

Журнал включен в «Перечень периодических научных и научно-технических изданий РФ,
рекомендованных для публикации основных результатов диссертаций
на соискание ученой степени доктора наук»

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Известия высших учебных заведений

ПРИКЛАДНАЯ НЕЛИНЕЙНАЯ ДИНАМИКА

научно-технический журнал

издается с 1993 года

Выходит 6 раз в год

Том 20, № 1, 2012, Саратов

СО Д Е Р Ж А Н И Е

Материалы Школы-конференции

«Нелинейные дни в Саратове для молодых – 2011»

Саратов, 25–28.10.2011, 15–16.11.2011

НАУКА – ОБРАЗОВАНИЮ

<i>Левин Ю.И.</i> Нелинейные дни в Саратове	3
<i>Трубецков Д.И.</i> Две лекции. Анализ размерностей или райская жизнь в физике.	16
<i>Шараевский Ю.П.</i> «Левые» среды. Чем они интересны?	33
<i>Богатырев В.А.</i> Коллоидное золото в световой микроскопии	43
<i>Храмов А.Е.</i> Самоорганизация и образование структур	49

ПРИКЛАДНЫЕ ЗАДАЧИ НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ КОЛЕБАНИЙ И ВОЛН

<i>Романенко Д.В.</i> Генерация хаотической последовательности СВЧ-импульсов в автоколебательной системе с ферромагнитной пленкой	67
<i>Макаров В.В.</i> Исследование возникновения хаотических режимов колебаний пространственного заряда в полупроводниковой сверхрешетке во внешнем резонаторе	75
<i>Тюрюкина Л.В., Чернышов Н.Ю.</i> Синхронизация возбуждаемых реактивно связанных фазовых осцилляторов	81
<i>Павлов А.С.</i> Взаимосвязь обобщенной и фазовой синхронизации в системе двух однонаправленно связанных хаотических осцилляторов	91
<i>Передерий Ю.А.</i> Метод оценки спектра ляпуновских показателей по временной реализации	99
<i>Данилов Д.И., Короновский А.А.</i> Поведение спектральных компонент связанных диодов Пирса вблизи границы фазовой синхронизации	105
<i>Садовников С.А.</i> Когерентный резонанс в каскадном клистронном автогенераторе на пороге самовозбуждения	112

БИФУРКАЦИИ В ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ РАЗЛИЧНОЙ ПРИРОДЫ

<i>Аржанухина Д.С.</i> О сценариях разрушения гиперболического хаоса в модельных отображениях на торе с диссипативным возмущением	117
<i>Круглов В.П.</i> Аттрактор типа Смейла–Вильямса в кольцевой системе с периодической модуляцией частоты	124
<i>Кузнецов А.С.</i> Параметрические генераторы с хаотической амплитудной динамикой, отвечающей аттракторам типа Смейла–Вильямса	129

НЕЛИНЕЙНАЯ ДИНАМИКА И НЕЙРОНАУКА

<i>Грубов В.В.</i> Метод выделения двух типов активности нейронного ансамбля головного мозга в течение сна по сигналам электроэнцефалограмм	137
---	-----

НОВОЕ В ПРИКЛАДНОЙ ФИЗИКЕ

<i>Садовников А.В., Рожнев А.Г.</i> Моделирование распространения магнитостатических волн в одномерных магнитных кристаллах	143
---	-----

КОНФЕРЕНЦИИ. СЕМИНАРЫ. СИМПОЗИУМЫ. ШКОЛЫ

Школа-конференция «Нелинейные дни в Саратове для молодых – 2011», Саратов, 25–28.10.2011, 15–16.11.2011	160
---	-----

C O N T E N T S

*Transactions of the Scientific school
«Nonlinear Days in Saratov for Youth – 2011»
Saratov, 25–28.10.2011, 15–16.11.2011*

SCIENCE FOR EDUCATION

<i>Levin Yu.I.</i> Nonlinear days in Saratov	3
<i>Trubetskov D.I.</i> Two lectures. Dimensional analysis or paradise in physics	16
<i>Sharaevskii Yu.P.</i> Left-handed media: What is interesting?	33
<i>Bogatyrev V.A.</i> Colloidal gold in light microscopy	43
<i>Hramov A.E.</i> Selforganization, pattern formation, open system physics	49

APPLIED PROBLEMS OF NONLINEAR OSCILLATION AND WAVE THEORY

<i>Romanenko D.V.</i> Chaotic microwave pulse train generation in self-oscillatory system based on a ferromagnetic film	67
<i>Makarov V.V.</i> Study of chaotic regimes of collective electron dynamics in semiconductor superlattice in external resonator	75
<i>Turukina L.V., Chernyshov N.Yu.</i> Synchronization of reactively coupled phase oscillators driven by external force	81
<i>Pavlov A.S.</i> Relationship of generalized and phase synchronization in two unidirectionally coupled chaotic oscillators	91
<i>Perederiy Y.A.</i> Method for calculation of Lyapunov exponents spectrum from data series	99
<i>Danilov D.I., Koronovskii A.A.</i> Spectral components' behavior in coupled Pierce diodes near the phase synchronization boundary	105
<i>Sadovnikov S.A.</i> Coherent resonance in klystron oscillators on self-excitation threshold	112

BIFURCATION IN DYNAMICAL SYSTEMS

<i>Arzhanukhina D.S.</i> On scenarios of hyperbolic chaos destruction in model maps on torus with dissipative perturbation	117
<i>Kruglov V.P.</i> Attractor of Smale–Williams type in a ring system with periodic frequency modulation	124
<i>Kuznetsov A.S.</i> Parametric generators with chaotic amplitude dynamics corresponding to attractors of Smale–Williams type	129

NONLINEAR DYNAMICS AND NEUROSCIENCE

<i>Grubov V.V.</i> Method for detecting of two types of brain neural ensemble activity during sleep according to electroencephalographic records	137
--	-----

INNOVATIONS IN APPLIED PHYSICS

<i>Sadovnikov A.V., Rozhnev A.G.</i> Electrodynamical characteristics of periodic ferromagnetic structures	143
--	-----

CONFERENCES. MEETINGS. SYMPOSIA. SCIENTIFIC SCHOOLS

Scientific school «Nonlinear Days in Saratov for Youth – 2011», Saratov, 25–28.10.2011, 15–16.11.2011	160
---	-----



НЕЛИНЕЙНЫЕ ДНИ В САРАТОВЕ

Ю.И. Левин

В статье рассмотрена история возникновения научной школы-конференции «Нелинейные дни в Саратове для молодых», ее эволюция на протяжении более двух десятков лет, рассказано о ее организаторах и участниках. Перечислены другие «нелинейные» свершения коллектива сотрудников ФНП, возглавляемого профессором Д.И. Трубенковым.

Ключевые слова: Школа-конференция «Нелинейные дни в Саратове для молодых», факультет нелинейных процессов СГУ.

Осенью 2011 года прошла очередная, девятнадцатая по счету, традиционная научная школа-конференция «Нелинейные дни в Саратове для молодых», посвященная 75-летию со дня рождения Юлия Александровича Данилова. Организатором школы выступил факультет нелинейных процессов Саратовского государственного университета в сотрудничестве с ГАОУ ДПО «СарИПКиПРО». Школа прошла в два этапа. С 24 по 28 октября – для старшеклассников школ Саратова и Саратовской области, а 15–16 ноября – для студентов и аспирантов Саратовского государственного университета при участии аспирантов СГТУ. Разделение школы на два этапа было продиктовано чисто финансовыми соображениями (к сожалению, эти соображения в последние годы все в большей степени доминируют). Первый этап проходил в пансионате «Кристалл» при финансовой поддержке Фонда инновационных научно-образовательных программ «Современное естествознание». Проведение второго этапа обеспечивалось факультетом нелинейных процессов. Слушателями на школе были учащиеся из школ Саратова, Балакова, Пугачева, Аркадака, Красноармейска, Аткарска, Энгельса, села Яблоневый Гай Ивантеевского района. Особенностью школы, как и предыдущей, было участие в её работе учителей из названных городов. Обсуждение проблем образования за круглым столом было полезным и для организаторов «Нелинейных дней», сотрудников высшей школы, и для учителей средней школы.

Вы держите в руках номер журнала «Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика», в котором представлены некоторые материалы прошедшей школы-конференции «Нелинейные дни в Саратове для молодых». Нет нужды их комментировать, они сами говорят за себя. Обратимся к истории: как возникли «Нелинейные дни...», какими они были, какими они, по мнению их организаторов, должны остаться.

В 1987 году Дмитрий Иванович Трубецков пригласил меня (в то время я был доцентом кафедры общей физики, позже перешел на кафедру электроники) и старшего преподавателя своей кафедры Романа Исааковича Бурштейна и «выдал» нам новую идею: у нас есть научные школы для инженеров и научных сотрудников по электронике и радиофизике, которые проводятся с 1970 года, есть опыт организации научных школ – давайте сделаем научную школу для школьников. В городских и, что не менее важно, в сельских школах есть талантливые ребята – мы не должны их «терять», необходимы активные методы профориентации, мы должны привлекать молодежь в науку как можно раньше. Нужны научные школы, на которых старшеклассники могут получать информацию о научных достижениях, о научных проблемах из первых рук и непосредственно общаться в течение нескольких дней с ведущими учеными нашего университета и других вузов страны (в то время была актуальной поддержка талантливой молодежи, тем более это актуально сегодня).

Так появилась для учащихся десятых и одиннадцатых классов научная школа «Колебания, волны, электроны». Название отражало научную направленность «детских» школ. До 1997 года таких школ состоялось четыре (в два года один раз). Первая была проведена в январе 1988 года (более 20 лет тому назад). Идеологом и непосредственным организатором таких школ был и остается заведующий кафедрой электроники, колебаний и волн, член-корреспондент Российской Академии наук, профессор Д.И. Трубецков.

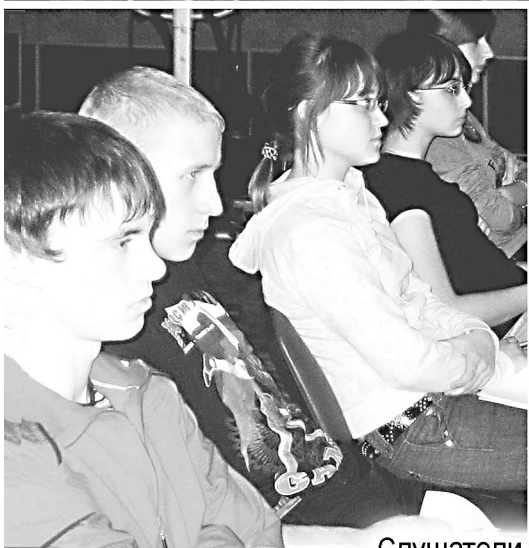
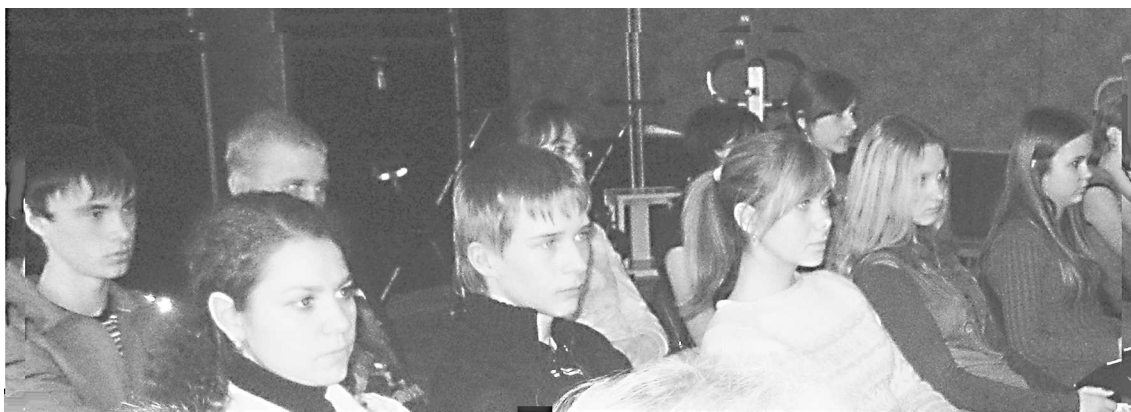
Для первой и всех последующих школ характерна атмосфера равенства школьников, думающих о научной карьере, и ученых-преподавателей, которые уже оставили след в науке, атмосфера доступности общения любого школьника с любым ученым, возможность задавать и обсуждать любые вопросы. Созданию такой атмосферы неформального общения людей разных поколений на первых школах во многом способствовали «научные чаепития». Организаторы школы привозили чай, конфеты, торт, вручали все это вместе с самоваром в порядке очередности каждому отряду (около 12 человек). В конце дня, когда заканчивались лекции и семинары, отряд школьников по своему желанию приглашал 2–3 преподавателей на чай, и допоздна велись беседы на самые разнообразные темы, иногда совсем на ненаучные или на околонуучные, например, «нужно ли девушкам идти в науку, что их там ждет». К сожалению, эту форму общения, воспитательную роль которой трудно переоценить, на последних школах-конференциях не удавалось реализовать (все та же проблема – финансирование, что определяет длительность проведения школы), но будем надеяться, что это временное явление, оргкомитет последующих школ сделает все возможное, чтобы «научные чаепития» были.

Школы «Колебания, волны, электроны» проводились в те времена, когда для большого числа школьников, особенно из сельской местности, компьютер был недостижим. Поэтому компьютерный класс, который привозили на школу, и занятия по информатике пользовались большим вниманием, и учащихся с трудом удавалось уговорить оставить компьютер и идти спать – завтра опять лекции, семинары и пр.

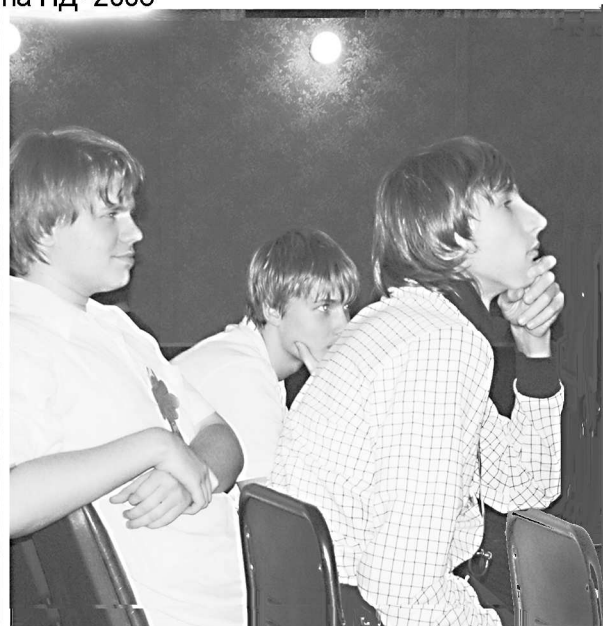


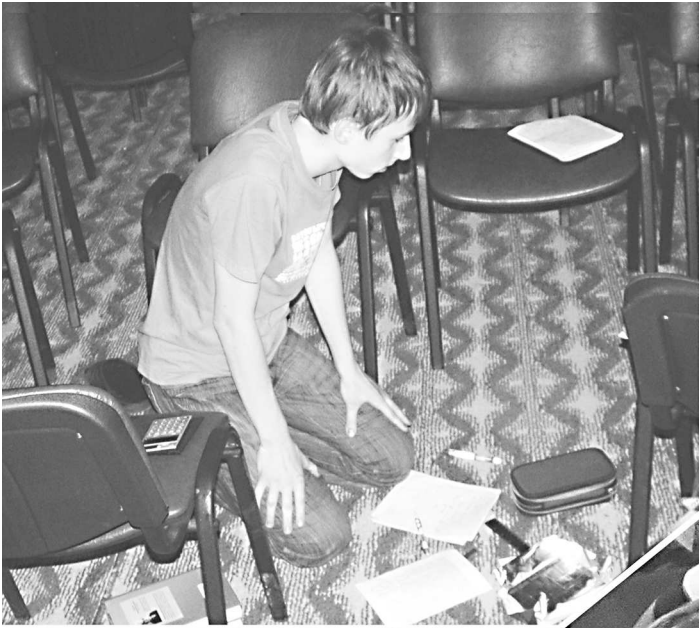
Руководители групп школьников из Саратовской области на НД-2008, учителя: Самойлова Т.В. (СОШ №2, Пугачев);
Беттигер Л.М. (СОШ села Александровка, Саратовский район); Новикова Т.Г. (СОШ №1, Аткарск);
Терентьева О.И. (Лицей №1, Балаково); Савченко М.В. (СОШ №16, Энгельс); Иванова Н.В. (Лицей, Маркс).





Слушатели на НД -2008





Олимпиада на НД-2008





Академбой на НД - 2008



Жюри
академбоя:
Савин Д.В.,
Савин А.В.,
Кравцов А.В.,
Рейман А.М.

Следует обратить внимание еще на одну особенность первых школ для старшеклассников. Любые мероприятия такого рода требуют вложения денег. Это далеко не всегда большие деньги. Во всяком случае, при организации «школ Трубецкова» многое делается «на энтузиазме», тем не менее совсем без денег нельзя. Одним из основных источников финансирования первых школ в то, уже не близкое время, были органы образования и прежде всего Областное управление образования во главе с Валентиной Ивановной Антонченко. Валентина Ивановна была не только мудрым руководителем, понимающим необходимость поддержки одаренных ребят, но и талантливым педагогом. Она приезжала на школы (и не только на открытия) в окружении своих сослуживцев. Но это не был приезд начальника со своей свитой. Валентина Ивановна общалась со школьниками и всегда находила слова и форму общения, которые ненавязчиво играли воспитательную роль.

Наступили другие времена. Мы стали жить, как любят говорить журналисты и политики, в другой стране. Страна изменилась, но по-прежнему команда Д.И. Трубецкова проводит школы «взрослые» и «детские». Тем не менее, время внесло коррективы.

После краткого перерыва в 1997 году возобновилась «детская» школа, как писали в местной прессе, «самое любимое, очевидно! – детище кафедры электроники, колебаний и волн и нового факультета нелинейных процессов».

Что же изменилось? Что осталось неизменным?

Прежде всего следует отметить, что изменилось название школы. Д.И. Трубецков предложил совершенно неожиданное и неординарное название: «Нелинейные дни в Саратове для молодых».

Новое название связано с новым научным направлением, которое стало быстро развиваться на кафедре электроники, колебаний и волн и привело к созданию нового факультета нелинейных процессов. Имя ему – нелинейная динамика. Это междисциплинарное научное направление, изучающее системы самой различной природы, в которых ключевую роль играют нелинейные процессы, возможны процессы самоорганизации и явления детерминированного хаоса, которые демонстрируют поведение, заставляющее нас по-иному взглянуть на естественно-научную картину мира. Нелинейная динамика – это общность интересов и математических методов исследования родственных нелинейных явлений в различных областях наук, это определенная система взглядов на окружающий мир, позволяющая получать нетривиальные конкретные результаты.

Целью школ «Нелинейные дни в Саратове для молодых» стало привлечение интереса талантливой молодежи к естественным наукам, прежде всего к нелинейной динамике. В настоящее время в Саратовском государственном университете сложились сильные научные школы, специализирующиеся в данной области исследований.

Изменился состав слушателей школы. Помимо учащихся старших классов полноправными участниками школ стали студенты и аспиранты факультета нелинейных процессов и других факультетов СГУ. На «Нелинейных днях» лекции слушают все участники школы, а затем происходит разделение: для старшеклассников проводятся семинары (например, по решению задач), а для студентов и аспирантов организуется миниконференция, на которой они выступают с научными докладами. Бывает так, что и школьники выступают с самостоятельными научными докладами. Сохранился принцип конкурсного отбора участников школы. На школу попадают те учащиеся, которые решили определенное число заранее распространенных задач и/или представили научный реферат. Студенты и аспиранты должны представить тезисы на-

учного доклада. Иногда из-за финансовых трудностей не удается взять в пансионат всех желающих и достойных. Тогда организуется специальный автобус, курсирующий утром и вечером между VIII корпусом СГУ и пансионатом. Часть молодых слушателей приезжают на этом автобусе на весь день и участвуют в работе школы наравне с остальными.

Проведение как первых, так и последующих школ в пансионатах позволило создать для участников комфортабельные условия проживания и питания, а главное, позволило создать условия для неформального общения людей разных поколений, установить «связь времен».

Молодые участники школ-конференций не только слушают лекции и участвуют в работе секций. Во время работы школы проводятся вечера английского языка, академ-бои, брейн-ринги, олимпиады, круглые столы, дискуссии. В последний день работы школы наиболее отличившиеся участники награждаются памятными подарками, грамотами, дипломами. Ряд старшеклассников получают официальное приглашение для поступления на факультет нелинейных процессов.

С первых дней существования «детские» школы приобрели широкую известность, вышедшую за пределы Саратовской области. Неоднократно на школы приезжали делегации учащихся и студентов из Москвы, Нижнего Новгорода, Воронежа, Ижевска. На одной из школ была делегация из Германии.

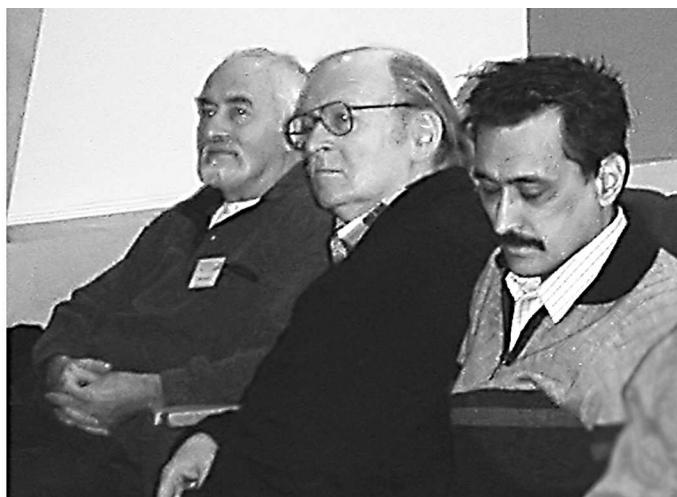
После окончания каждой очередной школы-конференции «Нелинейные дни в Саратове для молодых» в издательстве Государственного учебно-научного центра «Колледж», а затем в редакционно-издательском отделе журнала «Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика» стали выходить сборники научных трудов молодых участников по результатам их докладов на школе.

Школы стали ежегодными. Финансирование «Нелинейных дней» стало осуществляться в основном за счет различных грантов: Фонда Сороса, Российского фонда фундаментальных исследований, Федеральной целевой программы «Интеграция», Американского фонда гражданских исследований и развития, Фонда «Династия», Саратовского отделения Международного института инженеров по электротехнике и электронике (IEEE), Саратовского отделения ИРЭ РАН и других источников (спонсоров). Благодаря инициативе бывшего министра образования Саратовской области И.Р. Плеве возобновилась финансовая поддержка «Нелинейных дней» со стороны Министерства образования Саратовской области.

Успех научных школ во многом определяется составом лекторов. У «детских» школ в этом аспекте, на мой взгляд, не было проблем. Прежде всего, не умаляя заслуг остальных, следует назвать четыре имени. Все школы начинались с блестящих лекций профессора, члена-корреспондента РАН Дмитрия Ивановича Трубецкого, на большинство школ с очень интересными лекциями и беседами приезжали из Москвы математик и переводчик, профессор МГУ Юлий Александрович Данилов, лауреат Государственной премии Наталья Александровна Ирисова, выпускник, а ныне профессор МФТИ Георгий Теодорович Гурия. Все названные лица – великолепные рассказчики, их лекции и беседы всегда пользуются неизменным успехом, но, что не менее важно, они с удовольствием общаются с молодыми участниками школ и в кулуарах, и в столовой, и во время прогулок, и во время вечерних бесед. Им всегда есть чем поделиться, что рассказать, они всегда готовы поддержать молодежь. Они – Учителя.

В разные годы в работе «Нелинейных дней» принимали участие профессор А.П. Сухоруков (Москва), профессор В.Д. Шалфеев (Нижний Новгород),

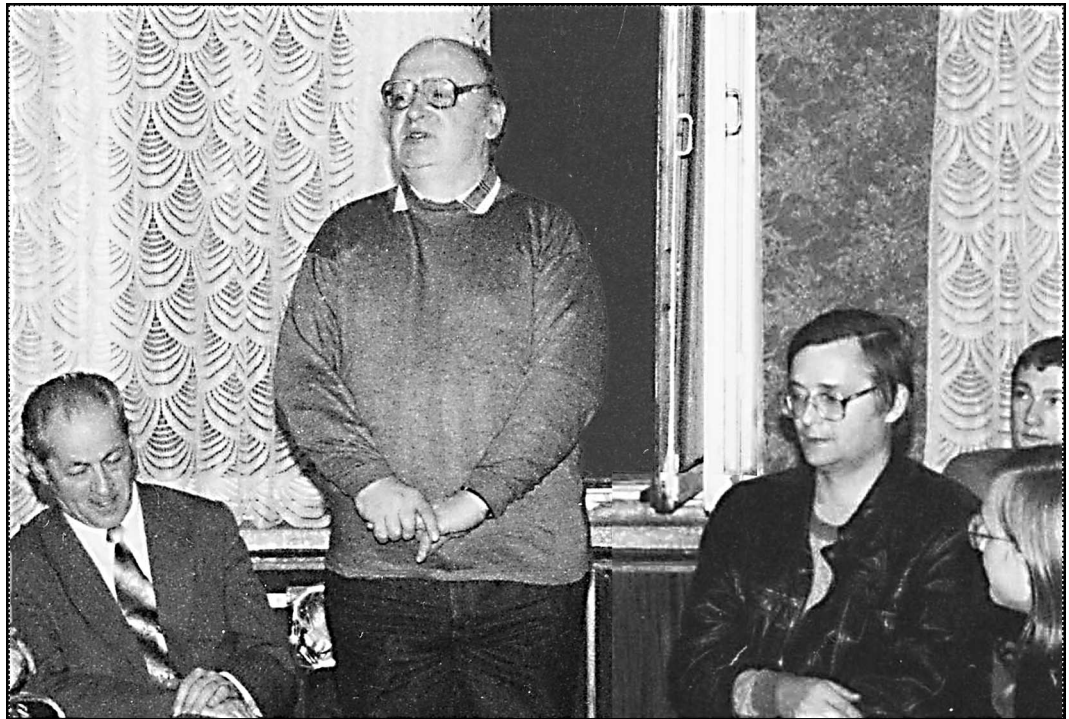
Лекторы «Нелинейных дней в Саратове для молодых - 2003», слева направо: профессор Гумбольдтского университета (Германия) Вернер Эбелинг, профессор МГУ Ю.А.Данилов, зав. лабораторией Научного центра гематологии РАМН, профессор МФТИ Г.Т.Гурия



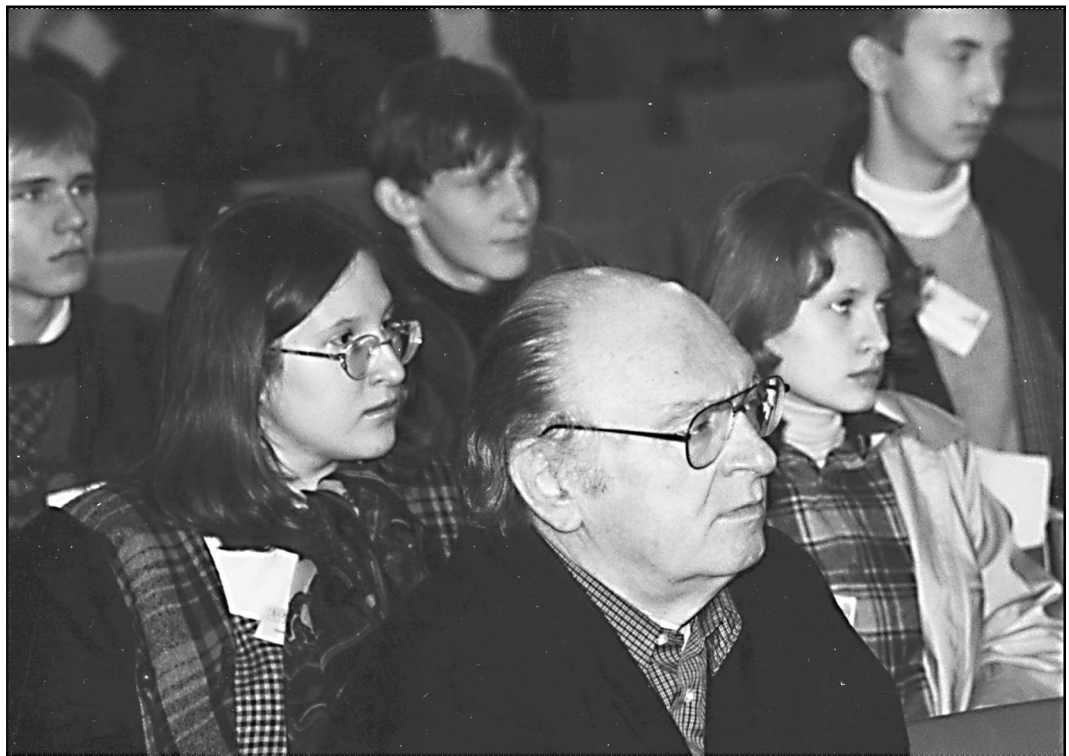
профессор А.А. Рухадзе (Москва), профессор С.П. Капица (Москва), чл.-корр. РАН, профессор Л.А. Грибов (Москва), профессор С.Ф. Тимашов (Москва), профессор В.И. Санюк (Москва), профессор Вернер Эбелинг (Германия), профессор Шуйского университета С.Р. Когаловский, профессор Ю.М. Романовский (Москва), профессор А.М. Сергеев (Нижний Новгород), профессор Andrew Osbaldestin (университет Лафборо, Англия), профессор В.Ю. Трахтенгерц (Нижний Новгород), профессор М.В. Закржевский (Рига, Латвия), доцент А.И. Скворцов (Казань) и другие ученые из разных городов России и зарубежья. С лекциями на школах-конференциях выступают ведущие специалисты Саратовского государственного университета: профессор В.С. Анищенко, профессор Ю.П. Шараевский, профессор Б.П. Безручко, профессор С.П. Кузнецов, профессор А.П. Кузнецов, профессор Д.А. Усанов, доцент А.Г. Рожнев, и многие другие.

В одном из интервью в 1999 году Ю.А. Данилов сказал (точнее, так представил его слова журналист): «Научные школы для молодых, организованные в Саратове..., – явление уникальное. В мире нет ничего подобного или параллельного такой форме обучения, когда старшее поколение ученых читает лекции, а младшее делает научные доклады, проверяя себя на прочность. И все это происходит на фоне фантастического неформального общения». И далее Ю.А. Данилов подчеркнул, что суть такой неформальности прежде всего в деловитости, непринужденности и доброжелательности атмосферы. «Допустим, начинающий физик выступает с докладом. Он много работал, подготовил гладкий текст, сумел найти интересные, на его взгляд, решения каких-то задач... Вдруг он слышит, что в аудитории есть люди, которые решают все это влет! Докладчик, конечно, уничтожен. Но и суть таких школ-конференций в том, что человеку помогают сразу разобраться в проблеме, чтобы он не воспринимал критику как выстрел на поражение... Учиться, по большому счету, трудно. В науке важна начальная скорость... К тому же талант – нежный росток – растоптать совсем не сложно... важно, чтобы кто-то вовремя подтолкнул на верное направление».

Обращу внимание еще на одни слова, высказанные Ю.А. Даниловым в интервью: «Мир-то красив. В науке есть, безусловно, эстетические стороны. И вот ведь что интересно: существует несомненная взаимосвязь между судьбой создателя научной идеи и судьбой самой идеи, хотя это могут быть совершенно разные, но параллельные судьбы. Хорошо, что программа «Нелинейных дней» включает страницы



Участники "Нелинейных дней - 1999" за круглым столом "Высшее образование в XXI веке"; слева направо: Д.И.Трубецков, Ю.А.Данилов, А.П.Кузнецов



Среди участников "Нелинейных дней - 1998"

истории науки, куда вписаны и драмы идей, и человеческие драмы». Ярким примером могут служить лекции самого Ю.А. Данилова, в которых «страницы истории» являются непременным атрибутом, в которых судьбы Исаака Ньютона, Роберта Гука, Алана Тьюринга и других великих ученых тесно переплетаются с судьбами научных идей. Несомненно, к такому же типу относится большая часть лекций Д.И. Трубецкова. Участникам одной из школ надолго запомнилась его лекция о творческом пути в науке Гельмгольца и наиболее ярких из решенных Гельмгольцем задач, лекция «1834 год». Сюда же можно отнести прочитанную на одной из школ лекцию С.П. Кузнецова о треугольнике Паскаля и т.д. Страницы истории в полной мере были представлены в лекциях-беседах Н.А. Ирисовой о судьбах московских физиков, о восьми Нобелевских лауреатах, с которыми она лично знакома.

Школа 2011 года была посвящена памяти Юлия Александровича Данилова. В этом году ему исполнилось бы 75 лет. Он был почти на всех, за редким исключением, «детских» школах с момента, когда они стали называться «Нелинейными днями», до 2003 года (год смерти Ю.А. Данилова). Когда стоял выбор – Амстердам или Саратов, он (по его словам) предпочел Саратов. Юлий Александрович был неким аттрактором, который неудержимо притягивал к себе участников школы, – блестящие лекции, безукоризненная речь и манеры, захватывающие рассказы о науке, ученых и книгах, какая-то удивительная легкость общения. Юлий Александрович любил детей, и они платили ему тем же. Д.И. Трубецков, друг Ю.А. Данилова, в своих воспоминаниях писал: «Ушел из жизни человек, который светил людям, но не только светил – его свет был теплым, он грел. В терминологии Данина, Юлий Александрович – удивительное явление даже для “кентавристики”, поскольку в нем гармонично сочеталось много несочетаемого. По его собственной терминологии, он, несомненно, – “нелинейное явление”».

Организатором «Нелинейных дней в Саратове для молодых» стал «нелинейный» факультет Саратовского государственного университета. Это не случайно.

Отличительной чертой факультета нелинейных процессов является новая концепция образования, базирующаяся на идеях нелинейной динамики. Исследования в этой области науки в настоящее время приобретают конкретное значение, и от них подчас зависит не только развитие целых отраслей знаний, но и использование наукоемких и высокоточных технологий в самых различных областях человеческой деятельности. Используемые методы обучения позволяют получить междисциплинарные знания и подготовить специалистов, способных осуществлять **моделирование и прогнозирование поведения сложных нелинейных систем и процессов** в различных областях знаний, и быть по сути **системными аналитиками**. Широкое фундаментальное образование совместно с углубленным изучением иностранных языков, новых **информационных и компьютерных технологий**, системных подходов к решению практических задач готовят выпускника не только к научной деятельности. Объем знаний и навыков, которыми обладает выпускник факультета нелинейных процессов, дает возможность эффективно работать в различных областях производства и бизнеса, при необходимости гибко адаптироваться в изменяющихся условиях рыночных отношений. Некоторые участники предыдущих школ «Нелинейные дни» стали студентами, а иные уже закончили ФНП и успешно работают.

У выпускников факультета, как правило, нет проблем с устройством на работу; их можно встретить за рубежом, в аспирантуре и на кафедрах ряда факультетов СГУ и других вузов. Можно перечислить несколько десятков научных, управленческих и коммерческих организаций Саратова и Москвы, в которых работают выпускники

ки ФНП. Приобретенные навыки в динамическом моделировании, в использовании методологии нелинейной динамики для поиска и реализации нетривиальных решений прикладных задач позволяют выпускникам ФНП реализовать себя в непростых условиях рыночной экономики в различных областях человеческой деятельности. Из письма выпускницы ФНП 2009 года, работающей в Московском банке Сбербанка России (получено 14.02.2011 г.): «...У меня хорошая новость. Меня повысили, я неделю назад стала руководителем дополнительного офиса. Я даже не ожидала, так быстро!... В подчинении 18 человек. Еще раз спасибо ФНП, после 5 лет на нашем факультете ни одна работа не страшна!»

Школа «Нелинейные дни в Саратове для молодых», факультет нелинейных процессов – это далеко не полный список «нелинейных» свершений коллектива, который часто называют командой Трубецкова. Обращу внимание еще на три важных результата деятельности команды, которые составляют практически неразрывное целое.

Выходит в свет с 1993 года научно-технический журнал «Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика», входящий в «Перечень ведущих рецензируемых научных журналов и изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученых степеней доктора и кандидата наук» Высшей аттестационной комиссии. Журнал является научной трибуной нелинейного сообщества отечественных и зарубежных ученых. Академики РАН А.В. Гапонов-Грегов, В.Л. Гинзбург (лауреат Нобелевской премии), В.Е. Захаров так характеризовали журнал: «Издание журнала такого уровня укрепляет престиж отечественной науки и, несомненно, делает честь для Саратовского государственного университета».

В 1992 году было открыто среднее учебное заведение для одаренных детей, окончивших 7 классов. Первоначально оно называлось Колледжем, а теперь это Лицей прикладных наук. В основу образовательных технологий, включающих в себя не только обучение, но и воспитание, положены идеи синергетики или нелинейной динамики. Главное направление – выявление общих закономерностей в разных дисциплинах, причем относящихся не только к естественно-научным, но и к другим, например, гуманитарным наукам, формирование в сознании учащихся единой картины мира и понимания того, что нельзя быть образованным физиком и считать, что Бунин современник Ньютона, или быть образованным филологом и не знать, почему Луна вращается вокруг Земли. В 1990-е годы З. Гельман писал статьи о созданной образовательной структуре под заголовками «Колледж, где физики изучают поэзию», «Итон открыт в “глубинке”». По его мнению, основная функция созданной структуры состоит «в создании соответствующей интеллектуальной и нравственной среды. Интеллектуалов могут воспитать только интеллектуалы. И нечего бояться корпоративного духа взаимопомощи и сотрудничества. Выпускники знаменитого Итонского колледжа в Англии... всю жизнь стараются с достоинством нести «звание итонца». А выпускники Царскосельского лицея... вообще считали себя братьями. А ведь среди них был А.С. Пушкин». Можно с уверенностью сказать, что выпускники Лицея прикладных наук гордятся своей школой. Лицей – это победы на олимпиадах самого высокого уровня, это высокий уровень образования, это 100% поступление в вузы Саратова, Москвы, Санкт-Петербурга, это неразрывная духовная связь лицеистов с учителями. Сегодня более 30 выпускников ЛПН кандидаты наук. Конечно, общая деградация образования за последние годы сказалась и на ЛПН. Тем не менее, Лицей прикладных наук живет и демонстрирует свою устойчивость.

На факультете нелинейных процессов Саратовского государственного университета разработан стандарт и соответствующие образовательные программы принципиально новой специальности «Физика открытых нелинейных систем» (квалификация физик – системный аналитик). Уникальность этого события в том, что стандарт разработан не столичным, а провинциальным (в географическом смысле) вузом. В 2004 году эта специальность была открыта на ФНП, а в 2009 году состоялся первый выпуск. В связи с введением так называемого двухуровневого образования созданы стандарты подготовки бакалавров и магистров теперь уже по направлению «Физика открытых нелинейных систем». Прием на это направление начнется после утверждения стандарта Министерством образования и науки РФ. Физика открытых нелинейных систем в настоящее время стала самостоятельной научной дисциплиной, характеризующейся междисциплинарными подходами, своей методологией, своим «инструментарием». На передний план выступает не природа той или иной системы, а принципы ее функционирования. Специалисты, занимающиеся физикой открытых нелинейных систем, должны владеть методологией и инструментарием системного анализа, понимать возможные типы эволюции систем и управлять ими. Физика открытых нелинейных систем отражает новое отношение к окружающему миру и к одной из важнейших задач, которая будет все в большей степени определять развитие в целом науки и других областей человеческой деятельности: проблеме долгосрочного анализа и прогноза.

Девятнадцатая школа-конференция «Нелинейные дни в Саратове для молодых – 2011» закончилась, а в ноябре 2011 года уже стали появляться заявки на следующую школу. Нелинейные дни, месяцы, годы продолжаются...

NONLINEAR DAYS IN SARATOV

Yu.I. Levin

The paper deals with the consideration of the history of the scientific school «Nonlinear days in Saratov for youth», its evolution during more than two decades, its organizers and participants. Other «nonlinear» achievements of the faculty of nonlinear processes staff working under supervision of Prof. D.I. Trubetskov have also been mentioned in the paper.

Keywords: Scientific school «Nonlinear days in Saratov for youth», Faculty of Nonlinear Processes of Saratov State University.



Левин Юрий Иванович – родился в Саратове (1942), окончил физический факультет Саратовского государственного университета (1965), защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук (1974). В настоящее время декан факультета нелинейных процессов СГУ, профессор, заведующий кафедрой физики открытых нелинейных систем СГУ. Автор более 100 научных статей, научно-методических пособий и руководств.

410012 Саратов, ул. Астраханская, 83
Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского
E-mail: levin@nonlin.sgu.ru



ДВЕ ЛЕКЦИИ. АНАЛИЗ РАЗМЕРНОСТЕЙ ИЛИ РАЙСКАЯ ЖИЗНЬ В ФИЗИКЕ

Д.И. Трубецков

В двух лекциях, прочитанных на школе для старшеклассников «Нелинейные дни в Саратове для молодых», изложены основные определения и положения теории размерности и подобия, а также некоторые специальные приемы решения конкретных задач, в частности, использование л-теоремы и дополнения Хантли. Приведены решения задач из различных областей физики.

Ключевые слова: Размерность, подобие, модели.

Введение

Лекции посвящены, как следует из названия, анализу размерностей и его применению в физике. Вторая часть названия заимствована из статьи В. Вайскопфа «Современная физика в элементарном изложении», который писал:

«...Я буду вычислять только порядки физических величин. Используемый в расчетах знак равенства поэтому будет означать вовсе не “равно”, а “такого порядка величины”. Численными множителями, например, 2π и т.д. я буду пренебрегать. Райская жизнь!».

В его слова включается метод оценок (в большей степени) и анализ размерностей, о чем мы и будем говорить.

Тому же Вайскопфу принадлежит статья об удивительной эффективности математики в физике (замечу, что не только в физике). Мы привыкли к чуду абстрактных чисел, например, к их сложению: когда числа абстрактные, то все равно, что складывается, фрукты или галоши. Но ситуация меняется, если вы знаете, к какому объекту относится число. Вспомним детские стишки: «И вышло у меня в ответе два землекопа и две трети». В данной конкретной ситуации число $2\frac{2}{3}$ недопустимо, хотя в арифметике – допустимо.

Естественный вопрос: «Если мы имеем дело с размерными величинами, то что делать? И вообще, есть ли какая-нибудь наука на сей счет»? Да, есть, и ее называют анализом размерности или теорией размерности. Наука небольшая, но ее и возможные ошибки из-за ее неумелого использования должен знать, по-моему, любой школьник, изучающий естественные науки.

О предсказаниях и моделях

В основе теории любого процесса или явления лежит модель, справедливая лишь в определенных пределах. В каких именно, мы узнаем чаще всего тогда, когда она перестает описывать реальность. Нужно либо поправлять модель, либо искать новую. В этот период ломки модели и важна теория размерности. Чем бы вы ни занимались – теорией или экспериментом, важно не только поставить задачу (создать теоретическую модель или придумать постановку эксперимента), но и попробовать представить себе, что должно получиться в результате вашей работы. Вот несколько мнений на эту тему.

Английский физик-экспериментатор Г. Липсон пишет: «Находятся люди, которые считают, что у ученого не должно быть никакой предвзятой идеи относительно исхода его эксперимента; ученый – говорят они – должен быть совершенно объективным. Это вздор. Настоящий ученый почти всегда ставит эксперименты с целью проверить ожидаемые результаты. Он испытывает удовольствие, обнаружив то, что ожидал, и разочарование, когда результаты эксперимента не совпадают с ожидаемыми. Если же ученый ничего не ожидает получить, то он не может быть вполне уверен в значимости своих результатов».

А вот мнение выдающегося ученого и педагога Джона Уилера – учителя Ричарда Фейнмана, которое получило название «правило Уилера»: «Никогда не начинай вычислений, пока не знаешь ответа. Каждому вычислению предпосылай оценочный расчет: привлеките простые физические соображения (симметрию! инвариантность! сохранение!) до того, как начинать подробный вывод; продумай возможные ответы на каждую загадку. Будь смелее: ведь никому нет дела до того, что именно ты предположил. Поэтому делай предположения быстро, интуитивно. Удачные предположения укрепляют эту интуицию. Ошибочные предположения дают полезную встряску».

Повторюсь, что тому, кому придется серьезно заниматься физикой, нужно прежде всего научиться делать оценки, которые часто подсказывают и сам путь более точного решения задачи. Именно это помогает делать анализ размерностей – самый распространенный метод физических оценок. По мнению одного из самых выдающихся физиков XX столетия Энрико Ферми, «в физике нет места для путаных мыслей... действительно понимающие природу того или иного явления должны получать основные законы из соображений размерности».

А что значит – понимать природу того или иного явления? Это означает – создать его модель.

Модель (от лат. *modulus* – мера, образец, норма) – в широком смысле в науке – аналог, «заместитель» оригинала (фрагмента действительности), который при определенных условиях воспроизводит интересующие исследователя свойства оригинала. Модель – карикатура на изучаемое явление, но зато одну и ту же модель можно использовать для описания широкого круга явлений.

Иногда модели рассматривают как «картины», соотносящиеся с чем-то.

Академик Н.Н. Моисеев считал, что модель можно рассматривать как специальную форму кодирования информации, причем модель кодирует ту информацию,

которую люди раньше не знали. В этом заключена предсказательная способность модели.

Создание модели – главный момент исследований с помощью анализа размерностей.

Основные определения теории размерностей

1. *Выражение единиц измерения произвольной физической величины через единицы измерения величин, принятых за основные, называется размерностью.*
2. *Размерность любой физической величины может быть только произведением возведенных в степень величин, принятых за основные.*
3. *Размерности обеих частей равенства, выражающего некоторую физическую закономерность, должны быть одинаковы.*
4. *Безразмерные комплексы размерных величин, представляющие собой произведение различных степеней этих величин, называются критериями подобия; их обычно обозначают как $\Pi = \text{idem}$.*

В этих достаточно прозрачных определениях неясным остается одно: какие величины принять за основные. Дадим ответ на этот вопрос.

Когда-то не считалось неудобным, что разные длины измерялись по-разному. Вот, к примеру, старорусские меры длины:

1 вершок –	4.445 см,
1 аршин – 16 вершков –	0.7112 м,
1 сажень – 3 аршина –	2.1336 м,
1 верста – 500 саженей –	1.0668 км,
1 десятина –	10.954 км ² .

И только во времена Великой французской революции была разработана и принята метрическая система мер. Первый эталон метра – доля длины парижского меридиана, равного $40 \cdot 10^6$ м.¹ Измерение меридиана, необходимое для создания метрической системы, велось с восьмидесятых годов восемнадцатого века и длилось много лет. Самой яркой фигурой в этой измерительной эпопее был, несомненно, французский ученый и человек удивительной судьбы Доминик Франсуа Араго. В замечательной книге Даниила Александровича Гранина «Сад камней»² есть «Повесть об одном ученом и одном императоре», посвященная Араго. Начинается она так: «Имя Араго хранилось в моей памяти со школьных лет. Щетина железных опилок вздрагивала, ершилась вокруг проводника... Стрелка намагничивалась внутри соленоида. Красивые, похожие на фокусы опыты, описанные во всех учебниках...».

Думаю, что и вы помните эти опыты.

Но в жизни Араго кроме науки были переодевания, побеги, рабство, пираты... По Гранину, Араго – «...молодой француз, немножко д'Артаньян, немножко хитроумный Одиссей, влюбчивый, неприступный, любознательный и легкомысленный...», благополучно выходящий из самых невероятных ситуаций. Я не могу и не хочу пересказыв-

¹В настоящее время метр есть длина, равная 1650763.73 длины волны (в вакууме) излучения, соответствующего переходу между уровнями $2p_{10}$ и $5d_5$ атома криптона-86. До 1960 года за метр было принято расстояние между двумя штрихами, нанесенными на платиноиридиевом стержне, который находился в Международном бюро мер и весов в Севре, близ Парижа.

²Гранин Д.А. Сад камней. М.: Современник, 1972, с. 125–177.

вать повесть. Прочитайте ее. Еще только одна цитата из повести Гранина, имеющая отношение к нашей теме.

«У меридиана были свои законы. Участок, измеренный Лакайлем, давно слился с отрезком, измеренным Кассини, а тот – с отрезком, измеренным Мешеном, теперь к ним добавится дуга, измеренная Араго.

На меридиане не пишут имен, на нем не будут обозначены три года жизни Араго, его скитания, свист пуль, чума, там будут лишь градусы, минуты, секунды».

Наряду с единицей длины была введена и единица измерения времени – секунда³ – доля звездного (сидерического) года, который равен $3.1557 \cdot 10^7$ с. Метра и секунды оказалось достаточно, чтобы измерять то, что называют пространством-временем. Следовательно, кинематика по сути дела совпадает с геометрией пространства-времени. Напомню, что в школьных учебниках кинематику определяют как раздел физики, в котором изучается механическое движение тел без выяснения причин, вызвавших это движение. Если есть взаимодействие тел, то это уже динамика, и для изучения ее законов необходимо ввести понятие силы, а также связать силу, действующую на тело, с ускорением, которое приобретается телом, или связать силу тяготения с массой, которая порождает гравитационное поле.

Появилась «двуликая масса»: в одних построениях она была инертной, в других – гравитационной. Однако Галилей своими опытами доказал, что все тела падают с одинаковым ускорением. Масса оказалась только одна: «двуликость» исчезла, поскольку гравитационная и инертная масса совпали. (Впрочем, мы позднее вернемся к «двуликости», используя ее при решении одной из задач.) В этом совпадении состоит великий принцип эквивалентности. Массу стали определять как некоторую величину, характеризующую реакцию тела на заданную силу, как меру инертности. Был создан рукотворный эталон, равный 1 кг.

Так появилась система единиц длина–масса–время (LMT). Указанные размерности независимые (из них нельзя составить безразмерную комбинацию) и именно их в анализе размерностей чаще всего принимают за основные. Исходя из физических законов, можно было все новые и новые единицы сводить к основным. Действительно, обозначая размерность любой величины квадратными скобками, получим, например, для скорости $[v] = LT^{-1}$, для ускорения $[a] = LT^{-2}$, для силы $[F] = LMT^{-2}$, для энергии $[E] = ML^2T^{-2}$, исходя из закона Кулона для заряда $[q] = L^{3/2}M^{1/2}T^{-1}$ и т.д.

Как указывает Я. Смородинский⁴, в возможности создания эталонов – единственных на весь мир – скрыто глубокое удивительное свойство природы: при установлении эталонов длины, массы и времени человек использовал важное свойство нашего физического мира – свойство однородности пространства по расстояниям, по времени и по массе. Впрочем, последнее не совсем верно даже на Земле, поскольку 1 кг ведет себя по-разному на разных широтах.

Давайте теперь, следуя Я. Смородинскому, введем в изложение некоторую детективную интригу. Пусть случилась катастрофа: Парижская лаборатория мер и весов погибла. А нам нужно определить период малых колебаний маятника. Что делать? Вот здесь и поможет анализ размерностей, поэтому обратимся к определениям,

³Секунда – единица измерения времени, равная 1/31556925.9747 доли тропического года для момента 1900 г., января 0, в 12 часов эфемеридного времени (31 декабря 1899 г., полдень).

⁴Смородинский Я.А. Подобие в природе и фундаментальные постоянные // Наука и жизнь, 1977, № 8, с. 79–85.

которые мы сформулировали раньше. Уже из этих утверждений следует рецепт решения задач методом размерности.

- Выпишите группу N физических величин, между которыми, как вам кажется, есть какая-то взаимосвязь; это – самый важный и ответственный этап – этап создания модели, на котором нельзя не учесть главного в описываемом явлении, но нельзя ввести и лишние величины.
- Не забудьте рядом с ними поставить их размерности, выраженные через $K \leq N$ размерностей величин, принятых за основные.
- Попробуйте составить из выписанных величин безразмерные произведения; некоторые величины при этом, возможно, придется возвести в какие-то степени. Часто не так уж просто составить такие произведения без использования формальных приемов, поэтому можно воспользоваться определением 2 (это основная формула метода размерности), составив матрицу размерностей – таблицу, в которой по горизонтали расположены выбранные вами для решения задачи величины $(a_1, a_2 \dots a_n)$, а по вертикали – величины, выбранные как основные; в клеточках матрицы ставятся показатели степеней, в которые нужно возвести основные величины, чтобы получить размерности $(a_1, a_2 \dots a_n)$.
- Если $N - K = 1$, то безразмерное произведение будет единственным и, приравняв его безразмерной константе, вы получите искомую закономерность.

Вернемся к задаче о маятнике и на примере ее решения используем описанный выше рецепт.

Рассмотрим для простоты математический маятник – тяжелую материальную точку массой m , подвешенную на нерастяжимой и невесомой нити длиной l . Поскольку маятник движется к положению равновесия под действием силы тяжести, его период τ может зависеть от ускорения силы тяжести g , от массы m маятника и его длины l . Ограничим совокупность возможных движений маятника условием, что они плоские. Будем считать, что период колебаний маятника не зависит от амплитуды колебаний, то есть ограничимся малыми колебаниями около положения равновесия. Пренебрежем затуханием колебаний (в число определяющих величин не войдут вязкость и температура воздуха), не будем также учитывать ускорение точки подвеса маятника вместе с Землей (в число определяющих величин не войдет скорость вращения Земли). Тогда для периода колебаний можно записать формулу

$$\tau = f(l, m, g). \quad (1)$$

Выберем в качестве основной систему LMT. Поскольку $N = 4$, а $K = 3$, то $N - K = 1$ и безразмерное произведение будет единственным. В данном случае легко сообразить, что безразмерная комбинация имеет вид: $\Pi = \sqrt{\tau^2/(l/g)}$ или $\tau = \Pi\sqrt{l/g}$. Однако решим задачу и формальным образом. Составим матрицу размерностей, исходя из того, что $[\tau] = T^1$; $[l] = L^1$; $[m] = M^1$; $[g] = L^1T^{-2}$. Тогда

	τ	l	m	g
L	0	1	0	1
M	0	0	1	0
T	1	0	0	-2.

Используя определение 2 и формулу (1), имеем

$$\tau = \Pi l^\alpha m^\beta g^\gamma, \quad (2)$$

где α , β и γ – не известные нам показатели степеней. На основе положения 3, из формулы (2) получим

$$L^0 M^0 T^1 = L^\alpha M^\beta L^\gamma T^{-2\gamma}. \quad (3)$$

Приравнивая показатели степеней в формуле (3) при одинаковых основаниях, приходим к системе уравнений

$$\alpha + \gamma = 0, \quad 1 = -2\gamma, \quad \beta = 0,$$

из которой следует, что

$$\gamma = -\frac{1}{2}, \quad \alpha = \frac{1}{2}.$$

Таким образом,

$$\tau = \Pi l^{1/2} g^{-1/2} = \Pi \sqrt{l/g}.$$

Согласно определению 4, мы получили критерий подобия

$$\Pi = \frac{\tau g^{1/2}}{l^{1/2}} \quad \text{или} \quad \bar{\Pi} = \Pi^2 = \frac{\tau^2 g}{l}. \quad (4)$$

Дадим еще одно определение.

Явления называются подобными, если они отличаются только численными значениями определяющих параметров и притом так, что для них соответствующие безразмерные величины Π_i ($i = 1, 2, \dots, m$) совпадают.

Применительно к нашей задаче о маятнике закон подобия говорит, что, если мы увеличим длину маятника в n раз, то отношение длины нового маятника к квадрату его периода остается неизменным, поскольку $l_1/\tau_1^2 = l_2/\tau_2^2 = g/\bar{\Pi}$, а $g = \text{const}$. Таким образом, если существует хоть один маятник, для которого известна величина l/τ^2 , то мы можем найти периоды маятников любой длины.

В большинстве случаев, прежде чем приступить к изготовлению какого-либо дорогостоящего и крупного сооружения, например, корабля или самолета, для получения его характеристик в предстоящих условиях работы прибегают к испытаниям на моделях – к моделированию. При этом надо знать, как пересчитать результаты опыта на модели на натуру. Если этого не знать, моделирование бесполезно. Для рационального моделирования основным является понятие подобных явлений и, следовательно, установление критериев подобия.

Разумеется, закон подобия, как и любые другие законы природы, должен иметь ограниченную область применения. Очевидно, что маятник, длина которого сравнима с радиусом R Земли, будет качаться не так, как маятник обычных размеров l , потому что натяжение, обусловленное силой тяжести, будет существенно меняться вдоль его длины.

Таким образом, закон подобия для маятника будет справедлив только в том случае, если $l \ll R$. Следовательно, геометрического подобия в гравитационном поле нет.

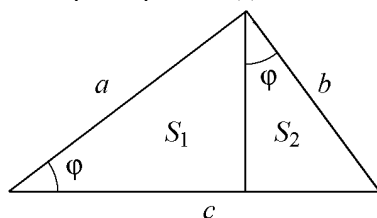
Мы уже упоминали, что Галилей открыл закон подобия для свободно падающих тел (а мы его использовали для маятника, считая $g = \text{const}$). Но по иронии судьбы он же отметил, что некоторые законы не остаются неизменными при изменении масштабов. Вот его размышления над прочностью костей. Животное вдвое

большей длины, ширины и высоты должно весить в 8 раз больше. Однако его вдвое более широкие кости имеют лишь вчетверо большее поперечное сечение, а значит, способны выдерживать лишь вчетверо больший вес. Это означает, что для выдерживания полного веса тела поперечный размер костей должен был бы увеличиться более чем в 2 раза. Такое отклонение от простого подобия вводит естественный масштаб в строение тела как сухопутных, так и водных животных: при некоторых предсказуемых в общих чертах размерах диаметр костей начинает увеличиваться быстрее, чем остальные части тела, разрушая тем самым подобие, но сохраняя в живых животных (на эту тему есть интересная книга: Дж.Б.С. Холдейн «Как важно быть нужного размера»⁵).

Перейдем теперь к решению разных задач.

Примеры различных задач, решаемых методами размерности и подобия

Доказательство теоремы Пифагора. Историки науки считают, что развитию математических способностей Эйнштейна способствовал его дядя Якоб – инженер по образованию. Он давал мальчику математические задачи, и тот испытывал удовольствие от их решения. В 1891 году Эйнштейн приобрел, по его словам, «священную книгу по геометрии» – геометрию Эвклида. Изучая ее, он почувствовал, что некоторые доказательства в книге неоправданно сложны. Вот одно из возможных доказательств теоремы Пифагора, сделанное одиннадцатилетним Эйнштейном. Площадь прямоугольного треугольника S определяется величиной его гипотенузы c и, для определенности, меньшим из острых углов φ , то есть $S = f(c, \varphi)$. Очевидно, что анализ размерности дает $S = c^2 \varphi(\varphi)$.



Из рисунка видно, что сумма площадей треугольников S_1 и S_2 равна S . Тогда

$$c^2 \varphi(\varphi) = a^2 \varphi(\varphi) + b^2 \varphi(\varphi) \quad \text{и}$$

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

Определение гравитационного радиуса Земли. Начнем с, казалось бы, абстрактной задачи на технику решения с помощью анализа размерностей.

Попробуем составить из гравитационной постоянной G , входящей в закон всемирного тяготения $F = G(m_1 m_2)/r^2$ (считаю, что вы его знаете), массы m и скорости света c величину, имеющую размерность длины. Обозначая ее R , имеем

$$R = f(G, m, c) \rightarrow R = \text{П} G^\alpha m^\beta c^\gamma. \quad (5)$$

Составим матрицу размерностей в системе LMT

	R	G	m	c
L	1	3	0	1
M	0	-1	1	0
T	0	-2	0	-1,

⁵Haldane J.B.S. On being the right size. L.: Oxford University Press, 1928.

из которой с учетом формулы (5) следует:

$$L^1 M^0 T^0 = L^{3\alpha} M^{-\alpha} T^{-2\alpha} M^\beta L^\gamma T^{-\gamma}.$$

Тогда $1 = 3\alpha + \gamma$, $0 = -\alpha + \beta$, $0 = -2\alpha - \gamma$ и, следовательно, $\alpha = \beta = 1$, $\gamma = -2$. Таким образом, $R = \Pi(Gm/c^2)$. Если $m = M_3$ – массе Земли, то $R_{\text{гр}} = \Pi(GM_3/c^2)$ – гравитационный радиус Земли. Важное замечание: величину Π , которая присутствует во всех задачах, решаемых методом размерности, в рамках метода определить нельзя (вспомните Вайскопфа: «Я буду вычислять только порядки физических величин...»). Эта величина может быть определена либо из строгой теории, либо из эксперимента. В нашей задаче $\Pi = 2$, поэтому $R_{\text{гр}}$ Земли получается примерно равным 0.4 см, $R_{\text{гр}}$ Солнца – около 3 км, $R_{\text{гр}}$ пульсаров – порядка размеров Земли.

Для тела массой m , лежащего на поверхности Земли, $mg = G(mM_3/r^2)$, поэтому $g = R_{\text{гр}} c^2 / (2r^2)$, то есть гравитационное поле само характеризуется постоянной $R_{\text{гр}}$, имеющей размерность длины. Вот почему в гравитационном поле нет геометрического подобия, и короткий и длинный маятники колеблются по-разному.

Задача для будущих президентов. В студенческой или школьной аудитории я всегда задаю вопрос: «Кто хочет стать президентом страны?» И всегда находятся претенденты. Недавно появилась любопытная книга Ричарда А. Мюллера «Физика для будущих президентов»⁶, в которой автор пытается ответить на вопрос: «Зачем президенту знать физику?». Ответ в том, что именно с физикой связано множество проблем, с которыми ему придется столкнуться (терроризм, энергетические проблемы, ядерные технологии, космос, глобальное потепление), и еще потому, что физика в наши дни становится главной наукой – наукой, открывающей человечеству двери в будущее. Естественно, что одна из проблем – ядерное оружие.

Поэтому – вот одна важная задача, которую с помощью анализа размерностей может решить президент, даже недолюбливающий физику. Решим задачу о сильном точечном взрыве, под которым понимают взрыв заряда, имеющего малый размер и массу, но обладающего большой энергией. Именно к таким взрывам и относится ядерный взрыв. Эту задачу решали почти одновременно Дж. Тэйлор в Англии, фон Нейман в США и академик Л.И. Седов в СССР. Вот изящное и простое решение, которое предложил Л.И. Седов.

Пусть в течение очень короткого времени в атмосфере выделилась настолько большая энергия \mathcal{E} , что при дальнейшем распространении ударной волны можно пренебречь атмосферным давлением за ударной волной. Найдем закон движения ударной волны, то есть ее расстояние r от центра взрыва в момент времени t . Масштабы явления должны зависеть от мгновенно выделившейся энергии \mathcal{E} и инерционных свойств атмосферы – плотности ρ . Матрица размерности в системе LMT имеет вид

	r	\mathcal{E}	ρ	t
L	1	2	-3	0
M	0	1	1	0
T	0	-2	0	1

⁶Мюллер Р.А. Физика для будущих президентов. М.: АСТ: Астрель: Полиграфиздат, 2011, 411 с.

Будем искать зависимость $r = f(\mathcal{E}, \rho, t)$. Тогда, согласно основной формуле теории размерностей (определению 2), $r = \Pi \mathcal{E}^\alpha \rho^\beta t^\gamma$. Используя матрицу размерностей, находим

$$L^1 M^0 T^0 = (L^2 M T^{-2})^\alpha (M L^{-3})^\beta T^\gamma,$$

откуда $1 = 2\alpha - 3\beta$, $0 = \alpha + \beta$, $0 = -2\alpha + \gamma$ и $\alpha = 1/5$, $\beta = -1/5$, $\gamma = 2/5$. Таким образом, закон движения ударной волны имеет вид

$$r = \Pi \left(\frac{\mathcal{E}}{\rho} \right)^{1/5} t^{2/5}. \quad (6)$$

Соотношение (6) оказалось весьма полезным, поскольку сэкономило усилия и средства экспериментаторов. Действительно, достаточно произвести единственный взрыв с известными \mathcal{E} и ρ , измерить, до какого r дойдет ударная волна за время t , – и можно определить безразмерную постоянную Π . После чего соотношение (6) можно использовать для определения энергии взрыва \mathcal{E} , если во время взрыва измерять $r(t)$ и ρ . Разумеется, постоянная Π (критерий подобия), должна быть одинаковой для всех взрывов, то есть взрывы должны быть однотипными.

В логарифмических переменных $(5/2) \lg r$, $\lg t$ экспериментальные точки должны лечь на прямую

$$\frac{5}{2} \lg r = \frac{5}{2} \lg (\Pi \mathcal{E}^{1/5} \rho^{-1/5}) + \lg t, \quad (7)$$

имеющую наклон, равный единице. Это подтвердил Тейлор, обработавший кинофильм о распространении огненного шара, снятый во время американских ядерных испытаний Дж. Маком. Из более строгих расчетов следует, что $\Pi \approx 1$. Зная это, по экспериментальной зависимости радиуса фронта ударной волны от времени можно определить энергию взрыва. Публикация Тейлором этой величины (она оказалась примерно равной 10^{14} Дж) вызвала в свое время, по его словам, немалое смущение в американских правительственных кругах, поскольку эта цифра считалась весьма секретной, хотя фильм Мака секретным не был.

Проблема пульсации звезд и π -теорема. Пока у нас задачи решались легко, поскольку $N - K = 1$. А что делать, если $N - K > 1$? В теории размерности и подобия есть π -теорема, впервые сформулированная и доказанная, по-видимому Бэкингом. Ее можно изложить следующим образом.

Пусть существует физическая закономерность $a = f(a_1, a_2, \dots, a_k, a_{k+1}, \dots, a_n)$, выраженная в виде зависимости некоторой, вообще говоря, размерной величины от размерных же определяющих ее параметров.

Эта зависимость может быть представлена в виде $\Pi = f(\Pi_1, \Pi_2, \dots, \Pi_{n-k})$ некоторой безразмерной величины от безразмерных комбинаций определяющих параметров. Количество этих безразмерных комбинаций меньше общего числа определяющих параметров на число размерных определяющих параметров с независимыми размерностями (параметров, принятых за основные). Рассмотрим пример использования теоремы в астрофизике.

Для классификации звезд используют интенсивность их блеска. В 1784 году Джон Гудрайтис установил, что звезда в созвездии Цефея, которой в астрономических каталогах присвоена буква δ (δ -Цефея), периодически изменяет блеск с

периодом 5.366341 суток (порядка 130 часов). Ее диаметр изменяется в пределах от 40 до 45 диаметров Солнца. δ -Цфея дала имя целому классу звезд – цефеид. Цефеиды – переменные звезды-сверхгиганты, периодически изменяющие свою светимость и яркость. Причиной переменности служат колебания радиуса и температуры фотосферы (пульсации), возникающие из-за нарушения баланса между силами гравитации, стремящимися сжать звезду, и силами горячего газа и излучения, стремящимися звезду расширить. Существование связи между периодом и средней светимостью звезды установила в 1908 году Генриетта Суон Левит. В 1925–1926 годах, применив полученные Левит результаты к цефеидам, обнаруженным в туманности Андромеды, Эдвин Пауэлл Хаббл смог определить расстояние до нее и установить, что она расположена далеко за границами Млечного пути и является самостоятельной галактикой.

Как сформулировать задачу о пульсациях и какие величины выбрать в качестве определяющих?

Предположим, что пульсации звезд – их сжатия и разрежения – имеют строго выраженный радиальный характер. Амплитуду пульсаций будем считать малой. В качестве определяющих величин, следуя книге Э.А. Дибая и С.А. Каплана «Размерности и подобие астрофизических величин»⁷, выберем массу звезды \mathcal{M} , светимость \mathcal{L} и радиус \mathcal{R} . Светимость – одна из важнейших единиц астрофизики. Под светимостью понимают количество энергии, излучаемой небесным телом за единицу времени, поэтому в системе LMT $[\mathcal{L}] = L^2MT^{-3}$. Заметим, что \mathcal{M} , \mathcal{L} и \mathcal{R} имеют независимые размерности, то есть из этих трех величин нельзя составить безразмерный комплекс. Кроме указанных определяющих величин следует добавить гравитационную постоянную \mathcal{G} , поскольку сжатие звезды при пульсации вызвано полем тяготения звезды. Наконец, при малых амплитудах пульсации определяются только периодом \mathcal{P} . При этом отброшены такие «тонкости», например, как зависимость периода пульсаций от структуры звезды и ее химического состава, роль ионизации в поверхностных слоях, конвекция и т.п. Все эти факторы, конечно, влияют на период пульсаций, но это уже более высокое приближение в решаемой задаче.

Запишем на этот раз искомую физическую зависимость в неявной форме

$$f(\mathcal{M}, \mathcal{L}, \mathcal{R}, \mathcal{G}, \mathcal{P}) = 0. \quad (8)$$

Число независимых размерностей равно трем. Согласно π -теореме, должны быть два критерия подобия, Π_1 и Π_2 , а уравнение (8) можно переписать следующим образом:

$$f_1(\Pi_1, \Pi_2) = 0.$$

Составим матрицу размерностей в системе LMT.

	\mathcal{M}	\mathcal{L}	\mathcal{R}	\mathcal{G}	\mathcal{P}
L	0	2	1	3	0
M	1	1	0	-1	0
T	0	-3	0	-2	1.

⁷Дибай Э.А., Каплан С.А. Размерности и подобие астрофизических величин. М.: Наука, 1976, 399 с.

Используя матрицу размерности и основную формулу размерности, найдем два безразмерных комплекса, в один из которых входит \mathcal{P} , а в другой – \mathcal{G} .

$$\frac{[\mathcal{P}]}{[\mathcal{L}]^\alpha [\mathcal{M}]^\beta [\mathcal{R}]^\gamma} = 1, \quad \frac{T}{L^{2\alpha+\gamma} M^{\alpha+\beta} T^{-3\alpha}} = 1,$$

$$2\alpha + \gamma = 0, \quad \alpha + \beta = 0, \quad 1 + 3\alpha = 0, \quad \alpha = -1/3, \quad \beta = 1/3, \quad \gamma = 2/3.$$

Таким образом,

$$\Pi_1 = \frac{(\mathcal{L}\mathcal{P})^{1/3}}{(\mathcal{M}\mathcal{R}^2/\mathcal{P}^2)^{1/3}}. \quad (9)$$

Есть ли какой-либо физический смысл у этого критерия подобия? Оказывается, что удобнее интерпретировать величину Π_1^3 , которая есть отношение энергии $\mathcal{L}\mathcal{P}$, излученной звездой за один период колебаний, к величине, характеризующей механическую энергию колебаний звезды $\mathcal{M}\mathcal{R}^2/\mathcal{P}^2$.

Аналогичным образом будем отыскивать и второй критерий подобия, который обозначим пока Π'_2 . Итак,

$$\frac{[\mathcal{G}]}{[\mathcal{L}]^{\alpha_1} [\mathcal{M}]^{\beta_1} [\mathcal{R}]^{\gamma_1}} = 1, \quad \frac{L^3 M^{-1} T^{-2}}{L^{2\alpha_1+\gamma_1} M^{\alpha_1+\beta_1} T^{-3\alpha_1}} = 1,$$

$$2\alpha_1 + \gamma_1 = 3, \quad \alpha_1 + \beta_1 = -1, \quad 3\alpha_1 = 2; \quad \alpha_1 = -2/3, \quad \beta_1 = -5/3, \quad \gamma_1 = 5/3$$

и, следовательно,

$$\Pi'_2 = \frac{\mathcal{G}\mathcal{L}^{-2/3}}{\mathcal{M}^{-5/3}\mathcal{R}^{5/3}}.$$

Образуем критерий подобия

$$\Pi_2^2 = \Pi'_2 \Pi_1^2 = \frac{\mathcal{P}^2}{\mathcal{G}^{-1}\mathcal{M}^{-1}\mathcal{R}^3}.$$

Тогда

$$\Pi_2 = \mathcal{P}\mathcal{G}^{1/2}\mathcal{M}^{1/2}\mathcal{R}^{-3/2}. \quad (10)$$

Критерий Π_2 определяет период колебаний звезды, которые являются механическими. Вот почему мы используем вместо Π'_2 критерий Π_2 , который не содержит светимость звезды. Для средней плотности звезды можно написать соотношение $\bar{\rho} = \mathcal{M}/((4/3)\pi\mathcal{R}^3)$. С учетом этого выражения из формулы (10) получим

$$\mathcal{P}(\bar{\rho})^{1/2} = \frac{\Pi_2}{\sqrt{(4/3)\pi\mathcal{G}}}. \quad (11)$$

Если считать правую часть формулы (11) постоянной, то (11) выражает хорошо известное в астрофизике соотношение «период–плотность» для пульсирующих звезд. А в чем физический смысл безразмерного комплекса Π_2 ?

Вспомним формулу Гюйгенса для периода колебаний математического маятника (формула (4) при $\Pi = 2\pi$) и применим ее к пульсациям звезд, считая, что «длина» маятника l равна радиусу звезды \mathcal{R} . Кроме того, положим ускорение силы тяжести равным его значению на поверхности звезды, а именно $g = \mathcal{G}\mathcal{M}\mathcal{R}^{-2}$. Тогда

$$\mathcal{P} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} = 2\pi\sqrt{\frac{\mathcal{R}^3}{\mathcal{M}\mathcal{G}}}$$

или с учетом выражения для $\bar{\rho}$

$$\mathcal{P} = \sqrt{\frac{3\pi}{\mathcal{G}\bar{\rho}}}, \quad \mathcal{P}(\bar{\rho})^{1/2} = \sqrt{\frac{3\pi}{\mathcal{G}}}. \quad (12)$$

Легко видеть, что соотношения (12) и (11) совпадают, если $\Pi_2 = 2\pi$. Откуда такая близость численных значений критериев подобия и их приближенное постоянство для объектов столь разных масштабов – маятника и звезды? Все дело в физической общности явлений, приводящих к малым пульсациям звезд и малым колебаниям маятника. И в том и в другом случае сущность одна и та же – механическое движение в поле тяжести, соответствующее небольшим отклонениям от положения равновесия.

Конечно, во многом сравниваемые явления различны. Они подобны только по одному критерию подобия (такое подобие явлений называется ограниченным). Более того, критерий подобия Π_1 не может считаться постоянным, он разный для разных звезд и всегда много меньше единицы.

Повторю еще раз, что численные значения критериев подобия из анализа размерности нельзя найти. Но очень часто они не отличаются от единицы. Почему? Одно из объяснений состоит в следующем: если анализируемая система находится в равновесном состоянии, то это значит, что два противоположно действующих эффекта (существенных для данной задачи) примерно компенсируют друг друга.

Дополнение Хантли

У формул размерности есть некоторые неудовлетворительные особенности. Например, угловая скорость и частота имеют одинаковую размерность. Формула размерности скорости изменения момента количества движения в системе LMT имеет вид L^2MT^{-2} , что совпадает с формулой размерности для энергии. Подобные примеры можно найти в книге Г. Хантли «Анализ размерностей»⁸.

Уже из двух приведенных примеров следует определенная двусмысленность системы единиц LMT. Таким образом, если каждой физической величине можно приписать лишь одну вполне определенную формулу размерности, то обратное утверждение не верно: существуют некоторые формулы размерности, справедливые для более чем одной физической величины. Последнее приводит к неполному решению задачи, когда число независимых физических величин превышает число основных величин на два и более, поскольку в этом случае число неизвестных показателей степени превышает число уравнений, связывающих их друг с другом. В этом случае приходится выражать некоторые показатели через другие. Следовательно, было бы разумно увеличить число основных размерностей.

Рассмотрим следующую простую задачу. *Пуля выпущена с начальной скоростью v_0 в горизонтальном направлении на высоте h от земной поверхности. Определить дальность R горизонтального полета пули.* Очевидно, что $R = f(v_0, h, g)$.

⁸Хантли Г. Анализ размерностей. М.: Мир, 1970, 175 с.

Тогда $R = \Pi v_0^\alpha h^\beta g^\gamma$; в системе LMT имеем $L = (LT^{-1})^\alpha L^\beta L^\gamma T^{-2\gamma}$ и $1 = \alpha + \beta + \gamma$; $0 = -\alpha - 2\gamma$. Из двух последних уравнений $\gamma = -\alpha/2$, $\beta = 1 - \alpha/2$ и, следовательно,

$$R = \Pi h \left(\frac{v_0}{\sqrt{gh}} \right)^\alpha, \quad (13)$$

то есть решение неполное.

Дополнение Хантли состоит во введении векторных единиц длины с различающимися индексами, соответствующими декартовой системе координат, то есть L_x , L_y , L_z . Этим способом система LMT превратилась в систему $L_x L_y L_z$ MT, в которой пять основных единиц вместо трех. В нашей задаче пуля обладает равномерной горизонтальной скоростью $L_x T^{-1}$ и равномерным вертикальным ускорением $L_z T^{-2}$. Используемый прием не только увеличивает число независимых основных размерностей, что дает возможность найти неизвестные показатели степени (в нашем случае α), но и устраняет путаницу в формулах размерности, когда одна и та же формула справедлива для двух и более физических величин.

Очевидно, что формулы площади $L_x L_y$, $L_x L_z$, $L_y L_z$ лучше, чем L^2 .

Формулу, например, для давления $L^{-1} M T^{-2}$ лучше преобразовать, вспомнив, что давление равно силе, действующей на единицу площади, то есть $(M L_z T^{-2}) / (L_x L_y)$. Примеры можно продолжить.

Решим задачу о пуле заново, используя дополнение Хантли и считая, что $[R] = L_x$, $[v_0] = L_x T^{-1}$, $[g] = L_z T^{-2}$, $[h] = L_z$. Тогда $R = \Pi \cdot v_0^\alpha h^\beta g^\gamma$ и $L_x = (L_x T^{-1})^\alpha L_z^\beta (L_z T^{-2})^\gamma$, что дает $1 = \alpha$, $0 = -\alpha - 2\gamma$, $0 = \beta + \gamma$ и, следовательно, $\gamma = -1/2$, $\beta = 1/2$. Таким образом,

$$R = \Pi v_0 \sqrt{\frac{h}{g}}. \quad (14)$$

Подставляя $\alpha = 1$ в (13), также получим формулу (14).

С введением векторной величины длины все разумно и понятно, а можно ли разделить понятие массы? Ведь мы ранее, восхищаясь Галилеем, провозгласили принцип эквивалентности – масса одна. Но я обещал вернуться к этому вопросу. Следуя Хантли, решим такую задачу.

Определить массовый расход вязкой жидкости, протекающей через трубу круглого поперечного сечения радиусом r и длиной l . Массовый расход m – это масса жидкости, протекающей в единицу времени, то есть $[m] = M T^{-1}$. Так как течение жидкости поддерживается за счет разности давлений на концах трубы $P_1 - P_2$, то изменение давления на единицу длины (градиент давления) $\mathcal{P} = (P_1 - P_2)/l$ и $[\mathcal{P}] = M T^{-2}/L^2$. Вязкость жидкости η (динамическую) применительно к потоку, параллельному неподвижной поверхности, определяют как силу, действующую на единицу площади (которая перпендикулярна поверхности потока), и деленную на градиент скорости, который имеет место в направлении, перпендикулярном поверхности. Таким образом, в системе LMT $[\eta] = L^{-1} M T^{-1}$. Тогда уравнение задачи имеет вид: $m = f(\mathcal{P}, \rho, \eta, r)$, где ρ – плотность жидкости, и, следовательно, в системе LMT определяющих величин пять при трех основных.

Хантли предлагает вопреки общей теории относительности различать массу как количество вещества M_μ и как меру инерции M_i , то есть считать, что $[m] = M_\mu T^{-1}$, $[\mathcal{P}] = L^{-2} M_i T^{-2}$, $[\rho] = M_\mu L^{-3}$, $[\eta] = [L^{-1} M_i T^{-1}]$, $[r] = L$. Используя эти соотношения и формулу $m = \Pi \mathcal{P}^\alpha \rho^\beta \eta^\gamma r^\delta$, получим

$$L^0 M_\mu T^{-1} M_i^0 = (L^{-2} M_i T^{-2})^\alpha (L^{-3} M_\mu)^\beta (L^{-1} M_i T^{-1})^\gamma L^\delta$$

и $0 = -2\alpha - 3\beta - \gamma + \delta$, $\beta = 1$, $-1 = -2\alpha - \gamma$, $0 = \alpha + \gamma$. Откуда $\alpha = 1$, $\gamma = -1$, $\delta = 4$, и окончательно приходим к закону Пуазейля

$$m = \Pi \frac{\mathcal{P} r^4}{\eta}. \quad (15)$$

Задачу можно однозначно решить и в системе LMT, если вместо m ввести объемный расход жидкости V . Получится

$$V = \Pi \frac{\mathcal{P} r^4}{\eta}. \quad (16)$$

Если умножить (16) на ρ , то получится формула (15).

Задача Рэля. Почему небо голубое? Тиндаль первым наблюдал, что белый свет при рассеянии становится синеватым и высказал мысль, что голубой цвет неба связан с рассеянием солнечного света на частичках пыли, которые всегда есть в достаточном количестве в атмосфере Земли. Не будь рассеяния света, небо было бы совершенно черным, и на нем ярко выделялись бы звезды и другие светила даже днем. Таким и видят небо космонавты в своих полетах. Но небо голубое... Вслед за Тиндалем Рэлей считал, что рассеяние света атмосферой объясняется наличием в ней взвешенных капелек жидкости, мелких пылинок и твердых частичек, размеры которых малы по сравнению с длиной световой волны. Он показал, что количественный результат можно получить, основываясь на анализе размерностей в сочетании с известными законами оптики. Решение Рэля весьма поучительно и с точки зрения использования анализа размерностей. Приведем его. Рэлей формулирует задачу следующим образом.

Пусть частица с линейным размером l рассеивает солнечный свет с длиной волны λ и амплитудой A . Амплитуда рассеянной волны уменьшается с увеличением расстояния от частицы. Пусть она равна S на расстоянии r от частицы. Требуется определить зависимость S от остальных переменных величин. Вся информация о сформулированной задаче собрана в таблице (используется система единиц LMT).

Таблица

Физические величины и их размерности (к задаче Рэля)

Физическая величина	Обозначение	Формула размерности
Амплитуда волны рассеянного света	S	L
Амплитуда падающей волны	A	L
Линейный размер частицы	l	L
Расстояние от частицы	r	L
Длина волны света	λ	L

По правилам теории размерностей выразим S как произведение остальных переменных, возведенных в ту или иную степень. Тогда получим, что

$$S = \Pi A^\alpha l^\beta r^\gamma \lambda^\delta. \quad (17)$$

Из формулы (17) получается весьма необычное уравнение для размерностей

$$[L] = [L]^\alpha [L]^\beta [L]^\gamma [L]^\delta,$$

из которого следует, что

$$\alpha + \beta + \gamma + \delta = 1. \quad (18)$$

Если теперь не дополнить анализ размерностей физическими представлениями, то задачу не решить. Вспомним, что амплитуда волны рассеянного света пропорциональна амплитуде падающего света, поэтому $\alpha = 1$; амплитуда волны рассеянного света обратно пропорциональна расстоянию от частицы, то есть $\gamma = -1$.

Следовательно, возвращаясь к соотношениям (17) и (18), находим

$$\delta = 1 - \beta, \quad S = \Pi \frac{A}{r} l^\beta \lambda^{1-\beta}$$

или

$$S = \Pi \frac{A\lambda}{r} \left(\frac{l}{\lambda}\right)^\beta. \quad (19)$$

Далее Рэлей отмечает: «Судя по динамике явления, N (отношение амплитуд волн падающего и рассеянного света) изменяется пропорционально V (объем рассеивающей частицы)». Таким образом, следует считать, что $N = S/A \sim l^\beta \sim V \sim l^3$ и $\beta = 3$. Окончательно из формулы (19) имеем

$$S = \frac{\Pi A l^3}{r \lambda^2}.$$

По определению, интенсивность I рассеянного света пропорциональна квадрату его амплитуды S , поэтому

$$I \sim \frac{1}{\lambda^4} \sim \omega^4, \quad (20)$$

где ω – круговая частота световой волны.

Если принять, что $\lambda_{\text{красная}} \approx 1.5\lambda_{\text{синяя}}$, то $I_{\text{синяя}} \approx 5I_{\text{красная}}$, то есть синий цвет рассеивается намного сильнее, чем красный.

Хантли заключает изложение решения Рэля следующими словами: «Читатель может заметить, что в этом примере в большей мере использованы физическая интуиция и знание законов физики, чем анализ размерностей. С этим приходится согласиться, но верно также и то, что использование обоих источников привело простым и изящным образом к интересному результату, который невозможно получить методами элементарного анализа».

Результат Рэлея легко объясняет голубой цвет неба. Действительно, из-за присутствия атмосферы значительная часть солнечного света рассеивается в стороны. Причем, согласно формуле (20), рассеянная часть излучения тем больше, чем короче длина волны. Это значит, что рассеянный свет богат короткими волнами. Отсюда и голубой цвет неба, поскольку максимум интенсивности в рассеянном свете попадает в голубую область спектра.

Все было бы хорошо в этих объяснениях, если бы они были еще и правильными. Ошибка в исходном допущении о загрязнении атмосферы. Ведь по мере поднятия над Землей в воздухе уменьшается содержание посторонних частиц и пыли: воздух чище над океанами, чем в больших городах, он чище в Антарктиде, чем в Москве. Но тогда насыщенность рассеянного света в этих местах должна была бы уменьшаться. Однако научные наблюдения, например, в высокогорных обсерваториях показали, что все обстоит как раз наоборот: чем чище воздух, тем меньше в нем посторонних частиц, тем ярче небесная лазурь, тем богаче излучение неба синими лучами. При этом формула (20) остается справедливой и в этих случаях (закон был количественно подтвержден измерениями интенсивности рассеянного света).

Исходя из подобных фактов, Рэлей позднее понял, что рассеяние вызывается не посторонними частицами, а самими молекулами воздуха. Такое рассеяние света стали называть рэлеевским или молекулярным рассеянием.

Правда, на этом история ответа на вопрос «Почему небо голубое?» не заканчивается, хотя формула (20) сохраняется. Но это – другая история⁹.

На этом я заканчиваю лекции, и в заключение приведу цитату из книги Р.А. Мюллера: «Для понимания физики современной жизни важно изменить те свои представления, которые не соответствуют истине. Часто цитируют высказывание, приписываемое Марку Твену: “Неведение не приносит большинству людей никаких неудобств. Проблема в их обширных знаниях, которые таковыми не являются”».

Думаю, что эти лекции пополнили ваши знания.

Тем, кого заинтересовала теория размерности и подобия, могу порекомендовать уже упомянутую мою книгу «Введение в синергетику» (естественно, что в лекцию вошло многое из нее), книгу Хантли, книгу Дибая и Каплана, а также следующие издания:

1. Брук Ю.М., Стасенко А.Л. Как физики делают оценки – метод размерности и порядки физических величин // О современной физике – учителю. М.: Знание, 1975. С. 54–131.
2. Седов Л.И. Методы подобия и размерности в механике. М.: Наука, 1977.
3. Бриджмен П. Анализ размерностей. Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2001, 148 с.
4. Журнал «Квант» за разные годы.

*Саратовский государственный
университет им. Н.Г. Чернышевского*

Поступила в редакцию 24.12.2011

⁹См., например: Трубецков Д.И. Введение в синергетику. Колебания и волны. Изд. 4-е. М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2012, глава 5.

TWO LECTURES. DIMENSIONAL ANALYSIS OR PARADISE IN PHYSICS

D.I. Trubetskov

In the two lectures read at school for senior pupils «Nonlinear days in Saratov for youth» the basic definitions of the theory of dimension and similarity are stated, and also some special ways for concrete problems decision, in particular, use Pi-theorem and additions of Huntley are presented. The solutions of problems from different areas of physics are shown.

Keywords: Dimension, similarity, models.



Трубецков Дмитрий Иванович – родился в Саратове (1938). Окончил физический факультет Саратовского государственного университета (1960). Защитил диссертации на соискание ученой степени кандидата (1965) и доктора физико-математических наук в СГУ (1978) в области радиофизики. Заведующий кафедрой электроники, колебаний и волн факультета нелинейных процессов СГУ, профессор, член-корреспондент Российской академии наук, заслуженный деятель науки РФ, лауреат премии Президента РФ в области образования. Научный руководитель Лицея прикладных наук и факультета нелинейных процессов СГУ. Область научных интересов: вакуумная электроника и микроэлектроника сверхвысоких частот, теория колебаний и волн, нелинейная динамика, история науки. Автор более двадцати учебных пособий и монографий, а также более двухсот статей в периодической печати.

410012 Саратов, ул. Астраханская, 83
Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского
E-mail: TrubetskovDI@nonlin.sgu.ru



«ЛЕВЫЕ» СРЕДЫ. ЧЕМ ОНИ ИНТЕРЕСНЫ?

Ю.П. Шараевский

В лекции освещены некоторые вопросы, широко обсуждаемые в последние годы и связанные с распространением электромагнитных волн в средах с одновременно отрицательными значениями диэлектрической ϵ и магнитной μ проницаемостями («левые» среды). Описываются необычные свойства таких сред, в частности, обусловленные наличием отрицательного коэффициента преломления. Обсуждаются также возможности создания метаматериалов с отрицательными значениями ϵ и μ и реализация новых физических идей с использованием «левых» сред, в том числе создание «идеальных» суперлинз.

Ключевые слова: Метаматериалы, «левая» среда, отрицательный коэффициент преломления, «идеальная» линза.

Введение: что представляют собой «левые» среды?

Одним из приоритетных направлений в науке сегодняшнего дня является создание искусственных материалов с необычными свойствами, которые не наблюдаются у природных материалов. Они получили название метаматериалы и представляют собой искусственно сконструированные структуры, состоящие из отдельных микро- и наноразмерных слоев с различными свойствами или объемных элементов (частиц) [1]. Например, в оптике они получили название фотонные кристаллы (одномерные, двумерные, трехмерные) [2]. Эти фотонные кристаллы уже сейчас, в отличие от природных кристаллов, демонстрируют удивительные свойства и начинают использоваться в оптических устройствах, в линиях связи и т.д. Активно в последние годы предпринимаются также и попытки сконструировать материалы, которые можно рассматривать как «левые» среды. Так что же представляют из себя «левые» среды?

В изотропной среде, свойства которой не зависят от направления, связь между параметрами электромагнитной волны (фазовой скоростью V_ϕ , длиной волны λ и частотой ω) определяется следующим соотношением:

$$k^2 = \frac{\omega^2}{V_\phi^2} = \frac{\omega^2}{C^2} \cdot \epsilon\mu, \quad (1)$$

где $k = 2\pi/\lambda$ – волновое число, C – скорость света в вакууме, а ϵ и μ – относительные диэлектрическая и магнитная проницаемости среды, соответственно.

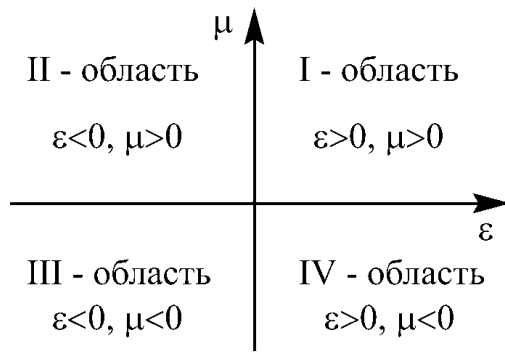


Рис. 1. Диаграмма $\varepsilon - \mu$

положителен. Если не учитывать потери в среде и считать, что ε и μ – действительные величины, то из соотношений (1) и (2) видно, что одновременная смена знаков ε и μ ($\varepsilon, \mu < 0$) не меняет эти соотношения.

Учитывая этот факт, можно высказать следующие предположения: 1) свойства веществ действительно не зависят от одновременной смены знаков ε и μ ; 2) одновременная смена знаков противоречит основным законам природы и таких веществ в природе не должно быть; 3) вещества с $\varepsilon < 0$ и $\mu < 0$ имеют право на существование и они должны обладать какими-то особыми свойствами. Именно эту последнюю гипотезу свыше 40 лет назад в 1967 году высказал советский ученый В.Г. Веселаго [3]. Такие вещества были названы им «левыми» (смысл этого термина мы поясним ниже). В зарубежной литературе они получили название *left-handed medium*. В работе [3] В.Г. Веселаго описал многие необычные свойства «левых» веществ, в частности, показал, что такие вещества должны обладать отрицательным показателем преломления, то есть в (2) для «левых» сред нужно брать знак «–». Кроме того, он высказал предположение, что искать ««левые»» вещества нужно среди анизотропных гиротропных сред¹. Поясним смысл предположение Виктора Георгиевича следующей иллюстрацией. Представим диаграмму, по осям которой будем откладывать действительные значения ε и μ (рис.1).

Если разместить на этой диаграмме все известные нам среды, то получится следующая картина [3]: область I – большинство изотропных диэлектриков, для которых ε и μ положительны; область II – это газообразная плазма и плазма твердых тел, для которых без магнитного поля величина ε определяется как

$$\varepsilon = 1 - \sum \frac{\omega_0^2}{\omega^2}, \quad (3)$$

где $\omega_0 = (4\pi N e^2 / m)^{1/2}$ – плазменная частота (N – концентрация носителей заряда, m – их масса, e – заряд), а суммирование проводится по всем типам носителей заряда. Из (3) видно, что при $\omega < \omega_0$ (на малых частотах) $\varepsilon < 0$. Примером такой среды является ионосфера, от которой отражаются электромагнитные волны низких частот.

¹Анизотропными называются среды, свойства которых зависят от направления (кристаллы, ферромагнитные материалы и др.). Если анизотропия вызвана приложением внешнего воздействия (например, механического, приложением электрического и магнитного полей), то такие среды называются гиротропными [4].

Для вакуума $\varepsilon = \mu = 1$, а для всех остальных веществ, встречающихся в природе, $\varepsilon, \mu > 0$. Оптические свойства вещества характеризуются показателем преломления n , который связан с ε, μ простым соотношением:

$$n = \pm \sqrt{\varepsilon\mu}. \quad (2)$$

Для всех известных материалов перед квадратным корнем должен стоять знак «+» и поэтому показатель преломления

В областях III и IV изотропных веществ с $\mu < 0$ не существует. Однако в анизотропных гиротропных средах, для которых ε и μ не являются скалярными величинами, а зависят от направления и представляются в виде тензоров, компоненты тензоров ε и μ могут иметь любой знак. В частности, для некоторых типов волн, распространяющихся в определенных направлениях, ε и μ могут быть действительными величинами и отрицательными. Хорошо известными примерами таких сред являются: 1) плазма в магнитном поле, для которой при распространении в направлении постоянного магнитного поля плоской поперечной волны, поляризованной по кругу, может быть $\varepsilon < 0$, а $\mu > 0$ (этот случай относится к области II); 2) различные магнетики в постоянном магнитном поле, для которых может быть $\varepsilon > 0$ и $\mu < 0$ (этот случай относится к области IV).

В настоящее время большой интерес вызывают также вещества, у которых тензорный характер носят одновременно ε и μ . К таким веществам относятся, например, чистые ферромагнитные металлы и полупроводники. В них при распространении определенного типа волн вдоль направления приложенного внешнего магнитного поля эффективные электрическая и магнитная проницаемости могут одновременно принимать отрицательные значения. Такие вещества, по гипотезе В.Г. Веселаго, нужно отнести к области III на рис. 1, то есть к «левым» средам.

Но резкий всплеск интереса к «левым» средам возник лишь в самом конце XX века, когда были предприняты первые попытки по созданию искусственных материалов со свойствами, предсказанными В.Г. Веселаго для «левых» сред. В 2000 году англичанин Дэвид Смит вместе с коллегами из Калифорнийского университета (Сан-Диего, США) изготовили метаматериал с отрицательным показателем преломления и опубликовали результаты экспериментального исследования [5].

Почему же так интересны «левые» среды? На этот вопрос мы и постараемся ответить ниже.

1. Основные электродинамические соотношения для «правых» и «левых» сред

Для вывода основных соотношений, описывающих распространения волн в среде, необходимо использовать уравнения Максвелла и соотношения, характеризующие свойства среды $\mathbf{B} = \mu_0 \mu \mathbf{H}$, $\mathbf{D} = \varepsilon_0 \varepsilon \mathbf{E}$, где \mathbf{B} , \mathbf{H} , \mathbf{D} , \mathbf{E} – вектора индукции и напряженностей магнитных и электрического полей, соответственно; ε_0 , μ_0 – электрическая и магнитная постоянные. Представим электрическую и магнитные проницаемости среды в виде $\varepsilon = p |\varepsilon|$, $\mu = p |\mu|$, где коэффициент $p = \pm 1$ [3].

Предположим, что в среде в направлении оси z распространяется плоская монохроматическая волна, у которой все величины изменяются по закону $\exp(i(\omega t - kz))$. Используя уравнения Максвелла и приведенные выше соотношения, для такой волны можно получить следующие выражения, описывающие связь между \mathbf{E} , \mathbf{H} и волновым вектором \mathbf{k}^2 :

$$[\mathbf{k} \mathbf{E}] = \omega \mu_0 p |\mu| \mathbf{H}, \quad [\mathbf{k} \mathbf{H}] = -\omega \varepsilon_0 p |\varepsilon| \mathbf{E}. \quad (4)$$

Расположение векторов \mathbf{k} , \mathbf{E} и \mathbf{H} представлено на рис. 2.

²Вектор $\mathbf{C} = [\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}]$ означает векторное произведение двух векторов \mathbf{A} и \mathbf{B} , причем вектор \mathbf{C} перпендикулярен плоскости, в которой лежат вектора \mathbf{A} и \mathbf{B} , и вместе все три вектора \mathbf{A} , \mathbf{B} и \mathbf{C} образуют правую тройку векторов.

Из соотношений (4) видно, что при $p = +1$ ($\epsilon, \mu > 0$), векторы \mathbf{k} , \mathbf{E} и \mathbf{H} образуют правую тройку векторов: если вращать ручку буравчика от \mathbf{k} к \mathbf{E} , то буравчик будет двигаться в направлении вектора \mathbf{H} (рис. 2, *a*). Если $p = -1$ ($\epsilon, \mu < 0$), то векторы \mathbf{k} , \mathbf{E} и \mathbf{H} образуют левую тройку векторов: буравчик движется в противоположную сторону от направления вектора \mathbf{H} (рис. 2, *б*). Таким образом, если $p = +1$, то среду можно назвать «правой», а при $p = -1$ – «левой» [3].

Поток энергии, переносимый электромагнитной волной, определяется вектором Умова–Пойтинга \mathbf{S} , который записывается как

$$\mathbf{S} = [\mathbf{E} \mathbf{H}] = w \mathbf{V}_{\text{гр}}, \quad (5)$$

где w – плотность энергии электромагнитной волны; $\mathbf{V}_{\text{гр}} = \partial\omega/\partial\mathbf{k}$ – групповая скорость, то есть скорость переноса энергии.

Таким образом, волна, распространяясь в среде, имеет две скорости – фазовую $V_{\text{ф}}$ и групповую $V_{\text{гр}}$. Чтобы понять их смысл, представим себе импульс электромагнитной волны, движущийся в среде (рис. 3). Фазовая скорость – это скорость движения фазы волны, например, максимума или минимума колебательного процесса, а групповая скорость – это скорость, с которой движется огибающая импульса. Они не обязательно должны быть одинаковы и направлены в одну сторону.

Из соотношения (5) видно, что вектор \mathbf{S} , а следовательно, и $\mathbf{V}_{\text{гр}}$, образуют с векторами \mathbf{E} и \mathbf{H} всегда правую тройку векторов. Таким образом, для «правых» сред фазовая и групповая скорости всегда направлены в одну сторону (рис. 3, *a*), а для

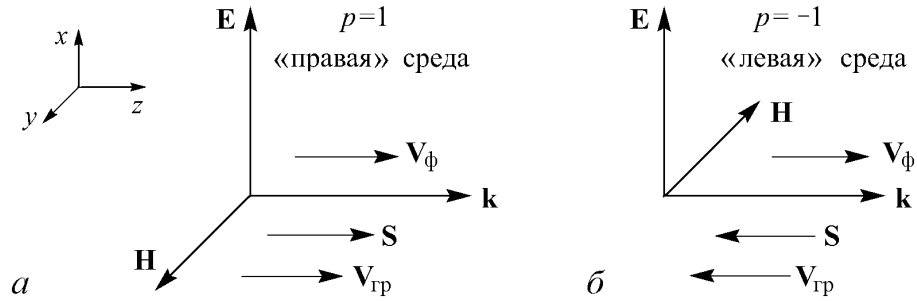


Рис. 2. Направление векторов \mathbf{k} , \mathbf{E} , \mathbf{H} и \mathbf{S} : *a* – для «правой» среды, *б* – для «левой» среды

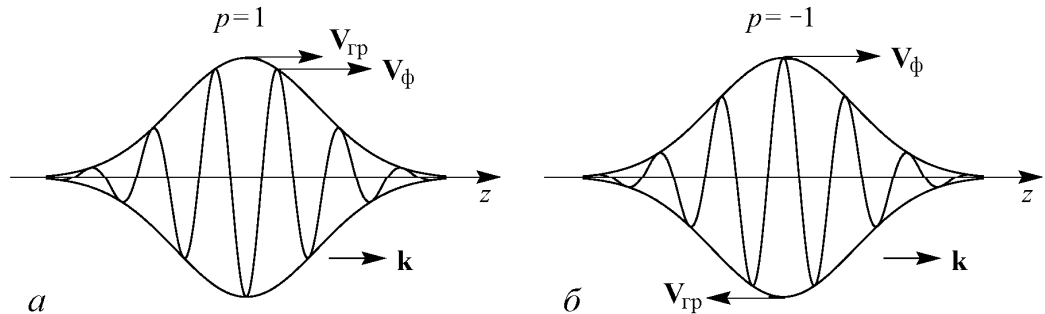


Рис. 3. Импульс электромагнитной волны, распространяющийся в направлении z : *a* – в «правой» среде, *б* – в «левой» среде

«левых» сред вектора $\mathbf{V}_{\text{гр}}$ и $\mathbf{V}_{\text{ф}}$ – в разные стороны (рис. 3, б), то есть это среды с отрицательной групповой скоростью.

Для изотропных сред фазовая и групповая скорости могут быть направлены в разные стороны только при наличии дисперсии в среде, то есть при наличии зависимости величин ε и μ от частоты. Действительно, в дисперсионных средах выражение для плотности электромагнитной энергии должно быть записано в виде [6]

$$w = \frac{1}{2} \left(\varepsilon_0 \frac{\partial(\varepsilon\omega)}{\partial\omega} E^2 + \mu_0 \frac{\partial(\mu\omega)}{\partial\omega} H^2 \right). \quad (6)$$

При $\varepsilon = \text{const}$ и $\mu = \text{const}$ из (6) получаем хорошо известное выражение для плотности энергии в изотропной диэлектрической среде: $w = (1/2) (\varepsilon_0 \varepsilon E^2 + \mu_0 \mu H^2)$, причем $w > 0$ по определению. Поэтому условие $\varepsilon = \text{const}$ и $\mu = \text{const}$ может выполняться только для «правых» сред. Для «левых» сред, если $w > 0$, то необходимо выполнение условий $\partial(\varepsilon\omega)/\partial\omega > 0$ и $\partial(\mu\omega)/\partial\omega > 0$. Эти условия не противоречат отрицательности ε и μ , но требуют соответствующих зависимостей ε и μ от частоты $\varepsilon = \varepsilon(\omega)$ и $\mu = \mu(\omega)$, то есть «левая» среда должна обладать дисперсией.

Рассмотрим теперь некоторые физические следствия, которые вытекают из соотношений (4) и (5) для «левых» сред, когда фазовая скорость противоположна групповой (скорости распространения потока энергии).

Обращенный эффект Доплера. Изменение частоты колебаний вследствие движения источника или приемника называется эффектом Доплера. Пусть приемник излучения В движется со скоростью \mathbf{V} относительно излучателя А, который излучает частоту ω_0 , как показано на рис. 4. В этом случае для частоты, воспринимаемой приемником вследствие доплеровского сдвига, можно записать выражение

$$\omega = \omega_0 \left(1 + p \frac{V}{V_{\text{гр}}} \right). \quad (7)$$

В «левой» среде ($p = -1$) приемник будет догонять точки волны, соответствующие какой-либо определенной фазе (рис. 4, б). Частота, воспринимаемая приемником (см. формулу (3)) будет меньше ω_0 , а не больше, как это должно быть для «правой» среды (рис. 4, а). При этом в формуле (7) скорости \mathbf{V} и $\mathbf{V}_{\text{гр}}$ направлены в разные стороны. Поэтому в «правой» среде удаляющийся от нас объект кажется более красным из-за эффекта Доплера, а в «левой» среде будет казаться более синим.

Световое притяжение. Монохроматическую волну в «левой» среде можно рассматривать как поток фотонов, каждый из которых обладает импульсом $\mathbf{p} = \hbar\mathbf{k}$

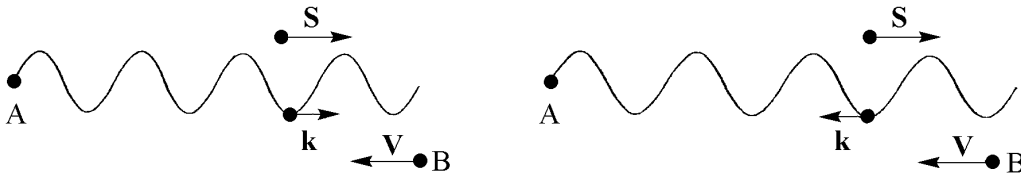


Рис. 4. Эффект Доплера: а – для «правой» среды ($p = +1$); б – для «левой» среды ($p = -1$)

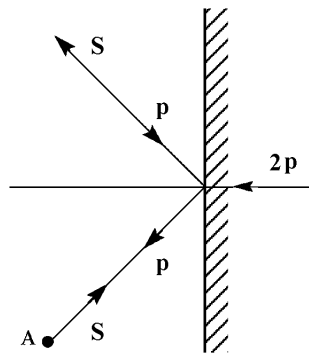


Рис. 5. Отражение луча, распространяющегося в «левой» среде, от идеально отражающей поверхности

(\mathbf{k} – волновой вектор), причем вектор \mathbf{k} направлен к источнику излучения A , а не от него, как это имеет место в «правой» среде (рис. 5). Поэтому луч света, распространяющийся в «левой» среде, при падении на идеально отражающую поверхность будет передавать ей импульс $\mathbf{p} = 2N\hbar\mathbf{k}$ (N – число падающих фотонов), направленный к источнику, как показано на рис. 5. Поэтому световое давление, характерное для обычных сред, в «левой» среде заменяется световым притяжением.

2. Преломление луча на границе с «левой» средой: среда с отрицательным коэффициентом преломления

При переходе света из одной среды в другую на границе раздела двух сред (рис. 6) должны выполняться следующие условия³:

$$E_{t1} = E_{t2}, \quad H_{t1} = H_{t2} \quad (8)$$

– равенство тангенциальных компонент напряженностей электрического и магнитного полей, соответственно;

$$p_1 |\varepsilon_1| E_{n1} = p_2 |\varepsilon_2| E_{n2}, \quad p_1 |\mu_1| H_{n1} = p_2 |\mu_2| H_{n2} \quad (9)$$

– равенство нормальных компонент электрической и магнитной индукции, соответственно.

Из (8) следует, что тангенциальные компоненты полей \mathbf{E} и \mathbf{H} , то есть лежащие в плоскости падения, в падающем и преломленном лучах сохраняют свое направление. Что касается нормальных компонент (см. формулу (9)), то они сохраняют свое направление только тогда, когда среды имеют одинаковый знак ($p_1 = p_2$). Если первая среда «правая» ($p_1 = +1$), а вторая среда «левая» ($p_2 = -1$), то нормальные компоненты полей \mathbf{E} и \mathbf{H} меняют знак.

Это соответствует тому, что при переходе в среду с другим знаком p векторы \mathbf{E} и \mathbf{H} не только изменяются по величине из-за разных значений ε и μ , но еще испытывают зеркальное отражение относительно границы раздела двух сред. Преломленный луч во второй среде («левой») будет идти симметрично относительно оси, перпендикулярной к границе раздела, по сравнению со случаем, когда вторая среда – «правая» (рис. 6). Например, карандаш, погруженный в «левую» среду, будет казаться изогнутым наружу.

³Записанные условия должны выполняться независимо от того «правая» среда или «левая».

Для сред с различными параметрами p обычную формулу Снеллиуса, связывающую углы падения и отражения, следует записать в виде

$$\frac{\sin \varphi}{\sin \psi} = n_{12} = \frac{p_2}{p_1} \left| \sqrt{\frac{\varepsilon_2 \mu_2}{\varepsilon_1 \mu_1}} \right|. \quad (10)$$

Из (10) видно, что коэффициент преломления двух сред n_{12} может быть отрицательным, если p_2 и p_1 имеют разные знаки.

Необходимо отметить, что на необычные законы преломления волн, для которых фазовая и групповая скорости направлены в разные стороны, впервые обратил внимание академик Л.И. Мандельштам в 1940 году [6]. В этой работе он указывает также на то, что пространственно-периодическая среда (имелась в виду кристаллическая решетка) является примером среды, показатель преломления которой в некотором диапазоне частот может быть отрицательным.

Использование «левых» сред позволяет, в принципе, создать весьма необычные преломляющие системы (см., например, [7–10]). Примером такой среды является простая пластина толщиной d из «левого» вещества с $n < 0$, находящаяся в воздухе. На рис. 7 показано, что такая пластина может фокусировать в точку В излучение точечного источника А, находящегося на расстоянии $l < d$ от пластины.

Такая плоская пластина обладает удивительными свойствами – у нее отсутствует фокальная плоскость. Это означает, что линза создает объемное изображение предмета, что делает ее похожей на зеркало. Но, в отличие от зеркала, создаваемое изображение действительное, что открывает новые возможности для цветной фотографии. Плоско-параллельная пластина с $\varepsilon = \mu = -1$ является «идеальной» линзой («суперлинза» [8]) поскольку: а) она имеет нулевой коэффициент отражения; б) создается идеальное изображение, так как набег фазы по любым траекториям между объектом и изображением равен нулю (любой луч половину пути проходит в обычной, а половину – в идеальной «левой» среде (рис. 7); фазовые скорости в этих средах равны и противоположно направлены, следовательно, набег фаз вдоль участков траектории луча, расположенных в разных средах, компенсируют друг друга;

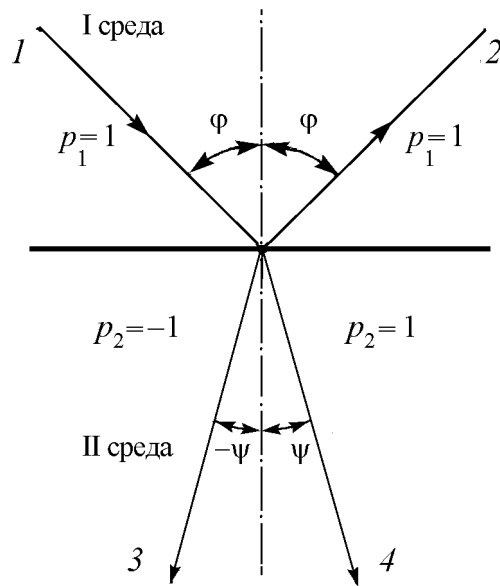


Рис. 6. Прохождение луча через границу двух сред: 1 – падающий луч, 2 – отраженный луч, 3 – преломленный луч при $p_2 = -1$; 4 – преломленный луч при $p_2 = +1$

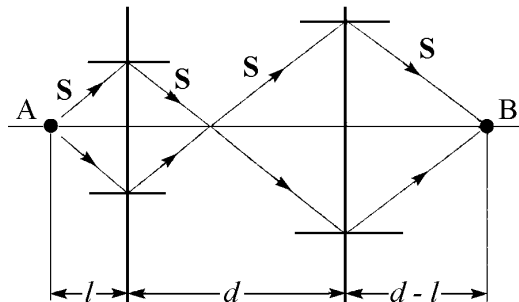


Рис. 7. Прохождение луча света через пластину из левого вещества; А – источник излучения, В – приемник излучения

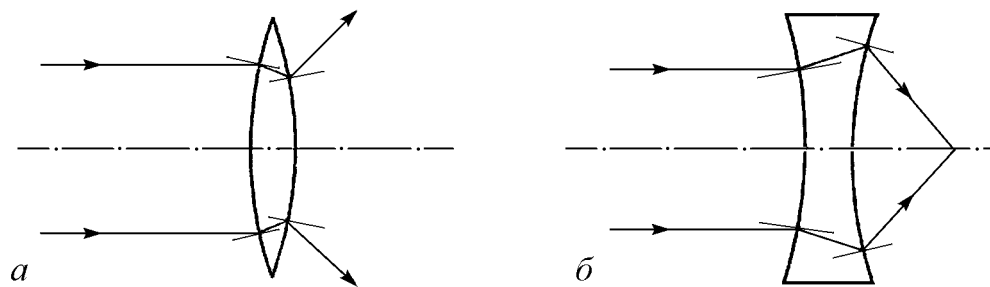


Рис. 8. Ход лучей через линзы из «левого» вещества: *a* – рассеивающая линза; *б* – собирающая линза

в) разрешающая способность такой линзы превышает предел, обусловленный волновой природой света, то есть детали, различимые на изображении, могут быть намного меньше длины волны λ .

Для обычных линз из «левого» вещества ход лучей показан на рис. 8. Как видно из рисунка, выпуклая линза является рассеивающей, а вогнутая – собирающей.

3. Возможность реализации «левых» сред

Несмотря на то, что «левые» вещества должны обладать такими удивительными свойствами, реальная возможность создания таких веществ, как мы уже говорили выше, появилась лишь в последние годы. Начались интенсивные поиски моделирования «левых» сред на основе композитных структур (метаматериалов) путем чередования элементов, обладающих $\varepsilon < 0$ и $\mu > 0$, и элементов, обладающих $\varepsilon > 0$ и $\mu < 0$. Если размеры таких элементов будут намного меньше длины электродинамической волны λ , то для волны такая композитная структура будет подобна сплошной [5,8,10].

Первые композитные структуры, обладающие в диапазоне сверхвысоких частот ($f = 4.5$ ГГц) свойствами «левого» вещества, были изготовлены путем периодического расположения элементов из проводящего материала на диэлектрической подложке [5], как показано на рис. 9. Трехмерная решетка из тонких прямолинейных проводящих стержней обладает отрицательными эффективными значениями ε , а периодическая система из проводящих элементов различных типов (проволочные кольца с разрывом, спирали и т.д.) обладает отрицательными значениями μ . Период решетки, показанной на рис. 9, равен 2.68 мм. В 2004 году Энтони Грбич (Anthony Grbic) и Джордже Элефтериадис (George Eleftheriades) из университета Торонто экспериментально показали, что можно создать метаматериал с $\varepsilon = \mu = -1$ в диапазоне сверхвысоких частот [8]. Их результаты доказали, что в принципе «суперлинзу» можно построить. Но можно ли ее создать в оптическом диапазоне длин волн?

Сложность создания метаматериалов с $\varepsilon, \mu < 0$ в области оптических длин волн заключается в следующем: а) размеры элементов должны быть порядка нанометров; б) металлы на оптических частотах обладают плохой проводимостью.

В настоящее время в этом направлении ведутся интенсивные исследования, направленные на решение указанных проблем (см., например, [8–10]).

Кроме того, как уже отмечалось выше, поиск «левых» сред можно проводить и среди анизотропных гиротропных сред, примером которых являются ферромагнитные материалы и полупроводники. Такие материалы отличаются тем, что у них

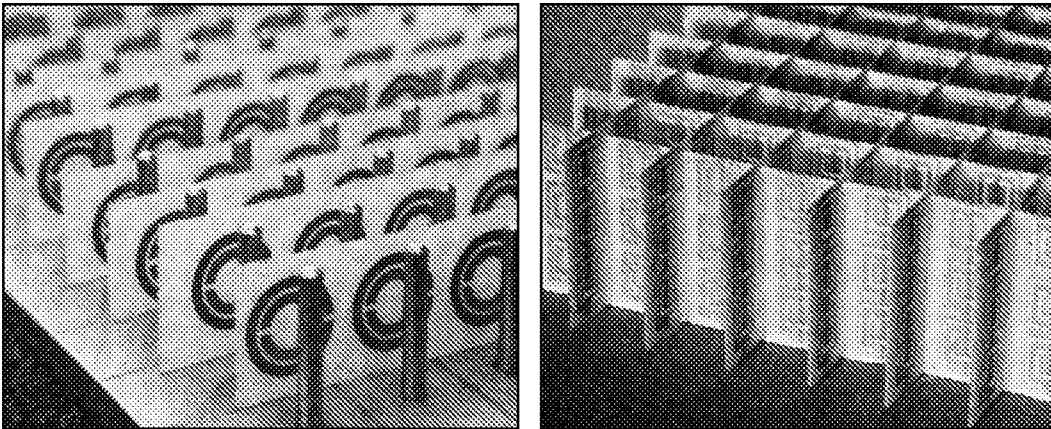


Рис. 9. Композитная структура из проводящих элементов

имеются, во-первых, подвижные носители, образующие электронно-дырочную плазму, и во-вторых, существует система спинов, обеспечивающих большую магнитную восприимчивость. Однако такие материалы обладают еще очень малой подвижностью носителей, что не позволяет наблюдать в них слабозатухающие волны.

Выводы

Возможность создания метаматериалов с отрицательными значениями ϵ и μ заставляет физиков в настоящее время пересмотреть практически многие основные положения электродинамики (законы преломления, дифракционный предел разрешения и другие).

Создание таких материалов открывает широкие возможности для реализации новых физических идей: создание «идеальных суперлинз», новые возможности для цветной фотографии, способ обойти дифракционный предел позволяет оптической литографии проникнуть в диапазон нанометров и на порядки увеличить плотность записи на оптических дисках и т.д.

Хотя большинство экспериментов в настоящее время выполнено в диапазоне сверхвысоких частот, есть надежда, что будут созданы метаматериалы типа «левых» сред и в оптическом диапазоне.

Работа выполнена в рамках гранта РФФИ (№ 11-02-00057) и гранта Правительства РФ для государственной поддержки научных исследований, проводимых под руководством ведущих ученых в российских образовательных учреждениях высшего профессионального образования (№ 11.G34.31.0030).

Библиографический список

1. *Banerjee B.* An Introduction to Metamaterials and Waves in Composites. New York: CRC Press, 2011.
2. *Sakoda K.* Optical Properties of Photonic Crystals. Berlin: Springer-Verlag, 2001.

3. *Веселаго В.Г.* Электродинамика веществ с одновременно отрицательными значениями ε и μ // УФН. 1967. Т. 92, вып. 3. С. 517.
4. Физическая энциклопедия: Т. 1. М.: «Советская энциклопедия», 1988.
5. *Smith D.R., Padilla W.J., Vier D.C., Nemat-Nasser S.C., Schultz S.* Composite medium with simultaneously negative permeability and permittivity // Phys. Rev. Lett. 2000. Vol. 84, № 18. P. 4184.
6. *Мандельштам Л.И.* Лекции по теории колебаний. М.: Наука, 1972.
7. *Блюх К.Ю., Блюх Ю.П.* Что такое «левые» среды и чем они интересны? // УФН. 2004. Т. 174, № 4. С. 439.
8. *Пендри Д., Смит Д.* В поисках суперлинзы // В мире науки. 2006. № 11. С. 14.
9. *Силин Р.А.* Электромагнитные волны в искусственных периодических структурах // УФН. 2006. Т. 175, № 5. С. 562.
10. <http://www.ee.duke.edu/drsmith/>

*Саратовский государственный
университет им. Н.Г. Чернышевского*

Поступила в редакцию 12.01.2012

LEFT-HANDED MEDIA: WHAT IS INTERESTING?

Yu.P. Sharaevskii

Questions associated with the propagation of electromagnetic waves in media with simultaneously negative dielectric ε and magnetic permeability μ (left-handed medium) are considered in this work. These questions are widely discussed in recent years. The specific properties of such media, in particular, caused by the presence of the negative refractive index, are described. The possibilities of creating of metamaterials with negative values of ε and μ and the implementation of new physical ideas using left-handed medium including creation of perfect superlens are discussed.

Keywords: Metamaterials, left-handed medium, negative refractive index, perfect lens.



Шараевский Юрий Павлович – родился в 1942 году в Николаевске-на-Амуре Хабаровского края. Доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой нелинейной физики Саратовского государственного университета. Работал в области электроники и радиофизики сверхвысоких частот, в настоящее время область научных интересов – нелинейная динамика волновых процессов в тонких магнитных пленках и в композитных структурах на их основе. Автор более 130 научных и научно-методических работ, двух коллективных монографий.

410012 Саратов, ул. Астраханская, 83
Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского
E-mail: SharaevskyYP@info.sgu.ru



КОЛЛОИДНОЕ ЗОЛОТО В СВЕТОВОЙ МИКРОСКОПИИ

В.А. Богатырев

Статья подготовлена по материалам лекции, прочитанной для школьников старших классов на школе-конференции «Нелинейные дни в Саратове для молодых – 2011». В лекции рассказывается о результатах экспериментальной работы студентов и аспирантов базовой кафедры биофизики ФНП СГУ и лаборатории нанобиотехнологии ИБФРМ РАН, касающихся применения золотых плазмонно-резонансных частиц в цитологических исследованиях¹. Рассматриваются некоторые оптические свойства золотых наночастиц, обеспечивающие их использование для выявления и лечения злокачественных образований (раковых клеток).

Ключевые слова: Коллоидное золото, наночастицы, плазмонный резонанс, светорассеяние, флуоресценция.

Строго научное название этой темы – использование плазмонно-резонансных частиц² для диагностики и лечения раковых заболеваний [1]. Сегодня мы будем говорить только об оптических свойствах золотых наночастиц, которые позволяют различать их (визуализировать) на уровне световой микроскопии, на фоне отдельных клеток.

Коллоидное золото это взвесь мельчайших частиц – наночастиц золота в жидкости, чаще всего в воде. Растворы твердых частиц в жидкостях называют *золями*. Частицы, размеры которых составляют десятки нанометров, участвуют в броуновском движении и подчиняются законам диффузии, вследствие чего не оседают. Частицы столь малых размеров не могут быть различимы в обычный световой микроскоп из-за так называемого дифракционного предела разрешения. Однако, если объект освещать таким образом, чтобы в объектив не попадали прямые лучи от источника света, то рассеивающие свет частицы будут видны как яркие точки на темном фоне. Такая микроскопия называется *темнопольной*. Ближайшая аналогия темнопольной микроскопии – вид планет в телескопе на ночном небе.

¹Цитология – раздел биологии, изучающий живые клетки, их строение, функционирование, процессы клеточного размножения, старения и смерти.

²Плазмонный резонанс – оптическое свойство, характерное для металлических частиц с размерами меньше примерно 100 нм (1 нм = 10⁻⁹ м).

Основным из оптических свойств плазмонно-резонансных частиц (ПРЧ), применимых к оптической микроскопии, является необычайно высокая светимость, обусловленная резонансным светорассеянием. Для сферической формы интенсивность рассеяния от одной частицы возрастает пропорционально, примерно, шестой степени ее линейного размера. Яркость свечения ПРЧ определяется интенсивностью светорассеяния, а цвет зависит от спектрального положения плазмонного резонанса. В зависимости от размера и формы наночастицы золота могут преимущественно (резонансно) рассеивать свет в диапазоне от зеленой (длина волны света $\lambda \approx 550$ нм) до ближней инфракрасной области ($\lambda \approx 1500$ нм). Интенсивность светорассеяния заметно возрастает и смещается в длинноволновую область при изменении сферической формы частиц на вытянутую. Такие частицы называют наностержнями (НСт). Наиболее интенсивно эти частицы рассеивают в области так называемого продольного или второго резонанса, соответствующего продольной поляризации частицы. Их часто обозначают с индексом длины волны спектрального положения этого максимума [2].

На рис. 1 приведен фрагмент фильма в покадровой развертке, показывающий поглощение золотых наностержней НСт 640 клетками иммунной системы – *макрофагами*³. Отдельные НСт 640 выглядели как темно красные точки на фоне сероголубого светорассеяния от клеточных структур. Светимость отдельных НСт весьма незначительна, и в образцах сразу после внесения золотые метки были практически не видны. Со временем увеличивалось количество клеток, имеющих яркие золотистые метки (светлое пятно в нижней части клетки), представляющие, по всей видимости, агрегаты НСт. Метки не теряли связи с активно перемещающимися клетками, в отличие от различных после 30 мин инкубации отдельных частиц и агрегатов, совершающих броуновские движения в инкубационной среде.

Анализ отснятого материала показал, что надежно визуализируются как отдельные свободные наночастицы, так и связанные с неподвижными и активно перемещающимися клетками. Однако примененная тогда нами техника не могла дать ответа – находятся ли наночастицы внутри клетки или на ее поверхности?

Кроме естественного любопытства, вопрос о локализации золотых наночастиц внутри или снаружи белых клеток крови имеет практическое значение в понимании механизма формирования иммунного ответа, выработке антител.

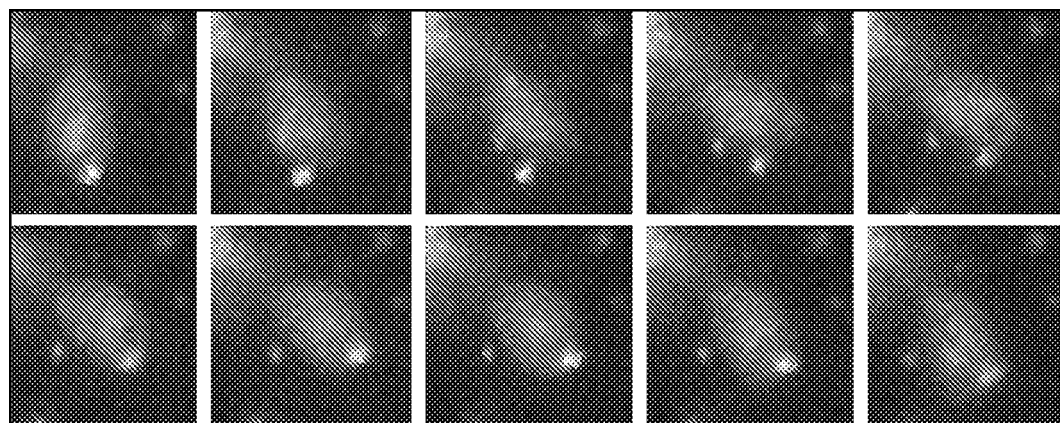


Рис. 1. Серия последовательных темнопольных изображений макрофагов с НСт 640

³Макрофаг – клетка, обладающая способностью к фагоцитозу (поглощению твердых частиц).

В настоящее время факт поглощения ПРЧ макрофагами и некоторыми раковыми клетками надежно установлен во многих научных лабораториях. Актуальными остаются вопросы выяснения путей проникновения наночастиц внутрь клетки.

В этом отношении хочется отметить работу испанских и американских ученых, совсем недавно опубликованную в журнале «Nanomedicine» [3]. В этой работе показано, что поглощение золотых сферических наночастиц с диаметрами менее 100 нм происходит как путем *фагоцитоза*, так и *макропиноцитоза*⁴ при участии клеточных рецепторов-мусорщиков (*scavenger receptors*).

К сожалению, авторы в статье не приводят микроскопические изображения клеток, однако, можно предположить, что анализ этих изображений был очень непростой задачей. Не случайно в разделе «Материалы и методы» авторы отмечают, что анализ проводили два независимых специально обученных эксперта при использовании стандартных программ обработки цифровых изображений типа «ImageJ» [4]. Дело в том, что препараты исследовали в проходящем свете. Такой способ *микроденситометрических*⁵ исследований вполне приемлем лишь при достаточно больших дозах поглощенных наночастиц.

Гораздо более четкие различия можно получить, используя микроскопию темного поля. На рис. 2, *а* приведена полученная нами микрофотография раковых клеток человека линии HeLa с частицами коллоидного золота 40 нм в диаметре (КЗ-40) в проходящем свете без какого-либо способа физического контрастирования. Для сравнения на рис. 2, *б* то же поле зрения снято в режиме темного поля.

Более четкий ответ о внутриклеточной локализации ПРЧ дает конфокальная лазерная сканирующая микроскопия (КЛСМ). Основной принцип КЛСМ заключается в том, что на фотоприемник попадает только свет, проходящий через специальную диафрагму – пинхол, создавая, таким образом изображение плоскости сканирования, так называемый оптический срез, или *z*-стек.

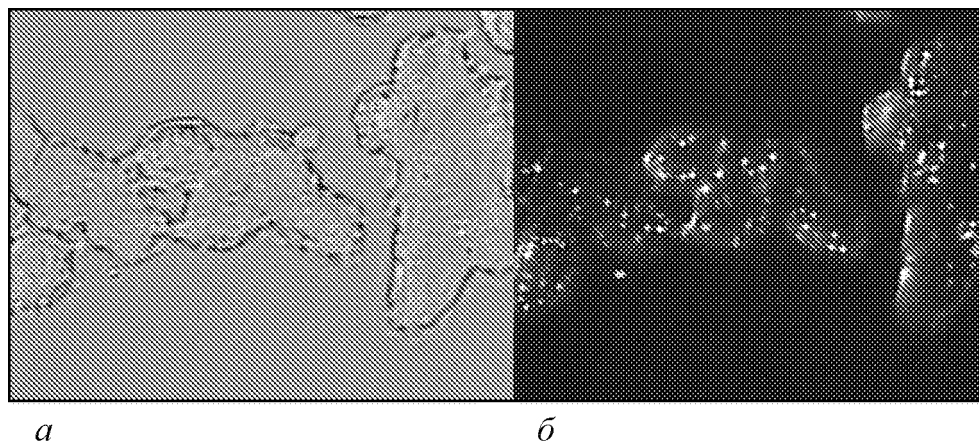


Рис. 2. Клетки HeLa с КЗ-40. Светлое поле проходящий свет (*а*), темное поле боковое освещение (*б*). Микроскоп Leica LMD 7000

⁴Пиноцитоз – активное поглощение клеткой жидкости из окружающей среды с формированием в цитоплазме пузырьков, содержащих жидкость. Макропиноцитоз – разновидность пиноцитоза, когда в состав пузырьков включены твердые частицы.

⁵Денситометрия – измерение плотности, в данном случае – оптической плотности.

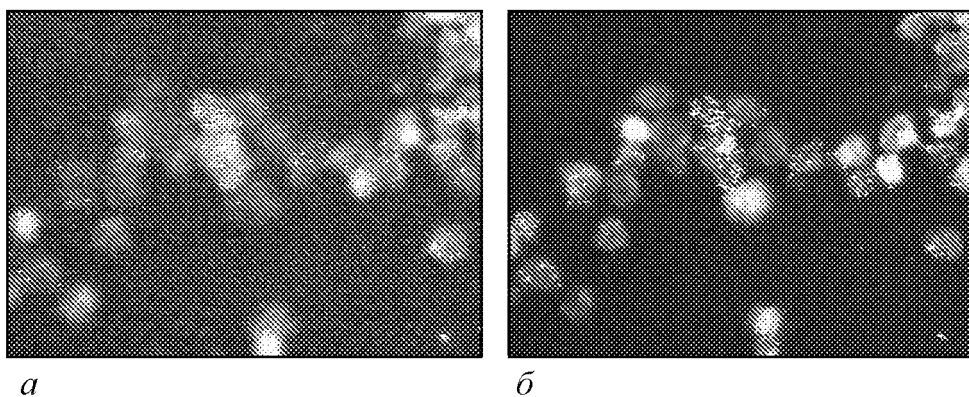


Рис. 3. Флуоресцентная микроскопия клеток HeLa с КЗ-50 при комбинированном освещении, голубой канал (а), красный канал (б). Микроскоп Leica LMD 7000. Разложение по каналам цветов – программа ImageJ

Используя КЛСМ и золотые наночастицы, связанные с белком и *флуоресцентным*⁶ зондом, мы показали, что ПРЧ способны проникать внутрь животной клетки. Дальнейшие наши усилия были направлены на выявление зависимости между накоплением ПРЧ клетками различных линий и их морфофизиологическими характеристиками: жизнеспособностью, дыхательной активностью. Одним из таких тестов является измерение нарушений барьерной функции наружных клеточных мембран. Для этой цели используют красители, которые могут проникнуть в клетку только при нарушении целостности клеточных оболочек. Например, флуоресцентный краситель пропидий йодистый (PI), проникая в клетку через поврежденную мембрану, связывается с ДНК, интенсивность флуоресценции (красное свечение) при этом резко усиливается.

На рис. 3 приведена микрофотография образца клеток HeLa с золотыми наночастицами 50 нм (КЗ-50) дополнительно окрашенных PI.

На экране монитора и в окуляры микроскопа мертвые клетки выглядят как ярко красные в отличие от живых – серо-голубых. Разложение цветового изображения на составляющие дает более четкое представление, что у мертвых клеток ярко окрашиваются ядра (в центре рис. 3, б). Золотые метки также более отчетливо видны в красном канале, поскольку рассеивают свет в основном в желто-красной области спектра. Анализ показывает, что золотые метки накапливаются в основном живыми клетками (область выше центра на рис. 3).

Интересные результаты нами были получены при использовании флуоресцентного красителя акридинового оранжевого в качестве *витального красителя*⁷. Особенностью акредина оранжевого является то, что он взаимодействует не только с нуклеиновыми кислотами, но и, хотя в значительно меньшей степени, с белками цитоплазмы [5]. Поэтому мы решили использовать его как контрастирующий краситель для КЛСМ.

В результате первых же экспериментов выяснилось, что даже сравнительно мелкие золотые наночастицы в препаратах окрашенных акридиновым оранжевым

⁶ Флуоресценция – вынужденное (холодное) свечение некоторых веществ, возбуждаемое светом более короткой длины волны.

⁷ Витальные красители используются для прижизненной окраски клеток.

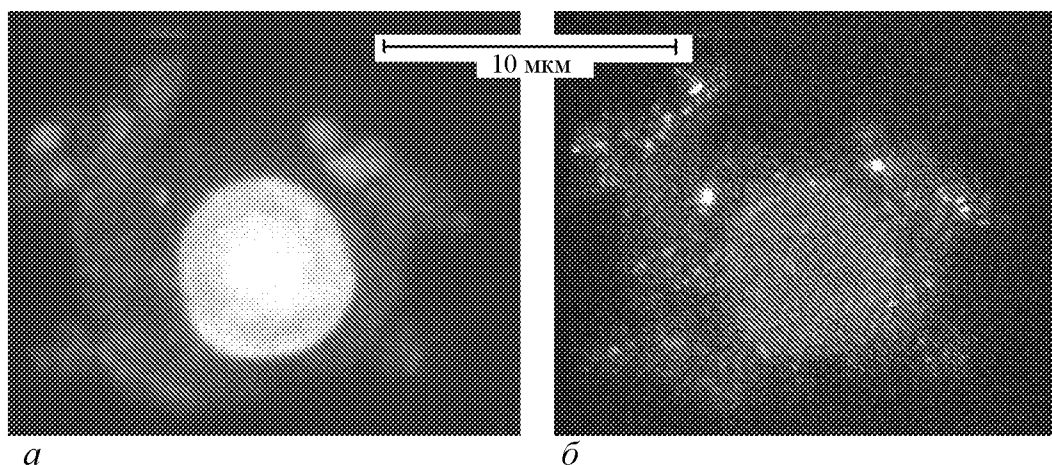


Рис. 4. Флуоресцентная микроскопия клеток HeLa с КЗ-50. Окраска акрединовым оранжевым. Зеленый канал (а); комбинированное освещение, красный канал (б). Микроскоп Leica LMD 7000. Разложение по каналам цветов – программа ImageJ

надежно выявляются в режиме регистрации светорассеяния (рис. 4). Вероятнее всего это связано с электростатическим взаимодействием катионного акрединового оранжевого с отрицательно заряженной поверхностью золотых наночастиц, в результате чего возрастает их светорассеяние. Анализ этих изображений показывает, что золотые наночастицы накапливаются только в цитоплазме, но не в ядре клетки.

Заключение

Таким образом, золотые наночастицы являются удобным инструментом наблюдения за физиологическими клеточными процессами, хорошей альтернативой и дополнением к флуоресцентным зондам. Они надежно выявляются методами световой темнопольной и конфокальной лазерной микроскопии.

Параметры жизнеспособности могут быть оценены по нарушению барьерной функции мембран, изменению дыхательной активности, состоянию ядерного аппарата и др. с использованием стандартных цитохимических наборов.

Для системного использования плазмонно-резонансных частиц в микроскопии раковых клеток необходимо проведение планомерных контрольных и калибровочных экспериментов. Тем не менее, как говорят коллеги медики, *прогноз благоприятный!*

Библиографический список

1. Дыкман Л.А., Богатырев В.А., Щеголев С.Ю., Хлебцов Н.Г. Золотые наночастицы: Синтез, свойства, биомедицинское применение. М: Наука, 2008. 319 с.
2. Алексеева А.В., Богатырев В.А., Хлебцов Б.Н., Мельников А.Г., Дыкман Л.А., Хлебцов Н.Г. Золотые наностержни: Синтез и оптические свойства // Коллоид. журн. 2006. Т. 68. С. 725.
3. Franca A., Aggarwal P., Barsov E.V., Kozlov S.V., Dobrovolskaia M.A., Gonzalez-Fernandez A. Macrophage scavenger receptor: A mediates the uptake of gold col-

- loids by macrophages in vitro // Nanomedicine (Lond). 2011. Vol. 6, № 7. P. 1175.
4. URL: <http://rsbweb.nih.gov/ij/>
5. Сайфитдинова А.Ф. Двумерная флуоресцентная микроскопия для анализа биологических образцов / Учебно-методическое пособие. СПб: СОЛО, 2008. 72 с.

*Институт биохимии и физиологии
растений и микроорганизмов РАН*

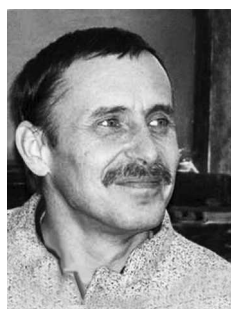
Поступила в редакцию 31.12.2011

COLLOIDAL GOLD IN LIGHT MICROSCOPY

V.A. Bogatyrev

This article was prepared on the basis of a lecture for higher forms students on school-conference «Nonlinear days in Saratov for youth – 2011». The lecture discusses about the results of the experimental work on the use of gold plasmon-resonance particles in cytological studies of undergraduate and graduate students of the basic Chair of biophysics of DNP SSU and Laboratory of nanobiotechnology of IBPPM RAS. Some of the optical properties of gold nanoparticles are discussed to ensure their use for diagnostics and therapy of malignant tumors (cancer cells).

Keywords: Colloidal gold, nanoparticles, plasmon resonance, light scattering, fluorescence.



Богатырев Владимир Александрович – родился в Мончегорске Мурманской области (1958), окончил Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского (1980). После окончания СГУ работает в ИБФРМ РАН ведущим научным сотрудником. Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата биологических наук в РОСНИПЧИ «Микроб» (1995) по специальности микробиология и доктора биологических наук в ИБФРМ РАН (2005) по специальности биохимия. Работает в области биохимии, биофизики, нанобиотехнологии. Автор монографий «Золотые наночастицы: синтез, свойства, биомедицинское применение» (в соавторстве с Дыкманом Л.А., Щеголевым С.Ю. и Хлебцовым Н.Г.), «Gold nanoparticles as an antigen carrier and an adjuvant» (в соавторстве с Дыкманом Л.А., Староверовым С.А. и Щеголевым С.Ю.). Общее число публикаций 111 по направлениям, указанным выше.

410049 Саратов, пр-т Энтузиастов, д. 13

Институт биохимии и физиологии растений и микроорганизмов РАН

E-mail: bog@ibppm.sgu.ru



САМООРГАНИЗАЦИЯ И ОБРАЗОВАНИЕ СТРУКТУР

А.Е. Храмов

Статья представляет собой текст лекции, прочитанной для школьников старших классов на школе-конференции «Нелинейные дни в Саратове для молодых – 2011». В лекции дается краткое популярное введение для школьников в физику открытых систем, обсуждаются основные идеи и результаты теории самоорганизации открытых систем, а также приводятся примеры процессов самоорганизации в системах различной природы: физических, химических, биологических.

Ключевые слова: Самоорганизация, образование структур, физика открытых систем.

В данной лекции мы поговорим с вами о таком новом междисциплинарном направлении в современной нелинейной физике, как самоорганизация открытых систем [1–5]. В настоящее время усилия большого числа исследователей в самых различных областях естествознания направлены на изучение феноменов самоорганизации, которые позволяют объяснить самые различные явления, наблюдающиеся в окружающем нас мире. О чем же будет данная лекция? Если не останавливаться на частностях, то в нашей лекции мы обсудим три основных вопроса:

- самоорганизация (возникновение структур или паттернов, рост «упорядоченности», эволюция) в открытых неравновесных системах,
- физика нелинейных открытых систем,
- самоорганизация и образование структур, методы изучения этих явлений в биологических и социальных системах.

Однако прежде чем переходить непосредственно к анализу феноменов самоорганизации давайте остановимся на вопросе: а что же изучает физика открытых систем? Для теории самоорганизации и физики открытых систем наиболее интересны и важны сложные макроскопические системы, содержащие упорядоченные структуры, в которых порядок рождается из хаоса. Таких систем много, и они разнообразны. Среди наиболее активно исследуемых:

- конвективные и гидродинамические ячейки,
- вихри в атмосфере и океане,
- оптические квантовые генераторы (лазеры),
- химические реакции с временной и пространственной периодичностью,
- живые организмы и экосистемы,
- социальные системы.

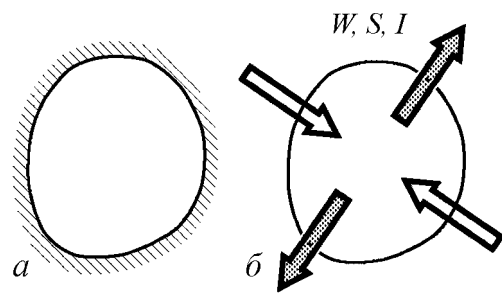


Рис. 1. Различия между «закрытыми» (а) и «открытыми» (б) системами: последние обмениваются с окружающей средой энергией W , энтропией S , переносимыми средой и/или излучением, и информацией I

самоорганизации и физике открытых систем, являются так называемые «ячейки Бенара», «рябь Фарадея», реакция Белоусова–Жаботинского и возникновение генерации в оптическом квантовом генераторе. Рассмотрим некоторые из них более подробно.

Ячейки Бенара – это обычно шестигранные призматические ячейки, возникающие в подогреваемом снизу слое жидкости. Если слой некоторой достаточно вязкой жидкости снизу сильно нагреть, то между нижней и верхней границами жидкости возникает разность, или, как говорят физики, градиент температур (рис. 2, а). При малых градиентах температуры жидкость остается в покое, а тепло будет передаваться за счет теплопроводности. При превышении разности температур некоторого критического значения в жидкости начнется конвекция. Режим неподвижной теплопроводящей жидкости становится неустойчивым, и на смену ему приходит новый устойчивый режим, который теперь становится намного сложнее, с точки зрения динамики системы, – жидкость разбивается на множество конвективных ячеек, которые (если нет внешних возмущений) принимают форму правильных шестиугольников (рис. 2, б). В центре каждой ячейки жидкость движется вверх, а на краях – вниз (рис. 2, в). Важно то, что размер и форма ячеек не зависят от формы и размера сосудов, если он достаточно большой, ячейки искажаются только на границах кюветы.

Рябь Фарадея – характерные структуры, формируемые капиллярными волнами, возбуждаемыми на поверхности жидкости в кювете, совершающей вертикальные колебания с определенной частотой и амплитудой (что соответствует изменениям с определенной частотой параметра системы – ускорения свободного падения g). Схема установки для наблюдения ряби Фарадея показана на рис. 3, а. Впервые наблюдал данное явление гениальный экспериментатор Майкл Фарадей в середине XIX века, и его эксперименты являются одними из первых по наблюдению самоорганизации в динамических системах. Действительно, как писал Фарадей в 1831 году: «Если поместить ртуть на вибрирующую оловянную тарелку, то получается очень красивая картина в отраженных солнечных лучах» (цитируется по [7]). Фарадей проводил эти эксперименты с различными жидкостями (водой, чернилами, молоком, яичным

Все имеющиеся экспериментальные данные и результаты наблюдений показывают, что для существования в системе упорядоченных структур (исключая равновесные структуры типа кристалла) система должна быть открытой, то есть должна обмениваться с окружающей средой энергией W и энтропией S , переносимыми средой и/или излучением, и, что не менее важно, информацией¹ I .

Классическими примерами самоорганизации, которые можно найти практически в любом учебнике по теории са-

¹Понятия «энтропия» и «информация» в естественных науках тесно связаны между собой. Энтропия характеризует меру беспорядка системы, состоящей из многих элементов. В частности, применительно к статистической физике энтропия – мера вероятности осуществления какого-либо макроскопического состояния; в теории информации – мера неопределенности какого-либо опыта (испытания), который может иметь разные исходы. Последнее показывает, что энтропия, фактически, характеризует количество информации. В действительности, определение информации Шеннона в информатике совпадает со статистическим определением энтропии, данным Больцманом.

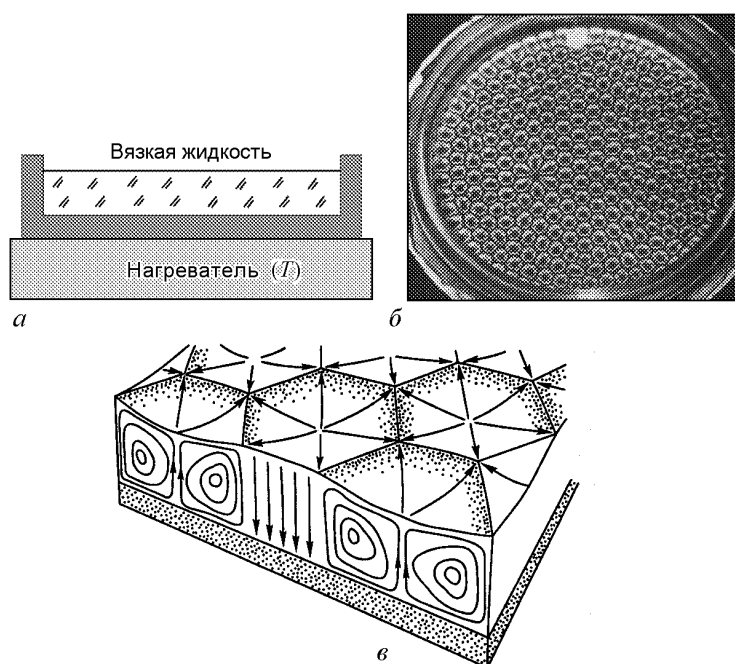


Рис. 2. Иллюстрация к описанию ячеек Бенара: *a* – схема, поясняющая экспериментальную установку, для наблюдения ячеек Бенара – температура нагревателя T является здесь основным управляющим параметром; *б* – фотография сформированных ячеек Бенара в силиконовом масле в кювете, подогреваемой снизу (фотография взята из альбома [6]); *в* – линии тока жидкости в режиме бенаровской конвекции

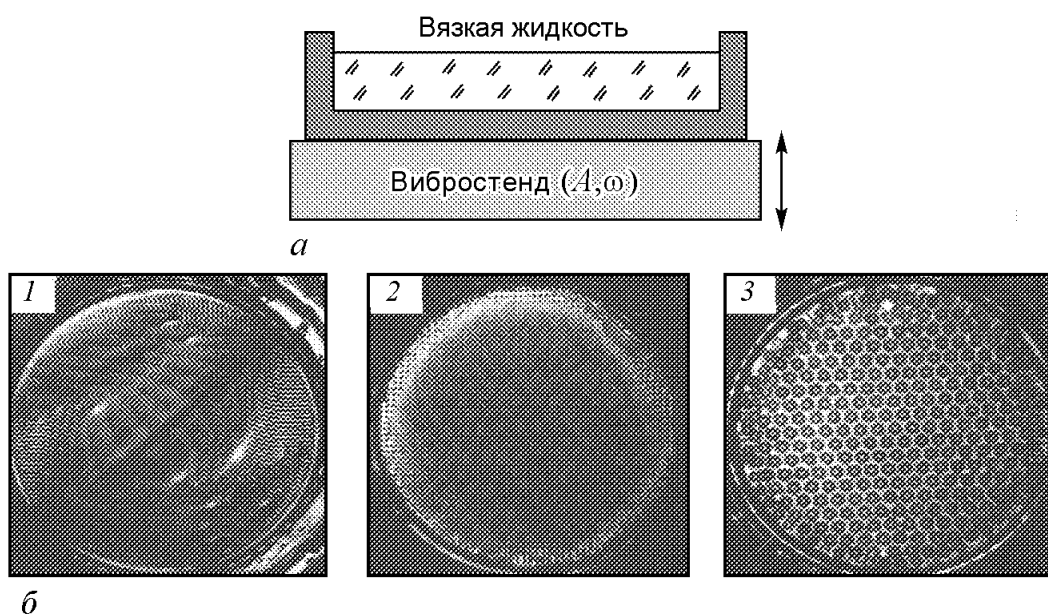


Рис. 3. Иллюстрация к описанию параметрически возбуждаемых капиллярных волн на поверхности жидкости – рябь Фарадея: *a* – схема, поясняющая экспериментальную установку, частота ω и амплитуда A вибрации являются основными управляющими параметрами, от которых зависит форма ячеек; *б* – примеры ячеек Фарадея, образующихся на поверхности жидкости при различных частотах и амплитудах внешнего воздействия: 1 – длинные валики, 2 – квадратная решетка, 3 – шестиугольные («сотовые») структуры (из работы [8])

белком). В своих экспериментах он использовал кюветы различной формы (круглой, квадратной, прямоугольной) и выяснил, что практически всегда рябь образует квадратную решетку, которая слегка деформируется у границы кюветы. Фарадей исследовал и процесс возникновения структуры. Он показал, что пространственная структура капиллярной ряби не зависит ни от граничных и начальных условий, ни от сорта жидкости. Как видно из рис. 3, б, в зависимости от управляющих параметров системы (амплитуды и частоты внешнего воздействия, свойств жидкости) на поверхности жидкости могут образовываться как регулярные структуры квадратной формы, так и беспорядочно меняющиеся во времени и пространстве волны

Реакция Белоусова–Жаботинского – колебательная химическая реакция в гомогенном растворе, открытая в 1950 году Б.П. Белоусовым и позднее подробно исследованная А.М. Жаботинским. При реакции Белоусова–Жаботинского раствор регулярно меняет свою окраску от бесцветной к желтой и далее снова к бесцветной и т.д. Период колебаний в зависимости от температуры и концентрации реагируемых веществ находится в пределах 10–100 с, что делает ее удобной для наблюдения. Следует отметить, что реакция Белоусова–Жаботинского, с точки зрения теории колебаний, в отличие от вышерассмотренных примеров, является автоколебательным

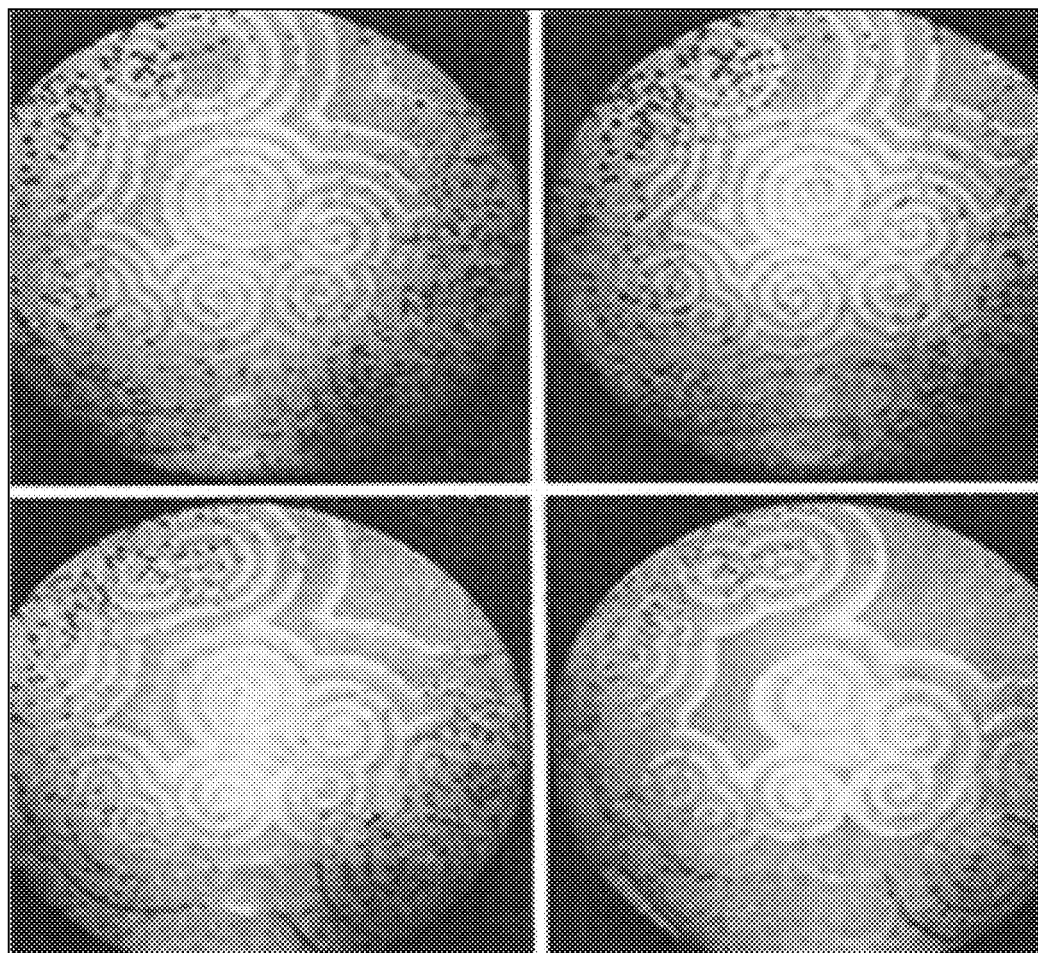


Рис. 4. Некоторые конфигурации, возникающие при реакции Белоусова–Жаботинского в тонком слое в чашке Петри

процессом. Открытие Белоусова ждала непростая судьба: химики и биохимики вначале дружно отвергли возможность такой реакции и только позже данное открытие было признано и стало активно исследоваться, а сама реакция стала одной из эталонных моделей временной диссипативной структуры в физике открытых систем и теории самоорганизации. Когда реакция протекает в тонком неперемешиваемом слое, например в чашке Петри, можно наблюдать различные типы волновой активности, в частности, спиральные волны (рис. 4), то есть в этом случае можно говорить о пространственно-временной диссипативной структуре.

Что объединяет между собой все рассмотренные выше системы? Все они были макроскопическими открытыми системами, состоящими из большого числа элементарных объектов (атомов и молекул), которые можно принять за элементы структуры. Именно такие системы являются основными объектами, которые изучает теория самоорганизации. Элементы структур могут быть как микроскопическими (атомы и молекулы в физических и химических системах), так и малыми, оставаясь все же макроскопическими (макромолекулы в полимерах, клетки в биологических структурах, отдельные особи в биологических популяциях). Также они могут быть и не малыми телами, например, «элементарные» объекты в социологии – человек или даже отдельная группа людей («малая» группа). Благодаря сложности макроскопических открытых систем, в них возможно образование различного рода диссипативных структур (или «паттернов»²), и диссипация здесь играет конструктивную роль. Это кажется, на первый взгляд, удивительным, так как понятие диссипации ассоциируется с затуханием различного рода движений, с рассеянием энергии, с потерей информации. Тем не менее, диссипация необходима для формирования паттернов в открытых системах!

Чтобы подчеркнуть это обстоятельство, Илья Романович Пригожин ввел термин «диссипативные структуры», который объединяет все виды паттернов: временные (автоколебания в генераторе и реакции Белоусова–Жаботинского), пространственные (ячейки Бенара на поверхности жидкости), пространственно-временные структуры (автоволны на поверхности жидкости, паттерны в электронных потоках и т.д.).

Илья Романович Пригожин (1917–2003) – бельгийский физик и химик, лауреат Нобелевской премии по химии за работы по неравновесной термодинамике, диссипативным структурам и сложным системам. Основная масса его работ посвящена неравновесной термодинамике и статистической механике необратимых процессов.

Илья Пригожин родился 25 января 1917 года в Москве. В 1921 году семья эмигрировала из России в Западную Европу. В 1942 году Илья Пригожин окончил университет Брюсселя (Universite Libre de Bruxelles).



²Термин «паттерн» происходит от английского *pattern* – структура и является синонимом русского термина «структура».

С 1961 по 1966 год Пригожин сотрудничал с институтом Ферми в Чикаго. В 1967 году в городе Остин (штат Техас) Пригожин основал Центр по изучению сложных квантовых систем (Center for Complex Quantum Systems). Одновременно, в 1967 году Пригожин возвращается в Бельгию, где он становится директором Центра статистической механики и термодинамики (Center for Statistical Mechanics and Thermodynamics).

Сложность открытых систем предоставляет широкие возможности для существования в них коллективных явлений. Подчеркивая определяющую роль кооперации при образовании диссипативных структур, Герман Хакен ввел понятие «синергетика», который означает *коллективное действие* [9].

По Юрию Львовичу Климонтовичу: «Синергетика – не самостоятельная научная дисциплина, а *новое междисциплинарное научное направление*, цель синергетики – выявление общих идей, методов и общих закономерностей в самых различных областях естествознания, а также социологии и даже лингвистики; более того, в рамках синергетики происходит кооперирование различных специальных дисциплин» [10].

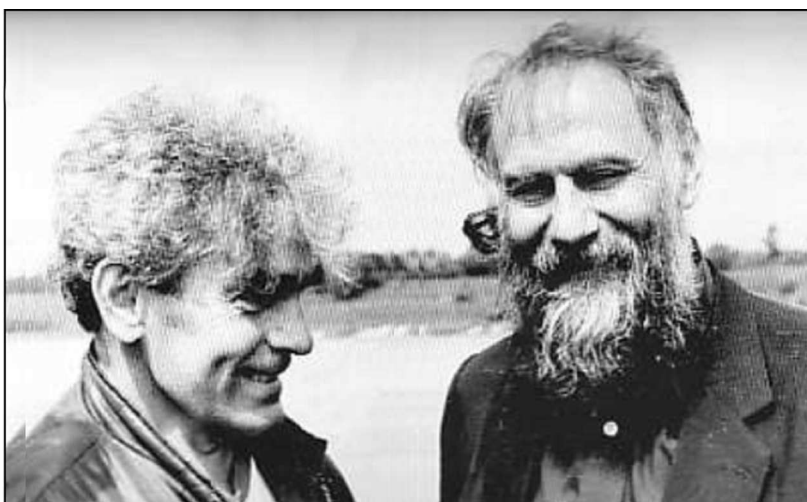
Хакен Герман (род. 12 июля 1927 г.) – немецкий физик-теоретик, основатель синергетики. Изучал физику и математику в университетах Галле (1946–1948) и Эрлангена (1948–1950), получив степени доктора философии и доктора естественных наук. С 1960 г. является профессором теоретической физики университета Штутгарта. До ноября 1997 г. был директором Института теоретической физики и синергетики университета Штутгарта. С декабря 1997 г. является почетным профессором и возглавляет Центр синергетики в этом институте, а также ведет исследования в Центре по изучению сложных систем в университете Флориды (Бока Рэтон, США).

Юрий Львович Климонтович (1924–2002) – крупнейший физик-теоретик в области статистической физики и кинетической теории плазмы. Родился 28 сентября 1924 г. в Москве, профессор Московского государственного университета.

Основные результаты исследований Ю.Л. Климонтовича в области физики открытых систем собраны в трехтомной монографии: Климонтович Ю.Л. Статистическая теория открытых систем. Т. 1. М.: Янус, 1995; Т. 2. М.: Янус, 1999; Т. 3. М.: Янус, 2001.

Итак, мы дали краткое введение в физику открытых систем. Очень важной сферой приложений усилий специалистов в физике открытых систем являются биология, экология, биофизика, где подходы и методы теории самоорганизации могут помочь в объяснении и понимании многих известных феноменов живой природы.

Ю.Л.Климонтович и Г.Хакен во время прогулки на пароходе. Конференция «Синергетика-83» в Пущино.



Давайте рассмотрим два примера образования структур в биологических популяциях, а именно:

- формирование плодового тела у миксамеб *Dictyostelium discoideum*,
- закладка основы термитника.

Пример 1. *Миксоформы* – это микроорганизмы, которые обнаруживают самую простую многоклеточность. Выделяют миксоформы как в царстве прокариот (миксобактерии), так и в царстве грибов (миксомицеты, слизевики, слизевые грибы и акразиевые). Принадлежа к разным царствам, миксоформы ведут себя очень сходно в том смысле, что индивиды часть жизни проводят как одноклеточные, а затем объединяются в колонию (образуют *паттерн*), на которой вырастают плодовые тела – яркие грибочки. Среди различных миксоформ наиболее изученными являются миксамебы *Dictyostelium discoideum*.

На рис. 5 показан жизненный цикл миксамеб, который состоит из следующих стадий: споры, автономные амебы, колонии амеб, плодовое тело, цистофор. Питаются миксамебы только в амебоидной стадии. В это время амебы равномерно рассредоточены по субстрату. При истощении корма амебы образуют колонию. Формирование плодового тела начинается следующим образом. Голодающие амебы начинают продуцировать циклический аденозинмонофосфат (цАМФ).³ Другие

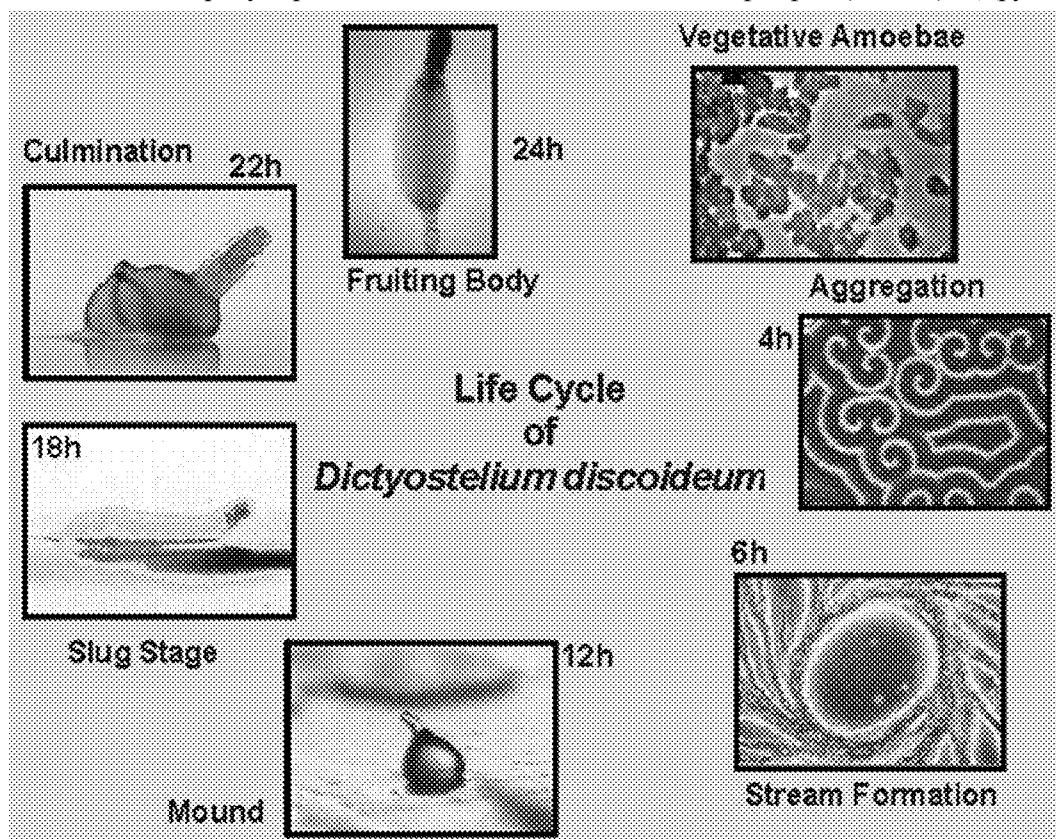


Рис. 5. Жизненный цикл и формирование плодового тела у миксамеб *Dictyostelium discoideum* (рисунок взят с [www-сайта: http://www.zi.biologie.unimuenchen.de/](http://www.zi.biologie.unimuenchen.de/))

³Циклический аденозинмонофосфат (циклический АМФ, цАМФ, сАМР) – производное нуклеотида аденозинтрифосфата, выполняющий в организме роль вторичного посредника, используемого для внутриклеточного распространения сигналов некоторых гормонов (например, адреналина), которые не могут проходить через клеточную мембрану

амебы, получившие сигнал в виде цАМФ, начинают: 1) перемещаться по градиенту ее концентрации, 2) продуцировать цАМФ, 3) продуцировать фосфодиэстеразу (разрушителя цАМФ). В результате случайных флуктуаций концентрации цАМФ возникают первичные сгущения амеб, одно из которых становится *центром* будущей колонии (центром формирующегося паттерна).

Каков механизм формирования паттерна – сгущения миксамеб? В его основе лежит механизм формирования *положительной обратной связи*⁴. Действительно, концентрация цАМФ пропорциональна размеру сгущения (колонии) амеб. Так как амебы движутся по градиенту концентрации цАМФ, одновременно продуцируя цАМФ, то перед нами система с положительной обратной связью: одно из сгущений, образовавшееся из первичной флуктуации концентрации цАМФ, разрастается и образует колония, на которой далее вырастает плодовое тело.

Результаты экспериментального исследования формирования плодового тела, проведенного в Мюнхенском зоологическом институте (Ludwig-Maximilians-Universität München), показывают, что на этапе формирования колонии из индивидуальных амеб в системе наблюдается возникновение спиральных волн (рис. 5). Это обусловлено взаимодействием цАМФ с фосфодиэстеразой, что приводит к незатухающим колебаниям концентраций реагентов вокруг точки неустойчивого равновесия. После того, как все амебы собираются в единую колонию волны движения амеб затухают, и сформировавшаяся колония перемещается как целое в поисках подходящего субстрата и, найдя его, формирует плодовое тело.

Пример 2. Второй пример образования структур из популяционной биологии, который мы рассмотрим здесь, – это основа закладки термитника. Напомним, что *термиты* (лат. *isoptera*) – отряд общественных новокрылых насекомых с неполным превращением. Как и все общественные насекомые, термиты живут в колониях, состоящих из каст. Число зрелых особей в колониях может достигать от нескольких сотен до нескольких миллионов. Типичная колония состоит из личинок (нимф), рабочих, солдат и репродуктивных особей. Термиты-рабочие занимаются поиском, сбором и хранением пищи, заботой о потомстве, строительством и ремонтом колонии. Рабочие – единственная каста, способная переваривать целлюлозу, благодаря особым кишечным микроорганизмам – симбионтам. Именно рабочие занимаются кормлением всех остальных термитов. Своими впечатляющими размерами колонии также обязаны термитам-рабочим.

Колонии термитов живут в термитниках, стены которых строятся из комбинации экскрементов, измельченной древесины и слюны. Некоторые виды создают настолько прочные сооружения, что при попытке их разрушить ломаются даже автомашины. Размеры колоний некоторых африканских термитников таковы, что в их тени прячутся слоны. В гнезде предусмотрены места для разведения грибковых садов, содержания яиц и молодых личинок, репродуктивных особей, а также обширная сеть вентиляционных туннелей, которые позволяют поддерживать внутри термитника практически постоянный микроклимат. Кроме того, иногда имеются также помещения для термитофилов – животных, сосуществующих с термитами в симбиозе.

Как происходит закладка нового термитника? На начальной стадии закладки основания гнезда термиты на выбранное место приносят и беспорядочно разбрасывают комочки земли. Каждый комочек пропитан гормоном, привлекающим других

⁴Положительной обратной связью называют такую обратную связь, которая способствует росту возмущений в системе.

термитов. Случайное скопление комочков, возникающее в какой-либо точке, создает флуктуацию концентрации гормона. Возросшая плотность термитов в окрестности этой точки приводит к нарастанию флуктуации (рис. 6, *а*). Процесс движения и концентрации термитов продолжается, заканчиваясь возникновением «опоры» гнезда (термитника). Число таких опор может быть несколько, расстояние между ними определяется радиусом распространения гормона. Мы опять имеем дело с вышеописанным механизмом *положительной обратной связи*, который приводит к росту начального возмущения.

Специальные эксперименты показали, что нарушение гормонального механизма положительной обратной связи приводит к тому, что процесс возведения термитника становится «хаотичным» (рис. 6, *б*). Действительно, распыливание вещества, подавляющего восприятие гормона у термитов, приводит к тому, что термиты начинают разбрасывать комочки случайным образом по территории будущего гнезда, так что в итоге все пространство оказывается однородным образом заполнено гормоном и опоры для будущего термитника не возникает.

Таким образом, возникновение термитников снова определяется самоорганизацией в биологической популяции, заключающейся в формировании и «усилении» (за счет положительной обратной связи) пространственной неоднородности популяции на небольшом ареале.

Перейдем теперь к еще очень важному направлению исследований на стыке физики открытых систем и биологии – науке, изучающей мозг. Следует отметить, что изначально термин *паттерн* пришел в нелинейную динамику и физику открытых нелинейных систем от исследователей, работающих в этой научной области. С. Спрингер и Г. Дейч в книге «Левый мозг, правый мозг» (М.: Мир, 1983) пишут: «Саган характеризует правое полушарие как опознающее устройство, предназна-

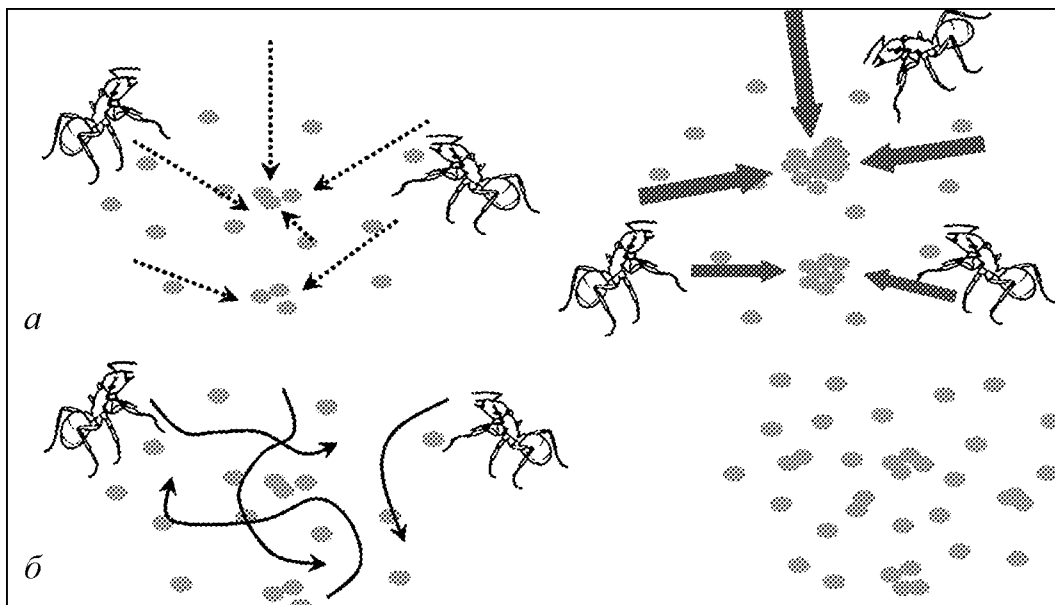


Рис. 6. *а* – механизм закладки нового термитника, основанный на механизме положительной обратной связи. Стрелками показаны направления движения термитов по градиенту концентрации гормона. *б* – результаты разрушения «гормонального» механизма, реализующего положительную обратную связь: движения термитов беспорядочны, областей повышенной концентрации гормона не возникает

ное для поиска паттернов (иногда реальных, иногда воображаемых) в поведении людей, а также в природных событиях. Эмоциональный тонус правого полушария таков, что он подозревает существование тайны не только там, где она есть, но и там, где ее нет. Для критического анализа создаваемых им паттернов и для проверки соответствия их реальности ему необходимо левое полушарие... Поиск паттернов без критического анализа и жесткий скептицизм без поиска паттернов – это антиподы совершенной науки. Эффективный поиск знания нуждается в обеих функциях». С их мнением перекликается более ранняя работа Грея Уолтера. В своей книге «Живой мозг» (М.: Мир, 1966) он отмечает: «Понятие паттерн подразумевает любую последовательность явлений во времени или любое расположение предметов в пространстве, которое можно отличить от другой последовательности или другого расположения или сравнить с ними... Вообще говоря, можно считать, что науки возникают в результате поиска паттернов, а искусства – в результате создания паттерна, хотя между поисками и созданием паттерна существует более тесная связь, чем обычно полагают».

С точки зрения нейробиологии, человеческий мозг – сложнейший из известных материальных объектов. Он состоит из приблизительно $2 \cdot 10^{10}$ нейронов, каждый из которых образует в среднем 10^5 связей с другими нервными клетками, большинство из которых также расположено в коре головного мозга. Одновременно в головном мозге работает порядка 10^7 – 10^8 нейронов, которые динамически образуют распределенные нейронно-клеточные популяции. Очень точно написал о возможностях моделирования и анализа поведения головного мозга Юлий Александрович Данилов [11]:

«Головной мозг человека по праву можно считать сложной системой, какого бы определения сложности мы ни придерживались. Ясно, что детальное описание активности каждого из нейронов – занятие бесперспективное и довольно бессмысленное. Даже если бы такое описание удалось реализовать, то обилие информации препятствовало бы сколько-нибудь рациональной ее обработке и использованию...»

Не менее сложными объектами для исследования служат электрические и магнитные сигналы, свидетельствующие об активности головного мозга.

И в случае анализа структуры головного мозга, и в случае анализа электро- и магнито-энцефалограмм необходимо прибегнуть к так называемому «сжатию информации»...»

Ситуация оказывается очень схожей с описанием процессов в газах. Серьезный прогресс в построении молекулярно-кинетической теории произошел тогда, когда Людвиг Больцман отказался от попытки точного описания (с точки зрения механики) движения частиц в газе. Понятно, что это невозможно: ведь не существует даже точного решения для задачи трех тел. Больцман пошел по пути радикального изменения модели рассматриваемой системы, представив газ как некоторую сплошную среду в 6-мерном фазовом пространстве координат и скоростей. Тем самым он отказался от задания координат и скоростей каждой частицы газа, а задал состояние системы интегральным образом – функцией распределения частиц в 6-мерном фазовом пространстве. Можно сказать, что при таком описании информации произошла операция «сжатия информации»: специалисты в области статистической физики отказались от описания динамики индивидуальных элементов, образующих большой «ансамбль», а описывают усредненные характеристики этого ансамбля.

Юлий Александрович Данилов (1936–2003) – Юлий Александрович Данилов родился в Москве в 1936 году. Окончил механико-математический факультет МГУ им. М.В. Ломоносова в 1963 году. После окончания университета был принят на работу в Институт атомной энергии им. И.В. Курчатова (в настоящее время Российский научный центр «Курчатовский институт»), где проработал до последнего дня. Ю. А. Данилов создал и прочитал ряд оригинальных курсов по современным методам математической физики, статистической обработке экспериментальных данных и истории естествознания. Сфера его научных интересов простиралась от симметрии в физике и нелинейной динамики



до философии и истории науки. Для Ю. А. Данилова практически не существовало лингвистических барьеров – он владел почти всеми европейскими языками, а также латинским и древнегреческим. Им опубликовано и переведено более 200 научных и научно-популярных статей, в его переводе вышло более 100 книг. Много лет участвовал в переводе и издании трудов А. Эйнштейна, Г. Кирхгофа, А. Пуанкаре, В. Паули, В. Гейзенберга, У. Р. Гамильтона, Д. Гильберта, вышедших в свет в серии «Классики науки». Он был постоянным автором журналов «Знание–сила», «Природа», «Химия и жизнь», «Квант», «Семья и школа», членом редколлегии журнала «Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика», неизменным лектором на ежегодных школах «Нелинейные дни в Саратове для молодых» и нижегородских школах «Нелинейные волны», создал серию научно-популярной литературы в издательстве «Мир».

Следует признать, что подобный подход может быть весьма эффективным и при анализе и понимании функционирования головного мозга.

В настоящее время выделилось новое междисциплинарное научное направление, получившее название *нейронаука* (*neuroscience*), которое направлено на изучение фундаментальных принципов работы мозга в целом, ансамблей нейронов и т.д. для объяснения феноменов мышления, памяти, интеллекта и сознания. Ключевая проблема нейронауки тесно связана с проблемами физики открытых систем и заключается в выявлении принципов самоорганизации и образования паттернов в больших функциональных системах, состоящих из колоссального числа элементов (нейронов) и упорядочивание их астрономических степеней свободы. Успешные исследования в области нейронауки возможны только на стыке наук о мозге с математикой, физикой, химией, компьютерными науками, а также лингвистикой, философией и т.д.

Одним из интересных пионерских проектов в нейронауке стал проект «Blue Brain» – первая попытка прямого моделирования активности головного мозга из «первых принципов», то есть создания модели некоторой части головного мозга, содержащей число модельных нейронов соизмеримое с реальным числом нейро-

нов (сайт проекта: <http://bluebrain.epfl.ch/>). Реализация этого проекта происходит на базе Швейцарского политехнического университета (в Лозанне), в рамках которого используется суперкомпьютер Blue Gene, разработанный фирмой IBM для моделирования ансамбля нейронов колонки неокортекса.

Неокортекс – это новая область коры головного мозга, которая у низших млекопитающих только намечена, а у человека составляет основную часть коры. Новая кора располагается в верхнем слое полушарий мозга и отвечает за высшие нервные функции (сенсорное восприятие, выполнение моторных команд, пространственную ориентацию, осознанное мышление и у людей речь). Неокортекс у человека содержит порядка 18–25 миллионов нейронов (у мужчин – 20–25 миллионов, у женщин – 18–20 миллионов). Структура неокортекса относительно однородна и насчитывает шесть горизонтальных слоев нейронов, отличающихся по типу и характеру связей. Вертикально нейроны объединены в так называемые нейронные колонки, которые являются структурными единицами неокортекса. Одна колонка неокортекса содержит порядка 60–100 тыс. нейронов, дендриты которых проходят через всю высоту колонки. Для моделирования процессов в головном мозге в рамках проекта Blue Brain в качестве базовой системы была выбрана колонка неокортекса крысы, которая содержит намного меньшее количество нейронов – порядка 10 тысяч.

В конце 2006 года впервые удалось смоделировать одну колонку неокортекса молодой крысы. При этом использовался один компьютер Blue Gene и было задействовано 8192 процессоров для моделирования 10000 нейронов. То есть практически один процессор моделировал один нейрон. Для соединения нейронов было смоделировано порядка $3 \cdot 10^7$ синапсов. Залогом успеха данного проекта стал суперкомпьютер Blue Gene, который разрабатывается фирмой IBM с 1999 года, с целью создания суперкомпьютера с производительностью в несколько пфлопс/с для решения задач биомолекулярного и нейро-моделирования⁵. В начале 2008 году запущена в эксплуатацию система Blue Gene с пиковой производительностью 3 пфлопс/с.

Реализация данного проекта привела к разработке новых интересных решений для компьютерного моделирования нейросетевых моделей. В частности, были разработаны: *новая модель сеточной структуры*, которая автоматически, по запросу, генерирует нейронную сеть по предоставленным биологическим данным; *новый процесс моделирования и саморегуляции*, который перед каждым расчетом автоматически проводит систематическую проверку и калибровку модели для более точного соответствия биологической природе.

Все это позволило создать первую модель колонки неокортекса клеточного уровня, построенную исключительно по биологическим данным. Возникли и определенные проблемы, связанные с тем, о чем писал Ю.А. Данилов: с невозможностью корректно проанализировать и представить огромный объем информации, содержащий сведения о динамике каждого нейрона. Так, «компьютерный визуальный образ»

⁵FLOPS (акроним от англ. Floating point Operations Per Second, флопс) – величина, используемая для измерения производительности компьютеров, показывающая, сколько операций с плавающей запятой в секунду выполняет данная вычислительная система. Для сравнения вычислительной мощности суперкомпьютера Blue Gene с более привычными вычислительными системами можно привести следующие данные: персональный компьютер Intel Core 2 Duo E8400 600 МГц – 18.6 Гфлопс/с; игровая приставка Sony PlayStation 2 – 6.2 Гфлопс/с; калькулятор примерно 0.1 флопс/с; человек примерно 0.001–0.01 флопс/с.

колонки неокортекса (10000 нейронов) имеет объем порядка 100 Гб. Модель колонки с отображением электрической активности имеет объем порядка 150 Гб. Был разработан специальный интерфейс 3D визуализации, который позволял представить информацию электрической активности нейронов и выявлять наиболее интересные зоны. На рис. 7 показана характерная картина, получающаяся в результате расчета динамики колонки неокортекса, где интенсивностью серого цвета показана степень возбуждения того или иного нейрона. Важно, что в исследованиях существует возможность сравнивать результаты, полученные в результате компьютерного моделирования, с опытными нейрофизиологическими данными, которые получаются путем измерения микроэлектрэнцефалограммы колонки у лабораторного животного.

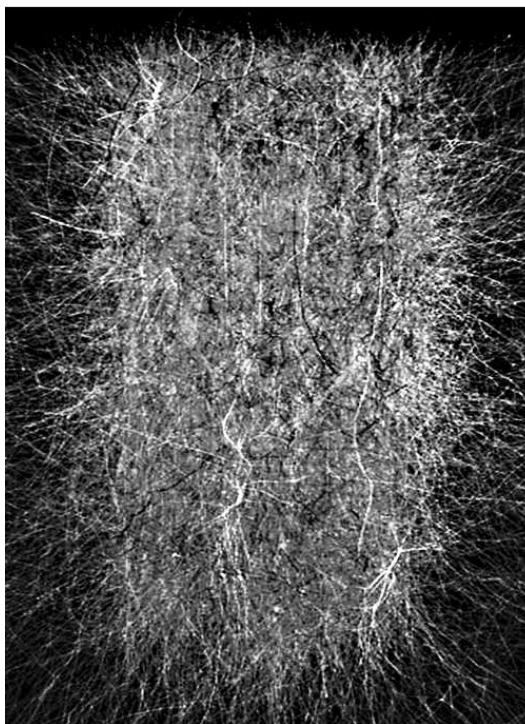


Рис. 7. Результаты 3D визуализации электрической активности колонки неокортекса. Интенсивностью серого цвета показана степень возбуждения того или иного нейрона (рисунок взят с сайта <http://bluebrain.epfl.ch/>)
©BBP/EPFL

Как отмечает в своем пресс-релизе руководитель проекта профессор Генри Макрам (Henry Markram), методы моделирования и анализа нейронных систем, разработанные и апробированные в ходе выполнения проекта, найдут широкое применение в дальнейших фундаментальных исследованиях в нейронауке и прикладных исследованиях в медицине. Фактически, этот проект – первая успешная попытка полномасштабного моделирования нейрофизиологической системы на базе модели клеточного уровня, построенная исключительно по биологическим данным. Эти исследования помогут разобраться с многими аспектами динамики нейронной сети головного мозга, а также с лечением тех или иных нервных заболеваний. Но наряду с таким полномасштабным моделированием функций и поведения каких-то элементов нейронных ансамблей головного мозга, необходимо и построение более простых моделей тех или иных аспектов функционирования центральной нервной системы с привлечением методов и подходов физики открытых систем и теории самоорганизации. Здесь стоит согласиться с Ю.А. Даниловым, который полагал, что без операции «сжатия информации», без построения простых математических моделей, описывающих динамику и функционирование головного мозга, без синергетического подхода, под которым он понимал теорию явлений самоорганизации, невозможно понять, как же функционирует головной мозг высших млекопитающих и человека. В настоящее время все больше исследователи переключают свое внимание на подобные задачи и все шире привлекают методы и подходы физики открытых систем к изучению функционирования нейронных ансамблей (см., например, замечательные обзоры и книги [12–16]).

Следует отметить, что подходы, развитые в современной нелинейной физике, давно используют специалисты, занимающиеся изучением электрической и магнитной активности головного мозга. Наиболее простой, наглядный, широко используемый и исторически возникший первым способ наблюдения активности головного мозга является регистрация электроэнцефалограмм (ЭЭГ) – электрического потенциала, зарегистрированного непосредственно на поверхности головного мозга или сквозь покрывающие его ткани. При проведении экспериментов на черепе испытуемого крепятся электроды, регистрирующие колебания напряжения. Показания каждого электрода представляются в виде некоторой функции, выражающей зависимость изменения напряжения от времени (то есть упомянутые выше ЭЭГ). В экспериментах на животных существует возможность имплантировать электроды непосредственно в мозг, регистрируя сигналы из глубоких областей мозга, скрытых корой головного мозга, что невозможно в опытах на человеке, исходя из этических норм. Особую роль электроэнцефалография играет при диагностике и лечении различных нервных заболеваний, когда на ЭЭГ появляются характерные паттерны, позволяющие идентифицировать тот или иной тип патологии мозга [17]. Данные типичные паттерны являются отражениями той или иной степени синхронизации больших ансамблей нейронов коры головного мозга. Далее в рамках исследований подобных типов патологического поведения специалисты-нейрофизиологи изучают только зафиксированные на ЭЭГ паттерны. Это означает, что из рассмотрения исключается поведение всего нейронного ансамбля коры головного мозга, а анализируется только динамика кластера, образованного нейронами, демонстрирующими синхронное поведение. Следует отметить, что подобные нейроны не обязательно располагаются локально в одном месте коры мозга, а могут находиться в самых различных частях мозга, учитывая разнообразие связей (в том числе дальних) между нейронами. Интересно, что подобные синхронные паттерны могут быть связаны не только с заболеваниями головного мозга, но и отражать различные когнитивные процессы [18]. Рассмотрение подобных синхронных паттернов значительно упрощает описание поведения нейронной системы [19–21], выступая в качестве некоторого метода «сжатия информации», который обсуждался выше.

Типичным примером паттернов на ЭЭГ, отражающих синхронную динамику нейронного ансамбля головного мозга, являются эпизоды параксимальной активности у больных эпилепсией. На рис. 8 показаны фрагменты ЭЭГ с различными типами эпилепсии. Осцилляторные паттерны, соответствующие эпилептическим событиям, на ЭЭГ характеризуются большей амплитудой и регулярностью колебаний по сравнению с фоновой десинхронизированной ЭЭГ. В настоящее время клинические исследования осцилляторных паттернов на ЭЭГ применяют для прямой диагностики всех без исключения эпилептических расстройств, а также для дифференциальной диагностики, например, в случае психогенных судорог неэпилептической природы, обморочных состояний, расстройств движений, мигрени. Изменение картины появления тех или иных ритмов на ЭЭГ служит одним из критериев для оценки эффективности медикаментозного лечения. В некоторых случаях данные о регистрируемых на ЭЭГ паттернах несут прогностическую информацию, и с их помощью можно предсказать ход развития болезни в кратко- и долгосрочной перспективе.

В заключение лекции скажем несколько слов о возникновении паттернов в социальных системах. Это отдельная огромная тема, требующая специального рассмотрения. Поэтому здесь ограничимся единственным примером, который относится к изучению динамики формирования мнений в малых группах и хорошо известен в психологии. Речь идет о знаменитых опытах С. Эша [22]. Суть опыта заключается в том, что участники эксперимента, составляющие малую группу, должны были выбирать на карточке Б линию, которая совпадает по длине с линией-образцом на карточке А (рис. 9, а). Во время исследований испытуемый сталкивался с тем, что все остальные участники единодушно оценивали линию 1 на карточке Б как равную линии-образцу. В результате большинство (порядка 90% испытуемых) демонстрировали конформизм и соглашались с заведомо неправильным мнением: в социальной группе формировался паттерн поведения. На рис. 9, б показаны сцены, снятые во время испытаний С. Эша. Участник под номером 6 – единственный подлинный испытуемый. На его лице мы видим запоздалое изумление, вызванное тем, что все остальные участники эксперимента дали очевидно неверные ответы относительно длины линии.

Количество примеров формирования паттернов в поведенческих реакциях можно продолжать. В частности, этологи, исследователи, которые изучают поведение животных в естественном окружении, обратили внимание на то, что в поведении представителей многих видов животных часто имеют место жесткие автоматические модели [23]. Называемые жестко фиксированными моделями (паттернами) поведения, эти автоматические последовательности действий заслуживают особого внимания, поскольку они имеют сходство с определенным автоматическим реагированием людей. Как у людей, так и у животных данные модели, как правило, приводятся в действие каким-то одним элементом информации. Это единственная специфическая черта (паттерн поведения) играет роль «спускового крючка». Она часто оказывается очень ценной, поскольку позволяет индивиду принимать правильное решение без тщательного и полного анализа всех остальных элементов информации в конкретной ситуации. Преимущество такого стереотипного реагирования (наличия паттер-

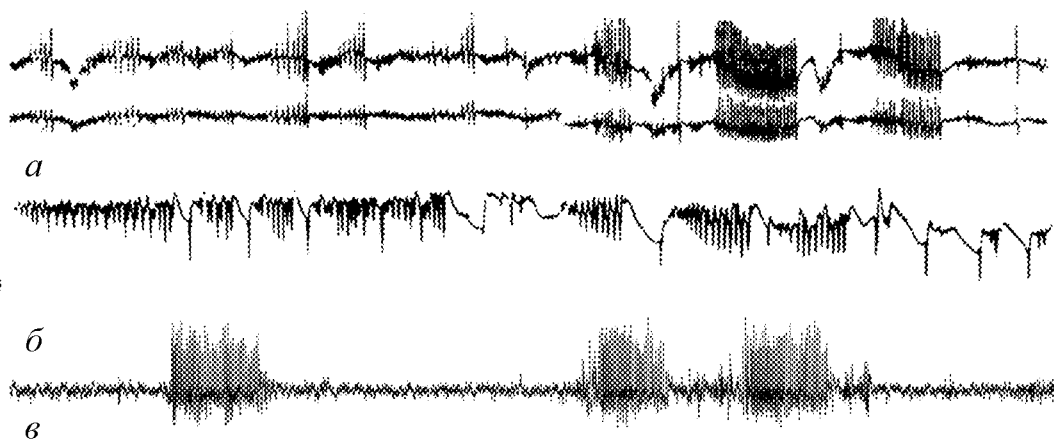


Рис. 8. Эпилептическая активность – образование пространственно-временных паттернов синхронного поведения в нейронном ансамбле в записях ЭЭГ: а – пациента с посттравматической генерализованной эпилепсией, б – пациента, больного редкой в медицинской практике эпилепсией Кожевникова; в – крыса с врожденной абсанс-эпилепсией



Рис. 9. Опыты С. Эша (иллюстрации взяты из книги [22])

на) заключается в его эффективности и «экономичности»; автоматически реагируя на несущую основную информацию черту – «спусковой крючок», индивид сохраняет свое время, энергию и умственный потенциал. Однако такие поведенческие паттерны несут в себе и опасность, связанную с тем, что их можно использовать как «лазейки» для навязывания человеку «чужого» мнения (как в опытах Эша), являясь, с точки зрения прикладной психологии, механизмами уступчивости или влияния. Таких механизмов, побуждающих одного человека подчиниться требованиям другого, психологам известно достаточно много. Главное то, что все они основаны на определенных паттернах (или, как часто говорят психологи, стереотипах, или казуальных схемах) поведения, «защитных» в психологию человека, который склонен в большинстве случаев автоматически, не раздумывая, реагировать на внешнюю информацию в соответствии с заранее усвоенными причинно-следственными связями.

Подводя некоторые итоги сказанного в данной лекции, отметим, что существует огромное число примеров самоорганизации и образования структур в системах самой различной природы. Применительно к живым системам можно сказать, что исследование процессов самоорганизации в них позволяет понять механизмы эволюции, распространения популяций, особенности строения различных живых организмов, а также порой законы функционирования человеческого общества.

Подобные исследования помогут в разрешении самой удивительной загадки, стоящей перед человечеством, – загадки сознания, а также дать возможность выработать новые подходы к лечению и диагностике многих заболеваний (эпилепсия, болезни Альцгеймера, Паркинсона и т. д.).

Автор выражает благодарность Д.И. Трубецкову и А.А. Короновскому за плодотворные обсуждения и ценных замечаний, А.Е. Филатовой за обращение внимания на интересные примеры самоорганизации в биологических системах.

Работа поддержана Президентской программой поддержки научных школ РФ (проект НШ–3407.2010.2).

Библиографический список

1. *Трубецков Д.И.* Введение в синергетику. Хаос и структуры. М.: Эдиториал УРСС, 2004.
2. *Климонтович Ю.Л.* Введение в физику открытых систем. М.: Янус-К, 2002.
3. *Трубецков Д.И., Мчедлова Е.С., Красичков Л.В.* Введение в теорию самоорганизации открытых систем. М.: Физматлит, 2002.
4. *Эбелинг В., Энгель А., Файстель Р.* Физика процессов эволюции. М.: УРСС, 2001.
5. *Безручко Б.П., Короновский А.А., Трубецков Д.И., Храмов А.Е.* Путь в синергетику. Экскурс в десяти лекциях. 1-е изд. М.: Комкнига, 2005; 2-е изд. М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2010.
6. *Ван-Дейк М.* Альбом течений жидкости и газа. М.: Мир, 1986.
7. *Faraday M.* On the forms and states assumed by fluids in contact with vibrating elastic surfaces // *Philos. Trans. R. Soc., London.* 1831. Vol. 121. P. 319. (подробнее на русском языке о ряби Фарадея можно прочитать в книге [5])
8. *Езерский А.Б., Рабинович М.И., Реутов В.П., Старобинец И.М.* // *ЖЭТФ.* 1986. № 1. С. 2070.
9. *Хакен Г.* Синергетика. М.: Мир. 1980.
10. *Климонтович Ю.Л.* Введение в физику открытых систем // *СОЖ.* 1996. № 8. С. 109.
11. *Данилов Ю.А.* Синергетика – внутри и вокруг человека // *Философия науки.* 1982. Вып. 8.
12. *Иваницкий Г.Р., Медвинский А.Б., Цыганов М.А.* // *УФН.* 1994. Т. 164. С. 1041.
13. *Абарбанель Г.Д.И., Рабинович М.И., Селверстон А., Баженов М.В., Хуэрта Р., Сущик М.М., Рубчинский Л.Л.* // *УФН.* 1996. Т. 166. С. 363.
14. *Некоркин В.И.* // *УФН.* 2008. Т. 178. С. 313.
15. *Рабинович М.И., Мюезинолу М.К.* // *УФН.* 2010. Т. 180. С. 371.
16. *Хакен Г.* Принципы работы головного мозга. Синергетический подход к активности мозга, поведению и когнитивной деятельности. М.: Per Se, 2001.
17. *Encyclopedia of the human brain / Ed. by Ramachandran V.S.* Elsevier Science, 2002.
18. *Свидерская Н.Е.* Синхронная электрическая активность мозга и психические процессы. М.: Наука, 1987.
19. *Иваницкий А.М., Лебедев А.И.* Разгадывая тайны ритмов мозга // *Журн. высш. нервн. деят.* 2007. Т. 57. С. 636.
20. *Короновский А.А., ван Луйтелаар Ж., Овчинников А.А., Ситникова Е.Ю., Храмов А.Е.* Диагностика и анализ осцилляторной нейросетевой активности головного мозга с использованием непрерывного вейвлетного преобразования // *Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика.* 2011. Т. 19, № 1. С. 86.
21. *Ситникова Е.Ю., Короновский А.А., Храмов А.Е.* Анализ электрической актив-

- ности головного мозга при абсанс-эпилепсии: Прикладные аспекты нелинейной динамики // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2011. Т. 19, № 6.
22. Зимбардо Ф., Ляйпте М. Социальное влияние. СПб: Питер, 2001.
23. Чалдини Р. Психология влияния. СПб: Питер, 1999.

Саратовский государственный
университет им. Н.Г. Чернышевского

Поступила в редакцию 29.01.2012

SELFORGANIZATION, PATTERN FORMATION, OPEN SYSTEM PHYSICS

A.E. Hramov

Paper presents the lecture which was conducted for pupils on workshop «Nonlinear Days in Saratov for Youth – 2011». In the lecture brief introduction in physics of open systems is presented and several examples of process of selforganization and pattern formation in the systems of different nature are discussed.

Keyword: Selforganization, pattern formation, open system physics.



Храмов Александр Евгеньевич – окончил физический факультет Саратовского госуниверситета (1996). Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата (1999) и доктора (2006) физ.-мат. наук. Профессор, заместитель заведующего кафедрой электроники, колебаний и волн факультета нелинейных процессов СГУ. Область научных интересов – радиофизика в той ее части, которая связана с взаимодействием свободных электронов с электромагнитными полями; нелинейная динамика распределенных активных сред; методы анализа и моделирования динамических систем. Опубликовал (в соавторстве) книгу «Лекции по сверхвысокочастотной электронике для физиков» (Т. 1, М.: Физматлит, 2003; Т. 2, М.: Физматлит, 2004), монографию «Непрерывный вейвлетный анализ и его приложения» (Москва: Наука, Физматлит, 2003), двухтомную коллективную монографию «Методы нелинейной динамики и теории хаоса в задачах электроники сверхвысоких частот» (М.: Физматлит, 2009), коллективную монографию «Моделирование нелинейной динамики глобальных процессов» (М.: Изд-во МГУ, 2010) и др.

410012 Саратов, ул. Астраханская, 83
Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского
E-mail: aeh@nonlin.sgu.ru



ГЕНЕРАЦИЯ ХАОТИЧЕСКОЙ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ СВЧ-ИМПУЛЬСОВ В АВТОКОЛЕБАТЕЛЬНОЙ СИСТЕМЕ С ФЕРРОМАГНИТНОЙ ПЛЁНКОЙ

Д.В. Романенко

В работе приведены результаты экспериментального исследования кольцевой автоколебательной системы на основе ферромагнитной структуры в случае, когда разрешены трехмагنونные процессы распада. Для данной системы построена модель, на основе которой рассчитаны характерные режимы генерации, включая генерацию хаотической последовательности СВЧ-импульсов. Результаты численного моделирования сравниваются с экспериментальными данными.

Ключевые слова: Ферромагнитная структура, автоколебательная система, хаос, трехмагنونные процессы.

Введение

В последние годы интенсивно проводятся исследования, направленные на создание кольцевых автоколебательных систем с положительной обратной связью, демонстрирующих хаотическое поведение в диапазоне сверхвысоких частот [1–2]. Особый интерес вызывают автоколебательные системы, в которых генерация сигнала со сплошным спектром возникает в случае использования в цепи обратной связи пассивных нелинейных элементов на основе объемных или тонкопленочных ферромагнетиков [3–6]. Нелинейные свойства таких элементов обусловлены тем, что при достаточно высоких уровнях мощности сигнала в ферромагнетиках происходит параметрическое возбуждение коротковолновых обменных спиновых волн, приводящее к нелинейным потерям и к стохастической автомодуляции генерируемого сигнала [3–6].

Несмотря на то, что экспериментальные результаты для кольцевой автоколебательной системы на основе ферромагнитной структуры в условиях, когда разрешены процессы трехмагнного распада, достаточно хорошо известны, до настоящего времени отсутствует приемлемая теоретическая модель, демонстрирующая характерные для эксперимента бифуркационные режимы в такой системе.

Модель для описания трехволнового взаимодействия в средах различной природы была впервые рассмотрена в [7]. В частности, было показано, что в подобной системе возможно наблюдение стохастических релаксационных колебаний. Позднее на основе данной модели была построена модель параметрической кольцевой системы на ферромагнитной пленке [6]. Однако в этой модели не учитываются некоторые особенности исследуемой системы, в частности, нелинейность усилителя, время задержки в кольце. Это приводит к тому, что некоторые режимы генерации, характерные для эксперимента, не наблюдаются. Также следует отметить, что переход от периодической к хаотической модуляции наблюдался в [6] при достаточно больших расстройках $\delta \sim 8$ МГц между половинной частотой возбуждающейся в пленке магнитоэлектрической волны (МЭВ) и частотами спиновых волн. Подобные значения отстройки слишком велики и не наблюдаются в эксперименте [8].

Цель данной работы – экспериментальное исследование различных режимов генерации кольцевой автоколебательной системы на основе ферромагнитной пленки в диапазоне сверхвысоких частот в широком интервале изменения параметра усиления системы и построение модели, демонстрирующей все характерные для рассматриваемой системы бифуркационные режимы, в условиях, когда разрешены трехмагнетонные параметрические процессы в пленке.

1. Результаты экспериментального исследования кольцевой автоколебательной системы с ферромагнитной пленкой

Экспериментальный макет (рис. 1) исследуемой автоколебательной системы представляет собой последовательно соединенные в кольцо широкополосный твердотельный СВЧ-усилитель мощности на GaAs полевых транзисторах, переменный аттенуатор и перестраиваемую магнитным полем широкополосную нелинейную линию задержки на поверхностных магнитоэлектрических волнах (ПМЭВ). Параметры кольцевой системы подобраны таким образом, чтобы генерация сигнала на одной из собственных мод кольца осуществлялась в области частот меньших, чем 3 ГГц, где параметрические процессы распада для ПМЭВ разрешены [9].

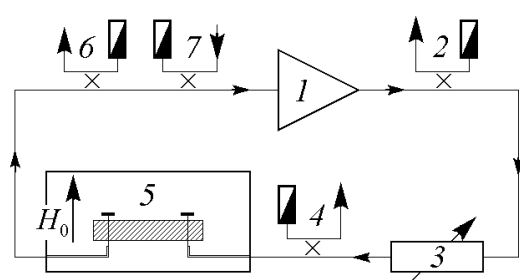


Рис. 1. Схема экспериментальной установки: 1 – транзисторный усилитель мощности; 2 – направленный ответвитель для подключения анализатора спектра или нагрузки; 3 – переменный аттенуатор; 4, 6 – направленные ответвители для подключения измерителя мощности; 5 – нелинейная линия задержки на ПМЭВ; 7 – направленный ответвитель для ввода в кольцо внешнего сигнала

На рис. 2 приведены спектры мощности и временные реализации мгновенных значений СВЧ-сигнала, генерируемого на частоте $f_0 = 2060.3$ МГц, на которой в предгенерационном режиме в системе наблюдалось максимальное значение коэффициента передачи. Представленные результаты получены при различных значениях коэффициента усиления кольцевой системы $G = K - A$ (K – коэффициент усиления усилителя 1, A – величина ослабления в кольце), величина которого регулировалась переменным аттенуатором 3, расположенным на входе линии передачи на ПМЭВ.

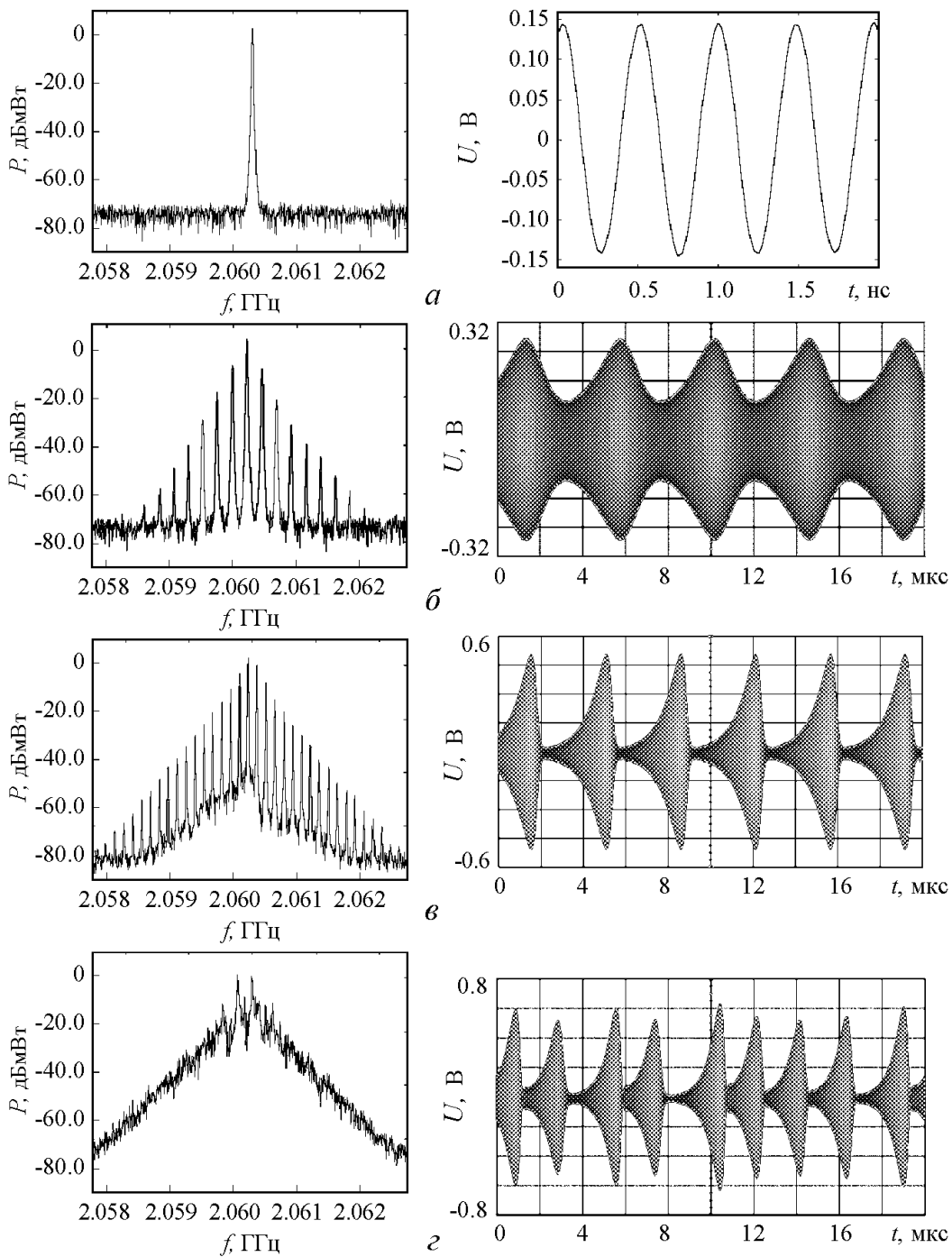


Рис. 2. Спектры мощности (левая колонка), временные реализации (правая колонка) СВЧ-сигнала, генерируемого на одной кольцевой моде при различных значениях G : 0 (*a*); 0.2 дБ (*б*); 0.5 дБ (*в*); 0.7 дБ (*г*)

В случае, когда коэффициент усиления кольцевой системы $G = 0$ (рис. 2, а), в системе генерируется гармонический СВЧ-сигнал. При $G = 0.2$ дБ (рис. 2, б) режим одночастотной генерации сменяется режимом амплитудной автомодуляции сигнала, возникновение которого обусловлено параметрическим возбуждением поверхностной МСВ коротковолновых спиновых волн на частотах, вдвое меньших частоты ПМСВ, и обратным влиянием спиновых волн на ПМСВ [6]. При этом расстояние между частотными составляющими в спектре мощности сигнала и период следования максимумов на огибающей СВЧ-сигнала во временной области определяется частотой автомодуляции, которая равна отстройке частоты параметрически возбужденной спиновой волны от половинного значения частоты сигнала накачки δ и составляет величину, равную примерно 235 кГц [8].

При $G = 0.5$ дБ (рис. 2, в) на осциллограмме СВЧ-сигнала формируются последовательности цугов с медленно нарастающей и быстро спадающей амплитудой (релаксационные колебания). Возникновение релаксационных колебаний связано с тем, что рост амплитуды сигнала является экспоненциальным за счет наличия активного элемента в кольце. Ограничение экспоненциального роста связано с тем, что нелинейные потери ПМСВ начинают превышать усиление в кольце и происходит резкий спад амплитуды сигнала.

При $G = 0.7$ дБ (рис. 2, г) спектр сигнала вблизи частоты f_0 практически полностью «зашумляется», образуя сплошной спектр с выделенными частотами, соответствующими сетке частот, рожденной в результате автомодуляции спиновыми волнами ПМСВ. В этом случае наблюдается разрушение фазовой синхронизации между спектральными компонентами, что приводит к случайному изменению величины периода на временной реализации амплитуды сигнала.

2. Модель

Для теоретического описания приведенных выше экспериментальных результатов рассмотрим распространение магнитостатической волны в плоском слое ферромагнетика, как показано на рис. 3. Структура бесконечна в направлении z . Постоянное магнитное поле \mathbf{H}_0 приложено касательно к пленке вдоль оси z , при этом

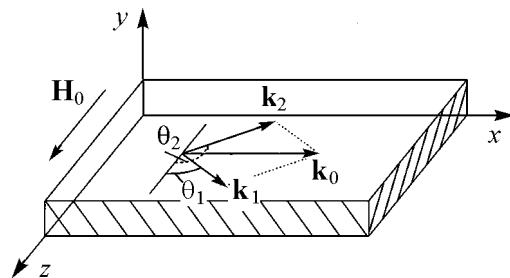


Рис. 3. Схематическое изображение слоя ферромагнетика. Векторы \mathbf{k}_0 , \mathbf{k}_1 , \mathbf{k}_2 показывают направления распространения ПМСВ и обменных спиновых волн, соответственно

в пленке распространяется поверхностная магнитостатическая волна. Направление распространения ПМСВ показано волновым вектором \mathbf{k}_0 . При распространении МСВ в ферромагнитной среде могут возбуждаться тепловые спиновые волны на частотах ω_1 и ω_2 , с волновыми векторами \mathbf{k}_1 и \mathbf{k}_2 , если выполняются следующие условия для параметрических процессов 1-го порядка [9]:

$$\omega_0 = \omega_1 + \omega_2, \quad \mathbf{k}_0 = \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2. \quad (1)$$

На основе уравнений для движения вектора намагниченности [10] можно получить с учетом соотношений (1) систему уравнений для медленно меняющихся амплитуд спиновых волн $b_1(\mathbf{r}, t)$, $b_2(\mathbf{r}, t)$ и ПМСВ $m(x, t)$, описывающей взаимодействие ПМСВ с параметрически возбужденными спиновыми волнами, которую можно представить в следующем виде:

$$\begin{aligned} \frac{\partial b_1}{\partial t} + \mathbf{V}_{\text{gr}_1} \text{grad}_{\mathbf{r}_\perp} b_1 - j \left[\left(\omega_1 - \frac{\omega}{2} \right) + j\alpha_1 \right] b_1 &= jV_1 b_2^*, \\ \frac{\partial b_2^*}{\partial t} + \mathbf{V}_{\text{gr}_2} \text{grad}_{\mathbf{r}_\perp} b_2^* - j \left[\left(\omega_2 - \frac{\omega}{2} \right) + j\alpha_2 \right] b_2^* &= -jV_2^* b_1, \\ \frac{\partial m}{\partial t} + V_{\text{gr}} \frac{\partial m}{\partial x} + \alpha \omega_H m &= j \frac{V_{\text{gr}}}{d} \left[\frac{1}{2} (A_+ - A_-) + \frac{\omega + \omega_H}{\omega_M} A_+ \right] \exp(-j\Delta \mathbf{k}_0 x) b_1 b_2, \end{aligned} \quad (2)$$

где $V_1 = (\omega_M/2) \sin \theta_1 \cos \theta_1 \exp(-j\Delta \mathbf{k} \mathbf{r}_\perp) m \exp(-j\phi_1) (\omega'_H + \omega_1) / (2\omega_1)$; $V_2^* = -(\omega_M/2) \sin \theta_2 \cos \theta_2 m \exp(j\phi_2) (\omega'_H + \omega_2) / (2\omega_2)$; $A_\pm = \sin \theta_1 \cos \theta_1 \times \times (\omega_1 \pm \omega'_H) / (2\omega_1) \exp(\pm j\phi_1)$; $\Delta \mathbf{k}$ – пространственный рассинхронизм между МСВ и обменными спиновыми волнами ($\mathbf{k}_{1\perp} - \mathbf{k}_{2\perp} = \mathbf{k}_0 - \Delta \mathbf{k}$); $\omega_{1,2}$ – частоты спиновых волн; $\omega'_H = \omega_H + \beta \omega_M (ak_0)^2$, $\omega_H = \gamma H_0$, $\omega_M = 4\pi\gamma M_0$, β – обменная константа, a – постоянная решетки, M_0 – намагниченность насыщения; V_{gr} , \mathbf{V}_{gr_1} , \mathbf{V}_{gr_2} – групповые скорости ПМСВ и спиновых волн, соответственно; θ_1 , θ_2 – углы между направлениями распространения обменных спиновых волн и направлением внешнего магнитного поля \mathbf{H}_0 ; $\phi_{1,2}$ – углы между векторами обменных спиновых волн и направлением внешнего магнитного поля \mathbf{H}_0 .

В случае, когда рассматривается кольцевая система с ферромагнитной пленкой, распространением сигнала вдоль пленки можно пренебречь, а рассматривать только эволюцию амплитуд МСВ и спиновых волн во времени. Данное допущение было сделано исходя из того, что характерное время распространения сигнала по кольцу намного меньше характерного времени изменения амплитуды МСВ.

Согласно вышесказанному предположению с учетом уравнений (2) можно записать систему уравнений для кольцевой схемы в виде:

$$\begin{aligned} \frac{dm(t)}{dt} &= -c_0 b_1(t) b_2(t) \exp(-i\delta t) - \alpha m(t) + \sigma [1 - f(m(t - \tau))] m(t - \tau), \\ \frac{db_1(t)}{dt} &= c_1 m(t) b_2^*(t) \exp(i\delta t) - \nu b_1(t), \\ \frac{db_2(t)}{dt} &= c_2 m(t) b_1^*(t) \exp(i\delta t) - \nu b_2(t), \end{aligned} \quad (3)$$

где $\delta = \omega/2 - \omega_1$ – отстройка частоты обменных спиновых волн от половинной частоты МСВ; ν – коэффициент затухания спиновых волн; σ – линейный коэффициент усиления; τ – задержка в цепи обратной связи; f – функция, характеризующая

нелинейность усилителя; α – коэффициент линейного затухания магнитостатической волны;

$$c_0 = -j \frac{V_{gr}}{d} \left[\frac{1}{2}(A_+ - A_-) + \frac{\omega + \omega_H}{\omega_M} A_+ \right],$$

d – толщина пленки; $c_1 = c_2 = j A_+ \omega_M / 2$.

Слагаемое $\sigma [1 - f(m(t - \tau))] m(t - \tau)$ в первом уравнении системы (3) учитывает усиление сигнала в цепи обратной связи и суммарное время запаздывания в кольце τ . Причем σ определяет линейное усиление, а функция $f(m(t - \tau))$ – нелинейное усиление. Нелинейная зависимость усиления численно выбиралась таким образом, чтобы обеспечить соответствие между частотами автомодуляции в численном моделировании и эксперименте и чтобы коэффициент усиления переходил в насыщение с ростом амплитуды сигнала.

3. Результаты численного моделирования

Ниже приведены результаты численного решения системы (3) методом Рунге-Кутты 4 порядка. Коэффициенты рассчитаны согласно приведенным формулам: $\delta = 0.2$ МГц, $\nu = 7$ МГц, $\alpha = 7$ МГц, $\tau = 95$ нс, $c_0 = 1232$ МГц, $c_1 = c_2 = 846$ МГц. На рис. 4 приведены временные зависимости модуля комплексной амплитуды сигнала $|m|$ при различных значениях коэффициента усиления G_m в кольце, который задавался как $G_m = (\sigma - \alpha) / \varepsilon$, где $\varepsilon = 1$ МГц – нормировочный коэффициент. При значении линейного коэффициента усиления $G_m = 0$ в системе устанавливается стационарный режим, соответствующий $|m| = \text{const}$, что аналогично одночастотному режиму, наблюдаемому экспериментально (см. рис. 2, а). При этом амплитуда ПМСВ ниже порогового значения для параметрических процессов первого порядка. При увеличении коэффициента усиления до некоторого значения $G_m = 0.55$ в си-

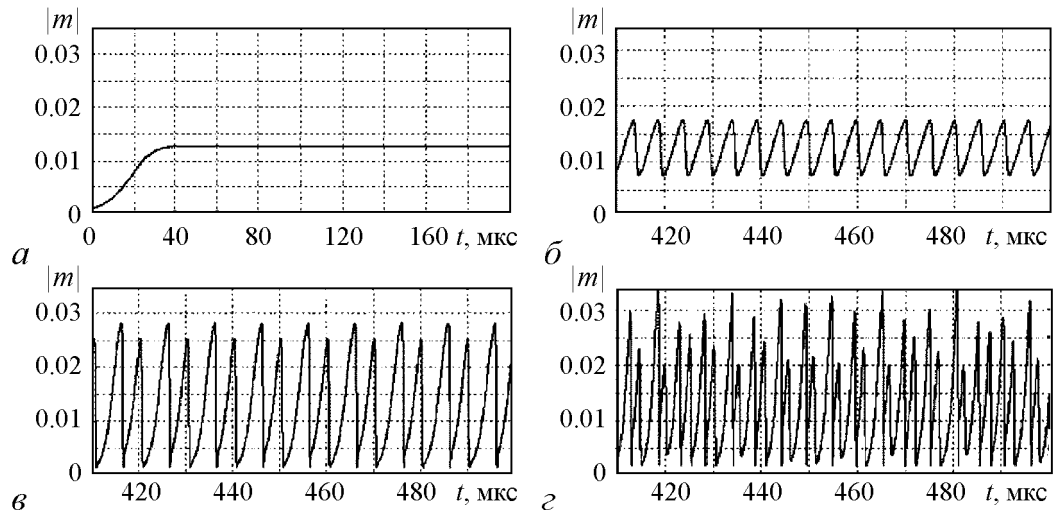


Рис. 4. Эволюция модуля комплексной амплитуды МСВ при увеличении коэффициента усиления в кольце: 0 (а), 0.55 (б), 0.85 (в), 1.05(г)

стеме наблюдается квазигармоническая автомодуляция (рис. 4, б). При дальнейшем увеличении G_m ($G_m = 0.85$) период автомодуляции уменьшается, а форма сигнала начинает напоминать релаксационные колебания (рис. 4, в). При больших значениях коэффициента усиления (рис. 4, г) в системе возникает стохастическая автомодуляция, которая аналогична хаотической последовательности импульсов, наблюдаемых в эксперименте.

Заключение

В работе была построена модель для описания огибающей магнитостатической волны, возбуждаемой в ферромагнитной пленке в условиях, когда разрешены параметрические процессы первого порядка при взаимодействии МСВ со спиновыми волнами, а сама пленка включена в кольцевую схему с усилением. Данная модель позволяет наблюдать все режимы, характерные для исследуемой кольцевой системы при типичных значениях управляющих параметров. Результаты численного моделирования достаточно хорошо согласуются с экспериментальными данными, полученными для активной кольцевой автоколебательной системы на основе ферромагнитной пленки.

Выражаю благодарность С.В. Гришину и Ю.П. Шараевскому за ценные обсуждения и помощь в осуществлении экспериментальных исследований.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 11-02-00057) и ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 гг. (ГК № 14.740.11.0612).

Библиографический список

1. Дмитриев А.С., Панас А.И. Динамический хаос: новые носители информации для систем связи. М.: Физматлит, 2002.
2. Трубецков Д.И., Храмов А.Е. Лекции по сверхвысокочастотной электронике для физиков. Т. 2. М.: Физматлит, 2004.
3. Кондрашов А.В., Устинов А.Б., Калинин Б.А., Веннер Н. Автогенерация хаотического СВЧ-сигнала в активных кольцах на основе ферромагнитных пленок // Письма в ЖТФ. 2008. Т. 34, № 11. С. 81.
4. Mingzhong W., Kalinikos B.A., Patton C.E. Self-generation of chaotic solitary spin wave pulses in magnetic film active feedback rings // Phys. Rev. Lett. 2005. Vol. 95. 237202.
5. Гришин С.В., Гришин В.С., Храмов А.Е., Шараевский Ю.П. Генерация широкополосного хаотического сигнала в автоколебательной системе с нелинейной линией передачи на магнитостатических волнах // ЖТФ. 2008. Т. 78, № 5. С. 89.
6. Демидов В.Е., Ковшиков Н.Г. Механизм возникновения и стохастизации автомодуляции интенсивных спиновых волн // ЖТФ. 1999. Т. 69, № 8. С. 100.
7. Вышкинд С.Я., Рабинович М.И. Механизм стохастизации фаз и структура волновой турбулентности в диссипативных средах // ЖЭТФ. 1976. Т. 71, № 2(8). С. 557.

8. Гришин С.В., Шараевский Ю.П. Излучение шумоподобных спин-волновых пакетов при трехмагнонных процессах распада и кинетической неустойчивости волн в ферромагнитной пленке // Письма в ЖЭТФ. 2009. Т. 89, № 2. С. 59.
9. Темирязов А.Г., Тихомирова М.П. Трехмагнонный распад обменной спиновой волны // Письма в ЖЭТФ. 1995. Т.61, вып. 11. С. 910.
10. Гуревич А.Г., Мелков Г.А. Магнитные колебания и волны. М.: Физматлит, 1994.

Саратовский государственный
университет им. Н.Г. Чернышевского

Поступила в редакцию 13.01.2012

CHAOTIC MICROWAVE PULSE TRAIN GENERATION IN SELF-OSCILLATORY SYSTEM BASED ON A FERROMAGNETIC FILM

D.V. Romanenko

Experimental investigations results of the ring self-oscillatory system based on a ferromagnetic film at three-wave interactions were considered. The model describing this system was constructed. The typical regimes of a generation, including generation of the chaotic microwave train were calculated with the help of the constructed model. The numerical simulations and experimental results had a good agreement.

Keyword: Ferromagnetic structure, self-oscillatory system, chaos, three-magnon processes.



Романенко Дмитрий Владимирович родился в Саратове (1988), окончил Саратовский государственный университет (2010). В 2011 году поступил на работу в ОФНС НИИ ЕН СГУ в качестве младшего научного сотрудника. Основные области научных интересов: волновая динамика в ферромагнитных структурах, динамический хаос.

410012 Саратов, Астраханская, 83
Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского
E-mail: dmitrii.romanenk@mail.ru



**ИССЛЕДОВАНИЕ ВОЗНИКНОВЕНИЯ ХАОТИЧЕСКИХ
РЕЖИМОВ КОЛЕБАНИЙ ПРОСТРАНСТВЕННОГО ЗАРЯДА
В ПОЛУПРОВОДНИКОВОЙ СВЕРХРЕШЕТКЕ
ВО ВНЕШНЕМ РЕЗОНАТОРЕ**

В.В. Макаров

В работе было изучено воздействие внешних резонансных систем на коллективную динамику электронных доменов в полупроводниковой сверхрешетке. Численные расчеты показали, что полупроводниковая сверхрешетка, демонстрирующая в автономном режиме (без резонатора) только периодическую динамику, будучи помещенной во внешнюю электродинамическую систему, демонстрирует хаотические колебания и может рассматриваться как перспективный источник широкополосного хаотического СВЧ-излучения.

Ключевые слова: Полупроводниковые сверхрешетки, терагерцовый диапазон.

Полупроводниковые сверхрешетки – сложные наноструктуры, представляющие собой чередующиеся микроскопические слои различных полупроводниковых материалов [1,2]. Такая периодическая структура способствует возникновению энергетических минизон, которые, под влиянием электрического поля, заставляют электроны демонстрировать ряд интересных квантово-механических эффектов, включая лестницу Ваннье–Штарка, последовательное и резонансное туннелирование и блоховские колебания. Исследование динамики полупроводниковой сверхрешетки представляет значительный интерес как для фундаментальной, так и для прикладной науки. Из-за высокой подвижности электронов внутри минизон и очень высокой частоты блоховских колебаний, сверхрешетки считаются перспективными элементами субтерагерцовых и терагерцовых устройств [3,4].

Представляет интерес исследование возможности возбуждения в полупроводниковой сверхрешетке хаотических колебаний для использования ее в качестве генератора в информационно-телекоммуникационных системах, основанных на хаотических сигналах [5,6].

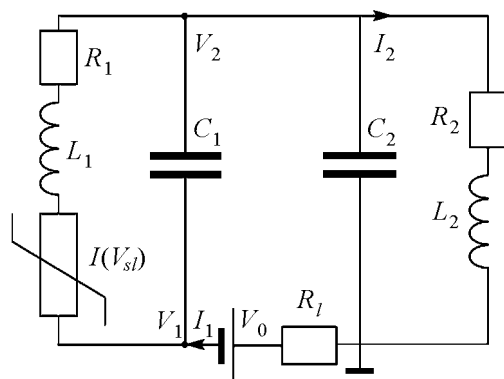


Рис. 1. Эквивалентный контур исследуемой системы «сверхрешетка – внешний резонатор». $I(V_{sl})$ – представление сверхрешетки как генератора тока, управляемого напряжением V_{sl} , V_0 – напряжение источника постоянного тока. Сопротивление нагрузки не менялось и было выбрано $R_l = 0.1$ Ом

управления режимами колебания сверхрешетки, а также для увеличения мощности выходного СВЧ-излучения.

В эксперименте, очевидно, невозможно контролировать динамику паразитного резонатора, поэтому имеет смысл исследовать систему с двумя резонаторами. Резонатор 1 моделирует паразитную цепь, связанную с внешними элементами подключения сверхрешетки. Резонансная частота данного резонатора, как показывают простые оценки, обычно меньше собственной частоты колебаний в сверхрешетке. Резонатор 2 является внешним резонатором с управляемыми параметрами.

Предположим, что в резонансных системах возбуждается только одна мода колебаний, то есть будем решать задачу в одномодовом приближении. Моды резонаторов характеризуются частотами f_{Qi} и добротностями Q_i . Это позволяет нам моделировать резонаторы с помощью метода эквивалентных схем.

Эквивалентная схема подключения сверхрешетки во внешние резонансные контуры, моделирующие резонансные системы, представлена на рис. 1. Первый колебательный контур (L_1, R_1, C_1) моделирует паразитный резонатор. Второй колебательный контур (L_2, R_2, C_2) , соответственно, моделирует внешний управляемый резонатор. Сверхрешетка представлена как генератор тока $I(V_{sl})$, управляемый напряжением $V_{sl}(t)$. Эквивалентная схема первого резонатора учитывает особенности подключения сверхрешетки к элементам, образующим паразитный резонатор.

Внешняя резонансная система, представленная на рис. 1, моделировалась нестационарными уравнениями Кирхгофа, которые в данном случае имеют вид

$$\frac{dV_1}{dt} = I_1 \left(\frac{1}{C_2} - \frac{1}{C_1} \right) - \frac{I_2}{C_2} + \frac{I(V_{sl})}{C_2}, \quad \frac{dV_2}{dt} = \frac{I_1 - I_2}{C_2}, \quad (1)$$

$$\frac{dI_2}{dt} = \frac{V_2 - I_2 R_2}{L_2}, \quad I_1 = \frac{L_1}{R_l} \frac{dI(V_{sl})}{dt} - \frac{V_0 - V_2}{R_l} + I(V_{sl}) \frac{R_1}{R_l}, \quad (2)$$

где V_0 – напряжение источника; напряжения и токи V_1, V_2, I_1, I_2 показаны на рис. 1; $I(V_{sl})$ – ток, текущий через сверхрешетку.

Для нахождения тока $I(V_{sl})$ численно моделировалась динамика доменов в сверхрешетке на основе самосогласованных уравнений непрерывности и уравнения

В данной работе рассматривается полупроводниковая сверхрешетка, помещенная во внешнюю резонансную систему. Интерес к такой системе связан со следующими моментами. Во-первых, на высоких частотах невозможно избавиться от паразитных емкостей и индуктивностей элементов подключения сверхрешетки (провода, контакты и т.п.), которые образуют паразитные резонансные контуры, воздействующие на сверхрешетку. Поэтому при изучении режимов генерации сверхрешетки необходимо учитывать влияние такого внешнего «паразитного» резонансного контура. Во-вторых, внешняя резонансная система может быть использована для

Пуассона. Следуя работе [7], предполагалось, что проводящий участок минизоны разбит на $N = 480$ слоев, ширина которых достаточно мала $\Delta x = L/N = 0.24$ нм. Изменение плотности заряда в каждом слое n_m (правая граница которого $x = m\Delta x$) задается дискретным аналогом уравнения непрерывности тока

$$e\Delta x \frac{dn_m}{dt} = J_{m-1} - J_m, \quad m = 1, \dots, N, \quad (3)$$

где e – заряд электрона, J_{m-1} и J_m – плотность тока на левой и правой границах слоя m . Плотность тока определена как

$$J_m = en_m v_d(\bar{F}_m), \quad (4)$$

где \bar{F}_m – среднее электрическое поле в слое m , скорость дрейфа $v_d(\bar{F})$ определялась соотношением [8]

$$v_d = \frac{\Delta d}{2\hbar} \frac{I_1 \Delta / (2k_B T)}{I_0 \Delta / (2k_B T)} \frac{e\bar{F} d\tau / \hbar}{1 + (e\bar{F} d\tau / \hbar)^2}. \quad (5)$$

Электрическое поле F_m на левой границе слоя m может быть определено из уравнения Пуассона, которое в дискретном виде выглядит как

$$F_{m+1} = \frac{e\Delta x}{\varepsilon_0 \varepsilon_r} (n_m - n_D) + F_m, \quad m = 1..N, \quad (6)$$

где $n_D = 3 \times 10^{22} \text{ м}^{-3}$ – плотность легирования в слоях сверхрешетки.

Для определения тока использовались омические граничные условия, $J_0 = \sigma F_0$, в сильно легированном эмиттере с электрической проводимостью $\sigma = 3788 \text{ См}$. Напряжение V_{sl} , приложенное к устройству, определено выражением

$$V_{sl} = U + \frac{\Delta x}{2} \sum_{m=1}^N (F_m + F_{m+1}), \quad (7)$$

где U – падение напряжения на контактах с учетом эффекта формирования слоев повышенной концентрации заряда вблизи эмиттера и пониженной концентрации зарядов вблизи коллектора сверхрешетки [9]. Зная плотность тока в каждом слое, можно вычислить суммарный ток, протекающий через сверхрешетку

$$I(t) = \frac{A}{N+1} \sum_{m=0}^N J_m, \quad (8)$$

где $A = 5 \times 10^{-10} \text{ м}^2$ – поперечное сечение сверхрешетки. Заметим, что в численном моделировании предполагается нахождение сверхрешетки при низкой температуре, равной 4.2 К.

Для исследования динамики анализируемой системы были рассмотрены вольт-амперные характеристики, бифуркационные диаграммы и спектры колебаний в системе при изменении основных управляющих параметров. На рис. 2, *a* показана характерная бифуркационная диаграмма, построенная при большой расстройке частот между паразитным и внешним резонаторами: частота паразитного резонатора

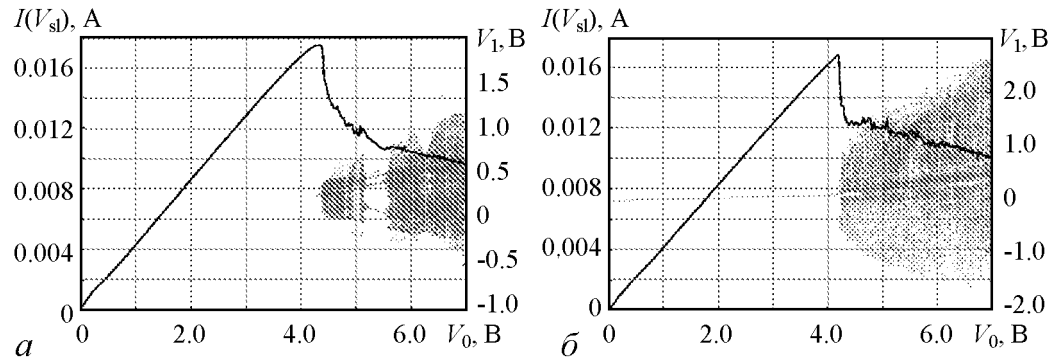


Рис. 2. Вольт-амперная характеристика и бифуркационная диаграмма колебаний напряжения на сверхрешетке V_1 при параметрах внешних резонаторов: $f_1 = 2.819$ ГГц, $f_2 = 10.1255$ ГГц, $Q_1 = 75.0$, $Q_2 = 32.5$ (а); $f_1 = 2.819$ ГГц, $f_2 = 3.1009$ ГГц, $Q_1 = Q_2 = 37.6386$ (б)

$f_1 = 2.819$ ГГц, а частота управляемого резонатора $f_2 = 10.1255$ ГГц. Добротности резонаторов $Q_1 = 75.0$, $Q_2 = 32.5$. Вольт-амперная характеристика имеет типичный вид с падающим участком, при выборе рабочего напряжения на котором в системе наблюдаются колебания тока. Генерация возникает при $V_0 \approx 0.44$ В.

Зависимость $I(V_{sl})$ на падающем участке имеет много локальных максимумов, не наблюдаемых при исследовании сверхрешетки без внешних резонаторов. Для понимания их природы была рассчитана бифуркационная диаграмма колебаний переменного напряжения V_1 на сверхрешетке при изменении напряжения V_0 источника питания, которая представлена на том же рисунке (черные точки). Легко видеть, что при изменении напряжения в системе наблюдается сложная перестройка режимов колебаний от хаотических к регулярным и наоборот. Сильная изрезанность вольт-амперной характеристики связана с переключениями между динамическими режимами и появлением хаотических режимов колебаний.

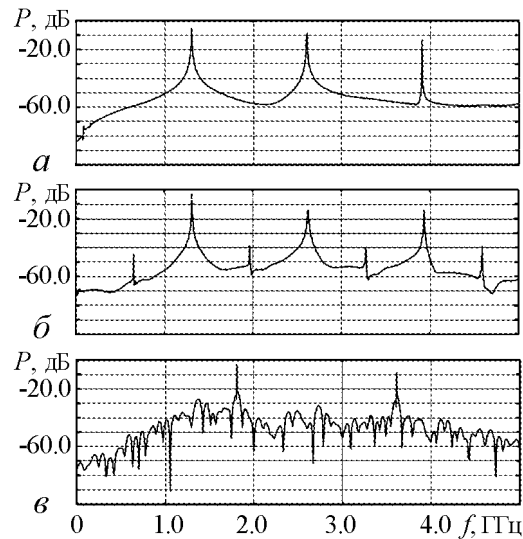


Рис. 3. Спектры излучения при следующих значениях V_0 : 480 (а), 500 (б), 510 мВ (в). Параметры внешних резонаторов: $f_1 = 2.819$ ГГц, $f_2 = 10.1255$ ГГц, $Q_1 = 75.0$, $Q_2 = 32.5$

Это иллюстрирует рис. 3, на котором показан переход к хаосу в системе «сверхрешетка в двух резонаторах» при увеличении напряжения питания. На нем приведены спектры колебаний во внешнем резонаторе для различных величин V_0 . Спектр (а) соответствует периодическому режиму, спектр (б) иллюстрирует режим удвоения периода, что выражается в появлении субгармоники основной частоты и ее гармоник, и спектр (в) уже соответствует хаотическим колебаниям. Спектры построены с большим количеством усреднений. Отметим, что в режиме хаотической динамики частота колебаний сильно увеличивается по сравнению со случаем регулярной динамики.

Таким образом, анализ показал, что в данном случае в системе «сверх-

решетка в двух внешних резонаторах» при данных параметрах реализуются хаотические колебания в достаточно широком диапазоне постоянного напряжения питания, однако наблюдается большое число окон периодичности, в которых система демонстрирует либо периодические, либо квазипериодические колебания.

Уменьшая частоту внешнего резонатора и приближая ее к частоте паразитного, можно уменьшить области периодичности. Это иллюстрирует бифуркационная диаграмма колебаний напряжения на свёрхрешетке для меньшей частоты внешнего резонатора до $f_2 = 3.1009$ ГГц, представленная на рис. 2, б. Добротности резонаторов были одинаковы $Q_1 = Q_2 = 37.6386$. На бифуркационной диаграмме мы можем наблюдать отсутствие окон периодичности в исследуемом диапазоне напряжения питания. Таким образом, в данном режиме изменение напряжения не приводит к перестройке режима колебаний в системе, что может быть важным для различных приложений.

Для более подробного изучения динамики системы при изменении управляющих параметров была построена бифуркационная диаграмма колебаний напряжения на свёрхрешетке в зависимости от частоты резонатора 2 (рис. 4), которая меняется в широком диапазоне – от 0.1 до 40 ГГц при напряжении $V_0 = 510$ мВ. Было обнаружено большое количество областей хаоса (сплошные области на бифуркационной диаграмме), которые перемежаются областями периодических и квазипериодических колебаний. Это говорит о том, что изменение параметров внешнего высокочастотного резонатора позволяет эффективно управлять системой и перестраивать режимы колебаний в свёрхрешетке от одночастотных до широкополосных хаотических.

В заключение можно отметить, что в данной работе была рассмотрена динамика свёрхрешетки под воздействием внешней резонансной системы, состоящей из двух резонаторов, один из которых моделирует паразитный контур, образованный подводными проводами и контактами свёрхрешетки, а второй является внешним резонатором, который подключается к свёрхрешетке и может эффективно управлять ее динамикой. Для моделирования воздействия электродинамической системы на свёрхрешетку был использован метод эквивалентных схем, который позволил решить задачу в рамках одномодового приближения. Основным результатом исследования – обнаружение эффекта управления динамикой свёрхрешетки путем подключения внешнего резонатора. В частности, свёрхрешетка, помещенная во внешнюю резонансную систему, может генерировать хаотические колебания в широком диапазоне управляющих параметров.

Автор выражает благодарность А.Г. Баланову, А.А. Короновскому и А.Е. Храмову за помощь в проведении исследований и обсуждение полученных результатов.

Работа выполнена при поддержке Совета по грантам Президента Российской Федерации для поддержки молодых российских ученых – кандидатов наук (проект МК-672.2012.2) и ведущих научных школ (проект НШ-1430.2012.2).

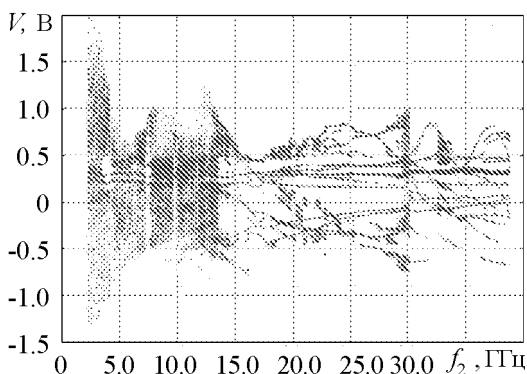


Рис. 4. Бифуркационная диаграмма колебаний напряжения от частоты внешнего резонатора. $V_0 = 510$ мВ, $Q_1 = 75$, $Q_2 = 32.5$

Библиографический список

1. *Esaki L., Tsu R.* Superlattices and negative differential conductivity in semiconductors // IBM J. Res. Develop. 1970. Vol. 14. P. 61.
2. *Bonilla L.L., Grahn H.T.* Non-linear dynamics of semiconductor superlattices // Rep. Prog. Phys. 2005. Vol. 68. P. 577.
3. *Шук А.Я.*, Сверхрешетки – периодические полупроводниковые структуры ФТП. 1974. Т. 8. С. 1841.
4. *Tsu R.* Superlattices to nanoelectronics. Amsterdam: Elsevier Science. 2005.
5. *Короновский А.А., Москаленко О.И., Храмов А. Е.* О применении хаотической синхронизации для скрытой передачи информации // Успехи физических наук. 2009. Т. 179. С. 1281.
6. *Wacker A.* Semiconductor superlattices: A model system for nonlinear transport // Phys. Rep. 2002. Vol. 357. P. 1.
7. *Balanov A.G., Fowler D., Patané A., Eaves L., and Fromhold T.M.* // Phys. Rev. E. 2008. Vol. 77. 026209.
8. *Selskii A.O., Koronovskii A.A., Hramov A.E., Moskalenko O.I., Alekseev K.N., Greenaway M.T., Wang F., Fromhold T.M., Shorokhov A.V., Khvastunov N.N. and Balanov A.G.* // Phys. Rev. B. 2011. Vol. 84, № 23. 235211.
9. *Fromhold T.M., Patané A., Bujkiewicz S., et al.* // Nature(London). 2004. Vol. 428. P. 726.

Саратовский государственный
университет им. Н.Г. Чернышевского

Поступила в редакцию 20.01.2012

STUDY OF CHAOTIC REGIMES OF COLLECTIVE ELECTRON DYNAMICS IN SEMICONDUCTOR SUPERLATTICE IN EXTERNAL RESONATOR

V.V. Makarov

The paper deals the external resonator effect on collective electron dynamics in the semiconductor superlattice. Numerical simulations have shown that semiconductor superlattice which is characterized by only the regular oscillations in autonomous regime demonstrates chaotic microwave oscillations in the case of interaction with the external electro-dynamical system. This phenomena gives a strong potential for novel applications of semiconductor superlattice requiring microwave chaotic signals.

Keywords: Semiconductor superlattices, THz oscillations.



Макаров Владимир Владимирович – родился в Саратове в 1991 году, является студентом 4 курса факультета нелинейных процессов Саратовского государственного университета им. Н.Г. Чернышевского.

410012 Саратов, ул. Астраханская, 83
Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского
E-mail: vladmak404@gmail.com



СИНХРОНИЗАЦИЯ ВОЗБУЖДАЕМЫХ РЕАКТИВНО СВЯЗАННЫХ ФАЗОВЫХ ОСЦИЛЛЯТОРОВ

Л.В. Тюрюкина, Н.Ю. Чернышов

В фазовом приближении исследуется синхронизация внешней силой двух реактивно связанных осцилляторов ван дер Поля. Рассмотрены и сравниваются режимы, когда автономные осцилляторы демонстрируют явление захвата частот и биений с несоизмеримыми частотами. Представлены ляпуновские карты, бифуркационные диаграммы и фазовые портреты. Обсуждаются возможные типы режимов возбуждаемой системы.

Ключевые слова: Синхронизация, фазовые осцилляторы, квазипериодическая динамика.

Введение

Задача о воздействии гармонического сигнала на систему взаимно связанных автоколебательных осцилляторов является фундаментальной для теории колебаний и нелинейной динамики [1–5]. Она является составной частью еще более фундаментальной проблематики, связанной с рождением и синхронизацией многочастотных квазипериодических колебаний. В последнее время выявлен целый ряд новых аспектов такой задачи [6–11]. Так, в работах [6,7] установлены важные особенности устройства плоскости параметров частота – амплитуда воздействия возбуждаемых диссипативно связанных фазовых осцилляторов в случае, когда автономные осцилляторы синхронизованы. Найдена область точного захвата фаз осцилляторов внешней силой, области двух- и трехчастотных квазипериодических режимов. Указано, что границей между последними являются линии седло-узловых бифуркаций устойчивой и неустойчивых инвариантных кривых. В работах [8,9] исследована синхронизация внешней силой при переходе автономных осцилляторов из режима захвата в квазипериодический режим с несоизмеримыми частотами, дана классификация двухчастотных режимов. В работе [10] рассмотрено воздействие внешнего сигнала на два диссипативно связанных генератора Анищенко–Астахова. В [11,12] рассмотрено возбуждение цепочки, состоящей из трех диссипативно связанных фазовых осцилляторов. Эти результаты, однако, относились к случаю простейшей – диссипативной связи осцилляторов. Возможен другой тип связи – реактивный (иногда его называют консервативным), когда связь осуществляется не через скорости изменения переменных, а непосредственно через их значения. Реактивная связь –

явление существенно более тонкое [1–3,5]. Так, даже в случае двух взаимно связанных осцилляторов уравнения в фазовом приближении могут быть получены только во втором порядке по параметру связи, а в первом порядке эффект синхронизации не проявляется [5]. При этом возникает также новый эффект – фазовая бистабильность, когда синхронизация осцилляторов возможна как в фазе, так и в противофазе [3,5]. Отметим, что задача о синхронизации многих осцилляторов в системе с реактивной связью достаточно интересна не только в радиофизической интерпретации, например, она возникает при изучении структурообразования в ионных ловушках [13]. В работе [14] проведено исследование исходной системы двух реактивно связанных осцилляторов ван дер Поля с внешним воздействием в случае, когда в автономном режиме система демонстрирует захват колебаний (резонансный предельный цикл). Кроме того, отметим работу [15], выполненную в стиле компьютерного эксперимента, в которой продемонстрирована возможность двухчастотной и трехчастотной квазипериодичности и хаоса в возбуждаемой системе связанных осцилляторов ван дер Поля в терминах исходных уравнений. Однако детальный анализ устройства пространства параметров не проводился, фазовые уравнения не были получены и их бифуркации не исследовались. В настоящей работе мы, в определенной мере, восполним указанные недостатки: получим и исследуем соответствующее фазовое уравнение, причем рассмотрим как режим захвата, так и режим биений автономных осцилляторов.

1. Укороченные и фазовые уравнения реактивно связанных осцилляторов

Рассмотрим систему двух реактивно связанных осцилляторов ван дер Поля, возбуждаемых внешним гармоническим сигналом

$$\begin{aligned} \ddot{x} - (\lambda - x^2)\dot{x} + (1 - \Delta/2)x + \varepsilon(x - y) &= B \sin \omega t, \\ \ddot{y} - (\lambda - y^2)\dot{y} + (1 + \Delta/2)y + \varepsilon(y - x) &= 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь λ – управляющий параметр, Δ – частотная расстройка осцилляторов, ε – параметр реактивной связи, B – амплитуда воздействия, а ω – его частота. Центральная частота осцилляторов принята за единицу.

Будем считать малыми управляющий параметр, величину связи и отстройку частоты сигнала от единичной. В таком случае можно применить метод медленно меняющихся амплитуд [1–5]. С этой целью представим динамические переменные в виде

$$x = ae^{i\omega t} + a^*e^{-i\omega t}, \quad y = be^{i\omega t} + b^*e^{-i\omega t} \quad (2)$$

и наложим стандартные дополнительные условия

$$\dot{a}e^{i\omega t} + \dot{a}^*e^{-i\omega t} = 0, \quad \dot{b}e^{i\omega t} + \dot{b}^*e^{-i\omega t} = 0. \quad (3)$$

Здесь $a(t)$ и $b(t)$ – комплексные амплитуды осцилляторов относительно внешнего сигнала. Подставим соотношения (2) в уравнения (1) с учетом условий (3), умножим полученные выражения на $e^{-i\omega t}$ и проведем усреднение для исключения быстро осциллирующих членов. При этом используем, что $B \sin \omega t = B(e^{i\omega t} - e^{-i\omega t})/2$.

После соответствующих преобразований получаем укороченные уравнения

$$\begin{aligned} 2\dot{a} &= \lambda a + i \frac{1 - \omega^2 - \Delta/2}{\omega} a - |a|^2 a + i\varepsilon(a - b) - \frac{B}{2\omega}, \\ 2\dot{b} &= \lambda b + i \frac{1 - \omega^2 + \Delta/2}{\omega} b - |b|^2 b + i\varepsilon(b - a). \end{aligned}$$

Введем теперь отстройку частоты сигнала от центральной Ω , так что $\omega = 1 + \Omega$. Тогда при $\omega \approx 1$ получаем $(1 - \omega^2 \mp \Delta/2)/\omega \approx -2\Omega \mp \Delta/2$.

Кроме того, параметр λ может быть убран перенормировкой переменных и параметров по аналогии с [8]. В результате получаем

$$\begin{aligned} 2\dot{a} &= a - i(2\Omega + \Delta/2)a - |a|^2 a + i\varepsilon(a - b) - \frac{B}{2\omega}, \\ 2\dot{b} &= b - i(2\Omega - \Delta/2)b - |b|^2 b + i\varepsilon(b - a). \end{aligned} \quad (4)$$

Введем далее действительные амплитуды $r_{1,2}$ и фазы $\psi_{1,2}$ с помощью соотношений $a = r_1 e^{i\psi_1}$ и $b = r_2 e^{i\psi_2}$. Тогда из (4) получаем

$$\begin{aligned} 2\dot{r}_1 &= r_1 - r_1^3 + \varepsilon r_2 \sin(\psi_2 - \psi_1) - \frac{B}{2} \cos \psi_1, \\ 2\dot{r}_2 &= r_2 - r_2^3 + \varepsilon r_1 \sin(\psi_1 - \psi_2), \\ 2\dot{\psi}_1 &= -2\Omega - \frac{\Delta}{2} + \varepsilon - \frac{r_2}{r_1} \varepsilon \cos(\psi_2 - \psi_1) + \frac{B}{2} \sin \psi_1, \\ 2\dot{\psi}_2 &= -2\Omega + \frac{\Delta}{2} + \varepsilon - \frac{r_1}{r_2} \varepsilon \cos(\psi_2 - \psi_1). \end{aligned} \quad (5)$$

Вслед за [1,5] считаем, что осцилляторы движутся в окрестности стационарных орбит $r_1 = r_2 = 1$, так что $r_{1,2} = 1 + \tilde{r}_{1,2}$. При этом возмущения $\tilde{r}_{1,2}$ являются малыми. Тогда из первых двух уравнений (5) с учетом малости возмущений находим

$$\begin{aligned} 2\dot{\tilde{r}}_1 &= -2\tilde{r}_1 + \varepsilon \sin(\psi_2 - \psi_1), \\ 2\dot{\tilde{r}}_2 &= -2\tilde{r}_2 + \varepsilon r \sin(\psi_1 - \psi_2). \end{aligned} \quad (6)$$

В этих уравнениях возмущения амплитуд сильно демпфированы, так что они очень быстро выходят на стационарные значения

$$\tilde{r}_1 = \frac{\varepsilon}{2} \sin(\psi_2 - \psi_1), \quad \tilde{r}_2 = \frac{\varepsilon}{2} \sin(\psi_1 - \psi_2). \quad (7)$$

Теперь подставим в фазовые уравнения (5) выражения для амплитуд (6) и преобразуем их, оставив члены первого и второго порядка малости по параметру связи ε

$$\begin{aligned} \dot{\psi}_1 &= -\frac{\Delta}{4} - \Omega + \frac{\varepsilon}{2}(1 - \cos \theta) - \frac{\varepsilon^2}{4} \sin 2\theta + \frac{B}{4} \sin \psi_1, \\ \dot{\psi}_2 &= \frac{\Delta}{4} - \Omega + \frac{\varepsilon}{2}(1 - \cos \theta) + \frac{\varepsilon^2}{4} \sin 2\theta. \end{aligned} \quad (8)$$

Здесь $\theta = \psi_1 - \psi_2$. Это и есть искомые фазовые уравнения возбуждаемых реактивно связанных осцилляторов. Отметим, что в соответствии с (8), амплитуда сигнала B

порядка ε^2 , так что исключение члена, пропорционального амплитуде сигнала, при выводе уравнения (6) обосновано.

Отметим, что, вычитая уравнения (8) друг из друга, при отсутствии внешнего сигнала $B = 0$ получаем уравнение для относительной фазы двух реактивно связанных осцилляторов

$$\dot{\theta} = -\frac{\Delta}{2} - \frac{\varepsilon^2}{2} \sin 2\theta. \quad (9)$$

Оно описывает возможность биений при $|\Delta| > \varepsilon^2$ и захвата при $|\Delta| < \varepsilon^2$, а также возможность синфазной ($\theta \approx 0$) и противофазной ($\theta \approx \pi$) синхронизации автономных осцилляторов.

2. Различные типы режимов на плоскости параметров

Рассмотрим динамику полученной фазовой системы (8). Исследуем устройство традиционной для неавтономных систем плоскости частота – амплитуда воздействия (Ω, B) . Сначала обратимся к методу карт ляпуновских показателей [8–9]. Будем вычислять оба ляпуновских показателя Λ_1, Λ_2 системы (8) в каждой точке плоскости параметров. Затем эту плоскость окрашиваем в разные цвета в соответствии с величиной показателей так, чтобы визуализировать следующие режимы:

- P – периодический режим: $\Lambda_1 < 0, \Lambda_2 < 0$;
- T_2 – двухчастотный квазипериодический режим: $\Lambda_1 = 0, \Lambda_2 < 0$;
- T_3 – трехчастотный квазипериодический режим: $\Lambda_1 = 0, \Lambda_2 = 0$.

Полученная карта показана на рис. 1. Выявляются два качественно разных случая. Первый (рис. 1, а) относится к ситуации, когда при отсутствии внешнего сигнала осцилляторы демонстрируют режим биений (частотная расстройка между осцилляторами велика, условие $|\Delta| > \varepsilon^2$). В этом случае можно видеть систему языков двухчастотных режимов, основания которых лежат на оси частот, и которые погружены в область трехчастотной квазипериодичности. А область периодических режимов имеет порог по амплитуде воздействия.

Второй случай (рис. 1, б) отвечает ситуации, когда автономные осцилляторы демонстрируют режим захвата (частотная расстройка мала, условие $|\Delta| < \varepsilon^2$). Теперь область трехчастотных режимов имеет порог по амплитуде воздействия, а область периодических режимов касается оси частот в двух точках. В случае малых амплитуд наблюдается только двухчастотная квазипериодичность.

3. Бифуркационное устройство области полной синхронизации

Обсудим более подробно устройство области P , которой отвечают отрицательные ляпуновские показатели, и которая физически ассоциируется с захватом внешней силой фаз обоих осцилляторов. В случае диссипативной связи за полную синхронизацию отвечает устойчивое состояние равновесия фазовых уравнений [6–8]. Одновременно с ним в системе сосуществуют одно неустойчивое равновесие и два седла. При этом за разрушение полной синхронизации отвечает специ-

фический вариант седло-узловой бифуркации, когда все четыре равновесия *одновременно* попарно сливаются и исчезают, а из их многообразий возникают устойчивая и неустойчивая инвариантные кривые [6–8].

В случае реактивной связи механизмы полной синхронизации и ее разрушения изменяются и усложняются. Прежде всего, возникают две возможности захвата осцилляторов внешним сигналом. Первый случай аналогичен диссипативной связи и определяется устойчивым равновесием системы (8) (рис. 2, фрагмент 1). При этом фазы обоих осцилляторов фиксированы и не меняются во времени. Это *точный захват* фаз, когда в фазовом приближении спектр колебаний каждого осциллятора содержит всего одну линию, отвечающую частоте воздействия.

Другой случай не имеет аналога для диссипативной связи и отвечает устойчивому предельному циклу системы (8), который топологически может быть стянут в точку (рис. 2, фрагмент б). Эти режимы также отвечают захвату обоих осцилляторов внешней силой, однако фазы осцилляторов не являются константами – они осциллируют около некоторого равновесного значения. Поэтому даже в фазовом приближении спектр осцилляторов содержит уже не одну линию, и зависит от временного масштаба осцилляций фазы.

Соответственно увеличивается и количество механизмов, отвечающих за разрушение синхронизации двух осцилляторов. Для их описания обратимся к более подробной картине устройства плоскости параметров, которая выявляется бифуркационным анализом (рис. 3). На этом рисунке также представлены два случая: бие-

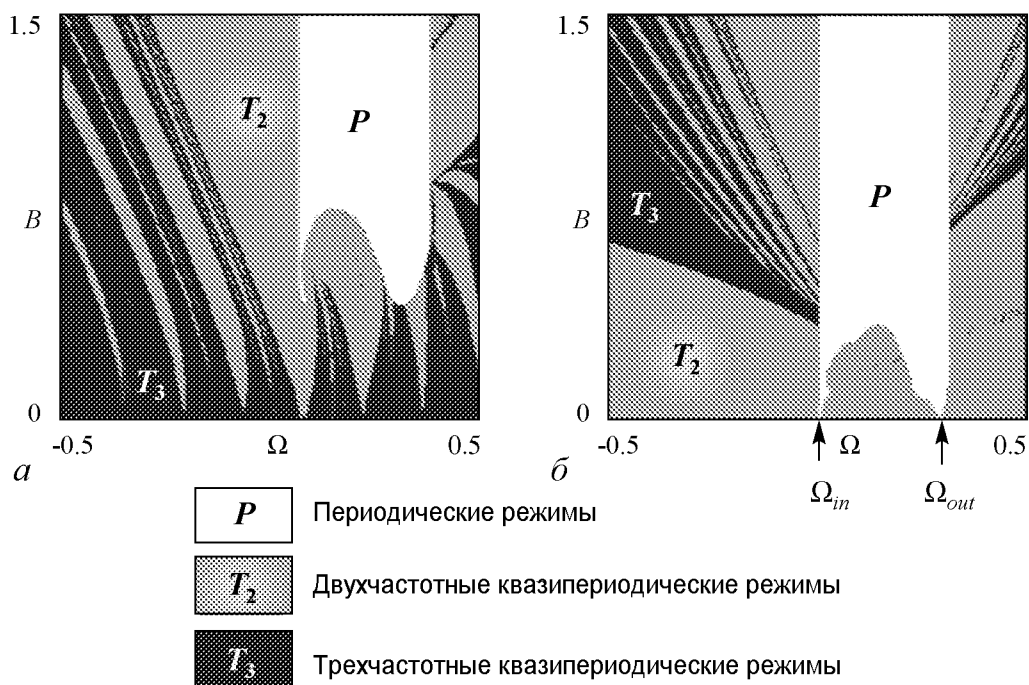


Рис. 1. Карты ляпуновских показателей системы фазовых уравнений (8) на плоскости параметров (Ω, B) , построенные для $\varepsilon = 0.3$ и $\Delta = 0.3$ (а), 0.05 (б)

ний и захвата автономных осцилляторов. В случае биений имеются две ветви линий седло-узловых бифуркаций SN (рис. 3, *a*). Одна из них образует «восьмерку», отрезки которой ограничивают область синхронизации снизу, и две вертикальные линии, которые отвечают за ширину полосы синхронизации. Эти две ветви касаются друг друга в вырожденных точках сборки DC. Линии седло-узловых бифуркаций содержат отрезки SN₁, которые отвечают слиянию устойчивого равновесия и седла, и отрезки SN₂, отвечающие слиянию неустойчивого равновесия и седла. Возможна так-

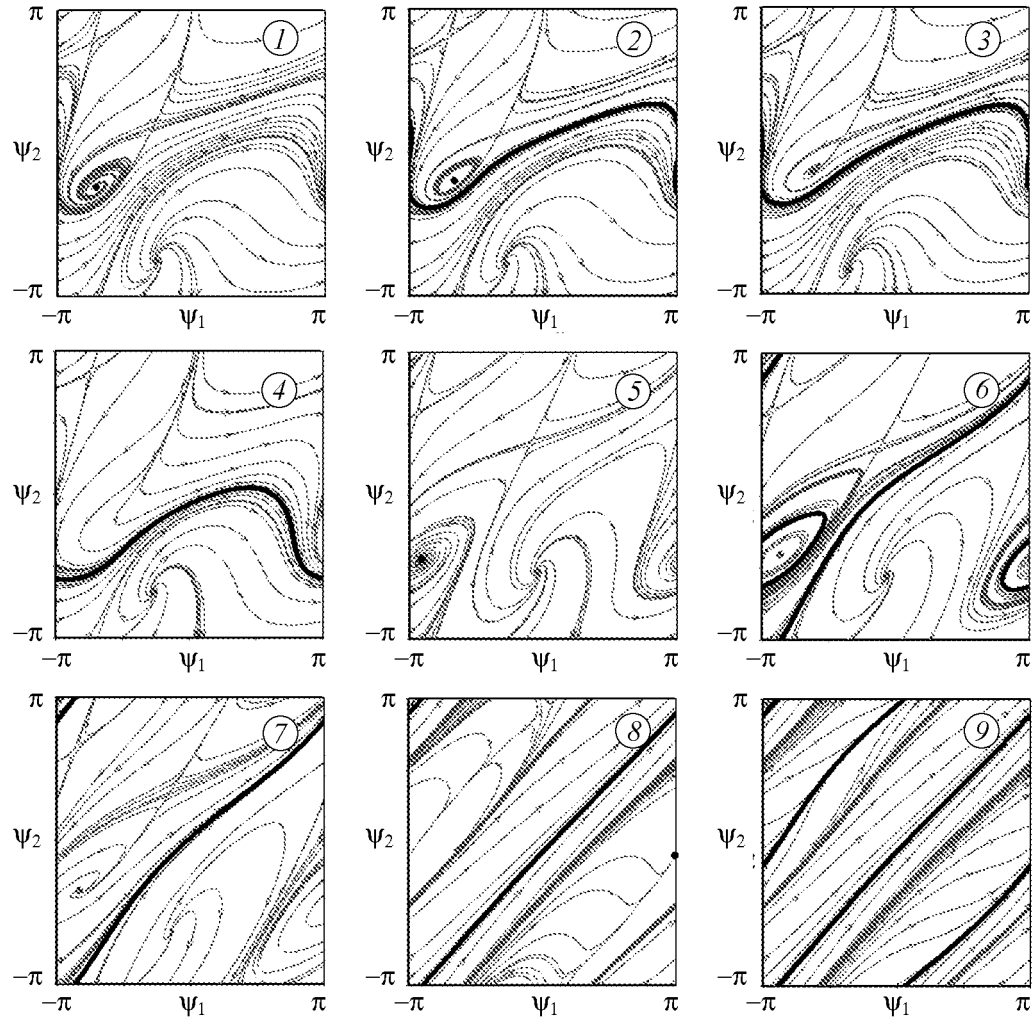


Рис. 2. Фазовые портреты системы фазовых уравнений (8), построенные для $\epsilon = 0.3$ и следующих значений параметров:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Δ	0.3	0.3	0.3	0.3	0.05	0.05	0.05	0.05	0.05
Ω	0.21	0.21	0.22	0.17	0.15	0.15	0.16	0.29	0.35
B	0.8	0.75	0.67	0.66	0.5	0.355	0.23	0.07	0.11

Точки, в которых построены фазовые портреты, отмечены на рис. 3 соответствующими цифрами

же бифуркация Андронова–Хопфа H , которая может быть как *прямой*, и отвечать за возникновение устойчивого предельного цикла (сплошная линия), так и *обратной*, и отвечать за возникновение неустойчивого предельного цикла (пунктирная линия). Линии бифуркации Андронова–Хопфа имеют общие точки с линией седло-узловых бифуркаций – точки Богданова–Тakensа BT .

На рис. 3 даны примеры фазовых портретов в некоторых характерных точках, обозначенных цифрами на рис. 2. Простейший механизм разрушения полной синхронизации связан с седло-узловой бифуркацией состояний равновесия, когда сливаются устойчивое равновесие и седло, в результате чего возникает устойчивая инвариантная кривая, отвечающая за возникновение квазипериодических колебаний (переход от точки 1 к точке 4 на рис. 2, 3). Отличие от случая диссипативной связи [6–8] состоит в том, что при этом вторая пара равновесий сохраняется. При уменьшении амплитуды сигнала они также могут слиться, но теперь уже на нижней ветви линии седло-узловой бифуркации.

Второй механизм наблюдается при переходе от точки 1 к точке 4 через точки 2 и 3 на рис. 2, 3 и состоит в следующем. Сначала в результате нелокальной бифуркации рождается неустойчивый предельный цикл, который затем стягивается к устойчивому равновесию, которое исчезает в результате *обратной* бифуркации Андронова–Хопфа.

Обратимся теперь к более сложному случаю, когда в системе наблюдается захват автономных осцилляторов, рис. 3, б. Здесь возможен еще один механизм разрушения синхронизации (переход от точки 5 к точке 7 через точку 6 на рис. 2, 3).

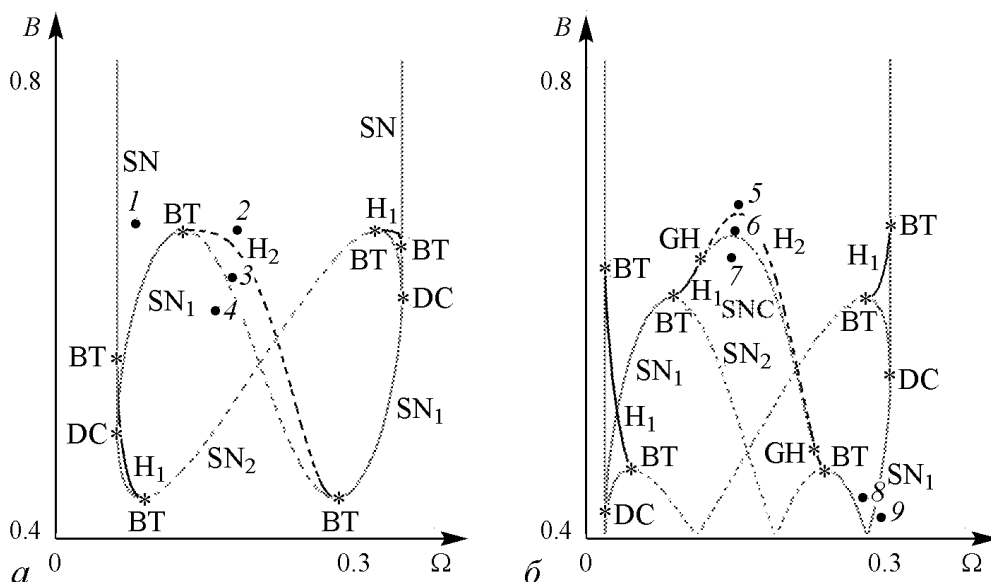


Рис. 3. Бифуркационные линии и точки системы фазовых уравнений (8) на плоскости (Ω, B) , построенные для $\varepsilon = 0.3$ и $\Delta = 0.3$ (а), 0.05 (б). Сплошные линии отвечают бифуркациям устойчивых режимов, пунктирные – неустойчивых. SN – седло-узловая бифуркация неподвижных точек, H – бифуркация Андронова–Хопфа, SNC – седло-узловая бифуркация предельных циклов, DC – вырожденная точка сборки, BT – точка Богданова–Тakensа, GH – обобщенная точка бифуркации Андронова–Хопфа

В этом случае при уменьшении амплитуды внешнего сигнала на линии Н происходит *прямая* бифуркация Андронова–Хопфа, в результате которой устойчивый фокус становится неустойчивым, а в системе рождается устойчивый предельный цикл. Он, в свою очередь, исчезает на линии SNC седло-узловой бифуркации предельных циклов, где сливается с неустойчивым циклом, возникшим в результате нелокальной бифуркации. Таким образом, в фазовом пространстве остается неустойчивый фокус, который, превратившись в неустойчивый узел, сольется с седлом и исчезнет на линии SN.

Отметим, что при двухпараметрическом анализе количество вариантов достаточно велико и зависит от маршрута на плоскости параметров. При этом возможные сценарии зависят от расположения точек коразмерности два – точек Богданова–Такенса BT и обобщенных точек бифуркации Андронова–Хопфа GH, в которых прямая бифуркация Андронова–Хопфа превращается в обратную. В точку GH приходит и линия седло-узловых бифуркаций предельных циклов SNC.

Еще одно отличие от фазовых уравнений с диссипативной связью [5–7] связано с возможностью *фазовой бистабильности* в системе. Так, в точке 8 на рис. 2, 3 сосуществуют устойчивая инвариантная кривая и устойчивое состояние равновесия. Состояние равновесия отвечает сдвигу фаз между осцилляторами, примерно равному π . Таким образом, в этом случае внешний сигнал захватывает противофазные колебания осцилляторов. Квазипериодические же колебания происходят для случая примерного равенства фаз. Если выйти за пределы языка (точка 9 на рис. 2, 3), то возникнет ситуация сосуществования двух устойчивых инвариантных кривых, отвечающих синфазному и противофазным захватам относительной фазы осцилляторов. Аналогично, у второго острия на рис. 3, б внешний сигнал захватывает синфазные колебания осцилляторов. На ляпуновской карте соответствующие значения частот отмечены стрелками и обозначены, как Ω_{in} и Ω_{out} . Нетрудно показать, что они отвечают частотам синфазной и противофазной мод автономных осцилляторов.

Заключение

При выводе фазового уравнения для двух реактивно связанных автоколебательных осцилляторов необходимо учитывать эффекты второго порядка по величине связи. Система демонстрирует периодические, двух- и трехчастотные квазипериодические режимы, которые выявлены на плоскости параметров с помощью метода карт ляпуновских показателей. Наблюдается ряд существенных отличий от случая диссипативной связи. Так захват обоих осцилляторов внешней силой может быть как точным, чему отвечает устойчивое равновесие в фазовых уравнениях, так и не точным, чему отвечает предельный цикл на плоскости фаз. Основные бифуркационные механизмы разрушения синхронизации состоят: в слиянии устойчивого и неустойчивого равновесий, обратной бифуркации Андронова–Хопфа, в результате которой исчезает устойчивое равновесие, и в возможности седло-узловой бифуркации устойчивого и неустойчивого предельных циклов. При этом картина бифуркаций включает также бифуркации коразмерности два: точки Богданова–Такенса и обобщенной

бифуркации Андронова–Хопфа. Особенность системы состоит в возможности фазовой бистабильности, что проявляется в сосуществовании разных типов устойчивых режимов (равновесий, предельных циклов, инвариантных кривых). При малой амплитуде воздействия сигнал может захватывать как противофазные, так и синфазные взаимные колебания осцилляторов.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ 11-02-91334-НННО.

Библиографический список

1. *Пиковский А., Розенблюм М., Куртс Ю.* Синхронизация. Фундаментальное нелинейное явление. М.: Техносфера. 2003. 494 с.
2. *Ланда П.С.* Автоколебания в системах с конечным числом степеней свободы. М.: Наука. 1980. 360 с.
3. *Balanov A.G., Janson N.B., Postnov D.E., Sosnovtseva O.* Synchronization: from simple to complex. Springer, 2009. 437 p.
4. *Анищенко В.С., Астахов В.В., Вадивасова Т.Е., Стрелкова Г.И.* Синхронизация регулярных, хаотических и стохастических колебаний. Москва; Ижевск: Институт компьютерных исследований. 2008. 144 с.
5. *Ivanchenko M.V., Osipov G.V., Shalfeev V.D., Kurths J.* Synchronization of two non-scalar-coupled limit-cycle oscillators // *Physica D.* 2004. Vol. 189, № 1–2. P. 8.
6. *Anishchenko V., Astakhov S., Vadivasova T.* Phase dynamics of two coupled oscillators under external periodic force // *Europhysics Letters.* 2009. Vol. 86. P. 30003.
7. *Анищенко В.С., Астахов В.В., Вадивасова Т.Е., Феоктистов А.В.* Численное и экспериментальное исследование внешней синхронизации двухчастотных колебаний // *Нелинейная динамика.* 2009, № 2. С. 237.
8. *Кузнецов А.П., Сатаев И.Р., Тюрюкина Л.В.* Фазовая динамика возбуждаемых квазипериодических автоколебательных осцилляторов // *Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика.* 2010, № 4. С. 17.
9. *Кузнецов А.П., Сатаев И.Р., Тюрюкина Л.В.* Вынужденная синхронизация двух связанных автоколебательных осцилляторов ван дер Поля // *Нелинейная динамика.* 2011, № 3. С. 411.
10. *Коблянский С.А., Шабунин А.В., Астахов В.В.* Вынужденная синхронизация периодических колебаний в системе с фазовой мультистабильностью // *Нелинейная динамика.* 2010, № 2. С. 277.
11. *Кузнецов А.П., Сатаев И.Р., Тюрюкина Л.В.* На пути к многомерным торами // *Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика.* 2010, № 6. С. 65.
12. *Kuznetsov A.P., Sataev I.R., Turukina L.V.* On the road towards multidimensional tori // *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulations.* 2011. Vol. 16. P. 2371.
13. *Lee E., Cross M.C.* Pattern formation with trapped ions // *Phys. Rev. Lett.* 2011. Vol. 106. 143001.

14. Анищенко В.С., Николаев С.М., Куртц Ю. Механизмы синхронизации резонансного предельного цикла на двумерном торе // Нелинейная динамика. 2008, № 1. С. 39.
15. Battelino P.M. Persistence of three-frequency quasi-periodicity under large perturbations // Phys. Rev. A. 1988. Vol. 38. P. 1495.

СФ ИРЭ им. В.А. Котельникова РАН Поступила в редакцию 10.01.2012
Саратовский госуниверситет

SYNCHRONIZATION OF REACTIVELY COUPLED PHASE OSCILLATORS DRIVEN BY EXTERNAL FORCE

L.V. Turukina, N.Yu. Chernyshov

Synchronization of two reactively coupled van der Pol oscillators with external force is investigated in this paper. We consider and compare quasi-periodic motion of oscillators with frequency-locked mode. The paper includes maps of Lyapunov's exponents, two-parametric bifurcation diagrams and phase portraits. Possible types of motion in driven system are discussed.

Keyword: Synchronization, phase oscillators, quasi-periodicity.



Тюрюкина Людмила Владимировна – родилась в 1977 году. Окончила факультет нелинейных процессов в Саратовском госуниверситете (2000). Кандидат физико-математических наук (2003, СГУ), имеет звание доцента по специальности радиофизика (2009). Старший научный сотрудник Саратовского филиала Института радиотехники и электроники РАН, доцент базовой кафедры динамических систем СГУ в СФ ИРЭ РАН. Область научных интересов – новые аспекты явления синхронизации в системах различной физической природы (радиофизические системы, модели турбулентности, модели биофизических систем и др.); контроль (управление) неустойчивыми режимами; динамический хаос; физические системы с гиперболическими аттракторами. Автор более 80 публикаций, в том числе 30 статей в российских и зарубежных журналах и 3 учебно-методических пособий.

410019 Саратов, ул. Зеленая, д. 38
Саратовский филиал Института радиотехники
и электроники им. В.А. Котельникова РАН
E-mail: lvtur@rambler.ru



Чернышов Николай Юрьевич – родился в Саратове (1988). Окончил Саратовский государственный университет (2011). Аспирант базовой кафедры динамических систем факультета нелинейных процессов СГУ. Область научных интересов – математическое моделирование, теория синхронизации, нелинейная динамика и ее приложения. Имеет 5 научных публикаций.

410012 Саратов, ул. Астраханская, 83
Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского
E-mail: expzero@mail.ru



ВЗАИМОСВЯЗЬ ОБОБЩЕННОЙ И ФАЗОВОЙ СИНХРОНИЗАЦИИ В СИСТЕМЕ ДВУХ ОДНОНАПРАВЛЕННО СВЯЗАННЫХ ХАОТИЧЕСКИХ ОСЦИЛЛЯТОРОВ

А.С. Павлов

Исследовано расположение границы обобщенной синхронизации в системе двух одинаково связанных хаотических осцилляторов в зависимости от величины расстройки параметров между взаимодействующими системами. Обнаружены особенности поведения границы в области относительно больших значений расстройки собственных частот взаимодействующих систем. С помощью анализа трансформации спектрального состава сигнала с ведомой системы объяснен характер расположения границы и физические механизмы, приводящие к установлению режима обобщенной синхронизации.

Ключевые слова: Хаотические осцилляторы, обобщенная синхронизация, фазовая синхронизация, фазовая когерентность, фурье-спектры.

Синхронизация хаотических колебаний – одно из важнейших нелинейных явлений, привлекающих к себе широкое внимание исследователей [1], имеющих как теоретическое, так и практическое значение (например, в биологических и физиологических задачах, при скрытой передаче информации с помощью хаотических сигналов, при управлении системами сверхвысокочастотной электроники и т.п.) [2–4]. В настоящее время выявлено несколько типов хаотической синхронизации, среди которых наибольший интерес представляет режим обобщенной синхронизации [5], а также его взаимосвязь с фазовой синхронизацией [6]. Режим обобщенной синхронизации означает, что между состояниями взаимодействующих одинаково связанных ведущего $x_d(t)$ и ведомого $x_r(t)$ хаотических осцилляторов, существует такая функциональная зависимость $F[\cdot]$, что после завершения переходного процесса устанавливается функциональное соотношение $x_r(t) = F[x_d(t)]$. Известно несколько методов для диагностирования режима обобщенной синхронизации между хаотическими осцилляторами – метод ближайших соседей [5,7], метод расчета условных ляпуновских экспонент [8] и метод вспомогательной системы [9]. Фазовая же синхронизация означает, что происходит захват фаз хаотических сигналов, в то время как амплитуды этих сигналов остаются не связанными друг с другом и выглядят хаотическими [6].

В работе [10] было показано, что в связанных хаотических системах Ресслера в зависимости от величины расстройки управляющих параметров эти режимы ведут себя по-разному. Если параметры взаимодействующих систем расстроены относительно слабо, режим обобщенной синхронизации оказывается сильнее фазовой, в то время как при достаточно больших значениях расстройки параметров взаимодействующих систем пороговое значение параметра связи, соответствующее установлению фазовой синхронизации, существенно превосходит значение, соответствующее установлению режима обобщенной синхронизации. В этом случае пороговое значение параметра связи, соответствующее установлению обобщенной синхронизации, практически не зависит от величины расстройки между системами [11,12], а возникновение/разрушение фазовой синхронизации сопровождается появлением/потерей фазовой когерентности хаотического аттрактора одной из взаимодействующих систем [13,14].

Позднее, в работах [15,16] были объяснены причины такого поведения границ возникновения синхронных режимов и выявлены физические механизмы, приводящие к их установлению. В частности, определено, что в области относительно слабых значений расстройки собственных частот взаимодействующих систем Ресслера обобщенная синхронизация возникает за счет синхронизации основной спектральной компоненты и ее субгармоник (фазовая синхронизация в данном случае возникает по сценарию захвата собственных частот взаимодействующих систем), в то время как в области относительно больших значений частотной расстройки установление обобщенной синхронизации сопровождается синхронизацией двух спектральных компонент, соответствующих собственной частоте ведущей системы и основной частоте ведомой системы.

В настоящей работе проводится исследование характера расположения границ обобщенной и фазовой синхронизации в системе двух однонаправленно связанных генераторов на туннельном диоде [13], а также производится аналогичное исследование для системы двух однонаправленно связанных хаотических осцилляторов Ресслера при изменении параметра, отвечающего за когерентность хаотического аттрактора [14].

Начнем рассмотрение с системы двух однонаправленно связанных генераторов на туннельном диоде. Данная модель в безразмерном виде описывается следующей системой дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_d &= \omega_d^2 (hx_d + y_d - z_d), \\
 \dot{y}_d &= -x_d, \\
 \dot{z}_d &= (x_d - f(z_d))/\mu, \\
 \dot{x}_r &= \omega_r^2 (h(x_r - \varepsilon(y_d - y_r)) + y_r - z_r), \\
 \dot{y}_r &= -x_r + \varepsilon(y_d - y_r), \\
 \dot{z}_r &= (x_r - f(z_r))/\mu,
 \end{aligned} \tag{1}$$

где в качестве безразмерной характеристики нелинейного элемента $f(\xi)$ использовалась зависимость $f(\xi) = -\xi + 0.002 \operatorname{sh}(5\xi - 7.5) + 2.9$; $h = 0.2$, $\mu = 0.1$ – управляющие параметры; ε – параметр связи. Управляющий параметр ведомой системы $\omega_r = 1.02$, характеризующий основную частоту колебаний, был фиксирован,

а аналогичный параметр ведущей системы ω_d варьировался в диапазоне от 0.85 до 1.12 для того, чтобы задать расстройку взаимодействующих осцилляторов. При указанных значениях управляющих параметров h , μ , ω_r во всем диапазоне значений параметра ω_d хаотические аттракторы обеих систем в отсутствие связи являются фазово-когерентными [13].

На рис. 1 показано расположение границы возникновения режима обобщенной синхронизации (GS), фазовой синхронизации (PS) и граница фазовой когерентности (CM) системы двух связанных хаотических осцилляторов (1) на плоскости управляющих параметров (ω_d, ε) . Линия 1 соответствует границе установления режима фазовой синхронизации, линия 2 – границе установления режима обобщенной синхронизации, а линия 3 – границе возникновения/потери фазовой когерентности хаотическим аттрактором ведомой системы. Порог возникновения обобщенной синхронизации определялся с помощью вычисления условных ляпуновских экспонент для системы (1) и уточнялся методом вспомогательной системы. Для определения момента потери/возникновения фазовой когерентности хаотического аттрактора ведомой системы была вычислена мера когерентности [14] при изменении параметра связи. Наличие фазовой синхронизации определялось выполнением условия захвата фаз. Мгновенная фаза хаотического сигнала вводилась традиционным способом как угол поворота на плоскости (x, y) .

Из рис. 1 видно, что границы возникновения синхронных режимов являются принципиально асимметричными относительно линии $\omega_d = \omega_r$, что обусловлено сильным влиянием диссипации в ведомой системе при увеличении параметра связи. В то же самое время, порог возникновения режима обобщенной синхронизации при малых расстройках взаимодействующих систем оказывается существенно выше, чем при больших. Однако такая особенность наблюдается только для значений $\omega_d > \omega_r$, в то время как в области $\omega_d < \omega_r$ имеет место слабая зависимость порогового значения установления синхронного режима от параметра ведущей системы. В области относительно больших значений расстройки собственных частот (и слева, и справа от $\omega_d = \omega_r$) разрушение фазовой синхронизации происходит через потерю фазовой когерентности хаотического аттрактора (см. рис. 1, линия 3). Однако пороговое значение параметра связи, соответствующее установлению фазовой синхронизации в области относительно больших значений расстройки собственных частот при $\omega_d < \omega_r$, оказывается существенно ниже, чем для той же величины расстройки справа от $\omega_d = \omega_r$. Оно соответствует тем значениям параметра связи, при которых режим фазовой синхронизации реализуется в области относительно слабых значений частотной расстройки в случае, если $\omega_d > \omega_r$.

Объяснить причины такого поведения границ обобщенной и фазовой синхронизации на плоскости параметров (ω_d, ε) возможно следующим образом. Понятно, что в области относительно слабых значений расстройки собственных частот

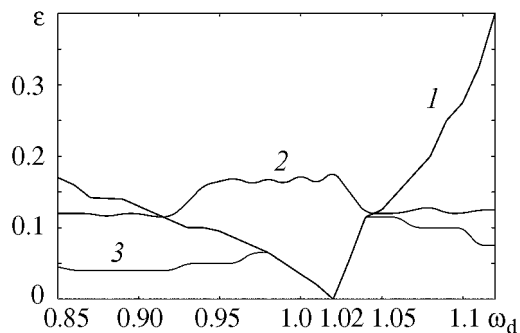


Рис. 1. Границы возникновения режима обобщенной синхронизации, фазовой синхронизации и граница фазовой когерентности для двух однонаправленно связанных генераторов на туннельном диоде (1) на плоскости управляющих параметров (ω_d, ε)

($\omega_d \in [0.98, 1.04]$), где разрушение фазовой синхронизации происходит без потери фазовой когерентности хаотического аттрактора ведомой системы фазовая синхронизация возникает за счет захвата основных частотных компонент ведущей и ведомой систем, в то время как режим обобщенной синхронизации обусловлен синхронизацией основной спектральной компоненты ведомой системы и ее субгармоник [15,16]. В области $\omega_d > 1.04$ в случае относительно больших значений расстройки собственных частот ниже границы фазовой синхронизации хаотический аттрактор ведомой системы (1) становится фазово-некогерентным, что и приводит к разрушению режима фазовой синхронизации. Кроме того, как нетрудно видеть из рис. 1, граница обобщенной синхронизации в области относительно больших значений расстройки частот и линии возникновения/потери фазовой когерентности хаотического аттрактора оказываются близки друг к другу.

Зафиксируем параметр ведущей системы $\omega_d = 1.1$. При выбранных значениях управляющих параметров в системе двух однонаправленно связанных генераторов на туннельном диоде (1) при увеличении параметра связи происходит следующее: при $\varepsilon = \varepsilon_{CM} = 0.1$ аттрактор ведомой системы теряет фазовую когерентность, при $\varepsilon = \varepsilon_{GS} = 0.12$ реализуется режим обобщенной синхронизации, при $\varepsilon = \varepsilon_{PS} = 0.27$ возникает режим фазовой синхронизации.

На рис. 2 приведены фурье-спектры сигнала с ведомой системы при различных значениях параметра связи. Видно, что интенсивность спектральной компоненты на частоте ведущей системы растёт при увеличении параметра связи ε , а амплитуда спектральной компоненты на частоте ведомой системы уменьшается. В фурье-спектре при $\varepsilon = 0.3$ полностью пропадает спектральная компонента на частоте ведомой системы, остаётся лишь одна четко выраженная спектральная компонента на частоте ведущей системы. В данном случае обобщенная синхронизация возникает за счет синхронизации двух четко выраженных спектральных компонент (на частотах ведущей и ведомой систем), интенсивности которых вблизи порога обобщенной синхронизации примерно совпадают.

Значительно интереснее обстоит дело с областью больших расстроек, где $\omega_d < 0.98$. Возникновение/разрушение режима фазовой синхронизации в этом случае по-прежнему связано с появлением/потерей фазовой когерентности хаотического аттрактора ведомой системы, в то время как соотношение режимов обобщенной

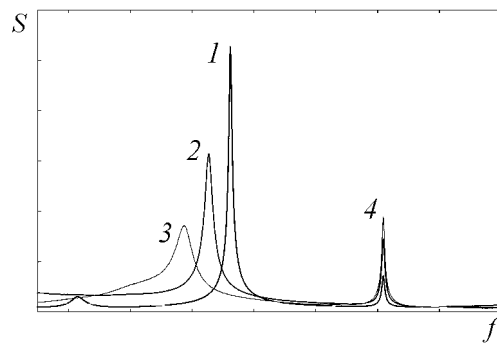


Рис. 2. Фурье-спектры ведомой системы (1) при различных значениях параметра связи ε : 0.05 (1); 0.1 (2); 0.12 (3); 0.3 (4). Значение параметра ведущей системы $\omega_d = 1.1$

и фазовой синхронизации является таким же, как в случае относительно слабых значений расстройки собственных частот. Более того, пороговое значение параметра связи, соответствующее границе обобщенной синхронизации в этом случае примерно в два раза превосходит пороговое значение параметра связи, соответствующее установлению режима обобщенной синхронизации при $\omega_d > 1.04$ и практически не зависит от значения $\omega_d < 0.98$. Понятно, что механизм возникновения обобщенной синхронизации в данном случае должен быть иным.

Исследуем взаимосвязь между режимами обобщенной и фазовой синхронизации, а также возникновением/потерей фазовой когерентности хаотического аттрактора в этой области более детально. Зафиксируем параметр ведущей системы $\omega_d = 0.96$. При выбранных значениях управляющих параметров в системе двух однонаправленно связанных генераторов на туннельном диоде (1) при увеличении параметра связи происходит следующее: при $\varepsilon = \varepsilon_{CM} = 0.048$ аттрактор ведомой системы теряет фазовую когерентность, при $\varepsilon = \varepsilon_{PS} = 0.075$ возникает режим фазовой синхронизации, при $\varepsilon = \varepsilon_{GS} = 0.175$ реализуется режим обобщенной синхронизации.

На рис. 3 приведены фурье-спектры сигнала с ведомой системы при различных значениях параметра связи. Видно, что при увеличении параметра связи интенсивность спектральной компоненты на частоте ведомой системы уменьшается, а на частоте ведущей системы – увеличивается. При этом происходит сдвиг основной частоты колебаний ведомой системы в сторону меньших значений параметра связи, а так как $\omega_d < \omega_r$, при некотором значении параметра связи (когда интенсивность спектральной компоненты на частоте ведущей системы в спектре ведомой системы станет значительной) произойдет захват основных частот взаимодействующих систем, а следовательно – установление фазовой синхронизации. Ниже порога возникновения фазовой синхронизации из-за наличия двух спектральных компонент в спектре ведомой системы ее аттрактор будет фазово-некогерентным. Однако возникновение фазовой синхронизации будет реализовано по сценарию, характерному для случая относительно слабых значений расстройки собственных частот. Действительно, уже при $\varepsilon = 0.1$ в фурье-спектре ведомой системы присутствует одна четко выраженная спектральная компонента на частоте ведущей системы. Понятно, что режим обобщенной синхронизации в данном случае будет возникать также по сценарию, характерному для относительно малых значений расстройки собственных частот: возникновение этого режима обусловлено синхронизацией основной спектральной компоненты ведущей системы и ее субгармоник.

Перейдем к рассмотрению системы двух однонаправленно связанных хаотических осцилляторов Ресслера при изменении параметра когерентности [14]. Данная модель в безразмерном виде описывается следующей системой дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_d &= -\omega_d y_d - z_d, \\
 \dot{y}_d &= \omega_d x_d + a y_d, \\
 \dot{z}_d &= 0.1 + z_d (x_d - 8.5), \\
 \dot{x}_r &= -\omega_r y_r - z_r, \\
 \dot{y}_r &= \omega_r x_r + a y_r + d (y_d - y_r), \\
 \dot{z}_r &= 0.1 + z_r (x_r - 8.5),
 \end{aligned}
 \tag{2}$$

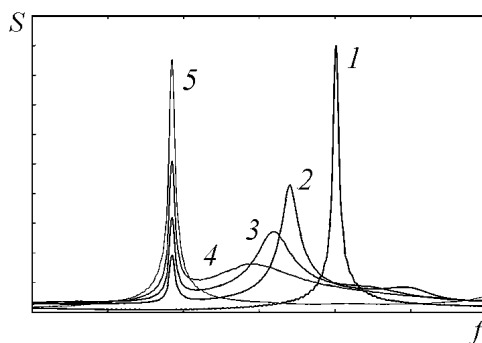


Рис. 3. Фурье-спектры ведомой системы (1) при различных значениях параметра связи ε : 0 (1); 0.04 (2); 0.05 (3); 0.06 (4); 0.1 (5). Значение параметра ведущей системы $\omega_d = 0.96$

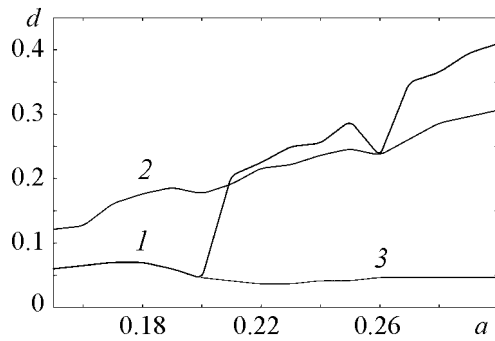


Рис. 4. Границы возникновения режима обобщенной синхронизации, фазовой синхронизации и граница фазовой когерентности для двух однонаправленно связанных хаотических осцилляторов Ресслера (2) при изменении параметра, отвечающего за фазовую когерентность

ми были определены границы исследуемых режимов. На рис. 4 показано расположение границы возникновения режима обобщенной синхронизации, фазовой синхронизации и граница фазовой когерентности в системе двух однонаправленно связанных хаотических осцилляторов Ресслера (2) при изменении параметра когерентности на плоскости управляющих параметров (a, d) . Линия 1 соответствует границе установления режима фазовой синхронизации, линия 2 – границе установления режима обобщенной синхронизации, а линия 3 – границе возникновения/потери фазовой когерентности хаотическим аттрактором ведомой системы. Из рисунка видно, что при $a < 0.2$ разрушение фазовой синхронизации происходит без потери фазовой когерентности хаотического аттрактора ведомой системы. Можно ожидать, что фазовая синхронизация возникает в данном случае за счет захвата основных частотных компонент ведущей и ведомой систем, в то время как режим обобщенной синхронизации обусловлен синхронизацией основной спектральной компоненты ведомой системы и ее субгармоник [15,16]. При $a > 0.2$ наблюдается поведение, аналогичное случаю однонаправленно связанных генераторов на туннельном диоде при относительно больших значениях расстройки собственных частот: ниже границы фазовой синхронизации хаотический аттрактор ведомой системы становится фазово-некогерентным, что и приводит к разрушению режима фазовой синхронизации.

Таким образом, в настоящей работе рассмотрен вопрос о возникновении обобщенной синхронизации в системе двух однонаправленно связанных хаотических осцилляторов в зависимости от величины расстройки параметров между взаимодействующими системами. Показано, что возникновение режима обобщенной синхронизации в случае относительно сильно расстроенных параметров возможно по сценарию, характерному для относительно слабых значений расстройки собственных частот. При помощи анализа трансформации спектрального состава сигнала ведомой системы объяснен характер расположения границы установления синхронного режима в исследуемой системе, а также его взаимосвязь с режимом фазовой синхронизации. Также было установлено, что не только расстройка собственных частот взаимодействующих систем влияет на сценарий возникновения исследуемых типов

где d – параметр связи. Управляющий параметр ведомой системы $\omega_r = 1.02$, характеризующий основную частоту колебаний, и аналогичный параметр ведущей системы $\omega_d = 0.98$ были фиксированы, параметр a , показывающий степень когерентности, варьировался в диапазоне от 0.15 до 0.3. При указанных значениях управляющих параметров ω_r и ω_d во всем диапазоне значений параметра a хаотические аттракторы обеих систем в отсутствие связи являются фазово-когерентными [14].

Как и в случае двух однонаправленно связанных генераторов на туннельном диоде, аналогичными метода-

синхронизации и наличие фазовой некогерентности аттрактора, но и изменение параметра, отвечающего за фазовую когерентность хаотического аттрактора в системе, приводит к изменению характера возникновения этих режимов.

Работа выполнена при поддержке ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России на 2009–2013 годы».

Библиографический список

1. *Boccaletti S., Kurths J., Osipov G.V., Valladares D.L., Zhou C.S.* The synchronization of chaotic systems // *Physics Reports*. 2002. Vol. 366. P. 1.
2. *Короновский А.А., Москаленко О.И., Храмов А.Е.* О применении хаотической синхронизации для скрытой передачи информации // *УФН*. 2009. Т. 179, № 12, С. 1281.
3. *Glass L.* Synchronization and rhythmic processes in physiology // *Nature*. 2001. Vol. 410, № 6825. P. 277.
4. *Трубецков Д.И., Короновский А.А., Храмов А.Е.* Синхронизация распределенных электронно-волновых автоколебательных систем с обратной волной // *Изв. вузов. Радиофизика*. 2004. XLVII. № 5–6 С. 305.
5. *Rulkov N.F., Sushchik M.M., Tsimring L.S., Abarbanel H.D.I.* Generalized synchronization of chaos in directionally coupled chaotic systems // *Phys. Rev. E*. 1995. Vol. 51, № 2. P. 980.
6. *Pikovsky A. S., Rosenblum M. G., Kurths J.* Phase synchronization in regular and chaotic systems // *Int. J. Bifurcation and Chaos*. 2000. Vol. 10, № 10. P. 2291.
7. *Parlitz U., Junge L., Lauterborn W., Kocarev L.* Experimental observation of phase synchronization // *Phys. Rev. E*. 1996. Vol. 54. Т. 2. P. 2115.
8. *Pyragas K.* Weak and strong synchronization of chaos // *Phys. Rev. E*. 1997. Vol. 56, № 5. P. 5183.
9. *Abarbanel H.D.I., Rulkov N.F., Sushchik M.* Generalized synchronization of chaos: The auxiliary system approach // *Phys. Rev. E*. 1996. Vol. 53, № 5. P. 4528.
10. *Zheng Z., Hu G.* Generalized synchronization versus phase synchronization // *Phys. Rev. E*. 2000. Vol. 62, № 6. С. 7882.
11. *Храмов А.Е., Короновский А.А., Москаленко О.И.* Generalized synchronization onset // *Europhysics Letters*. 2005. Vol. 72, № 6. P. 901.
12. *Короновский А.А., Москаленко О.И., Храмов А.Е.* Об установлении режима обобщенной синхронизации в хаотических осцилляторах // *Письма в ЖТФ*. 2006. Т. 32. № 3. С. 40.
13. *Короновский А.А., Куровская М.К., Москаленко О.И., Храмов А.Е.* Два сценария разрушения режима хаотической фазовой синхронизации // *ЖТФ*. 2007. Т. 77, № 1. С. 21.
14. *Храмов А.Е., Короновский А.А., Куровская М.К.* Two types of phase synchronization destruction // *Phys. Rev. E*. 2007. Vol. 75. 036205.

15. *Короновский А.А., Москаленко О.И., Храмов А.Е.* Граница возникновения режима обобщенной синхронизации хаотических осцилляторов // Радиотехника и электроника. 2007. Т. 52, № 8. С. 949.

16. *Москаленко О.И.* Синхронизация спектральных компонент в системах с однонаправленной связью // ЖТФ. 2010 Т. 80. № 8. С. 1.

Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского

Поступила в редакцию 29.12.2012

RELATIONSHIP OF GENERALIZED AND PHASE SYNCHRONIZATION IN TWO UNIDIRECTIONALLY COUPLED CHAOTIC OSCILLATORS

A.S. Pavlov

The behavior of the boundary of generalized synchronization in two unidirectionally coupled chaotic oscillators depending on the value of the control parameter mismatch between interacting systems has been studied. Peculiarities in its behavior in the field of the relatively large values of the control parameter mistuning have been found. The character of this behavior and physical mechanisms resulting in the generalized synchronization regime onset in such systems have been explained by the analysis of the spectral compound of signal from response system.

Keywords: Chaotic oscillators, generalized synchronization, phase coherence, Fourier spectra.



Павлов Александр Сергеевич – родился в Саратове (1989), с отличием окончил Саратовский государственный университет (2011). Аспирант кафедры физики открытых систем СГУ. Автор нескольких статей в центральных реферируемых журналах.

410012 Саратов, ул. Астраханская, 83

Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского

E-mail: murderer@bk.ru



МЕТОД ОЦЕНКИ СПЕКТРА ЛЯПУНОВСКИХ ПОКАЗАТЕЛЕЙ ПО ВРЕМЕННОЙ РЕАЛИЗАЦИИ

Ю.А. Передерий

В статье предложен новый метод оценки спектра ляпуновских показателей по временной реализации. Рассматриваются и сравниваются уже известные группы методов по данной тематике. Описание метода дается на примере системы Ресслера. Также приводятся результаты численного моделирования.

Ключевые слова: Ляпуновские показатели, временные ряды, численное моделирование, алгоритм Бенеттина.

В нелинейной динамике хаос в различных системах является весьма широко распространенным явлением [1]. Множество усилий прилагают исследователи для изучения этого феномена. Изучение хаотических систем открывает новые перспективы для применения их в различных сферах деятельности, например, с помощью хаотических сигналов возможно обеспечить скрытую передачу информации.

Одним из инструментов, которые широко применяются при изучении различного рода хаотических процессов, являются ляпуновские показатели. Они используются, в частности, для детектирования режима гиперхаоса [2], для установления границы возникновения обобщенной синхронизации [3] или индуцированной шумом синхронизации [4,5]. Ляпуновские показатели представляют собой набор (спектр) действительных чисел (для удобства их упорядочивают по убыванию: $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n$) и характеризуют степень сжатия или растяжения вдоль некоторых направлений в фазовом пространстве фазового «облака», состоящего из изображающих точек. Количество показателей равно размерности фазового пространства исследуемой системы. В частности, индикатором наличия хаотической динамики в исследуемой системе является положительное значение одного или нескольких ляпуновских показателей. Это говорит о том, что в фазовом пространстве две близкие траектории с течением времени будут удаляться друг от друга, но не будут покидать аттрактор, поскольку динамический хаос возникает в диссипативных системах.

Ляпуновские показатели можно определить аналитически только в исключительных случаях на примере простых отображений. Однако существуют процедуры

численной оценки всего спектра ляпуновских показателей динамической системы, если известны уравнения, которые описывают ее эволюцию [1]. Для этого необходимо решать исходные уравнения системы совместно с набором уравнений в вариациях, описывающих эволюцию малого возмущения вблизи некоторой опорной траектории. При этом отслеживается, как изменяется модуль этих возмущений во времени с определенным интервалом и производится перенормировка и ортогонализация по Граму–Шмидту векторов возмущения. Данная процедура давно известна и широко используется для оценки спектра ляпуновских показателей.

Отдельный интерес представляет собой оценка ляпуновских показателей по временной реализации, поскольку уравнения эволюции, описывающие динамику системы во времени, как правило, неизвестны. Оценка ляпуновских показателей в таком случае представляет определенные трудности, однако в этом направлении исследований достигнуты некоторые успехи.

Существуют два основных метода оценки ляпуновских показателей по реализации. Для применения этих методов сначала следует восстановить аттрактор в фазовом пространстве некоторой размерности D методом Такенса. Первый метод [6] заключается в том, что в восстановленном фазовом пространстве ищутся две близкие траектории и отслеживается их поведение с течением времени (алгоритм Бенеттина). При этом оценка спектра ляпуновских показателей происходит аналогично оценке по исходной системе уравнений вместе с уравнениями в вариациях. К достоинствам этого метода можно отнести его относительную простоту. Но недостатком является то, что при таком подходе затруднительно определить весь спектр ляпуновских показателей, поскольку определяющую роль при рассмотрении двух близких траекторий играет старший ляпуновский показатель. Второй метод [7–9] заключается в использовании якобиана, поскольку ляпуновские показатели можно определить как собственные числа матрицы Якоби для данной системы, которая сгенерировала рассматриваемую реализацию. Достоинством этого метода является возможность оценить спектр неотрицательных ляпуновских показателей по достаточно короткой реализации, а недостатком – высокая чувствительность к шумам и ошибкам, для уменьшения которой применяются различные приемы и алгоритмы.

Адекватно оценить отрицательные ляпуновские показатели в обоих методах весьма сложно. Это связано с тем, что хаотическая динамика (нас интересует оценка спектра именно в хаотических системах) в D -мерном пространстве, как правило, почти вся происходит на $(D - 1)$ -мерной гиперплоскости фазового пространства. Из-за этого матрица эволюции (якобиан) становится плохо определенной, что сказывается на вычислении отрицательных ляпуновских показателей. По первому методу также сложно оценить спектр ляпуновских показателей, так как система векторов возмущений не будет ортогональной, что является необходимым условием для успешной оценки спектра. Следует отметить, что для оценки спектра ляпуновских показателей важно определить точную размерность фазового пространства, в которое восстанавливается реализация, поскольку, если восстановить аттрактор в фазовом пространстве с размерностью большей, чем реальная размерность системы, генерирующей данную реализацию, то это приведет к тому, что будут вычисляться «лишние» ляпуновские показатели, что внесет существенные ошибки в оценку остальных, «нелишних» ляпуновских показателей.

Есть еще несколько методов оценки спектра ляпуновских показателей. Часть из них или является модификацией какого-либо из двух описанных ранее методов, или основывается на этих методах [10]; другие же [11] являются оригинальными, не похожими на два основных метода, описанных ранее. Однако все эти методы не получили широкого распространения.

В данной статье предлагается новый метод оценки некоторых ляпуновских показателей по временной реализации. Предложенный метод, по сути, является модификацией алгоритма Бенеттина и основан на отслеживании нескольких близких траекторий во времени, а также на использовании весьма простых линейных преобразований над векторами возмущений. Недостатком является то, что очень сложно оценить отрицательные ляпуновские показатели. Однако, как показывает практика, наибольший интерес в исследовании системы представляют как раз старшие ляпуновские показатели, которые весьма успешно оцениваются предлагаемым методом.

Рассмотрим суть предложенного метода на примере системы Ресслера. Исходная временная реализация восстанавливается методом задержек (Такенса) в пространство размерности D . Считаем, что эта размерность вложения D нам уже известна, и нас интересует лишь определение спектра ляпуновских показателей по временной реализации. Далее в восстановленном фазовом пространстве ищем точку, лежащую на восстановленном аттракторе; будем считать ее «опорной» точкой и обозначим как x_0 . Затем проследим, куда отобразится данная опорная точка спустя некоторое заданное время. Обозначим ее как x'_0 . Теперь зададимся некоторой величиной радиуса окрестности вблизи опорной точки x_0 и будем искать точки, лежащие в этой окрестности. Для успешного применения предложенного метода определения спектра ляпуновских показателей необходимо найти D точек, лежащих в окрестности x_0 . (Поскольку в данном примере мы рассматриваем систему Ресслера, то $D = 3$). Обозначим их как x_1, x_2, x_3 . После этого, анализируя существующую временную реализацию, найдем точки x'_1, x'_2, x'_3 , в которые отобразятся найденные ранее точки спустя некоторое фиксированное время (рис. 1). Определим разностные векторы $\Delta x_i = (\Delta x_{ix}, \Delta x_{iy}, \Delta x_{iz})^T$ и $\Delta x'_i = (\Delta x'_{ix}, \Delta x'_{iy}, \Delta x'_{iz})^T$, где $\Delta x_i = x_0 - x_i$, $\Delta x'_i = x'_0 - x'_i, i = 1, \dots, D$.

Предложенный метод подразумевает, что, как и в алгоритме Бенеттина, нужно перенормировать разностные векторы $\Delta x'_i$ и найти следующие точки для расчета. Однако ввиду того, что мы имеем дело с конечной временной реализацией, после нормировки разностных векторов мы можем не найти подходящие точки для определения новых разностных векторов на следующем шаге. Поэтому введем некоторые векторы возмущений $a_i = (a_{ix}, a_{iy}, a_{iz})^T, i = 1, \dots, D$. Они будут соответствовать векторам линейных возмущений, которые используются для вычисления спектра ляпуновских показателей из уравнений в вариациях [1]. На начальном этапе расчетов можно использовать вручную заданные значения, для последующих шагов вычислений – использовать значения векторов, найденные на предыдущем шаге. Суть

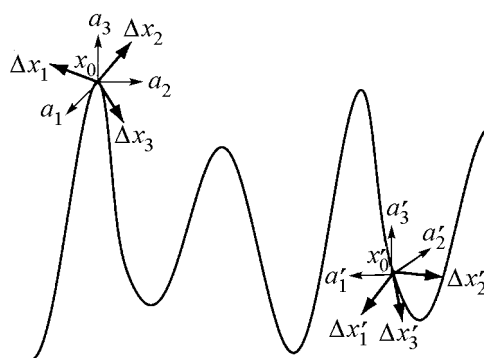


Рис. 1. Иллюстрация к описанию предложенного метода

предложенного метода, фактически, заключается в том, что существует линейная зависимость между разностными векторами Δx_i , которые находятся по временной реализации, и векторами возмущений a_i , которые являются искусственно введенными. В связи с этим, можно ввести некоторую матрицу коэффициентов $\|b_{ij}\|$, где $i, j = 1, \dots, D$. Далее, решим матричное уравнение следующего вида (для $D = 3$):

$$\begin{pmatrix} \Delta x_{1x} & \Delta x_{2x} & \Delta x_{3x} \\ \Delta x_{1y} & \Delta x_{2y} & \Delta x_{3y} \\ \Delta x_{1z} & \Delta x_{2z} & \Delta x_{3z} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1x} & a_{2x} & a_{3x} \\ a_{1y} & a_{2y} & a_{3y} \\ a_{1z} & a_{2z} & a_{3z} \end{pmatrix}.$$

Из этого уравнения мы находим коэффициенты, с помощью которых связаны между собой наборы векторов Δx_i и a_i , $i = 1, \dots, D$. Целью на следующем этапе является определение векторов a'_i , в которые отобразятся исходные векторы возмущений a_i спустя некоторое время. Это можно сделать при помощи уже найденных коэффициентов b_{ij} , решая, таким образом, обратную задачу

$$\begin{pmatrix} \Delta x'_{1x} & \Delta x'_{2x} & \Delta x'_{3x} \\ \Delta x'_{1y} & \Delta x'_{2y} & \Delta x'_{3y} \\ \Delta x'_{1z} & \Delta x'_{2z} & \Delta x'_{3z} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a'_{1x} & a'_{2x} & a'_{3x} \\ a'_{1y} & a'_{2y} & a'_{3y} \\ a'_{1z} & a'_{2z} & a'_{3z} \end{pmatrix}.$$

Теперь, когда мы определили, как преобразовались векторы возмущений за один шаг вычислений, мы можем вычислить их норму и применить к ним процедуру ортогонализации по Граму–Шмидту, то есть применить точно такие же операции, что и в алгоритме вычисления спектра ляпуновских показателей по известным уравнениям эволюции системы.

Дальнейшие действия состоят в нахождении новых опорных точек, определении разностных векторов и решении матричных уравнений. Этих шагов нужно сделать достаточно много, чтобы получить адекватную оценку для значений ляпуновских показателей.

Приведем результаты численного моделирования для системы Ресслера.

На рис. 2 показаны зависимости старшего (ромбы) и нулевого (крестики) ляпуновских показателей от относительного времени вычислений n . Ляпуновские показатели, вычисленные при помощи набора уравнений в вариациях, изображены

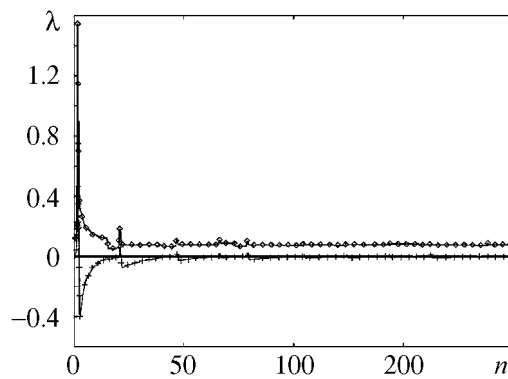


Рис. 2. Старший и нулевой показатели Ляпунова для системы Ресслера, вычисленные предложенным методом

линиями. Из рисунка видно, что существуют расхождения на начальном этапе вычислений. Это можно объяснить недостаточным количеством вычисленных показателей в указанный момент для статистически достоверного результата. Однако с течением времени значения ляпуновских показателей, вычисленные с помощью предложенного метода и с помощью уравнений в вариациях, начинают вести себя одинаково и выходят на некоторый уровень, соответствующий численной оценке ляпуновского показателя (в данном случае, положительного и нулевого).

На рис. 3 изображен младший (отрицательный) ляпуновский показатель. Видно, что его значение сильно расходитсся с вычисленным при помощи уравнений в вариациях. Это происходит из-за того, что структура аттрактора Ресслера является очень тонкой. Младший ляпуновский показатель отвечает как раз за сжатие фазового объема в такой «листе». Так как мы имеем временную реализацию системы Ресслера без переходного процесса, то проследить, как сильно сжимается фазовый объем внутри этого листа, технически очень сложно и может потребоваться значительное увеличение точности вычислений. Однако оценка младшего ляпуновского показателя имеет не такое большое практическое значение, как оценка старшего ляпуновского показателя, поскольку именно последний является индикатором наличия хаоса в исследуемой системе и именно его позволяет адекватно оценить предложенный метод.

Таким образом, в данной статье был предложен новый метод оценки спектра ляпуновских показателей по временной реализации. Предложенный метод весьма точно оценивает все ляпуновские показатели, кроме самых младших. Особенно важно то, что он позволяет оценивать старший ляпуновский показатель, который является индикатором наличия хаоса в исследуемой системе.

Работа выполнена при поддержке федеральной целевой программы «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России на 2009-2013 годы», Российского Фонда Фундаментальных Исследований (12-02-00221).

Библиографический список

1. Кузнецов С.П. Динамический хаос. Москва: Физматлит, 2001.
2. Кузнецов С.П., Трубецков Д.И. Хаос и гиперхаос в лампе обратной волны // Известия вузов. Радиофизика. 2004. Т. XLVII. № 5. С. 1.
3. Hramov A.E., Koronovskii A.A. Generalized synchronization: A modified system approach // Phys. Rev. E. 2005. Vol. 71, № 6. 067201.
4. Pecora L.M., Carroll T.L., Heagy J.F. Statistics for mathematical properties of maps between time series embeddings // Phys. Rev. E. 1995. Vol. 52, № 4. P. 3420.
5. Hramov A. E., Koronovskii A. A., Moskalenko O. I. Are generalized synchronization and noise-induced synchronization identical types of synchronous behavior of chaotic oscillators? // Phys. Lett. A. 2006. Vol. 354, № 5–6. P. 423.
6. Wolf A., Swift J.B., Swinney H.L., Vastano J.A. Determining Lyapunov exponents from a time series // Physica D. 1985. Vol. 16. P. 285.
7. Eckmann J.-P., Kamphorst S.O., Ruelle D., Ciliberto S. Liapunov exponents from time series // Phys. Rev. A. 1986. Vol. 34, № 6. P. 4971.

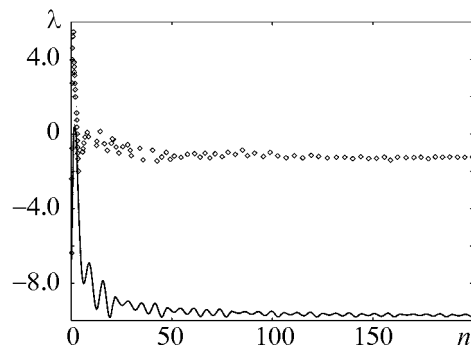


Рис. 3. Отрицательный показатель Ляпунова системы Ресслера, вычисленный предложенным методом. Видно сильное расхождение результатов моделирования с теоретическими

8. *Abarbanel H.D.I.* Computing the Lyapunov spectrum of a dynamical system from an observed time series // *Phys. Rev. A.* 1991. Vol. 43, № 6. P. 2787.
9. *Dieci L., van Vleck E.S.* Computation of a few Lyapunov exponents for continuous and discrete dynamical systems // *Applied Numerical Mathematics.* 1995. Vol. 17. P. 275.
10. *Lai D., Chen G.* Statistical analysis of Lyapunov exponents from time series: A Jacobian approach // *Mathl. Comput. Modelling* 1998. Vol. 27, № 7. P. 1.
11. *Rosenstein M.T., Collins J.J. De Luca C.J.* A practical method for calculating largest Lyapunov exponents from small data sets // *Physica D.* 1993. Vol. 65, № 1–2. P. 117.

*Саратовский государственный
университет им. Н.Г. Чернышевского*

Поступила в редакцию 29.12.2011

METHOD FOR CALCULATION OF LYAPUNOV EXPONENTS SPECTRUM FROM DATA SERIES

Y.A. Perederiy

The new method for the calculating of the spectrum of the Lyapunov exponents from data series is proposed. The already known methods of the same thematic are investigated. The Roessler system is given as an example for describing the proposed method. The results of numerical modeling are presented.

Keywords: Lyapunov exponents, time series, numerical modeling, Benettin's algorithm.



Передерий Юрий Андреевич – родился в Саратове (1988), окончил Саратовский государственный университет (2010). Является аспирантом кафедры физики открытых систем факультета нелинейных процессов СГУ.

410012 Саратов, ул. Астраханская, 83
Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского
E-mail: arronnard@gmail.com



ПОВЕДЕНИЕ СПЕКТРАЛЬНЫХ КОМПОНЕНТ СВЯЗАННЫХ ДИОДОВ ПИРСА ВБЛИЗИ ГРАНИЦЫ ФАЗОВОЙ СИНХРОНИЗАЦИИ

Д.И. Данилов, А.А. Короновский

В работе исследуется динамика двух однонаправленно связанных диодов Пирса вблизи границы фазовой синхронизации с точки зрения синхронизации спектральных компонент. Показано, что в изучаемой области параметра связи системы демонстрируют самоподобное поведение. Полученные результаты находятся в хорошем соответствии с данными аналогичных исследований систем Ресслера и отображения окружности.

Ключевые слова: Диод Пирса, синхронизация, спектральные компоненты, преобразование Фурье, перемежаемость.

Синхронизация колебаний – фундаментальное нелинейное явление, проявляющееся в самых разных областях науки, таких как физика, химия, биология, социология, информатика и др. Интерес к ее исследованию обусловлен многочисленными применениями синхронизации для решения радиофизических, социологических, физиологических задач, для скрытой передачи информации и так далее [1].

В последнее время большое внимание исследователей привлекает к себе синхронизация хаотических колебаний. Обычно выделяют следующие типы хаотической синхронизации: фазовая синхронизация [2], обобщенная синхронизация [3], синхронизация с запаздыванием [4], полная хаотическая синхронизация [5], синхронизация временных масштабов [6, 7]. Весьма интересным представляется вопрос о том, можно ли рассматривать все типы синхронизации с единых позиций. Одним из возможных способов решения этой задачи является рассмотрение динамики систем с позиций синхронизации спектральных компонент [8]. В этом случае каждый тип синхронизации представляется как частное проявление синхронизации спектральных компонент и изучается с точки зрения синхронизации отдельных частотных компонент фурье-спектров взаимодействующих систем. В частности, при асинхронной динамике все спектральные компоненты рассинхронизованы. Переход к режиму фазовой синхронизации соответствует синхронизации основных спектральных компонент. При дальнейшем увеличении параметра связи все больше спектральных компонент синхронизируются, пока наконец все они не окажутся синхронизованы при

переходе к режиму синхронизации с запаздыванием или полной синхронизации [9]. При этом последними синхронизируются компоненты, обладающие наименьшей энергией в фурье-спектре [8].

Синхронное поведение с точки зрения спектральных компонент изучено довольно хорошо, однако динамика в области параметров, предшествующей установлению синхронного режима, изучена не в полной мере. Известно, что в данной области в системах, демонстрирующих хаотическое поведение, наблюдается перемежающееся поведение [10–12].

В настоящей работе рассматривается поведение взаимодействующих систем вблизи границы фазовой хаотической синхронизации с точки зрения поведения спектральных компонент. Ранее подобные исследования проводились на примере систем с малым числом степеней свободы, а именно для связанных осцилляторов Ресслера и для отображений окружности [13]. В то же самое время, существует широкий класс систем, обладающих бесконечным числом степеней свободы – пространственно распределенные системы. Динамика таких систем в ряде случаев принципиально отличается от динамики классических конечномерных моделей, демонстрирующих хаотическое поведение. Однако, несмотря на все различия, существует целый пласт явлений, наблюдающихся как в системах с малым числом степеней свободы, так и в системах с бесконечномерным фазовым пространством, что позволяет изучать динамику систем данных классов с единых позиций.

В качестве исследуемой системы были выбраны два однонаправленно связанных диода Пирса [14], являющихся пространственно распределенными пучково-плазменными системами. Диод Пирса представляет собой две бесконечные плоские параллельные сетки, пронизываемые бесконечно широким электронным потоком. Пространство между сетками заполнено нейтрализующим фоном неподвижных ионов с плотностью, равной невозмущенной плотности заряда в электронном потоке. Несмотря на то, что диод Пирса является простейшей моделью в электронике СВЧ, он способен демонстрировать многие нелинейные явления, например динамический хаос.

Данная система при определенных значениях управляющих параметров позволяет использовать гидродинамическое приближение, в рамках которого электронный пучок рассматривается как сплошная среда – некоторая заряженная жидкость, скорость которой является однозначной функцией координат и времени [14]. В этом случае однонаправленно связанные диоды Пирса описываются системой уравнений движения, непрерывности и Пуассона

$$\frac{\partial v_{1,2}}{\partial t} = -v_{1,2} \frac{\partial v_{1,2}}{\partial x} - \frac{\partial \varphi_{1,2}}{\partial x}, \quad (1)$$

$$\frac{\partial \rho_{1,2}}{\partial t} = -\frac{\partial(\rho_{1,2} v_{1,2})}{\partial x}, \quad (2)$$

$$\frac{\partial^2 \varphi_{1,2}}{\partial x^2} = -\alpha_{1,2}^2 (\rho_{1,2} - 1) \quad (3)$$

с граничными условиями

$$v_{1,2}(0, t) = 1, \quad \rho_{1,2}(0, t) = 1, \quad \varphi_{1,2}(0, t) = 0, \quad (4)$$

где φ – безразмерный потенциал поля пространственного заряда, ρ – безразмерная плотность заряда, v – безразмерная плотность потока, x – безразмерная координата

и t – безразмерное время. Индексы 1 и 2 обозначают ведущую и ведомую системы, соответственно. Управляющим параметром, характеризующим динамику каждой системы, является параметр Пирса α – невозмущенный угол пролета электронов по плазменной частоте. По аналогии с [15], для ведущей системы выберем $\alpha_1 = 2.858\pi$, для ведомой системы $\alpha_2 = 2.862\pi$.

Однонаправленная связь между системами осуществляется при помощи изменения значения безразмерного потенциала на правой границе ведомой системы, в то время как потенциал на правой границе ведущей системы остается неизменным:

$$\begin{cases} \varphi_1(1, t) = 0, \\ \varphi_2(1, t) = \varepsilon(\rho_2(1, t) - \rho_1(1, t)). \end{cases} \quad (5)$$

Здесь ε – коэффициент связи между системами, $\rho_{1,2}(1, t)$ – колебания безразмерной плотности пространственного заряда, регистрируемые на выходе каждой из систем.

Рассмотрим динамику исследуемых систем при значениях параметра связи, находящихся вблизи границы фазовой синхронизации. Известно, что диод Пирса при выбранных значениях управляющих параметров может быть описан конечномерной моделью, представляющей собой систему трех обыкновенных дифференциальных уравнений, полученной при помощи метода Галеркина [16]. Это позволяет получить восстановленное фазовое пространство, которое можно использовать для нахождения границы фазовой синхронизации. В качестве динамических переменных были выбраны значения плотности заряда $\rho(x = 0.2, t)$ и $\rho(x = 0.75, t)$. Полученный аттрактор является фазово-когерентным, благодаря чему можно ввести фазу как угол поворота на фазовой плоскости. Фазовая синхронизация наблюдается в том случае, когда разница фаз взаимодействующих систем является ограниченной во времени [17]. Полученная граница соответствует значению силы связи $\varepsilon_{ph} \approx 0.0098$.

Как было сказано ранее, переход к режиму фазовой синхронизации сопровождается синхронизацией основных спектральных компонент взаимодействующих систем. Частоту, соответствующую основной спектральной компоненте ведущей системы, можно найти из спектра колебаний, рассчитанного при помощи преобразования Фурье

$$S_{1,2}(f) = \int_0^T \rho_{1,2}(t) e^{-2\pi i f t} dt \quad (6)$$

Необходимо отметить, что формально интеграл в выражении (6) рассчитывается по бесконечному интервалу времени; однако при численном моделировании мы всегда вынуждены ограничиваться неким конечным временным интервалом T .

На рис. 1 приведен спектр ведущей системы. Как видно из рисунка, частота основной спектральной компоненты ведущей системы при заданных параметрах равна $f_m = 0.2579$.

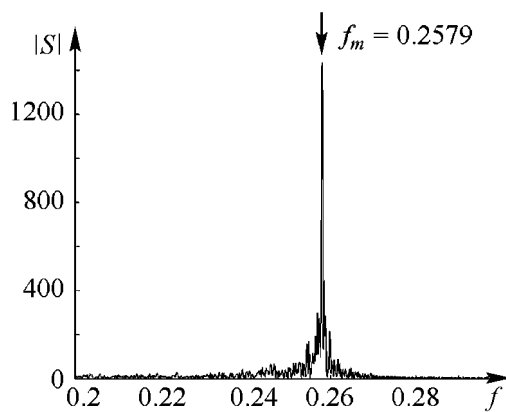


Рис. 1. Спектр Фурье ведущей системы в системе двух однонаправленно связанных диодов Пирса

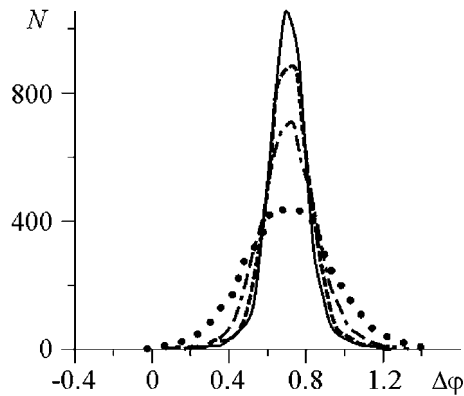


Рис. 2. Распределения разности фаз двух односторонне связанных диодов Пирса при $\varepsilon = 0.012$ для различных значений T : 3900 (сплошная линия); 3000 (пунктирная линия); 1950 (штрих-пунктирная линия); 750 (точки)

счет конечной длины T анализируемого временного интервала, так и за счет хаотической динамики, такие распределения будут иметь вид распределений Гаусса, стремящихся к δ -функции с увеличением T (рис. 2). Представляет интерес, как зависит дисперсия этих распределений от величины T , а также, как соотносятся такие зависимости при различных значениях ε . Изменение этих величин является, по сути дела, индикатором установления синхронного режима [8].

По аналогии с [18], введем следующую перенормировку времени

$$T_\varepsilon = T\sqrt{\varepsilon}, \quad (7)$$

где $\varepsilon = \varepsilon - \varepsilon_c$ – параметр надкритичности, ε_c – критическое значение, в рассматриваемом случае $\varepsilon_c \approx 0.005$.

В предыдущих исследованиях динамики односторонне связанных хаотических систем с малым числом степеней свободы вблизи границы фазовой синхронизации было показано, что дисперсия распределений разности фаз монотонно убывает с увеличением T , причем полученные зависимости подчиняются универсальной закономерности [13] для любых значений силы связи, близких к границе фазовой синхронизации. Следует отметить, что вид таких зависимостей одинаков для систем с малым числом степеней свободы, принадлежащих к разным классам, а именно, потоковым и дискретным. Соответственно, представляется важным и интересным проверить, будут ли подчиняться этой закономерности системы с бесконечным числом степеней свободы, к которым принадлежит и диод Пирса.

Как и ранее [13], дисперсия была нормирована на значение дисперсии распределений при $T = 0$. Полученные зависимости приведены на рис. 3. Видно, что для значений параметра связи ε , находящихся вблизи границы фазовой хаотической синхронизации, кривые практически совпадают, что свидетельствует о том, что динамика связанных диодов Пирса также подчиняется этой же закономерности.

При помощи преобразования Фурье можно также ввести фазу φ основной спектральной компоненты каждой системы как аргумент комплексного числа $\varphi = \arg S(f_m)$. Полученные таким образом значения фазы постоянны во времени и зависят только от начальных условий и от длины временной реализации, по которым рассчитывается преобразование Фурье. Для периодических осцилляторов в синхронном режиме разность фаз $\Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$ ведущей и ведомой систем на частоте f_m для всех спектров, полученных для разных начальных условий, является одной и той же, то есть это распределение разностей фаз должно иметь вид δ -функции. Однако в рассматриваемом случае, как за

Таким образом, получена универсальная закономерность, описывающая динамику дисперсии распределений разности фаз, введенных при помощи преобразования Фурье, для системы двух однонаправленно связанных диодов Пирса при любом значении параметра связи, лежащего вблизи границы фазовой синхронизации. Также нужно заметить, что полученная кривая имеет такой же вид, как и аналогичная кривая, полученная ранее для системы однонаправленно связанных осцилляторов Ресслера, а также для однонаправленно связанных отображений окружности [13]. Этот факт подтверждает предположение о том, что данная универсальная закономерность корректно описывает динамику широкого класса хаотических систем, находящихся вблизи границы фазовой синхронизации.

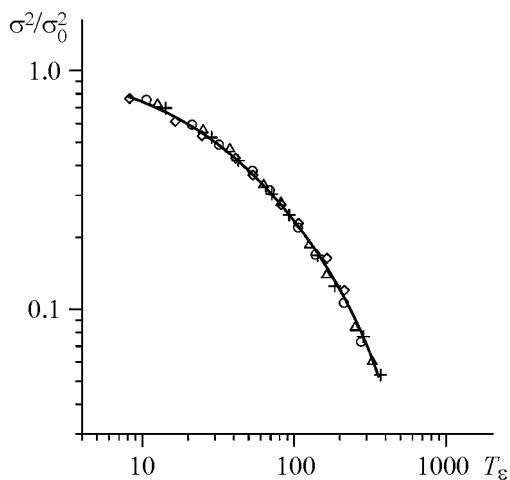


Рис. 3. Зависимость значения дисперсии распределений разности фаз однонаправленно связанных диодов Пирса от нормированной длины анализируемого временного интервала T_ε для значений параметра связи ε : 0.008 (\diamond), 0.01 (\circ), 0.012 (\triangle), 0.014 ($+$)

Авторы выражают признательность за помощь в работе А.Е. Храмову, О.И. Москаленко.

Работа выполнена при поддержке Федеральной Целевой Программы «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России на 2009–2013 годы», Российского Фонда Фундаментальных Исследований (проект 12-02-00221) и Фонда «Династия».

Библиографический список

1. Пиковский А.С., Розенблюм М.Г., Куртс Ю. Синхронизация. Фундаментальное нелинейное явление. М.: Техносфера, 2003.
2. Rosenblum M.G., Pikovsky A.S., Kurths J. Phase synchronization of chaotic oscillators // Phys. Rev. Lett. 1996. Vol. 76, № 11. P. 1804.
3. Rulkov N.F., Sushchik M.M., Tsimring L.S., Abarbanel H.D.I. Generalized synchronization of chaos in directionally coupled chaotic systems // Phys. Rev. E. 1995. Vol. 51, № 2. P. 980
4. Rosenblum M.G., Pikovsky A.S., Kurths J. From phase to lag synchronization in coupled chaotic oscillators // Phys. Rev. Lett. 1997. Vol. 78, № 22. P. 4193.
5. Pecora L.M., Carroll T.L. Synchronization in chaotic systems // Phys. Rev. Lett. 1990. Vol. 64, № 8. P. 821.
6. Hramov A.E., Koronovskii A.A. An approach to chaotic synchronization // Chaos. 2004. Vol. 14, № 3. P. 603.

7. Храмов А.Е., Короновский А.А., Левин Ю.И. Синхронизация временных масштабов хаотических осцилляторов // ЖЭТФ. 2005. Т. 127, № 4. С. 886.
8. Hramov A.E., Koronovskii A.A., Kurovskaya M.K., Moskalenko O.I. Synchronization of spectral components and its regularities in chaotic dynamical systems // Phys. Rev. E. 2005. Vol. 71, № 5. P. 056204.
9. Anishchenko V.S., Vadivasova T.E., Postnov D.E., Safonova M.A. Synchronization of chaos // Int. J. Bifurcation & Chaos. 1992. Vol. 2, № 3. P. 633.
10. Boccaletti S., Valladares D.L. Characterization of intermittent lag synchronization // Phys. Rev. E. 2000. Vol. 62, № 5. P. 7497.
11. Pikovsky A.S., Osipov G.V., Rosenblum M.G., Zaks M., Kurths J. Attractor–repeller collision and eyelet intermittency at the transition to phase synchronization // Phys. Rev. Lett. 1997. Vol. 79, № 1. P. 47.
12. Hramov A.E., Koronovskii A.A., Kurovskaya M.K., Moskalenko O.I. Type-I intermittency with noise versus eyelet intermittency // Phys. Lett. A. 2011. Vol. 375. P. 1646.
13. Данилов Д.И., Короновский А.А. Универсальная закономерность синхронизации основных спектральных компонент взаимодействующих осцилляторов // Известия РАН. Серия физическая. 2011. Т. 75, № 12. С. 1709.
14. Трубецков Д.И., Храмов А.Е. Лекции по СВЧ-электронике для физиков. Т. 1, 2. М.: Физматлит, 2003.
15. Короновский А.А., Москаленко О.И., Максименко В.А., Храмов А.Е. О возникновении обобщенной синхронизации в пучково-плазменных системах, связанных взаимно // Письма в ЖТФ. 2011. Т. 37, № 13. С. 40.
16. Hramov A.E., Rempen I.S. Investigation of the complex dynamics, regime control in Pierce diode with the delay feedback // Int. J. Electronics. 2004. Vol. 91, № 1. P. 1.
17. Pikovsky A.S., Rosenblum M.G., Kurths J. Phase synchronisation in regular and chaotic systems // Int. J. Bifurcation & Chaos. 2000. Vol. 10, № 10. P. 2291.
18. Hramov A.E., Koronovskii A.A., Kurovskaya M.K. Zero Lyapunov exponent in the vicinity of the saddle-node bifurcation point in the presence of noise // Phys. Rev. E. 2008. Vol. 78. P. 036212.

*Саратовский государственный
университет им. Н.Г. Чернышевского*

Поступила в редакцию 17.01.2012

SPECTRAL COMPONENTS' BEHAVIOR IN COUPLED PIERCE DIODES NEAR THE PHASE SYNCHRONIZATION BOUNDARY

D.I. Danilov, A.A. Koronovskii

In this article we study the dynamics of two unidirectionally coupled Pierce diodes near the phase synchronization boundary in terms of synchronization of spectral components.

We show that systems under consideration demonstrate self-similar behavior with any value of coupling strength within the region of our study. The results correlate with the data of the similar research for Rössler systems and circle map.

Keywords: Pierce diode, synchronization, spectral components, Fourier transform, intermittency.



Данилов Дмитрий Игоревич – родился в Вольске Саратовской области (1989). Окончил факультет нелинейных процессов Саратовского государственного университета (2010). Аспирант кафедры физики открытых систем ФНП СГУ. Область научных интересов – нелинейная динамика, различные типы хаотической синхронизации и перемежаемости. Автор ряда статей в рецензируемых научных журналах.

410012 Саратов, ул. Астраханская, 83
Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского
E-mail: danilov_dm89@mail.ru



Короновский Алексей Александрович – родился в Саратове (1972). Окончил физический факультет Саратовского государственного университета (1995), доктор физико-математических наук (2007), профессор кафедры электроники, колебаний и волн СГУ. Область научных интересов – нелинейная динамика и ее проявления в различных сферах человеческой деятельности, в том числе нелинейная динамика социально-экономических процессов. Автор ряда статей в центральной печати, а также монографий (в соавторстве) «Нелинейная динамика в действии» и «Непрерывный вейвлетный анализ» (Саратов, Изд-во ГосУНЦ «Колледж»), двухтомной монографии «Методы нелинейной динамики и теории хаоса в задачах электроники сверхвысоких частот» (М.: Физматлит, 2009, под редакцией А.А. Короновского, А.А. Кураева, Д.И. Трубецкова и А.Е. Храмова), монографии «Моделирование нелинейной динамики глобальных процессов» (М.: Изд-во МГУ, 2010, под редакцией С.И. Ильина и Д.И. Трубецкова) и др.

410012 Саратов, ул. Астраханская, 83
Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского
E-mail: alkor@nonlin.sgu.ru



КОГЕРЕНТНЫЙ РЕЗОНАНС В КАСКАДНОМ КЛИСТРОННОМ АВТОГЕНЕРАТОРЕ НА ПОРОГЕ САМОВОЗБУЖДЕНИЯ

С.А. Садовников

Приводятся результаты экспериментальных исследований явления когерентного резонанса в каскадном клистронном автогенераторе, работающем на пороге самовозбуждения. Сопоставлены меры когерентности, соотношения сигнал–шум и ширина полосы синхронизации для одиночного и каскадного автогенераторов.

Ключевые слова: Клистронный генератор с запаздывающей обратной связью, индуцированные шумами колебания, синхронизация, когерентный резонанс.

В нелинейных динамических системах, управляемых белым шумом, проявляется так называемое явление когерентного резонанса [1], заключающееся в следующем: при подаче внешнего шумового сигнала в нелинейной динамической системе, находящейся на пороге самовозбуждения, возникает резонансный отклик. Это явление наблюдается, когда собственные шумы динамической системы, находящейся на пороге самовозбуждения, малы по отношению к внешнему шуму, и состоит в том, что амплитуда индуцированных шумом колебаний достигает максимума при вполне определённом уровне внешнего шумового сигнала. Однако в СВЧ динамических системах этот эффект мало исследован. Представляется интересным изучить явление когерентного резонанса и синхронизации в каскадном клистронном автогенераторе [2] на пороге самовозбуждения и сравнить результаты исследований с автогенератором на одиночном клистроне [3].

Каскадный автогенератор представляет собой два последовательно соединённых многорезонаторных почти идентичных клистрона, выход каждого соединён со входом другого. Такое соединение позволяет получить большой коэффициент усиления. Для проведения исследований эффекта когерентного резонанса на каскадном клистроне была собрана измерительная установка, принципиальная схема которой представлена на рис. 1.

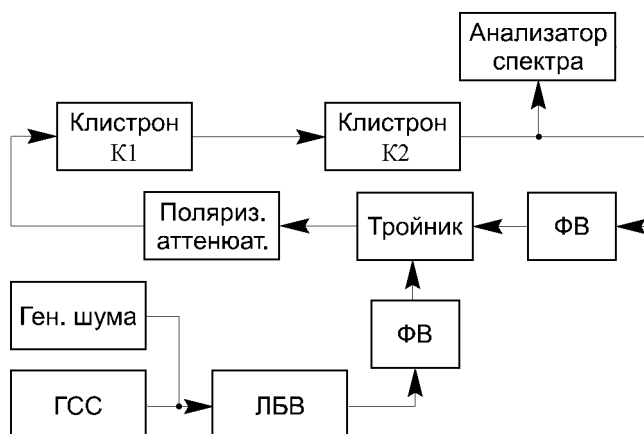


Рис. 1. Схема измерительной установки

В кольцо обратной связи двух последовательно соединенных пятирезонаторных клистронов, с токами пучков меньше пускового значения, вводятся шумы. При токе меньше пускового значения кольцевая система является резонансным регенеративным усилителем. Управляющими параметрами в системе служили ускоряющие напряжения на клистронах, токи пучков клистронов, затухание в цепи обратной связи, мощность шумового сигнала, частота и мощность гармонического сигнала ГСС. Источником шумов являлся цифровой генератор шума, сигнал с которого усиливался ЛБВ.

Подбором ускоряющих напряжений клистронов устанавливался максимум резонансного отклика. Аттенюатор в кольце обратной связи позволяет регулировать пусковой ток системы. Для фиксации характеристик системы применялась современная цифровая измерительная аппаратура Agilent Technologies, обработка результатов проводилась на компьютере.

Проведенные с помощью высокочастотного осциллографа экспериментальные исследования показали, что вид временной реализации выходного сигнала существенно зависит от уровня шумов (рис. 2). При малом шумовом сигнале временная реализация выходного сигнала имеет резко негармоническую нерегулярную форму. При уровне шумов, соответствующем когерентному резонансу, выходной сигнал приобретает форму, близкую к гармонической.

В процессе исследований наблюдался эффект когерентного резонанса в каскадном клистронном автогенераторе. Для количественной оценки удобно использовать понятие меры когерентности [4] (отношение высоты шумового пика,

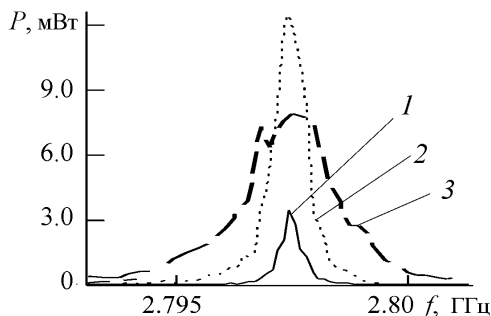


Рис. 2. Вид резонансного отклика при различных уровнях шума: 1 – малый, 2 – оптимальный, 3 – большой

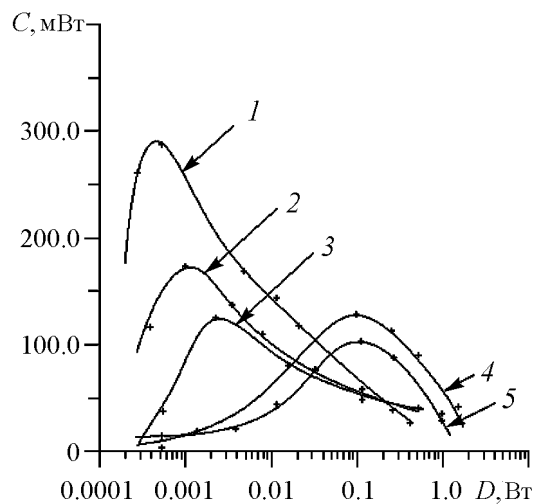


Рис. 3. Серии зависимостей меры когерентности для каскадного (1–3) и одиночного (4, 5) автогенераторов при различных отношениях рабочего тока к пусковому: 0.95 (1), 0.9 (2), 0.85 (3), 0.95 (4), 0.92 (5)

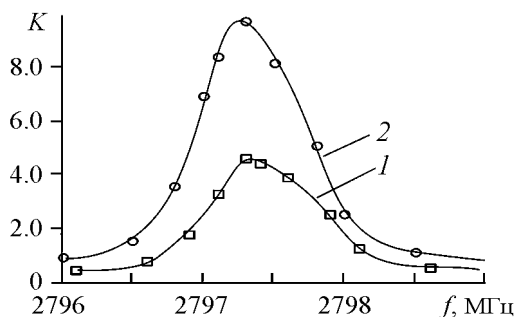


Рис. 4. Изменение соотношения сигнал–шум от частоты внешнего воздействия на выходе автогенераторов (1 – одиночный клистрон, 2 – каскадный автогенератор)

На рис. 4 показано изменение соотношения сигнал–шум на выходе по сравнению со входом для автогенераторов на одиночном клистроне и каскадном автогенераторе. Отношение рабочего тока к пусковому выбиралось равным 0.95. Видно, что использование каскадного автогенератора позволяет получить более высокое соотношение сигнал–шум.

Серии зависимостей ширины полосы синхронизации резонансного отклика от мощности внешнего гармонического сигнала для различных значений отношения рабочего тока к пусковому каскадного и одиночного автогенераторов представлены на рис. 5. Видно, что полоса синхронизации у каскадного автогенератора немного шире, чем у одиночного.

индуцированного в спектре на резонансной частоте, к относительной ширине его спектральной линии):

$$C(D) = h(D)/W(D),$$

где D – интенсивность шумового сигнала, $h(D)$ – высота шумового пика, индуцированного в спектре на резонансной частоте, $W(D) = \Delta f/f$ – относительная ширина его спектральной линии.

Полученные в эксперименте серии зависимостей меры когерентности для автогенератора на одиночном клистроне и для каскадного автогенератора приведены на рис. 3.

Из зависимостей $C(D)$ видно, что при использовании каскадного автогенератора уровень шумов, необходимый для достижения режима когерентного резонанса, значительно ниже, чем у автогенератора на одном клистроне. Это происходит благодаря большему коэффициенту усиления каскадного автогенератора.

Для реализованных схем также исследовался эффект синхронизации в режиме когерентного резонанса – подавление шумов на выходе автогенератора, сопровождаемое захватом резонансного отклика внешним гармоническим сигналом, который подавался с генератора стандартных сигналов вместе с шумами на вход ЛБВ.

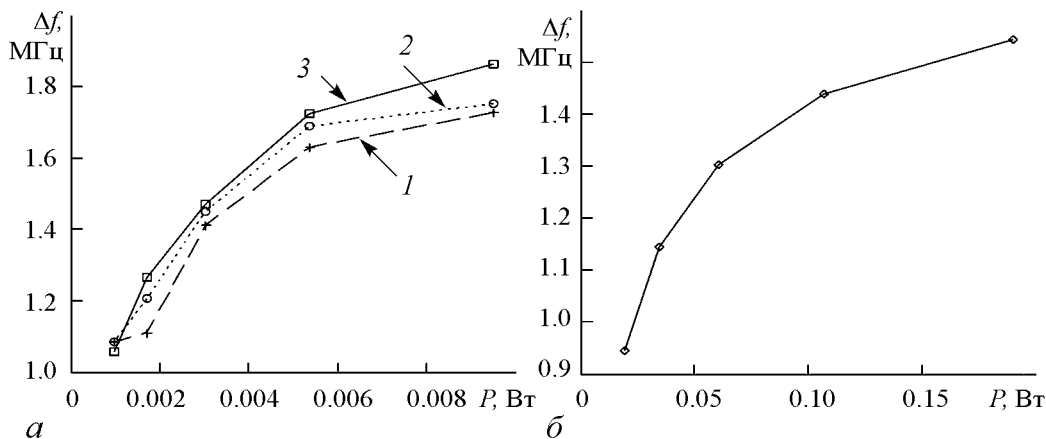


Рис. 5. Зависимость ширины полосы синхронизации от мощности внешнего синхронизирующего сигнала для каскадного автогенератора (а) при различных отношениях рабочего тока к пусковому – 0.85 (1), 0.9 (2), 0.95 (3) и одиночного клистрона (б) при отношении рабочего тока к пусковому 0.95

Таким образом, использование каскадного клистронного автогенератора на пороге самовозбуждения имеет ряд преимуществ по сравнению с одиночным: меньший уровень шумов, необходимый для достижения режима когерентного резонанса, лучшее соотношение сигнал–шум на выходе автогенератора и большая ширина полосы синхронизации.

Автор выражает благодарность профессору Б.С. Дмитриеву и профессору Ю.Д. Жаркову за постановку задачи и полезные обсуждения, а также заведующей лабораторией В.Н. Скороходову за помощь в проведении экспериментов.

Работа выполнена при поддержке грантов РФФИ (проекты №11-02-00057 и №11-02-00047) и в рамках Президентской программы поддержки ведущих научных школ РФ (проект № НШ-1430.2012.2).

Библиографический список

1. *Pikovsky A., Kurths J. Coherence resonance in a noise-driven excitable system // Phys. Rev. Lett. 1997. Vol. 78. P. 775.*
2. *Дмитриев Б.С., Жарков Ю.Д., Скороходов В.Н., Семеновых П.Ю., Бирюков А.А. Каскадный клистронный автогенератор с запаздыванием // ЖТФ. 2005. Т. 75. Вып. 12. С. 94.*
3. *Дмитриев Б.С., Жарков Ю.Д., Садовников С.А., Скороходов В.Н., Степанов А.О. Когерентный резонанс в клистронном автогенераторе на пороге самовозбуждения // Письма в ЖТФ. 2011. Т. 37. Вып. 22. С. 86.*
4. *Ditzinger T., Ning C.Z., Haken H. Stochastic resonance without external periodic force // Phys. Rev. Lett. 1993. Vol. 71. P. 807.*

Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского

Поступила в редакцию 10.02.2012

COHERENT RESONANCE IN KLYSTRON OSCILLATORS ON SELF-EXCITATION THRESHOLD

S.A. Sadovnikov

This work presents experimental results of synchronization of coherent resonance phenomena in cascade klystron oscillator with delayed feedback on self-excitation threshold. Degree of coherence, signal-to-noise ratio and synchronization wideband for single and cascade klystron oscillators were compared.

Keyword: Klystron oscillator with delayed feedback, noise-induced oscillations, synchronization, coherent resonance.

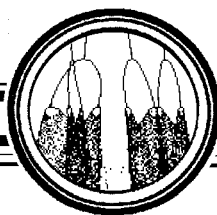


Садовников Сергей Александрович – родился в 1986 году. Окончил факультет нелинейных процессов СГУ (2008). В настоящее время – аспирант кафедры нелинейной физики СГУ. Область научных интересов – экспериментальные исследования нелинейной динамики в СВЧ автогенераторах. Имеет 6 публикаций.

410012 Саратов, ул. Астраханская, 83

Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского

E-mail: zzfz@inbox.com



О СЦЕНАРИЯХ РАЗРУШЕНИЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ХАОСА В МОДЕЛЬНЫХ ОТОБРАЖЕНИЯХ НА ТОРЕ С ДИССИПАТИВНЫМ ВОЗМУЩЕНИЕМ

Д.С. Аржанухина

В работе исследуется диссипативная модификация отображения «кот Арнольда», в которой при малых значениях амплитуды введенного возмущения реализуется гиперболический хаос, и в определенном диапазоне имеет место гиперболический хаотический аттрактор с поперечной канторовой структурой, разрушающийся при дальнейшем увеличении амплитуды возмущения.

Ключевые слова: Аттрактор, гиперболический хаос, показатель Ляпунова.

Введение

Как известно, традиционно выделяют два класса динамических систем – консервативные и диссипативные. Для консервативного случая характерным является сохранение объема облака изображающих точек в фазовом пространстве при эволюции ансамбля систем во времени. Для диссипативных систем объем облака изображающих точек в фазовом пространстве с течением времени стремится к нулю, вследствие чего точки концентрируются на аттракторе [1–5]. Аттракторы могут быть как регулярными (неподвижная точка, предельный цикл, или тор), так и хаотическими. Среди хаотических аттракторов можно выделить гиперболические и негиперболические аттракторы (см., например, [5]).

Важным свойством гиперболических аттракторов является структурная устойчивость или грубость, то есть нечувствительность динамики к малому изменению параметров в уравнениях. Вследствие этого, с точки зрения возможных приложений хаоса, перспективной представляется физическая реализация именно гиперболических аттракторов, поскольку в этом случае неизбежное присутствие погрешностей при изготовлении устройств, а также шумов и технических флуктуаций не будет приводить к качественным изменениям генерируемого хаотического сигнала.

В последнее время появился ряд работ, посвященных реализации гиперболических аттракторов в физических системах [6–10]. Простыми примерами могут служить система двух связанных осцилляторов ван дер Поля с попеременным возбуждением и генератор ван дер Поля с запаздывающей обратной связью [8].

В связи с возможностью наблюдения гиперболических аттракторов в реальных системах, динамика которых зависит от управляющих параметров, становится актуальным вопрос о путях (сценариях) возникновения (разрушения) гиперболических аттракторов при изменении параметров. Такого рода исследования удобно проводить с использованием моделей с дискретным временем в виде отображений.

Одним из способов получить отображение, имеющее гиперболический аттрактор, является введение диссипации в консервативное отображение, демонстрирующее гиперболический хаос, посредством модификации, предложенной в свое время Смейлом. Конкретный вид отображения, полученного добавлением записанного в аналитической форме возмущения в известное отображение «кот Арнольда», указан, в частности, в работе [6].

Настоящая статья посвящена исследованию диссипативной модификации консервативного отображения «кот Арнольда». Рассматриваемая модель, помимо присутствия гиперболического аттрактора, демонстрирует достаточно сложную динамику после его разрушения.

1. Модифицированное отображение «кот Арнольда»

Отображение «кот Арнольда» [1,3] может быть записано в виде

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n + y_n, \quad (\text{mod } 1), \\ y_{n+1} &= x_n + 2y_n, \quad (\text{mod } 1). \end{aligned} \tag{1}$$

Название связано с тем, что для иллюстрации этого отображения В.И. Арнольд использовал в своих лекциях и книгах изображение кота. Это отображение относится к классу так называемых систем Аносова: задаваемая им динамика является хаотической, причем типичная траектория покрывает плотно поверхность тора, выступающего в качестве фазового пространства системы. Отметим, что отображение имеет в начале координат неустойчивую неподвижную точку седлового типа, поведение в окрестности которой качественно представлено на рис. 1 слева. Для того чтобы модельная система имела аттрактор, Смейл предложил модифицировать отображение локально в окрестности точки седла так, чтобы динамика соответствовала диаграмме на рис. 1 справа. При этом в модифицированном отображении неподвижная точка, имевшая ранее тип седла, становится отталкивающей вдоль устойчивого направления, превращаясь в неустойчивый узел, а в ее окрестности возникают две новые седловые точки. Аттрактор в полученной модели – гиперболический,

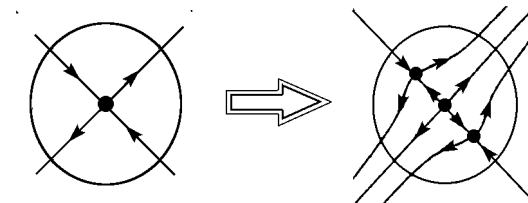


Рис. 1. Иллюстрация модификации отображения в окрестности неподвижной точки седла. Рисунок взят из статьи [6]

и Смейл называет его DA-аттрактором («Derived from Anosov») [11]. Возмущение, посредством которого из отображения (1) получается отображение с DA-аттрактором, можно задать в аналитической форме, как предложено в работе [6], путем прибавления к правым частям уравнений диссипативной добавки определенного вида, величина которой характеризуется некоторым пара-

метром ε . Это приводит к отображению следующего вида:

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n + y_n + \frac{\varepsilon}{2\pi}(\sin 2\pi x_n + \frac{1}{2} \sin 4\pi x_n) \pmod{1}, \\ y_{n+1} &= x_n + 2y_n + \frac{\varepsilon}{2\pi}(\sin 2\pi x_n + \frac{1}{2} \sin 4\pi x_n + \sin 2\pi y_n + \frac{1}{2} \sin 4\pi y_n) \pmod{1}. \end{aligned} \quad (2)$$

Диаграмма, показанная на рис. 1 слева, отвечает случаю $\varepsilon = 0$, а диаграмма справа – некоторой подходящим образом заданной величине $\varepsilon > 0$.

При нулевом и малом значении амплитуды возмущения динамика на всей поверхности тора на качественном уровне соответствует отображению «кот Арнольда», но при ненулевых ε в распределении инвариантной меры становится заметной его неоднородность. Затем, в некотором интервале по параметру ε реализуется гиперболический DA-аттрактор. При дальнейшем увеличении параметра ε гиперболический аттрактор разрушается; при этом может возникать негиперболический хаос, а также различные периодические режимы динамики.

На рис. 2 приведены графики зависимости показателей Ляпунова от амплитуды возмущения ε , бифуркационное дерево отображения (2) на плоскости (x, ε) , построенное для множества начальных условий (x, y) , и соответствующее ему бифуркационное дерево в пространстве (x, y, ε) .

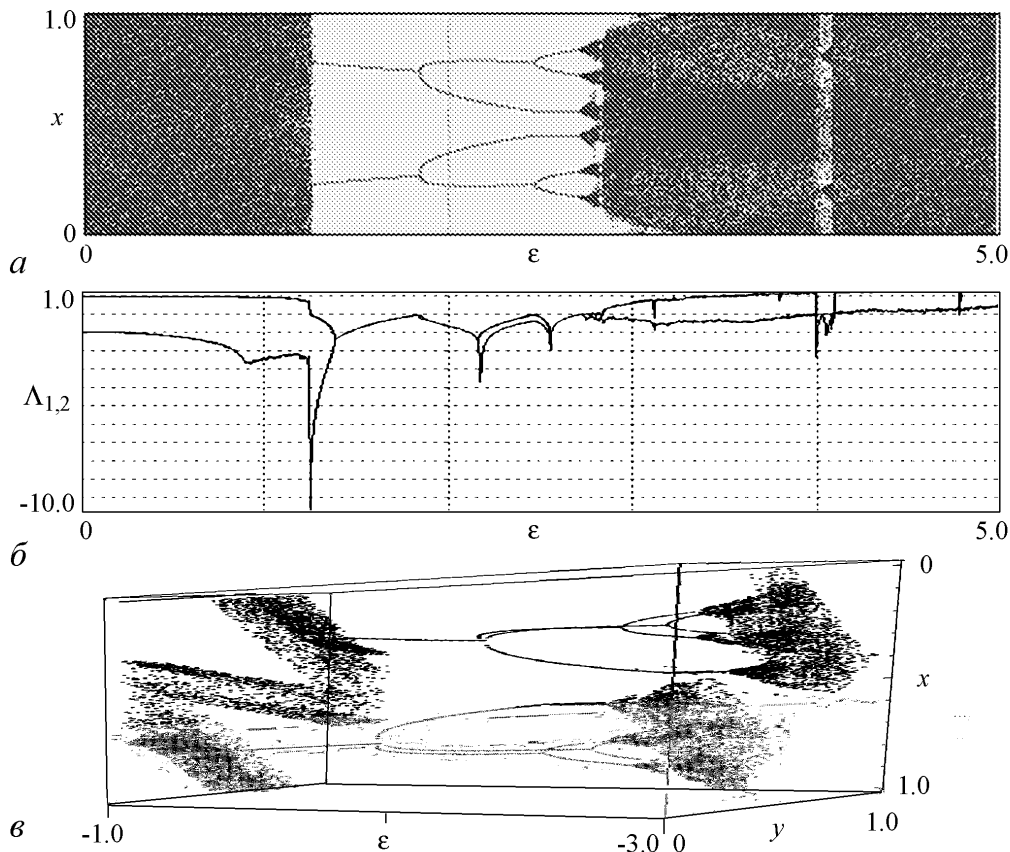


Рис. 2. Бифуркационное дерево на плоскости (x, ε) (а), графики зависимости показателей Ляпунова от параметра ε (б) и бифуркационное дерево в пространстве (x, y, ε) (в) отображения (2)

При небольших значениях амплитуды возмущения в системе реализуется гиперболический хаос, который разрушается при дальнейшем увеличении амплитуды возмущения. Подтверждением присутствия в данной области именно гиперболического хаоса может являться примерно постоянное значение старшего показателя Ляпунова и отсутствие окон периодичности. Затем возникают регулярные режимы, которые переходят в квазипериодические и затем в хаотические.

2. Анализ свойств ляпуновских сумм

С целью снятия возможного вырождения, отображение (2) целесообразно модифицировать путем введения еще одного аддитивного параметра μ :

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n + y_n + \mu + \frac{\varepsilon}{2\pi} (\sin 2\pi x_n + \frac{1}{2} \sin 4\pi x_n) \pmod{1}, \\ y_{n+1} &= x_n + 2y_n + \frac{\varepsilon}{2\pi} (\sin 2\pi x_n + \frac{1}{2} \sin 4\pi x_n + \sin 2\pi y_n + \frac{1}{2} \sin 4\pi y_n) \pmod{1}. \end{aligned} \quad (3)$$

Для исследования хаотической динамики целесообразно использовать карты старшего показателя Ляпунова. На рис. 3 приведена такая карта для отобра-

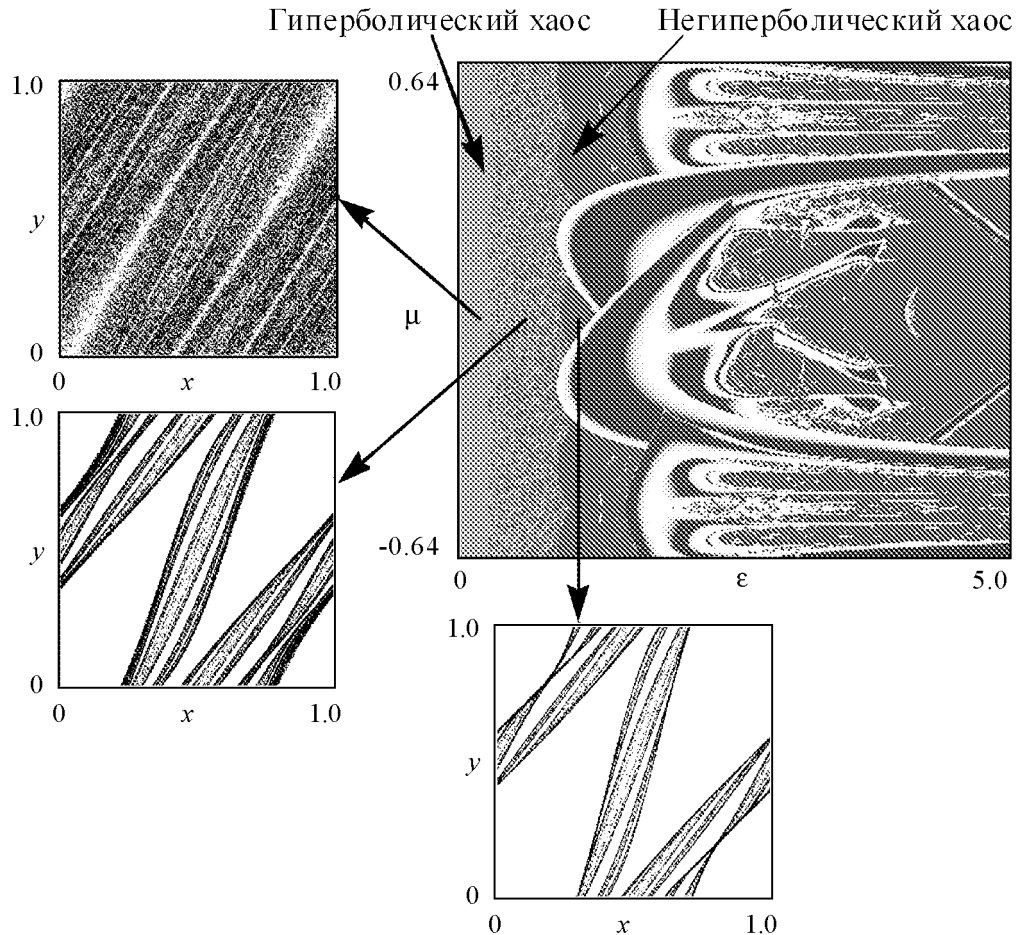


Рис. 3. Карта старшего ляпуновского показателя отображения (3) на плоскости параметров (ε, μ) и аттракторы отображения в различных точках

жения (3) на плоскости параметров (ε, μ) и аттракторы в различных точках хаотической области.

Для выяснения структуры областей хаотической динамики используется следующий прием. Чтобы получить в данной точке плоскости параметров показатель Ляпунова, производится, как обычно, вычисление суммы логарифмов отношений, характеризующих изменение нормы вектора возмущения на одной итерации. При проведении расчетов наибольшего показателя Ляпунова отслеживаем, являются ли все члены ляпуновской суммы положительными, или встречаются также и отрицательные величины. В первом случае пиксель на карте отмечается темным цветом, а в противном случае – более светлым серым тоном. Преобладание темного цвета свидетельствует о преимущественно гиперболической природе хаотической динамики в данной области.

При значительных амплитудах возмущения темным цветом обозначена область негиперболического хаоса, оттенками серого обозначены области с регулярным режимом и отрицательным показателем Ляпунова, белый цвет отвечает нулевому показателю и квазипериодической динамике.

3. Анализ сжатия в фазовом пространстве

Помимо вычисления показателя Ляпунова, можно непосредственно определить области в пространстве состояний, где имеет место сжатие и растяжение фазового объема. Для этого необходимо вычислить значение определителя матрицы Якоби отображения в точках фазовой плоскости с достаточно малым шагом.

На рис. 4. показан вид диаграмм на фазовой плоскости отображения (2), раскрашенных в соответствии с результатами вычисления определителя Якоби. Белый

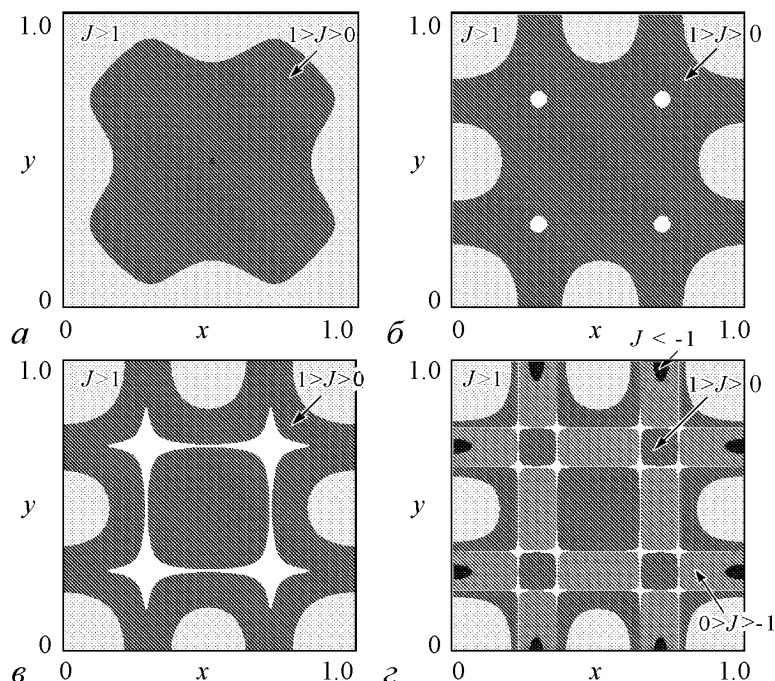


Рис. 4. Карты на плоскости (x, y) для отображения (2) при значениях ε : 0.135 (а), 0.820 (б), 0.880 (в), 1.273 (г)

цвет соответствует якобиану равному нулю, различные оттенки серого отвечают ненулевым значениям.

Как можно видеть, при малых значениях ε якобиан положителен во всем единичном квадрате; это свидетельствует о том, что отображение является обратимым. Момент потери обратимости отвечает тому, что значение якобиана достигает нуля. Для отображения (2) это происходит при $\varepsilon \approx 0.8$. При этом значении на плоскости появляются четыре белые точки. На карте показателя Ляпунова значению ε , при котором отображение теряет обратимость, соответствует неоднородная область.

Заключение

В данной работе была изучена динамика диссипативной модификации отображения «кот Арнольда». Был исследован процесс разрушения гиперболического аттрактора при увеличении амплитуды возмущения. Для этого использовался анализ свойств ляпуновских сумм и анализ сжатия в фазовом пространстве.

Автор выражает благодарность А.В. Савину и М.В. Позднякову за обсуждение и помощь.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ № 12-02-00343.

Библиографический список

1. Кузнецов С.П. Динамический хаос (курс лекций). М.: Изд-во Физ.-мат. лит., 2001. 296 с.
2. Берже П., Помо И., Видаль К. Порядок в хаосе. О детерминистском подходе к турбулентности. М.: Мир, 1991. 368 с.
3. Шустер Г. Детерминированный хаос. М.: Мир, 1988. 240 с.
4. Лихтенберг А., Либерман М. Регулярная и стохастическая динамика. М.: Мир, 1984. 528 с.
5. Анищенко В.С., Вадивасова Т.Е., Астахов В.В. Нелинейная динамика хаотических и стохастических систем. Фундаментальные основы и избранные проблемы / Под ред. В.С. Анищенко. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 1999. 368 с.
6. Кузнецов С.П. Гиперболические странные аттракторы систем, допускающих физическую реализацию // Изв. вузов. ПНД. 2009. Т. 17, № 4. С. 5.
7. Кузнецов С.П. Пример неавтономной системы с непрерывным временем, имеющей аттрактор типа Плыкина в отображении Пуанкаре // Нелинейная динамика. 2009. Т. 5, № 3. С. 403.
8. Кузнецов С.П. Динамический хаос и однородно гиперболические аттракторы: от математики к физике // Успехи физических наук. 2011. Т. 181, № 2. С. 121.
9. Кузнецов С.П., Селезнев Е.П. Хаотическая динамика в физической системе со странным аттрактором типа Смейла – Вильямса // ЖЭТФ. 2006. Т. 129. Вып. 2. С. 400.
10. Belykh V., Belykh I., Mosekilde E. Hyperbolic Plykin attractor can exist in neuron models // International Journal of Bifurcation and Chaos. 2005. Vol. 15, № 11.
11. Каток А.Б., Хасселблат Б. Введение в современную теорию динамических систем / Пер. с англ. М.: Изд-во Факториал, 1999. 768 с.

*Саратовский государственный
университет им. Н.Г. Чернышевского*

Поступила в редакцию 13.02.2012

ON SCENARIOS OF HYPERBOLIC CHAOS DESTRUCTION IN MODEL MAPS ON TORUS WITH DISSIPATIVE PERTURBATION

D.S. Arzhanukhina

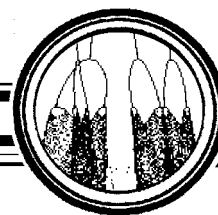
In this paper we investigate modified «Arnold cat» map with dissipative terms, in which a hyperbolic chaos exists for small perturbation magnitudes, and in a certain range a hyperbolic chaotic attractor with Cantor transversal structure takes place, collapsing with a further perturbation amplitude increase.

Keywords: Attractor, hyperbolic chaos, Lyapunov exponent.



Аржанухина Дарья Сергеевна – родилась в Саратове (1988). Окончила факультет нелинейных процессов Саратовского государственного университета (2011). Защитила дипломную работу на тему «Сложная динамика и разрушение гиперболического хаоса в отображении «кот Арнольда» с диссипативным возмущением». В настоящее время является аспирантом базовой кафедры динамических систем факультета нелинейных процессов СГУ.

410012 Саратов, ул. Астраханская, 83
Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского
E-mail: arzhanukhinadarja@rambler.ru



АТТРАКТОР ТИПА СМЕЙЛА–ВИЛЬЯМСА В КОЛЬЦЕВОЙ СИСТЕМЕ С ПЕРИОДИЧЕСКОЙ МОДУЛЯЦИЕЙ ЧАСТОТЫ

В.П. Круглов

В работе предложена радиотехническая модель кольцевой неавтономной системы, генерирующей, как предполагается, гиперболический хаос. Принцип работы модели основан на удвоении фазы колебаний за полный цикл передачи сигнала, что является условием существования аттрактора Смейла–Вильямса в фазовом пространстве. Функционирование схемы осуществляется благодаря плавной периодической вариации собственной частоты одной из двух колебательных подсистем, составляющих кольцо, от исходного значения до удвоенной величины.

Ключевые слова: Гиперболический хаос, аттрактор Смейла–Вильямса, структурная устойчивость.

В последнее время было предложено несколько подходов к построению систем с гиперболическим хаотическим аттрактором типа соленоида Смейла–Вильямса [1,2]. Главное преимущество этих систем, делающее их привлекательными для приложений, заключается в структурной устойчивости – нечувствительности характеристик генерируемого хаоса по отношению к вариации параметров, шумам и помехам.

Первый пример системы с аттрактором Смейла–Вильямса предложен в работе [3]. Схема строится на основе двух осцилляторов ван дер Поля, которые, благодаря модуляции параметра, становятся активными попеременно, и при этом передающих возбуждение друг другу с трансформацией фазы, описываемой растягивающим отображением окружности. Процесс преобразования возбуждения подразумевает удвоение частоты (и фазы) сигнала и смешение со вспомогательным сигналом фиксированной частоты и фазы, благодаря чему происходит возвращение в исходный частотный диапазон. Необходимость использования вспомогательного сигнала составляет очевидный недостаток этой схемы. Вариант без вспомогательного сигнала, основанный на нерезонансной передаче возбуждения, также возможен [4], но для него характерно существенное сужение области параметров, где реализуется гиперболический хаос, и представляется проблематичной возможность продвижения в область высоких частот (сравнительно с частотой модуляции параметров).

В настоящей работе предлагается схема, реализующая аттрактор типа Смейла–Вильямса, в которой в качестве модулируемого параметра выступает собственная

частота одной из подсистем. Благодаря этому оказывается возможным обеспечить требуемое преобразование частоты передаваемого возбуждения, сохранив резонансный характер процесса.

Рассмотрим кольцевую систему, состоящую из двух линейных фильтров второго порядка (осцилляторов) и одного нелинейного элемента (рис. 1). Через x и y обозначены соответственно сигналы от первого и второго осцилляторов. Частота первого осциллятора постоянна, частота второго изменяется периодически, причем ее минимальное значение совпадает с частотой первого осциллятора, а максимальное – превышает ее в два раза. Нелинейный элемент преобразовывает сигнал от первого осциллятора, обладая квадратичной характеристикой в области малых амплитуд и насыщением в области больших. Сигнал, прошедший через нелинейный элемент, обозначен как $f(x)$.

Предложенная модель математически описывается системой дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} + \gamma \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x &= a\gamma \frac{dy}{dt}, \\ \frac{d^2y}{dt^2} + \gamma \frac{dy}{dt} + \omega^2(t) y &= a\gamma \frac{d}{dt} f(x). \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь γ – коэффициент затухания; a – коэффициент усиления; ω_0 – частота первого осциллятора; $\omega(t)$ – функция, описывающая модуляцию частоты второго осциллятора

$$\omega(t) = \omega_0 \left(1 + \sin^2 \left(\frac{\pi t}{T} \right) \right),$$

T – период модуляции. Функция, описывающая преобразование сигнала на нелинейном элементе, имеет вид

$$f(x) = \frac{x^2}{1 + x^2}.$$

На рис. 2 изображены спектры сигналов $x(t)$ и $y(t)$, иллюстрирующие передачу возбуждения между осцилляторами (при значениях параметров $\omega_0 = 6\pi$, $T = 10$, $a = 20$, $\gamma = 0.6$). Наибольшей интенсивностью обладают составляющие сигналов в интервале между частотой первого осциллятора ω_0 и максимальной частотой второго осциллятора $2\omega_0$. Максимум плотности мощности первого осциллятора приходится на частоту ω_0 , второго – на $2\omega_0$, эти частоты отмечены на графиках вертикальными пунктирными линиями. При этом в спектре колебаний первого осциллятора содержатся гармоники с частотами, близкими к $2\omega_0$, возбуждаемые сигналом от второго осциллятора. Также в спектрах имеются гармоники, связанные с модуляцией частоты второго осциллятора.

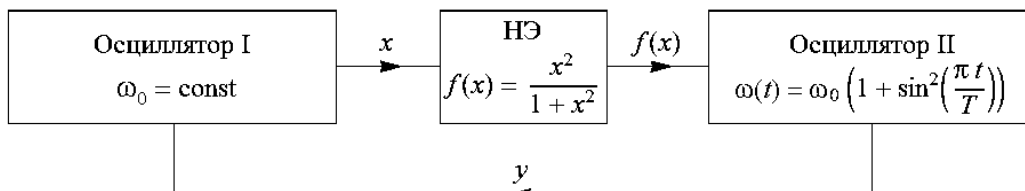


Рис. 1. Блок-схема предложенной модели

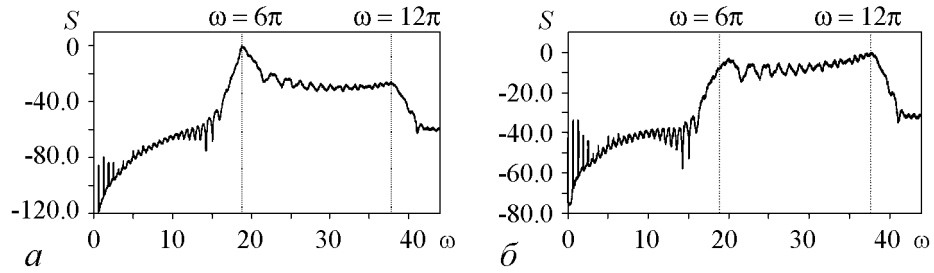


Рис. 2. Спектры плотности мощности сигналов от первого (а) и второго (б) осцилляторов ($\omega_0 = 6\pi$, $T = 10$, $a = 20$, $\gamma = 0.6$). Значения по оси ординат отложены в логарифмическом масштабе в децибелах

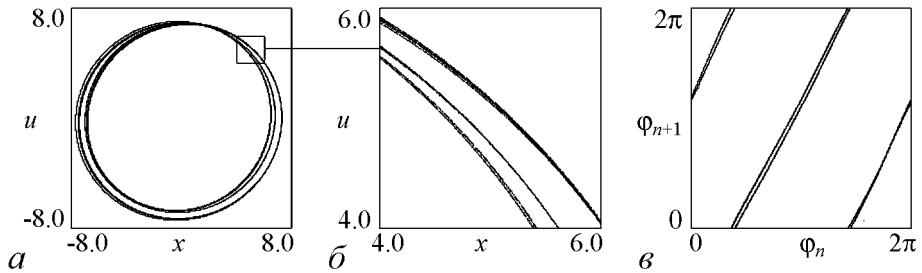


Рис. 3. Аттрактор системы (2) в сечении Пуанкаре (а) на плоскости динамических переменных (x, u) и его увеличенный фрагмент (б), итерационная диаграмма для фазы колебаний первого осциллятора (в) при тех же значениях параметров, что и на рис. 2

На рис. 3 изображен аттрактор отображения возврата Пуанкаре за период модуляции частоты в проекции на плоскость (x, u) , где u – дополнительная переменная ($\dot{u} = \omega_0 x$), и его увеличенный фрагмент. Полученный портрет визуально похож на аттрактор Смейла–Вильямса; это позволяет предполагать, что аттрактор является однородно гиперболическим. На рисунке отчетливо видна фрактальная структура аттрактора. На рис. 3, в представлена итерационная диаграмма отображения Пуанкаре для фазы колебаний первого осциллятора при значениях параметров $\omega_0 = 6\pi$, $T = 10$, $a = 20$, $\gamma = 0.6$. Фаза отнесена к интервалу от 0 до 2π . Как видно из диаграммы, динамика фазы приближенно описывается растягивающим отображением окружности: за полный проход точки φ_n интервала от 0 до 2π ее образ φ_{n+1} проходит этот интервал дважды.

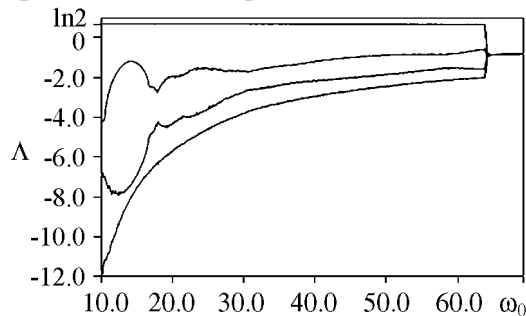


Рис. 4. Графики зависимости показателей Ляпунова для аттрактора отображения Пуанкаре от частоты первого осциллятора ω_0 при фиксированных значениях остальных параметров ($T = 10$, $a = 20$, $\gamma = 0.6$)

Для аттрактора отображения Пуанкаре системы (1) был вычислен полный спектр показателей Ляпунова по алгоритму Бенеттина с ортогонализацией по Граму–Шмидту [5]. На рис. 4 показаны зависимости показателей Ляпунова для аттрактора отображения Пуанкаре от частоты первого осциллятора ω_0 при фиксированных значениях остальных параметров ($T = 10$, $a = 20$, $\gamma = 0.6$). В широком интервале значений ω_0 старший показатель Ляпунова положителен, а остальные – отрицательны. В этом интервале старший показате

тель гладко зависит от параметра, резкие провалы в отрицательную область, характерные для негиперболических аттракторов, отсутствуют. При этом величина старшего показателя в широком диапазоне изменения параметра остается близкой к $\ln 2$ – показателю Ляпунова отображения Бернулли, которое приближенно описывает динамику фазы колебаний в системе. Таким образом, элемент объема в фазовом пространстве отображения Пуанкаре испытывает растяжение по одному направлению и сжатие по остальным трем за одну итерацию. Это соответствует построению гиперболического аттрактора типа Смейла–Вильямса в четырехмерном фазовом пространстве.

Для аттрактора в сечении Пуанкаре была выполнена оценка распределения углов между устойчивым и неустойчивым многообразиями в точках их пересечения. На рис. 5 представлена гистограмма распределения. Пересечения с углами, близкими или равными нулю, отсутствуют. Это подтверждает предположение о гиперболичности аттрактора, тогда как наличие касаний между многообразиями свидетельствовало бы о том, что аттрактор негиперболический [1,2].

Была выполнена оценка распределения инвариантной меры вдоль волокон аттрактора по алгоритму, разработанному И.Р. Сатаевым и описанному в главе 7 книги [1]. Распределение в проекции на плоскость (x, u) при значениях параметров $\omega_0 = \text{бл}$, $T = 10$, $a = 20$, $\gamma = 0.6$ представлено на рис. 6. Распределение вдоль волокон гладкое, сингулярности и разрывы, характерные для негиперболических аттракторов [5], отсутствуют.

Полученные результаты (итерационная диаграмма для фаз, характерный вид аттрактора в сечении Пуанкаре, значения показателей Ляпунова) позволяют предполагать существование аттрактора типа Смейла–Вильямса в фазовом пространстве предложенной системы. Гладкая зависимость старшего показателя Ляпунова от параметра, дистанцированное от нуля распределение углов между многообразиями и гладкое распределение инвариантной меры вдоль волокон аттрактора являются типичными атрибутами гиперболической динамики.

Преимущество предложенной в настоящей работе схемы состоит в том, что для ее функционирования требуется единственный внешний гармонический сигнал, подаваемый только на один осциллятор и обеспечивающий периодическое изменение его собственной частоты. При этом система устроена так, что осуществляется резонансная передача возбуждения между осцилляторами. Система не содержит автоколебательных элементов, усиление неустойчивостей и их стабилизация обеспечиваются единственным нелинейным элементом. Поэтому на основе этой схемы

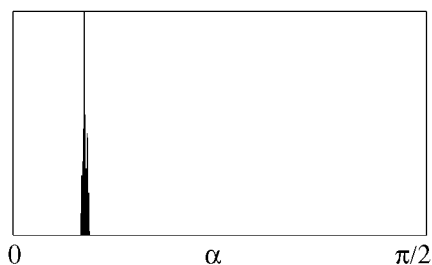


Рис. 5. Гистограмма распределения углов между устойчивым и неустойчивым многообразиями для аттрактора в сечении Пуанкаре при значениях параметров $\omega_0 = \text{бл}$, $T = 10$, $a = 20$, $\gamma = 0.6$

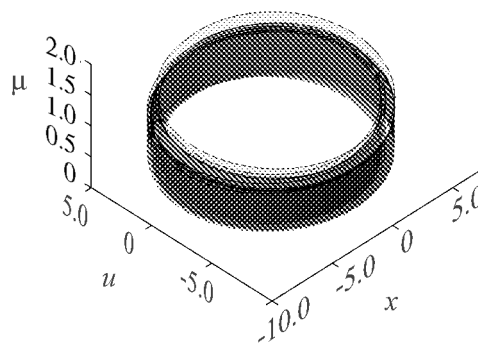


Рис. 6. Распределение инвариантной меры вдоль волокон аттрактора при тех же значениях параметров, что и на рис. 5

представляется возможным создание широкополосного генератора хаоса, не чувствительного к вариации параметров, шумам и помехам. Подобный генератор может найти применение в области информационных технологий, поскольку каждой траектории на аттракторе типа Смейла–Вильямса, который предположительно реализуется в данной системе, однозначно сопоставляется бесконечная последовательность двух символов (например, 0 и 1).

Автор выражает благодарность профессору С.П. Кузнецову и ведущему научному сотруднику И.Р. Сатаеву за обсуждение и помощь.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ № 12-02-00343.

Библиографический список

1. *Kuznetsov S.P.* Hyperbolic Chaos: A Physicist's View. Higher Education Press: Beijing and Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 2012. 336 p.
2. *Кузнецов С.П.* Динамический хаос и однородно гиперболические аттракторы: от математики к физике // Успехи физических наук. 2011. Т. 181, № 2. С. 121.
3. *Kuznetsov S.P.* Example of a physical system with a hyperbolic attractor of the Smale–Williams type // Phys. Rev. Lett. 2005. Vol. 95. 144101.
4. *Кузнецов А.П., Кузнецов С.П., Пиковский А.С., Тюрюкина Л.В.* Хаотическая динамика в системах связанных неавтономных осцилляторов с резонансным и нерезонансным механизмом передачи возбуждения // Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2007. Т. 15, № 6. С. 75.
5. *Кузнецов С.П.* Динамический хаос. М.: Физматлит, 2006. 290 с.

Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского

Поступила в редакцию 13.02.2012

ATTRACTOR OF SMALE–WILLIAMS TYPE IN A RING SYSTEM WITH PERIODIC FREQUENCY MODULATION

V.P. Kruglov

A scheme of circular nonautonomous system is introduced, which is supposed to generate hyperbolic chaos. Its operation is based on doubling of phase on complete cycle of the signal transmission. This is a criterion for the Smale–Williams attractor to exist. The performance is realized due to smooth periodic variation of natural frequency in one of the two oscillatory subsystems, which compose the ring, from reference value to the doubled one.

Keywords: Hyperbolic chaos, Smale–Williams attractor, structural stability.

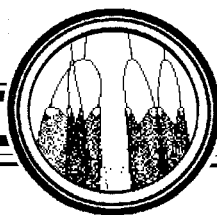


Круглов Вячеслав Павлович – родился в 1990 году. В 2007 году окончил среднюю школу № 8 Саратова. В настоящее время студент 5 курса факультета нелинейных процессов Саратовского государственного университета им. Н.Г. Чернышевского. Опубликовал 2 статьи в научных журналах, участник научных конференций «Нелинейные дни для молодых», «Нанoeлектроника, нанофотоника и нелинейная физика» в 2009–2011 годах, школы-конференции «ХАОС-2010». Лауреат стипендии фонда «Династия».

410012 Саратов, ул. Астраханская, 83

Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского

E-mail: kruglovyacheslav@gmail.com



ПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ ГЕНЕРАТОРЫ С ХАОТИЧЕСКОЙ АМПЛИТУДНОЙ ДИНАМИКОЙ, ОТВЕЧАЮЩЕЙ АТТРАКТОРАМ ТИПА СМЕЙЛА–ВИЛЬЯМСА

А.С. Кузнецов

Рассмотрен новый подход к построению параметрических генераторов хаоса с гиперболическими аттракторами на основе двух попеременно возбуждающихся подсистем, где каждая состоит из трех осцилляторов, один из которых играет роль накачки. В отличие от ранее предложенных схем, в качестве угловой переменной, претерпевающей кратное увеличение за характерный период, выступает не фаза колебаний, а величина, характеризующая распределение амплитуд двух колебательных элементов при параметрическом возбуждении от общего источника накачки.

Ключевые слова: Хаос, аттрактор, параметрический генератор, неавтономная система, соленоид Смейла–Вильямса.

Введение

В математической теории динамических систем вводятся *однородно гиперболические странные аттракторы*, которые обладают сильными хаотическими свойствами и характеризуются структурной устойчивостью, то есть нечувствительностью к вариациям функций и параметров в определяющих уравнениях [1–3]. В последнее время указан ряд подходов к построению физических систем с такими аттракторами [4,5], один из которых опирается на использование известного в теории колебаний и приложениях класса систем с параметрическим возбуждением [6,7]. Механизм функционирования рассмотренных схем подразумевает попеременное возбуждение двух колебательных процессов, так что за полный цикл передачи возбуждения преобразование фазы колебаний описывается растягивающим отображением окружности. Для отображения, задающего изменение состояния за период обмена возбуждением, это соответствует присутствию аттрактора типа соленоида Смейла–Вильямса [1–5].

Недавно в работе [8] предложена принципиально другая идея реализации аттрактора Смейла–Вильямса, когда в качестве угловой переменной, претерпевающей

кратное увеличение за характерный период, выступает не фаза, а величина, характеризующая соотношение амплитуд колебаний автоколебательных элементов, питаемых от общего источника энергии. В настоящей статье предлагается применить аналогичный принцип для создания параметрического генератора хаоса. Схема строится на базе двух подсистем, содержащих каждая по три осциллятора, один из которых играет роль осциллятора накачки, а два других могут получать от него энергию за счет параметрического возбуждения, конкурируя между собой. Вводится угловая переменная, характеризующая распределение амплитуд пары осцилляторов, имеющих общий источник накачки, а связь между подсистемами организуется так, чтобы при попеременном возбуждении подсистем эта угловая переменная трансформировалась в соответствии с растягивающим отображением окружности. Таким образом, в отличие от ранее описанных параметрических генераторов с аттракторами типа Смейла–Вильямса [6,7], в данном случае хаотическое поведение на последовательных стадиях эволюции во времени демонстрируют амплитуды, а не фазы колебательных процессов.

1. Основная модель и ее уравнения

Поясним вначале способ введения угловой переменной. Пусть имеем два осциллятора с комплексными амплитудами a_1 и a_2 , взаимодействующих с осциллятором накачки амплитудой a_3 . Если потери и внешние источники энергии отсутствуют, то при надлежащей нормировке амплитуд можно записать соотношение $|a_1|^2 + |a_2|^2 = |a_3|^2$, выражающее закон сохранения энергии. Полагая $|a_1|^2 = |a_3|^2 \cos^2 \theta$, $|a_2|^2 = |a_3|^2 \sin^2 \theta$, вводим угловую координату θ , характеризующую в каждый момент времени распределение энергии между первым и вторым осцилляторами.

Генератор хаоса можно построить из двух подсистем, отвечающих рассуждениям из предыдущего абзаца. Каждая из них содержит три осциллятора. Полагаем, что осцилляторы накачки в одной и другой подсистемах возбуждаются по очереди внешним воздействием прямоугольных импульсов с высокочастотным заполнением, и запишем модельные уравнения для медленных комплексных амплитуд осцилляторов в следующем виде:

$$\begin{aligned}
 \dot{a}_1 &= a_1^* a_3 - \gamma a_1 + \varepsilon f_1(|b_1|^2, |b_2|^2) b_1, \\
 \dot{a}_2 &= a_2^* a_3 - \gamma a_2 + \varepsilon f_1(|b_2|^2, |b_1|^2) b_2, \\
 \dot{a}_3 &= -a_1^2 - a_2^2 - \gamma a_3 + \kappa \xi(t), \\
 \dot{b}_1 &= b_1^* b_3 - \gamma b_1 + \varepsilon f_2(|a_1|^2, |a_2|^2) a_1, \\
 \dot{b}_2 &= b_2^* b_3 - \gamma b_2 + \varepsilon f_2(|a_2|^2, |a_1|^2) a_2, \\
 \dot{b}_3 &= -b_1^2 - b_2^2 - \gamma b_3 + \kappa \xi(t + T),
 \end{aligned} \tag{1}$$

где величины $a_{1,2,3}$ и $b_{1,2,3}$ относятся к осцилляторам первой и второй подсистемы, соответственно; параметр κ характеризует интенсивность накачки, а γ служит параметром затухания осцилляторов. Попеременная подача внешнего воздействия

на осцилляторы накачки в подсистемах описывается функцией $\xi(t)$, которая определена соотношениями $\xi(t) = 1$ при $0 < t \leq T/2$, $\xi(t) = 0$ при $T/2 \leq t < T$ и $\xi(t + T) = \xi(t)$. Константа ε отвечает за связь осцилляторов, относящихся к разным подсистемам. Характер связи задается функциями f_1 и f_2 , которые считаем определенными в области действительных чисел и зависящими только от квадратов модуля амплитуд связанных осцилляторов. Вид этой зависимости будет конкретизирован ниже.

Структура уравнений (1) допускает класс решений, для которых амплитуды a и b действительны. Это позволяет рассматривать динамику в фазовом пространстве вдвое меньшей размерности, а именно, $N = 6$ для стробоскопического отображения.

Временная эволюция составлена из двух периодически повторяющихся стадий. На одной стадии осуществляется возбуждение осциллятора накачки первой подсистемы с помощью внешнего резонансного воздействия и параметрическое возбуждение двух связанных с ним осцилляторов, распределение энергии между которыми будет соответствовать некоторой величине угловой переменной θ . На другой стадии накачка первой подсистемы прекращается, и колебания в ней затухают. Но в то же время включается накачка второй подсистемы, и возникает параметрическая неустойчивость по отношению к возбуждению входящей в нее пары осцилляторов. Развитию этой неустойчивости кладет начало остаточное возбуждение осцилляторов первой подсистемы благодаря присутствию связи, характеризуемой параметром ε и функциями $f_{1,2}$.

Таким образом, оказывается, что распределение интенсивности колебаний осцилляторов второй подсистемы и соответствующая этому угловая переменная будут зависеть от предшествующего соотношения амплитуд осцилляторов первой подсистемы. Потом выключается накачка второй подсистемы, и включается накачка первой, так что происходит обратная передача возбуждения к первой подсистеме, после чего процесс повторяется периодически. Для реализации хаоса нужно, чтобы за полный цикл передачи возбуждения угловая переменная трансформировалась в соответствии с растягивающим отображением окружности. Это достигается надлежащим выбором функций $f_{1,2}$; два возможных варианта рассмотрены в последующих разделах.

2. Модель с утроением угловой переменной

Зададим вид функций, фигурирующих в уравнениях (1), следующим образом:

$$f_1(x, y) = x - 3y, \quad f_2(x, y) = 1. \quad (2)$$

В этом случае при передаче возбуждения от первой системы ко второй угловая переменная, очевидно, не меняется, поскольку соотношение амплитуд осцилляторов остается тем же. Однако при передаче возбуждения от второй подсистемы к первой угловая переменная претерпевает утроение (с переменной знака). В самом деле, предположим, что на этапе возбуждения второй подсистемы мы имели $|b_1|^2 \sim \cos^2 \theta$, $|b_2|^2 \sim \sin^2 \theta$. Тогда члены, фигурирующие в двух первых уравнениях системы (1), представляются в виде

$$\begin{aligned} (|b_1|^2 - 3|b_2|^2)b_1 &\sim (\cos^2 \theta - 3\sin^2 \theta) \cos \theta = \cos 3\theta, \\ (|b_2|^2 - 3|b_1|^2)b_2 &\sim (\sin^2 \theta - 3\cos^2 \theta) \sin \theta = -\sin 3\theta. \end{aligned} \quad (3)$$

Таким образом, в результате передачи возбуждения первой подсистеме амплитуды a_1 и a_2 будут пропорциональны этим величинам, а следовательно, угловая переменная окажется равной $\theta' = -3\theta$. В итоге, за полный цикл передачи возбуждения имеет место утроение угловой переменной (с изменением знака).

Численное моделирование проводилось путем решения дифференциальных уравнений (1) для действительных амплитуд при значениях параметров $\kappa = 2$, $\varepsilon = 0.1$, $T = 20$, $\gamma = 1$ методом Рунге–Кутты. На рис. 1 показаны зависимости амплитуд от времени для шести составляющих систему осцилляторов в режиме установившихся колебаний. Представлен интервал времени, содержащий 12 периодов модуляции накачки. Как можно видеть из диаграммы, в каждой из подсистем амплитуда осциллятора накачки изменяется практически по периодическому закону, но два других осциллятора, относящихся к подсистеме, на последовательных стадиях активности имеют различное соотношение амплитуд, изменяющееся нерегулярным образом.

На рис. 2, а приводится диаграмма, иллюстрирующая преобразование угловой переменной за период модуляции накачки, что соответствует стробоскопическому описанию системы. Угловая переменная определялась по ходу вычислений для первой подсистемы из соотношений $\theta = \arctan(a_2/a_1)$ при $a_1 > 0$, $\theta = \arctan(a_2/a_1) + \pi$ при $a_1 < 0$, в момент окончания стадии параметрического возбуждения второй подсистемы. Как можно видеть, график соответствует растягивающему отображению окружности: полный обход на 2π для прообраза отвечает трехкратному обходу в обратном направлении для образа, что согласуется с приведенным выше рассуждением.

Вычисление показателей Ляпунова для стробоскопического отображения Пуанкаре было проведено на основе численного решения уравнений для действительных амплитуд и шести комплектов уравнений в вариациях с ортогонализацией векторов по Граму–Шмидту и нормализацией на каждом периоде модуляции [9]. В спектре показателей Ляпунова

$$\begin{aligned} \Lambda_1 &= 1.014, & \Lambda_2 &= -3.246, & \Lambda_3 &= -3.516, \\ \Lambda_4 &= -5.094, & \Lambda_5 &= -5.326, & \Lambda_6 &= -5.424 \end{aligned} \quad (4)$$

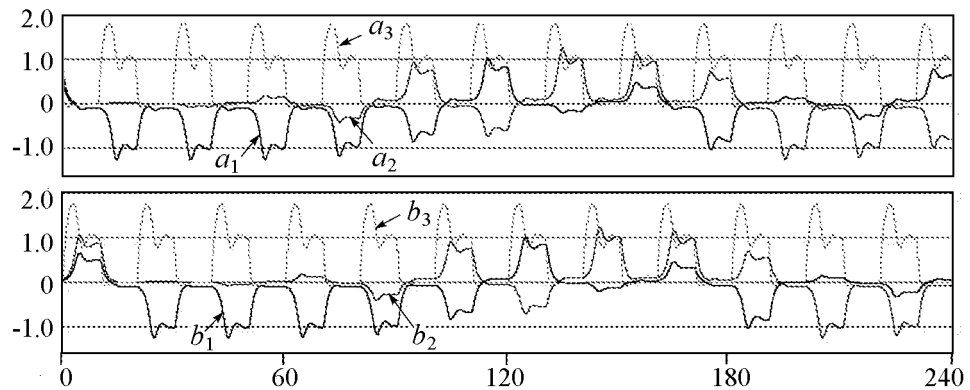


Рис. 1. Графики зависимости от времени амплитуд трех осцилляторов первой (вверху) и второй (внизу) подсистем, полученные в результате численного решения уравнений (1) для действительных амплитуд при задании функций связи соотношениями (2). Значения параметров $\kappa = 2$, $\varepsilon = 0.1$, $T = 20$, $\gamma = 1$

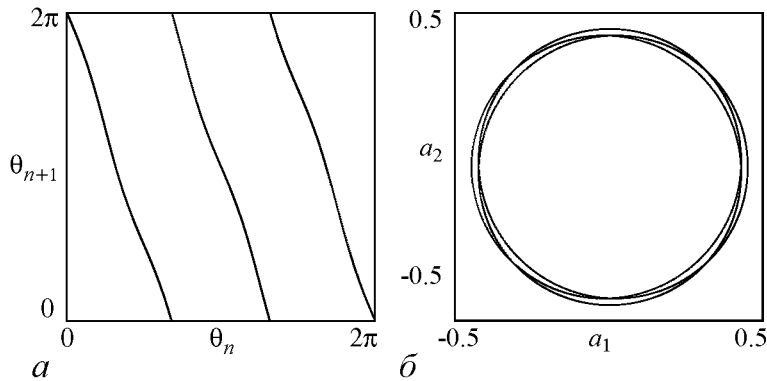


Рис. 2. Диаграмма, иллюстрирующая преобразование угловой переменной за период модуляции накачки (а), и портрет аттрактора в стробоскопическом сечении (б). Графики построены по результатам численного решения уравнений (1) для действительных амплитуд при задании функций связи соотношениями (2). Значения параметров $\kappa = 2$, $\varepsilon = 0.1$, $T = 20$, $\gamma = 1$

старший показатель близок к величине $\ln 3 = 1.0986\dots$, что соответствует трехкратному растяжению вдоль циклической координаты (угловой переменной) в шестимерном фазовом пространстве отображения Пуанкаре. Остальные показатели отрицательны, что отвечает сжатию по остальным направлениям в фазовом пространстве. Таким образом, с точки зрения динамики, описываемой в терминах действительных амплитуд, стробоскопическое отображение имеет, как можно полагать, аттрактор типа Смейла–Вильямса в варианте соленоида, у которого число витков на одном шаге построения утраивается. На рис. 2, б показан портрет аттрактора для стробоскопического отображения, визуально соответствующий изображению соленоида типа Смейла–Вильямса с различимой поперечной канторовой структурой. Оценка размерности аттрактора в сечении Пуанкаре по формуле Каплана–Йорке на основе спектра показателей Ляпунова (3) дает $D = 1 + \Lambda_1/|\Lambda_2| = 1.31$.

Расчеты показывают, что рассмотренный тип динамики сохраняется в достаточно широком диапазоне изменения параметров системы.

3. Модель с девятикратным изменением угловой переменной

Зададим теперь функции в уравнениях (1) в виде

$$f_1(x, y) = f_2(x, y) = x - 3y, \quad (5)$$

благодаря чему уравнения приобретают симметричный вид. Теперь утроение угловой переменной будет происходить при каждой передаче возбуждения, от первой подсистемы ко второй, и от второй к первой. Таким образом, за полный цикл угловая переменная претерпевает умножение на фактор девять.

На рис. 3 показаны зависимости амплитуд от времени для шести осцилляторов, составляющих систему, в режиме установившихся колебаний при тех же значениях параметров, что и на рис. 2. Как и в предыдущем разделе, в каждой из подсистем амплитуда осциллятора накачки изменяется практически по периодическому закону, тогда как два других осциллятора каждой подсистемы демонстрируют соотношение амплитуд, изменяющееся нерегулярным образом. В данном случае

поведение подсистем симметрично. Это выражается в том, что верхняя и нижняя диаграммы на рис. 3 выглядят аналогично друг другу.

На рис. 4, *a* иллюстрируется преобразование угловой переменной при стробоскопическом описании динамики системы. График содержит девять ветвей и соответствует растягивающему отображению окружности: полный обход окружности для прообраза отвечает девятикратному обходу в том же направлении для образа.

Вычисление показателей Ляпунова для стробоскопического отображения Пуанкаре приводит к следующему результату:

$$\begin{aligned} \Lambda_1 &= 2.183, & \Lambda_2 &= -2.516, & \Lambda_3 &= -2.520, \\ \Lambda_4 &= -5.177, & \Lambda_5 &= -5.196, & \Lambda_6 &= -5.217, \end{aligned} \quad (6)$$

где старший показатель близок к величине $\ln 9 = 2.1972\dots$. Это соответствует девятикратному растяжению вдоль циклической координаты и сжатию по остальным направлениям в фазовом пространстве отображения Пуанкаре. Таким образом, с точки зрения динамики, описываемой в терминах действительных амплитуд, реализуется аттрактор типа Смейла–Вильямса в варианте соленоида, у которого число витков на

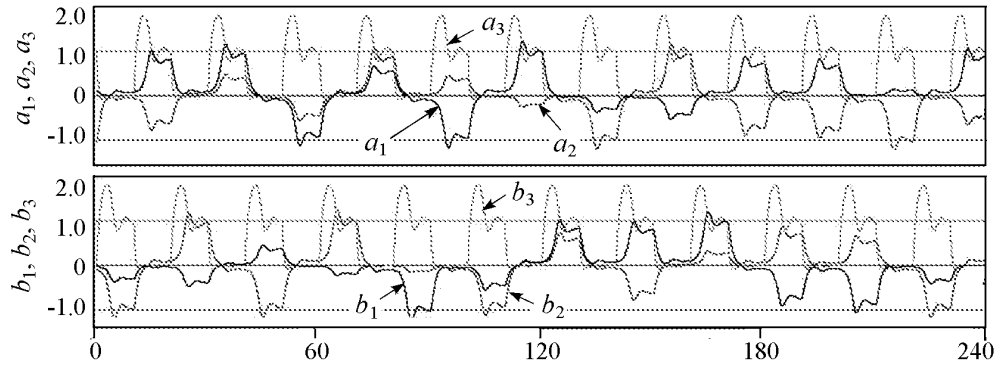


Рис. 3. Графики зависимости от времени амплитуд трех осцилляторов первой (вверху) и второй (внизу) подсистем, полученные в результате численного решения уравнений (1) для действительных амплитуд при задании функций связи соотношениями (5). Значения параметров $\kappa = 2$, $\varepsilon = 0.1$, $T = 20$, $\gamma = 1$

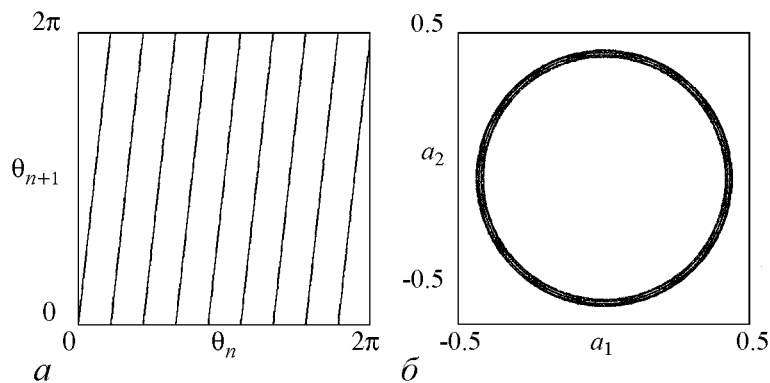


Рис. 4. Диаграмма, иллюстрирующая преобразование угловой переменной за период модуляции накачки (*a*), и портрет аттрактора в стробоскопическом сечении (*б*). Графики построены по результатам численного решения уравнений (1) для действительных амплитуд при задании функций связи соотношениями (5). Значения параметров $\kappa = 2$, $\varepsilon = 0.1$, $T = 20$, $\gamma = 1$

одном шаге построения увеличивается девятикратно. На рис. 4, б показан портрет аттрактора для стробоскопического отображения. Оценка размерности аттрактора в сечении Пуанкаре по формуле Каплана–Йорке на основе спектра показателей Ляпунова (6) дает $D = 1 + \Lambda_1/|\Lambda_2| = 1.87$. Заметим, что и старший показатель Ляпунова, и дробная часть фрактальной размерности в этом случае существенно больше, чем для модели, рассмотренной в предыдущем разделе.

Согласно результатам проведенных расчетов, характер динамики и тип аттрактора сохраняются в достаточно широком диапазоне изменения параметров.

Заключение

Рассмотрен новый принцип построения схем параметрических генераторов гиперболического хаоса. Отличие от систем, предложенных ранее [6,7], состоит в том, что в качестве угловой переменной, претерпевающей кратное увеличение за характерный период, выступает не фаза колебаний, а величина, характеризующая соотношение амплитуд двух параметрических осцилляторов, возбуждаемых общим источником накачки. Таким образом, хаотическая динамика проявляется в динамике амплитуд, а не фаз осцилляторов. Подобные системы могут быть реализованы в радиотехнике или нелинейной оптике и найти применение для систем скрытой коммуникации и генерации случайных чисел. Привлекательной чертой для приложений является грубость, или структурная устойчивость, обусловленная гиперболической природой аттрактора в амплитудных уравнениях, что обеспечивает нечувствительность динамики амплитуд к шумам и флуктуациям, а также к изменению параметров и характеристик элементов, из которых построена система.

Автор выражает благодарность профессору С.П. Кузнецову за обсуждение и помощь.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ № 12-02-00541.

Библиографический список

1. *Синай Я.Г.* Стохастичность динамических систем // В кн. Нелинейные волны / Ред. А.В. Гапонов-Грехов. М.: Наука, 1979. С. 192.
2. *Shilnikov L.* Mathematical problems of nonlinear dynamics: a tutorial // Int. J. of Bifurcation and Chaos. 1997. Vol. 7, № 9. P. 1353.
3. *Лоскутов А.Ю.* Очарование хаоса // УФН. 2010. Vol. 180, № 12. P. 1305.
4. *Кузнецов С.П.* Динамический хаос и однородно гиперболические аттракторы: от математики к физике // УФН. 2011. Т. 181, № 2. С. 121.
5. *Kuznetsov S.P.* Hyperbolic Chaos: A Physicist's View. Higher Education Press: Beijing and Springer-Verlag: Berlin, Heidelberg. 2012. 336 p.
6. *Кузнецов С.П.* О возможности реализации параметрического генератора гиперболического хаоса // ЖЭТФ. 2008. Т. 133, № 2. С. 438.
7. *Кузнецов А.С., Кузнецов С.П., Сатаев И.Р.* Параметрический генератор гиперболического хаоса на основе двух связанных осцилляторов с нелинейной диссипацией // ЖТФ. 2010. Т. 80, вып. 12. С. 1.

8. *Isaeva O.B., Kuznetsov S.P., Mosekilde E.* Hyperbolic chaotic attractor in amplitude dynamics of coupled self-oscillators with periodic parameter modulation // *Phys. Rev.* 2011. Vol. 84. 016228.
9. *Кузнецов С.П.* Динамический хаос. 2-е изд. Москва: Физматлит, 2006. 356 с.

*Саратовский государственный
университет им. Н.Г. Чернышевского*

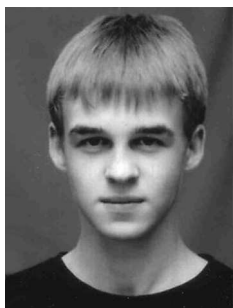
Поступила в редакцию 13.02.2012

PARAMETRIC GENERATORS WITH CHAOTIC AMPLITUDE DYNAMICS CORRESPONDING TO ATTRACTORS OF SMALE–WILLIAMS TYPE

A.S. Kuznetsov

A new approach is considered to design of parametric generators of chaos with hyperbolic attractors on the basis of two alternately excited subsystems, each consisting of three oscillators, one of which plays the role of the pump source. In contrast to previously proposed schemes, the angular variable undergoing a multiple increase over each characteristic period is a quantity characterizing the amplitude ratio of two oscillators, rather than the phase of successive oscillation trains.

Keywords: Chaos, attractor, parametric generator, non-autonomous system, Smale–Williams solenoid.



Кузнецов Алексей Сергеевич – родился в Саратове (1989). Окончил физический факультет Саратовского государственного университета (2010). Защитил дипломную работу на тему «Генераторы хаоса на основе параметрических осцилляторов с модулированной добротностью». В настоящее время – аспирант факультета нелинейных процессов СГУ. Участник школ-семинаров и конференций «Нелинейные дни в Саратове для молодых», «Нанoeлектроника, нанофотоника и нелинейная физика», «Хаотические автоколебания и образование структур».

410012 Саратов, ул. Астраханская, 83
Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского
E-mail: alek.art@mail.ru



МЕТОД ВЫДЕЛЕНИЯ ДВУХ ТИПОВ АКТИВНОСТИ НЕЙРОННОГО АНСАМБЛЯ ГОЛОВНОГО МОЗГА В ТЕЧЕНИЕ СНА ПО СИГНАЛАМ ЭЛЕКТРОЭНЦЕФАЛОГРАММ

В.В. Грубов

Предложен метод выделения двух различных типов сонных веретен на электроэнцефалограммах. Показано, что данный метод имеет высокую точность и может быть использован в нейрофизиологических исследованиях по изучению закономерностей появления тех или иных паттернов на электроэнцефалограммах.

Ключевые слова: Непрерывное вейвлетное преобразование, электроэнцефалограмма, эпилепсия, сонные веретена, формы ритмической активности, диагностика.

В настоящее время в радиофизике разработано большое число методов анализа сложных колебательных процессов, которые все чаще находят применение в других областях естествознания, в том числе в физиологии и медицине [1,2]. Эти методы оказываются особенно эффективными в исследованиях динамики активности нейронных сетей. Последние имеют крайне сложную структуру, поскольку состоят из большого числа отдельных колебательных элементов с собственной сложной динамикой – нейронов.

Для получения информации о работе головного мозга используют методы регистрации электрической активности мозга путем записи электроэнцефалограмм (ЭЭГ), которые представляют собой усредненную сумму электрических токов, генерируемых группой нейронов в области регистрирующего электрода [3]. Традиционно на ЭЭГ выделяют несколько частотных диапазонов (альфа, бета, гамма, дельта и т.д.). Доказано, что существует четкая корреляция между возбуждением той или иной частотной составляющей на ЭЭГ и функциональным состоянием организма, поэтому одной из важнейших задач электроэнцефалографических исследований является выделение определенных форм ритмической активности.

Одним из наиболее многочисленных осцилляторных паттернов на ЭЭГ, наблюдающихся во время сна, являются сонные веретена, которые представляют собой колебания характерной «веретенообразной» формы с частотой 10...15 Гц и средней

продолжительностью 0.5...1.5 с. Сонные веретена формируются вследствие синхронной работы нервной сети, объединяющей нейроны коры и таламуса. Также следует отметить большую вариабельность сонных веретен, значительно усложняющую их диагностику. Так, существует по крайней мере два вида веретенной активности: собственно сонные веретена с частотой 10...15 Гц и низкочастотные (НЧ) осцилляции, по форме и продолжительности сходные с веретенами, но имеющие более низкую частоту – в диапазоне 5...9 Гц. Изучение сонных веретен представляет интерес благодаря их возможной связи с эпилептической активностью. В частности, существует гипотеза о трансформации веретен в эпилептические пик-волновые разряды [4].

Целью данной работы является развитие метода автоматической диагностики сонных веретен на ЭЭГ, разработанного в [5], применительно к выделению как классических сонных веретен, так и веретеноподобных НЧ-осцилляций. Использование метода автоматической разметки ЭЭГ является важным в нейрофизиологической практике при исследовании временных рядов большой продолжительности, например для выявления нелинейно-динамических закономерностей появления тех или иных ритмов (см., например, [6–8]).

В работе были использованы записи ЭЭГ, зарегистрированные в коре и таламусе у шести крыс эпилептической линии WAG/Rij. Запись проводилась непрерывно в течение 24 часов, поэтому содержит как фрагменты сна с ярко выраженными сонными веретенами, так и фрагменты бодрствования. Все эксперименты для записи данных проводились в Дондеровском центре сознания Университета Радбауд (Наймеген, Нидерланды).

Ранее, в работе [5] был предложен метод, основанный на использовании непрерывного вейвлетного преобразования. Суть метода заключается в следующем. Рассчитывается мгновенная энергия вейвлетного преобразования, которая затем усредняется по некоторым характерным частотным диапазонам. Если энергия в одном из диапазонов превышает определенное пороговое значение, то делается вывод о наличии сонного веретена в данный момент времени.

Метод, предлагаемый в данной работе, также использует непрерывное вейвлетное преобразование, которое представляет собой свертку исследуемого сигнала $x(t)$ и некоторой базисной функции

$$W(s, \tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \varphi_{s,\tau}^* dt.$$

Базисная функция $\varphi_{s,\tau}(t)$ может быть получена из материнского вейвлета с помощью следующего преобразования

$$\varphi_{s,\tau}(t) = \frac{1}{\sqrt{s}} \varphi_0 \left(\frac{t - \tau}{s} \right).$$

В методе используется материнский морле-вейвлет, который, как было показано в работе [5], является наиболее подходящим для данной задачи

$$\varphi(\eta) = \frac{1}{\sqrt[4]{\pi}} e^{j\omega_0 \eta} e^{-\frac{\eta^2}{2}}.$$

Расчет мгновенной энергии вейвлетного преобразования $w(t)$ в характерном частотном диапазоне F_s осуществляется с помощью следующего выражения:

$$w(t) = \int_{F_s} |W(s, t)| ds.$$

В данной работе, исходя из особенностей частотного состава веретеноподобных паттернов, используются два частотных диапазона $F_{s1} \in [5...9]$ Гц и

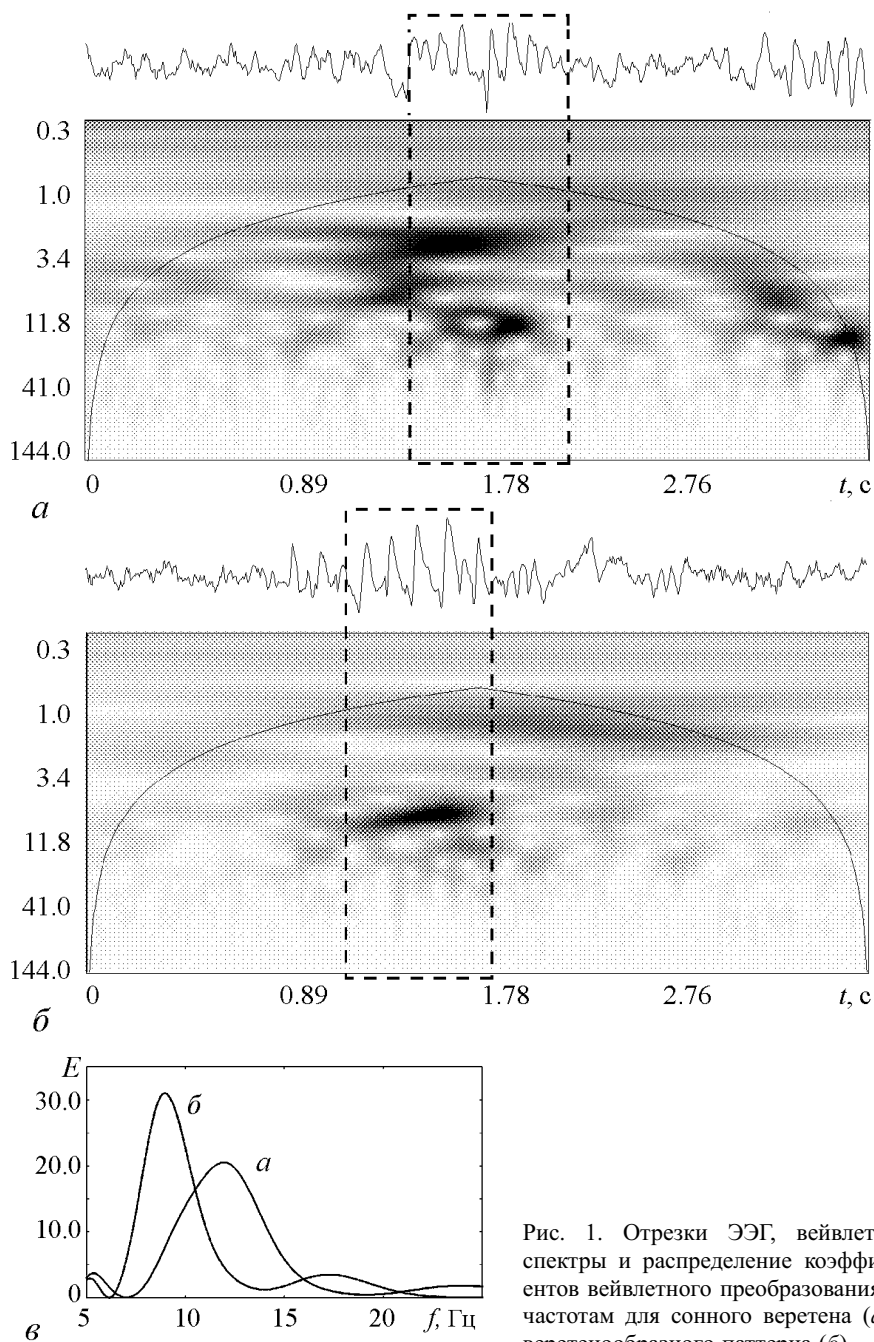


Рис. 1. Отрезки ЭЭГ, вейвлетные спектры и распределение коэффициентов вейвлетного преобразования по частотам для сонного веретена (а) и веретенообразного паттерна (б)

$F_{s2} \in [10...15]$ Гц. Такой подход позволяет выделить как собственно сонные веретена, так и веретенообразные НЧ-осцилляции.

Затем делается вывод о наличии на ЭЭГ того или иного веретенного паттерна на основе анализа энергий $w_1(t)$ и $w_2(t)$ в соответствующих частотных диапазонах F_{s1} и F_{s2} и некоторых пороговых значений w_1 и w_2 . Для этого используется ряд критериев.

Так, классическое сонное веретено выделяется при выполнении следующего соотношения в данный момент времени $w_1(t) < w_1$, $w_2(t) > w_2$ или $w_1(t) > w_1$, $w_2(t) > w_2$, $w_1(t) < w_2(t)$.

Выделение веретенообразной НЧ-осцилляции происходит при выполнении соотношения $w_1(t) > w_1$, $w_2(t) < w_2$ или $w_1(t) > w_1$, $w_2(t) > w_2$, $w_1(t) > w_2(t)$.

В случае, когда выполняется $w_1(t) < w_1$, $w_2(t) < w_2$, делается вывод о том, что в текущий момент времени веретенная активность отсутствует.

Следует отметить, что ЭЭГ является сложным сигналом, в котором могут появляться отдельные резкие всплески активности в различных частотных диапазонах, в том числе в диапазонах, рассматриваемых в рамках разработанного метода. Подобные события могут вызвать кратковременный рост мгновенной энергии преобразования $w(t)$, что приводит к ошибкам при диагностике (ложное детектирование), поэтому в разработанный метод было внесено изменение. Так, при диагностике используются не мгновенные значения энергий w_1 и w_2 , а значения, усредненные по некоторому интервалу времени $\langle w(t) \rangle = 1/T \int_T w(t) dt$.

Численный анализ показал, что оптимальной шириной окна, позволяющей снизить влияние коротких артефактов на качество распознавания, является $T = 1.2$ с.

Также следует учесть сложную динамику частоты в течение сонного веретена [5], которая усложняет диагностику и приводит к ошибкам (например, дробление одного паттерна на несколько). Поэтому в метод было внесено еще одно изменение. Если в какой-либо момент времени выполняется условие $w(t) > w$ в одном из диапазонов, то для последующих моментов времени значение w в этом диапазоне понижается на 30%: $w' = 0.3w$. Первоначальное значение w возвращается в момент времени, для которого перестает выполняться условие $w(t) > w'$. Такое понижение порога позволяет ослабить влияние изменения частоты в течение веретена на качество детектирования.

Разработанный метод был применен к 24-часовым записям ЭЭГ шести крыс

Таблица 1

Номер животного	Веретенообразные паттерны			Сонные веретена			w_0
	f , Гц	$w_{1\max}$	w_1	f , Гц	$w_{2\max}$	w_2	
1	7.2	0.21	0.072	14.1	0.20	0.076	0.031
2	6.4	0.41	0.115	12.6	0.28	0.071	0.028
3	6.1	0.43	0.132	13.2	0.37	0.124	0.034
4	8.3	0.27	0.090	12.8	0.24	0.080	0.025
5	7.4	0.24	0.088	14.0	0.19	0.078	0.028
6	7.8	0.26	0.081	12.1	0.22	0.069	0.024

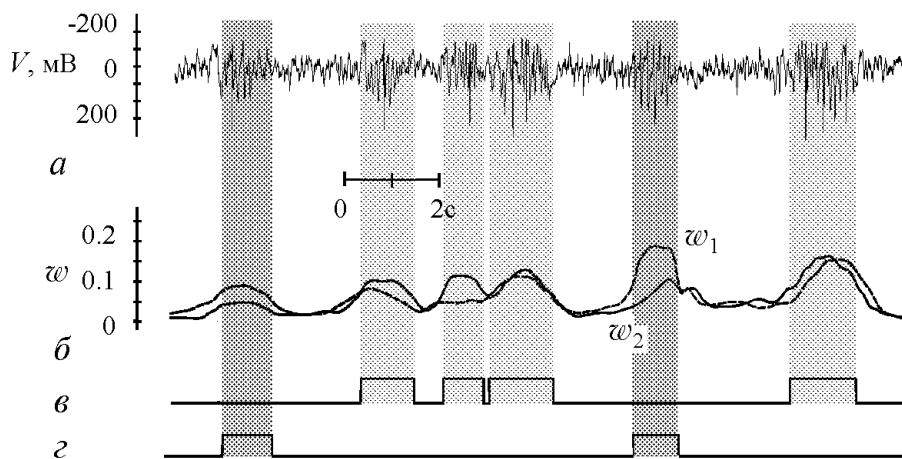


Рис. 2. Отрезок ЭЭГ (а), усредненные по двум диапазонам энергии вейвлетного преобразования $w_1(t)$ и $w_2(t)$ (б); полученная с помощью метода разметка для двух типов веретенообразных паттернов: классических сонных веретен (θ) и НЧ-осцилляций (z)

линии WAG/Rij, имеющих предрасположенность к абсанс-эпилепсии. Ниже приведена таблица с параметрами метода, подобранными для каждого исследуемого животного. В ней представлены: средняя частота f , максимальная энергия w_{\max} и пороговое значение энергии w для сонных веретен и веретенообразных осцилляций, а также энергия фоновой ЭЭГ w_0 . Как видно, средняя частота для каждого вида паттерна укладывается в определенные для них диапазоны, что еще раз подтверждает необходимость разделения веретеноподобных паттернов по типам. Пороговое значение w составляет порядка 25–30% от максимальной для данного паттерна энергии w для каждого животного. Такой выбор позволяет выделять максимальное число сонных веретен и свести к минимуму количество ложных детектирований.

На рис. 2 представлен пример работы метода. Как видно из рисунка, разработанный метод не только хорошо выделяет веретенообразные паттерны, но и разделяет их по типам.

Таким образом, в работе предложено дальнейшее развитие метода выделения различных осцилляторных паттернов на ЭЭГ, предложенного ранее в работах [5, 6]. Особенностью метода является возможность эффективного разделения двух типов веретен на сонных ЭЭГ. Данный метод показал высокую точность и был использован в нейрофизиологических исследованиях по изучению закономерностей появления осцилляторных паттернов на ЭЭГ [8]. Разработанный в статье метод может найти применение в нейрофизиологических и медицинских исследованиях, связанных с пониманием природы эпилептогенеза у животных и человека.

Автор выражает благодарность Е.Ю. Ситниковой, А.А. Короновскому, А.А. Овчинникову и А.Е. Храмову за плодотворные обсуждения полученных результатов.

Работа поддержана грантом РФФИ (12-02-00221) и ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России на 2009–2013 годы».

Библиографический список

1. Абарбанель Г.Д.И., Рабинович М.И., Селверстон А. и др. Синхронизация в нейронных ансамблях // Успехи физических наук. 1996. Т. 166. С. 363.

2. *Mosekilde E., Mainstrenko Yu., Postnov D.E.* Chaotic synchronization, applications to living systems. Singapore: World Scientific, 2002.
3. *Niedermeyer E., Silva F.L.* Electroencephalography: Basic principles, clinical applications, and related fields. Lippincot Williams & Wilkins, 2004.
4. *Kostopoulos G.K.* Spike-and-wave discharges of absence seizures as a transformation of sleep spindles: the continuing development of a hypothesis // *Clinical Neurophysiology*. 2000. Vol. 111. Suppl 2. S27-38.
5. *Грубов В.В., Овчинников А.А., Ситникова Е.Ю., Короновский А.А., Храмов А.Е.* Вейвлетный анализ сонных веретен на ЭЭГ и разработка метода их автоматической диагностики // *Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика*. 2011. Т. 19. № 4.
6. *Hramov A.E., Koronovskii A.A., Midzyanovskaya I.S., Sitnikova E.Yu., van Rijn C.M.* On-off intermittency in time series of spontaneous paroxysmal activity in rats with genetic absence epilepsy // *CHAOS*. 2006. Vol. 16. 043111
7. *Velazquez P.J.L., Khosravani H., Lozano A. et al.* Type III intermittency in human partial epilepsy. *European Journal of Neuroscience*. 1999. Vol. 11. issue 7, P.2571
8. *Sitnikova E.Yu., Hramov A.E., Grubov V.V., Ovchinnikov A.A., Koronovsky A.A.* On-off intermittency of thalamo-cortical oscillations in the electroencephalogram of rats with genetic predisposition to absence epilepsy // *Brain Research*. 2012. Vol. 1436. P. 147.

Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского

Поступила в редакцию 10.01.2012

METHOD FOR DETECTING OF TWO TYPES OF BRAIN NEURAL ENSEMBLE ACTIVITY DURING SLEEP ACCORDING TO ELECTROENCEPHALOGRAPHIC RECORDS

V.V. Grubov

Method for detecting of two different types of sleep spindles on electroencephalogram was offered. High precision of this method was demonstrated; it can be used in neurophysiological research of regularity of appearing of different patterns on electroencephalogram.

Keywords: Continuous wavelet transformation, electroencephalogram, epilepsy, oscillatory pattern, sleep spindle, types of spindle activity, diagnostics.

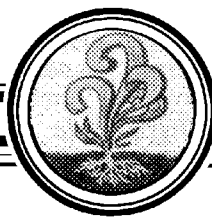


Грубов Вадим Валерьевич – родился в пос. Емильчино Житомирской области (Украина). Студент факультета нелинейных процессов Саратовского государственного университета им. Н.Г. Чернышевского. Работает лаборантом в лаборатории № 5 ОФНС НИИ ЕН СГУ.

410012 Саратов, ул. Астраханская, 83

Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского

E-mail: vvgrubov@gmail.com



МОДЕЛИРОВАНИЕ РАСПРОСТРАНЕНИЯ МАГНИТОСТАТИЧЕСКИХ ВОЛН В ОДНОМЕРНЫХ МАГНОННЫХ КРИСТАЛЛАХ

А.В. Садовников, А.Г. Рожнев

В работе предложен метод расчета характеристик поверхностных магнитостатических волн, распространяющихся в одномерных магнитных кристаллах, образованных периодической модуляцией формы поверхности ферритовой пленки. Рассчитаны зона структура и распределение полей в периодической системе с прямоугольной формой модуляции поверхности пленки. Показано, что скорость распространения энергии для собственной волны в исследуемой анизотропной периодической системе совпадает с групповой скоростью, рассчитанной по дисперсионной характеристике. Полученные численные результаты находятся в хорошем соответствии с экспериментальными данными.

Ключевые слова: Магنونный кристалл, поверхностные магнитостатические волны, метод конечных элементов.

Введение

В последнее время актуальным является изучение нового класса планарных волноведущих систем на основе ферромагнитных пленок с периодическими и квазипериодическими неоднородностями – магنونных кристаллов (МК). По аналогии с фотонным кристаллом, в котором периодически чередуются области с различными значениями диэлектрической проницаемости, МК состоит из материалов с различной магнитной проницаемостью, либо с периодически изменяющимися геометрическими параметрами [1]. Подобные структуры могут быть как одномерными, так и двумерными [2]. Также выделяется класс динамических магنونных кристаллов [3], образованных из пленки железоиттриевого граната (ЖИГ), расположенной в периодически изменяющемся магнитном поле.

В слоистых ферритовых структурах могут распространяться спиновые магнитостатические волны (МСВ) различного типа [4]. Периодическое изменение параметров среды приводит к появлению частотных запрещенных зон в спектре распро-

странения МСВ, причем положением зон можно управлять путем изменения внешнего постоянного магнитного поля. Благодаря этим свойствам, системы подобного типа находят применение в различных приборах и устройствах, таких как перестраиваемые СВЧ-фильтры, устройства хранения информации, сенсоры, высокоскоростные переключатели и устройства магنونной логики [5].

Задача численного моделирования распространения магнитоэлектрических волн в периодических и квазипериодических магнонных кристаллах является весьма важной, поскольку аналитического решения уравнений, описывающих динамику магнитоэлектрических спиновых волн в МК общего вида без существенных упрощающих предположений, получить не удается.

Все численные методы для решения задач электродинамики в общем случае можно разбить на два больших класса [6–8]. К первому классу относятся методики, в которых рассматриваются процессы, происходящие на фиксированной частоте (методы, работающие в частотной области). Подобные подходы эффективны для расчета собственных частот и полей собственных мод резонаторов, дисперсионных характеристик и полей собственных волн в линиях передачи.

В методах, относящихся ко второму классу, исследуется временная эволюция волновых пакетов или многочастотных сигналов, тогда говорят о методах, работающих во временном представлении. Эти методики, как правило, более эффективны при решении задач рассеяния, при исследовании распространения волновых пакетов в средах с дисперсией и в нелинейных структурах.

В данной работе построена математическая модель для расчета электродинамических характеристик ферромагнитных структур, периодических по одному из пространственных направлений (одномерных магнонных кристаллов). Подробно рассмотрена модель системы, которая хорошо описывает основные особенности процесса распространения магнитоэлектрических волн в линиях передач на основе пленки ЖИГ с периодически повторяющимися неоднородностями. Разработанная методика численного моделирования на основе метода конечных элементов в частотной области используется для нахождения дисперсионных характеристик одномерного магнонного кристалла, образованного периодически неоднородностями, нанесенными на одну из поверхностей ферритовой пленки. Детально рассматриваются пространственные распределения модулей напряженности электрического и магнитного полей в различных точках дисперсионной кривой. Полученные численные результаты сравниваются с экспериментальными данными, известными из литературы.

1. Постановка задачи и методика численного моделирования

Рассмотрим подробно методику численного моделирования периодической ферромагнитной структуры. Изображенная на рис. 1, *a* модель одномерного МК представляет собой периодическую вдоль направления оси x структуру. Вдоль оси z система предполагается бесконечной и однородной. Периодичность структуры вдоль оси x может быть обусловлена периодическим изменением толщины пленки, нанесением на ее поверхность повторяющихся металлизующих полосок или периодическим изменением свойств материала пленки. Для определенности здесь будет рассмотрена первая ситуация, то есть предполагается, что на верхней поверхности пленки создана неоднородность, повторяющаяся с периодом L . Система помещена во внешнее постоянное магнитное поле H_0 , направленное вдоль оси z . Внизу

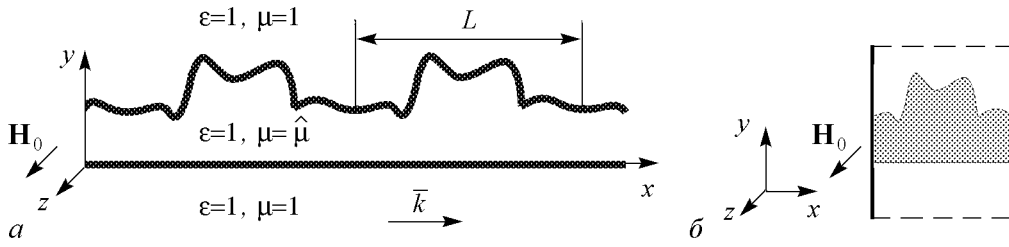


Рис. 1. *a* – схема периодической магнитной структуры; *b* – примитивная ячейка одномерного МК и заданные граничные условия: штриховые линии – идеальные электрические стенки, сплошные линии – периодические условия типа Флоке

и сверху пленки расположены слои диэлектрика, относительные диэлектрическая и магнитная проницаемости которых в общем случае не равны. В качестве ферромагнитного материала для МК выбран ЖИГ, диэлектрическая проницаемость которого является скалярной величиной и константой, а магнитная проницаемость может быть выражена тензором, компоненты которого зависят от частоты. Если известен вид тензора $\hat{\mu}$, то для определения электродинамических характеристик МК необходимо решать уравнения Максвелла для структуры (см. рис. 1, *a*) с соответствующими граничными условиями.

Поскольку моделирование проводится в частотной области, то предполагается, что все компоненты электромагнитного поля зависят от частоты по закону $\exp j\omega t$. В этом случае из уравнений Максвелла для вектора напряженности электрического поля \mathbf{E} следует известное уравнение второго порядка

$$\nabla \times (\hat{\mu}^{-1} \nabla \times \mathbf{E}) - k^2 \varepsilon \mathbf{E} = 0, \quad (1)$$

где $k = \omega/c$ – волновое число в вакууме, $\omega = 2\pi f$ – круговая частота, f – частота электромагнитной волны.

Если внешнее магнитное поле направлено вдоль оси z , в пленке ЖИГ в направлении оси x может распространяться поверхностная магнитостатическая волна (ПМСВ). Решая в линейном приближении уравнение движения вектора намагниченности (уравнение Ландау–Лифшица без учета диссипации) под действием периодического магнитного поля [9], являющегося малой добавкой к постоянному полю намагничивания, можно получить тензор магнитной проницаемости ферромагнетика [10]

$$\hat{\mu} = \begin{bmatrix} \mu(\omega) & -i\mu_a(\omega) & 0 \\ i\mu_a(\omega) & \mu(\omega) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (2)$$

причем зависимость компонент тензора от частоты определяется соотношениями

$$\mu(\omega) = \frac{\omega_H(\omega_H + \omega_M) - \omega^2}{\omega_H^2 - \omega^2}, \quad (3)$$

$$\mu_a(\omega) = \frac{\omega_M \omega}{\omega_H^2 - \omega^2}, \quad (4)$$

где $\omega_M = \gamma 4\pi M_0$, $\omega_H = \gamma H_0$, $\gamma = 2\pi \cdot 2.8$ МГц/Э – гиромагнитное отношение в ЖИГ, M_0 – намагниченность насыщения. Наличие в тензоре магнитной проницаемости на-

магнитного феррита мнимых недиагональных компонент свидетельствует о магнитной гиротропии ферромагнитной среды, при этом компоненты тензора являются функциями частоты ω , намагнитченности M_0 и приложенного магнитного поля H_0 . В данной работе затухание электромагнитных волн в феррите не учитывается.

Поскольку МК является периодической системой, то для моделирования пространства в ней собственных волн достаточно рассмотреть один период структуры. На рис. 1, б схематично изображена примитивная ячейка МК и используемые в задаче типы граничных условий. Так как при распространении ПМСВ поле собственной волны сосредоточено, в основном, внутри или вблизи поверхности ферритовой пленки, то для ограничения расчетной области в направлении y достаточно было выбрать на ее верхней и нижней границах граничные условия наиболее простого вида. В наших расчетах в качестве таковых выбирались граничные условия типа электрической стенки. На правой и левой границах расчетной области, перпендикулярных оси x и отстоящих друг от друга на один период структуры, должны выполняться периодические граничные условия Флоке. Они имеют вид

$$\mathbf{E}(x + L, y) = \mathbf{E}(x, y) \exp(-j\beta_x L),$$

где β_x – компонента волнового вектора вдоль оси x (продольное волновое число).

2. Метод конечных элементов для моделирования распространения электромагнитных волн в анизотропных волноведущих структурах

Краевая задача, описывающая распространение волн в структуре и состоящая из уравнения (1) и соответствующих граничных условий, решается методом конечных элементов (МКЭ) [11–13]. Суть метода заключается в том, что расчетная область разбивается на конечные элементы (в простейшем случае – треугольники). В пределах каждого конечного элемента компоненты поля аппроксимируются с помощью простых полиномиальных функций. Коэффициенты полиномов выражаются через значения компонент полей в конечном числе точек, лежащих на границе и внутри элемента. Решение уравнений в частных производных для каждого конечного элемента осуществляется одним из подходящих для каждой конкретной задачи методов – вариационным методом, методом Галеркина и т.д. В нашем случае используется вариационный подход. Далее задача сводится к решению обобщенной проблемы собственных значений для больших разреженных матриц. В результате получаем распределение поля собственной моды и величину β_x , то есть точку на дисперсионной характеристике. Повторив вычисления для нужного количества точек в заданном диапазоне частот, можно рассчитать всю дисперсионную характеристику и соответствующие распределения полей.

В данной работе для расчета периодического МК используется вариант МКЭ, применимый к моделированию системы более общего вида, а именно, однородных в направлении оси z линий передачи с неоднородным в поперечном сечении анизотропным заполнением. Этот метод был предложен в работе [14]. Далее для простоты будем рассматривать закрытый в направлении y волновод, тогда один период структуры в плоскости xy представляет собой ограниченную область Θ (рис. 2, а). Предполагаем, что граница этой области Γ состоит из двух частей: $\Gamma = \Gamma_e \cup \Gamma_m$, где

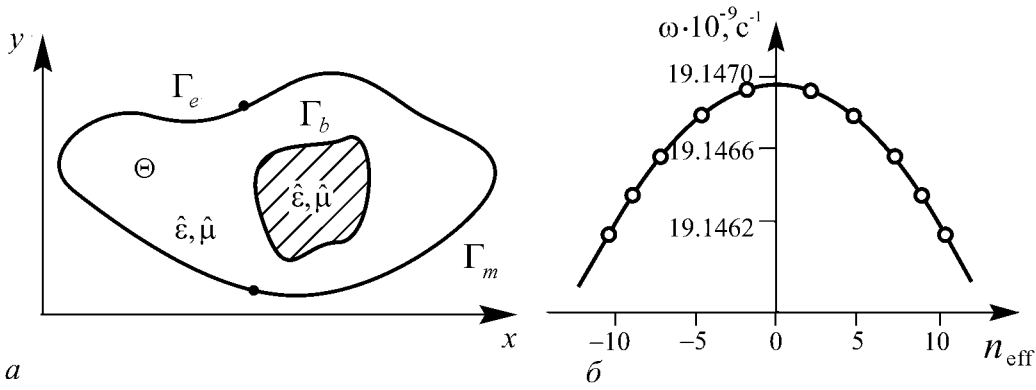


Рис. 2. *a* – поперечное сечение структуры – ограниченная область Θ ; *b* – аппроксимация результатов расчета $n_{eff}(\omega)$ для нахождения значения частоты ω

Γ_e и Γ_m – части границы, на которых заданы граничные условия типа электрической и магнитной стенок, соответственно. Будем считать, что тензоры комплексных диэлектрической и магнитной проницаемостей среды внутри волновода имеют вид

$$\hat{\varepsilon}(x, y) = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & 0 \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix}, \quad \hat{\mu}(x, y) = \begin{bmatrix} \mu_{xx} & \mu_{xy} & 0 \\ \mu_{yx} & \mu_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \mu_{zz} \end{bmatrix}. \quad (5)$$

В общем случае компоненты этих тензоров могут претерпевать разрывы на линиях Γ_b внутри области Θ . Приведенный далее вариант метода конечных элементов пригоден и для тензоров $\hat{\varepsilon}$ и $\hat{\mu}$ общего вида, однако возникающее при этом алгебраическое уравнение для собственных значений оказывается квадратичным по продольному волновому числу [15], что сильно усложняет численное решение задачи, поэтому ограничимся видом тензоров (5).

Представим вектор электрического поля в виде

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \text{Re}[\mathbf{E}(x, y) \exp(j\omega t - j\beta_z z)], \quad (6)$$

где $\mathbf{E}(x, y)$ – комплексная амплитуда поля, и рассмотрим билинейный функционал

$$F(\mathbf{E}^{(a)}, \mathbf{E}) = \int_{\Theta} (\text{rot}_{(-\beta_z)} \mathbf{E}^{(a)}) \hat{\nu} (\text{rot}_{(\beta_z)} \mathbf{E}) dS - k^2 \int_{\Theta} \mathbf{E}^{(a)} \hat{\varepsilon} \mathbf{E} ds, \quad (7)$$

где $dS = dx dy$, $\hat{\nu} = \hat{\mu}^{-1}$, $k = \omega/c$, нижний индекс оператора rot указывает на его зависимость от z -компоненты волнового числа β_z (или $-\beta_z$) как от параметра. Функции $\mathbf{E}^{(a)}(x, y)$ и $\mathbf{E}(x, y)$ принадлежат пространству векторных функций $Z(\Theta)$, определенному на области Θ ,

$$Z(\Theta) : \{ \mathbf{A}(x, y) | \mathbf{A} \in L_2(\Theta), \text{rot}_{(\beta_z)} \mathbf{A} \in L_2(\Theta); \mathbf{A}_\tau = 0, A_z = 0 \text{ на } \Gamma_e \}. \quad (8)$$

Здесь τ – вектор, касательный в плоскости xy к соответствующей части границы.

Условие стационарности функционала приводит к следующей краевой задаче для функции \mathbf{E} :

$$\begin{aligned} \operatorname{rot}_{(\beta_z)} (\hat{\mathbf{v}} \operatorname{rot}_{(\beta_z)} \mathbf{E}) - k^2 \hat{\varepsilon} \mathbf{E} &= 0, & \mathbf{E}_\tau &= 0, & E_z &= 0 \text{ на } \Gamma_e, \\ (\hat{\mathbf{v}} \operatorname{rot}_{(\beta_z)} \mathbf{E})_\tau &= 0, & (\hat{\mathbf{v}} \operatorname{rot}_{(\beta_z)} \mathbf{E})_z &= 0 \text{ на } \Gamma_m, \\ (\hat{\mathbf{v}} \operatorname{rot}_{(\beta_z)} \mathbf{E})_\tau^{(+)} &= (\hat{\mathbf{v}} \operatorname{rot}_{(\beta_z)} \mathbf{E})_\tau^{(-)}, & (\hat{\mathbf{v}} \operatorname{rot}_{(\beta_z)} \mathbf{E})_z^{(+)} &= (\hat{\mathbf{v}} \operatorname{rot}_{(\beta_z)} \mathbf{E})_z^{(-)} \text{ на } \Gamma_b. \end{aligned} \quad (9)$$

В формулах (9) верхние индексы «+» и «-» соответствуют значениям функции на разных сторонах границы Γ_b . Краевая задача для сопряженного поля $\mathbf{E}^{(a)}$ отличается от задачи (9) сменой знака у β_z и заменой матриц $\hat{\mathbf{v}}$ и $\hat{\varepsilon}$ на транспонированные матрицы $\hat{\mathbf{v}}^T$ и $\hat{\varepsilon}^T$. Соотношения (9) совпадают с уравнениями, которые получаются при исключении комплексной амплитуды \mathbf{H} магнитного поля из уравнений Максвелла. Таким образом, задача расчета полей линии передачи эквивалентна нахождению стационарной точки функционала (7).

Для поиска стационарной точки применим вариант МКЭ, использующий смешанный базис. Область Θ разбиваем на треугольные элементы, в пределах каждого из них компоненты полей \mathbf{E} и $\mathbf{E}^{(a)}$ аппроксимируем следующими разложениями:

$$E_z = j\beta_z \sum_{i=1}^3 c_i N_i, \quad E_z^{(a)} = -j\beta_z \sum_{i=1}^3 c_i^{(a)} N_i, \quad \mathbf{E}_\perp = \sum_{i=4}^6 c_i \mathbf{p}_i, \quad \mathbf{E}_\perp^{(a)} = \sum_{i=4}^6 c_i^{(a)} \mathbf{p}_i, \quad (10)$$

где \mathbf{E}_\perp и $\mathbf{E}_\perp^{(a)}$ – поперечные компоненты полей; N_i ($i = 1, 2, 3$) – узловые линейные конечные элементы, определяемые в вершинах треугольника [8]; \mathbf{p}_i ($i = 4, 5, 6$) – реберные элементы [12,16], определяемые на серединах его сторон; c_i и $c_i^{(a)}$ – неизвестные коэффициенты. Для $i = 1, 2, 3$ коэффициенты c_i равны z -компонентам поля \mathbf{E} в вершинах треугольного элемента, а для $i = 4, 5, 6$ они имеют смысл компонент поля \mathbf{E} , касательных к соответствующему ребру треугольника. Таким образом, продольная составляющая поля разлагается по обычному конечноэлементному базису, а поперечное к оси структуры поле – по реберным элементам.

Подставим аппроксимации (10) в (7) и просуммируем по всем треугольникам сетки; в результате получим приближенное значение функционала, зависящее от коэффициентов c_i и $c_i^{(a)}$. Дифференцируя это выражение по всем $c_i^{(a)}$ и приравнявая производные к нулю, получим систему линейных алгебраических уравнений вида

$$\beta_z^2 \hat{T}_1 \mathbf{X} + \hat{T}_2 \mathbf{X} = k^2 \beta_z^2 \hat{T}_3 \mathbf{X} + k^2 \hat{T}_4 \mathbf{X}. \quad (11)$$

Здесь \mathbf{X} – вектор-столбец, составленный из неизвестных коэффициентов c_i , а \hat{T}_i ($i = 1, \dots, 4$) – квадратные разреженные комплексные матрицы, элементы которых зависят только от геометрии сетки и распределения диэлектрической и магнитной проницаемостей по поперечному сечению системы.

Если считать частоту заданной, то уравнение (11) приводится к обобщенной алгебраической проблеме собственных значений

$$\hat{A} \mathbf{X} = \Lambda \hat{B} \mathbf{X}, \quad (12)$$

в которой матрицы \hat{A} и \hat{B} представляют собой линейные комбинации матриц \hat{T}_i , а в качестве собственного значения Λ выступает β_z^2 . Если же считать заданной z -компоненту волнового числа β_z и искать k^2 , то вновь получаем алгебраическую проблему собственных значений, подобную (12), но с другими матрицами \hat{A} , \hat{B} и собственным числом, равным k^2 . Для расчета ферромагнитных структур первый вариант более удобен, поскольку элементы тензора магнитной проницаемости зависят от частоты и, если она считается заданной, отпадает необходимость итерационной процедуры поиска частоты для вычисления дисперсионной характеристики.

При использовании указанного подхода граничные условия необходимо учитывать только на части границы Γ_e , поскольку на остальной границе для функционала (7) они являются естественными, и найденное решение будет удовлетворять им автоматически.

Следует отметить, что в данной работе расчетная область разбивалась на конечные элементы таким образом, что размер треугольного элемента уменьшался на границах и изломах ферромагнитной структуры.

3. Методика расчета магнитоэлектрических волн в одномерных магнитных кристаллах

Рассмотрим подробно методику расчета дисперсионной зависимости для волн, распространяющихся вдоль оси x в одномерном магнитном кристалле с использованием изложенного выше варианта МКЭ.

Поскольку рассматриваемая система вдоль направления x является периодической, а вдоль направления z – однородной, то зависимость пространственного распределения полей собственных мод по этим координатам задается различным образом. Можно считать, что вдоль однородного направления z бежит гармоническая волна вида $\exp(-i\beta_z z)$. Периодическая зависимость вдоль оси x определяется граничными условиями типа Флоке на двух вертикальных границах, показанных на рис. 1, b сплошными линиями.

При расчете собственных мод в подобной структуре в качестве входных параметров задаются значения фазового сдвига волны на период структуры вдоль оси x , или, фактически, постоянная распространения $\beta_x = \varphi/L$, а также частота сигнала. Последнее обстоятельство особенно удобно при исследовании магнитных кристаллов, поскольку, как уже отмечалось выше (см. (3), (4)), значения компонент тензора магнитной проницаемости $\hat{\mu}$ явным образом зависят от частоты.

В результате выполнения программы рассчитывается постоянная распространения β_z волны вдоль оси z и соответствующий эффективный показатель преломления $n_{eff} = \beta_z/k$. При задании произвольного значения частоты ω получается, вообще говоря, отличная от нуля величина поперечной z -компоненты волнового числа $\beta_z \neq 0$. Однако здесь исследуются свойства ПМСВ, распространяющейся только вдоль оси x . Для такой волны поперечное волновое число β_z должно равняться нулю. Чтобы добиться выполнения этого условия, ищется такое значение частоты ω , при котором достигается выполнение уравнения $\beta_z = 0$ с достаточной точностью. На рис. 2, b изображен результат процесса нахождения значения частоты. Точками обозначены рассчитанные значения частоты и эффективного показателя преломления, а кривой – интерполяция зависимости $n_{eff}(\omega)$. Отметим, что расчет производился также для отрицательных значений n_{eff} , что соответствует волне, распространяю-

щейся в отрицательном направлении оси x . Далее по всем рассчитанным точкам строится аппроксимирующий полином шестой степени, и рассчитывается значение частоты ω при котором $n_{eff} = 0$. Таким образом, получается пара значений: β_x и ω , для которых $\beta_z = 0$, то есть координаты точки на дисперсионной кривой $\omega(\beta_x)$ для собственной волны системы, распространяющейся строго вдоль оси x .

Данный метод позволяет получить все точки искомой зависимости для одной моды. Чтобы получить аналогичные результаты для следующих мод, нужно для фиксированных значений β_x задавать в начале процедуры расчета другие значения частоты ω . Моды легко отличить друг от друга по пространственному распределению электрического и магнитного поля собственной моды (см. ниже, в разделе 5).

4. Тестовые расчеты: моды Дэймона–Эшбаха

Предложенная методика расчета параметров ПМСВ тестировалась на примере системы, для которой известны аналитические результаты. В качестве такой модельной системы была выбрана задача распространения моды Дэймона–Эшбаха в однородной пленке ЖИГ. Дисперсионное уравнение для этой моды в случае, когда по обе стороны пленки находится вакуум и без учета обменного взаимодействия, имеет вид [17,18]

$$\omega^2 = \omega_H (\omega_H + \omega_M) + \frac{\omega_M^2}{4} (1 - \exp(-2\beta_x l)), \quad (13)$$

где l – толщина ферромагнитной пленки.

На рис. 3, *a* приведены геометрические размеры расчетной области для следующих параметров: $l = 20$ мкм – толщина пленки, $L = 60$ мкм – горизонтальный размер примитивной ячейки, $b = 350$ мкм – размеры расчетной области в вертикальном направлении. Отметим, что величина b значительно превышает поперечные размеры пленки, для того чтобы исключить влияние граничных условий на верхней и нижней границах области на результат расчета. Цифрой 1 на рисунке обозначен ферромагнитный слой с диэлектрической проницаемостью $\varepsilon = 1$ и тензором магнитной проницаемости $\hat{\mu}$, определяемым выражением (2), причем $\omega_H = 5.278 \cdot 10^9$ с⁻¹, $\omega_M = 30.788 \cdot 10^9$ с⁻¹. Цифрами 2, 3 обозначены области с $\varepsilon = 1$ и $\mu = 1$.

На рис. 3, *б* показано пространственное распределение амплитуд электрического и магнитного полей в однородной пленке при $\omega/\omega_H = 3.5746$, $\beta_x l = 0.6$. На рис. 3, *в* приведена дисперсионная характеристика ПМСВ в однородной пленке, построенная с помощью формулы (13) (сплошная линия), точками на этом же графике даны результаты численного моделирования с использованием предложенной методики. Из рисунка видно, что рассчитанные точки хорошо ложатся на теоретическую кривую. На рис. 3, *г* видно хорошее совпадение профиля компоненты $H_y(y)$ магнитного поля, найденного аналитически и построенного по результатам расчета методом конечных элементов. Известно, что дисперсия ПМСВ в изолированном однородном слое взаимна по отношению к направлению распространения, но магнитостатические волны в ферритовых пленках обладают свойством невзаимности с точки зрения распределения полей, что связано с наличием выделенного направления в пространстве – направления постоянного магнитного поля [18].

Для ПМСВ, распространяющихся в пленке конечных поперечных размеров, волна, бегущая в направлении, перпендикулярном постоянному магнитному полю,

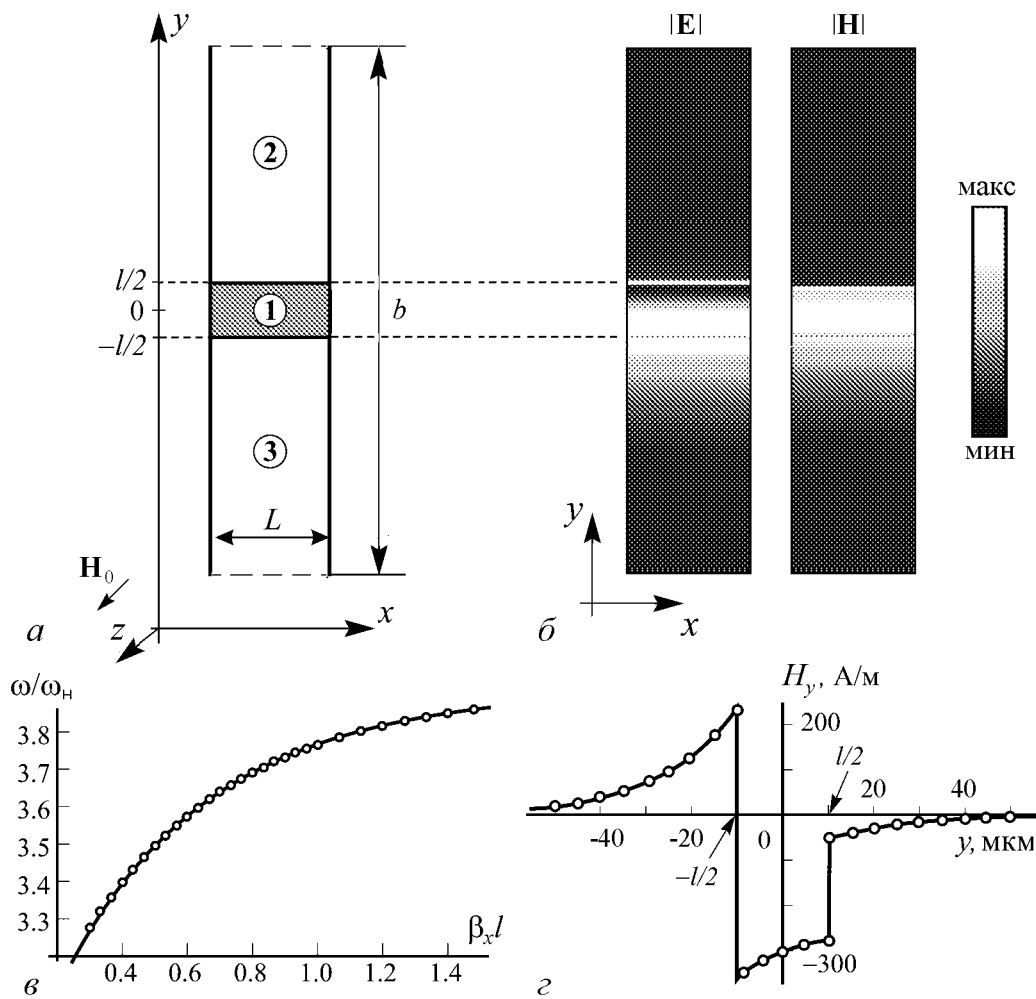


Рис. 3. *a* – геометрия однородной пленки ЖИГ для расчета мод Деймона–Эшбаха (обозначения граничных условий те же, что и на рис. 1, *б*); *б* – пространственное распределение модуля электрического и магнитного полей в структуре; *в* – дисперсионная характеристика ПМСВ в однородной пленке; *г* – распределение компоненты напряженности магнитного поля $H_y(y)$. Сплошные кривые – аналитические зависимости, точки – результат численного моделирования

распространяется преимущественно вдоль одной из поверхностей пленки, что отчетливо видно из рис. 3, *б*. Волна, бегущая в обратном направлении, распространяется вдоль противоположной поверхности пленки. Если однородная пленка нагружена сверху и снизу одинаковым образом (например, диэлектриком с одинаковым значением диэлектрической проницаемости), то следует ожидать, что для обеих волн дисперсионные характеристики будут идентичны. Если нагрузка на поверхности пленки несимметрична или если одна из поверхностей периодически деформирована, то условия для распространения прямой и встречной волн оказываются не одинаковыми. В этом случае следует ожидать отличия в свойствах дисперсионных характеристик волн, распространяющихся в двух противоположных направлениях, перпендикулярных постоянному магнитному полю. Таким образом, в этих структурах можно наблюдать невзаимность прямой и встречной поверхностных магнитостатических волн. В следующем разделе приводится обсуждение проявления свойств невзаимности в одномерной магнито-кристаллической структуре.

5. Расчет характеристик поверхностной магнитоэлектрической волны в периодической ферромагнитной пленке

Рассмотрим периодическую ферромагнитную структуру (одномерный МК), экспериментально исследованную в работе [19]. Геометрические размеры структуры указаны на рис. 4, *a*. На линиях, ограничивающих примитивную ячейку МК, заданы граничные условия в виде идеальных электрических стенок – сверху и снизу расчетной области и периодические граничные условия Флоке – на правой и левой границах. В качестве ферромагнитного материала (область 1 на рис. 4, *a*) рассматривался ЖИГ с диэлектрической проницаемостью $\varepsilon = 12.7$ [20]. Тензор магнитной проницаемости $\hat{\mu}$ задавался в виде (2). Значение напряженности внешнего постоянного магнитного поля $H_0 = 300$ Э, намагниченность насыщения $M_0 = 1750/4\pi$ Гс, $\omega_H = 5.278 \cdot 10^9$ с⁻¹, $\omega_M = 30.788 \cdot 10^9$ с⁻¹. Подложкой для пленки служил галлий-гадолиниевый гранат (область 2) с $\varepsilon = 12.1$, $\mu = 1$. Сверху пленка нагружена слоем поликора (область 3) с $\varepsilon = 9.6$, $\mu = 1$. В области 4 и в светлой области канавки между ЖИГ и поликором $\varepsilon = 1$ и $\mu = 1$.

Были рассчитаны 4 первые ветви дисперсионной кривой и проведено сравнение с экспериментальными данными работы [19], в которой приводятся спектры прохождения ПМСВ через микрополосковую линию с неоднородностями, периодически нанесенными на верхнюю поверхность пленки ЖИГ. На рис. 4, *b* представлены результаты численного моделирования (слева) и АЧХ из работы [19] (справа). Здесь введены обозначения: $\Omega = \omega / \omega_H$ – безразмерная частота, $\beta_x L$ – безразмерное продольное волновое число. Пунктирной линией показаны границы первых двух полос непропускания на рассчитанной дисперсионной характеристике. На АЧХ также видны две первые зоны непропускания, в которых наблюдалось затухание сигнала на величину порядка 40 дБ. Можно отметить хорошее совпадение расположения первых двух полос непропускания на экспериментальной АЧХ и запрещенных зон

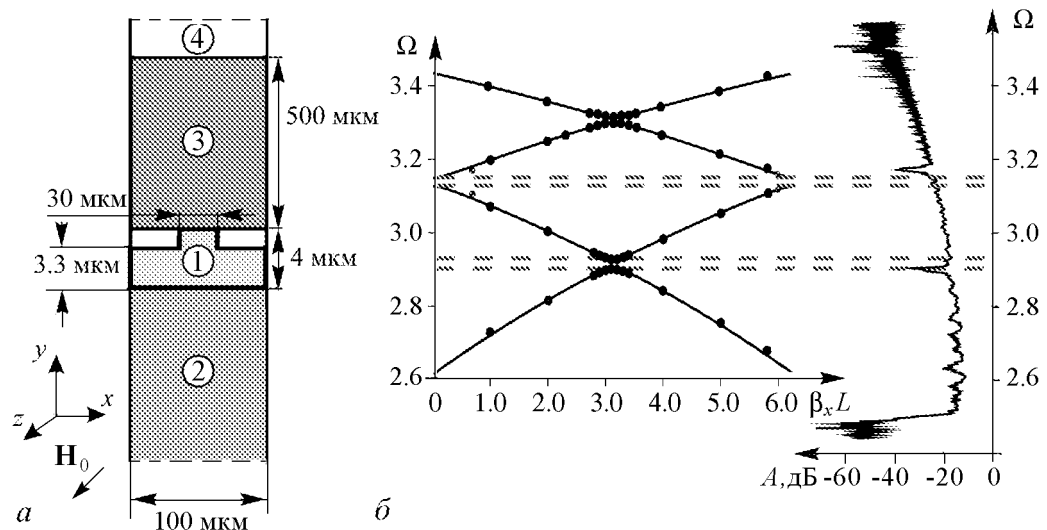


Рис. 4. *a* – геометрические размеры и структура примитивной ячейки одномерного магнетонного кристалла (обозначения граничных условий те же, что и на рис. 1, *b*); *b* – рассчитанная дисперсионная характеристика (слева) и экспериментальная АЧХ [19] для периодической структуры (справа)

на рассчитанной дисперсионной характеристике, хотя точного совпадения наблюдать не удастся. Связано это, по всей видимости, с тем, что в экспериментальном образце пленка ЖИГ ограничена в направлении, перпендикулярном направлению распространения ПМСВ, и вид канавок на поверхности пленки отличен от строго прямоугольного.

Важной величиной при анализе распространения электромагнитных волн является групповая скорость, определяемая в случае распространения волны в направлении оси x формулой

$$v_g = \frac{d\omega}{d\beta_x}. \quad (14)$$

Из общей теории волн следует, что в случае периодических структур без затухания групповая скорость определяет также скорость распространения энергии, то есть должно выполняться соотношение

$$v_g = \frac{\Sigma}{W}L, \quad (15)$$

где Σ – усредненный по периоду колебаний поток мощности вдоль системы; W – усредненная энергия, запасенная на одном периоде; L – период структуры. Представляет интерес непосредственная проверка выполнения условия равенства групповых скоростей, найденных по формулам (14) и (15) для сложной анизотропной структуры, каковой является магنونный кристалл, с помощью данных, полученных в результате численного моделирования.

Поток мощности Σ вдоль системы на единицу длины вдоль направления x задается формулой

$$\Sigma = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \int_{AB} \mathbf{E} \times \mathbf{H}^* dy. \quad (16)$$

Здесь интегрирование проводится по поперечному сечению AB примитивной ячейки (врезка на рис. 5), поскольку волна распространяется вдоль направления x . Энергия электромагнитного поля в случае рассматриваемой структуры может быть рассчитана как сумма энергий

$$W = W_1 + W_2 + W_3 + W_4, \quad (17)$$

где W_1 – энергия внутри пленки ЖИГ, W_2 – внутри подложки галлий-гадолиниевого граната, W_3 – внутри слоя поликора, W_4 – в области с $\varepsilon = 1$ и $\mu = 1$. Энергия в области V_i рассчитывается путем интегрирования по соответствующей области пространства (1, 2, 3 или 4 на рис. 4, а) величины w_i – усредненной по времени плотности энергии электромагнитного поля.

$$W = \int \int \int_V w_i dx dy. \quad (18)$$

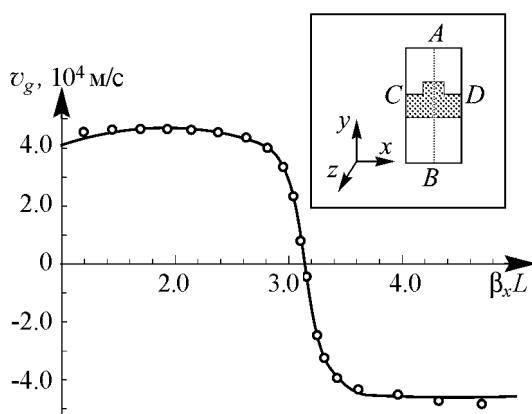


Рис. 5. Зависимость групповой скорости от волнового числа для нижней ветви дисперсионной характеристики (см. рис. 4, б)

Поскольку для областей 2–4 отсутствует материальная дисперсия и анизотропия в рассматриваемом диапазоне частот, то вычисление величин w_2 , w_3 и w_4 производится по формуле [21]

$$w_{2,3,4} = \frac{1}{4} \{ \varepsilon_0 \varepsilon \mathbf{E} \mathbf{E}^* + \mu_0 \mathbf{H} \mathbf{H}^* \}, \quad (19)$$

где $\varepsilon_0 = 8.855 \cdot 10^{12}$ Ф/м – диэлектрическая постоянная, $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Гн/м – магнитная постоянная. При расчете плотности энергии w_1 в пленке ЖИГ необходимо учитывать материальную дисперсию среды и анизотропию [10,22]

$$w_1 = \frac{1}{4} \left\{ \varepsilon_0 \varepsilon \mathbf{E} \mathbf{E}^* + \mu_0 \sum_{i,j=x,y,z} \frac{\partial [\omega \mu_{ij}(\omega)]}{\partial \omega} H_i H_j^* \right\}, \quad (20)$$

где $\mu_{ij}(\omega)$ – компоненты тензора магнитной проницаемостей ЖИГ (2) для случая распространения ПМСВ. Подставляя в (20) компоненты тензора (2), получим

$$w_1 = \frac{1}{4} \left\{ \varepsilon_0 \varepsilon \mathbf{E} \mathbf{E}^* + \mu_0 \frac{\partial (\omega \mu)}{\partial \omega} [H_x H_x^* + H_y H_y^*] + \mu_0 i \frac{\partial (\omega \mu_a)}{\partial \omega} [H_y H_x^* - H_x H_y^*] + \mu_0 H_z H_z^* \right\}, \quad (21)$$

где $\mu(\omega)$ и $\mu_a(\omega)$ – зависящие от частоты компоненты тензора магнитной проницаемости, определяемые соотношениями (3) и (4), соответственно.

Рассмотрим нижнюю ветвь дисперсионной характеристики, изображенной на рис. 4, б, и построим для нее двумя способами зависимость групповой скорости от частоты путем дифференцирования дисперсионной кривой (по формуле (14)) и методом расчета энергии и потока мощности (по формуле (15)). Следует подчеркнуть, что дисперсионная кривая и энергетические характеристики рассчитываются методом конечных элементов без каких-либо упрощающих приближений. На рис. 5 сплошной кривой показаны результаты дифференцирования первой ветви дисперсионной кривой, а точки соответствуют рассчитанным значениям групповой скорости с помощью соотношения (15). Видно, что при переходе через точку $\beta_x L = \pi$ величина v_g становится отрицательной, что свидетельствует об изменении направления потока энергии вдоль оси x на противоположное. В периодической структуре возникает обратная волна. При приближении к границе запрещенной области значение $|v_g|$ уменьшается и обращается в нуль при $\beta_x L = \pi$.

Групповая скорость МСВ в периодической ферритовой структуре с рассматриваемой геометрией также может быть определена по экспериментальным данным, приведенным в работе [19]. По фазово-частотным характеристикам линии с такой структурой была построена дисперсионная характеристика и затем рассчитана групповая скорость для нескольких значений волновых чисел. При $\beta_x L = 2.0$ значение полученной таким образом величины групповой скорости составило $5 \cdot 10^6$ м/с, что хорошо согласуется со значениями, указанными на рис. 5.

Проведем исследование пространственного распределение напряженностей электрического и магнитного полей в пределах примитивной ячейки. Будем интересоваться распределением модулей этих величин при различных значениях частоты и продольного волнового числа. Рассмотрим две первые ветви дисперсионной кривой, показанной на рис. 4, б. Как показали расчеты, пространственные распределения величины $|\mathbf{H}|$ при различных параметрах Ω и $\beta_x L$ мало отличаются друг

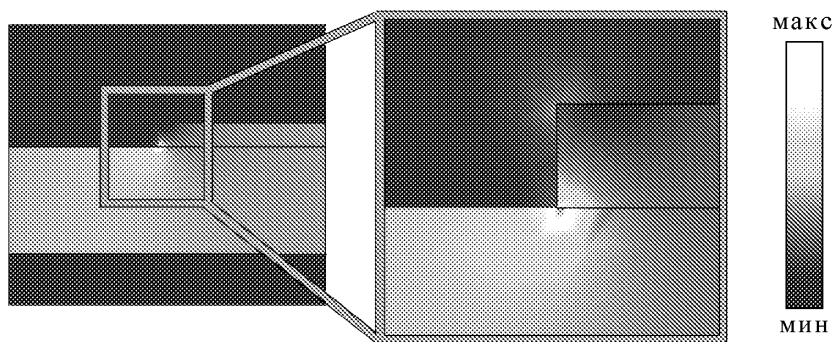


Рис. 6. Пространственное распределение амплитуды магнитного поля $|H|$. Фрагмент примитивной ячейки структуры и увеличенная область с дефектом. $\beta_x L = 2.9$, $\Omega = 2.892$

от друга. На рис. 6 показано типичное распределение величины $|H|$ для $\beta_x L = 2.9$, $\Omega = 2.892$. Хорошо видна локализация магнитного поля на неоднородности структуры. Подробное исследование распределения модуля напряженности магнитного поля вдоль линии CD , изображенной на врезке рис. 5, подтверждает факт локализации $|H|$ на изломе вдоль кривой CD .

Более показательными являются в данном случае картины распределения электрического поля. Рассмотрим подробно распределения полей первой и второй собственных мод структуры.

В области $0 < \beta_x L < \pi$ в случае первой моды, соответствующей первой ветви дисперсионной кривой, прямая волна распространяется вдоль нижней плоскости ЖИГ, поскольку величина $|E|$ локализована в нижней части пленки (рис. 7, а, б). Для второй моды (вторая ветвь дисперсионной кривой) ситуация обратная – волна бежит вдоль верхней плоскости (рис. 8, а, б) и поле E локализовано вблизи верхней части ферромагнетика.

В области $\pi < \beta_x L < 2\pi$ первая мода представляет собой волну, распространяющуюся в отрицательном направлении оси x (рис. 7, з, д), а вторая – в положительном направлении оси x (рис. 8, з, д). Действительно, характерным для поверхностных магнитостатических волн является то, что при изменении направления распространения волны максимум поля переходит на противоположную поверхность.

При приближении к полосе непропускания ($\beta_x L \rightarrow \pi$) распределение величины $|E|$ становится все более симметричным относительно центра пленки (рис. 7, в и рис. 8, в). Магнитное поле локализовано в ЖИГ и имеет максимумы на изломах пленки. Электрическое поле в основном сосредоточено вокруг ферромагнитной структуры.

Как было сказано в разделе 4, в данной структуре можно предположить наличие невзаимности в распространении прямой и встречной ПМСВ. Однако рассчитанная дисперсионная характеристика на рис. 4, б симметрична относительно линии $\beta_x L = \pi$, что указывает на отсутствие проявления свойств невзаимности. Данный факт можно понять, если провести расчет энергии электрического и магнитного поля для магнотно-кристаллической структуры. Расчет показал, что энергия магнитного поля в пленке ЖИГ на 4–5 порядков больше энергии электрического поля в пленке. Поскольку распределение магнитного поля в случае рассматриваемой геометрии

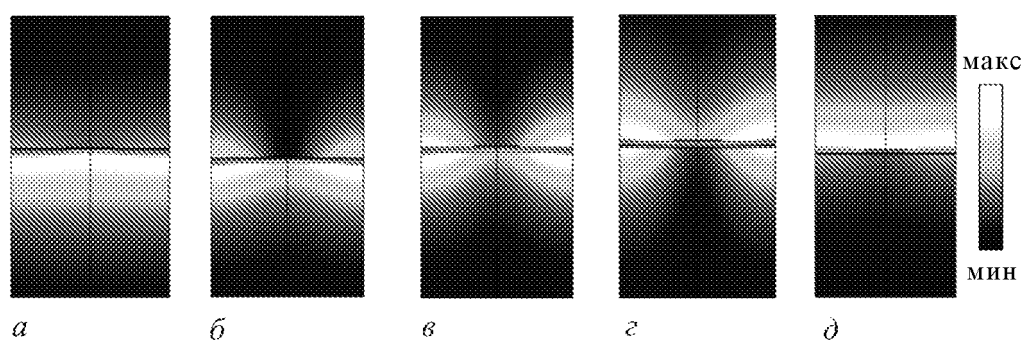


Рис. 7. Пространственное распределение амплитуды электрического поля $|E|$ на первой ветви дисперсионной кривой для различных $\beta_x L$ и Ω , соответственно: *a* – 2.0, 2.818; *б* – 2.9, 2.892; *в* – 3.1, 2.903; *г* – 3.2, 2.901; *д* – 4.0, 2.842

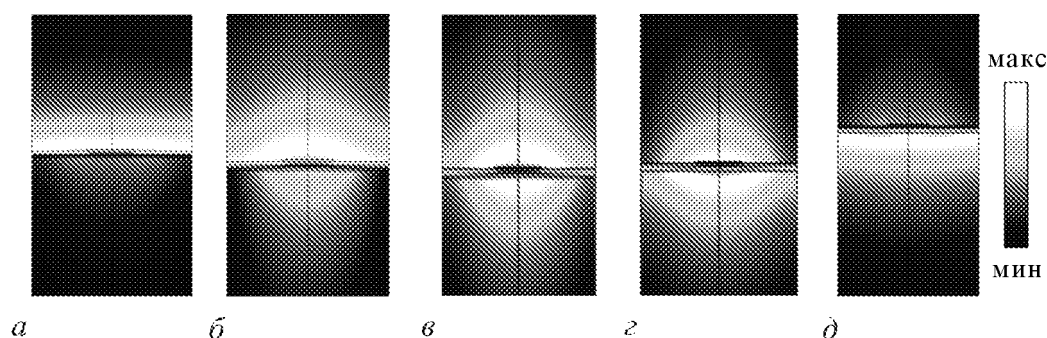


Рис. 8. Пространственное распределение амплитуды электрического поля $|E|$ на второй ветви дисперсионной кривой для различных $\beta_x L$ и Ω , соответственно: *a* – 2.0, 3.002; *б* – 2.9, 2.933; *в* – 3.1, 2.928; *г* – 3.2, 2.930; *д* – 4.0, 2.983

для прямой и встречных волн практически идентично (для одинакового значения частоты) и локализовано преимущественно на изломах пленки, то и дисперсионные характеристики для них одинаковые.

Заключение

С помощью разработанной методики расчета электродинамических характеристик периодических ферромагнитных структур, основанной на векторном варианте метода конечных элементов, проведено численное моделирование и расчет дисперсионных характеристик ПМСВ в пленке ЖИГ, на верхней поверхности которой расположены периодически повторяющиеся канавки прямоугольной формы. Рассмотрен процесс распространения поверхностных магнитостатических волн и детально изучено пространственное распределение электрического и магнитного полей в примитивной ячейке рассматриваемой ферромагнитной структуры в различных точках на дисперсионной кривой. Проведено сравнение результатов численного моделирования с экспериментально полученными АЧХ поверхностных магнитостатических волн микрополосковой линии с неоднородностями, периодически нанесенными на верхнюю поверхность пленки ЖИГ. Показано хорошее совпадение расположения

первых двух частотных зон непропускания на дисперсионной кривой, рассчитанной методом конечных элементов, и соответствующих зон непропускания на экспериментальной АЧХ. Рассчитанные значения групповой скорости для первой ветви дисперсионной кривой согласуются с имеющимися экспериментальными данными. Обнаружено также отсутствие проявления свойств невзаимности в распространении прямой и встречной поверхностных магнитостатических волн, что объясняется локализацией магнитного поля на изломах периодической структуры как для прямой, так и обратной волны.

Авторы выражают благодарность Шараевскому Ю.П. и Бегину Е.Н. за плодотворные дискуссии и обсуждение полученных результатов.

Работа выполнена при поддержке Министерства образования и науки РФ ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 годы (проект № 2010-1.2.2-123-019-002) и гранта РФФИ № 10-02-01403-а.

Библиографический список

1. *Neusser S., Grundler D.* Magnonics: Spin waves on the nanoscale // *Adv. Mater.* 2009. Vol. 21. P. 2927.
2. *Klos J.W., Krawczyk M., Sokolovsky M.* Bulk and edge modes in two-dimensional magnonic crystal slab// *Journal of Applied Physics.* 2011. Vol. 109, № 07. D311.
3. *Chumak A.V., Neumann T., Serga A.A., Hillebrands B., Kostylev M.P.* A current-controlled, dynamic magnonic crystal // *J. Phys. D: Appl. Phys.* 2009. Vol. 42. 205005.
4. *Stancil D., Prabhakar A.* Spin waves. Theory and applications. NY: Springer science, 2009.
5. *Kruglyak V.V., Demokritov S.O., Grundler D.* Magnonics // *J. Phys. D: Appl. Phys.* 2010. Vol. 43. 264001.
6. *Зенкевич О., Морган К.* Конечные элементы и аппроксимация. М.: Мир, 1986.
7. *Taflove A., Hagness S.C.* Computational Electrodynamics: The Finite-Difference Time-Domain Method. Norwood. MA: Artech House, 2005.
8. *Silvester P.P., Ferrari R.L.* Finite Elements for Electrical Engineers: 3rd ed. Cambridge University Press, 1996.
9. *Landau L.D., Lifshitz E.M.* On the theory of the dispersion of magnetic permeability in ferromagnetic bodies // *Phys. Z. Soviet Union.* 1935. Vol. 8, № 2. P. 153.
10. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Электродинамика сплошных сред. М.: Наука, 1982.
11. *Jin J.* The Finite Element Method in Electromagnetics. 2nd ed. Wiley-IEEE Press, 2002.
12. *Lee J.F., Sun D.K., Cendes Z.J.* Full-wave analysis of dielectric waveguides using tangential vector finite elements // *IEEE Trans.* 1991. Vol. MTT-39, № 8. P. 1262.
13. *Sheng X.Q., Xu S.* An efficient high-order mixed-edge rectangular-elements method for lossy anisotropic dielectric waveguides // *IEEE Trans.* 1997. Vol. MTT-45, № 7. P. 1009.

14. Бровко А.В., Рожнев А.Г., Маненков А.Б. Конечноэлементная модель волоконно-оптического поляризатора // Изв. вузов. Радиофиз. 2001. Т. 44, № 7. С. 615.
15. Valor L., Zapata J. Efficient finite element analysis of waveguides with lossy inhomogeneous anisotropic materials characterized by arbitrary permittivity and permeability tensors // IEEE Trans. Microw. Theory Tech. 1995. Vol. 43, № 10. P. 2452.
16. Koshiba M., Maruyama S., Hirayama K. A vector finite element method with the high-order mixed-interpolation-type triangular element for optical waveguide problems // J. Lightw. Technol. 1994. Vol. 12, № 3. P. 495.
17. Damon R.W., Eshbach J.R. Magnetostatic modes of a ferromagnet slab // J. Phys. Chem. Solids. 1961. Vol. 19. P. 308.
18. Вашковский А.В., Стальмахов В.С., Шараевский Ю.П. Магнитостатические волны в электронике сверхвысоких частот. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 1994. 312 с.
19. Бегинин Е.Н., Гришин С.В., Шараевский Ю.П., Шешукова С.Е. Электродинамические характеристики периодических и фрактальных волноведущих микроструктур на основе ферритовых пленок // Гетеромагнитная микроэлектроника. 2011, № 9. С. 16.
20. Sirdeshmukh L., Kumar K.K., Laxman S.B. et al. Dielectric properties and electrical conduction in yttrium iron garnet // Bull. Mater. Sci. 1998. Vol. 21, № 3. P. 219.
21. Вайнштейн Л.А. Электромагнитные волны. М.: Радио и связь. 1988.
22. Гинзбург В.Л., Агранович В.М. Кристаллооптика с учетом пространственной дисперсии и теория экситонов // УФН. 1964. Т. 76, вып. 4. С. 643.

Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского

Поступила в редакцию 27.02.2012

ELECTRODYNAMICAL CHARACTERISTICS OF PERIODIC FERROMAGNETIC STRUCTURES

A.V. Sadovnikov, A.G. Rozhnev

The periodic structure consisting of a shallow grooves on a surface of a ferromagnetic film was investigated. The electrodynamic characteristics of propagation of the surface magnetostatic wave in this structure were obtained. The 2D model of the periodical Yttrium Iron Garnet structure was numerically studied by the algorithm based on the Finite Element method. The spatial distribution of the electric and magnetic field components in different points of dispersion characteristics was studied in detail. The comparison of experimental data and numerical results was carried out.

Keyword: Magnonic crystal, surface magnetostatic waves, finite element method.



Садовников Александр Владимирович – родился в Саратове (1987), окончил Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского (2009). После окончания СГУ обучается в аспирантуре на кафедре электроники, колебаний и волн. Область научных интересов: изучение нестационарной динамики распространения волн в нелинейных электродинамических периодических структурах, таких как фотонно-кристаллические структуры, периодических ферромагнитные структуры и микроструктурированные оптические волокна. Принимает участие в международных и всероссийских конференциях, является автором трех статей в рецензируемых научных журналах и в сборниках научных трудов конференций.

410012 Саратов, Астраханская, 83
Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского
E-mail: SadovnikovAV@gmail.com



Рожнев Андрей Георгиевич – окончил Саратовский государственный университет (1981) по специальности радиофизика. С 1989 года работает в должности старшего научного сотрудника Института механики и физики СГУ (в настоящее время НИИ Естественных наук СГУ). Одновременно с 2001 преподает на кафедре нелинейной физики СГУ в должности доцента. Область научных интересов: вакуумная СВЧ-электроника и микроэлектроника, теория фотонных кристаллов, нелинейная теория колебаний и волн, численное моделирование электромагнитных полей. Автор более 60 статей в рецензируемых научных журналах, соавтор учебных пособий для физических специальностей вузов «Линейные колебания и волны» (М.: Физматлит, 2001) и «Линейные колебания и волны. Сборник задач» (М.: Физматлит, 2001, 1-е изд.; 2008, 2-е изд.).

410012 Саратов, Астраханская, 83
Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского
E-mail: RozhnevAG@info.sgu.ru



Изв. вузов «ПНД», т. 20, № 1, 2012

Научная школа-конференция

НЕЛИНЕЙНЫЕ ДНИ В САРАТОВЕ ДЛЯ МОЛОДЫХ – 2011

Саратов, 25–28.10.2011, 15–16.11.2011

Организаторы

- Факультет нелинейных процессов Саратовского государственного университета им. Н.Г. Чернышевского
- Саратовский институт повышения квалификации и переподготовки работников образования
- при поддержке Фонда инновационных научно-образовательных программ «Современное естествознание»

Программный комитет

Трубецков Д.И., председатель, чл.-корр. РАН, заведующий кафедрой электроники, колебаний и волн ФНП СГУ

Левин Ю.И., зам. председателя, профессор, декан ФНП СГУ

Шараевский Ю.П., д.ф.-м.н., заведующий кафедрой нелинейной физики ФНП СГУ

Рыскин Н.М., д.ф.-м.н., профессор кафедры нелинейной физики ФНП СГУ

Савин А.В., к.ф.-м.н., доцент кафедры нелинейной физики ФНП СГУ

Оргкомитет

Трубецков Д.И., председатель, чл.-корр. РАН, заведующий кафедрой электроники, колебаний и волн ФНП СГУ

Левин Ю.И., зам. председателя, профессор, декан ФНП СГУ

Рыскин Н.М., д.ф.-м.н., профессор кафедры нелинейной физики ФНП СГУ

Савин А.В., к.ф.-м.н., доцент кафедры нелинейной физики ФНП СГУ

Марнопольская В.П., вед. программист ФНП СГУ

Савин Д.В., аспирант ФНП СГУ

Кузнецов Н.Н., вед. программист ФНП СГУ

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА

Секция школьников

Саратов, пансионат «Кристалл», 25–28 октября 2011

25 октября, вторник

Открытие школы-конференции

Лекции

Трубецков Д.И., профессор СГУ. Анализ размерностей, или райская жизнь в физике. Часть I

Храмов А.Е., профессор СГУ. Самоорганизация и образование структур

Бегинин Е.Н., доцент СГУ. Оружие – от стрелкового до электромагнитного

Круглый стол «Ю.А. Данилов и его удивительный мир»

26 октября, среда

Лекции

Трубецков Д.И., профессор СГУ. Анализ размерностей, или райская жизнь в физике. Часть II

Гурия Г.Т., профессор, ФГБУ ГНЦ, Москва. Катастрофы и нестабильности в динамике тубулированных нанотрубок

Кузнецов С.П., профессор, СФ ИРЭ РАН. Хаос

Левин Ю.И., профессор СГУ. ФНП и нелинейная наука

Олимпиада

Разбор заданий олимпиады

27 октября, четверг

Доклады школьников

Куликов Александр, ЛПН, 10 класс. Параболическая потенциальная яма и критерии ее реализации в двумерных профилях

Твердохлебов Артем, ЛИЕН, 9 класс. Исследование лодки с МГД-двигателем

Мартыненко Андрей, ЛПН, 10 класс. Двумерный газ и его особенности

Лученкова Александра, ЛМИ, 10 класс. Модели теплового расширения

Агеев Николай, ЛПН, 10 класс. Опыт Ф. Боудена

Чекмарева Алия, ФТЛ № 1, 11 класс. Движение толпы

Животов Антон, ЛПН, 10 класс. Труба Рийке: воссоздание макета в ЛПН

Чеботарев Виктор, ЛИЕН, 10 класс. Автомат подачи звонков на базе персонального компьютера

Игнатьев Алексей, ЛПН, 10 класс. Компьютерное моделирование

электростатического поля систем точечных зарядов

Батыр Егор, *Гурченков Максим*, ЛПН, 10 класс. Проблемы и возможные подходы к моделированию интеллекта (опыты программирования)

Лекции

Шараевский Ю.П., профессор СГУ. «Левые» среды

Савин А.В., доцент СГУ. Фракталы и их приложения

Академбой

28 октября, пятница

Лекции

Богатырев В.А., профессор, ИБФРМ РАН, Саратов. Коллоидное золото в световой микроскопии

Короновский А.А., профессор СГУ. Нелинейная динамика общества

Закрытие школы-конференции, награждение победителей олимпиады и авторов лучших докладов

Секция студентов

Саратовский университет, VIII корпус, 15–16 ноября 2011

15 ноября, вторник

Устные доклады

Секция «Нелинейные явления в радиофизике и электронике»

Фролов Н.С., ФНП, 5 курс. Нелинейная динамика двух однонаправленно связанных генераторов с виртуальным катодом

Бенедик А.И., ФНП, 4 курс. Компьютерное моделирование монотрона с автоэмиссионным катодом

Шешукова С.Е., аспирант ФНП. Исследование механизмов формирования солитонов огибающей в одномерном магнетонном кристалле (теория и эксперимент)

Краснова Г.М., аспирант ФНП. Современное состояние сверхвысокочастотных электронных приборов с управляемой эмиссией (обзор)

Емельянов В.В., аспирант ФНП. Компьютерное моделирование нестационарных процессов в клистроне-генераторе с запаздывающей обратной связью

Хренов Д.Н., аспирант ФНП. Взаимодействие электромагнитной волны с электронным потоком в СВЧ-лампах с поперечным током (обзор)

Секция «Нелинейная динамика»

Грубов В.В., ФНП, 5 курс. Выделение осцилляторных паттернов на ЭЭГ с использованием вейвлетного анализа

Круглов В.П., ФНП, 5 курс. Аттрактор типа Смейла–Вильямса в кольцевой системе с периодической модуляцией частоты

Хорев В.С., аспирант ФНБМТ. Оценка задержки в связи между генератором ван дер Поля и системой с запаздыванием по временным рядам

Кузнецов А.С., аспирант ФНП. Параметрические генераторы с хаотической амплитудной динамикой, отвечающей аттракторам типа Смейла–Вильямса

Корнилов М.В., аспирант ФНБМТ. Работоспособность метода нелинейной грейнджеровской причинности при использовании неадекватных моделей

Данилов Д.И., аспирант ФНП. Универсальная закономерность синхронизации основных спектральных компонент взаимодействующих осцилляторов

16 ноября, среда

Устные доклады

Секция «Нелинейная динамика»

Журавлев М.О., аспирант ФНП. Исследование нового типа поведения «перемежаемость перемежаемостей» на примере однонаправленно связанных осцилляторов Рёсслера

Демина Н.В., ФНП, 5 курс. Численная симуляция схемы широкополосной передачи информации, основанной на синхронизации систем с гиперболическим хаосом

Передерий Ю.А., аспирант ФНП. Метод определения показателей Ляпунова хаотических систем по временной реализации

Балакин М.И., аспирант СГТУ. Мультистабильность и характерные колебательные режимы в генераторе ван дер Поля с запаздывающей обратной связью

Аржанухина Д.С., аспирант ФНП. О сценариях разрушения гиперболического хаоса в модельных отображениях на торе с диссипативным возмущением

Шурыгина С.А., аспирант ФНП. Обобщенная синхронизация в двух взаимно связанных системах

Чернышов Н.Ю., аспирант ФНП. Синхронизация возбуждаемых реактивно связанных осцилляторов

Садовников С.А., аспирант ФНП. Когерентный резонанс в каскадном клистронном автогенераторе на пороге самовозбуждения

Стендовая секция

Адилова А.Б., ФНП, 3 курс. Динамика связанных дискретных осцилляторов
Ресслера

Аленькина А.С., ФНП, 4 курс. Пространственное развитие турбулентности
в уравнении Гинзбурга–Ландау при абсолютной и конвективной неустойчивости

Афанасьева Д.С., ФНП, 4 курс. Компьютерное моделирование двухпучковой
неустойчивости

Васильев А.А., Волощук С.С., ФНП, 4 курс. Сравнительный анализ
трех моделей ЛОВ

Дворак А.А., аспирант СГТУ. Возникновение квазипериодических колебаний
и явление синхронизации в связанных осцилляторах Тоды с внешним
гармоническим воздействием

Дубинин А.С., ФНП, 4 курс. Разрыв линии перехода к хаосу в консервативно
связанных отображениях Эно при изменении параметра диссипации

Емельянова Ю.П., аспирант ФНП. Особенности синхронизации в модели
неидентичных нефронов. Широкополосная синхронизация

Капков С.В., магистрант СГТУ, *Акивкин Н.Г.*, аспирант СГТУ.

Программно-аппаратный комплекс для автоматизированного построения карт
динамических режимов нелинейных неавтономных осцилляторов

Корчагин С.А., ФНП, 4 курс. Особенности натурального физического эксперимента с
использованием ЗЕТ-технологии

Макаров В.В., ФНП, 4 курс. Исследование возникновения хаотических режимов
колебаний пространственного заряда в полупроводниковой сверхрешетке во
внешнем резонаторе

Максименко В.А., ФНП, 5 курс. Устойчивость динамических режимов и переход
к генерации в полупроводниковой сверхрешетке

Павлов А.С., аспирант ФНП. Взаимосвязь обобщенной и фазовой синхронизации
в системе двух однонаправленно связанных хаотических осцилляторов

Парамонов Ф.Б., ФНБМТ, 5 курс. Увеличение чувствительности метода
нелинейной грейнджерской причинности с ростом уровня внешнего

измерительного шума

Перегородова Е.Н., ФНП, 5 курс, *Усачева С.А.*, аспирант ФНП. К теории
вынужденной синхронизации автомодуляционных колебаний

Постнов Д.Д., физфак, 5 курс. БиоМод: программный комплекс для
междисциплинарного обучения и исследований в области динамики
физиологических процессов

Романенко Д.В., аспирант ФНП. Генерация хаотических импульсов на основе
активной кольцевой системы с ферромагнитной пленкой

Садовников А.В., аспирант ФНП. Электродинамические характеристики
периодических ферромагнитных структур

Сельский А.О., аспирант ФНП. Поведение старших резонансных пиков на
зависимости дрейфовой скорости от величины электрического поля в

полупроводниковой сверхрешетке в присутствии наклонного магнитного поля с
ростом температуры

Старостин А.Н., Кузьмина Е.В., магистранты СГТУ. Применение технологий
распараллеливания вычислений в рамках теории Ми

Сысоева М.В., аспирант ФНБМТ. Оценка параметров модельных систем с
запаздыванием с внешним периодическим воздействием

Терентюк А.Г., ФНП, 2 курс, *Бороздова М.*, физфак, 5 курс. Моделирование
распространения электромагнитной волны в неоднородной нелинейной среде,
содержащей электроны-осцилляторы

Фунтов А.А., ФНП, 3 курс. К вопросу о линейной теории электронно-волновой
лампы (ЭВЛ)

Ланина М.С., ФНП, 3 курс. Магнитоэлектронные волны в периодических
ферромагнитных структурах

Каретникова Т.А., ФНП, 5 курс. Трехмерное моделирование
электродинамических параметров, необходимых для расчета условий
самовозбуждения спиральной неоднородной ЛБВ

Зав. редакцией *Н.Н. Левина*
Редакторы *Л.А. Сидорова, Н.Н. Левина*
Оформление художника *Д.В. Соколова*
Оригинал-макет подготовлен
И.А. Пономаревой, О.Н. Строгановой
в пакете *L^AT_EX*

Подписка на 2012 год осуществляется
по каталогу Агентства Роспечать
«Газеты. Журналы», индекс 73498,
и по договору между Подписчиком
(юридическим или физическим лицом)
и Издателем (Саратовским государственным университетом)

Стоимость подписки на 2012 год 720 руб. (6 номеров)
Заявки на заключение договора принимаются
по почте, по телефону редакции, по эл. почте редакции
Адрес редакции: 410012, Саратов, Астраханская, 83
Тел./факс: (845-2) 52-38-64
E-mail: and@nonlin.sgu.ru

Распространение журнала осуществляется
редакцией журнала по адресной системе

**Условия подписки на электронную версию журнала на сайте
Научной электронной библиотеки <http://elibrary.ru>**

Сдано в набор 1.03.2012. Подписано к печати 20.04.2012
Формат 70x108/16. Бумага «КУМ LUX». Печать трафаретная
Усл. печ. л. 14,35(10,25). Уч.-изд. л. 14,0. Заказ 438

Отпечатано на ризографе GR 3750 редакции журнала

© Редакция журнала
«Известия вузов. ПНД», 2012
© Оформление художника
Д.В. Соколова, 2012