

*Журнал включен в «Перечень периодических научных и научно-технических изданий РФ,  
рекомендованных для публикации основных результатов диссертаций  
на соискание ученой степени доктора наук»*

**МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ**

Известия высших учебных заведений

**ПРИКЛАДНАЯ НЕЛИНЕЙНАЯ ДИНАМИКА**

*научно-технический журнал*

издается с 1993 года

Выходит 6 раз в год

Том 24, № 1, 2016, Саратов

## **С О Д Е Р Ж А Н И Е**

От редактора. Гуляев Ю. В. ....	3
<b>ПРИКЛАДНЫЕ ЗАДАЧИ НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ КОЛЕБАНИЙ И ВОЛН</b>	
Семенов В. В., Нейман А. Б., Вадивасова Т. Е., Анищенко В. С. Индуцированные шумом эффекты в модели бистабильного осциллятора с переменной диссипацией. ....	5
Дорошенко В. М. Странный нехаотический аттрактор типа Ханта и Отта в системе с кольцевой геометрией. ....	16
Усанов Д. А., Рытик А. П. Свойства СВЧ-фотонного кристалла у раствора с автоколебательной реакцией Бриггса-Раушера. ....	31
<b>ОБЗОРЫ АКТУАЛЬНЫХ ПРОБЛЕМ НЕЛИНЕЙНОЙ ДИНАМИКИ</b>	
Титов А. В. Двухпоточная неустойчивость – волновые линейные и нелинейные явления на сверхвысоких частотах. Часть I. ....	37
<b>ИСТОРИЯ. PERSONALIA</b>	
Аникин В. М. Наши первые учителя: Страницы биографий П. Н. Лебедева и Н. Н. Семенова. ....	75

**C O N T E N T S**

Editorial. <i>Gulyaev Yu. V.</i> .....	3
APPLIED PROBLEMS OF NONLINEAR OSCILLATION AND WAVE THEORY	
<i>Semenov V. V., Neiman A. B., Vadivasova T. E., Anishchenko V. S.</i> Noise-induced effects in the double-well oscillator with variable friction .....	5
<i>Doroshenko V. M.</i> Strange nonchaotic attractor of Hunt and Ott type in a system with ring geometry .....	16
<i>Usanov D. A., Rytik A. P.</i> Properties of microwave photonic crystal for solution with the self-oscillatory Briggs–Rauscher reaction .....	31
REVIEWS OF ACTUAL PROBLEMS OF NONLINEAR DYNAMICS	
<i>Titov A. V.</i> Two-stream instability – linear and nonlinear microwave phenomena. Part I .....	37
HISTORY. PERSONALIA	
<i>Anikin V. M.</i> Our first teachers: Pages of biographies by P. N. Lebedev and N. N. Semenov .....	75

## От редактора

11 февраля 2016 года на пресс-конференции в США и в Европе было объявлено коллаборацией LIGO (Laser Interferometer Gravitational-Wave Observatory) о крупнейшем научном достижении – первой прямой регистрации гравитационных волн, которые были предсказаны почти 100 лет назад Альбертом Эйнштейном. Коллаборация объединяет 1400 специалистов из 15 стран. Проект был предложен в 1980-е годы профессорами Калифорнийского университета Кипом Торном (Kip Thorne), Рональдом Древером (Ronald Drever) и профессором Массачусетского технологического института Райнером Вайссом (Rainer Weiss). Было объявлено, что зарегистрированные гравитационные волны испущены 1.3 миллиарда лет назад при слиянии двух чёрных дыр массами 29 и 36 солнечных масс. После слияния общая масса стала около 60 солнечных масс, причем вещество массой в 3 солнечных превратилось в гравитационное излучение. Замечу, что чёрные дыры вызывали у исследователей некоторое раздражение: вроде бы они должны существовать, но не было доказательств, что наблюдаемые объекты чёрные дыры. Теперь появился новый канал информации, идущий из космоса, появилась новая наука – геометродинамика – нелинейная динамика пространства-времени.

Согласно Общей теории относительности, тяготение возникает из-за искривления пространственно-временного континуума. Тогда волны тяготения – это флуктуации пространственно-временной метрики, проявляющие себя как колебания гравитационного поля, поэтому их часто называют пространственно-временной рябью.

У гравитационных волн интересные свойства. Вот главные из них.

1) Гравитационные волны распространяются со скоростью света, которая практически всегда сохраняется при встрече с материальными объектами. Лишь сверхплотное вещество может уменьшить их скорость. Амплитуды этих волн уменьшаются при удалении от источника, но не падают до нуля, то есть они живут вечно. Это значит, что Вселенная пронизана реликтовыми волнами тяготения, что в них есть информация о строении «зародышевой» Вселенной. Но как её расшифровать? Появилось новое направление – исследование гравитационных волн от реликтового излучения.

2) Гравитационные волны поперечны. Следовательно, такая волна искажает структуру пространства в плоскости, перпендикулярной вектору распространения. В самом простом случае пространство растягивается и сжимается вдоль двух взаимно перпендикулярных направлений в этой плоскости. А это значит, что вы и всё вокруг вас сжимается по одной оси и расширяется по другой от проходящих через вас волн. Но растяжение и сжатие составляет одну миллиардную триллионной доли метра.

3) Гравитационные волны уносят энергию, которую они отбирают от излучаемого объекта. Но от земных источников излучение слабое. Если взять стальную колонну массой 10 тыс. т и, подвесив её за центр горизонтальной плоскости, раскрутить до десяти оборотов в секунду (намного быстрее нельзя – сталь начнётся рваться), мощность гравитационного излучения такой гигантской вертушки всего-то  $10^{-24}$  Вт. Поэтому источник гравитационного излучения и следовало искать в космосе. Так, при слиянии двух нейтронных звёзд максимальная мощность порядка  $10^{52}$  Вт. Но самый лучший источник излучения – столкновение чёрных дыр.

Как же измерили гравитационные волны? Для этого использовали интерферометр Майкельсона – крест, в соседних плечах которого располагается источник света

(лазер) и детектор, а в длинных – два зеркала: в конце с полным отражением, а ближе к перекрестью с очень высокой отражательной способностью. В 1962 году идею использовать лазер и подвешенные зеркала первыми предложили мои коллеги – советские физики М.Е.Герценштейн и В.И. Пустовойт, а двумя годами позже Джозеф Вебер (Yoseph Weber) – профессор Мэрилендского университета. В установке LIGO луч делится на два луча с идентичными характеристиками и, пройдя длинные плечи и отразившись от зеркал, лучи возвращаются на полупрозрачное зеркало и интерферируют. Если два луча, отправившиеся в разные плечи интерферометра, после отражения гасят друг друга (в простейшем случае там, где у одной волны максимум амплитуды, а у другой – минимум), то на детектор свет не попадает. Гравитационная волна расширяет одно плечо и сжимает другое. Лучи не приходят точно в противофазе, часть света попадает на детектор, и он фиксирует сигнал. Американский комплекс LIGO состоит из двух обсерваторий на расстоянии 3000 км. Одна находится на Тихоокеанском побережье США в Ханфорде в штате Вашингтон, другая в Ливингстоне в штате Луизиана. Длина длинных плеч достигает 4 км, расстояние от лазера до пересечения плеч составляет десяток метров. Применяется масса способов для достижения максимальной чувствительности, в частности, в плечах откачен воздух, опоры заглублены на 20 м до стабильных пластов земли и др. Установка способна почувствовать отклонение зеркала  $10^{-19}$  м (одна десятиллиардная часть метра). Что увидели детекторы LIGO? 14 сентября 2015 года был зафиксирован сигнал с амплитудой  $10^{-21}$  (на такую долю изменились плечи интерферометра) и длительностью примерно 20 мс на частоте от 35 до 250 Гц. Разнесенные на 3000 км интерферометры засекли волну с разницей 7 мс. Как выглядит зависимость относительного растяжения интерферометра от времени?\* Сначала идет шум, в котором начинают проявляться волны, которые идут всё чаще и чаще, а потом заканчиваются (каждая волна пол-оборота чёрных дыр, которые быстро сближаются, и время между пиками уменьшается). Последняя волна – это уже почти одна чёрная дыра, сильно деформированная. Чудо, что такой сигнал можно услышать!

В исследовании гравитационных волн необычайно велик вклад члена-корреспондента РАН профессора МГУ Владимира Борисовича Брагинского и его группы. В проекте LIGO с 1992 года участвовали исследователи этой группы и Нижегородского Института прикладной физики РАН. Об их исследованиях нужно писать не одну статью.

Что нам даёт открытие? Народному хозяйству – ничего, никаких «гравипап» (вспомните фильм «Кин-дза-дза»). Триумфу Эйнштейна это тоже ничего не добавит – профессиональные физики знали, что рано или поздно это будет.

Значение эксперимента заключается во взаимоотношении науки и общества. Оно огромно, поскольку обнаружение гравитационных волн демонстрирует мощь науки. Предсказали и обнаружили, вычисляли сложный процесс, связанный с огромными искривлениями пространства, и все оказалось правильно.

По словам Дэвида Рейнце, исполнительного директора LIGO, «Для науки – это посадка на Луну, и мы сделали это. Мы сели на Луну».

Научный руководитель ИРЭ РАН,  
академик РАН

*Ю.В. Гуляев*

---

\*Замечу, что масштаб по вертикали  $10^{-21}$ , что соответствует растяжению плеча интерферометра на  $4 \cdot 10^{-18}$  см. И какой бы фантастикой это ни казалось, умеют измерять растяжения до  $10^{-17}$  см!



## ИНДУЦИРОВАННЫЕ ШУМОМ ЭФФЕКТЫ В МОДЕЛИ БИСТАБИЛЬНОГО ОСЦИЛЛЯТОРА С ПЕРЕМЕННОЙ ДИССИПАЦИЕЙ

*В. В. Семенов<sup>1</sup>, А. Б. Нейман<sup>2</sup>, Т. Е. Вадивасова<sup>1</sup>, В. С. Анищенко<sup>1</sup>*

<sup>1</sup>Саратовский государственный университет, Россия

<sup>2</sup>Department of Physics and Astronomy, Ohio University, Athens, USA

Предложена модель бистабильного стохастического осциллятора с диссипацией, зависящей от динамических переменных, демонстрирующего стохастические бифуркации Р-типа и немонотонную зависимость средней частоты колебаний от интенсивности шума. Для количественного описания наблюдаемых эффектов вводятся эффективная интенсивность шума и эффективный потенциал.

*Ключевые слова:* Бистабильность, двухямный осциллятор, шум, стохастические бифуркации.

DOI:10.18500/0869-6632-2016-24-1-5-15

### Введение

Изучение влияния шума на динамические системы является актуальным направлением научных исследований в области нелинейной динамики. Это связано с присутствием различных источников внутренних и внешних шумов во всех реальных системах и устройствах, независимо от их физической природы, а также с той важной ролью, которую шум, даже при слабой интенсивности, может играть в нелинейных системах. Шум не просто разрушает динамические режимы, характерные для детерминированной системы, он может приводить к новым типам поведения или изменять характер бифуркаций (индуцированные шумом переходы и стохастические бифуркации [1–4]), поддерживать незатухающие колебания в бистабильных и возбудимых осцилляторах [5–8], управлять степенью регулярности стохастических колебаний (явления стохастического и когерентного резонансов [6–12]) и эффектами синхронизации (стохастическая синхронизация [7, 8, 10, 13–15] и синхронизация шумом [16–18]).

Особенно важна роль шума в так называемых стохастических осцилляторах, представляющих собой активные нелинейные системы, которые, в силу преобладания диссипации энергии над ее подкачкой, не способны поддерживать незатухающие колебания без воздействия внешних сил. В присутствии случайных воздействий

(шума) в таких системах возникают стохастические колебания, характеристики которых определяются как параметрами системы, так и свойствами шума. Выделяют две группы стохастических осцилляторов: возбудимые осцилляторы и бистабильные осцилляторы [7]. Возбудимые осцилляторы характеризуются устойчивым состоянием равновесия (покоя), из которого система может перейти в неустойчивое состояние возбуждения, если воздействие оказывается достаточно сильным (превышает некоторый порог возбуждения). Далее система возвращается в исходное состояние сама, вне зависимости от внешних воздействий, и может снова возбудиться только через некоторое время [7, 8]. Бистабильные осцилляторы – это системы с двумя устойчивыми состояниями. В общем случае этим состояниям могут соответствовать два любых аттрактора (в том числе хаотических), со своими бассейнами притяжения. В простейшем и наиболее изученном случае бистабильный осциллятор представляет собой систему с двумя устойчивыми точками равновесия [5–7]. Шум заставляет осциллятор случайным образом переключаться из одного состояния равновесия в другое, поддерживая таким образом стохастические колебания.

Стохастические эффекты в бистабильных системах хорошо известны. К ним относятся уже упомянутые явления стохастического резонанса [6, 7, 9, 10], стохастической синхронизация [7, 10, 13, 14], а также эффект индуцированного шумом хаоса [19, 20]. Классическим примером стохастического бистабильного осциллятора является осциллятор Крамерса [5, 6]. Он представляет собой стохастический осциллятор с одной степенью свободы, характеризующийся двухъямным потенциалом и постоянной диссипацией. В общем виде такой осциллятор описывается стохастическим дифференциальным уравнением вида

$$\ddot{y} + \gamma \dot{y} + \frac{\partial U(y)}{\partial y} = \sqrt{2\gamma D} n(t), \quad (1)$$

где  $\gamma$  – постоянный коэффициент диссипации,  $U(y)$  – потенциальная функция,  $n(t)$  – нормированный источник шума ( $\langle n(t) \rangle \equiv 0$ ,  $\langle n(t)n(t+\tau) \rangle = \delta(\tau)$ , скобки  $\langle \dots \rangle$  означают статистическое усреднение,  $\delta(\tau)$  – функция Дирака),  $D$  – интенсивность шума. Поведение такого осциллятора хорошо изучено с применением аналитических методов и описано в научной литературе (см., например, [6,22]). Для осциллятора (1) с конечным трением ( $\gamma \neq \infty$ ) зависимость  $y(t)$  является гладкой функцией. В этом случае для характеристики средней частоты стохастических колебаний удобно использовать частоту Райса [21,22]. Она определяется как  $\omega_R = 2\pi M/T$ , где  $M$  – число переходов переменной  $y$  через ноль в одном направлении за время наблюдения  $T \rightarrow \infty$ . Для осциллятора (1) с  $\gamma = 1$  частота Райса удовлетворяет следующему соотношению [21]:

$$\langle \omega_R \rangle = \frac{\sqrt{2\pi D} \exp \left\{ -\frac{U(0)}{D} \right\}}{\int_{-\infty}^{\infty} \exp \left\{ -\frac{U(y)}{D} \right\} dy}. \quad (2)$$

В бистабильных осцилляторах типа (1) с ростом интенсивности шума частота Райса монотонно растет [21]. При этом не наблюдается качественных изменений

формы вероятностного распределения  $p(y, \dot{y})$ , то есть отсутствуют стохастические бифуркации Р-типа (феноменологические бифуркации) [3, 4], хотя при малой диссипации возможна стохастическая бифуркация D-типа, связанная с возникновением экспоненциальной неустойчивости стохастических траекторий [3, 19, 20].

В данной работе предлагается стохастический бистабильный осциллятор, качественно отличный от осциллятора (1), который, в зависимости от значений управляющих параметров, может демонстрировать более сложное и разнообразное поведение. Применяется численное интегрирование стохастических дифференциальных уравнений осциллятора по модифицированной схеме Эйлера–Коши [23] с учетом гауссова белого шума. В результате статистической обработки данных интегрирования строятся вероятностные распределения и вычисляется частота Райса. Сопоставление численных результатов с теоретическими соотношениями, справедливыми для осциллятора (1), позволяет ввести эффективные характеристики предлагаемой бистабильной модели.

## 1. Модель бистабильного осциллятора с переменной диссипацией

Рассмотрим схему параллельного контура, представленную на рис. 1. Контур содержит два, в общем случае, нелинейных элемента  $N_1, N_2$  с вольтамперными характеристиками  $S$ - и  $N$ -типа, задаваемыми некоторыми функциями  $i_{N1} = F(U)$ ,  $U_{N2} = P(i)$ , и источник шумового тока  $i_{noise}(t)$ , который будем полагать белым и гауссовым. Уравнения контура в безразмерных переменных имеют вид

$$\varepsilon \dot{x} = -y - F(x) + \sqrt{2D}n(t), \quad \dot{y} = x - P(y), \quad (3)$$

где  $x$  – безразмерное напряжение на конденсаторе, а  $y$  – безразмерный ток, протекающий через катушку; время  $t$ , параметр  $\varepsilon \sim C/L$ , а также коэффициенты, входящие в выражения для функций  $F(x)$  и  $P(y)$ , являются безразмерными. Пер-

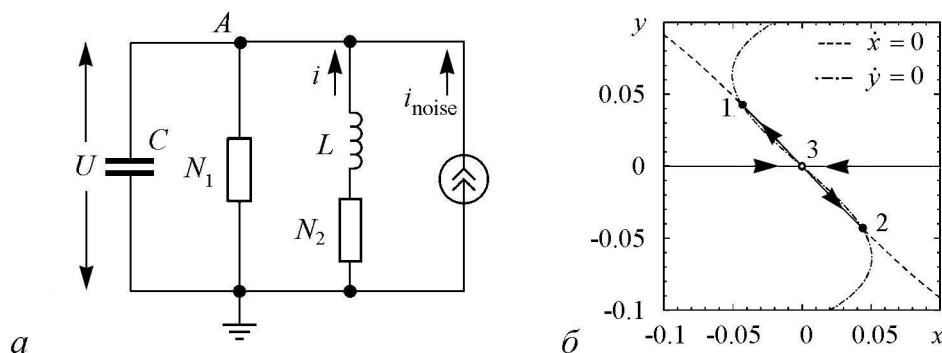


Рис. 1. Радиотехническая схема исследуемого осциллятора (3) (а) и вид фазовой плоскости (б) в случае нелинейности (6). Значения параметров:  $a = 1.2$ ,  $b = 100$ ,  $\varepsilon = 0.01$ ,  $c_1 = 1$ ,  $c_3 = 9$ ,  $c_5 = 22$ ,  $D = 0$ . На схеме используются обозначения:  $U$  – напряжение на емкости,  $i$  – ток в цепи индуктивности,  $i_{noise}$  – источник шумового тока. На фазовой плоскости отмечены две устойчивые точки равновесия «1» и «2»; точка «3» – седло в начале координат; изображены нульклины  $\dot{x} = 0$  и  $\dot{y} = 0$ ; линии со стрелками – сепаратрисы седла

вое уравнение содержит источник аддитивного белого гауссова шума с интенсивностью  $D$ . Выбор функций  $F(x)$  и  $P(y)$  позволяет получить широкий спектр динамических режимов, от режимов, аналогичных поведению осциллятора (1) с двухъямным потенциалом, до динамики возбудимого осциллятора и бистабильности в режиме автоколебаний.

Положим  $P(y) = -ay + by^3$ ,  $a, b > 0$ . Зафиксируем значения  $a = 1.2$ ,  $b = 100$ ,  $\varepsilon = 0.01$  и рассмотрим влияние на поведение системы нелинейного элемента  $N_1$  с характеристикой  $S$ -типа (см. рис. 1). Пусть первое уравнение является линейным

$$F(x) = c_1 x, \quad c_1 > 0, \quad (4)$$

тогда в осцилляторной форме получаем следующее уравнение исследуемой системы:

$$\ddot{y} + (3by^2 - a + kc_1)\dot{y} + ky(1 - c_1a + c_1by^2) = -k\sqrt{2D}n(t), \quad (5)$$

где  $k = 1/\varepsilon$ . При достаточно малом значении параметра  $\varepsilon$  влиянием слагаемого  $3by^2 - a$  на диссипацию можно пренебречь. В этом случае осциллятор (5) аналогичен бистабильному осциллятору (1). Численные исследования осциллятора (5) свидетельствуют о монотонном поведении частоты Райса и отсутствии стохастических бифуркаций при любом значении  $\varepsilon$ .

Учтем нелинейное сопротивление  $N_1$  и выберем функцию  $F(x)$  в виде

$$F(x) = c_1 x - c_3 x^3 + c_5 x^5, \quad c_1, c_3, c_5 > 0. \quad (6)$$

Вид фазовой плоскости, соответствующий этому случаю при  $D = 0$ ,  $a = 1.2$ ,  $b = 100$ ,  $\varepsilon = 0.01$ ,  $c_1 = 1$ ,  $c_3 = 9$ ,  $c_5 = 22$ , приведен на рис. 1, б. В системе имеются две устойчивые точки равновесия типа устойчивый узел, расположенные симметрично относительно седла в начале координат. Бассейны их притяжения разделены устойчивой сепаратрисой седла. По виду фазовой плоскости динамических переменных  $x$ ,  $y$  трудно сделать вывод об особенностях поведения исследуемого бистабильного осциллятора.

В осцилляторной форме система (3), (6) принимает вид

$$\ddot{y} + q_1(y, \dot{y})\dot{y} + kq_2(y) = -k\sqrt{2D}n(t), \quad (7)$$

где функция  $q_2(y)$  определяет форму потенциала, а  $q_1(y, \dot{y})$  есть нелинейное трение. Эти функции задаются следующими выражениями:

$$\begin{aligned} q_1(y, \dot{y}) = -a + 3by^2 + k \left( c_1 - c_3 \sum_{n=1}^3 \frac{3!}{n!(3-n)!} \dot{y}^{n-1} (by^2 - a)^{3-n} y^{3-n} + \right. \\ \left. + c_5 \sum_{n=1}^5 \frac{5!}{n!(5-n)!} \dot{y}^{n-1} (by^2 - a)^{5-n} y^{5-n} \right), \\ q_2(y) = y + c_1(by^2 - a)y - c_3(by^2 - a)^3 y^3 + c_5(by^2 - a)^5 y^5. \end{aligned}$$



Важно отметить, что коэффициент трения зависит не только от переменной  $y$ , но и от скорости  $\dot{y}$ . Сложная зависимость диссипации от переменных  $y$  и  $\dot{y}$  является причиной качественного отличия поведения осциллятора (7) от (1) и (5).

## 2. Эволюция вероятностного распределения и частота Райса в бистабильном осцилляторе с переменной диссипацией

Рассмотрим эволюцию плотности вероятности динамических переменных в осцилляторе (3) с нелинейностью (6), зафиксировав параметры, соответствующие бистабильному режиму с двумя устойчивыми точками равновесия (см. рис. 1, б), и меняя интенсивность шума  $D$ . При малом шуме вероятностное распределение  $p(y)$  имеет два локальных максимума, соответствующих равновесиям внутри потенциальных ям. С ростом шума последовательно происходят две стохастические бифуркации: переход к унимодальному распределению  $p(y)$  (с одним максимумом), а затем, снова к распределению с двумя максимумами. Соответствующие кривые приведены на рис. 2, а. Для переменной  $x$  стохастическая бифуркация не наблюдается – распределение  $p(x)$  при любом шуме остается унимодальным (рис. 2, б).

Одним из следствий стохастических бифуркаций является немонотонный характер зависимости дисперсии колебаний динамической переменной  $y$  с ростом шума (рис. 3): при малых уровнях шума наблюдается уменьшение дисперсии с ростом шума, которое затем сменяется ростом. Таким образом, существует интенсивность шума, при которой дисперсия колебаний  $y(t)$  минимальна. В то же время, дисперсия колебаний  $x(t)$  монотонно растет с ростом шума.

Стохастические бифуркации Р-типа в осцилляторе (3) с нелинейной диссипацией приводят к принципиально иной зависимости частоты Райса от интенсивности шума, которая не наблюдается в осцилляторах типа (1). Представим систему (3) в форме осцилляторного уравнения (7). Будем рассматривать частоту, с которой переменная  $y$  пересекает нулевое значение в одном направлении. Функция  $y(t)$  является

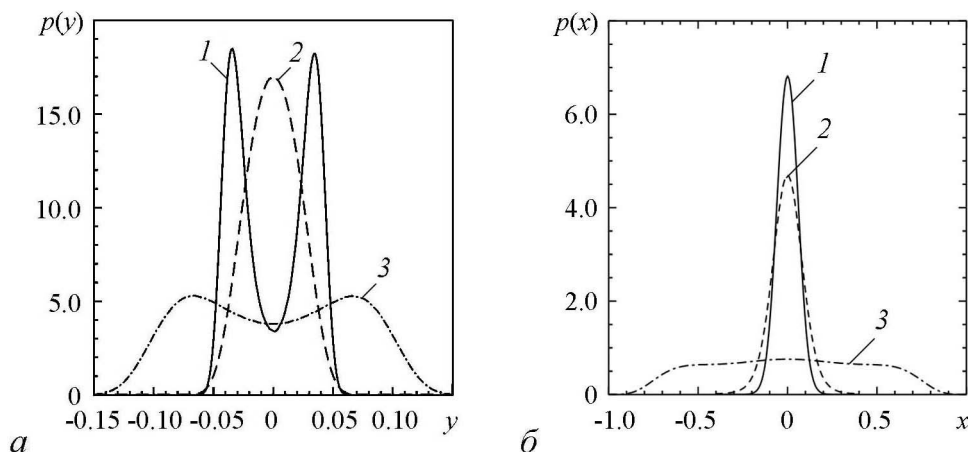


Рис. 2. Эволюция вероятностного распределения  $p$  колебаний  $y(t)$  (а) и  $x(t)$  (б) с ростом шума в осцилляторе (3) с нелинейностью (6) при  $a = 1.2$ ,  $b = 100$ ,  $\varepsilon = 0.01$ ,  $c_1 = 1$ ,  $c_3 = 9$ ,  $c_5 = 22$  и различных значений  $D$ : 1 –  $2 \cdot 10^{-5}$ ; 2 –  $6 \cdot 10^{-5}$ ; 3 –  $2.4 \cdot 10^{-3}$

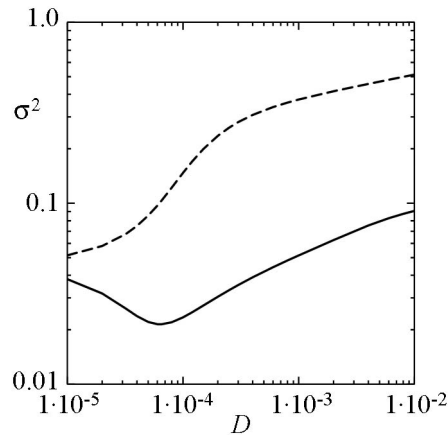


Рис. 3. Зависимость дисперсии колебаний  $y(t)$  (сплошная линия) и  $x(t)$  (штриховая линия) от интенсивности шума  $D$  в системе (3) с нелинейностью (6). Значения параметров осциллятора соответствуют рис. 2

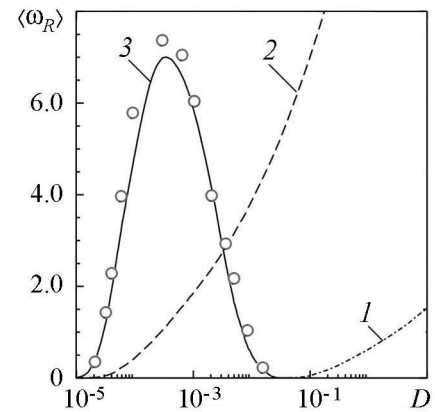


Рис. 4. Зависимость частоты Райса от интенсивности шума  $D$  для различных осцилляторов: 1 соответствует осциллятору (1) с потенциальной функцией  $U(y) = -1/2y^2 + 1/4y^4$ , при  $\gamma = 1$ ; 2 – осциллятору (5); 3 – осциллятору (7)

гладкой, что определяет выбор переменной  $y$  для вычисления частоты Райса. На рис. 4 приведены полученные численно зависимости частоты  $\omega_R$  от интенсивности шума  $D$  для осцилляторов (5), (7) и осциллятора (1) с двухъямным потенциалом. Для осцилляторов (5) и (1) зависимость  $\langle \omega_R \rangle$  от  $D$  имеет один характер (кривые 1 и 2) – частота Райса монотонно растет с ростом шума, что соответствует результатам, приведенным в [21]. Для осциллятора (7) зависимость является иной – частота Райса сначала растет с ростом шума, а затем, достигнув максимума, уменьшается до значений, близких к нулю (кривая 3).

### 3. Эффективные характеристики осциллятора

Эволюцию колебаний  $y(t)$  в системе (7) с ростом шума можно описать с помощью эффективной интенсивности шума  $D_{\text{эфф}}$  и эффективного потенциала  $U_{\text{эфф}}$ . Такая возможность обусловлена тем, что совместное стационарное распределение переменных  $y$  и  $\dot{y}$  в осцилляторе (7) может быть представлено в виде, аналогичном распределению, полученному теоретически для осциллятора (1) [21,22]. Оно имеет вид

$$p(y, \dot{y}) = C \exp \left\{ -\frac{1}{D_{\text{эфф}}} \left( \frac{\dot{y}^2}{2} + U_{\text{эфф}}(y) \right) \right\}, \quad (8)$$

где  $C$  – нормировочная константа. Эффективные значения  $D_{\text{эфф}}$  и  $U_{\text{эфф}}(y)$  определяются на основании аппроксимации вероятностных распределений переменных  $y$  и  $\dot{y}$ , полученных численно при заданном уровне шума. Как показали расчеты, распределение  $p(\dot{y})$  всегда является унимодальным и близко к гауссову распределению.

Значение  $D_{\text{эфф}}$  равно дисперсии скорости  $\dot{y}$ . Для плотности вероятности переменной  $y$  из (8) следует выражение  $p(y) = C \exp \{-U_{\text{эфф}}(y)/D_{\text{эфф}}\}$ . Эффективный потенциал задавался в виде  $U_{\text{эфф}} = -AU^2 + BU^4$ . Полученные по формуле значения  $p(y)$  сопоставлялись с результатами компьютерных расчетов, и по методу наименьших квадратов определялись коэффициенты  $A$  и  $B$ . На рис. 5 приведены кривые  $U_{\text{эфф}}(y)$ , рассчитанные для различных значений  $D$ . Качественные перестройки формы эффективного потенциала соответствуют описанным ранее стохастическим бифуркациям (см. рис. 2, а). Частоту Райса можно вычислить по формуле (2) с соответствующей заменой  $D \rightarrow D_{\text{эфф}}$ ,  $U(y) \rightarrow U_{\text{эфф}}(y)$ . На рис. 4 кружками отмечены значения частоты Райса, полученные для осциллятора (7) с использованием эффективных характеристик  $D_{\text{эфф}}$ ,  $U_{\text{эфф}}(y)$  и выражения (2).

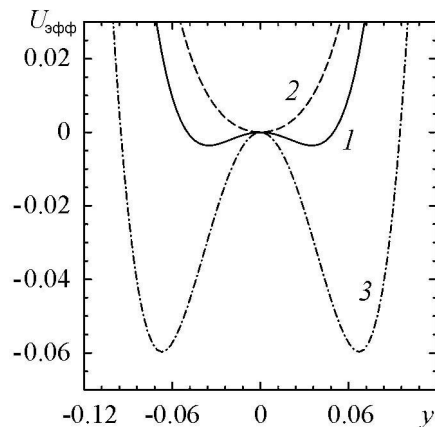


Рис. 5. Эффективный потенциал  $U_{\text{эфф}}(y)$  осциллятора (7), рассчитанный для различных значений интенсивности шума  $D$ : 1 –  $2 \cdot 10^{-5}$ ; 2 –  $6 \cdot 10^{-5}$ ; 3 –  $2.4 \cdot 10^{-3}$ . Значения параметров осциллятора (7) соответствуют рис. 2

## Выводы

Предложена новая характерная модель бистабильного осциллятора с нелинейной диссипацией, демонстрирующая стохастические бифуркации Р-типа и немонотонную зависимость средней частоты стохастических колебаний от интенсивности шума. Введение эффективной интенсивности шума и эффективного потенциала позволяет описать поведение данной модели, используя известные аналитические соотношения, полученные для осцилляторов с постоянной диссипацией.

*Работа поддержана грантом РФФИ (№ 15-02-02288) и Министерством образования и науки РФ в рамках гос. задания (код проекта 1008).*

## Библиографический список

1. Хорстхемке В., Лефевр Р. Индуцированные шумом переходы. М.: Мир, 1987.
2. Graham R. Macroscopic potentials, bifurcations and noise in dissipative systems // Noise in Nonlinear Dynamical Systems. Vol.1: Theory of Continuous Fokker-Planck systems / Ed. by. F. Moss and P.V.E. McClintock. Cambridge: Cambridge University Press, 1989.
3. Arnold L. Random Dynamical System. Berlin: Springer, 2003.
4. Sri Namachshivaya N. Stochastic bifurcation // Appl. Math. and. Computation. 1990. Vol. 38. P. 101.
5. Kramers H.A. Brownian motion in a field of force and the diffusion model of chemical reactions // Physica. 1940. Vol. 7. P. 284.

6. *Hänggi P., Talkner P., Borkovec M.* Reaction rate theory: Fifty years after Kramers // *Rev. Mod. Phys.* 1990. Vol. 62. P. 251.
7. *Анищенко В.С., Астахов В.В., Вадивасова Т.Е., Нейман А.Б., Стрелкова Г.И., Шиманский-Гайер Л.* Нелинейные эффекты в хаотических и стохастических системах. М.–Ижевск: Инст. компьютер. исслед., 2003.
8. *Lindner B., Garcia-Ojalvo J., Neiman A., Schimansky-Geier L.* Effects of noise in excitable systems // *Physics Reports*. 2004. Vol. 392. P. 321.
9. *Gammaitoni L., Marchesoni F., Menichella-Saetta E., Santucci S.* Stochastic resonance in bistable systems // *Phys. Rev. Lett.* 1989. Vol. 62. P. 349.
10. *Анищенко В.С., Нейман А.Б., Мосс Ф., Шиманский-Гаер Л.* Стохастический резонанс: Индуцированный шумом порядок // *УФН*. 1999. Т. 42, № 1. С. 7.
11. *Pikovsky A., Kurths J.* Coherence resonance in a noisy driven excitable system // *Phys. Rev. Lett.* 1997. Vol. 78. P. 775.
12. *Lindner B., Schimansky-Geier L.* Analytical approach to the stochastic FitzHugh–Nagomo system and coherence resonance // *Phys. Rev. E*. 1999. Vol. 60, № 6. P. 7270.
13. *Neiman A.B.* Synchronizationlike phenomena in coupled stochastic bistable systems // *Phys. Rev. E*. 1994. Vol. 49. P. 3484.
14. *Shulgin B., Neiman A., Anishchenko V.* Mean switching frequency locking in stochastic bistable system driven by a periodic force // *Phys. Rev. Lett.* 1995. Vol. 75, № 23. P. 4157.
15. *Han S.K., Yim T.G., Postnov D.E., Sosnovtseva O.V.* Interacting coherence resonance oscillators // *Phys. Rev. Lett.* 1999. Vol. 83, № 9. P. 1771.
16. *Sánchez E., Matías M.A., Pérez-Muñuzuri V.* Analysis of synchronization of chaotic systems by noise: An experimental study // *Phys. Rev. E*. 1997. Vol. 56, № 4. P. 40.
17. *Goldobin D.S., Pikovsky A.* Synchronization and desynchronization of self-sustained oscillators by common noise // *Phys. Rev. E*. 2005. Vol. 71. P. 045201(4).
18. *Короновский А.А., Москаленко О.И., Трубецков Д.И., Храмов А.Е.* Обобщенная синхронизация и синхронизация, индуцированная шумом, единый тип поведения связанных хаотических систем // *ДАН*. 2006. Т. 407, № 6. С. 761.
19. *Schimansky-Geier L., Herzel H.* Positive Lyapunov exponents in the Kramers oscillator // *Journal of Statistical Physics*. 1993. Vol. 70. P. 141.
20. *Arnold L., Imkeller P.* Stochastic bifurcation of the noisy Duffing oscillator. Report. Institut für Dynamische Systeme, Universität Bremen, 2000.
21. *Freund J.A., Schimansky-Geier L., Hänggi P.* Frequency and phase synchronization in stochastic systems // *Chaos*. 2003. Vol. 13. P. 225.
22. *Rice S.O.* Mathematical analysis of random noise // *Bell System Tech. J.* 1944. Vol. 23. P. 282 (first part); 1945. Vol. 24. P. 46 (second part).

23. Никитин Н.Н., Разевиг В.Д. Методы цифрового моделирования стохастических дифференциальных уравнений и оценка их погрешностей // Журнал вычислит. математики и мат. физики. 1978. Том. 18, № 1. С. 107.

Поступила в редакцию 21.12.2015

После доработки 23.02.2016

## NOISE-INDUCED EFFECTS IN THE DOUBLE-WELL OSCILLATOR WITH VARIABLE FRICTION

V. V. Semenov<sup>1</sup>, A. B. Neiman<sup>2</sup>, T. E. Vadivasova<sup>1</sup>, V. S. Anishchenko<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Saratov State University

<sup>2</sup>Department of Physics and Astronomy, Ohio University

A model of bistable stochastic oscillator with dynamical variables depending on dissipation is offered. Considered system demonstrates stochastic P-bifurcations and non-monotonic dependence of the mean oscillation frequency on the noise intensity. An effective noise intensity and an effective potential are introduced for a quantitative description of the observed effects.

**Keywords:** Bistability, double-well oscillator, noise, stochastic bifurcations.

DOI:10.18500/0869-6632-2016-24-1-5-15

### References

1. Horsthemke W., Lefever R. Noise-induced Transitions. Berlin: Springer, 1984.
2. Graham R. Macroscopic potentials, bifurcations and noise in dissipative systems // Noise in Nonlinear Dynamical Systems. Vol.1: Theory of Continuous Fokker-Planck Systems / Ed. by. F. Moss and P.V.E. McClintock. Cambridge: Cambridge University Press, 1989.
3. Arnold L. Random Dynamical System. Berlin: Springer, 2003.
4. Sri Namachshivaya N. Stochastic bifurcation// Appl. Math. And Computation. 1990. Vol. 38. P. 101.
5. Kramers H.A. Brownian motion in a field of force and the diffusion model of chemical reactions // Physica. 1940. Vol. 7. P. 284.
6. Hänggi P., Talkner P., Borkovec M. Reaction rate theory: Fifty years after Kramers // Rev. Mod. Phys. 1990. Vol. 62. P. 251.
7. Anishchenko V., Astakhov V., Neiman A., Vadivasova T., Schimansky-Geier L. Nonlinear Dynamics of Chaotic and Stochastic Systems. Second Edition. Berlin: Springer, 2007.
8. Lindner B., Garcia-Ojalvo J., Neiman A., Schimansky-Geier L. Effects of noise in excitable systems // Physics Reports. 2004. Vol. 392. P. 321.
9. Gammaitoni L., Marchesoni F., Menichella-Saetta E., Santucci S. Stochastic resonance in bistable systems// Phys. Rev. Lett. 1989. Vol. 62. P. 349.

10. *Anishchenko V.S., Neiman A.B., Moss F., Schimansky-Geier L.* Stochastic resonance: Noise-enhanced order // *Phys. Usp.* 1989. Vol. 42. P. 7.
11. *Pikovsky A., Kurths J.* Coherence resonance in a noisy driven excitable system // *Phys. Rev. Lett.* 1997. Vol. 78. P. 775.
12. *Lindner B., Schimansky-Geier L.* Analytical approach to the stochastic FitzHugh–Nagumo system and coherence resonance // *Phys. Rev. E.* 1999. Vol. 60, № 6. P. 7270.
13. *Neiman A.B.* Synchronization like phenomena in coupled stochastic bistable systems // *Phys. Rev. E.* 1994. Vol. 49. P. 3484.
14. *Shulgin B., Neiman A., Anishchenko V.* Mean switching frequency locking in stochastic bistable system driven by a periodic force // *Phys. Rev. Lett.* 1995. Vol. 75, № 23. P. 4157.
15. *Han S.K., Yim T.G., Postnov D.E., Sosnovtseva O.V.* Interacting coherence resonance oscillators // *Phys. Rev. Lett.* 1999. Vol. 83, № 9. P. 1771.
16. *Sánchez E., Matías M.A., Pérez-Muñuzuri V.* Analysis of synchronization of chaotic systems by noise: An experimental study // *Phys. Rev. E.* 1997. Vol. 56, № 4. P. 40.
17. *Goldobin D.S., Pikovsky A.* Synchronization and desynchronization of self-sustained oscillators by common noise // *Phys. Rev. E.* 2005. Vol. 71. P. 045201(4).
18. *Koronovskii A.A., Moskalenko O.I., Trubetskov D.I., Khramov A.E.* Generalized synchronization and noise-induced synchronization: the same type of behavior of coupled chaotic systems // *Doklady Physics.* 2006. Vol. 51. P. 189.
19. *Schimansky-Geier L., Herzel H.* Positive Lyapunov exponents in the Kramers oscillator // *Journal of Statistical Physics.* 1993. Vol. 70. P. 141.
20. *Arnold L., Imkeller P.* Stochastic bifurcation of the noisy Duffing oscillator. Report, Institut für Dynamische Systeme. Universität Bremen, 2000.
21. *Freund J.A., Schimansky-Geier L., Hänggi P.* Frequency and phase synchronization in stochastic systems // *Chaos.* 2003. Vol. 13, P. 225.
22. *Rice S.O.* Mathematical analysis of random noise // *Bell System Tech. J.* 1944. Vol. 23. P. 282. Part 1; 1945. Vol. 24. P. 46. Part 2.
23. *Nikitin N.N., Razevig V.D.* Digital simulation of stochastic differential equations and error estimates // *USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics.* 1978. Vol. 18. P. 102.

*Ссылка на статью:* Семенов В.В., Нейман А.Б., Вадивасова Т.Е., Анищенко В.С. Индуцированные шумом эффекты в модели бистабильного осциллятора с переменной диссипацией // *Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика.* 2016. Т. 24, № 1. С. 5–15.

*Paper's reference:* Semenov V.V., Neiman A.B., Vadivasova T.E., Anishchenko V.S. Noise-induced effects in the double-well oscillator with variable friction // *Izvestija VUZ. Applied Nonlinear Dynamics.* 2016. Vol. 24, № 1. P. 5–15.



*Семенов Владимир Викторович* – родился в Саратове (1990). Окончил физический факультет Саратовского государственного университета (2012). Аспирант физического факультета СГУ кафедры радиофизики и нелинейной динамики. Область научных интересов – влияние шумов в нелинейных системах, системы с запаздывающей обратной связью, химерные состояния, методы управления динамическими системами, исследование нелинейных явлений в натурном радиофизическом эксперименте. Автор более 15 научных публикаций.

410012 Саратов, Астраханская, 83  
Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского  
E-mail: semenov\_v\_v@list.ru



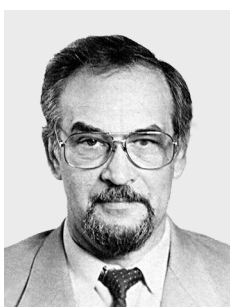
*Нейман Александр Борисович* – родился в Саратове (1962). Окончил Саратовский государственный университет (1984). Получил степень кандидата физ.-мат. наук (1991, СГУ) и степень доктора физ.-мат. наук (1998, СГУ). В настоящее время занимает должность профессора на факультете физики и астрономии Университета Огайо (Афины, Огайо, США). Автор более 100 научных работ. Научные интересы включают биофизику сенсорных систем, вычислительную нейронауку, нелинейную динамику стохастических систем.

Ohio University, Athens, Ohio 45701, USA  
E-mail: neiman@phy.ohiou.edu



*Вадивасова Татьяна Евгеньевна* – родилась в Саратове (1958). Окончила физический факультет Саратовского государственного университета (1981), доктор физико-математических наук. В настоящее время – профессор кафедры радиофизики и нелинейной динамики физического факультета СГУ. Научные интересы сосредоточены в области нелинейной динамики и статистической радиофизики: эффекты синхронизации в ансамблях хаотических и стохастических осцилляторов, волновые структуры в активных средах, свойства различных типов нерегулярных аттракторов, влияние шума и стохастические эффекты в нелинейных системах и др. Автор более 130 публикаций в рецензируемых отечественных и зарубежных изданиях.

410012 Саратов, Астраханская, 83  
Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского  
E-mail: vadivasovate@yandex.ru



*Анищенко Вадим Семенович* – родился в 1943 году. Окончил физический факультет СГУ (1966). Защитил диссертацию на звание кандидата физико-математических наук (1970) и доктора физико-математических наук (1986). С 1988 года – заведующий кафедрой радиофизики и нелинейной динамики СГУ. С 1979 и по настоящее время работает в области исследования нелинейной динамики и стохастических процессов в нелинейных системах. Является автором более чем 450 научных работ и более чем 20 научных монографий и учебников на русском и английском языках. Неоднократно читал лекции в ведущих вузах Германии в качестве приглашенного профессора. Заслуженный деятель науки РФ (1995), Соросовский профессор, лауреат Премии Фонда Александра Гумбольдта (1999).

410012 Саратов, Астраханская, 83  
Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского  
E-mail: wadim@info.sgu.ru



## СТРАННЫЙ НЕХАОТИЧЕСКИЙ АТТРАКТОР ТИПА ХАНТА И ОТТА В СИСТЕМЕ С КОЛЬЦЕВОЙ ГЕОМЕТРИЕЙ

*В. М. Дорошенко*

Саратовский национальный исследовательский государственный университет

Рассмотрена физически реализуемая система кольцевой структуры, где при фиксированном иррациональном отношении базовых частот внешнего воздействия («золотое среднее») имеет место странный нехаотический аттрактор, аналогичный аттрактору в абстрактной модели отображения на торе, предложенному и проанализированному ранее Хантом и Оттом, как пример грубого странного нехаотического аттрактора. Представлены данные моделирования динамики на основе численного решения соответствующей неавтономной системы дифференциальных уравнений с квазипериодической зависимостью коэффициентов от времени. Продемонстрировано, что для введенных определенным образом фазовых переменных динамика за характерный период согласуется по топологии с моделью Ханта и Отта. Показано, что рождение странного нехаотического аттрактора соответствует критерию Пиковского–Фойдель. Представлены расчеты, свидетельствующие, что порождаемые системой фурье-спектры в режиме странного нехаотического аттрактора относятся к промежуточному классу между сплошными и дискретными спектрами (сингулярно-непрерывный спектр).

*Ключевые слова:* Странный нехаотический аттрактор, отображение Ханта и Отта, грубость, фрактальная структура, сингулярно-непрерывный спектр.

DOI:10.18500/0869-6632-2016-24-1-16-30

### Введение

Нелинейные системы, динамика которых протекает в присутствии зависящего от времени внешнего воздействия, играют значительную роль в науке и технике. Даже в том случае, когда воздействие периодическое, может возникать интересное поведение, сопровождаемое разнообразными нетривиальными эффектами, включая переходы от периодической динамики к хаотической и наоборот.

Если обратиться к рассмотрению более сложного воздействия, например, квазипериодического, при помощи суперпозиции двух гармонических сигналов с иррациональным соотношением частот, то оказывается возможным появление, в частности, таких интересных режимов динамики со специфическими свойствами, как странные нехаотические аттракторы (СНА) [1].

Аттракторы такого типа являются нехаотическими в том смысле, что принадлежащие им фазовые траектории не обладают экспоненциальной чувствительностью



к возмущениям (нет положительных показателей Ляпунова), но, в то же время, структура аттрактора как объекта в фазовом пространстве характеризуется фрактальными свойствами [2]. Такого рода объект впервые был введен в рассмотрение в 1984 году [1]. С тех пор аттракторы данного типа, довольно широко исследуются в системах с квазипериодическим воздействием. Они изучались на различных примерах теоретически, численно [3–17] и экспериментально [18–27]. Несмотря на это, следует отметить, что до сих пор не предложено метода, позволяющего с определенностью диагностировать присутствие СНА на основе численных расчетов. Все известные подходы не дают полной гарантии, что исследуемый аттрактор является странным, то есть сохраняет фрактальную структуру в сколь угодно малых масштабах. Чаще всего СНА является структурой, крайне чувствительной к вариации параметров, так как располагается у границы между регулярными и хаотическими режимами. Соответствующие области в пространстве параметров имеют сложное устройство, и при небольших изменениях управляющего параметра может иметь место трансформация СНА в аттрактор в виде гладкого тора или в странный хаотический аттрактор.

Специальный интерес представляет СНА, введенный Хантом и Оттом для отображений на торе с определенными топологическими свойствами, опираясь на которые, оказывается возможным природу аттрактора обосновать строго [15]. Более того, этот аттрактор, в предположении фиксированного и не подлежащего вариации иррационального отношения базовых частот, характеризуется свойством грубости (робастности), то есть динамика не чувствительна к выбору значений параметров и конкретного вида отображения [15–17].

Модель, предложенная Хантом и Оттом, описывается отображением

$$\begin{aligned}\phi_{n+1} &= \phi_n + \theta_n + \eta F(\phi_n, \theta_n) \pmod{2\pi}, \\ \theta_{n+1} &= \theta_n + 2\pi\omega \pmod{2\pi},\end{aligned}\tag{1}$$

где  $\eta F(\phi_n, \theta_n)$  – непрерывная, гладкая функция, имеющая период  $2\pi$  по обоим аргументам;  $\eta$  – параметр нелинейности;  $\omega$  – иррациональный параметр, характеризующий частоту квазипериодического воздействия.

В качестве конкретного примера можно рассмотреть отображение (1) с нелинейной функцией  $F(\phi_n, \theta_n) = \sin(2\phi)$ , задав параметр частоты иррациональным числом  $\omega = (\sqrt{5} - 1)/2$  (обратное «золотое среднее»).

Согласно анализу Ханта и Отта, подоплёкой присутствия грубого СНА служит

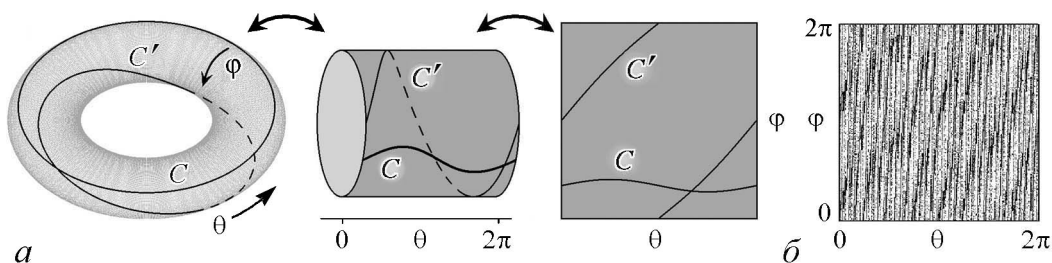


Рис. 1. *a* – схематическое изображение результата однократного действия отображения (1) на замкнутую кривую, обходящую тор в направлении  $\theta$ ; *б* – фазовый портрет СНА в отображении (1) при  $\eta F(\phi_n, \theta_n) = \sin(2\phi)$ ,  $\omega = (\sqrt{5} - 1)/2$ ,  $\eta = 0.3$

топологическая природа отображений на двумерном торе (рис. 1, *a*). А именно, кривая  $C$ , огибающая тор вдоль параллели, трансформируется при воздействии отображения в кривую  $C'$ , совершающую один оборот по меридиану и один по параллели. При каждой новой итерации отображения, у образа количество витков по меридиану увеличивается на единицу, а в пределе большого числа шагов стремится к бесконечности. Наличие неоднородности, обусловленной добавленным в первое уравнение нелинейным членом, имеет следствием фрактальную природу распределения инвариантной меры на аттракторе, о чем можно судить по виду диаграммы на рис. 1, *б*, представленной на плоскости переменных  $(\theta, \phi)$  при  $\eta = 0.3$  [28].

Модель Ханта и Отта является абстрактной, и вопрос нахождения реальных систем, в которых присутствовали бы США именно такого типа, нетривиален. В качестве единственного на данный момент конкретного примера в работе А.Ю. Жалнина и С.П. Кузнецова [28] предложена и исследована численно неавтономная система, составленная из попеременно возбуждающихся автоколебательных элементов.

В статье рассматривается альтернативный вариант построения системы с аттрактором типа Ханта и Отта в виде кольцевой схемы, составленной из линейных фильтров второго порядка с включением усилительного нелинейного элемента и квазипериодической модуляцией коэффициентов передачи между элементами внешним воздействием с двумя несоизмеримыми частотами.

## 1. Описание системы

Рассмотрим кольцевую систему из двух связанных неавтономных осцилляторов, которым отвечают обобщённые координаты  $x$  и  $y$ . Модельные уравнения системы имеют вид

$$\begin{aligned}\ddot{x} + \gamma\dot{x} + \omega_0^2 x &= \varepsilon \frac{d}{dt} y \sin(\omega_0 t + \theta), \\ \ddot{y} + \gamma\dot{y} + 4\omega_0^2 y &= \varepsilon \frac{d}{dt} \left( \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \alpha^2 g(t) \sin(\omega_0 t) \right), \\ \dot{\theta} &= \frac{2\pi\omega}{T}, \quad \omega = \frac{\sqrt{5}-1}{2}.\end{aligned}\tag{2}$$

В уравнениях (2) параметр  $\omega_0$  – собственная частота первого осциллятора,  $2\omega_0$  – собственная частота второго осциллятора,  $\gamma$  – коэффициент затухания,  $\varepsilon$  – параметр,  $\alpha$  – коэффициент усиления. Параметр  $\omega$  – определен иррациональным числом «золотое среднее», что традиционно для исследований в области квазипериодической динамики в силу простоты представления этого числа цепной дробью и удобства соответствующего теоретического анализа.

Воздействие первого осциллятора на второй описывается комбинационным членом, стоящим в правой части второго уравнения и представляющим собой произведение нелинейной функции  $x/\sqrt{1+x^2}$ , периодической функции времени  $g(t)$  и опорного периодического сигнала под знаком производной.

Функция  $g(t)$  описывает модуляцию внешнего сигнала частоты  $\omega_0$ , состоящую в том, что модулирующий сигнал включается на короткие интервалы времени длительности  $\tau$ , следующие с периодом  $T = (2\pi N)/\omega_0$ ,

$$g(t) = \begin{cases} 1, & nT \leq t < \tau, \\ 0, & nT + \tau \leq t < (n+1)T. \end{cases} \quad (3)$$

Здесь  $N$  – целое число и результирующий сигнал является периодическим.

Воздействию второго осциллятора на первый отвечает комбинационный член в первом уравнении, заданный в виде произведения сигнала второго осциллятора на опорный сигнал с частотой, состоящей в иррациональном отношении с собственной частотой первого осциллятора из-за поправки, обусловленной линейно зависящей от времени величиной  $\theta$ .

Вводя в дополнение к обобщенным координатам обобщенные скорости  $u$  и  $v$ , перейдем к системе из дифференциальных уравнений первого порядка

$$\begin{aligned} \dot{x} &= u + \varepsilon y(\sin \omega_0 t \cos \theta + \sin \theta \cos \omega_0 t), \\ \dot{u} &= -\gamma(u + \varepsilon y(\sin \omega_0 t \cos \theta + \sin \theta \cos \omega_0 t)) - \omega_0^2 x, \\ \dot{y} &= v + \varepsilon g \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \sin(\omega_0 t), \\ \dot{v} &= -\gamma(v + \varepsilon g \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \sin(\omega_0 t)) - 4\omega_0^2 y, \\ \dot{\theta} &= \frac{2\pi\omega}{T}, \quad \omega = \frac{\sqrt{5}-1}{2}. \end{aligned} \quad (4)$$

Кратко опишем принцип работы системы. Начнем с ситуации, когда  $g(t) = 0$ , второй осциллятор не возбужден, а в первом осцилляторе имеют место затухающие колебания на собственной частоте  $\omega_0$  с фазой  $\phi$   $x \sim \sin(\omega_0 t + \phi)$ .

После того, как множитель  $g(t)$  станет отличным от нуля, во втором осцилляторе произойдет возбуждение колебаний с удвоенной частотой

$$y \sim \sin(\omega_0 t + \phi) \sin \omega_0 t = -\frac{1}{2} \cos(2\omega_0 t + \phi) + \dots$$

Когда исходный колебательный процесс в первом осцилляторе затухнет до пренебрежимо малого уровня, а колебания второго осциллятора уже имеют достаточно большую амплитуду, воздействие, определяемое произведением сигнала второго осциллятора и опорного сигнала, возбуждает колебания в первом осцилляторе с фазой  $(\phi - \theta)$

$$x \sim \cos(2\omega_0 t + \phi) \sin(\omega_0 t + \theta) = \frac{1}{2}(\cos(\omega_0 t + \phi - \theta) + \dots).$$

Таким образом, за полный период внешнего воздействия отображение для фазы будет иметь вид

$$\begin{cases} \phi_{n+1} = \phi_n - \theta_n + f(\phi) \bmod (2\pi), \\ \theta_{n+1} = \theta_n + 2\pi\omega \bmod (2\pi), \end{cases} \quad (5)$$

где добавка  $f(\phi)$  включена, чтобы учесть поправки к описанному выше механизму передачи фазы, и должна быть с очевидностью периодической функцией своего аргумента  $\phi$ . Как можно видеть, уравнение (5) соответствует по форме отображению Ханта и Отта (1).

## 2. Результаты численного моделирования

Система уравнений (4) решалась численно методом Рунге–Кутты четвертого порядка. На рис. 2 показаны полученные в результате расчетов примеры временных зависимостей  $x(t)$ ,  $y(t)$ . Графики построены для установившегося на протяжении 10 периодов режима колебаний, соответствующего параметру усиления  $\alpha = 5$ .

Используя результаты численного решения системы уравнений, можно убедиться в том, что эволюция фаз первого осциллятора отвечает отображению того же топологического класса, что и модель Ханта и Отта [15–17]. Для этого в процессе численного решения будем находить фазу первого осциллятора  $\phi_n$  для дискретной последовательности моментов времени  $t_n = n$  с помощью соотношений

$$\phi_n = \begin{cases} \arctan\left(\frac{\dot{x}(t_n)}{2\pi x(t_n)}\right) + \pi, & x(t_n) < 0 \\ \arctan\left(\frac{\dot{x}(t_n)}{2\pi x(t_n)}\right) + 2\pi, & x(t_n) \geq 0, \quad y(t_n) < 0 \\ \arctan\left(\frac{\dot{x}(t_n)}{2\pi x(t_n)}\right), & y(t_n) > 0. \end{cases} \quad (6)$$

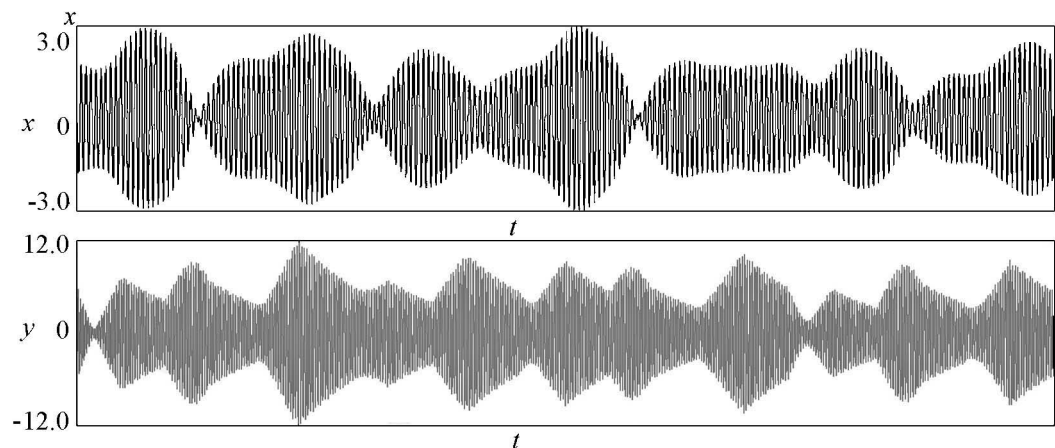


Рис. 2. Временные зависимости  $x(t)$ ,  $y(t)$  при  $\omega_0 = 6\pi$ ,  $\tau = 3$ ,  $T = 6$ ,  $\gamma = 0.25$ ,  $\alpha = 5$

Кроме того, в те же моменты времени  $t_n$  вычисляются значения переменной  $\theta_n$ . Если величина  $\phi_n$  попадает в определенный интервал (ширина которого произвольно выбрана равной  $\pi/10$ ), на график наносится точка  $(\theta_n, \phi_n)$ , отвечающая данному моменту времени. Также отображается точка  $(\theta_{n+1}, \phi_{n+1})$  для момента, наступающего через период  $T$ .

На рис. 3 представлены в графическом виде результаты обработки численных данных для фаз, полученные для  $\alpha = 5, 10$ . Как видно из рисунка, «лента»  $C$ , состоящая из точек  $(\theta_n, \phi_n)$ , имеет в качестве своего образа «полосу»  $C'$ , состоящую из точек  $(\theta_{n+1}, \phi_{n+1})$ . Расположение этих множеств на диаграмме соответствует тому, что имеет место для модели Ханта и Отта. На графиках видно, что полоса  $C$ , обходящая тор по направлению  $\theta$ , трансформируется при воздействии отображения в полосу  $C'$ , совершающую один оборот по меридиану и один – по параллели.

Для подтверждения существования СНА в сконструированной нами системе обратимся к проверке выполнения критерия, предложенного в работе А.С. Пиковского и У. Фойдель [7]. Согласно их рассуждениям, необходимое условие существования СНА состоит в том, что при рациональной аппроксимации параметра, задающего отношение частот, система демонстрирует бифуркации в зависимости от параметра начальной фазы, причем это свойство сохраняется при увеличении порядка аппроксимации.

Для принятого нами значения частотного параметра  $\omega$ , заданного «золотым средним», рациональные аппроксимации даются отношениями чисел Фибоначчи  $F_k/F_{k+1}$ , где  $F_0 = 0, F_1 = 1, \dots, F_{k+1} = F_{k-1} + F_k$ .

Если вместо иррационального частотного параметра  $\omega$  взять  $k$ -ю рациональную аппроксимацию  $x_{n+1} = f(x_n, \theta_n)$ ,  $\theta_{n+1} = \theta_n + \omega_k \bmod(1)$ ,  $\omega_k = p_k/q_k$ , то внешнее воздействие будет периодическим, с периодом  $q_k$ . В отличие от квазипериодического поведения, когда фазовая переменная эргодическим образом посещает плотное множество точек единичного интервала, теперь она обходит конечное множество  $\{\theta_0, \theta_1, \dots, \theta_{q_k-1}\}$ . Начальная фаза  $\theta_0$  играет при этом роль дополнительного

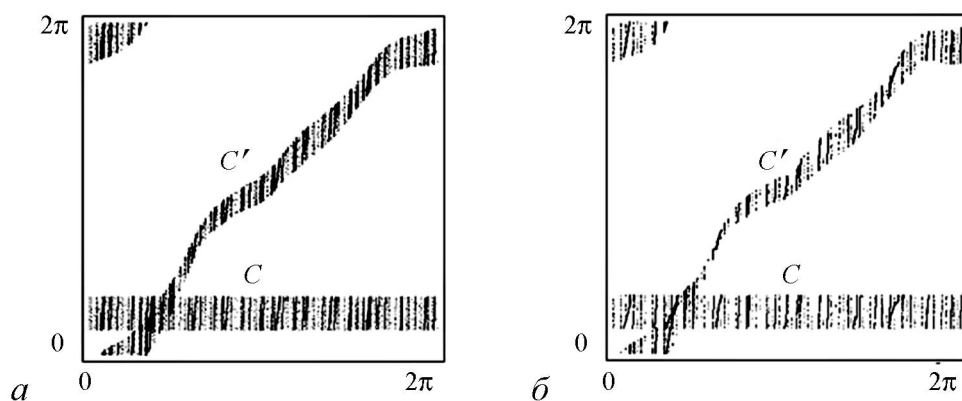


Рис. 3. Численная иллюстрация основного топологического свойства фазы  $\phi$  для различных значений параметра усиления  $\alpha$ : а – 5, б – 10. Здесь  $\omega_0 = 6\pi$ ,  $\tau = 3$ ,  $T = 6$ ,  $\gamma = 0.25$ . Приведенная картина представляет собой развертку тора. Следует считать, что верхняя и нижняя стороны квадрата, а также левая и правая его стороны отождествлены

параметра, и в зависимости от ее выбора мы можем получать различные типы динамики и аттракторов.

На качественном уровне, рассуждая в терминах систем, полученных на основе рациональной аппроксимации, можно представить себе, что при иррациональном значении частоты имеем как бы медленный дрейф параметра начальной фазы, и если система по ходу динамики все время претерпевает бифуркации, то это как раз соответствует присутствию СНА [2].

На рис. 4 представлены карты динамических режимов на плоскости  $(\varepsilon, \theta_0)$  и бифуркационные диаграммы, отвечающие проходу на картах по горизонтали при фиксированном значении  $\varphi$ .

На картах динамических режимов видно, что при малых значениях параметра  $\varphi$  реализуются регулярные режимы с периодом, равным знаменателю подходящей дроби, и бифуркаций нет. Бифуркации имеют место в области, выше некоторого критического уровня  $\varphi$ , где они не исчезают с увеличением порядка аппроксимации. Бифуркации сопровождаются возникновением режимов с различными периодами, кратными знаменателю рациональной аппроксимации, а также непериодическими (хаотическими) режимами, что видно также из бифуркационных диаграмм на рис. 4 (нижний ряд).

На рис. 5, а, б показаны трехмерные портреты аттракторов системы, построенные для двух значений параметра  $\alpha = 5, 10$ . Вывод точек на графики осуществлялся через интервал времени  $T$ . Из рисунков видно, что аттрактор характеризуется наличием неоднородной тонкой структуры, нехарактерной для гладких торов.

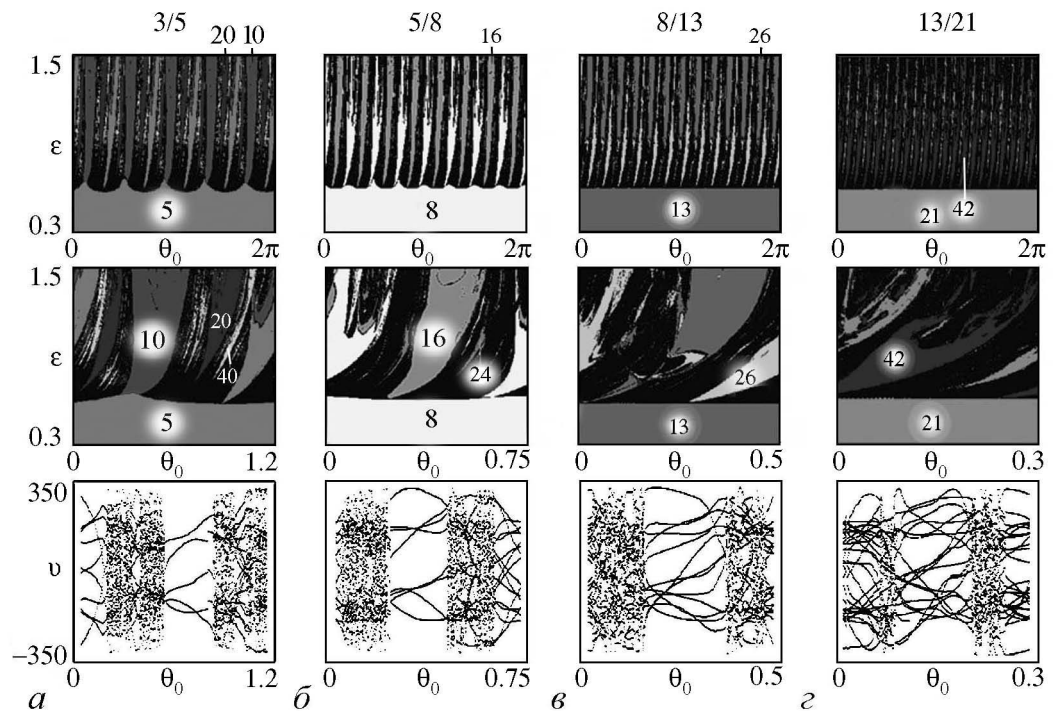


Рис. 4. Карты динамических режимов и бифуркационные диаграммы для различных рациональных аппроксимаций  $F_k/F_{k+1}$ : а – 3/5; б – 5/8; в – 8/13; з – 13/21

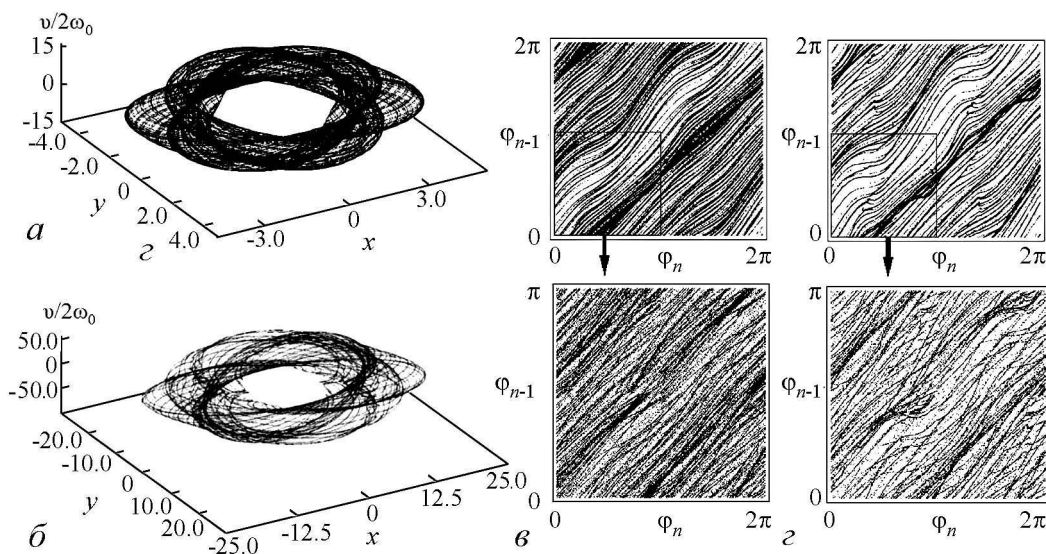


Рис. 5. Трёхмерные аттракторы системы для различных значений  $\alpha$ :  $a - 5$ ,  $б - 10$ ; фазовый портрет отображения и его увеличенные фрагменты для значений  $\alpha$ :  $в - 5$ ,  $г - 10$ . Значения остальных параметров  $\omega_0 = 6\pi$ ,  $\tau = 3$ ,  $T = 6$ ,  $\gamma = 0.25$

На рис. 5, в, г для двух значений параметра  $\alpha = 5, 10$  приведены диаграммы в координатах  $(\varphi_{n-1}, \varphi_n)$ , позволяющие судить о распределении соответствующей аттрактору инвариантной меры на торе. Хорошо видно, что инвариантная мера распределена неравномерно: в отличие от регулярных квазипериодических режимов присутствует волокнистая структура, образованная областями, которые изображающая точка посещает чаще. При рассмотрении увеличенных фрагментов видно видеть, что эта волокнистая фрактальная структура сохраняется. Можно отметить визуальное сходство этих распределений с теми, которые были получены для системы с СНА типа Ханта и Отта на основе автоколебательных элементов в работе [28, рис. 1, б]. По-видимому, подобная динамика характерна для всех систем, описываемых отображением Ханта и Отта.

На рис. 6 приводится график зависимости показателей Ляпунова от параметра  $\alpha$ . Расчеты проведены для системы (4) с использованием стандартного алгоритма Бенеттина [29]. В данной системе отсутствует положительный показатель Ляпунова, старший показатель тождественно равен нулю, а остальные четыре показателя, как видно на графике, отрицательные.

Для СНА типа Ханта и Отта в силу его грубости характерна гладкость зависимости всех показателей Ляпунова от управляющего параметра. На графике хорошо видно, что это свойство выполняется для системы, рассматриваемой в настоящей работе.

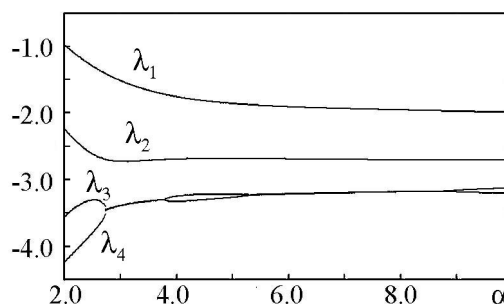


Рис. 6. График показателей Ляпунова в зависимости от параметра  $\alpha$  при  $\omega_0 = 6\pi$ ,  $\tau = 3$ ,  $T = 6$ ,  $\gamma = 0.25$

### 3. Спектральные свойства СНА

Фурье-анализ является одним из общепринятых способов обработки сигналов при изучении динамических процессов. Большой интерес для изучения представляют спектральные свойства СНА.

Чтобы наглядно представить специфику спектров, характерную для разных типов динамики временных рядов  $x_n$  (здесь  $n$  – дискретное время) рассмотрим построение преобразования Фурье на основе вычисления накапливающихся сумм

$$Z(\Omega, N) = \sum_{n=0}^{N-1} x_n e^{i\Omega n}. \quad (7)$$

Здесь  $\Omega$  – параметр, представляющий собой частоту интересующей нас спектральной составляющей;  $N$  – количество членов в сумме. Дискретный спектр отвечает периодическим и квазипериодическим режимам. Для этих режимов накапливающиеся суммы с ростом  $N$  ведут себя по линейному закону  $|Z| \sim N$ , если  $\Omega$  соответствует частоте, присутствующей в спектре, или стремятся к нулю, если такой частоты нет.

Для случайных сигналов при любом выборе параметра  $\Omega$  точка, представляющая накапливающуюся сумму, будет совершать случайное блуждание на комплексной плоскости, которому соответствует линейное нарастание среднего квадрата модуля, так что  $|Z| \sim \sqrt{N}$ . Это соответствует сплошному спектру. Для СНА накапливающиеся суммы демонстрируют поведение в зависимости от  $N$ , характеризуемое другими показателями степени, и в этом случае говорят о сингулярно-непрерывном спектре [2].

На рис. 7 показаны результаты расчетов спектров Фурье для режимов СНА системы (4) в логарифмическом и линейном масштабах.

Чтобы охарактеризовать природу спектра в рамках приведенных выше рассуждений, обратимся к представленным на рис. 8, а диаграммам, где графически иллюстрируется блуждание величины  $Z_N$ , представляющей вычисляемую шаг за шагом спектральную сумму (7). Для их построения на плоскости, где по осям координат отложены действительные и мнимые части комплексного числа, последовательно отображаем и соединяем точки, отвечающие значениям суммы на последовательных шагах. В результате получаются графики с нетривиальной фрактальной структурой. На графиках, построенных для нескольких разных значений параметра  $\Omega$ , можно видеть, что происходит «фрактальный дрейф», который не соответствует вариантам роста сумм с показателем 1 или  $1/2$ , что отвечало бы дискретному или сплошному спектру.

Для количественной характеристики поведения спектральных сумм будем строить графики зависимости модуля  $|Z(\Omega, m)|$  от количества членов суммы  $m$ , используя логарифмический масштаб по обеим осям координат. Полученные графики представлены на рис. 8, б. Жирная линия на графиках обозначает аппроксимирующую прямую, по которой можно определить средний коэффициент наклона  $K$  полученных кривых. Для периодических и квазипериодических колебаний получился бы коэффициент наклона приблизительно равный 1, а для случайного процесса или хаотических колебаний –  $1/2$ . В рассматриваемом случае СНА показатели получаются разными для разных частот  $\Omega$ , в интервале между  $1/2$  и 1. Это свидетельствует, что мы имеем дело с сингулярно-непрерывным спектром [2].



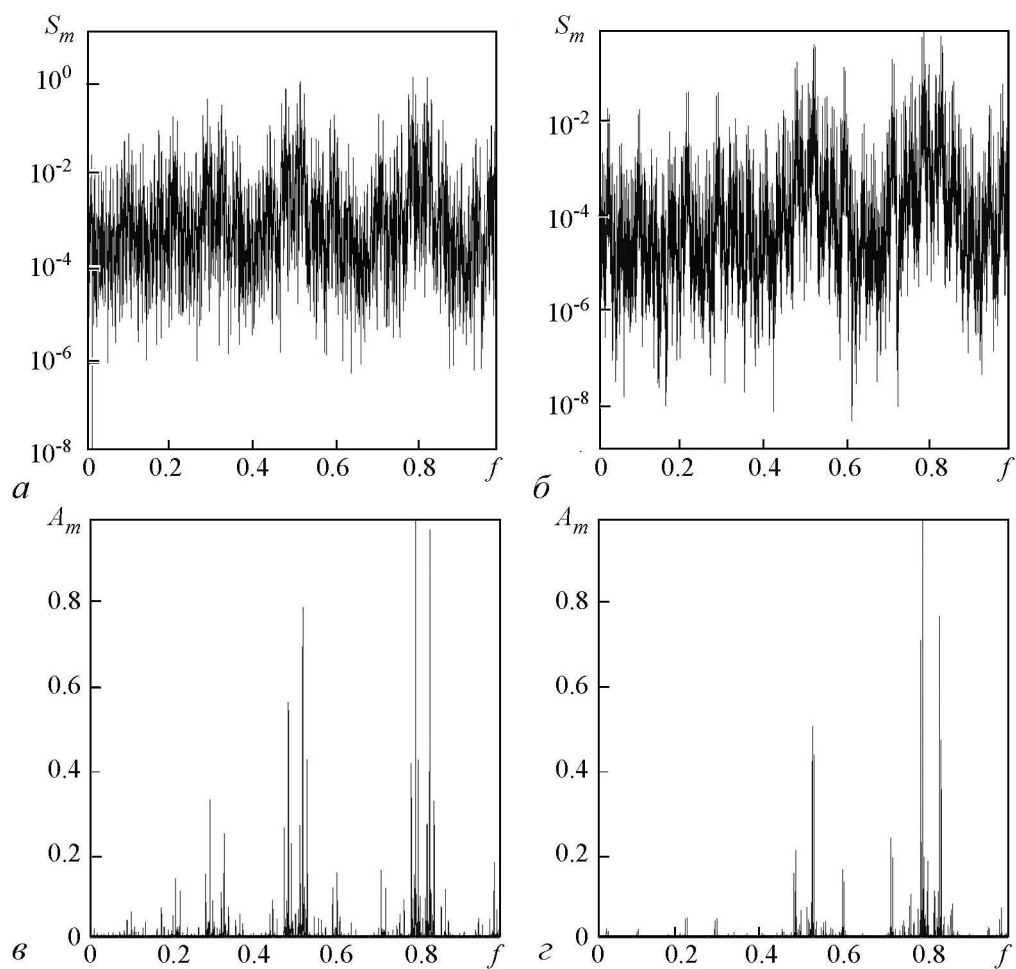


Рис. 7. Спектры Фурье для различных значений параметра  $\alpha$  в логарифмическом масштабе:  $a - 5$ ,  $б - 10$ ; в линейном масштабе:  $в - 5$ ,  $г - 10$

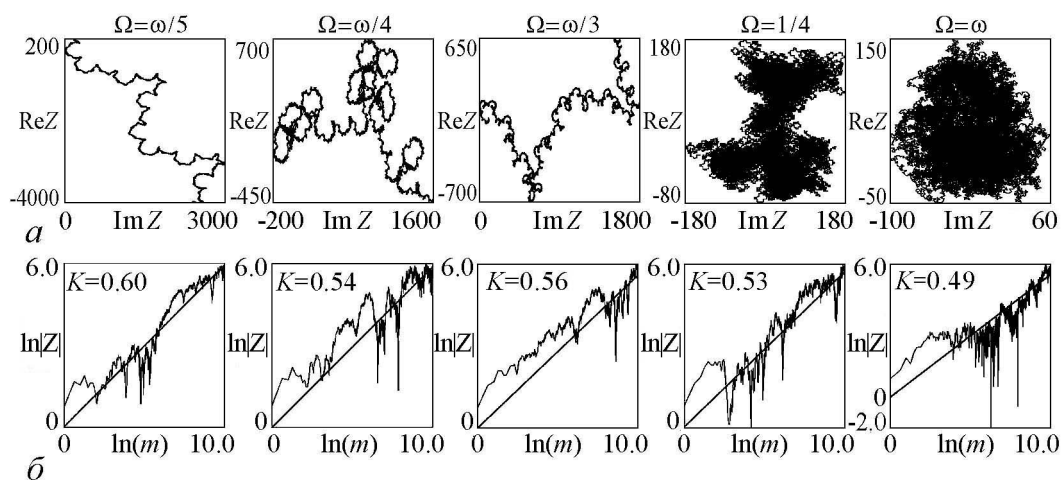


Рис. 8.  $a$  – спектральная сумма  $Z(\Omega, N)$  при различных значениях  $\Omega$ ;  $б$  – накапливающаяся сумма  $Z(\Omega, N)$  при различных значениях параметра  $\Omega$ . Остальные параметры:  $\omega_0 = 6\pi$ ,  $\tau = 3$ ,  $T = 6$ ,  $\gamma = 0.25$ ,  $\alpha = 7$

## Заключение

В статье показана возможность построения системы, в которой реализуется СНА типа Ханта и Отта в виде кольцевой схемы, содержащей пару линейных фильтров второго порядка (осцилляторов), а также нелинейный усилительный элемент с квазипериодической модуляцией коэффициентов передачи. В такой системе воздействие первого осциллятора на второй происходит посредством сигнала, получаемого комбинацией нелинейной функции, периодического внешнего воздействия и опорного периодического сигнала. Воздействие второго осциллятора на первый осуществляется посредством сигнала на удвоенной частоте второго осциллятора. Внешнее воздействие в данной системе квазипериодическое и содержит базовые частоты, находящиеся в иррациональном отношении, в силу чего и становится возможным существование СНА.

В ходе численного моделирования были получены результаты, свидетельствующие о реализации в исследуемой системе странного нехаотического аттрактора того же типа, что и в искусственно сконструированном отображении на торе, рассмотренном в работе Ханта и Отта, и в конструкции на основе попеременно возбуждающихся автоколебательных элементов в работе А.Ю. Жалнина и С.П. Кузнецова. Это подтверждается представленным рассмотрением основного топологического свойства отображения для фазы, характерного для этих систем.

Для подтверждения присутствия СНА был привлечен критерий Пиковского и Фойдель, для чего были построены и интерпретированы карты динамических режимов и бифуркационные диаграммы, отвечающие рациональным аппроксимациям параметра базовых отношения частот.

Подробно обсуждены спектральные свойства СНА. Помимо непосредственно рассчитанных спектров проведен анализ поведения спектральных сумм. Результаты анализа указывают на то, что имеет место сингулярно-непрерывный тип спектра.

*Работа выполнена при поддержке РФФИ в рамках грантов № 14-02-00085 и № 16-32-00449. Автор выражает благодарность В.П. Круглову и С.П. Кузнецову за консультации и обсуждения.*

## Библиографический список

1. Grebogi C., Ott E., Pelikan S., Yorke J.A. Strange attractors that are not chaotic // Physica D. 1984. Vol. 13, № 1–2. P. 261.
2. Кузнецов С.П., Пиковский А.С., Фойдель У. Странный нехаотический аттрактор // Нелинейные волны – 2004 / Под ред. А.В. Гапонова-Грехова и В.И. Некоркина. Нижний Новгород: ИПФ РАН, 2005. С. 484.
3. Bondeson A., Ott E., Antonsen T.M. Quasiperiodically forced damped pendula and Schrödinger equations with quasiperiodic potentials: implications of their equivalence // Phys. Rev. Lett. 1985. Vol. 55. № 20. P. 2103.
4. Ding M., Grebogi C., Ott E. Dimensions of strange nonchaotic attractors // Phys. Lett. A. 1989. Vol. 137, № 4–5. P. 167.
5. Ding M., Grebogi C., Ott E. Evolution of attractors in quasiperiodically forced systems: From quasiperiodic to strange nonchaotic to chaotic // Phys. Rev. A. 1989. Vol. 39, № 5. P. 2593.

6. *Pikovsky A.S., Feudel U.* Correlations and spectra of strange nonchaotic attractors // *Phys. A: Math. Gen.* 1994. Vol. 27. P. 5209.
7. *Pikovsky A.S., Feudel U.* Characterizing strange nonchaotic attractors // *Chaos.* 1995. Vol. 5, № 1. P. 253.
8. *Pikovsky A.S., Zaks M.A., Feudel U., Kurths J.* Singular continuous spectra in dissipative dynamics // *Phys. Rev. E.* 1995. Vol. 52, № 1. P. 285.
9. *Feudel U., Pikovsky A.S., Kurths J.* Strange non-chaotic attractor in a quasiperiodically forced circle map // *Physica D.* 1995. Vol. 88. P. 176.
10. *Pokorny P., Schreiber I., Marek M.* On the route to strangeness without chaos in the quasiperiodically forced van der Pol oscillator // *Chaos, Solitons and Fractals.* 1996. Vol. 7, № 3. P. 409.
11. *Kaneko K., Nishikawa T.* Fractalization of a torus as a strange nonchaotic attractor // *Phys. Rev. E.* 1996. Vol. 54, № 6. P. 6114.
12. *Glendinning P.* Intermittency and strange nonchaotic attractors in quasi-periodically forced circle maps // *Phys. Lett. A.* 1998. Vol. 244. P.545.
13. *Osinga H., Wiersig J., Glendinning P., Feudel U.* Multistability and nonsmooth bifurcations in the quasiperiodically forced circle map // *Int. J. of Bifurcation and Chaos.* 2001. Vol. 11, № 12. P. 3085.
14. *Prasad A., Negi S.S., Ramaswamy R.* Strange nonchaotic attractors // *Int. J. of Bifurcation and Chaos.* 2001. Vol. 11. P. 291.
15. *Hunt B.R., Ott E.* Fractal properties of robust strange nonchaotic attractors // *Phys. Rev. Lett.* 2001. Vol. 87, № 25. P. 254101.
16. *Kim J.-W., Kim S.-Y., Hunt B., Ott E.* Fractal properties of robust strange nonchaotic attractors in maps of two or more dimensions // *Phys. Rev. E.* 2003. Vol. 67. P. 036211.
17. *Kim S.-Y., Lim W., Ott E.* Mechanism for the intermittent route to strange nonchaotic attractors // *Phys. Rev. E.* 2003. Vol. 67. P. 056203.
18. *Ditto W.L., Spano M.L., Savage H.T. et al.* Experimental observation of a strange nonchaotic attractor // *Phys. Rev. Lett.* 1990. Vol. 65, № 5. P. 533.
19. *Vohra S.T., Bucholtz F., Koo K.P., Dagenais D.M.* Experimental observation of period-doubling suppression in the strain dynamics of a magnetostrictive ribbon // *Phys. Rev. Lett.* 1991. Vol. 66, № 2. P. 212.
20. *Zhou T., Moss F., Bulsara A.* Observation of a strange nonchaotic attractor in a multistable potential // *Phys. Rev. A.* 1992. Vol. 45, № 8. P. 5394.
21. *Zeyer K.-P., Miinster A.F., Schneider F.W.* Quasiperiodic forcing of a chemical reaction: experiments and calculations // *J. Phys. Chem.* 1995. Vol. 99. P. 13173.
22. *Ding W.X., Deutsch H., Dinklage A., Wilke C.* Observation of a strange nonchaotic attractor in a neon glow discharge // *Phys. Rev. E.* 1997. Vol. 55, № 3. P. 3769.
23. *Yang T., Bilimgut K.* Experimental results of strange nonchaotic phenomenon in a second-order quasi-periodically forced electronic circuit // *Phys. Lett. A.* 1997. Vol. 236. P. 494.
24. *Yu Y.H., Kim D.C., Ryu J.Y., Hong S.R.* Experimental study on the blowout bifurcation route to strange nonchaotic attractor // *J. of the Korean Phys. Society.* 1999. Vol. 34, № 2. P. 130.

25. *Bezruchko B.P., Kuznetsov S.P., Seleznev Y.P.* Experimental observation of dynamics near the torus-doubling terminal critical point // *Phys. Rev. E.* 2000. Vol. 62, № 6. P. 7828.
26. *Sanchez D., Platero G., Bonilla L.L.* Quasiperiodic current and strange attractors in ac-driven superlattices // *Phys. Rev. B.* 2001. Vol. 63. P. 201 306.
27. *Vaszlenko A., Feely O.* Dynamics of phase-locked loop with fm input and low modulating frequency // *Int. J. of Bifurcation and Chaos.* 2002. Vol. 12, № 7. P. 1633.
28. *Жалнин А.Ю., Кузнецов С.П.* О возможности реализации в физической системе странного нехаотического аттрактора Ханта и Отта // *ЖТФ.* 2007. Т. 77, № 4. С. 10.
29. *Кузнецов С.П.* Динамический хаос. Москва: Физматлит, 2001. 296 с.

*Поступила в редакцию 26.02.2016*

## STRANGE NONCHAOTIC ATTRACTOR OF HUNT AND OTT TYPE IN A SYSTEM WITH RING GEOMETRY

*V. M. Doroshenko*

National Research Saratov State University

The physical realizable system of ring structure, with a fixed irrational ratio of basic frequencies of external driving (the golden mean) manifests a strange nonchaotic attractor (SNA), similar to the attractor in the abstract map on a torus proposed and analyzed earlier by Hunt and Ott as an example of robust SNA. Simulation of the dynamics is provided basing on the numerical integration of the corresponding non-autonomous system of differential equations with quasi-periodic coefficients. It has been demonstrated that in terms of appropriately chosen phase variables the dynamics on the characteristic period is consistent with the topology of the mapping of Hunt and Ott. It has been shown that the birth of SNA corresponds to the criterion of Pikovsky and Feudel. Numerical calculations show that the Fourier spectra in sustained mode is of intermediate class between the continuous and discrete spectra (the singular continuous spectrum).

*Keywords:* Strange nonchaotic attractor, Hunt-Ott map, robustness, fractal structure, singular continuous spectrum.

DOI:10.18500/0869-6632-2016-24-1-16-30

### References

1. *Grebogi C., Ott E., Pelikan S., Yorke J.A.* Strange attractors that are not chaotic // *Physica D.* 1984. Vol. 13, № 1–2. P. 261.
2. *Kuznetsov S.P., Pikovsky A.S., Feudel U.* Strange nonchaotic attractor // *Nonlinear waves – 2004* / Eds A.V. Gaponov-Grekhov and V.I. Nekorkin. Nizhny Novgorod: IAP RAS, 2005. Vol. 25. P. 484 (in Russian).

3. *Bondeson A., Ott E., Antonsen T.M.* Quasiperiodically forced damped pendula and Schrödinger equations with quasiperiodic potentials: implications of their equivalence // *Phys. Rev. Lett.* 1985. Vol. 55, № 20. P. 2103.
4. *Ding M., Grebogi C., Ott E.* Dimensions of strange nonchaotic attractors // *Phys. Lett. A.* 1989. Vol. 137, № 4–5. P. 167.
5. *Ding M., Grebogi C., Ott E.* Evolution of attractors in quasiperiodically forced systems: From quasiperiodic to strange nonchaotic to chaotic // *Phys. Rev. A.* 1989. Vol. 39, № 5. P. 2593.
6. *Pikovsky A.S., Feudel U.* Correlations and spectra of strange nonchaotic attractors // *Phys. A: Math. Gen.* 1994. Vol. 27. P. 5209.
7. *Pikovsky A.S., Feudel U.* Characterizing strange nonchaotic attractors // *Chaos.* 1995. Vol. 5, № 1. P. 253.
8. *Pikovsky A.S., Zaks M.A., Feudel U., Kurths J.* Singular continuous spectra in dissipative dynamics // *Phys. Rev. E.* 1995. Vol. 52, № 1. P. 285.
9. *Feudel U., Pikovsky A.S., Kurths J.* Strange non-chaotic attractor in a quasiperiodically forced circle map // *Physica D.* 1995. Vol. 88. P. 176.
10. *Pokorny P., Schreiber I., Marek M.* On the route to strangeness without chaos in the quasiperiodically forced van der Pol oscillator // *Chaos, Solitons and Fractals.* 1996. Vol. 7, № 3. P. 409.
11. *Kaneko K., Nishikawa T.* Fractalization of a torus as a strange nonchaotic attractor // *Phys. Rev. E.* 1996. Vol. 54, № 6. P. 6114.
12. *Glendinning P.* Intermittency and strange nonchaotic attractors in quasi-periodically forced circle maps // *Phys. Lett. A.* 1998. Vol. 244. P. 545.
13. *Osinga H., Wiersig J., Glendinning P., Feudel U.* Multistability and nonsmooth bifurcations in the quasiperiodically forced circle map // *Int. J. of Bifurcation and Chaos.* 2001. Vol. 11, № 12. P. 3085.
14. *Prasad A., Negi S.S., Ramaswamy R.* Strange nonchaotic attractors // *Int. J. of Bifurcation and Chaos.* 2001. Vol. 11. P. 291.
15. *Hunt B.R., Ott E.* Fractal properties of robust strange nonchaotic attractors // *Phys. Rev. Lett.* 2001. Vol. 87, № 25. P. 254101.
16. *Kim J.-W., Kim S.-Y., Hunt B., Ott E.* Fractal properties of robust strange nonchaotic attractors in maps of two or more dimensions // *Phys. Rev. E.* 2003. Vol. 67. P. 036211.
17. *Kim S.-Y., Lim W., Ott E.* Mechanism for the intermittent route to strange nonchaotic attractors // *Phys. Rev. E.* 2003. Vol. 67. P. 056203.
18. *Ditto W.L., Spano M.L., Savage H.T. et al.* Experimental observation of a strange nonchaotic attractor // *Phys. Rev. Lett.* 1990. Vol. 65, № 5. P. 533.
19. *Vohra S.T., Bucholtz F., Koo K.P., Dagenais D.M.* Experimental observation of period-doubling suppression in the strain dynamics of a magnetostrictive ribbon // *Phys. Rev. Lett.* 1991. Vol. 66, № 2. P. 212.
20. *Zhou T., Moss F., Bulsara A.* Observation of a strange nonchaotic attractor in a multistable potential // *Phys. Rev. A.* 1992. Vol. 45, № 8. P. 5394.

21. Zeyer K.-P., Miinster A.F., Schneider F.W. Quasiperiodic Forcing of a Chemical Reaction: Experiments and Calculations // J. Phys. Chem. 1995. Vol. 99. P. 13173.
22. Ding W.X., Deutsch H., Dinklage A., Wilke C. Observation of a strange nonchaotic attractor in a neon glow discharge // Phys. Rev. E. 1997. Vol. 55, № 3. P. 3769.
23. Yang T., Bilimgut K. Experimental results of strange nonchaotic phenomenon in a second-order quasi-periodically forced electronic circuit // Phys. Lett. A. 1997. Vol. 236. P. 494.
24. Yu Y.H., Kim D.C., Ryu J.Y., Hong S.R. Experimental Study on the Blowout Bifurcation Route to Strange Nonchaotic Attractor // J. of the Korean Phys. Society. 1999. Vol. 34, № 2. P. 130.
25. Bezruchko B.P., Kuznetsov S.P., Seleznev Y.P. Experimental observation of dynamics near the torus-doubling terminal critical point // Phys. Rev. E. 2000. Vol. 62, № 6. P. 7828.
26. Sanchez D., Platero G., Bonilla L.L. Quasiperiodic current and strange attractors in ac-driven superlattices // Phys. Rev. B. 2001. Vol. 63. P. 201.
27. Vaszlenko A., Feely O. Dynamics of phase-locked loop with fm input and low modulating frequency // Int. J. of Bifurcation and Chaos. 2002. Vol. 12, № 7. P. 1633.
28. Jalnine A.Yu., Kuznetsov S.P. On the realization of the Hunt–Ott strange nonchaotic attractor in a physical system // Zhurnal Tekhnicheskooe Fiziki, 2007, Vol. 77, № 4. P. 10 (in Russian).
29. Kuznetsov S.P. Dynamic chaos. Moscow: Fizmatlit., 2001. 296 s. (in Russian).

*Ссылка на статью:* Дорошенко В.М. Странный нехаотический аттрактор типа Ханта и Отта в системе с кольцевой геометрией // Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2016. Т. 24, № 1. С. 16–30.

*Paper's reference:* Doroshenko V.M. Strange nonchaotic attractor of Hunt and Ott type in a system with ring geometry // Izvestija VUZ. Applied Nonlinear Dynamics. 2016. Vol. 24, № 1. P. 16–30.



*Дорошенко Валентина Михайловна* – родилась в 1992 году. Окончила среднюю школу № 93 Саратова (2009) и Саратовский государственный университет им Н.Г. Чернышевского (2014). В настоящее время аспирантка факультета нелинейных процессов СГУ. Участница конференций «Нелинейные дни в Саратове для молодых» (2013, 2014, 2015), VIII, IX и X Конференций молодых ученых «Нанoeлектроника, нанофотоника и нелинейная физика» (Саратов, 2013, 2014, 2015), Международной конференции «Динамика, бифуркации и странные аттракторы», посвященной памяти Л.П. Шильникова (Нижний Новгород, 2013), X Международной школы «Хаотические автоколебания и образование структур» (Саратов, 2013), Международных конференций «Hamiltonian Dynamics, Nonautonomous Systems, and Patterns in PDE's» (Нижний Новгород, 2014), «Dynamics, Bifurcations and Chaos 2015» (Нижний Новгород, 2015). Имеет одну научную публикацию в журнале «Вестник СГУ».

410012 Саратов, ул. Астраханская, 83  
 Саратовский государственный университет имени Н.Г. Чернышевского  
 E-mail: dorvalentina9@gmail.com



## СВОЙСТВА СВЧ-ФОТОННОГО КРИСТАЛЛА У РАСТВОРА С АВТОКОЛЕБАТЕЛЬНОЙ РЕАКЦИЕЙ БРИГГСА–РАУШЕРА

*Д. А. Усанов, А. П. Рытик*

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования  
«Саратовский национальный исследовательский государственный университет  
имени Н.Г. Чернышевского»

Определены диэлектрические проницаемости структурных элементов раствора с химической автоколебательной реакцией Бриггса–Раушера по результатам измерений спектров отражения и прохождения взаимодействующего с ними СВЧ-излучения в диапазоне от 5 до 8 ГГц. Показано, что этот раствор может обладать свойствами фотонного кристалла с изменяющейся во времени шириной запрещенной зоны.

*Ключевые слова:* СВЧ-фотонный кристалл, автоколебательная реакция.

DOI:10.18500/0869-6632-2016-24-1-31-36

Еще в 1896 году немецкий химик Р. Лизеганг обнаружил, что в капле раствора нитрата серебра  $\text{AgNO}_3$  на фотопластинке, покрытой слоем желатина, который содержит хромпик  $\text{K}_2\text{Cr}_2\text{O}_7$ , образуются агрегаты мелких кристаллов  $\text{Ag}_2\text{Cr}_2\text{O}_7$  в виде концентрических колец, напоминающих годовичные кольца на спиле дерева [1]. В автоколебательной реакции Белоусова–Жаботинского процесс организации пространства определяется кинетическими параметрами – скоростями реакций, соотношением положительных (активация) и отрицательных (угнетение) обратных связей в реакционной цепи. Следовательно, пространственная организация структуры легко поддается регулированию. Таким образом, автоколебательные химические реакции могут образовывать периодические области с чередующимися параметрами, в том числе электрическими. Подобные периодические структуры получили название «фотонные кристаллы» [2–4]. Эти структуры состоят из периодически расположенных элементов, размеры которых сравнимы с длиной волны распространяющегося в них электромагнитного излучения. В природе уже обнаружены разнообразные материалы с фотонно-кристаллическими свойствами. Среди них благородный опал, базальные спиккулы стеклянных морских губок, покрытие крыльев африканских бабочек-парусников (*Princeps nireus*), перламутровое покрытие раковин моллюсков, усики морской мыши и щетинки многощетинкового червя.

Следует отметить, что определенный интерес представляют аperiодические фотонные кристаллы с медленно меняющимся периодом [5].

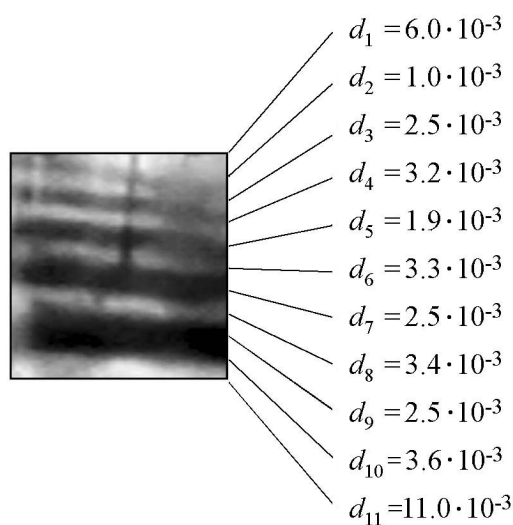


Рис. 1. Структура, полученная в непромешиваемом растворе реакции Бриггса–Раушера: слева показана фотография колбы с реакцией, справа – измеренные толщины образовавшихся в растворе реакции прозрачных и синих областей

объема реакции (рис. 1). В ходе реакции области с фазой, в которой преобладает крахмал-иодид, располагаются приблизительно периодически. В конце реакции эти области расплываются, и условие периодичности нарушается.

Таким образом, в определенный период времени раствор, в котором протекает реакция, можно считать подобным фотонному кристаллу. Роль периодических элементов в нем выполняют области, образующиеся в ходе непромешиваемой автоколебательной реакции БР (см. рис. 1).

В зависимости от концентрации исходных компонент длины областей концентрационных волн в реакции БР могут принимать значения от 0.5 до 3.0 мм. Диэлектрическая проницаемость, полученная для области прозрачной среды раствора, составляла около 10.0, а для области, в которой преобладает крахмал-иодид (синего цвета) – около 40.0. Для измерения диэлектрической проницаемости раствора реакции БР был выбран диапазон частот от 5 до 8 ГГц, для этого использовалась установка Agilent 85070E с опцией Dielectric Probe Kit. Информация об изменении диэлектрической проницаемости, концентрации йода и измерении спектров прохождения и отражения поступала на панорамный индикатор и плату АЦП компьютера, затем эти данные обрабатывались с помощью программы Microsoft Excel. Измерение диэлектрической проницаемости в различных фазах реакции БР проводили при постоянном перемешивании раствора реакции. Поскольку значения диэлектрической проницаемости зависят от температуры, а ход реакции зависит от степени освещенности, то все измерения были проведены при одинаковых условиях по заливке раствора реакции, температуре в помещении и температуре растворов. Для регистрации химических изменений в среде реакции, в частности, концентрации йода использовали рН-метр-иономер серии «Эксперт-001» с датчиками: ионоселективный электрод «Йод», датчик растворенного кислорода ДКТП, датчик температуры. Предел обнаружения электродов составляет от  $10^{-6}$  до 1 моль/литр.

Настоящая работа посвящена исследованию особенностей взаимодействия электромагнитного излучения с фотонными структурами, в виде периодических в пространстве концентрационных структур в непромешиваемом растворе с автоколебательной реакцией Бриггса–Раушера (БР), названной «йодными часами».

При протекании реакции БР постоянно перемешиваемый раствор реакции изменяет цвет от прозрачного до синего. Если раствор реакции не перемешивать, то спустя некоторое время в прозрачном растворе от его поверхности к дну колбы появляются периодические области синего цвета, это области с фазой реакции, в которой преобладает крахмал-иодид. Общее количество областей может быть до 5 для 50 мл общего



Исследование структуры фотонного кристалла на основе реакции БР проводили с использованием генератора качающейся частоты типа Г4-142 и панорамного измерителя КСВН типа Я2Р-67. В вертикально расположенную волноводную секцию устанавливали фторопластовую перегородку, над которой размещали раствор для реакции. Перед регистрацией диэлектрической проницаемости и измерением спектров прохождения проводилась калибровка в слое дистиллированной воды.

На рис. 2 показана усредненная по серии экспериментов зависимость значений диэлектрической проницаемости и значения концентрации йода от времени при их одновременной регистрации. Из рисунка видно совпадение тенденции в изменении диэлектрической проницаемости и концентрации йода. После того, как раствор полностью стал непрозрачным (отсутствие автоколебательного режима), колебания диэлектрической проницаемости прекратились. Для середины полосы не пропускания (фотонной запрещенной зоны), по условию Брэгга, должно выполняться требование кратности длины элемента фотонного кристалла половине длины распространяющейся в нем волны. С учетом размеров областей и диэлектрических проницаемостей элементов фотонного кристалла частота, соответствующая условию Брэгга для данного фотонного кристалла, должна находиться в окрестности 6 ГГц. С учетом измеренных значений толщин получившихся полос (см. рис. 1) был проведен расчет коэффициента прохождения электромагнитной волны при её нормальном падении на многослойную структуру раствора реакции. Для расчета использовали метод матриц передачи между областями с различными значениями постоянной распространения электромагнитной волны аналогично тому, как это было подробно описано, например, в [6]. Для расчета дополнительно проводили кондуктометрию гомогенизированного раствора реакции в различных фазах. В частности, для синего цвета раствора проводимость составляла 20 мСм, для прозрачного – 10 мСм.

Общий вид измеренного и рассчитанного спектров прохождения раствора реакции БР в режиме автоколебаний в диапазоне от 5 до 8 ГГц для выбранного момента времени показан на рис. 3. Отметим, что влияние измерительного СВЧ-сигнала (уровень мощности 10 мВт) в этом диапазоне частот на характер протекания реакции

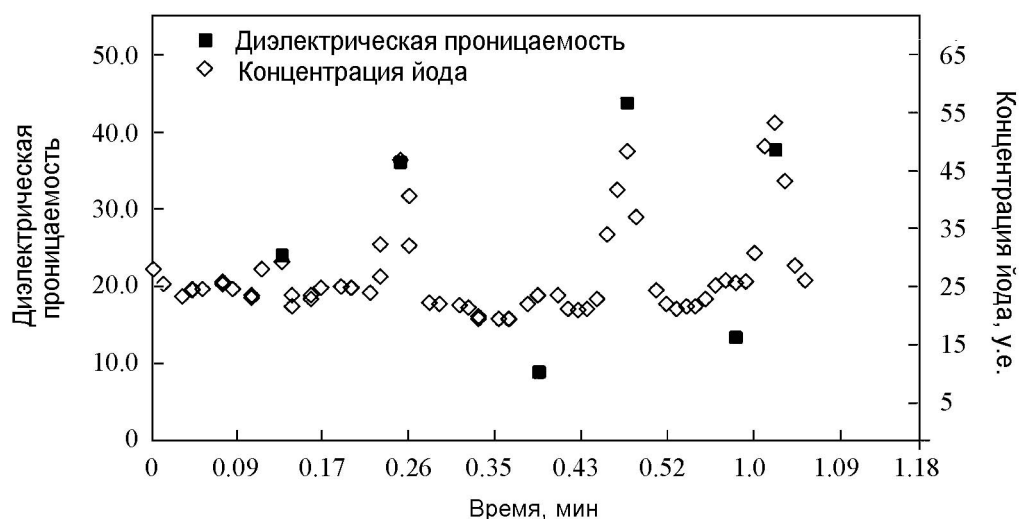


Рис. 2. Зависимость диэлектрической проницаемости и изменения концентрации йода от времени

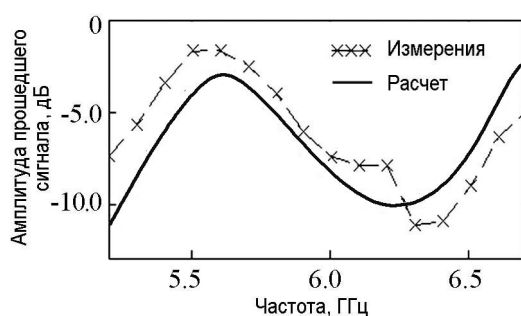


Рис. 3. Рассчитанный и измеренный спектр прохождения через раствор с реакцией Бриггса–Раушера в диапазоне частот от 5 до 8 ГГц

обнаружено не было. Ранее такое влияние было установлено на частоте 129 ГГц, что авторы [7] связывают с резонансным взаимодействием на этой частоте излучения с входящим в состав элементов реакции кислородом.

Спектр прохождения исследуемой фотонной структуры, приведенный на рис. 3, характеризуется наличием в окрестности 6 ГГц частотной области, запрещенной для распространения электромагнитной волны, – аналога запрещенной зоны в кристаллах. Наличие такой запрещенной зоны в спектре характерно для структур, называемых СВЧ-фотонными кристаллами. Как видно из рисунка, результаты расчета качественно согласуются с экспериментом. Отличие рассчитанной амплитуды прошедшего сигнала через структуру от результатов измерений может быть объяснено тем, что при расчете предполагалась резкое изменение границ между отдельными элементами рассматриваемой системы, а в эксперименте эти границы являются несколько размытыми. Кроме того, измерение диэлектрической проницаемости проводилось в объеме перемешиваемой реакции для одной фазы (прозрачный или синий цвет раствора), в то время как в случае неперемешиваемого объема с образовавшимися структурами полос концентрация реагентов несколько отличалась от характерной для случая перемешивания. Это, в свою очередь, могло отразиться на изменении диэлектрической проницаемости слоя и изменить спектр прохождения сигнала.

Таким образом, показана возможность проявления свойств фотонного кристалла у раствора автоколебательной реакции Бриггса–Раушера. Выявлен зонный характер спектра прохождения исследованного типа фотонного кристалла.

*Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки РФ (государственное задание № 1376 и 1575).*

### Библиографический список

1. Самойлович М.И., Цветков М.Ю. Формирование наноструктурированных пленок алмазоподобных материалов // Нано- и микросистемная техника. 2008. № 10. С. 8
2. Бецкий О.В., Майбородин А.В., Рытик А.П. и др. Молекулярные НИТРАНС-спектры газов метаболитов в терагерцовом и ИК-диапазонах частот и их применение в биомедицинских технологиях // Биомедицинская радиоэлектроника. 2007. № 8–9. С. 89.
3. Самойлович М.И., Цветков М.Ю. Редкоземельные опаловые нанокомпозиты для нанофотоники // Нано- и микросистемная техника. 2006. № 10. С. 8.
4. Вендик И.Б., Вендик О.Г. Метаматериалы и их применение в технике сверхвысоких частот: Обзор // ЖТФ. 2013. Т. 83, вып. 1. С. 3.

5. Андреев А.В. Фокусировка пучков при отражении от кристаллов и многослойных периодических структур с переменным периодом // Письма в ЖЭТФ. 2001. Т. 74, № 1. С. 8.
6. Усанов Д.А., Скрипаль А.В., Абрамов А.В., Боголюбов А.С. Измерения толщины нанометровых слоев металла и электропроводности полупроводника в структурах металл–полупроводник по спектрам отражения и прохождения электромагнитного излучения// ЖТФ. 2006. Т. 76, вып. 5. С. 112.
7. Рытик А.П., Усанов Д.А. Влияние электромагнитного излучения на автоколебательную реакцию Бриггса–Раушера // Журнал физической химии. 2013. Т. 87, № 5. С. 891.

*Поступила в редакцию*      14.12.2015  
*После доработки*              15.03.2016

## PROPERTIES OF MICROWAVE PHOTONIC CRYSTAL FOR SOLUTION WITH THE SELF-OSCILLATORY BRIGGS–RAUSCHER REACTION

*D. A. Usanov, A. P. Rytik*

Federal State-Funded Educational Institution  
of Higher Professional Education «Saratov State University»

In the article the description of dielectric constant of the structural elements of the chemical solution with the self-oscillating reaction Briggs–Rauscher, as measured reflection and transmission spectra of interacting with them the microwave radiation in the range of 5 to 8 GHz. It is shown that the solution may has properties of the photonic crystal with time-varying band gap.

*Keywords:* Microwave photonic-bandgap structures, self-oscillating reaction.

DOI:10.18500/0869-6632-2016-24-1-31-36

### References

1. *Samojlovich M.I., Cvetkov M.Yu.* // Nano- i mikrosistemnaya tekhnika. 2008. № 10. P. 8 (in Russian).
2. *Beckij O.V., Majborodin A.V., Rytik A.P.* // Biomedicinskaya radioelektronika. 2007. № 8-9. P. 89 (in Russian).
3. *Samojlovich M.I., Cvetkov M.Y.* // Nano- i mikrosistemnaya tekhnika, 2006. №10. P.8 (in Russian).
4. *Vendik I.B., Vendik O.G.* // ZHTF. 2013. Т. 83, вып. 1. p. 3 (in Russian).
5. *Andreev A.V.* Fokusirovka puchkov pri otrazhenii ot kristallov i mnogoslojnyh periodicheskikh struktur s peremennym periodom // Pis'ma v ZhJeTF. 2001. Т. 74, № 1. S. 8 (in Russian).

6. Usanov D.A., Skripal' A.V., Abramov A.V., Bogoljubov A.S. Izmerenija tolshhiny nanometrovyyh sloev metalla i jelektroprovodnosti poluprovodnika v strukturah metall-poluprovodnik po spektram otrazhenija i prohozhdenija jelectromagnitnogo izlucheniya // ZhTF. 2006. T. 76, vyp. 5. S. 112 (in Russian).
7. Rytik A.P., Usanov D.A. // Zhurnal Fizicheskoy Himii. 2013. T. 87, № 5. P. 891 (in Russian).

*Ссылка на статью:* Усанов Д.А., Рытик А.П. Свойства СВЧ-фотонного кристалла у раствора с автоколебательной реакцией Бриггса–Раушера // Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2016. Т. 24, № 1. С. 31–36.

*Paper's reference:* Usanov D.A., Rytik A.P. Properties of microwave photonic crystal for solution with the self-oscillatory Briggs–Rauscher reaction // Izvestija VUZ. Applied Nonlinear Dynamics. 2016. Vol. 24, № 1. P. 31–36.



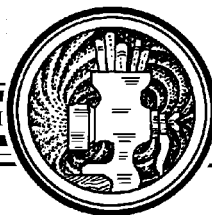
*Усанов Дмитрий Александрович* – родился (1943) в Менделеевске (Татарстан). Окончил физический факультет Саратовского госуниверситета (1965). Защитил диссертацию на соискание учёной степени кандидата физико-математических наук по специальности «физика полупроводников и диэлектриков» (1972, СГУ) и диссертацию на соискание учёной степени доктора физико-математических наук по специальности «радиофизика, включая квантовую радиофизику» (1989, СГУ). Заведующий кафедрой физики твердого тела (с 1985, СГУ), проректор СГУ по научной работе (1989–2013). Заслуженный деятель науки Российской Федерации (1998). Обладатель Государственной научной стипендии РАН для учёных (2000). Автор монографий и более 200 статей в центральной и зарубежной печати, 174 авторских свидетельств и патентов.

410012 Саратов, ул. Астраханская, 83  
Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского  
E-mail: usanovda@info.sgu.ru



*Рытик Андрей Петрович* – родился в Саратове (1980). Защитил диссертацию на соискание степени кандидата физико-математических наук (2006, СГУ). В 2010 году присвоено ученое звание доцента по кафедре медицинской физики. Область научных интересов: биомедицинская физика, физика взаимодействия терагерцового излучения с физическими средами. Опубликовал более 100 статей в отечественных и зарубежных журналах.

410012, Саратов, ул. Астраханская, 83  
Саратовский государственный университет им. Н.Г.Чернышевского  
E-mail: ra4csz@yandex.ru



## ДВУХПОТОКОВАЯ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ – ВОЛНОВЫЕ ЛИНЕЙНЫЕ И НЕЛИНЕЙНЫЕ ЯВЛЕНИЯ НА СВЕРХВЫСОКИХ ЧАСТОТАХ

### Часть I

*А. В. Титов*

Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского

Данная статья является первой из двух частей обзора, посвященного явлению двухпучковой неустойчивости в электронике сверхвысоких частот. Целью обзора является освещение по возможности наиболее полного списка существующих на сегодняшний день трудов, посвященных различным моделям и методам анализа двухпучковой неустойчивости. В первой части собраны те работы, которые вместе, на наш взгляд, наиболее полно описывают развитие идей двухпотоковой неустойчивости в электронике СВЧ. Среди этих работ присутствуют как пионерские работы, положившие начало исследованиям в данной области, так и многочисленные работы исследователей, нацеленные на расширение горизонтов применения данного явления. Первая часть охватывает временной интервал с момента первой публикации на данную тему, начала 40-х годов прошлого века, до момента, когда интерес исследователей к данной области начал значительно снижаться, конца 90-х годов прошлого века. Во вторую часть вынесены наиболее актуальные работы по применению двухпотоковой неустойчивости в электронике СВЧ, вышедшие за последние несколько лет. Выход этих работ в свет подтвердил вновь растущий интерес зарубежных исследователей к данному явлению, что и послужило толчком к созданию данного обзора.

*Ключевые слова:* Двухпотоковая неустойчивость, два электронных потока, двухлучевой усилитель, электронно-волновая лампа.

DOI:10.18500/0869-6632-2016-24-1-37-74

### Введение

Явление двухпотоковой неустойчивости представляет собой классический пример неустойчивости в распределенных консервативных системах. К тому же эта неустойчивость является хрестоматийным примером конвективной и абсолютной неустойчивостей. Двухпучковая неустойчивость известна достаточно давно. Впервые этот термин был введен при исследовании взаимодействия двух электронных пучков, а позже приобрел широкое распространение в различных областях науки. Ранее уже публиковались достаточно полные обзоры, посвященные данному явлению (см., например [1, 2]), но с момента их выхода прошло достаточно много времени. Поэтому на сегодняшний день отсутствуют актуальные обзоры по данной теме, хотя в последнее время интерес к явлению двухпучковой неустойчивости появился вновь в СВЧ-электронике. В качестве примера можно упомянуть интригующие,

но малопонятные тезисы докладов Бишофбергера и др. [3–5], посвященных новому генератору терагерцового диапазона частот, работа которого основана на явлении двухпучковой неустойчивости. Также в качестве примера можно привести работу китайских исследователей, посвященную системе, состоящей из изогнутого волновода, пронизываемого двумя электронными пучками [6]. Кроме того, накопилось большое количество новых работ, тем или иным образом посвященных различным моделям и методам анализа двухпучковой неустойчивости.

Широкий класс задач в современной науке и технике связан с генерацией или усилением электромагнитных и акустических волн различных частотных диапазонов. При этом давно известно, что физическое явление, лежащее в основе всех принципов генерации и усиления, представляет собой явление неустойчивости. Именно наличие неустойчивости в системе обуславливает нарастание во времени малого возмущения, что в зависимости от типа неустойчивости может привести к усилению или генерации. По своему характеру, как известно, все виды неустойчивости в распределенных системах делятся на два типа: абсолютные и конвективные. Изучение видов неустойчивостей в конкретных системах, а также определение условий возникновения неустойчивостей является отправной точкой для теоретических и экспериментальных исследований генерации и усиления волн различных типов.

Классическим примером систем, способных демонстрировать как абсолютную, так и конвективную неустойчивость, стали двухпотоковые системы (см., например [7, 8]). В теории динамических систем это явление было названо двухпотоковой или двухпучковой неустойчивостью.

В самом начале определение типа неустойчивости в системе представляло собой достаточно трудную задачу, поскольку для этого отсутствовали однозначные критерии. Это обстоятельство нередко становилось причиной споров относительно правильной трактовки результатов исследования. Так, к примеру, в середине прошлого века разгорелся спор относительно правильной интерпретации решения дисперсионного уравнения для двухпотоковой системы. Он был начат Пиддингтоном в работе [9]. Однако позже экспериментальные и теоретические исследования доказали полную несостоятельность работы Пиддингтона. Значительную роль здесь сыграло получение и точное доказательство критериев определения типа неустойчивости (см., например [10, 11]). В обзоре [10] приведены основные критерии определения типов неустойчивости в таких системах. В частности, были рассмотрены неустойчивости двухлучевой лампы, являющейся электронным воплощением двухпотоковой системы.

В данном обзоре сделан акцент на взаимодействие двух электронных пучков. Однако, как это показано далее, при описании явления двухпучковой неустойчивости невозможно не упомянуть работы, касающиеся вопросов взаимодействия электронных пучков с плазмой, поскольку в этих работах содержится много полезной информации для описания процессов, протекающих при взаимодействии двух электронных пучков.

## **1. Двухпучковая неустойчивость в сверхвысокочастотной электронике**

**1.1. Пионерские работы.** После создания в середине 1940-х годов Рудольфом Компфнером лампы бегущей волны (ЛБВ) была открыта эпоха приборов с длительным взаимодействием. Различными научными группами велись работы по

улучшению выходных характеристик ЛБВ. Также делались попытки создания более мощных приборов подобного типа, однако в этом случае возникали трудности, связанные с перегревом и выходом из строя замедляющих систем. На этом фоне было предложено заменить замедляющую систему вторым электронным пучком, особенно при переходе в коротковолновую часть диапазона СВЧ. Теоретически это позволяло отказаться от технологически сложного процесса создания замедляющей системы и повысить общую мощность. И хотя основные принципы, лежащие в основе нового прибора, ранее уже использовались для описания взаимодействия электронного пучка с плазмой, конструктивно он был значительно проще своего плазменного «родственника».

Достаточно сложно судить, кто первым предложил использовать два электронных пучка для усиления сигналов. И все же первой вышла работа Леона Ниргаарда [12], содержащая последовательный теоретический линейный анализ системы, состоящей из двух взаимодействующих электронных пучков. За основу была взята гидродинамическая модель электронного пучка. Потоки полагались бесконечно широкими, идеально перемешанными и строго моноскоростными. Линеаризованная исходная система уравнений состояла из двух уравнений движения для пучков, двух уравнений непрерывности и уравнения Пуассона:

$$\frac{\partial v_{1,2}}{\partial t} + v_{01,02} \frac{\partial v_{1,2}}{\partial x} = \eta E, \quad (1)$$

$$\frac{\partial \rho_{1,2}}{\partial t} + \rho_{01,02} \frac{\partial v_{1,2}}{\partial x} + v_{01,02} \frac{\partial \rho_{1,2}}{\partial x} = 0, \quad (2)$$

$$\frac{\partial E}{\partial x} = \frac{(\rho_1 + \rho_2)}{\varepsilon_0}. \quad (3)$$

Здесь  $v_{1,2}$  – переменные высокочастотные составляющие скоростей пучков,  $v_{01,02}$  – постоянные составляющие скоростей пучков,  $\rho_{1,2}$  – переменные составляющие плотностей пучков,  $\rho_{01,02}$  – постоянные составляющие плотностей пучков,  $E$  – напряженность продольного высокочастотного электрического поля пространственного заряда,  $\eta$  – удельный заряд электрона,  $\varepsilon_0$  – универсальная электрическая постоянная.

После предположения, что все переменные величины изменяются пропорционально  $e^{j(\omega t - \beta x)}$ , записывалась новая система из пяти алгебраических уравнений. Из условия наличия совместного решения этой системы уравнений было получено впоследствии широко известное дисперсионное уравнение

$$\frac{\omega_{p1}^2}{(\omega - \beta v_{01})^2} + \frac{\omega_{p2}^2}{(\omega - \beta v_{02})^2} = 1. \quad (4)$$

Здесь  $\omega_{p1}^2 = \eta \rho_{01} / \varepsilon_0$ ,  $\omega_{p2}^2 = \eta \rho_{02} / \varepsilon_0$  – квадраты плазменных частот пучков,  $\omega$  – частота сигнала,  $\beta$  – постоянная распространения.

Значительную часть работы Ниргаарда занимает нахождение аналитического решения полученного уравнения четвертой степени. Результатом этого анализа явился колоссальный коэффициент усиления входного сигнала – 120 дБ на частоте 3 ГГц при длине системы 30 см. Разумеется, автор отметил, что такие результаты могут соответствовать лишь сильно идеализированной модели, которая физически не может

быть реализована. Однако он надеялся, что усовершенствования модели, приближающие ее к реальной системе, не заставят себя долго ждать.

В своей работе Ниргаард отметил еще две готовящиеся на тот момент к публикации работы, посвященные двухлучевому усилителю. Одной из них являлась работа Гаева [13]. В работе Гаева присутствует также линейная теория усилителя с двумя пучками, схожая с той, что была опубликована Ниргаардом. Однако Гаев использовал приближенное решение дисперсионного уравнения (4). Можно ввести среднюю скорость пучков и разность скоростей следующим образом:

$$v = \frac{v_{01} + v_{02}}{2}, \quad (5)$$

$$\delta = \frac{v_{01} - v_{02}}{2}, \quad (6)$$

при этом  $v_{01} \neq v_{02}$ ,  $v_{01} = v + \delta$ ,  $v_{02} = v - \delta$ .

Если теперь положить  $\beta = \omega/v + \gamma$ , подставить в исходное дисперсионное уравнение и пренебречь слагаемым  $\gamma\delta \rightarrow 0$ , что соответствует малому различию невозмущенных скоростей пучков, то можно получить новое уравнение вида:

$$\frac{1}{\left(\frac{\delta\omega}{v\omega_p} + \frac{\gamma v}{\omega_p}\right)^2} + \frac{1}{\left(\frac{\delta\omega}{v\omega_p} - \frac{\gamma v}{\omega_p}\right)^2} = 1 \quad (7)$$

или

$$\frac{1}{(\chi + \xi)^2} + \frac{1}{(\chi - \xi)^2} = 1. \quad (8)$$

здесь  $\chi = \omega\delta/\omega_p v$  – параметр неоднородности,  $\xi = \gamma v/\omega_p$ .

Уравнение (8) является биквадратным. Можно видеть, что для возникновения неустойчивости в системе из двух пучков хотя бы один из корней должен иметь мнимую положительную часть. Это условие достигается при  $0 < \chi < \sqrt{2}$ . В этом случае в пространстве системы будут распространяться четыре волны: одна нарастающая, одна затухающая и две постоянной амплитуды. Также легко определить, что максимально быстрое нарастание амплитуды тока достигается при  $\chi \approx 0.73$ .

Помимо построенной теории в своей работе Гаев привел результаты первого экспериментального исследования двухлучевого прибора, названного им

электронно-волновой лампой (ЭВЛ). Схема прибора приведена на рис. 1. Электронные пучки в ЭВЛ формировались двумя близко расположенными спиральными катодами и параллельно друг другу влетали в пространство взаимодействия. На входе и на выходе из пространства взаимодействия располагались короткие отрезки спирали, служащие вводом и выводом энергии. В ходе этого эксперимента при суммарном токе 15 мА на частоте 3 ГГц был получен коэффициент усиления 46 дБ.

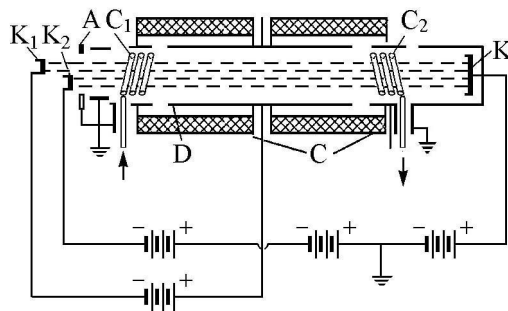


Рис. 1. Схема электронно-волновой лампы.  $K_{1,2}$  – катоды, A – ускоряющий анод,  $C_{1,2}$  – входная и выходная спирали, C – фокусирующие соленоиды, D – проводящая труба, K – коллектор (цит. по [1])



Другим, казалось бы, интересным вариантом усилителя, предложенным Гаевым в его работе, стала однолучевая ЭВЛ с пространственным зарядом (space-charge tube). В ней формировался один цилиндрический электронный пучок. Входным и выходным устройством служили резонаторы. За счет полей пространственного заряда пучок становился неоднородным по скорости, электроны, расположенные ближе к оси пучка, начинали двигаться медленнее электронов, расположенных дальше от центра пучка. По мнению Гаева, такая система также могла дать значительное усиление. Однако в дальнейшем целый ряд исследований показал невозможность усиления в подобной системе. К этим работам мы вернемся позднее.

Практически одновременно с Ниргаардом и Гаевым похожие теоретические исследования проводили Пирс и Хебенстрейт [14]. В примечании к своей работе авторы отметили, что во время подготовки их статьи им стало известно о внезапном выходе статьи Гаева, посвященной результатам засекреченной до того момента работе и содержащей похожий анализ двухпучковой системы. Однако Пирс с соавтором впервые рассмотрели модель цилиндрических пучков. Такой анализ помог их коллеге Холленбергу провести экспериментальное исследование прибора, ранее названного ими «двухлучевой усилитель».

В эксперименте Холленберг использовал два различных макета [15]. В обоих макетах в качестве входного устройства использовались отрезки спирали. Различие заключалось в том, что выводом энергии в одном из макетов являлся отрезок спирали, в то время как в другом использовался резонатор. Используемые макеты имели некоторые отличия от моделей, описанных в работе Пирса и Хебенстрейта. Во-первых, использовались не сплошные цилиндрические пучки, а трубчатые. Во-вторых, пучки были пространственно разделены, а не перемешаны. В-третьих, в эксперименте пучки находились внутри проводящей трубы конечного радиуса. И, наконец, пучки не имели строгой цилиндрической формы из-за наличия разброса значений поперечных компонент скорости электронов.

В отличие от эксперимента Гаева, использовались низковольтные пучки и относительно низкие частоты. Изначально теория Пирса и Хебенстрейта предсказывала величину усиления около 40 дБ, но позже учет факта пространственного разделения пучков скорректировал это значение. В итоге, при напряжении пучков 54 В и 33 В на частоте 200 МГц был получен коэффициент усиления 29 дБ, что хорошо согласовалось с теорией.

Позже, в работе [16] Пирс более подробно рассмотрел двухлучевой усилитель с двумя концентрическими трубчатыми пучками, в котором для ввода и вывода энергии использовались резонаторы. Им был проведен также численный расчет коэффициента усиления для широкого набора параметров пучков, включая случаи, когда скорость одного из пучков мала или равна нулю [17].

Большой интерес представляет работа, в которой Пирс и Уолкер теоретически показали возможность усиления сигнала в системе, в которой пучки влетают в пространство взаимодействия почти перпендикулярно друг другу [18]. По мнению авторов, эти результаты могли быть полезны в теории лампы с поперечным током. В рассмотренной ими модели два идентичных электронных потока движутся со скоростями  $u_0$  в  $z$ -направлении и со скоростями  $u_1$  и  $-u_1$ , соответственно, в  $y$ -направлении. Был рассмотрен случай бесконечно широких электронных потоков и случай, в котором пространство по оси  $y$  ограничено поверхностью, упруго

отражающей электроны. В обоих случаях была показана возможность существования нарастающих волн. При этом полученное дисперсионное уравнение при определенной замене переменных полностью совпадает с дисперсионным уравнением (4) одномерной теории.

**1.2. Пучки с непрерывной функцией распределения заряженных частиц по скоростям.** Ранее было отмечено, что работы Пирса и Гаева послужили толчком для целого ряда исследований. Так, например, начались широкие исследования в области возникновения неустойчивости в одном электронном пучке. Идея была подана Пирсом и заключалась в следующем. В электронном пучке дрейфовые скорости электронов подчиняются некоторой функции распределения. Вид этой функции определяется конструкцией электронной пушки. Ранее было показано, что, если пучок состоит из двух моноскоростных пучков со слабо различающимися скоростями, то такая система может демонстрировать неустойчивость. В общем случае это было показано и для многолучевой системы. Поэтому было предложено разбить электронный поток на большое количество составляющих его моноэнергетических электронных потоков. Первым эту проблему осветил Кент [19]. В своей работе он рассматривал ленточный пучок, полностью заполняющий пространство между двумя параллельными пластинами. Предполагалось, что из-за падения потенциала в середине пучка продольная скорость электронов в центре будет ниже скорости электронов по краям. Это может привести к возникновению неустойчивости. Автором было показано, что неустойчивость может возникнуть, только если функция распределения электронов по скоростям будет иметь более одного локального максимума. Однако в данной системе функция распределения не обладала подобным свойством.

Похожее исследование провел Бим [20]. В его работе повторяется теоретическое рассмотрение цилиндрического пучка с падением потенциала посередине. Результаты также говорят об отсутствии усиления, как и в работе Кента. Помимо этого был проведен компьютерный расчет, также показавший отсутствие нарастающих волн, и эксперимент. В эксперименте были использованы подвижные резонаторы для определения напряженности поля пространственного заряда в различных точках пространства дрейфа с целью обнаружения экспоненциально нарастающих волн. Автор отметил, что нарастание волн не наблюдалось, однако при достаточно низком напряжении на коллекторе образовывались вторичные электроны, вызывавшие усиление до 30 дБ. Это, по мнению автора, могло объяснить появление усиления в экспериментах с одним электронным пучком.

Помимо выше перечисленных исследователей работы по изучению устойчивости электронных пучков проводились Мираном [21], Бриггсом [22] и другими. В работе Желязкова [23], например, исследовалась неустойчивость ограниченного изолированного от металлических стенок плоскопараллельного электронного пучка с градиентом скорости. Показано, что такой пучок может быть устойчивым только по отношению к длинноволновым колебаниям, и что для возникновения неустойчивости требуется больший градиент скорости, чем в случае, когда пучок не ограничен металлическими стенками. Исследователи касались также устойчивости многолучевых электронных пучков, возбуждаемых шумовыми сигналами. К примеру, в работах Сигмана [24, 25] приводятся результаты анализа распространения шумового сигнала в многолучевой системе, проводимого как с помощью моделирования, так и с помощью аналитических методов [26, 27].

В нашей стране заниматься двухлучевыми приборами начали несколько позже. Пожалуй, первыми работами, посвященными данной теме стали работы Лопухина [1, 28]. В них была описана одномерная линейная теория электронно-волновой лампы, в рамках которой автор привел вывод дисперсионного уравнения для такой системы, опираясь на теорию Власова [29]. Также в них был дан краткий обзор имеющихся на тот момент научных результатов.

Рассмотрим кратко, следуя [28], общий случай движения электронного потока с произвольной функцией распределения электронов по скоростям. Будем искать вид дисперсионного уравнения для потока в приближении малого сигнала, исходя из совместного решения двух линеаризованных уравнений: кинетического уравнения для функции распределения  $f$

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \vec{v} \operatorname{grad}_{\vec{r}} f + \frac{e\vec{E}}{m} \operatorname{grad}_{\vec{v}} f_0 = 0 \quad (9)$$

(здесь  $\operatorname{grad}_{\vec{r}} f = \partial f / \partial \vec{r}$ ,  $\operatorname{grad}_{\vec{v}} f_0 = \partial f_0 / \partial \vec{v}$ ,  $f_0$  – равновесное распределение) и уравнения Пуассона

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad \text{или} \quad \frac{\rho}{\varepsilon_0} = -\nabla^2 \phi. \quad (10)$$

Здесь  $\vec{v}$  – вектор скорости,  $\rho$  – объемная плотность заряда,  $\vec{E}$  – вектор напряженности электрического поля пространственного заряда,  $\phi$  – потенциал электрического поля,  $\varepsilon_0$  – универсальная электрическая постоянная.

Вывод кинетического уравнения для данной задачи позже был приведен в книге Вайнштейна и Солнцева [30].

Решение будем искать в виде суперпозиции плоских бегущих волн

$$\begin{cases} f(\vec{r}, \vec{v}, t) = f_k(\vec{r}, \vec{v}) e^{j\omega t}, \\ \vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_k(\vec{r}) e^{j\omega t}, \\ \phi(\vec{r}, t) = \phi_1 e^{j(\omega t - \vec{k}\vec{r})}, \end{cases} \quad (11)$$

где  $k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = k^2$ ,  $\vec{k}$  – волновой вектор. При этом считаем, что  $\vec{E}_k$ ,  $f_k$  пропорциональны  $e^{-j(k_x x + k_y y + k_z z)}$ .

Из уравнения (9) имеем

$$j(\omega - \vec{v}\vec{k}) f_k + j\vec{k} \frac{e}{m} \phi_1 \operatorname{grad}_{\vec{v}} f_0 = 0. \quad (12)$$

Используя уравнение Пуассона, получаем систему уравнений

$$\begin{cases} f_k = \frac{\vec{k}(e/m)\phi_1 \operatorname{grad}_{\vec{v}} f_0}{(\omega - \vec{v}\vec{k})}, \\ -k^2 \phi_1 = \frac{e}{\varepsilon_0} \int f_k d\vec{v}. \end{cases} \quad (13)$$

Из системы уравнений (13) находим:

$$-k^2 \phi_1 = \frac{e}{\varepsilon_0} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\vec{k}(e/m) \phi_1 \text{grad}_{\vec{v}} f_0}{(\omega - \vec{v} \vec{k})} d\vec{v}$$

или

$$k^2 = -\frac{e^2}{\varepsilon_0 m} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\vec{k} \text{grad}_{\vec{v}} f_0}{(\omega - \vec{v} \vec{k})} d\vec{v}. \quad (14)$$

Таким образом, мы получили общий вид дисперсионного соотношения

$$k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = -\frac{e^2}{\varepsilon_0 m} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{k_x \frac{\partial f_0}{\partial x} + k_y \frac{\partial f_0}{\partial y} + k_z \frac{\partial f_0}{\partial z}}{(\omega - k_x v_x - k_y v_y - k_z v_z)} dv_x dv_y dv_z. \quad (15)$$

Пусть имеем  $n$  потоков со средними концентрациями  $N_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) и средними скоростями  $\vec{v}_i$  ( $v_{xi}, v_{yi}, v_{zi}$ ), и пусть функция распределения имеет вид

$$f_0(v_x, v_y, v_z) = \sum_{i=1}^n N_i \delta(v_x - v_{xi}) \delta(v_y - v_{yi}) \delta(v_z - v_{zi}). \quad (16)$$

Перепишем дисперсионное уравнение (15)

$$1 = -\frac{e^2}{\varepsilon_0 m k^2} \int \frac{\vec{k} \frac{\partial f_0}{\partial \vec{v}}}{(\omega - \vec{v} \vec{k})} d\vec{v}. \quad (17)$$

Проинтегрируем (17) по частям; при этом используем условия  $f_0(\vec{v})|_{v=\infty} = f_0(\vec{v})|_{v=-\infty} = 0$ , физический смысл которых заключается в том, что число электронов с очень большими скоростями пренебрежимо мало. Получим

$$1 = \frac{e^2}{\varepsilon_0 m} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f_0}{(\omega - \vec{v} \vec{k})^2} d\vec{v}. \quad (18)$$

Подставляя в (18) выражение для функции распределения и принимая во внимание, что

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x - a) f(x) dx = f(a), \quad (19)$$

получаем

$$1 = \sum_{i=1}^n \frac{\omega_{pi}^2}{(\omega - k_x v_{xi} - k_y v_{yi} - k_z v_{zi})^2}, \quad (20)$$

где  $\omega_{pi}^2 = (e^2 N_i) / (m_e \varepsilon_0)$  – плазменная частота  $i$ -го электронного потока. В случае двух идентичных потоков ( $\omega_{p1} = \omega_{p2} = \omega_p$ ) мы получим уже известное в линейной одномерной теории уравнение.

Очевидно, что случай функции распределения в виде  $\delta$ -функции является идеализированным. Учет теплового разброса применительно к системе из двух электронных потоков был впервые представлен в работе Бергнера [31]. В ней автор получил дисперсионное соотношение с учетом теплового движения электронов и аналитически показал, что для возникновения двухпотоковой неустойчивости значение средней тепловой скорости электронов должно быть много меньше модуля разности средних скоростей взаимодействующих пучков.

Позже к похожему выводу пришла М.И. Родак [32]. В своей работе она рассмотрела двухлучевой усилитель, причем в качестве функции распределения была взята двугорбая функция, близкая по характеру к максвелловской. Было показано, что тепловой разброс электронов в двухлучевом усилителе уменьшает диапазон усиливаемых частот, снижая их верхнюю границу, а также уменьшает коэффициент усиления. Достаточно большой тепловой разброс может привести к прекращению усиления. Таким образом, для усиления необходимы четко выраженные пики в равновесной функции распределения электронов по скоростям.

**1.3. Физика процессов взаимодействия.** К концу 1950-х годов теоретические и экспериментальные исследования давали достаточно полное описание основных принципов двухлучевого усиления. Однако по-прежнему не хватало физической трактовки данного явления. Многие авторы предпринимали попытки построить общую картину процессов, приводящих к неустойчивости двух электронных пучков, но зачастую ограничивались лишь поверхностным рассмотрением. К примеру, подобные описания можно найти у Чена [33], Кролла и Трайвелписа [34], а также у Стикса [35] и Варнеке [36]. Однако наиболее полной, на наш взгляд, является трактовка Тагера и Голанта [37]. В своей работе авторы впервые провели сравнение механизмов работы электронно-волновой лампы с ЛБВ и параметрическим усилителем. Остановимся на ней подробнее.

Рассмотрим, следуя [37], два полностью перемешанных электронных пучка, движущихся параллельно в пространстве дрейфа с различными, но близкими по величине скоростями  $v_1$  и  $v_2$ . Для простоты считаем, что плазменные частоты обоих пучков равны  $\omega_p$ . Допустим, что один из пучков на входе в пространство дрейфа был промодулирован по скорости сигналом с частотой  $\omega$ . В результате этого в потоке в пространстве дрейфа начнут образовываться электронные сгустки, причем расстояние между соседними сгустками определяется как  $\lambda_{gi} = \lambda v_i / c$ . По мере движения в пространстве дрейфа сгустки уплотняются, достигая максимальной плотности через четверть периода  $T_\pi = 2\pi v_i / \omega_p$  плазменных колебаний, а затем снова расплываются. В дальнейшем сгустки достигают максимальной степени сжатия через каждые полпериода плазменных колебаний.

Под влиянием модуляции по плотности первого потока во втором тоже начинают образовываться сгустки. Поскольку средняя скорость движения электронных потоков различна, электроны одного из них медленно «скользят» относительно сгустков второго. В каждом из потоков между сгустками электронов и расположенными между ними областями с избыточным положительным зарядом возникает электрическое поле. Это поле тормозит или ускоряет перемещающиеся в нем сгустки другого потока. По мере разделения положительного и отрицательного пространственного заряда в ходе уплотнения сгустков амплитуда поля возрастает. Таким образом, знакопеременное поле кулоновских сил каждого из электронных потоков для движущихся

в этом поле электронов другого потока представляется таким же и, следовательно, оказывает то же воздействие на них, что и высокочастотное поле ЛБВ. То есть в случае наличия нарастающей волны в «медленном» потоке электроны «быстрого» потока больше времени будут находиться в тормозящем поле, чем в ускоряющем. Сгустки быстрого потока, раз сформировавшись в области тормозящего поля (как в ЛБВ), остаются в нем, непрерывно переформируясь и уплотняясь. При этом они отдают энергию полю кулоновских сил, создаваемому сгустками медленного потока, уплотняя тем самым эти сгустки.

Так как сгустки электронов из каждого потока во время своего движения остаются в одной и той же фазе поля второго потока, скорости перемещения сгустков в обоих потоках одинаковы. В частном случае потоков с равными плазменными частотами скорость движения сгустков равна средней скорости электронов в обоих потоках.

Процесс трансформации кинетической энергии электронов в энергию высокочастотного поля в работе [37] пояснен с точки зрения группировки электронов в системе координат, связанной с одним из потоков. В такой системе координат образование сгустков связано с накоплением в потоке потенциальной энергии. Электроны второго потока двигаются в тормозящем (по отношению к направлению их перемещения) поле кулоновских сил потока, движущегося вместе с системой координат. Поэтому увеличение потенциальной энергии первого потока может происходить за счет уменьшения кинетической энергии второго потока. Последняя в выбранной системе координат определяется разностью скоростей обоих потоков.

Отмечалось, что при изучении явления в движущейся системе координат особенно четко вырисовывается сходство явлений в обоих потоках. В самом деле, в системе координат, движущейся совместно с быстрым потоком, сгустки медленного потока перемещаются в тормозящем поле быстрого, так что кинетическая энергия этих электронов снижается, изменяя поле кулоновских сил сгустков быстрого потока, то есть увеличивая потенциальную энергию этого потока. Совершенно аналогично в системе координат, движущейся совместно с медленным потоком, сгустки быстрого потока, двигаясь в тормозящем поле, создаваемом сгустками медленного потока, отдают свою кинетическую энергию, увеличивая потенциальную энергию этого потока.

Таким образом, разность скоростей электронов в обоих потоках в ходе образования сгустков сокращается. Это сокращение происходит как за счет замедления электронов в быстром потоке, так и за счет их ускорения в медленном, так что в процессе группировки скорости электронов обоих потоков стремятся к некоторой средней величине, равной скорости движения сгустков. Поэтому максимальная группировка, достижимая в такой лампе, определяется начальной разностью скоростей электронов.

Уже говорилось, что процессы возникновения неустойчивости в двухпоточковой системе имеют много общего с аналогичными процессами в ЛБВ. Ниже будет показана справедливость подобной аналогии с точки зрения механизма связанных волн. В качестве взаимодействующих волн будут рассматриваться волны пространственного заряда в двух электронных пучках. Подобный подход упоминается, к примеру, в книге Лоусона [38]. При этом известно, что, зачастую, при определенных условиях возможен учет взаимодействия только двух волн (см., например, [39]).

Понятие взаимной связи крайне полезно для решения задач в системах генерации и передачи энергии. Существует огромное количество примеров, где использование понятия связанной системы дает возможность с легкостью найти решение задачи, и не только из области электроники. Используя понятие связи, можно разбить исследуемую связанную систему на несколько изолированных элементов и затем найти точное решение описывающих систему уравнений для каждого элемента. Тогда, если предположить, что исходная сложная система состоит из элементов, слабо связанных друг с другом, то можно описать ее поведение с точки зрения поведения ее элементов. В этом, кратко, и состоит метод связанных колебаний и волн [40].

В электронных пучках возможно распространение волн различных типов и при разных условиях. Во многих приборах используется связь этих волн с пассивными или активными электродинамическими системами. Следовательно, использование метода связанных колебаний и волн является здесь крайне целесообразным. Хорошо известно, что распространение возмущений плотности и скорости в электронном потоке может быть представлено суперпозицией двух бегущих волн пространственного заряда, движущихся с различными скоростями – быстрой волны пространственного заряда и медленной. Свойства этих волн подробно описаны, например, в работах Старрока [41,42] и Хауса [43]. В случае двух потоков, очевидно, следует рассматривать уже четыре волны пространственного заряда. При этом взаимодействие потоков соответствует взаимодействию этих волн. С помощью теории связанных волн можно рассмотреть частное взаимодействие любой волны одного потока с любой волной другого и проанализировать его на неустойчивость.

Система уравнений, описывающая два одномерных электронных потока с гидродинамической точки зрения в предположении, что во времени все переменные величины изменяются по закону  $e^{j\omega t}$ , имеет вид [44]

$$\begin{cases} E = -\frac{i_1 + i_2}{j\omega\epsilon_0}, \\ \frac{\partial^2 i_1}{\partial x^2} + 2jk_{e1}\frac{\partial i_1}{\partial x} - k_{e1}^2 i_1 = j\omega\epsilon_0 k_{p1}^2 E, \\ \frac{\partial^2 i_2}{\partial x^2} + 2jk_{e2}\frac{\partial i_2}{\partial x} - k_{e2}^2 i_2 = j\omega\epsilon_0 k_{p2}^2 E. \end{cases} \quad (21)$$

Здесь  $k_{e1,2} = \omega/v_{1,2}$ ,  $k_{p1,2} = \omega_{p1,2}/v_{1,2}$ ,  $i_{1,2}$  – плотности токов,  $v_{1,2}$  – постоянные составляющие скоростей электронных потоков,  $\omega_{p1,2}$  – плазменные частоты,  $E$  – амплитуда электрического поля пространственного заряда.

Рассмотрим случай, когда направления фазовых скоростей волн совпадают. Перейдем к интегральной форме уравнений для тока [44], полученной после преобразования Лапласа при нулевых начальных условиях

$$\begin{cases} i_1(x) = -k_{p1}^2 \int_0^x i_2(\zeta) \frac{\sin k_{p1}(x-\zeta)}{k_{p1}} e^{-jk_{e1}(x-\zeta)} d\zeta, \\ i_2(x) = -k_{p2}^2 \int_0^x i_1(\zeta) \frac{\sin k_{p2}(x-\zeta)}{k_{p2}} e^{-jk_{e2}(x-\zeta)} d\zeta. \end{cases} \quad (22)$$

Правые части уравнений системы (22) могут быть представлены как суммы токов, связанных с «быстрой» и «медленной» волной пространственного заряда.

$$\begin{cases} i_1(x) = -\frac{k_{p1}}{2j} \left[ \int_0^x i_2(\zeta) e^{-j(k_{e1}-k_{p1})(x-\zeta)} d\zeta - \int_0^x i_2(\zeta) e^{-j(k_{e1}+k_{p1})(x-\zeta)} d\zeta \right], \\ i_2(x) = -\frac{k_{p2}}{2j} \left[ \int_0^x i_1(\zeta) e^{-j(k_{e2}-k_{p2})(x-\zeta)} d\zeta - \int_0^x i_1(\zeta) e^{-j(k_{e2}+k_{p2})(x-\zeta)} d\zeta \right] \end{cases} \quad (23)$$

или

$$\begin{cases} i_1(x) = -\frac{k_{p1}}{2j} \left[ e^{-j(k_{e1}-k_{p1})x} \int_0^x i_2(\zeta) e^{j(k_{e1}-k_{p1})\zeta} d\zeta - e^{-j(k_{e1}+k_{p1})x} \int_0^x i_2(\zeta) e^{j(k_{e1}+k_{p1})\zeta} d\zeta \right], \\ i_2(x) = -\frac{k_{p2}}{2j} \left[ e^{-j(k_{e2}-k_{p2})x} \int_0^x i_1(\zeta) e^{j(k_{e2}-k_{p2})\zeta} d\zeta - e^{-j(k_{e2}+k_{p2})x} \int_0^x i_1(\zeta) e^{j(k_{e2}+k_{p2})\zeta} d\zeta \right]. \end{cases} \quad (24)$$

Для проведения аналогии с лампой бегущей волны воспользуемся трехволновым приближением. В ЛБВ волны пространственного заряда электронного пучка взаимодействуют с волной в замедляющей структуре. При этом известно, что волна в замедляющей структуре обладает положительной энергией, быстрая волна пространственного заряда пучка также обладает положительной энергией, а медленная волна пространственного заряда обладает отрицательной энергией. Таким образом, далее будем рассматривать систему из двух пучков, в одном из которых возбуждены обе волны пространственного заряда, а в другом пучке возбуждена только быстрая волна.

В этом случае система уравнений (24) примет вид

$$\begin{cases} i_1(x) = -\frac{k_{p1}}{2j} e^{-j(k_{e1}-k_{p1})x} \int_0^x (i_2(\zeta) + i_2(\zeta)) e^{j(k_{e1}-k_{p1})\zeta} d\zeta, \\ i_2(x) = -\frac{k_{p2}}{2j} e^{-j(k_{e2}-k_{p2})x} \int_0^x i_1(\zeta) e^{j(k_{e2}-k_{p2})\zeta} d\zeta, \\ i_2(x) = \frac{k_{p2}}{2j} e^{-j(k_{e2}+k_{p2})x} \int_0^x i_1(\zeta) e^{j(k_{e2}+k_{p2})\zeta} d\zeta. \end{cases} \quad (25)$$

Здесь  $i_1$ ,  $i_2$ ,  $i_2$  – амплитуды токов быстрой волны первого потока, быстрой волны второго потока и медленной волны второго потока, соответственно. После дифференцирования (25) можно легко получить

$$\begin{cases} \frac{di_1}{dx} = -j(k_{e1} - k_{p1}) i_1 + j \frac{k_{p1}}{2} i_2 + j \frac{k_{p1}}{2} i_2, \\ \frac{di_2}{dx} = -j(k_{e2} - k_{p2}) i_2 + j \frac{k_{p2}}{2} i_1, \\ \frac{di_2}{dx} = -j(k_{e2} + k_{p2}) i_2 - j \frac{k_{p2}}{2} i_1. \end{cases} \quad (26)$$



Предположим, что все амплитуды токов изменяются как  $e^{-jkx}$ , тогда из (26) вытекает

$$\begin{cases} -j[k - (k_{e1} - k_{p1})] i_1 - j\frac{k_{p1}}{2} i_2 - j\frac{k_{p1}}{2} i_2 = 0, \\ -j[k - (k_{e2} - k_{p2})] i_2 - j\frac{k_{p2}}{2} i_1 = 0, \\ -j[k - (k_{e2} + k_{p2})] i_2 + j\frac{k_{p2}}{2} i_1 = 0. \end{cases} \quad (27)$$

После приравнивания нулю определителя системы (27)

$$\begin{vmatrix} -j[k - (k_{e1} - k_{p1})] & -j\frac{k_{p1}}{2} & -j\frac{k_{p1}}{2} \\ -j\frac{k_{p2}}{2} & 0 & -j[k - (k_{e2} - k_{p2})] \\ j\frac{k_{p2}}{2} & -j[k - (k_{e2} + k_{p2})] & 0 \end{vmatrix} = 0$$

получим дисперсионное уравнение вида

$$[k - (k_{e1} - k_{p1})][k - (k_{e2} - k_{p2})][k - (k_{e2} + k_{p2})] = -\frac{k_{p1}k_{p2}^2}{2}. \quad (28)$$

Его решение показано на рис. 2. Предполагалось, что  $\omega_{p1} = \omega_{p2} = \omega_p$ .

Как известно, дисперсионное уравнение ЛБВ в трехволновом приближении имеет вид (см., например, [45])

$$(k - k_0) [(k - k_e)^2 - k_p^2] = -k_e k_0^2 C_0^3, \quad (29)$$

где  $k_0 = \omega/v_\phi$ ,  $k_e = \omega/v_0$ ,  $k_p = \omega_p/v_0$ ,  $\omega$  – частота,  $k$  – постоянная распространения,  $v_\phi$  – фазовая скорость волны в замедляющей системе,  $v_0$  – скорость электронов в пучке,  $C_0$  – параметр усиления Пирса.

Легко видеть, что по структуре уравнение (29) совпадает с уравнением (28). На рис. 3 приведена дисперсионная характеристика ЛБВ в безразмерных координатах, аналогичных тем, что использовались при построении дисперсионной характеристики для двухпоточковой системы, а именно

$$\theta = \frac{\omega}{\omega_p}, \quad \beta = \frac{kv_0}{\omega_p}, \quad S = \frac{v_0}{v_\phi}.$$

Сравнивая рис. 3 и рис. 2, следует также отметить, что характер дисперсионных характеристик на них полностью совпадает. Таким образом, можно говорить о наличии глубокой аналогии между процессами, протекающими в лампе бегущей волны, и процессами в двухпоточковой системе.

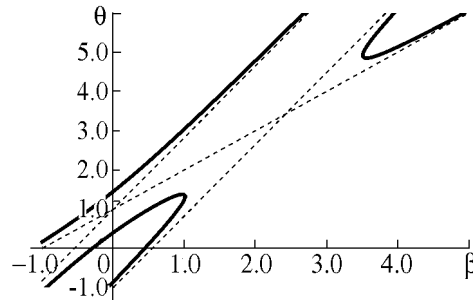


Рис. 2. Дисперсионная характеристика для случая взаимодействия быстрой волны более медленного электронного потока с волнами пространственного заряда более быстрого электронного потока. Здесь  $\beta = (kv_1)/\omega_p$ ,  $\theta = (\omega/\omega_p)$ ,  $S = v_2/v_1$

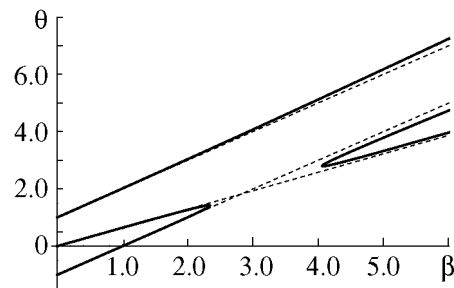


Рис. 3. Дисперсионная характеристика ЛБВ в трехволновом приближении

**1.4. Нелинейные явления в системе двух взаимодействующих электронных потоков.** Явление двухпотоковой неустойчивости в электронных пучках, как большинство других видов неустойчивостей, впервые было описано в рамках простейшей линейной модели. В такой модели в случае наличия неустойчивости решение давало экспоненциальный рост некоторой определяющей физической величины, например тока, вдоль пространства взаимодействия. Именно в этом случае обычно говорилось о развитии неустойчивости в системе. Как и в случае с лампой бегущей волны, на основе линейной теории был создан работающий прибор. Однако для дальнейшей оптимизации и объяснения экспериментальных результатов требовалось построение модели, учитывающей нелинейные эффекты.

Первой работой по нелинейному описанию процессов в электронно-волновой лампе стала работа Филимонова [45]. В ней автор рассмотрел взаимодействие двух электронных односкоростных потоков, в каждом из которых электроны на входе лампы имеют определенную скорость, плотность и заданное распределение по сечению пучка. Тепловой разброс и поперечное движение электронов не учитывались. Для построения теории был использован метод, ранее широко применявшийся в нелинейной теории ЛБВ. Автором, в первую очередь, был предложен вид функции взаимодействия различных сечений пучка ограниченного диаметра, что позволило рассчитать поле пространственного заряда в такой системе. После этого были записаны нелинейные уравнения движения для многолучевой лампы. Полученная система интегро-дифференциальных уравнений могла быть решена аналитически только в приближении слабых возмущений. На основе этой системы автором было проведено исследование законов сохранения и, впоследствии, произведен численный расчет ЭВЛ [46]. Результатом расчета стало нахождение предельного КПД прибора, который достигает 60...65%. Помимо прочего, при учете нелинейности автор получил значительно большее усиление на единицу длины по сравнению со значениями, предсказанными линейной теорией.

В то же время за границей также проводились работы по нелинейной теории двухпотоковой неустойчивости. Одно из первых нелинейных описаний двух взаимодействующих электронных пучков встречается в работе Мирана [47]. Изначально его интерес к двухпотоковой модели возник в результате исследования нелинейных явлений внутри пучка с непрерывным распределением электронов по скоростям. Для анализа такой системы им была создана дисковая модель электронного пучка [48, 49]. При этом электронный пучок с непрерывным распределением был заменен на восемь моноскоростных пучков. В результате численного эксперимента наблюдался сильный нелинейный эффект, выражающийся в обгоне одних электронов другими при неожиданно низких уровнях сигнала. Для того чтобы прояснить картину происходящего, Миран упростил многолучевую модель до двухлучевой.

Для расчета были взяты хорошо перемешанные цилиндрические пучки конечного радиуса с различными дрейфовыми скоростями и одинаковыми плазменными частотами. Было показано, что в системе на определенной длине наблюдается ограничение роста переменной составляющей тока, причем уровень тока не стремится к некоторой постоянной величине, а флуктуирует. На рис. 4 представлена зависимость нормированных амплитуд первых трех гармоник тока от нормированной длины пространства взаимодействия. Как видно из рисунка, на некоторой длине прекращается рост тока. Миран объясняет это началом захвата электронов полем волны

пространственного заряда. Также он отмечает, что в случае ограниченных потоков редуцированная плазменная частота начинает зависеть от частоты сигнала. Это приводит к тому, что вторая и третья гармоники на дисперсионной диаграмме также оказываются в области неустойчивости и начинают возрастать. Соответствующие зависимости показаны на рис. 5.

Интересный численный эксперимент был проведен Буснардо-Нито и Роу [50]. В своей работе они рассмотрели аксиально-симметричную систему, состоящую из двух попутных цилиндрических перемешанных электронных пучков конечного диаметра внутри проводящей трубы в одномерном и двумерном случаях. Как и Миран, авторы показали наличие нелинейного ограничения неустойчивости, связанного с захватом. Основной задачей было исследование нарастания амплитуд гармоник тока

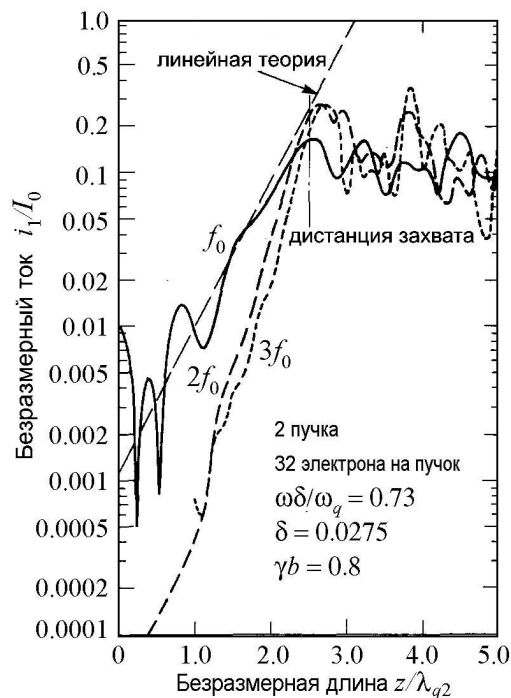


Рис. 4. Зависимость нормированного тока от нормированной длины пространства взаимодействия [47]

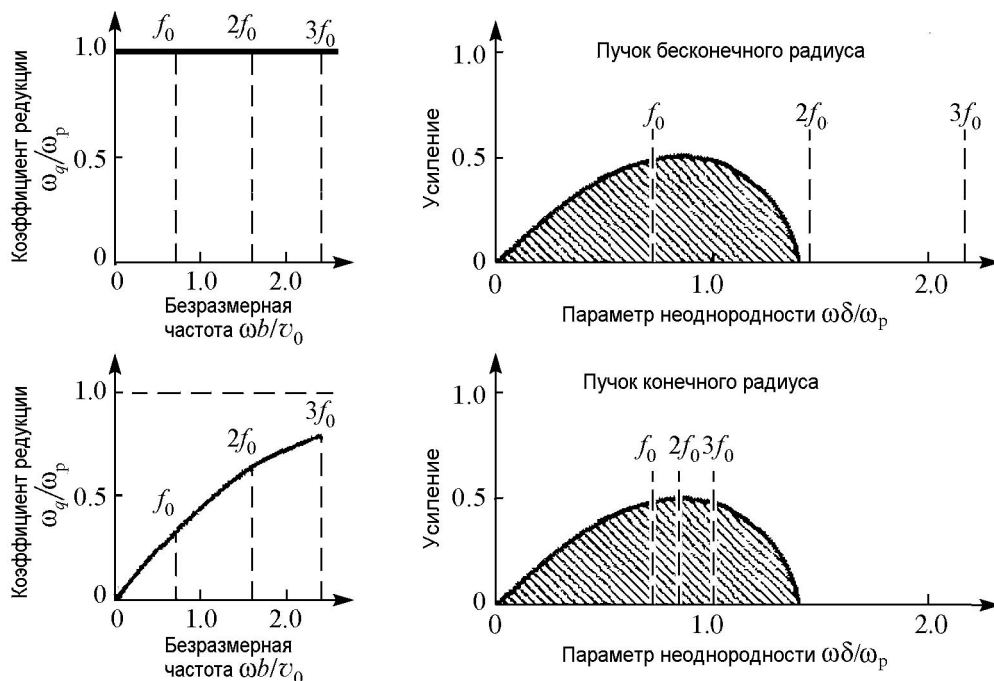


Рис. 5. Зависимость коэффициента редукции плазменной частоты и усиления от параметра неоднородности для случаев бесконечно широкого пучка (вверху) и ограниченного (внизу) [47]

с расстоянием. В случае скоростной модуляции в самом начале наблюдался большой рост амплитуд полей и токов за счет механизма клистронной группировки, и только после этого начинал преобладать двухлучевой механизм усиления. Увеличив глубину модуляции, можно было получить такой режим, при котором преобладание двухпотоковой неустойчивости наступало при слишком больших значениях амплитуд полей и токов, и это приводило к разрушению области экспоненциального роста за счет возникающих нелинейностей. При начальной модуляции по плотности подобная картина не наблюдалась, поскольку в этом случае происходила постепенная разгруппировка электронных сгустков. Конечным результатом является тот факт, что при модуляции по плотности насыщение происходит позже, но при тех же значениях напряженности поля и тока, что и при модуляции по скорости. И это с учетом того, что при скоростной модуляции с самого начала возбуждается только одна гармоника, в то время как при модуляции по плотности возбуждались сразу несколько гармоник. На рис. 6 можно видеть различие в поведении при разных типах модуляции. Характер этих зависимостей в точности повторяет аналогичные зависимости в работе Мирана.

Исходя из поведения траекторий электронов, авторы [50] сделали вывод, что насыщение возникает при захвате электронов, то есть в тот момент, когда электроны не могут преодолеть возникающий за счет пространственного заряда потенциальный барьер и отражаются. Вслед за этим наблюдается прекращение упорядоченного движения электронов, и они начинают колебаться в потенциальной яме.

Интересные результаты дал анализ функции распределения электронов по скоростям. Если в самом начале взаимодействия пучков функция распределения имеет два явно выраженных пика, то в процессе взаимодействия эти пики уширяются. К моменту возникновения насыщения пучки оказываются полностью перемешан-

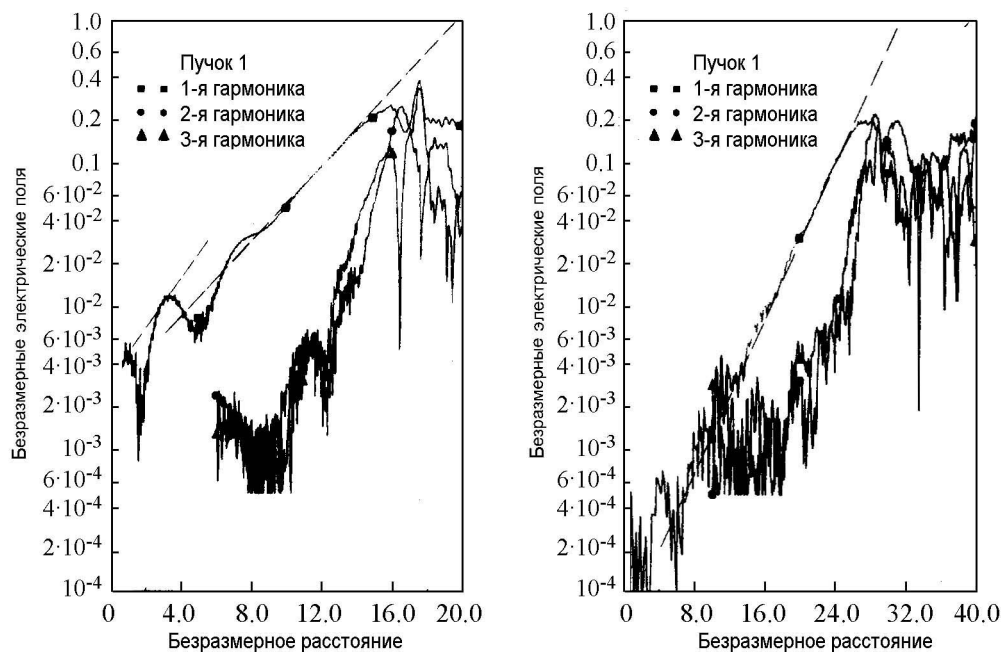


Рис. 6. Зависимость продольной компоненты электрического поля от расстояния при начальной модуляции электронных пучков по скорости (слева) и при начальной модуляции пучков по плотности (справа) [50]

ными и объединяются в один пучок с непрерывной функцией распределения по скоростям, причем максимальный разброс скоростей в ней не превышает значений тепловых скоростей электронов. Таким образом, двухпотоковая система исчезает. Авторы отметили, что такое тепловое уравнивание пучков происходит на очень коротком участке примерно за треть периода плазменного колебания. Схожие результаты были получены при численном моделировании в работе Филлипса и др. [51]. В ней также было показано, что ограничение неустойчивости возникает за счет теплового уравнивания пучков. Следует отметить, что схожие задачи для системы «пучок—плазма» в разное время рассматривались Бунеманом [52], Доусоном [53], Фридбергом [54] и Робертсом [55].

В нашей стране подобные задачи рассматривались, но не с точки зрения компьютерного моделирования. В работе Руткевича и Пашенко [56] было проведено исследование неустойчивости в двухпотоковой плазме, в частности, при взаимодействии двух встречных электронных потоков. Исследуемая в работе система представляла собой два электронных потока в тонком слое, движущихся навстречу друг другу с одинаковыми скоростями. За счет малой толщины слоя делалось предположение о независимости колебаний от поперечной координаты. На основании методов, использованных ранее в работах [57] и [58], авторы получили дисперсионное уравнение для данной системы. Кроме того был проведен анализ стационарных решений, получено уравнение для нестационарных волн, а также аналитическая формула зависимости амплитуды стационарной волны от времени. Таким образом, был проведен анализ процессов развития неустойчивости с последующим ограничением.

**1.5. Применение двухпотоковой неустойчивости в СВЧ-приборах различных типов.** Рассмотрим некоторые примеры использования систем с двумя взаимодействующими электронными пучками. В первую очередь уделим внимание отечественным работам, посвященным экспериментальному исследованию двухлучевых приборов.

В работе [59] Бернашевский с соавторами первыми в нашей стране провели экспериментальное исследование двухлучевого усилителя в метровом и дециметровом диапазоне длин волн. Эксперименты производились на различных макетах с различными типами пучков и способами их смещения. В частности, была экспериментально подтверждена теоретическая зависимость коэффициента усиления от расстояния между двумя ленточными пучками. Максимальный коэффициент усиления в этом случае достиг 40 дБ на частотах 100...200 МГц.

Также была сконструирована электронная пушка с магнитной фокусировкой, создающая хорошо перемешанный двухскоростной электронный пучок. В этом случае один электронный пучок вводился в другой пучок сквозь отверстия в катоде. Такой способ смещения позволил получить 60...70 дБ усиления при токе лучей 2...4 мА. Данная работа впоследствии часто упоминалась и зарубежными исследователями, поскольку содержала принципиально новые экспериментальные данные по созданию двухлучевых электронных пушек. Впоследствии ряд работ был посвящён влиянию структуры двухлучевого пучка (см., например, [60]) на коэффициент усиления.

В работе Канавца, Кузьминой и Лопухина [61] была рассмотрена ЭВЛ с резонаторным входом и выходом. Для такой лампы была проведена оценка фактора шу-

ма в предположении, что катод эмитирует электроны в температурно-ограниченном режиме, а на вход пространства дрейфа поступает полный некоррелированный дробовой шум. Было показано, что в режиме усиления, когда параметр неоднородности близок к 0.8, фактор шума двухлучевой лампы при возбуждении ее полным дробовым шумом как по току, так и по скоростям имеет порядок 60...70 дБ.

Первая электронно-волновая лампа включала в себя элементы замедляющей системы, что придавало ей сходство с лампой бегущей волны. Возможно, именно поэтому одними из самых первых приборов, в которых для улучшения выходных характеристик было предложено использовать двухпотоковую систему, стали ЛБВ и ЛОВ. В работе Лопухина, Рошаля и Кузьминой [62] приведена линейная теория двухлучевых модификаций этих приборов [62]. В рамках приближения малых сигналов были получены дисперсионные соотношения, из которых следовало, что в общем случае в двухлучевых ЛБВ и ЛОВ имеется пять парциальных волн. Одна волна имеет постоянную амплитуду, а четыре других могут иметь постоянную амплитуду или в зависимости от параметров могут экспоненциально затухать или нарастать. Фазовые скорости этих четырех волн попарно близки к средним скоростям электронных пучков. Авторы показали, что наилучшее усиление в электронно-волновой лампе бегущей волны (ЭВЛБВ) и электронно-волновой лампе обратной волны (ЭВЛОВ) достигается, когда скорости пучков близки. Когда разность скоростей увеличивается, пучки начинают взаимодействовать с замедляющей системой независимо. В обоих приборах величина коэффициента усиления существенно зависит от значения параметра неоднородности. При превышении параметром неоднородности своего критического значения нарастающие волны исчезают. Критическое значение параметра неоднородности хорошо совпадает с аналогичным значением из теории ЭВЛ. Показано, что коэффициент усиления ЭВЛБВ за счет двухлучевого взаимодействия может достигать значения 80 дБ. В свою очередь, коэффициент усиления ЭВЛОВ-усилителя достигал лишь 25 дБ. Это связано с тем, что эффект усиления в ЛОВ имеет интерференционный характер. Вдобавок механизмы группировки типа ЭВЛ и типа ЛОВ не согласуются друг с другом. Таким образом, можно сказать, что ЭВЛБВ-усилитель представляет больший интерес.

Идея использования двухпотоковой неустойчивости в СВЧ-устройствах нашла свое применение и в приборах резонансного типа. Одно из первых описаний взаимодействия двух электронных пучков с полем резонатора впервые встречается в работе Дана и Сэкмана, посвященной, фактически, двухлучевому монотрону [63]. В результате теоретического и экспериментального исследования авторы пришли к интересным выводам. Оказалось, что в диапазоне углов пролета  $5\pi$  отрицательная нагруженная проводимость пучка примерно равна сумме отрицательных нагруженных проводимостей каждого пучка по отдельности. Это означало, что в данном диапазоне углов пролета, то есть, в котором может работать монотрон, нельзя получить какого-либо значительного увеличения отрицательной проводимости за счет нарастающей волны, полученной с помощью двух пучков. Данное утверждение основывалось на одномерной теории системы с двумя полностью перемешанными пучками, и было подтверждено экспериментально в системе с двумя концентрическими, не перемешанными, но довольно близкими трубчатыми пучками.

Здесь следует сделать короткое отступление и упомянуть о системах усилителей с двумя взаимодействующими электронными пучками, в которых параметры

подобраны таким образом, чтобы неустойчивость принудительно отсутствовала. Поясним сказанное.

Как известно, в простейшей линейной одномерной теории лампы бегущей волны итоговое решение представляет собой три волны, распространяющиеся в замедляющей системе вдоль пространства взаимодействия к коллекторному концу. Эти волны являются результатом решения дисперсионного уравнения третьей степени. Для обычного режима работы требуется наличие у дисперсионного уравнения двух комплексно-сопряженных корней и одного действительного корня. Таким образом, первая волна имеет постоянную амплитуду, вторая нарастает, а третья затухает. Именно неустойчивость, то есть неограниченное нарастание одной из парциальных волн, приводит к усилению (см., например, [64]). Также хорошо известно, что помимо обычного режима работы ЛБВ еще существует режим, в котором усиление достигается за счет интерференции трех парциальных волн. Данный режим был назван крестатронным [65]. Впоследствии был предложен схожий режим работы и для двухпучковой системы. Усиление в нем достигалось за счет интерференции четырех парциальных волн. Впервые он упоминается в кратком сообщении Доу и Роу [66]. Впоследствии вышла работа Лопухина [67], посвященная усилителю на встречных пучках. В ней приводились результаты линейной теории и численного решения краевой задачи, из которых следовало, что, помимо усиления за счет растущих собственных волн пространственного заряда, имеет место режим усиления за счет биений волн постоянной амплитуды.

Наиболее подробно теория так называемого интерференционного усиления в двухлучевом усилителе приведена в работе [68]. Рассмотрим, следуя ей, систему двух связанных дифференциальных уравнений, описывающую взаимодействие двух одномерных бесконечно широких электронных пучков [70]. Данная система вытекает из системы уравнений (21).

$$\begin{aligned} \frac{d^2 i_1}{dx^2} + 2jk_{e1} \frac{di_1}{dx} - (k_{e1}^2 - k_{p1}^2) i_1 &= -k_{p1}^2 i_2, \\ \frac{d^2 i_2}{dx^2} + 2jk_{e2} \frac{di_2}{dx} - (k_{e2}^2 - k_{p2}^2) i_2 &= -k_{p2}^2 i_1. \end{aligned} \quad (30)$$

Здесь  $i_1, i_2$  – переменные составляющие токов пучков,  $k_{e1,e2} = \omega/v_{01,02}$ ,  $k_{p1,p2} = \omega_{p1,p2}/v_{01,02}$ ,  $\omega$  – частота сигнала,  $\omega_{p1,p2}$  – плазменные частоты пучков,  $v_{01,02}$  – скорости пучков.

Найдем аналитическое решение системы (30). Будем искать решение для переменной составляющей тока первого пучка в виде

$$i_1(x) = C_1 e^{-jk_1 x} + C_2 e^{-jk_2 x} + C_3 e^{-jk_3 x} + C_4 e^{-jk_4 x}, \quad (31)$$

где  $k_i$  – корни дисперсионного уравнения (4). Для получения простой аналитической формы  $k_i$  воспользуемся решением приближенного уравнения (7). Примем все необходимые для этого допущения, приведенные выше. Очевидно, в этом случае

$$k_i = \frac{\omega}{v} \pm \frac{\omega_p}{v} \sqrt{\left(\frac{\omega \delta}{v \omega_p}\right)^2 + 1} \pm \sqrt{4 \left(\frac{\omega \delta}{v \omega_p}\right)^2 + 1}, \quad (32)$$

или

$$k_i = \frac{2\omega}{v_{01} + v_{02}} \pm \frac{2\omega_p}{v_{01} + v_{02}} \sqrt{\left(\frac{(v_{01} - v_{02})\omega}{(v_{01} + v_{02})\omega_p}\right)^2 + 1} \pm \sqrt{4\left(\frac{(v_{01} - v_{02})\omega}{(v_{01} + v_{02})\omega_p}\right)^2 + 1}. \quad (33)$$

Из (31) вытекает, что

$$\frac{di_1}{dx} = -jk_1 C_1 e^{-jk_1 x} - jk_2 C_2 e^{-jk_2 x} - jk_3 C_3 e^{-jk_3 x} - jk_4 C_4 e^{-jk_4 x}, \quad (34)$$

$$\frac{d^2 i_1}{dx^2} = -k_1^2 C_1 e^{-jk_1 x} - k_2^2 C_2 e^{-jk_2 x} - k_3^2 C_3 e^{-jk_3 x} - k_4^2 C_4 e^{-jk_4 x}. \quad (35)$$

Из первого уравнения системы (30) с учетом (34) и (35) получаем выражение для переменной составляющей тока второго пучка

$$i_2(x) = \frac{(k_1^2 - 2k_{e1}k_1 + k_{e1}^2 - k_{p1}^2)}{k_{p1}^2} C_1 e^{-jk_1 x} + \frac{(k_2^2 - 2k_{e1}k_2 + k_{e1}^2 - k_{p1}^2)}{k_{p1}^2} C_2 e^{-jk_2 x} + \\ + \frac{(\beta_3^2 - 2\beta_{e1}\beta_3 + \beta_{e1}^2 - \beta_{p1}^2)}{\beta_{p1}^2} C_3 e^{-j\beta_3 x} + \frac{(\beta_4^2 - 2\beta_{e1}\beta_4 + \beta_{e1}^2 - \beta_{p1}^2)}{\beta_{p1}^2} C_4 e^{-j\beta_4 x}. \quad (36)$$

Сокращенно (36) перепишем в виде

$$i_2(x) = A_1 C_1 e^{-jk_1 x} + A_2 C_2 e^{-jk_2 x} + A_3 C_3 e^{-jk_3 x} + A_4 C_4 e^{-jk_4 x}. \quad (37)$$

Очевидно, что полный ток двух пучков может быть представлен в виде суммы четырех парциальных волн

$$i(x) = (A_1 + 1) C_1 e^{-jk_1 x} + (A_2 + 1) C_2 e^{-jk_2 x} + \\ + (A_3 + 1) C_3 e^{-jk_3 x} + (A_4 + 1) C_4 e^{-jk_4 x}. \quad (38)$$

Константы определяются из начальных условий. Введем выражение для коэффициента усиления следующим образом:

$$G(L) = 20 \lg \frac{i(L)}{i(0)}, \quad (39)$$

$$G(L) = \\ = 20 \lg \frac{(A_1 + 1)C_1 e^{-jk_1 L} + (A_2 + 1)C_2 e^{-jk_2 L} + (A_3 + 1)C_3 e^{-jk_3 L} + (A_4 + 1)C_4 e^{-jk_4 L}}{(A_1 + 1)C_1 + (A_2 + 1)C_2 + (A_3 + 1)C_3 + (A_4 + 1)C_4}. \quad (40)$$

На рис. 7 приведена зависимость коэффициента усиления от расстояния для различных частот при следующих параметрах: среднее ускоряющее напряжение  $U = 1500B$ , разброс пучков по скоростям составляет 5% от среднего значения, ток первого пучка  $I_{01} = 50$ , ток второго пучка  $I_{02} = 50$ , начальная модуляция по току составляет 0.01% от тока пучка. Как видно из рисунка, в интерференционном режиме можно получить значительное усиление, причем коэффициент усиления растет с ростом частоты.



Также упомянем об исследовании двухпучковой неустойчивости в релятивистских клистронах. В работе Чена и др. [69] предложен вариант двухлучевого релятивистского клистрона-усилителя, в котором взаимодействие медленной волны пространственного заряда быстрого электронного пучка с быстрой волной пространственного заряда медленного электронного пучка приводит усилению модулирующего сигнала, причем модуляция возникает за счет биений быстрой и медленной волны пространственного заряда. За основу был взят многорезонаторный релятивистский клистрон, однако, в данной схеме входной и выходной резонаторы связаны гладкой трубкой без промежуточных пассивных резонаторов. Таким образом, входной и выходной резонаторы функционируют так же, как в двухрезонаторном пролетном клистроне. Согласно авторам, данная конструкция клистрона позволяет избавиться от ряда нежелательных эффектов, возникающих при работе многорезонаторного релятивистского клистрона-усилителя. А именно, за счет

исключения промежуточных резонаторов исчезают возможности самовозбуждения лампы и высокочастотного пробоя промежуточных резонаторов. Также предполагается, что в отличие от классической электронно-волновой лампы с низким КПД, обусловленным низкоэффективными спиральными входом и выходом, двухлучевой клистрон с резонаторными вводом и выводом энергии будет иметь КПД, сравнимый с КПД обычного многорезонаторного клистрона. Помимо прочего, авторы сравнивают свой прибор с двухлучевым циклотронным мазером, отмечая более сложную конструкцию последнего. В качестве модели рассматривалась система, состоящая из двух концентрических трубчатых релятивистских электронных пучков различных диаметров, движущихся в проводящей трубке (рис. 8).

Авторами был произведен аналитический расчет предельного тока в такой лампе, а также было проведено моделирование прибора методом частиц в ячейке. Расчеты показали, что на частоте 3.375 ГГц, при токах пучков 5 кА и 1 кА усиление может достигать значения 30 дБ/м.

Среди исследований двухпотоковой неустойчивости в релятивистских электронных пучках стоит упомянуть работу Ума [70]. В ней автор привел последовательную линейную теорию двухлучевой неустойчивости для случая взаимодействия двух полых релятивистских пучков, движущихся в проводящей трубке. Автор ис-

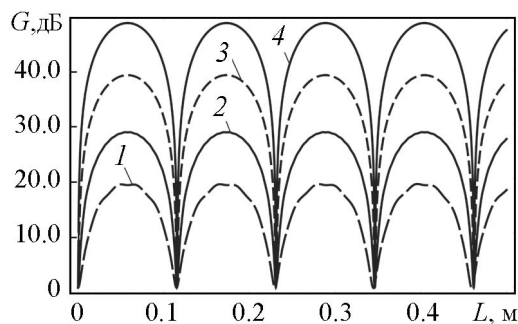


Рис. 7. Зависимости коэффициента усиления от расстояния для разных значений частот (ГГц): 10 (1), 30 (2), 100 (3), 300 (4)

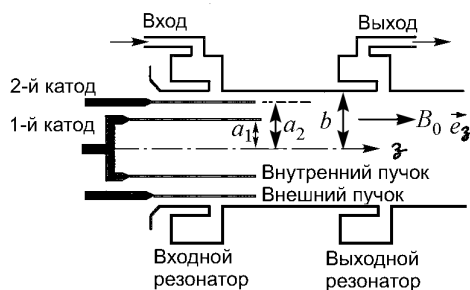


Рис. 8. Схема двухлучевого релятивистского клистрона с двумя концентрическими трубчатыми электронными пучками [69]

следовал данную модель для анализа возможности повышения степени группировки пучков в двухлучевом релятивистском клистроне. В рамках теории был проведен анализ продольной и поперечной неустойчивости, также были получены дисперсионные соотношения для этих случаев.

Интересным примером применения двухпучковой неустойчивости стала работа Трубецкова и Подина [71]. В ней авторами изложена теория пускового режима оротрона с двухскоростным электронным потоком в приближении больших пространственных зарядов. Главным элементом оротрона является открытый резонатор, состоящий из вогнутого сферического зеркала и плоского зеркала с нанесенной на него периодической структурой типа «гребенка». Механизм генерации основан на излучении Смита–Парселла, возникающем при пролете электронов вблизи периодической структуры. Предполагается, что потоки являются строго моноскоростными, бесконечно широкими и идеально перемешанными. В пучках учитывается взаимодействие только одной пары волн пространственного заряда – быстрой волны одного пучка и медленной волны другого. На основе метода связанных волн был проведен расчет мощности взаимодействия электронных пучков с полем резонатора и пусковых токов. Этот расчет показал, что использование двухскоростного электронного потока вместо односкоростного с тем же суммарным током приводит к снижению пусковой добротности резонатора.

Помимо исследования явления двухпучковой неустойчивости на основе взаимодействия волн пространственного заряда в электронных пучках существовало еще одно направление, возникшее при исследовании двухпотокового взаимодействия двух электронных пучков в конечном продольном магнитном поле. Первой в этом направлении стала работа Байрама Вьюрала [72]. Он показал, что не только взаимодействие волн пространственного заряда, но и взаимодействие циклотронной волны с волной пространственного заряда, а также взаимодействие циклотронных волн различных пучков может привести к экспоненциальному нарастанию сигнала вдоль пространства взаимодействия. В отличие от плазменной частоты пучка, ограниченной эффектами пространственного заряда, циклотронная частота может с легкостью изменяться внешним магнитным полем с целью перекрытия всего диапазона СВЧ.

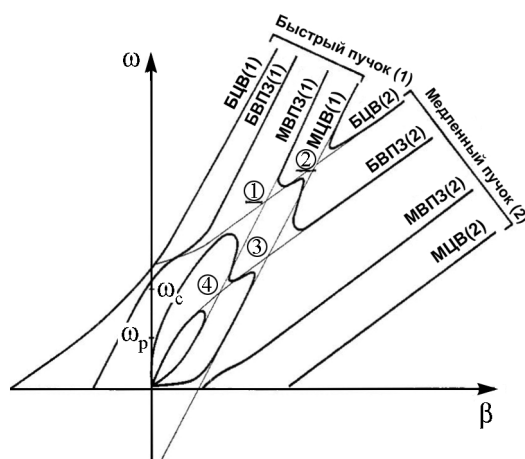


Рис. 9. Дисперсионная характеристика для случая взаимодействия двух попутных электронных пучков в магнитном поле [72]

Рассмотренная система состояла из двух цилиндрических, идеально перемешанных нерелятивистских электронных пучков конечного радиуса, находящихся в конечном магнитном поле. В работе было получено дисперсионное соотношение для данной модели. Автор отметил, что для лучшего понимания процессов взаимодействия различных типов волн в подобной системе удобно использовать метод связанных волн. На основе данного метода была получена диаграмма Бриллюэна, приведенная на рис. 9. На нем прямые, обозначенные через БЦВ<sub>1,2</sub>, соответствуют быстрым циклотронным вол-

нам,  $МСВ_{1,2}$  – медленным циклотронным волнам пучков,  $БВПЗ_{1,2}$  – быстрым волнам пространственного заряда,  $МВПЗ_{1,2}$  – медленным волнам пространственного заряда. Цифры 1, 2, 3, 4 обозначают зоны взаимодействия.

Также в своей работе Вьюрал впервые собрал воедино данные о всевозможных вариантах взаимодействия различных волн в двухпоточковых системах с магнитным полем с указанием приборов, принцип работы которых основан на соответствующем типе взаимодействия. Эти данные приведены в Таблице.

Таблица [72]

Взаимодействующие волны	Направление			Устройство
	фазовых скоростей	поточков мощности	групповых скоростей	
Два пучка: Быстрая циклотронная волна 2 и медленная циклотронная волна 1	одинаковое	противоположное	одинаковое	Двухлучевой усилитель на циклотронных волнах
Два пучка: Быстрая циклотронная волна 2 и медленная волна пространственного заряда 1	одинаковое	противоположное	одинаковое	Двухлучевой усилитель на циклотронной волне и волне пространственного заряда
Два пучка: Быстрая волна пространственного заряда 2 и медленная циклотронная волна 1	одинаковое	противоположное	одинаковое	Двухлучевой усилитель на циклотронной волне и волне пространственного заряда
Два пучка: Быстрая волна пространственного заряда 2 и медленная волна пространственного заряда 1	одинаковое	противоположное	одинаковое	Классический двухлучевой усилитель
Пучок и плазма: Медленная циклотронная волна пучка и циклотронная волна в плазме	одинаковое	одинаковое	противоположное	Циклотронный усилитель или генератор на обратной волне
Пучок и плазма: Медленная волна пространственного заряда пучка и циклотронная волна в плазме	одинаковое	одинаковое	противоположное	Усилитель или генератор на обратной волне
Пучок и плазма: медленная циклотронная волна в пучке и волна пространственного заряда в плазме	одинаковое	противоположное	одинаковое	Плазменно-циклотронный усилитель на прямой волне
Пучок и плазма: медленная волна пространственного заряда пучка и волна пространственного заряда в плазме	одинаковое	противоположное	одинаковое	Усилитель на прямой волне
Два пучка: Медленная циклотронная волна в пучке 1 и быстрая циклотронная волна в пучке 2	одинаковое	одинаковое	противоположное	Циклотронный генератор на обратной волне
Два пучка: Медленная волна пространственного заряда пучка 1 и быстрая циклотронная волна пучка 2	одинаковое	одинаковое	противоположное	Генератор на обратной волне на основе волны пространственного заряда и циклотронной волны

Позднее было проведено экспериментальное исследование двухлучевого циклотронного усилителя [73], схема которого приведена на рис. 10.

В эксперименте на основе взаимодействия быстрой циклотронной волны медленного пучка с медленной волной пространственного заряда быстрого пучка было получено усиление 10 дБ. Также при взаимодействии быстрой волны пространственного заряда медленного пучка и медленной волны пространственного заряда быстрого пучка было получено усиление 17 дБ. В конце работы автор отметил, что достижимый коэффициент усиления прямо пропорционален плотностям пучков, то есть зависит от плазменной частоты.

Случай поперечного расположения магнитного поля относительно двух пучков описан, например, в работе Вадвы [74]. Автор рассмотрел модель двух электронных пучков, распространяющихся в скрещенных статических электрическом и магнитном полях. Им было показано наличие шести волн в системе – двух нарастающих, двух затухающих и двух волн постоянной амплитуды. При этом наличие двухпучковой неустойчивости значительно повышает усиление по сравнению с однолучевой системой.

Использование взаимодействия циклотронных волн привело к созданию теории нового типа источника миллиметрового излучения – двухлучевого циклотронного мазера, схема которого приведена на рис. 11. В работе [75] Бекефи в линейном приближении показал, что взаимодействие медленной циклотронной волны одного

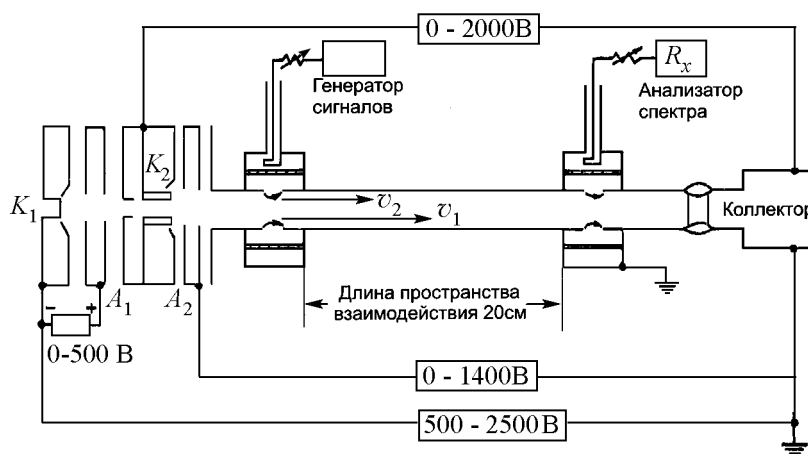


Рис. 10. Схема двухлучевого циклотронного усилителя [73]

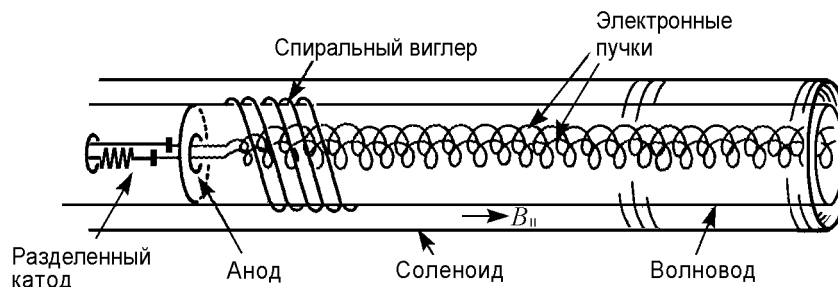


Рис. 11. Схематическое изображение двухлучевого мазера [75]

пучка с быстрой циклотронной волной второго пучка приводит к высокочастотной группировке. При этом желаемая рабочая частота прямо пропорциональна циклотронной частоте и обратно пропорциональна разнице скоростей пучков и может быть достигнута при небольших энергиях пучков и слабом продольном магнитном поле. Также для случая двух пучков на основе полностью релятивистских уравнений Власова был произведен расчет усиления в двухлучевом мазере. Результатом стало усиление 80 дБ/м на частоте 50 ГГц для одного прибора и 68 дБ/м на частоте 150 ГГц для другого.

Нелинейный анализ циклотронной двухлучевой неустойчивости был проведен позднее Ченом, Бекефи и Ха в работе [76]. Построена двумерная самосогласованная нелинейная модель, которая была использована для исследования двухлучевой циклотронной неустойчивости в системе двух одинаково направленных слаборелятивистских электронных пучков.

Интересным примером использования двухпучковой неустойчивости в приборах для получения индуцированного излучения стал двухлучевой лазер на свободных электронах (рис. 12), предложенный Бекефи и Якобсом [77].

Авторы предложили использовать явление двухпучковой неустойчивости как механизм для предварительной группировки электронных пучков, что, в свою очередь, повышает интенсивность выходного излучения. Идея была вызвана трудностями в создании устройств предварительной модуляции в субмиллиметровом диапазоне длин волн, аналогичных устройствам, которые используются на более низких частотах. Построенная авторами теория дала удовлетворительные результаты в субмиллиметровом диапазоне длин волн. Такая модель лишена дополнительных источников излучения, используемых для предварительной модуляции, и отличается простотой конструкции. Более точная настройка относительных скоростей электронных пучков позволяет регулировать интенсивность генерируемого излучения. При этом увеличение интенсивности излучения вдоль пространства практически не зависит от наличия двухпоточковой неустойчивости. То есть, как уже упоминалось, механизм двухпоточковой неустойчивости в данном конкретном случае приводит только к предварительной модуляции, но при этом не дает преимущества в выходной мощности.

Помимо непрерывного взаимодействия электронных пучков, следует рассмотреть случаи их дискретного взаимодействия. Это становится возможным, к примеру, когда пространство между пучками разделено металлическим экраном с отверстиями. В нашей стране подобная схема была рассмотрена в работах [78, 79]. В этом случае воздействие пучков друг на друга оказывается периодическим. В работе [80] впервые было учтено влияние несинхронных гармоник тока.

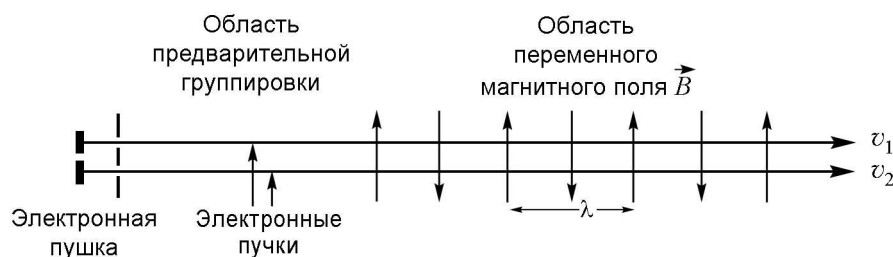


Рис. 12. Принципиальная схема двухлучевого лазера на свободных электронах [77]

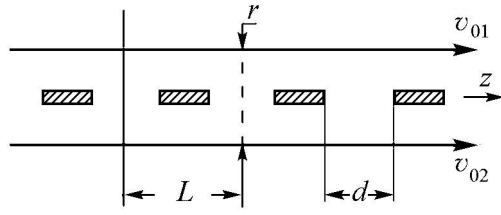


Рис. 13. Схема дискретного взаимодействия электронных пучков

Рассмотрим, следуя [80], систему, схема которой представлена на рис. 13. Здесь  $L$  – период системы,  $d$  – ширина зазора,  $r$  – расстояние между пучками,  $v_{01}$ ,  $v_{02}$  – скорости пучков. Для расчета переменной составляющей плотности была применена методика, характерная для многорезонаторного клистрона. Это представление основано на четком разделении зон модуляции и дрейфа.

Влияние конечного времени пролета электронов щели учитывается параметром эффективности модуляции

$$M_{1(2)} = \left( \sin \frac{\omega d}{2v_{01(2)}} \right) \left( \frac{\omega d}{2v_{01(2)}} \right)^{-1}, \quad (41)$$

где  $\omega d / 2v_{01(2)}$  – невозмущенный угол пролета электронов первого (второго) потока мимо щели.

Если считать, что поле пространственного заряда от щели к щели изменяется как  $e^{-j\beta z}$ , то для переменных составляющих плотностей зарядов первого и второго потоков на  $k$ -й щели можно получить

$$\begin{cases} \rho_k^{(1)} = M_1 a_1 V_k''^{(1)}, \\ \rho_k^{(2)} = M_2 a_2 V_k''^{(2)}, \end{cases} \quad (42)$$

где

$$a_1 = \frac{I_{01}(e/m)}{v_{01}^3} \frac{(1 - e^{j\beta L}) (j\theta_{01} - e^{j(\theta_{01} - \beta L)} + 1)}{(e^{j(\theta_{01} - \beta L)} - 1)^2}, \quad (43)$$

$$a_2 = \frac{I_{02}(e/m)}{v_{02}^3} \frac{(1 - e^{-j\beta L}) (j\theta_{02} - e^{-j(\theta_{02} - \beta L)} + 1)}{(e^{j(\theta_{02} - \beta L)} - 1)^2}, \quad (44)$$

$\theta_{01}$ ,  $\theta_{02}$  – невозмущенные углы пролета,  $V_k''^{(1)2}$  – потенциал правой стенки зазора.

Система уравнений для цепи в случае дискретного взаимодействия имеет вид

$$\begin{cases} V_k^{(1)''} = p_1 \rho_k^{(1)} + p_m \rho_k^{(2)}, \\ V_k^{(2)''} = p_2 \rho_k^{(2)} + p_m \rho_k^{(1)}, \end{cases} \quad (45)$$

где  $p_1$ ,  $p_2$ ,  $p_m$  – коэффициенты индукции.

После подстановки (43) и (44) в (45) получим

$$\begin{cases} V_k^{(1)''} = p_1 M_1 a_1 V_k^{(1)''} + p_m M_2 a_2 V_k^{(2)''}, \\ V_k^{(2)''} = p_2 M_2 a_2 V_k^{(2)''} + p_m M_1 a_1 V_k^{(1)''}. \end{cases} \quad (46)$$

Из условия совместности (46) можно получить следующее дисперсионное уравнение:

$$M_1 M_2 p_m^2 a_1 a_2 = (1 - p_1 a_1 M_1) (1 - p_2 a_2 M_2). \quad (47)$$

Далее будет рассмотрен особый случай, когда

$$\frac{(e/m) I_{01} p_1}{v_{01}^3} = \frac{(e/m) I_{02} p_2}{v_{02}^3} = \frac{(e/m) I_0 p_0}{v_0^3} = \frac{I_0 p_0}{2 v_0 V_0} = K^2, \quad (48)$$

где  $v_0 = \sqrt{2(e/m)V_0}$ .

Учитывая (48), можно переписать (47) в виде

$$\begin{aligned} & \frac{(1 - e^{-j\beta L}) (j\theta_{01} - e^{j(\theta_{01}-\beta L)} + 1) M_1}{[e^{j(\theta_{01}-\beta L)} - 1]^2} + \frac{(1 - e^{-j\beta L}) (j\theta_{02} - e^{j(\theta_{02}-\beta L)} + 1) M_2}{[e^{j(\theta_{02}-\beta L)} - 1]^2} = \\ & = \frac{1}{K^2} \left\{ 1 + K^4 M_1 M_2 \left[ 1 - \frac{p_m^2}{p_1 p_2} \right] \times \right. \\ & \quad \left. \times \left[ \frac{(1 - e^{-j\beta L})^2 \sum (j\theta_{01} - e^{j(\theta_{01}-\beta L)} + 1) j\theta_{02} - e^{j(\theta_{02}-\beta L)} + 1}{[e^{j(\theta_{01}-\beta L)} - 1]^2 [e^{j(\theta_{02}-\beta L)} - 1]^2} \right] \right\}. \end{aligned} \quad (49)$$

Это уравнение не было решено авторами из-за невозможности получения аналитической формы решения. Поэтому далее будет рассмотрен случай слаломной фокусировки электронных потоков, при которой траектории электронов имеют зигзагообразную форму (см., например, [81]). В этом случае справедливо равенство  $p_1 = p_2 = p_m$ . Тогда уравнение (49) запишется в виде

$$\begin{aligned} & \frac{(1 - e^{-j\beta L}) (j\theta_{01} - e^{j(\theta_{01}-\beta L)} + 1) M_1}{[e^{j(\theta_{01}-\beta L)} - 1]^2} + \\ & + \frac{(1 - e^{-j\beta L}) (j\theta_{02} - e^{j(\theta_{02}-\beta L)} + 1) M_2}{[e^{j(\theta_{02}-\beta L)} - 1]^2} = \frac{1}{K^2}. \end{aligned} \quad (50)$$

Далее автором была введена следующая замена:  $\beta = \beta_0 (1 + \Delta)$ ,  $\Gamma = -j\omega/v_0 - \gamma$ , где  $v_0$  – средняя скорость двух лучей, то есть  $v_{01} = v_0 + \delta$ ,  $v_{02} = v_0 - \delta$ .

С учетом того, что

$$\frac{I_{01} M_1 e/m}{v_{01}^3 \varepsilon_0} = \frac{\omega_{p1}^2 M_1}{v_{01}^2}, \quad \frac{I_{02} M_2 e/m}{v_{02}^3 \varepsilon_0} = \frac{\omega_{p2}^2 M_2}{v_{02}^2},$$

где  $\omega_{p(1,2)}^2 = (e/m)(\rho_{0(1,2)}/\varepsilon_0)$ , и считая, что  $\gamma \ll \beta_0$ ,  $M_1 \approx M_2 = 1$ ,  $\gamma L \ll 1$ ,  $j\beta_0 \gamma \ll \beta_0^2$ ,  $\gamma^2 \ll \beta_0^2$ , дисперсионное уравнение в частном случае  $\omega_{p1} = \omega_{p2} = \omega_p$  может быть записано в виде

$$\frac{1}{\left( \frac{\gamma v_0}{\omega_p} + j \frac{\omega \delta}{v_0 \omega_p} \right)^2} + \frac{1}{\left( \frac{\gamma v_0}{\omega_p} - j \frac{\omega \delta}{v_0 \omega_p} \right)^2} = - \frac{j\theta_0}{[1 - e^{-j\theta_0}]}. \quad (51)$$

Разделение мнимой и действительной части является очень громоздким, поэтому авторы использовали графический метод. Находилась зависимость  $\gamma v_0/\omega_p = f(\delta\omega/(v_0\omega_p))$  при  $\theta_0 = \pi/4$  и  $\pi$ . Пример графика решения уравнения (52) приведен на рис. 14. Как видно из рисунка, усиление в случае дискретного взаимодействия пучков связано с двумя нарастающими парциальными волнами, в то время как при непрерывном взаимодействии дисперсионное уравнение имеет лишь один корень,

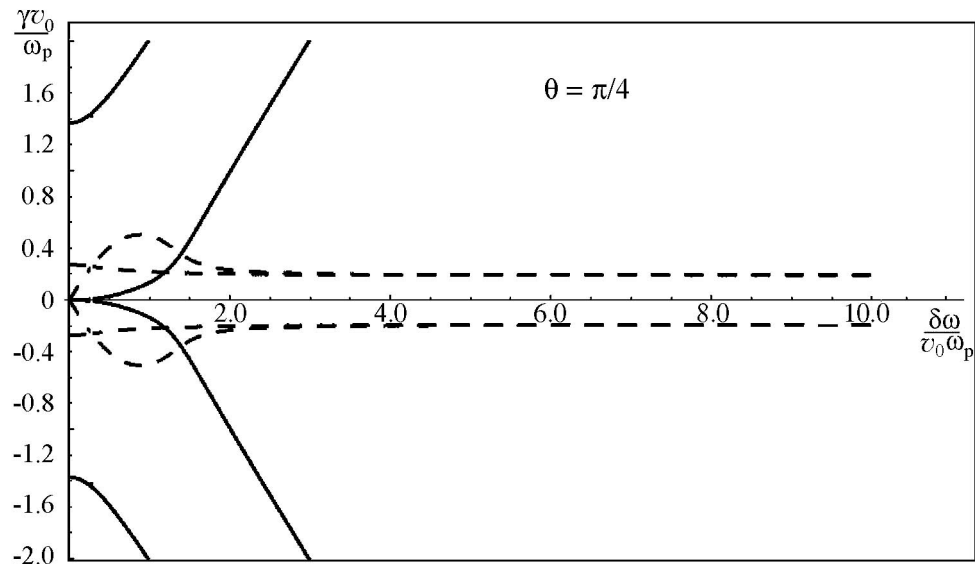


Рис. 14. Поведение решений для случая  $\theta = \pi/4$ , сплошными линиями обозначена мнимая часть решений, а штриховыми – действительная

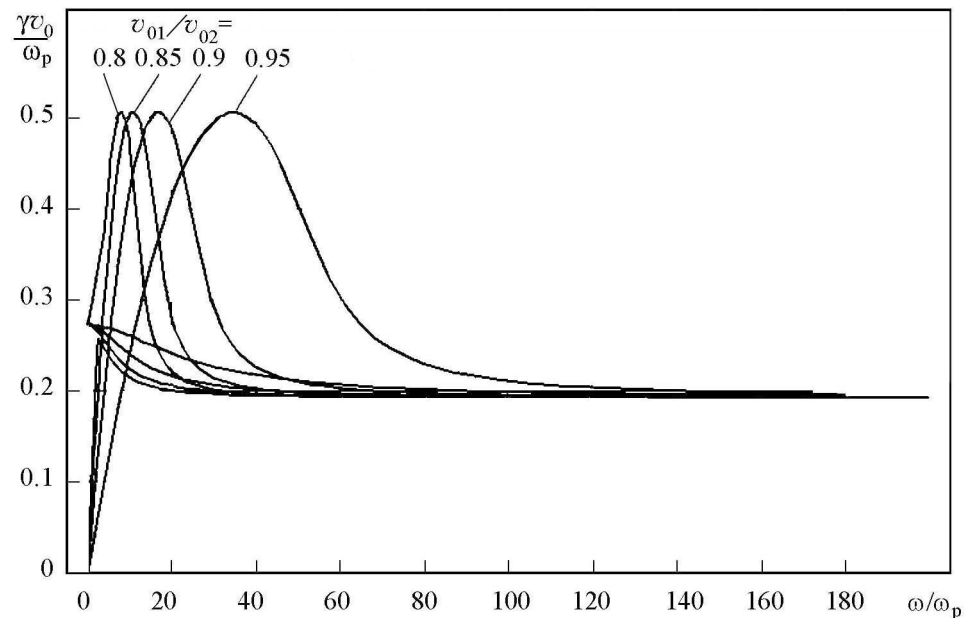


Рис. 15. Зависимость  $\gamma v_0/\omega_p = f(\omega/\omega_p)$  при различных значениях  $v_{01}/v_{02}$ ,  $\theta = \pi/4$



соответствующий нарастающему решению. Максимумы действительных частей соответствуют максимуму усиления. Если преобразовать параметр неоднородности к виду

$$\frac{\delta\omega}{v_0\omega_p} = \frac{1 - (v_{01}/v_{02}) \frac{\omega}{\omega_p}}{1 + (v_{01}/v_{02}) \frac{\omega}{\omega_p}}, \quad (52)$$

то можно показать, построив зависимость  $\gamma v_0/\omega = f(\omega/\omega_p)$ , что система может быть легко перестраиваема изменением скоростей лучей (рис. 15).

Описанная выше система является ярким примером использования систем с двумя электронными потоками. В настоящее время интерес к системам с дискретным взаимодействием двух пучков достаточно высок. Об этом свидетельствуют недавно вышедшие работы зарубежных исследователей, нацеленные на освоение коротковолновой части СВЧ-диапазона [82,83].

### Выводы к I части

Явление двухпотоковой неустойчивости представляло большой интерес для исследователей в области СВЧ-электроники достаточно долгое время. Однако, несмотря на богатую историю и большое количество проведенных исследований интерес к нему значительно снизился к началу 1990-х годов, а затем и вовсе пропал. К концу 1990-х годов работы по данной тематике практически перестали выходить. Причиной этому послужило большое количество различных факторов. Однако последние тенденции в развитии электроники СВЧ свидетельствуют о возникновении новых горизонтов применения двухпотоковой неустойчивости и систем с двумя электронными пучками. В частности, речь идет о возможности использования подобных систем в субмиллиметровом диапазоне длин волн.

Во второй части данного обзора собраны наиболее современные и актуальные работы, посвященные двухпотоковой неустойчивости в электронике СВЧ, которые подтверждают наличие вновь растущего интереса исследователей всего мира к данной тематике.

*Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ (проект № 16-02-00238, 16-32-00468).*

### Библиографический список

1. Лопухин В.М. Новый вид усилителя микрорадиоволн // УФН. 1950. Т. XL, вып. 4. С. 592.
2. Бриггс Р. Двухпучковая неустойчивость // Достижения физики плазмы. Т. 3, 4. М.: Изд-во «Мир», 1974.
3. Bishofberger K., Carlsten B.E., Faehl R. Generation of millimeter and sub-millimeter radiation in a compact oscillator utilizing the two-stream instability // IVEC, april 22–24, 2008. P. 164.
4. Bishofberger K., Carlsten B., Faehl R. // Proceedings of LINAC08, Victoria, BC, Canada, 1D-FELs, 504.

5. *Svimonishvili T., Bishofberger K., Faehl R.J., Carlsten B.E.* // Abstracts IEEE International Conference on Plasma Science, 2010. P. 201.
6. *Ke Li, Wenxin Liu, Yong Wang, and Miaomiao Cao.* Dispersion characteristics of two-beam folded waveguide for terahertz radiation // IEEE Transactions on Electron Devices. 2013. Vol. 60, № 12.
7. *Рабинович М.И., Трубецков Д.И.* Введение в теорию колебаний и волн. Глава 7. 1984.
8. *Михайловский А.Б.* Теория неустойчивости плазмы. Т. 1. Неустойчивости однородной плазмы. М.: Атомиздат, 1971.
9. *Piddington J.H.* Growing Electromagnetic Waves // Phys. Rev. 1956. № 1, 9. P. 9.
10. *Ахиезер А.И., Половин Р.В.* Критерии нарастания волн // УФН. 1971. Т. 104, вып. 2.
11. *Федорченко А.М., Коцаренко Н.Я.* Абсолютная и конвективная неустойчивость в плазме и твердых телах. М.: Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1981.
12. *Nergaard L.S.* Analysis of a simple model of a two-beam growing-wave tube // RCA Review. 1948. Vol. 9. P. 585.
13. *Haeff A.* The electron-wave tube – a novel method of generation and amplification of microwave energy // Proc. IRE. 1949. Vol. 37, January. P. 4.
14. *Pierce J.R., Hebenstreit W.B.* A new type of high-frequency amplifier // Bell Sys. Tech. Journal. 1949. P. 33.
15. *Hollenberg B.A.* Experimental observations of amplification by interaction between two electron streams // Bell Sys. Tech. Journal. 1949. P. 52.
16. *Pierce J.R.* Double-stream amplifiers // Proc. IRE. September 1949. P. 980.
17. *Pierce J.R.* Increasing space charge waves // J. Appl. Phys. November 1949. Vol. 20. P. 1060.
18. *Pierce J.R., Walker L.R.* Growing waves due to transverse velocities // Bell Sys. Tech. Journal. January 1956. P. 109.
19. *Gordon Kent.* Space charge waves in inhomogeneous electron beams // J. Appl. Phys. 1954. Vol 25, № 1.
20. *Beam W.R.* On the possibility of amplification in space-charge-potential-depressed electron streams // Proc. IRE. April 1955. P. 454.
21. *Mihran T.G.* Rf current behavior in electron beams with dc velocity spread // J. Appl. Phys. 1962. Vol. 33, № 4. P. 1582.
22. *Rome J.A. and Briggs R.J.* Stability of sheared electron flow // Physics of Fluids. 1972. Vol. 15, № 5. P. 796.
23. *Желязков И.И.* К теории устойчивости изолированного ограниченного электронного пучка с градиентом скорости // ЖТФ. 1970. Т. 40, вып. 2. С. 265.
24. *Siegman A.E.* Analysis of multivelocity electron beam by the density-function method // J. Appl. Phys. 1957. Vol. 28, № 10. P. 1132.

25. *Siegman A.E., Watkins D.A., Hsieh H.-C.* Density-function calculations of noise propagation on an accelerated multivelocity electron beam // J. Appl. Phys. 1957. Vol. 28, № 10. P. 1138.
26. *Dawson J.M.* Plasma oscillations of a large number of electron beams // Phys. Rev. 1960. Vol. 118, № 2. P. 381.
27. *Watkins D.A.* The effect of velocity distribution in a modulated electron stream // J. Appl. Phys. 1952. Vol. 23, № 5.
28. *Лопухин В.М.* Возбуждение электромагнитных колебаний и волн электронными потоками. М.: Гостехиздат, 1953. 324 с.
29. *Власов А.А.* О вибрационных свойствах электронного газа // ЖЭТФ. 1938. Т. 8, № 3. С. 291.
30. *Вайнштейн Л.А., Солнцев В.А.* Лекции по сверхвысокочастотной электронике. М.: Сов. радио, 1973. 400 с.
31. *Родак М.И.* К учету теплового движения электронов в дуолучевом усилителе // ЖТФ. 1955. Т. 25, вып. 4. С. 644.
32. *Бергнер Ю.К.* К теории колебаний взаимодействующих электронных потоков // Доклады Академии наук СССР. 1951. Т. LXX VIII (78), № 3. С.435.
33. *Чен Ф.* Введение в физику плазмы. М.: Мир, 1987.
34. *Кролл Н., Трайвелтис А.* Основы физики плазмы. М.: Мир, 1975.
35. *Стикс Т.* Теория плазменных волн. М.: Атомиздат, 1965.
36. *Варнеке Р.* Эволюция принципов действия современных электровакуумных приборов для с.в.ч. // Миллиметровые и субмиллиметровые волны / Под ред. Р.Г. Мириманова. М.: Издательство иностранной литературы, 1959.
37. *Голант М.Б., Тагер А.С.* Сравнение механизмов работы электронно-волновой лампы и других приборов с.в.ч. // Научно-технический сборник «Электроника». 1958, № 10. С. 88.
38. *Лоусон Дж.* Физика пучков заряженных частиц. М.: Мир, 1980.
39. *Lashmore-Davies C.N.* Two-stream instability, wave energy, and the energy principle // Physics of Plasmas. 2007. Vol.14. 092101.
40. *Люиселл У.* Связанные и параметрические колебания в электронике / Под ред. А.Н. Выставкина; пер. с англ. В.И. Трифонова, Ю.Л. Хотунцева. М.: Издательство иностранной литературы, 1963. 351 с.
41. *Sturrock P.A.* In what sense do slow waves carry negative energy? // J. Appl. Phys. 1960. 31. P.2052.
42. *Sturrock P.A.* Kinematics of growing waves // Phys. Rev. 1958. Vol. 112, № 5. P. 1488.
43. *Haus H.A.* The kinetic power theorem for parametric, longitudinal, electron-beam amplifiers // IRE Transactions on Electron Devices, October, 1958.
44. *Шевчик В.Н., Трубецков Д.И.* Аналитические методы расчета в электронике СВЧ. М.: Сов. Радио, 1970. 584 с.
45. *Филимонов Г.Ф.* Нелинейная теория двухлучевой электронной лампы. Ч.1. Вывод и исследование уравнений // Радиотехника и Электроника. 1959, № 3. С. 489.

46. Филимонов Г.Ф. Нелинейная теория двухлучевой электронной лампы. Ч.2. Результаты вычислений // Радиотехника и Электроника. 1959, № 5. С. 832.
47. *Mihran T.* Nonlinear limiting of the double-stream instability // J. Appl. Phys. 1966. Vol. 37, № 2. P. 624.
48. *Yu S.P., Mihran T.* Nonlinear rf behavior of electron beams with velocity distribution. I. General analysis // J. Appl. Phys. 1963. Vol. 34, № 10. P. 2972.
49. *Yu S.P., Mihran T.* Nonlinear rf behavior of electron beams with velocity distribution. II. Application to rectangular velocity distribution // J. Appl. Phys. 1963. Vol. 34, № 10. P. 2976.
50. *Busnardo-Neto J., Rowe J.E.* Simulation of the two-stream convective instability // Physics of Fluids. 1974. Vol. 17, № 6.
51. *Philips P.M., Zaidman E.G., Freund H.P., Ganguly A.K., Vanderplaats N.R.* Review of two stream amplifier performance // Naval Research Laboratory Memorandum Report 6382, March 1989.
52. *Buneman O.* Dissipation of currents in ionized media // Phys. Rev. 1959. Vol. 115, № 3. P. 503.
53. *Dawson J.M.* Investigation of the double-stream instability // Nuclear Fusion (Austria), Vol. Suppl. 2, Pt. 3, received 31 Dec 1963.
54. *Freidberg J.P., Armstrong P.T.* Nonlinear development of the two-stream instability // Physics of Fluids. 1968. Vol.11. P. 2669.
55. *Roberts K.V., Berk H.L.* Nonlinear evolution of a two-stream instability // Phys. Rev. Lett. 1967. Vol. 19. P. 297.
56. Руткевич Б.Н., Руткевич П.Б. Развитие неустойчивости диспергирующих волн в двухпоточковой плазме // Физика плазмы. 1980. Т. 6. № 3. С. 538.
57. Руткевич Б.Н., Пащенко А.В., Федорченко В.Д., Муратов В.И. Нелинейные волны объемного заряда в плазменном слое // ЖТФ. 1972. Т. 42. Вып. 3. С. 493.
58. Руткевич Б.Н., Пащенко А.В., Федорченко В.Д., Мазалов Ю.П. Стационарные волны в ограниченной плазме // ЖТФ. 1977. Т. 47. Вып. 1. С. 112.
59. Бернашевский Г.А., Воронов П.С., Изюмова Т.И., Чернов З.С. Экспериментальное исследование двухлучевых электронно-волновых систем // Радиотехника и Электроника. 1959. № 10. С. 1666.
60. Каплун З.Ф. Влияние пространственного разделения двух слоисто-перемешанных электронных потоков на усиление электронно-волновой лампы // Вопросы радиоэлектроники. Серия 1. Электроника. 1960, № 4. С. 42.
61. Канавец В.И., Кузьмина Г.А., Лопухин В.М. Шумы двухлучевой лампы, вызванные дробовыми флуктуациями в потоках // Радиотехника и электроника. 1958, № 6. С. 800.
62. Лопухин В.М., Рошаль А.С., Кузьмина Г.А. Линейная теория двулучевых ЛОВ-и ЛБВ-усилителей // Радиотехника и Электроника. 1960. № 11. С. 1837.
63. *Dunn D.A., Sackman G.L.* Interaction of two beams with a cavity // International Journal of Electronics. 1965. Vol. 18. Issue 2. P. 181.
64. Цейтлин М.Б., Кац А.М. Лампа с бегущей волной. Монография. М.: Советское радио, 1964. 308 с.

65. *Rowe J.E.* Theory of crestatron: A forward-wave amplifier // *Proc. IRE.* April 1959. Vol. 47. P. 536.
66. *Dow W.G., Rowe J.E.* General aspects of beating-wave amplification // *Proc. IRE.* 1960. Vol. 48, № 1. P. 115.
67. *Лопухин В.М., Рошаль А.С.* Усилитель на встречных электронных потоках // *Радиотехника и электроника.* 1962. № 4. С. 643.
68. *Трубецков Д.И., Титов А.В., Фунтов А.А.* Об интерференционном усилении в электронно-волновой лампе (линейная теория) // *Письма в ЖТФ.* 2013. Т. 39, вып. 21. С. 86.
69. *Chen C., Catravas P., Bekefi G.* Growth and saturation of stimulated beam modulation in a two-stream relativistic klystron amplifier // *Appl. Phys. Lett.* 1993. Vol. 62. 1579.
70. *Uhm H.S.* A theory of two-stream instability in two hollow relativistic electron beams // *Physics of Fluids.* 1993. Vol. 5, № 9. P. 3388.
71. *Подин С.В., Трубецков Д.И.* Линейная теория двухлучевого оротрона // *Радиотехника и электроника.* 1995. № 8. С. 1273.
72. *Vural B.* Analysis of double-stream interactions in the presence of a finite axial magnetic field // *RCA Rev.* 1961. Vol. 22. P. 753.
73. *Vural B.* Double-stream cyclotron wave amplifier // *IEEE Transactions on Electron Devices.* 1968. Vol. ED-15, № 1. P. 2.
74. *Wadhwa R.P.* Multiple-beam crossed-field interaction // *Journal of Electronics and Control.* 1964. Vol. 16. Issue 2. P. 121.
75. *Bekefi G.* Double stream cyclotron maser // *J. Appl. Phys.* 1992. Vol. 71. 4128.
76. *Chen C., Bekefi G., Hu W.* Linear and nonlinear analysis of the cyclotron two-stream instability // *Physics of Fluids B* 5. 1993. 4490.
77. *Bekefi G., Jacobs K.D.* Two-stream, free electron lasers // *J. Appl. Phys.* 1982. Vol. 53. Issue 6. P. 4113.
78. *Солнцев В.А., Тагер А.С.* О периодическом взаимодействии электронных потоков // *Известия вузов. Радиофизика.* 1959. Т. II, № 1. С. 101.
79. *Солнцев В.А., Тагер А.С.* Электронные волны и их взаимодействие с полем волноводных систем // *Радиотехника и электроника.* 1959. № 10. С. 1652.
80. *Шевчик В.Н., Трубецков Д.И.* Дискретное взаимодействие двух электронных потоков // *Известия вузов СССР. Радиотехника.* 1962. Т. V, № 2. С. 143.
81. *Шевчик В.Н., Шведов Г.Н., Соболева А.В.* Волновые колебательные явления в электронных потоках на сверхвысоких частотах. Саратов: Издательство Саратовского университета, 1962.
82. *Zhang Y. and Dong L.* Enhanced coherent terahertz Smith–Purcell superradiation excited by two electron-beams // *Optics Express.* 2012. Vol. 20, № 20.
83. *Zhang Y., Zhou Y., Dong L.* THz radiation from two electron-beams interaction within a bi-grating and a subwavelength holes array composite sandwich structure // *Optics Express.* 2013. Vol. 21, № 19.

*Поступила в редакцию 19.02.2016*

# TWO-STREAM INSTABILITY – LINEAR AND NONLINEAR MICROWAVE PHENOMENA

## Part I

*A. V. Titov*

Saratov State University

This article is the first of two parts of the review devoted to the phenomenon of two-beam instability in microwave electronics. The main goal is to cover as much as possible the most complete list of papers on various models and methods of analysis of the two-beam instability. The first part contains papers which, in our view, most fully describe the development of ideas of two-stream instability in microwave electronics. Among these works there are some pioneering works which laid the foundation for research in this field, as well as numerous research articles aimed at expanding the application field of this phenomenon. The first part covers the time period from the date of the first publication on the subject, beginning the 40-ies of the last century, to the time when the interest of researchers in this field began decreasing significantly, the end of the 90-ies of the last century. The second part covers the most relevant works on the application of two-stream instability in microwave electronics, released over the past few years. These studies have confirmed the growing interest of foreign researchers to this phenomenon, and that was the impetus for the creation of this review.

*Keywords:* Two-stream instability, two electron streams, double-stream amplifier, electron-wave tube.

DOI:10.18500/0869-6632-2016-24-1-37-74

## References

1. *Lopukhin V.M.* // Uspekhi Fizicheskikh Nauk. 1950. XL. 4. S. 592. (In Russian).
2. *Briggs R.J.* // in Advances in Plasma Physics / A. Simon and W.B. Thompson eds., Vol 4. New York: Interscience Publishers, 1971. P. 43.
3. *Bischofberger K., Carlsten B., Faehl R.* Generation of millimeter and submillimeter radiation in a compact oscillator utilizing the two-stream instability // IVEC 2008, april 22–24. P. 164.
4. *Bischofberger K., Carlsten B., Faehl R.* // Proceedings of LINAC08, Victoria, BC, Canada, 1D-FELs, 504.
5. *Svimonishvili T., Bischofberger K., Faehl R.J., Carlsten B.E.* // Abstracts IEEE International Conference on Plasma Science, 2010. P. 1.
6. *Ke Li, Wenxin Liu, Yong Wang, and Miaomiao Cao.* Dispersion characteristics of two-beam folded waveguide for terahertz radiation // IEEE Transactions on Electron Devices. 2013. Vol. 60, № 12.
7. *Rabinovich M.I., Trubetskov D.I.* Oscillations and Waves in Linear and Nonlinear Systems. Mathematics and Its Applications. (Kluwer Academic Publishers). Soviet Series, Volume 50, 1989.

8. *Mikhailovskii A.B.* Theory of Plasma Instabilities. Volume I. Instabilities of Homogeneous Plasma (Series Title: Studies in Soviet Science). New York: Consultants Bureau, 1974.
9. *Piddington J.H.* // Phys. Rev. 1956. Vol. 9, № 1. P. 9.
10. *Akhiezer A.I., Polovin R.V.* // Sov. Phys.-Usp. 1971. Vol. 14. P. 278.
11. *Fedorchenko A.M., Kotsarenko N.Ya.* Absolute and Convective Instabilities in Plasmas and Solids. Moscow: Nauka, 1981. (In Russian).
12. *Nergaard L.S.* Analysis of a simple model of a two-beam growing-wave tube // RCA Review. 1948. Vol. 9. P. 585.
13. *Haeff A.* The electron-wave tube – a novel method of generation and amplification of microwave energy // Proc. IRE. January. 1949. Vol. 37. P. 4.
14. *Pierce J.R., Hebenstreit W.B.* A new type of high-frequency amplifier // Bell Sys. Tech. Journ. 1949. P. 33.
15. *Hollenberg B.A.* Experimental observations of amplification by interaction between two electron streams // Bell Sys. Tech. Journ. 1949. P. 52.
16. *Pierce J.R.* Double-stream amplifiers // Proc. IRE. September, 1949. Vol. 37. P. 980.
17. *Pierce J.R.* Increasing space charge waves // J. Appl. Phys. November, 1949. Vol. 20. P. 1060.
18. *Pierce J.R., Walker L.R.* Growing waves due to transverse velocities // Bell Sys. Tech. Journ. 1956, January. Vol. 35, № 1. P. 109.
19. *Kent G.* Space charge waves in inhomogeneous electron beams // J. Appl. Phys. 1954. Vol 25, №1. P.32.
20. *Beam W.R.* On the possibility of amplification in space-charge-potential-depressed electron streams // Proc. IRE. 1955 April. Vol. 43, № 4. P. 454.
21. *Mihran T.G.* Rf current behavior in electron beams with dc velocity spread // J. Appl. Phys. 1962. Vol. 33, № 4. P. 1582.
22. *Rome J.A. and Briggs R.J.* Stability of sheared electron flow // Physics of Fluids. 1972. Vol. 15, № 5. P. 796.
23. *Zhelyazkov I.I.* // Zhurnal Tekhnicheskoi Fiziki. 1970. T. 40, № 2. S. 265. (In Russian).
24. *Siegman A.E.* Analysis of multivelocity electron beam by the density-function method // J. Appl. Phys. 1957. Vol. 28, № 10. P. 1132.
25. *Siegman A.E., Watkins D.A., Hsieh H.-C.* Density-function calculations of noise propagation on an accelerated multivelocity electron beam // J. Appl. Phys. 1957. Vol. 28, № 10. P. 1138.
26. *Dawson J.M.* Plasma oscillations of a large number of electron beams // Phys Rev. 1960. Vol. 118, № 2. P. 381.
27. *Watkins D.A.* The effect of velocity distribution in a modulated electron stream // J. Appl. Phys. 1952. Vol. 23, № 5.
28. *Lopukhin V.M.* Vozbuzhdeniye elektromagnitnykh kolebaniy i voln elektronnyimi potokami. M.: Gostekhizdat, 1953. (In Russian).
29. *Vlasov A.A.* The vibrational properties of an electron gas // Sov. Phys. Usp. 1968. Vol. 10. P. 721.

30. *Weinstein L.A., Solntsev V.A.* Lectures on Microwave Electronics. Moscow: «Sov. Radio» 1973. 400 s. (In Russian).
31. *Bergner Yu.K.* // Proceedings of the USSR Academy of Sciences (Doklady Akademii Nauk SSSR). 1951. T. 78, № 3. S. 435. (In Russian).
32. *Rodak M.I.* // Zh. Tech. Phys. 1955. T. 25, № 4. S. 644. (In Russian).
33. *Chen F.F.* Introduction to Plasma Physics and Controlled Fusion. Volume 1: Plasma Physics. Springer US. 1984.
34. *Krall N.-A., Trivelpiece A.-W.* Principles of Plasma Physics. McGraw-Hill, 1973.
35. *Stix T.H.* The Theory of Plasma Waves. McGraw-Hill, 1962.
36. *Warnecke R.* Convegno di elettronica e televisione. Milano, 1954. 2. 706.
37. *Golant M.B., Tager A.S.* // Nauchno-technicheskij sbornik «Elektronika». 1958. № 10. S. 88. (In Russian).
38. *Lawson J.D.* The Physics of Charged-Particle Beams. Clarendon Press, Oxford, 1977.
39. *Lashmore-Davies C.N.* Two-stream instability, wave energy, and the energy principle // Physics of Plasmas. 2007. Vol. 14. 092101.
40. *Louisell W.H.* Coupled Mode and Parametric Electronics. New York: Wiley, 1960.
41. *Sturrock P.A.* In what sense do slow waves carry negative energy? // J. Appl. Phys. 1960. Vol. 31. 2052.
42. *Sturrock P.A.* Kinematics of growing waves // Phys. Rev. 1958. Vol. 112, № 5. P. 1488.
43. *Haus H.A.* The kinetic power theorem for parametric, longitudinal, electron-beam amplifiers // IRE Transactions on Electron Devices. October, 1958.
44. *Shevchik V.N., Trubetskov D.I.* Analytical methods of calculation in microwave electronics. Moscow: Sov. Radio, 1970. 584 s. (In Russian).
45. *Filimonov G.F.* // Radiotekhnika i elektronika. 1959. 3. S. 489. (In Russian).
46. *Filimonov G.F.* // Radiotekhnika i elektronika. 1959. 5. S. 832. (In Russian).
47. *Mihran T.* // J. Appl. Phys. 1966. Vol. 37, № 2. P. 624.
48. *Yu S.P., Mihran T.* Nonlinear rf behavior of electron beams with velocity distribution. I. General Analysis // J. Appl. Phys. 1963. Vol. 34, № 10. P. 972.
49. *Yu S.P., Mihran T.* Nonlinear rf behavior of electron beams with velocity distribution. II. Application to Rectangular Velocity Distribution // J. Appl. Phys. 1963. Vol. 34, № 10. P. 2976.
50. *Busnardo-Neto J., Rowe J.E.* Simulation of the two-stream convective instability // Physics of Fluids. 1974, June. Vol. 17, № 6.
51. *Philips P.M., Zaidman E.G., Freund H.P., Ganguly A.K., Vanderplaats N.R.* Review of Two Stream Amplifier Performance. Naval Research Laboratory Memorandum Report 6382, March 1989.
52. *Buneman O.* Dissipation of currents in ionized media // Phys. Rev. 1959. Vol. 115, № 3. P. 503.
53. *Dawson J.M.* Investigation of the double-stream instability. Nuclear Fusion (Austria), Vol. Suppl. 2, Pt. 3, received 31 December 1963.



54. *Freidberg J.P., Armstrong P.T.* Nonlinear development of the two-stream instability // *Physics of Fluids*. 1968. 11. P. 2669.
55. *Roberts K.V., Berk H.L.* Nonlinear evolution of a two-stream instability // *Phys. Rev. Lett.* 1967. Vol. 19. P. 297.
56. *Rutkevich B.N., Rutkevich P.B.* Dispersed-wave instability in a two-stream plasma // *Fizika Plazmy*. May-June 1980. Vol. 6. P. 538. (In Russian).
57. *Rutkevich B.N., Pashenko A.V., Fedorchenko V.D., Muratov V.I.* // *Zh. Tekh. Fiz.* 1972. Vol. 42. S. 493. (In Russian).
58. *Rutkevich B.N., Pashenko A.V., Fedorchenko V.D., Mazalov Yu.P.* // *Zh. Tekh. Fiz.* 1977. Vol. 47. S.112. (In Russian).
59. *Bernashevski G.A., Voronov P.S., Izyumova T.I., Chernov Z.S.* // *Radiotekhnika i elektronika*. 1959. № 10. 1666. (In Russian).
60. *Kaplun Z.F.* // *Voprosi Radioelektroniki. Seriya 1. Elektronika*. 1960. № 4. S. 42.
61. *Kanavets V.I., Kuzmina G.A., Lopukhin V.M.* // *Radiotekhnika i elektronika*. 1958. № 6. P. 800. (In Russian).
62. *Lopukhin V.M., Roshal A.S., Kuzmina G.A.* // *Radiotekhnika i elektronika*. 1960. № 11. S. 1837. (In Russian).
63. *Dunn D.A., Sackman G.L.* Interaction of two beams with a cavity // *International Journal of Electronics*. 1965. Vol. 18, Issue 2. P. 181.
64. *Tseitlin M.B., Kats A.M.* Lampa s begushchei volnoi (Tube with a traveling wave). Moscow, Sovetskoe Radio, 1964. (In Russian).
65. *Rowe J.E.* Theory of crestatron: A forward-wave amplifier // *Proc. IRE*. 1959 (April). Vol. 47. P. 536.
66. *Dow W.G., Rowe J.E.* General aspects of beating-wave amplification // *Proc. IRE*. 1960. 48, № 1. P. 115.
67. *Lopukhin V.M., Roshal A.S.* // *Radiotekhnika i elektronika*, 1962. № 4. S. 643. (In Russian).
68. *Trubetskov D.I., Titov A.V., and Funtov A.A.* Interference amplification in an electron-wave tube (Linear theory) // *Technical Physics Letters*. 2013. Vol. 39, № 11. P. 977.
69. *Chen C., Catravas P., Bekefi G.* Growth and saturation of stimulated beam modulation in a two-stream relativistic klystron amplifier // *Appl. Phys. Lett.* 1993. Vol. 62. 1579.
70. *Uhm H.S.* A theory of two-stream instability in two hollow relativistic electron beams // *Physics of Fluids B*. September 1993. Vol. 5, № 9. P. 3388.
71. *Podin S.V., Trubetskov D.I.* // *Radiotekhnika i elektronika*. 1995. № 8. S. 1273. (In Russian).
72. *Vural B.* Analysis of double-stream interactions in the presence of a finite axial magnetic field // *RCA Review*. 1961. Vol. 22. P. 753.
73. *Vural B.* Double-stream cyclotron wave amplifier // *IEEE Transactions on Electron Devices*. 1968. Vol. ED-15, № 1. P. 2.
74. *Wadhwa R.P.* Multiple-beam crossed-field interaction // *Journal of Electronics and Control*. 1964. Vol. 16. Issue 2. P. 121.

75. *Bekefi G.* Double stream cyclotron maser // J. Appl. Phys. 1992. Vol. 71. 4128.
76. *Chen C., Bekefi G., Hu W.* Linear and nonlinear analysis of the cyclotron two-stream instability // Physics of Fluids B. 1993. Vol. 5. 4490.
77. *Bekefi G., Jacobs K.D.* Two-stream, free electron lasers // Journal of Applied Physics. Vol. 53, № 6. P. 4113.
78. *Solntsev V.A., Tager A.S.* // Izvestiya VUZ. Radiofizika. 1959. T. 2, № 1. S. 101. (In Russian).
79. *Solntsev V.A., Tager A.S.* // Radiotekhnika i elektronika. 1959, № 10. S. 1652. (In Russian).
80. *Shevchik V.N., Trubetskov D.I.* // Izvestiya VUZ SSSR. Radiotekhnika. 1962. T. 5, № 2. S. 143. (In Russian).
81. *Shevchik V.N., Shvedov G.N., Soboleva A.V.* Wave and oscillation phenomena in electron flows at super high frequencies. Saratov: Izdat. Saratov Univers, 1962. (In Russian).
82. *Zhang Y. and Dong L.* Enhanced coherent terahertz Smith–Purcell superradiation excited by two electron-beams // Optics Express. 2012 (24 September). Vol. 20, № 20.
83. *Zhang Y., Zhou Y., Dong L.* THz radiation from two electron-beams interaction within a bi-grating and a subwavelength holes array composite sandwich structure // Optics Express. 2013 (23 September). Vol. 21, № 19.

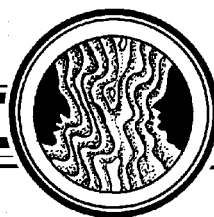
*Ссылка на статью:* Титов А.В. Двухпотоковая неустойчивость – волновые линейные и нелинейные явления на сверхвысоких частотах. Часть I // Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2016. Т. 24, № 1. С. 37–74.

*Paper's reference:* Titov A.V. Two-stream instability – linear and nonlinear microwave phenomena. Part I // Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics. 2016. Vol. 24, № 1. P. 37–74.



*Титов Алексей Владимирович* – родился в Саратове (1988). Окончил Саратовский государственный университет (2010). После окончания поступил в аспирантуру на специальность «радиофизика». Ассистент кафедры электроники, колебаний и волн СГУ. Круг интересов – электроника СВЧ, теория колебаний, радиофизика, нелинейная динамика, физика плазмы, вакуумная микроэлектроника. Опубликовал 5 научных статей в журналах, включенных в перечень ВАК, из них 3 по теме двухпотоковой неустойчивости.

410012 Саратов, ул. Астраханская, 83  
 Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского  
 E-mail: Titovav88@gmail.com



УДК 53(091), 53(092)

*К 150-летию со дня рождения П. Н. Лебедева  
К 120-летию со дня рождения Н. Н. Семенова*

## **НАШИ ПЕРВЫЕ УЧИТЕЛЯ: СТРАНИЦЫ БИОГРАФИЙ П. Н. ЛЕБЕДЕВА И Н. Н. СЕМЕНОВА**

*В. М. Аникин*

Саратовский государственный университет

О первых шагах к физике выдающихся российских учёных Петра Николаевича Лебедева и Николая Николаевича Семёнова.

*Ключевые слова:* П.Н. Лебедев, Н.Н. Семенов, А.Н. Бекнев, В.И. Кармилов.

DOI:10.18500/0869-6632-2016-24-1-75-83

Современная наука – дочь удивления и любопытства, которые являются скрытыми движущими силами, обеспечивающими ее непрерывное развитие.

*Луи де Бройль*

В биографиях двух отечественных корифеев физики – Петра Николаевича Лебедева и Николая Николаевича Семенова есть сходные эпизоды: в юные годы они встретили людей, которые смогли вызвать и поддержать их интерес к физике, ставшей впоследствии делом всей их жизни. Безусловно, оба обладали мощными индивидуальными качествами и задатками от природы. Тем не менее, интерес, вырастающий из естественной любознательности человека и становящийся на базе определенного уровня образования движущей силой познания и интеллектуального развития личности, формируется под воздействием жизненных обстоятельств. Так совпало, что впервые сведения о наставниках Лебедева и Семенова стали широко известны практически одновременно – в 1948 году [1, 2] и повторены в изданиях [3, 4]. Здесь мы напомним имена этих людей, привлекая для рассказа некоторые новые данные.

### Эпизод первый. Лебедев и Бекнев

В Страсбургском университете 22 июля 1891 года прошла защита магистерской диссертации русским студентом Пётром Николаевичем Лебедевым «Об измерении диэлектрических постоянных паров и о теории диэлектриков Моссотти–Клаузиуса». Лебедев выделялся среди учеников профессоров А. Кундта и Ф. Кольрауша самостоятельностью, колоссальной работоспособностью, обилием научных идей и еще тем, что составил программу своей дальнейшей деятельности на несколько лет вперед. Но в Московский университет новоиспеченный «доктор естественной философии» был принят лишь на должность... третьего лаборанта. И лишь спустя 5 лет, 21 февраля 1896 года, на заседании физико-математического факультета он был рекомендован профессором А.Г. Столетовым на должность приват-доцента, при этом профессор Н.А. Умов предложил рекомендуемому прочесть пробную лекцию. Наконец, 18 июля 1896 года рекомендация факультета была утверждена министром народного просвещения И.Д. Деляновым, о чем стало известно в университете лишь 3 сентября 1896 года [4, с. 18].

А в ноябре 1896 года Петр Николаевич получил из далекого Тобольска настолько приятное для него поздравление со званием приват-доцента от своего знакомого с детских лет, друга семьи Семеновых, военного инженера-электротехника Александра Николаевича Бекнева. В этом письме были такие строчки [4, письмо 130]:

«Сердечный привет и поздравления бывшему ученику Пете, превратившемуся в лаборанта Петра Николаевича, а нынче приват-доценту, чуть-чуть не профессору Московского Университета уважаемому Петру Николаевичу Лебедеву. Вот как слава идет. А давно ли у Торопова хлопали хвостом по электрофору. Bravo! Крепкожимаю руку будущему профессору. Дай бог, чтобы не остановиться на этом, а идти дальше и выше, пусть это будут лишь цветы, а затем плоды, и больше их дайте для своей родины.

Да, голубчик Петя, простите, что так Вас называю. Вы не поверите, как я рад за Вас; мне было все время страшно, что, смутив Вас как мальчика, которого готовили к коммерческой дороге, направил по иному пути, а ну, как ничего не выйдет? Но слава богу! Вы, вероятно, не раскаиваетесь, да и Ваша добрейшая мама, может быть, не упрекает меня за вмешательство в Вашу судьбу. <...>

Ваш А. Бекнев»

Особого комментария это письмо не требует: именно А.Н. Бекнев, будучи у Семеновых в гостях, однажды показал двенадцатилетнему Пете Лебедеву некоторые опыты с электричеством, после чего пыливый мальчик загорелся идеей стать физиком.

Растроганный Петр Николаевич ответил на это послание 20 ноября 1896 года. Текст письма написан в блестящем стиле, насыщен поистине философскими суждениями и содержит биографические данные, характеризующие путь Лебедева в науку. Приведем отрывок из этого письма, где Лебедев отдает дань своему по-настоящему первому учителю физики [1; 4, письмо 132]:

«Дорогой Александр Николаевич! Сердечно благодарен Вам за Ваше хорошее, доброе письмо, с которого на меня пахнуло давно прошедшим, хорошим временем, и я мог только радоваться, что причиной, которая побудила написать Вас несколько строчек, – опять же физика, которую Вы мне привили. Вы поздравляете меня со званием приват-доцента, и мне хотелось бы рассказать Вам – конечно, в самых кратких словах, – как покати́лась моя жизнь под влиянием того толчка, который Вы мне дали.

До сих пор во мне жив и памятен тот колоссальный переворот во всем моем мирозерцании, который Вы произвели Вашей электрической машиной из пластины стекла с подушками из офицерских перчаток, и я впоследствии убедился, что в отсутствии такого перелома, в отчужденности от явлений природы, в том, что «явления природы» инстинктивно считают книжной выдумкой, лежит та китайская система «знания», которой проникнута вся Россия от финских хладных волн до пламенной Колхиды<sup>1</sup>. Имея врожденное влечение к той неизменной и понятной законности, которая меня еще значительно раньше поражала в часах (и которую я себе понемногу уяснил, «вскрывая» нутро старых стенных часов), – я платонически наслаждался лицезрением хитрых приборов в магазине у Швабе<sup>2</sup> и пользовался Малининым<sup>3</sup> как ключом к этим Алладиновым лампам; и поневоле проникался тем неясным сознанием, что Швабе не только фабрикует приборы, но фабрикует те явления, о которых трактует Малинин: шаблонный прибор и данное явление для меня начинали составлять одно неразрывное, однородное целое. Помню я, как Ваша импровизированная машина и обрадовала и смутила меня: мне было тяжело и странно расставаться с мыслью, что то «электричество», о котором говорит Малинин, есть нечто простое и дешевое, не есть священное, что можно добыть только дорогими блестящими приборами при торжественной обстановке физического кабинета. То обстоятельство, что «электричество» существует не только в виде пророчества в книжке Малинина, а тут, около нас, было для меня разочарованием. Оно подрывало стройность курса Малинина.

Вспоминая этот эпизод не раз впоследствии, я на нем мог собственным опытом убедиться в той чудовищной несуразности и превратности понятий и ощущений, которые выносятся из книжек; здесь характер извращения принял детски-наивную форму и не был прикрыт маскирующим его «знанием» или «изучением» предмета.

Само собой разумеется, что вслед за разочарованием наступил поворот на новую дорогу, на самостоятельное конструкторство, на осуществление моих идеалов и измышлений теми простыми средствами, которые были у меня под руками: я легко перешагнул стадию повторения чужих опытов и сразу принялся за самостоятельную работу.»

Нужно сказать, что сам Петр Николаевич считал (и справедливо), что статус приват-доцента уже не соответствовал его уровню как ученого – он, как и предрекал ему Бекнев, видел себя профессором. Так, в конце декабря 1899 года, после защиты докторской диссертации в Московском университете, в одном из своих писем он написал: «Меня теперь производят в профессора, хотя назначение это пять лет тому назад и для меня, и для университета имело бы гораздо больший смысл» [4, с. 18].

Работая в Московском университете, Лебедев добился, во-первых, мирового признания за свои фундаментальные эксперименты по установлению светового давления на твердые тела и газы, а во-вторых, сплотил вокруг себя молодежь, из которой выросла первая физическая научная школа России мирового уровня.

<sup>1</sup> Лебедев без кавычек приводит строку из патристического стихотворения А.С. Пушкина «Клеветникам России» (1831).

<sup>2</sup> «Федор Швабе» – торговая фирма, затем – торговый дом, акционерное общество. Московский купец III гильдии, выходец из Германии, Теодор (Федор Борисович) Швабе (Schwabe, 1813–1880) открыл в центре Москвы примерно в середине XIX века магазин по продаже очков, пенсне и других мелких оптических принадлежностей заграничного производства, а впоследствии и мастерскую по ремонту оптических изделий и физических приборов. Под брендом «Швабе» в наши дни в России действует холдинг разработчиков и производителей высокотехнологичной оптической продукции, входящий в государственную корпорацию «Ростех».

<sup>3</sup> Малинин Александр Федорович (1834–1888) – педагог, выпускник физико-математического отделения Московского университета, автор множества популярных дореволюционных учебников по математике и физике (часто в соавторстве с Константином Петровичем Бурениным). По-видимому, П.Н. Лебедев имеет в виду учебник физики: Малинин А.Ф., Буренин К.П. «Руководство к физике и собрание физических задач для гимназий и реальных училищ».

## Эпизод второй. Семенов и Кармилов

Об учителе физики юного Николая Семенова в Самарском реальном училище впервые в 1948 году узнали читатели газеты «Пионерская правда» [1], чьей аудиторией были школьники младшего и среднего возраста. Маститый академик Николай Николаевич Семенов вспоминал годы своей учебы в выпускном классе училища (1912–1913) и о том влиянии, которое на него оказал молодой, только что окончивший физико-математический факультет Казанского университета учитель физики Владимир Иванович Кармилов. В отличие от предыдущих учителей физики и химии Семенова по Вольскому, а потом и Самарскому реальным училищам, Кармилов оказался необыкновенно интересующимся и знающим человеком, сумевшим увлечь физикой своих учеников. Вот что, в частности, писал Николай Николаевич о преподавательском стиле В.И. Кармилова [1,3]:

«Надо напомнить, что дело происходило в начале века, а это было время настоящей революции в физике. Именно тогда закладывались основы великолепного здания современной физики, были открыты новые теории, которые произвели переворот в тогдашней науке.

Наш новый учитель начал свои занятия с того, что ввел нас в курс всех этих новых учений. Мы учились в седьмом классе (всего в реальном училище было семь классов). Перед нами открылся новый увлекательный мир науки, пусть туманный и малопонятный, но вызывающий горячее стремление проникнуть в него и овладеть им. Ожил для нас старый учебник физики, и предмет, считавшийся самым скучным из всех школьных предметов, сразу стал самым интересным. На его уроках всегда была полная тишина – нет дисциплины крепче, чем та, что держится на любви и уважении.

Школьная программа стала для нас тесна. Урок не вмещал всех вопросов, которые нас интересовали. И у нас родилась мысль собираться для изучения этих вопросов вне школы. Собственно говоря, это был кружок, но мы называли его «домашний университет». Мы готовили и обсуждали различные доклады по физике, химии, астрономии, биологии. Собирались чаще всего у меня.

Конечно, душой всего этого был Владимир Иванович. Он пробудил у ребят живой и горячий интерес к науке. Я твердо решил посвятить ей свою жизнь, поступить в университет, изучить физику и математику, чтобы в дальнейшем применить их к химии. Это детское решение, принятое под влиянием Владимира Ивановича Кармилова, я осуществил.»

Сам Семенов прежде очень увлекался опытами по химии, которые нередко заканчивались взрывами. Он упорно занимался самообразованием в области химии, читая книги тогдашних авторитетов, и уже понял, что ему нужны и глубокие знания физики. Семенов вспоминал [1,3]:

«Я учился и окончил реальное училище еще до Первой мировой войны в одном волжском городе. Еще в пятом классе я увлекся химией. Один и с товарищами, дома и во дворе я делал различные простые химические опыты.

У нас был неплохой преподаватель химии, но он никогда не старался понять устремления учеников. И хотя он дал мне возможность ставить опыты в школьном кабинете, больше он со мной не занимался.

Я обратился к книгам. Беспорядочно читал все, что мог достать: учебники высшей школы, различные научно-популярные книги. Интерес к науке все возрастал, но вместе с тем я приходил в отчаяние: один я не мог переварить прочитанный материал, а посоветоваться было не с кем. Наш химик никогда не пытался стать другом учеников, их старшим товарищем. Не удивительно поэтому, что мне в голову не приходило обратиться со своими вопросами к нему.

Я чувствовал, что главная беда в том, что я не знаю физики. Смутно подозревал я, что без нее невозможно понять химические явления. Но физику у нас преподавал учитель, которому наука была глубоко безразлична: человек болезненный и какой-то несчастный, видимо, задавленный долголетней нуждой. У него никогда не выходил ни один опыт, физику мы учили кое-как по учебнику и считали ее скучнейшим предметом.

И вот в один прекрасный день к нам в класс вошел новый преподаватель. Маленького роста, с круглым лицом, с голубыми мечтательными глазами. Это был наш новый учитель физики Владимир Иванович Кармилов.»

У Кармилова сложились особые, дружеские, отношения с семьей Семеновых. Он поддержал стремление Николая (вопреки желаниям его отца видеть своего сына военным) учиться в университете. В 1913 году Семенов поступил на физико-математический факультет Петербургского университета, быстро приобщился к научной работе под руководством академика Абрама Федоровича Иоффе, уверенно вошел в научную среду. Делом его жизни стала «электронная химия» – так первоначально называлось научное направление «химическая физика», основным создателем которого Николай Николаевич справедливо считается. В 1956 году он получил Нобелевскую премию за исследования механизмов разветвленных цепных химических реакций.

Возможно, в свое время Семенова и Кармилова сблизила не только увлеченность наукой. Они были земляками, да и по возрасту не так уж и сильно отличались: Семенов родился в 1896 году в Саратове, а Кармилов – в 1889 году в одной из слобод Аткарского уезда Саратовской губернии. Отец его был сельским учителем, в семье было 10 братьев и сестер.

С 1920-х годов В.И. Кармилов работал в Перми – сначала в Пермском университете, а затем в Пермском медицинском институте, где до своей смерти в 1954 году заведовал кафедрой физики. Его главные научные и инновационные достижения связаны с работами по магнитофизиологии и магнитотерапии. Именно работы Кармилова, опубликованные в научном сборнике [5], вызвали мощную волну исследований в нашей стране в этих областях (см., например, мнение ведущего магнитолога страны Ю.А. Холодова [6, с. 8]). И сегодня магнитотерапевтические методы в системе физиотерапевтических процедур стали привычными, традиционными и одними из основных.

Семенов и Кармилов остались друзьями на все годы. Интересно, что в Институте химической физики Академии наук, организатором и руководителем которого долгие годы был Н.Н. Семенов, несколько десятилетий проработала настоящая династия Кармиловых: дочь, внук и правнук Владимира Ивановича Кармилова.

### **Российские корифеи физики и Саратовский университет**

Двух выдающихся российских физиков П.Н. Лебедева и Н.Н. Семенова объединяет еще одно обстоятельство – они оба приняли живое участие в становлении физического образования в Саратовском университете. Благодаря Петру Николаевичу физический факультет, собственно, «родился». В число профессоров-основателей Саратовского университета и Института физики входил ученик Лебедева, магистр физики Владимир Дмитриевич Зёрнов. В первые годы существования факультета вместе с ним работали и другие представители лебедевской школы – сильные физики Константин Александрович Леонтьев, Николай Павлович Неклепаев и Владимир

Ефимович Сребницкий. Таким образом, Петр Николаевич Лебедев стоит в основании ряда научных направлений, получивших развитие на физическом факультете СГУ [7].

Н.Н. Семенов, будучи родом из Саратова, всегда поддерживал в Саратовском университете научное направление «химическая физика», «отцом» которого он являлся. Сотрудники основанной в 1958 году профессором Александром Давидовичем Степуховичем кафедры химической физики, единственной в стране с таким названием, регулярно проходили стажировку в Институте химической физики Академии наук СССР и на кафедре химической кинетики химического факультета Московского университета, которыми руководил Н.Н. Семенов.

### **С чего начинается физик**

В [8] поэтично сказано: «Первые жизненные удивления... Как велико их влияние на жизнь человека, на созревание его разума, на пробуждение воображения... Мы не всегда знаем, к чему приводят эти юные потрясения, но когда знаем, это открывает нам секрет успеха многих великих людей.»

Проблема пробуждения «удивления» и интереса – это основная педагогическая проблема и в школе, и в университете, а актуальность ее не ослабевает. Знакомство с историей, критериями и корифеями науки [9–16], постановка пробуждающих творческую деятельность задач [17–20], физические опыты и демонстрации принадлежат, как показывает практика, к числу возможных средств разрешения этой проблемы.

### **Заключение**

Исторические реконструкции жизненных линий двух выдающихся российских физиков Петра Николаевича Лебедева и Николая Николаевича Семёнова говорят о непреходящем значении талантливых педагогов, образовательных и научных школ для развития науки. Интересно, что с рассказом о своем учителе Н.Н. Семёнов выступил в популярной детской газете. «Зажечь» подрастающее поколение интересом к деятельности, без которой не мыслима современная цивилизация, – это лишь первый шаг на пути поддержания и развития мощного научного и технического потенциала государства.

### **Библиографический список**

1. Семёнов Н.Н. Наши первые друзья. Вспоминая школьные годы // Пионерская правда. 1948, 16 марта, № 22.
2. Научное наследство. М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1948. Т. 1. С. 560
3. Семёнов Н.Н. Избранные труды: В 4 т. / Отв. ред. А.Е. Шилов, Г.Б. Сергеев. Т. 4. О времени и о себе. М.: Наука, 2006. С. 533, 534.
4. Научное наследство. Т. 15. Научная переписка П.Н. Лебедева / Сост. и авт. коммент. Е.И. Погребысская. Отв. ред. В.А. Фабрикант. М.: Наука, 1990. 501 с.
5. Биологическое и лечебное действие магнитного поля и строго-периодической вибрации (экспериментальные и клинические материалы) // Под ред.



- доц. В.И. Кармилова, проф. М.Р. Могендовича и проф. А.В. Селезнева. Молотов: Молотовгиз, 1948. 168 с.
6. *Холодов Ю.А.* Мозг в электромагнитных полях / Научно-популярная сер. М.: Наука, 1982. 123 с.
  7. *Аникин В.М.* Научная школа Петра Николаевича Лебедева и Саратовский университет // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия Физика. 2015. Т. 15, вып. 2. С. 49.
  8. *Радунская И.Л.* Кванты и музы. М.: Сов. Россия, 1980. Гл. 5.
  9. *Трубецков Д.И.* Наука о сложностях в лицах, датах и судьбах. Как закладывались основы синергетики: Пиршество духа и драма идей / Синергетика: От прошлого к будущему. М.: URSS, 2013. 312 с.
  10. *Измайлов И.В., Пойзнер Б.Н.* О науке, событиях в истории изучения света, колебаний, волн, об их исследователях, а также глоссы и этимоны: Учеб. пособие / Под ред А.В. Войцеховского. Томск: Издат. дом ТГУ, 2014. 380 с.
  11. *Аникин В.М.* О «жизни» научных знаний // Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2015. Т. 23, № 2. С. 67.
  12. *Аникин В.М., Измайлов И.В., Пойзнер Б.Н.* Диссертанту о восприимчивости, числовой оценке и защите научных результатов // Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2014. Т. 22, № 6. С. 25.
  13. *Аникин В.М.* Физика и интеллектуальное саморазвитие личности // Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2014. Т. 22, № 4. С. 117.
  14. *Аникин В.М., Измайлов И.В., Пойзнер Б.Н.* Диссертация: Характеристики научности // Гетеромагнитная микроэлектроника. 2014. № 16. С. 105.
  15. *Аникин В.М.* «Приобретать умение делать физические измерения и исследования»: к 100-летию физического образования и физической науки в Саратове // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия Физика. Т. 14, вып. 1. С. 53.
  16. *Аникин В.М., Пойзнер Б.Н.* Какова природа интересного, или дефиниции науки и научности – эпистемологический компонент профессиональной компетенции (радио)физика как инженера исследователя // Известия вузов. Физика. 2013. Т. 56, № 10/3. С. 118.
  17. *Аникин В.М., Пойзнер Б.Н.* Научное руководство аспирантами: «Внутренние» и «внешние» регуляторы // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия Физика. 2015. Т. 15, вып. 1. С. 83.
  18. *Аникин В.М., Пойзнер Б.Н.* «Предзащита» диссертации: Формальные требования и традиции // Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2014. Т. 22, № 2. С. 95.
  19. *Аникин В.М., Пойзнер Б.Н.* Провокация магистранта на вербализацию защищаемого научного положения как прием когнитивного менеджмента // Вестник Томского государственного университета. Философия. Социология. Политология. 2013. № 2. С. 15.
  20. *Аникин В.М., Пойзнер Б.Н.* Эпистемологические упражнения магистранта: Формулировка и оценка научных положений в своей диссертации // Изв. вузов. Физика. 2012. Т. 55, № 8/3. С. 213.

Поступила в редакцию 19.11.2015

**OUR FIRST TEACHERS:  
PAGES OF BIOGRAPHIES BY P. N. LEBEDEV AND N. N. SEMENOV**

*V. M. Anikin*

Saratov State University

About persons who may induce and maintain an interest in science: Teachers by P.N. Lebedev and N.N. Semenov.

*Keywords:* P.N. Lebedev, N.N. Semenov, A.N. Beknev, V.I. Karmilov.

DOI:10.18500/0869-6632-2016-24-1-75-83

**References**

1. *Semenov N.N.* Nashi pervye druž'ja. Vspominaja shkol'nye gody // Pionerskaja pravda. 1948, 16 marta, № 22 (in Russian).
2. Nauchnoe nasledstvo. M.; L.: Izd-vo AN SSSR, 1948. T. 1. S. 560 (in Russian).
3. *Semenov N.N.* Izbrannye trudy: V 4 T. / Otv. red. A.E. Shilov, G.B. Sergeev. T. 4. O vremeni i o sebe. M.: Nauka, 2006. S. 533, 534 (in Russian).
4. Nauchnoe nasledstvo. M.: Nauka, 1990. T. 15: Nauchnaja perepiska P.N. Lebedeva / Sost. i avt. komment. E.I. Pogrebysskaja, Otv. red. V.A. Fabrikant. 501 s. (in Russian).
5. Biologicheskoe i lechebnoe dejstvie magnitnogo polja i strogo-periodicheskoj vibracii (jeksperimental'nye i klinicheskie materialy): Sb. statej. pod red. dok. V.I. Karmilova, prof. M.R. Mogendovicha i prof. A.V. Selezneva. Molotov: Molotov-giz, 1948. 168 s. (in Russian).
6. *Holodov Ju.A.* Mozg v jelektromagnitnyh poljah. M.: Nauka, 1982. 123 s. (Nauchno-populjarnaja ser.) (in Russian).
7. *Anikin V.M.* Nauchnaja shkola Petra Nikolaevicha Lebedeva i Saratovskij universitet // Izvestija Saratovskogo universiteta. Novaja serija. Serija Fizika. 2015. T. 15, vyp. 2. S. 49 (in Russian).
8. *Radunskaja I.L.* Kvanty i muzy. M.: Sov. Rossija, 1980. Gl. 5 (in Russian).
9. *Trubetskov D.I.* Nauka o slozhnostjah v licah, datah i sud'bah. Kak zakladyvalis' osnovy sinergetiki: Pirshestvo duha i drama idej / Sinergetika: Ot proshlogo k budushhemu. M.: URSS, 2013. 312 s. (in Russian).
10. *Izmailov I.V., Poizner B.N.* O nauke, sobytijah v istorii izuchenija sveta, kolebanij, voln, ob ih issledovateljah, a takzhe glossy i jetimony: Ucheb. posobie / Pod red. A.V. Vojcehovskogo. Tomsk: Izdat. dom TGU, 2014. 380 s. (in Russian).
11. *Anikin V.M.* On «the life» of scientific knowledge // Izvestija VUZ. Applied Nonlinear Dynamics. 2015. Vol. 23, № 2. P. 67 (in Russian).
12. *Anikin V.M., Izmailov I.V., Poizner B.N.* Dissertantu o vosprinimaemosti, chislovoj ocenke i zashhite nauchnyh rezul'tatov // Izvestija VUZ. Applied Nonlinear Dynamics. 2014. Vol. 22, № 6. P. 25 (in Russian).

13. *Anikin V.M.* Physics and intellectual development of personality // *Izvestija VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*. 2014. Vol. 22, № 4. P. 117 (in Russian).
14. *Anikin V.M., Izmailov I.V., Poizner B.N.* Dissertacija: Harakteristiki nauchnosti // *Geteromagnitnaja mikroelektronika*. 2014, № 16. S. 105 (in Russian).
15. *Anikin V.M.* «Priobretat' umen'e delat' fizicheskie izmerenija i issledovanija»: K 100-letiju fizicheskogo obrazovanija i fizicheskoi nauki v Saratove // *Izvestija Saratovskogo universiteta*. Novaja serija. Ser. Fizika. T. 14, vyp. 1. S. 53 (in Russian).
16. *Anikin V.M., Poizner B.N.* Kakova priroda interesnogo, ili definicii nauki i nauchnosti – jepistemologicheskij komponent professional'noj kompetencii (radio)fizika kak inzhenera issledovatelja // *Izvestija vuzov. Fizika*. 2013. T. 56. № 10/3. S. 118 (in Russian).
17. *Anikin V.M., Poizner B.N.* Nauchnoe rukovodstvo aspirantami: «Vnutrennie» i «vneshnie» regulatory // *Izvestija Saratovskogo universiteta*. Novaja serija. Serija Fizika. 2015. T. 15, vyp. 1. S. 83 (in Russian).
18. *Anikin V.M., Poizner B.N.* «Pre-defence» of thesis: Formal requirements and traditions // *Izvestija VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*. 2014. Vol. 22, № 2. P. 95 (in Russian).
19. *Anikin V.M., Poizner B.N.* Provokacija magistranta na verbalizaciju zashchishchaemogo nauchnogo polozhenija kak priem kognitivnogo menedzhmenta // *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Filosofija. Sociologija. Politologija*. 2013. № 2. S. 15 (in Russian).
20. *Anikin V.M., Poizner B.N.* Epistemologicheskie uprazhnenija magistranta: Formulirovka i ocenka nauchnyh polozhenij v svoej dissertacii // *Izvestija vuzov. Fizika*. 2012. T. 55, № 8/3. S. 213 (in Russian).

*Ссылка на статью:* Аникин В.М. Наши первые учителя: Страницы биографий П.Н. Лебедева и Н.Н. Семенова // *Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика*. 2016. Т. 24, № 1. С. 75–83.

*Paper's reference:* Anikin V.M. Our first teachers: Pages of biographies by P.N. Lebedev and N.N. Semenov // *Izvestija VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*. 2016. Vol. 24, № 1. P. 75-83.



*Аникин Валерий Михайлович* – родился (1947) в Аткарске (Саратовская область). Окончил физический факультет Саратовского государственного университета (1970). Доктор физико-математических наук, профессор, декан физического факультета СГУ, заведующий базовой кафедрой компьютерной физики и метаматериалов физического факультета СГУ в Саратовском филиале Института радиотехники и электроники им. В.А. Котельникова РАН, ученый секретарь диссертационного совета Д 212.243.01 на базе СГУ. Область научных интересов: математическое моделирование хаотических и стохастических процессов, диссертациеведение. В числе работ: монография «Аналитические модели детерминированного хаоса» (совместно с А.Ф. Голубенцевым; М.: ФИЗМАТЛИТ, 2007), методическое пособие для аспирантов и соискателей учёной степени естественнонаучных специальностей «Диссертация в зеркале автореферата» (совместно с Д.А. Усановым; М.: ИНФРА-М, 2013-2015).

410012 Саратов, ул. Астраханская, 83  
Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского  
E-mail: anikinvm@yandex.ru