круга читателей, интересующихся полупроводниковой электроникой.

От редакторов

Этот сборник посвящен 100-летию со дня рождения Олега Владимировича Лосева – сотрудника Нижегородской радиолаборатории (НРЛ), который работал здесь с 1921 по 1928 год. Работая сначала в НРЛ, а потом в Ленинграде, он сделал ряд выдающихся открытий в области полупроводниковой физики, которые позволяют по праву считать его пионером в этой области, являющейся, безусловно, главной составляющей научно-технического прогресса.

Цель этого сборника – показать значение научных открытий О.В. Лосева с современных позиций и отстоять приоритет ученого в ряде достижений, составляющих научную основу для самых перспективных направлений современных технологий.

В настоящий сборник включены публикации, посвященные различным аспектам жизни и научного творчества О.В. Лосева, включая оценку его достижений с современной точки зрения. Большинство из этих статей были опубликованы ранее в сборниках и журналах, некоторые из них в настоящее время стали уже библиографической редкостью. В первую очередь это касается книги – О.В. Лосев «У истоков полупроводниковой техники: избранные труды» (Ленинград: Наука, 1972), по-

священной 50-летию со дня выхода основополагающей работы Лосева «Детектор-генератор; детектор-усилитель» в журнале «Телеграфия и телефония без проводов», издаваемом в НРЛ. В этой книге опубликовано большинство работ О.В. Лосева.

Теперь в большой степени изменилась оценка сделанного в науке О.В. Лосевым. Здесь мы видим довольно редкий случай, когда значение научного наследия ученого не только не уменьшилось со временем, но и серьезно увеличилось. Стало очевидным, что открытия, сделанные О.В. Лосевым много лет назад, имеют мировое значение, и их роль со временем будет только возрастать.

Чтобы объективно показать это, в сборнике, в частности, помещается перевод статьи известного ученого в области полупроводниковой физики и техники Игона Лобнера «Предыстория светодиода». Эта статья в значительной степени утвердила среди западных специалистов в области полупроводниковой физики авторитет О.В. Лосева как человека, который открыл и первый исследовал важнейшее физическое явление – электролюминесценцию, создателя первой правильной модели p-n-перехода и других его достижений в области физики полупроводников.

Поскольку статья Лобнера имеет довольно большой объем и, кроме самой истории открытий, связанных с развитием светодиодов, посвящена другим вопросам, прямо не относящимся к теме настоящего сборника, редакторы сочли целесообразным сократить ее объем. В первую очередь это касается вопросов, связанных с изложением автором своей концепции истории развития электронных приборов, поскольку для широкого круга русскоязычных читателей недоступны многочисленные источники, на которые делает ссылки автор. Кроме того, в цели этого сборника не входила задача подробного ознакомления читателей с изложением автором истории (явно односторонней) развития светодиодов в США в послевоенные годы. Данная статья написана Лобнером по заданию редакции журнала IEEE Transactions on Electron Devices для юбилейного номера, посвященного двухсотлетию США.

Редакторы надеются, что читателям будет интересна большая статья Бориса Андреевича Остроумова (1887–1979) – известного ученого, инженера, историка науки и страстного пропагандиста научных достижений в Советском Союзе. С 1922 до 1928 года он работал в НРЛ и имеет особые заслуги в изучении ее истории и достижений.

Еще в конце сороковых годов он написал книгу «Олег Лосев – изобретатель кристадина». Эта книга в то время уже была принята к печати, но по каким-то непонятным причинам не была опубликована, и долгое время рукопись находилась в архиве племянника Бориса Андреевича – А.Г. Остроумова. Андрей Георгиевич любезно предоставил нам рукопись этой книги и разрешил включить в настоящий сборник, за что мы выражаем ему благодарность.

Хотя эта книга была написана более пятидесяти лет назад и некоторые вопросы понимания физики полупроводников того времени сейчас требуют уточнения, редакторы, тем не менее, решили оставить текст книги без существенных комментариев, опустив лишь некоторые, несколько одиозные, с нашей точки зрения, высказывания автора.

Эта книга, как и статья Георгия Андреевича Остроумова, брата Б.А. Остроумова, «Облик О.В. Лосева как ученого и человека», представляет особую ценность, так как эти люди хорошо знали О.В. Лосева лично, были его друзьями и даже в разное время были его начальниками. Это единственные свидетели жизни О.В. Лосева, которые много писали о нем.

Статья А.Г. Остроумова и А.А. Рогачева «О.В. Лосев – пионер полупроводни-

ковой электроники», опубликованная в 1986 году, интересна тем, что она написана известными специалистами в области физики полупроводников и представляет собой авторитетный и полный обзор основных работ О.В. Лосева, отражающий практически все его научные достижения.

Статья В.В. Жирнова и Н.В. Суетина «Изобретение инженера Лосева», опубликованная в журнале «Эксперт» в марте 2002 г. интересна тем, что написана молодыми учеными, которые случайно только за границей узнали о О.В. Лосеве и его открытиях. Статья содержит несколько эмоциональное, но искреннее удивление, что в нашей стране не могли оценить в свое время выдающиеся открытия молодого ученого.

В статье М.А. Новикова «О.В. Лосев и современная физика полупроводников» предпринята попытка осмыслить научные достижения О.В. Лосева в области полупроводниковой радиоэлектроники и оптоэлектроники с позиций современности.

Большое внимание в этой статье уделяется отстаиванию приоритета О.В. Лосева в открытии и исследовании в полупроводниках электролюминесценции и p-n-переходов, как наиболее важных открытий в физике полупроводников с современной точки зрения. С этой целью в статье М.А. Новикова приводится оценка достижений О.В. Лосева с использованием различных источников, в том числе и мнений самых авторитетных современных ученых в области полупроводниковой физики и техники.

Поскольку научное наследие в настоящее время имеет не только историческое значение, но представляет интерес и для современных исследователей, в настоящем сборнике помещены наиболее выдающиеся работы О.В. Лосева, которые перепечатаны из сборника: О.В. Лосев «У истоков полупроводниковой техники» без дополнительной редакции.

Кроме того, в сборнике воспроизведены его основные патенты. Также приведен уточненный список всех научных трудов О.В. Лосева, включая его патенты и авторские свидетельства. В конце сборника приводится список публикаций, в которых в той или иной степени упоминается вклад О.В. Лосева в различные разделы физики полупроводников.

Уже после того, как был подготовлен весь материал сборника, в Твери (родине О.В. Лосева) удалось обнаружить копию весьма важного документа – «Жизнеописание Олега Владимировича Лосева». Этот документ написан самим О.В. Лосевым, хранится в Политехническом музее в Москве и содержит много новых фактов о жизни и научных достижениях Лосева. В частности, там говорится о том, что еще до войны О.В. Лосеву удалось, по-видимому, сделать трехэлектродный полупроводниковый усилитель. Эти сведения могут существенно изменить наше представление об истории изобретения транзистора.

Приведенные материалы, как мы полагаем, в достаточно полной мере характеризуют О.В. Лосева как ученого мирового масштаба и отражают его вклад в развитие полупроводниковой физики и техники.

В заключение редакторы выражают благодарность А.Г. Остроумову, Е.В. Остроумовой, А.А. Андронову, З.Ф. Красильнику, В.П. Весновской, В. Алешкину, Н.Г. Панкрашкиной и С.А. Гилеву за постоянный интерес к этому сборнику, помощь в редактировании текста статей и подборке других материалов сборника. Особую благодарность хотелось бы выразить А.А. Хышову и М.Н. Амелину, взявшим на себя большой труд по компьютерной обработке и перепечатке текстов всех статей и приложений.

Содержание

От редакторов

Новиков М.А. О.В. Лосев и современная физика полупроводников. К столетию со дня рождения О.В. Лосева (1903–1942)

Остроумов Г.А. Облик О.В. Лосева как ученого и человека

Остроумов Б.А. О.В. Лосев – изобретатель кристадина

Глава I. На заре радиотехники. Глава II. Юный радиолюбитель. Глава III. В Нижегородской радиолаборатории. Глава IV. Изучение основ радиоприема. Глава V. Новое явление. Глава VI. Первое выступление. Глава VII. Почему возникают колебания? Глава VII. Первые успехи и мировая слава. Глава IX. Светящийся кристалл карборунда. Глава X. Трансгенерация. Глава XI. Дальнейшая судьба кристадина. Глава XII. Странное свечение. Глава XIII. В Ленинграде. Глава XIV. Последние годы жизни. Глава XV. Возрождение кристадина

Остроумов А.Г., Рогачев А.А. О.В. Лосев – пионер полупроводниковой электроники

Лобнер Игон Е. Предыстория световода

Жирнов В.В., Суетин Н.В. Утерянные возможности. Россия имела шанс создать полупроводниковые технологии на 30 лет раньше, чем Америка

Жизнеописание Олега Владимировича Лосева

Избранные публикации О.В. Лосева и патенты на его изобретения

Детектор-генератор, детектор-усилитель [4]

Действие контактных детекторов; влияние температуры на генерирующий контакт [6]

Дальнейшее исследование процессов в генерирующем контакте [17]

Трансгенерация [22]

Светящийся карборундовый детектор и детектирование с кристаллами [24]

Влияние температуры на светящийся карборундовый контакт. О приложении уравнения теории квант к явлению свечения детектора [25]

Свечение II, электропроводность карборунда и униполярная проводимость детекторов [27]

О фотоактивных и детектирующих слоях у кристаллов некоторых других полупроводников [31]

Фотоэлементы, аналогичные селеновым, емкостный эффект, исследование инерционности [32]

Фотоэлектрический эффект емкостного типа у кремниевых сопротивлений [33]

Спектральное распределение вентильного фотоэффекта в монокристаллах карборунда [34]

Новый спектральный эффект и метод определения красной границы вентильного фотоэффекта в монокристаллах карборунда [36]

Перечень трудов Олега Владимировича Лосева

Библиография

Summary. O.V. Lossev (1903–1942)

Об авторах сборника

Изв. вузов «ПНД», т. 15, № 6, 2007 УДК 929

ПРОФЕССОР Р.Л. СТРАТОНОВИЧ

Воспоминания родных, коллег и друзей

Под ред. Ю.М. Романовского

©Институт компьютерных исследований, 2007
©Ю.М. Романовский, 2007

М.-Ижевск: Институт компьютерных исследований
НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2007. 174 с.
ISBN 978-5-93972-606-1

Руслан Леонтьевич Стратонович был одним из самых замечательных российских физиков-теоретиков второй половины двадцатого века. В Интернете можно найти не только бесчисленные ссылки на его работы, но и выяснить, что «уравнения Стратоновича», «интеграл Стратоновича–Ито», «ценность информации по Стратоновичу», «нелинейная фильтрация по Стратоновичу» являются общепринятыми научными терминами в мировой научной литературе. В предлагаемой книге «воспоминаний» читатель ознакомится с историей жизни и творчества этого феноменально талантливого человека. В книге представлена полная библиография трудов Руслана Леонтьевича. Из нее следует, что он сыграл выдающуюся роль также и в становлении таких научных дисциплин, как нелинейная термодинамика, прикладная математика, кибернетика и синергетика.

Предисловие

Предлагая читателям книгу о замечательном ученом и человеке Руслане Леонтьевиче Стратоновиче, скажем, что он был не только выдающимся физиком-теоретиком, но оказался знаковой фигурой в развитии одного из главных направлений науки второй половины 20-го века. Речь идет о набиравшем в послевоенное время силу новом направлении исследований, базировавшихся на активном взаимодействии математики и техники, а также других прикладных наук. Это новое направление науки получило название кибернетики или прикладной математики, включавшей в себя кибернетику в качестве составной части.

Начало активной научной деятельности Р.Л. Стратоновича относится к 50-м годам прошлого века. Характерной особенностью того времени являлся огромный

интерес мировой общественности к развитию так называемых точных и естественных наук, чего раньше никогда не было. Этот интерес был обусловлен как впечатляющим прогрессом самой науки в первой половине 20-го века, так и бурным развитием техники, базирующейся на новейших научных достижениях.

На рубеже 19-го и 20-го веков в точных науках (в физике прежде всего) произошли глубочайшие революционные изменения, когда после основополагающих работ Эйнштейна, Планка, Бора, Резерфорда, Шредингера, де Бройля и др. была разработана теория относительности и предложена квантовая концепция строения материи. Это потребовало кардинального переосмысления моделей микромира, что стимулировало приход в атомную физику и физику атомного ядра большого количества молодых талантливых ученых, таких как Дирак, Паули, Гейзенберг, Ферми, Сциллард и многих других. Самым впечатляющим результатом этого направления исследований, имевшим огромный общественный резонанс, явилась разработка, изготовление и применение в конце второй мировой войны двух атомных бомб при авиационной бомбардировке Хиросимы и Нагасаки в августе 1945 г.

Параллельно с атомной и ядерной физикой шло развитие других разделов физики и математики. В этих областях также был получен ряд выдающихся результатов, которые, однако, выглядели менее эффектно с точки зрения общественного интереса. Здесь следует отметить выдающийся вклад таких великих математиков начала века, как Гильберт, Пуанкаре и Ляпунов, которые не только дали строгое обоснование теории относительности и квантовой механики, но и заложили основы методов исследования нелинейных динамических систем и нелинейных колебаний, дальнейшее развитие которых проводилось, в частности, в СССР Крыловым, Боголюбовым, Мандельштамом, Андроновым и др. Термодинамика, считавшаяся ранее чисто феноменологической наукой, после основополагающих работ Больцмана, Гиббса и др. получила прочный фундамент в виде статистической физики, использующей вероятностные модели процессов распространения тепла и диффузии вещества. Одновременно строгое обоснование вероятностных методов осуществлялось в работах математиков, приведших к созданию аксиоматической теории вероятностей и случайных процессов, а также современной математической статистики. Следует отметить выдающийся вклад в эти исследования российских математиков, начиная с Чебышева и Маркова и заканчивая Колмогоровым и Хинчиным, создавшими в СССР к середине прошлого века знаменитую школу выдающихся специалистов в области теории вероятностей и случайных процессов.

Технический прогресс того времени также отличался исключительно высокими темпами роста. Огромное влияние на этот процесс оказали потребности развития военной техники в связи с двумя мировыми войнами 1914–1918 г.г. и 1939–1945 г.г. Стремительное развитие авиации после изобретения реактивных двигателей привело к появлению сверхзвуковых самолетов и первых баллистических ракет, позволивших начать освоение космического пространства. Использование электромагнитных волн в радиосвязи, радиолокации, передаче телевизионных изображений, изобретение радаров и телевизоров привело к бурному развитию радиоэлектроники. Привлечение в эту область результатов квантовой теории и теории нелинейных колебаний привело к созданию квантовой электроники и изготовлению в 50-х годах первых лазеров. Еще одним важным результатом развития радиоэлектроники было изобретение в конце

40-х годов первого полупроводникового триода (транзистора), что привело к становлению полупроводниковой техники, а в дальнейшем к разработке интегральных схем и микроэлектроники, составляющих техническую основу современных ЭВМ.

Следует отметить, что бурный технический прогресс породил множество новых научных проблем, для решения которых требовалось привлечение достижений фундаментальных наук. В качестве примера приведем изобретение радара, которое породило проблему так называемых «пороговых сигналов», принципы решения которой к тому времени уже были изложены математиками в работах, посвященных фильтрации, интерполяции и предсказанию случайных процессов. Однако для практического использования этих результатов требовалась некоторая доработка теории и вероятностное переосмысление самой проблемы пороговых сигналов.

Веяния нового времени привели к развитию науки на «стыках» физики, химии и биологии, где основное внимание уделялось изучению неравновесных процессов и процессов самоорганизации в открытых термодинамических системах.

Можно сказать, что время потребовало появления ученых нового «синтетического» типа.

Совсем еще молодой Р.Л. Стратонович как метеор ворвался в эти области науки и стал тем связующим звеном между математической теорией и практикой, которое было необходимо в то время.

Вся жизнь Руслана Леонтьевича Стратоновича после окончания школы в 1947 г. вплоть до его кончины в 1997 г. была связана с физическим факультетом МГУ, а конкретнее с отделением радиофизики и электроники. В него входили кафедра физики колебаний, кафедра акустики, кафедра СВЧ (сверхвысоких частот), кафедра электроники, кафедра волновых процессов и кафедра общей физики для механико-математического факультета. Последняя помимо преподавания общих курсов физики готовила специалистов в области теории колебаний и кибернетики.

Стратонович никогда не занимал никаких руководящих постов и прошел путь от студента через аспирантуру до профессора. Был оставлен на работу в качестве ассистента на кафедре общей физики для механико-математического факультета в 1956 г. и получил профессуру в 1969 г. За 50 лет, прошедших с тех пор, кафедра неоднократно преобразовывалась. С 1978 г. она объединилась с кафедрой волновых процессов, которая была создана Р.В. Хохловым в 1965 г. и получила название кафедры общей физики и волновых процессов.

Подробный очерк научного пути Р.Л. Стратоновича отражен в настоящей книге. Здесь важно отметить, что его становление как ученого проходило в среде воспитанников научных школ П.Н. Лебедева и Л.И. Мандельштама, которые фактически создали отделение радиофизики и электроники. На кафедру Руслан Леонтьевич был приглашен С.П. Стрелковым. После смерти Стрелкова в 1974 г. кафедрой руководили профессора С.А. Ахманов и Н.И. Коротеев, а с 1999 г. возглавляет кафедру проф. В.А. Макаров.

Как читатель увидит из биографии Стратоновича, его путь не всегда был усыпан цветами признания. Однако Руслан Стратонович всегда имел прочный тыл – как все заведующие кафедрой, так и бессменный декан факультета профессор В.С. Фурсов, профессора Р.В. Хохлов, С.Д. Гвоздовер всегда его поддерживали и ценили его талант. На физическом факультете интенсивно развивалась статистическая радио-

электроника, нелинейная динамика, статистическая и нелинейная оптика, лазерная физика. Все кафедры всегда были тесно связаны с отраслевыми институтами самой разной направленности, многими университетами как отечественными, так и зарубежными. Поэтому деятельность Руслана Леонтьевича находила самую широкую поддержку среди представителей «технических наук» и была хорошо известна за границей.

Представляемая книга содержит следующие разделы.

1. Биография Р.Л. Стратоновича, первоначальный вариант которой написан во многом с его слов его ныне покойной вдовой Валентиной Викторовной Стратонович. В работе над окончательным вариантом этого текста, а также в отборе фотографий активное редакционное участие приняли дочери Руслана Леонтьевича Ольга Стратонович (Охоцимская) и Юлия Стратонович.

2. Воспоминания Ольги Охоцимской и первой жены Руслана Леонтьевича Тамары Стратонович.

3. Воспоминания учеников и коллег Стратоновича.

4. Материалы из архива Р.Л. Стратоновича, бережно хранимые В.В. Стратонович, в которые входят: полный список его публикаций, его отчет о поездке в ГДР в 1989 г., список публикаций о нем и текст некролога, опубликованного в Успехах физических наук в 1997 г., в котором сжато сформулированы его заслуги в науке.

5. Именной указатель, в котором в алфавитном порядке приведен список лиц, упоминаемых во всех разделах книги.

Следует отметить, что публикация данной книги вряд ли была бы возможной без широкой «народной» поддержки большого числа коллег, родственников, учеников и просто друзей Руслана Леонтьевича, проживающих в различных городах России и за рубежом. Разнообразные печатные и фото материалы, предоставленные этими людьми, составили основу содержания этой книги. Большую помощь в редактировании оказала Н.В. Нетребко. Что касается финансового обеспечения данного издания, то наряду с кафедрой общей физики и волновых процессов физического факультета МГУ финансовую поддержку публикации оказали: И.Г. Акопян, В.С. Анищенко, В.П. Белавкин, В.Н. Задков, Г.Е. Колосов, Д.Д. Мамаев, А.А. Платонов, Ю.Г. Сосулин, О.А. Чичигина, А.В. Толстопятенко и ученые из Германии (В. Эбелинг и другие). Всем указанным лицам выражаю искреннюю благодарность.

Редактор и составитель книги
Ю.М. Романовский

Оглавление

Предисловие

1. Годы жизни и творчества

1.1. Биография. 1.1.1. Мальчик с Б. Бронной: семья, детство, юность. 1.1.2. Выбор сделан: физический факультет МГУ – студенческие годы. 1.1.3. Аспирантура – кандидатская диссертация – первая книга. 1.1.4. Докторская диссертация – вторая и третья книги. 1.1.5. Последняя книга – конференции – поездки. 1.1.6. Премии – преподавание – ученики.

1.2. Воспоминания родных и близких. 1.2.1. Воспоминания Ольги Руслановны Охоцимской (старшей дочери Р. Л. Стратоновича). 1.2.2. Воспоминания Тамары Александровны Стратонович (первой жены Р.Л. Стратоновича).

2. Воспоминания коллег и учеников Р.Л. Стратоновича

2.1. Ю.М. Романовский
2.2. И.Г. Акопян
2.3. Г.Е. Колосов
2.4. Б. А. Гришанин
2.5. Ю.Г. Сосулин
2.6. Д.Д. Мамаев
2.7. Игорь Минкевич
2.8. Вадим Анищенко
2.9. Лутц Шиманский-Гайер
2.10. Ольга Чичигина
2.11. Юрий Климонтович

3. Материалы из архива Р.Л. Стратоновича

3.1. Отчет Р.Л. Стратоновича о научной командировке в ГДР (осень 1989 г.)

4. Библиография

4.1. Список печатных научных трудов Стратоновича Руслана Леонтьевича
4.2. Список монографий Р.Л. Стратоновича
4.3. Список публикаций о Р.Л. Стратоновиче
4.4. Статья из «Успехов физических наук», июль 1997 г. («Памяти Руслана Леонтьевича Стратоновича»)

Именной указатель

Зав. редакцией *Н.Н. Левина*
Редакторы *Л.А. Сидорова, Н.Н. Левина*
Оформление художника *Д.В. Соколова*
Оригинал-макет подготовлен
И.А. Пономаревой, О.Н. Строгановой
в пакете L^AT_EX

Подписка на 2008 год осуществляется
по каталогу Агентства Роспечать
«Газеты. Журналы», индекс 73498
и по договору между Подписчиком
(юридическим или физическим лицом)
и Издателем (Саратовским государственным университетом)

Стоимость подписки на 2008 год 450 руб. (6 номеров)
Заявки на заключение договора принимаются
по почте, по телефону редакции, по эл. почте редакции

Адрес редакции: 410012, Саратов, Астраханская, 83
Тел./факс: (845-2) 52-38-64
E-mail:and@nonlin.sgu.ru

Распространение журнала осуществляется
редакцией журнала по адресной системе

Сдано в набор 20.12.07. Подписано к печати 9.01.08
Формат 70x108/16. Бумага «Снегурочка». Печать трафаретная
Усл. печ. л. 9,8(7,0). Уч.-изд. л. 9,7. Тираж 200. Заказ 400

Отпечатано на ризографе GR 3750 редакции журнала

© Редакция журнала
«Известия вузов. ПНД», 2008
© Оформление художника
Д.В. Соколова, 2008