



ДЕТЕКТИРОВАНИЕ ИНФОРМАЦИОННЫХ СИГНАЛОВ НА ОСНОВЕ РЕКОНСТРУКЦИИ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ И ДИСКРЕТНОГО ВЕЙВЛЕТ-ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

А.Н. Павлов

Предлагается метод выделения передаваемых сообщений из хаотического несущего сигнала на основе сочетания техники реконструкции динамических систем и дискретного вейвлет-преобразования. Показано, что применение дискретных вейвлетов позволяет существенно повысить помехоустойчивость алгоритма детектирования, использующего принцип реконструкции.

Введение

Защита информации при ее передаче по каналу связи является одной из проблем, особенно актуальных в период активного развития современных информационных технологий. Обеспечение защиты передаваемых сообщений является важным, в частности, при проведении банковских операций, передаче паролей и идентификационных кодов (в том числе, через интернет) и т.д. Одним из новых способов решения данной проблемы является применение для передачи сообщений широкополосных хаотических сигналов. Интенсивные исследования в этом направлении ведутся с начала 1990-х годов. В самых первых работах было предложено использовать явление хаотической синхронизации для выделения информационного сигнала из хаотического несущего. Предлагались два конкретных способа решения проблемы, основанных на использовании идентичных генераторов хаоса в передающем и приемном устройствах: аддитивное добавление информационного сообщения к несущему сигналу [1–3] и модуляция параметров генератора хаоса [4–6]. Позднее была рассмотрена задача многоканальной защищенной передачи информации на основе так называемого феномена «автосинхронизации», то есть использования систем с автоматической подстройкой параметров [7, 8]. Первые серьезные успехи были связаны с тем, что для ряда модельных схем была продемонстрирована возможность передачи цифровых и аналоговых сообщений с использованием хаотических сигналов. В схеме с нелинейным подмешиванием информационного сигнала в хаотический, передача речевых и музыкальных сигналов в низкочастотном и в радиодиапазонах была продемонстрирована экспериментально в работе [9].

Установлено, что методы, основанные на явлении синхронизации, имеют ряд недостатков, наиболее существенным из которых является требование идентично-

сти генераторов хаотических колебаний в приемнике и передатчике. Если параметры соответствующих генераторов будут отличаться более чем на 1–2%, то данные методы становятся неэффективными [10]. Разработка новых, более «практичных» способов защиты информации, передаваемой по каналу связи, на протяжении многих лет проводится отечественными учеными (можно отметить, в частности, работы по данной тематике группы А.С. Дмитриева [9–11], а также работы, проводившиеся в СГУ [12, 13]). Главные принципы, лежащие в основе существующих разработок, базирующихся на использовании хаотических колебаний в качестве несущих сигналов, заключаются в следующем.

1. Использование генератора хаотических сигналов в передающем устройстве позволяет обеспечить одновременную передачу нескольких независимых сообщений по одному каналу связи, например, путем модуляции параметров данного генератора. В отличие от классических методов (амплитудная, частотная модуляция), информационные сообщения могут передаваться путем модуляции параметров, характеризующих различные детали сложной формы хаотического несущего сигнала. В частности, в работах [14, 15] была продемонстрирована возможность одновременной передачи 3-х независимых сообщений в одном несущем и их достоверного выделения при проведении демодуляции.

2. Процедура выделения информационных сообщений из хаотического несущего сигнала невозможна без точного знания характеристик генератора хаотических колебаний в передающем устройстве, что обеспечивает высокую степень защищенности передаваемой информации. В настоящее время существует несколько базовых моделей генераторов хаоса, однако для проведения демодуляции необходимо знать не только, какая именно базовая модель используется, но и точный вид характеристики нелинейного элемента, которая может быть задана индивидуально для каждого генератора, и определить ее путем простого перебора разных вариантов в общем случае невозможно.

В рамках данной работы предлагается метод выделения передаваемых сообщений из хаотического несущего сигнала, основанный на сочетании техники глобальной реконструкции динамических систем (ДС) и дискретного вейвлет-преобразования. Первоначальная идея метода была предложена несколько лет назад в работах [16, 17]. Проведенные исследования продемонстрировали, что этот подход является достаточно универсальным и в то же время весьма простым. По аналогии с известными работами в данной области рассматривается возможность передачи информационных сообщений в хаотическом несущем сигнале путем модуляции параметров генератора хаоса. Принципиальное отличие состоит в способе детектирования. Использование техники реконструкции в сочетании с дискретными вейвлетами вместо феномена «автосинхронизации» и ряда других известных методов позволяет полностью устранить проблемы, связанные с неидентичностью генераторов в приемном и передающем устройствах, что является одним из очевидных преимуществ предлагаемого подхода.

1. Выделение информационных сообщений из хаотического несущего сигнала на основе реконструкции динамических систем

Использование реконструкции для детектирования сообщений впервые обсуждалось в работах [18, 19], авторы которых продемонстрировали возможность выделения одного аддитивного воздействия на генератор хаотических колебаний при нали-

ции априорной информации о структуре математической модели генератора и о том, каким образом подается внешнее воздействие (то есть как оно вводится в уравнения, описывающие динамику генератора). В работах [16, 17] был предложен более универсальный способ, позволяющий осуществлять детектирование информационных сигналов, осуществляющих модуляцию параметров ДС. Развитие идей реконструкции неавтономных систем было предпринято в [20–22].

Рассмотрим возможность детектирования информационных сообщений на примере генератора хаотических колебаний, моделируемого системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{F}(\vec{x}, \vec{\mu}^0), \quad \vec{x} \in R^n, \quad \vec{\mu}^0 \in R^l, \quad (1)$$

в которой \vec{x} – вектор состояния, \vec{F} – вектор правых частей модельной системы, $\vec{\mu}^0$ – вектор постоянных значений параметров.

Будем осуществлять относительно медленную модуляцию произвольного числа параметров информационными сигналами $\mu_i(t)$, то есть введем в рассмотрение переменные величины

$$\mu_i^* = \mu_i^0 + \mu_i(t), \quad (2)$$

что позволит реализовать одновременную передачу нескольких сообщений. В этом случае передаваемый по каналу связи сигнал, представляющий собой одномерную реализацию колебательного процесса генератора хаоса, порождается неавтономной динамической системой вида

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{F}(\vec{x}, \vec{\mu}^0 + \vec{\mu}(t)). \quad (3)$$

Для решения задачи синтеза ДС по наблюдаемой одномерной реализации система (1) должна быть сведена к виду

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= x_2, \\ \frac{dx_2}{dt} &= x_3, \\ &\dots\dots \\ \frac{dx_n}{dt} &= f(x_1, x_2, \dots, x_n, \vec{\mu}). \end{aligned} \quad (4)$$

Это значит, что путем замен переменных необходимо преобразовать правые части таким образом, чтобы вместо вектор-функции \vec{F} осталась только одна скалярная нелинейная функция f .

Многие базовые модели динамического хаоса (системы Лоренца, Ресслера, модифицированный генератор с инерционной нелинейностью и другие) удовлетворяют этому требованию. Поскольку информационные сигналы обычно являются медленными по сравнению с несущим, можно ввести в рассмотрение интервал времени t^* , в течение которого значения параметров допустимо считать практически постоянными: для времен порядка t^* можно не учитывать неавтономность системы (3). Это

дает возможность восстановления текущих значений параметров системы по коротким участкам ее одномерной реализации, то есть воспроизведения информационных сигналов $\mu_i(t)$, осуществляющих параметрическую модуляцию генератора хаоса.

Применяя технику реконструкции к одномерной реализации $x_1(t)$ генератора хаоса, которую можно измерить на выходе передающего устройства, получатель информации, зная общий вид математической модели (1), выделяет полезные сигналы $\mu_i(t)$. С этой целью ему необходимо n раз продифференцировать реализацию $x_1(t)$, что позволит определить левые части модельной системы (4). В результате задача определения значений параметров в данный момент времени сводится к необходимости решения алгебраических уравнений с некоторым количеством неизвестных. Поскольку при компьютерной обработке приходится иметь дело не с аналоговым сигналом, а с дискретизованной временной зависимостью $x_1(i\Delta t)$, производные определяются в моменты времени $i\Delta t$ по приближенным формулам численного дифференцирования. Записывая систему K алгебраических уравнений ($K = [t^*/\Delta t]$) для L неизвестных ($L \ll K$) и решая ее методом наименьших квадратов, можно осуществить аппроксимацию неизвестных коэффициентов.

Выберем в качестве модельной системы (1) модифицированный генератор с инерционной нелинейностью (ГИН) [23]

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= m_0x + y - xz, \\ \frac{dy}{dt} &= -x, \\ \frac{dz}{dt} &= -g_0z + 0.5g_0(x + |x|)x.\end{aligned}\tag{5}$$

Полагая, что излучаемым сигналом генератора является одномерная реализация $y(t)$, осуществим преобразование системы уравнений (5) к виду (4) путем замен переменных

$$Y = y, \quad Z = -x, \quad X = -m_0x - y + xz,\tag{6}$$

в результате которых уравнения генератора приобретают вид

$$\begin{aligned}\frac{dY}{dt} &= Z, \\ \frac{dZ}{dt} &= X, \\ \frac{dX}{dt} &= f(X, Y, Z, \vec{\mu}), \quad \vec{\mu} = (m_0, g_0), \\ f &= \frac{X(X + Y)}{Z} + (m_0g_0 - 1)Z - g_0(X + Y) + 0.5g_0(|Z| - Z)Z^2.\end{aligned}\tag{7}$$

Проиллюстрируем с помощью модели ГИНа возможность одновременной передачи двух независимых информационных сигналов по одному каналу связи. С этой целью параметр m_0 модулировался широкополосным хаотическим сигналом, а параметр g_0 – гармоническим сигналом. В системе (5) были выбраны следующие значения

постоянных величин: $g_0 = 0.2$, $m_0 = 1.5$. Для проверки эффективности метода с точки зрения его помехоустойчивости осуществлялось добавление нормально распределенной случайной величины с дисперсией 10^{-3} к информационным сигналам, осуществляющим параметрическую модуляцию, и 10^{-4} – аддитивно к несущему хаотическому сигналу. Зависимости во времени параметров m^* и g^* данной системы проиллюстрированы на рис. 1, *а*, *б*. Получатель информации, зная вид нелинейной функции f в системе (7), принимая сигнал (рис. 1, *в*), восстановит сигналы модуляции (рис. 1, *з*, *д*).

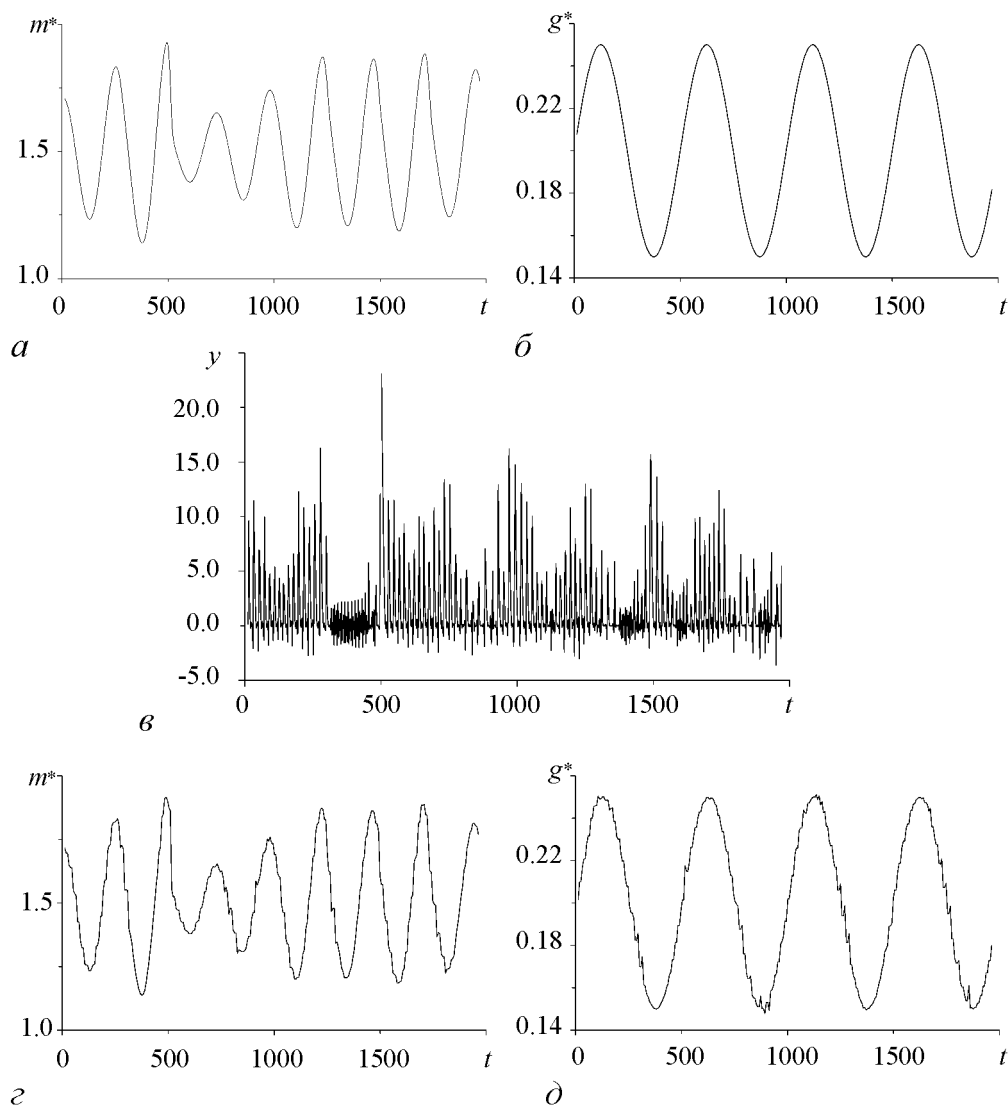


Рис. 1. Пример детектирования на основе техники реконструкции: *а*, *б* – передаваемые сигналы, осуществляющие модуляцию параметров генератора хаотических колебаний; *в* – сигнал в канале связи; *з*, *д* – сигналы, выделенные из хаотического несущего

Дальнейшие исследования проводились на модели Ресслера

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= -(y + z), \\ \frac{dy}{dt} &= x + ay, \\ \frac{dz}{dt} &= b + z(x - c).\end{aligned}\tag{8}$$

Выбрав в качестве несущего сигнала координату $y(t)$ данной модели, путем замен переменных

$$Y = y, \quad Z = x + ay, \quad X = ax + (a^2 - 1)y - z\tag{9}$$

преобразуем систему уравнений (8) к виду

$$\begin{aligned}\frac{dY}{dt} &= Z, \\ \frac{dZ}{dt} &= X, \\ \frac{dX}{dt} &= -b + (a - c)X - cY + (ac - 1)Z - aY^2 - \\ &\quad - aZ^2 - aXY + XZ + (a^2 + 1)YZ.\end{aligned}\tag{10}$$

Как было показано в [14, 15], существует возможность передавать одновременно, по крайней мере, три информационных сигнала в одном несущем. Теоретически, метод детектирования на основе реконструкции ДС не накладывает ограничений на количество одновременно меняемых параметров. На практике такие ограничения появляются в связи с конечной точностью вычисления μ_i^* . К числу достоинств рассматриваемого способа детектирования относятся следующие.

1. Наличие только одного генератора хаотических сигналов, расположенного в приемном устройстве, и отсутствие проблемы идентичности генераторов приемника и передатчика, являющейся одной из ключевых для систем, использующих принцип синхронизации колебаний.

2. Широкая полоса частот для передачи информационных сообщений. По этому параметру рассматриваемый способ детектирования, как минимум, не уступает принципам детектирования в системах, основанных на эффекте синхронизации хаоса (в случае передачи информационных сигналов путем модуляции управляющих параметров). Реконструкция ДС позволяет проводить оценку параметров по очень коротким участкам переходных процессов, составляющим, например, 1/5 часть базового периода несущего сигнала или даже меньше. Из-за наличия очень большого числа вариантов схем передачи информации, базирующихся на использовании хаотических несущих сигналов, детальное сопоставление технических характеристик каждой из них является отдельной и весьма трудоемкой задачей (которая выходит за рамки настоящей работы). Отметим, что простое сравнение результатов, представленных в статьях [16] и [8] для одновременной передачи двух информационных сигналов (сопоставление отношений частот модуляции и несущего сигнала), демонстрирует, что для рассмотренных примеров подход, основанный на технике реконструкции, обеспечивает почти в 2 раза более широкую полосу частот для передачи

информации. Разумеется, в данном случае речь идет о простом наблюдении, и для того, чтобы проводить более детальное сопоставление технических характеристик, необходимы специальные сравнительные исследования.

Главным (и очень серьезным!) недостатком алгоритма детектирования, базирующегося на реконструкции ДС, является необходимость дифференцирования сигналов, которые на практике всегда являются зашумленными. Вычисление производных при наличии аддитивного шума приводит к существенным ошибкам. Для их уменьшения первоначально [16] было предложено использовать трехступенчатую фильтрацию: фильтрация несущего сигнала в предположении, что сигнал и шум разделены в частотной области (1-й этап), применение метода наименьших квадратов для получения усредненных значений параметров в пределах малого временного окна (2-й этап), сглаживание выделенных сигналов модуляции с учетом медленного изменения параметров по сравнению с несущим хаотическим сигналом (3-й этап). Тем не менее, наличие шума в исходном процессе остается наиболее серьезной проблемой с точки зрения практической реализации метода демодуляции, основанного на технике реконструкции ДС. В данной работе предлагается способ решения этой проблемы путем сочетания техники глобальной реконструкции и дискретного вейвлет-преобразования. К числу достоинств теории вейвлетов относится возможность устранения некорректности операции дифференцирования зашумленных временных рядов путем перехода в пространство вейвлет-коэффициентов.

2. Дифференцирование сигналов с применением дискретных вейвлетов

Свойство дифференцирования вейвлет-преобразования можно записать следующим образом [24]:

$$W [\partial_t^p f] = (-1)^p \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \partial_t^p [(\psi_{ab}^*(t))] dt. \quad (11)$$

Формула (11) означает, что вместо того, чтобы дифференцировать p раз сигнал $f(t)$, можно продифференцировать p раз анализирующий вейвлет. Это очень полезное свойство при работе с экспериментальными данными, поскольку функция $f(t)$ представляет собой ряд чисел (и содержит шум), а анализирующий вейвлет задан формулой (в случае непрерывного вейвлет-преобразования).

С точки зрения непосредственно процедуры вычисления производных функции $\psi_{ab}^*(t)$ проще пользоваться непрерывными вейвлет-базисами, позволяющими получать аналитические выражения для $\partial_t^p [(\psi_{ab}^*(t))]$, что очевидно, например, для базисов, сконструированных на основе производных функции Гаусса,

$$\psi_p(t) = (-1)^p \partial_t^p \left[\exp \left(-\frac{t^2}{2} \right) \right]. \quad (12)$$

В то же время непрерывное вейвлет-преобразование имеет ряд недостатков в случае его использования при решении задачи определения параметров ДС. Дело в том, что базисы на основе непрерывных вейвлетов, строго говоря, не являются ортонормированными [25, 26], тогда как дискретные вейвлеты приводят к более точному обратному восстановлению сигнала, например, после процедуры сжатия данных.

Для дискретных вейвлетов легче вычислить обратное преобразование, несмотря на то, что они не могут быть записаны в аналитической форме (за исключением Хаар-вейвлета). Дискретные вейвлеты обеспечивают существенный выигрыш в скорости проведения вычислений в рамках процедуры быстрого преобразования, что является одним из важных преимуществ при их использовании для передачи информации (например, в рамках формата видеоданных MPEG).

Прекрасная обзорная статья по теории дискретных вейвлетов была опубликована в 2001 году в «Успехах физических наук» [27]. Приведем некоторые основные сведения, которые потребуются нам в дальнейшем.

При дискретном вейвлет-анализе сигнала $f(t)$ рассматриваются *скейлинг-функция* (или *масштабная функция*) $\varphi(t)$ и *базисный вейвлет* $\psi(t)$, определяемые следующим образом:

$$\begin{aligned}\varphi(t) &= \sqrt{2} \sum_{k=0}^{2M-1} h_k \varphi(2t - k), \\ \psi(t) &= \sqrt{2} \sum_{k=0}^{2M-1} g_k \varphi(2t - k), \\ g_k &= (-1)^k h_{2M-k-1},\end{aligned}\tag{13}$$

где h_k – коэффициенты. Масштабирование и смещение указанных функций задаются выражениями

$$\begin{aligned}\varphi_{j,k} &= 2^{j/2} \varphi(2^j t - k), \\ \psi_{j,k} &= 2^{j/2} \psi(2^j t - k).\end{aligned}\tag{14}$$

В рамках *многомасштабного* анализа функции $\varphi_{j,k}$ и $\psi_{j,k}$ служат высокочастотными и низкочастотными фильтрами, соответственно. Из общих свойств скейлинг-функций и вейвлетов однозначно определяются коэффициенты h_k . Пример их вычисления для вейвлета Добеши (D^4) приведен в [27].

Применение вейвлетов упрощает исследование многих математических операторов, что позволяет решать с их помощью дифференциальные уравнения. Рассмотрим в качестве иллюстрации оператор дифференцирования 1-го порядка. Основываясь на матричном представлении, рассмотренном в работе [27], запишем следующее выражение для матричного элемента оператора:

$$\tau_l = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t) \frac{d}{d\tau} \varphi(t - l) dt.\tag{15}$$

С учетом (13) получим

$$\begin{aligned}\tau_l &= \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{j=0}^{2M-1} h_j \varphi(2t + j) \frac{d}{d\tau} \left[\sum_{k=0}^{2M-1} h_k \varphi(2t - 2l + k) \right] dt = \\ &= \sum_{j=0}^{2M-1} \sum_{k=0}^{2M-1} h_j h_k \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(2t + j) \frac{d}{d\tau} \varphi(2t - 2l + k) dt = \\ &= \sum_{j=0}^{2M-1} \sum_{k=0}^{2M-1} h_j h_k \tau_{2l-k+j}.\end{aligned}\tag{16}$$

Это уравнение связывает матричные элементы на соседних уровнях. Для вейвлетов Добеши (D^4) получим следующее матричное уравнение:

$$\begin{bmatrix} \tau_{-3} & \tau_{-2} & \tau_{-1} & \tau_0 & \tau_1 & \tau_2 & \tau_3 \end{bmatrix}^T = \quad (17)$$

$$= \begin{bmatrix} \sum h_i h_{i+3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sum h_i h_{i+1} & \sum h_i h_{i+2} & \sum h_i h_{i+3} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sum h_i h_{i-1} & \sum h_i h_i & \sum h_i h_{i+1} & \sum h_i h_{i+2} & \sum h_i h_{i+3} & 0 & 0 \\ \sum h_i h_{i-3} & \sum h_i h_{i-2} & \sum h_i h_{i-1} & \sum h_i h_i & \sum h_i h_{i+1} & \sum h_i h_{i+2} & \sum h_i h_{i+3} \\ 0 & 0 & \sum h_i h_{i-3} & \sum h_i h_{i-2} & \sum h_i h_{i-1} & \sum h_i h_i & \sum h_i h_{i+1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sum h_i h_{i-3} & \sum h_i h_{i-2} & \sum h_i h_{i-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sum h_i h_{i-3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tau_{-3} \\ \tau_{-2} \\ \tau_{-1} \\ \tau_0 \\ \tau_1 \\ \tau_2 \\ \tau_3 \end{bmatrix}.$$

При вычислении первой производной $\tau_{-j} = -\tau_j$ [27]. Решение матричного уравнения позволяет вычислить элементы оператора дифференцирования. По аналогии можно определить матричные элементы дифференциальных операторов более высоких порядков. Пример вычислений для базиса вейвлетов Добеши (D^8) представлен в таблице (расчеты приведены из работы [27]). В исследованиях, проводимых в рамках данной работы, использовались коэффициенты h_k и матричные элементы операторов дифференцирования, вычисленные с высокой точностью (64 разряда) сотрудниками Отделения теоретической физики ФИАН и любезно предоставленные О.В. Ивановым.

Таблица

k	h_k	τ_k
-6	0	0.00000084
-5	0	-0.00017220
-4	0	-0.00222404
-3	0	0.03358020
-2	-0.07576571	-0.19199897
-1	-0.02963552	0.79300950
0	0.49761866	0
1	0.80373875	-0.79300950
2	0.29785779	0.19199897
3	-0.09921954	-0.03358020
4	-0.01260396	0.00222404
5	0.03222310	0.00017220
6	0	-0.00000084

3. Детектирование информационных сигналов с использованием дискретных вейвлетов

Вернемся к системе уравнений (10), полученной путем замен переменных в модели Ресслера, и будем решать задачу определения текущих значений параметров a , b и c , используя те возможности, которые предоставляет вейвлет-анализ. Существует несколько вариантов решения данной задачи. Один из них состоит в том, что вместо вычисления производной функции $y(t)$, то есть несущего хаотического сигнала, осуществляется переход в пространство коэффициентов прямого вейвлет-преобразования с использованием матричных элементов дифференциального оператора первого порядка τ_k . Затем с помощью обратного вейвлет-преобразования (с использованием коэффициентов h_k) получается временная зависимость функции $dy(t)/dt$. Данный подход, предусматривающий прямое и обратное вейвлет-преобразование с разными коэффициентами, имеет несомненное преимущество по сравнению с численным дифференцированием сигнала $y(t)$ по приближенным математическим формулам. Соответствующий пример изображен на рис. 2. Если к анализируемому сигналу (рис. 2, a) добавляется нормально распределенный случайный процесс

с дисперсией 0.05, то формальное применение формул численного дифференцирования, основанных на интерполяционных многочленах Ньютона, приведет к большим погрешностям оценки производных (рис. 2, б). Рассматриваемый подход на основе вейвлетов обеспечивает, как минимум, на порядок меньшую величину погрешности

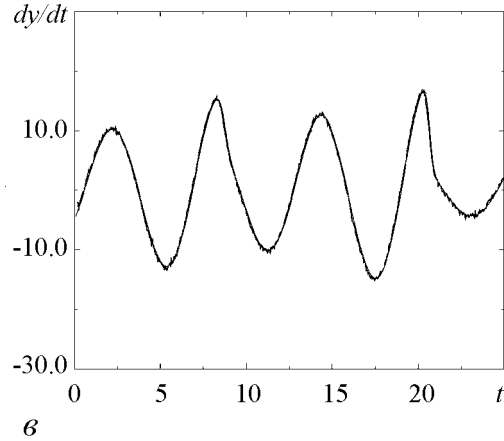
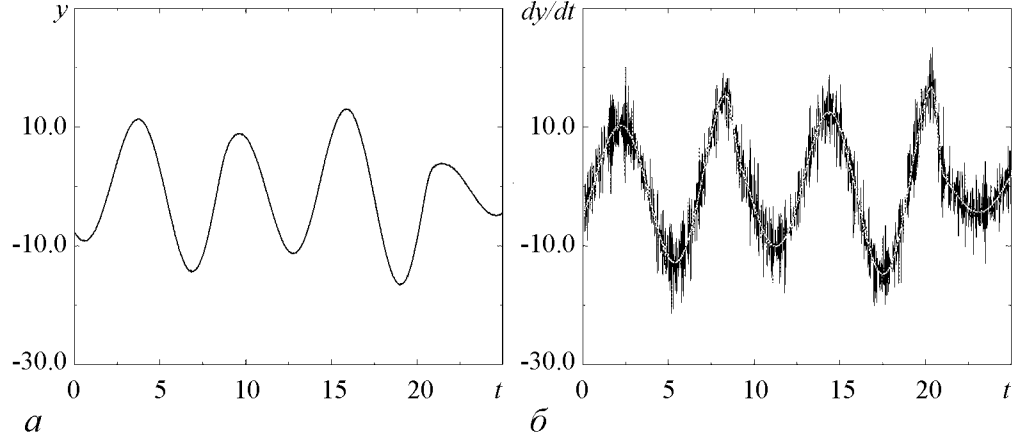


Рис. 2. Исходный сигнал системы Ресслера (а), к которому добавляется шум с дисперсией 0.05; результаты вычисления первой производной зашумленного процесса по приближенным формулам численного дифференцирования (б) и с помощью вейвлет-анализа (в). Серым цветом на рисунке (б) показаны точные значения производной для сигнала без шума

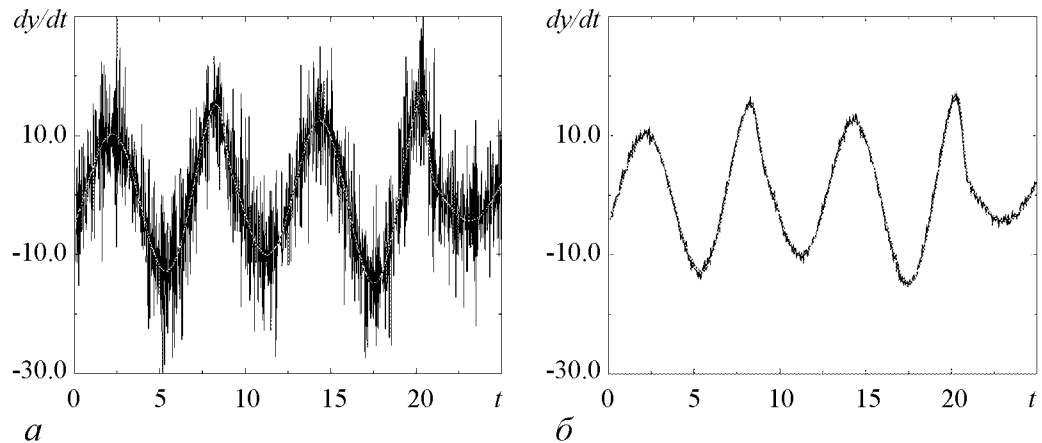


Рис. 3. Результаты вычисления первой производной сигнала, изображенного на рис. 2, а, при добавлении шума с дисперсией 0.1: а – по приближенным формулам численного дифференцирования; б – с помощью вейвлет-анализа

(рис. 2, в), и эта погрешность может быть уменьшена еще сильнее путем выбора подходящего вейвлет-базиса. Аналогичные результаты для другого уровня шума (с дисперсией 0.1) приведены на рис. 3. Вычисление производных $d^2y(t)/dt^2$ и $d^3y(t)/dt^3$ будет приводить к значительно более существенным ошибкам для обычного численного дифференцирования по сравнению с вейвлетами. Вместо многократного применения формул дифференциального оператора 1-го порядка можно вычислить элементы дифференциальных операторов 2-го и 3-го порядков, что позволит проводить одновременное вычисление всех необходимых производных.

Пример детектирования информационных сигналов на основе сочетания техники реконструкции ДС и дискретного вейвлет-анализа изображен на рис. 4. В дан-

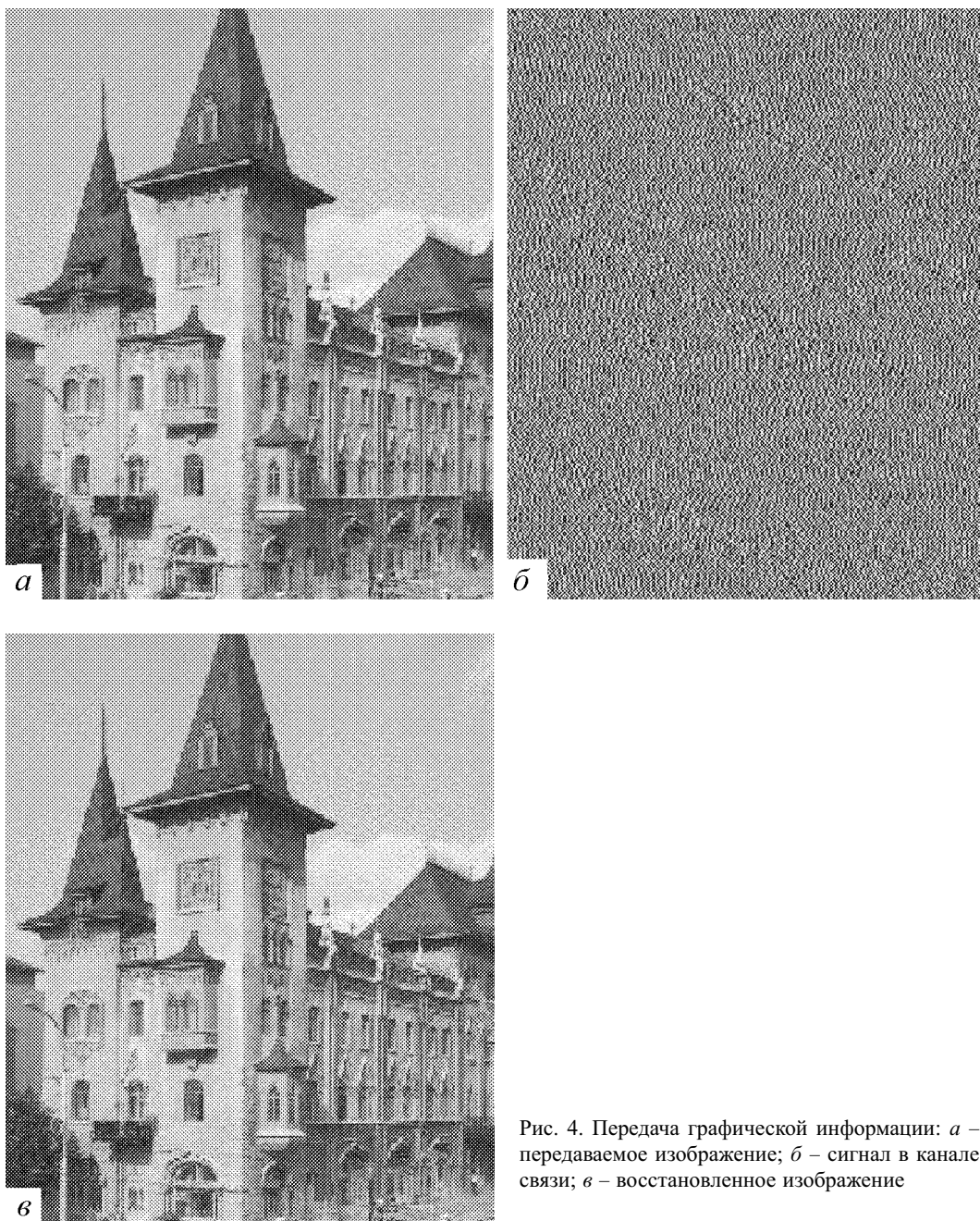


Рис. 4. Передача графической информации: *а* – передаваемое изображение; *б* – сигнал в канале связи; *в* – восстановленное изображение

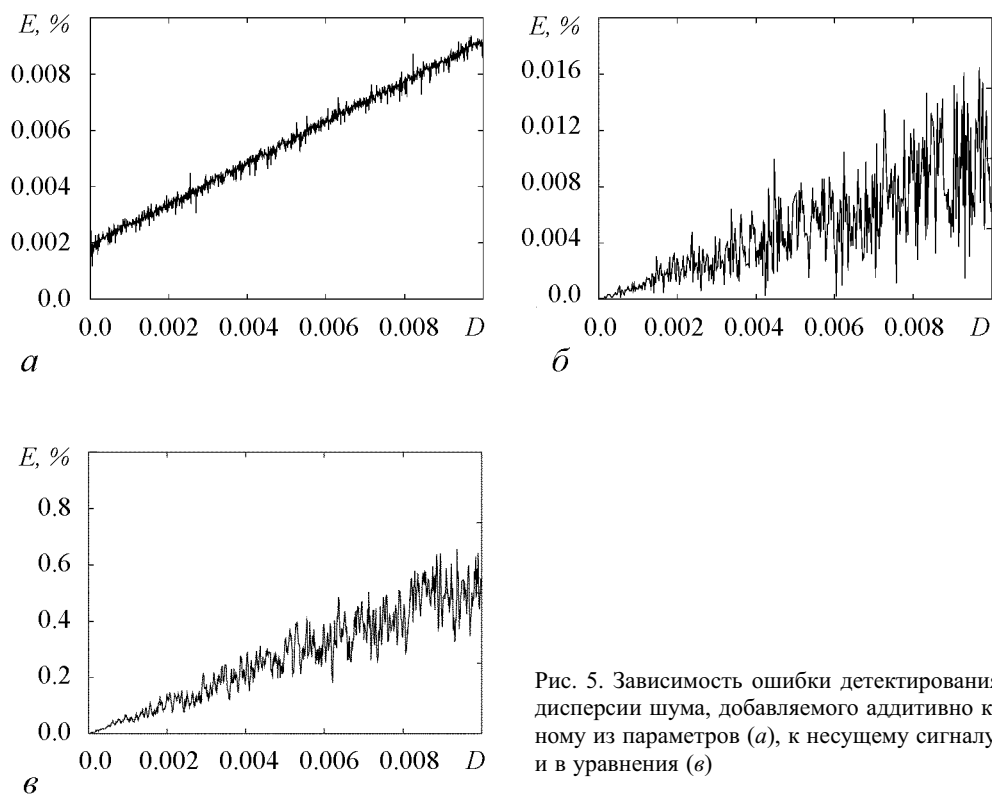


Рис. 5. Зависимость ошибки детектирования от дисперсии шума, добавляемого аддитивно к одному из параметров (*a*), к несущему сигналу (*б*) и в уравнения (*в*)

ном случае проводилась одновременная модуляция трех параметров для передачи информации об оттенках трех цветов (красный, синий, зеленый), формирующих цветное изображение. Применение дискретных вейвлетов позволило повысить точность определения текущих значений параметров и решить данную задачу, рассматривая 256 оттенков цветов. Рис. 5 иллюстрирует, как ошибка вычисления зависит от интенсивности шума, добавляемого аддитивно одному из параметров (рис. 5, *a*), к несущему сигналу (рис. 5, *б*) и вводимого в правые части уравнений модели (рис. 5, *в*).

Для повышения скорости вычислений можно видоизменить методику определения текущих значений параметров. Вместо проведения прямого и обратного вейвлет-преобразований можно перейти в пространство вейвлет-коэффициентов и непосредственно в этом пространстве решать задачу определения параметров путем решения алгебраических уравнений. Этот подход не имеет принципиальных отличий от рассмотренного выше и представляет собой альтернативный вариант технической стороны процедуры детектирования.

Заключение

Важным обстоятельством для дальнейшего прогресса в области использования динамического хаоса в коммуникациях является формулировка иных принципов модуляции и детектирования информационных сообщений – чем более разнообразными являются подходы к решению данной проблемы, тем более высокая степень

защиты передаваемых сообщений может быть обеспечена. В данной работе предложен метод выделения передаваемых сообщений из хаотического несущего сигнала, основанный на сочетании техники реконструкции динамических систем и дискретных вейвлетов. Несомненным достоинством вейвлет-преобразования является возможность устранения некорректности операции дифференцирования зашумленных временных рядов путем перехода в пространство коэффициентов.

Ошибки, возникающие при использовании приближенных формул численного дифференцирования, основанных на интерполяционных многочленах Ньютона, могут быть уменьшены за счет использования специальных приемов, например, предварительной цифровой фильтрации и последующего применения сплайнов, обеспечивающих непрерывность нескольких производных. Такой прием также имеет недостатки, например, если не обеспечивается качественная фильтрация, то применение сплайнов к зашумленным данным будет приводить к ошибкам интерполяции. Отметим, что данный прием достаточно тесно связан со скейлинг-функциями дискретного вейвлет-преобразования, но преимущество вейвлетов состоит в возможности ускорить процедуру вычислений за счет применения быстрых (пирамидальных) алгоритмов, обеспечивающих существенный выигрыш в скорости (по аналогии с быстрым преобразованием Фурье). Это один из принципиальных моментов с точки зрения коммуникаций.

По сравнению с использованием техники реконструкции в том варианте, который был представлен в [16,17], подход, предлагаемый в данной работе, обеспечивает не только существенный выигрыш в скорости вычислений, но и значительно более высокую помехоустойчивость (в проводимых вычислениях ошибку определения текущих значений параметров удавалось уменьшить на 1-2 порядка).

Автор выражает искреннюю признательность О.В. Иванову за многочисленные обсуждения и предоставленные высокоточные расчеты коэффициентов h_k и матричных элементов операторов дифференцирования. Работа выполнена при поддержке CRDF (грант № ВР4М06) и в рамках аналитической ведомственной целевой программы Министерства образования и науки РФ «Развитие научного потенциала высшей школы».

Библиографический список

1. Cuomo K.M., Oppenheim A.V. Circuit implementation of synchronized chaos with applications to communications // Phys. Rev. Lett. 1993. Vol. 71. P. 65.
2. Kocarev L., Halle K.S., Eckert K., Chua L.O., Parlitz U. Experimental demonstration of secure communications via chaotic synchronization // Int. J. Bifurcation Chaos. 1992. Vol. 2. P. 709.
3. Wu C.W., Chua L.O. A simple way to synchronize chaotic systems with applications to secure communication systems // Int. J. Bifurcation Chaos. 1993. Vol. 3. P. 1619.
4. Parlitz U., Chua L.O., Kocarev L., Halle K.S., Shang A. Transmission of digital signals by chaotic synchronization // Int. J. Bifurcation Chaos. 1992. Vol. 2. P. 973.
5. Cuomo K.M., Oppenheim A.V., Strogatz S.H. Synchronization of Lorenz-based chaotic circuits with application to communications // IEEE Trans. Circuits Syst. 1993. Vol. 40. P. 626.

6. *Dedieu H., Kennedy M.P., Hasler M.* Chaos shift keying: modulation and demodulation of a chaotic carrier using self-synchronizing Chua's circuit // *IEEE Trans. Circuits Syst.* 1993. Vol. 40. P. 634.
7. *Parlitz U.* Estimating model parameters from time series by autosynchronization // *Phys. Rev. Lett.* 1996. Vol. 76. P. 1232.
8. *Parlitz U., Kocarev L.* Multichannel communication using autosynchronization // *Int. J. Bifurcation Chaos.* 1996. Vol. 6. P. 581.
9. *Дмитриев А.С., Панас А.И.* Динамический хаос. Новые носители информации для систем связи. М: Физматлит, 2002.
10. *Starkov S.O., Yemetz S.V.* Digital communication systems, using chaos // *Proc. Int. Conf. Control of Oscillations and Chaos.* St.Peterburg, 1997. Vol. 2. P. 207.
11. *Dmitriev A.S., Kyarginsky B.Ye., Panas A.I., Starkov S.O.* Experiments on ultra wideband direct chaotic information transmission in microwave band // *Int. J. Bifurcation and Chaos.* 2003. Vol. 13. P. 1495.
12. *Короновский А.А., Москаленко О.И., Попов П.В., Храмов А.Е.* Способ скрытой передачи информации, основанный на явлении обобщенной синхронизации // *Известия РАН. Серия физическая.* 2008. Т. 72, № 1. С. 143.
13. *Короновский А.А., Москаленко О.И., Попов П.В., Храмов А.Е.* Способ секретной передачи информации // Патент на изобретение No. 2295835. Москва: ФИПС, 2007.
14. *Anishchenko V.S., Pavlov A.N., Janson N.B.* Global reconstruction in the presence of a priori information // *Chaos, Solitons and Fractals.* 1998. Vol. 9. P. 1267.
15. *Janson N.B., Pavlov A.N., Anishchenko V.S.* // *Chaos and its reconstruction* / Edited by G. Gouesbet, S. Meunier-Guttin-Cluzel. New York: Novascience publishers, 2003. P. 287.
16. *Anishchenko V.S., Pavlov A.N.* Global reconstruction in application to multichannel communication // *Phys. Rev. E.* 1998. Vol. 57. P. 2455.
17. *Анищенко В.С., Павлов А.Н., Янсон Н.Б.* Реконструкция динамических систем в приложении к решению задачи защиты информации // *Журнал технической физики.* 1998. № 12. С. 1.
18. *Gribkov D.A., Gribkova V.V., Kuznetsov Yu.I., Rzhanov A.G.* Global dynamical modeling of time series and application to restoration of broadband signal characteristics // *Chaotic, fractal and nonlinear signal processing* / Edited R.A. Katz. Mystic, Juli, 1995. P. 181. (AIP Conference Proceedings 375. New York: AIP Press).
19. *Грибков Д.А., Грибкова В.В., Кузнецов Ю.И.* Восстановление внешнего воздействия по реализации одной переменной автостохастической системы // *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 3, Физика, Астрономия.* 1995. Т. 36, № 1. С. 76.
20. *Bezruchko B.P., Smirnov D.A.* Constructing nonautonomous differential equations from experimental time series // *Phys. Rev. E.* 2001. Vol. 63. P. 016207.
21. *Bezruchko B.P., Dikanev T.V., Smirnov D.A.* Role of transient processes for reconstruction of model equations from time series // *Phys. Rev. E.* 2001. Vol. 64. P. 036210.

22. Безручко Б.П., Смирнов Д.А., Сысоев И.В., Селезнев Е.П. Реконструкция моделей неавтономных систем с дискретным спектром воздействия // Письма в ЖТФ. 2003. № 19. С. 69.
23. Anishchenko V.S., Astakhov V.V., Neiman A.B., Vadivasova T.E. and Schimansky-Geier L. Nonlinear Dynamics of Chaotic and Stochastic Systems. Tutorial and Modern Development. Berlin, Heidelberg: Springer, 2007.
24. Астафьева Н.М. Вейвлет-анализ: основы теории и примеры применения // Успехи физических наук. 1996. Т. 166. С. 1145.
25. Daubechies I. Ten Lectures on Wavelets. Philadelphia: S.I.A.M., 1992.
26. Meyer Y. Wavelets: Algorithms and Applications. Philadelphia: S.I.A.M., 1993.
27. Дремин И.М., Иванов О.В., Нечитайло В.А. Вейвлеты и их применение // Успехи физических наук. 2001. Т. 171. С. 465.

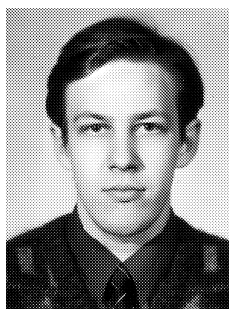
Саратовский государственный
университет им. Н.Г. Чернышевского

Поступила в редакцию 13.03.2008

DETECTION OF INFORMATION SIGNALS BASED ON RECONSTRUCTION OF DYNAMICAL SYSTEMS AND DISCRETE WAVELET-TRANSFORM

A.N. Pavlov

An approach to extract transmitted messages from the chaotic carrying signal is proposed based on the combination of dynamical systems reconstruction and the discrete wavelet-transform. It is shown that discrete wavelets allow one to increase the stability to noise of the detecting algorithm that deals with the reconstruction technique.



Павлов Алексей Николаевич – родился в Саратове (1973). Окончил физический факультет Саратовского университета по специальности радиофизика и электроника (1995). Кандидат физико-математических наук (1998). В настоящее время работает доцентом на кафедре радиофизики и нелинейной динамики. Область научных интересов: анализ временных рядов. Имеет более 80 работ, опубликованных в отечественной и зарубежной печати.
E-mail: pavlov@chaos.ssu.runnet.ru



ДИНАМИЧЕСКИЕ РЕЖИМЫ И НЕЛИНЕЙНЫЕ ЭФФЕКТЫ В АВТОГЕНЕРАТОРЕ С ЧАСТОТНО-ФАЗОВЫМ УПРАВЛЕНИЕМ

В.П. Пономаренко

Приведены результаты численного исследования динамических режимов и бифуркационных переходов в автогенераторной системе с частотно-фазовым управлением, проведенного на основе математической модели с тремя степенями свободы в цилиндрическом фазовом пространстве. Обнаружено большое разнообразие различных аттракторов колебательного и вращательного типа, соответствующих модуляционным режимам системы. Исследованы сценарии перехода от регулярных режимов к хаотическим при изменении параметров цепей управления. Выявлена сильная зависимость колебательных состояний от этих параметров, позволяющая осуществлять управление модуляционными режимами.

1. В настоящее время большое внимание уделяется изучению различных автоколебательных систем с хаотическим поведением. Интересным и важным классом таких систем являются автогенераторные системы с частотным и фазовым управлением, основанные на принципе автоподстройки частоты колебаний перестраиваемого генератора к частоте опорного колебания и нашедшие широкое применение в качестве устройств стабилизации частоты, синхронизации и слежения в системах формирования, передачи и обработки сигналов [1, 2]. В последнее время при исследовании систем с фазовым и частотным управлением большое внимание уделяется изучению эффектов автомодуляции, обусловленных влиянием цепей управления, и использованию этих эффектов для генерации периодически или хаотически модулированных сигналов различной сложности. Привлекательной особенностью систем является то, что с помощью варьирования структур и параметров цепей управления можно легко обеспечить эффективное воздействие на свойства, характеристики и области существования генерируемых колебаний.

Возможности систем с фазовым и частотным управлением в плане генерации хаотических колебаний представляют непосредственный практический интерес в связи с широко обсуждаемой в литературе проблемой создания эффективных источников сложных сигналов для реализации коммуникационных систем на основе динамического хаоса [3, 4]. По этой причине возникает необходимость детального исследования сложной динамики разнообразных вариантов систем с фазовым и частотным управлением, включая анализ влияния параметров цепей управления

на процессы возбуждения, и развития модуляционных колебаний и получение данных об областях значений этих параметров, соответствующих генерации хаотических колебаний. В этом направлении изучаются как однокольцевые, так и взаимосвязанные системы частотной и фазовой автоподстройки с фильтрами различной сложности в цепях управления [5–15]. Данная работа продолжает исследования [13–15] динамических моделей автогенераторной системы с комбинированным частотно-фазовым управлением, иначе называемой системой частотно-фазовой автоподстройки (ЧФАП).

2. Уравнение динамики системы ЧФАП, записанное в операторной форме ($p \equiv d/dt$) для разности фаз φ управляемого и опорного колебаний, имеет вид [16]

$$p\varphi + \Omega_1 K_1(p)F(\varphi) + \Omega_2 K_2(p)\Phi(p\varphi) = \delta\omega, \quad (1)$$

где $K_1(p)$ и $K_2(p)$ – коэффициенты передачи фильтров Φ_1 в фазовой и Φ_2 в частотной цепях управления, соответственно; $F(\varphi)$ и $\Phi(p\varphi)$ – характеристики фазового и частотного дискриминаторов, нормированные на единицу; Ω_1 и Ω_2 – коэффициенты усиления по цепям управления; $\delta\omega$ – начальная частотная расстройка. В [13–15] исследована динамика моделей системы ЧФАП, соответствующих фильтрам Φ_1 и Φ_2 , при которых одна из подсистем автономно демонстрирует только регулярное, а другая – как регулярное, так и хаотическое поведение; характеристики дискриминаторов аппроксимированы функциями

$$F(\varphi) = \sin \varphi, \quad \Phi(p\varphi) = 2\beta_1 p\varphi / (1 + \beta_1^2 (p\varphi)^2), \quad (2)$$

где β_1 – расстройка частот, при которой достигается максимум $\Phi(p\varphi)$. В этих случаях выяснено, что добавление петли фазового управления с периодической характеристикой дискриминатора $F(\varphi)$ к системе частотной автоподстройки приводит к появлению новых модуляционных режимов управляемого генератора, определяемых периодическими и хаотическими аттракторами вращательного и колебательно-вращательного типа в фазовом пространстве соответствующих моделей системы. В данной работе мы рассмотрим особенности динамики модели системы ЧФАП, соответствующей случаю, когда в обеих автономных подсистемах частотного и фазового управления наблюдаются как регулярные (возможно достаточно сложные), так и хаотические режимы поведения. Простейшими фильтрами в цепях управления, при которых такой случай реализуется, являются фильтр Φ_1 второго порядка ($K_1(p) = 1/(1 + (T_1 + T_2)p + T_1 T_2 p^2)$) и фильтр Φ_2 третьего порядка ($K_2(p) = 1/(1 + (T_3 + T_4 + T_5)p + (T_3 T_4 + T_3 T_5 + T_4 T_5)p^2 + T_3 T_4 T_5 p^3)$), T_1, T_2, T_3, T_4 и T_5 – постоянные времени.

Математическую модель рассматриваемой системы ЧФАП на основании уравнения (1) при аппроксимации нелинейных характеристик дискриминаторов функциями (2) записываем в виде

$$\begin{aligned} d\varphi/d\tau &= u, \\ du/d\tau &= z, \\ dz/d\tau &= v, \\ dv/d\tau &= w, \\ dw/d\tau &= \eta, \\ \mu_1 \mu_2 d\eta/d\tau &= \gamma - \sin \varphi - b\Phi(y) - (1 + \varepsilon_2 \cos \varphi)u - \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned}
& -(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \mu \cos \varphi + b\beta\varepsilon_1\Phi'(y))z - (\mu_1 + \mu + \varepsilon_1\varepsilon_2 + \mu_2 \cos \varphi + b\beta\mu_1\Phi'(y))v - \\
& -(\mu_1\varepsilon_2 + \varepsilon_1\mu + \mu_2)w - (\mu_1\mu + \varepsilon_1\mu_2)\eta + \mu u^2 \sin \varphi + \\
& + \mu_2 u^3 \cos \varphi + 3\mu_2 uz \sin \varphi - b\beta^2\mu_1\Phi''(y)z^2,
\end{aligned}$$

где $\gamma = \delta\omega/\Omega_1$, $b = \Omega_2/\Omega_1$, $\beta = \beta_1\Omega_1$, $\varepsilon_1 = (T_1 + T_2)\Omega_1$, $\varepsilon_2 = (T_3 + T_4 + T_5)\Omega_1$, $\mu_1 = T_1T_2\Omega_1^2$, $\mu = (T_3T_4 + T_3T_5 + T_4T_5)\Omega_1^2$, $\mu_2 = T_3T_4T_5\Omega_1^3$, $\Phi(y) = 2y/(1 + y^2)$, $\Phi'(y) = 2(1 - y)/(1 + y^2)^2$, $\Phi''(y) = -4y(3 - y^2)/(1 + y^2)^3$, $y = \beta u$. Система (3) имеет шестимерное цилиндрическое фазовое пространство $U = \varphi(\text{mod}2\pi)$, u, z, v, w, η , она инвариантна относительно замены $(\varphi, u, z, v, w, \eta) \rightarrow (-\varphi, -u, -z, -v, -w, -\eta)$, поэтому достаточно рассмотреть ее при значениях $\gamma \geq 0$. Параметр b может принимать как положительные, так и отрицательные значения; при этом значения $b > 0$ соответствуют традиционной системе ЧФАП, а значения $b < 0$ – системе ЧФАП с инвертированной характеристикой частотного дискриминатора [6, 14]. Остальные параметры модели (3) положительны по своему физическому смыслу.

Система ЧФАП может иметь следующие стационарные режимы [13–15]. *Режим синхронизации*, в котором разность частот колебаний управляемого и опорного генераторов равна нулю при постоянной разности фаз φ , зависящей от величины начальной расстройки γ , – это моногармонический режим управляемого генератора. *Периодические или хаотические модуляционные режимы*, подразделяющиеся на квазисинхронные, при которых разность фаз φ изменяется в ограниченном диапазоне значений, и асинхронные, при которых наблюдаются либо возрастание (убывание) разности фаз φ , либо чередование стадий неограниченного изменения φ и ее колебательного поведения в ограниченном диапазоне значений, – в этих режимах имеет место периодическая или хаотическая модуляция частоты управляемого генератора. В фазовом пространстве U режиму синхронизации отвечает устойчивое состояние равновесия модели (3), несинхронным режимам соответствуют предельные циклы, притягивающие торы или хаотические аттракторы колебательного (без вращения φ), вращательного и колебательно-вращательного типа.

В данной работе представлены результаты численного исследования сложной динамики системы ЧФАП, выполненного на основе модели (3) при помощи качественно-численных методов и компьютерного моделирования с использованием программного комплекса «ДНС» [17]. Основное внимание уделено анализу процессов возбуждения и преобразования модуляционных режимов управляемого генератора, процессов хаотизации этих режимов и сценариев перехода от регулярных режимов к хаотическим при изменении параметров, а также выяснению новых эффектов в динамике системы ЧФАП, обусловленных применяемыми фильтрами в цепях управления.

3. Модель (3) при значениях $0 \leq \gamma < 1$ имеет два состояния равновесия $A_1(\arcsin \gamma, 0, 0, 0, 0, 0)$ и $A_2(\pi - \arcsin \gamma, 0, 0, 0, 0, 0)$, из которых A_1 может быть как устойчивым, так и неустойчивым, а A_2 – всегда неустойчивое седлового типа. Условия устойчивости состояния равновесия A_1 , то есть условия существования моногармонического режима управляемого генератора системы ЧФАП, находим из

характеристического уравнения

$$\lambda^6 + a_1\lambda^5 + a_2\lambda^4 + a_3\lambda^3 + a_4\lambda^2 + a_5\lambda + a_6 = 0,$$

где

$$a_1 = (\mu\mu_1 + \mu_2\varepsilon_1)/(\mu_1\mu_2), \quad a_2 = (\mu_1\varepsilon_2 + \mu_2 + \varepsilon_1\mu)/(\mu_1\mu_2),$$

$$a_3 = (\varepsilon_1\varepsilon_2 + \mu + \mu_1 + \mu_2(1 - \gamma^2)^{1/2} + 2b\beta\mu_1)/(\mu_1\mu_2),$$

$$a_4 = (\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \mu(1 - \gamma^2)^{1/2} + 2b\beta\varepsilon_1)/(\mu_1\mu_2),$$

$$a_5 = (1 + \varepsilon_2(1 - \gamma^2)^{1/2} + 2b\beta)/(\mu_1\mu_2), \quad a_6 = (1 - \gamma^2)^{1/2}/(\mu_1\mu_2),$$

и, в силу критерия Гурвица, записываем в виде неравенств

$$\begin{aligned} a_1, a_2, \dots, a_6 > 0, \quad a_3(a_1a_2 - a_3) - a_1(a_1a_4 - a_5) > 0, \\ (a_1a_2 - a_3)[a_5(a_4a_3 - a_2a_5) + a_6(2a_1a_5 - a_3^2)] + \\ + (a_1a_4 - a_5)[a_1a_3a_6 - a_5(a_1a_4 - a_5)] - a_1^3a_6^2 > 0. \end{aligned} \quad (4)$$

Область значений параметров модели (3), для которых выполняются условия (4), соответствует области удержания моногармонического режима. Нарушение этих условий сопровождается мягким или жестким переходом системы ЧФАП к режиму периодической модуляции частоты генератора.

4. С целью получения представления о возможных автомодуляционных режимах управляемого генератора, развивающихся вне области существования моногармонического режима, была построена бифуркационная диаграмма системы ЧФАП на плоскости параметров «параметр инерционности μ_1 , определяющий степень влияния фильтра Φ_1 , – начальная расстройка γ » (рис. 1) для заданных значений параметров модели (3). Линии l_0 ($\gamma = 0$), l_1 , l_2 , l_3 , l_4 , l_5 и l_6 выделяют на плоскости (μ_1, γ) области C_1 , C_2 и C_3 существования квазисинхронных режимов системы ЧФАП с периодической модуляцией частоты управляемого генератора, которые определяются в фазовом пространстве U устойчивыми предельными циклами S_1 , S_2 и S_3 колебательного типа вокруг неустойчивого состояния равновесия A_1 . Диапазон изменения разности фаз φ в этих режимах не превосходит 2π . Область C_1 режима цикла S_1 ограничена линиями l_1 , l_0 и l_2 , область C_2 режима цикла S_2 – линиями l_3 , l_0 и l_4 , область C_3 режима цикла S_3 – линиями l_0 , l_5 и l_6 . Режимы циклов S_1 , S_2 и S_3 различаются амплитудой и частотой автомодуляции.

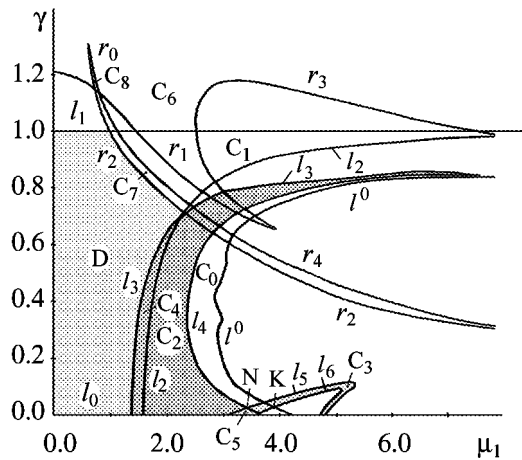


Рис. 1. Области несинхронных режимов системы ЧФАП при следующих значениях параметров модели (3): $b = 1$, $\varepsilon_1 = 1.25$, $\varepsilon_2 = 15$, $\beta = 20.5$, $\mu = 2$, $\mu_2 = 3.2$

Линии l_1 , l_3 и l_5 – это линии седло-узловых бифуркаций предельных циклов S_1 , S_2 и S_3 , соответственно (мультипликаторы циклов обращаются в $+1$). Отметим, что линия l_1 расположена вблизи линии $\gamma = 1$ и идет ниже этой линии. Линия l_2 является линией бифуркации рождения в фазовом пространстве U двумерного тора T_1 из предельного цикла S_1 ; тор T_1 рождается при пересечении линии l_2 с возрастанием μ_1 или с уменьшением γ , когда пара комплексно-сопряженных мультипликаторов цикла S_1 пересекает единичную окружность. При этом исходный одночастотный квазисинхронный режим превращается в квазипериодический – двухчастотный. Линии l_4 и l_6 отвечают потере устойчивости циклов S_2 и S_3 в результате бифуркации удвоения периода (мультипликаторы циклов обращаются в -1).

Отметим, что пересечение бифуркационных кривых l_2 и l_3 , а также кривых l_4 и l_5 обуславливает наличие областей значений μ_1 и γ , соответствующих одновременному существованию двух квазисинхронных режимов, а именно, в области C_4 , заключенной между частями линий l_0 , l_2 и l_3 , существуют режимы циклов S_1 и S_2 ; в области C_5 , ограниченной частями линий l_4 и l_5 ниже точки N и l_0 , существуют режимы циклов S_2 и S_3 . Какой из режимов реализуется для этих областей параметров – это зависит от начальных значений фазовых переменных. Примечательно, что кроме режимов предельных циклов S_1 , S_2 и S_3 в системе ЧФАП реализуются и другие квазисинхронные режимы, определяемые сложными колебательными предельными циклами модели (3), в том числе с динамическим диапазоном изменения разности фаз φ , превосходящим 2π .

Линии r_1 , r_2 , r_3 и r_4 , построенные на рис. 1, соответствуют бифуркациям вращательных однооборотных (2π -периодических по φ) предельных циклов системы (3). Линии r_1 и r_2 отвечают седло-узловым бифуркациям, при пересечении этих линий с увеличением μ_1 или γ в результате этих бифуркаций в фазовом пространстве появляются устойчивые предельные циклы L_1 и L_2 , соответственно. Циклы L_1 и L_2 определяют асинхронные режимы системы ЧФАП с нарастанием разности фаз φ и периодическим изменением частоты управляемого генератора относительно некоторого среднего значения. Режим цикла L_1 существует в области C_6 , ограниченной линиями r_1 и r_3 , режим цикла L_2 – в области C_7 , заключенной между линиями r_2 и r_4 . В области параметров C_8 , ограниченной частями линий r_1 , r_2 и r_4 , режимы циклов L_1 и L_2 существуют одновременно. Кроме режимов предельных циклов L_1 и L_2 в системе ЧФАП возможны разнообразные асинхронные режимы, определяемые сложными (многооборотными) вращательными, а также колебательно-вращательными предельными циклами модели (3), на которых процесс нарастания разности фаз φ прерывается колебательными стадиями с ограниченным изменением φ . Отметим, что благодаря пересечению кривых, соответствующих бифуркациям колебательных и вращательных предельных циклов, на плоскости (μ_1, γ) выделяются области, отвечающие одновременному существованию различных типов квазисинхронных и асинхронных режимов системы ЧФАП.

Из расположения бифуркационных кривых на рис. 1 видно, что при небольших значениях параметра μ_1 и $\gamma < 1$ в системе ЧФАП реализуется квазисинхронный режим предельного цикла S_1 . Этот режим является (по результатам численного исследования модели (3)) единственным стационарным режимом управляемого генератора системы в области значений параметров D_1 , ограниченной частями линий l_0 , l_1 , r_2 , l_2 и l_3 и примыкающей к линии $\mu_1 = 0$. Опишем перестройки поведения

системы и усложнение модуляционных колебаний, происходящие при переходе из области D_1 через границы l_1 , l_2 , l_3 и r_2 с изменением γ и μ_1 .

При переходе с увеличением γ через бифуркационную границу l_1 происходит исчезновение режима цикла S_1 и одновременно с этим появляется перемежаемость – чередование длинной стадии колебательных движений с относительно короткими нерегулярными всплесками вращательных движений. Через перемежаемость в фазовом пространстве возникает хаотический аттрактор колебательно-вращательного типа W_0 . На рис. 2 приведены примеры (φ, u) -проекций фазовых портретов и зависимостей $u(\tau)$, соответствующих аттрактору W_0 , при различных значениях расстройки γ . Поведение фазовой траектории на аттракторе W_0 представляет собой чередование движений в окрестности исчезнувшего седло-узлового колебательного предельного цикла и вращательных движений с нарастанием разности фаз φ . С удалением от границы l_1 частота и длительность вращательных движений возрастают, а длительность стадии колебательных движений уменьшается.

При переходе с увеличением μ_1 через границу r_2 режим предельного цикла S_1 продолжает существовать, но еще появляется асинхронный режим предельного цикла L_2 , в результате система демонстрирует бистабильное поведение. Пересечение с возрастанием μ_1 границы l_3 сопровождается возникновением еще одного квазисинхронного режима предельного цикла S_2 – система вновь демонстрирует бистабильное поведение, теперь обусловленное одновременным существованием в фазовом пространстве предельных циклов S_1 и S_2 . При переходе с увеличением μ_1 через границу l_2 режим цикла S_1 плавно сменяется режимом квазипериодических модуляционных колебаний, определяемых в фазовом пространстве двумерным притягивающим тором T_1 .

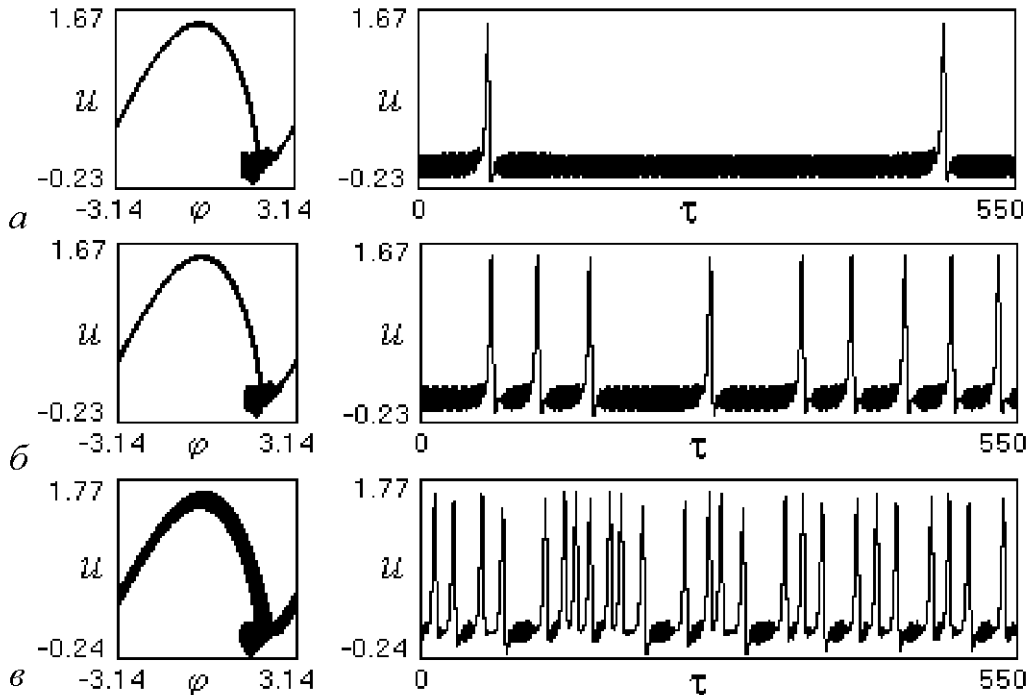


Рис. 2. Переход к режиму хаотического аттрактора колебательно-вращательного типа при изменении параметра γ : 0.9998 (а), 1.01 (б), 1.2 (в) ($b = 1$, $\varepsilon_1 = 1.25$, $\varepsilon_2 = 15$, $\beta = 20.5$, $\mu = 2$, $\mu_1 = 0.6$, $\mu_2 = 3.2$)

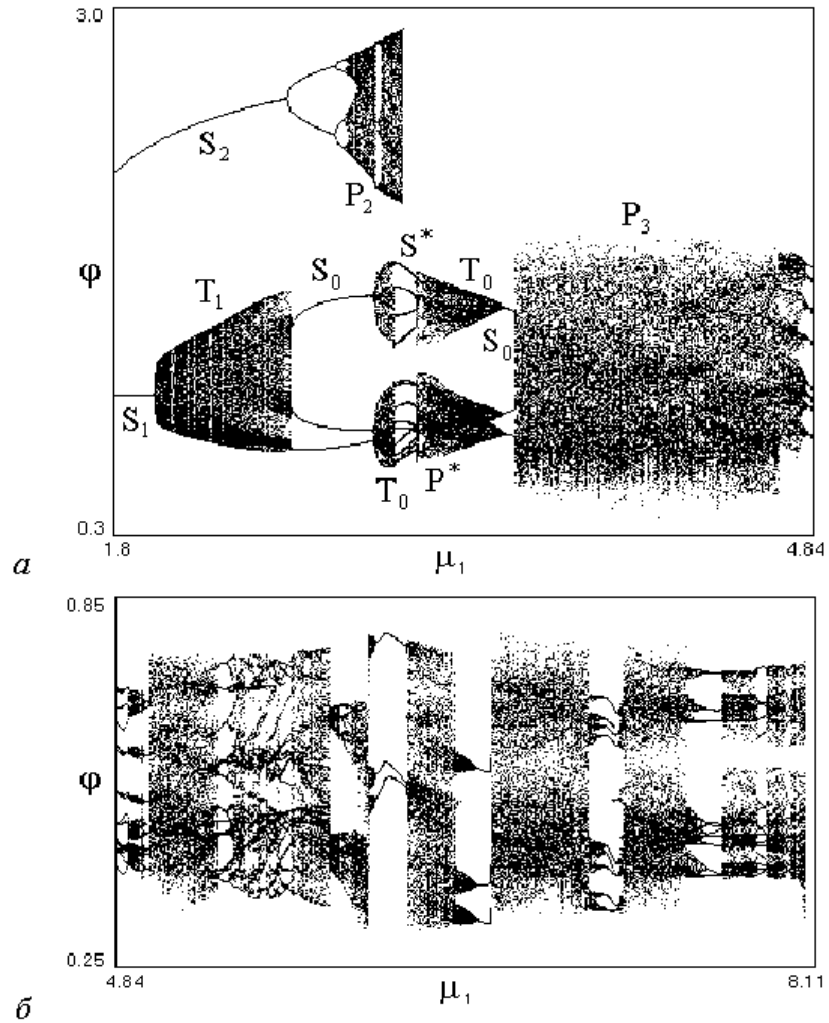


Рис. 3. Развитие квазисинхронных режимов предельных циклов S_1 и S_2 при изменении параметра μ_1 ($\gamma = 0.55$, $b = 1$, $\varepsilon_1 = 1.25$, $\varepsilon_2 = 15$, $\beta = 20.5$, $\mu = 2$, $\mu_2 = 3.2$)

При удалении с возрастанием μ_1 от частей бифуркационной границы l_2 , соответствующих значениям $0 \leq \gamma < 0.24$ и $\gamma > 0.37$ (см. рис. 1), в системе возникает режим колебательного хаотического аттрактора P_2 в результате последовательности бифуркаций удвоения периода предельного цикла S_2 . Этот режим существует в области C_0 , заключенной между линиями l_4 и l^0 . Линия l^0 соответствует (при пересечении ее с увеличением μ_1) прекращению квазисинхронного режима, который образовался на базе режима цикла S_2 , и переходу системы либо к регулярному или хаотическому квазисинхронному режиму, сформировавшемуся на базе цикла S_1 , либо к периодическому или хаотическому асинхронному режиму.

Проследивая за поведением предельных циклов S_1 и S_2 при изменении параметра μ_1 , устанавливаем, что при рассматриваемых значениях параметров область колебательных режимов, которые образуются на базе цикла S_2 , значительно меньше области колебаний, развивающихся на базе цикла S_1 . Рассмотрим динамику режимов циклов S_1 и S_2 при изменении величины параметра μ_1 , для чего обратимся к однопараметрической бифуркационной диаграмме $\{\mu_1, \varphi\}$ (рис. 3), соответствующей величине расстройки $\gamma = 0.55$, где μ_1 изменяется от 1.8 до 8.11. На рис. 4 приведены

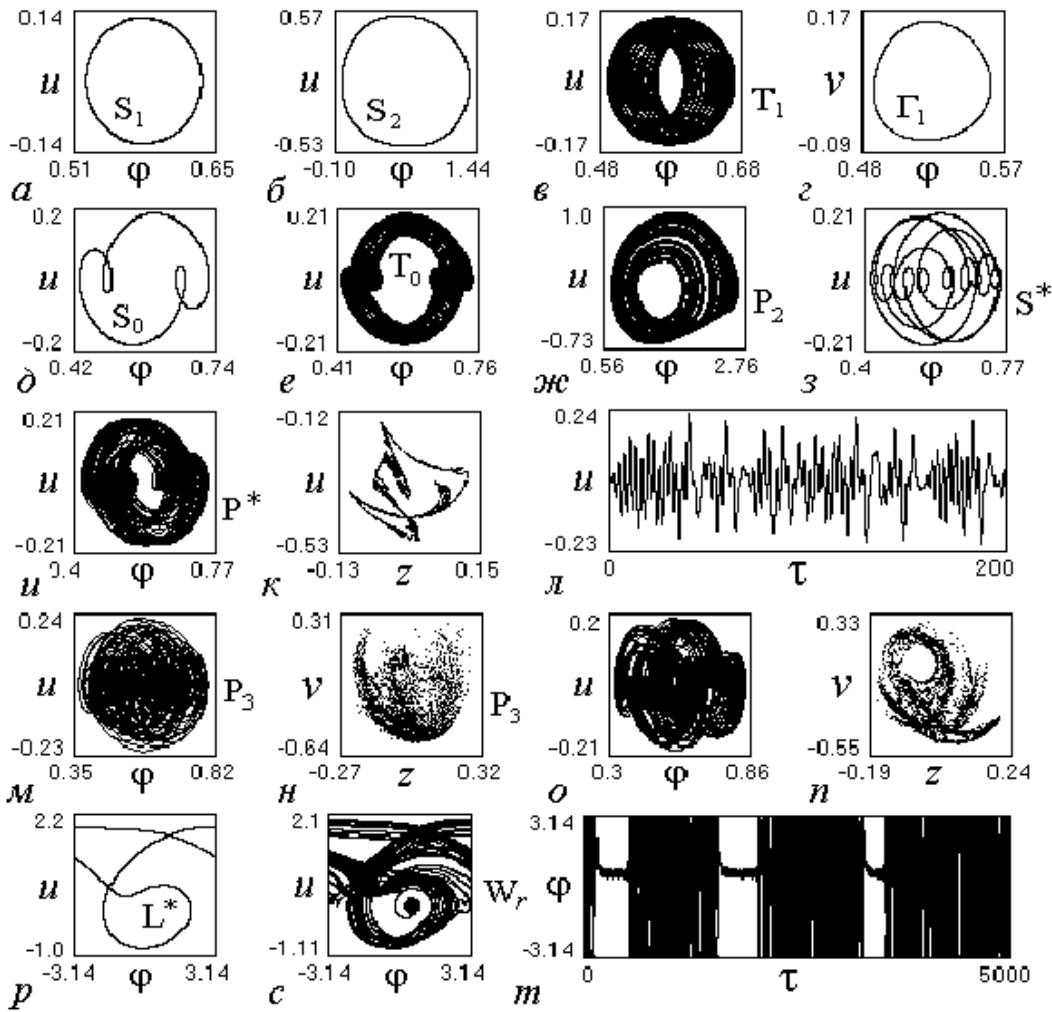


Рис. 4. Аттракторы несинхронных режимов при значениях $\gamma = 0.55$, $b = 1$, $\epsilon_1 = 1.25$, $\epsilon_2 = 15$, $\beta = 20.5$, $\mu = 2$, $\mu_2 = 3.2$, $\mu_1 = 1.8$ (а, б); 1.96 (в, г); 2.6 (д); 2.94 (е, ж); 3.04 (з); 3.17 (и, к); 3.65 (л-н); 6.32 (о, п); 8.26 (р); 8.39 (с, т)

(φ, u) -проекции фазовых портретов, (z, u) -проекции сечения Пуанкаре и зависимости $u(\tau)$ и $\varphi(\tau)$, соответствующие аттракторам модели (3) при различных значениях параметра μ_1 .

В соответствии с диаграммой $\{\mu_1, \varphi\}$ в системе ЧФАП при увеличении μ_1 наблюдаются следующие явления, связанные с квазисинхронными режимами: возникновение режима двумерного колебательного тора T_1 (рис. 4, в) из колебательного предельного цикла S_1 (рис. 4, а) – тору T_1 соответствует замкнутая инвариантная кривая сечения Пуанкаре Γ_1 (рис. 4, г); жесткий переход от режима тора T_1 к режиму колебательного предельного цикла S_0 (рис. 4, д); формирование режима колебательного тора T_0 (рис. 4, е) из цикла S_0 ; развитие режима хаотического аттрактора P_2 (рис. 4, ж) на базе цикла S_2 (рис. 4, б); жесткие переходы от режима тора T_0 и от режима аттрактора P_2 к режиму колебательного предельного цикла S^* (рис. 4, з), а затем от режима цикла S^* к режиму колебательного хаотического аттрактора P^* (рис. 4, и, к); преобразование режима аттрактора P^* в режим тора T_0 , а затем – режима тора T_0 в режим цикла S_0 ; жесткий переход от режима цикла S_0 к режиму

колебательного хаотического аттрактора P_3 (рис. 4, л-н); чередование хаотических режимов (рис. 4, о, н) и режимов колебательных предельных циклов различной сложности. По мере дальнейшего увеличения μ_1 наблюдается эффект перехода системы от хаотического квазисинхронного режима к асинхронному режиму двухоборотного (4π -периодического по φ) вращательного предельного цикла L^* (рис. 4, р), на базе которого вначале возникает режим вращательного хаотического аттрактора через бифуркации удвоения периода цикла L^* , а затем режим колебательно-вращательного хаотического аттрактора W_r (рис. 4, с, т). Режим аттрактора W_r поддерживается в системе при продолжении увеличения μ_1 , прерываясь режимами вращательных и колебательных предельных циклов.

Рассмотрим динамику квазисинхронного режима предельного цикла S_1 (см. рис. 4, а) при изменении начальной расстройки γ . На рис. 5 представлены бифуркационная диаграмма $\{\gamma, \varphi\}$, соответствующая $\mu_1 = 6.25$ (рис. 5, а), а также (φ, u) -проекции фазовых портретов, (z, u) -проекция сечения Пуанкаре и зависимости $\varphi(\tau)$ и $u(\tau)$, соответствующие аттракторам модели (3), для серии значений γ (рис. 5, б-и). Для рассматриваемого процесса также характерно чередование режимов управляемого генератора с периодической, квазипериодической и хаотической модуляцией

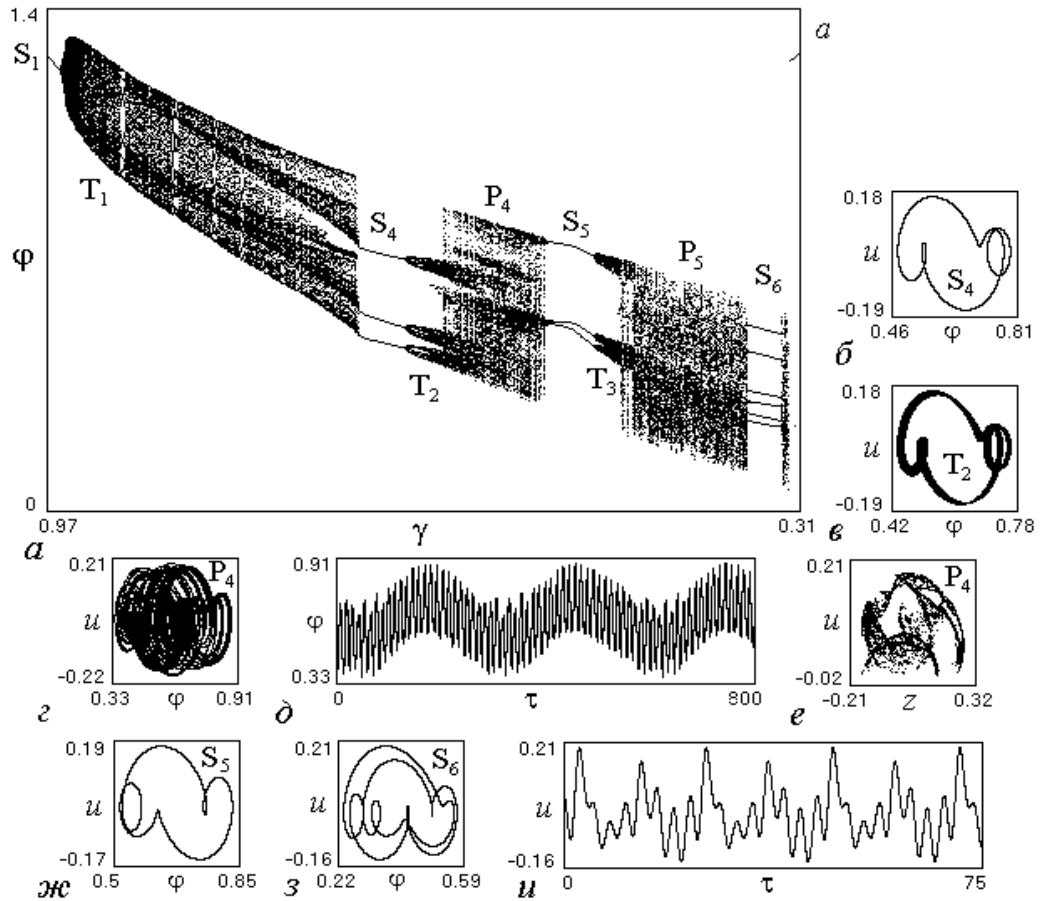


Рис. 5. Диаграмма развития квазисинхронного режима предельного цикла S_1 (а) и аттракторы режимов (б-и) при изменении начальной расстройки γ : $\gamma = 0.69$ (а, б); 0.653 (в); 0.58 (г-е); 0.53 (ж); 0.354 (з, и) ($b = 1, \varepsilon_1 = 1.25, \varepsilon_2 = 15, \beta = 20.5, \mu = 2, \mu_1 = 6.25, \mu_2 = 3.2$)

частоты. При этом режимам с периодической модуляцией соответствуют колебательные предельные циклы S_1 (см. рис. 4, *а*), S_4 (см. рис. 5, *б*), S_5 (см. рис. 5, *жс*) и S_6 (см. рис. 5, *з, и*). Режимы с квазипериодической модуляцией определяются колебательными торами T_1 (см. рис. 4, *в, з*), T_2 (см. рис. 5, *в*) и T_3 , которые возникают из предельных циклов S_1 , S_4 и S_5 , соответственно. Хаотические модуляционные режимы P_4 (см. рис. 5, *г-е*) и P_5 образуются в результате разрушения торов T_2 и T_3 . Развитие квазисинхронных режимов завершается жестким переходом при $\gamma < 0.327$ к асинхронному режиму вращательного хаотического аттрактора в результате седлоузловой бифуркации цикла S_6 .

Совокупность результатов, полученных с использованием бифуркационной диаграммы $\{\mu_1, \gamma\}$ (см. рис. 1) и приведенных на рис. 2–5, свидетельствует о большом разнообразии квазисинхронных режимов системы ЧФАП, соответствующих выделенным областям на плоскости параметров μ_1, γ , об эффектах перехода между квазисинхронными и асинхронными режимами при изменении параметров μ_1 и γ , а также позволяет понять, как развитие неустойчивости периодических квазисинхронных режимов приводит в итоге к установлению в системе режима хаотического аттрактора вращательного типа.

5. Обсудим нелинейные эффекты, выявленные в системе ЧФАП в процессе численного исследования модели (3) при других значениях параметров.

5.1. Рассмотрим случай, когда $\gamma = 0.01$, $b = 5$, $\beta = 1$, $\varepsilon_1 = 1$, $\varepsilon_2 = 35$, $\mu = 2.5$, $\mu_2 = 13.5$, и проведем анализ поведения системы при изменении параметра μ_1 , используя приведенные на рис. 6 (φ, u) -проекция фазового портрета, (φ, v) -проекция отображения Пуанкаре и зависимости $u(\tau)$ и $v(n)$ (n – номер точки пересечения фазовой траектории аттрактора с секущей Пуанкаре), соответствующие аттракторам модели (3). В качестве начального состояния системы при $\mu_1 = 1.34$ выбран квазисинхронный режим колебательного двумерного тора T_4 (рис. 6, *а*), которому соответствует инвариантная замкнутая кривая Γ_2 (рис. 6, *б*). При увеличении μ_1 на базе тора T_4 вначале возникает трехмерный тор T^3 (рис. 6, *в*), о чем наглядно свидетельствуют вид (φ, v) -проекции отображения Пуанкаре и зависимости $v(n)$ (рис. 6, *з*), а затем происходит переход к хаотическому квазисинхронному режиму P_1 (рис. 6, *д*).

5.2. Особый интерес представляют асинхронные режимы хаотических аттракторов вращательного и колебательно-вращательного типа, реализуемых в фазовом пространстве модели (3). Как показано в [4], автомодуляционные колебания, соответствующие таким аттракторам, являются наиболее предпочтительными для использования системы с фазовым управлением в качестве генератора хаотических колебаний. Рассмотрим возможные асинхронные режимы системы ЧФАП в случае, когда значения $\gamma = 0.5$, $b = 0.5$, $\beta = 1$, $\varepsilon_1 = 0.9$, $\varepsilon_2 = 80$, $\mu = 2.0$, $\mu_2 = 2.0$, а μ_1 – варьируемый параметр. На рис. 7, *а* приведена соответствующая этому случаю бифуркационная диаграмма $\{\mu_1, u\}$, которая отражает эволюцию асинхронного режима вращательного предельного цикла L_3 , (φ, u) -проекция фазового портрета которого изображена на рис. 7, *б*. Проанализируем изменения, происходящие в поведении системы при увеличении параметра μ_1 , привлекая (φ, u) -проекции фазовых портретов, (z, u) -проекции сечения Пуанкаре и зависимости $u(\tau)$, соответствующие аттракторам, существующим в фазовом пространстве модели (3) при различных значениях μ_1 .

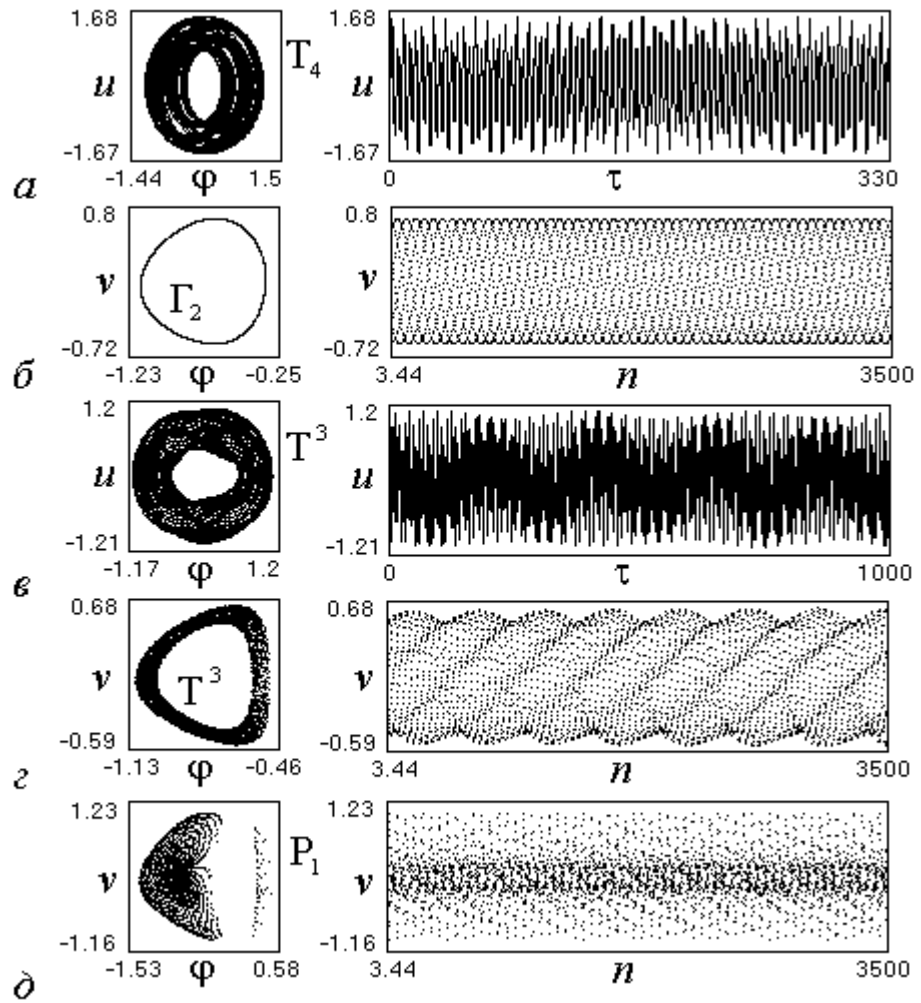


Рис. 6. Сложные квазисинхронные режимы системы ЧФАП, наблюдаемые при изменении параметра μ_1 : 1.34 (а, б); 1.5338 (в, г); 1.537 (д) ($\gamma = 0.01, b = 5, \varepsilon_1 = 1.0, \varepsilon_2 = 35, \beta = 1.0, \mu = 2.5, \mu_2 = 13.5$)

Из $\{\mu_1, u\}$ -диаграммы видно, что вначале возникает хаотический аттрактор W_1 (рис. 7, в, г) через бифуркации удвоения периода цикла L_3 . Максимальный ляпуновский характеристический показатель аттрактора, изображенного на рис. 7, в, г, имеет значение 0.146. Затем от режима аттрактора W_1 система переходит через перемежаемость «хаос – цикл» (рис. 7, д, е) к периодическому режиму вращательного предельного цикла L_4 (рис. 7, ж). Дальнейшее увеличение μ_1 приводит к преобразованию режима цикла L_4 в режим хаотического аттрактора W_2 (рис. 7, з–к) через бифуркации удвоения периода. Режим аттрактора W_2 наблюдается в достаточно широком интервале изменения параметра μ_1 . Представление об изменении характера аттрактора W_2 при возрастании μ_1 дают сечения Пуанкаре (рис. 7, к–м). Численные расчеты показывают, что максимальный ляпуновский характеристический показатель аттрактора W_2 принимает значения от 0.11 до 0.138 в том интервале изменения μ_1 , которому соответствуют рис. 7, к–м.

На рис. 8, а представлена бифуркационная диаграмма $\{\mu_1, u\}$, отражающая образование в фазовом пространстве модели (3) колебательно-вращательного хаоти-

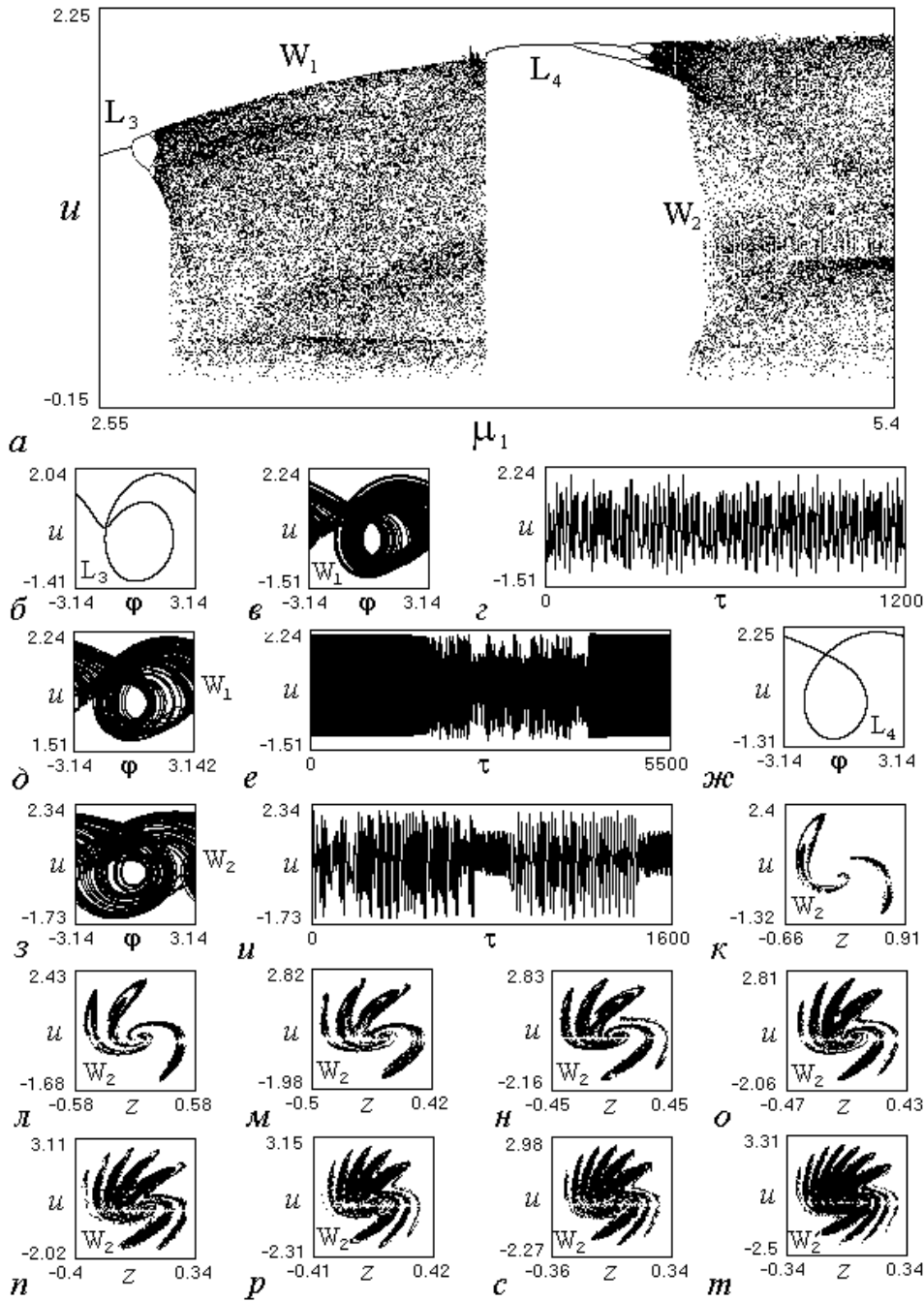


Рис. 7. Диаграмма развития асинхронных режимов системы ЧФАП при изменении параметра μ_1 (а) и аттракторы режимов (б-т): $\mu_1 = 2.55$ (б); 3.45 (в, г); 3.9275 (д, е); 3.93 (жс); 5.2 (з-к); 10 (л); 16 (м); 19 (н); 25 (о); 34 (п); 39 (р); 50 (с); 60 (т) ($\gamma = 0.5, b = 0.5, \varepsilon_1 = 0.9, \varepsilon_2 = 80, \beta = 1.0, \mu = 2.0, \mu_2 = 2.0$)

ческого аттрактора на базе вращательного предельного цикла в случае, когда значения параметров $\gamma = 0.5, b = -0.5, \beta = 1, \varepsilon_1 = 0.9, \varepsilon_2 = 80, \mu = 2.0, \mu_2 = 2.0$, то есть при инверсном включении дискриминатора в цепи частотного управления. На рис. 8, б-г изображены (φ, u) -проекции фазовых портретов и зависимости $u(\tau)$, соответствующие режиму исходного предельного цикла L_5 и режиму хаотического

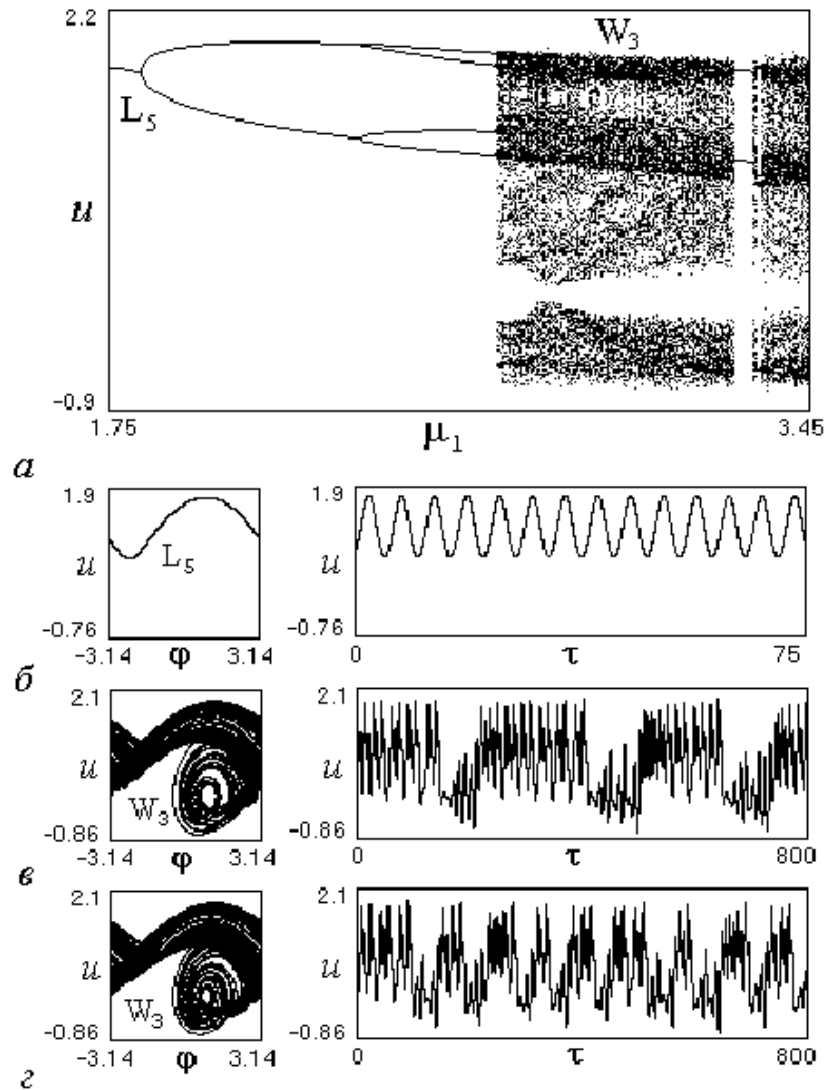


Рис. 8. Возникновение режима колебательно-вращательного хаотического аттрактора на базе периодического асинхронного режима в случае, когда $\gamma = 0.5$, $b = -0.5$, $\varepsilon_1 = 0.9$, $\varepsilon_2 = 80$, $\beta = 1.0$, $\mu = 2.0$, $\mu_2 = 2.0$ ($\mu_1 = 1.8$ (*б*); 2.7 (*в*); 2.95 (*г*))

аттрактора W_3 . Механизм перехода к аттрактору W_3 выглядит следующим образом. При увеличении параметра μ_1 реализуются две бифуркации удвоения периода цикла L_5 , после которых наблюдается слабое зашумление колебаний. Затем возникает перемежаемость – чередование длинной стадии вращательных движений с редкими стадиями нерегулярных колебательных движений относительно состояния равновесия A_1 . С ростом μ_1 длительность стадий вращательных движений в структуре аттрактора W_3 уменьшается, и они все чаще прерываются стадиями колебательных движений (рис. 8, *в*, *г*). В интервале $2.7 < \mu_1 < 3.6$ максимальный ляпуновский характеристический показатель аттрактора W_3 изменяется от 0.05 до 0.144 при увеличении μ_1 , что свидетельствует о возрастании скорости разбегания близких фазовых траекторий.

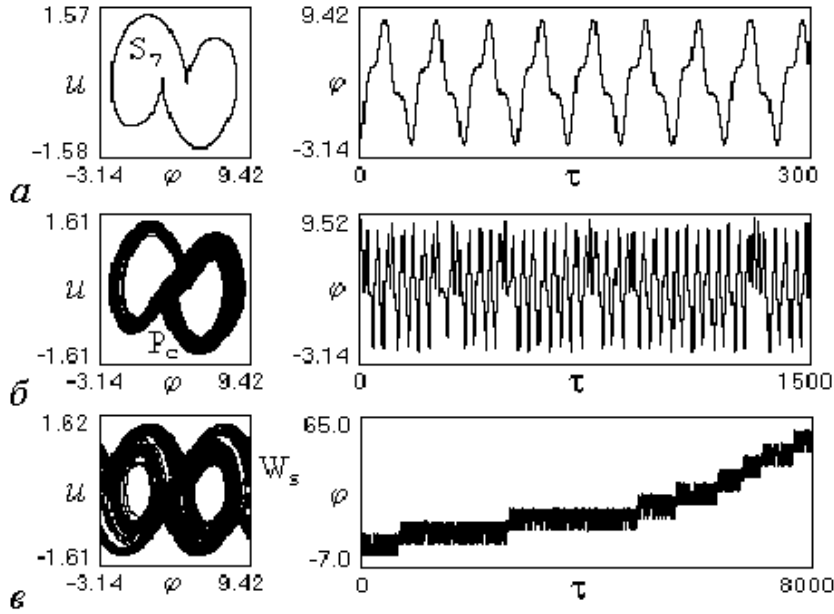


Рис. 9. Развитие режима колебательно-вращательного хаотического аттрактора на базе периодического квазисинхронного режима с проворотом φ в случае, когда $\gamma = 0.02$, $b = 1.0$, $\varepsilon_1 = 1.5$, $\varepsilon_2 = 15$, $\beta = 20.5$, $\mu = 2.0$, $\mu_2 = 3.2$ ($\mu_1 = 5.71$ (а); 5.89 (б); 5.95 (в))

Рис. 9, на котором изображены (φ, u) -проекции фазовых портретов и зависимости $\varphi(\tau)$, соответствующие значениям $\gamma = 0.02$, $b = 1.0$, $\beta = 20.5$, $\varepsilon_1 = 1.5$, $\varepsilon_2 = 15$, $\mu = 2.0$, $\mu_2 = 3.2$, иллюстрирует образование при изменении параметра μ_1 колебательно-вращательного хаотического аттрактора иного типа. Особенность этого аттрактора состоит в том, что колебательные стадии на нем представляют собой движения по траекториям хаотического аттрактора колебательного типа с ограниченным диапазоном изменения разности фаз φ , превышающим 2π (аттрактора с проворотом фазы). Такой колебательно-вращательный хаотический аттрактор возникает на базе колебательного предельного цикла S_7 , охватывающего три состояния равновесия $A_1(\arcsin \gamma, 0, 0, 0, 0, 0)$, $A_2(\pi - \arcsin \gamma, 0, 0, 0, 0, 0)$ и $A'_1(3\pi - \arcsin \gamma, 0, 0, 0, 0, 0)$ (рис. 9, а). При увеличении μ_1 цикл S_7 исчезает в результате седло-узловой бифуркации, и через перемежаемость возникает хаотический аттрактор P_c (рис. 9, б). Колебания на аттракторе P_c представляют собой нерегулярное чередование движений по траекториям, охватывающим A_1 , A_2 и A'_1 , и движений вокруг состояния равновесия A'_1 . Затем в результате гомоклинической бифуркации хаотический аттрактор P_c превращается в хаотический колебательно-вращательный аттрактор W_s (рис. 9, в) с максимальным ляпуновским характеристическим показателем, равным 0.098. В режиме аттрактора W_s стадии колебаний, соответствующие аттрактору P_c , прерываются вращательными движениями с постоянным нарастанием разности фаз φ .

5.3. При численном исследовании модели (3) выяснено, что переходы к хаотическим квазисинхронным и асинхронным режимам реализуются также в результате разрушения двумерных торов в фазовом пространстве и через бифуркации удвоения торов. Первый из этих случаев иллюстрируют рис.10 и 11, на которых приведены (φ, u) -проекции фазовых портретов, (z, v) -проекции сечения Пуанкаре и фрагмент временной реализации $\varphi(\tau)$, соответствующие колебательным (рис. 10) и вращательным (рис. 11) аттракторам модели (3). Рис. 10 соответствует значениям $\gamma = 0$,

$b = 1.0$, $\beta = 20.5$, $\varepsilon_2 = 15$, $\mu = 2.0$, $\mu_1 = 3.7$, $\mu_2 = 3.2$, параметр ε_1 изменяется от 1.2 до 0.72. Стартовым состоянием системы при $\varepsilon_1 = 1.2$ является квазисинхронный режим колебательного предельного цикла S^0 (рис. 10, *a*). Видно, что с уменьшением ε_1 цикл S^0 теряет устойчивость и в фазовом пространстве рождается притягивающий двумерный тор T^0 (рис. 10, *б*), которому в сечении Пуанкаре соответствует замкнутая инвариантная кривая Γ^0 (рис. 10, *в*). Далее, начиная со значения $\varepsilon_1 = 0.85$, наблюдается искажение формы кривой Γ^0 (рис. 10, *г*), что свидетельствует о постепенном вырождении тора T^0 в колебательный хаотический аттрактор типа тор – хаос (рис. 10, *д–к*).

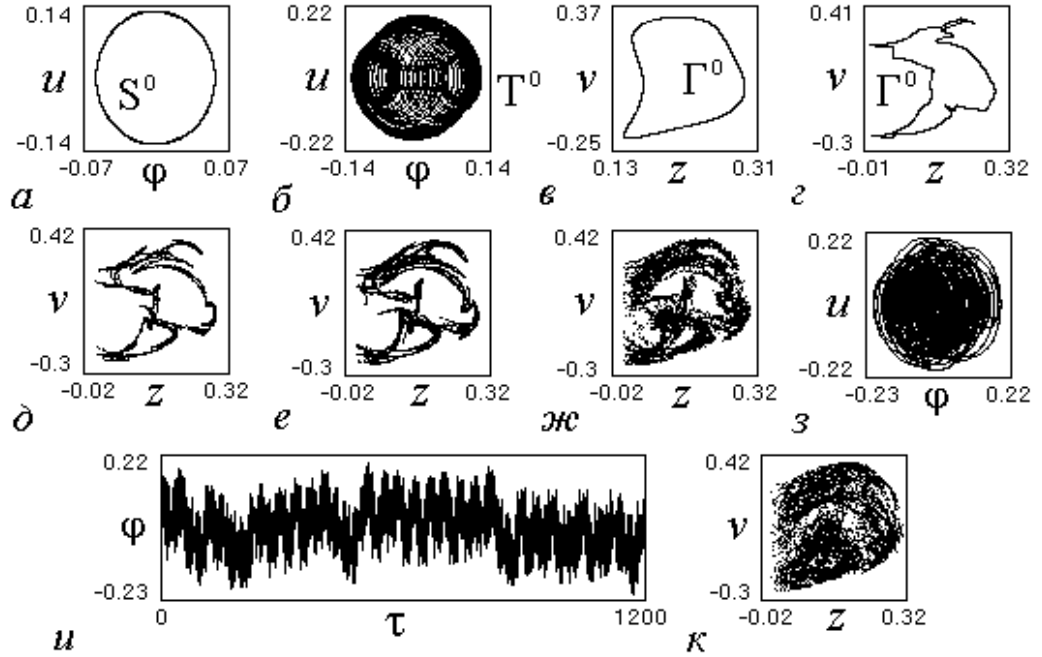


Рис. 10. Эволюция периодического квазисинхронного режима при изменении параметра ε_1 : 1.2 (*a*); 1.01 (*б, в*); 0.835 (*г*); 0.81 (*д*); 0.78 (*е*); 0.76 (*ж*); 0.72 (*з–к*) ($\gamma = 0$, $b = 1.0$, $\varepsilon_2 = 15$, $\beta = 20.5$, $\mu = 2.0$, $\mu_1 = 3.7$, $\mu_2 = 3.2$)

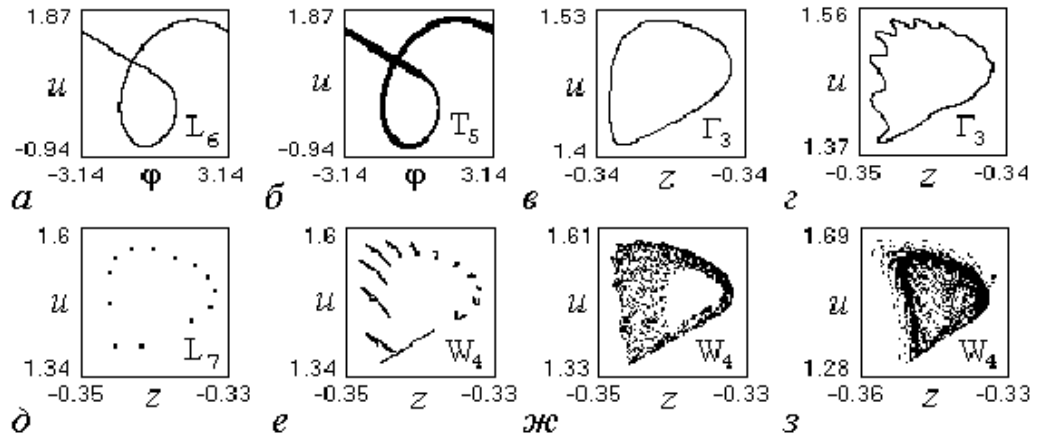


Рис. 11. Эволюция периодического асинхронного режима при изменении параметра μ_1 : 4.77 (*a*); 4.788 (*б, в*); 4.792 (*г*); 4.794 (*д*); 4.796 (*е*); 4.797 (*ж*); 4.804 (*з*) ($\gamma = 0.01$, $b = -1.0$, $\varepsilon_1 = 1.0$, $\varepsilon_2 = 35$, $\beta = 1.0$, $\mu = 2.5$, $\mu_2 = 11$)

Рис. 11 соответствует значениям $\gamma = 0.01$, $b = -1.0$, $\beta = 1.0$, $\varepsilon_1 = 1.0$, $\varepsilon_2 = 35$, $\mu = 2.5$, $\mu_2 = 11$, то есть случаю инверсного включения дискриминатора в цепи частотного управления, параметр μ_1 изменяется от 4.77 до 4.804. Исходным состоянием системы при $\mu_1 = 4.77$ является режим вращательного предельного цикла L_6 (рис. 11, а). При увеличении μ_1 вначале в фазовом пространстве из цикла L_6 рождается притягивающий вращательный тор T_5 (рис. 11, б), которому в сечении Пуанкаре отвечает инвариантная замкнутая кривая Γ_3 (рис. 11, в). Далее наблюдается искривление кривой Γ_3 (рис. 11, з), а затем на торе образуется тринадцатиоборотный (26 π -периодический по φ) вращательный предельный цикл L_7 (рис. 11, д). С увеличением μ_1 этот цикл теряет устойчивость в результате бифуркации удвоения периода, которая приводит к разрушению тора T_5 [18]. В результате последовательности бифуркаций удвоения периода образуется вращательный хаотический аттрактор W_4 (рис. 11, д-з).

Рис. 12 и 13 иллюстрируют переходы к хаотическим квазисинхронному и асинхронному режимам системы ЧФАП, которые осуществляются через бифуркации удвоения колебательных и вращательных двумерных торов, соответственно. На этих рисунках изображены (φ, u) -проекции фазовых портретов, (u, v) - и (φ, v) -проекции сечения Пуанкаре и фрагменты временных реализаций $u(\tau)$, соответствующие аттракторам модели (3) колебательного (рис. 12) и вращательного (рис. 13) типа. Рис. 12 соответствует значениям $\gamma = 0$, $b = 1.0$, $\beta = 20.5$, $\varepsilon_2 = 15.2$, $\mu = 2.0$, $\mu_1 = 3.7$, $\mu_2 = 3.2$, варьируемым параметром является ε_1 ; рис. 13 отвечает значениям $b = 15$, $\beta = 20$, $\varepsilon_1 = 1.0$, $\varepsilon_2 = 15$, $\mu = 2.0$, $\mu_1 = 355$, $\mu_2 = 2.0$, варьируемым параметром является γ . В качестве исходных состояний системы выбраны режим колебательного тора T^* (рис. 12, а) и режим вращательного тора T_r (рис. 13, а, б). Рис. 12, б-г (рис. 13, в-д) показывают эволюцию замкнутой инвариантной кривой Γ^* (инвариантной замкнутой кривой Γ_r , 2 π -периодической по φ), соответствующей

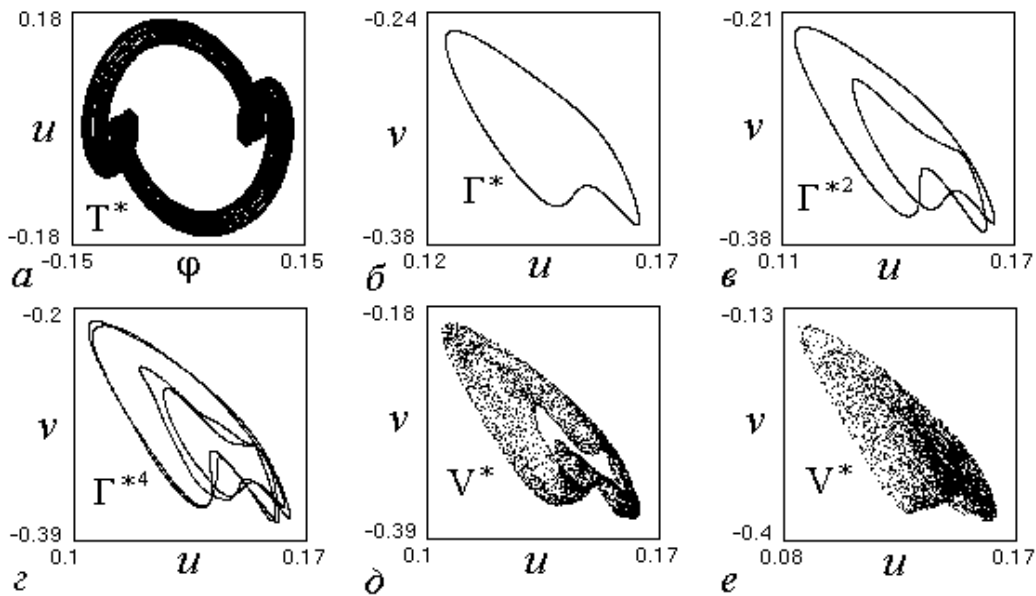


Рис. 12. Переход к хаотическому квазисинхронному режиму через бифуркации удвоения двумерного тора при изменении параметра ε_1 : 1.44 (а, б); 1.4 (в); 1.39 (г); 1.38 (д); 1.3 (е) ($\gamma = 0$, $b = 1.0$, $\varepsilon_2 = 15.2$, $\beta = 20.5$, $\mu = 2.0$, $\mu_1 = 3.7$, $\mu_2 = 3.2$)

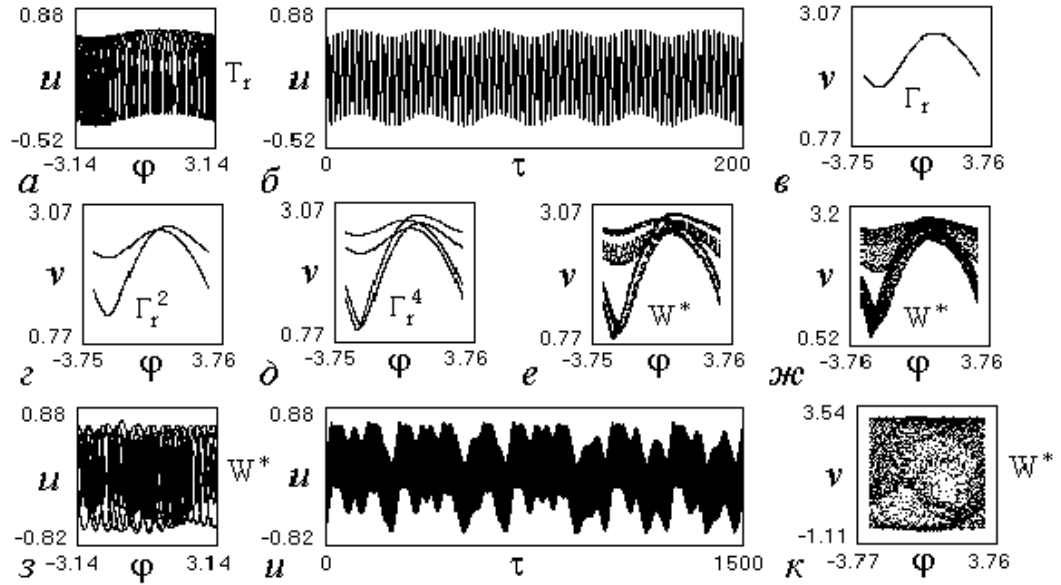


Рис. 13. Переход к хаотическому асинхронному режиму через бифуркации удвоения двумерного тора при изменении параметра γ : 0.43 (а-б); 0.4 (з); 0.37 (д); 0.36 (е); 0.35 (ж); 0.3 (з-к) ($b = 15$, $\varepsilon_1 = 1.0$, $\varepsilon_2 = 15$, $\beta = 20$, $\mu = 2.0$, $\mu_1 = 355$, $\mu_2 = 2.0$)

тору T^* (тору T_r), при изменении параметра ε_1 (параметра γ). Уменьшение ε_1 (уменьшение γ) приводит к бифуркациям удвоения периода кривой Γ^* (кривой Γ_r), адекватным бифуркациям удвоения тора T^* (тора T_r), которые завершаются образованием в фазовом пространстве хаотического аттрактора V^* (рис. 12, д, е) (хаотического аттрактора W^* (рис. 13, е-к)).

5.4. При исследовании модели (3) был выяснен интересный эффект образования режимов хаотических аттракторов колебательного и вращательного типа с переключениями движений между двумя бассейнами притяжения в фазовом пространстве. Рис. 14, на котором приведены бифуркационная диаграмма $\{\mu_1, \varphi\}$, соответствующая значениям параметров $\gamma = 0.15$, $b = 5.0$, $\beta = 1.0$, $\varepsilon_1 = 1.0$, $\varepsilon_2 = 35$, $\mu = 2.5$, $\mu_2 = 13.5$ (а), (φ, u) -проекции фазовых портретов, (φ, v) -проекции сечения Пуанкаре и фрагменты зависимостей $\varphi(\tau)$, соответствующие колебательным аттракторам модели (3) при различных значениях варьируемого параметра μ_1 (рис. 14, б-и), характеризует процесс перехода от режима колебательного предельного цикла S_1^* (см. рис. 14, б) к режиму колебательного хаотического аттрактора V_0 с переключениями движений. Видно, что при увеличении μ_1 вначале реализуются бифуркации удвоения периода цикла S_1^* , в результате которых возникает режим колебательного хаотического аттрактора P_1^* (см. рис. 14, в). В интервале значений μ_1 , соответствующих существованию аттрактора P_1^* , область хаотического разброса значений φ на диаграмме $\{\mu_1, \varphi\}$ сосредоточена в одной полосе. Затем наблюдается явление перемежаемости «хаос-хаос», через которую система переходит к режиму колебательно хаотического аттрактора V_0 (см. рис. 14, г-е). После возникновения аттрактора V_0 на диаграмме $\{\mu_1, \varphi\}$ и на (φ, v) -проекции сечения Пуанкаре (см. рис. 14, е) наблюдаются две области сосредоточения разброса значений φ и v с нерегулярными переходами между этими областями.

Отметим, что диапазон изменения переменной φ на аттракторе V_0 превосходит 2π . Примечательно, что по мере увеличения параметра μ_1 в сравнительно небольшом интервале значений μ_1 спектр ляпуновских характеристических показателей

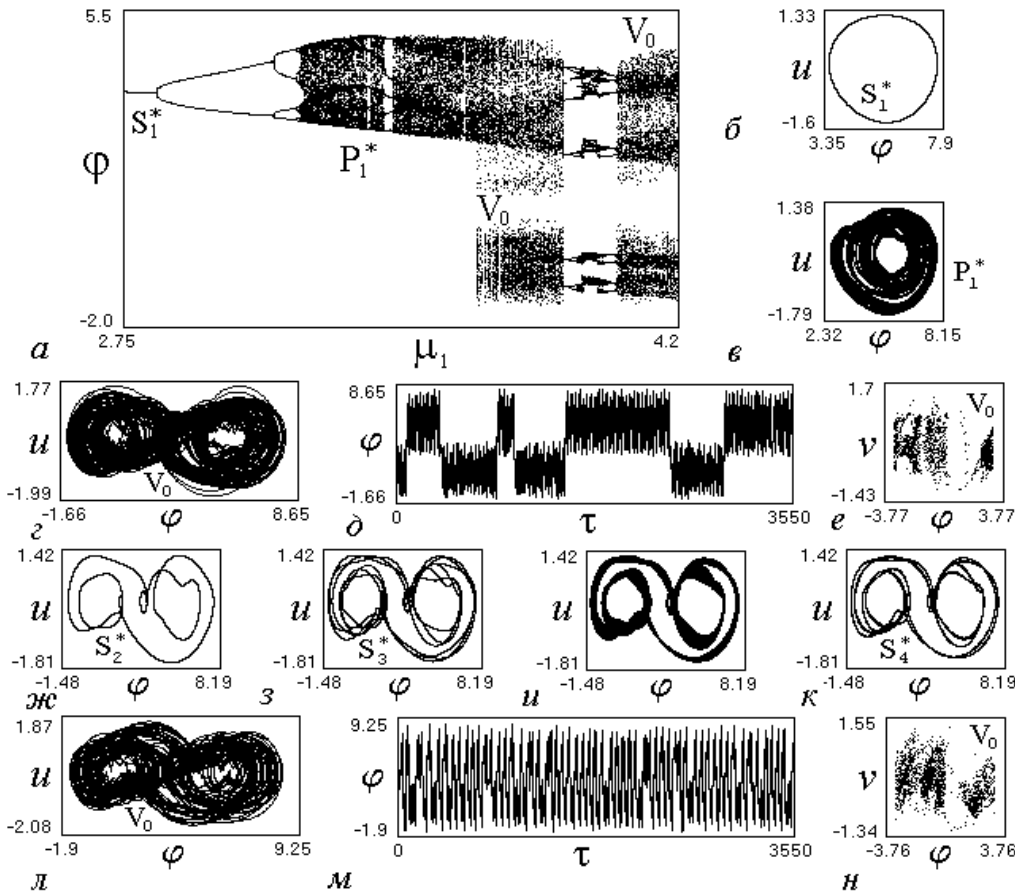


Рис. 14. Бифуркационная диаграмма μ_1, φ (а) и аттракторы режимов (б–н), иллюстрирующие переход к хаотическому квазисинхронному режиму с переключениями колебаний при значениях $\gamma = 0.15, b = 5, \varepsilon_1 = 1.0, \varepsilon_2 = 35, \beta = 1.0, \mu = 2.5, \mu_2 = 13.5, \mu_1 = 2.75$ (б); 3.4 (в); 3.68 (з–е); 3.9 (ж); 3.97 (з); 3.99 (и); 4.02 (к); 4.79 (л–н)

аттрактора V_0 содержит два положительных показателя, то есть аттрактор V_0 становится гиперхаотическим [19]. Следующий эффект, наблюдаемый при увеличении μ_1 , состоит в появлении на диаграмме $\{\mu_1, \varphi\}$ «окна», в котором реализуются сложные периодические модуляционные режимы с переключениями, соответствующие колебательным предельным циклам S_2^*, S_3^* и S_4^* (рис. 14, ж, з, к). В этом окне происходят переходы к колебательному хаотическому режиму с переключениями (рис. 14, и) по сценарию удвоения предельных циклов и через перемежаемость. Вне окна при дальнейшем увеличении μ_1 имеет место увеличение частоты переключений движений на аттракторе V_0 и уменьшение длительности стадий колебаний между переключениями (рис. 14, л–н), затем аттрактор V_0 преобразуется в колебательно-вращательный аттрактор, похожий на хаотический аттрактор W_s (см. рис. 9, в).

Рис. 15 и 16 иллюстрируют процесс перехода от режимов вращательных предельных циклов к режиму вращательного хаотического аттрактора с переключениями колебаний. На этих рисунках изображены бифуркационные диаграммы $\{\mu_2, u\}$ (рис. 15, а, 16, а), (φ, u) - и (z, u) -проекции фазовых портретов, (z, u) -проекции сечения Пуанкаре и фрагменты зависимостей $u(\tau)$, соответствующие вращательным аттракторам, существующим в фазовом пространстве модели (3) при различных значениях варьируемого параметра μ_2 (рис. 15, б–к, 16, б–с). Диаграммы $\{\mu_2, u\}$ постро-

ены для случаев, когда значения параметров $\gamma = 0.05$, $b = -1.5$, $\beta = 5.75$, $\varepsilon_1 = 10$, $\varepsilon_2 = 1.9$, $\mu = 2.0$, $\mu_1 = 1.5$ (см. рис. 15, *a*) и когда $\gamma = 0.05$, $b = -1.55$, $\beta = 5.0$, $\varepsilon_1 = 1.8$, $\varepsilon_2 = 2.05$, $\mu = 2.33$, $\mu_1 = 3.1$ (см. рис. 16, *a*). Оба случая соответствуют инверсному включению дискриминатора рассогласований в цепи частотного управления системы ЧФАП. В качестве исходного состояния системы выбран асинхронный режим вращательных предельных циклов L_1^* (см. рис. 15, *б*) в первом случае и L_2^* (см. рис. 16, *б*) во втором случае. Диаграммы на рис. 15, *a* и 16, *a* отображают влияние изменения параметра μ_2 на поведение системы.

В первом случае (рис. 15, *a*) при увеличении μ_2 вначале происходит формирование в фазовом пространстве вращательного хаотического аттрактора W_1^* (см. рис. 15, *в*) по сценарию удвоения периода колебаний на цикле L_1^* . Затем че-

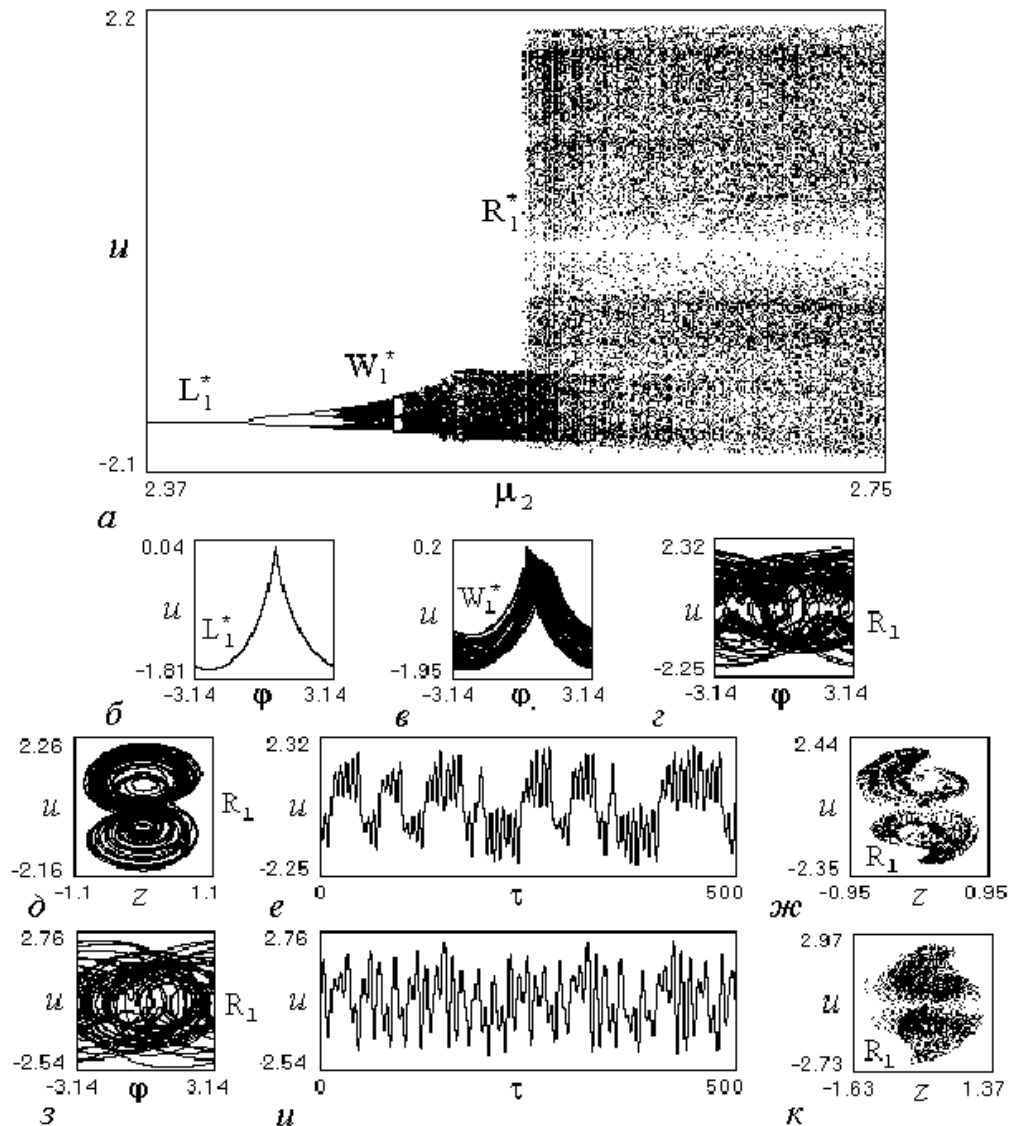


Рис. 15. Бифуркационная диаграмма μ_2, u (*a*) и аттракторы режимов (*б-к*), иллюстрирующие переход к хаотическому асинхронному режиму с переключениями колебаний при значениях $\gamma = 0.05$, $b = -1.5$, $\varepsilon_1 = 10$, $\varepsilon_2 = 1.9$, $\beta = 5.75$, $\mu = 2.0$, $\mu_1 = 1.5$, $\mu_2 = 2.37$ (*б*); 2.55 (*в*); 2.7 (*з-ж*); 4.7 (*з-к*)

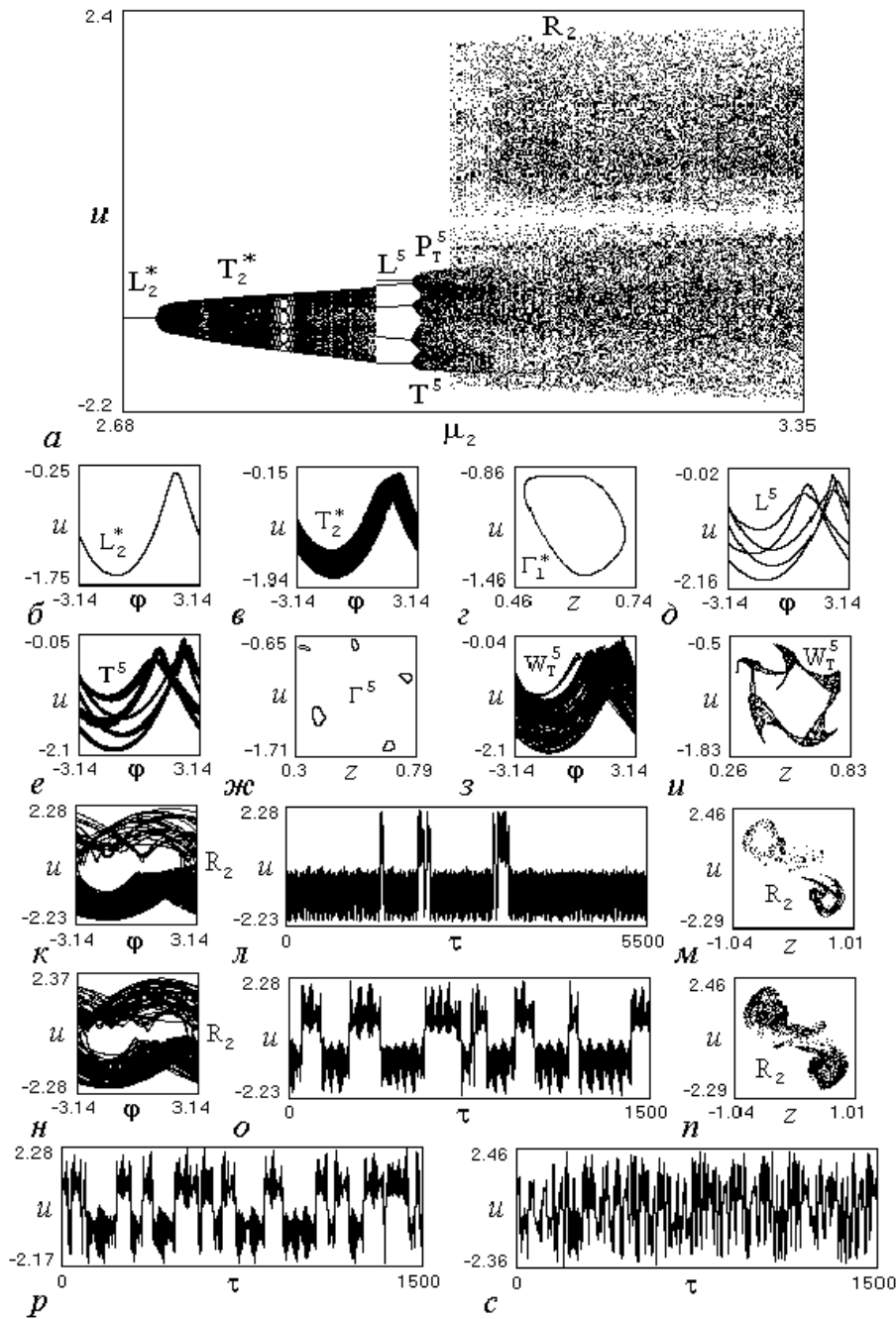


Рис. 16. Переход к хаотическому асинхронному режиму с переключениями колебаний при изменении параметра μ_2 : бифуркационная диаграмма μ_2, u (а) и аттракторы режимов (б-с) ($\gamma = 0.05, b = -1.55, \varepsilon_1 = 1.8, \varepsilon_2 = 2.05, \beta = 5, \mu = 2.33, \mu_1 = 3.1, \mu_2 = 2.68$) (б); 2.78 (в, з); 2.951 (д); 3.01 (е, ж); 3.04 (з, и); 3.061 (к-м); 3.15 (н-п); 3.35 (р); 4.5 (с)

рез перемежаемость «хаос – хаос» в фазовом пространстве образуется вращательный хаотический аттрактор R_1 с переключениями движений, соответствующих двум бассейнам притяжения (см. рис. 15, з-ж). Факт существования аттрактора R_1 отражается наличием на $\{\mu_2, u\}$ -диаграмме и на (z, u) -проекции сечения Пуанкаре (рис. 15, ж) двух областей хаотического разброса значений переменной u . Приме-

чательно, что в проекции (z, u) аттрактор R_1 похож на хаотический аттрактор типа двойной завиток (double-scroll), существующий в модели отдельной системы с частотным управлением [6–8]. Изменение характера движений на аттракторе R_1 при увеличении μ_2 отражают рис. 15, *з–к*, из которых видно, что несмотря на уменьшение длительности колебаний между переключениями на (z, u) -проекции сечения Пуанкаре по прежнему выделяются две области сгущения значений u и z . Отметим, что хаотический аттрактор, изображенный на рис. 15, *з–к*, является гиперхаотическим, так как он имеет два положительных ляпуновских характеристических показателя (0.21 и 0.037).

Во втором случае, отображаемом $\{\mu_2, u\}$ -диаграммой на рис. 16, *а*, процесс перехода от режима предельного цикла L_2^* к хаотическому аттрактору с переключениями R_2 , отличается от процесса, иллюстрируемого рис. 15, *а*. Образованию аттрактора R_2 здесь предшествует возбуждение квазипериодических автомодулированных колебаний в результате рождения в фазовом пространстве притягивающего двумерного вращательного тора T_2^* (рис. 16, *в, з*). При увеличении μ_2 вначале тор T_2^* вырождается в резонансный тор с пятиоборотным (10π -периодическим по φ) предельным циклом L^5 (рис. 16, *д*), затем реализуется бифуркация потери устойчивости цикла L^5 с рождением пятиоборотного вращательного тора T^5 (рис. 16, *е, ж*). Далее тор T^5 разрушается, система переходит к режиму вращательного хаотического аттрактора P_T^5 (рис. 16, *з, и*), а от режима аттрактора P_T^5 через перемежаемость «хаос-хаос» (рис. 16, *к–л*) к режиму хаотического аттрактора R_2 (рис. 16, *н–п*). Зависимости $u(\tau)$ на рис. 16, *р, с* показывают изменение колебаний на аттракторе R_2 при увеличении μ_2 . При этом в интервале $\mu_2 \in [3.15; 4.5]$ величина максимального ляпуновского характеристического показателя аттрактора R_2 изменяется от 0.08 до 0.21.

6. В данной работе выявлена чрезвычайно сложная картина нелинейных динамических процессов в автогенераторной системе с частотно-фазовой автоподстройкой, содержащей фильтры второго порядка в фазовой и третьего порядка в частотной цепях управления. Обнаружен ряд новых эффектов нелинейной динамики в такой системе, обусловленных инерционностью цепей управления и инверсией характеристики дискриминатора рассогласований в цепи частотного управления, на основе математической модели системы. Численное исследование этой модели, проведенное при различных наборах значений параметров, дало возможность увидеть специфику аттракторов несинхронных режимов, развивающихся в системе, и выяснить, что исследуемая система обладает большим разнообразием регулярных и хаотических модуляционных режимов различной сложности, а также сценариев преобразования режимов и перехода от регулярных режимов к хаотическим при изменении параметров системы. Показано, что возможно сосуществование различных типов модуляционных колебаний, определяемых колебательными и вращательными аттракторами в фазовом пространстве. Характерными являются переходы между квазисинхронными и асинхронными режимами, переходы к хаотическим квазисинхронным и асинхронным режимам с переключениями колебаний, возникновение хаотических режимов в результате бифуркаций удвоения периода предельных циклов, через перемежаемость, через разрушение двумерных торов, а также в результате бифуркаций удвоения торов и эволюции трехмерного тора.

Установленное существование различных квазисинхронных и асинхронных режимов в системе частотно-фазовой автоподстройки, соответствующих регулярным и хаотическим аттракторам в фазовом пространстве модели (3), создает предпосыл-

ки для расширения области применения системы и, в частности, для использования в системах передачи информации с хаотическими сигналами [4]. Выясненная сильная зависимость режимов системы от параметров цепей управления и начального частотного рассогласования позволяет осуществлять эффективное управление модуляционными колебаниями путем изменения указанных параметров, перевод системы от режимов с периодической автомодуляцией к режимам с хаотической автомодуляцией и обратно. Особый интерес при этом представляют модуляционные режимы, соответствующие вращательным и колебательно-вращательным хаотическим аттракторам с нерегулярными переходами между различными колебательными состояниями.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект № 06-02-16449).

Библиографический список

1. *Шахгильдян В.В., Ляховкин А.А.* Системы фазовой автоподстройки частоты. М.: Связь, 1972.
2. *Ходаковский В.А., Бычков В.Г.* Оптимальное устройство синхронизации при больших частотных нестабильностях радиоканала // Изв. вузов. Радиоэлектроника. 1974. Т. 17, № 4. С. 29.
3. *Дмитриев А.С., Панас А.И.* Динамический хаос. Новый носитель информации для систем связи. М.: Физматлит, 2002.
4. *Дмитриев А.С., Широков М.Е.* Выбор генератора для прямохаотической системы связи // Радиотехника и электроника. 2004. Т. 49, № 7. С. 840.
5. *Матросов В.В.* Регулярные и хаотические колебания в фазовой системе // Письма в ЖТФ. 1996. Т. 22, № 23. С. 4.
6. *Пономаренко В.П., Заулин И.А.* Динамика автогенератора, управляемого петлей частотной автоподстройки с инвертированной характеристикой дискриминатора // Радиотехника и электроника. 1997. Т. 42, № 7. С. 828.
7. *Пономаренко В.П.* Моделирование эволюции динамических режимов в автогенераторной системе с частотным управлением // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 1997. Т. 5, № 5. С. 44.
8. *Пономаренко В.П.* Формирование сложных колебаний в автогенераторной системе с нелинейной цепью частотного управления // Радиотехника и электроника. 1999. Т. 44, № 5. С. 565.
9. *Пономаренко В.П., Матросов В.В.* Самоорганизация временных структур в мультиравновесной автогенераторной системе с частотным управлением // Журнал технической физики. 1997. Т. 67, № 3. С. 1.
10. *Пономаренко В.П., Матросов В.В.* Сложная динамика автогенератора, управляемого петлей частотной автоподстройки с комбинированным дискриминатором // Радиотехника и электроника. 1997. Т. 42, № 9. С. 1125.
11. *Матросов В.В., Касаткин Д.В.* Анализ процессов возбуждения хаотических колебаний во взаимосвязанных генераторах с фазовым управлением // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2003. Т. 11, № 4–5. С. 31.
12. *Матросов В.В., Касаткин Д.В.* Динамические режимы связанных генераторов с фазовым управлением // Радиотехника и электроника. 2003. Т. 48, № 6. С. 698.
13. *Пономаренко В.П., Тихонов Е.А.* Хаотическая и регулярная динамика автогене-

- раторной системы с нелинейной петлей частотно-фазового управления // Радиотехника и электроника. 2004. Т. 49, № 2. С. 205.
14. Пономаренко В.П., Тихонов Е.А. Динамика автогенератора с частотно-фазовым управлением при инверсии характеристики частотного дискриминатора // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2003. Т. 11, № 6. С. 75.
 15. Пономаренко В.П. Динамические режимы в моделях автогенераторных систем с частотным и частотно-фазовым управлением // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2007. Т. 15, № 3. С. 33
 16. Капранов М.В. О полосе захвата при частотно-фазовой автоподстройке // Научн. докл. высш. школы. Сер. «Радиотехника и электроника». 1958. Т. 2, № 9. С. 162.
 17. Матросов В.В. Динамика нелинейных систем. Программный комплекс для исследования нелинейных динамических систем с непрерывным временем. Н. Новгород: ННГУ, 2002.
 18. Афраймович В.С. Внутренние бифуркации и кризисы аттракторов // Нелинейные волны. Структуры и бифуркации / Отв. ред. А.В. Гапонов-Грехов, М.И. Рабинович. М.: Наука, 1987. С. 189.
 19. Кузнецов С.П. Динамический хаос. М.: Физматлит, 2001.

*НИИ прикладной математики
и кибернетики при ННГУ*

Поступила в редакцию 9.07.2008

DYNAMICAL REGIMES AND NONLINEAR PHENOMENA IN GENERATOR WITH FREQUENCY-PHASE CONTROL

V.P. Ponomarenko

The paper represents the results of numerical study of dynamical regimes and bifurcation transitions in oscillatory system with frequency-phase control. The study was carried out on the base of mathematical model with three degrees of freedom in cylindrical phase space. Rich variety of various attractors of oscillatory and rotatory type corresponding to modulating modes of the system has been detected. Various scenarios of transition from regular dynamical regimes to chaotic ones under variation of the control loops parameters are analyzed. Strong dependence of oscillatory modes on these parameters that allow to control of modulating modes is established.



Пономаренко Валерий Павлович – родился в Мурманске (1941), окончил Горьковский университет (1963). С 1968 года работает в Научно-исследовательском институте прикладной математики и кибернетики при Нижегородском университете (НИИ ПМК при ННГУ). Защитил диссертации на соискание ученой степени кандидата технических наук (1972) и доктора физико-математических наук (1993) в области теории синхронизации, теории колебаний и динамики систем. С 1991 года – заместитель директора НИИ ПМК при ННГУ. Область научных интересов – теория колебаний и волн, применение нелинейной динамики в радиоавтоматике синхронизация автоколебательных систем, математическое моделирование. Один из авторов монографий «Фазовая синхронизация» и «Системы фазовой синхронизации». Опубликовал много научных статей по направлениям, указанным выше. E-mail: povp@uic.nnov.ru



ИЗМЕРЕНИЕ С ПОМОЩЬЮ ЛАЗЕРНОГО АВТОДИНА СМЕЩЕНИЯ БАРАБАННОЙ ПЕРЕПОНКИ ПРИ ИЗМЕНЕНИИ УРОВНЯ ЗВУКОВОГО ДАВЛЕНИЯ

Д.А. Усанов, А.В. Скрипаль, К.С. Авдеев

Приведены результаты измерений продольного смещения барабанной перепонки на фоне вибраций, возбуждаемых периодическим звуковым воздействием. Экспериментально установлено наличие продольного смещения барабанной перепонки при увеличении интенсивности звукового воздействия. По спектру автодинного сигнала полупроводникового лазера с использованием «оконного метода» по изменению фазы автодинного сигнала во времени определены величины этого смещения для различных уровней звукового воздействия.

Для диагностики параметров колебаний барабанной перепонки *in vivo* нашли применение автодинные измерители на полупроводниковом лазере. В работе [1] была показана возможность измерения медленных нанометровых перемещений объекта по спектру автодинного сигнала лазера на квантово-размерных структурах. В [2] были приведены результаты измерений подобным методом амплитуды колебаний барабанной перепонки, происходящих при ее возбуждении звуковым сигналом. Метод измерений, описанный в [1], позволяет, наряду с переменной составляющей отклика барабанной перепонки на звуковое возбуждение, определить имеется ли изменение ее положения «в среднем», характерное для того или иного звукового давления и, если оно имеется, какова его величина. Такого рода измерения, насколько нам известно, ранее не проводились [3, 4]. Таким образом, целью настоящей работы являлось исследование возможности регистрации продольного смещения барабанной перепонки на фоне вибраций, возбуждаемых звуковым сигналом.

Переменная нормированная составляющая автодинного сигнала при наличии продольного смещения объекта определяется выражением

$$P(t) = \cos(\theta(t)). \quad (1)$$

Здесь $\theta(t)$ – фаза автодинного сигнала, несущая информацию о нанометровых продольных перемещениях медленной подсистемы

$$\theta(t) = \frac{4\pi}{\lambda}(L_0 + Vt), \quad (2)$$

где λ – длина волны излучения лазера, L_0 – начальное расстояние до отражателя, V – скорость перемещения объекта, t – время.

Форма переменной нормированной составляющей автодинного сигнала при наличии одновременного продольного смещения объекта и его периодических движений может быть описана следующим выражением:

$$P(t) = \cos(\theta(t) + \sigma \sin(\Omega t + \varepsilon)), \quad (3)$$

где $\sigma = 4\pi\xi/\lambda$, ξ – амплитуда колебаний объекта, Ω – частота колебаний, ε – начальная фаза колеблющегося объекта.

Согласно «оконному методу» [5], используем для анализа автодинного сигнала (3) набор ограниченных во времени участков сигнала. Можно считать, что в пределах каждого участка-«окна» автодинный сигнал не зависит от медленно изменяющейся компоненты $\theta(t)$. При таком предположении анализ сигнала сводится к определению фазы автодинного сигнала в пределах указанных участков. В пределах каждого из анализируемых участков переменная составляющая автодинного сигнала, учитывая предположение о независимости ее от изменения фазы, будет совпадать по виду с переменной составляющей автодинного сигнала для гармонически колеблющегося объекта.

В качестве примера на рис. 1 приведены два участка одного автодинного сигнала, для которых выполняется условие постоянства фазы автодинного сигнала, в пределах анализируемого участка, но при различных значениях фазы для этих участков. Приведенные сигналы соответствуют модели описанного процесса, заключающегося в медленном изменении расстояния до отражателя с наложением дополнительных колебаний, совершаемых по гармоническому закону.

Для определения величины продольного смещения перепонки по полученному виду переменной нормированной составляющей автодинного сигнала рассчитывается и фиксируется его спектр. С использованием найденных значений амплитуд спектральных составляющих c_{2n-1} и c_{2n} [2] определяются значения θ

$$\theta_{2,n} = \arctg \left[\sqrt{\frac{(2n+1)(c_{2n+3} + c_{2n+1})c_{2n+1}}{(2n-1)(c_{2n+2} + c_{2n})c_{2n+2}}} \right], \quad (4)$$

$$\theta_{2,n-1} = \arctg \left[\sqrt{\frac{(2n+1)(c_{2n+1} + c_{2n-1})c_{2n+1}}{2n(c_{2n+2} + c_{2n})c_{2n}}} \right], \quad (5)$$

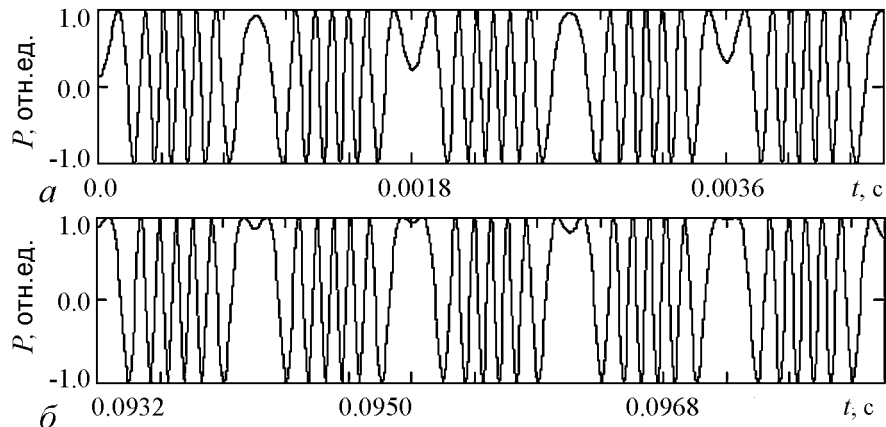


Рис. 1. Два участка одного автодинного сигнала, для каждого из которых выполняется условие постоянства фазы автодинного сигнала

где c_{2n+3} , c_{2n+2} , c_{2n+1} – амплитуды соответствующих спектральных составляющих, нижние индексы обозначают порядковый номер спектральной составляющей, при этом соотношение (4) применяется, когда используются четыре коэффициента c_n , начиная с четного номера, а (5) – начиная с нечетного номера. Определяя таким образом величину θ для двух значений времени t_1 и t_2 , можно рассчитать величину продольного сдвига барабанной перепонки Δ относительно положения равновесия

$$\Delta = \frac{\lambda}{4\pi} [\theta_1(t_1) - \theta_2(t_2)]. \quad (6)$$

Для проведения измерений смещения барабанной перепонки *in vivo* была собрана измерительная установка, схема которой приведена на рис. 2. Исследования проводились в изолированной комнате. Исследовалось возбуждение барабанной перепонки в свободном звуковом поле, создаваемом громкоговорителем, питаемом от генератора звукового сигнала. Уровень звукового давления в наружном слуховом проходе регистрировался при помощи измерительной аппаратуры «Bruel & Kjaer», которая выдает абсолютные значения звукового давления в дБ. При проведении измерений в качестве активного элемента автодинного генератора использовался лазерный диод RLD-650(5), длина волны 652 нм. На частоте звукового воздействия 550 Гц уровень звукового давления равномерно повышался с 20 до 60 дБ и с помощью аналого-цифрового преобразователя автодинный сигнал непрерывно фиксировался в виде дискретной последовательности. Далее зафиксированная дискретная последовательность обрабатывалась в соответствии с описанной методикой решения обратной задачи.

Измерения смещения перепонки проводились также на препаратах *in vitro*. Из анализа автодинного сигнала было обнаружено только увеличение амплитуды колебаний барабанной перепонки. Смещения барабанной перепонки с ростом уровня звукового давления не наблюдалось. В связи с этим можно высказать предположение о том, что смещение барабанной перепонки связано с защитной реакцией организма на увеличение уровня звукового давления, внешне выражающейся в смещении барабанной перепонки.

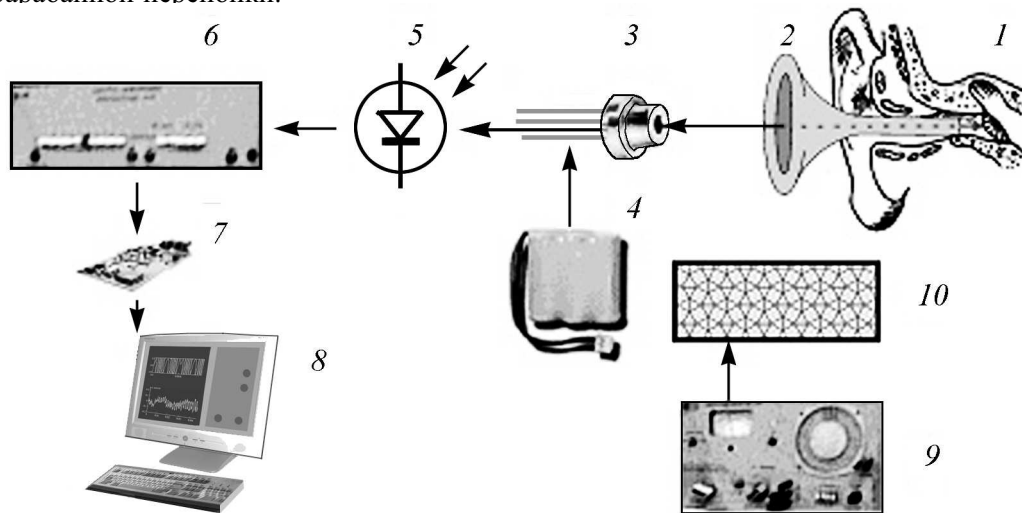


Рис. 2. Схема измерительной установки: 1 – барабанная перепонка; 2 – расширительная воронка; 3 – лазерный диод на квантоворазмерных структурах; 4 – источник тока лазерного диода; 5 – фотоприемник; 6 – широкополосный усилитель, содержащий фильтр переменного сигнала; 7 – аналого-цифровой преобразователь; 8 – компьютер; 9 – генератор звуковых колебаний; 10 – излучатель звуковых волн

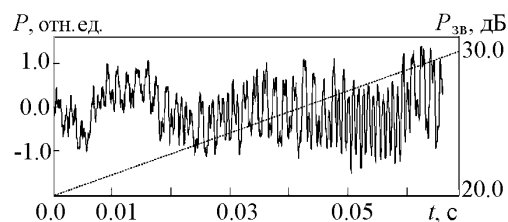


Рис. 3. Участок автодинного сигнала полупроводникового лазера P при увеличении интенсивности звукового воздействия на барабанную перепонку $P_{зв}$

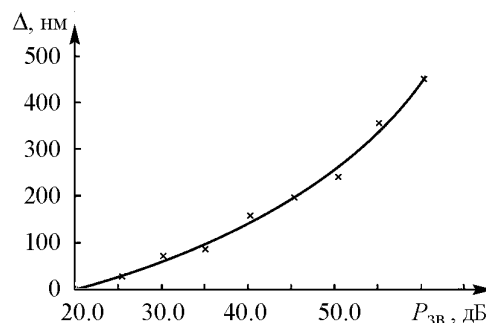


Рис. 4. Зависимость величины продольного смещения барабанной перепонки от интенсивности звукового воздействия: \times экспериментальные результаты; — аппроксимационная кривая

На рис. 3 приведены участки зафиксированного автодинного сигнала полупроводникового лазера при увеличении интенсивности звукового воздействия на барабанную перепонку пациентов *in vivo*. Информация о величине продольного смещения барабанной перепонки получалась из найденных значений фазы автодинного сигнала. Предложенный в [1] метод определения нанометровых перемещений позволяет определять только относительные перемещения внешнего отражателя составного автодинного резонатора, поэтому величина продольного смещения отсчитывалась от положения барабанной перепонки при уровне звукового давления в 20 дБ.

На рис. 4 приведена рассчитанная по формулам (6) зависимость продольного смещения барабанной перепонки от величины звукового давления излучателя звуковых волн в дБ. Как видно из рис. 4, при увеличении звукового давления от 25 до 60 дБ величина продольного смещения барабанной перепонки изменялась от 30 до 470 нм. При уровне звукового давления ниже 20 дБ смещения перепонки не были зафиксированы, так как измерения становятся соизмеримыми с уровнем шума.

Таким образом, показано, что с увеличением интенсивности звукового воздействия, наряду с колебательным движением, происходит продольное смещение барабанной перепонки. Смещение может быть зарегистрировано с помощью полупроводникового лазерного излучателя, работающего в автодинном режиме.

Работа выполнена при финансовой поддержке программы Министерства образования и науки РФ и гранта Российского фонда фундаментальных исследований № 05-08-17924а.

Библиографический список

1. Усанов Д.А., Скрипаль А.В., Камышанский А.С. Измерение скорости нанометровых перемещений по спектру автодинного сигнала лазера на квантоворазмерных структурах // Письма в ЖТФ. 2004. № 7. С. 77.
2. Усанов Д.А., Мареев О.В., Скрипаль А.В., Камышанский А.С. Измерение амплитуды колебаний барабанной перепонки по спектру автодинного сигнала полупроводникового лазера на квантоворазмерных структурах // Биомедицинские технологии и радиоэлектроника. 2004. № 8-9. С. 94.
3. Нейман Л.В. Анатомия, физиология и патология органов слуха и речи. М., 1977. 320 с.
4. Кобрак Г.Г. Среднее ухо. Москва: Гос. изд-во мед. литературы, 1963. 456 с.

5. Дьяконов В.П. Вейвлеты. От теории к практике. М.: Солон-Р, 2002. 448 с.

Саратовский государственный
университет им. Н.Г. Чернышевского

Поступила в редакцию
После доработки

19.05.2008
24.11.2008

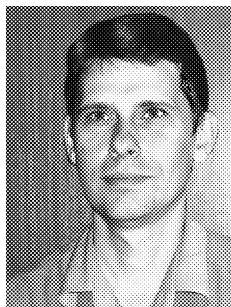
LASER AUTODYNE MEASUREMENTS OF EAR-DRUM DISPLACEMENT CAUSED BY CHANGE OF SOUND PRESSURE LEVEL

D.A. Usanov, A.V. Skripal, K.S. Avdeev

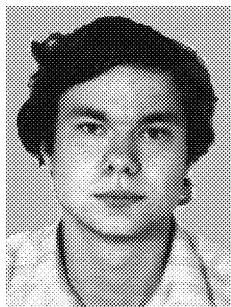
The results of measurements of ear-drum longitudinal displacement against vibrations excited by periodical sound pressure have been results. The existence of ear-drum longitudinal displacement with the increase of sound pressure intensity has been experimentally proved. By spectrum of autodyne signal of semiconductor laser, using the window method of semiconductor laser analysis, by changes of phase of autodyne signal in time the values of such displacement for different levels of sound pressure has been determined.



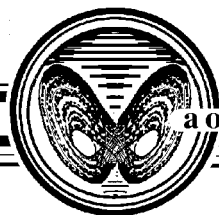
Усанов Дмитрий Александрович – родился в 1943 году, доктор физико-математических наук, профессор, проректор по НИР СГУ, заведующий кафедрой физики твердого тела, академик МАН ВШ, РАЕН. Область научных интересов: твердотельная, микро- и нанoeлектроника, радиофизика, медицинская физика. Опубликовал более 200 статей по указанным выше направлениям.



Скрипаль Анатолий Владимирович – родился в 1960 году, доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой медицинской физики СГУ. Область научных интересов: биомедицинская физика, лазерная физика, физика магнитных жидкостей, нанотехнологии. Опубликовал более 100 статей по указанным выше направлениям.



Авдеев Кирилл Сергеевич – родился в Саратове (1983), окончил Саратовский госуниверситет (2005). Аспирант третьего года. Научные интересы: твердотельная электроника, в частности, полупроводниковые лазеры. Автор ряда работ по исследованию автодинного детектирования в полупроводниковых лазерах.



ОПРЕДЕЛЕНИЕ ИНВАРИАНТНОЙ ПЛОТНОСТИ ОТОБРАЖЕНИЯ РЕНЬИ НА ОСНОВЕ ГАУССОВА ПОДХОДА*

*В.М. Аникин, С.С. Аркадакский, А.С. Ремизов,
С.Н. Купцов, Л.П. Василенко*

Построены конечномерные инвариантные функциональные подпространства для оператора Перрона–Фробениуса хаотического отображения Реньи $x_{n+1} = \beta x_n \bmod 1$, где $1 < \beta < 2$. Показано, что инвариантная плотность этого отображения в виде конечной линейной комбинации индикаторных функций частичных отрезков, вложенных в единичный сегмент по специальному правилу, может быть определена в результате повторных действий оператора Перрона–Фробениуса данного отображения на плотность равномерного распределения (прием Гаусса). Приведены алгебраические уравнения с целыми коэффициентами, определяющие значения параметра, которым соответствует инвариантная плотность отображения с заданным числом и соответствующими амплитудами ступенек.

Введение

Выявление фундаментальных свойств дискретных динамических систем, демонстрирующих хаотическое поведение, связано с исследованием ассоциированного с отображениями линейного необратимого и несамосопряженного оператора Перрона–Фробениуса (ОПФ). Изучение свойств ОПФ (в частности, знание решения задачи на собственные функции и собственные числа этого оператора), позволяет перейти к рассмотрению *линейной* задачи, установить соответствие между свойствами эргодических динамических систем и марковских стохастических процессов, дать точные оценки для скоростей установления равновесного состояния и расщепления корреляций в динамической системе [1–3]. Проблематику подобного рода относят к актуальным вопросам теории детерминированного и «зашумленного» хаоса [3, 4]. Проявлением хаотических свойств нелинейной дискретной динамической системы является существование инвариантной плотности – одной из собственных функций ОПФ, являющейся для данного оператора «неподвижной точкой» (соответствующее собственное число равно единице).

Для различных отображений аналитическое решение спектральной задачи получено с различной степенью детализации. Вполне изученными в этом плане можно, по-видимому, считать кусочно-линейные отображения типа сдвигов Бернулли

*Статья написана по материалам доклада на конференции «Хаотические автоколебания и образование структур», Саратов, Россия, октябрь 9–14, 2007 года.

$x_{n+1} = \{Mx_n\}$, где M – целочисленный параметр, $n = 0, 1, 2, \dots$, и отображений, полученных из них посредством произвольной инверсии ветвей [3, 5, 6]. В частности, инвариантная плотность этого класса отображений для всех значений параметра M имеет вид равномерного распределения. Сдвиги Бернулли – фундаментальные модели детерминированного хаоса, одновременно имеющие важное значение для приложений (на их основе, скажем, строятся датчики псевдослучайных машинных чисел).

В данной статье изучаются структура инвариантной плотности и закономерности ее изменения, следующие за вариацией параметра, для не менее важного и интересного для теории и приложений *отображения Реньи* [7], естественным образом возникающего при разложении числа в системе счисления с нецелым основанием. Это отображение имеет вид

$$\begin{aligned} x_{n+1} = \{\beta x_n\} &= \beta x_n \theta_{0,1/\beta}(x_n) + (\beta x_n - 1) \theta_{1/\beta,1}(x_n) = \\ &= (\beta x_n - 1) \theta_{0,1}(x_n) + \theta_{0,1/\beta}(x_n), \end{aligned} \quad (1)$$

где фигурные скобки означают операцию выделения дробной части числа (то есть $x_n \in [0, 1]$), β – параметр отображения. Запись (1) содержит индикаторные (характеристические) функции двух сегментов единичного интервала – $(0, 1/\beta)$ и $(1/\beta, 1)$ или $(0,1)$ и $(0, 1/\beta)$. В общем случае индикаторная функция произвольного интервала (a, b) определяется как

$$\theta_{a,b}(x) = \begin{cases} 1, & x \in (a, b), \\ 0, & x \notin (a, b). \end{cases} \quad (2)$$

Эргодические свойства преобразования (1) и наличие у него абсолютно непрерывной (относительно меры Лебега) *инвариантной меры* (без определения в общем случае ее вида) доказаны А. Реньи [7]. В.А. Рохлин [8, 9] продемонстрировал более общее свойство этого отображения – *точность*, из которого вытекают свойства *эргодичности и перемешивания* отображения (1) [1–3]. Свойство эргодичности отображения (1) нашло упоминание в контексте доказательств (различными способами) эргодических свойств у кусочно-гладких преобразований отрезка в себя [10–14]. Особого внимания (в рамках нашей работы) заслуживают результаты А.О. Гельфонда [15] и В. Пэрри [16], касающиеся *вида* инвариантного распределения отображения Реньи. К этим публикациям мы обратимся в последующем изложении.

В данной статье рассматривается задача построения вычислительной процедуры определения вида (включая значения всех параметров) инвариантной плотности отображения (1) при изменении значения параметра отображения $\beta \in (1, 2)$. В основу этой процедуры положено фундаментальное свойство ОПФ хаотических отображений, обеспечивающее сходимость произвольного начального вероятностного распределения по норме к инвариантному распределению под действием ОПФ [1–3]. Впервые такой подход использовал еще К.Ф. Гаусс при установлении скорости сходимости равномерного распределения под действием ОПФ к инвариантному для *перемешивающей* динамической системы $x_{n+1} = \{1/x_n\}$ (см. библиографию в [17]). Подобный подход дает наиболее ясный и эффективный способ нахождения параметров вероятностных инвариантных распределений, соотносимых с отображением Реньи.

Вид отображения Реньи для различных значений параметра β показан на рис. 1. В отличие от диадического сдвига Бернулли $x_{n+1} = \{2x_n\}$, одна из линейных со-

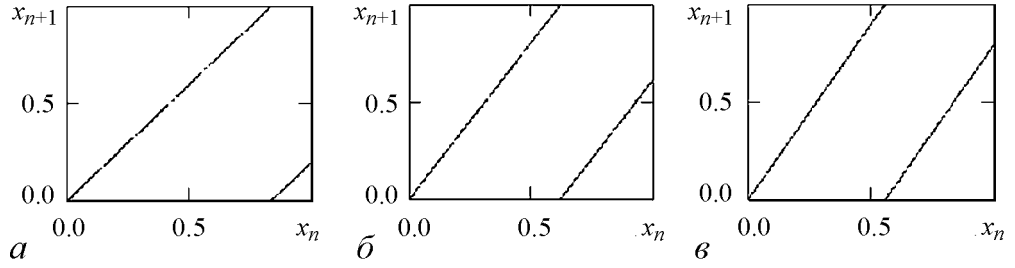


Рис. 1. Вид итеративной функции отображения Реньи $x_{n+1} = \{\beta x_n\}$ для различных значений параметра отображения β : 1.2 (а); 1.8 (б); $(\sqrt{5} + 1)/2$ (в)

ставляющих итеративной функции отображения Реньи не является «полной», то есть не отображает интервал своего определения полностью на единичный интервал. Кроме того, инвариантная плотность отображения Реньи не является равномерным распределением, то есть не может быть представлена в виде характеристической функции единичного интервала

$$\rho_0(x) = \theta_{0,1}(x). \quad (3)$$

Ниже показано, что существуют значения параметра β , для которых инвариантная плотность отображения Реньи может определяться конечной линейной комбинацией индикаторных функций отрезков, вложенных в единичный отрезок

$$\tilde{\rho}(x) = \sum_{i=1}^n c_i \theta_{0,x_i}(x), \quad (4)$$

где c_i – вещественные коэффициенты. Левые границы этих отрезков x_i совпадают с нулем, а значения координат правых границ этих отрезков задаются последовательностью чисел, генерируемых самим отображением Реньи при начальном значении $x_0 = 1$. Соотношение (4) при конечном пределе суммирования определяет ступенчатую функцию.

Заметим, что ранее (в [18] и более полно в [3, 19]) в контексте выявления вида инвариантного распределения и решения спектральной задачи исследован частный случай отображения Реньи, отвечающий значению параметра $\beta = \Phi = (\sqrt{5} + 1)/2$, совпадающего с большим из двух чисел Фидия, обратным для которого является «золотое сечение» $1/\Phi = (\sqrt{5} - 1)/2$. Для параметра $\beta = \Phi$ инвариантная плотность имеет вид двух ступенек (рис. 2). В [20] найдены значения параметров отображения Реньи, для которых отображение характеризуется трехступенчатой инвариантной плотностью.

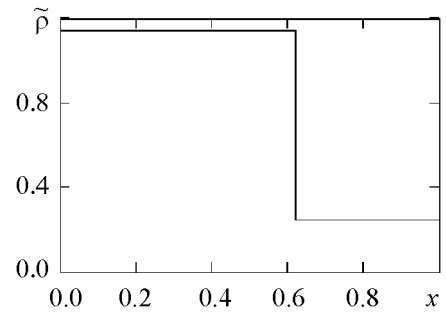


Рис. 2. Инвариантная плотность отображения Реньи при $\beta = (\sqrt{5} + 1)/2$

1. Конечномерные функциональные инвариантные подпространства оператора Перрона–Фробениуса отображения Реньи

Оператор Перрона–Фробениуса отображения Реньи имеет вид [3, 18–20]

$$P\rho(x) = \frac{1}{\beta} \left[\rho\left(\frac{x}{\beta}\right) \theta_{0,1}(x) + \rho\left(\frac{x+1}{\beta}\right) \theta_{0,\beta-1}(x) \right]. \quad (5)$$

Отсюда видно, что равномерное распределение (3) действительно не является инвариантной плотностью отображения Реньи (1):

$$P\theta_{0,1}(x) = \frac{1}{\beta} [\theta_{0,1}(x) + \theta_{0,\beta-1}(x)] \neq \theta_{0,1}(x), \quad (6)$$

иначе говоря, действие ОПФ (5) на индикаторную функцию единичного отрезка приводит к разрывной (кусочно-постоянной) функции, содержащей в записи индикаторные функции единичного отрезка и дополнительного отрезка $[0, b_1]$, где

$$b_1 = \beta - 1. \quad (7)$$

Действие ОПФ (5) на (6), то есть повторное действие ОПФ на $\theta_{0,1}(x)$, приводит к выражению:

$$P^2\theta_{0,1}(x) = \frac{1}{\beta^2} [\theta_{0,1}(x) + \theta_{0,\beta-1}(x)] + \frac{1}{\beta^2} [\theta_{0,\beta(\beta-1)}(x)\theta_{0,1}(x) + \theta_{0,\beta(\beta-1)-1}(x)\theta_{0,\beta-1}(x)]. \quad (8)$$

Посмотрим, какой вид примет (8) при различных ограничениях, накладываемых на параметр отображения β .

Первый вариант. Если выполняется соотношение

$$\beta(\beta - 1) = 1, \quad (9)$$

то при повторном действии ОПФ на $\theta_{0,1}(x)$ в (8) *не появляются* слагаемые, содержащие сомножителем индикаторные функции новых отрезков:

$$P^2\theta_{0,1}(x) = \frac{1}{\beta^2} [2 \cdot \theta_{0,1}(x) + \theta_{0,\beta-1}(x)].$$

Это означает, что при $\beta = \Phi$ (именно большее из чисел Фидия является решением (9), удовлетворяющим ограничению $1 < \beta < 2$) инвариантное подпространство ОПФ состоит из всевозможных линейных комбинаций двух характеристических функций $\theta_{0,1}(x)$ и $\theta_{0,\beta-1}(x)$; в число этих линейных комбинаций входит и инвариантная плотность. Данный случай соответствует «Ф-отображению», рассмотренному в [18,19].

Второй вариант. Если $0 < \beta(\beta - 1) < 1$, то есть когда $1 < \beta < \Phi$ (функция $f_1(\beta) = \beta(\beta - 1)$ изменяется от 0 до 2 при изменении β от 1 до 2), при повторном действии ОПФ на $\theta_{0,1}(x)$ появляется член с индикаторной функцией начинающегося в нуле нового отрезка, а правая граница выражается как

$$b_2 = \beta(\beta - 1) = \beta b_1. \quad (10)$$

А именно, в этом случае

$$P^2\theta_{0,1}(x) = \frac{1}{\beta^2} [\theta_{0,1}(x) + \theta_{0,\beta-1}(x) + \theta_{0,\beta(\beta-1)}(x)].$$

Третий вариант. Если же $2 > \beta(\beta - 1) > 1$, то есть когда $\Phi < \beta < 2$, правая граница нового отрезка определяется соотношением

$$b_2 = \beta(\beta - 1) - 1 = \beta b_1 - 1, \quad (11)$$

так что с учетом неравенства $\beta(\beta - 1) - 1 < \beta - 1$ имеет место

$$P^2\theta_{0,1}(x) = \frac{1}{\beta^2} [2 \cdot \theta_{0,1}(x) + \theta_{0,\beta-1}(x) + \theta_{0,\beta(\beta-1)-1}(x)].$$

Случаи (10) и (11) можно объединить, записав выражение для правой границы отрезка, «рождающегося» в результате действия ОПФ, как

$$b_2 = \beta(\beta - 1) - a_1 = \beta b_1 - a_1 = \{\beta b_1\}, \quad (12)$$

где введен параметр

$$a_1 = \begin{cases} 1, & \beta(\beta - 1) > 1, \\ 0, & \beta(\beta - 1) < 1 \end{cases} = \lfloor \beta(\beta - 1) \rfloor, \quad (13)$$

(скобки $\lfloor \rfloor$ означают выделение целой части числа).

Итак, если выполняется соотношение

$$b_2 = \beta b_1 = 1, \quad (14)$$

то базис инвариантного подпространства ОПФ состоит только из индикаторных функций двух отрезков $\theta_{0,1}(x)$ и $\theta_{0,\beta-1}(x)$ (правая граница вновь появившегося отрезка совпадает с единицей). Если (14) не выполняется, то правая граница нового отрезка определяется соотношением (12). Левые границы всех отрезков совпадают с нулем.

Если продолжить далее вычисление $P^3\theta_{0,1}(x)$, $P^4\theta_{0,1}(x)$ и т.д., по индукции можно получить, что при $(i + 1)$ -м действии ОПФ на $\theta_{0,1}(x)$ правая граница вновь образуемого отрезка b_{i+1} будет связана с правой границей отрезка b_i , появившегося в результате предшествующего, i -го действия ОПФ, рекуррентным соотношением

$$b_{i+1} = \beta b_i - a_i = \{\beta b_i\}, \quad a_0 = 1, \quad b_0 = 1, \quad i = 0, 1, \dots \quad (15)$$

Здесь по смыслу $a_i = \lfloor \beta b_i \rfloor$, и для стартового значения $b_0 = 1$ граница нового отрезка $b_1 = \beta - a_0 = \beta - \lfloor \beta \rfloor = \beta - 1$, так что независимо от значения параметра β коэффициент a_0 принимает единственное значение $a_0 = 1$. Значения коэффициентов a_i , $i > 1$, зависят от значения β . Например, $b_2 = \beta(\beta - 1) - a_1$, $a_1 = \lfloor \beta(\beta - 1) \rfloor$. Условие $\beta(\beta - 1) = 1$ отвечает отображению с параметром $\beta = \Phi$ (см. (9)). Если же $\beta < \Phi$, то $a_1 = 0$. При $\beta > \Phi$ $a_1 = 1$. Подобная ситуация сохраняется и для остальных коэффициентов a_i , $i > 1$, каждый из которых может принимать два значения: 0 или 1.

Соответственно справедливо следующее точное представление для границы отрезка, появляющегося на N -м шаге процедуры действия ОПФ на индикаторную функцию $\theta_{0,1}(x)$:

$$b_N = \beta^{N-1} \left[\beta - \left(1 + \sum_{i=1}^{N-1} \frac{a_i}{\beta^i} \right) \right] = \beta^{N-1} [\beta - (1.a_1a_2 \dots a_{N-1})_\beta] \quad (16)$$

(здесь применена условная запись суммы $\sum_{i=1}^{N-1} \frac{a_i}{\beta^i}$ в виде числа в системе счисления с основанием β). Очевидно, что если справедливо равенство

$$b_N = \beta b_{N-1} = 1, \quad (17)$$

то при данном значении параметра отображения β базис инвариантного подпространства ОПФ состоит из конечного числа N индикаторных функций отрезков, правые границы которых определяются соотношением (15) при $i = 0, 1, \dots, N-2$.

Сравнивая соотношение (15) с (1), можно заметить, что последовательность значений, которые принимает правая граница «дробного» отрезка, совпадает с последовательностью, которую генерирует отображение Реньи, если в качестве начального значения задается $x_0 = 1$. При этом соотношение (17) можно трактовать как условие существования у отображения Реньи N -цикла, поскольку (17) эквивалентно равенству $x_N = x_0 = 1$. Следует отметить, что есть и иная возможность существования (образования) у ОПФ базиса инвариантного подпространства из M индикаторных функций, когда значение правой границы на M -м шаге может совпадать с одним из предшествующих значений правой границы отрезка: $x_M = x_k \neq 1$, $k = 1, 2, \dots, M-2$, то есть имеет место $(M-k)$ -цикл при условии $x_0 = 1$. Условимся называть цикл длиной N (для N повторяющихся действий ОПФ) «длинным» циклом, а все остальные циклы – «короткими». Случаи длинного ($k = 0$) и коротких циклов ($k > 0$) определяются единым соотношением (с включением значения $k = 0$):

$$x_N = x_k, \quad k = 0, 2, \dots, N-2$$

(значение $k = N-1$ исключается, так как оно выполняется только при $\beta = 1$). Тогда общее условие существования базиса инвариантного подпространства, состоящего из N индикаторных функций, вместо (17) можно переписать в виде

$$\beta b_{N-1} - a_{N-1} = b_k, \quad k = 0, 2, \dots, N-2. \quad (18)$$

2. Алгебраические уравнения для значений параметра отображения

Обратимся теперь к характеристике значений параметра β , которые обеспечивают существование N -мерного базиса инвариантного подпространства ОПФ и, соответственно, N -ступенчатого инвариантного распределения. Рассмотрим случай

«длинного» цикла. На основании (16) запишем уравнение для параметра отображения β :

$$\beta = 1 + \sum_{k=1}^{N-2} \frac{a_k}{\beta^k} + \frac{1}{\beta^{N-1}} = (1.a_1a_2 \dots a_{N-2}1)_\beta \quad (19)$$

(число в правой части записано в форме числа в системе счисления с основанием β). Значения параметра β (целые алгебраические числа), удовлетворяющие условию (19), совпадают с *простыми β -числами* (по терминологии В. Пэрри), с которыми в [15, 16] связано представление числа β в системе счисления (с тем же основанием β) с конечным набором цифр. Пэрри показал, что множество *простых β -чисел* всюду плотно на интервале $(1, \infty)$, а сопряженные для каждого β -числа по модулю меньше 2 [16]. А.О. Гельфонд связывал конечные представления нецелого β в системе с основанием β с числами Пизо (алгебраическими целыми числами больше единицы, сопряженные для которых имеют модуль меньше 1) [15].

Рассмотрим частные случаи (9). Для $N = 2$ выполняется уравнение (9), которое можно представить в нотации (19) как

$$\beta = 1 + \frac{1}{\beta}, \quad (20)$$

а для $N = 3$ уравнение, которое определяет значение β , соответствующее длинному циклу в последовательности $\{b_k\}$, имеет вид

$$\beta [\beta (\beta - 1) - a_1] = 1, \quad \text{или} \quad \beta = 1 + \frac{a_1}{\beta} + \frac{1}{\beta^2}. \quad (21)$$

Алгебраическое уравнение (19) с целыми коэффициентами (напомним, что все a_k принимают только два значения – 0 или 1) для каждого значения степени N относительно β в интервале $1 < \beta < 2$ имеет вещественное решение, являющееся точкой пересечения прямой $f_0(\beta) = \beta$ и графика функции $f(\beta) = 1 + \sum_{k=1}^{N-2} \frac{a_k}{\beta^k} + \frac{1}{\beta^{N-1}}$, убывающей на этом интервале. В самом деле, при $\beta = 1$ минимальное значение этой функции есть $f_{\min}(1) = 2$. При $\beta = 2$ максимальное значение функции – это $f_{\max}(2) = 1 + \sum_{k=1}^{N-1} \frac{1}{2^k} = 2 \left(1 - \frac{1}{2^{N-2}}\right) < 2$. В то же время левая часть (19) на интервале $(1, 2)$ возрастает от 1 до 2, что и обеспечивает наличие точки пересечения графиков $f_0(\beta) = \beta$ и $f(\beta)$ при любом конечном N .

Уже говорилось, что при $N = 2$ уравнения (19) и (20) имеют корнем значение $\beta = \Phi$, которое определяет отображение Реньи с двухступенчатой инвариантной плотностью [3, 18]. Но здесь интересно обратить внимание и на то, что значение $\beta = \Phi$ является своеобразной точкой «бифуркации» для коэффициента a_1 , появляющегося на следующей (!) стадии решения задачи (для $N = 3$): как было отмечено выше, при $\beta < \Phi$ $a_1 = 0$, а при $\beta > \Phi$ $a_1 = 1$. При более детальном анализе можно убедиться, что корни уравнения (19) играют аналогичную роль и с повышением степени уравнения: значения коэффициентов a_k зависят от интервала нахождения значения параметра β .

Если во введенной выше функции $f(\beta)$ формально задать аргумент $\beta = 2$, получим значение $f(2) = (1.a_1a_2 \dots a_{N-2}1)_2$. Значение $f(2)$ является двоичным числом с $N - 1$ дробными разрядами, последний из которых равен 1. Таким образом,

можно установить соответствие между искомым значением β и рациональным двоичным числом $q_N = (1.a_1a_2 \dots a_{N-2}1)_2$, поскольку оба числа определяются одним и тем же набором значений a_1, a_2, \dots, a_{N-2} . Например, когда $N = 2$, то соответствующее двоичное число равно $q_2 = (1.1)_2 = (1.5)_{10}$. Это соответствие говорит о счетности множества простых β -чисел.

3. Инвариантная плотность отображения Реньи

Итак, гауссов подход к определению инвариантной плотности отображения позволяет выявить следующие ее особенности для отображения Реньи. При вполне определенных значениях параметра отображения β существуют конечные инвариантные линейные многообразия (подпространства) оператора Перрона–Фробениуса, базисами в которых служат индикаторные функции вложенных отрезков, левая граница которых лежит в нуле, а правая граница b_i определяется итерациями отображения (1) при начальном значении $x_0 = 1$.

На основании (5) уравнение для инвариантной плотности (неподвижной точки) $\tilde{\rho}(x)$ ОПФ отображения Реньи имеет вид

$$\tilde{\rho}(x) = \frac{1}{\beta} \left[\theta_{0,1}(x) \tilde{\rho}\left(\frac{x}{\beta}\right) + \theta_{0,\beta-1}(x) \tilde{\rho}\left(\frac{x+1}{\beta}\right) \right] = P\tilde{\rho}(x). \quad (22)$$

Если параметр отображения является простым β -числом, то $\tilde{\rho}(x)$ представляется линейной комбинацией конечного числа индикаторных функций $\theta_i(x) = \theta_{0,b_i}(x)$:

$$\tilde{\rho}(x) = \sum_{i=1}^N c_i \theta_i(x). \quad (23)$$

Коэффициенты этого разложения могут быть определены после подстановки (23) в (22), использования условия нормировки инвариантной плотности и в результате приравнивания (в конечном итоге решения задачи) членов при одинаковых индикаторных функциях [20]. Ступенчатообразный характер инвариантной плотности отображения Реньи для простых β -чисел указан в [15, 16]. На рис. 3 представлен вид инвариантной плотности для некоторых значений параметра в окрестности числа Фидия.

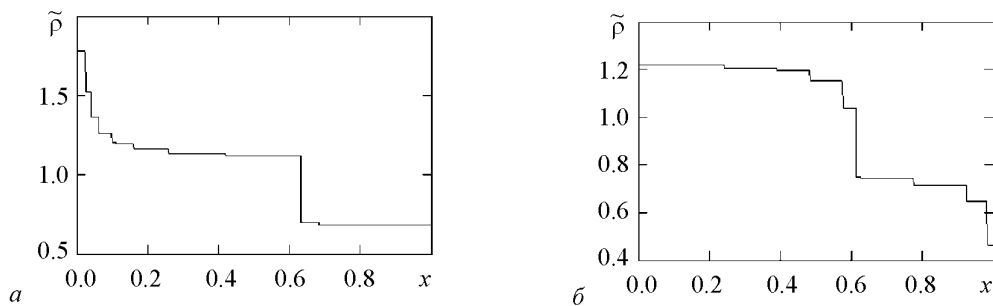


Рис. 3. Инвариантная плотность при $\beta = (\sqrt{5} + 1)/2 + 0.01$ (a) и $\beta = (\sqrt{5} + 1)/2 - 0.01$ (б)

Заключение

Механизм определения инвариантной плотности хаотического отображения посредством использования эволюционных свойств оператора Перрона–Фробениуса на каждом шаге действия оператора на начальное распределение позволяет найти параметры кусочно-постоянной инвариантной плотности для параметра распределения, являющегося корнем алгебраического уравнения с целыми коэффициентами (19). Решения этого уравнения называют [16] простыми β -числами, и они образуют счетное, всюду плотное множество. Соответственно, инвариантная плотность отображения Реньи для множества значений параметра, совпадающих с простыми β -числами, представляется *конечной линейной комбинацией индикаторных функций частичных отрезков*, вложенных в единичный сегмент. Алгоритм определения границ этих отрезков задается формулой (15). С позиции функционального анализа это означает, что оператор Перрона–Фробениуса в пространстве кусочно-постоянных (и интегрируемых по Риману) функций при определенных значениях параметра обладает инвариантными подпространствами конечной размерности.

Тематика, связанная с отображением Реньи, продолжает развиваться. В частности, В. Пэрри в [21] исследовал эргодические свойства отображения $x_{n+1} = \{\beta x_n + \alpha\}$, $0 \leq \alpha < 1$, $\beta \geq 1$. В [22] П. Гора ввел «обобщенное» β -отображение, линейные ветви которого могут иметь как положительный, так и отрицательный угловой коэффициент. В ближайшее время мы надеемся представить результаты, касающиеся высших собственных функций оператора Перрона–Фробениуса для отображения Реньи.

Библиографический список

1. Lasota A., Mackey M.C. Probabilistic properties of deterministic systems. Cambridge: Cambridge University Press, 1985.
2. Бланк М.Л. Устойчивость и локализация в хаотической динамике. М.: МЦНМО, 2001.
3. Аникин В.М., Голубенцев А.Ф. Аналитические модели детерминированного хаоса. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2007.
4. Анищенко В.С., Вадивасова Т.Е., Окрокверцхов Г.А., Стрелкова Г.И. Корреляционный анализ режимов детерминированного и зашумленного хаоса // Радиотехника и электроника. 2003. Т. 43, № 7. С. 1.
5. Аникин В.М., Аркадакский С.С., Ремизов А.С. Аналитическое решение спектральной задачи для оператора Перрона–Фробениуса кусочно-линейных хаотических отображений // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2006. Т. 14, № 2. С. 16.
6. Аникин В.М., Ремизов А.С., Аркадакский С.С. Собственные функции и числа оператора Перрона–Фробениуса кусочно-линейных хаотических отображений // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2007. Т. 15, № 2. С. 62.
7. Rényi A. Representations for real numbers and their ergodic properties // Acta Math. Acad. Sc. Hungar. 1957. Vol. 8. P. 477.
8. Рохлин В.А. Точные эндоморфизмы пространства Лебега // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1961. Т. 25. С. 499.

9. *Рохлин В.А.* Избранные работы. М.: МЦНМО, ВКМ НМУ, 1999. С. 318.
10. *Косякин А.А., Сандлер Е.А.* Эргодические свойства одного класса кусочно-гладких преобразований отрезка // Изв. вузов. Математика. 1972. № 3 (118). С. 32.
11. *Lasota A., Yorke J.A.* On the existence of invariant measures for piecewise monotonic transformations // Trans. Amer. Math. Soc., 1973. Vol. 186. P. 481.
12. *Li T.-J., Yorke J.A.* Ergodic transformations from an interval into itself // Trans. Amer. Math. Soc., 1978. Vol. 235. P. 183.
13. *Li T.-J., Yorke J.A.* Ergodic maps on [0,1] and nonlinear pseudo-random numbers generators // Nonlinear Analysis. Theory, Methods and Applications. 1978. Vol. 2, № 4. P. 473.
14. *Hofbauer F., Keller G.* Equilibrium states for piecewise monotonic transformations // Ergod. Theory and Dynam. Systems. 1982. Vol. 2. P. 23.
15. *Гельфонд А.О.* Об одном общем свойстве систем счисления // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1959. Т. 23. С. 809.
16. *Parry W.* On the β -expansions of real numbers // Acta Math. Acad. Sc. Hungar. 1960. Vol. 1. P. 401.
17. *Аникин В.М.* Отображение Гаусса: эволюционные и вероятностные свойства. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2007. 80 с.
18. *Mori H., So B.-Ch., Ose T.* Time-correlation functions of one-dimensional transformations // Progress of Theor. Phys. 1981. Vol. 66, № 4. P. 1266.
19. *Голубенцев А.Ф., Аникин В.М.* Инвариантные функциональные подпространства линейных эволюционных операторов хаотических отображений // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2005. Т. 13, № 1. С. 3.
20. *Аникин В.М., Аркадакский С.С.* Кусочно-линейные отображения с неравномерным инвариантным распределением // Радиотехника. 2005, № 4. С. 63.
21. *Parry W.* Representations for real numbers // Acta Math. Acad. Hungar. 1964. Vol. 15. P. 95.
22. *Gora P.* Invariant densities for generalized β -maps // Ergod. Th. & Dynam. Sys. 2007. Vol. 27. P. 1583.

*Саратовский государственный
университет им. Н.Г. Чернышевского*

*Поступила в редакцию
После доработки*

*12.02.2008
31.07.2008*

INVESTIGATION OF STRUCTURE OF INVARIANT DENSITY FOR RÉNYI MAP BY GAUSS METHOD

V.M. Anikin, S.S. Arkadaksky, A.S. Remizov, S.N. Kuptsov, L.P. Vasilenko

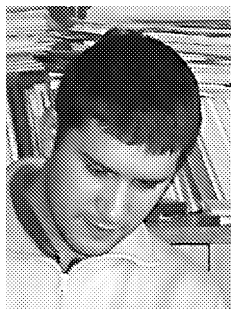
It is shown that the structure of the invariant density for Rényi map $x_{n+1} = \beta x_n \bmod 1$, ($1 < \beta < 2$) may be clarified by action of the Perron–Frobenius operator on the uniform distribution. The invariant density is presented by finite linear combination of characteristic functions defined on the unit interval according to special rule. Some algebraic equations with entire coefficients are formulated for parameter β corresponding values definition.



Аникин Валерий Михайлович – родился в г. Аткарске Саратовской области (1947). Окончил физический факультет СГУ (1970). Доктор физико-математических наук, профессор кафедры вычислительной физики и автоматизации научных исследований, профессор кафедры электроники, колебаний и волн, зам. декана по научной работе физического факультета СГУ. Область научных интересов – хаотическая динамика, математическое моделирование стохастических и хаотических процессов в применении к задачам статистической радиофизики и электроники, статистической оптики, статистической экологии. Автор 170 печатных работ, в том числе монографии «Аналитические модели детерминированного хаоса» (в соавторстве с А.Ф. Голубенцевым, ФИЗМАТЛИТ, 2007). Ученый секретарь совета по защите кандидатских и докторских диссертаций при СГУ по специальностям радиофизика, физическая электроника, оптика, твердотельная электроника.
E-mail: AnikinVM@info.sgu.ru; ivesc@sgu.ru



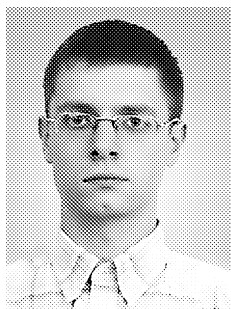
Аркадакский Сергей Сергеевич – родился в Саратове (1949). Окончил физический факультет СГУ (1971). Кандидат физико-математических наук (1986), доцент кафедры вычислительной физики и автоматизации научных исследований СГУ, заместитель декана физического факультета СГУ по общим вопросам. Область научных интересов – электроника СВЧ, нелинейная динамика.



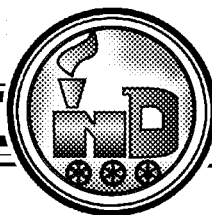
Ремизов Александр Сергеевич – родился в Саратове (1980). Окончил физический факультет СГУ (2002). Кандидат физико-математических наук (2007). Ассистент кафедры вычислительной физики и автоматизации научных исследований СГУ. Область научных интересов – хаотическая динамика.



Кутцов Сергей Николаевич – родился в Саратове (1949). Окончил механико-математический факультет СГУ (1971). Старший преподаватель кафедры математической экономики СГУ. Область научных интересов – спектральная теория линейных операторов.



Василенко Леонид Петрович – родился в Саратове (1982). Окончил физический факультет СГУ (2004). Программист кафедры вычислительной физики и автоматизации научных исследований СГУ.



КОМПЬЮТЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССА САМООРГАНИЗАЦИИ В ОБЛУЧЕННЫХ МЕТАЛЛИЧЕСКИХ МАТЕРИАЛАХ

В.В. Бондаренко

В работе рассматриваются структуры в металлических материалах, подвергнутых лазерному облучению, имеющие свойства пространственной самоорганизации. Описан метод компьютерного анализа самоорганизованных структур с использованием мультифрактального аппарата. Полученные закономерности в изменениях наборов мультифрактальных параметров облученных поверхностей металлов использованы для моделирования развития неустойчивости методом клеточного автомата.

Введение

В некоторых новейших технологических процессах, в том числе используемых в атомной и космической технике, вещество находится в радиационном поле. В этих случаях мы имеем дело с открытой неравновесной системой, подвергающейся притоку энергии или вещества извне [1, 2]. В этих состояниях могут наблюдаться пространственно самоорганизованные структуры с элементами самоподобия на разных масштабных уровнях.

Работа посвящена исследованию и описанию с помощью фрактальных характеристик явлений самоорганизации при взаимодействии ионного и лазерного излучения с металлическими сплавами. Такие явления в ряде случаев сопровождаются сильнейшим изменением физических свойств системы, которые не могут быть описаны в рамках равновесной термодинамики. В связи с этим актуальность исследования взаимодействия излучения с веществом обусловлена необходимостью выявления подходов к описанию возникающих при определенных условиях процессов самоорганизации. В частности, сделана попытка применения теории фракталов и использования некоторых компьютерных моделей, описывающих эти процессы.

1. Постановка задачи

Выявление характера самоорганизации сложных систем является существенным фактором, позволяющим понять закономерности поведения этих систем в неравновесных условиях. При обнаружении в облученных материалах эффектов самоорганизации важным является тот факт, что материал может обладать новыми физическими свойствами. Представление об эволюции процессов самоорганизации при

воздействии ионного или лазерного излучения открывает возможность направленного изменения физических свойств облученных материалов. Детализация и уточнение с помощью компьютерного моделирования механизмов процессов самоорганизации после облучения металлических сплавов, а именно установление связи фрактальных характеристик самоорганизованной структуры со свойствами материала и параметрами внешнего воздействия представляется крайне перспективным при создании материалов с новыми свойствами. Актуальной задачей является и разработка простого способа распознавания и количественной параметризации процессов развития самоорганизации в облученных металлических материалах, позволяющего оценить условия формирования устойчивых поверхностных наноструктур при создании материалов с новыми свойствами.

2. Методика

2.1. Объекты. Рассматривается формирование самоорганизованных структур в металлических сплавах при облучении поверхности сплава лазерным излучением. На рис. 1 показаны примеры таких структур, полученных в металлических сплавах Ni-Cr и Fe-Cr-Ni. До облучения поверхность сплава была однородной, микроструктура не имела каких-либо особенностей. В ходе эксперимента использовалось излучение твердотельного лазера ЛТИ-406 (YAG:Nd) с длиной волны 1.06 мкм и длительностью импульса 10–20 нс, мощностью 3 Вт, на частоте 25 Гц, 25 импульсов в секунду, 120 мДж в импульсе. Целью эксперимента по лазерному облучению металлических образцов являлось получение иерархии состояний вещества с признаками пространственной самоорганизации в зависимости от управляющего параметра для дальнейшего исследования эволюции наблюдаемого в системе процесса самоорганизации. В качестве управляющего параметра было выбрано число импульсов, поступивших в систему и определяющих количество переданной энергии.

На первом этапе происходит образование поверхностных периодических структур [3], представляющих собой систему упорядоченных линейных выступов и впадин рельефа поверхности (рис. 1, *a*). Такие структуры имеют период порядка длины волны света и появляются при определенном количестве поступивших в систему импульсов.

Следует отметить, что при лазерном воздействии световой квант не в состоянии сместить атом с его места в решетке и образовать дефект кристаллической решетки. Пучок когерентного светового излучения в состоянии подействовать только на электроны твердого тела, которые в дальнейшем могут внести изменения в состояние ионов. Таким образом, при образовании эффектов самоорганизации имеет место коллективное взаимодействие множества элементарных объектов на разных масштабных уровнях.

Для получения иерархии состояний системы количество импульсов, вводимых в систему, увеличивалось (для сплава Fe-Cr-Ni от 200 до 11000, для Ni-Cr – от 100 до 800 импульсов). При увеличении числа импульсов, воздействующих на систему, пространственно-периодические структуры начинают перестраиваться, образуя новые элементы рельефа поверхности, но сохраняя свойства самоподобия и не переходя к хаотическому расположению элементов микрорельефа на поверхности. При этом как образование пространственно-периодических структур, так и их дальнейшая перестройка (эволюция) происходит после достижения порогового числа импульсов.

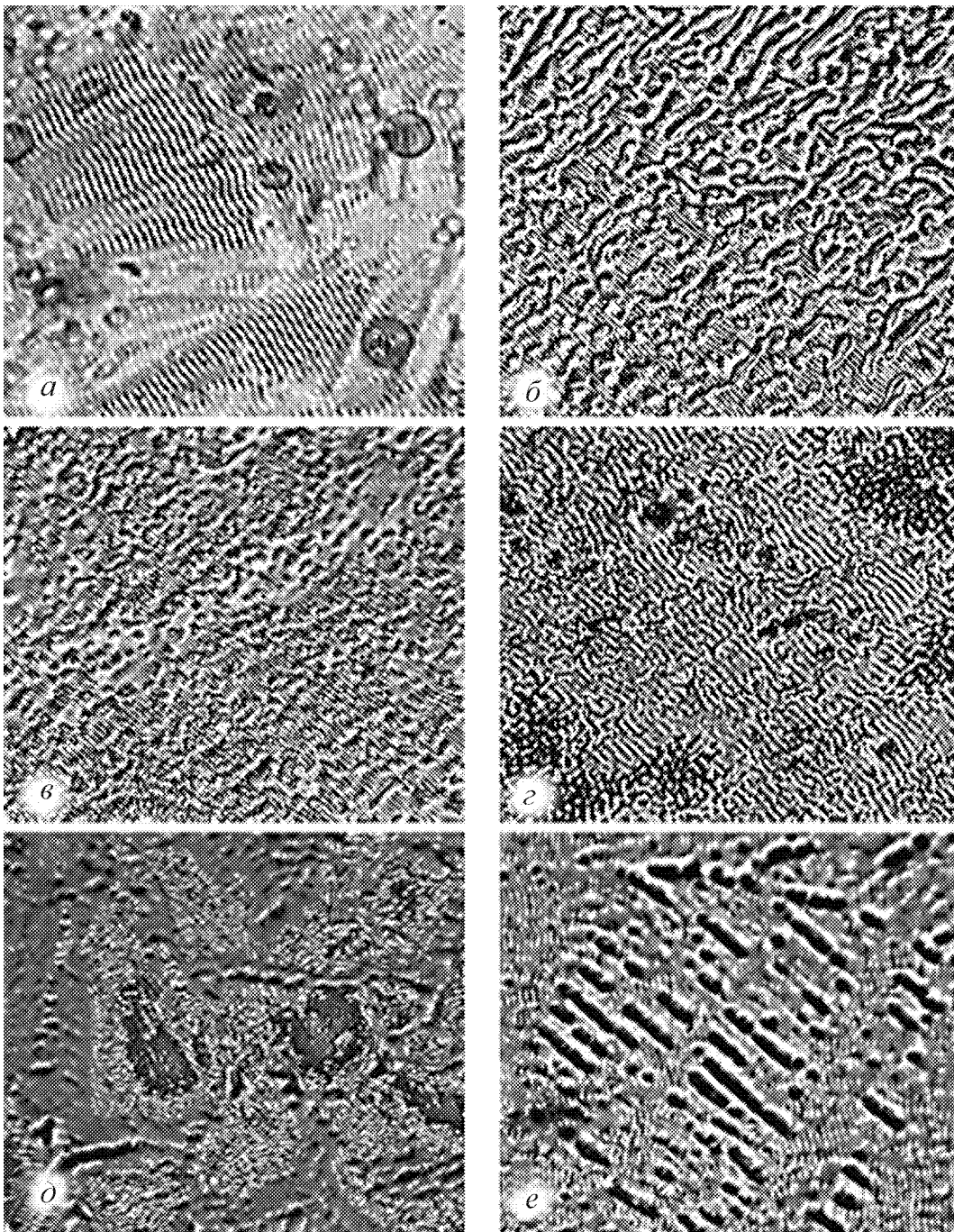


Рис. 1. Пространственно самоорганизованные структуры на металлических сплавах Ni-Cr с числом импульсов облучения 100 (а), 400 (б), 500 (в), 800 (г) и Fe-Cr-Ni с числом импульсов облучения 1000 (д) и 8600 (е)

2.2. Мультифрактальная параметризация процесса самоорганизации.

Для характеристики фрактальных множеств были использованы различные параметры, играющие роль размерности [4–5]. Их можно грубо разделить на две группы, отнеся к первой размерностные характеристики, выведенные из чисто геометрических соображений, и ко второй – размерностные характеристики, связанные с

теорией информации. Применение характеристик первой группы к физическим системам обычно приводит к недостаточно информативным результатам, в то время как характеристики второй группы служат мерой «неоднородности» фрактального множества. Далее для анализа динамики процесса самоорганизации будут использоваться характеристики второго типа.

Наблюдаемые на рис. 1 структуры имеют крайне нерегулярное и запутанное строение, которое невозможно описать или задать традиционными аналитическими или геометрическими способами. Для количественного описания наблюдаемых структур в пространстве может быть использован аппарат мультифрактальной параметризации, а именно мультифрактальная размерность, однородность и упорядоченность. Опыт численного мультифрактального анализа изображений структур облученного материала показывает его эффективность при анализе процессов самоорганизации [6–9]. Методика мультифрактальной параметризации была подробно описана ранее [6], поэтому кратко опишем лишь основные параметры, используемые в процессе мультифрактальной параметризации.

В реальных физических системах самоподобие структур при больших масштабах, характерное для фракталов, не реализуется. В таких случаях используется понятие мультифракталов, содержащих подмножества с разной фрактальной размерностью. Мультифрактальная параметризация структур основана на расчете вероятности появления элемента рельефа рассматриваемого плоского изображения структуры. После текстурной обработки изображение переводится в черно-белый формат и вычисляются обобщенные фрактальные размерности Реньи

$$D_q = \frac{1}{q-1} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln [\sum_i p_i^q(\varepsilon)]}{\ln \varepsilon},$$

где p_i – вероятность нахождения точки фрактала в i -й ячейке; ε – размер ячеек покрывающей сетки; $q = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots, \pm \infty$ – порядок размерности. Таким образом, выделяются области наполнения с разной плотностью упаковки структурных элементов. Результатом применения этого алгоритма являются следующие количественные характеристики.

1. D_0 – размерность Хаусдорфа–Безиковича; характеризует величину фрактальной размерности.

2. $f_q = f(\alpha(q))$ – спектр сингулярностей α ; характеризует однородность структуры, то есть распределение единичных элементов структуры в евклидовом пространстве, охватывающем эту структуру. Чем больше значение f_q , тем структура более однородна, а при стремлении f_q к нулю в структуре накапливается «беспорядок».

3. $\Delta_q = D_1 - D_q$ – упорядоченность структуры; характеризует степень нарушения симметрии меры или степень неравновесности изучаемой системы по отношению к мультифрактальному преобразованию. Чем больше значение Δ_q , тем более периодична структура, то есть увеличение (по модулю) Δ_q показывает, что в структуре растет периодическая составляющая и система накачивается информацией.

4. D_1 – информационная размерность (значение D_q при $q = 1$); характеризует скорость роста количества информации.

5. D_2 – корреляционная размерность (значение D_q при $q = 2$); характеризует коэффициент корреляции между парой точек, случайно выбираемых в соответствии

с распределением вероятности меры. Корреляционная размерность характеризует вероятность нахождения в одной и той же ячейке покрытия две точки множества.

Данные мультифрактальные характеристики позволяют не только оценить влияние внешнего излучения на поведение системы, но и описать процесс эволюции самоорганизации элементов системы во времени. Так, на рис. 2, *а* представлена зависимость мультифрактальных параметров в сплаве Fe-Cr-Ni от количества импульсов лазерного облучения. При 600 импульсах значения мультифрактальной размерности и однородности значительно падают, а упорядоченность структуры несколько увеличивается. При 1400 импульсах значения мультифрактальной размерности и однородности также несколько падают, а упорядоченность растет. Эти особые точки отмечены на графиках прерывистыми линиями. В них также наблюдается изменение значения параметра микротвердости поверхностного слоя.

На рис. 2, *б* представлена зависимость мультифрактальных параметров самоорганизации в сплаве Ni-Cr от количества импульсов лазерного облучения. Для этого материала при 600 импульсах значения мультифрактальной размерности и однородность несколько уменьшаются, а упорядоченность структуры несколько увеличивается. При 400 импульсах значение мультифрактальной размерности также несколько падает, а однородность растет. Эти особые точки также отмечены на графиках прерывистыми линиями. Видно, что параметры мультифрактальной размерности коррелируют с микротвердостью поверхностного слоя.

С точки зрения характера наблюдаемой самоорганизованной структуры выделенные особые точки характеризуются полным изменением формы наблюдаемой самоорганизации. Увеличение или уменьшение значения мультифрактальной размерности говорит об усложнении или упрощении строения наблюдаемой в процессе облучения материала самоорганизации. Иными словами, наблюдается эволюционное развитие самоорганизации. Для обоих сплавов увеличение мультифрактальной размерности начинается в особой точке, достигаемой при дозе облучения в 600 импульсов. После прохождения этой точки с ростом числа импульсов также происходит значительное изменение однородности и упорядоченности наблюдаемой структуры. Строение структуры с ростом числа импульсов полностью изменяется, что можно наблюдать на рис. 1.

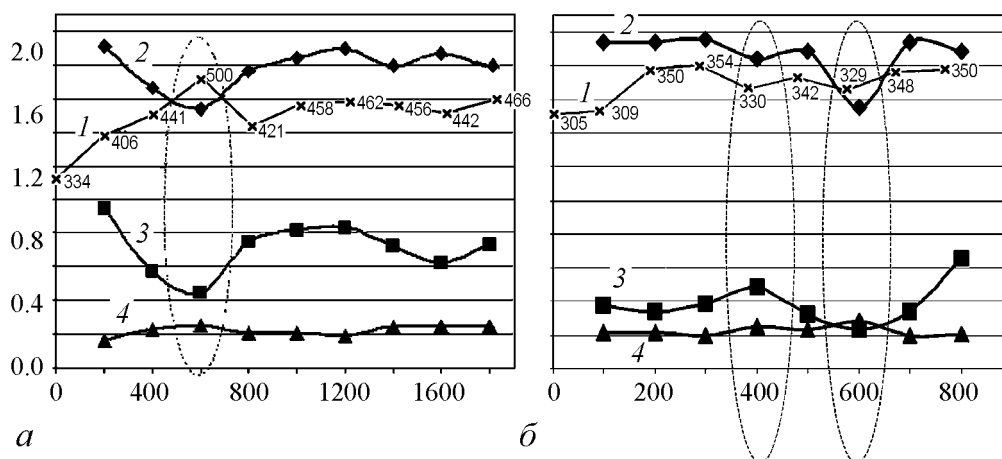


Рис. 2. Зависимость микротвердости (1) и мультифрактальных параметров (2 – мультифрактальная размерность, 3 – однородность, 4 – упорядоченность) от количества импульсов лазерного облучения в сплавах Fe-Cr-Ni (*а*) и Ni-Cr (*б*)

3. Пространственно-временная динамика процесса самоорганизации

При анализе естественных фракталов часто используют представление о кластерах [10]. Кластером называют комплексные соединения, в основе структуры которых лежит центральный элемент – объемная ячейка из непосредственно связанных между собой элементов. С развитием теории фракталов было введено понятие фрактальных кластеров, которыми принято называть структуры, образующиеся при ассоциации множества элементарных объектов в единый крупномасштабный самоподобный объект. В соответствии с этим представленная на рис. 1, *a–d* сложная система была разделена на составляющие элементы или кластеры меньшего размера путем наложения на изображение геометрической сетки.

С этой целью для каждой дозы облучения (фиксированного числа импульсов) были получены фотографии (в цифровом формате) самоорганизованных структур, представляющие собой матрицу точек, каждая из которых обладает своей цветовой характеристикой. Данная матрица принимается за реализацию пространственного стохастического процесса, определенного на некоторой области размерности 2. При анализе фотографий использовали непрерывное квадратное ограничение, в котором наиболее наглядно представлен процесс самоорганизации. В ходе анализа цифровое изображение структуры рассматривается в виде матрицы, состоящей из 0 и 1. Дискретизация осуществляется на основе определения разности контрастов. Размер поля на поверхности облученного материала составляет 1000×1000 пикселей (или 12.5 мкм) и покрывает порядка 20 зерен облученного материала различного размера и различной кристаллографической ориентировки. Данное поле было покрыто равномерной сеткой с шагом 20 пикселей (рис. 3, *a*). Размеры ячейки сетки выбирались таким образом, чтобы каждая ячейка по возможности обеспечивала полное покрытие только одного фрактального кластера, но при этом позволяла бы производить расчет фрактальных параметров.

Анализ серии фотографий, полученных после облучения, показал, что при определенной дозе облучения наблюдается самоорганизация либо преимущественно

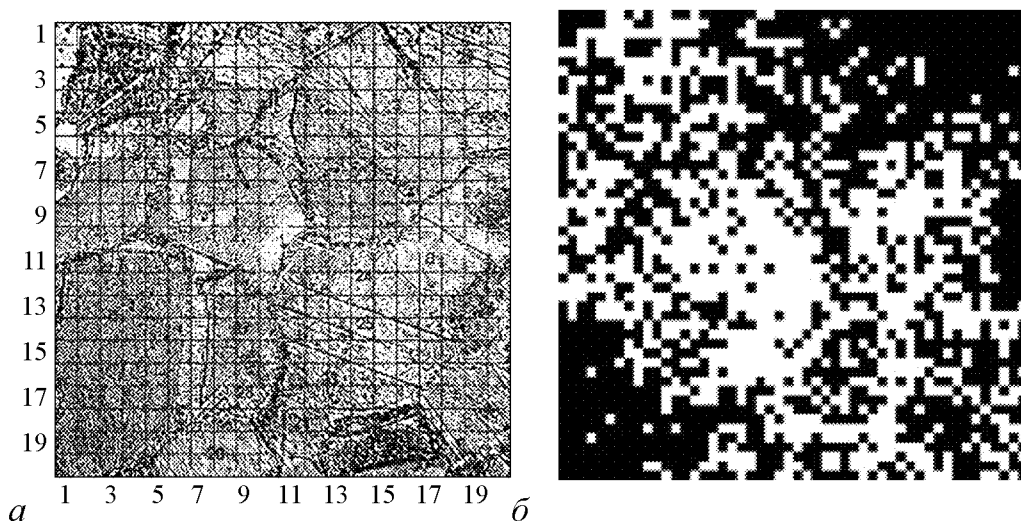


Рис. 3. Вид поверхности материала Ni-Cr после облучения с сеткой для расчета характеристик покрывающих ячеек (*a*) и кластеризация фотографии ячейками черного и белого цвета (*б*)

одного типа (в виде полос или ячеек), либо комбинация двух разных типов (ячеек и полос). Доза, при которой самоорганизованная структура одного типа переходит в самоорганизованную структуру другого типа, условно можно назвать особой точкой. Можно предположить, что в этих точках система достигает в процессе эволюции порога неустойчивости, и начинает осциллировать. Возникающие флуктуации приводят систему к самоорганизации следующего уровня. Переход между уровнями самоорганизации осуществляется постепенно. Именно поэтому в особых точках можно наблюдать самоорганизацию сразу двух типов. Опишем их подробнее. При небольшом числе импульсов структура самоорганизации представляет собой расположенные параллельно прямые линии (см. рис. 1, *a*). При увеличении числа импульсов крупные повторяющиеся прямые отрезки пересекаются перпендикулярными им отрезками меньшей длины (см. рис. 1, *b–z*). Эта структура может быть аппроксимирована геометрической сеткой. Для целей моделирования условно обозначим ячейки с полосками белым цветом, а остальные ячейки, с любыми другими элементами – черным цветом (рис. 3, *b*). Изображения самоорганизованных структур поверхности сплава Ni-Cr для фиксированных доз облучения (рис. 4, *a*) были кластеризованы в соответствии с описанным алгоритмом, и полученная в итоге серия кластеризованных изображений представлена на рис. 4, *b*. Видно, что распределение черных и белых кластеров по плоскости изображения соответствует распределению фрактальных кластеров разных типов по поверхности облученного материала. Кроме того, с увеличением числа импульсов от 100 до 300 количество черных кластеров увеличивается. Это соответствует результатам эксперимента, представленным на рис. 4, *a*. Видно, что с увеличением числа импульсов структура, состоящая из полосок, постепенно переходит в новую структуру, напоминающую по своей форме сетку. Аналогичный переход можно наблюдать и при рассмотрении последовательности кластеризованных изображений на рис. 4, *b*. С увеличением числа импульсов происходит постепенный процесс замены белых кластеров черными до тех пор, по-

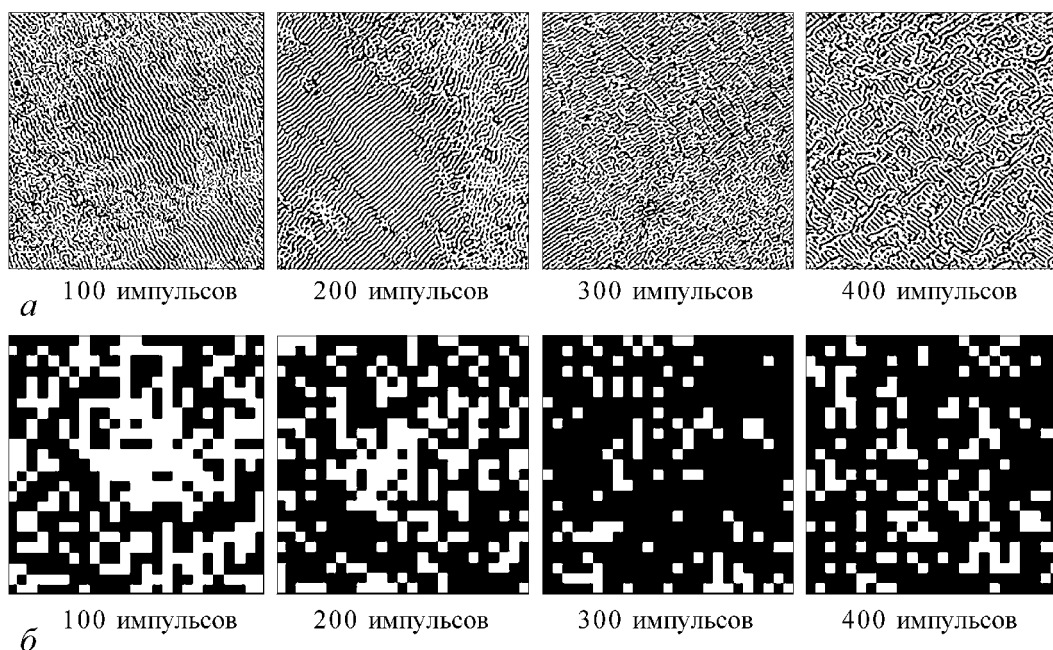


Рис. 4. Кластеризация элементов самоорганизации для сплава Ni-Cr при разном числе импульсов. Фотографии облученной поверхности (*a*) и соответствующее кластеризованное изображение (*b*)

ка при 300 импульсах черные кластеры практически полностью заполняют всю поверхность облученного материала. Затем, при 400 импульсах число белых кластеров снова начинает расти и достигает максимума при 500 импульсах. При 600 импульсах количество белых кластеров снова падает, а с увеличением числа импульсов до 800 число белых кластеров снова начинает расти.

Данный алгоритм кластеризации фактически позволяет описывать эволюцию процесса самоорганизации в зависимости от числа импульсов. Видно, что количество черных и белых кластеров в изображении последовательно меняется в зависимости от количества импульсов лазера. Процесс перехода белых кластеров в черные и черных кластеров в белые повторяется, или осциллирует. При этом наблюдаются особые точки, после прохождения которых число кластеров белого цвета резко падает, и они заменяются кластерами черного цвета. В свою очередь, после прохождения особой точки число кластеров белого цвета имеет минимальное значение, но с увеличением числа импульсов снова начинает расти до следующей особой точки.

Если задать развитие или перестройку кластеров, а также правила такой перестройки на каждом шаге итерации, появляется возможность приближенно описать наблюдаемую эволюцию процесса самоорганизации во времени в зависимости от числа импульсов. Число импульсов определяет каждый шаг итерации, так как перестройка самоорганизованной структуры при лазерном облучении зависит именно от числа поступивших в систему импульсов. Наиболее простой механизм, позволяющий реализовать такой подход, следует из теории клеточных автоматов.

Конструкция клеточного автомата представляет собой однородную среду из соприкасающихся друг с другом клеток [11]. Каждая клетка пространства занята отдельным элементарным автоматом. Совокупность клеток образует клеточное пространство, в котором функционирует автомат. Эти автоматы имеют конечный набор состояний, а их выходные сигналы есть номера их состояний. Каждый автомат имеет нескольких соседей, с которыми он обменивается информацией о состояниях.

Для моделирования эволюции процесса самоорганизации каждая клетка представленного на рис. 3, б кластеризованного изображения была принята за реализацию элементарного автомата. В качестве метода упаковки выбран квадратичный метод, когда у клетки есть ровно восемь соседей. Автомат работает в дискретном времени и имеет только два условных состояния – «0» и «1». Состояние «0» (обозначаем белым цветом) соответствует структурам самоорганизации, ранее условно обозначенным кластерами белого цвета (полоски). Состояние «1» (обозначаем черным цветом) соответствует структурам самоорганизации, ранее условно обозначенным кластерами черного цвета (ячейки). Для активизации клеточного автомата в пустое клеточное пространство вносим начальную активность в виде «зародыша». Зародыш – это совокупность элементарных автоматов, которые внешним образом переведены из пассивных состояний в какие-либо активные состояния. С этого момента начинается функционирование клеточного автомата. В качестве начального условия работы клеточного автомата будем рассматривать кластеризованное изображение самоорганизации, полученное на начальном этапе облучения (100 импульсов, см. рис. 1, а).

Для описания функционирования клеточного автомата определены следующие правила.

1. Если автомат находится в состоянии «0» и ни один из его соседей не находится в состоянии «1», то этот автомат переходит в состояние «1».

2. Если автомат находится в состоянии «0» и от трех до восьми его соседей находятся в состоянии «1», то этот автомат переходит в состояние «1».

3. Если автомат находится в состоянии «1» и от трех до семи из его соседей находятся в состоянии «1», то этот автомат остается в состоянии «1».

4. В остальных случаях автомат переходит в состояние «0».

Правила работы автомата выбирались таким образом, чтобы максимально соответствовать правилам возникновения черных и белых кластеров.

Результаты работы клеточного автомата для сплава Ni-Cr приведены на рис. 5. На вход автомата подавали кластеризованные изображения самоорганизованных структур после начального облучения 100 импульсами. Полученные в результате работы автомата изображения совмещали с кластеризованными изображениями самоорганизованных структур. Каждый шаг работы автомата моделирует 100 дополнительных импульсов облучения материала. Видно, что структура изображений в результате работы автомата напоминает кластеризованные изображения, полученные в результате эксперимента. Кроме того, в процессе работы автомата количество белых кластеров при подходе к контрольной точке в 400 импульсов падает, а в самой контрольной точке снова возрастает. Аналогичное поведение черных и белых кластеров можно наблюдать и для изображений, полученных в ходе эксперимента.

Для более детального анализа работы автомата рассмотрим распределения черных и белых кластеров в зависимости от количества импульсов для изображений, полученных в ходе эксперимента по облучению сплава Fe-Cr-Ni (от 200 до 1800 импульсов), и изображений, полученных в результате работы клеточного автомата. На рис. 6, *а*, *б* приведено сравнение диаграмм распределения количества белых и черных кластеров в эксперименте и в результате работы автомата. По оси *X* откладывается число импульсов либо число шагов работы автомата, а по оси *Y* – число соответствующих кластеров в системе. Белые кластеры обозначаются цифрой

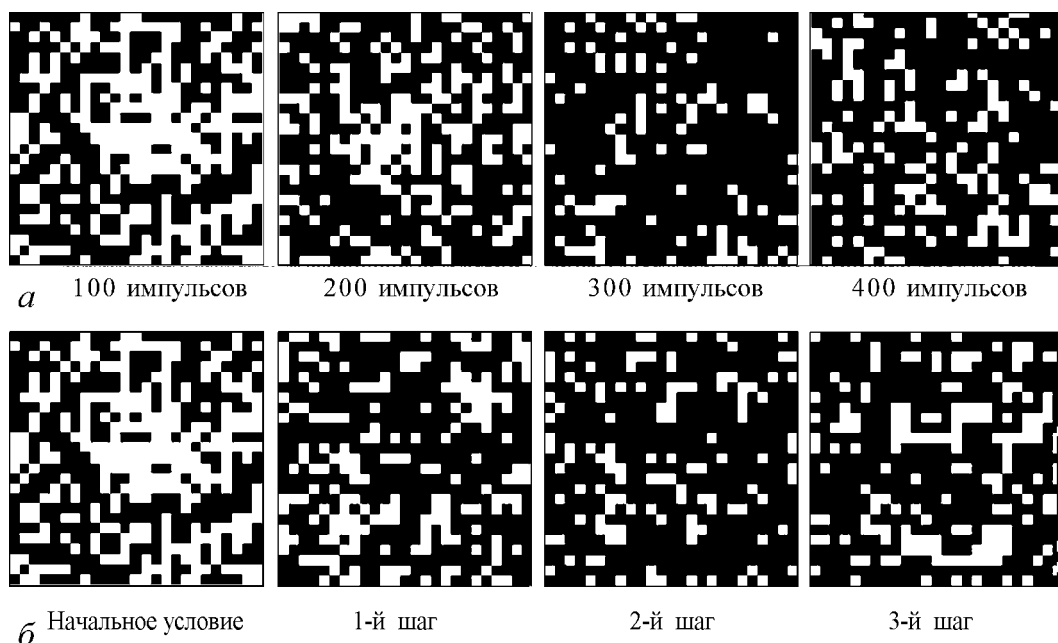


Рис. 5. Сравнение результатов работы клеточного автомата с экспериментальными данными: *а* – кластеризованные фотографии элементов структуры самоорганизации в зависимости от числа импульсов обучения; *б* – результаты работы клеточного автомата. Начальные условия – кластеризованная фотография при 100 импульсах облучения

«0», а черные кластеры цифрой «1». Видно, что соотношение между количеством белых и черных кластеров на каждом шаге работы автомата достаточно точно совпадает с распределением белых и черных кластеров в результате эксперимента. На рис. 6, в, г показаны распределения кластеров для автоматов, на вход которых были поданы в качестве начальных условий разные кластеризованные изображения, полученные при 200 импульсах облучения. Видно, что уже на третьем шаге работы автоматов соотношения между черными и белыми кластерами становятся идентичными, несмотря на разные начальные условия. Распределения кластеров внутри изображений, полученных после работы автомата, соответствуют распределению кластеров, получаемых в ходе эксперимента.

Ранее в качестве белых кластеров нами были определены фрактальные кластеры, состоящие из параллельных полос, а в качестве черных кластеров были приняты ячейки. Применяя обратное преобразование к результатам работы клеточного автомата, можно получить моделируемый в результате работы автомата рельеф поверхности на каждом шаге его работы. На рис. 7, а представлено кластеризованное изображение, полученное на 3-м шаге работы автомата. Этот шаг работы автомата моделирует лазерное облучение при 400 импульсах. Обратное преобразование этого изображения выполняется путем замены каждого белого кластера маленьким изображением фрактального кластера, состоящего из параллельных черных и белых полос. Черные кластеры соответственно заменяются вторым типом фрактальных кластеров в виде ячеек. Полученный в результате такого преобразования искусственный рельеф поверхности представлен на рис. 7, б. Очевидно, что получить такой искусственный рельеф можно на любом шаге работы клеточного автомата. На

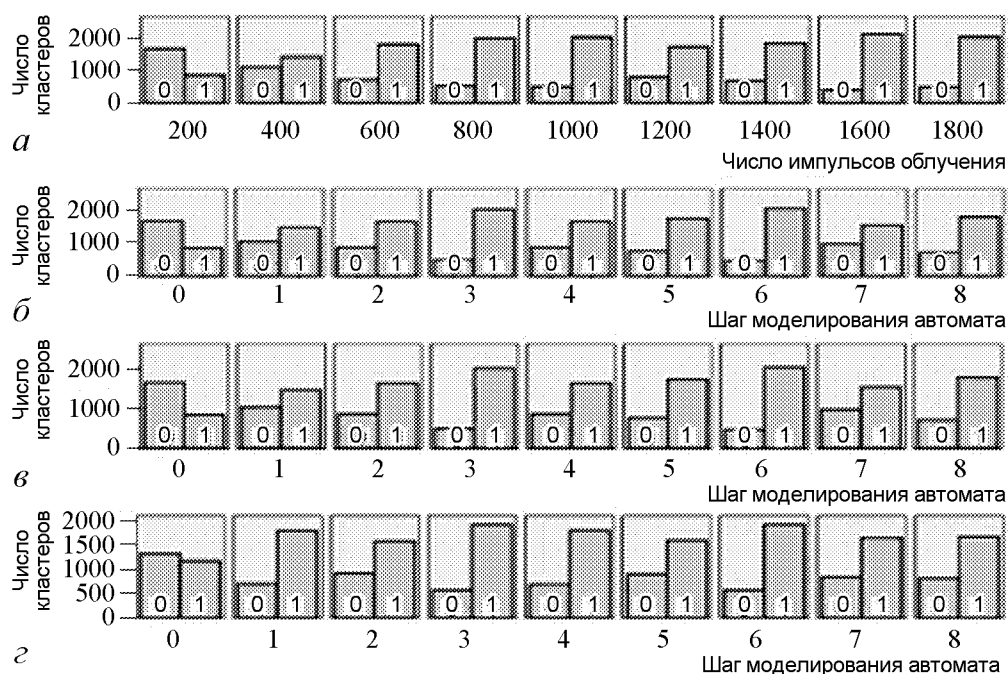


Рис. 6. Сравнение распределений черных (1) и белых (0) кластеров: а, б – в эксперименте и в результате работы автомата; в, г – в результате работы автомата для разных начальных условий – двух разных фотографий при 200 импульсах облучения

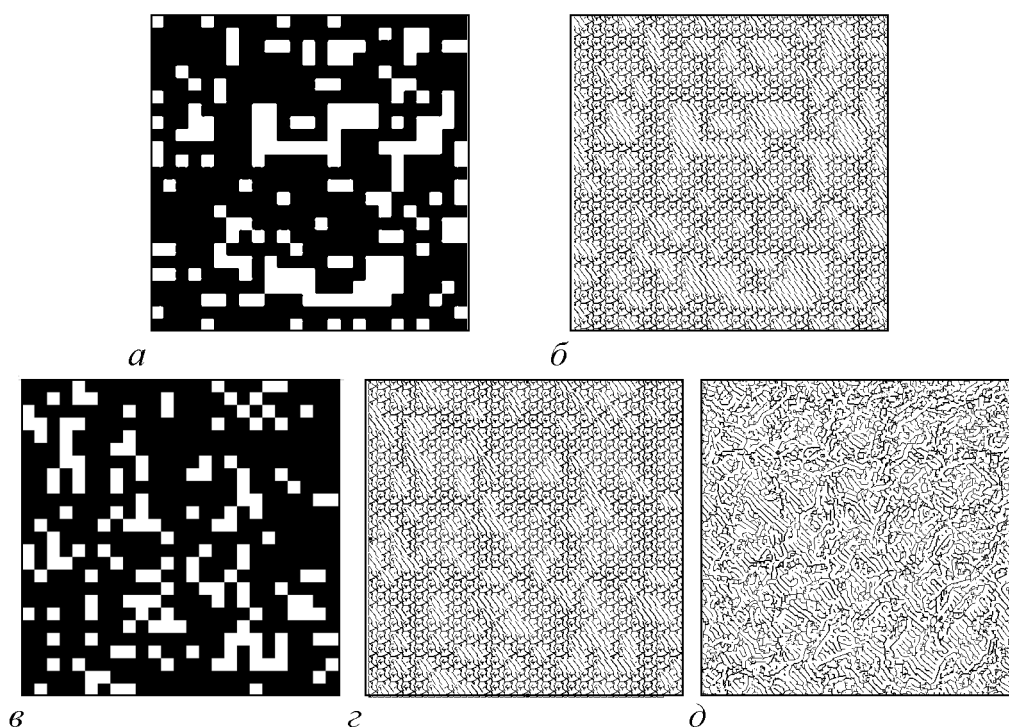


Рис. 7. Обратное преобразование кластеризованного изображения

рис. 7, в представлен результат кластеризации реального рельефа поверхности при 400 импульсах облучения, что соответствует третьему шагу работы автомата, а на рис. 7, з – его обратное преобразование. Видно, что результаты обратного преобразования кластеризованных изображений реального рельефа (рис. 7, б) и полученного в результате работы клеточного автомата (рис. 7, з) подобны. Сравнивая получаемый рельеф с реальным рельефом структуры (рис. 7, д), можно корректировать правила работы автомата с целью совершенствования получаемых моделей.

Заключение

При высоких уровнях радиационного повреждения структурные элементы в материалах оказываются пространственно самоорганизованными. Характер наблюдаемой самоорганизации может изменяться в зависимости от интенсивности радиационного воздействия. С увеличением интенсивности воздействия структура самоорганизации усложняется, и одна форма самоорганизации сменяется следующей.

С целью анализа эволюции процесса самоорганизации была получена иерархия самоорганизованных структур для разного числа импульсов лазерного облучения разных металлических сплавов. На низком числе импульсов на поверхности облученного материала наблюдаются пространственные периодические структуры, которые с увеличением поступающей в систему энергии перестраиваются в новую самоорганизованную структуру.

Применяя методы мультифрактального формализма для количественного описания однородности, упорядоченности и мультифрактальной размерности процессов самоорганизации показано, что при отслеживании изменения комбинации мульти-

фрактальных параметров можно обнаружить точки, в которых элементы самоорганизации перестраиваются, и процесс самоорганизации переходит на следующую фазу своего развития. Этот переход может также характеризоваться изменением физических параметров системы, в частности, изменением микротвердости. Значения мультифрактальных параметров между этими особыми точками остаются практически неизменными.

С помощью теории клеточных автоматов возможно охарактеризовать развитие процесса самоорганизации на поверхности облученного материала. Полученные в результате проведенного эксперимента по набору доз облучения структуры были кластеризованы с использованием двух типов самоорганизации. Оказалось, что с набором дозы система кластеров начинает осциллировать. Кроме того, при определенных дозах количество черных и белых кластеров в системе резко меняется. Изменение в изображении количества черных и белых кластеров в зависимости от числа импульсов и изменение расположения кластеров определяет эволюционную динамику процесса самоорганизации.

Модель работы автомата была реализована в двумерном пространстве с взаимодействием с ближайшими соседями (на основе правил игры «Жизнь»). Оказалось, что в результате работы автомата можно получить изображения, близкие по форме к кластеризованным изображениям, полученным из реального эксперимента. При этом работа автомата не зависит от начальных условий. Соотношения между черными и белыми кластерами на каждом шаге работы автомата и соотношения между черными и белыми кластерами на каждой дозе облучения находятся в удовлетворительном согласии.

Показано, что в полученных после работы клеточного автомата изображениях путем обратной замены черных и белых кластеров первоначальными фрагментами типовой самоорганизации можно получить двумерное изображение искусственного рельефа поверхности. Применяя подобное обратное преобразование к изображениям, полученным на последующих шагах работы клеточного автомата, можно моделировать рельеф облученной поверхности без проведения эксперимента.

Библиографический список

1. Пригожин И. От существующего к возникающему. М.: Наука, 1985. 327 с.
2. Хмелевская В.С. Неравновесные состояния в твердом теле. Обнинск, 2004.
3. Жижин Г.Н., Москалева М.А., Шомина Е.В., Яковлев В.А. Распространение поверхностных электромагнитных волн по металлическим поверхностям // Поверхностные поляритоны / Под ред. В.М. Аграновича, Д.Л. Миллса. М.: Наука, 1985. С.70-104.
4. Федер Е. Фракталы. М.:Мир. 1991. 249 с.
5. Встовский Г.В., Колмаков А.Г., Бунин И.Ж. Введение в мультифрактальную параметризацию структур материалов. Научно-издательский центр «Регулярная и хаотическая динамика». 2001. 115 с.
6. Куликова Н.В., Хмелевская В.С., Бондаренко В.В. Компьютерный анализ процессов самоорганизации в металлических материалах // Математическое моделирование. 2006. Т. 18, № 1. С.88.

7. Хмелевская В.С., Куликова Н.В., Бондаренко В.В. Фрактальные структуры в металлических материалах после ионного облучения и лазерного воздействия // Письма в ЖТФ. 2005. Т. 31. Вып. 14. С. 77.
8. Куликова Н.В., Хмелевская В.С., Бондаренко В.В. Анализ пространственно самоорганизованных структур методами компьютерных технологий // Нелинейный мир. 2007. № 9.
9. Хмелевская В.С., Малышкин В.Г., Куликова Н.В., Бондаренко В.В., Богданов Н.Ю. Фрактальные структуры в облученных металлических материалах // Вопросы атомной науки и техники. 2006. Вып. 1 (66). С. 411.
10. Иванова В.С., Баланкин А.С., Бунин И.Ж., Оксогоев А.А. Синергетика и фракталы в материаловедении. М.: Наука, 1994. 363 с.
11. Квастхофф У. Конечные автоматы с вставками: континуальные аспекты дискретных систем // Труды IV международного симпозиума по фракталам в физике. М.: Мир. 1988. 670 с.

Обнинский государственный технический университет атомной энергетики Поступила в редакцию 28.04.2008
 После доработки 8.09.2008

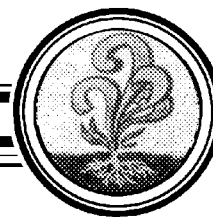
COMPUTER MODELING OF SELF-ORGANIZATION PROCESSES IN IRRADIATED SOLIDS

V.V. Bondarenko

Spatial self-organization structures in the metallic materials after irradiation by laser are studied. General method of the computer analysis of such structures using multi-fractals approaches is described. Founded consistent patterns of the changes of multi-fractals sets in irradiated surface of solids are used for the modeling of the system at the surface of two-dimensional lattice.



Бондаренко Владимир Владимирович – родился в Обнинске (1979), окончил Обнинский государственный технический университет (2002). Аспирант кафедры компьютерные сети, системы и технологии.
 E-mail: blondy_b@mail.ru



ЭЛЕКТРОННАЯ ПРОВОДИМОСТЬ МАГНЕТРОНА МИ-505

*А.А. Бондусь, В.П. Горбачев, В.П. Степанчук,
Р.В. Максимов, Д.В. Мутасов, В.К. Марченко*

В работе представлены некоторые результаты исследования трехсантиметрового магнетрона. Измерены зависимости активной и реактивной электронной проводимости от анодного напряжения и высокочастотного напряжения на колебательной системе. Построены аппроксимирующие формулы, необходимые для расчета переходных процессов в СВЧ-системах ускорителей электронов. Проводится их сравнение с известными из литературы аналогичными соотношениями, полученными для десятисантиметрового магнетрона.

Введение

При исследовании и разработке СВЧ-систем ускорителей электронов часто необходим расчет не только установившихся, но и переходных процессов. В качестве источников мощности в классических микротронах и линейных ускорителях электронов (ЛУЭ) небольшой мощности обычно используются магнетроны. В работе [1] была предложена модель магнетрона, предназначенная для расчета переходных процессов в СВЧ-системах ускорителей электронов методом эквивалентных схем. Анодный блок магнетронного генератора для основного типа колебаний представлен в виде одиночного колебательного контура с сосредоточенными параметрами. Контур нагружен электронной проводимостью магнетрона и длинной линией, в которой распространяются падающая и отраженная нагрузкой волны. Были определены параметры модели, в том числе и зависимости компонент электронной проводимости, от высокочастотного и анодного напряжений на контуре магнетрона. Методика измерения этих параметров подробно описана в [2]. Параметры модели были определены для магнетрона десятисантиметрового диапазона МИ-202.

Освоение трехсантиметрового диапазона привело к созданию малогабаритных микротронов и ЛУЭ. При разработке таких машин (особенно микротронов) требуется проведение расчетов переходных процессов в их СВЧ-системах. Для этого необходимо знание электронной проводимости магнетронов. В настоящей работе представлены результаты измерений электронной проводимости магнетрона МИ-505, который наиболее часто применяется в микротронах и ЛУЭ трехсантиметрового диапазона.

1. Методика измерений

Эквивалентная электрическая схема магнетрона, работающего на рассогласованную нагрузку, приведена на рис. 1. Параметры контура магнетрона и потери в его выходном трансформаторе измеряются на низком уровне мощности. Доступными измерениям на высоком уровне мощности являются следующие величины: мощность, рассеиваемая в нагрузке, P_n ; частота генерируемых колебаний f_r ; анодный ток I_a и напряжение магнетрона U_a .

Соотношения, позволяющие рассчитать активную и реактивную электронные проводимости магнетрона, приведенные в [2], вытекают из баланса проводимостей в схеме рис. 1. Все проводимости здесь относительные, нормированные на эквивалентную проводимость тракта Y_0 , а активная проводимость нагрузки выражена через ее коэффициент стоячей волны

$$G_3 = \begin{cases} G_k + \frac{\rho_n}{1 + \rho_n/G_T}, & \text{если } \theta_n = (2n + 1)\pi, \\ G_k + \frac{1}{\rho_n + 1/G_T}, & \text{если } \theta_n = 2n\pi, \end{cases} \quad (1)$$

$$B_3 = -2Q_{вн} \frac{f_r - f_0}{f_0}, \quad \theta_n = n\pi,$$

где ρ_n – коэффициент стоячей волны нагрузки; θ_n – электрическая длина линии, соединяющей нагрузку с магнетроном; G_k – проводимость, контура магнетрона; G_T – проводимость учитывающая потери в выходном трансформаторе магнетрона; $Q_{вн}$ – внешняя добротность магнетрона; f_0 – его резонансная частота. Соотношения (1) применимы для двух значений электрической длины линии, соединяющей магнетрон с нагрузкой, – в «фазе нагрузки» и в «фазе разгрузки», которым соответствуют экстремальные значения выходной мощности. Именно эти формулы были использованы в наших исследованиях электронной проводимости магнетрона, работающего в трехсантиметровом диапазоне.

Исследованию подлежал магнетрон МИ-505 с анодным блоком, имеющим следующие параметры: $G_k = 0.42$, $G_T = 40.0$, $Q_{вн} = 311$, $Q_0 = 732$. Они были определены на низком уровне мощности с помощью измерителя полных сопротивлений Р2-67. Для измерений на высоком уровне была собрана установка, схема которой представлена на рис. 2. Все элементы волноводного тракта имеют сечение

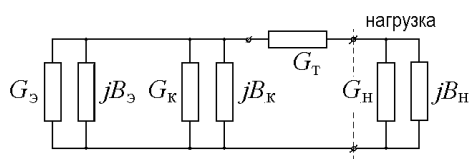


Рис. 1. Эквивалентная схема магнетрона, соединенного с рассогласованной нагрузкой: G_3 , B_3 – активная и реактивная электронная проводимость магнетрона, G_k , B_k – активная и реактивная проводимость контура магнетрона, G_T – проводимость потерь в выходном трансформаторе магнетрона. G_n , B_n – активная и реактивная проводимость нагрузки

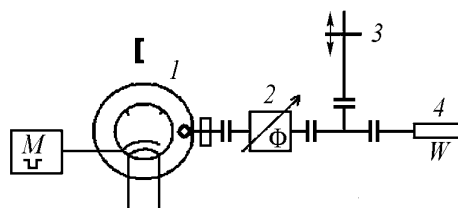


Рис. 2. Схема измерения электронной проводимости магнетрона: 1 – магнетрон; 2 – фазовращатель; 3 – подвижный короткозамыкающий поршень; 4 – согласованная нагрузка; М-модулятор

$28.5 \times 12.6 \text{ мм}^2$. Фазовращатель 2 содержит фторопластовую пластину, перемещаемую вдоль широкой стенки волновода; электрическая длина линии изменяется, примерно, на $5\pi/6$; потери в волноводе не превосходят 0.8 дБ, а $\rho_n \leq 1.15$. Для рассогласования нагрузки используется тройник в Е-плоскости и дроссельный короткозамыкающий поршень 3. Мощность измерена калориметрическим методом, для питания магнетрона используется модулятор с неполным разрядом накопителя.

Зависимость компонент электронной проводимости от СВЧ напряжения определялась следующим образом. При заданной величине анодного напряжения и величинах $\rho_n = 1.2, 1.4, \dots, 3.0$ определялись значения θ_n , соответствующие экстремумам мощности, и сами экстремальные значения мощности. Затем с помощью соотношения (1) вычислялись компоненты электронной проводимости. Мощность в нагрузке связана с мощностью в контуре магнетрона и на его электронной проводимости соотношением

$$P_3 = P_n \left(G_k + \frac{G_n}{1 + G_n/G_T} \right) \left(1 + \frac{G_n}{G_T} \right)^2. \quad (2)$$

Амплитуда переменного напряжения на электронной проводимости вычислялась в относительных единицах

$$V_3 = K \sqrt{\frac{2P_3}{G_3}}. \quad (3)$$

Нормирующий множитель K выбирался таким образом, чтобы при согласованной нагрузке и номинальном анодном напряжении $V_3 = 1$

$$K^2 = \frac{G_k + \frac{1}{1 - 1/G_T}}{2P_{3\text{сн}}}. \quad (4)$$

Здесь $P_{3\text{сн}}$ – мощность, отдаваемая на согласованную нагрузку при номинальном анодном напряжении. Относительное напряжение на контуре магнетрона рассчитывалось с помощью формул (2)–(4). Каждому значению коэффициента стоячей волны ρ_n соответствуют два значения компонент электронной проводимости и переменного напряжения на ней.

2. Результаты измерения и их аппроксимации

Описанная выше методика расчета компонент электронной проводимости магнетрона была применена для расчета указанных параметров магнетрона МИ-505, разработанного для трехсантиметрового диапазона. Результаты расчета приведены на рис. 3. Штриховой линией нанесены аппроксимирующие кривые, построенные по формулам работ [1, 2],

$$G_3(V_3, U_a) = F(U_a) V_3 \frac{1 + V_0^2}{V_3^2 + V_0^2}, \quad [1, \text{ф. (3)}]$$

$$B_3(V_3) = \frac{-0.26(V_3 - V_3^2)}{0.013 + V_3^2}, \quad [2, \text{ф. (II.3.14)}]$$

где $V_0 = 0.125$ – напряжение, соответствующее максимуму электронной активной проводимости. Зависимость активной электронной проводимости от анодного на-

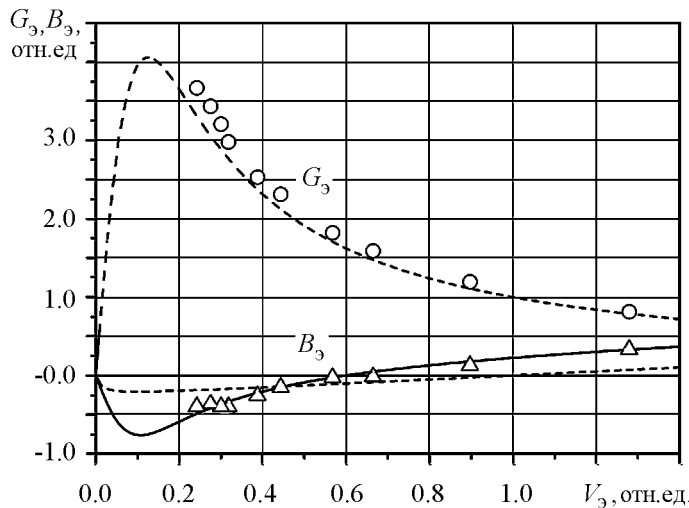


Рис. 3. Зависимость компонент электронной проводимости от ВЧ потенциала: --- расчеты по аппроксимирующим формулам работ [1, 2]; $\circ\circ$ и $\Delta\Delta$ результаты экспериментальных измерений; — расчеты по аппроксимирующей формуле (5)

пряжения здесь описывается как и в [1] с помощью функции $F(U_a)$

$$F(U_a) = \begin{cases} 0, & \text{если } U_a < U_{\text{ан}}, \\ \frac{(U_a - U_{\text{ан}})}{(U_{\text{а0}} - U_{\text{ан}})}, & \text{если } U_a \geq U_{\text{ан}}, \end{cases}$$

где $U_{\text{а0}}$ – номинальное анодное напряжение магнетрона, $U_{\text{ан}}$ – пороговое напряжение магнетрона. Значками « Δ » и « \circ » отмечены точки, полученные по методике, изложенной в разделе 1, с использованием экспериментальных измерений в трехсантиметровом диапазоне.

Как видно из графиков, аппроксимирующие кривые, полученные в [1, 2], хорошо подтверждаются экспериментальными измерениями, только в части расчета активной проводимости G_3 магнетрона. Для расчета реактивной составляющей электронной проводимости B_3 аппроксимирующая формула работы [2] в трехсантиметровом диапазоне не работает. С использованием метода наименьших квадратов и результатов расчета реактивной составляющей электронной проводимости по экспериментальным измерениям в трехсантиметровом диапазоне была получена следующая аппроксимирующая формула для B_3 магнетрона МИ-505:

$$B_3(V_3, U_a) = 0.2\sqrt{F(U_a)}\frac{V_3^3 + 1.125V_3^2 - 1.11V_3}{V_3^2 + V_0^2}. \quad (5)$$

Результаты расчета по этой формуле нанесены на рис. 3 сплошной линией. Как видно, она хорошо аппроксимирует экспериментальные результаты и может быть использована разработчиками.

Заключение

Полученная в работе формула для аппроксимации реактивной составляющей электронной проводимости магнетрона с формулой для активной составляющей электронной проводимости, полученной в работе [1], могут быть использованы при расчетах переходных процессов в высокочастотных системах ускорителей электронов,

выполненных на основе магнетрона МИ-505, в частности, для уточнения результатов, полученных в [3], и определения параметров элемента связи анодного блока магнетрона с ускоряющим резонатором при разработке макета объединенной СВЧ-системы микротрона [4].

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант №07-02-01288-а).

Библиографический список

1. *Заворотыло В.Н., Милованов О.С.* Модель магнетронного генератора для расчета переходных процессов // Ускорители. М: Атомиздат, 1977. № 16. с. 34.
2. *Заворотыло В.Н.* Возбуждение высокочастотных колебаний и ускорение частиц в линейных ускорителях электронов. Дисс. канд. техн. наук. М.: МИФИ, 1979.
3. *Бондусь А.А., Горбачев В.П., Степанчук В.П.* Совмещенная СВЧ-система микротрона // The Program and Abstracts of Fourteenth Int. Workshop Beam Dynamics & Optimization. July 3–6, 2007. Saint-Petersburg: St. Petersburg State University. 2007. P. 13.
4. *Бондусь А.А., Горбачев В.П., Степанчук В.П.* Переходные процессы в моноблоке магнетрон – ускоряющий резонатор микротрона // Вестник СПбГУ. 2008 Сер. 10, вып. 3. С. 34.

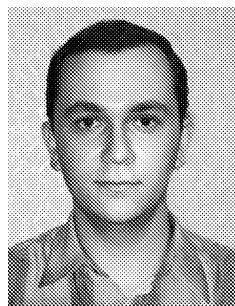
*Саратовский государственный
университет им. Н.Г. Чернышевского
ОАО Тантал, Саратов*

*Поступила в редакцию 18.12.2008
После доработки 25.12.2008*

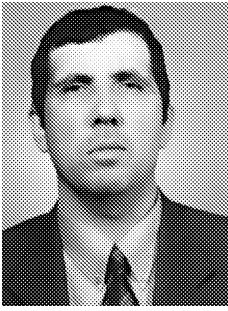
X-BAND MAGNETRON ELECTRONIC CONDUCTIVITY

*A.A. Bondus', V.P. Gorbachev, V.P. Stepanchuk,
R.V. Maksimov, D.V. Mutasov, V.K. Marchenko*

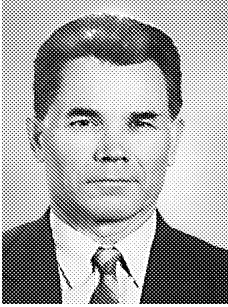
Some results of the X-band magnetron research are presented. Its active conductivity and the reactive one are measured in dependence both on anode voltage and RF voltage of the oscillatory systems. Approximating formulas are built for these dependences. This is necessary for transient processes calculation in microwave systems of X-band electron accelerators. The comparison is carried out with the known relations for the S-band magnetron.



Бондусь Анатолий Александрович – родился в Саратове (1985), окончил Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского (2007) по специальности радиофизика и электроника. После окончания СГУ работает в ОМФ НИИЕН СГУ ЛЯФиУ. Является соавтором двух статей в области ускорителей заряженных частиц.



Горбачев Валерий Петрович – родился в городе Печора республики Коми (1955). Окончил Саратовский университет (1977) по специальности физика. После окончания университета работал в лаборатории ускорителей НИИМФ СГУ (с 2003 года лаборатория ядерной физики и ускорителей ОМФ НИИЕН). Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук в НИИЯФ МГУ (2007) в области физики пучков заряженных частиц и ускорительной техники. Соавтор 35 статей и 6 авторских свидетельств. С 1999 года член программного комитета международного совещания Beam Dynamics & Optimization, с 2008 года член оргкомитета.



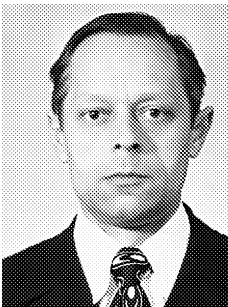
Степанчук Виктор Петрович – родился (1929) в деревне новая Липовка Саратовской области, окончил физический факультет Саратовского государственного университета (1954). После окончания университета работает в СГУ. Защитил диссертацию на соискание учёной степени кандидата физико-математических наук (СГУ, 1966) и доктора технических наук в МИФИ (1984) в области ускорителей заряженных частиц. Опубликовал порядка 120 научных работ (в том числе около 40 авторских свидетельств) по ускорителям заряженных частиц и электронике СВЧ.



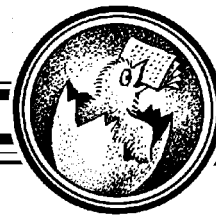
Максимов Роман Вячеславович – родился (1985) в поселке Кушмурун Кустанайской области Республики Казахстан. Окончил Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского (2007) по специальности радиофизика и электроника. Аспирант СГУ.



Мутасов Дмитрий Валентинович – родился (1985) в селе Раздольное Лысогорского района Саратовской области. Окончил Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского (2007) по специальности радиофизика и электроника. После окончания СГУ работает в ОМФ НИИЕН СГУ ЛЯФиУ.



Марченко Вячеслав Константинович – родился в Ростове-на-Дону (1936), окончил Таганрогский радиотехнический институт (1959). После окончания института работает в ОАО «Тантал» на инженерных должностях.



УЕДИНЕННЫЕ ВОЛНЫ ДВУМЕРНОГО МОДИФИЦИРОВАННОГО УРАВНЕНИЯ КАВАХАРЫ

В.М. Катсон

Уравнениями такого типа описывается ряд реальных процессов, таких как движение волн под ледяным покровом или распространение волн продольной деформации в тонких цилиндрических оболочках. С помощью «метода простейших уравнений» получены точные уединенно-волновые решения двумерного модифицированного уравнения Кавахары. На основе неявного псевдоспектрального метода проводится численное моделирование. Выявлены режимы распространения двумерных волн деформации с классическим солитонным поведением.

Введение

Магнитоакустические волны в плазме [1], связанные состояние двух солитонов [2], длинные волны в жидкости под ледяным покровом [3], волны продольной деформации в тонких цилиндрических оболочках [4] и т. д. описываются нелинейным уравнением Кавахары

$$u_t + uu_x + u_{xxx} - u_{xxxx} = 0. \quad (1)$$

Известно [5, 6], что уравнения (1) имеет уединенно-волновое решение

$$u = \frac{105}{169} \operatorname{ch}^{-4} \left(\frac{\xi}{\sqrt{52}} \right), \quad \xi = x - c_0 t. \quad (2)$$

Однако уравнение (1) было выведено в предположении отсутствия зависимости u от поперечной координаты. Поэтому представляется интересным рассмотреть модификацию этого уравнения, учитывающую эту пространственную неоднородность.

В контексте исследования волн в цилиндрических оболочках (или в тонких пластинах) двумерное модифицированное уравнение Кавахары

$$u_t - u^2 u_x - \sigma u_{xxx} + u_{xxxx} = \delta \int_0^x u_{yy} dx \quad (3)$$

обобщает уравнение (1) на случай зависимости продольной компоненты деформации от поперечной координаты (интегральный член в правой части) и учета физической нелинейности материала оболочки (3-й порядок нелинейности).

Несмотря на явную связь с уравнением КдВ, уравнение (3) не интегрируется методом обратной задачи рассеяния. Следовательно, для его полного изучения нельзя ограничиваться построением только точных аналитических решений, необходимо также провести ряд численных экспериментов и рассмотреть эволюцию нескольких типов начальных условий.

Для построения аналитического решения в работе использовался «метод простейших уравнений» [7]. Данный метод, в отличие от прямых методов построения солитонных решений, позволяет находить решения уравнений в частных производных более широкого класса. Для проверки найденного точного решения зададим его в качестве начального возмущения в численном эксперименте и пронаблюдаем его эволюцию. Если заданное таким образом начальное возмущение будет распространяться без изменения формы, можно с уверенностью говорить, что найденное точное решение уравнения (3) обладает классическими солитонными свойствами. Для подтверждения данного вывода будет рассмотрено взаимодействие двух уединенно волновых решений уравнения (3).

1. Метод простейших уравнений

Точные решения двумерного модифицированного уравнения Кавахары будем искать по «методу простейших уравнений», предложенному Н.А. Кудряшовым в [7] и состоящему в следующем.

Пусть задано обыкновенное нелинейное дифференциальное уравнение в полиномиальной форме

$$M[y] = 0. \quad (4)$$

Рассмотрим обыкновенное нелинейное дифференциальное уравнение меньшего порядка

$$E_n[Y] = 0. \quad (5)$$

Любое обыкновенное нелинейное дифференциальное уравнение (5), меньшего порядка, чем (4), с известным общим решением в дальнейшем называется простейшим уравнением. Примером простейшего уравнения служат уравнение Риккати

$$E_n[Y] = Y_z + Y^2 - aY - b = 0 \quad (6)$$

или уравнение для эллиптических функций Вейштрасса

$$E_n[R] = R_z^2 - 4R^3 - aR^2 - bR - c = 0. \quad (7)$$

Предположим, что мы можем найти соотношение между уравнениями (4) и (5)

$$y = F(Y). \quad (8)$$

Подстановка (8) в (4) приводит к выражению

$$M[F(Y)] = \widehat{A}E_n[Y], \quad (9)$$

где \widehat{A} искомый оператор. Из соотношения (9) видно, что для любого решения простейшего уравнения (5) существует частное решение уравнения (4) в виде (8).

Алгоритм нахождения решений состоит из трех шагов.

Первый шаг. Определение доминантных членов и порядка сингулярности уравнения (4). Этот этап в точности соответствует первому шагу теста Пенлеве [5].

Второй шаг. Представление формулы (8) в виде полинома по степеням общего решения уравнения (5) с учетом порядка сингулярности уравнения (4).

Для уравнения (6) решение будет иметь вид

$$y(z) = A_0 + A_1 Y + \dots + A_n Y^n + B_1 \left(\frac{Y_z}{Y} \right) \dots + B_n \left(\frac{Y_z}{Y} \right)^n. \quad (10)$$

Здесь $Y(z)$ общее решение уравнения (6), A_k ($k = 0, \dots, n$) и B_k ($k = 1, \dots, n$) неизвестные коэффициенты.

Для уравнения (7) решение ищется в виде

$$y(z) = A_0 + A_1 R + \dots + A_n R^n + (B_1 + \dots + B_{n-1} R^{n-2}) R_z + D_1 \left(\frac{R_z}{R} \right) \dots + D_n \left(\frac{R_z}{R} \right)^n. \quad (11)$$

Здесь $R(z)$ общее решение уравнения (7), A_k ($k = 0, \dots, n$), B_k ($k = 1, \dots, n-1$) и D_k ($k = 1, \dots, n$) неизвестные коэффициенты.

Третий шаг. Определение коэффициентов A_k ($k=0, \dots, n$), B_k ($k=1, \dots, n-1$) и D_k ($k = 1, \dots, n$) в формулах (10) и (11).

Коэффициенты определяются после подстановки выражений (10) и (11) в (4). В результате подстановки (10) получаем

$$M[y] = \sum_{k=0}^{2N} P_k(a, b, A_0, \dots, A_n, B_1, \dots, B_n) Y^{k-N}. \quad (12)$$

Коэффициенты $a, b, A_0, \dots, A_n, B_1, \dots, B_n$ находятся из системы алгебраических уравнений

$$P_k(a, b, A_0, \dots, A_n, B_1, \dots, B_n) = 0, \quad k = 0, \dots, 2N. \quad (13)$$

Выражение (10) с найденными решениями системы (13) будет решением уравнения (4).

Подстановка (11) в (4) дает

$$M[y] = \sum_{k=-L}^L P_k(a, b, c, A_0, \dots, A_n, B_1, \dots, B_{n-1}, D_1, \dots, D_n) R^k + \sum_{k=-M}^M S_k(a, b, c, A_0, \dots, A_n, B_1, \dots, B_{n-1}, D_1, \dots, D_n) R^k R_z. \quad (14)$$

Если $N = 2m$, то $L = N$, $M = N - 2$. Если $N = 2m - 1$, то $L = N - 1$, $M = N$. Зная решения для коэффициентов $a, b, A_0, \dots, A_n, B_1, \dots, B_{n-1}, D_1, \dots, D_n$ системы алгебраических уравнений

$$P_k(a, b, c, A_0, \dots, A_n, B_1, \dots, B_{n-1}, D_1, \dots, D_n) = 0, \quad k = 0, \dots, 2L,$$

$$S_k(a, b, c, A_0, \dots, A_n, B_1, \dots, B_{n-1}, D_1, \dots, D_n) = 0, \quad k = 0, \dots, 2M,$$

Получаем точное решение уравнения (4) в виде (11), выраженное через эллиптические функции Вейерштрасса.

2. Точное решение двумерного уравнения Кавахары

Переписывая уравнение (4) в переменных бегущей волны

$$u(x, y, t) = v(z), \quad z = x + C_1 y - C_0 t, \quad (15)$$

после интегрирования получаем

$$-(C_0 + \delta C_1^2)v + \frac{1}{3}v^3 - \sigma v_{zz} + v_{zzzz} = 0. \quad (16)$$

Уравнение, содержащее только доминантные члены (16) имеет вид

$$\frac{1}{3}v^3 + v_{zzzz} = 0. \quad (17)$$

Подставляя $v = A_k(z - z_0)^k$ в (17), находим, что общее решение уравнения (16) имеет порядок сингулярности $n = 2$. Таким образом, точные решения этого уравнения будем искать в виде

$$y(z) = A_0 + A_1 Y + A_2 Y^2 + B_1 \left(\frac{Yz}{Y} \right) + B_2 \left(\frac{Yz}{Y} \right)^2. \quad (18)$$

С учетом (6), формула (18) может быть переписана в форме

$$y(z) = (A_2 + B_2)Y^2 + (A_1 - B_1 - 2B_2 a)Y + \\ + A_0 + B_1 a + B_2(a^2 - 2b) + \frac{B_1 b + 2B_2 ab}{Y} + \frac{B_2 b^2}{Y^2}. \quad (19)$$

Подставляя (19) в (16), получаем систему уравнений для коэффициентов $a, b, A_0, \dots, A_n, B_1, \dots, B_n, n = 2$. Решая полученную систему, находим

$$\begin{aligned} A_0 &= 0, & A_1 &= 0, & A_2 &= 0, \\ B_1 &= 6\sqrt{2\sigma}, \\ B_2 &= 6\sqrt{10}, \\ a &= \pm \sqrt{\frac{\sigma}{5}}, \\ b &= 0, \\ C_0 &= -\frac{4}{25}\sigma^2 - \delta C_1^2. \end{aligned} \quad (20)$$

С учетом найденных значений коэффициентов, решение уравнения (16) примет вид

$$y(z) = 6\sqrt{10}Y^2(z) + 6\sqrt{2}Y(z).$$

Здесь $Y(z)$ – решение уравнения (6)

$$Y(z) = \frac{1}{2}a + \frac{\sqrt{4b + a^2}}{2} \tanh \left[\frac{1}{2} \sqrt{4b + a^2} (z + C_2) \right],$$

Подставляя сюда найденные a и b (20), приходим к выражению

$$Y(z) = -\sqrt{\frac{\sigma}{5}} + \sqrt{\frac{\sigma}{5}} \tanh \left[\sqrt{\frac{\sigma}{5}} (z + C_2) \right].$$

Подставляя найденное $Y(z)$ в (20) и полагая $C_2 = 0$, получаем уединенно-волновое решение уравнения (16)

$$u = \frac{6\sigma}{\sqrt{10}} \operatorname{sech} h^2(\xi), \text{ где } \xi = \sqrt{\frac{\sigma}{5}} \left(x + C_1 y + \left[\frac{4}{25} \sigma^2 + \delta C_1^2 \right] t \right).$$

3. Численный эксперимент

Приведем результаты численного исследования уравнения (4)

$$u_t - u^2 u_x - \sigma u_{xxx} + u_{xxxx} = \delta \int_0^x u_{yy} dx,$$

где σ – постоянный коэффициент, функция $u(x, y, t)$ считается периодической по координатам x . В начальный момент времени $u(x, y, t) = u_0(x, y, 0)$.

В расчетах принималось: $\sigma = 1$, $\delta = 1$. Было рассмотрено четыре различных случая задания начального возмущения. По координате x поддерживалось условие периодичности, на границах по оси y ставились условия $(\partial u / \partial y)_{\text{гп}} = 0$.

При численном решении уравнения использовалась полуневная спектральная схема, что автоматически обеспечивает периодичность вдоль оси x . Интегральный член рассчитывался в пространстве (x, y) [8]. В алгоритмической записи схема выглядит следующим образом.

1. Задается сеточная функция $u(i, j, n) = u(x_i, y_j, t_n)$, где $x_i = (i - 1)dx$, $y_j = (j - 1)dy$, $t_n = ndt$, dx , dy , dt – постоянные. Индекс i изменяется от 1 до N , j – от 1 до M . Величина k -го волнового числа равна $\xi_k = (k - 1)dk$, $dk = 2\pi / (Ndx)$ – интервал между двумя соседними волновыми числами.

2. Для $i = 1, \dots, N$, $j = 1, \dots, M$ вычисляется вторая производная по направлению y

$$\begin{aligned} u_{yy}(i, j, n) &= [u(i, j - 1, n) - 2u(i, j, n) + u(i, j + 1, n)] / dy^2, \\ u_{yy}(i, 1, n) &= [u(i, 2, n) - 2u(i, 1, n) + u(i, 2, n)] / dy^2, \\ u_{yy}(i, M, n) &= [u(i, M - 1, n) - 2u(i, M, n) + u(i, M - 1, n)] / dy^2. \end{aligned}$$

После проведения этих подготовительных вычислений, для каждого фиксированного $j = 1, \dots, M$ проводится последовательность операций 3-4, преобразование Фурье осуществляется по координате x при фиксированном значении координаты y .

3. Строится итерационный цикл. Под $\bar{u}(j, n)$ понимается вектор, состоящий из значений сеточной функции $u(x_i, y_j, t_n)$ в узловых точках вдоль оси x , то есть $\bar{u}(j, n) = \{u(1, j, n), u(2, j, n), \dots, u(N, j, n)\}$.

$$\bar{u}_{s+1}(j, n + 1) = F^- \left[\widehat{C}F^+(\bar{u}_s(j, n - 1)) + \widehat{B}F^+(\bar{u}_s^3(j, n + 1) + \bar{u}^3(j, n - 1)) \right],$$

$$\widehat{C} = -\frac{1 + dt(i\beta\xi^3 + i\gamma\xi^5)}{1 - dt(i\beta\xi^3 + i\gamma\xi^5)},$$

$$\widehat{B} = -\frac{dt i \xi}{3(1 - dt(i\beta\xi^3 + i\gamma\xi^5))}.$$

Здесь F^+ и F^- – прямое и обратное преобразование Фурье, соответственно.

Цикл прерывается, если выполняется условие $|u_{s+1} - u_s| / |u_s| < \varepsilon$, $\varepsilon \approx 0.01$, в нашем исследовании достаточно четырех итераций ($s = 4$).

4. Далее учитывается интегральный член

$$u(i, j, n + 1) = u_{s=4}(i, j, n + 1) + \frac{1}{2} \delta dt \sum_{l=1}^{i-1} (u_{yy}(l + 1, j, n) + u_{yy}(l, j, n)) dx.$$

В данном случае интеграл вычисляется методом трапеций. Также возможен и другой способ [9] вычисления интеграла правой части, тогда он принимает вид

$$u(i, j, n + 1) = u_{s=4}(i, j, n + 1) + \frac{1}{2} \delta dt F^- \left(\frac{1}{i \xi_k} F^+ (\bar{u}_{yy}(j, n)) \right).$$

Предварительные численные эксперименты показали, что оба способа практически равноценны.

На этом заканчивается нахождение решения на новом временном слое, и алгоритм возвращается к п. 2.

В нашем исследовании были выбраны следующие значения параметров: $N = 256$, $M = 41$, $dx = 0.25$, $dy = 0.25$, $dt = 0.01$, $dk = 0.0981$. Устойчивость и сходимость метода проверялась вариацией параметров dt и dx . При изменении этих величин вдвое относительно вышеприведенных данных, получающиеся решения отличались не более чем на доли процента. Были рассмотрены четыре случая задания начального возмущения.

Случай 1. Начальное возмущение $u_0(x, y)$ задавалось в виде одинарного купола с амплитудой $A = 12.0$ (рис. 1).

$$u_0(x, y) = 12 \operatorname{sech}^2 \left[\frac{1}{4} (x - x_0) \right] \operatorname{sech}^2 [y - y_0].$$

Эволюция возмущения происходит следующим образом. Купол возмущения движется вперед (против оси x), одновременно расплываясь в стороны (по оси y), причем последний эффект преобладает. Движение вперед сопровождается расщеплением заднего фронта волны на части. С течением времени ($t = 2$ с) ближе к границам амплитуда возмущения нарастает до определенного предела ($A = 8.2$), расплывание в стороны образовавшихся максимумов приводит к появлению крестообразной структуры. На рис. 2 видна крестообразная структура, наслаивающаяся на группу волн, отщепившихся от заднего фронта возмущения. Высота креста в максимальной точке $A = 6.5$. Дополнительно была исследована эволюция более широкого (по оси x) гауссова импульса (рис. 3). Его распространение во многом подобно распространению узкого импульса с одним серьезным отличием: задний фронт широкого импульса не расщепляется и образующуюся за ним структуру видно без искажений (рис. 4). Также было замечено, что при уменьшении коэффициента дисперсии

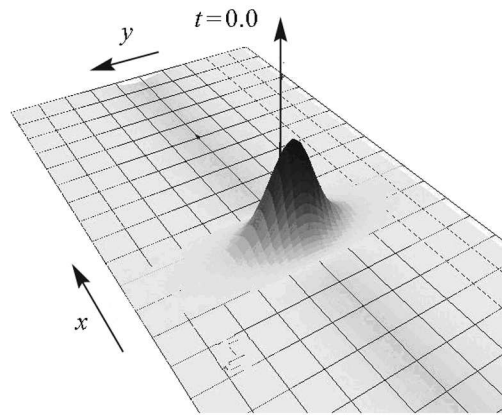


Рис. 1.

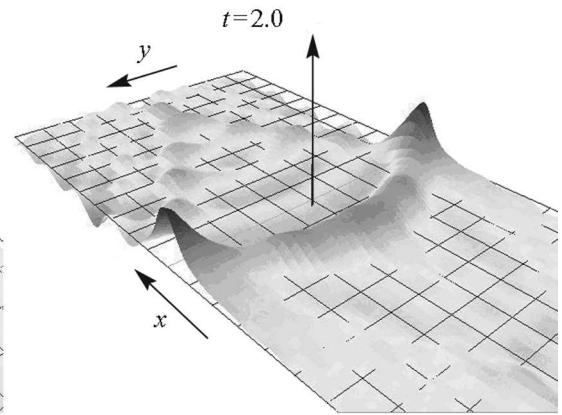


Рис. 2.

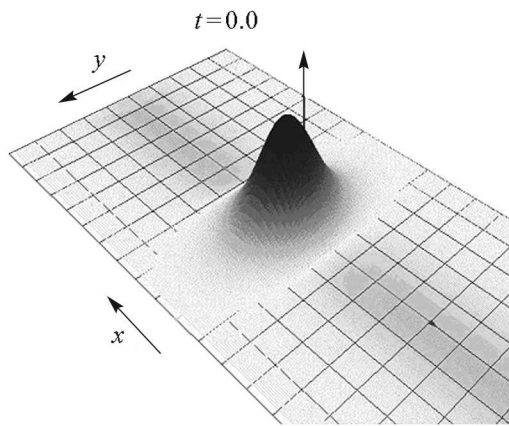


Рис. 3.

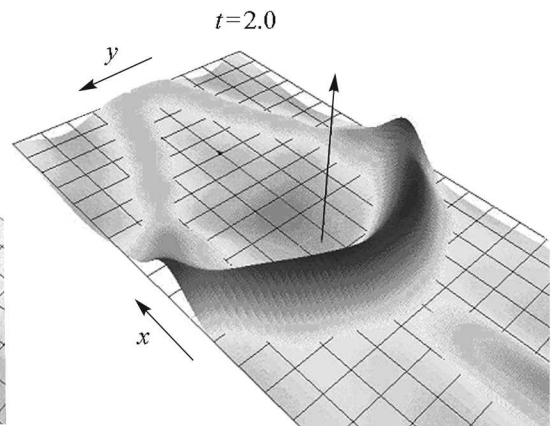


Рис. 4.

σ исходный импульс расщепляется на большее число тонких волн, а возмущения, составляющие крестообразную структуру, образуют с осью x большой угол.

Случай 2. Начальное возмущение задавалось в виде двух куполов, расположенных симметрично относительно оси y (рис. 5).

$$u_0(x, y) = 12 \left\{ \operatorname{sech}^2 \left[\frac{1}{4}(x - x_{01}) \right] \operatorname{sech}^2 [y - y_0] + \operatorname{sech}^2 \left[\frac{1}{4}(x - x_{02}) \right] \operatorname{sech}^2 [y - y_0] \right\}.$$

Сначала эволюция куполов такая же как и в случае 1: также происходит расплывание и движение вперед. Однако далее пики двухкупольного возмущения начинают взаимодействовать между собой. Это взаимодействие приводит к исчезновению первоначальных максимумов возмущения и образованию новых в середине и по краям фронта волны (рис. 6). Новые максимумы (их наибольшая высота $A = 10.1$) существуют недолго и вскоре исчезают, практически выравнивая фронт волны по амплитуде (рис. 7). Но через некоторое время пики образуются вновь (рис. 8). Как показали дальнейшие наблюдения, процесс образования и исчезновения пиков переднего фронта волны носит периодический характер. Интересно, что фронт второй волны эволюционирует подобно фронту первой и проходит через все этапы образования и исчезновения максимумов.

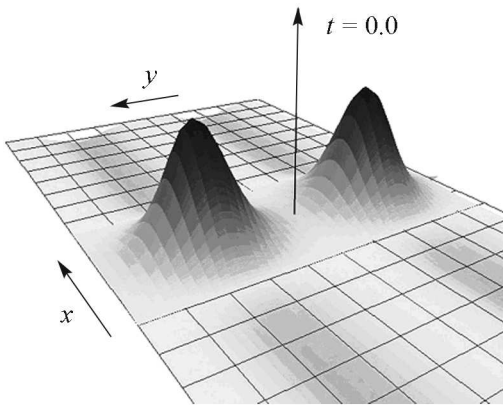


Рис. 5.

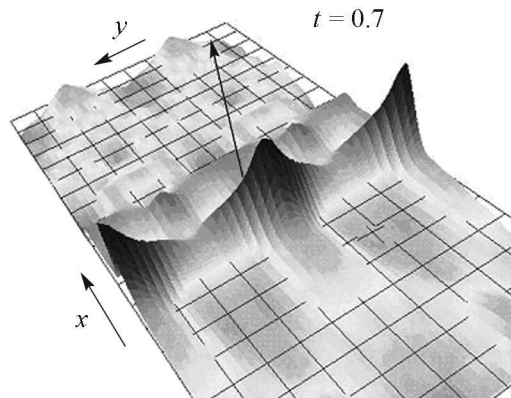


Рис. 6.

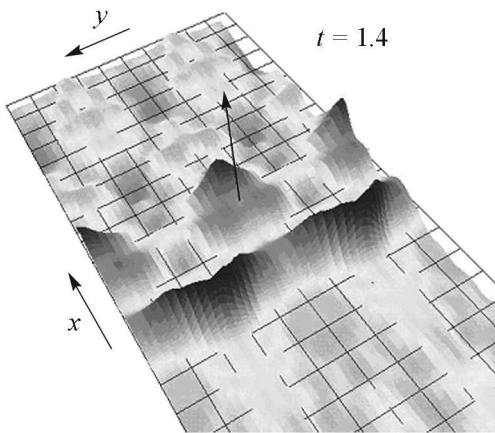


Рис. 7.

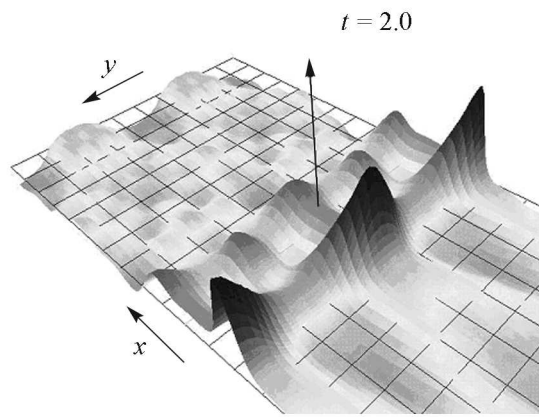


Рис. 8.

Случай 3. Начальное возмущение задавалось в виде точного решения двумерного модифицированного уравнения Кавахары (см. раздел 2)

$$u = \frac{6\sigma}{\sqrt{10}} \operatorname{sech}^2(\xi), \quad \text{где } \xi = \sqrt{\frac{\sigma}{5}} \left(x + C_1 y + \left[\frac{4}{25} \sigma^2 + \delta C_1^2 \right] t \right).$$

Как и ожидалось, фронт волны распространялся без изменения формы с постоянной скоростью (рис. 9-10), что свидетельствует об адекватности проведенного численного моделирования.

Случай 4. Однако наибольший интерес представляет вариант задания начальных условий в виде двух волновых фронтов разной амплитуды $A = 12.0$ и $A = 5.0$, расположенных один за другим вдоль оси абсцисс (рис. 11). В этом случае наблюдаем классическое солитонное взаимодействие. Волна с большей амплитудой, двигаясь быстрее, догоняет волну с меньшей, упруго с ней взаимодействует и продолжает распространяться дальше без изменения своей формы и скорости (рис. 12-13).

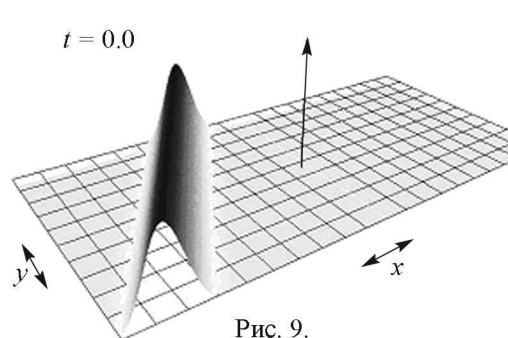


Рис. 9.

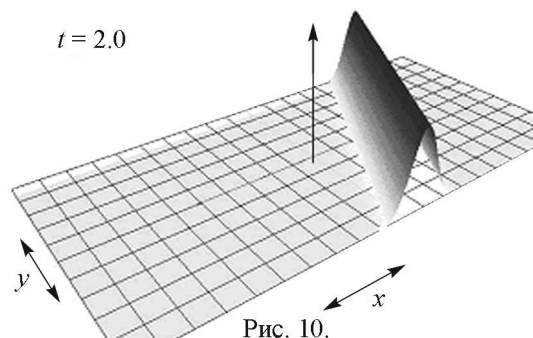


Рис. 10.

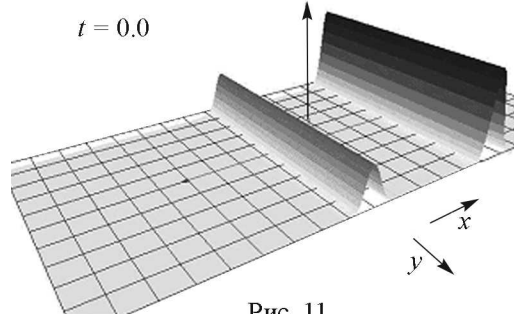


Рис. 11.

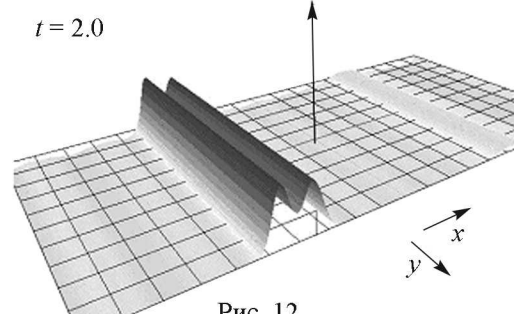


Рис. 12.

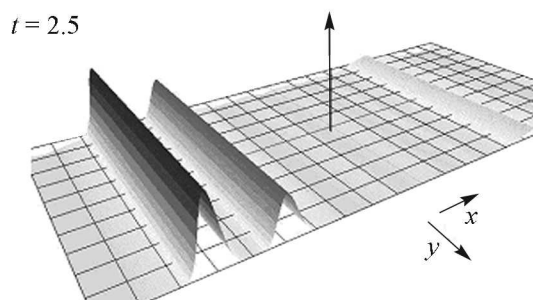


Рис. 13.

Заключение

Факт существования солитоноподобных решений двумерного модифицированного уравнения Кавахары позволяет говорить о принципиальной возможности существования уединенных волн в реальных физических системах, описываемых этим уравнением, таких как тонкие цилиндрические оболочки. Другие обнаруженные эффекты: расплывание в стороны и образование крестообразной структуры, также могут найти отражение в реальных волновых процессах.

Библиографический список

1. Kawahara T. Oscillatory solitary waves in dispersive media // J. Phys. Soc. Japan. 1972. Vol. 33. № 1. P. 260.
2. Марченко А.В. О длинных волнах в мелкой жидкости под ледяным покровом // ПММ. 1988. Т. 52, вып. 2. С. 230.

3. Горшков К.А., Островский Л.А., Папко В.В. Взаимодействия и связанные состояния солитонов как классических частиц // ЖЭТФ. 1976. Т. 71, № 2. С. 585.
4. Землянухин А.И., Могилевич Л.И. Нелинейные волны в цилиндрических оболочках: солитоны, симметрии, эволюция. Саратов: Сарат. гос. техн. ун-т, 1999. 132 с.
5. Weiss J., Tabor M., Carnevale G. The Painleve property for partial differential equation // J. Math. Phys. 1983. Vol. 24, № 3. P. 522.
6. Кудряшов Н.А. Точные решения нелинейных волновых уравнений, встречающихся в механике // ПММ. 1990. Т. 54, вып. 3. С. 450.
7. Кудряшов Н.А. Simplest equation method to look for exact solutions of nonlinear differential equations // Chaos, Solitons and Fractals. 2005. Vol. 24. P. 1217.
8. Землянухин А.И., Катсон В.М. Теория и практика спектральных методов решения уравнений с частными производными: учебное пособие Волгоград: ВолгГАСУ, 2007. 56 с.
9. Numerical recipes in C. The art of scientific computing. / Eds. W.H. Press, S.L. Teukolsky, W.T. Vetterberg, B.P. Flannery. Second edition. Cambridge : Cambridge University Press, 1992. 680 p.

Саратовский государственный
университет им. Н.Г. Чернышевского

Поступила в редакцию
После доработки

4.05.2008
19.06.2008

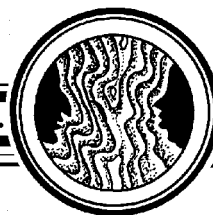
SOLITARY WAVES OF TWO-DIMENSIONAL MODIFIED KAWAHARA EQUATION

V.M. Katson

Equations of this type describe a number of real-life processes like wave motion under ice mantle or propagation of waves of longitudinal deformation in thin cylinder shell. Using «Simplest Equation Method» exact solitary-wave solutions of the two-dimensional Kawahara Equation were obtained. On the basis of implicit pseudospectral method the numerical investigation is carried out. Regimes of two-dimensional deformation waves with classic solitary behavior were discovered.



Катсон Владимир Маркович – родился в 1985 году в Саратове, окончил факультет нелинейных процессов Саратовского государственного университета (2007) по специальности «нелинейная физика». После окончания СГУ поступил в аспирантуру механико-математического факультета.
E-mail: katson@griddynamics.com



ИЗ ИСТОРИИ ГАМИЛЬТОНОВА ХАОСА: БИЛЛИАРДЫ

Р.Р. Мухин

Работа посвящена истории открытия хаоса в гамильтоновых системах в 1960-е годы. Одной из таких систем являются свободно движущиеся частицы с упругими соударениями, которые называются математическими бильярдами. В открытие хаоса в консервативных системах, частным случаем которых являются бильярды, особенно велик вклад российских ученых. Доказательство хаотического поведения бильярдов является одним из самых значительных событий в истории хаоса.

1. Истоки эргодической теории. Первые эргодические теоремы

Проблема обоснования статистической механики привела к рождению эргодической теории и к появлению одной из линий развития, приведшей к открытию хаоса. Известно, какая острая полемика разгорелась в конце XIX века по поводу оснований кинетической теории. В основе полемики лежала идея, не утратившая привлекательности до нашего времени: выразить кинетические закономерности исходя из уравнений классической механики. Однако последовательное проведение этой линии приводило к глубоким парадоксам. Для их разрешения Людвиг Больцман сформулировал в 1871 году *эргодическую гипотезу* [1–4], суть которой состояла в том, что в изолированной системе фазовая траектория пройдет через каждую точку гиперповерхности постоянной энергии. Иными словами, в эргодической системе временные средние значения физических величин равны их фазовым статистическим средним. Позднее было показано, что эргодическая гипотеза в той форме, в какой она сформулирована в [1], неверна [5, 6]. В работе [6] использована теорема Брауэра о сохранении размерности при гомеоморфизмах, то есть с топологических позиций ясно, что никакая траектория не может заполнять многомерную поверхность. Пауль и Татьяна Эренфесты предложили заменить эргодическую гипотезу Больцмана *квазиэргодической гипотезой*, по которой траектория проходит не через каждую точку энергетической поверхности, а пересекает любую окрестность такой точки, образуя всюду плотное множество [7].

Другой исток эргодической теории дала качественная теория дифференциальных уравнений, изучение поведения динамических систем «в целом». Автором первой эргодической теоремы является Анри Пуанкаре. В главе 26 «Устойчивость по Пуассону» третьего тома «Новых методов» изложена теорема Пуанкаре о возвращении, доказательство которой было позднее улучшено немецким математиком

К. Каратеодори (1919). Теорема справедлива при весьма общих условиях. На современном языке теорему о возвращении можно сформулировать следующим образом [8].

Допустим, что движение системы описывается системой дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_i}{dt} = X_i(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

с положительным интегральным инвариантом. Пусть в пространстве Ω динамической системы существует инвариантная мера μ , то есть для множества $A \subset \Omega$ $\mu f(A, t) = \mu A$, где $f(A, t)$ – множество точек в момент t , составляющих множество A при $t = 0$. Тогда

1) при $\mu A > 0$ найдутся значения $t > t_0$ такие, что $\mu[A \cdot f(A, t)] > 0$, где $A \cdot f(A, t)$ – множества точек, одновременно принадлежащие множествам A и $f(A, t)$;

2) если $\Omega = 1$, то почти все точки $p \in \Omega$ устойчивы по Пуассону, то есть мера множества точек, неустойчивых по Пуассону, равна нулю.

Таким образом, точка $p(x_1, x_2, \dots, x_n)$ пройдет бесконечно много раз сколь угодно близко от своего начального положения, за исключением начальных условий, имеющих меру нуль (рис. 1).

Теорема Пуанкаре явилась для Э. Цермело и других основой критики (как впоследствии выяснилось, необоснованной) кинетической теории Больцмана. В последующие десятилетия теорема Пуанкаре привлекала мало внимания, ее обычно не включали в курсы теоретической механики. Подлинное значение фундаментальной теоремы Пуанкаре определилось в связи с исследованиями хаоса, когда центральное место заняли вопросы поведения динамических систем «в целом».

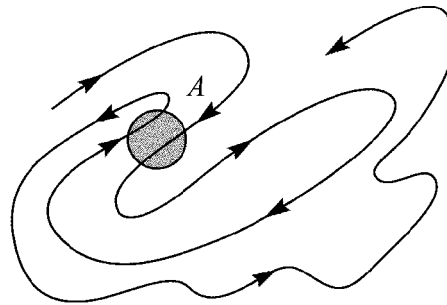


Рис. 1. Возвращения Пуанкаре в область A [9]

Эргодическая теория построена на основе теории меры и важнейшим ее принципом является пренебрежение множествами меры нуль, выражаемое терминами «почти все» и «с точностью до меры нуль». Указанный принцип отражает на математическом языке то, что «как правило» происходит в природе.

Обобщение теоремы Пуанкаре в дальнейшем произвели Э. Хопф, Н.Г. Четаев и др. В русле идей Пуанкаре находятся основополагающие результаты Джорджа Биркгофа [10] и Джона фон Неймана [11].

Первой появилась работа фон Неймана. Он доказал статистическую эргодическую теорему [11, 12].

Каждая функция $f(P) \in L^2$ обладает принадлежащим к L^2 средним по времени $f^*(P)$ в смысле сильной сходимости

$$\lim_{T-S \rightarrow \infty} \left\| \frac{1}{T-S} \int_S^T f(P_t) dt - f^*(P) \right\| = 0. \quad (1)$$

Функция f^* инвариантна по отношению к потоку. Важнейшим является понятие метрической транзитивности: динамическая система с мерой $\mu(\Omega)$ называется метрически транзитивной, если для каждого измеримого и инвариантного множества A либо само множество A , либо $\Omega - A$ имеет меру нуль [12]. Это означает, что фазовое пространство Ω нельзя разбить на две инвариантные области, меры которых отличны от нуля или единицы.

Вместо сходимости в среднем у фон Неймана, Биркгофу принадлежит более сильный результат – индивидуальная эргодическая теорема [10]. Биркгоф показал, что равенство временных и фазовых средних функции f

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T f(P_t) dt = \int_{\Omega} f d\mu \quad (2)$$

имеет место тогда и только тогда, когда фазовое пространство метрически транзитивно. В частности, среднее время пребывания на множестве A равно $\mu(A)/\mu(\Omega)$.

Эргодические теоремы дают возможность рассматривать предельные временные средние или временные средние по бесконечному промежутку времени, то есть свидетельствуют о наличии некоторой регулярности поведения динамических систем. Но эта регулярность связана с усреднением и носит статистический характер.

Доказательство теоремы Биркгофа далеко не тривиально. Каждое упрощение доказательства представляет непростую задачу. А.Я. Хинчин, устранив из теоремы Биркгофа лишние предположения, придал ей окончательную форму, которая сейчас и используется [13]. Затем А.Н. Колмогров привел еще более простое доказательство этой теоремы [14].

К эргодическим теоремам примыкают важные результаты Николая Митрофановича Крылова и Николая Николаевича Боголюбова об инвариантной мере. Кроме того, они заложили основы совершенно новой области математической физики – нелинейной механики [15, 16]. Крылов и Боголюбов развили математически строгие аналитические методы для исследования колебательных процессов с широким диапазоном приложений. В основе этих результатов лежат различные варианты теории возмущений, распространенные на неконсервативные системы. Крылов и Боголюбов дали строгое обоснование результатов исследований нелинейных колебаний Б. ван дер Поля. Созданию новых методов предшествовал глубокий анализ метода малого параметра Пуанкаре. Основной недостаток этого метода состоит в появлении секулярных членов в разложении, которые неограниченно растут во времени. Методы Крылова и Боголюбова приводят к асимптотическим разложениям решений, не содержащих секулярных членов. Асимптотические разложения Крылова–Боголюбова имеют глубокую связь с методом усреднения в небесной механике. В 1945 году вышла фундаментальная монография Боголюбова «О некоторых статистических методах в математической физике» [17], в которой центральное место отведено проблеме математического обоснования методов нелинейной механики. Главный момент заключается в установлении соответствия между решениями точных и усредненных уравнений.

Самый известный результат Крылова и Боголюбова по теории динамических систем – это работа о существовании инвариантной меры – теорема Крылова–Боголюбова [18].

В компактном фазовом пространстве динамической системы существует инвариантная (нормированная) мера.

Работа [18] сразу приобрела широкую известность вследствие как ее глубокого содержания, так и внешних обстоятельств, что способствовало ознакомлению с ней широкого круга математиков у нас и за рубежом. Работа докладывалась на Международной топологической конференции в Москве в 1935 году, ее полная публикация была осуществлена одновременно на Украине и за рубежом [15].

Ранее в эргодической теории исходили из того, что динамическая система имеет инвариантную меру, это могло или проверяться для конкретной системы, или постулироваться. Крылов и Боголюбов внесли в эргодическую теорию существенно новый элемент, доказав существование инвариантных мер для широкого класса топологических динамических систем, а также рассмотрев совокупность всех инвариантных мер, которые имеет данная динамическая система.

Несмотря на успехи эргодической теории, решить проблему обоснования статистической механики с ее помощью не удалось. Сама идея метрической транзитивности интуитивно весьма ясна, но попытка строгого доказательства ее наличия в физических системах наталкивается на огромные математические трудности. В своем дальнейшем развитии эргодическая теория совершенно отошла от статистической механики. С одной стороны, системы статистической механики содержат огромное число частиц, что и является для таких систем определяющим. С другой стороны, имеются системы с небольшим числом степеней свободы, которые проявляют статистические свойства, и встает вопрос, при каких условиях они эргодичны. Это один из путей, который привел к исследованиям хаоса. Как и для статистической теории динамических систем, главной задачей эргодической теории стала классификация различных типов потоков в фазовом пространстве и изучение их свойств. При таком подходе эргодическая теория естественным образом вошла в математическую основу теории хаоса.

Помимо эргодического движения имеется более сложный вид движения – *перемешивание*. Понятие перемешивания было введено Дж. Гиббсом (1902) при анализе основ статистической механики [19]. Гиббс ввел это понятие на примере смешивания чернил с водой. При перемешивании «капля фазовой жидкости» сложным образом растекается по фазовому пространству (рис. 2).

Математическую формулировку понятия перемешивания дал Эберхард Хопф (1937) в своей книге «Ergodentheorie» [12] – первом систематическом изложении исследований по эргодической теории, написанной очень живо и интересно. Большая часть книги была создана еще в США, когда Хопф работал в Массачусетском технологическом институте. Книга Хопфа сыграла значительную роль в ознакомлении с идеями эргодической теории широкого круга математиков. В 1949 году книга была переведена на русский язык.

Рассмотрим две области фазового пространства A и B , имеющих меры $\mu(A)$ и $\mu(B)$. При движении фазового потока через время t область A преобразуется в

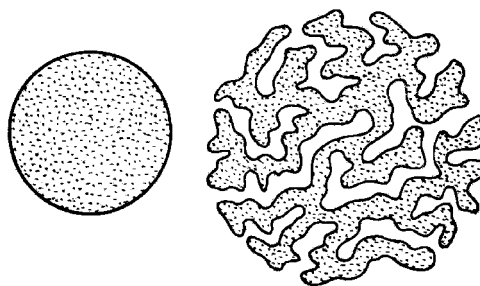


Рис. 2. Расплывание «капли» в фазовом пространстве при перемешивании [20]

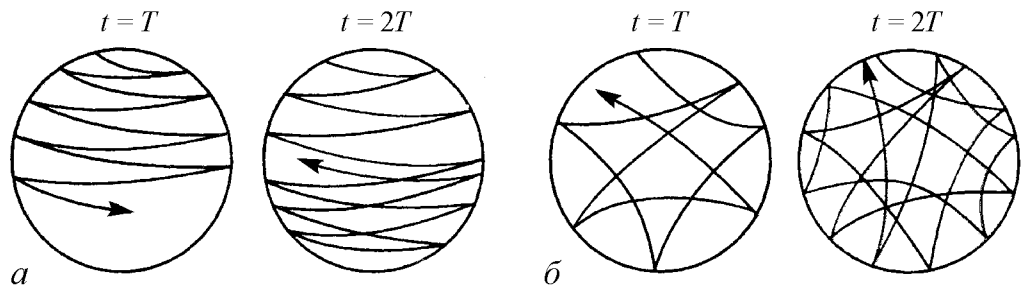


Рис. 3. Различие между эргодическим (а) и перемешивающим (б) движениями [20]

область A_t . По определению, фазовый поток обладает перемешиванием, если

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mu(A_t \cap B) = \mu(A) \mu(B). \quad (3)$$

С формальной стороны при перемешивании происходит расщепление временных корреляций. Представление о различии между эргодичностью и перемешиванием дает рис. 3.

При эргодическом движении траектория последовательно заполняет фазовое пространство. Характер движения при перемешивании совершенно иной. Сначала за некоторое время T система покрывает сеткой траекторий все фазовое пространство. Затем через время $2T$ это явление примерно повторяется, причем размеры ячеек сетки оказываются приблизительно в два раза меньше, и т.д. [20]. Свойство перемешивания оказывается более сильным, чем эргодичность. Из наличия перемешивания следует эргодичность, тогда как обратное неверно.

2. Работы Н.С. Крылова по обоснованию статистической механики

Системы с перемешиванием легли в основу пионерских работ по обоснованию статистической механики Николая Сергеевича Крылова [21], очень талантливого и рано умершего ученика В.А. Фока. После окончания в 1939 году Ленинградского университета он поступил в аспирантуру к Фоку. Еще в студенческие годы Крылов глубоко заинтересовался основами статистической физики и этим он занимался до конца жизни. Вопросам обоснования статистической физики были посвящены его кандидатская диссертация (июль 1941 года), а затем докторская диссертация, защищенная летом 1942 года в эвакуации в Казани. В 1946 году Крылов приступил к работе над большой монографией, но успел написать лишь первые главы. Его работы остались незавершенными, и через несколько лет после смерти автора были изданы по инициативе В.А. Фока и А.Б. Мигдала [21]. Г.М. Заславский отмечает, что работы Крылова поражают глубиной и тонкостью анализа предмета. Книга Крылова [21] оказала огромное влияние на советских физиков и математиков, занимающихся вопросами перехода от динамического описания систем к статистическому, и сейчас трудно представить себе проведение серьезных исследований в этой области без знакомства с трудами Крылова [20, с. 41]. Крылову посвятил свою диссертацию Б.В. Чириков [22]. Анализ трудов Крылова в контексте обоснования статистической физики дан в ряде историко-научных работ [3, 4, 23]. Следуя его работам, а также послесловию Я.Г. Синая [24] к английскому изданию книги Крылова [25], обратимся

к некоторым идеям Крылова, имеющим непосредственное отношение к исследованиям хаоса.

Крылов поставил задачу обоснования статистической механики во всей ее полноте и сложности. Здесь он выделяет три группы вопросов: введение центрального понятия статистической физики – релаксации, и определение времени релаксации; выявление механических характеристик тех систем, к которым применимы методы статистической механики; введение непротиворечивым образом в механику вероятностных представлений. Крылов предполагал, что представления о системах с перемешиванием дадут возможность связать все эти вопросы. В результате анализа Крылов приходит к радикальному заключению, что статистическая физика не может быть основана лишь на динамике – классической или квантовой.

Итак, во главу угла кладется понятие перемешивания, посредством которого можно описать физический процесс релаксации – переход системы в стационарное состояние, независимо от того, в каком состоянии находилась система. Начиная с Гиббса, неоднократно выдвигалась идея о необходимости перемешивания в системах статистической механики, но, наверное, к Крылову восходит идея о связи перемешивания с локальной характеристикой движения в таких системах – экспоненциальной неустойчивостью. Видимо, Крылов первым среди физиков оценил работы Ж. Адамара [26], Г. Хедлунда [27] и Э. Хопфа [28] по динамическим системам с экспоненциальной неустойчивостью и их значение для понимания процессов перемешивания. В небольшом предисловии от редакции журнала УМН, где опубликован перевод «Эргодической теории» Хопфа [12], указывается, что пятая глава при переводе опущена. В этой главе содержится доказательство очень важной теоремы о том, что потоки геодезических линий на поверхности отрицательной кривизны и конечной площади метрически транзитивны. Этот вопрос был значительно расширен и углублен в работе Хопфа «Статистика геодезических линий на многообразиях отрицательной кривизны» [28], которая существенным образом дополнила книгу Хопфа. Перевод этой работы Хопфа был опубликован в следующем номере УМН.

В связи с проблемой обоснования статистической механики Крылов первым стал изучать реальную физическую систему, в которой возможно перемешивание. В качестве такой системы Крылов рассмотрел столкновение двух упругих шаров. Он изучил движение луча (материальной точки), распространяющегося по законам геометрической оптики со скоростью, равной единице. Луч рассеивается на кругах с радиусом, равным удвоенному радиусу шаров. Обратимся к рисунку из книги Крылова [21, с. 174].

Для рассеяния лучей в двумерном случае имеем

$$\begin{aligned} x_1 + \rho_1 \cos \varphi_1 &= r_0 \cos \theta, \\ y_1 + \rho_1 \sin \varphi_1 &= r_0 \sin \theta, \\ \varphi_1 + \varphi_2 - \pi &= 2\theta. \end{aligned} \quad (4)$$

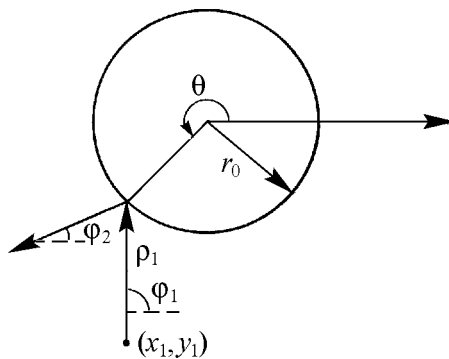


Рис. 4. Рассеяние луча на сфере [21]

Здесь x_1 и y_1 – декартовы координаты начального положения точки; ρ_1 – расстояние этой точки до точки отражения луча от окружности; θ – угол, определяющий положение последней точки относительно центра окружности; r_0 – радиус окружности; φ_1 и φ_2 – углы, определяющие начальное и конечное направление скорости.

Характер растяжения траекторий можно определить с помощью величины $\partial\varphi_2/\partial\varphi_1$, выражающей изменение телесного угла, образуемого пучком лучей, при каждом отражении. Крылов получил для этой величины выражение

$$\frac{\partial\varphi_2}{\partial\varphi_1} = \frac{\rho_1}{r_0} \frac{2}{\cos(\theta - \varphi_1)} - 1. \quad (5)$$

Поскольку число столкновений пропорционально времени, то, принимая угол, образуемый двумя исходящими из одной точки конфигурационного пространства траекториями, за меру отклонения, Крылов показал, что это отклонение возрастает со временем по экспоненциальному закону

$$\varphi_t = \varphi_0 \left(\frac{\lambda}{r_0} \right)^{t/\tau}, \quad (6)$$

где λ – средняя длина свободного пробега, τ – время свободного пробега.

Крылов показал, что в процессе эволюции динамической системы узкий пучок начальных траекторий расплывается, пока в каждом направлении его размер не станет порядка 1. Для малых φ_0 время расплывания пропорционально $|\ln \varphi_0|$, а коэффициент пропорциональности представляет собой энтропию Колмогорова–Синая.

Работы Крылова оказали сильное влияние на исследования хаоса в СССР. В 1977 году работы Крылова были изданы в Принстоне [25] и получили признание на Западе.

3. Гиперболические бильярды. Работы Я.Г. Синая. Хаос

Еще к Л.Больцману восходит модель движения молекул газа как движение и соударение упругих шаров [29]. После многих столкновений происходит «забывание» начальных условий, движение хаотизируется. В результате происходит выравнивание давления, устанавливаются определенные плотность и температура. Все эти характеристики являются усредненными, используется статистическое описание. Такие характеристики стали предметом математических исследований, и ими занимается эргодическая теория. Физические понятия, такие как температура, перемешивание, время релаксации и т.д., получают точное определение. Для постановки и решения математических задач, связанных с этими понятиями, необходимы соответствующие математические модели. Одна из самых широко используемых моделей для описания столкновений частиц сводится к бильярду – равномерному движению *одной* частицы и ее отражению по законам упругого удара от различных поверхностей. Надо сказать, что бильярды уже до этого привлекали внимание ученых. Французский механик Гаспар Кориолис одно время внимательно наблюдал за виртуозной игрой знаменитого бильярдиста Франсуа Менго. Свои наблюдения Кориолис изложил на языке уравнений. В результате появилась весьма любопытная книга «Математическая теория явлений бильярдной игры», изданная в Париже в 1835 году и впоследствии переведенная на русский язык [30]. В ней обоснованы удары с точки зрения механики и даже даются практические советы игрокам. Отметим, что теория

бильярдов с учетом трения исключительно сложна. К бильярдам сводятся очень многие задачи физики: в кинетической теории газов, оптике, механике жидкости, акустике и др.

Дадим точное определение [31]. Пусть Q – ограниченная область с кусочно-гладкой границей на евклидовой плоскости \mathbb{R}^2 или на стандартном торе T^2 . *Бильярдом* называется динамическая система, порожденная движением точечной частицы с постоянной единичной скоростью внутри Q и упругими отражениями от границы ∂Q . Как обычно, при упругих отражениях угол падения равен углу отражения, то есть сохраняется тангенциальная составляющая скорости, а нормальная меняет знак. Свойства бильярдов зависят от свойств его границы. В зависимости от вида границы ∂Q имеется несколько классов бильярдов с существенно различными эргодическими свойствами. Наиболее понята эргодическая теория рассеивающих бильярдов. Под эргодическими свойствами понимают эргодичность, перемешивание, К-свойство, бернуллиевское свойство (изоморфность потокам Бернулли). Бильярды, у которых граница состоит из конечного числа C^3 -гладких, строго вогнутых внутрь области Q компонентов, называются *рассеивающими* или *гиперболическими*. В таких бильярдах имеет место гиперболический характер движения. Для них отличны от нуля показатели Ляпунова почти всюду в фазовом пространстве. Для наших целей именно рассеивающие бильярды представляют наибольший интерес.

В рассмотрении Крылова траектории лучей представляют собой геодезические линии в соответствующем римановом пространстве. Крылов опирается на результаты Хопфа [12, 28], согласно которым геодезический поток в пространствах отрицательной кривизны является потоком перемешивающего типа. В работах Хопфа [28] и Хедлунда [27] было показано, что геодезические линии на компактных поверхностях отрицательной кривизны обладают свойством неустойчивости движения. Крылов отметил аналогию между расходимостью с экспоненциальной скоростью геодезических линий, выходящих из одной точки, и экспоненциальной неустойчивостью движения шаров с упругими столкновениями. По словам Я.Г. Синая и Н.И. Чернова, – «рассуждения Н.С. Крылова нельзя воспринимать как строгие математические доказательства, однако основная идея была выказана им вполне четко: динамические системы с упругими столкновениями должны быть эргодическими в силу той же экспоненциальной неустойчивости, что и геодезических потоков в пространствах отрицательной кривизны... Ранее, до появления энтропийной теории динамических систем и теории систем с гиперболическими свойствами неустойчивости, к подобным задачам вообще не было подходов» [32, с. 156].

Исследования Крылова о перемешивании при столкновении упругих шаров были продолжены Синаем. Яков Григорьевич Синай (родился в 1935 году) – один из самых ярких представителей школы Колмогорова. После окончания МГУ в 1957 году он поступил в аспирантуру к Колмогорову. Ставшая знаменитой статья Синая «О понятии энтропии динамической системы» [33], выполненная в аспирантуре, является его второй публикацией. Главная тема исследований Синая, относящихся к классическим динамическим системам – изучение их хаотических свойств, которые обычно скрыты и неожиданны. Работы Синая в значительной степени способствовали пониманию явлений динамического хаоса. Синай «принадлежит к числу тех немногих математиков, чьи идеи и результаты не только в значительной мере определили современное состояние тех или иных разделов математики, но и существенным образом повлияли на научное мировоззрение физиков» [34, с. 183].

Биллиардные задачи находились еще в поле зрения Колмогорова. В своих записях, сделанных 22 сентября 1958 года. Колмогоров выделил темы исследований, которые он предполагал распределить между своими учениками и продолжателями [35, с. 122]. Под номером 4 у него стоит «Устойчивость перемешивания на многообразиях отрицательной кривизны. Мешалкин, Синай – ?» и следующим пунктом: «Задача о бильярде. Студенты под руководством Мешалкина?»

Подход Крылова мог быть удовлетворительным на физическом уровне строгости, но он не был убедителен с точки зрения математики [36]. В своем обзоре 1963 года «Малые знаменатели и проблемы устойчивости движения в классической и небесной механике» [37] В.И. Арнольд отвел один параграф вопросу перемешивания. Там он проводит наглядную аналогию между бильярдами и геодезическими потоками в пространствах отрицательной кривизны, что явилось главным пунктом в рассмотрении Синая [31]. Доказательство эргодичности системы твердых шаров с упругими отражениями было анонсировано Синаем в работе 1963 года [36]. Доказательство должно было быть основано на некоторых свойствах абсолютной непрерывности трансверсальных слоев. Впервые трансверсальные слои для исследования статистических свойств геодезических потоков на многообразиях отрицательной кривизны были использованы Хопфом в его фундаментальной работе [28]. Важные результаты были получены Синаем в работе «Классические динамические системы со счетнократным лебеговским спектром» [38].

Возможность строгого подхода к бильярдным задачам появилась после работы Колмогорова [39], где он ввел в эргодическую теорию понятия энтропии динамических систем и K -системы. В работе Синая [33] было предложено несколько другое определение энтропии, оказавшееся наиболее удобным. Оно и стало общепотребительным и получило название *энтропия Колмогорова–Синая (КС-энтропия)*. (Об истории энтропии Колмогорова–Синая и K -систем см. [40].) Не останавливаясь на формальных определениях, укажем, что энтропия служит мерой экспоненциальной скорости сближения или разбегания траекторий динамической системы. Понятие K -системы было введено Колмогоровым для характеристики ослабления статистических связей в случайном процессе на отдаленных друг от друга промежутках времени, удовлетворяющих так называемому закону нуля–единица. Этот закон утверждает, что всякое событие, для предсказания которого используется информация о поведении процесса в сколь угодно далеком прошлом, имеет вероятность 0 или 1. С этой точки зрения K -системы соответствуют случайным процессам с самыми слабыми свойствами регулярности [41]. Понятие K -системы в решении задачи было определяющим. Синай отмечает, что в целом ряде задач можно установить, что динамическая система является K -системой, и из этого получить в качестве следствий свойства эргодичности и перемешивания. Совершенно не случайно, что именно Синай, который является соавтором Колмогорова в энтропийной теории, обратился к задаче о бильярде. Задача оказалась исключительно сложной.

Изучение статистических свойств гиперболических систем, впервые установленных для геодезических потоков на многообразиях отрицательной кривизны, привели к гиперболической теории. Однако бильярдные системы обладают рядом особенностей по сравнению с такими объектами, как системы Аносова или A -системы Смейла. Одно из отличий состоит в том, что бильярдное отображение разрывно вследствие отражений и попадания траекторий в точки излома границы ∂Q .

От появления статьи Синай [36] до его основополагающей работы «Динамические системы с упругими отражениями» [31], в которой была решена задача, прошло несколько лет. Как вспоминает Синай, – «Анонс был в 1963 г., но потом я понял, что обычные методы доказательства эргодичности не работают, т.к. инвариантные слои могут быть произвольно малого размера. Потребовалось много времени, чтобы преодолеть эту трудность. Статья в УМН ([31]. – *Р.М.*) содержит первое доказательство так называемой основной теоремы из теории рассеивающих бильярдов. Затем появилось другое доказательство в нашей работе с Бунимовичем ([42]. – *Р.М.*), которое нравится даже больше» [43].

Приведем некоторые полученные результаты, следуя работам [31, 42]. Бильярды задаются векторными полями на многообразиях с краем, причем векторные поля на крае трансверсальны к нему. Обозначим через $\{S_t\}$ однопараметрическую группу сдвигов траекторий бильярда. Она сохраняет меру μ и S_t есть поток в смысле эргодической теории. Пусть M – совокупность единичных векторов, носители которых принадлежат области Q . Для точки $x \in M$ и некоторой ее окрестности U локально сжимающимся трансверсальным слоем точки x в U называется кривая в U , состоящая из таких точек $y \in U$, что расстояние $d(S_t x, S_t y) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$. Устремив $t \rightarrow -\infty$, получим определение локально расширяющегося трансверсального слоя.

Если $d\sigma$ – элемент объема в окрестности точки x , то $T^{-1}d\sigma = d\sigma'$ есть элемент объема в окрестности точки $T^{-1}x = x'$. Тогда имеет место соотношение

$$d\sigma' = \Delta(x)d\sigma. \quad (7)$$

Коэффициент $\Delta(x)$ является коэффициентом растяжения в точке x . Для расширяющегося трансверсального поля $\Delta(x) > 1$, для сжимающегося – $\Delta(x) < 1$. Синай показал, что энтропия динамической системы

$$h(T) = \int \ln \Delta(x) d\mu, \quad (8)$$

то есть представляет средний коэффициент экспоненциального разбегания траекторий [38]. В выражении (7) энтропия выступает как характеристика неустойчивости.

Трансверсальные слои играют решающую роль в изучении систем Аносова. Однако, в отличие от систем Аносова, в бильярдных задачах они определены не всюду, а почти всюду, и каждый слой имеет особенности типа точек излома. Эти особенности разбивают весь слой на отдельные регулярные компоненты, каждый из которых является хорошим многообразием. Синай провел весьма тонкий анализ по вкладу малых регулярных компонентов слоев и показал, что они встречаются достаточно редко. Для этого он доказал *основную теорему рассеивающих бильярдов*. Не будем давать длинную формулировку теоремы, приведем лишь главное утверждение.

Пусть траектория точки x_0 бильярда такова, что ни разу не попадает в особые точки края. Тогда для всякого α ($0 < \alpha \leq 1$) и любого числа C ($0 < C < \infty$) найдется такое $\varepsilon = \varepsilon(x_0, \alpha, C)$, что в ε -окрестности U_ε точки x_0 каждому сжимающемуся трансверсальному слою размера l будет соответствовать расширяющийся трансверсальный слой размера $C l$. Величина C может быть сколь угодно большой при уменьшении U_ε .

С помощью основной теоремы уже довольно просто исследуются эргодические свойства билиардов. Синай показал, что рассеивающий билиард является К-системой и даже системой Бернулли. Следовательно, такой билиард обладает свойством эргодичности и перемешивания, имеет место экспоненциальная неустойчивость траекторий. Движение билиардного шара с течением времени приобретает хаотический характер. Указанные свойства присутствуют уже при $N \geq 2$. Тем самым совершенно строго было опровергнуто убеждение в наличии хаотической динамики у систем механического происхождения лишь при большом числе степеней свободы.

Билиард Синая – одно из главных событий в истории хаоса, эти работы имели значительный резонанс в научном мире. Билиардные модели породили новые надежды для подхода к старой фундаментальной проблеме – возникновению статистических законов из законов динамики. Дж. Лейбовиц, О. Пенроуз, Дж. Форд стали усиленно пропагандировать результаты исследований по билиардным системам, получившие широкую известность среди физиков и биологов [44]. Билиарды представляют собой очень удобную модель для изучения эргодичности и перемешивания в гамильтоновых системах. Кроме того, исследования билиардных задач актуальны и для самой математики, и для теоретической физики. Проблемы, возникающие в теории билиардов, близки к переднему краю современной науки.

В заключение приношу благодарность Я.Г. Синаю, сообщившему интересную информацию, и А.Ю. Лоскутову, внимательно прочитавшему работу и сделавшему ряд полезных замечаний.

Библиографический список

1. *Boltzmann L.* Über der Warmegleichgewicht zwischen meharatomigen Gasmolekullen // Sitzber. Akad. Wiss. Wien. 1871. B. 63. S. 397.
2. *Lo Bello A.* On the Origin and History of Ergodic Theory // Bolletino di Storia delle Scienze Mathematiche. 1983. A. iii, № 1. P. 37.
3. *Вдовиченко Н.В.* Развитие фундаментальных принципов статистической физики в первой половине XX века. М.: Наука, 1986.
4. *Кузнецова О.В.* История обоснования статистической механики. М.: Наука, 1988.
5. *Plancherel M.* Beweis der Unmöglichkeit ergodischer mechanischer Systeme // Ann. Phys. 1913. B. 42. S. 1061.
6. *Rosental A.* Beweis der Unmöglichkeit ergodischer Gassysteme // Ann. Phys. 1913. B. 42. S. 796.
7. *Erenfest P., Erenfest T.* Begriffliche Grundlagen statistischen Auffassung in der Mechanik // Enzyklopedie der mathematischen Wissenschaften. 1911. B. 4. S. 32.
8. *Немыцкий В.В., Степанов В.В.* Качественная теория дифференциальных уравнений. М.-Л.: ГИТТЛ, 1947. То же, 2-е изд.: 1949.
9. *Zaslavsky G.M.* Hamiltonian chaos and fractional dynamics. Oxford: Oxford Univ. Press, 2004.
10. *Birkhoff G.D.* Proof of recurrence theorem for strongly transitive systems and proof of the ergodic theorem // Proc. Nat. Acad. Sci. Amer. 1931. Vol. 17. P. 650.
11. *Neumann J. von.* Proof of the quasi-ergodic hypothesis // Proc. Nat. Acad. Sci. Amer. 1932. Vol. 18. P. 70.

12. *Hopf E.* Ergodentheorie. Berlin: Springer-Verl. 1937. То же: Хопф Э. Эргодическая теория // УМН. 1949. Т. 4. Вып. 1. С. 113.
13. *Khinchin A.Ya.* Zu Birkhoff's Lösung des Ergodeproblems // Math. Ann. 1931. В. 107. S. 485.
14. *Колмогоров А.Н.* Упрощенное доказательство эргодической теоремы Биркгофа–Хинчина // УМН. 1938. № 5. С. 52.
15. *Аносов Д.В.* О вкладе Н.Н.Боголюбова в теорию динамических систем // УМН. 1994. Т. 49. Вып. 5. С. 5.
16. *Самойленко А.М.* Н.Н.Боголюбов и нелинейная механика // УМН. 1994. Т. 49. Вып. 5. С. 103.
17. *Боголюбов Н.Н.* О некоторых статистических методах в математической физике. Киев: Изд-во АН УССР, 1945.
18. *Kryloff N., Bogoliouboff N.* La théorie générale de la mesure dans son applications a l'étude des système dynamiques de la mécanique non lineaire // Ann. Math. 1937. Vol. 38. P. 65; Рус. пер. в кн.: Н.Н. Боголюбов. Избр. труды. Т. 1. Киев: Наукова думка, 1969. С. 411.
19. *Гиббс Дж.В.* Основные принципы статистической механики // Дж.В.Гиббс. Термодинамика. Статистическая механика. М.: Наука, 1982. С. 350.
20. *Заславский Г.М.* Стохастичность динамических систем. М.: Наука, 1984.
21. *Крылов Н.С.* Работы по обоснованию статистической физики. М.;Л.: Изд-во АН СССР, 1950.
22. *Чуриков Б.В.* Исследования по теории нелинейного резонанса и стохастичности. - Препринт ИЯФ 267. Новосибирск: ИЯФ СОАН СССР, 1969.
23. *Кузнецова О.В.* Исследования Н.С.Крылова по обоснованию статистической механики // Исслед. по истории физики и механики. М.: Наука, 1987. С. 80.
24. *Sinai Y.G.* Development of Krylov's ideas // N.S.Krylov. Works on foundation of the statistical physics. Princeton: Princeton Univ. Press, 1980. P. 239.
25. *Krylov N.S.* Works on the foundations of statistical physics. - Princeton, NJ: Princeton Univ. Press, 1977.
26. *Hadamard J.* Les surfaces à courbures opposeés et leurs lignes géodésiques // J. Math. pures et appl. 1898. Vol. 4. P. 27.
27. *Hedlund G.A.* The dynamic of geodesic flows // Bull. AMS. 1939. Vol. 45. P. 241.
28. *Hopf E.* Statistik der geodatischen Linien in Mannigfaltigkeiten negativer Krümmung // Ber. Verh. Sachs. Akad. Wiss. Leipzig. 1939. В. 91. S. 261.; Рус. пер.: Э. Хопф. Эргодическая теория // УМН. 1949. Т. 4. Вып. 2. С. 129.
29. *Больцман Л.* Лекции по теории газов. М.: ГИТТЛ, 1953.
30. *Кориолис Г.* Математическая теория явлений бильярдной игры. М.: Гостехиздат, 1956.
31. *Синай Я.Г.* Динамические системы с упругими отражениями // УМН. 1970. Т. 25. Вып. 4. С. 141.
32. *Синай Я.Г., Чернов Н.И.* Эргодические свойства некоторых систем двумерных дисков и трехмерных шаров // УМН. 1987. Т. 42. В. 3. С. 153.
33. *Синай Я.Г.* О понятии энтропии динамической системы // ДАН СССР. 1959. Т. 124. № 4. С. 768.

34. *Новиков С.П. и др.* Яков Григорьевич Синай (к 60-летию со дня рождения) // УМН. 1996. Т. 51. Вып. 4. С.179.
35. Колмогоров. Истина – благо. Под. ред. А.Н. Ширяева. М.: Физматлит, 2003.
36. *Синай Я.Г.* К обоснованию эргодической гипотезы для одной динамической системы статистической механики // ДАН СССР. 1963. Т. 153. № 6. С. 1261.
37. *Арнольд В.И.* Малые знаменатели и проблемы устойчивости движения в классической и небесной механике // УМН. 1963. Т. 18. Вып. 6. С. 91.
38. *Синай Я.Г.* Классические динамические системы со счетнократным лебеговским спектром. II // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1966. Т. 30. № 1. С. 15.
39. *Колмогоров А.Н.* Новый метрический инвариант транзитивных динамических систем и автоморфизмов пространств Лебега // ДАН СССР. 1958. Т. 119. № 5. С. 861.
40. *Мухин Р.Р.* Развитие Колмогоровым энтропийного направления эргодической теории // Истор.-матем. исслед. 2003. II серия. Вып. 8(43). С. 18.
41. *Синай Я.Г.* Эргодическая теория // А.Н.Колмогоров. Теория информации и теория алгоритмов. М.: Наука, 1987. С. 275.
42. *Бунимович Л.А., Синай Я.Г.* Об основной теореме рассеивающих бильярдов // Матем. сб. 1973. Т. 90. № 3. С. 415.
43. *Синай Я.Г.* Письменное сообщение от 26.03.2007.
44. *Diner S.* Les voies du chaos déterministe dans l'école russe // Chaos et déterminism. / Sous la direction de la A.Dahan Dalmedico, J.-L.Chabert, K.Chemla. Edition du Seuil, 1992. P. 331.

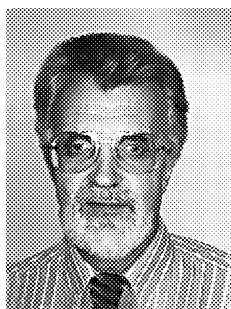
Старооскольский технологический институт, Белгородская область

Поступила в редакцию 2.04.2008

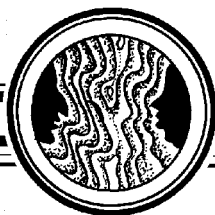
FROM THE HISTORY OF HAMILTONIAN CHAOS: BILLIARDS

R.R. Mukhin

Problems of history of the Hamiltonian chaos discovery are considered. The example of Hamiltonian systems are free-moving particles with elastic collisions called mathematical billiards. The contribution from Russian scientists to chaos discovery in conservative systems (billiards are particular case of such systems) is especially large. Demonstration of billiard's chaotic behaviour is one of the milestones in chaos history.



Мухин Равиль Рафкатович – родился в Челябинской области (1947), окончил Московский инженерно-физический институт (1976). После защиты кандидатской диссертации (1991, Институт органического синтеза и углехимии АН Казахстана) работал в Карагандинском государственном университете. В настоящее время работает в Старооскольском технологическом институте (Старый Оскол Белгородской области). Сейчас область научных интересов – история физики, в особенности история нелинейной динамики. Имеет несколько десятков публикаций.

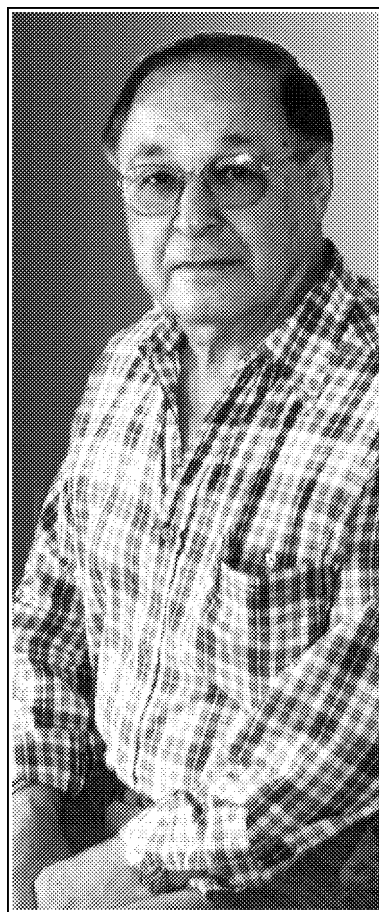


Изв. вузов «ПНД», т. 16, № 6, 2008

**ПАМЯТИ ГЕОРГИЯ
МОИСЕВИЧА ЗАСЛАВСКОГО**

1935 – 2008

Умер Георгий Моисеевич Заславский – известный советский и российский физик, один из создателей теории динамического хаоса в гамильтоновых системах. Достаточно указать широко известные книги: Заславский Г.М. Статистическая необратимость в нелинейных системах. М.: Наука, 1970; Заславский Г.М. Стохастичность динамических систем. М.: Наука, 1984; Заславский Г.М., Сагдеев Р.З. Введение в нелинейную физику: От маятника до турбулентности и хаоса. М.: Наука, 1988; Заславский Г.М., Сагдеев Р.З., Усиков Д.А., Черников А.А. Слабый хаос и квазирегулярные структуры. М.: Наука, 1991; Заславский Г.М. Физика хаоса в гамильтоновых системах. Пер. с англ. Ижевск, Москва: Институт компьютерных исследований, 2004.



Краткая биография Г.М. Заславского приведена в статье Р.Р. Мухина «Из истории гамильтонова хаоса: исследования стохастичности нелинейных систем в трудах Новосибирской школы» (Изв. вузов. ПНД, № 5, 2008).

Редакционная коллегия журнала предполагает опубликовать в первом номере 2009 года лекцию Георгия Моисеевича Заславского «Стохастические волновые процессы», существующую только в виде препринта. Лекция была прочитана на Горьковской Республиканской школе по нелинейным колебаниям и волнам в распределенных системах в марте 1972 года.



Изв. вузов «ПНД», т. 16, № 6, 2008

СЛОЖНОСТЬ И САМООРГАНИЗАЦИЯ. БУДУЩЕЕ МИРА И РОССИИ

Научно-практическая конференция

*Посвящается 80-летию юбилею со дня рождения
Сергея Павловича Курдюмова (1928–2004)*

Москва – Дубна, 27–29 ноября 2008

Организаторы

- Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН
- Институт философии РАН Институт экономических стратегий РАН
- Российский новый университет Московский инженерно-физический институт (Государственный университет)
- Международный Университет природы, общества и человека «Дубна»
- Международный научно-исследовательский институт проблем управления
- Ассоциация негосударственных высших учебных заведений России
- Центр «Стратегий динамического развития»

Организационный комитет: *Капица С.П.*, профессор, член Европейской академии наук (председатель); *Агеев А.И.*, генеральный директор Института экономических стратегий РАН (сопредседатель); *Зернов В.А.*, председатель Совета АНВУЗ России, ректор РосНОУ (сопредседатель); *Курдюмов В.С.*, директор Центра «Стратегии динамического развития» (сопредседатель); *Малинецкий Г.Г.*, зам. директора ИПМ РАН им. М.В. Келдыша (сопредседатель); *Стёпин В.С.*, академик РАН, руководитель секции философии, психологии и права Отделения общественных наук РАН (сопредседатель); *Стриханов М.Н.*, ректор МИФИ (сопредседатель); *Черемисина Е.Н.*, проректор Международного Университета природы, общества и человека «Дубна» (сопредседатель); *Аршинов В.И.*, зав. сектором Института философии РАН; *Буданов В.Г.*, ведущий научный сотрудник философии РАН; *Капустин В.С.*, директор АН ВУЗ России; *Лепский В.Е.*, г.н.с. Института философии РАН; *Минаев В.А.*, проректор РосНОУ по учебной работе; *Палкин Е.А.*, проректор РосНОУ по инновационно-образовательной и научной работе; *Подлазов А.В.*, с.н.с. Института прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН; *Романов В.Л.*, руководитель центра инноватики социального управления Российской академии государственной службы при Президенте РФ; *Черешнев В.А.*, председатель Комитета ГД по науке и наукоемким технологиям, академик РАН, РАМН; *Чернавский Д.С.*, г.н.с. Физического института им. П.Н. Лебедева РАН

Адреса оргкомитета: vskurdyumov@yandex.ru; kapustinanvuz@rosnou.ru

ПРОГРАММА НАУЧНО-ПРАКТИЧЕСКОЙ КОНФЕРЕНЦИИ

27 ноября 2008

(РосНОУ, Москва, ул. Радио, д. 22, актовый зал)

Регистрация участников

Открытие конференции. С.П. Капица

I Блок «Проблемы сложности и мир XXI века» (Руководители С.П. Капица, Г.Г. Малинецкий)

Доклады

Малинецкий Г.Г. (д. ф.-м.н., зам. директора ИПМ РАН им. М.В. Келдыша) С.П. Курдюмов и исследование сложных систем

Черешнев В.А. (председатель Комитета ГД по науке и наукоемким технологиям, академик РАН, РАМН, д.мед.н., проф. (по согласованию)) Актуальные проблемы развития научного знания и современные векторы развития науки XXI века

Лепский В.Е. (д.пс.н., г.н.с. Института философии РАН) Субъект, рефлексия, совесть в российском контексте

Обсуждение по тематике I блока

II Блок «Стратегии инновационного развития в контексте парадигмы сложности» (Руководители С.Ю. Глазьев, А.И. Агеев)

Глазьев С.Ю. (академик РАН) «Экономический, кризис и стратегии России»

Агеев А.И. (генеральный директор Института экономических стратегий РАН) Экономические стратегии России в новой реальности

Сулакшин С.С. (д.ф.-м.н., д.полит.н., генеральный директор Центра проблемного анализа и государственно-управленческого проектирования) Национальный интеллект и развитие. Возможности конструирования будущего

Обсуждение по тематике II блока

III Блок «Философия, синергетика и теория сложности» (Руководители В.И. Аршинов, В.Г. Буданов)

Стётин В.С. (академик РАН, руководитель секции философии, психологии и права Отделения общественных наук РАН) Постнеклассическая наука и проблемы России

Чернавский Д.С. (г.н.с. Физического института им. П.Н. Лебедева РАН) Синергетика, информация, человекомерные системы

Буданов В.Г. (д.ф.н., в.н.с. Института философии РАН) Методология синергетики и актуальные проблемы России

Князева Е.Н. (д.ф.н., в.н.с. Института философии РАН, зав. сектором) Идеи коэволюции в теории сложности

Аршинов В.И. (д.ф.н., зав. сектором Института философии РАН) Синергетика, сложность и проблемы коммуникации

Круглый стол

28 ноября 2008

(РосНОУ, г. Москва, ул. Радио, д. 22, актовый зал)

**IV Блок «Научно-образовательная сфера –
междисциплинарность и сложность»
(Руководители В.А. Зернов, М.Н. Стриханов)**

Зернов В.А. (д.т.н., проф., председатель Совета АНВУЗ России, ректор РосНОУ) Проблемы сложности и тренды образования XXI века

Трубецков Д.И. (чл.-корр. РАН, заслуженный деятель науки, лауреат премии Президента РФ) Модель межрегионального института интегративных технологий. Нелинейная динамика информационных технологий, окружающей среды и общества

Стриханов М.Н. (д.ф.-м.н., проф., ректор МИФИ) Экономика знаний в системе высшего профессионального образования России

Обсуждение по тематике IV блока

**V Блок «Прогнозы будущего»
(Руководители – В.А. Минаев, В.Е. Лепский)**

Кургинян С.Е. (президент Международного фонда Корпорация «Экспериментальный творческий центр») Проект российского развития. Время выбора

Летуновский В.В. (начальник управления погранслужбы ФСБ РФ) Риски национальной безопасности

Кузнецов В.Н. (чл.-корр. РАН) Формирование новой системы международных отношений. Проблемы, риски и стратегии

Обсуждение по тематике V блока

**VI Блок «Проблемы инновационного развития России»
(Руководители Е.Н. Черемисина, В.Л. Романов)**

Малков С.Ю. (д.т.н., профессор, действительный член Академии военных наук) Новые подходы к обеспечению стратегической стабильности

Романов В.Л. (проф., руководитель центра инноватики социального управления Российской академии государственной службы при Президенте РФ) Инноватика в государственном управлении как ресурс развития России

Минаев В.А. (проф., проректор РосНОУ) Моделирование социогеоэкорисков в территориально распределенных системах

Обсуждение по тематике VI блока

Черемисина Е.Н. (д.т.н., проректор) Представление программы Международного Университета природы, общества и человека «Дубна»

Круглый стол: обсуждение итоговых документов (руководители – В.А. Зернов, д.т.н., ректор РосНОУ; Г.Г. Малинецкий, д.ф.-м.н., зам. директора ИПМ РАН им. М.В. Келдыша)

29 ноября 2008

(Международный Университет природы, общества и человека «Дубна», г. Дубна)

Руководитель – профессор Черемисина Е.Н.

Регистрация участников

Кузнецов О.Л. О роли институтов гражданского общества в реализации стратегии устойчивого развития России

Ризниченко Г.Ю. (д.б.н., президент ассоциации «Женщины в науке и образовании»)

С.П. Курдюмов и опыт самоорганизации научно-педагогического сообщества России

Рац А.А. Особые экономические зоны РФ – инновационные площадки развития России в XXI веке

Черемисина Е.Н. Система инновационного образования в Университете «Дубна»

Сахаров Ю.С. Презентация образовательной модели Университета «Дубна»

Багдасарян Н.Г. Социально-гуманитарное образование в Университете «Дубна»: конфликт интерпретаций

Гаджиев Б.Р. Статистическая механика сложных систем

Крюков Ю.А. Информационно-образовательная сеть г. Дубна – инновационный базис непрерывного образования и телекоммуникаций

Кореньков В.В. GRID технологии: современное состояние, перспективы

Сорокин А.В., Бугров А.Н. Презентация Центра IBM по управлению виртуальными организациями

Крейдер О.А., Белев М.Г. Презентация Открытого Университета информационных технологий – основы целевой подготовки кадров

Возвышаева Н.А., Тараканова Н.В. Презентация системы доинновационной составляющей образования XXI века

Белов М.А. Презентация виртуального компьютерного класса

Дискуссия, экскурсия по Университету



ОБРАЗОВАНИЕ В РОССИИ: ВЧЕРА, СЕГОДНЯ, ЗАВТРА*

В.А. Зернов

*доктор технических наук, профессор,
ректор Российского нового университета*

17 лет тому назад группа выпускников известного в мире «Физтеха» – Московского физико-технического института, основателями которого были лауреаты Нобелевской премии П.Л. Капица, Н.Н. Семенов, Л.Д. Ландау, и в котором была своя особая система подготовки специалистов, получившая широкую известность как «система Физтеха», решила взяться за гуманитариев. Так появился негосударственный Российский новый университет (РосНОУ). В буквальном смысле новый, потому как, для современной России это небывалый научно-образовательный тип высшей школы. Точнее, еще находящийся в процессе становления ВУЗ такого типа, который во многих странах мира формировался не один десяток, а то и сотни лет.

Научный руководитель РосНОУ, и это знаменательно, сын прославленного физика, одного из основателей «Физтеха» – Сергей Петрович Капица, известный не только в России самым широким слоям населения, благодаря его многолетней научно-просветительской программе на ТВ «Очевидное-невероятное».

В Университете обучается более 30 тысяч человек (включая студентов 21 филиала), имеется восемь факультетов, технопарк, научные лаборатории и другие научные подразделения (Центр здоровьесберегающих технологий, Научно-методический центр эндоэкологии, Бизнес-инкубатор, Институт систем и технологий безопасности и др.). Читает лекции и работают как исследователи 12 академиков, 400 докторов и кандидатов наук. В их активе несколько весьма серьезных открытий, десятки изобретений, в том числе – в области нанотехнологий.

Автор – ректор Российского нового университета, профессор, доктор технических наук Владимир Алексеевич Зернов, Председатель совета Ассоциации негосударственных высших учебных заведений России делится своими мыслями о современном отечественном образовании, его потенциале, в сравнении с зарубежной высшей школой.

Эту книгу можно посчитать и своеобразным продолжением программы С.П. Капицы, поскольку в ней рассказывается и о «невероятных результатах» гуманитарного вуза, во главе которого стоят «очевидные физтехи».

*Материалы к лекции на Научно-практической конференции «Сложность и самоорганизация. Будущее мира и России», Москва–Дубна, 27–29 ноября 2008.

Содержание

Аннотация

Три открытия и тридцать три изобретения РосНОУ

Мировые тренды и российская действительность

Что необходимо предпринять?

Забыли про образование?

Человеческий капитал под знаком «российского креста»

Приложения

Мировые тренды и российская действительность

На очередном заседании Зальцбургского семинара, проходившем более 10 лет назад, где обсуждались проблемы и вектор будущего развития образования, отмечалось, что российское образование внесло огромный вклад в развитие всей мировой цивилизации. И что выпускники лучших российских вузов приравниваются к магистрам ведущих университетов мира.

Нашими ведущими экспертами, как и иностранными, неоднократно отмечалось, что главное для российской системы образования – не растерять накопленный при социализме потенциал, «встроиться» в уже активно развивающийся мировой рынок образовательных услуг. Пока еще наши вузы имеют явное преимущество в подготовке специалистов, прежде всего в естественнонаучных и технических отраслях. Было почти единодушное мнение, что Россия должна стать одним из основных игроков в мире в области экспорта образования.

Какова ситуация сегодня? По количеству обучающихся иностранных студентов Россия по данным Министерства образования и науки РФ занимает восьмое место в мире (с учетом СНГ). По стоимости обучения этих студентов, по тому, какой доход они дают нашей системе образования (а значит и государству), мы существенно (на порядки!) уступаем не только лидерам, но даже тем странам, которые сравнительно недавно приняли программу увеличения экспорта образовательных услуг. Сегодня они уже успешно теснят лидеров – речь идет прежде всего об Австралии, о странах Юго-Восточной Азии, и об активно развивающихся в последнее время Канаде и Испании. Доход наших вузов от обучения иностранных студентов, по меньшей мере, на порядок ниже, чем доходы университетов Австралии и Испании. Эти более чем скромные показатели – как свидетельство конкурентной слабости нашей профессиональной школы, так и подтверждение того, что многие наши преимущества уже утрачены.

Одна из причин, приведших к этому печальному результату – наша крайняя невнимательность к общемировым тенденциям развития сферы передачи знаний в эпоху глобализации.

Какие основные недостатки действующей системы профессионального образования наиболее сильно сдерживают её развитие, прежде всего, высшего и среднего специального? В чем расхождение с мировыми трендами? Какие основные причины того, что наша страна, занимая 17 лет назад лидирующие позиции на мировом рынке образовательных услуг, сейчас занимает позиции далекие от лидирующих групп? И самое главное – что нужно предпринять для того, чтобы вернуться назад – в мировые лидеры в образовании, а следовательно, и в экономике?

Таблица 3

Изменение удельного веса иностранных граждан, обучавшихся в вузах РСФСР/РФ по очной и заочной форме в 1950/1951–2005/2008 академических годах, в общемировом контингенте иностранных студентов

Годы	Иностранных студентов в мире,	Иностранных студентов в вузах РСФСР/РФ, тыс. чел.	Доля иностранных студентов в вузах РСФСР/РФ, от иностр. студентов в мире, %
1950/1951	110,0	5,2	5,4
1960/1961	231,4	10,9	5,8
1970/1971	447,8	20,7	5,9
1980/1981	915,8	64,5	9,6
1990/1991	1168,1	89,6	10,8
2000/2001	1830,0	72,4	4,0
2005/2006	2800,0	113,8	4,1
2006/2007	3000,0	120,5	4,0
2007/2008	3000,0	47,5 (без учета СНГ)	1,7

В связи с этим необходимо задаться вопросом: в чем преимущество наших конкурентов и, прежде всего, активно развивающей экспорт образования (десятки процентов ежегодного роста) Австралии.

По мнению ряда экспертов и значительной части образовательного сообщества, если российская высшая школа не займет активной позиции, то она интегрируется в мировой образовательный рынок в качестве периферии, которой достанутся второстепенные бизнес-процессы глобализирующегося высшего профессионального образования.

Трудно не согласиться с авторами*, утверждающими, что школы, не участвующие в международной конкуренции за иностранных студентов и, как следствие, в конкуренции стандартов качества, обречены на стагнацию и уход с рынка серьезных конкурентов.

Сколько иностранных студентов обучается и обучалось ранее в российских вузах? По данным, опубликованным в докладе Общественной палаты РФ «Образование и общество – готова ли Россия инвестировать в свое будущее?»** в настоящее время в нашей стране на очной форме обучается менее 20 тыс. иностранных студентов (без учета СНГ).

Это крайне мало. К тому же за последние годы число граждан РФ, обучающихся за рубежом, росло существенно быстрее, чем число иностранцев, обучающихся в России. В табл. 3 приведены данные по обучению иностранных студентов в СССР и России за последние 70 лет (с учетом курсовой подготовки и подготовительных факультетов).

* Волков А., Ливанов Д., Фурсенко А. Высшее образование: повестка 2008–2016. Эксперт. 2007. № 32. А. Волков – ректор Московской школы управления «Сколково», д. техн. н., Д. Ливанов – ректор Гос. технологического университета Московский институт стали и сплавов, д. физ.-мат. н., А. Фурсенко – министр образования и науки РФ, д. физ.-мат. н.

** Авторы доклада Я. Кузьминов – председатель Общественной палаты РФ по вопросам интеллектуального потенциала нации, ректор Государственного университета – Высшей школы экономики (ГУ-ВШЭ); Л. Духанина – член Общественной палаты РФ, директор средней общеобразовательной частной школы «Наследник»; Б. Рудник – проректор ГУ-ВШЭ, директор Института развития образования.

Число граждан Российской Федерации, обучающихся за рубежом, уже существенно превышает число зарубежных студентов в российских вузах, а если проанализировать финансовую составляющую, то окажется, что за рубежом вузы получают от обучения граждан России доход на порядок выше, чем наши вузы от обучения иностранцев. Такая ситуация нас не может устраивать.

Что необходимо предпринять?

В статье «Высшее образование: повестка 2008–2016» А. Волкова, Д. Ливанова, А. Фурсенко* ставится задача в ближайшие годы стать одним из мировых лидеров в экспорте образования, довести доход от обучения иностранцев не менее чем до 5 млрд. в год. Отличная цель, амбициозные планы, но как их выполнить?

Приступая к решению поставленных задач, ни в коем случае нельзя упускать из виду, что наша высшая школа не уступает любой другой стране мира в профессиональной подготовке преподавателей. Наша профессура, работающая в зарубежных вузах, является, как правило, лидерами своего направления. Я не знаю ни одного случая, когда профессор серьезного отечественного вуза, выехав в западные или восточные (что уже не так редко) университеты, не подтверждал свою высокую профессиональную квалификацию.

Не случайно, уже достаточно долгое время в профессиональной среде бытует расхожая шутка по поводу университетов США – это место, где профессора из России обучают китайских студентов – самых «вьедливых» студентов в мире. Собственно, сам факт того, что тысячи наших соотечественников, оказавшихся по разным причинам в университетах и научных центрах всего мира, являются там лидерами в своих направлениях, говорит о конкурентной силе нашей высшей школы.

Как уже отмечалось выше, странам, принявшим нашу интеллектуальную элиту, пришлось бы потратить около 1 трлн. долл. на выращивание собственной, аналогичной российскому. Нелишне отметить, что капитал, вложенный в науку и подготовку кадров, дает доход в 2–3 раза больший, чем размещенный в банках. Таким образом, та суммарная научно-техническая инновационная продукция, которую дают наши соотечественники в западных и восточных научных центрах и университетах, составляет сумму никак не меньше 100 млрд. долл.

Это есть подтверждение высокого уровня подготовки специалистов отечественной высшей школы. Очень не хочется сказать – было.

Если сравнить нынешнее состояние нашей высшей школы с передовыми странами мира, то окажется, что Россия не так уж и сильно проигрывает, если проигрывает вообще, по качеству профессорско-преподавательского состава, состоянию материальной базы, немного отстали в оснащении современным оборудованием. (Я веду речь о вузах, составляющих основу нашей образовательной системы, исключая те, что появились «с бухты-барухты», абы сколотить какое-то состояние их топ-менеджерам.)

При этом Россия существенно уступает в *условиях* проживания студентов. Учеба в России стала менее привлекательна для зарубежных студентов, прежде всего, по причине снижению уровня безопасности, а не по причине снижения качества преподаваемых знаний.

*Эксперт, 2007. № 32 (573).

Несколько лет назад увеличением экспорта образования, т.е. роста числа иностранных студентов в российских вузах, озаботился Московский фонд подготовки кадров. Проходили оживленные дискуссии, в результате которых были определены основные причины сдерживания роста экспорта образования и намечены пути к их преодолению. При этом неоднократно обращались к поучительному опыту Австралии, Сингапура, Республики Корея, Тайваня, Китая, Японии, Канады, Испании.

Почему бы и в России, по примеру этих стран, не принять *государственную* программу роста экспорта образования? И, прежде всего, в СНГ, так как мы самая большая в мире разделенная нация, а целый ряд дисциплин студентам из стран-членов СНГ можно изучать только на русском языке в России. И в соответствии с этой программой направить ресурсы тому, кто способен наиболее успешно их использовать. Во многих странах мира, например, вузы могут брать кредиты под проценты, оплачиваемые государством. На эти средства строят современные студенческие кампусы, развивают материальную базу. Проценты оплачиваются государством лишь в случаях успешного выполнения программы развития вуза. Россия смогла бы реально увеличить экспорт образования в 2,5–3 раза, при условии создания студенческих городков, в том числе и для наших студентов.

Ресурсы направить тем у кого:

- наибольшее число студентов-иностранцев, как показатель успешной работы подготовительных программ и отделений. Кстати, вузов с подготовительными отделениями не так уж много и совсем мало, где подготовка ведется на английском языке (преподавание на английском – мировая практика);
- вуз располагает современным информационным порталом, а электронные учебно-методические комплексы стали нормой работы;
- студенты могут выбрать индивидуальную программу обучения, для чего вуз должен иметь современную корпоративную информационную систему (КИС);
- цены обучения студентов-иностранцев ни в коем случае не должны быть ниже издержек образовательного процесса.

Наряду с этими требованиями должна быть обеспечена *прозрачность* использования ресурсов, чтобы и государство и общество могли судить об их эффективном использовании. В этой связи уместно вспомнить опыт Австралии, которым поделился бывший министр образования, автор программы роста экспорта образовательных услуг Дж. Робинсон. В этой стране, как и в России, поддержку получал лишь государственный сектор образования. После того как прямые ресурсы и банковские кредиты стали направлять в вузы независимо от их статуса, исключительно по критериям наибольшей эффективности их использования, дела резко пошли в гору – и сейчас это один из мировых лидеров по объему экспорта образования и явный лидер по темпам роста, а ведь Австралии, в отличие от нашей страны, приходится самой импортировать квалифицированных преподавателей.

Какой общемировой тренд финансирования различных секторов профессионального образования?

На рис. 1 приведен график, составленный по данным Всемирного банка. Видно, что вложения ресурсов в негосударственный сектор растут, хотя вложения в госсектор и преобладают, но сокращаются. На этом фоне достаточно резко контрастирует ситуация в Российской Федерации – наш тренд существенно расходится с общемировым.



Рис. 1. Финансирование образования: государственный и негосударственный сектора (все страны)

К сожалению, государство по-прежнему отказывает негосударственным вузам в ресурсной поддержке (норма жизни для подавляющего большинства развитых стран мира). Несмотря на решение Рабочей группы Госсовета по вопросам образования 2006 г., предложений Общественной палаты РФ по равнодоступности различных секторов образования к государственным ресурсам – ситуация не меняется. Негосударственные вузы не имеют реальной государственной поддержки ни в форме допуска к госзаказу (в стране с рыночной экономикой!), ни в поддержке технопарков и бизнес-инкубаторов, ни в поддержке общежитий и других сторон социальной жизни студентов.

Хотя значительная часть научных открытий в последние годы регистрируется в негосударственных вузах, и именно в негосударственном секторе созданы вполне конкурентоспособные корпоративные информационные системы, их обходят при распределении финансовых ресурсов, направленных на поддержку и развитие инновационных вузов. Оценка сложившихся отношений к негосударственным вузам еще более удручающа при анализе налогообложения профессиональной высшей школы, при которой налоговые преференции достаются по форме учредительства.

Государство дает преимущество в конкурентной борьбе учрежденным им же организациям: «Своя рука владыка», но как быть в таком случае с ВТО – ведь по Уставу этой организации преференции запрещены по форме учредительства. И уже совсем не понятно, почему государство явно симпатизирует даже очень слабым госвузам на укор сильным негосударственным. Как известно, отсутствие конкуренции создает только видимость благополучия и существенно смазывает реальную картину состояния дел. В этом мы уже убедились на горьком примере отечественной автомобильной промышленности. Нужно ли множить этот непродуктивный, более того, разрушающий опыт?

Забыли про образование?

Проблемы в системе образования свалились не вдруг – они накапливались. И к 1980-м годам стало понятно, что отечественная школа теряет свою конкурентноспособность, и что необходимы новые организационно-экономические механизмы функционирования профессиональной школы. Хотя тогда мы по-прежнему были одними из мировых лидеров.

Нужны более эффективные трудовые стимулы коллективов вузов, материальная поддержка научного творчества преподавательского состава и студенчества. Тогда была проведена определенная подготовительная работа, и в 1987 г. вышло известное постановление ЦК КПСС и СМ СССР.*

Многие положения этого постановления и сегодня достаточно актуальны. Если бы оно было претворено в жизнь, то отечественная высшая школа имела бы несравнимо лучшие позиции по организационно-экономическому механизму функционирования высшей школы, по ее конкурентоспособности.

Хотя, справедливости ради, необходимо отметить, что даже в конце 1980-х годов наша высшая школа уверенно занимала лидирующие позиции в мире по качественным характеристикам подготовки специалистов, в том числе по экспорту образования.

Имея великолепно подготовленный профессорско-преподавательский состав большинства вузов, высокий уровень организации науки в стране, прежде всего в естественно-научной и технической части, общество в праве ожидать более весомого вклада научно-вузовского сектора в инновационное развитие страны.

Государству необходимо более четко ставить цели, а планку задавать не ниже мирового уровня – как в науке, так и в образовании.

При активной государственной поддержке инновационных вузовских парков (т.е. технопарка и бизнес-инкубатора) вузы в состоянии стать не только точками роста, но и кластерами инновационного развития.

Таким образом, на первый план выходит система опережающей подготовки специалистов, обеспечивающих инновационный путь развития экономики – *инновационных менеджеров*.

Идея эта не нова, подобную задачу в нашей стране в 1970–1980-х годах активно обсуждали на самых разных уровнях. По разным причинам тогда решение не было принято. Надо решать сегодня, тогда сможем задействовать и армии наших академиков.

Имея шесть государственных и дюжину общественных и общественно-государственных академий, квалифицированный персонал в научных учреждениях и на производстве, прежде всего в ВПК, богатые сырьевые возможности, огромную материальную базу, можно было бы ожидать ускоренного обновления, ведь тормоз в развитии – административно-командная система управления экономикой, была демонтирована. Однако инновационное развитие протекает крайне замедленно. 3–4% вклада инновационной составляющей в экономический рост – это недопустимо мало для

*Постановлением ЦК КПСС и Совета Министров СССР от 13 марта 1987 г. N 325 «О мерах по коренному улучшению качества подготовки и использования специалистов с высшим образованием в народном хозяйстве» была введена частичная компенсация министерствами и ведомствами сферы материального производства затрат на подготовку специалистов в вузах из средств развития, т.е. из прибыли после уплаты налогов. Размер компенсации был установлен на 1988–1990 гг. в сумме 3000 рублей. Это приблизительно 5,5–6,0 тыс. долл. США по тому курсу рубля, что совсем немного. Но, главное, вузы должны осваивать основы вхождения в рынок. Средства должны были направляться на финансирование расходов капитального характера: строительство, приобретение приборов и оборудования. Была введена, по форме, плата работодателя за подготовленного работника, по содержанию – софинансирование подготовки бюджетных студентов из негосударственных источников, т.е. то же бюджетное финансирование, но минуя фазу консолидации средств в бюджете. Практического развития это положение получить не успело.

недавнего мирового лидера в науке и образовании. Причем, что многократно обидно, имеются все основания повесить этот вклад как минимум в разы, а то и на порядок!

Мы до сих пор не уяснили, что в постиндустриальную эпоху Академия наук, не имеющая хорошо отлаженного механизма продвижения инноваций, представляет собой армию, состоящую из одних генералов, а это, как известно уже довольно давно, крайне малоспособная рать. Хотя каждый в отдельности член Академии представляет собой не только явление в науке, но и, как правило, возглавляет серьезную и авторитетную научную школу, способную решать сложнейшие научно-технические задачи.

Проблема прежде всего в том, что организационно-экономические отношения в науке остались практически в неизменном виде с эпохи индустриализации, покорения космоса. Сегодня же недостает очень важного «передаточного» звена – специализированного менеджмента по продвижению открытий и изобретений в производство, а затем и на товарный рынок.

Такая постановка вопроса не нова. Необходимость решения этой проблемы активно рассматривалась в нашей стране, начиная со второй половины 1970-х годов. Академики Н.Н. Иноземцев, О.М. Белоцерковский, Н.Н. Моисеев неоднократно и на самом высоком уровне докладывали необходимость подготовки инновационных менеджеров в нашей стране. Для этого и сделано было немало. Прежде всего, в МФТИ был создан соответствующий факультет. Хорошо помню, как пропагандировалась тогда идея подготовки инновационных менеджеров – как необходимое условие упреждения отставания и дальнейшего продвижения отечественной высокотехнологичной части экономики, опережающее занятие самых передовых в мире позиций. Удалось внедрить в жизнь активную подготовку инновационных менеджеров – основу развития современной техники. Но это случилось всего лишь на «пяточке» высшей школы, а не по всему ее фронту.

Одной из причин непринятия этого предложения было то, что страна и так развивалась достаточно успешно – темпы роста экономики были впечатляющими, СССР – один из мировых лидеров, производящий пятую часть всей промышленной продукции в мире. Другой причиной было то, что активное развитие подходов инновационного менеджмента явно входило в противоречие с коммунистическими догматами – ведь успешный инновационный менеджер не может не быть состоятельным, богатым, а то и очень богатым человеком. Пример Билла Гейтса, Сергея Брига и Лари Пейджа, яркое тому подтверждение*.

Но, освободившись от «родимых пятен» коммунизма, мы заодно, не понятно куда и зачем, отбросили и ставку на активное развитие научно-технических отраслей промышленности – яркий пример, когда с водой и ребенка не стало.

К сожалению, ранний уход из жизни выдающегося ученого Н.Н. Иноземцева существенно ослабил развитие этого направления подготовки кадров в нашей стране. Другой гениально мыслящий ученый академик О.М. Белоцерковский, неоднократно заявлявший о необходимости подготовки инновационных менеджеров, об их роли в повышении конкурентоспособности отечественной экономики, так и не был услышан.

*Одни из самых богатых людей планеты. Первый заработал свои 60 млрд. долл., создав компанию «Майкрософт» (Microsoft) по производству компьютерного программного обеспечения. С. Брин (выходец из России) и Л. Пейдж создали крупнейшую в мире интернет-поисковую систему Гугл (Google), владеют по 21 млрд. долл. каждый.

И случилось то, что предрекали ученые. Где теперь Россия? И где теперь Индия, принявшая тогда государственную программу подготовки инновационных менеджеров в области ИТ-технологий? Она совершила головокружительный прыжок из отсталости в мировые лидеры по экспорту ИТ-продукции! А Россия имеет только доли процента. Катастрофически недостает того, что на языке инноваций называют стартап (Startup) (англ. запускать), фирма, строящая свой бизнес на основе инновации или инновационных технологий, не вышедшая на рынок или едва начавшая на него выходить и обладающая ограниченным набором ресурсов. Образно говоря, идея-полуфабрикат, которая ждет или ищет инвестора, гарантируя не только возврат вложенных средств, но и большую прибыль после ее внедрения.

Смысл выступлений наших замечательных ученых, истинных патриотов, коротко говоря, сводился к утверждению того, что основное назначение современной государственной инновационной политики России – создание *благоприятного климата* для реализации инноваций на базе НИОКР, востребованных экономикой, или, в нынешнем толковании, рынком. Именно инновационная предпринимательская среда способна обеспечить конкурентные преимущества страны в области передовых технологий.

Для реализации инновационного процесса государство должно активизировать формирование и деятельность исследовательских партнерств, создать особые организационные структуры, способные:

- чутко реагировать на потребности рынка и анализировать тенденции его изменения;
- иметь системную информацию об имеющихся научных, конструкторских, технологических разработках в той или иной отрасли;
- избирать на этой основе перспективные научные разработки;
- создавать механизмы, позволяющие ученым развивать на практике свои идеи и получать от этого соответствующую часть прибыли.

Инновационно-развивающиеся фирмы могут стать основным источником занятости в экономике. Особое значение приобретает подготовка и переподготовка кадров, совершенствование послевузовского образования.

Национальная экономика России нуждается в расширении подготовки квалифицированных кадров не только для того, чтобы конкурировать на мировом рынке, но и для преодоления негативной тенденции к сокращению их числа в предстоящие десятилетия. Необходимо срочно исправить положение и принять государственную программу подготовки инновационных менеджеров, как минимум, для тех отраслей, в которых у России накопился немалый задел. Пусть эта программа станет частью национального проекта «Образование», пусть станет самостоятельной, как угодно, но нужно срочное государственное решение наболевшей проблемы.

В этом случае многие вузы, активно развивающие это направление, станут именно предпринимательскими инновационно-ориентированными учебными заведениями с образованием кластеров инновационного роста экономики (по Ю.Б. Рубину)*.

*Рубин Юрий Борисович, д.э.н., проф., ректор Московской финансово-промышленной академии. Основные направления исследований: теория практической конкуренции; антимонопольное регулирование экономики; университеты как субъекты рыночных отношений; нормативно-правовое обеспеч-

Каково минимальное количество инновационных менеджеров, необходимое для качественных сдвигов в развитии экономики страны?

Опыт школы В.А. Ирикова* показывает, что подготовка нескольких десятков инновационно-мыслящих менеджеров для конкретного предприятия существенно изменяет климат в коллективе. Даже обанкротившиеся предприятия выходят в мировые лидеры! Примеров уже – несколько сотен, вот некоторые из них:

- концерн ОАО «РОСЭЛПРОМ». Инновационные менеджеры обеспечили конкурентоспособность корпорации, утроили доли импортозамещающей и экспортно-пригодной продукции, десятикратный(!) рост производства;

- ОАО «Салаватстекло» – четырехкратный рост, полное техническое перевооружение на самофинансировании;

- ОАО «Уфимский мясоконсервный комбинат» – повышение конкурентоспособности, десятикратный рост стоимости компаний и др.;

- ОАО «Чайковский текстиль» – двукратное увеличение объемов за счет разработанной модели бизнеса, направленной на обеспечение гарантированного качества ткани и предоставление максимального сервисного пакета клиентам.

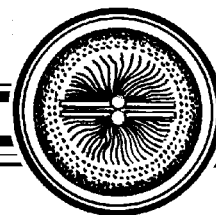
Наверное, для страны выпуск 50 тыс. инновационных менеджеров – это вполне по силам, а с учетом возможностей Президентской программы – реально выполнимая задача в ближайшие годы. Главное – чтобы эффективность программы подготовки инновационных менеджеров ощущалась не только самими обучающимися, а приносили реальную пользу поднимающейся отечественной экономике. Поэтому крайне необходимы *практические* меры по вовлечению в эту деятельность конкретных предприятий, а не теоретические разработки о пользе научно-технического прогресса в области высоких технологий. И здесь опять-таки показателен пример работы школы В.А. Ирикова, где оплата участвующих в проекте идет из средств полученной дополнительной прибыли. Так возникают стимулы к эффективной работе (не будет прибыли – не будет и оплаты), а для предприятий – снижается риск пустой траты деньги, так как заказчик платит по результатам реализации проекта, из *приращенной* прибыли.

Можем ли мы достичь среднеевропейских результатов инновационной составляющей в показателях экономического роста – не менее 40–60%? Экспертные оценки подтверждают реальность такого результата уже в ближайшие годы, так как интеллектуальный потенциал нашей страны чрезвычайно высок и всяческих других ресурсов для этого достаточно. Тогда среднегодовые темпы роста нашей экономики возрастут, как минимум, еще на 1,5–2,0 процентных пункта. По темпам экономического роста наша страна приблизится к основным конкурентам-гигантам – Китаю и Индии.

Это будет крупным шагом на пути возвращения в мировые лидеры.

печение системы образования; концепция бизнеса в постиндустриальном обществе; проектирование учебно-методических комплексов на различных носителях информации (CD-ROM, серверы).

*Ириков Валерий Алексеевич, д.э.н., проф., зав. кафедрой МФТИ, зав. кафедрой РосНОУ. Руководитель школы «Профессионал» при МФТИ. Актуальное направление исследований: перевод корпораций на инновационный путь развития. Примеры конкурентоспособного развития российских предприятий см. на <http://professional.ru/InnovMen/semIM/PrimerRazvIrikov.html>



Редколлегия журнала поздравляет всех наших авторов и читателей с Новым 2009 годом! Под Новый год, оглядываясь на прошлое, хотелось бы заглянуть в будущее. В издательствах АСТ и АСТ Москва вышла книга «Будущее науки в XXI веке. Следующие пятьдесят лет», которая несомненно будет интересна для авторов и читателей ПНД. Мы публикуем содержание книги и статью Стивена Строгаца «"Маленькое открытие" Ферми и будущее теории хаоса и сложности», хорошо иллюстрирующую тематику нашего журнала.

Изв. вузов «ПНД», т. 16, № 6, 2008

УДК 001

БУДУЩЕЕ НАУКИ В XXI ВЕКЕ **Следующие пятьдесят лет**

Под ред. Джона Брокмана

©John Brockman, 2002

©Перевод Ю.В. Букановой, 2008

©ООО Издательство «АСТ МОСКВА», 2008

М.: АСТ: АСТ МОСКВА, 2008. 255, [1] с.

ISBN 978-5-17-049137-7 (ООО «Издательство АСТ»)

ISBN 978-5-9713-8252-2 (ООО Издательство «АСТ МОСКВА»)

За последние пятьдесят лет наука совершила настоящий прорыв. Освоение космоса и клонирование, Интернет, нанотехнологии и открытие планет за пределами Солнечной системы уже стали для нас реальностью. Но мир меняется все стремительнее. Какие же научные прорывы ожидают нас в ближайшее время? На этот вопрос в простой и необыкновенно увлекательной форме отвечают знаменитые физики и генетики, математики и кибернетики, биологи и психологи, а также специалисты по проблемам искусственного интеллекта.

Содержание

От составителя

Часть I. Будущее в теории.

Ли Смолин. Будущее Вселенной. *Мартин Рис.* Загадки космологии: одиноки ли мы во Вселенной? *Ян Стюарт.* Математика 2050 года. *Брайан Гудвин.* В тени культуры. *Марк Д. Хаузер.* Пересаженный разум. *Элисон Гонник.* Чему дети научат ученых. *Пауль Блум.* К теории морального развития. *Джеффри Миллер.* Наука о тонкостях. *Михай Чиксентмихайи.* Будущее счастья. *Роберт Сапольски.* Будем ли мы через

пятьдесят лет так же печальны? *Стивен Строгац*. «Маленькое открытие» Ферми и будущее теории хаоса и сложности. *Стюарт Кауфман*. Что такое жизнь?

Часть II. Будущее на практике

Ричард Докинз. Сын закона Мура. *Пол Дэвис*. Был ли второй генезис? *Джон Х. Холланд*. Что произойдет и как это предсказать. *Родни Брукс*. Объединение плоти и машин. *Питер Эткинс*. Будущее материи. *Роджер К. Шенк*. Станем ли мы умнее? *Джерон Ланье*. Потолок сложности. *Дэвид Гелернтер*. Стучась в «поток». *Джозеф Ледукс*. Разум, мозг и личность. *Джудит Рич Харрис*. Что делает нас такими, какие мы есть: взгляд из 2050 года. *Сэмюэл Барондес*. Лекарства, ДНК и кушетка психоаналитика. *Нэнси Эткофф*. Сканирование мозга, мобильные устройства и короткие встречи. *Пол У. Эвальд*. Побеждая болезни.

«Маленькое открытие» Ферми и будущее теории хаоса и сложности

Стивен Строгац *

2 декабря 1942 года, проводя секретные эксперименты на площадке Чикагского университета, Энрико Ферми впервые в мире осуществил цепную ядерную реакцию, что стало решающим шагом на пути к созданию атомной бомбы. Благодаря этому имя физика стало известно широкой публике. Но в узком кругу, среди ученых, он славился другим, а именно удивительной эрудицией. Ферми был выдающимся теоретиком и экспериментатором. Вот как его описывал Якоб Броновски: «Это самый умный человек из всех, кого я когда-либо видел – ну, может, за одним исключением. Он был невысокого роста. Сосредоточенный, авторитетный, проницательный, очень спортивный. Он всегда имел четко поставленную цель, которую представлял себе очень конкретно».

Незадолго перед смертью, в 1954 году, Ферми забавлялся тем, что физики называют искусственной задачей. Прекрасный в своей простоте вопрос не представлял никакой практической ценности. Для Ферми решение было лишь способом изучить некую фундаментальную проблему. И вот представился шанс. Будучи в Лос-Аламосе, Ферми увидел новый суперкомпьютер «МАНИАК». Он не мог устоять перед соблазном и попросил Джона Паста и Станислава Улама симитировать на машине вибрацию гибкой цепи из тридцати двух частиц. Вся система должна была представлять собой идеализированную одномерную атомную решетку, удерживаемую химическими связями. При слабых вибрациях химические связи двигаются линейно: если их растянуть, они возвращаются обратно. На этом допущении строилась вся традиционная физика твердых тел. Но Ферми знал, что реальные связи не будут

* Стивен Строгац – профессор Центра прикладной математики при Корнельском университете. Занимается исследованиями сна и циркадных ритмов, спиральных волн, спаренных генераторов, синхронного мерцания светлячков, перехода Джозефсона и сетей «маленького мира». Сотрудничает с такими средствами массовой информации, как «Нейчер», «Сайнс», «Сайентифик американ», «Нью-Йорк таймс», «Нью-Йоркер», Би-би-си и «Си-би-эс ньюс». Автор популярного учебника «Нелинейная динамика и хаос: применительно к физике, биологии, химии и инженерии». Скоро выйдет его книга «Синхронизация», ориентированная на широкий круг читателей.

двигаться линейно при достаточно сильной вибрации. Его интересовало, что тогда произойдет. Математические модели того времени не позволяли ответить на этот вопрос, никто не мог решить уравнения для нелинейных систем из такого количества частиц.

Конечно, это было то, что нужно. Ферми взялся за эту проблему, потому что ее невозможно было решить традиционными методами. Теперь, с помощью нового компьютера, он с коллегами мог пролить свет на нелинейные системы – самый темный вопрос классической физики. Результаты оказались шокирующими. Ученые полагали, что при возмущении системы нелинейные движения приведут к тому, что все частицы начнут двигаться случайным образом одинаково во всех направлениях. Такое равномерное распределение энергии предсказывается термодинамикой. Но компьютер показал совсем другое. По прошествии очень длительного времени частицы вернулись почти точно в исходное состояние. Стало очевидно, что нелинейные системы могут приводить к порядку. Нелинейность рождает хаос, но затем сама его и устраняет.

Ферми пришел в восторг от неожиданного феномена, «маленького открытия», как он с нежностью говорил. К сожалению, великий физик не успел опубликовать полученные результаты. Паста и Улам, чтобы не присваивать себе честь «маленького открытия», потихоньку включили данные в отчет и лишь спустя десять лет поместили их в сборнике работ Ферми.

В начале 1950-х годов проблема Ферми–Паста–Улама должна была выглядеть особенно странной. Тогда физика в основном занималась проблемами квантовой электродинамики. Никто и не думал о такой устаревшей вещи, как классическая механика. Разве ее не полностью изучили за три сотни лет? Только Ферми понял, что все как раз наоборот, что классическая механика едва изучена, а нелинейные системы вообще не затронуты. Оглядываясь назад, можно сказать, что Ферми попал в точку и с выбором проблемы и с использованием компьютера.

В первой половине двадцатого века были созданы удивительные приборы, позволяющие изучать нелинейные системы: вакуумная труба, благодаря которой появились радиоприемники и телевизоры, система фазовой синхронизации, позволившая создать радар, и коммуникатор, лазер, очень пригодившийся для точной оптики и хирургии глаза. Изобретения основывались на самоподдерживающихся нелинейных колебаниях, а именно на тенденции синхронизироваться друг с другом или с входящим сигналом. В новых технологиях использовались от силы два генератора, так как математика того времени не могла предсказать коллективное поведение большого количества таких единиц.

Единственной дисциплиной, которая была способна работать с огромной массой взаимодействующих частиц, являлась статистическая физика – раздел физики, в задачу которого изначально входило описание поведения газов, состоящих из миллиардов молекул. Ферми хорошо разбирался в статистической физике и знал, что она прекрасно описывает системы в состоянии термодинамического равновесия. К сожалению, при нарушении равновесия требовались совершенно другие подходы. И это очень напоминало результаты эксперимента Ферми–Паста–Улама: система не возвращалась в состояние равновесия ожидаемым образом. Обычная статистическая физика здесь была неприменима.

Спустя пятьдесят лет после эксперимента Ферми пути нелинейной динамики и статистической физики пересеклись. Физик Митчелл Фейгенбаум, используя ренормализационную группу (метод статистической физики, получивший Нобелевскую премию), показал, что переход от порядка к хаосу подчиняется определенным универсальным законам. Его исследования были подтверждены в таких разных системах, как клетки сердечной мышцы, химические реакции и полупроводники. Биолог-теоретик Артур Уинфри доказал, что синхронизация огромной сети биологических генераторов очень напоминает фазовые переходы, вроде быстрого замерзания воды при температуре ниже критической. Другие плодотворные модели сложных систем – модель генетических сетей Стюарта Кауфмана, самоорганизующиеся кучи песка Пера Бака, искусственные нейронные сети Джона Хопфилда – тоже обязаны своим появлением слиянию статистической физики и нелинейной динамики.

Нелинейная динамика развивалась, подчиняясь нескольким организующим принципам. Самый важный из них звучит так: небольшие системы всегда проще, чем большие. Сначала ученые разобрались с нелинейной системой, включающей две переменные. Примером подобной системы служит качающийся маятник, состояние которого полностью описывается его положением и скоростью в данный момент. При наличии этих двух параметров легко определить расположение маятника в любой момент времени. С тремя переменными оказалось справиться сложнее. Дело в том, что такие системы могут быть хаотичны. Хаос означает, что система подчиняется определенным правилам и тем не менее ведет себя непредсказуемым образом. Пример – колебания популяций в экосистемах или капанье воды из крана. Благодаря работам Эдварда Лоренца и других теоретиков хаоса, выполненных с 1960 по 1985 год, поведение «странных» систем было охарактеризовано и объяснено. Вскоре принцип хаоса начал использоваться в практических целях, в частности, для шифрования информации и создания музыкальных композиций.

Сегодня нелинейная динамика распространилась на сети из огромного количества взаимодействующих единиц. При этом сохраняет актуальность проблема Ферми–Паста–Улама с большим количеством спаренных генераторов. Среди таких спаренных систем существуют принципы организации, которые позволяют сформулировать более разрешимые задачи. Одни принципы касаются состояния отдельных компонентов системы (коллективное поведение колеблющихся частиц проще предсказать, чем поведение хаотически движущихся, идентичные частицы анализировать проще, чем разные), другие – способа связи частиц (сети с регулярной или случайной структурой проще, чем сети с более сложными связями). Совокупность этих эвристических правил подталкивает к изучению больших систем идентичных колеблющихся частиц, образующих определенную решетку или иную простую структуру. Среди самых «горячих» тем – синхронизация многочисленных спаренных квантовых усилителей, нейронов или сверхпроводящих устройств, известных как «переход Джозефсона». Некоторые исследователи вместо изучения отдельных решеток рассматривают формирование структур, или паттернов, в непрерывных средах, таких как жидкости, химические реакции, а также нервная и сердечная ткани. Кардиовопрос, пожалуй, самый кардинальный. Есть предположение, что динамика спиральных волн влияет на работу желудочков. Близким подобием больших нелинейных систем являются «сложные адаптивные системы», как их называют исследователи в

Институте Санта-Фе. Это воображаемые миры миллионов конкурирующих организмов (например, химических веществ, компаний или торговцев), каждый из которых приспособляется к окружающим условиям и, соответственно, изменяет условия для всех остальных. Компьютерные модели разных ситуаций имеют, конечно, спекулятивный характер, но они позволяют оценить значение естественного отбора и объяснить, например, гибкость экосистем, химические основы жизни, борьбу фирм на рынке товаров и услуг, а также взлеты и обвалы фондовой биржи.

Во многих смыслах исследования ученых из Санта-Фе являются внуками исследований Ферми–Паста–Улама. Обратите внимание, насколько сходно отношение к компьютеру: он не калькулятор, а инструмент познания. И результат одинаковый: удивление. А как вам характер моделей? Одномерная цепь частиц Ферми была сильным упрощением реальных кристаллических решеток – и сегодняшние компьютерные модели сложных адаптивных систем лишь отдаленно напоминают реальные экосистемы и реальный рынок. В наши дни такая стратегия оправдывается, но в следующие несколько десятилетий ее придется менять. Главная задача – найти способы делать более реальные модели без потери информативности.

Сначала нужно будет описать связи сложных сетей. Вместо построения идеальной случайной или регулярной топологии, как это делается в существующих моделях, нужно понять структуру реальных сетей. Иначе не понять работу головного мозга или причину злокачественного перерождения клеток. В последние три года мы приступили к подробному изучению разных сетей: пищевых цепей, нервной системы, электрических схем, Интернета и т.д. Оказалось, что между ними есть кое-что общее.

Все они демонстрируют феномен «маленького мира». Другими словами, почти все пары узлов связаны довольно короткими цепями. Более того, количество связей на каждый узел распределяется по экспоненте, образуя больший «хвост» кривой, чем у графика нормального распределения. Это значит, что существует как уйма узлов, слабо связанных, так и значительное количество гигантских ядер («Гугл» в Интернет или АТФ в цепях биохимических реакций). По идее, топологические черты должны оказывать влияние на коллективную динамику – устойчивость к случайным ошибкам или умышленным атакам, способность к распространению инфекции или поддержанию глобальных вычислений. Однако сегодня мы не имеем понятия, как соотносить топологию сети с ее общей динамикой.

На самом деле вне физики у нас очень мало хороших моделей динамики. Хотя в биологии, социологии и экономике сети очень распространены, мы мало что знаем о правилах управления взаимодействиями между генами, людьми или компаниями. И это еще один вопрос, который нужно выяснить в ближайшие пятьдесят лет. Наши модели сложных систем никогда не пойдут дальше карикатур, если мы не найдем способ определять динамику на основании имеющейся информации.

Классическая иллюстрация этого – реконструкция нейронной динамики на основании электрофизиологических измерений, проведенных на аксоне кальмара, сделанная в 1952 году. Алан Ходжкин и Эндрю Хаксли изменили разность потенциалов на мембране нервной клетки и фиксировали ее на нужном уровне. Измеряя просачивание ионов натрия, калия и других химических элементов через мембрану и изучая зависимость этого процесса от напряжения, ученые точно описали нелинейную динамику отдельного нейрона.

Проблема в том, что метод Ходжкина и Хаксли не подходит для всех случаев. Порой невозможно зафиксировать какую-то переменную на желаемом уровне. Для примера рассмотрим генетические сети, контролирующие работу клетки. С появлением ДНК-чипов мы получили возможность одновременно измерять активность тысяч разных генов во времени, но мы все еще не знаем, какие гены с какими взаимодействуют и как они влияют на активность друг друга в количественном выражении. Вся эта информация как-то отражается в данных ДНК-чипа, но мы не в состоянии расшифровать код. Если удастся разработать способ определять динамику на основании множественных измерений, то произойдет переворот не только в биологии, но и в социологии и в экономике.

Проблема описания связей гораздо проще проблемы определения динамики. Но даже если мы разделаемся с обеими, перед нами встанет новая. Это неизбежно, если мы примемся изучать нелинейные системы с миллионами взаимодействующих переменных. Грядущая проблема зародилась еще в работах Ферми–Паста–Улама. Пока мы ее игнорируем, но однажды столкнемся с ней лицом к лицу.

Сложность в том, что наш мозг способен визуализировать только три измерения. Таким он стал в процессе эволюции. Не исключено, что с помощью компьютера и тренировок мы расширим наши возможности, но весьма сомнительно, что когда-нибудь они станут беспредельными.

С тех пор как Анри Пуанкаре обнаружил хаос в гравитационных взаимодействиях трех тел, геометрия была нашим лучшим помощником в нелинейной динамике. Пуанкаре показал, что без алгебраических формул можно обойтись. Если все правильно изобразить, мы сумеем узнать много важных свойств нелинейных систем. Метод Пуанкаре подразумевает задание оси для каждой переменной состояния. Если переменных две или три, то визуализировать динамику легко. Но с сегодняшней потребностью учитывать миллионы переменных мы упираемся в стену. Геометрический подход сохраняет свою ценность, он позволяет использовать абстрактные рассуждения, но без прямой визуализации понять динамику нельзя.

Теоретикам никак не удастся объяснить турбулентность. Хотя уравнение известно уже более века, ученые не могут понять, как его решения работают в пространстве состояний Пуанкаре. Ускользают аттракторы – сущность длительной динамики, и все потому, что пространство состояний имеет бесконечно много измерений.

Кое-кто возразит мне, что с этой проблемой давно справились, дескать, согласно статистической физике газов или магнитов пространство состояний имеет количество измерений, равное числу Авогадро (двадцатитрехзначное число), тем не менее специалист хорошо понимает эти системы. Согласен, понимает, но только в том случае, когда они находятся в состоянии термодинамического равновесия. Тогда предсказать характер их поведения в течение долгого времени не составляет труда. Я же говорю о статистическом поведении в течение длительного времени сложных систем, они далеки от равновесия. А так как теоретики пока не могут определить аттракторы, положение становится просто удручающим.

Еще сорок лет назад Ричард Фейнман сказал: «Будущая эра пробуждения человеческого интеллекта вполне может привести к пониманию качественного содержания уравнений. Сегодня мы этого не можем. Сегодня мы не видим, что уравнение течения воды включает такие вещи, как структуры турбулентности. Сегодня мы не знаем, содержит ли уравнение Шрёдингера лягушек, композиторов или мораль. Мы

не можем сказать, есть ли необходимость в чем-то большем, а именно в Боге. И мы все можем иметь на этот счет собственное мнение».

Если мы хотим достигнуть эры пробуждения разума, нам необходимо бежать от демона размерности. Надеюсь, в этом помогут компьютеры. Когда-нибудь они сумеют визуализировать любое количество измерений. Они уже делают за нас грязную работу, создавая модели. Придет день, и они выведут закон самоорганизации сложных систем.

Такое предположение вызывает большой вопрос. Будем ли мы заниматься теоретическими разработками, если компьютеры начнут справляться с этим лучше нас? Если они будут формулировать свои заключения в терминах, доступных нам, то станут чем-то вроде протезов – продолжением наших собственных чувств и мыслей, представляя не большую угрозу, чем электронный микроскоп. Но если заключения окажутся непостижимыми, то компьютеры станут для нас чем-то вроде оракулов. В математике такое уже случается. Некоторые теоремы доказаны компьютерами, однако доказательства включают столь многочисленные или сложные частные случаи, что ни один человек не в состоянии их проверить. Другой пример – ходы «Дип блю» во время шахматной игры с Гарри Каспаровым.

Не такое ли будущее уготовано изучению сложных систем? Не окажемся ли мы в роли пассивных наблюдателей, неспособных угнаться за созданными нами машинами?

Возможно, первым это почувствовал Энрико Ферми. Его компьютерный эксперимент был абсолютно новым способом научного исследования. И вполне логично, что этот эксперимент стал возможным благодаря работам его современника Джона фон Неймана, который создал первый высокоскоростной компьютер и о котором Якоб Броневски сказал, что он «самый умный человек из всех, кого я когда-либо видел, без всяких исключений».

Зав. редакцией *Н.Н. Левина*
Редакторы *Л.А. Сидорова, Н.Н. Левина*
Оформление художника *Д.В. Соколова*
Оригинал-макет подготовлен
И.А. Пономаревой, О.Н. Строгановой
в пакете $L^A T_E X$

Подписка на 2009 год осуществляется
по каталогу Агентства Роспечать
«Газеты. Журналы», индекс 73498,
и по договору между Подписчиком
(юридическим или физическим лицом)
и Издателем (Саратовским государственным университетом)

Стоимость подписки на 2009 год 600 руб. (6 номеров)
Заявки на заключение договора принимаются
по почте, по телефону редакции, по эл. почте редакции

Адрес редакции: 410012, Саратов, Астраханская, 83
Тел./факс: (845-2) 52-38-64
E-mail: and@nonlin.sgu.ru

Распространение журнала осуществляется
редакцией журнала по адресной системе

Сдано в набор 15.12.08. Подписано к печати 2.02.09
Формат 70x108/16. Бумага «Снегурочка». Печать трафаретная
Усл. печ. л. 10,5(7,5). Уч.-изд. л. 10,0. Тираж 200. Заказ 409

Отпечатано на ризографе GR 3750 редакции журнала

© Редакция журнала
«Известия вузов. ПНД», 2009
© Оформление художника
Д.В. Соколова, 2009