Журнал включен в «Перечень периодических научных и научно-технических изданий РФ, рекомендованных для публикации основных результатов диссертаций на соискание ученой степени доктора наук»

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Известия высших учебных заведений

ПРИКЛАДНАЯ НЕЛИНЕЙНАЯ ДИНАМИКА

научно-технический журнал

издается с 1993 года

Выходит 6 раз в год Том 25, № 6, 2017, Саратов

С О Д Е Р Ж А Н И Е

От редактора. *Гуляев Ю.В.* 3

АВТОВОЛНЫ. САМООРГАНИЗАЦИЯ

Голдобин Д. С., Долматова А. В., Розенблюм М., Пиковский А. Синхронизация в ансамблях Курамото–Сакагучи при конкурирующем влияния общего шума и глобальной связи 5

ПРИКЛАДНЫЕ ЗАДАЧИ НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ КОЛЕБАНИЙ И ВОЛН

Заковоротный В. Л., Гвинджилия В. Е. Бифуркации притягивающих множеств деформационных смещений режущего инструмента в зависимости от биений шпиндельной группы 38

БИФУРКАЦИИ В ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ РАЗЛИЧНОЙ ПРИРОДЫ

Хазова Ю. А. Решение типа «бегущие волны» в параболической задаче с преобразованием поворота 57

МЕТОДИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ ПО НЕЛИНЕЙНОЙ ДИНАМИКЕ

Зайцев В. В. Дискретный осциллятор ван дер Поля: Конечные разности и медленные амплитуды 70

НАУКА – ОБРАЗОВАНИЮ

Аникин В. М., Пойзнер Б. Н. Оппонирование диссертации: Через букву нормы – к принципам объективной оценки 79

КНИЖНОЕ ОБОЗРЕНИЕ

В. М. Аникин, Б. Н. Пойзнер. Диссертация: Грани творчества и... 99

DEPARTMENT OF EDUCATION AND SCIENCE OF RUSSIAN FEDERATION
Izvestiya VUZ
APPLIED NONLINEAR DYNAMICS
scientific-technical journal
published since 1993

Published 6 times a year Vol. 25, № 6, 2017, Saratov

C O N T E N T S

Editorial. *Gulyaev Yu.V.* 3

AUTOWAVES. SELF-ORGANIZATION

Goldobin D. S., Dolmatova A. V., Rosenblum M., Pikovsky A. Synchronization in Kuramoto–Sakaguchi ensembles with competing influence of common noise and global coupling 5

APPLIED PROBLEMS OF NONLINEAR OSCILLATION AND WAVE THEORY

Zakovorotny V. L., Gvinjiliya V. E. Bifurcations of attracting sets of deformation displacement of cutting tool depending on the spindle group beats 38

BIFURCATION IN DYNAMICAL SYSTEMS

Khazova Yu. A. Traveling waves solution in parabolic problem with a rotation 57

METHODICAL PAPERS IN NONLINEAR DYNAMICS

Zaitsev V. V. The discrete van der Pol oscillator: Finite differences and slow amplitudes 70

SCIENCE FOR EDUCATION

Anikin V. M., Poizner B. N. Opponing the thesis: Through letters of norm to the principles of objective evaluation 79

BOOK REVIEW

V. M. Anikin, B. N. Poizner. The Thesis: Aspects of the Scientific Work and... 99

От редактора

Этот номер журнала получился математическим, поэтому и колонка редактора о математике.

В 2014 году на русском языке была издана в переводе с испанского серия из сорока замечательных книг «Мир математика». Одна из книг (том 27), написанная Антонио Дуран, носит название «Поэзия чисел. Прекрасное и математика» (пер. с исп. М. Де Агостини, 2014. 160 с.). Меня привлекла глава 4 «Цель: красота математических рассуждений», а в ней раздел «Сотрудничество с Рамануджаном». Раньше я встречал имя этого математика, которому в этом году исполнилось бы 130 лет, но мало знал о нем. После прочтения упомянутого раздела мне показалось, что судьба этого человека заинтересует и читателей нашего журнала.

Рамануджан родился в 1887 году в бедной семье брахманов в деревне к югу от Мадраса. Далее небольшая цитата из указанной книги:

«Он не получил даже среднего образования, но не по финансовым причинам, а потому что из всех дисциплин его интересовала только математика. Он еще мальчиком попал под очарование чисел и возвел прочное математическое здание буквально на пустом месте. Рамануджан размышлял, сидя в одиночестве у дверей своего дома, записывал формулы на грифельной доске и стирал их локтем. Когда о его теоремах и формулах стало известно, небольшое научное сообщество Мадраса не смогло определить, кто же был перед ними: гений или сумасшедший» (с. 103).

Поскольку никто из его ближайшего окружения не мог понять его формул, Рамануджан отправил свои рукописи в Кэмбридж, который был тогда центром английской математики. На два письма он не получил ответа, так как английские профессора не пожелали вникать в записки какого-то клерка из Мадраса. По счастью, следующее письмо попало в руки Харолда Харди (1877–1947), который, по собственной оценке, был пятым в списке лучших математиков того времени:

«Как-то Харди составил рейтинг математической одаренности, в котором присвоил себе 25 очков из 100, своему коллеге Джону Литлвуду – 30, а немецкому ученому Давиду Гильберту, первому математику того времени, – 80. Высшего балла, 100, был удостоен Сриниваса Рамануджан, индийский математик-самоучка, бывший клерк в мадрасском порту, неограненный алмаз, которого Харди, к его великой гордости, открыл миру» (с. 99–100).

Вернемся к Рамануджану, которому Харди, изучив его рукописи, помог перед началом Первой мировой войны в 1914 году перебраться в Кембридж. Рамануджан не владел базовыми математическими методами и понятиями, но поражала его сверхъестественная интуиция во всем, что касалось чисел и формул. Впоследствии Харди, который гордился тем, что открыл Рамануджана, писал в своей знаменитой книге «Апология математика»:

«Когда я бываю в плохом настроении и вынужден выслушивать людей напыщенных и скучных, я говорю про себя: “А все-таки мне выпало пережить нечто такое, о чем вы даже не подозреваете: мне довелось сотрудничать с Литлвудом и Рамануджаном почти на равных”» (с. 105).

О письме 1913 года из Мадраса Харди писал, что это самое удивительное письмо, которое он когда-либо получал.

Рамануджан прожил в Англии всю Первую мировую войну. Но последние два года он сильно болел, а врачи не могли поставить правильный диагноз. Причин болезни несколько: одиночество, влажный английский климат, скудная вегетарианская еда. Тяжело больной в 1919 году он вернулся в Индию, чтобы умереть на родине. Он уже был самым молодым ученым, удостоенным чести быть избранным членом Лондонского королевского общества за всю многовековую историю Общества. Он стал первым индийцем-членом Тринити-колледжа. Сриниваса Рамануджан умер в возрасте 32 лет в апреле 1920 года.

В статье мадрасской газеты «Таймс» были такие строки: «Как сказал некто из Кэмбриджа, со времен Ньютона не было никого, подобного Рамануджану, – не следует и говорить, что это высшая похвала» (с. 105).

Научный руководитель ИРЭ РАН,
академик РАН *Ю.В. Гуляев*

УДК 537.86, 001.891.57, 621.37

СИНХРОНИЗАЦИЯ В АНСАМБЛЯХ КУРАМОТО–САКАГУЧИ ПРИ КОНКУРИРУЮЩЕМ ВЛИЯНИЯ ОБЩЕГО ШУМА И ГЛОБАЛЬНОЙ СВЯЗИ

Д. С. Голдобин[1,2], *А. В. Долматова*[1], *М. Розенблюм*[3,4], *А. Пиковский*[3,4]

[1]Институт механики сплошных сред УрО РАН
Россия, 614013 Пермь, ул. Акад. Королева, 1
[2]Пермский государственный национальный исследовательский университет
Россия, 614990 Пермь, ул. Букирева, 15
[3]University of Potsdam
Germany, 14476 Potsdam-Golm, Karl-Liebknecht Str., 24/25
[4]Нижегородский государственный университет имени Н.И. Лобачевского
Россия, 603950 Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23
E-mail: Denis.Goldobin@gmail.com, Anastasiya.Pimenova@gmail.com,
mros@uni-potsdam.de, pikovsky@uni-potsdam.de
Поступила в редакцию 1.08.2017, после доработки 19.10.2017

В работе исследуются эффекты синхронизации и десинхронизации в ансамблях фазовых осцилляторов с глобальной связью типа Курамото–Сакагучи при воздействии на них общим шумом. В связи с тем, что механизмы синхронизации за счет связи и общего шума существенно различны, представляет интерес выяснение особенностей их взаимодействия. В термодинамическом пределе большого числа осцилляторов с помощью подхода Отта–Антонсена выведены стохастические уравнения для параметра порядка и изучена их динамика как в случае идентичных осцилляторов, так и в случае малой расстройки собственных частот. Для идентичных осцилляторов исследована устойчивость состояния полной синхронизации и выявлено, что достаточный уровень общего шума может синхронизировать систему даже при отрицательной (отталкивающей) глобальной связи. Установлено нарушение равноправия между состояниями максимальной асинхронности (нулевого значения параметра порядка) и состоянием полной синхронизации: первое может быть только слабо притягивающим, тогда как второе может становиться адсорбирующим (переход к синхронизации становится необратимым). Исследована динамика перехода в синхронное состояние в зависимости от параметров. Для неидентичных осцилляторов полная синхронизация невозможно и адсорбирующее состояние исчезает: на его месте остается слабо притягивающее. Обнаружен и исследован нетривиальный эффект расхождения индивидуальных частот осцилляторов с отличающимися собственными частотами при умеренной отталкивающей связи, причем параметр порядка в этом случае остается достаточно большим. В Приложении к работе дается введение в теории Отта–Антонсена и Ватанабе–Строгаца.

©*Д.С. Голдобин, А.В. Долматова, М. Розенблюм, А. Пиковский*

Ключевые слова: Синхронизация, стохастические процессы, ансамбль Курамото–Сакагучи, подход Отта–Антонсена.

DOI: 10.18500/0869-6632-2017-25-6-5-37

Образец цитирования: Голдобин Д.С., Долматова А.В., Розенблюм М., Пиковский А. Синхронизация в ансамблях Курамото–Сакагучи при конкурирующем влияния общего шума и глобальной связи // Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2017. Т. 25, № 6. С. 5–37. DOI: 10.18500/0869-6632-2017-25-6-5-37

SYNCHRONIZATION IN KURAMOTO–SAKAGUCHI ENSEMBLES WITH COMPETING INFLUENCE OF COMMON NOISE AND GLOBAL COUPLING

D. S. Goldobin[1,2], *A. V. Dolmatova*[1], *M. Rosenblum*[3,4], *A. Pikovsky*[3,4]

[1]Institute of Continuous Media Mechanics UB RAS
1, Akad. Koroleva Str., 614013 Perm, Russia
[2]Perm State University
15, Bukireva Str., 614990 Perm, Russia
[3]University of Potsdam
24/25, Karl-Liebknecht Str., 14476 Potsdam-Golm, Germany
[4]Nizhny Novgorod State University
23, Gagarina Str., 603950 Nizhny Novgorod, Russia
E-mail: Denis.Goldobin@gmail.com, Anastasiya.Pimenova@gmail.com,
mros@uni-potsdam.de, pikovsky@uni-potsdam.de
Received 1.08.2017, revised 19.10.2017

We study the effects of synchronization and desynchronization in ensembles of phase oscillators with the global Kuramoto–Sakaguchi coupling under common noise driving. Since the mechanisms of synchronization by coupling and by common noise are essentially different, their interplay is of interest. In the thermodynamic limit of large number of oscillators, employing the Ott–Antonsen approach, we derive stochastic equations for the order parameters and consider their dynamics for two cases: (i) identical oscillators and (ii) small natural frequency mismatch. For identical oscillators, the stability of the perfect synchrony state is studied; a strong enough common noise is revealed to prevail over a moderate negative (repelling) coupling and to synchronize the ensemble. An inequality between the states of maximal asynchrony (zero-value of the order parameter) and perfect synchrony is found; the former can be only weakly stable, while the latter can become adsorbing (the transition to the synchrony becomes unidirectional). The dependence of the temporal dynamics of the transition on the system parameters is investigated. For nonidentical oscillators the perfect synchrony state becomes impossible and an absorbing state disappears; on its place, only a weakly stable state of imperfect synchrony remains. A nontrivial effect of the divergence of individual frequencies of oscillators with different natural frequencies is revealed and studied for moderate repelling coupling; meanwhile, the order parameter remains non-small for this case. In Appendix we provide an introduction to the theories of Ott–Antonsen and Watanabe–Strogatz.

Keywords: Synchronization, stochastic processes, Kuramoto–Sakaguchi ensemble, Ott–Antonsen ansatz.

DOI: 10.18500/0869-6632-2017-25-6-5-37

References: Goldobin D.S., Dolmatova A.V., Rosenblum M., Pikovsky A. Synchronization in Kuramoto–Sakaguchi ensembles with competing influence of common noise and global coupling // Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics. 2017. Vol. 25. Issue 6. P. 5–37. DOI: 10.18500/0869-6632-2017-25-6-5-37

©*Д.С. Голдобин, А.В. Долматова, М. Розенблюм, А. Пиковский*

Введение

Явление синхронизации в ансамблях осцилляторов с разными видами связей хорошо изучено и освещено в литературе [1, 2]. Эффект синхронизации оказывает существенное влияние на поведение различных физических систем, например, лазерных установок или сверхпроводящих джозефсоновских контактов. Яркой иллюстрацией действия синхронизации в инженерных системах может служить инцидент с мостом Миллениум в Лондоне, который был закрыт через два дня после открытия, так как при прохождении большого количества людей конструкция начинала ощутимо раскачиваться из стороны в сторону [3]. Не менее важную роль описываемый эффект играет и в биологических системах, в частности, при некоторых нейродегенеративных заболеваниях наблюдается патологическая синхронизация активности нейронов [4]. Более того, синхронизацию можно наблюдать во многих социальных системах.

Еще одним возможным механизмом синхронизации осцилляторов является воздействие на них общим шумом [5]. Такой вид синхронизации также наблюдается в самых разных системах: нейронных [6], оптических [7], экологических [8]. Несмотря на то, что в последние годы математическая теория синхронизации общим шумом получила значительное развитие [9–19], физический механизм этого эффекта все еще остается не столь очевидным, как механизм синхронизации при наличии связи (см., например, [13, 14, 20]).

Примечательно, что воздействие малым общим шумом на ансамбль осцилляторов может иметь только синхронизирующее воздействие, тогда как общая связь может как синхронизировать, так и десинхронизировать систему (другими словами, она может быть как притягивающей, так и отталкивающей). Изучение взаимодействия влияний связи и общего шума на свойства синхронизации системы особенно интересно в связи с тем, что физические механизмы, лежащие в основе этих явлений, совершенно различны. Десинхронизация отталкивающей связью противодействует синхронизации общим шумом нетривиальным образом: они не могут компенсировать друг друга. Понимание тонких механизмов этого взаимодействия практически востребовано в тех случаях, когда необходимо противодействовать синхронизации, к которой приводит наличие общего шума, путем введения взаимной связи, что актуально для многих технических и биологических систем.

Некоторое время назад, в работе [21], были описаны нетривиальные эффекты, возникающие при воздействии на ансамбль идентичных осцилляторов Курамото синхронизирующим общим шумом в присутствии десинхронизирующей глобальной связи; полученные результаты дополняют более ранние работы [22, 23]. Было показано, что при наличии умеренной отталкивающей связи синхронизирующий эффект общего шума оказывается преобладающим, и система приходит в синхронное состояние. Однако при наличии расстройки собственных частот осцилляторов, средние частоты отдельных осцилляторов не притягиваются, а, наоборот, расталкиваются. Эффект расталкивания частот при синхронизации особенно примечателен в контексте того, что, например, Н. Винер (N. Wiener) определял синхронизацию, как «phenomenon of the pulling together of frequencies» («явление взаимного притяжения

©*Д.С. Голдобин, А.В. Долматова, М. Розенблюм, А. Пиковский*

частот») [24]. При наличии синхронизирующей связи полный захват частоты не происходит, хотя средние частоты отдельных осцилляторов притягиваются друг к другу. В данной работе более подробно рассматриваются эти эффекты, а также строится обобщение результатов, полученных для случая чисто диссипативных связей [21], на более общий случай глобальной связи типа Курамото–Сакагучи, которая может иметь как диссипативную, так и консервативную компоненты.

В качестве основной математической модели рассматривается ансамбль фазовых осцилляторов с глобальной связью типа Курамото–Сакагучи, на который действует общий шум

$$\dot{\varphi}_k = \Omega_k + \frac{\mu}{N}\sum_{j=1}^{N}\sin(\varphi_j - \varphi_k - \beta) + \sigma\xi(t)\sin\varphi_k\,, \quad k = 1, ..., N\,.$$

Здесь Ω_k – собственная частота k-го осциллятора, σ – амплитуда общего шума, $\xi(t)$ – нормированный гауссов белый шум, μ – коэффициент связи. Параметр β характеризует фазовый сдвиг в члене связи или, другими словами, вклады «активной» (пропорциональной $\cos\beta$) и «реактивной» (пропорциональной $\sin\beta$) компонент связи. Восприимчивость фазы к шумовому воздействию, то есть форма слагаемого $\sigma\xi(t)\sin\varphi_k$, соответствует случаю квазигармонических осцилляторов, подверженных действию общего линейно поляризованного шума, и некоторым другим физическим системам. Примером первого могут служить осцилляторы ван дер Поля при слабой нелинейности и шуме в одной из переменных или метрономы, смонтированные на общей платформе, подверженной случайному силовому воздействию, как в экспериментальной работе [25]; примером второго являются связанные электрические осцилляторы [26,27]. В термодинамическом пределе $N \gg 1$ удобно параметризовать осцилляторы значением их собственной частоты Ω и переписать уравнения динамики осцилляторов в виде

$$\dot{\varphi}_\Omega = \Omega + \mu R\sin(\Phi - \varphi_\Omega - \beta) + \sigma\xi(t)\sin\varphi_\Omega\,, \tag{1}$$

где введен параметр порядка R: $Re^{i\Phi} \equiv \langle e^{i\varphi_k}\rangle$. Форма уравнения (1), имеющего вид

$$\dot{\varphi}_\Omega = \Omega + \mathrm{Im}\left(H(t)e^{-i\varphi_\Omega}\right), \tag{2}$$

где

$$H(t) = \mu R e^{-i\beta}e^{i\Phi} - \sigma\xi(t)\,,$$

позволяет провести полный анализ коллективной динамики системы с помощью подходов Ватанабе–Строгаца и Отта–Антонсена [28–31] и предоставляет возможность более глубокого изучения тонких аспектов взаимодействия между механизмами синхронизации/десинхронизации общим шумом и глобальной связью. В термодинамическом пределе плотность распределения вероятности $w_\Omega(\varphi, t)$ осцилляторов с собственными частотами Ω допускает решение, параметризованное одной комплексной величиной a_Ω (см. [31] и Приложение),

$$w_\Omega(\varphi, t) = \frac{1}{2\pi}\Big(1 + \sum_{j=1}^{\infty}[(a_\Omega)^j e^{ij\varphi} + c.c.]\Big)\,, \tag{3}$$

где a_Ω подчиняется уравнению

$$\dot{a}_\Omega = -i\Omega a_\Omega + \frac{H^*(t)}{2} - \frac{H(t)}{2} a_\Omega^2 \,. \tag{4}$$

Для плотности распределения фаз может быть вычислен комплексный параметр порядка (среднее поле)

$$Re^{i\Phi} = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}\Omega\, g(\Omega) \int\limits_{0}^{2\pi} \mathrm{d}\varphi\, e^{i\varphi} w_\Omega(\varphi, t) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}\Omega\, g(\Omega)\, a_\Omega^* \,,$$

где $g(\Omega)$ – плотность распределения собственных частот.

Главной задачей настоящей работы является обобщение результатов, полученных в [21], где был рассмотрен случай $\beta = 0$. Будет показано, что основными управляющими параметрами являются эффективная сила связи $\mu_\beta = \mu \cos\beta$ и эффективная частота $\Omega_\beta = \Omega - \mu \sin\beta$; часть полученных результатов будет аналогична результатам, полученным для $\beta = 0$, с соответствующими эффективными параметрами. Однако динамика средней частоты осцилляторов оказывается существенно более сложной: в частности, в случае $\beta \neq 0$ будет наблюдаться сдвиг средней частоты, в то время как для $\beta = 0$ он исчезает.

Материал организован следующим образом. В разделе 1 рассмотрена динамика ансамбля абсолютно одинаковых осцилляторов, в этом случае возможно состояние полной синхронизации. Для одинаковых осцилляторов рассмотрены свойства устойчивости синхронного состояния и осредненная по времени динамика параметра порядка. Более тонкие характеристики, такие как плотность распределения вероятности для параметра порядка, могут быть аналитически найдены только в случае, если основная частота осцилляторов достаточно большая.

Раздел 2 посвящен рассмотрению более реалистичных систем осцилляторов, частоты которых отличаются друг от друга. В такой системе состояние полной синхронизации невозможно, но можно оценить среднюю по времени величину параметра порядка для состояния, близкого к синхронному, и состояния, близкого к абсолютно несинхронному. Более того, для случая высокочастотных осцилляторов оказывается возможным полностью описать динамику параметра порядка, в том числе вычислить плотность распределения вероятности.

В разделе 3 найдены средние частоты осцилляторов для системы неодинаковых осцилляторов. Показано, что в таком ансамбле не происходит полного захвата частоты, как в случае отсутствия общего шума.

1. Ансамбль идентичных осцилляторов

В случае идентичных осцилляторов $\Omega_k = \Omega$ с учетом соотношеня $a^* = R\exp(i\Phi)$ уравнение (4) может быть переписано в виде

$$\dot{R} = \frac{\mu}{2}\cos\beta(1-R^2)R - \frac{\sigma\xi(t)}{2}(1-R^2)\cos\Phi\,, \tag{5}$$

$$\dot{\Phi} = \Omega - \frac{\mu}{2}\sin\beta(1+R^2) + \frac{\sigma\xi(t)}{2}\left(\frac{1}{R}+R\right)\sin\Phi\,. \tag{6}$$

Для удобства введем новый параметр порядка $J = R^2/(1-R^2)$, то есть $R = \sqrt{J/(1+J)}$. В новых переменных уравнения, в смысле Стратоновича, принимают следующий вид:

$$\dot{J} = \mu\cos\beta\, J - \sigma\xi(t)\sqrt{J(1+J)}\cos\Phi\,, \tag{7}$$

$$\dot{\Phi} = \Omega - \mu\sin\beta\frac{J+1/2}{J+1} + \sigma\xi(t)\frac{J+1/2}{\sqrt{J(1+J)}}\sin\Phi\,. \tag{8}$$

В терминах J состоянию полной синхронизации ($R\to 1$) соответствует $J\to\infty$, а состоянию максимальной асинхронности ($R=0$) соответствует $J=0$. Полученная система уравнений может быть исследована аналитически для $J \gg 1$ (приближение к полной синхронизации) и $J \ll 1$ (приближение к максимальной асинхронности).

1.1. Устойчивость синхронного состояния: $J\gg 1$. Для $J \gg 1$ в ведущем порядке система уравнений (7)–(8) имеет вид

$$\dot{J} = \mu_\beta J - \sigma\xi(t) J\cos\Phi\,, \tag{9}$$

$$\dot{\Phi} = \Omega_\mu + \sigma\xi(t)\sin\Phi\,, \tag{10}$$

где $\mu_\beta \equiv \mu\cos\beta$ и $\Omega_\mu \equiv \Omega - \mu\sin\beta$. Уравнение (9) может быть переписано в виде

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\ln J = \mu_\beta - \sigma\xi(t)\cos\Phi\,,$$

откуда следует, что показатель Ляпунова $\lambda \equiv \left\langle \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\ln J\right\rangle$ оказывается

$$\lambda = \mu_\beta - \sigma\langle\xi(t)\cos\Phi\rangle = \mu_\beta + \sigma^2\langle\sin^2\Phi\rangle\,, \tag{11}$$

где $\langle\cdot\rangle$ означает осреднение по реализациям шума. Положительное значение λ означает, что состояние синхронизации $J=\infty$ является устойчивым. Видно, что шум вносит положительный вклад в λ, тогда как связь может вносить как положительный, так и отрицательный вклад.

Динамика Φ управляется уравнением (10) и не зависит от J. На основании этого можно написать уравнение Фоккера–Планка для плотности вероятности $W(\Phi,t)$:

$$\frac{\partial}{\partial t}W + \frac{\partial}{\partial\Phi}(\Omega_\mu W) - \sigma^2\frac{\partial}{\partial\Phi}\left(\sin\Phi\frac{\partial}{\partial\Phi}\big(\sin\Phi\, W\big)\right) = 0. \tag{12}$$

Это уравнение допускает стационарное π-периодичное решение

$$W(\Phi) = \frac{C}{\sin\Phi}\int\limits_{\Phi}^{\pi}\frac{\mathrm{d}\Phi_1}{\sin\Phi_1}e^{\frac{\Omega_\mu}{\sigma^2}(\operatorname{ctg}\Phi_1 - \operatorname{ctg}\Phi)},$$

где константа C определяется из условия нормировки $\int_0^{2\pi} W(\Phi)\,\mathrm{d}\Phi = 1$. Тогда

$$\langle \sin^2\Phi\rangle = \frac{\displaystyle\int\limits_0^{\pi} \mathrm{d}\Phi\,\sin\Phi \int\limits_{\Phi}^{\pi} \frac{\mathrm{d}\Phi_1}{\sin\Phi_1} e^{\frac{\Omega_\mu}{\sigma^2}(\operatorname{ctg}\Phi_1 - \operatorname{ctg}\Phi)}}{\displaystyle\int\limits_0^{\pi} \frac{\mathrm{d}\Phi}{\sin\Phi} \int\limits_{\Phi}^{\pi} \frac{\mathrm{d}\Phi_1}{\sin\Phi_1} e^{\frac{\Omega_\mu}{\sigma^2}(\operatorname{ctg}\Phi_1 - \operatorname{ctg}\Phi)}}\,. \tag{13}$$

Зависимость $\langle \sin^2\Phi\rangle$ от Ω_μ/σ^2 показана на рис. 1. Видно, что влияние общего шума на устойчивость состояния синхронизации гораздо сильнее выражено для высокочастотных колебаний, и это влияние монотонно уменьшается с уменьшением собственной частоты осцилляторов. Ниже приводятся два способа, позволяющие вычислить показатель Ляпунова для высокочастотных осцилляторов без вычисления интегралов в (13).

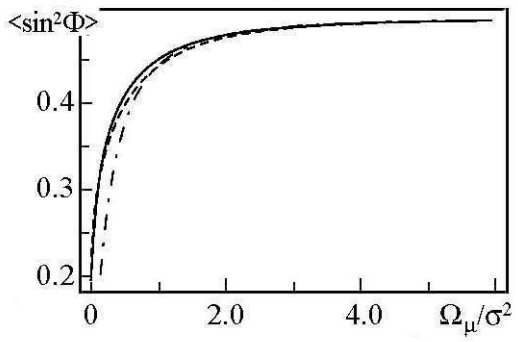


Рис. 1. Зависимость $\langle \sin^2\Phi\rangle$ от Ω_μ/σ^2 определяет показатель Ляпунова λ (см. уравнение (11)). Сплошной линией построено точное решение (13), штриховая линия соответствует аппроксимации Галеркина (17)–(18), штрихпунктирная линия соответствует асимптотическому разложению (14). Для точного решения и аппроксимации Галеркина $\langle \sin^2\Phi\rangle$ стремится к ненулевому конечному значению (примерно 0.2) при $\Omega_\mu/\sigma^2 \to 0$

Fig. 1. Dependence of $\langle \sin^2\Phi\rangle$ on Ω_μ/σ^2 determines the Lyapunov exponent λ (see equarion (11)). The black solid line represents exact solution (13), the dashed line shows the Galerkin's approximation (17)–(18), the dash-dotted line shows asymptotic expansion (14). For the exact solution and Galerkin's approximation, $\langle \sin^2\Phi\rangle$ tends to a nonzero finite value (approximately 0.2) as $\Omega_\mu/\sigma^2 \to 0$

Случай малого шума $\sigma^2 \ll \Omega_\mu$**.** Интеграл в уравнении (13) в общем случае не может быть вычислен аналитически. Однако, можно оценить его асимптотическое поведение при $\Omega_\mu \gg \sigma^2$. Принимая σ^2 за малый параметр в уравнении (12), можно представить функцию плотности распределения вероятности $W(\Phi)$ в виде ряда $W(\Phi) = (2\pi)^{-1} + \sigma^2 W^{(1)}(\Phi) + \sigma^4 W^{(2)}(\Phi) + \ldots$, и найти $\langle \sin^2\Phi\rangle = \frac{1}{2} - \frac{\sigma^4}{8\Omega_\mu^2} + \ldots$. Тогда

$$\lambda = \mu_\beta + \sigma^2\left[\frac{1}{2} - \frac{\sigma^4}{8\Omega_\mu^2} + \mathcal{O}\left(\frac{\sigma^6}{\Omega_\mu^3}\right)\right]. \tag{14}$$

Приближение Галеркина. Двухпараметрическая функция

$$W_{m,\Phi_0}(\Phi) = \frac{a_m}{\sqrt{1 + m\sin^2(\Phi - \Phi_0)}}\,, \tag{15}$$

где $a_m = \left(4\mathrm{K}\sqrt{-m}\right)^{-1}$, позволяет достаточно точно аппроксимировать функцию $W(\Phi)$, определяемую уравнением Фоккера–Планка (12), и может быть использована в качестве аппроксимирующей функции для метода Галеркина [32]. Здесь и

далее $\mathrm{K}(z)$ и $\mathrm{E}(z)$ обозначают эллиптические интегралы первого и второго рода, соответственно. Заметим, что эти интегралы являются действительными конечными функциями чисто мнимого аргумента на $[0, +i\infty)$. Выполним процедуру проецирования уравнения Фоккера–Планка (12) на подпространство функций W_{m,Φ_0} (см. уравнение (15)). В случае стационарного состояния уравнение (12) может быть проинтегрировано

$$\frac{\Omega_\mu}{\sigma^2} W - \sin\Phi \frac{\partial}{\partial\Phi}\big(\sin\Phi\, W\big) = \frac{j}{\sigma^2}\,, \tag{16}$$

где j – это постоянный по Φ поток вероятности. При $\Omega_\mu/\sigma^2 \to 0$ решение уравнения (16) имеет вид $\lim_{m\to\infty,\Phi_0\to 0} W_{m,\Phi_0}(\Phi)$. При $\Omega_\mu/\sigma^2 \to \infty$ вид решения уравнения (16) полностью соответствует $W_{m,\Phi_0}(\Phi)$ с $m \ll 1$.

Перепишем уравнение (16) в операторном виде $\hat{\mathcal{L}}W - j/\sigma^2 = 0$. Для минимизации невязки аппроксимации можно потребовать выполнение следующих условий:

$$\int\limits_0^{2\pi} \mathrm{d}\Phi(\hat{\mathcal{L}}W_{m,\Phi_0} - j/\sigma^2) = \int\limits_0^{2\pi} \mathrm{d}\Phi\, W_{m,\Phi_0}(\hat{\mathcal{L}}W_{m,\Phi_0} - j/\sigma^2) =$$
$$= \int\limits_0^{2\pi} \mathrm{d}\Phi\, \frac{\mathrm{d}W_{m,\Phi_0}}{\mathrm{d}\Phi}(\hat{\mathcal{L}}W_{m,\Phi_0} - j/\sigma^2) = 0\,,$$

которые позволяют определить константу j и параметры m и Φ_0

$$\sin^2\Phi_0 = \frac{1}{2+m}\,, \quad j = \frac{2\pi a_m^2 \Omega_\mu}{\sqrt{1+m}}\,,$$

$$\frac{\Omega_\mu}{\sigma^2} = \frac{\sqrt{1+m}}{m} \frac{\dfrac{2}{2+m}\dfrac{\mathrm{E}(\sqrt{-m})}{\mathrm{K}(\sqrt{-m})} - 1}{1 - \dfrac{1}{\sqrt{1+m}}\left(\dfrac{\pi}{2\mathrm{K}(\sqrt{-m})}\right)^2}\,, \tag{17}$$

и

$$\langle \sin^2\Phi \rangle = \frac{1}{2+m}\frac{\mathrm{E}(\sqrt{-m})}{\mathrm{K}(\sqrt{-m})}\,. \tag{18}$$

С учетом уравнений (17) и (18) можно найти зависимость $\langle \sin^2\Phi \rangle$ и Ω_μ/σ^2, параметризованную m.

На рис. 1 видно, что аппроксимация Галеркина достаточно хорошо согласуется с точным решением (13), и можно оценить область применимости асимптотической формулы (14).

1.2. Динамика $\langle J \rangle_\xi(t)$ и потеря максимальной асинхронности. Уравнение динамики осредненного параметра порядка $\langle J \rangle_\xi$ (где $\langle ... \rangle_\xi$ обозначает осреднение по реализациям шума) наиболее просто получить из системы уравнений (7)–(8),

записанных в форме Ито,

$$\dot{J} = \mu_\beta J + \sigma^2 \left(J + \frac{1}{2} \right) - \sigma\xi(t) \circ \sqrt{J(1+J)} \cos\Phi, \tag{19}$$

$$\dot{\Phi} = \Omega - \mu \sin\beta \frac{J + 1/2}{J+1} + \sigma^2 \left(\frac{3}{2} + \frac{1}{2} \frac{1}{J(1+J)} \right) \sin\Phi \cos\Phi + \\ + \sigma\xi(t) \circ \frac{J + 1/2}{\sqrt{J(1+J)}} \sin\Phi. \tag{20}$$

Так как в форме Ито мгновенное состояние системы не зависит от шумового сигнала в этот же момент времени, $\langle \xi(t) \circ f(J(t), \Phi(t)) \rangle_\xi = 0$, а детерминированная часть уравнения (19) содержит только константы и линейные по J члены, можно осреднить уравнение (19) по реализациям шума и получить

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \langle J \rangle_\xi = (\mu_\beta + \sigma^2) \langle J \rangle_\xi + \frac{\sigma^2}{2} \,. \tag{21}$$

Решение уравнения (21), соответствующее системе изначально находящейся в состоянии максимальной асинхронности ($J(0) = 0$), имеет вид

$$\langle J \rangle_\xi(t) = (e^{(\mu_\beta + \sigma^2)t} - 1) \frac{\sigma^2}{2(\mu_\beta + \sigma^2)} \,. \tag{22}$$

Условие роста среднего значения параметра порядка $\langle J \rangle_\xi$

$$\mu_\beta + \sigma^2 > 0 \tag{23}$$

не совпадает с условием положительности показателей Ляпунова

$$\mu_\beta + \sigma^2 \langle \sin^2 \Phi \rangle > 0 \,, \tag{24}$$

так как в уравнении (23) вклад больших значений J является более существенным. Уравнение (24) определяет, стремится ли система асимптотически к состоянию полной синхронизации ($J = \infty$), тогда как уравнение (23) определяет, стремится ли система уйти от состояний максимальной асинхронности, но при этом не запрещает системе возвращаться в слабо синхронные состояния от состояний с большими значениями J. Таким образом, условие (23) слабее, чем (24).

1.3. Переход от максимальной асинхронности к синхронизации. Между состояниями полной синхронизации ($J = \infty$) и максимальной асинхронности ($J = 0$) существует одно значительное отличие. Синхронное состояние является притягивающим, $\lambda = \mu_\beta + \sigma^2 \langle \sin^2 \Phi \rangle > 0$, переход в это состояние необратим, тогда как состояние десихронизации $\mu_\beta + \sigma^2 < 0$ не притягивает к себе фазовые траектории. Более того, так как шумовое слагаемое в (5) не исчезает при $R = 0$, шум «выбрасывает» систему из этого состояния. Таким образом, поскольку синхронное состояние является притягивающим, переход к синхронизации является однонаправленным и интерес представляет время перехода, которое может быть найдено из

уравнения Фоккера–Планка для плотности распределения вероятности $W(J,\Phi,t)$. Для системы стохастических уравнений (7)–(8) оно имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial t}W + \frac{\partial}{\partial J}\left(\mu_\beta J\, W\right) + \frac{\partial}{\partial \Phi}\left(\left[\Omega - \mu \sin\beta \frac{J+1/2}{J+1}\right] W\right) - \sigma^2 \hat{Q}^2 W = 0\,, \qquad (25)$$

где оператор $\hat{Q}$ определен как

$$\hat{Q}(\cdot) \equiv \frac{\partial}{\partial J}\Big(- \sqrt{J(1+J)}\cos\Phi(\cdot)\Big) + \frac{\partial}{\partial \Phi}\Big(\frac{J+1/2}{\sqrt{J(1+J)}}\sin\Phi(\cdot)\Big)\,.$$

Это уравнение может быть исследовано аналитически для физически реалистичного случая больших частот $\Omega \gg \mu \sim \sigma^2$.

1.3.1. Осреднение по высокочастотным колебаниям. Можно показать, что при исчезающе малых μ и σ распределение плотности вероятности принимает вид $W(J,\Phi,t) = (2\pi)^{-1} w(J,t)$, где $\int_0^\infty w(J,t)\,\mathrm{d}J = 1$. Тогда для $\mu \sim \sigma^2 \ll \Omega$ можно считать, что $\mu = \sigma^2\mu_1$, $\Omega = \Omega_0$ и воспользоваться методом многих масштабов: $W = W^{(0)}(J,t_1,t_2,...) + \sigma^2 W^{(1)}(J,\Phi,t_0,t_1,t_2...) + \ldots$, где $t_n = \sigma^{2n}t$. В ведущем порядке уравнение (25) дает $W^{(0)} = (2\pi)^{-1} w(J,t_1,t_2,...)$. В следующем порядке, σ^2, уравнение (25) дает

$$\frac{\partial W^{(1)}}{\partial t_0} + \Omega_0 \frac{\partial W^{(1)}}{\partial \Phi} + \frac{\partial W^{(0)}}{\partial t_1} + \frac{\partial}{\partial J}\left(\mu_1 \cos\beta\, J\, W^{(0)}\right) + \\ + \frac{\partial}{\partial \Phi}\left(-\mu_1 \sin\beta \frac{J+1/2}{J+1} W^{(0)}\right) - \hat{Q}^2 W^{(0)} = 0\,.$$

Проинтегрировав последнее уравнение по Φ от 0 до 2π, находим

$$\frac{\partial}{\partial t_0}\int_0^{2\pi} W^{(1)}\mathrm{d}\Phi + \frac{\partial w(J,t_1)}{\partial t_1} + \frac{\partial}{\partial J}\left(\mu_1 \cos\beta\, J\, w(J,t_1)\right) - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \hat{Q}^2 w(J,t_1)\,\mathrm{d}\Phi = 0\,.$$

Чтобы избежать линейного роста $W^{(1)}$ по t_0, необходимо обратить в ноль первое слагаемое. Тогда

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \hat{Q}^2 w(J,t_1)\,\mathrm{d}\Phi = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial J}\left(\sqrt{J(1+J)}\left[\frac{\partial}{\partial J}\left(\sqrt{J(1+J)}\,w\right) - \frac{J+1/2}{\sqrt{J(1+J)}}w\right]\right)\,.$$

Таким образом, плотность распределения вероятности $w(J,t)$ определяется уравнением

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial J}\left(\left[\mu_\beta J + \frac{\sigma^2}{2}\left(J + \frac{1}{2}\right)\right] w\right) - \sigma^2 \hat{Q}_J^2 w = 0\,, \qquad (26)$$

где

$$\hat{Q}_J(\cdot) \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\partial}{\partial J}\Big(\sqrt{J(1+J)}\,(\cdot)\Big)\,.$$

Уравнение (26) может быть интерпретировано как уравнение Фоккера–Планка для стохастического уравнения

$$\dot{J} = \mu_\beta J + \frac{\sigma^2}{2}(J+1/2) + \sigma\sqrt{\frac{J(1+J)}{2}}\,\zeta(t)\,, \qquad (27)$$

где эффективный шум $\zeta(t)$ является гауссовым и дельта-коррелированным, $\langle \zeta(t)\zeta(t+t')\rangle = 2\delta(t')$.

Сильная десинхронизирующая связь **($\mu_\beta < -\sigma^2/2$).** В этом случае уравнение (26) допускает стационарное решение с нулевым потоком вероятности

$$w_0(J) = \left(\frac{2(-\mu_\beta)}{\sigma^2} - 1\right)(1+J)^{-\frac{2(-\mu_\beta)}{\sigma^2}}\,. \tag{28}$$

Это означает, что в системе нет притягивающих состояний. Синхронное состояние не является асимптотически притягивающим в этом случае ($\lambda < 0$). Плотность вероятности (28) позволяет найти среднее значение и дисперсию среднего поля

$$\langle R\rangle = \langle\sqrt{\frac{J}{1+J}}\rangle = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\frac{\Gamma\big(2(-\mu_\beta)/\sigma^2\big)}{\Gamma\big(2(-\mu_\beta)/\sigma^2+1/2\big)}\,, \qquad \langle R^2\rangle = \langle\frac{J}{1+J}\rangle = \frac{\sigma^2}{2(-\mu_\beta)}\,.$$

Асимптотически притягивающее синхронное состояние **($\mu_\beta > -\sigma^2/2$).** В этом случае формальное решение может быть написано только для конечного потока вероятности j

$$w_j(J) = \frac{2j}{\sigma^2}(1+J)^{2\mu_\beta/\sigma^2}\int_J^\infty \frac{\mathrm{d}J_1}{J_1}(1+J)^{-1-2\mu_\beta/\sigma^2}. \tag{29}$$

Распределение плотности вероятности $w_j(J)|_{J\gg 1} \propto 1/J_1$ имеет «тяжелые» хвосты, интегралы от которых расходятся. После нормировки можно найти $w(J<\infty) = 0$, тогда как $\int_J^\infty w_1(J_1)\,\mathrm{d}J_1 = 1$, что соответствует $j \to 0$ и также означает, что все состояния «собираются» при $J = \infty$.

1.3.2. Переход к синхронному состоянию: Время перехода. В случае, когда состояние полной синхронизации является притягивающим, интерес представляет нахождение характерного времени перехода из состояния максимальной асинхронности к синхронному состоянию. Строго говоря, так как система может достигнуть состояния полной синхронизации только асимптотически, время перехода к этому состоянию всегда бесконечно. Однако можно рассмотреть, как система приближается к состоянию, близкому к полной синхронности, и найти время перехода к некоторому большому значению $\bar{J}$. Для уравнения (27) (или уравнения (26)), время перехода $T(J_0,\bar{J})$ от J_0 к $\bar{J}$ определяется уравнением

$$B(J_0)\frac{\partial^2 T(J_0,\bar{J})}{\partial J_0^2} + A(J_0)\frac{\partial T(J_0,\bar{J})}{\partial J_0} = -1\,, \tag{30}$$

где $T(\bar{J},\bar{J}) = 0$, $\big(\partial T(J_0,\bar{J})/\partial J_0\big)|_{J_0=\bar{J}} = 0$, и $A(J_0) = \mu_\beta J_0 + \frac{\sigma^2}{2}(J_0+1/2)$, $B(J_0) = \dfrac{\sigma^2}{2}J_0(1+J_0)$. Заметим, что в рассматриваемой задаче $J_0 = 0$ является границей области возможных состояний системы. Решение уравнения (30) имеет вид

$$T(J_0,\bar{J}) = \int_{J_0}^{\bar{J}}\mathrm{d}J_1\int_{J_0}^{J_1}\frac{\mathrm{d}J_2}{B(J_2)}e^{-\int\limits_{J_2}^{J_1}\frac{A(J_3)}{B(J_3)}\mathrm{d}J_3} = \frac{2}{\sigma^2}\int_{J_0}^{\bar{J}}\frac{\mathrm{d}J_1}{J_1}\int_{J_0}^{J_1}\mathrm{d}J_2\frac{(1+J_2)^{2\mu_\beta\sigma^{-2}+2}}{(1+J_1)^{2\mu_\beta\sigma^{-2}+3}}\,.$$

Интегрируя по J_2 и полагая $J_0 \to 0$, можно найти

$$T(0,\bar{J}) = \frac{\sigma^{-2}}{\mu_\beta\sigma^{-2}+3/2}\int_0^{\bar{J}}\frac{\mathrm{d}z}{z}\left(1-\frac{1}{(1+z)^{2\mu_\beta\sigma^{-2}+3}}\right) =$$

$$= \frac{1}{\sigma^2}\left[\frac{\ln(1+\bar{J})}{\mu_\beta\sigma^{-2}+3/2} + \frac{\bar{J}^{-(2\mu_\beta\sigma^{-2}+3)}}{2(\mu_\beta\sigma^{-2}+3/2)^2} + \tau\left(\frac{2\mu_\beta}{\sigma^2},\bar{J}\right)\right], \tag{31}$$

где $\tau(q,\bar{J})$ мало по сравнению с суммой первого и второго слагаемого в скобках при $\bar{J} \gg 1$. При $2\mu_\beta\sigma^{-2}+3 > 0$ время перехода является логарифмически большим, пропорциональным $\ln\bar{J}$, и это означает, что синхронное состояние притягивает траектории. При $2\mu_\beta\sigma^{-2}+3 < 0$ время перехода имеет степенную зависимость от $\bar{J}$, то есть в этом случае синхронное состояние является отталкивающим, и фазовые траектории системы редко проходят вблизи этого состояния.

Физическая интерпретация для идентичных осцилляторов. Результаты данного раздела могут быть резюмированы в виде следующей качественной картины. Для конкуренции между воздействиями связи и общего шума имеется критическое значение параметра связи $\mu_\beta^{\mathrm{crit}} = -\sigma^2/2$. При $\mu_\beta > \mu_\beta^{\mathrm{crit}}$ превалирует воздействие шума: со временем ансамбль асимптотически приближается к состоянию полной синхронизации. При $\mu_\beta < \mu_\beta^{\mathrm{crit}}$ отталкивающая связь предотвращает полную синхронизацию. Однако в последнем случае параметр порядка никогда не стремится к нулю: наблюдается частичная синхронизация с флуктуирующим параметром порядка.

2. Неидентичные осцилляторы: Переход к синхронизации

Рассмотрим ансамбль осцилляторов, имеющих разные собственные частоты Ω. Будем считать, что частоты имеют лоренцево распределение с характерной шириной γ

$$g(\Omega) = \frac{\gamma}{\pi[\gamma^2+(\Omega-\Omega_0)^2]}\,.$$

Функция $a(\Omega)$ может быть рассмотрена как аналитическая функция комплексного аргумента Ω. Тогда интеграл с распределением $g(\Omega)$ может быть вычислен методами теории вычетов

$$R\exp[-i\Phi] = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}\Omega\, g(\Omega)\, a(\Omega) = a(\Omega_0 - i\gamma)\,.$$

Уравнение (4), записанное для $a(\Omega_0 - i\gamma)$, дает замкнутое уравнение для параметра порядка

$$\dot{R} = -\gamma R + \frac{\mu_\beta}{2}(1-R^2)R - \frac{\sigma\xi(t)}{2}(1-R^2)\cos\Phi, \tag{32}$$

$$\dot{\Phi} = \Omega_0 - \frac{\mu}{2}\sin\beta(1+R^2) + \frac{\sigma\xi(t)}{2}\left(\frac{1}{R}+R\right)\sin\Phi. \tag{33}$$

В терминах J и Φ полученная система уравнений имеет вид

$$\dot{J} = \mu_\beta J - 2\gamma J(1+J) - \sigma\xi(t)\sqrt{J(1+J)}\cos\Phi, \tag{34}$$

$$\dot{\Phi} = \Omega_0 - \mu\sin\beta\frac{J+1/2}{J+1} + \sigma\xi(t)\frac{J+1/2}{\sqrt{J(1+J)}}\sin\Phi. \tag{35}$$

2.1. Состояния, близкие к синхронным ($J \gg 1$). При $J \gg 1$ уравнения (34)–(35) имеют вид

$$\dot{J} = \mu_\beta J - 2\gamma J^2 - \sigma\xi(t)J\cos\Phi\,, \tag{36}$$

$$\dot{\Phi} = \Omega_{\mu,0} + \sigma\xi(t)\sin\Phi\,. \tag{37}$$

Аналогично случаю уравнений (9)–(10), можно найти

$$\left\langle \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\ln J \right\rangle = \mu_\beta - 2\gamma\langle J\rangle - \sigma\langle\xi(t)\cos\Phi\rangle = \mu_\beta + \sigma^2\langle\sin^2\Phi\rangle - 2\gamma\langle J\rangle\,,$$

где $\langle\sin^2\Phi\rangle$ определяется уравнением (13). В случае неидентичных осцилляторов $\gamma \neq 0$, и система не может достигнуть состояния полной синхронизации. В стационарном случае среднее значение производной по времени от $\ln J$ обращается в ноль. Тогда

$$\langle J\rangle \approx \frac{\lambda}{2\gamma}\,. \tag{38}$$

Последнее уравнение справедливо при $\langle J\rangle \gg 1$, что наблюдается при малой расстройке частот $\gamma \ll |\lambda|$.

2.2. Потеря максимальной асинхронности. Записывая уравнения (34) и (35) в форме Ито и осредняя их по реализациям шума подобно тому, как это было сделано для вывода уравнения (21) в случае идентичных осцилляторов, можно получить

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle J\rangle_\xi = (\mu_\beta + \sigma^2 - 2\gamma)\langle J\rangle_\xi - 2\gamma\langle J^2\rangle_\xi + \frac{\sigma^2}{2}\,. \tag{39}$$

Для системы, изначально находящейся в максимально асинхронном состоянии ($J(0) = 0$), до тех пор, пока $J \ll 1$, уравнение (39) дает решение вида

$$\langle J\rangle_\xi(t) \approx (e^{(\mu_\beta+\sigma^2-2\gamma)t} - 1)\frac{\sigma^2}{2(\mu_\beta + \sigma^2 - 2\gamma)}\,. \tag{40}$$

Так же, как и для случая идентичных осцилляторов, дальнейший анализ переходного поведения системы в общем случае не представляется возможным. Более подробный анализ возможен для осцилляторов с высокой собственной частотой $\Omega \gg \mu \sim \sigma^2$.

2.3. Высокочастотные осцилляторы. Осреднение по высокочастотным колебаниям может быть выполнено точно так же, как и для случая одинаковых осцилляторов. В этом случае уравнение (27) примет вид

$$\dot{J} = \mu_\beta J - 2\gamma J(1+J) + \frac{\sigma^2}{2}(J+1/2) + \sigma\sqrt{\frac{J(1+J)}{2}}\,\zeta(t)\,. \tag{41}$$

Для ненулевого γ состояние полной синхронности оказывается невозможным, поэтому параметр порядка всегда находится в пределах $0 \le J < \infty$. Проинтегрировав уравнение Фоккера–Планка для стационарной плотности вероятности $w(J)$, находим

$$w(J) = \frac{(1+J)^{2\mu_\beta/\sigma^2} \exp\left[-\dfrac{4\gamma}{\sigma^2}(1+J)\right]}{\left(\dfrac{\sigma^2}{4\gamma}\right)^{2\mu_\beta/\sigma^2+1} \Gamma\left(\dfrac{2\mu_\beta}{\sigma^2}+1, \dfrac{4\gamma}{\sigma^2}\right)}, \tag{42}$$

где $\Gamma(m,x)$ – это верхняя неполная Гамма-функция. Полученное решение позволяет выразить следующие моменты параметров порядка:

$$\langle R^2 \rangle = 1 - \frac{4\gamma}{\sigma^2} \frac{\Gamma\left(\dfrac{2\mu_\beta}{\sigma^2}, \dfrac{4\gamma}{\sigma^2}\right)}{\Gamma\left(\dfrac{2\mu_\beta}{\sigma^2}+1, \dfrac{4\gamma}{\sigma^2}\right)}, \quad \langle J \rangle = \frac{\sigma^2}{4\gamma} \frac{\Gamma\left(\dfrac{2\mu_\beta}{\sigma^2}+2, \dfrac{4\gamma}{\sigma^2}\right)}{\Gamma\left(\dfrac{2\mu_\beta}{\sigma^2}+1, \dfrac{4\gamma}{\sigma^2}\right)} - 1\,. \tag{43}$$

На рис. 2 построено среднее значение параметра порядка $\langle J \rangle$ в зависимости от силы связи μ_β при различных значениях γ. Примечательно, что для идентичных осцилляторов состояние полной синхронности является притягивающим при $\mu \cos\beta/\sigma^2 > -1/2$.

Физическая интерпретация для коллективной динамики неидентичных осцилляторов. Ансамбль неидентичных осцилляторов под действием общего шума не синхронизируется, не десинхронизируется. Для любой силы связи и уровня шума параметр порядка флуктуирует в диапазоне $0 \le R < 1$.

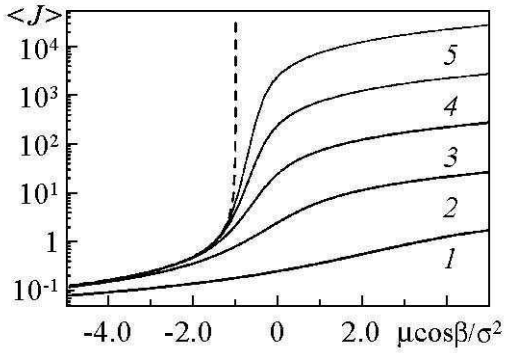


Рис. 2. Сплошными линиями показана зависимость параметра порядка $\langle J \rangle$ от $\mu \cos\beta/\sigma^2$ (см. уравнение (43)) при различных значениях γ: *1* – 1, *2* – 10^{-1}, *3* – 10^{-2}, *4* – 10^{-3}, *5* – 10^{-4}. Здесь штриховая линия, стремящаяся к бесконечности при $\mu \cos\beta/\sigma^2 = -1$, соответствует $\gamma = 0$

Fig. 2. The dependence of the order parameter $\langle J \rangle$ on $\mu \cos\beta/\sigma^2$ (see equation (43)) is plotted with solid lines for γ: *1* – 1, *2* – 10^{-1}, *3* – 10^{-2}, *4* – 10^{-3}, *5* – 10^{-4}. The dashed line tending to infinity at $\mu \cos\beta/\sigma^2 = -1$, corresponds to $\gamma = 0$

3. Неидентичные осцилляторы: Взаимное притяжение и отталкивание частот

Обращаясь к вопросу о поведении средних частот неидентичных связанных осцилляторов, следует сразу отметить одно существенное различие между случаями наличия и отсутствия шума. В отсутствие шума достаточно сильная притягивающая связь может полностью синхронизовать частоты двух неидентичных осцилляторов;

однако при наличии шума идеального совпадения средних частот не наблюдается даже при сколь угодно большой силе связи (см. вставки (*a*) и (*b*) на рис. 3 в [21], где приведены результаты численного счета для ансамбля Курамото, $\beta = 0$). Это обусловлено тем, что для случайного сигнала не запрещены периоды аномально больших возмущений, при которых сила притягивающей связи может становиться временно недостаточной для поддержания синхронизации частот. Увеличение силы притягивающей связи делает такие периоды все более редкими, но не невозможными. Ниже из результатов данного раздела можно явно видеть, что совпадение средних частот при притягивающей связи и общем шуме не бывает идеальным.

Рассмотрим динамику отдельных осцилляторов в ансамбле. Удобно отслеживать сдвиг фазы $\phi_\Omega - \Phi$ отдельного осциллятора относительно фазы синхронизованного кластера. Дополним уравнения (34) и (35) уравнением для сдвига фазы каждого отдельного осциллятора $\theta_\omega = \phi_\Omega - \Phi$ (см. уравнение (1));

$$\dot{J} = \mu_\beta J - 2\gamma J(1+J) - \sigma\xi(t)\sqrt{J(1+J)}\cos\Phi, \tag{44}$$

$$\dot{\Phi} = \Omega_0 - \mu\sin\beta\frac{J+1/2}{J+1} + \sigma\xi(t)\frac{J+1/2}{\sqrt{J(1+J)}}\sin\Phi, \tag{45}$$

$$\dot{\theta}_\omega = \omega - \mu\left(\sqrt{\frac{J}{1+J}}\sin(\theta_\omega+\beta) - \frac{J+1/2}{J+1}\sin\beta\right) + \\ + \sigma\xi(t)\left[\sin(\Phi+\theta_\omega) - \frac{J+1/2}{\sqrt{J(1+J)}}\sin\Phi\right], \tag{46}$$

где $\omega = \Omega - \Omega_0$. В дальнейшем, для краткости записи, нижний индекс ω опускается.

Уравнение Фоккера–Планка для плотности вероятности состояний системы (44)–(46) $W(J,\Phi,\theta,t)$ имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial t}W + \frac{\partial}{\partial J}\left[\left(\mu_\beta J - 2\gamma J(1+J)\right)W\right] + \frac{\partial}{\partial\Phi}\left[\left(\Omega_0 - \mu\sin\beta\frac{J+1/2}{J+1}\right)W\right] + \\ + \frac{\partial}{\partial\theta}\left[\left(\omega - \mu\sqrt{\frac{J}{1+J}}\sin(\theta+\beta) + \mu\frac{J+1/2}{J+1}\sin\beta\right)W\right] - \sigma^2\hat{Q}^2W = 0\,, \tag{47}$$

где оператор $\hat{Q}$ определен как

$$\hat{Q}(\cdot) \equiv \frac{\partial}{\partial J}\left(-\sqrt{J(1+J)}\cos\Phi(\cdot)\right) + \frac{\partial}{\partial\Phi}\left(\frac{J+1/2}{\sqrt{J(1+J)}}\sin\Phi(\cdot)\right) + \\ + \frac{\partial}{\partial\theta}\left(\left(\sin(\Phi+\theta) - \frac{J+1/2}{\sqrt{J(1+J)}}\sin\Phi\right)(\cdot)\right). \tag{48}$$

3.1. Распределение сдвига фаз для высокочастотных колебаний. При исчезающе малых μ, σ и γ имеем плотность распределения вероятности $W(J,\Phi,\theta,t) = (2\pi)^{-1}w(J,\theta,t)$, где

$$\int_0^{+\infty}\mathrm{d}J\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\, w(J,\theta) = 1\ .$$

Тогда при $\mu \sim \sigma^2 \sim \gamma \ll \Omega_0$ можно считать $\mu = \sigma^2\mu_1$, $\gamma = \sigma^2\gamma_1$, $\omega = \sigma^2\omega_1$ и применить метод многих масштабов; $W{=}W^{(0)}(J,\theta,t_1,t_2,...)+\sigma^2W^{(1)}(J,\Phi,\theta,t_0,t_1,t_2...)+...$, где $t_n = \sigma^{2n}t$. В ведущем порядке уравнение (47) дает $W^{(0)} = (2\pi)^{-1}w(J,\theta,t_1,t_2,...)$. В порядке σ^2 уравнение (47) дает

$$\frac{\partial W^{(1)}}{\partial t_0} + \Omega_0\frac{\partial W^{(1)}}{\partial \Phi} + \frac{\partial W^{(0)}}{\partial t_1} + \frac{\partial}{\partial J}\Big[\big(\mu_{\beta,1}J - 2\gamma_1 J(1+J)\big)W^{(0)}\Big] +$$
$$+\frac{\partial}{\partial \Phi}\Big[\Big(-\mu_1\sin\beta\frac{J+1/2}{J+1}\Big)W^{(0)}\Big] +$$
$$+\frac{\partial}{\partial \theta}\Big[\Big(\omega_1 - \mu_1\sqrt{\frac{J}{1+J}}\sin(\theta+\beta) + \mu_1\frac{J+1/2}{J+1}\sin\beta\Big)W^{(0)}\Big] - \hat{Q}^2W^{(0)} = 0\,.$$

Проинтегрировав полученное уравнение по Φ от 0 до 2π, получаем

$$\frac{\partial}{\partial t_0}\int_0^{2\pi} W^{(1)}\mathrm{d}\Phi + \frac{\partial w(J,\theta,t_1)}{\partial t_1} + \frac{\partial}{\partial J}\Big[\big(\mu_{\beta,1}J - 2\gamma_1 J(1+J)\big)w(J,\theta,t_1)\Big] +$$
$$+\frac{\partial}{\partial \theta}\Big[\Big(\omega_1 - \mu_1\sqrt{\frac{J}{1+J}}\sin(\theta+\beta) + \mu_1\frac{J+1/2}{J+1}\sin\beta\Big)w(J,\theta,t_1)\Big] -$$
$$-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\hat{Q}^2 w(R,\theta,t_1)\,\mathrm{d}\Phi = 0\,.$$

Чтобы избежать линейного роста $W^{(1)}$ в «нормальном» времени t_0, что нарушило бы иерархию малости вкладов в разложении, необходимо потребовать обращение первого слагаемого в ноль. Полученный интеграл может быть записан в виде

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\mathrm{d}\Phi\,\hat{Q}^2 w(J,t_1) = \frac{\partial}{\partial J}\left(-\frac{J+1/2}{2}w\right) + \frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{\sin\theta}{2}\frac{J+1/2}{\sqrt{J(1+J)}}w\right) + \hat{Q}^2_{J,\theta}w + \hat{Q}^2_\theta w\,,$$

где

$$\hat{Q}_{J,\theta}(\cdot) \equiv \frac{\partial}{\partial J}\Big(-\sqrt{\frac{J(1+J)}{2}}(\cdot)\Big) + \frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{\sin\theta}{\sqrt{2}}(\cdot)\right),$$

$$\hat{Q}_\theta(\cdot) \equiv \frac{\partial}{\partial\theta}\left(\left(\frac{\cos\theta}{\sqrt{2}} - \frac{J+1/2}{\sqrt{2J(1+J)}}\right)(\cdot)\right).$$

Тогда плотность распределения вероятности $w(J,\theta,t)$ определяется уравнением

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial J}\left(\left[\mu_\beta J - 2\gamma J(1{+}J) + \frac{\sigma^2}{2}(J{+}1/2)\right]w\right) + \frac{\partial}{\partial\theta}\Big[\Big(\omega - \mu\sqrt{\frac{J}{1{+}J}}\sin(\theta{+}\beta) +$$
$$+\mu\frac{J+1/2}{J+1}\sin\beta - \frac{\sigma^2}{2}\frac{J+1/2}{\sqrt{J(1+J)}}\sin\theta\Big)w\Big] - \sigma^2\hat{Q}^2_{J,\theta}w - \sigma^2\hat{Q}^2_\theta w = 0\,. \tag{49}$$

Уравнение (49) может быть рассмотрено как уравнение Фоккера–Планка для стохастической системы уравнений с двумя независимыми шумами $\zeta_1(t)$ и $\zeta_2(t)$

$$\dot{J} = \mu_\beta J - 2\gamma J(1+J) + \frac{\sigma^2}{2}(J+1/2) - \sigma\sqrt{\frac{J(1+J)}{2}}\zeta_1(t)\,, \tag{50}$$

$$\dot{\theta} = \omega - \mu\sqrt{\frac{J}{1+J}}\sin(\theta+\beta) + \mu\frac{J+1/2}{J+1}\sin\beta - \frac{\sigma^2}{2}\frac{J+1/2}{\sqrt{J(1+J)}}\sin\theta + \\ + \sigma\frac{\sin\theta}{\sqrt{2}}\zeta_1(t) + \sigma\left(\frac{\cos\theta}{\sqrt{2}} - \frac{J+1/2}{\sqrt{2J(1+J)}}\right)\zeta_2(t)\,. \tag{51}$$

Исходный шум $\xi(t)$ генерирует два независимых шума $\zeta_1(t)$ м $\zeta_2(t)$, которые являются гауссовыми и дельта-коррелированными, $\langle\zeta_n(t)\zeta_l(t+t')\rangle = 2\delta_{n,l}\delta(t')$, так как сигналы $\xi(t)\cos\Omega_0 t$ и $\xi(t)\sin\Omega_0 t$ являются некоррелированными на масштабе времени $2\pi/\Omega_0$.

3.2. Динамика состояний, близких к синхронным, при малой расстройке частот. Рассмотрим случай малой расстройки частот $\gamma \ll \sigma^2 \sim |\mu|$ и $2\mu/\sigma^2 > -1$. (Заметим, по сравнению с Ω_0, γ предполагается того же порядка малости, что и σ^2 и μ, то есть, $\sigma^3 \ll \gamma \ll \sigma^2$.) В этом случае состояния системы собираются к $J \gg 1$, что может быть использовано для интегрирования (49) по J. Для $\overline{w} \equiv \int_0^{+\infty} w\,\mathrm{d}J$ с $\overline{f(J)w} \approx \overline{w}\lim_{J\to+\infty} f(J)$ из уравнения (49) можно найти

$$\frac{\partial\overline{w}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial\theta}\left(\left[\omega - \mu\big(\sin(\theta+\beta) - \sin\beta\big) - \frac{\sigma^2}{2}\sin\theta\right]\overline{w}\right) - \\ - \frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\,\overline{w}\right)\right) - \frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial}{\partial\theta}\left((\cos\theta-1)\frac{\partial}{\partial\theta}\left((\cos\theta-1)\,\overline{w}\right)\right) = 0\,.$$

Упрощая, можно получить

$$\frac{\partial\overline{w}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial\theta}\Big(\big[\omega - \mu\big(\sin(\theta+\beta) - \sin\beta\big)\big]\,\overline{w}\Big) - \sigma^2\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\Big((1-\cos\theta)\overline{w}\Big) = 0\,. \tag{52}$$

Рассмотрим статистически стационарное состояние, соответствующее постоянному по θ потоку вероятности j в уравнении (52),

$$\Big(\omega - \mu\big(\sin(\theta+\beta) - \sin\beta\big)\Big)\overline{w} - \sigma^2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\Big((1-\cos\theta)\overline{w}\Big) = j\,. \tag{53}$$

В терминах последнего уравнения, захват частоты $\langle\dot{\theta}\rangle = 0$ соответствует $j = 0$. При $\sigma \neq 0$ можно показать, что решение с $j = 0$ существует для одного выделенного значения ω, а это означает, что полный захват частоты невозможен даже при малых отклонениях собственной частоты от средней частоты ансамбля.

При $j \neq 0$ находим

$$\overline{w}(\theta) = \frac{j}{\sigma^2}\int\limits_{\theta}^{2\pi}\mathrm{d}\psi\frac{(1-\cos\psi)^{\mu_\beta/\sigma^2}}{(1-\cos\theta)^{1+\mu_\beta/\sigma^2}}\exp\left[-\frac{\omega}{\sigma^2}\left(\mathrm{ctg}\,\frac{\theta}{2} - \mathrm{ctg}\,\frac{\psi}{2}\right) - \frac{\mu\sin\beta}{\sigma^2}(\psi-\theta)\right]. \tag{54}$$

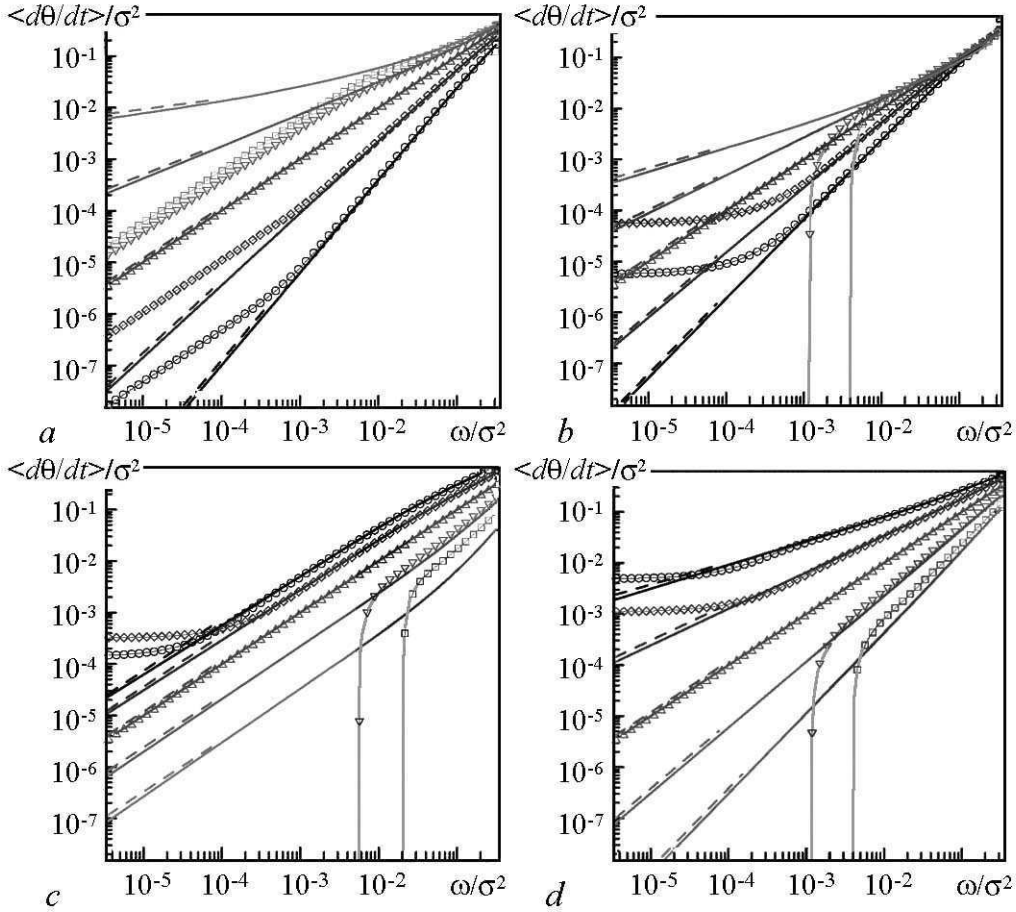


Рис. 3. Зависимость средней частоты $\langle\dot{\theta}\rangle$ от расстройки частоты ω при различных значениях β: *a* – 0, *b* – $\pi/4$, *c* – $\pi/2$, *d* – $3\pi/4$

Fig. 3. Dependence of the average frequency $\langle\dot{\theta}\rangle$ on the natural frequency mismatch ω for $\beta = 0$ (*a*), $\pi/4$ (*b*), $\pi/2$ (*c*), and $3\pi/4$ (*d*)

Это выражение имеет хорошие свойства сходимости при $\theta = 0$ и 2π: $\overline{w}(0) = \overline{w}(2\pi) = j/\omega$; при ненулевом ω оно сходится при любых значениях μ. Условие нормировки позволяет найти поток j как функцию μ, β, σ^2 и ω

$$j = \sigma^2 f\left(\frac{\mu}{\sigma^2}, \frac{\omega}{\sigma^2}, \beta\right) . \tag{55}$$

Результаты численного счета с помощью цепных дробей (см. ниже раздел 3.3.1) при $\gamma = 0.01$ показаны на рис. 3, *a, b, d* окружностями, ромбами, треугольниками с вершинами вверх и вниз, квадратами ($\mu/\sigma^2 = 0.4, 0.2, 0, -0.2, -0.4$, соответственно). Результаты на рис. 3, *c* получены для $\mu/\sigma^2 = 0.8, 0.4, 0, -0.4, -0.8$, соответственно. Сплошными линиями представлены результаты для $\gamma = 0$ и указанных μ/σ^2; штриховыми линиями показан наклон $1 + 2\mu\cos\beta/\sigma^2$, соответствующий асимптотическому поведению $\langle\dot{\theta}\rangle \sim \omega^{1+2\mu\cos\beta/\sigma^2}$. На рис. 3, *b–d* некоторые кривые пересекают ноль не при $\omega = 0$ – в log–log масштабе это можно наблюдать в виде выходов на горизонтальное плато (когда $\langle\dot{\theta}\rangle_{\omega=0} > 0$) или уходов кривых вниз (когда $\langle\dot{\theta}\rangle_{\omega=0} < 0$). На рис. 4 зависимости представлены со смещением так, чтобы пересечение кривых с нулем происходило в начале координат.

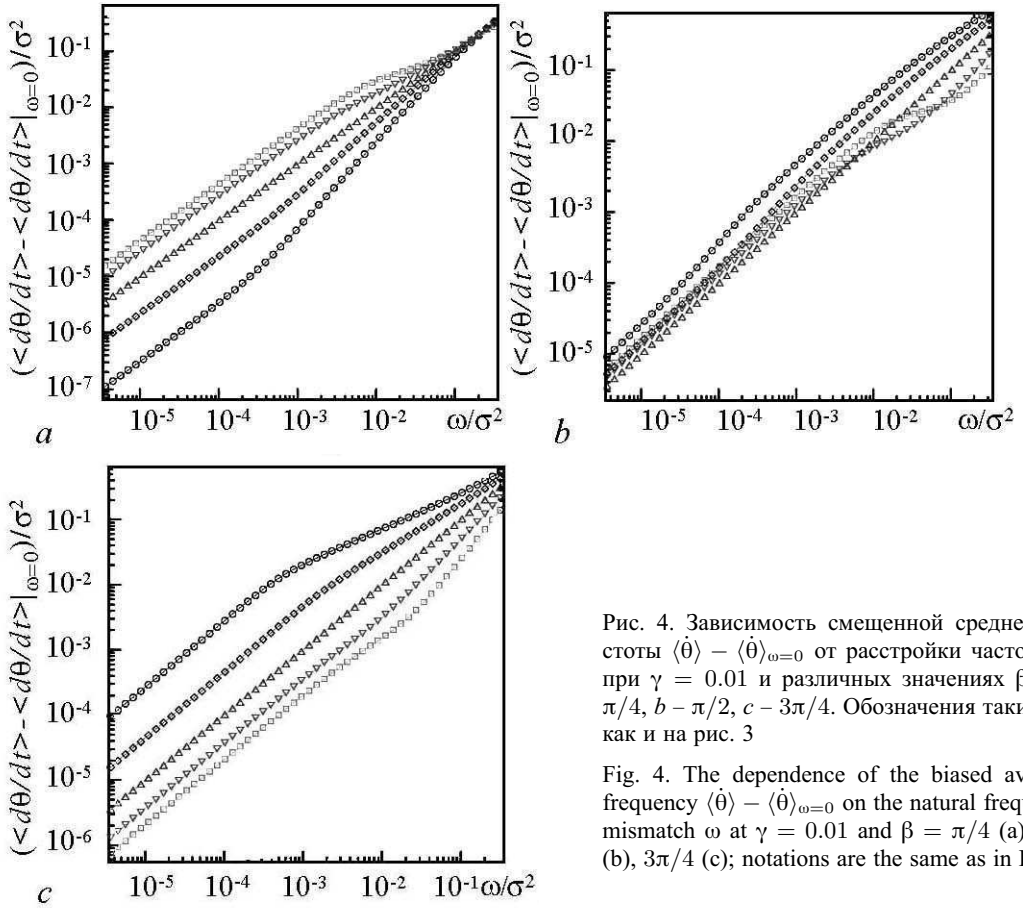


Рис. 4. Зависимость смещенной средней частоты $\langle\dot\theta\rangle - \langle\dot\theta\rangle_{\omega=0}$ от расстройки частоты ω при $\gamma = 0.01$ и различных значениях β: *a* – $\pi/4$, *b* – $\pi/2$, *c* – $3\pi/4$. Обозначения такие же, как и на рис. 3

Fig. 4. The dependence of the biased average frequency $\langle\dot\theta\rangle - \langle\dot\theta\rangle_{\omega=0}$ on the natural frequency mismatch ω at $\gamma = 0.01$ and $\beta = \pi/4$ (a), $\pi/2$ (b), $3\pi/4$ (c); notations are the same as in Fig. 3

3.3. Средняя частота осцилляторов в состояниях, близких к синхронным. Найдем среднюю частоту осцилляторов для случая неполной синхронизации. С технической точки зрения, задача сводится к вычислению средней частоты для уравнения (51) при конечном, но все еще большом J. Для приблизительных вычислений перепишем уравнение (51) в виде

$$\dot\theta = \omega_\beta - \mu b \sin(\theta+\beta) - \frac{\sigma^2}{2} c \sin\theta - \frac{\sigma}{\sqrt{2}} \sin\theta\, \zeta_1(t) + \frac{\sigma}{\sqrt{2}} (\cos\theta - c)\, \zeta_2(t)\,. \qquad (56)$$

Рассмотрим полученное уравнение для постоянных коэффициентов ω_β, b и c, вычисленных как средние значения,

$$\omega_\beta \equiv \omega + \mu \left\langle \frac{J+1/2}{J+1} \right\rangle \sin\beta = \omega + \mu \left(1 - \frac{1}{2}\left\langle \frac{1}{J+1} \right\rangle\right) \sin\beta\,, \qquad (57)$$

$$b \equiv \left\langle \sqrt{\frac{J}{1+J}} \right\rangle = 1 - \frac{1}{2}\left\langle \frac{1}{1+J} \right\rangle - \frac{1}{8}\left\langle \frac{1}{(1+J)^2} \right\rangle + \dots\,, \qquad (58)$$

$$c \equiv \left\langle \frac{J+1/2}{\sqrt{J(1+J)}} \right\rangle = 1 + \frac{1}{8}\left\langle \frac{1}{(1+J)^2} \right\rangle + \dots\,. \qquad (59)$$

С учетом распределения (42), имеем

$$\left\langle \frac{1}{(1+J)^n} \right\rangle = \left(\frac{4\gamma}{\sigma^2}\right)^n \frac{\Gamma\left(\frac{2\mu_\beta}{\sigma^2}+1-n, \frac{4\gamma}{\sigma^2}\right)}{\Gamma\left(\frac{2\mu_\beta}{\sigma^2}+1, \frac{4\gamma}{\sigma^2}\right)} \,. \tag{60}$$

Уравнение (56) с постоянными коэффициентами дает уравнение Фоккера–Планка

$$\begin{aligned} \frac{\partial w(\theta,t)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial\theta}\left[\left(\omega_\beta - \mu b\sin(\theta+\beta) - \frac{\sigma^2}{2}c\sin\theta\right) w(\theta,t)\right] - \\ - \frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\, w(\theta,t)\right)\right) - \\ - \frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial}{\partial\theta}\left((\cos\theta - c)\frac{\partial}{\partial\theta}\left((\cos\theta - c)\, w(\theta,t)\right)\right) = 0\,, \end{aligned} \tag{61}$$

которое может быть приведено к упрощенному виду

$$\begin{aligned} \frac{\partial w(\theta,t)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial\theta}\left[\Big(\omega_\beta - \mu b\sin(\theta+\beta)\Big) w(\theta,t)\right] - \\ - \frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\left[\left(1 + c^2 - 2c\cos\theta\right) w(\theta,t)\right] = 0\,. \end{aligned} \tag{62}$$

Для постоянного по времени распределения $w(\theta)$ последнее уравнение может быть проинтегрировано по θ

$$(\omega_\beta - \mu b\sin(\theta+\beta))w - \frac{\sigma^2}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left[(1+c^2-2c\cos\theta)w\right] = j\,, \tag{63}$$

где $j = \mathrm{const}$ – константа интегрирования, соответствующая потоку вероятности в системе, $\langle\dot\theta\rangle = 2\pi j$.

3.3.1. Представление плотности вероятности в виде цепных дробей. Для вычисления частот осцилляторов воспользуемся фурье-разложением для $w(\theta)$

$$w(\theta) = \frac{1}{2\pi}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} w_k e^{ik\theta}\,,$$

и подставим его в уравнение (63)

$$\begin{aligned} \left(\omega_\beta - \mu b\frac{e^{i(\theta+\beta)} - e^{-i(\theta+\beta)}}{2i}\right)\sum_k w_k e^{ik\theta} - \sigma^2\sum_k ikw_k\frac{1+c^2}{2}e^{ik\theta} + \\ + \sigma^2 c\frac{d}{d\theta}\sum_k \frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}w_k e^{ik\theta} = 2\pi j\,. \end{aligned}$$

Перегруппируем слагаемые

$$\sum_k e^{ik\theta}\left[\omega_\beta w_k - \frac{\mu b\, e^{i\beta}}{2i} w_{k-1} + \frac{\mu b\, e^{-i\beta}}{2i} w_{k+1} - \right.$$

$$\left. - ik\sigma^2 \frac{1+c^2}{2} w_k + \frac{ik\sigma^2 c}{2}(w_{k-1} + w_{k+1})\right] = 2\pi j\,.$$

Для удобства рассмотрим отдельно $k = 0$ и $k > 0$, при этом будем иметь в виду, что $w_0 = 1$, $w_{-k} = w_k^*$.

Для $k = 0$ имеем

$$\omega_\beta - \frac{\mu b\, e^{i\beta}}{2i} w_1^* + \frac{\mu b\, e^{-i\beta}}{2i} w_1 = 2\pi j$$

или

$$2\pi j = \langle \dot\theta \rangle = \omega_\beta + \mu b \mathrm{Im}\,(w_1 e^{-i\beta})\,. \tag{64}$$

Для $k \geq 1$ имеем

$$w_{k-1}\left[-\frac{\mu b\, e^{i\beta}}{2i} + \frac{ik\sigma^2 c}{2}\right] + w_k\left[\omega_\beta - ik\sigma^2\frac{1+c^2}{2}\right] + w_{k+1}\left[\frac{\mu b\, e^{-i\beta}}{2i} + \frac{ik\sigma^2 c}{2}\right] = 0\,. \tag{65}$$

Введем отношение $w_{k-1}/w_k = r_k$. Оно может быть выражено из уравнения (65)

$$r_k = \frac{1 + c^2 + \dfrac{2i\omega_\beta}{k\sigma^2}}{c + \dfrac{\mu b\, e^{i\beta}}{k\sigma^2}} - \frac{c - \dfrac{\mu b\, e^{-i\beta}}{k\sigma^2}}{c + \dfrac{\mu b\, e^{i\beta}}{k\sigma^2}}\,\frac{1}{r_{k+1}}\,. \tag{66}$$

Уравнение (66) представляет собой рекуррентное соотношение, позволяющее вычислить w_1 в виде цепной дроби

$$w_1 = \cfrac{1}{A_1 - B_1 \cfrac{1}{A_2 - B_2 \cfrac{1}{A_3 - B_3 \cfrac{1}{\cdots}}}}\,, \tag{67}$$

где

$$A_k \equiv \frac{1 + c^2 + \dfrac{2i\omega_\beta}{k\sigma^2}}{c + \dfrac{\mu b\, e^{i\beta}}{k\sigma^2}} \quad \text{и} \quad B_k \equiv \frac{c - \dfrac{\mu b\, e^{-i\beta}}{k\sigma^2}}{c + \dfrac{\mu b\, e^{i\beta}}{k\sigma^2}}\,.$$

Для достижения лучшей сходимости оборванного ряда цепных дробей следует учесть, что $A_\infty = 1/c + c$, $B_\infty = 1$, тогда из уравнения (66) получаем $r_\infty = c$. (Второе решение $r_\infty = 1/c$ соответствует расходящемуся разложению при $c > 1$.) Ошибка аппроксимации при обрывании ряда будет минимальна при подстановке полученного значения r_∞ вместо r_k в уравнение (67). Найдя w_1, можно вычислить среднюю частоту из уравнения (64). Результаты расчета $\langle \dot\theta \rangle$ представлены выше на рис. 3 и 4. Случай $\beta \in [\pi, 2\pi)$ не требует дополнительного рассмотрения в силу симметрии $(\mu, \beta) \leftrightarrow (-\mu, \beta + \pi)$.

3.3.2. Асимптотическое поведение средних частот осцилляторов. Рассмотрим взаимное притяжение и отталкивание средних частот при малых ω в уравнении (63). Перепишем уравнение (63) в терминах $G(\theta) \equiv (1 + c^2 - 2c\cos\theta)\, w(\theta)$

$$\frac{\omega_\beta - \mu b \sin(\theta + \beta)}{1 + c^2 - 2c\cos\theta} G - \frac{\sigma^2}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta} G = j\,. \tag{68}$$

Для начала, найдем собственную частоту ω_0 (или $\omega_{\beta,0}$, которая связана с ω_0 уравнением (57)) при $j = 0$. Для этой частоты уравнение (68) приобретает вид

$$\frac{\omega_{\beta,0} - \mu b \sin(\theta + \beta)}{1 + c^2 - 2c\cos\theta} G_0 - \frac{\sigma^2}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta} G_0 = 0\,. \tag{69}$$

Разделив последнее уравнение на G_0 и проинтегрировав, можно получить

$$\begin{aligned} &\mathrm{const} - \frac{\mu b \cos\beta}{2c}\ln(1 + c^2 - 2c\cos\theta) + \frac{\mu b \sin\beta}{2c}\theta + \\ &\quad + \left(\omega_{\beta,0} - \mu b \sin\beta \frac{1 + c^2}{2c}\right)\frac{2}{c^2 - 1}\,\mathrm{arctg}\left(\frac{c+1}{c-1}\,\mathrm{tg}\,\frac{\theta}{2}\right) - \frac{\sigma^2}{2}\ln G_0(\theta) = 0\,. \end{aligned} \tag{70}$$

Условие периодичности для $G_0(\theta)$ требует $G_0(\pi - 0) = G_0(-\pi + 0)$, и уравнение (70) дает $\omega_{\beta,0} = \mu\frac{b}{c}\sin\beta$. Подставляя выражения (57)–(59), находим

$$\omega_0 = -\frac{\mu}{4}\left\langle (1 + J)^{-2}\right\rangle \left(1 + \mathcal{O}\left(\left\langle (1 + J)^{-1}\right\rangle\right)\right)\sin\beta\,. \tag{71}$$

Следует заметить, что для состояния, близкого к синхронизации, при котором J не стремится к бесконечности, собственная частота осциллятора не равна нулю при $\sin\beta \neq 0$. Ее отклонение от нуля тем сильнее, чем слабее синхронизация. Без учета нормировки периодическое решение $G_0(\theta)$ имеет вид

$$G_0(\theta) = (1 + c^2 - 2c\cos\theta)^{-\frac{\mu b\cos\beta}{\sigma^2 c}} \exp\left[\frac{2\mu b \sin\beta}{\sigma^2 c}\left\{\frac{\theta}{2} - \mathrm{arctg}\left(\frac{c+1}{c-1}\,\mathrm{tg}\,\frac{\theta}{2}\right)\right\}\right]. \tag{72}$$

После нормировки решение принимает вид $\|w_0\|^{-1} G_0(\theta)$, где $\|...\| \equiv \int_{-\pi}^{\pi} ...\,\mathrm{d}\theta$, и $w_0(\theta) = G_0(\theta)/(1 + c^2 - 2c\cos\theta)$.

Вычислим $j = \varepsilon j_1$ для $\omega_\beta = \omega_{\beta,0} + \varepsilon\omega_{\beta,1}$, где $\varepsilon \ll 1$. Используя разложение $G = \|w_0\|^{-1} G_0 + \varepsilon G_1 + ...$, находим в ведущем порядке (ε^1) уравнения (68)

$$\frac{\omega_{\beta,1}\dfrac{G_0}{\|w_0\|} + \big(\omega_{\beta,0} - \mu b \sin(\theta + \beta)\big) G_1}{1 + c^2 - 2c\cos\theta} - \frac{\sigma^2}{2}\frac{\mathrm{d}G_1}{\mathrm{d}\theta} = j_1\,.$$

Умножая последнее уравнение на решение эрмитово-сопряженной задачи $G_0^+(\theta)$ для уравнения (69) и интегрируя результат по θ, находим

$$\frac{1}{\|w_0\|}\left\|\frac{G_0^+ G_0}{1 + c^2 - 2c\cos\theta}\right\|\omega_{\beta,1} = j_1\left\|G_0^+\right\|\,. \tag{73}$$

Эрмитово-сопряженная задача имеет вид

$$\frac{\omega_{\beta,0} - \mu b \sin(\theta + \beta)}{1 + c^2 - 2c\cos\theta} G_0^+ + \frac{\sigma^2}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta} G_0^+ = 0\,,$$

и без учета нормировки

$$G_0^+(\theta) = (1 + c^2 - 2c\cos\theta)^{\frac{\mu b\cos\beta}{\sigma^2 c}} \exp\left[-\frac{2\mu b\sin\beta}{\sigma^2 c}\left\{\frac{\theta}{2} - \operatorname{arctg}\left(\frac{c+1}{c-1}\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}\right)\right\}\right]. \tag{74}$$

Тогда с учетом соотношений $G_0(\theta)\,G_0^+(\theta) = 1$ и $\left\|(1+c^2-2c\cos\theta)^{-1}\right\| = 2\pi/(c^2-1)$ уравнение (73) принимает упрощенный вид

$$j_1 = \frac{2\pi}{(c^2-1)\left\|G_0^+\right\|\,\|w_0\|}\,\omega_{\beta,1}\,. \tag{75}$$

Интегралы в последнем выражении могут быть вычислены следующим образом:

$$\left\|G_0^+\right\| = \int\limits_{-\pi}^{\pi}(1+c^2-2c\cos\theta)^m e^{-2\alpha f(\theta)}\mathrm{d}\theta\,, \quad \|w_0\| = \int\limits_{-\pi}^{\pi}(1+c^2-2c\cos\theta)^{-m-1}e^{2\alpha f(\theta)}\mathrm{d}\theta\,,$$

где $m \equiv \mu b\cos\beta/(\sigma^2 c)$, $\alpha \equiv \mu b\sin\beta/(\sigma^2 c)$ и $f(\theta) \equiv \theta/2 - \operatorname{arctg}\{[(c+1)/(c-1)]\operatorname{tg}(\theta/2)\}$. При $(c-1) \ll 1$ и $\mu\cos\beta/\sigma^2 > -1/2$, что является условием устойчивости синхронного состояния, полученные интегралы можно упростить. В частности, для $m > -1/2$ и $(c-1) \ll 1$ имеем

$$\left\|G_0^+\right\| \approx 2\int\limits_0^{\pi}(1+c^2-2c\cos\theta)^m \operatorname{ch}[\alpha(\pi-\theta)]\,\mathrm{d}\theta$$

(так как первый множитель делает вклад окрестности $\theta = 0$ в интеграл малым, можно пренебречь отклонением $f(\theta)$ от $\operatorname{sign}(\theta)(|\theta|-\pi)/2$), которое не является малым только при $\theta \sim (c-1)$), и

$$\|w_0\| \approx 2\int\limits_0^{\pi}[(c-1)^2 + c\,\theta^2]^{-m-1}\operatorname{ch}[2\alpha f(\theta)]\,\mathrm{d}\theta \approx 2\int\limits_0^{\pi}\frac{\operatorname{ch}\left[-2\alpha\operatorname{arctg}\left(\frac{\theta}{c-1}\right)\right]}{[(c-1)^2 + c\,\theta^2]^{m+1}}\mathrm{d}\theta$$

(в этом случае принципиальный вклад вносит как раз малая окрестность $\theta = 0$, и можно использовать приближение, справедливое для $\theta \sim (c-1)$, в частности, $f(\theta)|_{\theta\sim(c-1)} \approx -\operatorname{arctg}[\theta/(c-1)]$). Также,

$$\left\|G_0^+\right\| \approx 2\int\limits_0^{\pi}2^m(1-\cos\theta)^m\operatorname{ch}[\alpha(\pi-\theta)]\,\mathrm{d}\theta \approx 2^{2m+2}\int\limits_0^{\pi/2}\cos^{2m}\psi\,\operatorname{ch}(2\alpha\psi)\,\mathrm{d}\psi\,, \tag{76}$$

и с учетом $\operatorname{tg} y = \theta/(c-1)$

$$\|w_0\| \approx \frac{2}{(c-1)^{2m+1}}\int\limits_0^{\pi/2}\frac{\operatorname{ch}(-2\alpha y)}{(1+\operatorname{tg}^2 y)^m}\,\mathrm{d}y \approx \frac{2}{(c-1)^{2m+1}}\int\limits_0^{\pi/2}\cos^{2m}\psi\,\operatorname{ch}(2\alpha\psi)\,\mathrm{d}\psi\,. \tag{77}$$

Вычисляя интеграл, находим

$$\int\limits_0^{\pi/2} \cos^{2m}\psi\ \mathrm{ch}(2\alpha\psi)\,\mathrm{d}\psi = \frac{i\,\Gamma(2m+1)\,\Gamma(i\alpha-m)}{2^{2m+1}\,\Gamma(i\alpha+m+1)}\,\mathrm{sh}[(\alpha+im)\pi]\,,$$

где i – мнимая единица. Подставляя выражения (76) и (77) в уравнение (75), получаем

$$\dot{j}_1 = \frac{\pi}{2}\left[\frac{i\,2^m(c-1)^m\Gamma(i\alpha+m+1)}{\Gamma(2m+1)\,\Gamma(i\alpha-m)\,\mathrm{sh}[(\alpha+im)\pi]}\right]^2 \omega_{\beta,1}\,. \tag{78}$$

Используя выражение (59) для c, можно переписать уравнение (78) в окончательном виде

$$\langle\dot{\theta}\rangle = \left[\frac{\pi\,\Gamma\left(\frac{\mu e^{i\beta}}{\sigma^2}+1\right)}{\Gamma\left(\frac{2\mu\cos\beta}{\sigma^2}+1\right)\,\Gamma\left(-\frac{\mu e^{-i\beta}}{\sigma^2}\right)\,\sin\left(\frac{\mu e^{-i\beta}}{\sigma^2}\pi\right)}\right]^2 \left(\frac{\langle(1+J)^{-2}\rangle}{4}\right)^{\frac{2\mu\cos\beta}{\sigma^2}} (\omega-\omega_0)\,, \tag{79}$$

где ω_0 и среднее значение $\langle(1+J)^{-2}\rangle$ определяются уравнениями (71) и (60), соответственно. Заметим, что величина первого множителя в уравнении (79) имеет порядок 1, тогда как $\langle(1+J)^{-2}\rangle$ мало при $\mu\cos\beta/\sigma^2 > -1/2$ и, поэтому, коэффициент пропорциональности между $\langle\dot{\theta}\rangle$ и $(\omega-\omega_0)$ является малым для синхронизирующей связи ($\mu\cos\beta > 0$) и большим для десинхронизирующей связи ($\mu\cos\beta < 0$). Для предельного случая $\gamma \to 0$, в котором $\langle(1+J)^{-2}\rangle \to 0$, коэффициент стремится к нулю и бесконечности для синхронизирующей и десинхронизирующей связей, соответственно.

Физическая интерпретация для средних частот в ансамбле неидентичных осцилляторов. Средние частоты всех осцилляторов с различными собственными частотами различны. Для притягивающей связи средние частоты становятся ближе (притягиваются друг к другу). Для отталкивающей связи частоты начинают различаться сильнее (отталкиваются). Качественно, данный эффект можно объяснить следующим образом. В отсутствие связи частоты под действием шума остаются неизменными, хотя фазы стремятся сформировать кластер; в пределах кластера мгновенные частоты почти идентичны. Однако присутствие отдельных осцилляторов в кластере является временным: фазы остаются вместе на протяжении некоторого времени, а затем фаза более быстрого осциллятора совершает дополнительный оборот относительно медленного осциллятора. Этот оборот в точности компенсирует близость мгновенных частот на протяжении периода совместной динамики осцилляторов в кластере. В случае притягивающей связи такие обороты становятся более редкими, так что они лишь частично компенсируют близость мгновенных частот на протяжении кластерных этапов динамики. Идеальной синхронизации частот соответствовало бы полное отсутствие оборотов, чего не наблюдается при наличии шума. В случае отталкивающей связи дополнительные обороты становятся более частыми, так что происходит «сверхкомпенсация» близости мгновенных частот во время кластерных периодов. Данная картина проиллюстрирована рис. 5.

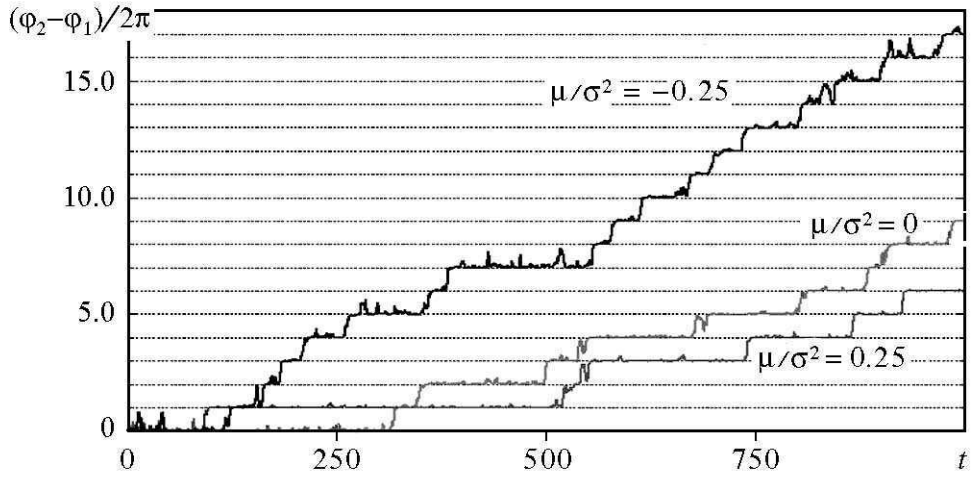


Рис. 5. Результаты численного счета для ансамбля 41 осциллятора с гауссовым распределением собственных частот. На графике представлена динамика разности фаз двух осцилляторов в ансамбле при различной силе связи

Fig. 5. The results of numerical simulation for the ensemble of 41 oscillators with Gaussian distribution of natural frequencies. The dynamics of the phase difference of two oscillators in the ensemble for different levels of the coupling strength

Заключение

В настоящей работе представлена теория синхронизации ансамбля фазовых осцилляторов под действием общего шума и глобальной связи. Взаимодействие глобальной связи и общего шума рассмотрено в рамках подхода Отта–Антонсена, позволяющего получить замкнутую систему стохастических уравнений для параметра порядка. В работе представлены аналитические решения полученных уравнений в тех случаях, когда это возможно. Отдельно рассмотрена ситуация, когда осцилляторы имеют достаточно большую собственную частоту, что позволяет произвести осреднение по быстро вращающейся фазе и получить более простые стохастические уравнения.

Наиболее интересные эффекты появляются в случае, когда общий шум пытается синхронизировать систему, а отталкивающая связь – десинхронизировать. Для идентичных осцилляторов синхронизирующее воздействие шума преобладает над действием умеренной отталкивающей связи, так как полностью синхронное состояние является адсорбирующим, тогда как максимально асинхронное состояние является не адсорбирующим, а лишь слабо притягивающим. Для неидентичных осцилляторов состояние полной синхронизации невозможно – вместо него возникает состояние неидеальной синхронизации, которое перестает быть адсорбирующим, а становится слабо притягивающим, как и состояние максимальной асинхронности.

Для осцилляторов с расстройкой собственных частот наибольший интерес представляет поведение средних частот. Эффекты, связанные с общим шумом и глобальной связью, взаимодействуют нетривиальным образом. В отсутствии шума притягивающая связь собирает частоты вместе, в то время как отталкивающая связь не влияет на них. Шум в отсутствие связи также не оказывает влияния на частоты.

Однако, когда на систему воздействует и шум, и отталкивающая связь, наблюдается расталкивание частот, при этом параметр порядка может оставаться достаточно большим.

Результаты, представленные в разделах 1.1-2, 2.1-2, 3.1-2, получены А.В. Долматовой и Д.С. Голдобиным при финансовой поддержке Российского научного фонда (грант № 14-21-00090). Результаты, представленные в разделах 1.3, 2.3 и 3.3, получены М.Г. Розенблюмом и А.С. Пиковским при финансовой поддержке Российского научного фонда (грант № 17-12-01534).

Приложение

Теории Отта–Антонсена (Ott–Antonsen) и Ватанабе–Строгаца (Watanabe–Strogatz)

Широкий и важный класс систем, ставших парадигматическими для изучения коллективных эффектов в ансамблях фазовых осцилляторов, описывается уравнениями вида

$$\dot{\varphi}_k = \Omega(t) + \mathrm{Im}\ (H(t)\, e^{-i\varphi_k}), \qquad k = 1, ..., N\,, \tag{80}$$

где $\Omega(t)$ и $H(t)$ – произвольные функции времени. В самом деле, в термодинамическом пределе $N \gg 1$, именно к таким системам относится ансамбль Курамото

$$\dot{\varphi}_k = \Omega + \frac{\mu}{N}\sum_{j=1}^{N} \sin(\varphi_j - \varphi_k)\,,$$

для которого можно полагать вид (80) с $H(t) = \mu N^{-1}\sum_{j=1}^{N} e^{i\varphi_j}$, поскольку относительный индивидуальный вклад k-го осциллятора в $H(t)$ исчезающе мал. Для цепочки идентичных джозефсоновских (сверхпроводящих) контактов с шунтированием, выполняющим функцию глобальной связи, могут быть получены безразмерные уравнения [33]

$$\dot{\varphi}_k = I_{\mathrm{inp}}(t) - I_0 \sin\varphi_k + \frac{\mu}{N}\textstyle\sum_{j=1}^{N} \sin\varphi_j\,,$$

где $I_{\mathrm{inp}}(t)$ – ток, подаваемый в систему; I_0 – параметр контактов; φ_k – фаза. Фаза, по своему физическому смыслу, является характеристикой волны сверхпроводящего тока и связана с легко наблюдаемой макроскопической величиной – разностью потенциалов U_k на контакте двух сверхпроводников. В размерном виде $\dot{\varphi}_k = (2e/\hbar)U_k$, e – элементарный заряд, $\hbar$ – постоянная Планка. Такому ансамблю контактов соответствует $\Omega(t) = I_{\mathrm{inp}}(t) - \mu\ \mathrm{Im}\,(N^{-1}\sum_{j=1}^{N} e^{i\varphi_j})$ и $H(t) = I_0$. Для системы связанных активных ротаторов (похожие уравнения применимы и для описания тета-нейронов) [34] уравнения

$$\dot{\varphi}_k = \Omega + \frac{K}{N}\sum_{j=1}^{N} \sin(\varphi_j - \varphi_k) - B\sin\varphi_k\,,$$

©*Д.С. Голдобин, А.В. Долматова, М. Розенблюм, А. Пиковский*

имеют вид (80) с $H(t) = B + KN^{-1}\sum_{j=1}^{N} e^{i\varphi_j}$.

Для уравнения (80) может быть записано мастер-уравнение, определяющее эволюцию плотности вероятности $w(\varphi, t)$,

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \varphi}\Big((\Omega(t) - i\frac{H(t)}{2}e^{-i\varphi} + i\frac{H^*(t)}{2}e^{i\varphi})w\Big) = 0\,. \tag{81}$$

В фурье-пространстве $w(\varphi, t) = (2\pi)^{-1}\big[1 + \sum_{j=1}^{\infty}(a_j e^{ij\varphi} + c.c.)\big]$, и мастер-уравнение принимает вид

$$\dot{a}_j = -ji\Omega(t)\,a_j + j\frac{H^*(t)}{2}a_{j-1} - j\frac{H(t)}{2}a_{j+1}\,, \tag{82}$$

где $j = 1, 2, ...$ и следует полагать $a_0 = 1$. Можно заметить, что последнее уравнение допускает частное решение вида $a_j = a_1^j$. В самом деле, при такой подстановке можно получить для $j = 1$

$$\dot{a}_1 = -i\Omega(t)\,a_1 + \frac{H^*(t)}{2} - \frac{H(t)}{2}a_1^2 \tag{83}$$

и для $j > 1$

$$ja_1^{j-1}\dot{a}_1 = ja_1^{j-1}\left(-i\Omega(t)\,a_1 + \frac{H^*(t)}{2} - \frac{H(t)}{2}a_1^2\right)\,,$$

что идентично уравнению (83). Таким образом, оказывается что динамика системы может происходить на некотором множестве, характеризующемся свойством $a_j = a_1^j$ и получившем название множества Отта–Антонсена (О–А) [31]; динамика системы на этом множестве описывается обыкновенным дифференциальным уравнением для комплексной переменной a_1. Следует заметить связь между a_1 и комплексным параметром порядка $Z = \langle e^{i\varphi}\rangle = \int_0^{2\pi} e^{i\varphi}w(\varphi, t)\,\mathrm{d}\varphi = a_1^*(t)$. В итоге, на множестве О–А динамика системы исчерпывающе описывается ноль-мерным уравнением для параметра порядка Z:

$$\dot{Z} = i\Omega(t)\,Z + \frac{H(t)}{2} - \frac{H^*(t)}{2}Z^2\,. \tag{84}$$

При этом для конкретных задач, как правило, имеет место простая функциональная связь между $\{\Omega(t), H(t)\}$ и Z. В самом деле, применительно к трем упомянутым выше примерам: $H = \mu Z$ для ансамбля Курамото, $\Omega = I_{\mathrm{inp}}(t) - \mu\,\mathrm{Im}\,(\mathrm{Z})$ и $H(t) = I_0$ для цепочки джозефсоновских контактов с шунтированием, $H = B + KZ$ для ансамбля активных ротаторов.

Важен вопрос об устойчивости множества О–А. Строго говоря, для идеально идентичных осцилляторов множество О–А является нейтрально устойчивым, а динамика системы, как было показано Ватанабе, Строгацом и др. [28–30], полностью интегрируемой. Вместе с тем, в реальных системах имеет место неточное совпадение собственных частот осцилляторов, что приводит к появлению слабой устойчивости множества О–А и позволяет получать на основе уравнения (84) результаты, хорошо согласующиеся с результатами счета (см., например, [20]). Для объяснения механизма возникновения устойчивости множества О–А целесообразно коротко, но строго разобрать случай ансамбля идеально идентичных осцилляторов (Ватанабе–Строгац), для которого даже не требуется переход к термодинамическому пределу большого числа осцилляторов.

Для набора фаз φ_k можно определить взаимно однозначное преобразование к набору фаз ψ_k, параметризуемое комплексным числом z,

$$e^{i\varphi_k} = \frac{z + e^{i\psi_k}}{1 + z^* e^{i\psi_k}} \quad \left(\text{и обратное: } e^{i\psi_k} = \frac{e^{i\varphi_k} - z}{1 - z^* e^{i\varphi_k}}\right). \tag{85}$$

Если потребовать для новых фаз выполнение условия $\sum_{k=1}^{N} e^{i\psi_k} = 0$, то преобразование становится единственным и однозначно определяет z. Подстановка преобразования (85) в уравнение (80) позволяет получить уравнения эволюции z и ψ_k, которые при условии $\sum_{k=1}^{N} e^{i\psi_k} = 0$ принимают вид

$$\dot{z} = i\Omega(t)\, z + \frac{H(t)}{2} - \frac{H^*(t)}{2} z^2\,, \tag{86}$$

$$\dot{\psi}_k = \Omega(t) + \operatorname{Im}\left(H(t)\, z^*\right). \tag{87}$$

Можно заметить, что уравнение динамики (86) для переменной z, которая может быть введена в общем случае (не только на множестве О–А), эквивалентно уравнению для параметра порядка Z на множестве О–А (84). (Процедура введения z при этом такова, что из нее не следует в общем случае эквивалентность z и Z.) Согласно уравнению (87), все фазы ψ_k меняются одинаково. Таким образом, динамика системы определяется изменением z и любой одной из фаз $\psi_{k'}$, а разности всех фаз $(\psi_k - \psi_{k'})$ являются константами, интегралами движения. Плотность вероятности $W(\psi_k, t)$ является бегущей волной с замороженным профилем.

Установим, чему соответствует решение О–А

$$w_{\text{OA}}(\varphi, t) = \frac{1}{2\pi}\Big[1 + \sum_{j=1}^{\infty}([a_1(t)]^j e^{ij\varphi} + c.c.)\Big] = \frac{1 - |a_1|^2}{2\pi|1 - a_1 e^{i\varphi}|^2} = \frac{1 - |Z|^2}{2\pi|1 - Z e^{-i\varphi}|^2}$$

в терминах $\{z, \psi_k\}$. Поскольку для этого решения Z подчиняется уравнению (84) и тому же уравнению всегда подчиняется переменная z, естественно предположить их совпадение в этом случае. Из соотношений (85) может быть вычислено

$$\mathrm{d}\psi = \frac{1 - |z|^2}{|1 - z e^{-i\varphi}|^2}\mathrm{d}\varphi\,,$$

откуда $W_{\text{OA}}(\psi) = w_{\text{OA}}(\varphi)\frac{|d\varphi|}{|d\psi|} = (2\pi)^{-1}$. Предположение о тождественности z и Z для решения О–А можно теперь проверить строго: для $W(\psi) = (2\pi)^{-1}$ и z могут быть вычислены параметр порядка Z, который оказывается равен z, и $w(\varphi)$, оказывающееся совпадающим с $w_{\text{OA}}(\varphi|Z = z)$. Таким образом получаем, что решение О–А это частный случай, соответствующий равномерному распределению фаз ψ_k.

Теперь, когда установлено соответствие между решением О–А и описанием системы в терминах $\{z, \psi_k\}$, можно рассмотреть вопрос о том, что при неидеальной идентичности осцилляторов множество О–А из нейтрально устойчивого превращается в «слабо» притягивающее. В самом деле, в ансамбле с расстройкой собственных частот можно выделить подгруппы осцилляторов с одинаковыми частотами. Распределение $W(\psi, t)$ для каждой такой подгруппы является бегущей волной с замороженным профилем. Однако из-за разностей частот эти волны, согласно уравнению (87),

бегут с различной скоростью, что приводит к их постоянному смешению. В термодинамическом пределе большого ансамбля «перемешивание» большого набора случайных профилей в течение достаточно длительного времени приводит к равномерному распределению $W(\psi) = (2\pi)^{-1}$, что соответствует решению О–А. Таким образом, для реальных систем множество О–А оказывается не просто семейством частных решений, а аттрактором, и при описании динамики параметра порядка в системе можно полагаться на уравнение (84).

Библиографический список

1. *Пиковский А., Розенблюм М., Куртс Ю.* Синхронизация. Фундаментальное нелинейное явление. М: Техносфера, 2003. 496 с.
2. *Crawford J.D.* Amplitude expansions for instabilities in populations of globally-coupled oscillators // J. Stat. Phys. 1994. Vol. 74. Pp. 1047–1084.
3. *Strogatz S.H., Abrams D.M., McRobie A., Eckhardt B., Ott E.* Theoretical mechanics: Crowd synchrony on the Millennium Bridge // Nature. 2005. Vol. 438. Pp. 43–44.
4. *Golomb D., Hansel D., Mato G.* Mechanisms of synchrony of neural activity in large networks // Handbook of Biological Physics. Volume 4: Neuroinformatics and Neural Modelling. Ed. by F. Moss and S. Gielen. Amsterdam: Elsevier, 2001. Pp. 887–968.
5. *Пиковский А.С.* Синхронизация и стохастизация ансамбля автогенераторов внешним шумом // Изв. вузов. Радиофизика. 1984. Т. 27. С. 390–395.
6. *Mainen Z.F., Sejnowski T.J.* Reliability of spike timing in neocortical neurons // Science. 1995. Vol. 268. Pp. 1503–1506.
7. *Uchida A., McAllister R., Roy R.* Consistency of nonlinear system response to complex drive signals // Phys. Rev. Lett. 2004. Vol. 93. 244102.
8. *Grenfell B.T., Wilson K., Finkenstädt B.F., Coulson T.N., Murray S., Albon S.D., Pemberton J.M., Clutton-Brock T.H., Crawley M.J.* Noise and determinism in synchronized sheep dynamics // Nature. 1998. Vol. 394. Pp. 674–677.
9. *Ritt J.* Evaluation of entrainment of a nonlinear neural oscillator to white noise // Phys. Rev. E. 2003. Vol. 68. 041915.
10. *Голдобин Д.С., Пиковский А.С.* О синхронизации периодических автоколебаний общим шумом // Изв. вузов. Радиофизика. 1984. Т. 47. С. 1013–1019.
11. *Teramae J.N., Tanaka D.* Robustness of the noise-induced phase synchronization in a general class of limit cycle oscillators // Phys. Rev. Lett. 2004. Vol. 93. 204103.
12. *Goldobin D.S., Pikovsky A.S.* Synchronization of self-sustained oscillators by common white noise // Physica A. 2005. Vol. 351, № 1. Pp. 126–132.
13. *Goldobin D.S., Pikovsky A.* Synchronization and desinchronization of self-sustained oscillators by common noise // Phys. Rev. E. 2005. Vol. 71. 045201(R).
14. *Goldobin D.S., Pikovsky A.* Antireliability of noise-driven neurons // Phys. Rev. E. 2006. Vol. 73. 061906.
15. *Маляев В.С., Вадивасова Т.Е., Анищенко В.С.* Стохастический резонанс, стохастическая синхронизация и индуцированный шумом хаос в осцилляторе

Дуффинга // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2007. Т. 15, № 5. С. 74–83.

16. *Wieczorek S.* Stochastic bifurcation in noise-driven lasers and Hopf oscillators // Phys. Rev. E. 2009. Vol. 79. 036209.
17. *Goldobin D.S., Teramae J.-N., Nakao H., Ermentrout G.-B.* Dynamics of limit-cycle oscillators subject to general noise // Phys. Rev. Lett. 2010. Vol. 105. 154101.
18. *Goldobin D.S.* Uncertainty principle for control of ensembles of oscillators driven by common noise // Eur. Phys. J. ST. 2014. Vol. 223, № 4. Pp. 677–685.
19. *Голдобин Д.С.* Принцип неопределенности для ансамблей осцилляторов с общим шумом // Вестник Пермского университета. Физика. 2014. Т. 27–28, вып. 2–3. С. 33–41.
20. *Braun W., Pikovsky A., Matias M.A., Colet P.* Global dynamics of oscillator populations under common noise // EPL. 2012. Vol. 99. 20006.
21. *Pimenova A.V., Goldobin D.S., Rosenblum M., Pikovsky A.* Interplay of coupling and common noise at the transition to synchrony in oscillator populations // Sci. Rep. 2016. Vol. 6. 38518.
22. *García-Álvarez D., Bahraminasab A., Stefanovska A., McClintock P.V.E.* Competition between noise and coupling in the induction of synchronisation // EPL. 2009. Vol. 88. 30005.
23. *Nagai K.H., Kori H.* Noise-induced synchronization of a large population of globally coupled nonidentical oscillators // Phys. Rev. E. 2010. Vol. 81. 065202.
24. *Wiener N.* Cybernetics: Or Control and Communication in the Animal and the Machine. 2nd Ed. Cambridge (MA): MIT Press, 1965. 212 p.
25. *Martens E.A., Thutupalli S., Fourrière A., Hallatschek O.* Chimera states in mechanical oscillator networks // Proc. Natl. Acad. Sci. 2013. Vol. 110. Pp. 10563–10567.
26. *Temirbayev A.A., Zhanabaev Z.Z., Tarasov S.B., Ponomarenko V.I., Rosenblum M.* Experiments on oscillator ensembles with global nonlinear coupling // Phys. Rev. E. 2012. Vol. 85. 015204(R).
27. *Temirbayev A.A., Nalibayev Y.D., Zhanabaev Z.Z., Ponomarenko V.I., Rosenblum M.* Autonomous and forced dynamics of oscillator ensembles with global nonlinear coupling: An experimental study // Phys. Rev. E. 2013. Vol. 87. 062917.
28. *Watanabe S., Strogatz S.H.* Constant of Motion for Superconducting Josephson Arrays // Physica D. 1994. Vol. 74. Pp. 197–253.
29. *Pikovsky A., Rosenblum M.* Partially integrable dynamics of hierarchical populations of coupled oscillators // Phys. Rev. Lett. 2008. Vol. 101. 2264103.
30. *Marvel S.A., Mirollo R.E., Strogatz S.H.* Identical phase oscillators with global sinusoidal coupling evolve by Möbius group action // Chaos. 2009. Vol. 19. 043104.
31. *Ott E., Antonsen T.M.* Low dimensional behavior of large systems of globally coupled oscillators // Chaos. 2008. Vol. 18. 037113.
32. *Флетчер К.* Численные методы на основе метода Галёркина. М: Мир, 1988. 352 с.

©*Д.С. Голдобин, А.В. Долматова, М. Розенблюм, А. Пиковский*

33. *Marvel S.A., Strogatz S.H.* Invariant submanifold for series arrays of Josephson junctions // Chaos. 2009. Vol. 19. 013132.
34. *Shinomoto Sh., Kuramoto Y.* Phase transitions in active rotator systems // Prog. Theor. Phys. 1986. Vol. 75, № 5. Pp. 1105–1110.

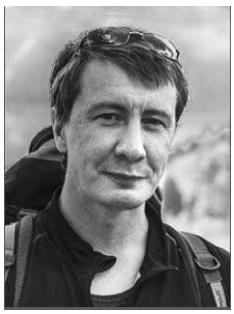
References

1. Pikovsky A., Rosenblum M., Kurths J. Synchronization. A Universal Concept in Nonlinear Sciences. Cambridge: Cambridge University Press, 2003. 432 p.
2. Crawford J.D. Amplitude expansions for instabilities in populations of globally-coupled oscillators. *J. Stat. Phys.* 1994. Vol. 74. Pp. 1047–1984.
3. Strogatz S.H., Abrams D.M., McRobie A., Eckhardt B., Ott E. Theoretical mechanics: Crowd synchrony on the Millennium Bridge. *Nature.* 2005. Vol. 438. Pp. 43–44.
4. Golomb D., Hansel D., Mato G. Mechanisms of synchrony of neural activity in large networks. Handbook of Biological Physics, Volume 4: Neuroinformatics and Neural Modelling. Ed. by F. Moss and S. Gielen. Amsterdam: Elsevier, 2001. Pp. 887–968.
5. Pikovsky A.S. Synchronization and stochastization of the ensemble of autogenerators by external noise. *Radiophys. Quantum Electron.* 1984. Vol. 27. Pp. 576–581.
6. Mainen Z.F., Sejnowski T.J. Reliability of spike timing in neocortical neurons. *Science.* 1995. Vol. 268. Pp. 1503–1506.
7. *Uchida A., McAllister R., Roy R.* Consistency of nonlinear system response to complex drive signals. *Phys. Rev. Lett.* 2004. Vol. 93. 244102.
8. Grenfell B.T., Wilson K., Finkenstädt B.F., Coulson T.N., Murray S., Albon S.D., Pemberton J.M., Clutton-Brock T.H., Crawley M.J. Noise and determinism in synchronized sheep dynamics. *Nature.* 1998. Vol. 394. Pp. 674–677.
9. Ritt J. Evaluation of entrainment of a nonlinear neural oscillator to white noise. *Phys. Rev. E.* 2003. Vol. 68. 041915.
10. Goldobin D.S., Pikovsky A.S. Synchronization of periodic self-oscillations by common noise. *Radiophys. Quantum Electron.* 2004. Vol. 47, No. 10–11. Pp. 910–915.
11. Teramae J.N., Tanaka D. Robustness of the noise-induced phase synchronization in a general class of limit cycle oscillators. *Phys. Rev. Lett.* 2004. Vol. 93. 204103.
12. Goldobin D.S., Pikovsky A.S. Synchronization of self-sustained oscillators by common white noise. *Physica A.* 2005. Vol. 351, No. 1. Pp. 126–132.
13. Goldobin D.S., Pikovsky A. Synchronization and desinchronization of self-sustained oscillators by common noise. *Phys. Rev. E.* 2005. Vol. 71. 045201(R).
14. Goldobin D.S., Pikovsky A. Antireliability of noise-driven neurons. *Phys. Rev. E.* 2006. Vol. 73. 061906.
15. Malyaev V.S., Vadivasova T.E., Anishchenko V.S. Stochastic resonance, stohastic synchronization and noise-induced chaos in the Duffing oscillator. *Izvestija VUZ. Applied Nonlinear Dynamics.* 2007. Vol. 15, No. 5. Pp. 74–83 (in Russian).
16. Wieczorek S. Stochastic bifurcation in noise-driven lasers and Hopf oscillators. *Phys. Rev. E.* 2009. Vol. 79. 036209.

©*Д.С. Голдобин, А.В. Долматова, М. Розенблюм, А. Пиковский*

17. Goldobin D.S., Teramae J.-N., Nakao H., Ermentrout G.-B. Dynamics of limit-cycle oscillators subject to general noise. *Phys. Rev. Lett.* 2010. Vol. 105. 154101.
18. Goldobin D.S. Uncertainty principle for control of ensembles of oscillators driven by common noise. *Eur. Phys. J. ST.* 2014. Vol. 223, No. 4. Pp. 677–685.
19. Goldobin D.S. An uncertainty principle for ensembles of oscillators driven by common noise. *Bulletin of Perm University. Series: Physics.* 2014. Vol. 27–28, No. 2–3. Pp. 33–41 (in Russian).
20. Braun W., Pikovsky A., Matias M.A., Colet P. Global dynamics of oscillator populations under common noise. *EPL.* 2012. Vol. 99. 20006.
21. Pimenova A.V., Goldobin D.S., Rosenblum M., Pikovsky A. Interplay of coupling and common noise at the transition to synchrony in oscillator populations. *Sci. Rep.* 2016. Vol. 6. 38518.
22. García-Álvarez D., Bahraminasab A., Stefanovska A., McClintock P.V.E. Competition between noise and coupling in the induction of synchronisation. *EPL.* 2009. Vol. 88. 30005.
23. Nagai K.H., Kori H. Noise-induced synchronization of a large population of globally coupled nonidentical oscillators. *Phys. Rev. E.* 2010. Vol. 81. 065202.
24. Wiener N. Cybernetics: Or Control and Communication in the Animal and the Machine. 2nd Ed. Cambridge (MA): MIT Press, 1965. 212 p.
25. Martens E.A., Thutupalli S., Fourrière A., Hallatschek O. Chimera states in mechanical oscillator networks. *Proc. Natl. Acad. Sci.* 2013. Vol. 110. Pp. 10563–10567.
26. Temirbayev A.A., Zhanabaev Z.Z., Tarasov S.B., Ponomarenko V.I., Rosenblum M. Experiments on oscillator ensembles with global nonlinear coupling. *Phys. Rev. E.* 2012. Vol. 85. 015204(R).
27. Temirbayev A.A., Nalibayev Y.D., Zhanabaev Z.Z., Ponomarenko V.I., Rosenblum M. Autonomous and forced dynamics of oscillator ensembles with global nonlinear coupling: An experimental study. *Phys. Rev. E.* 2013. Vol. 87. 062917.
28. Watanabe S., Strogatz S.H. Constant of motion for superconducting Josephson arrays. *Physica D.* 1994. Vol. 74. Pp. 197–253.
29. Pikovsky A., Rosenblum M. Partially integrable dynamics of hierarchical populations of coupled oscillators. *Phys. Rev. Lett.* 2008. Vol. 101. 2264103.
30. Marvel S.A., Mirollo R.E., Strogatz S.H. Identical phase oscillators with global sinusoidal coupling evolve by Möbius group action. *Chaos.* 2009. Vol. 19. 043104.
31. Ott E., Antonsen T.M. Low dimensional behavior of large systems of globally coupled oscillators. *Chaos.* 2008. Vol. 18. 037113.
32. Fletcher C.A.J. Computational Galerkin methods. N.Y. Berlin/Heidelberg: Springer Verlag, 1984. 309 p.
33. Marvel S.A., Strogatz S.H. Invariant submanifold for series arrays of Josephson junctions. *Chaos.* 2009. Vol. 19. 013132.
34. Shinomoto Sh., Kuramoto Y. Phase transitions in active rotator systems. *Prog. Theor. Phys.* 1986. Vol. 75, No. 5. Pp. 1105–1110.

©*Д.С. Голдобин, А.В. Долматова, М. Розенблюм, А. Пиковский*



Голдобин Денис Сергеевич – родился в Перми (1981), окончил физический факультет Пермского государственного университета (2004). Защитил диссертации на соискание ученой степеней кандидата физико-математических наук по специальности «Механика жидкости, газа и плазмы» (2007, ПермГУ) и Dr. rer. nat. по теоретической физике (Университет Потсдама, Германия). Работал в университетах Потсдама, Лестера, Перми и в Институте механики сплошных сред УрО РАН (Пермь). Область научных интересов – вибрационные эффекты в гидродинамике, тепловая конвекция, статистическая физика, нелинейная динамика, моделирование геофизических процессов. Автор более 50 научных статей по указанным выше направлениям.

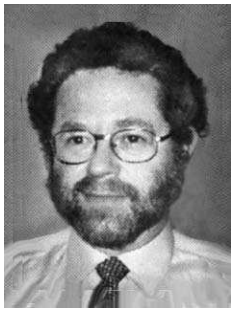
Россия, 614013 Пермь, ул. Акад. Королева, 1
Институт механики сплошных сред УрО РАН
Россия, 614990 Пермь, ул. Букирева, 15
Пермский государственный национальный исследовательский университет
E-mail: Denis.Goldobin@gmail.com

Долматова (Пименова) Анастасия Владимировна – родилась в Перми (1990), окончила физический факультет Пермского государственного университета (2012). Защитила диссертацию на соискание ученой степеней кандидата физико-математических наук по специальности «Механика жидкости, газа и плазмы» (ИМСС УрО РАН, Пермь, 2016). Работает в Институте механики сплошных сред УрО РАН (Пермь). Область научных интересов – механика жидкости и газа, статистическая физика, моделирование геофизических процессов. Автор 17 научных статей по указанным выше направлениям.

Россия, 614013 Пермь, ул. Акад. Королева, 1
Институт механики сплошных сред УрО РАН
Группа динамики геологических систем
E-mail: Anastasiya.Pimenova@gmail.com

Розенблюм Михаил Григорьевич – родился в Москве (1958), окончил Московский государственный педагогический институт (1980). После окончания работал в Институте машиноведения АН, затем в университетах Бостона (BU) и Потсдама. Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук (СГУ, 1990). Область научных интересов – нелинейная динамика, синхронизация, анализ данных.

Germany, 14476 Potsdam-Golm, Karl-Liebknecht-Str., 24/25
University of Potsdam
Department of Physics and Astronomy, Potsdam University
Россия, 603950 Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23
Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского
E-mail: mros@uni-potsdam.de



Пиковский Аркадий Самуилович – родился в Горьком (1956), окончил Горьковский государственный университет (1977). После окончания работал в Институте прикладной физики АН, затем в университетах Вупперталя и Потсдама. Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук (ГГУ, 1982). Область научных интересов – нелинейная динамика, статистическая физика и теория хаоса.

Germany, 14476 Potsdam-Golm, Karl-Liebknecht-Str., 24/25
University of Potsdam
Department of Physics and Astronomy, Potsdam University
Россия, 603950 Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23
Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского
E-mail: pikovsky@uni-potsdam.de

©*Д.С. Голдобин, А.В. Долматова, М. Розенблюм, А. Пиковский*

УДК 621.91:531.3

БИФУРКАЦИИ ПРИТЯГИВАЮЩИХ МНОЖЕСТВ ДЕФОРМАЦИОННЫХ СМЕЩЕНИЙ РЕЖУЩЕГО ИНСТРУМЕНТА В ЗАВИСИМОСТИ ОТ БИЕНИЙ ШПИНДЕЛЬНОЙ ГРУППЫ

В. Л. Заковоротный, В. Е. Гвинджилия

Донской государственный технический университет
344000, г. Ростов-на-Дону, пл. Гагарина 1
E-mail: vzakovorotny@dstu.edu.ru, sinedden@yandex.ru
Поступила в редакцию 11.08.2017, после доработки 28.10.2017

Предмет исследования. В статье рассматриваются бифуркации притягивающих множеств деформационных смещений инструмента в динамической системе обработки резанием на токарных станках в зависимости от периодических траекторий биений шпиндельной группы. Динамическая система представлена двумя взаимодействующими механическими подсистемами через динамическую связь, формируемую процессом резания. В свою очередь, связь представляется моделью сил в координатах состояния, траекториях исполнительных элементов и траекториях биений шпиндельной группы. Модель этой связи является нелинейной. Поэтому свойства системы (устойчивость траекторий и формируемые притягивающие множества деформационных смещений) зависят от параметров биений. В такой системе не только создаются условия для параметрического самовозбуждения, но и формируются зависящие от параметров биений различные притягивающие множества деформационных смещений (предельные циклы, инвариантные торы, хаотические аттракторы).

Обоснование обращения к исследованию данного вопроса. Возмущения со стороны шпиндельной группы, зависящие от точности станка и его состояния, при обработке детали вызывают формирование различных притягивающих множеств деформационных смещений инструмента, которые изменяют траектории формообразующих движений инструмента относительно детали, влияющие на геометрическую топологию формируемой поверхности. Исследование направлено на раскрытие влияния динамики процесса резания в единстве параметров биений и формируемых притягивающих множеств на геометрическую топологию обрабатываемой поверхности детали, определяя ее соответствие заданным технологическим требованиям.

Метод исследования. Свойства притягивающих множеств деформационных смещений и законы их формирования изучаются на основе цифрового моделирования. Для этого предложена математическая модель возмущенной системы.

Новизна. В отличие от ранее выполненных исследований в статье анализируется изменение притягивающих множеств в зависимости от параметров биений. Математическая модель системы представлена возмущенной, а силы представляются в виде суммы сил, действующих на переднюю поверхность инструмента, и сил, формируемых в области контакта его задних граней.

© *В.Л. Заковоротный, В.Е. Гвинджилия*

Полученные результаты. Показаны примеры влияния биений шпиндельной группы на притягивающие множества деформационных смещений системы, также представлены бифуркации системы в зависимости от параметров возмущения.

Выводы. По мере изменения параметров возмущения происходит сложное преобразование притягивающих множеств, поэтому при управлении процессом резания, а также при создании программ ЧПУ необходимо учитывать влияние возмущения на предельно достижимое качество изготовления деталей.

Ключевые слова: Бифуркация, притягивающие множества, динамическая режущая система, биения шпиндельной группы.

DOI: 10.18500/0869-6632-2017-25-6-38-56

Образец цитирования: Заковоротный В.Л., Гвинджилия В.Е. Бифуркации притягивающих множеств деформационных смещений режущего инструмента в зависимости от биений шпиндельной группы // Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2017. Т. 25, № 6. С. 38–56. DOI: 10.18500/0869-6632-2017-25-6-38-56

BIFURCATIONS OF ATTRACTING SETS OF DEFORMATION DISPLACEMENT OF CUTTING TOOL DEPENDING ON THE SPINDLE GROUP BEATS

V. L. Zakovorotny, V. E. Gvinjiliya

Don State Technical University
1 Gagarin sq., 344000 Rostov-on-Don, Russia
E-mail: vzakovorotny@dstu.edu.ru, sinedden@yandex.ru

Received 11.08.2017, revised 28.10.2017

Subject of the study. Bifurcations of the attracting sets of the deformation displacement of the tool in the dynamic system of the turning machine depending on the beats periodic trajectory of the spindle group are considered in the article. The dynamic system is represented by the two interact mechanical subsystems through the dynamic link formed by the cutting process. Through the link is represented by the forces model in the coordinate condition, the trajectories of the executive elements and the trajectories of the spindle beats group. The model of this link is nonlinear. Therefore the system characteristics (stability of the trajectories and the forming attracting sets of the deformation displacement) depend on the parameters of the beats. In this system not only the conditions for the parametrical self-excitation are created but the different attracting sets of the deformation displacement (limit cycles, invariant tori, chaotic attractors) depending on the parameters of the beats are formed.

Substantiation of address to studying of this question. Disturbances by the spindle group depending on the accuracy and condition of the machine cause formation of the various attracting sets of the deformation displacements of the tool during work-process of the detail. These deformation displacements change the shape-generating trajectories of the tool movement relative to the part which influence the geometric topology of the forming surface. The research intends to discover the influence of the dynamic of the cutting process in the unity of the parameters of the beats and the attracting sets with the geometric topology of the work surface of the detail determined its consistency with the specified technological requirements.

Method of research. Characteristics of the attracting sets of the deformation displacement and the laws of its formation are studied on the basis of the digital simulation. Mathematical model of the perturbed system was proposed for this purpose.

Novelty. In contrast to previously done researches the transformation of the attracting sets of the deformation displacement depending on the parameters of the beats are analyzed in the article. Mathematical model of the system is performed as perturbed, the forces are the sum of the forces acted on the front surface of the tool and forces formed in the contact area of its back side plane.

© *В.Л. Заковоротный, В.Е. Гвинджилия*

Results. For instance, the influence of the spindle group beats with the attracting sets of the deformation displacement of the system are presented. Bifurcations of the system depending on the parameters of the disturbance are also represented.

Conclusions. The complicated transformation of the attracting sets takes place while disturbance parameters changes. Therefore it's necessary to consider the effect of perturbations on attainable quality of the detail during controlling of the cutting process and in a process of CNC program creation.

Keywords: Bifurcation, attracting sets, dynamic cutting system, beats of the spindle.

DOI: 10.18500/0869-6632-2017-25-6-38-56

References: Zakovorotny V.L., Gvinjiliya V.E. Bifurcations of attracting sets of deformation displacement of cutting tool depending on the spindle group beats. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics.* 2017. Vol. 25. Issue 6. P. 38–56. DOI: 10.18500/0869-6632-2017-25-6-38-56

Введение

При становлении знаний о динамике процесса резания главное внимание уделялось условиям и механизмам возбуждения автоколебаний [1–5] и анализу устойчивости [6–10]. Под устойчивостью понимается устойчивость заданной и неизменной точки равновесия, рассматриваемой в подвижной системе координат, движение которой определяется управляемыми траекториями исполнительных элементов. При анализе устойчивости используют линейную динамическую модель в вариациях относительно точки равновесия [1–5]. Динамическая связь также учитывает нелинейную зависимость сил от координат состояния [6–34], периодические изменения параметров [14, 17–19], закономерности формирования новых поверхностей [27]. При рассмотрении устойчивости с периодически изменяющимися параметрами, а также при моделировании формирования новых поверхностей резания используется теория Флоке [14, 21, 30]. В последние годы значительное внимание уделено условиям формирования в динамической системе различных притягивающих множеств упругих деформационных смещений [11, 28, 29, 31–34]. Притягивающие множества рассматриваются в системе, точка равновесия которой в подвижной системе координат является заданной и неизменной. На реальном станке равновесие является возмущенным периодическими пространственными биениями шпиндельной группы. Причем траектории биений входят непосредственно в математическое описание сил резания, определяющее формируемую динамическую связь. Поэтому биения изменяют свойства системы. В отличие от ранее выполненных исследований в статье анализируется изменение притягивающих множеств в зависимости от параметров биений.

Математическое моделирование

Ранее показано, что наиболее важные свойства динамической системы резания можно раскрыть, если рассматривать деформационные смещения $X = \{X_1, X_2, X_3\}^T$ только вершины режущего инструмента в пространстве относительно несущей системы станка (рис. 1). Уравнение, раскрывающее связь X и сил резания, при продольном точении определяется системой [1, 17–19]

$$m\frac{d^2X}{dt^2} + h\frac{dX}{dt} + cX = F_\Sigma, \tag{1}$$

© *В.Л. Заковоротный, В.Е. Гвинджилия*

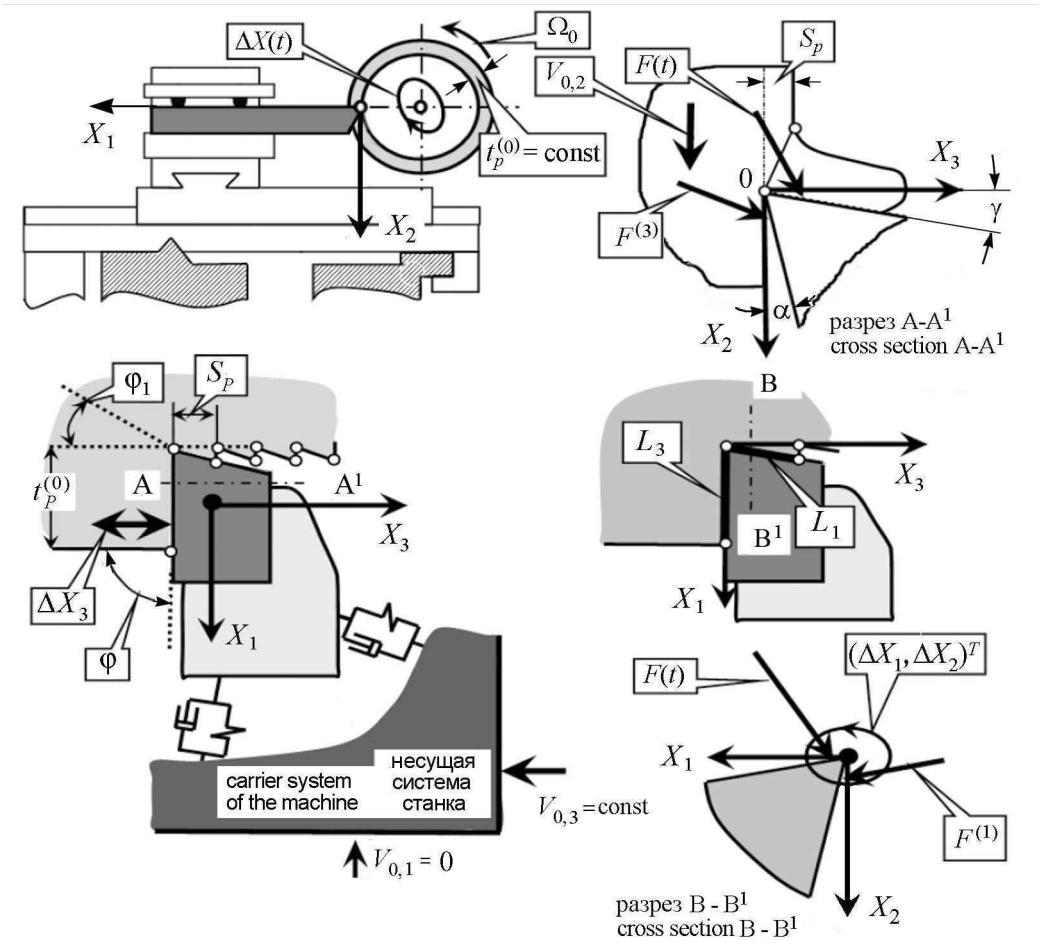


Рис. 1. Ориентация осей деформационных смещений и сил, действующих на режущий инструмент, и возмущений, определяемых биениями шпиндельной группы

Fig. 1. Orientation of the deformation displacement axis and forces acting on cutting tool and the perturbations which are determined by the beats of the spindle group

где $m = [m_{s,k}]$, $s, k = 1, 2, 3$, $m_{s,k} = m$ при $s = k$, $m_{s,k} = 0$ при $s \neq k$ (в kg·s^2/mm); $h = [h_{s,k}]$, $s, k = 1, 2, 3$, (в kg·s/mm); $c = [c_{s,k}]$, $s, k = 1, 2, 3$, (в kg/mm) – симметричные и положительно определенные матрицы инерционных, скоростных и упругих коэффициентов; $F_\Sigma = F + F^{(i)}$ – силы резания, представленные в координатах состояния и внешних воздействиях (биениях шпиндельной группы).

В отличие от ранее выполненных исследований силы представляются в виде суммы сил, действующих на переднюю поверхность инструмента $F = \{F_1, F_2, F_3\}^T$, и сил, формируемых в области контакта его задних граней $F^{(i)} = \{F^{(1)}, F^{(2)}, F^{(3)}\}^T$. Раньше влиянием сил $F^{(i)}$ пренебрегали, так как они зависят от сближения задних граней с обработанной частью детали и без учета биений считались малыми. В рамках настоящего исследования ограничимся случаем, когда дополнительные силы определяются следующим образом: $F^{(1)} = \{F_1^{(1)}, 0, 0\}^T$, $F^{(2)} = \{0, k_T(F_1^{(1)} + F_3^{(3)}), 0\}^T$ и $F^{(3)} = \{0, 0, F_3^{(3)}\}^T$. Здесь k_T – коэффициент трения в областях контакта задних граней инструмента. Это определяется принятой геометрией инструмента (углы $\varphi = 0$ и $\varphi_1 \Rightarrow 0$). Кроме этого силы $F^{(i)}$ зависят не только от скоростей

сближения поверхностей, но и от длины контакта граней инструмента с поверхностью заготовки (рис. 1). Тогда

$$\begin{cases} F_1^{(1)} = \rho_1 \Big\{ \int\limits_{t-T}^{t} [V_{0,3} - dX_3/dt]dt + \Delta X_3(t) - X_3 \Big\} \exp\left\{\alpha_1[(\Delta V_1(t) - dX_1/dt]\right\}, \\ F_3^{(3)} = \rho_3 \left[t_p^{(0)} + \Delta X_1(t) - X_1(t)\right] \exp\left\{\alpha_3 \left[V_{0,3} - dX_3/dt + \Delta V_3(t)\right]\right\}, \end{cases} \tag{2}$$

где ρ_1, ρ_3 – силы, приведенные к длине контакта (в kg/mm); α_1, α_3 – коэффициенты крутизны нарастания сил по мере сближения поверхностей; $\Delta X_i(t)$, $\Delta V_i(t)$ ($i = 1, 2, 3$) – заданные периодические функции, определяемые биениями $d\Delta X_i(t)/dt = \Delta V_i(t)$; $t_p^{(0)} = \mathrm{const}$ – величина припуска без упругих деформаций; $V_{0,3} = \mathrm{const}$ – скорость подачи суппорта.

При формировании сил F учтем их запаздывание по отношению к деформациям [1] и изменение их ориентации в переходных процессах. Тогда справедливо

$$\begin{cases} T_1 dF_1/dt + F_1 = \rho_0\chi_1\{1 + \mu\exp[-\alpha(V_{0,2} + \Delta V_2(t) - dX_2/dt)]\}\times \\ \qquad \times [t_p^{(0)} + \Delta X_1(t) - X_1(t)] \int\limits_{t-T}^{t} \{V_{0,3} - dX_3/dt + \Delta V_3(t)\}dt, \\ T_2 dF_2/dt + F_2 = \rho_0\chi_2\{1 + \mu\exp[-\alpha(V_{0,2} + \Delta V_2(t) - dX_2/dt)]\}\times \\ \qquad \times [t_p^{(0)} + \Delta X_1(t) - X_1(t)] \int\limits_{t-T}^{t} \{V_{0,3} + \Delta V_3(t) - dX_3/dt\}dt, \\ T_3 dF_3/dt + F_3 = \rho_0\chi_3\{1 + \mu\exp[-\alpha(V_{0,2} + \Delta V_2(t) - dX_2/dt)]\}\times \\ \qquad \times [t_p^{(0)} + \Delta X_1(t) - X_1(t)] \int\limits_{t-T}^{t} \{V_{0,3} + \Delta V_3(t) - dX_3/dt\}dt \end{cases} \tag{3}$$

– представление сил F с учетом запаздывания, определяемого постоянными времени T_i, $i = 1, 2, 3$; ρ_0 – давление стружки на переднюю поверхность в области малых скоростей; μ – коэффициент, определяющий соотношение сил при малых и больших скоростях; α – коэффициент уменьшения сил по мере увеличения скорости резания; $V_{0,2}$ – скорость резания; $T = 1/\Omega_0$ – время оборота детали.

Вопросам параметризации модели уделено достаточное внимание [1, 11–13]. Принципиальное отличие систем (1)–(3) заключается в том, что заданные функции $\Delta X_i(t)$, $\Delta V_i(t)$ входят непосредственно в математическое описание динамической связи, формируемой резанием. Поэтому свойства системы, в том числе формируемые притягивающие множества, зависят от параметров биений. Изучение (1)–(3) выполнено в два этапа. На первом этапе рассматривалась проблема устойчивости. На втором – бифуркации притягивающих множеств деформационных смещений, возмущенных биениями.

Устойчивость стационарных траекторий. Бифуркации притягивающих множеств

Сложность анализа устойчивости решений системы (1)–(3) и анализа их стационарных состояний определяется тем, что сами решения можно определить только численными методами. В зависимости от частоты биений можно выделить три диа-

© В.Л. Заковоротный, В.Е. Гвинджилия

пазона. Первый, в котором система при фиксированном времени может рассматриваться замороженной, находится в диапазоне $\Omega \in (0; 0.1\Omega_0)$. В рассмотренных ниже примерах $\Omega_0 = 50$. Этот частотный диапазон существенно ниже собственных частот колебаний инструмента. Однако на динамику системы оказывает влияние оператор формирования подачи в уравнениях (2) и (3), который является оператором скользящего среднего, и он вызывает перераспределение сил и деформационных смещений в области, зависящей от частоты вращения шпинделя. Второй, в котором наблюдаются условия параметрического самовозбуждения и сложная динамика формирования различных притягивающих множеств, находится в диапазоне $\Omega \in (5; 500)$. Третий диапазон $\Omega \in (500; \infty)$ лежит за собственными частотами подсистемы инструмента. Здесь биения изменяют усредненные по периодам высокочастотных колебаний параметры связи и, следовательно, динамику.

Вначале рассмотрим первый диапазон и проанализируем устойчивость траекторий. Пусть задана «медленно» изменяющаяся точка равновесия $X_i^* = \text{const}$, $i = 1, 2, 3$. Будем считать ее замороженной. В этом случае для фиксированного $t = t_k$ справедливо: $\Delta V_i(t_k) = \text{const}$, $\Delta X_i(t_k) = \text{const}$. Им соответствуют $X^*(t_k) = \{X_1^*(t_k), X_2^*(t_k), X_3^*(t_k)\}^T = \text{const}$ – это точка равновесия. Она характеризуется отсутствием изменений в деформационных смещениях и вычисляется для фиксированного $t = t_k$ при $d^2X/dt^2 = dX/dt = 0$, а также $dF/dt = 0$. Тогда

$$A(t_k) \cdot X^*(t_k) = \Phi(t_k), \tag{4}$$

где $X^*(t_k) = \{X_1^*(t_k), X_2^*(t_k), X_3^*(t_k)\}^T$; $\Phi = \{F_1^*, F_2^*, F_3^*\}^T$;

$$F_1^* = \rho_1[(S_p^{(0)} - \Delta X_3(t_k)] \exp[\alpha_1 \Delta V_1(t_k)] + \\ + \rho_0\chi_1\{1 + \mu \exp[-\alpha(V_{0,2} + \Delta V_2(t_k)]\}[t_p^{(0)} + \Delta X_1(t_k)]S_{p,\Sigma}^{(0)};$$

$$F_2^* = k_T\{[\rho_1(S_p^{(0)} - \Delta X_3(t_k)] \exp[\alpha_1 \Delta V_1(t_k)] + \\ + [\rho_3(t_p^{(0)} + \Delta X_1(t_k)] \exp[\alpha_3(V_{0,3} + \Delta V_3(t_k))]\} + \\ + \rho_0\chi_2\{1 + \mu \exp[-\alpha(V_{0,2} + \Delta V_2(t_k)]\}[t_p^{(0)} + \Delta X_1(t_k)]S_{p,\Sigma}^{(0)};$$

$$F_3^* = [\rho_3(t_p^{(0)} + \Delta X_1(t_k)] \exp \alpha_3[V_{0,3} + \Delta V_3(t_k)] + \\ + \rho_0\chi_3\{1 + \mu \exp[-\alpha(V_{0,2} + \Delta V_2(t_k)]\}[t_p^{(0)} + \Delta X_1(t_k)]S_{p,\Sigma}^{(0)};$$

$$A = \begin{bmatrix} c_{1,1} + \rho_0\chi_1\{1 + \mu \exp[-\alpha(V_{0,2} + \Delta V_2(t_k))]\}S_{p,\Sigma} & c_{2,1} & c_{3,1} + \rho_1 \exp[\alpha_1(\Delta V_1(t_k))] \\ c_{1,2} + k_T\rho_3 \exp[\alpha_3(V_{0,3} + \Delta V_3(t_k))] + \\ \quad + \rho_0\chi_2\{1 + \mu \exp[-\alpha(V_{0,2} + \Delta V_2(t_k))]\}S_{p,\Sigma}^{(0)} & c_{2,2} & c_{3,1} + k_T\rho_1 \exp[\alpha_1(\Delta V_1(t_k))] \\ c_{1,3} + \rho_3 \exp[\alpha_3(V_{0,3} + \Delta V_3(t_k))] + \\ \quad + \rho_0\chi_3\{1 + \mu \exp[-\alpha(V_{0,2} + \Delta V_2(t_k)]\}S_{p,\Sigma}^{(0)} & c_{2,3} & c_{3,3} \end{bmatrix};$$

$S_{p,\Sigma} = S_p^{(0)} + \Delta S_p$; ΔS_p – дополнительное изменение текущей подачи за счет параметров биений шпиндельной группы.

В том случае, если при всех $t_k \in T^{(Б)}$ система является асимптотически устойчивой (здесь $T^{(Б)}$ – период биений), то вычисленная траектория является аттрактором, то есть притягивающим множеством. Для анализа ее устойчивости необходимо [35] рассмотреть линеаризованное уравнение в вариациях относительно X^*. После замены $X_i(t) = x_i(t) + X_i^*$, $i = 1, 2, 3$, и $F_i(t) = f_i(t) + F_i^*$, $i = 1, 2, 3$, вычислим уравнение в вариациях и линеаризуем его в окрестности X^*. Тогда имеем

$$M\frac{d^2z}{dt^2} + H\frac{dz}{dt} + Cz = 0, \tag{5}$$

где $z(t) = \{x_1(t), x_2(t), x_3(t), f_1(t), f_2(t), f_3(t)\}^T$;

$$M = \begin{bmatrix} m & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix};$$

$$C = \begin{bmatrix} c_{1,1} & c_{2,1} & \Leftrightarrow & \Leftrightarrow & c_{3,1} + \rho_1 \exp(\alpha_1 \Delta V_1) & -1 & 0 & 0 \\ c_{1,2} + k_0\rho_3 \exp(\alpha_3(V_{0,3} + \Delta V_3)) & c_{2,2} & \Leftrightarrow & \Leftrightarrow & ec_{3,2} + k_0\rho_1 \exp(\alpha_1 \Delta V_1) & 0 & -1 & 0 \\ c_{1,3} + \rho_3 \exp(\alpha_3(V_{0,3} + \Delta V_3)) & c_{2,3} & \Leftrightarrow & \Leftrightarrow & c_{3,3} & 0 & 0 & -1 \\ \chi_1\rho_0 S_{p,\Sigma}[1 + \mu \exp(-\alpha(V_{0,2} + \Delta V_2))] & 0 & \Leftrightarrow & \Leftrightarrow & \chi_1\rho_0(t_{p,\Sigma} - X_1^*)[1 + \mu \exp(-\alpha(V_{0,2} + \Delta V_2))] & 1 & 0 & 0 \\ \chi_2\rho_0 S_{p,\Sigma}[1 + \mu \exp(-\alpha(V_{0,2} + \Delta V_2))] & 0 & \Leftrightarrow & \Leftrightarrow & \chi_2\rho_0(t_{p,\Sigma} - X_1^*)[1! + \mu \exp(-\alpha(V_{0,2} + \Delta V_2))] & 0 & 1 & 0 \\ \chi_3\rho_0 S_{p,\Sigma}[1 + \mu \exp(-\alpha(V_{0,2} + \Delta V_2))] & 0 & \Leftrightarrow & \Leftrightarrow & \chi_3\rho_0(t_{p,\Sigma} - X_1^*)[1 + \mu \exp(-\alpha(V_{0,2} + \Delta V_2))] & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix};$$

;

© В.Л. Заковоротный, В.Е. Гвинджилия

$$
H=\left[\begin{array}{ccccccccc}
h_{1,1}+\rho_1\alpha_1 S_{p,\Sigma}\exp(\alpha_1\Delta V_1) & & h_{2,1} & \Leftrightarrow & \Leftrightarrow & h_{3,1} & -1 & 0 & 0 \\
h_{1,2}+k_0\rho_1\alpha_1 S_{p,\Sigma}\exp(\alpha_1\Delta V_1) & & h_{2,2} & \Leftrightarrow & \Leftrightarrow & h_{3,2}+\rho_3\alpha_3(t_{p,\Sigma}-X_1^*)\exp(\alpha_3\Delta V_3) & 0 & -1 & 0 \\
h_{1,3} & & h_{2,3} & \Leftrightarrow & \Leftrightarrow & h_{3,3}+\rho_3\alpha_3(t_{p,\Sigma}-X_1^*)\exp(\alpha_3\Delta V_3) & 0 & 0 & -1 \\
0 & & -\chi_1\rho_0\alpha S_{p,\Sigma}(t_{p,\Sigma}-X_1^*)[1+\mu\exp(-\alpha(V_{0,2}+\Delta V_2))] & \Leftrightarrow & \Leftrightarrow & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & & -\chi_2\rho_0\alpha S_{p,\Sigma}(t_{p,\Sigma}-X_1^*)[1+\mu\exp(-\alpha(V_{0,2}+\Delta V_2))] & \Leftrightarrow & \Leftrightarrow & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & & -\chi_3\rho_0\alpha S_{p,\Sigma}(t_{p,\Sigma}-X_1^*)[1+\mu\exp(-\alpha(V_{0,2}+\Delta V_2))] & \Leftrightarrow & \Leftrightarrow & 0 & 0 & 0 & 1
\end{array}\right].
$$

Необходимо отметить, что в (5) большинство коэффициентов зависят от параметров биений, и они являются функциями медленных смещений равновесия X^*. Им соответствуют замкнутые траектории деформационных смещений и траекторий корней характеристического полинома. Они могут на определенных временных промежутках переходить в правую комплексную полуплоскость. Тогда равновесие становится неустойчивым. Так как система является нелинейной, то на этих временных отрезках в окрестности траектории могут формироваться различные притягивающие множества. Причем, в пределах периода биений возможна динамическая перестройка свойств системы.

Проанализируем изменение ее свойств на примере. Параметры приведены в табл. 1, а модели сил в координатах состояния – в табл. 2. Для удобства дальнейшего анализа примем $T_1 = T_3 = 0.5T_2 = T_p$.

Если возмущения отсутствуют, то система имеет единственную точку равновесия и постоянные параметры. Тогда ее свойства можно рассматривать на основе хорошо разработанных методов анализа устойчивости систем с постоянными коэффициентами. Потеря устойчивости определяется следующими механизмами. Во-первых, возможно параметрическое самовозбуждение. Во-вторых, потерю устойчивости могут вызвать запаздывания сил по отношению к вариациям площади срезаемого слоя. В-третьих, потери устойчивости может способствовать падающий участок зависимости сил от скорости. В-четвертых, потеря устойчивости возможна за счет динамического смещения постоянной составляющей параметров, если они близки к границе областей устойчивости. Наконец, если параметры находятся вблизи границы устойчивости, то за счет их изменения система может заходить в область неустойчивости и в дальнейшем в устойчивую область не возвращаться. Этот механизм зависит от добротности подсистемы инструмента. При вычислении необходимо согласование параметров модели и технологических режимов. Это относится, преж-

де всего, к согласованию времени T в операторе $\int_{t-T}^{t} V(\xi)d\xi$ со скоростью подачи. Кроме этого, модуль амплитуды смещений биений не может превышать величины припуска, а колебательные скорости в направлении X_2 не должны превышать скорость резания. В противном случае должны наблюдаться временные отрезки, при которых нарушается контакт инструмента с зоной резания. В этом случае необходимо усложнить модель динамической связи, и учесть переменную структуру модели.

Приведем примеры областей устойчивости (рис. 2) для системы без биений. Они вычислены для режимов: продольная подача $S_p = 0.1$mm, глубина $t_p = 2.5$mm,

Таблица 1. Параметры динамической системы
Table 1. Parameters of the dynamic system

$h_{1,1}$, kg·s/mm	$h_{2,2}$, kg·s/mm	$h_{3,3}$, kg·s/mm	$h_{1,2} = h_{2,1}$, kg·s/mm	$h_{1,3} = h_{3,1}$, kg·s/mm	$h_{2,3} = h_{3,2}$, kg·s/mm
0.25	0.15	0.15	0.1	0.08	0.08
$c_{1,1}$, kg/mm	$c_{2,2}$, kg/mm	$c_{3,3}$, kg/mm	$c_{1,2} = c_{2,1}$, kg/mm	$c_{1,3} = c_{3,1}$, kg/mm	$c_{2,3} = c_{3,2}$, kg/mm
1000	800	800	200	100	100

Таблица 2. Параметры модели сил в координатах состояния
Table 2. Parameters of the force model in the state coordinates

ρ_0, kg/mm^2	α, s/mm	α_1, s/mm	α_2, s/mm	T, s	ρ_1, kg/mm	ρ_3, kg/mm
50–900	0.01–0.1	0.2–0.5	0.2–0.5	0.01–0.1	0.5–5.0	0.5–5.0

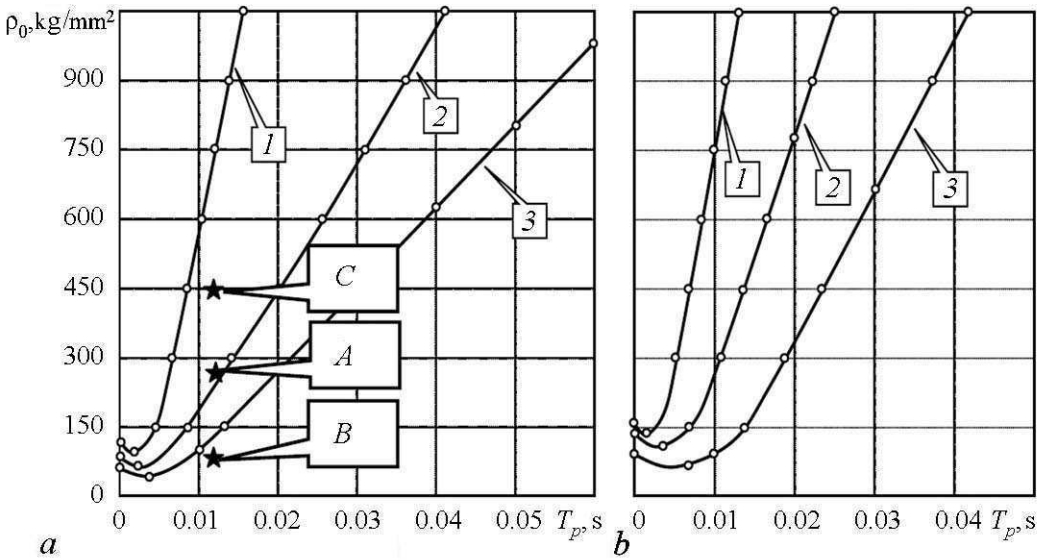


Рис. 2. Области устойчивости невозмущенной системы в плоскости «$T_p - \rho_0$»: $\alpha = 0.05$ (*a*); 0.00 (*b*). Кривые: *1* – $k_h = 1.0$; *2* – $k_h = 0.5$; *3* – $k_h = 0.2$

Fig. 2. Stability areas of not perturbation system in the plane «$T_p - \rho_0$»: $\alpha = 0.05$ (*a*); 0.00 (*b*). Curves: *1* – $k_h = 1.0$; *2* – $k_h = 0.5$; *3* – $k_h = 0.2$

© *В.Л. Заковоротный, В.Е. Гвинджилия*

скорость $V_{2,0} = 1000$ mm/s. Система устойчива снизу от фигуративных линий. На устойчивость существенно влияют матрицы c и h. На иллюстрациях даны области для различных коэффициентов k_h ($h_0 = k_h h$). Что касается матрицы жесткости, то на устойчивость значительное влияние оказывает коэффициент $c_{3,3}$, который формирует связь между силами и деформационными смещениями инструмента в направлении подачи. Заметим, что чувствительность изменения сил к деформационным смещениям в направлении X_3 наибольшая, так как обычно $t_p \gg S_p$.

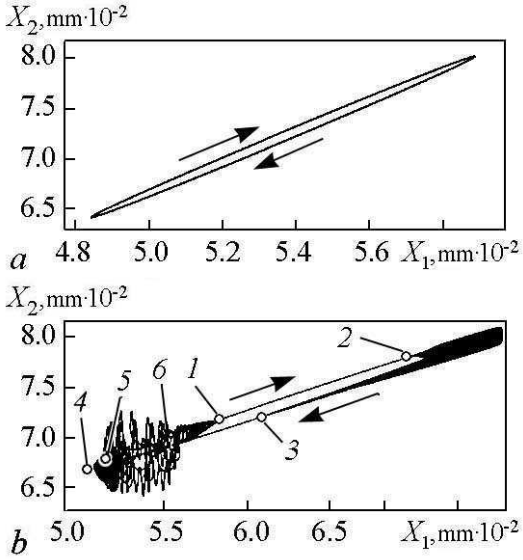


Рис. 3. Пример замкнутых траекторий деформационных смещений вершины инструмента в точках *A* и *B* на рис. 2, *a*: *a* – траектория, соответствующая точке *B*; *b* – траектория, соответствующая точке *A*

Fig. 3. The examples of the closed trajectories of the deformation displacement of the tool tip in points *A* and *B* at the fig. 2, *a*: *a* – the trajectory is corresponding to the point *B*; *b* – the trajectory is corresponding to the point *A*

Далее ограничимся случаем $\Delta X(t) = \Delta X_0\{\sin \Omega t, \sin(\Omega t + \pi/2)\}^T$. Радиальные биения моделируются круговыми траекториями движения центра вращения заготовки против часовой стрелки в плоскости $X_1 - X_2$. Это согласуется с нашими экспериментами и известными данными [36]. Траектории биений обусловлены формированием циркуляционных сил при взаимодействии роторных систем с трением [37]. Приведем также характерный пример вычисленных пространственных траекторий деформационных смещений (рис. 3) с параметрами, соответствующими точкам *A* и *B* на рис. 2, *a*. На иллюстрации видно, что при удалении параметров от границы области устойчивости (рис. 3, *a*) траектория в плоскости $X_1 - X_2$ является устойчивой. При приближении параметров к границе области устойчивости невозмущенной системы вдоль траектории наблюдается динамическая перестройка свойств (рис. 3, *b*). Можно выделить два участка асимптотически устойчивой траектории (участки «*1–2*» и «*3–4*»), два участка, на которых вдоль траектории формируются притягивающие множества типа предельных циклов с изменяющейся амплитудой (участки «*2–3*», «*4–5*» и «*6–1*»), а также участок «*5–6*», на котором образуется хаотическая динамика. Приведенная иллюстрация соответствует частоте биений равной 0.3 Гц. Таким образом, при определенных параметрах уже в пределах периода биений мы наблюдаем бифуркации притягивающих множеств, формируемых в окрестности деформационных смещений. По мере увеличения частоты в зависимости от амплитуды биений изменяется топология притягивающих множеств (рис. 4), в частности, устойчивость. На приведенной иллюстрации мы ограничились частотным диапазоном (50–600) Гц. Диаграммы построены на основе использования численного интегрирования исходных дифференциальных уравнений по сетке. При этом обработано

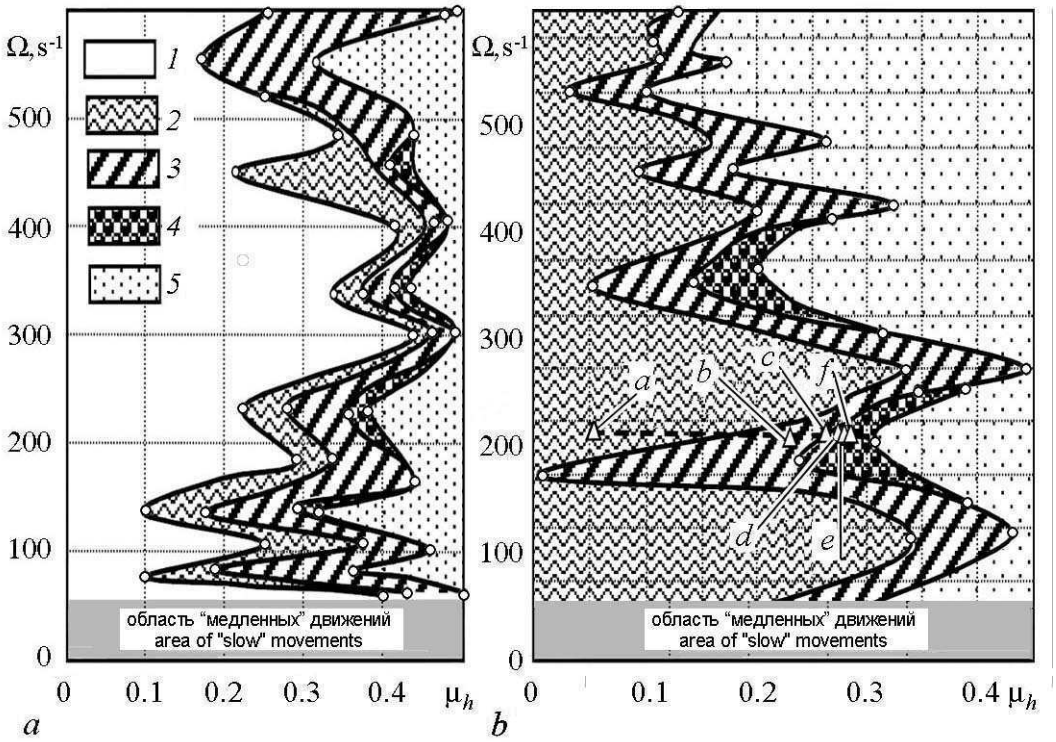


Рис. 4. Диаграммы бифуркаций притягивающих множеств в зависимости от параметров биений шпиндельной группы: *a* – параметры системы соответствуют точке *A* на рис. 2, *a*; *b* – параметры системы соответствуют точке *C* на рис. 2, *a*. Тип притягивающих множеств: *1* – орбитально асимптотически устойчивые периодические движения с частотой биений; *2* – двумерный тор; *3* – предельный цикл с частотой, существенно ниже частоты биений; *4* – хаотическая динамика; *5* – система неустойчивая в целом

Fig. 4. Diagrams of the attracting sets bifurcations is depended on the parameters of the spindle group beats: *a* – parameters of the system are corresponding to the point *A* at the fig. 2,*a*; *b* – parameters of the system are corresponding to the point *C* at the fig. 2, *a*. The type of the attracting sets: *1*– orbital asymptotically stable periodic motion with the frequency of the beating; *2* – two-dimensional invariant torus; *3* – limit cycle with a frequency significantly lower than the beats frequencies; *4* – chaotic dynamic; *5* – the system is not stability as a whole

более 10000 полученных расчетом траекторий. На приведенной иллюстрации даны два примера бифуркаций притягивающих множеств. Один (рис. 4, *a*) соответствует точке *A* на рис. 2, *a*. Второй (рис. 4, *b*) – точке *C* на рис. 2, *a*. Кроме этого обозначено $t_p(t) = t_p^{(0)} + \Delta X_0 \sin(\Omega t) = t_p^{(0)}[1 + \mu_h \sin(\Omega t)]$. Тогда амплитуда биений оценивается параметром $\mu_h < 0.5$. Если рассматривать левую кривую на рис. 4, *a*, то по своей структуре она качественно соответствуют известным диаграммам параметрического самовозбуждения Матье–Хила [38]. Траектории являются асимптотически устойчивыми слева от этой кривой. В отличие от известных диаграмм здесь параметрическое самовозбуждение существует в достаточно широком частотном диапазоне, и область нижних частот находится в диапазоне реальных скоростей резания. Кроме того, эти диаграммы принципиально зависят от удаления параметров системы от границ областей устойчивости невозмущенной системы. В частности, при увеличении добротности колебательных контуров подсистемы инструмента область параметрического самовозбуждения расширяется.

© В.Л. Заковоротный, В.Е. Гвинджилия

По мере увеличения амплитуды за счет нелинейных связей для каждой частоты биений мы имеем сложные преобразования притягивающих множеств. Здесь можно выделить как участки, на которых наблюдается изменение параметров притягивающих множеств без изменения их топологии, так и участки, на которых изменяется их топология. Для примера на рис. 5 приведены проекции фазовых траекторий на плоскость $X_1 - dX_1/dt$ для точек, выделенных на рис. 4, *b* треугольниками. Для этих точек, отличающихся амплитудой биений шпиндельной группы, отмечаем преобразование двумерного тора (точка «*a*») в предельный цикл (точка «*b*»). Предельного цикла в хаотические колебания через каскад бифуркаций удвоения периода колебаний (точки «*c–f*»). Каскад бифуркаций наблюдается при чрезвычайно малых вариациях амплитуды биений. Характерно, что в области малых амплитуд биений наблюдается наложение изменения деформационных смещений, обусловленных биениями, на автоколебания, которые формируются без биений.

В результате наложения образуется двумерный инвариантный тор с изменяющейся амплитудой, который при дальнейшем увеличении амплитуды биений преобразуется в предельный цикл (область точки «*b*»). Причем частота формируемого предельного цикла существенно меньше частоты биений. Исследования показывают, что в этом случае принципиальное значение имеют дополнительные силы, действующие на задние грани инструмента.

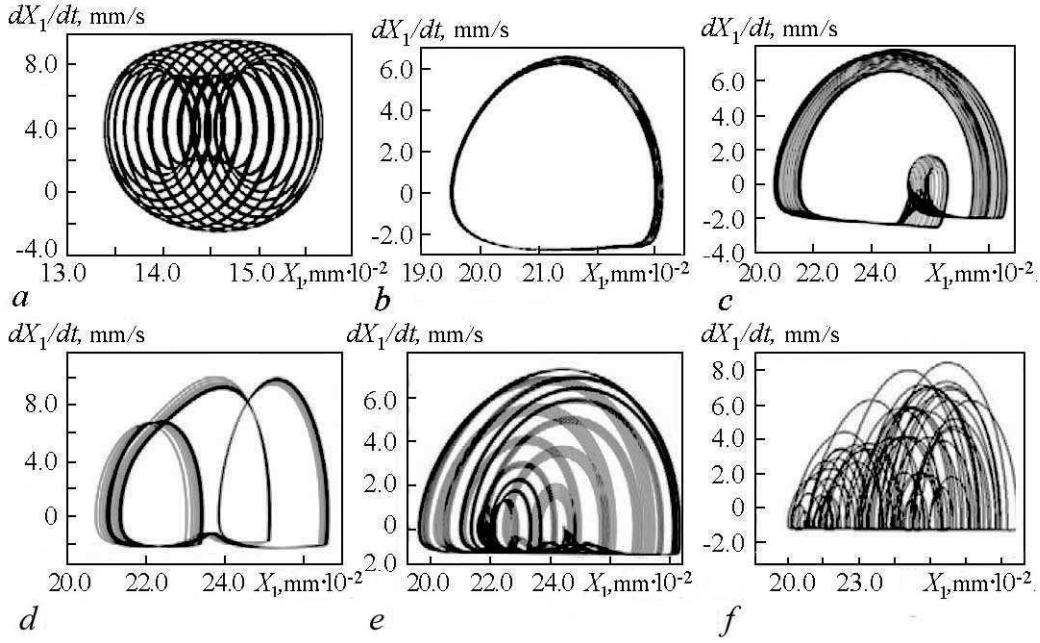


Рис. 5. Пример преобразования проекций фазовых траекторий на плоскость ($X_1 - dX_1/dt$) для установившегося состояния по мере увеличения амплитуды биений для точек, выделенных на рис. 4, *b*

Fig. 5. The transformation of the phase trajectories on the plane ($X_1 - dX_1/dt$) for the steady state with increasing amplitude of the spindle beats for the points at the fig. 4, *b*

Анализ результатов

Для прикладной области обработки материалов резанием принципиальное значение имеет преобразование биений шпиндельной группы в траектории формообразующих движений вершины инструмента относительно детали, в точке контакта с ней инструмента. Деформационные смещения вершины инструмента, ответственные за формируемую геометрическую топологию поверхности обрабатываемой детали, во многом определяются деформационными смещениями вершины инструмента, свойства которых в установившемся стационарном состоянии определяются притягивающими множествами. Приведенный материал показывает, что в зависимости от амплитуды и частоты биений в установившихся деформационных смещениях обнаруживается образование различных притягивающих множеств: предельных циклов, инвариантных торов и хаотических аттракторов. Причем их преобразование во многих случаях определяется даже малыми вариациями частоты и амплитуды биений. Даже в том случае, если притягивающим множеством является предельный цикл, но его частота не равна и не кратна частоте вращения детали, на ее поверхности образуется геометрическая топология, в которой можно выделить участки волнистости. В общем случае преобразование биений в формируемую геометрическую топологию поверхности детали не определяется траекториями биений, а формируемыми притягивающими множествами. Это подтверждается известными экспериментальными данными. Кроме этого биения за счет нелинейных связей, не обладающих свойством центральной симметрии относительно равновесия, вызывают динамическое смещение точки равновесия системы, что вызывает изменение размера обрабатываемой детали. Этот факт также хорошо известен в экспериментах, особенно по вибрационному резанию. Параметры динамической связи, формируемой процессом резания, зависят как от технологических режимов, так и от геометрических параметров инструмента. Приведенный материал и предложенные математические модели позволяют на стадии проектирования выбирать в зависимости от состояния металлорежущего станка, определяемого биениями шпиндельной группы, инструмент и режимы, при которых формируется геометрическая топология обрабатываемой детали в соответствие с требованиями по точности и качеству поверхности.

Заключение

Биения шпиндельной группы непосредственно изменяют динамику процесса резания, вызывая образование в деформационных смещениях инструмента различные стационарные траектории, характеризуемые притягивающими множествами типа предельных циклов, инвариантных торов и хаотических аттракторов. Причем тип притягивающих множеств является чувствительным к параметрам биений. При управлении процессом резания, в том числе при определении программы ЧПУ обработки деталей на конкретном станке, во-первых, необходимо согласовать технологические режимы и геометрию инструмента с существующими естественным образом на конкретном станке параметрами биений. Во-вторых, при управлении процессом резания на основе варьирования траекториями движения исполнительных элементов станка существует зависящее от биений предельно достижимое качество изготовления деталей.

© *В.Л. Заковоротный, В.Е. Гвинджилия*

Библиографический список

1. *Заковоротный В.Л., Флек М.Б.* Динамика процесса резания. Синергетический подход. Ростов-на-Дону: Терра, 2006, 876 с.
2. *Городецкий Ю.И.* Теория нелинейных колебаний и динамика станков // Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского. Серия: Математическое моделирование и оптимальное управление. 2001. № 2. С. 69–88.
3. *Гуськов А.М.* Динамика двухрезцового точения. СТИН. 2004. № 11. С. 3.
4. *Гуськов А.М., Воронов С.А., Квашнин А.С.* Влияние крутильных колебаний на процесс сверления с вибровозбудителем // Машиностроение и компьютерные технологии. 2007. № 12. С. 4.
5. *Воронов С.А., Непочатов А.В., Киселев И.А.* Критерии оценки устойчивости процесса фрезерования нежестких деталей // Известия высших учебных заведений. Машиностроение. 2011. № 1. С. 50–62.
6. *Васин С.А., Васин Л.А.* Синергетический подход к описанию природы возникновения и развития автоколебаний при точении // Наукоемкие технологии в машиностроении. 2012. № 1. С. 11–16.
7. *Бородкин Н.Н., Васин С.А., Васин Л.А.* Предотвращение процесса возникновения и развития автоколебаний при точении резцами со структурированными державками // Известия Тульского государственного университета. Технические науки. 2014. № 11–1. С. 234–243.
8. *Воронов С.А., Киселев И.А.* Нелинейные задачи динамики процессов резания // Машиностроение и инженерное образование. 2017. № 2 (51). С. 9–23.
9. *Gouskov A.M., Voronov S.A., Paris H., Batzer S.A.* Nonlinear dynamics of a machining system with two interdependent delays // Commun. Nonlin. Sci. Numer. Simul. 2002. Vol. 7. Pp. 207–221.
10. *Kao Y-C., Nguyen N-T., Chen M-S., Su ST.* A prediction method of cutting force coefficients with helix angle of flat-end cutter and its application in a virtual three-axis milling simulation system // The International Journal of Advanced Manufacturing Technology. 2015. Vol. 77, Issue 9–12. Pp. 1793–1809.
11. *Warminski J., Litak G., Cartmell M.P., Khanin R., Wiercigroch M.* Approximate analytical solutions for primary chatter in the non-linear metal cutting model // Journal of Sound and Vibration. 2003. Vol. 259 (4). Pp. 917–933.
12. *Stepan G., Insperge T. and Szalai R.* Delay, parametric excitation, and the nonlinear dynamics of cutting processes // International Journal of Bifurcation and Chaos. 2005. Vol. 15, No. 9. Pp. 2783–2798.
13. *Кабалдин Ю.Г.* Самоорганизация и нелинейная динамика в процессах трения и изнашивания инструмента при резании. Комсомольск на Амуре: Изд-во КнАГТУ, 2003. 175 с.
14. *Заковоротный В.Л., Фам Т.Х.* Параметрическое самовозбуждение динамической системы резания. Вестник Донского государственного технического университета. 2013. Т. 13. № 5–6 (74). С. 97–103.
15. *Заковоротный В.Л., Фам Д.Т., Быкадор В.С.* Самоорганизация и бифуркации

© *В.Л. Заковоротный, В.Е. Гвинджилия*

динамической системы обработки металлов резанием // Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика. 2014. Т. 22, № 3. С. 26–39.

16. *Заковоротный В.Л., Фам Д.Т., Быкадор В.С.* Влияние изгибных деформаций инструмента на самоорганизацию и бифуркации динамической системы резания металлов // Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика. 2014. Т. 22, № 3. С. 40–52.
17. *Заковоротный В.Л., Гвинджилия В.Е.* Влияние кинематических возмущений в направлении продольной подачи на траектории формообразующих движений // Известия высших учебных заведений. Северо-Кавказский регион. Серия: Технические науки. 2016. № 4 (192). С. 67–76.
18. *Заковоротный В.Л., Гвинджилия В.Е.* Влияние погрешности движения исполнительных элементов токарного станка на траектории формообразующих движений // Вестник Донского государственного технического университета. 2017. Т. 17, № 1 (88). С. 35–46.
19. *Заковоротный В.Л., Гвинджилия В.Е.* Влияние флуктуаций на устойчивость формообразующих траекторий при точении // Известия высших учебных заведений. Северо-Кавказский регион. Серия: Технические науки. 2017, вып. 2. С. 52–61.
20. *Заковоротный В.Л., Губанова А.А., Лукьянов А.Д.* Использование синергетической концепции для изучения устойчивости формообразующих траекторий попутного фрезерования. СТИН. 2016. № 4. С. 32-40.
21. *Masoumi A., Pellicano F., Samani F. S., Barbieri M.* Symmetry breaking and chaos-induced imbalance in planetary gears // Nonlinear Dynamics. 2015. Vol. 80, Issue 1–2. Pp. 561–582.
22. *Balachandran B.* Non-linear dynamics of milling process // Philos. Trans. Roy. Soc. 2001. Vol. 359. Pp. 793.
23. *Davies M.A., Pratt J.R.* The stability of low immersion milling // Ann. CIRP. 2000. Vol. 49. P. 37.
24. *Davies M.A., Pratt J.R., Dutterer B.S., Burns T.J.* Stability prediction for low radial immersion milling // J. Manuf. Sci. Engin. 2002. Vol. 124. P. 217.
25. *Faassen R.P.H., van de Wouw N., Osterling J.A.J., Nijmeijer H.* Prediction of regenerative chatter by modeling and analysis of high-speed milling // Int. J. Mach. Tools Manuf. 2003. Vol. 43. P. 1437.
26. *Corpus W.T., Endres W.J.* Added stability lobes in machining processes that exhibit periodic time variation. Part 1: An analytical solution // J. Manuf. Sci. Engin. 2004. Vol. 126. P. 467.
27. *Gouskov A.M., Voronov S.A., Paris H., Batzer S.A.* Nonlinear dynamics of a machining system with two interdependent delays // Commun. Nonlin. Sci. Numer. Simul. 2002. Vol. 7. P. 207.
28. *Peigne G., Paris H., Brissaud D., Gouskov A.* Impact of the cutting dynamics of small radial immersion milling operations on machined surface roughness // Int. J. Mach. Tools Manuf. 2004. Vol. 44. P. 1133.

© *В.Л. Заковоротный, В.Е. Гвинджилия*

29. *Szalai R., Stepan G., Hogan S.J.* Global dynamics of low immersion high-speed milling // Chaos. 2004. Vol. 14. P. 1069.
30. *Floquet M.G.* Equations differentielles lineaires a coefficients periodiques // Ann. Scientifiques de l'Ecole Normale Suprerieure. 1883. Vol. 12. P. 47.
31. *Zakovorotny V.L., Lukyanov A.D., Gubanova A.A., Khristoforova V.V.* Bifurcation of stationary manifolds formed in the neighborhood of the equilibrium in a dynamic system of cutting // Journal of Sound and Vibration. 2016. T. 368. C. 174–190.
32. *Rusinek R., Wiercigroch M., Wahi P.* Influence of tool flank forces on complex dynamics of a cutting process // International Journal of Bifurcation and Chaos. 2014. Vol. 24 (9). Pp. 189–201.
33. *Rusinek R., Wiercigroch M., Wahi P.* Modeling of frictional chatter in metal cutting // International Journal of Mechanical Sciences. 2014. Vol. 89. Pp. 167–176.
34. *Zakovorotny V.* Bifurcations in the dynamic system of the mechanic processing in metal – cutting tool // WSEAS Transactions on Applied and Theoretical Mechanics. 2015. T. 10. C. 102–116.
35. *Ляпунов А.М.* Общая задача об устойчивости движения. М.: Гостехиздат, 1950.
36. *Пуш А.В., Зверев И.А.* Шпиндельные узлы. Проектирование и исследование. М.: Изд-во «Станкин», 2000. 197 с.
37. *Заковоротный В.Л., Шаповалов В.В.* Динамика транспортных трибосистем // Сборка в машиностроении, приборостроении. 2005. № 12. С. 19–24.
38. *Данжело Р.* Линейные системы с переменными параметрами. М.: Машиностроение, 1974. 287 с.

References

1. Zakovorotny V.L., Fleck M.B. Dynamics of Cutting Process. Synergetic Approach. Rostov-on-Don: Terra, 2006. 876 p. (in Russian).
2. Gorodetsky Y.I. The theory of the nonlinear vibrations and the dynamic of the machines. *Vestnik of Lobachevsky University of Nizhni Novgorod. Series: Mathematical Modeling and Optimal Control.* 2001. No. 2. P. 69–88 (in Russian).
3. Guskov A.M. Dynamics of the twin-cutter turn. *Russian Engineering Research.* 2004. No. 11. P. 3 (in Russian).
4. Guskov A.M., Voronov C.A., Kvashnin A.S. The influence of torsional vibrations on the drilling vibration exciter. *Mechanical Engineering and Computer Science.* 2007. No. 12. P. 4 (in Russian).
5. Voronov C.A., Nepochatov A.V., Kiselev I.A. Criteria of the valuation stability of the milling process of the non-rigid parts. *Scientific-Educational and Applied Journal. University News. Engineering.* 2011. No. 1. P. 50–62 (in Russian).
6. Vasin S.A., Vasin L.A. Synergetic approach to the description of the origin and development of the self-oscillation when turning. *Science Intensive Technologies in Mechanical Engineering.* 2012. No. 1. P. 11–16 (in Russian).
7. Borodkin N.N., Vasin S.A., Vasin L.A. Prevention of the process of the emergence and development of self-oscillations whith turning cutters with structured tools.

© *В.Л. Заковоротный, В.Е. Гвинджилия*

Izvestiya Tulskogo Gosudarstvennogo Universiteta. Technical Science. 2014. No. 11–1. P. 234–243 (in Russian).

8. Voronov S.A., Kisilev I.A. Nonlinear problems of the dynamics of cutting processes. *Mechanical Engineering and Engineering Education.* 2017. No. 2 (51). P. 9–23 (in Russian).
9. Gouskov A.M., Voronov S.A., Paris H., Batzer S.A. Nonlinear dynamics of a machining system with two interdependent delays. *Commun. Nonlin.Sci. Numer. Simul.* 2002. Vol. 7. P. 207–221.
10. Kao Y-C., Nguyen N-T., Chen M-S., Su ST. A prediction method of cutting force coefficients with helix angle of flat-end cutter and its application in a virtual three-axis milling simulation system. *The International Journal of Advanced Manufacturing Technology.* 2015. Vol. 77, Issue 9–12. Pp. 1793–1809.
11. Warminski J., Litak G., Cartmell M.P., Khanin R., Wiercigroch M. Approximate analytical solutions for primary chatter in the non-linear metal cutting model. *Journal of Sound and Vibration.* 2003. Vol. 259 (4). Pp. 917–933.
12. Stepan G., Insperge T. and Szalai R. Delay, parametric excitation, and the nonlinear dynamics of cutting processes. *International Journal of Bifurcation and Chaos.* 2005. Vol. 15, No. 9. Pp. 2783–2798.
13. Kabaldin Y.G. Self-organization and Nonlinear Dynamics in the Processes of Friction and Wear of the Tool with Cutting. *Komsomolsk-na-Amure State Technical University,* 2003. 175 p. (in Russian).
14. Zakovorotny V.L., Fam T.H. Parametric-excitation of the dynamic system of cutting. *Vestnik of DSTU.* 2013. T. 13. No. 5–6 (74). Pp. 97–103 (in Russian).
15. ZakovorotnyV.L., Fam D.T., Bykador V.S. Self-organization and bifurcation of the dynamic system of metal cutting. *Izvestya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics.* 2014. T. 22. No. 3. P. 26–39 (in Russian).
16. Zakovorotny V.L., Fam D.T., Bykador V.S. The influence of bending deformations of the tool on the self-organization and bifurcation of the dynamic system of metal cutting. *Izvestya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics.* 2014. T. 22. No. 3. P. 40–52 (in Russian).
17. Zakovorotny V.L., Gvindjiliya V.E. Influence of kinematic perturbations towards longitudinal motion on shape-generating movement trajectories in cutting dynamic system. *University News. North-Caucasian Region. Technical Sciences Series.* 2016. No. 4 (192). P. 67–76 (in Russian).
18. Zakovorotny V.L., Gvindjiliya V.E. The influence of the spindle beats group on attracting sets of the tool deformation displacement. *Vestnik of DSTU.* 2017. T. 17, No. 1 (88). P. 35–46 (in Russian).
19. Zakovorotny V.L., Gvindjiliya V.E. The influence of fluctuation on the shape-generating trajectories stability with a turning. *University News. North-Caucasian Region. Technical Sciences Series*. 2017. No. 2. P. 52–61 (in Russian).
20. Zakovorotny V.L., Gubanova A.A., Lukyanov A.D. The use of synergetic concept for the study of the stability of the morphogenetic trajectories of the associated milling. *Russian Engineering Research*. 2016. No. 4. P. 32–40 (in Russian).
21. Masoumi A., Pellicano F., Samani F. S., Barbieri M. Symmetry breaking and chaos-

© *В.Л. Заковоротный, В.Е. Гвинджилия*

induced imbalance in planetary gears. *Nonlinear Dynamics.* 2015. Vol. 80. Issue 1–2. Pp. 561–582.

22. Balachandran B. Non-linear dynamics of milling process. *Philos. Trans. Roy. Soc.* 2001. Vol. 359. Pp. 793.
23. Davies M.A., Pratt J.R. The stability of low immersion milling. *Ann. CIRP.* 2000. Vol. 49. P. 37.
24. Davies M.A., Pratt J.R., Dutterer B.S., Burns T.J. Stability prediction for low radial immersion milling. *J. Manuf. Sci. Engin.* 2002. Vol. 124. P. 217.
25. Faassen R.P.H., van de Wouw N., Osterling J.A.J., Nijmeijer H. Prediction of regenerative chatter by modeling and analysis of high-speed milling. *Int. J. Mach. Tools Manuf.* 2003. Vol. 43. P. 1437.
26. Corpus W.T., Endres W.J. Added stability lobes in machining processes that exhibit periodic time variation – Part 1: An analytical solution. *J. Manuf. Sci. Engin.* 2004. Vol. 126. P. 467.
27. Gouskov A.M., Voronov S.A., Paris H., Batzer S.A. Nonlinear dynamics of a machining system with two interdependent delays. *Commun. Nonlin. Sci. Numer. Simul.* 2002. Vol. 7. P. 207.
28. Peigne G., Paris H., Brissaud D., Gouskov A. Impact of the cutting dynamics of small radial immersion milling operations on machined surface roughness. *Int. J. Mach. Tools Manuf.* 2004. Vol. 44. P. 1133.
29. Szalai R., Stepan G., Hogan S.J. Global dynamics of low immersion high-speed milling. *Chaos.* 2004. Vol. 14. P. 1069.
30. Floquet G. Equations diff'erentielles lin'eaires a coefficients periodiques. *Ann. Scientifiques de l'Ecole Normale Supr'erieure.* 1883. Vol. 12. P. 47.
31. Zakovorotny V.L., Lukyanov A.D., Gubanova A.A., Khristoforova V.V. Bifurcation of stationary manifolds formed in the neighborhood of the equilibrium in a dynamic system of cutting. *Journal of Sound and Vibration.* 2016. T. 368. C. 174–190.
32. Rusinek R., Wiercigroch M., Wahi P. Influence of tool flank forces on complex dynamics of a cutting process. *International Journal of Bifurcation and Chaos.* 2014. Vol. 24 (9). Pp. 189–201.
33. Rusinek R., Wiercigroch M., Wahi P. Modeling of frictional chatter in metal cutting. *International Journal of Mechanical Sciences.* 2014. Vol. 89. Pp. 167–176.
34. Zakovorotny V. Bifurcations in the dynamic system of the mechanic processing in metal – cutting tool. *WSEAS Transactions on Applied and Theoretical Mechanics.* 2015. T. 10. C. 102–116.
35. Lyapunov A.M. General Problem on Motion Stability. Moscow: Gostekhizdat, 1950. 167 p. (in Russian).
36. Push A.V., Zverev I.A. Spindle Units. Design and Project. Moscow: STANKIN, 2000. 197 p. (in Russian).
37. Zakovorotny V.L., Shapovalov V.V. Dynamics of transport tribo system. *Assembly in Machinebuilding, Instrument Making.* 2005. No. 12. P. 19–24 (in Russian).
38. D'Angelo G. Linear Systems With Variable Parameters. Moscow: Mashinostroenie, 1974. 287 p. (in Russian).

© *В.Л. Заковоротный, В.Е. Гвинджилия*

Заковоротный Вилор Лаврентьевич – родился в Красноярске (1940). Окончил Ростовский институт сельскохозяйственного машиностроения (ныне Донской государственный технический университет) в 1962 году. Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата технических наук (1966) в Новочеркасском политехническом институте (ныне Южно-Российский государственный политехнический университет) и доктора технических наук (1983) в Киевском политехническом институте. Основал научную школу, исследующую синергетические принципы управления и диагностики процессов резания и трения. Более 40 лет работает в области исследования устойчивости и эволюции динамических нелинейных систем взаимодействующих со средами. С 1981 по 2015 год являлся заведующим кафедрой «Автоматизация производственных процессов» ДГТУ, а с 1991 года по 2008 год был проректором по научной работе ДГТУ. Автор более 400 научных статей как в российских, так и в зарубежных научных журналах, а также ряда авторских свидетельств и патентов. Опубликовал 10 научных монографий. Под его руководством защищено 7 докторских и 42 кандидатских диссертаций. Является лауреатом Государственной премии Украинской ССР, заслуженным деятелем науки РФ. Входит в редакционные коллегии 3 журналов, включенных в перечень ВАК РФ. Член трех диссертационных советов.

344000 Ростов-на-Дону, пл. Гагарина, 1
Донской государственный технический университет
E-mail: vzakovorotny@dstu.edu.ru

Гвинджилия Валерия Енвериевна – родилась в городе Ростов-на-Дону (1994). Окончила Донской Государственный Технический Университет (2016), степень бакалавра, специальность «Управление в технических системах». В настоящий момент является магистрантом второго курса обучения специальности «Управление в технических системах», направление – анализ и синтез систем управления движением механических объектов, взаимодействующих с различными средами. Область научных интересов – фундаментальные основы инженерных наук, нелинейная динамика процессов обработки на металлорежущих станках, проблемы самоорганизации и эволюции. Опубликовала 9 научных статей как в российских, так и в зарубежных научных журналах.

344000 Ростов-на-Дону, пл. Гагарина, 1
Донской государственный технический университет
E-mail: sinedden@yandex.ru

© *В.Л. Заковоротный, В.Е. Гвинджилия*

УДК 517:957

РЕШЕНИЕ ТИПА «БЕГУЩИЕ ВОЛНЫ» В ПАРАБОЛИЧЕСКОЙ ЗАДАЧЕ С ПРЕОБРАЗОВАНИЕМ ПОВОРОТА

Ю. А. Хазова

ФГАОУ ВО «Крымский федеральный университет им. В.И. Вернадского»
Россия, Республика Крым, 295007 Симферополь, просп. Академика Вернадского, д. 4
E-mail: hazova.yuliya@hotmail.com

Поступила в редакцию 3.07.2017; после доработки 12.09.2017

Оптические системы с двумерной обратной связью демонстрируют широкие возможности по исследованию процессов зарождения и развития диссипативных структур. Обратная связь позволяет воздействовать на динамику оптической системы посредством управляемого преобразования пространственных переменных, выполняемых призмами, линзами, динамическими голограммами и другими устройствами. Нелинейный интерферометр с зеркальным отражением поля в двумерной обратной связи является одной из наиболее простых оптических систем, в которых реализуется нелокальный характер взаимодействия световых полей.

Математической моделью оптических систем с двумерной обратной связью является нелинейное параболическое уравнение с преобразованием поворота пространственной переменной и условиями периодичности на окружности.

Исследуются вопросы бифуркации рождения стационарных структур типа бегущей волны, эволюции их форм при уменьшении бифуркационного параметра (впервые в качестве бифуркационного параметра был взят коэффициент диффузии) и динамики их устойчивости при отходе от критического значения параметра бифуркации и дальнейшем его уменьшении. В работе используются метод центральных многообразий и метод Галеркина. На основе метода центральных многообразий доказана теорема о существовании, форме и устойчивости решения типа бегущей волны в окрестности бифуркационного значения коэффициента диффузии. Получено представление первой бегущей волны, рождающейся в результате бифуркации Андронова–Хопфа при переходе бифуркационного параметра через критическое значение. Согласно теореме о центральном многообразии первая бегущая волна рождается орбитально устойчивой.

Поскольку доказанная теорема дает возможность исследовать рожденные решения только в окрестности критического значения бифуркационного параметра, то для изучения динамики изменений решения типа бегущей волны при отходе бифуркационного параметра в область надкритичности был использован формализм метода Галеркина. В соответствии с методом центральных многообразий составлена галеркинская аппроксимация приближенных решений поставленной задачи. При уменьшении параметра бифуркации и его переходе через критическое значение, нулевое решение задачи теряет устойчивость колебательным образом. В результате от нулевого решения ответвляется периодическое решение типа бегущей волны. Эта волна рождается орбитально устойчивой. При дальнейшем уменьшении параметра и его прохождении через следующее

© *Ю.А. Хазова*

критическое значение от нулевого решения в результате бифуркации Андронова–Хопфа рождается второе решение типа бегущая волна. Данная волна рождается неустойчивой с индексом неустойчивости два.

Численные расчеты с помощью пакета Mathematica показали, что применение метода Галеркина приводит к качественно и количественно правильным результатам. Полученные результаты хорошо согласуются с результатами, полученными другими авторами и могут быть использованы для постановки экспериментов по изучению явлений в оптических системах с обратной связью.
Ключевые слова: Параболическая задача, бифуркация, устойчивость, бегущая волна, метод центральных многообразий, метод Галеркина.

DOI: 10.18500/0869-6632-2017-25-6-57-69

Образец цитирования: Хазова Ю.А. Решение типа «бегущие волны» в параболической задаче с преобразованием поворота // Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2017. Т. 25, № 6. С. 57–69. DOI: 10.18500/0869-6632-2017-25-6-57-69

TRAVELING WAVES SOLUTION IN PARABOLIC PROBLEM WITH A ROTATION

Yuliya A. Khazova

V.I. Vernadsky Crimean Federal University
4 Vernadskogo Prospekt, 295007 Simferopol, Republic of Crimea, Russia
E-mail: hazova.yuliya@hotmail.com

Received 3.07.2017; revised 12.09.2017

Optical systems with two-dimensional feedback demonstrate wide possibilities for emergence of dissipative structures. Feedback allows to influence on dynamics of the optical system by controlling the transformation of spatial variables performed by prisms, lenses, dynamic holograms and other devices. Nonlinear interferometer with mirror reflection of a field in two-dimensional feedback is one of the simplest optical systems in which the nonlocal interaction of light fields is realized.

A mathematical model of optical systems with two-dimensional feedback is the nonlinear parabolic equation with rotation transformation of a spatial variable and periodicity conditions on a circle. Such problems are investigated: conditions of occurrence the traveling wave solution, how the form of the solution changes as the diffusion coefficient decreases, dynamics of the solution's stability when the value of bifurcation parameter is decrease. As a bifurcation parameter was taken diffusion coefficient.

The method of central manifolds and the Galerkin's method are used in this paper. The method of central manifolds allows to prove the theorem on the existence and form of the traveling wave solution in the neighborhood of the critical bifurcation value. The first traveling wave born as a result of the Andronov–Hopf bifurcation. According to the central manifold theorem, the first traveling wave is born orbitally stable.

The theorem gives the opportunity to explore solutions near the critical values of the bifurcation parameter. The Galerkin's method was used by further research of traveling waves when bifurcation parameter was decrease. If the bifurcation parameter decreases and transition through the critical value, the zero solution of the problem loses stability. As a result, a periodic solution of the traveling wave type branches off from the zero solution. This wave is born orbitally stable. Further, the bifurcation parameter and its passage through the next critical value from the zero solution, the second solution of the traveling wave type is arise as a result of the Andronov–Hopf bifurcation. This wave is born unstable.

© *Ю.А. Хазова*

Numerical calculations have shown that the application of the Galerkin's method leads to correct results. The results can be used by experiments on the study of phenomena in optical systems with feedback.

Keywords: Parabolic problem, bifurcation, stability, traveling wave, method of central manifolds, Galerkin's method.

DOI: 10.18500/0869-6632-2017-25-6-57-69

References: Khazova Yu.A. Traveling waves solution in a parabolic problem with a rotation. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics.* 2017. Vol. 25. Issue 6. P. 57–69. DOI: 10.18500/0869-6632-2017-25-6-57-69

Введение

В оптических системах с обратной связью реализуются два типа взаимодействия поля: локальное, связанное с диффузией частиц нелинейной среды и с самовоздействием поля, и крупномасштабное, вызванное преобразованием поперечных пространственных аргументов поля внутри резонатора, например, поворотом на угол h, сжатием или отражением пространственной переменной в контуре обратной связи [1–4]. Как следует из эксперимента, описанного в работах [5, 6], наличие крупномасштабного взаимодействия существенно обогащает пространственно-временную динамику фазовой модуляции. Варьированием угла поворота h аргументов в контуре обратной связи можно добиться визуализации различных типов вращающихся пространственно неоднородных структур, наблюдать изменение их количества и при определенных условиях – переход к оптическому хаосу. Для исследования наблюдаемых явлений могут быть использованы различные подходы. Одним из них является метод, основанный на анализе динамики семейства траекторий, выходящих из некоторого ограниченного в том или ином пространстве множества начальных данных. Отметим, что к глобальному аттрактору притягиваются множества траекторий динамической системы при больших значениях времени. Однако глобальный аттрактор динамических систем шире множества физически реализующихся при больших временах предельных режимов. Поэтому наряду с глобальный анализом поведения системы важно выделить характерные типы наблюдаемых решений, а также выяснить причины возникновения того или иного типа решений. Один из подходов к решению намеченной проблемы – локальный анализ [7, 8], основанный на линеаризации задачи в окрестности какого-либо известного решения, например пространственно однородного стационарного решения. Такие автоколебания при определенных условиях возбуждались из стационарного состояния при изменении параметров модели, что свидетельствует о бифуркационной природе их возникновения. Для исследования бифуркационных автоколебаний может быть использована методика, основанная на построении иерархии упрощенных математических моделей в окрестности точки бифуркации. Построение разложений периодических решений в такого рода задачах основано на методах центрального многообразия [9, 10] и методе Галеркина [1–4]. Для описания различных автоволновых процессов, протекающих в нелинейном интерферометре (то есть в нелинейной оптической системе, состоящей из тонкого слоя

© *Ю.А. Хазова*

нелинейной среды керровского типа и различным образом организованного контура обратной связи), может быть использована одномерная по пространству модель

$$v_t + v = \mu\triangle v + K(1 + \gamma\cos Qv(\varphi, t)), \quad t > 0, \tag{1}$$

$$v(\varphi + 2\pi, t) = v(\varphi, t). \tag{2}$$

Краевая задача (1)–(2) моделирует динамику фазовой модуляции $v(\varphi, t)$, $\varphi \in (0, 2\pi)$, $t > 0$, световой волны, прошедшей тонкий слой нелинейной среды керровского типа с преобразованием поворота координат в контуре обратной связи в одномерном приближении. Здесь μ – коэффициент диффузии нелинейной среды; положительный коэффициент K пропорционален интенсивности входного поля; γ – видность (контрастность) интерференционной картины, $0 < \gamma < 1$; $Qv(\varphi) = v(\varphi + h)$ – оператор поворота на угол h.

Особенностью данной задачи является наличие пространственно однородного решения, описывающего невозмущенное распределение фазовой модуляции. При изменении параметров модели, например, уменьшении коэффициента диффузии нелинейной среды и, соответственно, изменении коэффициента μ, это решение теряет устойчивость. Наличие поворота координат позволяет промоделировать ситуацию, когда такая потеря устойчивости происходит колебательным образом. В результате возбуждается бегущая волна, скорость вращения которой и ее пространственный масштаб могут быть предсказаны и проанализированы на основе теории бифуркаций. При определенных условиях на параметры задачи будут рассмотрены вопросы существования, единственности и устойчивости периодического пространственно неоднородного решения, ответвляющегося от пространственно однородного стационарного решения в результате бифуркации Андронова–Хопфа. Это пространственно однородное решение $v(\varphi, t) = \omega$ определяется из уравнения

$$\omega = K(1 + \gamma\cos\omega). \tag{3}$$

С ростом K количество корней этого уравнения неограниченно растет, причем при $K \to \infty$ их состав постоянно меняется: возникают новые состояния равновесия и исчезают старые. Поэтому фиксируем гладкую ветвь решений

$$\omega = \omega(K, \gamma), \quad 1 + K\gamma\sin\omega(K, \gamma) \neq 0 \tag{4}$$

уравнения (3). Затем линеаризуем (1)–(2) на выбранном $\omega(K, \gamma)$: $v = u + \omega$.

В результате получаем уравнение с краевыми условиями на окружности S^1

$$u_t = \mu\triangle u - u - \Lambda Qu + \frac{\Lambda}{6}Qu^3, \tag{5}$$

$$u(\varphi + 2\pi, t) = u(\varphi, t), \tag{6}$$

где $\Lambda = \Lambda(K, \gamma) = -K\gamma\sin\omega$, $Qu(\varphi) = u(\varphi + 2\pi/3)$ – оператор поворота на угол $h = 2\pi/3$. Здесь μ – бифуркационный параметр, $\triangle$ – одномерный оператор Лапласа ($\triangle u = u_{\varphi\varphi}$).

© Ю.А. Хазова

Лемма. *Собственными функциями оператора* $L(\mu)u = \mu\triangle u - u - \Lambda Qu$, *рассматриваемого в качестве линейного оператора на пространстве* $L_2(S^1)$ *и областью определения в* $H^2(S^1)$ (*норма задается формулой* $\|u\|_2^2 = \langle(-\triangle)^2u, u\rangle + \langle u, u\rangle$), *являются функции* $e^{ik\varphi}$, $k = 0, \pm1, \pm2, \ldots$ *с соответствующими собственными числами* $\lambda_k(\mu) = -1 - k^2\mu - \Lambda e^{ik\frac{2\pi}{3}}$, $k = 0, \pm1, \pm2, \ldots$.

Интерес представляет случай, когда при уменьшении бифуркационного параметра μ знак собственных чисел $\lambda_k(\mu)$ может измениться. Поэтому фиксируем условие: $\Lambda > 1$.

Существует такое значение параметра $\mu = \mu^*$, что при $\mu > \mu^*$ нулевое решение задачи (5)–(6) экспоненциально устойчиво. При уменьшении μ и его прохождении через μ^* нулевое решение задачи (5)–(6) теряет устойчивость. Пара комплексно-сопряженных точек спектра проходит через мнимую ось с ненулевой скоростью. В результате от нулевого решения бифурцирует однопараметрическое семейство периодических решений типа бегущих волн.

1. Использование метода центральных многообразий

Воспользуемся для построения бегущих волн и их представлений методом центральных многообразий [11, 12]. Построим решение (5)–(6) в виде

$$u(\varphi, t) = ze^{i\varphi} + \overline{z}e^{-i\varphi} + \sigma_3(ze^{i\varphi}, \overline{z}e^{-i\varphi}) + \ldots, \tag{7}$$

где $z = z(t)$, $\overline{z} = \overline{z}(t)$ удовлетворяют уравнениям

$$\dot{z} = (\lambda_1(\mu) + c_3|z|^2 + \ldots)z, \tag{8}$$

$$\dot{\overline{z}} = (\overline{\lambda}_1(\mu) + \overline{c}_3|\overline{z}|^2 + \ldots)\overline{z} \tag{9}$$

(черта над символом обозначает комплексное сопряжение). Слагаемое $\sigma_3(ze^{i\varphi}, \overline{z}e^{-i\varphi})$ – форма 3-й степени относительно $z, \overline{z}$. Обозначим $z(t, \mu) = z(\mu)$, $\overline{z}(t, \mu) = \overline{z}(\mu)$. Подставим (7), (9) в (5) и затем в полученном равенстве сделаем замену $ze^{i\varphi} \to z$. В результате относительно σ_3 приходим к уравнению

$$(c_3z + \overline{c}_3\overline{z})|z|^2 + B(\mu)\sigma_3 = \widetilde{Q}(z + \overline{z})^3. \tag{10}$$

Здесь $\widetilde{Q}z^\alpha z^{-\beta} = z^\alpha z^{-\beta}e^{i(\alpha-\beta)(2\pi)/3}$. Оператор $B(\mu)$ на пространстве многочленов относительно $z, \overline{z}$ является диагональным оператором

$$B(\mu)z^\alpha z^{-\beta} = (\lambda_1\alpha + \overline{\lambda}_1\beta - \lambda_{\alpha-\beta})z^\alpha z^{-\beta}, \tag{11}$$

$\lambda_{-s} = \overline{\lambda}_s$, $s > 0$. Из условия разрешимости уравнения (10) следует, что

$$c_3 = \frac{\Lambda}{2}\, e^{i(2\pi)/3}, \quad \overline{c}_3 = \frac{\Lambda}{2}\, e^{-i(2\pi)/3}. \tag{12}$$

Очевидно, что $\mathrm{Re}\ c_3 < 0$, $\mathrm{Re}\ \overline{c}_3 < 0$. Уравнение (10) разрешимо следующим образом:

$$\sigma_3 = \frac{\Lambda}{6}\left(\frac{z^3(\mu)e^{3i\varphi}}{3\lambda_1 - \lambda_3} + \frac{\overline{z}^3(\mu)e^{-3i\varphi}}{3\overline{\lambda}_1 - \overline{\lambda}_3}\right). \tag{13}$$

© *Ю.А. Хазова*

Подставим теперь в (9) найденные, согласно (12), значения c_3 и опустим затем остальные слагаемые. Тогда периодическим решением, ответвляющимся от нуля при переходе через критическое бифуркационное значение μ^*: $\mathrm{Re}\ \lambda_1(\mu_1^*) = 0$, является

$$z_1 = \rho_1(\mu)e^{i\omega_1(\mu)t},$$

где $\rho_1(\mu) > 0$ – непрерывная ветвь решений уравнения

$$\mathrm{Re}\ \lambda_1(\mu) + \mathrm{Re}\ c_3\rho_1^2(\mu) = 0,$$
$$\omega_1(\mu) = \mathrm{Im}\ \lambda_1(\mu) + \mathrm{Im}\ c_3\rho_1^2(\mu).$$

В результате приближенным периодическим решением исходной задачи, ответвляющимся от нуля при прохождении параметра μ через μ^*, является

$$u(\varphi, t) = \rho_1(\mu)e^{i\omega_1(\mu)t}e^{i\varphi} + \rho_1(\mu)e^{-i\omega_1(\mu)t}e^{-i\varphi} +$$
$$+ \frac{\Lambda}{2}\frac{\rho_1^3(\mu)e^{3i\omega_1(\mu)t}e^{3i\varphi}}{3\lambda_1 - \lambda_3} + \frac{\Lambda}{2}\frac{\rho_1^3(\mu)e^{-3i\omega_1(\mu)t}e^{-3i\varphi}}{3\bar{\lambda}_1 - \bar{\lambda}_3} + \dots.$$

Таким образом сформулируем **теорему**.

Пусть выполнено условие $\Lambda > 1$. *Тогда существует такое* $\delta_0 > 0$, *что, если* $0 < \mu^* - \mu < \delta_0$, *где* $\mathrm{Re}\ \lambda_1(\mu_1^*) = 0$, *то задача (5)–(6) имеет решение типа бегущей волны вида:*

$$u(\varphi, t) = \rho_1(\mu)e^{i\omega_1(\mu)t}e^{i\varphi} + \rho_1(\mu)e^{-i\omega_1(\mu)t}e^{-i\varphi} +$$
$$+ \frac{\Lambda}{2}\frac{\rho_1^3(\mu)e^{3i\omega_1(\mu)t}e^{3i\varphi}}{3\lambda_1 - \lambda_3} + \frac{\Lambda}{2}\frac{\rho_1^3(\mu)e^{-3i\omega_1(\mu)t}e^{-3i\varphi}}{3\bar{\lambda}_1 - \bar{\lambda}_3} + \dots,$$

$\rho_1(\mu) > 0$ *является положительным корнем уравнения*

$$\mathrm{Re}\ \lambda_1(\mu) + \mathrm{Re}\ c_3\rho_1^2(\mu) = 0,$$

а $\omega_1(\mu)$ *находится из уравнения*

$$\omega_1(\mu) = \mathrm{Im}\ \lambda_1(\mu) + \mathrm{Im}\ c_3\rho_1^2(\mu).$$

Решения $u(\varphi, t)$ *– экспоненциально орбитально устойчивы.*

2. Аппроксимация решения параболической задачи с преобразованием поворота пространственной переменной

Поскольку теорема дает возможность исследовать рожденные решения только в окрестности критического значения бифуркационного параметра μ, то для изучения динамики изменений решения типа бегущей волны при отходе бифуркационного параметра в область надкритичности, воспользуемся формализмом метода Галеркина.

В соответствии с методом центральных многообразий будем использовать галеркинскую аппроксимацию в таком виде:

$$u = \sum_{k=1}^{N} \left(x_k e^{ik\varphi} + \overline{x}_k e^{-ik\varphi} \right). \tag{14}$$

Подставим (14) в (5) и затем в полученном равенстве приравняем коэффициенты при $e^{\pm ik\varphi}$, $k = \overline{1, N}$.

В результате получим систему дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \dot{x_k} &= \lambda_k z_k + g_k(z, \overline{z}), \\ \dot{\overline{x}_k} &= \overline{\lambda}_k \overline{z}_k + \overline{g}_k(z, \overline{z}), \quad k = \overline{1, N}, \end{aligned} \tag{15}$$

где $z = (z_1, \ldots, z_N)$, $\overline{z} = (\overline{z}_1, \ldots, \overline{z}_N)$, g_k, $\overline{g}_k$ – формы 3-й степени относительно $(z, \overline{z})$, $\lambda_k = \lambda_k(\mu)$.

При уменьшении параметра μ и его переходе через критическое значение μ_1^* такое, что $\mathrm{Re}\ \lambda_1(\mu_1^*) = 0$, нулевое решение (5)–(6) теряет устойчивость колебательным образом. В результате от нулевого решения (5)–(6) ответвляется периодическое решение типа бегущей волны. Для построения указанного решения (5)–(6) воспользуемся системой (15), в которой нулевое решение теряет устойчивость при уменьшении μ и его прохождении через μ_1^*. Построим это решение в виде

$$\begin{aligned} &x_1 = \rho_1 e^{i\varphi_1}, \quad x_3 = \rho_3 e^{i(3\varphi_1 + \alpha_3)}, \quad x_5 = \rho_5 e^{i(5\varphi_1 + \alpha_5)} \\ &\rho_k = \rho_k(t, \mu), \quad \varphi_1 = \varphi_1(t, \mu) \end{aligned} \tag{16}$$

и соответствующие им комплексные переменные $\overline{x}_1$, $\overline{x}_3$, $\overline{x}_5$. Остальные компоненты в (15) положим нулевыми. В полученной после подстановки (16) в (15) системе находим стационарные $\rho_k > 0$, $k = 1, 2, 3$, α_3, α_5 и $\dot{\varphi}_1 = \omega_1(\mu)$. Следовательно, система (15) имеет периодическое решение

$$\begin{aligned} &x_1 = \rho_1(\mu) e^{i\omega_1(\mu)t}, \quad x_3 = \rho_3(\mu) e^{i(3\omega_1(\mu)t + \alpha_3)}, \quad x_5 = \rho_5(\mu) e^{i(5\omega_1(\mu)t + \alpha_5)}, \\ &\overline{x}_1 = \rho_1(\mu) e^{-i\omega_1(\mu)t}, \quad \overline{x}_3 = \rho_3(\mu) e^{-i(3\omega_1(\mu)t + \alpha_3)}, \quad \overline{x}_5 = \rho_5(\mu) e^{-i(5\omega_1(\mu)t + \alpha_5)}. \end{aligned} \tag{17}$$

Подставив (17) в (14) получим приближенное периодическое решение (14) типа «бегущая волна». Это решение рождается орбитально устойчивым периодическим решением.

При уменьшении μ и его прохождении через следующее значение μ_2^*: $\mathrm{Re}\ \lambda_2(\mu_2^*) = 0$ от нулевого решения (5)–(6) в результате бифуркации типа Андронова–Хопфа рождается второе решение типа «бегущая волна». Для построения указанного периодического решения вновь переходим к (15) и строим эти решения в виде

$$\begin{aligned} &x_2 = \rho_2 e^{i2\varphi_2}, \quad x_6 = \rho_6 e^{i(6\varphi_2 + \beta_3)}, \quad x_{10} = \rho_{10} e^{i(10\varphi_2 + \beta_5)}, \\ &\rho_k = \rho_k(t, \mu), \quad \varphi_2 = \varphi_2(t, \mu) \end{aligned} \tag{18}$$

© *Ю.А. Хазова*

и соответствующие им комплексные переменные $\overline{x}_2, \overline{x}_6, \overline{x}_{10}$. Остальные компоненты в (15) полагаются нулевыми. В полученной системе относительно ρ_2, ρ_6, ρ_{10} находим стационарные $\rho_k = \rho_k(\mu) > 0$, $k = 2, 6, 10$; β_3, β_5 и $\dot{\varphi}_2 = \omega_2(\mu)$. Следовательно, система (15) имеет периодическое решение при $\mu < \mu_2^*$ вида

$$x_2 = \rho_2(\mu)e^{i2\omega_2(\mu)t}, \quad x_6 = \rho_6(\mu)e^{i(6\omega_2(\mu)t+\beta_3)}, \quad x_{10} = \rho_{10}(\mu)e^{i(10\omega_2(\mu)t+\beta_5)},$$

$$\overline{x}_2 = \rho_2(\mu)e^{-i2\omega_2(\mu)t}, \quad \overline{x}_6 = \rho_6(\mu)e^{-i(6\omega_2(\mu)t+\beta_3)}, \quad \overline{x}_{10} = \rho_{10}(\mu)e^{-i(10\omega_2(\mu)t+\beta_5)}. \tag{19}$$

Решение (19) системы (15) рождается неустойчивым с индексом неустойчивости 2.

Обратимся к вопросу о динамике устойчивости решения (19) при уменьшении μ. Для этого перейдем к анализу линеаризованной в окрестности периодического решения (19) системе (15). Для получения этой линеаризованной системы линеаризуем исходное уравнение (5)–(6) на найденном периодическом решении (19). В результате получим

$$\dot{u} = \mu\triangle u - u - \Lambda Qu + \frac{\Lambda}{2}Qu_2^2 \cdot Qu, \tag{20}$$

где u_2 – вторая бегущая волна.

Отметим, что ключевую роль в анализе динамики устойчивости играют переменные x_1, x_3, x_5 и им сопряженные $\overline{x}_1$, $\overline{x}_3$, $\overline{x}_5$. Проведенная линеаризация приводит относительно этих переменных к системе уравнений

$$\dot{x}_1 = \lambda_1 x_1 + \Big((6\rho_2^2 + 6\rho_6^2 + 6\rho_{10}^2)x_1 + 3\rho_2^2 e^{i2\omega_2 t}\overline{x}_3 + 6\rho_2\rho_6 e^{i(2\omega_2 t+\beta_3)}\overline{x}_3 +$$
$$+6\rho_6\rho_{10}e^{i(2\omega_2 t+\beta_5-\beta_3)}\overline{x}_3 + 6\rho_6\rho_{10}e^{i(-2\omega_2 t-\beta_5+\beta_3)}x_5\Big)\, e^{i\frac{2\pi}{3}},$$

$$\dot{x}_3 = \lambda_3 x_3 + \Big((6\rho_2^2 + 6\rho_6^2 + 6\rho_{10}^2)x_3 + 3\rho_2^2 e^{i2\omega_2 t}\overline{x}_1 + 6\rho_2\rho_6 e^{i(2\omega_2 t+\beta_3)}x_1 +$$
$$+6\rho_6\rho_{10}e^{i(2\omega_2 t+\beta_5-\beta_3)}x_1 + 6\rho_2\rho_{10}e^{i(-4\omega_2 t-\beta_5)}x_5\Big)\, e^{3i\frac{2\pi}{3}},$$

$$\dot{x}_5 = \lambda_5 x_5 + \Big((6\rho_2^2 + 6\rho_6^2 + 6\rho_{10}^2)x_5 + 3\rho_2^2 e^{i2\omega_2 t}x_1 + 6\rho_2\rho_6 e^{i(2\omega_2 t+\beta_3)}x_1 +$$
$$+6\rho_6\rho_{10}e^{i(4\omega_2 t+\beta_5)}y_3\Big)\, e^{5i\frac{2\pi}{3}},$$

плюс соответствующие выражения для сопряженной части. Анализ матрицы коэффициентов полученной системы и ей сопряженной дает возможность ответить на вопросы об устойчивости решения (19).

3. Численные результаты анализа параболической задачи

Для численных расчетов использовалась модельная задача (условие $\cos\omega = 0$)

$$u_t = \mu\triangle u - u - \Lambda Qu + \frac{\Lambda}{6}Qu^3, \quad t > 0,$$

с условием на окружности

$$u(\varphi + 2\pi, t) = u(\varphi, t),$$

где $L = L(\mu) = -1 - \mu\triangle - \Lambda Q$, $Qu(\varphi) = u(\varphi + 2\pi/3)$.

Зафиксируем следующие переменные $K = 8$, $\gamma = 0.6$, $\omega = -0.675132$, $\Lambda = 3$.

Численный анализ показал, что первая бегущая волна, рождающаяся в результате бифуркации Андронова–Хопфа, при переходе бифуркационного параметра μ через $\mu_1^* = 0.5$, рождается орбитально устойчивой. Данное решение возникает, когда собственное значение нулевого решения переходит через ноль колебательным образом. Используя формализм метода Галеркина, была проанализирована динамика изменений решения при уменьшении параметра μ. Так, при отходе бифуркационного параметра от критического значения в область надкритичности амплитуда решения незначительно возрастает; точки отрицательного спектра возрастают и приближаются к нулю, но не переходят на положительную полуось. Максимальной точкой спектра на всем промежутке изменения параметра $(0, \mu_1^*)$ является 0. Это в свою очередь позволяет сделать вывод, что первая бегущая волна сохраняет устойчивость на всем промежутке изменения параметра $(0, \mu_1^*)$.

Вторая бегущая волна, рождающаяся в результате бифуркации Андронова–Хопфа, при переходе бифуркационного параметра μ через $\mu_2^* = 0.125$. Решение рождается неустойчивым с индексом неустойчивости два, так как две комплексно-сопряженные точки спектра имеют положительную действительную часть.

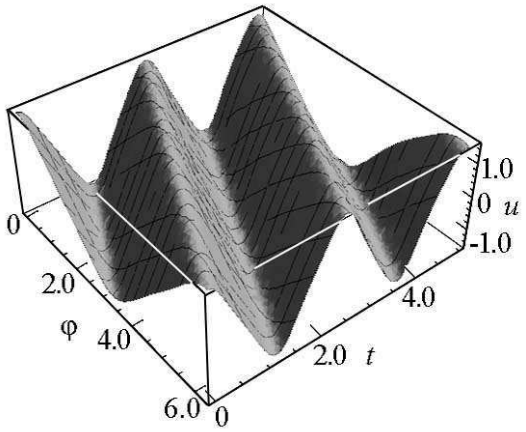


Рис. 1. Первая бегущая волна при фиксированном значении $N = 6$, рождающаяся орбитально устойчивой в результате бифуркации Андронова–Хопфа при переходе бифуркационного параметра μ через значение $\mu_1^* = 0.5$, здесь φ – пространственная переменная, t – переменная времени, u – значение функции $u(\varphi, t)$

Fig.1. The first traveling wave at a fixed value $N = 6$, born orbitally stable as a result of the Andronov–Hopf bifurcation in the transition of the bifurcation parameter μ through the value $\mu_1^* = 0.5$, here φ – spatial variable, t – time variable, u – function value $u(\varphi, t)$

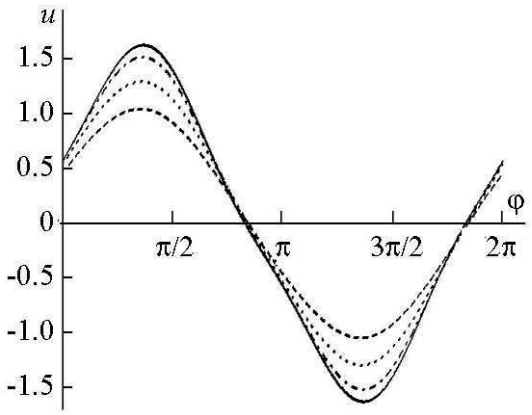


Рис. 2. График роста амплитуды первой бегущей волны при фиксированном $N = 6$ в зависимости от уменьшения бифуркационного параметра $\mu = 0.3$; 0.2; 0.1; 0.05, здесь φ – пространственная переменная, u – значение функции $u(\varphi, t)$

Fig.2. Growth of the amplitude of the first traveling wave with a fixed $N = 6$ depending on the decrease of the bifurcation parameter $\mu = 0.3$; 0.2; 0.1; 0.05, here φ – spatial variable, u – function value $u(\varphi, t)$

© *Ю.А. Хазова*

Исследование динамики спектра при уменьшении параметра μ показывает поведение максимальных точек спектра. При уменьшении μ и прохождении через μ_2^* положительная пара комплексно-сопряженных точек спектра переходит на отрицательную полуось и остается там при дальнейшем уменьшении бифуркационного параметра. Приведем в качестве примера полученные численные результаты при фиксированных $N = 6$, $\Lambda = 3$, а именно три максимальные точки спектра $\sigma(\mu)$ (комплексно-сопряженная часть не приводится для упрощения):

$$\begin{aligned}
\sigma(0.09) &= (\ldots, -4.2289 + 0.0177I, -2.0319 + 2.1080I, 0.1431 - 2.1080I),\\
\sigma(0.07) &= (\ldots, -3.6864 + 0.0347I, -1.6943 + 1.8196I, 0.02593 - 1.8196I),\\
\sigma(0.066) &= (\ldots, -3.574 + 0.0370I, -1.6268 + 1.7606I, 0.00420 - 1.7606I),\\
\sigma(0.065) &= (\ldots, -3.5463 + 0.0375I, -1.6099 + 1.7458I, -0.00113 - 1.7458I),\\
\sigma(0.04) &= (\ldots, -2.3686 - 1.5242I, -1.1839 + 1.3570I, -0.1211 - 1.3570I),\\
\sigma(0.005) &= (\ldots, -1.1713 - 0.8822I, -0.5256 + 0.5994I, -0.2993 - 0.5994I).
\end{aligned}$$

Здесь I – мнимая единица.

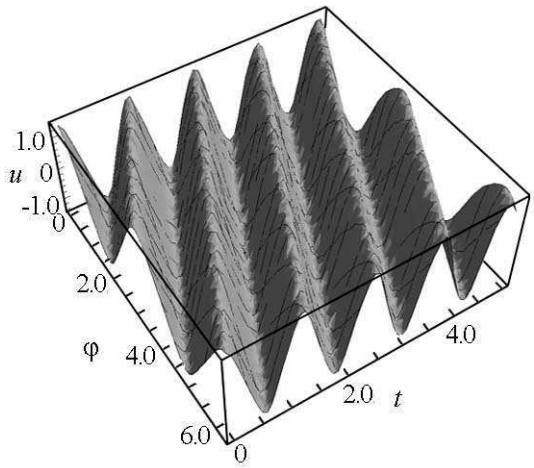


Рис. 3. Вторая бегущая волна при фиксированном значении $N = 6$, рождающаяся неустойчивой с индексом неустойчивости два в результате бифуркации Андронова–Хопфа при переходе бифуркационного параметра μ через значение $\mu_2^* = 0.125$, здесь φ – пространственная переменная, t – переменная времени, u – значение функции $u(\varphi, t)$

Fig.3. The second traveling wave at fixed value $N = 6$, is born unstable with an instability index of two as a result of the Andronov–Hopf bifurcation in the transition of the bifurcation parameter μ through the value $\mu_2^* = 0.125$, here φ – spatial variable, t – time variable, u – function value $u(\varphi, t)$

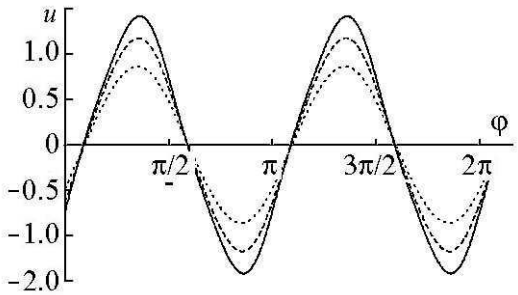


Рис. 4. График роста амплитуды второй бегущей волны при фиксированном $N = 6$ в зависимости от уменьшения бифуркационного параметра $\mu = 0.09$; 0.06; 0.03, здесь φ – пространственная переменная, u – значение функции $u(\varphi, t)$

Fig.4. Growth of the amplitude of the second traveling wave with a fixed $N = 6$ depending on the decrease of the bifurcation parameter $\mu = 0.09$; 0.06; 0.03, here φ – spatial variable, u – function value $u(\varphi, t)$

© Ю.А. Хазова

Такое поведение точек спектра дает возможность сделать вывод, что в системе реализуется бифуркация рождения семейства двупарметрических торов. Дальнейший анализ поведения рожденных торов является более сложной задачей и оставлена автором для дальнейшего исследования.

Заключение

Для параболического уравнения с поворотом пространственной переменной на окружности рассмотрены вопросы о существовании, форме и устойчивости решений типа бегущих волн. На основе метода центральных многообразий доказана теорема о существовании решения типа бегущих волн. Используя формализм метода Галеркина исследована динамика изменений рожденных решений, их форма и устойчивость. Для анализа устойчивости решения типа бегущей волны использовалась линеаризация в окрестности периодического решения. Численные расчеты с помощью пакета Mathematica показали, что применение метода Галеркина приводит к качественно и количественно правильным результатам.

Исследование выполнено при поддержке Программы развития федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего образования «Крымский федеральный университет имени В.И. Вернадского» на 2015–2024 годы по проекту Сеть академической мобильности «Академическая мобильность молодых ученых России» в 2016 году на базе ФГБУН Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН, лаборатория дифференциальных и разностных уравнений.

Библиографический список

1. *Белан Е.П., Хазова Ю.А.* Динамика стационарных структур в параболической задаче на окружности с отражением пространственной переменной // Динамические системы. 2014. Т. 4(32), № 1–2. С. 43–57.
2. *Хазова Ю.А.* Динамика стационарных структур в параболической задаче на отрезке с отражением пространственной переменной // Динамические системы. 2014. Т. 4(32), № 3–4. С. 245–257.
3. *Хазова Ю.А.* Стационарные структуры в параболической задаче с отражением пространственной переменной // Таврический вестник информатики и математики. 2015. № 3(28). С. 82–95.
4. *Хазова Ю.А.* Стационарные структуры в параболической задаче с отражением пространственной переменной // Актуальные направления научных исследований XXI века: теория и практика. 2015. Т. 3, № 8–4 (19–4). С. 3–16.
5. *Ахманов С.А., Воронцов М.А., Иванов В.Ю.* Генерация структур в оптических системах с двумерной обратной связью: на пути к созданию нелинейно-оптических аналогов нейронных сетей // в кн. Новые физические принципы оптической обработки информации. М.: Наука, 1990. С. 263–325.

© *Ю.А. Хазова*

6. *Воронцов М.А., Железных Н.И.* Поперечная бистабильность и мультистабильность в нелинейных оптических системах с обратной связью // Мат. моделирование. 1990. Т. 2, № 2. С. 31–38.
7. *Разгулин А.В.* Нелинейные модели оптической синергетики. М.: МАКС Пресс, 2008. 203 с.
8. *Скубачевский А.Л.* О бифуркации Хопфа для квазилинейного параболического функционально-дифференциального уравнения // Дифференциальные уравнения. 1998. Т. 34, № 10. С. 1394–1401.
9. *Белан Е.П.* О взаимодействии бегущих волн в параболическом функционально–дифференциальном уравнении // Дифференциальные уравнения. 2004. Т. 40, № 5. С. 645–654.
10. *Белан Е.П., Лыкова О.Б.* Бифуркации вращающихся структур в параболическом уравнении с преобразованием поворота пространственной переменной // Динамические системы. 2009. Т. 27. С. 3–16.
11. *Марсден Дж., Мак-Кракен М.* Бифуркация рождения цикла и её приложения. М.: Мир, 1980. 368 с.
12. *Хенри Д.* Геометрическая теория полулинейных параболических уравнений. М.: Мир, 1985. 376 с.

References

1. Belan E.P., Khazova Yu.A. Dynamics of stationary structures in a parabolic problem with reflection spatial variable in the case of a circle. *Dinamicheskie Sistemy.* 2014. Vol. 4(32), No. 1–2. S. 43–57 (in Russian).
2. Khazova Yu.A. Dynamics of stationary structures in a parabolic problem with reflection spatial variable in the case of a segment. *Dinamicheskie Sistemy.* 2014. Vol. 4(32), No. 3–4. S. 245–257 (in Russian).
3. Khazova Yu.A. Stationary structures in a parabolic problem with reflection spatial variable. *Tavricheskiy Vestnik Matematiki i Informatiki.* 2015. No. 3 (28). S. 82–95 (in Russian).
4. Khazova Yu.A. Stacionarniye strukturi v parabolicheskoy zadache s otrajeniem prostranstvinnoy peremennoi. *Aktualniye napravleniya nauchnih issledovaniy XXI veka: teoriya i praktika.* 2015. Vol. 3. S. 3–16 (in Russian).
5. Akhmanov S.A., Vorontsov M.A., Ivanov V.Yu. Controlling transverse-wave interactions in nonlinear optics generations of spatiotemporal structures. *J. Optical Soc. Amer. Ser. B.* 1992. V. 9., No. 1. P. 78–90.
6. Vorontsov M.A., Zheleznykh N.I. Poperechnaya bistabilnost i multistabilnost v nelineynih opticheskih sistemah s obratnoi svyazyu. *Matematicheskoe Modelirovanie.* 1990. Vol. 2, No. 2. S. 31–38 (in Russian).
7. Razgulin A.V. Nelineynie Modeli Opticheskoi Sinergetiki M.: MAKS Press, 2008. 203 s. (in Russian)
8. Skubachevskii A.L. On the Hopf bifurcation for a quasilinear parabolic functional–differential equation // Differential Equations. 1998. V. 34., No. 10. P. 1395–1402.

© *Ю.А. Хазова*

9. Belan E.P. On the interaction of traveling waves in a parabolic functional-differential equation. *Differential Equations.* 2004. Vol. 40, No. 5. P. 692–702.
10. Belan E.P. Bifurkacii vrashayushihsya structur v parabolicheskom uravnenii s preobrazovaniem povorota prostranstvennoy peremennoy. *Dinamicheskie Sistemy.* 2009. Vol. 27. S. 3–16 (in Russian).
11. Marsden J., McCracken M. The Hopf bifurcation and its applications. *Applied Mathematical Sciences*. 1976. No. 19.
12. Henry D. Geometric Theory of Semilinear Parabolic Eguations. Berlin etc., 1981.

Хазова Юлия Александровна – родилась в Севастополе (1989), окончила Таврический национальный университет имени В.И. Вернадского (2011) по специальности математика. Работает ассистентом кафедры дифференциальных уравнений и геометрии факультета математики и информатики Таврической академии (структурное подразделение), Крымский федеральный университет имени В.И. Вернадского. Опубликовала 5 научных статей по направлениям нелинейная оптика, параболические уравнения с преобразованиями пространственной переменной.

295007, г. Симферополь, проспект Академика Вернадского, 4, факультет математики и информатики, ауд. 319В
Крымский федеральный университет имени В.И. Вернадского
E-mail: hazova.yuliya@hotmail.com

© *Ю.А. Хазова*

УДК 517.93

ДИСКРЕТНЫЙ ОСЦИЛЛЯТОР ВАН ДЕР ПОЛЯ: КОНЕЧНЫЕ РАЗНОСТИ И МЕДЛЕННЫЕ АМПЛИТУДЫ

В. В. Зайцев

Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева
Россия, 443086 Самара, Московское шоссе, д. 34
E-mail: zaitsev@samsu.ru
Поступила в редакцию 4.08.2017, после доработки 27.10.2017

Для дискретизации времени в дифференциальном уравнении движения осциллятора (генератора) ван дер Поля предложено использовать сочетание численного метода конечных разностей и асимптотического метода медленно меняющихся амплитуд. Разностные аппроксимации временных производных выбираются таким образом, чтобы, во-первых, сохранить в дискретном времени консервативность и собственную частоту линейного контура автоколебательной системы. Во-вторых, требуется совпадение разностного укороченного уравнения для комплексной амплитуды автоколебаний в дискретном времени с аппроксимацией Эйлера укороченного уравнения для амплитуды автоколебаний в аналоговой системе-прототипе. Показано, что реализация такого подхода позволяет сформировать дискретное отображение осциллятора ван дер Поля и ряд отображений осцилляторов томсоновского типа. Адекватность дискретных моделей аналоговым прототипам подтверждена также численным экспериментом.

Ключевые слова: Автоколебательная система, уравнение ван дер Поля, дискретное время, конечные разности, медленно меняющиеся амплитуды, укороченные уравнения, дискретные отображения томсоновских автогенераторов.

DOI: 10.18500/0869-6632-2017-25-6-70-78

Образец цитирования: Зайцев В.В. Дискретный осциллятор ван дер Поля: Конечные разности и медленные амплитуды // Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2017. Т. 25, № 6. С. 70–78. DOI: 10.18500/0869-6632-2017-25-6-70–78

THE DISCRETE VAN DER POL OSCILLATOR: FINITE DIFFERENCES AND SLOW AMPLITUDES

V. V. Zaitsev

Samara National Research University
34, Moskovskoe shosse, 443086 Samara, Russia
E-mail: zaitsev@samsu.ru
Received 4.08.2017, revised 27.10.2017

For sampling of time in a differential equation of movement of van der Pol oscillator (generator) it is offered to use a combination of the numerical method of finite differences

© *В.В. Зайцев*

and the asymptotic method of the slowl-changing amplitudes. The difference approximations of temporal derivatives are selected so that, first, to save conservatism and natural frequency of the linear circuit of self-oscillatory system in the discrete time. Secondly, coincidence of the difference shortened equation for the complex amplitude of self-oscillations in the discrete time with Euler's approximation of the shortened equation for amplitude of self-oscillations in analog system prototype is required. It is shown that realization of such approach allows to create discrete mapping of the van der Pol oscillator and a number of mappings of Thomson type oscillators. The adequacy of discrete models to analog prototypes is confirmed with also numerical experiment.

Keywords: Self-oscillatory system, van der Pol's equation, the discrete time, finite differences, slowly changing amplitudes, the shortened equations, the discrete mapping of Thomson self-oscillators.

DOI: 10.18500/0869-6632-2017-25-6-70-78

References: Zaitsev V.V. The discrete van der Pol oscillator: Finite differences and slow amplitudes. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics.* 2017. Vol. 25. Issue 6. P. 70–78. DOI: 10.18500/0869-6632-2017-25-6-70-78

Введение

В теории нелинейных колебаний осциллятор (генератор) ван дер Поля – автоколебательная система на основе высокодобротного резонатора с кубической нелинейностью в цепи положительной обратной связи – служит универсальной моделью систем различной физической природы [1, 2]. С учётом того, что современная теория рассматривает эволюцию динамических систем как в непрерывном (НВ), так и дискретном времени (ДВ) представляет интерес временная дискретизация в математической модели осциллятора, результатом которой является разностное уравнение движения.

Переход к дискретному времени в дифференциальных моделях линейных аналоговых фильтров широко применяется в практике проектирования цифровых фильтров [3]. Помимо решения прикладных задач, такой подход позволяет ввести в рассмотрение колебательные ДВ-системы как объекты исследования теории колебаний. Применяемая процедура дискретизации времени накладывает свой отпечаток на характеристики порождаемой ДВ-системы. Поэтому один и тот же аналоговый прототип отображается во множество объектов динамики в дискретном времени. Это утверждение, справедливое для линейных систем, тем более относится к системам, содержащим нелинейности.

Один из способов временной дискретизации использует введение нелинейных дельта-воздействий в гамильтониан или уравнение движения НВ-системы. Например, в монографии [4] этим способом построено универсальное и стандартное отображений. В статье [5] анализ дельта-импульсной синхронизации применяется для вывода дискретных отображений неавтономного осциллятора ван дер Поля–Дюффинга. В работе [6] для проектирования ДВ-осциллятора ван дер Поля было предложено использовать условие инвариантности импульсной характеристики линейного резонатора автоколебательной системы относительно дискретизации времени. Принцип импульсной инвариантности можно сформулировать также как замену ядра интегрального уравнения движения нелинейного осциллятора дискретизирующей последовательностью дельта-функций с весовыми коэффициентами из отсчетов импульсной характеристики линейного аналогового контура.

© *В.В. Зайцев*

Более традиционные способы основаны на конечно-разностных аппроксимациях временных производных в дифференциальных моделях динамических систем. Например, в статье [7] и монографии [8] дискретизация проведена методом Эйлера. Отмечено, что полученные таким образом дискретные отображения наследуют основные черты аналоговых прототипов, но и приобретают новые свойства. Возможности метода конечных разностей для проектирования ДВ-осцилляторов томсоновского типа проанализированы в работе [9].

В настоящем сообщении дискретизацию времени в дифференциальной модели генератора ван дер Поля предлагается провести на основе совместного использования методов конечных разностей и медленно меняющихся амплитуд.

1. Осциллятор ван дер Поля в непрерывном времени

Осциллятор ван дер Поля – базовая модель теории нелинейных колебаний – задается уравнением движения вида

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = \frac{\omega_0}{Q}\Big(p\big(1-x^2\big)-1\Big)\frac{dx}{dt}, \tag{1}$$

где ω_0 и Q – собственная частота и добротность линейного резонатора, p – параметр превышения порога генерации (порог $p=1$). Предполагая в дальнейшем дискретизацию времени с интервалом Δ, введём в уравнение (1) безразмерную временную переменную $\tau = t/\Delta$

$$\frac{d^2x}{d\tau^2} + 4\pi^2\Omega_0^2 x = 2\pi\nu\Big(p\big(1-x^2\big)-1\Big)\frac{dx}{d\tau}. \tag{2}$$

Здесь $\Omega_0 = \omega_0/\omega_d$ – собственная частота, измеряемая в единицах частоты дискретизации $\omega_d = 2\pi/\Delta$; $\nu = \Omega_0/Q$ – полоса резонатора.

Считая, что $\nu \ll 1$, анализ уравнения (2) проведём в приближении метода медленно меняющихся амплитуд (метода ММА), широко используемого при решении прикладных задач теории нелинейных колебаний [10]. В рамках метода осцилляции $x(t)$ представляются в виде

$$x(\tau) = \frac{1}{2}A(\tau)\exp(j2\pi\Omega_0\tau) + \frac{1}{2}A^*(\tau)\exp(-j2\pi\Omega_0\tau) \tag{3}$$

с комплексной амплитудой $A(\tau)$ функцией времени, медленной по сравнению с $\exp(j2\pi\Omega_0\tau)$. Медленность комплексной амплитуды позволяет пренебречь второй производной $A''(\tau)$ в левой части уравнения (2) и первой производной $A'(\tau)$ в его правой части.

После выделения первой гармоники осцилляций (3) из правой части уравнения (2) и приравнивания амплитудных коэффициентов при $\exp(j2\pi\Omega_0\tau)$ в его правой и левой частях получим так называемое укороченное уравнение вида

$$\frac{dA}{d\tau} = \pi\nu\left(p\left(1-\frac{1}{4}|A|^2\right)-1\right)A. \tag{4}$$

© В.В. Зайцев

На дискретной временной сетке $\tau_n = n\Delta\tau$ с шагом $\Delta\tau = 1$ явный метод Эйлера дает разностную форму укороченного уравнения (4)

$$A_n = A_{n-1} + \pi\nu\left(p\left(1 - \frac{1}{4}|A_{n-1}|^2\right) - 1\right)A_{n-1}. \tag{5}$$

Здесь $A_n = A(\tau_n)$ – функция дискретного времени.

2. Осциллятор ван дер Поля в дискретном времени

При переходе к дискретному времени в уравнении (2) будем стремиться выполнить два условия. Во-первых, разностный оператор второго порядка, соответствующий левой части уравнения (2), должен быть консервативным и порождать собственные колебания с частотой Ω_0. Это условие приводит к уравнению собственных колебаний в дискретном времени

$$x_n - 2k_1x_{n-1} + k_2x_{n-2} = 0, \tag{6}$$

в котором действительные коэффициенты разностной аппроксимации k_1 и k_2 таковы, что

$$x_n = A_0\exp(j2\pi\Omega_0 n) = A_0Z_0^n.$$

Записав для однородного разностного уравнения (6) характеристическое уравнение

$$Z_0^2 - 2k_1Z_0 + k_2 = 0,$$

нетрудно получить $|Z_0|^2 = 1 = k_2$ и $\mathrm{Re}\ (\mathrm{Z}_0) = \cos(2\pi\Omega_0) = k_1$. Теперь полное уравнение движения ДВ-осциллятора ван дер Поля представим в виде

$$x_n - 2\cos(2\pi\Omega_0)x_{n-1} + x_{n-2} = 2\pi\nu\Big(p\big(1 - x_{n-1}^2\big) - 1\Big)\big(k_3x_{n-1} - x_{n-2}\big). \tag{7}$$

При этом для определения коэффициента k_3 разностной аппроксимации производной в правой части (2) потребуем, чтобы укороченное уравнение для комплексной амплитуды автоколебаний в ДВ-генераторе (7) совпадало с эйлеровым приближением (5) укороченного уравнения (4) для комплексной амплитуды автоколебаний в НВ-генераторе (2).

Метод ММА на автоколебания в дискретном времени распространён в статье [11]. Следуя этой работе, автоколебания в (7) запишем в виде

$$x_n = \frac{1}{2}A_nZ_0^n + \frac{1}{2}A_n^*Z_0^{-n}.$$

Теперь медленность комплексной амплитуды A_n позволяет проводить преобразования левой части уравнения (7) с учётом приближённого равенства $A_n - A_{n-1} = A_{n-1} - A_{n-2}$, а в его правой части – считать комплексную амплитуду постоянной. Все остальные шаги ДВ-метода ММА совпадают с аналогичными шагами НВ-метода. В результате приходим к следующему укороченному уравнению для ДВ-осциллятора (7):

$$A_n = A_{n-1} + \pi\nu\frac{\left(k_3 - Z_0^{-1}\right)}{j\mathrm{Im}\ (\mathrm{Z}_0)}\left(p\left(1 - \frac{1}{4}|A_{n-1}|^2\right) - 1\right)A_{n-1}. \tag{8}$$

© *В.В. Зайцев*

Нетрудно увидеть, что уравнение (8) совпадает с уравнением (5), если положить $k_3 = \mathrm{Re}\ (\mathrm{Z}_0) = \cos(2\pi\Omega_0)$. Таким образом, искомое дискретное отображение (разностное уравнение движения), определяющее ДВ-осциллятор ван дер Поля, имеет вид

$$\begin{aligned} x_n - 2\cos(2\pi\Omega_0)x_{n-1} + x_{n-2} = \\ = 2\pi\nu\Big(p\big(1 - x_{n-1}^2\big) - 1\Big)\big(\cos(2\pi\Omega_0)x_{n-1} - x_{n-2}\big). \end{aligned} \tag{9}$$

При умеренных превышениях порога генерации ($p \leq 10$), когда автоколебания еще можно считать квазигармоническими, отображение (9) воспроизводит в дискретном времени основные характеристики НВ-осциллятора (1). Этот вывод непосредственно следует из способа его формирования. Тем не менее, приведем также ряд результатов цифрового анализа временных рядов, генерируемых по алгоритму (9).

3. Численный эксперимент с ДВ-осциллятором ван дер Поля

Энергетические характеристики НВ- и ДВ-осцилляторов можно сопоставить путём сравнения зависимостей амплитуд A_c и A_d первой гармоники установившихся автоколебаний от величины параметра превышения порога генерации. Соотношение этих зависимостей иллюстрируют графики, приведенные на рис. 1.

Для дискретного осциллятора (9) с параметрами $\Omega_0 = 0.17$, $Q = 20$, $\nu = 8.5 \cdot 10^{-3}$ график зависимости $A_d(p)$ получен путем оценки амплитуды автоколебаний по формуле

$$A_d(p) = \sqrt{x_N^2(p) + \left(\frac{\cos(2\pi\Omega_0)x_N(p) - x_{N-1}(p)}{\sin(2\pi\Omega_0)}\right)^2} \tag{10}$$

на основе отсчётов x_{N-1} и x_N установившихся автоколебаний. Отметим, что при записи (10) использована аппроксимация производной $y = dy/d\tau$ вида [11]

$$\mathrm{sinc}\,(2\pi\Omega_0)y_n = \big(\cos(2\pi\Omega_0)x_n - x_{n-1}\big),$$

где $\mathrm{sinc}\,(2\pi\Omega_0) = \sin(2\pi\Omega_0)/2\pi\Omega_0$ – кардинальный синус.

Оценка амплитуды $A_c(p)$ установившихся автоколебаний осциллятора ван дер Поля (1) проведена на основе результатов численного интегрирования задачи Коши для уравнения движения (2) методом Рунге–Кутты четвёртого порядка с фиксированным шагом $\Delta\tau = 1/M$. Временные ряды для оценки $A_c(p)$ сформированы путём выборки из численного решения $X_n = x_{nM}$, $Y_n = y_{nM} = x'_\tau(\tau_{nM})$, а затем использована формула

$$A_c(p) = \sqrt{X_N^2(p) + \left(\frac{Y_N(p)}{2\pi\Omega_0}\right)^2}.$$

В целом, как это следует из рис. 1, зависимости $A_c(p)$ и $A_d(p)$ близки как качественно, так и количественно – максимальное расхождение их значений в представленном примере составляет 7.2%. Причем причина замедленного роста $A_d(p)$ по

© В.В. Зайцев

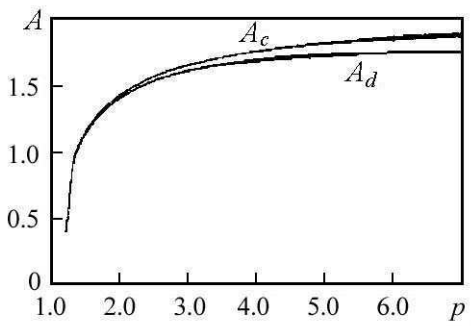


Рис. 1. Огибающие автоколебаний НВ- и ДВ-осцилляторов

Fig. 1. Amplitudes of self-oscillations in continuous and discrete time

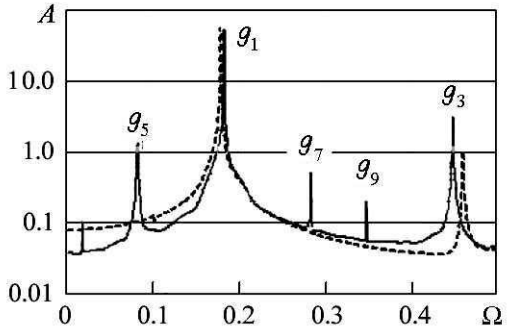


Рис. 2. Амплитудные спектры НВ- и ДВ-осцилляторов

Fig. 2. Amplitude ranges of self-oscillations in continuous and discrete time

сравнению с $A_c(p)$ при увеличении параметра p заключается в повышенном уровне гармоник у ДВ-осциллятора (9). Это подтверждается рис. 2, на котором для $p = 5$ сплошной линией показан амплитудный спектр автоколебаний осциллятора (9), а штриховой – НВ-осциллятора ван дер Поля (2). Символами g_k отмечены гармоники с номерами k. Здесь следует обратить внимание на неустранимый эффект подмены частот (наложения спектров) гармоник автоколебаний в дискретном времени. Что касается основных частот автоколебаний, то они в представленном примере у осцилляторов (2) и (9) весьма близки.

4. Разновидности ДВ-осцилляторов томсоновского типа

Основываясь на дискретном отображении (уравнении движения) осциллятора ван дер Поля, можно предложить ещё ряд ДВ-автогенераторов томсоновского типа.

Вариант уравнения движения (9) нетрудно получить, если ввести в рассмотрение параметр консервативности резонатора ДВ-автогенератора

$$\delta = 1 - \pi\nu \to \exp(-\pi\nu).$$

Тогда (9) принимает вид

$$\begin{aligned} x_n - 2\delta\cos(2\pi\Omega_0)x_{n-1} + \delta^2 x_{n-2} = \\ = 2\pi\Omega_0\gamma\big(1 - x_{n-1}^2\big)\big(\cos(2\pi\Omega_0)x_{n-1} - x_{n-2}\big), \end{aligned} \tag{11}$$

где $\gamma = pQ$ – константа глубины обратной связи.

Очевидно, что при $\delta = 1$ разностное уравнение

$$x_n - 2\cos(2\pi\Omega_0)x_{n-1} + x_{n-2} = 2\pi\Omega_0\gamma\big(1 - x_{n-1}^2\big)\big(\cos(2\pi\Omega_0)x_{n-1} - x_{n-2}\big)$$

представляет собой результат дискретизации времени в уравнении ван дер Поля в его стандартной форме записи [2]

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = \omega_0\gamma\big(1 - x^2\big)\frac{dx}{dt}.$$

© В.В. Зайцев

Вариант ДВ-автогенератора с перестройкой частоты задаётся уравнением

$$x_n - 2\cos\bigl(2\pi\Omega_0(1+m_n)\bigr)x_{n-1} + x_{n-2} = \\ = 2\pi\nu\Bigl(p\bigl(1-x_{n-1}^2\bigr)-1\Bigr)\bigl(\cos(2\pi\Omega_0)x_{n-1} - x_{n-2}\bigr),$$

где $m_n = \Delta\Omega_n/\Omega_0$ – текущее значение индекса частотной модуляции, $\Delta\Omega_n$ – девиация частоты.

Наконец, проведя в (11) замену $1 - x_{n-1}^2 \to G(x_{n-1})$, где $G(x)$ – четная функция, получим уравнение движения томсоновского ДВ-автогенератора с нелинейностью общего вида

$$x_n - 2\delta\cos(2\pi\Omega_0)x_{n-1} + \delta^2 x_{n-2} = \\ = 2\pi\Omega_0\gamma G(x_{n-1})\bigl(\cos(2\pi\Omega_0)x_{n-1} - x_{n-2}\bigr). \tag{12}$$

Заключение

Предложенный метод дискретизации времени в дифференциальном уравнении квазигармонической автоколебательной системы (системы томсоновского типа) позволяет перейти к рассмотрению дискретных отображений, гарантированно обладающих динамическими характеристиками аналоговых систем-прототипов. Такие отображения можно использовать в качестве нелинейных функциональных узлов в численных моделях сложных радиоэлектронных устройств. Кроме того, они могут служить основой алгоритмов обработки дискретных (цифровых) сигналов, таких, например, как синхронное и частотное детектирование [12].

При значительных превышениях порога генерации, когда перестаёт выполняться условие квазилинейности исходной автоколебательной системы, дискретные отображения приобретают новые свойства, позволяющие рассматривать их как самостоятельные объекты нелинейной динамики в дискретном времени.

Библиографический список

1. *Кузнецов А.П., Кузнецов С.П., Рыскин Н.М.* Нелинейные колебания. М.: Физматлит, 2005. 292 с.
2. *Кузнецов А.П., Селиверстова Е.С., Трубецков Д.И., Тюрюкина Л.В.* Феномен уравнения ван дер Поля // Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2014. Т. 22, № 4. С. 3–42.
3. *Оппенгейм А., Шафер Р.* Цифровая обработка сигналов. М.: Техносфера, 2006. 856 с.
4. *Заславский Г.М.* Гамильтонов хаос и фрактальная динамика. М.–Ижевск: НИЦ РХД, Ижевский институт компьютерных исследований, 2010. 472 с.
5. *Кузнецов А.П., Тюрюкина Л.В.* Синхронизация автоколебательной системы ван дер Поля–Дуффинга короткими импульсами // Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2004. Т. 12, № 5. С. 16–31.

© *В.В. Зайцев*

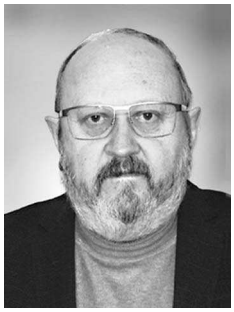
6. *Зайцев В.В., Давыденко С.В, Зайцев О.В.* Динамика автоколебаний дискретного осциллятора ван дер Поля // Физика волновых процессов и радиотехнические системы. 2000. Т. 3, № 2. С. 64–67.
7. *Кузнецов А.П., Савин А.В., Седова Ю.В.* Бифуркация Богданова–Такенса: От непрерывной к дискретной модели // Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2009. Т. 17, № 6. С. 139–158.
8. *Морозов А.Д.* Резонансы, циклы и хаос в квазиконсервативных системах. М.–Ижевск: НИЦ РХД, Ижевский институт компьютерных исследований, 2005. 424 с.
9. *Зайцев В.В., Федюнин Э.Ю., Шилин А.Н.* Конечные разности в задаче синтеза нелинейных ДВ-осцилляторов // Физика волновых процессов и радиотехнические системы. 2017. Т. 20, № 2. С. 35–41.
10. *Капранов М.В., Кулешов В.Н., Уткин Г.М.* Теория колебаний в радиотехнике. М.: Наука, 1984. 320 с.
11. *Зайцев В.В.* О дискретных отображениях осциллятора ван дер Поля // Физика волновых процессов и радиотехнические системы. 2014. Т. 17, № 1. С. 35–40.
12. *Линдсей В.* Системы синхронизации в связи и управлении. М.: Мир, 1972. 600 с.

References

1. Kuznetsov A.P., Kuznetsov S.P., Ryskin N.M. Nelinejnye Kolebaniya. M.: Fizmatlit, 2005. 292 p. (in Russian).
2. Kuznetsov A.P., Seliverstova E.S., Trubetskov D.I., Turukina L.V. Phenomenon of the van der Pol equation. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics.* 2014. Vol. 22, Issue 4. Pp. 3–42 (in Russian).
3. Oppenheim A., Schafer R. Discrete-Time Signal Processing. Prentice-Hall Inc., New Jersey, 1999. 870 p.
4. Zaslavsky G.M. Hamiltonian Chaos and Fractional Dynamics. Oxford: University Press, 2005.
5. Kuznetsov A.P., Turukina L.V. Synchronization of self-oscillating van der Pol–Dyuffing system by the short pulses. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics.* 2004. Vol. 12, Issue 5. Pp. 16–31 (in Russian).
6. Zaitsev V.V., Davydenko S.V, Zaitsev O.V. Dynamics of self-oscillations of the discrete van der Pol oscillator. *Fizika Volnovykh Protsessov i Radiotekhnicheskie Sistemy.* 2000. Vol. 3, Issue 2. Pp. 64–67 (in Russian).
7. Kuznetsov A.P., Savin A.V., Sedova Yu.V. Bogdanov–Takens bifurcation: From flows to discrete systems. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics.* 2009. Vol. 17, Issue 6. Pp. 139–158 (in Russian).
8. Morozov A.D. Resonances, Cycles and Chaos in Quasi-conservative Systems. Moscow; Izhevsk: Regular and Chaotic Dynamics, 2005. 424 p. (in Russian).
9. Zaitsev V.V., Fedyunin E.Yu., Shilin A.N. Finite differences for design of nonlinear discrete time oscillators. *Fizika Volnovykh Protsessov i Radiotekhnicheskie Sistemy.* 2017. Vol. 20, Issue 2. Pp. 35–41 (in Russian).

© *В.В. Зайцев*

10. Kapranov M.V., Kuleshov V.N., Utkin G.M. The Theory of Oscillations in Radio Engineering. M.: Nauka, 1984. 320 p. (in Russian).
11. Zaitsev V.V. About discrete mapping the van der Pol oscillator. *Fizika Volnovykh Protsessov i Radiotekhnicheskie Sistemy.* 2014. Vol. 17, Issue 1. Pp. 35–40 (in Russian).
12. Lindsey W. Synchronization Systems in Communication and Control. New Jersy: Prentice Hall, 1972. 695 p.



Зайцев Валерий Васильевич – родился (1952) в селе Борское Куйбышевской области. Окончил Куйбышевский государственный университет (1975) и аспирантуру при Горьковском государственном университете (1980, кафедра А.Н. Малахова). Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук в ГГУ (1980). Профессор, заведующий кафедрой радиофизики Самарского университета. Область научных интересов: автоколебательные системы, статистическая радиофизика, компьютерное моделирование в радиофизике. Автор более 100 статей в рецензируемых журналах.

Россия, 443011 Самара, ул. академика Павлова, 1
Самарский университет
E-mail: zaitsev@samsu.ru

© *В.В. Зайцев*

УДК 681.3(072)

ОППОНИРОВАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ: ЧЕРЕЗ БУКВУ НОРМЫ – К ПРИНЦИПАМ ОБЪЕКТИВНОЙ ОЦЕНКИ

В. М. Аникин[1], *Б. Н. Пойзнер*[2]

[1]Национальный исследовательский Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского
Россия, 410012 Саратов, ул. Астраханская, 83
[2]Национальный исследовательский Томский государственный университет
Россия, 634050 Томск, пр. Ленина, 36
E-mail: AnikinVM@info.sgu.ru, pznr@mail.tsu.ru
Поступила в редакцию 22.06.2017

Авторы устанавливают методологическое родство в творчестве соискателя учёной степени и его оппонента, выявляя единый контекст, который связывает: обновление предмета исследования в диссертации, положения, выдвигаемые на защиту, принципы их экспертизы и оценивания достижений диссертанта, сущность формальных требований к отзыву оппонента и возможности его самовыражения как творческой фигуры, вовлечённой в познавательный процесс. Затронут историко-культурный аспект оппонирования. Современный оппонент (название термина соотнесено с древнеримскими триумфами) на практике играет роль критика, который оценивает и отрицательные, и положительные качества диссертации, и целью его работы является вынесение «бинарного» вердикта о научно-квалификационном качестве диссертации. Отмечается, что суть действий защищающегося и оппонента может быть охарактеризована античным понятием ἐπίδειξις (эпидейксис). Основные требования к официальному оппоненту – компетентность и объективность. По мнению авторов, проявлением объективности служат такие основные принципы, реализованные при критическом анализе диссертации, как следование идеалам научности, характеристика проведенного в диссертации совершенствования предмета исследования, квалификация защищаемого научного положения в контексте возникновения нового знания. Иллюстрируется недостаточность использования наукометрических показателей автора или отдельных его публикаций для формирования ценностной оценки научной работы. Демонстрируется корректность формулировок аспектных характеристик диссертации на примере анализа оппонентами магистерской и докторской диссертаций А.Н. Шварца, министра народного просвещения России в 1908–1910 гг., что говорит о преемственности критериев оценки диссертаций.

Ключевые слова: Оппонент, диссертация, предмет исследования, положение, выносимое на защиту, объективность экспертизы, пропонент, А.Н. Шварц.

DOI: 10.18500/0869-6632-2017-25-6-79-98

Образец цитирования: Аникин В.М., Пойзнер Б.Н. Оппонирование диссертации: через букву нормы – к принципам объективной оценки // Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2017. Т. 25, № 6. С. 79–98. DOI: 10.18500/0869-6632-2017-25-6-79-98

© *В.М. Аникин, Б.Н. Пойзнер*

OPPONING THE THESIS: THROUGH LETTERS OF NORM TO THE PRINCIPLES OF OBJECTIVE EVALUATION

V. M. Anikin[1], *B. N. Poizner*[2]

[1]Saratov State University
83, Astrakhanskaya, 410012 Saratov, Russia
[2]Tomsk State University
36 Lenin Ave., 634050 Tomsk, Russia
E-mail: AnikinVM@info.sgu.ru, pznr@mail.tsu.ru
Received 22.06.2017

The authors establish a methodological relationship in the creativity of the competitor of the scientific degree and his opponent, revealing a single context that links: the renewal of the subject of research in the thesis, the provisions put forward for defense, the principles of their examination and assessment of the achievements of the candidate, the essence of formal requirements for revoking the opposition And the possibility of his self-expression as a creative figure involved in the cognitive process. The historical and cultural aspect of the opponing the thesis will be touched upon. The modern opponent (the name of the term is correlated with the ancient Roman triumphs) in practice plays the role of a critic who evaluates both negative and positive qualities of the dissertation, and the purpose of his work is to make a «binary» verdict on the scientific and qualifying quality of the dissertation. It is noted that the essence of the actions of the defending and the opponent can be characterized by the ancient concept of *έπίδειξις* (epideixis). The main requirements for an official opponent are competence and objectivity. In the opinion of the authors, such basic principles, realized in the critical analysis of the dissertation, serve as the manifestation of objectivity: adherence to the ideals of scientific character, the characterization of the improvement in the subject of research conducted in the discourse, the qualification of the protected scientific position in the context of the emergence of new knowledge. The lack of using scientometric indicators of the author or some of his publications to form a value evaluation of scientific work is illustrated. The correctness of the formulations of the aspect characteristics of the dissertation is demonstrated by the example of analysis by opponents of the master's and doctoral theses by A.N. Schvarz, the Minister of Public Education of Russia in 1908–1910, that the continuity of the evaluation criteria for dissertations is indicated.

Keywords: Opponent, thesis, subject of research, scientific statement, defense-related, objectivity of expertise, proponent, A.N. Schwarz.

DOI: 10.18500/0869-6632-2017-25-6-79-98

References: Anikin V.M., Poizner B.N. Opponing the thesis: Through letters of norm to the principles of objective evaluation. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*. 2017. Vol. 25. Issue 6. P. 79–98. DOI: 10.18500/0869-6632-2017-25-6-79-98

Введение

Официальные оппоненты при защите диссертаций – это только небольшая вершина айсберга под названием «научные эксперты»: имена официальных оппонентов не скрываются, имена авторов отзывов на научные проекты, журнальные статьи и т.п., как правило, не разглашаются или сообщаются авторам рецензируемых работ только при согласии давших отзывы. По определению, научные оппоненты и рецензенты должны составлять наиболее квалифицированную и объективную часть научного сообщества. Но, как утверждал еще Вергилий, «никто не может быть ни

© *В.М. Аникин, Б.Н. Пойзнер*

всезнающим, ни всемогущим»[1], к тому же работают эксперты не в «безвоздушном пространстве». В этой публикации мы описываем модель работы независимого официального оппонента над отзывом, которая, на наш взгляд, может быть полезной при проведении научной экспертизы.

Авторы устанавливают методологическое родство в творчестве соискателя учёной степени и его оппонента, выявляя единый контекст, который связывает обновление предмета исследования в диссертации, положения, выдвигаемые на защиту, принципы их экспертизы и оценивания достижений диссертанта, сущность формальных требований к отзыву оппонента и возможности его самовыражения как творческой фигуры, вовлечённой в познавательный процесс.

1. Этимология терминов «оппонент» и «пропонент»

Принято считать, что слово «оппонент» происходит от лат. *opponens, opponentis* – возражающий. Этимон – глагол *oppono* – класть (ставить) перед, помещать против, противопоставлять, особенно для защиты или отражения; словами (в опровержение или сравнивая) противопоставлять, что-нибудь страшное выставлять на вид; возражать; сопоставлять [1, с. 436]. Как видно, это довольно нейтральный этимон.

Существует любопытная версия, трактующая изначальное понятие слова «оппонент»[2]: когда римский полководец (император) после очередного победоносного похода возвращался в Рим и торжественно проезжал по улицам мимо ликующих толп народа, то специальный человек, называемый оппонентом, бежал за колесницей императора, ругал, всячески поносил императора и припоминал все его прошлые промахи для того, чтобы император не очень возгордился.

Триумфами[3] назывались праздничные («триумфальные») вхождения войск в Рим после победоносного завершения очередной войны. Триумф назначал римский сенат после отчёта командующего войском. Одно из условий для проведения триумфа было поистине кровожадным – противник должен был потерять не менее 5000 человек убитыми (и тут «цифра»!). Существовал специальный этикет триумфального шествия. В центре процессии находилась запряженная четырьмя белыми конями (слонами или оленями) позолоченная колесница, в которой стоя ехал военачальник-победитель в вышитой пальмовыми ветвями тунике, украшенной золотыми звездами пурпурной тоге и позолоченной обуви; государственный раб держал над головой тяжелый золотой венок. Триумфатора сопровождала длинная процессия, в которую входили ликторы в красных военных плащах с фасциями, обвитыми лавром, родственники триумфатора, консулы, преторы, квесторы, эдилы, а также сенаторы. За триумфальной колесницей шли освобожденные из плена римские граждане. Далее

[1] Слово о науке. Афоризмы, Изречения. Литературные цитаты. Кн. 2. / Сост. Е.С. Лихтенштейн. М. Знание, 1981. 272 с, с. 24.

[2] Эту версию мы встретили в качестве цитаты в рукописях двух физиков: А.Ф. Голубенцева (Саратов) и А.П. Марголиуса (СССР, Германия). См.: Марголиус А.П. Воспоминания. Научная работа. URL: http://www.partner-inform.de/memoirs/artikles/Nauchnaja_Rabota_13.html; http://samlib.ru/m/margolius_a_p/nwissenschaft.shtml.

[3] Триумф (от лат. *triumphus* < *triumpus* – победное шествие) – торжественное вступление, торжественный въезд в Рим, предоставляемый сенатом полководцу и его солдатам за важную победу, отсюда выражение *triumphum agere* – торжествовать победу [1, с. 661].

© *В.М. Аникин, Б.Н. Пойзнер*

следовали солдаты в лавровых венках и с военными наградами. Атрибутом процессии была длинная цепочка людей и колесниц с добытыми в войне ценностями... В назидание для народа в честь триумфаторов ставились памятники, на которых они изображались в триумфальном одеянии. Воздавали им должное и в произведениях литературы и искусства.

Детальное описание древнеримских триумфов содержит книга [2]. Словом, триумфаторы получали деньги и славу, от которой реально могло возникнуть «головокружение от успехов». Но, действительно, система триумфов предусматривала и «противоядие», которое начинало действовать уже в процессе шествия. Как отмечается в [2, с. 21], «чтобы эта кульминация человеческих и почти божественных почестей не имела таких дурных последствий, как гордость, *invidia*[4], и сглаз, полководец надевал амулет (*fascinus*[5]) или прикреплял его к колеснице, вместе с маленьким колокольчиком и плетью». Звук колокольчика должен был возвращать триумфатора к действительности, кроме того, раб нашептывал ему про его человеческую сущность: «*Respice post te, hominem te memento*»[6], поскольку «триумфатор старался уподобиться Юпитеру[7] Всеблагому и Величайшему, для чего даже окрашивал лицо ярко-красным суриком» [2, с. 22]. Кроме того, солдатам позволялись (помимо восхваляющих восклицаний и песен) также едкие песенки, высмеивающие слабые стороны триумфатора и даже содержащие грубейшие непристойности в его адрес (к разным полководцам солдаты по-разному и относились). Вот так в Древнем Риме и возникли первые оппоненты?!

В современном понимании официальный оппонент (при защите диссертации) – это назначаемое диссертационным советом лицо, которому поручается оценка диссертации и выступление при защите диссертации, которая, по определению, должна иметь форму научной дискуссии, или, как чаще говорили раньше, научного диспута. В задачи оппонента входит оценка не только слабых, но и сильных сторон диссертации.

В ранних университетах Европы антиподом оппонента выступал *пропонент* – лицо, представлявшее аргументы и доказательства в пользу диссертанта либо диспутанта во время публичного обсуждения вопроса. Этимон – лат. глагол *propono*. Буквально он означает: ставить перед глазами других, выставлять, выкладывать, вывешивать. В переносном же смысле – представлять, указывать, излагать, изображать, рассказывать, делать известным; что-либо хорошее предлагать, обещать; угрожать, приводить, упоминать, предполагать [1, с. 511]. Пропонент составляет некую параллель адвокату в суде. Но от пропонента отнюдь не требуется апологии, то есть некритического восхваления соискателя[8].

---

[4]Зависть (лат.), причём не столько людей, сколько богов.

[5]Мужской член (лат.)

[6]Не упускай из виду того, что будет после тебя, помни о человеческом в тебе (лат.), пер. авторов.

[7]Юпитер – верховный бог у римлян, соответствует греческому Зевсу. Имя произошло от формулы обращения «Небо, отче!», или **dyeu paeter*. А формула повторяет греческий вокатив, то есть звательную форму имени, Ζεύ πατήρ (Зевс, Отче). Подробнее см.: Бенвенист Э. Словарь индоевропейских социальных терминов / общ. ред. и вступ. ст. Ю.С. Степанова. М.: Прогресс–Универс, 1995. 456 с., с. 147–148].

[8]Соискатель, выдвигающий и аргументирующий научные утверждения при защите диссертации, и поддерживающий положения диссертации официальный оппонент до какой-то степени замещают функции пропонента.

© *В.М. Аникин, Б.Н. Пойзнер*

В основе института оппонирования лежит способ познания, требующий подвергать сомнению и проверке любое научное утверждение (положение) в соответствии с критериями и идеалами научности. Это нашло отражение в знаменитой фразе: «*Discussio mater veritas est*» – «*В обсуждении рождается истина*».

Уж коли мы обратились к античности, то в контексте защиты диссертации сразу вспоминается слово «синклит», то есть собрание высших сановников (иногда имеющее ироническое звучание, скажем, *синклит мудрецов*). Этимон здесь – др.-греч. ςύγκλητος – созванный, собранный (позднее так именовали сенат в древнем Риме). Суть действий автора защищаемых научных положений и оппонентов на защите передаёт понятие έπίδειξις (эпидейксис). В его семантическом спектре присутствуют смыслы публичного обсуждения творческого продукта. Слово έπίδειξις означает: показывание; показ, выставка; смотр (как средство довести до сведения людей, сделаться известным); доказательство, проба чего-либо; изложение, речь (произносимая с целью выказать искусство ораторское); демонстрация военная, мнимый манёвр [3, стлб. 486, 1170]. По-видимому, сердцевина ритуала защиты – волнующее испытание авторских защищаемых положений на достоверность.

Попутно заметим, что понятие объективности возникает в XVII в. и связано с постановкой проблемы познания независимой реальности. В современном толковании «понятие достоверности предполагает всеобщую значимость – именно она отличает достоверное знание от мнения, которое, будучи приватным, подвержено ошибке. Всеобщая значимость суждений – распределённость между всеми разумными существами – придаёт им онтологический статус» [4, с. 100, 103].

Есть ли у древних подходящий термин? Да. Вот греческое έπίδειγμα (эпидигма) – доказательство, проба, образчик. Наверное, возможна ещё одна параллель с эллинистической традицией. Её выявил бы анализ «эпидейктического» (έπίδεικτικός) слагаемого в амплуа соискателя, столь похожем на роль *протагониста* (πρωταγωνιστής) в античном театре. И – в амплуа оппонента, то есть *антагониста* (άνταγωνιςτής), ведущего с автором защищаемых научных положений энергичную «тяжбу» за истину, άλήθεια [3, стлб. 52, 122, 486, 1099].

2. Формальные и содержательные требования к оппоненту

Действующим «Положением о присуждении учёных степеней» существенно ограничен круг лиц, которым разрешено оппонирование конкретной диссертации. За пределы этого круга выведены, в частности, члены диссертационного совета, где будет происходить защита (то есть, в принципе, люди, имеющие наибольший опыт рассмотрения диссертационных работ) и сотрудники той организации, где выполнена работа, то есть люди, которые могут наиболее досконально знать все плюсы и минусы представляемой к защите работы. В этой связи диссертационные советы испытывают трудности при назначении официальных оппонентов из числа местных научных работников, поскольку наиболее квалифицированная их часть как раз и состоит в советах и (или) работает в организациях, при которых советы созданы. Не бывает «худа» без «добра»: волей-неволей руководители диссертационных советов понуждаются к поиску квалифицированных оппонентов в других городах, что вносит элементы разнообразия в работу совета (в случае необходимости – с исполь-

© *В.М. Аникин, Б.Н. Пойзнер*

зованием *online*-технологий). «Поражённые» же в правах оппоненты могут «показать класс», написав независимо от кого-либо отзыв на автореферат.

Категории лиц, которым не доверяется быть оппонентами, определены «Положением о присуждении ученых степеней»[9]. Но в истории диссертационных защит известны случаи, когда, например, роли научного руководителя и оппонента по диссертации успешно совмещались (см., например, [5, 6]).

Каждый оппонент (независимо от его пространственного «расположения») должен удовлетворять критерию научной состоятельности по рассматриваемой в диссертации проблеме, и это должно подтверждаться публикациями оппонента в области науки, объекта, предмета и метода исследования рецензируемой научной работы.

3. Наукометрические показатели как характеристика рецензента и рецензируемого

На помощь современным рецензентам пришли наукометрические[10] показатели, в цифровом виде дающие характеристику автора (или его руководителя) научной работы (индекс Хирша, число работ в журналах особых категорий и т.д.). Цифровое «лицо» учёного определяется не только числом опубликованных книг и статей, но и числом откликов на них, которые учитываются в форме цитирования в публикуемых работах (хотя также используются и в форме непосредственного скачивания с сайтов, упоминания в списках рекомендуемой литературы и т.п.).

К значению индекса Хирша менее некоторого котирующегося значения просматривается настороженное отношение. Не все «одинаково полезны» и журналы и статьи при защите диссертаций и получении грантов: преимущество отдается зарубежным и центральным журналам, входящим в международные зарубежные базы данных.

Среди общего числа цитирований выделятся самоцитирование и подсчитывается его процент в общем количестве ссылок, тем самым вычленяется некоторая «информация к размышлению». Выводы по ней в случае, скажем, заметной доли самоцитирований неоднозначны и неопределённы: то ли статьи автора никому не интересны, хотя он и идет по «протоптанной» дороге, то ли, наоборот, его дорога слишком оригинальна и, как выражался Козьма Прутков, «не входит в круг понятий» других публикаторов, и его работы составляют нечто логически целостное, то ли он пишет свои работы под иным ракурсом, чем коллеги, то ли элементарно не знаком

[9]Согласно п. 22 «Положения», «оппонентами не могут быть Министр образования и науки Российской Федерации, государственные (муниципальные) служащие, выполняющие работу, которая влечет за собой конфликт интересов, способных повлиять на принимаемые решения по вопросам государственной научной аттестации, члены Комиссии, члены экспертных советов, члены диссертационного совета, принявшего диссертацию к защите, научные руководители (научные консультанты) соискателя учёной степени, соавторы соискателя ученой степени по опубликованным работам по теме диссертации, а также работники (в том числе работающие по совместительству) организаций, где выполнялась диссертация или работает соискатель ученой степени, его научный руководитель или научный консультант, а также, где ведутся научно-исследовательские работы, по которым соискатель ученой степени является руководителем или работником организации-заказчика или исполнителем (соисполнителем). Оппоненты должны являться работниками разных организаций в случае осуществления ими трудовой деятельности».

[10]Термин «наукометрия» и первая в мире монография на эту тему принадлежит В.В. Налимову.

© *В.М. Аникин, Б.Н. Пойзнер*

с работами последних. Так или иначе, «неразбавленный» список источников может толковаться по-разному и никак не тянет на публикационный «криминал». Приведем в этой связи один поучительный пример из истории научных публикаций.

В 1948 г. в Ленинградском государственном университете под руководством известного историка и филолога С.Я. Лурье кандидатскую диссертацию «Политическая роль дельфийского оракула (из истории Дельфов VI в. до н.э.)» защитила его аспирантка Л.М. Глускина, начавшая работу над диссертацией еще в 1944 г. в Саратовском университете, «приютившем» в военные годы университет Ленинградский. Как отмечается в [7, с. 392], «знаменитым общегреческим святилищем в те годы в Советском Союзе почти никто не занимался. И работа была по сути первым в советском антиковедении исследованием, где рассматривались не только политические, но и экономические проблемы истории оракула и святилища Аполлона в Дельфах. Надо заметить, что и потом у нее долго не было последователей. Фактически на протяжении полувека Лия Менделевна была единственным специалистом в стране по этой тематике. Только в 2000 г. вышла монография О.В. Кулишовой, посвященная истории этого святилища в архаический и классический период. По действовавшим тогда правилам публиковать статьи можно было только после защиты диссертации, не предусматривалось и издание автореферата. К диссертации прилагались лишь машинописные тезисы работы (5 стр.). Основное содержание диссертации нашло отражение в статьях, опубликованных Л.М. Глускиной уже в 50-е гг. в журнале “Вестник древней истории”».

4. Наполнение отзыва аспектными характеристиками диссертации

В случае анализа кандидатской диссертации главную часть отзыва оппонента должно составить подтверждение (неподтверждение) признаков наличия в диссертации нового решения теоретической задачи, существенной для развития определенной отрасли знаний, и (или) соответствующих новых научно обоснованных технических, технологических, программных и иных инновационных решений.

При анализе докторской диссертации оппонент должен дать заключение, о том, что наполняющие ее теоретические положения и (или) научно обоснованные технические, технологические или иные решения могут (не могут) быть квалифицированы либо как *научное достижение*, либо как решение *важной научной проблемы* в сфере человеческой деятельности, либо о том, что изложены новые научно обоснованные технические, технологические или иные *инновационные решения*.

В данном общем контексте в отзыве оппонентов должны быть охарактеризованы:

- актуальность темы диссертации в теоретическом и прикладном аспектах [8–10];
- новизна положений и результатов работы как признак научной квалификации [11–12];
- аргументированность, истинность и верифицируемость выносимых на защиту научных положений и результатов [13, 14];
- содержательность положений, выносимых на защиту, и итоговых выводов; перспективность реализации сформулированных рекомендаций по использованию результатов работы [11, 15–18].

Содержание замечаний официального оппонента касается нюансов соответствия работы критериям научности диссертации, включая названные аспектные характеристики. Отмечается также корректность владения соискателем научной терминологией и лингво-дисциплинарной компетенцией при представлении научных результатов в целом [19].

Проиллюстрируем сказанное на примере формулировок официальных оппонентов по диссертациям Александра Николаевича Шварца (1848–1915), министра народного просвещения России (1908–1910), с именем которого связано открытие в 1909 г. университета в Саратове. Подробные биографические сведения о Шварце оставил его ученик Сергей Иванович Соболевский (1864–1963), профессор Московского университета с 1893 г. Они приведены, в частности, как дополнение к книге А.Н. Шварца «Моя переписка со Столыпиным. Мои воспоминания о Государе» [20].

Защите магистерской диссертации А.Н. Шварца предшествовала сессия из четырех магистерских экзаменов, которые он успешно сдал в течение нескольких факультетских сессий в ноябре–декабре 1873 г. Магистерскую диссертацию «Речь Гиперида за Евксениппа» он защитил на историко-филологическом факультете Московского университета 31 марта 1875 г. Диспут проходил на латинском языке[11]. Оппонентами выступили известные специалисты в области древней словесности Ф.Е. Корш (1843–1915) и Ю.К. Фелькель (1812–1982). Их отзыв, несмотря на то, что он написан почти полтора века назад, может рассматриваться как образец оппонентского стиля, поскольку он отражает все существенные характеристики диссертации как научно-классификационной работы и одновременно демонстрирует свободу владения материалом самими оппонентами и красоту их пера. Вот поучительный отрывок из этого отзыва [20, с. 181–183].

«Непрерывный комментарий не входил в план диссертации г. Шварца, а потому, если мы и встречаем в ней объяснение отдельных мест разбираемой речи, то исключительно таких, которые проливают свет на ее общее значение, как памятника исторического и литературного. Это значение и составляет главный предмет исследования, и в этом смысле речь за Евксениппа подвергнута г. Шварцем такой полной и многосторонней обработке, какая до сих пор не выпадала на ее долю.

Предшественники его обращали внимание преимущественно на критику текста и лишь отчасти на экзегетику, но, и с этих сторон, речи не так посчастливилось, как, например, эпитафию. Поэтому г. Шварц мог воспользоваться трудами других ученых только для первых двух отделов своего исследования, хотя некоторые главы потребовали от автора много самостоятельной работы, особенно те, которые относятся к юридической обстановке речи. Но в последнем разделе, занимающем более трети диссертации, автор должен был сам пролагать себе дорогу, что дает возможность оценить его начитанность и критический такт во всей их полноте.

Нельзя не отнестись с сочувствием к самой задаче этого отдела – объяснить громкую славу Гиперида в древности при помощи его собственных произведений, как ни незначительны их остатки. Предпочтение, оказанное при этом речи за Евксениппа перед эпитафием, свидетельствует о верности взгляда автора на истинное значение Гиперида как оратора. Суждения древних критиков, отрывочные и нередко тёмные, разъяснены и сопоставлены так, что на основании добытых этим путем данных слагается вполне определённый очерк ораторских особенностей Гиперида. В том же разделе обращает на себя внимание меткое сближение языка Гиперида с языком аттических[12] комиков.

[11] По свидетельству А. И. Соболевского, брата С. И. Соболевского, «А. Н. так конфузился и говорил так тихо», что сидевшие даже на первой скамейке порой ничего не могли расслышать [20, с. 180].

[12] Аттика (от др.-гр. Ἀττική) – страна, где жили афиняне. Аттический (аттицизм) – свойственный её жителям стиль речи, отличавшейся интеллектуальной образностью, утончённостью, остротой.

© *В.М. Аникин, Б.Н. Пойзнер*

Что же касается общего характера диссертации, то, помимо чисто научных её достоинств, ей свойственен тот особый интерес, который обусловлен сочувственным отношением автора к предмету своего изучения.

Таким образом, исследование г. Шварца, представляя полную и добросовестную обработку избранного им памятника и связанных с ним вопросов, в то же время заключает в себе много новых, остроумных соображений и выводов и, благодаря разнообразному содержанию своего предмета, служит блестящим доказательством обширной подготовки автора и многостороннего развития его научных сил».

Защиты диссертаций в Московском университете сопровождались освещением в прессе (см. также [4]). На диссертацию А.Н. Шварца в газете «Русские ведомости» (№ 71 за 1875 г.) был помещен анонимный отзыв, который содержал дополнительные аргументы в пользу соискателя (см. [20, с. 184–186]) и информацию о том, что «сочинение г. Шварца вскоре будет помещено в Филологическом сборнике, издаваемого профессором Ф.Е. Коршем в сотрудничестве с гг. Шварцем и Фортунатовым». В газетном отзыве работа Шварца характеризовалась как «крайняя редкость самостоятельных исследований в области классической филологии», «первый опыт авторской деятельности молодого ученого, окончившего курс в здешнем университете не более 8-ми лет назад».

Если отзывы на магистерскую диссертацию Шварца существенных критических замечаний не содержали, то его докторская диссертация не избежала подобающей критики. Текст диссертации был напечатан к 20 июля 1891 г., а 9 декабря 1891 г. в Новороссийском университете (Одесса) состоялась ее защита. Диссертация называлась «О государстве Афинском. Сочинение неизвестного автора V века до Р.Х.». Оппонентами были профессора историко-филологического факультета Новороссийского университета Ф.Е. Корш и Э.Р. Штерн (1859–1924). Вот отрывок из их отзыва на работу А.Н. Шварца [20, с. 214–219].

«Исследование г. Шварца состоит из трёх частей: 1) введения, 2) текста с критическими примечаниями и 3) объяснительных примечаний. В введении автор излагает содержание разбираемого им памятника и указывает встречающиеся в нем противоречия, причём он подробно останавливается на мнениях, выставленных для объяснения этих противоречий в новейшей ученой литературе. <...> Разбирая эти мнения, г. Шварц находит их несостоятельными и в противоположность им выставляет собственную гипотезу.

<...> Третий отдел, «Объяснительные примечания», занимает более половины всей книги, так как в нём находится центр тяжести аргументации автора для поддержания своей гипотезы и для опровержения несогласных с нею взглядов других ученых. Разбирая текст почти слово за слово, он с глубоким знанием дела и с большим остроумием устанавливает связи между отдельными мыслями сочинителя, оправдывает принятые им поправки и устраняет домыслы, только упомянутые в критическом аппарате, как основанные на предвзятом представлении о характере трактата или вытекающие из упорного желания добиться истины там, где положительные данные нам изменяют.

Подводя итог заключениям автора, мы должны указать как на положительные стороны его исследования на удачную полемику против теории Кирхгофа и Кобета и на констатирование посторонних тексту вставок, хотя нельзя не признать, что в выделении будто бы вставленных мест он заходит иногда слишком далеко. Кроме этого недостатка в критике памятника следует отметить, что характеристика личности автора и его цели страдает некоторой шаткостью и неопределённостью. Не совсем твёрдо и определение времени, в которое жил предполагаемый олигарх, приписавший к тексту свои злобные замечания. Наконец, гипотеза г. Шварца относительно происхождения и судьбы всего

сочинения едва ли может считаться бесспорно доказанной, и приведенная им аналогия сочинений Аристотеля мало помогает делу, так как их особенности зависят от причин другого рода.

Несмотря на эти слабые стороны, работа г. Шварца показывает в авторе основательные знания греческого языка и древностей и полное обладание приемами научной критики, вследствие чего она, по нашему мнению, совершенно соответствует цели, с которой представлена факультету».

Можно добавить, что рецензия на книгу А.Н. Шварца, написанная авторитетным антиковедом, филологом-классиком Ф.Ф. Зелинским (1859–1944), была помещена в 1892 г. в российском журнале классической филологии и педагогики «Филологическое обозрение» [см. 20, с. 214].

5. Принципы объективной экспертизы диссертации

В контексте защиты диссертации оппонент знаменательно именуется «официальным». Поэтому от него ждут действий по правилам, установленным ВАК и всем участникам известным *a prioiri*. Один из базовых императивов защиты, к сожалению, трудно поддающийся алгоритмизации, – объективность оценки диссертации, честный отказ оппонента от своих личных пристрастий и предпочтений. Конечно, это ставит пределы его творческой самодеятельности, но отнюдь не исключает её вовсе.

На наш взгляд, первый принцип объективной экспертизы диссертации – осуществление *идеалов научности* (их роль в консолидации научного сообщества отражена, например, в [13; 21, с. 47–49]). Причём полнота этого осуществления инспектируется и в оппонируемом исследовании, и сам ревизор действует, руководствуясь идеалами научности.

Второй принцип экспертизы, по нашему мнению, – анализ и характеристика того *совершенствования предмета исследования*, то есть его уточнения, углубления, расширения *etc.*, которого достиг соискатель (в рамках поставленной цели диссертации).

Чтобы пояснить сказанное, вспомним, что понятия объекта и предмета исследования тесно связаны, но отнюдь не тождественны. Это разъясняют, например, философы-методологи В.Г. Горохов, А.М. Пятигорский, В.М. Розин, Г.П. Щедровицкий. Объект исследования есть фрагмент объективной реальности, например, физической либо технической. В традиционном понимании она существует вне нас (наблюдателей) и независимо от нашего сознания. Так, А. Эйнштейн в письме (28.06.1951) к русскому философу-эмигранту Н.О. Лосскому (1870–1965) постулирует «общий принцип: полагание “реального мира”, которое отделяет, так сказать, “мир” от мыслящего и воспринимающего субъекта» [22, с. 87].

В.М. Розин допускает: «объект» и «предмет» в какой-то мере соотносятся как «существующее бытие, факт *etc.*» и его «смысл, зависящий от цели деятельности и (или) познания». При этом предмет понимается как знание об объекте и (или) как метод его познания, в том числе – экспериментальный [23, с. 42, 48].

Следовательно, предмет исследования «помещается» *в мышлении* исследователя. Предмет пребывает там в виде описания на специфическом «языке». То есть в виде *модели* в широком значении слова, построенной для достижения поставленной цели. Описание это обычно образует текст с формулами, символами, изображени-

© *В.М. Аникин, Б.Н. Пойзнер*

ями, схемами, диаграммами и т.п. Оно хранится в памяти компьютера, в составе моделирующей программы, проявляется в строении и режимах работы экспериментальной установки, в содержании соответствующих методик эксперимента и т.п. Большинство исследователей, включая экспериментаторов и изобретателей, имеют дело исключительно с *предметом* исследования, а не с объектом.

Когда оппонент знакомится с предметом исследования, выбранным соискателем? На наш взгляд, – когда читает обзорную часть (главу) диссертации. Допустим, что она написана адекватно ситуации, сложившейся в данном направлении исследований к моменту начала работы диссертанта. Это значит, что составленный им обзор корректно и достаточно полно излагает:

- известное мировое знание об объекте исследования (факты, закономерности, корреляции, причинно-следственные связи и т.п.),
- способы получения нового знания (теории, всевозможного рода модели, эвристические принципы, методики, гипотезы и т.д.),
- язык(и) описания объекта, то есть система специальных терминов и общенаучных понятий, необходимая для познавательной работы в данной области.

Таким образом, на «входе» диссертации имеется «старый», («сложившийся» – в терминологии В.М. Розина [24, с. 95]) предмет исследования, сконструированный предшественниками автора. А на «выходе» её – обновлённый предмет исследования. Он в ряде аспектов (или в одном аспекте) улучшен, модернизирован, усовершенствован творческими усилиями соискателя.

Диссертанту следует максимально рельефно подчеркнуть разницу между стартовым («старым») и финальным предметом исследования. Для этого у него есть минимум три возможности:

- выдвинуть положения, выносимые на защиту (ПВЗ), обосновав их достоверность, новизну, научную и (или) прикладную ценность;
- сформулировать выводы, раскрывающие суть других результатов («неудобных» для выражения в формате ПВЗ, скажем, относящихся к экспериментальной установке, испытательному стенду, программному модулю, учебному тексту *etc.*);
- дать рекомендации по сфере и форме использования материалов работы и (или) их дальнейшему внедрению.

В том, что касается ПВЗ как специфического научного жанра, авторы, опираясь на свою многолетнюю практику работы в диссертационных советах, исходят из следующих соображений. ПВЗ составляет квинтэссенцию диссертации и служит показателем того, насколько продуманно, тщательно, корректно и уважительно к будущему читателю формулирует соискатель свои главные творческие достижения. Структура ПВЗ ранее подробно рассматривалась в [8, 15–18, 25].

Как уже говорилось, соискатель в известной степени выступает в роли пропонента[13]. Действительно, ему доверено построить системную аргументацию, чтобы доказать: достоверность своих ПВЗ, их новизну, научную ценность и (или) практическую значимость. Миссия оппонента – подвергнуть «атаке» те методологические «линии обороны», которые соискатель возвёл, защищая истинность своих ПВЗ и

[13]В некотором смысле это парадокс: ведь согласно одному из принципов римского права, *nemo judex in causa sua*, то есть никто не судья в собственном деле. Видимо, в этом обстоятельстве можно видеть *аванс доверия*: каждый диссертант получает его от научного сообщества.

© *В.М. Аникин, Б.Н. Пойзнер*

других результатов. Не вредно вспомнить, что критерий истины, прилагаемый оппонентом к ПВЗ, является ведущим оперативным средством *самоуправления* в науке. Так утверждает немецкий социолог Н. Луман (1927–1998) [26, с. 150]. Некоторые рекомендации соискателю по технологии возведения «линий обороны» ПВЗ даны в [8, с. 35–38; 25, с. 78–102] (там же выполнен анализ примеров (не)удачных формулировок). Поэтому оппонент при желании может воспользоваться проведённой классификацией типичных ошибок авторов ПВЗ и их стандартных характеристик.

Повышение степени объективности оценки диссертации при её экспертизе крайне желательно. По нашему мнению, это возможно, если оппонент добровольно возьмёт на себя *труд методолога*, а именно квалификацию ПВЗ в контексте возникновения нового знания. Для этого предлагаются следующие критериальные принципы.

α) Признак теоретической (методологической) деятельности диссертанта – творческий переход от «сложившегося» («старого») предмета исследования к новому, имеющему методологические и эпистемологические *преимущества* в конкретных аспектах.

β) Степень отличия нового предмета исследования от «сложившегося» есть критерий методологической (теоретической, фундаментальной) ценности *научного* ПВЗ. Если новый предмет исследования привёл и к формированию нового *объекта* исследования («объективация» [24, с. 95]), то степень его отличия от известного объекта есть критерий практической (технической, прикладной) ценности научного ПВЗ.

γ) Признак технической (экспериментальной, проектной) деятельности диссертанта – творческий переход от известного объекта исследования к новому, имеющему практические *преимущества* в конкретных аспектах.

δ) Степень отличия нового объекта исследования от исходного есть критерий практической (технической, прикладной) ценности *технического* ПВЗ. Если новый объект исследования привёл и к формированию нового *предмета* исследования, то степень его отличия от «старого» предмета есть критерий методологической (теоретической, фундаментальной) ценности технического ПВЗ.

ε) Упомянутые отличия результатов диссертанта от известных, то есть *новации*, «закодированные» в ПВЗ, имеют *четыре* уровня (сверху вниз):
   - целеполагания;
   - операциональных средств, построенных на основе полученной исследователем информации;
   - ресурсов;
   - работы с побочными продуктами деятельности (теоретико-познавательной, экспериментальной, проектной *etc.*).

Градации отличий соответствуют универсальным компонентам целеустремлённой системы деятельности [27, с. 22–23], традиции оценки класса изобретений в технике и шкале субъектов творчества [6, 25, 28].

Подчеркнём, что родовой чертой ПВЗ является ограниченность его «времени жизни» в профессиональном сообществе. Рано или поздно содержание ПВЗ подвергают уточнению, дополнению, редактированию, сокращению области применимости (порой же вовсе списывают в архив как добросовестное заблуждение[14]) и так – *ad*

[14]Случай, когда содержание ПВЗ есть злонамеренный обман, мы не обсуждаем.

© *В.М. Аникин, Б.Н. Пойзнер*

infinitum. Обновление предмета исследования, связанное с выдвижением ПВЗ, есть принципиально незавершаемый процесс, поскольку он взаимно обусловлен социокультурной эволюцией.

В свете этого соображения полезно вернуться к пункту «ε». Согласно иерархии уровней творчества, обобщившей сюжеты из истории науки, успешное целеполагание даёт наиболее долговечную новацию. Например, таковы цели деятельности, выдвинутые *впервые* корифеями европейского естествознания, вроде Галилея, Ньютона, Декарта. Второе место среди результатов-«долгожителей» занимают новые операциональные средства, связанные с совершенно новыми целями. А самыми «короткоживущими» достижениями (и соответственно – ПВЗ) обычно оказываются те, что касаются работы с побочными продуктами деятельности. На наш взгляд, эти обстоятельства желательно сознавать и диссертанту, и тем более – оппоненту, ранжирующему творческие деяния соискателя.

Согласно смыслу перечисленных принципов, оппонент исходит из того, что на первом (начальном) этапе деятельности диссертант получает от своих предшественников известный объект исследования. Исследователь воспринимает («видит») этот объект через призму «старого», то есть «сложившегося» (в терминологии В.М. Розина), предмета исследования. Второй этап деятельности соискателя начинается, когда возникают некие потребности в изменении, то есть в усовершенствовании, развитии предмета исследования. Эти потребности могут быть вызваны как процессами внутри научного сообщества, так и извне, в форме «социального заказа». Обычно требуется расширить знания об объекте исследования и способы получения этих знаний. В инженерных науках требуется построить новый объект и (или) технологию его создания. Эти потребности стимулируют диссертанта выдвинуть новые цели, задачи, совершенствовать старые языки описания либо разработать новые языки, а также методы и экспериментальную технику *etc*.

При благоприятном развитии событий соискатель артикулирует сущность содержания нового предмета исследования в виде ПВЗ. В свою очередь, построение нового предмета исследования обогащает диссертанта «новым зрением» при наблюдении объекта исследования. Поэтому резонно говорить и о новом объекте исследования. История науки знает немало случаев, когда объект исследования был открыт лишь благодаря построению нового *предмета* исследования. В этих сюжетах реальный объект или феномен был предсказан *a priori*[15]. Рискнём вывести из сказанного выше некую простую «формулу», толкующую каждое ПВЗ как «квант» научного знания:

«Новый предмет исследования = “старый” предмет исследования + сумма ПВЗ»

Эта символическая «формула» раскрывает место, какое в продуктивном познавательном процессе занимает научное либо техническое ПВЗ.

Пусть новый предмет исследования успешно прошёл все серии процедур верификации, включая критическое оппонирование, и получил признание в профессиональном сообществе. Тогда этот предмет должен рассматриваться далее как «сложившийся» (в смысле В.М. Розина). Очередная критическая ревизия его неизбежна

[15]Так, в 2016 г. группа экспериментаторов доказала наличие в природе гравитационных волн (зарегистрировав средствами лазерной интерферометрии их воздействие на детектор). А. Эйнштейн не был до конца уверен в их существовании, хотя его идея «искривления» пространства-времени вблизи массивных космических тел согласовывалась с представлением о волнах гравитации.

© *В.М. Аникин, Б.Н. Пойзнер*

рано или поздно. Затем цикл перехода от старого предмета исследования к новому предмету повторяется – с некоторыми вариациями – снова и снова. Поэтому символическая «формула» раскрывает простейшую связь ключевых элементов, которые составляют *репликатор познавательной деятельности* [29][16].

6. Позиция и форма творческого самовыражения официального оппонента

Нам представляется, что позиция оппонента поневоле *двойственная*. С одной стороны, будучи грамотным методологом и зная принцип Эшби, он понимает, что необходимо всячески повышать степень *разнообразия* в его науке: разнообразия подходов, концепций, теорий, моделей, толкований, инструментов и т.п. С другой стороны, на него сообщество коллег возлагает очень ответственную миссию: хранить *чистоту традиции*, то есть арсенал получения научного знания, не допускать профанации интеллектуальной деятельности, искажения ключевых критериев её продуктивности. С одной стороны, оппонент, зная, как трудно «продвигать» среди коллег свои оригинальные результаты, не может не чувствовать *солидарности* с диссертантом (в положении которого был и он сам в прошлом). С другой – он уполномочен научным сообществом обеспечивать *самоочищение* его науки: идейное, методологическое, кадровое, публикационное. Следовательно, ему вменяется в обязанность не допускать в фонд научного знания ошибочные, сомнительные, не обеспеченные должной аргументацией результаты, а также ставить барьер шарлатанам, плагиаторам и прочим тёмным личностям.

Выше мы уделили внимание оппоненту как источнику объективности, радеющему за максимально строгую обоснованность оценок. Не забудем, что экспертизе подвергается творческое произведение, каким является (обычно) диссертация. И поскольку за ней стоит *личность* автора (а не робот, не автомат, даже не аноним), то, конечно, в самом оппоненте его личностное начало ни в коем случае не должно подавляться. Как же возможно представить диалог-дискуссию двух личностей – автора и оппонента, – на какой почве? Вероятно, всё на той же, на которой взошла диссертация, то есть на почве научного (технического и т.п.) творчества.

Отдав «кесарю кесарево», то есть тщательно выполнив требования ВАК (дабы не навредить соискателю и диссертационному совету), а также наидобросовестнейшим образом проведя экспертизу работы с опорой на принципы её объективной оценки, оппонент имеет право, на наш взгляд, творчески выразить свою личность исследователя. Иначе говоря, для профессиональной пользы диссертанта и сообщества, следящего за ходом защиты, оппонент вправе совершенно сознательно и *открыто* перейти в сферу своих приватных предпочтений и пристрастий творческого субъекта.

Вероятно, одним из факультативных вариантов такого поведения, такой интеллектуальной игры способен стать демонстративный переход оппонента в позицию гипотетического *альтернативного решателя* одной из задач или даже нескольких, которые поставил и решил по-своему диссертант в квалификационной работе.

[16]Репликатор есть информационная структура, устойчиво самовоспроизводящаяся в подходящей среде и обладающая изменчивостью. Таков, например, ген, мем, волна, фотон в лазере.

© *В.М. Аникин, Б.Н. Пойзнер*

Условное название роли оппонента в этой методологической пьесе – «если бы диссертантом был я»[17]. В таком случае оппоненту предстоит на конкретном материале сравнить два стиля мышления, два способа интерпретации и вербализации результатов: автора диссертации и свой, – выявить возникающие отсюда сходства-различия, широту-узость, глубину-поверхностность, другие преимущества-недостатки и т.п. Разумеется, вся объективная (традиционная) аналитика рабочего эскиза *воображаемой* диссертации оппонента должна быть выполнена в полном объёме!

Если оппонент в этой роли «реконструктора» способен действовать *lege artis*, то его эскиз воображаемой диссертации вдвойне плодотворен. Во-первых, он способен – в принципе – выявить, подчеркнуть оригинальность, нешаблонность труда изобретательного диссертанта. Во-вторых, оттенит индивидуальность соискателя, неповторимость его творческого почерка. Либо принадлежность к иной научной школе, что тоже полезно для честного научного спора. В третьих, расширит пространство дискуссии, причём тем значительнее, чем существеннее отличается субъективный исследовательский *modus operandi* у диссертанта и оппонента.

Заключение

Вероятно, читателю ясно, что авторы стремятся убедить его: формализм, неотделимый от подготовки и защиты диссертации, можно (и нужно) преодолеть, компенсировать *когерентностью* действий соискателя и оппонента[18]. Но это – отнюдь не преступный сговор двух и более лиц. Это означает согласованность идеалов научности и принципов экспертизы результатов, включая текущую самооценку диссертанта. Что в этой ситуации требуется от него? Методологическая предприимчивость, здравая рефлексия над собственными новациями, обогатившими предмет исследования, тщательная артикуляция ПВЗ, других результатов и их характеристик (здесь соискателю даны полномочия пропонента).

А что ожидается от его ролевого противника – наряду с указанными ранее обязательными компонентами в его отзыве? Умение подвергнуть критическому анализу все ПВЗ и их характеристики, верифицируя те конкретные аспекты, которые подразумевают п. α–δ, и безошибочно «измерить» достижения диссертанта по шкале в п. ε. Чем ответственнее отнесутся к своим методологическим обязанностям диссертант, формулируя ПВЗ, и оппонент, испытывая «на излом» их корректность, тем больше стиль защиты будет похож на интеллектуальное фехтование, а не на имитацию диалога.

---

[17]Из уст оппонентов мы часто слышим откровенное признание: «В диссертации *N.N.* мне (не) понравилось...» Такой подход уже как-то приоткрывает приватное творческое лицо оппонента. К сожалению, он оказывается сугубо вкусовым, труднообъяснимым, а то и вовсе необъяснимым. Такая реакция оппонента обычно относится не к принципиальным сторонам работы, а к второстепенным деталям, вроде числа глав, варианта терминологии, композиции рукописи etc.

[18]Причина соприродности автора и его оппонента - *импликация*, задающая внутреннюю форму ПВЗ. Импликация лежит и в основе передаточной характеристики (ПХ) $B(A)$. Согласно И.В. Измайлову, прибор, программу для ЭВМ и т.п. логично считать «наблюдателем 1-го уровня» (над объектом исследования). А его обозревает «наблюдатель 2-го уровня», то есть диссертант. ПВЗ, раскрывающее *смысл* $B(A)$, есть ПХ самогó «наблюдателя 1-го уровня». Возможно ли помыслить ПХ автора ПВЗ, то есть соискателя? Да, если ввести «наблюдателя 3-го уровня». Это – оппонент! Ему «объектом» исследования служит источник нового знания: диссертант вкупе с его сочинением. В свою очередь, ПХ соискателя как творческого лица – центр отзыва оппонента [24, с. 119–121].

© *В.М. Аникин, Б.Н. Пойзнер*

Всё же не ради фехтования – при всей его поучительной эффектности – затевается защита. Авторы по-старомодному видят в церемонии защиты борьбу за смысл, за λόγος, как сказал бы грек. Возможно, поэтому стоит подчеркнуть нетождественность смысла и значения. Методологи настаивают на том, что следует выделять *смысл-сущность, смысл-цель* и *смысл-ценность* [30, с. 85]. Оппонирование принадлежит контексту изучения природы вещей, а оно непредставимо без поиска смысла-сущности. Но и два других измерения смысла, кажется, не чужды оппонированию?

Библиографический список

1. *Петрученко О.* Латинско-русский словарь. М.; Пг.; Харьков: Т-во «В.В. Думнов, Наследники Бр. Салаевых», 1918. 810 с.
2. *Негин А.Е.* Римское церемониальное и турнирное вооружение. СПб : Факультет филологии и искусств СПбГУ; Нестор-История, 2010. 232 с. URL: http://www.sno.pro1.ru/lib/negin_rimskoe_vooruzhenie/negin_rimskoe_vooruzhenie.pdf.
3. *Вейсман А.Д.* Греческо-русский словарь. Репринт 5-го издания 1899 г. М.: Греко-латинский кабинет Ю.А. Шичалина, 1991. 1370 стлб.
4. *Шиповалова Л.В., Малышкин Е.В.* Исторический исток научной объективности, или О возможном ответе на «скандальный» вопрос философии // Вопросы философии. 2016. № 12. С. 96–105.
5. *Аникин В.М.* Альберт Эйнштейн и Питирим Сорокин: Истории диссертационных защит // Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2011. Т. 19, № 3. С. 52–76.
6. *Аникин В.М., Пойзнер Б.Н., Соснин Э.А., Шувалов А.В.* Феномен научной школы: История, типология получения и передачи знаний, психология коммуникаций / Под общ. ред. В.М. Аникина. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2015. 232 с.
7. *Шарнина А.Б.* Глускина Лия Менделевна (27.06.1914 г., Минск – 06.02.1991 г., Ленинград) // Мнемон. Исследования и публикации по истории античного мира / Под ред. проф. Э.Д. Фролова. Вып. 2. СПб : Изд-во СПбГУ, 2003. 424 с. URL : http://centant.spbu.ru/centrum/publik/kafsbor/mnemon03.htm
8. *Аникин В.М., Усанов Д.А.* Диссертация в зеркале автореферата: Метод. пособие для аспирантов и соискателей ученой степени естественно-научных специальностей. Изд. 3, перераб. и доп. М.: ИНФРА-М, 2013. 128 с.
9. *Аникин В.М., Пойзнер Б.Н.* Государственная итоговая аттестация аспиранта: От формальности к превентиве // Alma Mater (Вестник высшей школы). 2015. № 11. С. 17–21.
10. *Аникин В.М., Пойзнер Б.Н.* Научное руководство аспирантами: «Внутренние» и «внешние» регуляторы // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Физика. 2015. Т. 15, вып. 1. С. 83–88.
11. *Аникин В.М., Измайлов И.В., Пойзнер Б.Н.* Диссертанту о воспринимаемости, числовой оценке и защите научных результатов // Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2014. Т. 22. № 6. С. 25–34.

© *В.М. Аникин, Б.Н. Пойзнер*

12. *Аникин В.М., Пойзнер Б.Н.* Какова природа интересного, или дефиниции науки и научности – эпистемологический компонент профессиональной компетенции (радио)физика как инженера-исследователя // Известия вузов. Физика. 2013. Т. 56. № 10/3. С. 118–120.
13. *Аникин В.М., Измайлов И.В., Пойзнер Б.Н.* Диссертация: Характеристики научности // Гетеромагнитная микроэлектроника: Сб. науч. тр. / Под ред. проф. А.В. Ляшенко. Саратов : Изд-во Сарат. ун-та, 2014. Вып. 16. С. 105–118.
14. *Аникин В.М., Пойзнер Б.Н.* Как диссертанту аргументировать достоверность научных положений и результатов, выносимых на защиту // Известия вузов. Физика. 2011. Т. 54. № 6. С. 105–108.
15. *Аникин В.М., Измайлов И.В., Пойзнер Б.Н., Соснин Э.А.* Защищаемое положение в диссертации как трансдисциплинарный научный жанр // Известия вузов. Физика. 2015. Т. 58, № 8/3. С. 300–303.
16. *Аникин В.М., Пойзнер Б.Н.* Эпистемологические упражнения магистранта: Формулировка и оценка научных положений в своей диссертации // Изв. вузов. Физика. 2012. Т. 55, № 8/3. С. 213–214.
17. *Аникин В.М., Пойзнер Б.Н., Усанов Д.А.* Схема поаспектной характеристики диссертации: Правила, рекомендации, примеры // Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2009. Т. 17, № 3(97). С. 137–150.
18. *Аникин В.М., Усанов Д.А.* Автореферат диссертации: Функции, структура, значимость // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Физика. 2008. Т. 8, № 2. С. 61–73.
19. *Аникин В.М., Пойзнер Б.Н.* Коммуникативная функция автореферата и уровень лингво-дисциплинарной компетенции диссертанта // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Физика. 2013. Т. 13, вып. 1. С. 80–86.
20. *Шварц А.Н.* Моя переписка со Столыпиным. Мои воспоминания о Государе. Серия: Мемуары русской профессуры. М.: Греко-латинский кабинет Ю.А. Шичалина, 1994. 362 с. В доп.: *Соболевский С.И.* Александр Николаевич Шварц: Очерк. С. 147.
21. *Огурцов А.П.* Философия науки: двадцатый век: Концепции и проблемы: в 3 ч. Ч. 2 : Философия науки: Наука в социокультурной системе. СПб.: Міръ, 2011. 495 с.
22. *Сердюкова Е.В.* Материалы из архивов Н.О. Лосского и А. Эйнштейна: Дискуссия о пространстве и времени (1950-е гг.) // Вопросы философии. 2017. № 1. С. 81–90.
23. *Розин В.М.* Расколдовывание и деструкция понятия «объект» (методологический анализ) // Вопросы философии. 2015. № 6. С. 41–52.
24. *Розин В.М.* Понятия «предмет» и «объект» (методологический анализ) // Вопросы философии. 2012. № 11. С. 85–96.
25. *Соснин Э.А., Пойзнер Б.Н.* Осмысленная научная деятельность. М.: РИОР: ИНФРА-М. 2015, 148 с.
26. *Луман Н.* Мировое время и история систем // Логос: Журнал по философии и прагматике культуры. 2004. № 5(44). С. 131–168.
27. *Корогодин В.И.* Информация и феномен жизни. Пущино : Пущинский научный центр РАН, 1991. 204 с.

© *В.М. Аникин, Б.Н. Пойзнер*

28. *Соснин Э.А.* Методы решения научных, технических и социальных задач: Учеб. пособие / Под ред. А.Н. Солдатова. Томск : Издательский Дом ТГУ, 2016. 376 с.
29. *Пойзнер Б.Н.* О «субъекте» самоорганизации // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 1996. Т. 4, № 4–5. С. 149–158.
30. *Гаспарян Д.Э.* Таинство естественной семантики: Трансцендентальное измерение смысла и проблема искусственного интеллекта // Вопросы философии. 2017. № 4. С. 81–94.

References

1. Petruchenko O. Latin-Russian Dictionary. Moscow; Petrograd; Kharkov: Association «V.V. Dumnov, Heirs of brothers Salayev», 1918. 810 p.
2. Negin A. E. Roman Zeremoniell and Turnier Arme. St-Petersburg: Fakultet filologii i iskusstv SPbGU; Nestor-Istoriya, 2010. 232 p.
URL: http://www.sno.pro1.ru/lib/negin_rimskoe_vooruzhenie/negin_rimskoe_vooruzhenie.pdf (in Russian).
3. Weisman A.D. Greek-Russian Dictionary. Reprint of 5th edition 1899. Moscow: Yu.A. Shichalin's Greco-Latin room, 1991. 1370 clmn. (in Russian).
4. Shipovalova L.V., Malyshkin E.V. Historical source of scientific objectivivity, or About possible answer on «scandal» question of philosophy. *Voprosy Filosofii*. 2016. Vol. 12. Pp. 96–105 (in Russian).
5. Anikin V.M. Albert Einstein and Pitirim Sorokin: history of dissertation defenses. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*. 2011. Vol. 19. Iss. 3. Pp. 62–79 (in Russian).
6. Anikin V.M., Poizner B.N., Sosnin E.A., Shuvalov A.V. The Phenomenon of the Scientific School: History, Typology of the Knowledge Receipt and Transmission, Psychology of Communication. Ed. V.M. Anikin. Saratov University Press, 2015. 232 p. (in Russian).
7. Sharnina A.B. Gluskina Liya Mendelevna (27.06.1914, Minsk – 06.02.1991, Leningrad). Mnemon. Studies and Publications on the History of the Ancient World. Ed. E.D. Frolov. St-Petersburg University Press, 2000. Iss. 2. 424 p.
URL : http://centant.spbu.ru/centrum/publik/kafsbor/mnemon03.htm (in Russian)
8. Anikin, V.M., Usanov, D.A. Dissertation in the Mirror of the Abstract: Textbook manual for graduate students and competitors of scientific degree of natural-science specialties. Moscow: INFRA-M, 2013. 128 p. (in Russian).
9. Anikin V.M., Poizner B.N. State final attestation of post-graduate: From formality to preventiveness. *Alma Mater (Vestnik Vysshei shkoly).* 2015. Iss. 11. Pp. 17–21 (in Russian).
10. Anikin V.M., Poizner B.N. Scientific supervision by graduate students: «internal» and «external» regulators. *Izvestiya Saratov Univer. (N.S.), Ser. Fizika.* 2015. Vol. 15, iss. 1. Pp. 83–88 (in Russian).
11. Anikin V.M., Izmailov I.V., Poizner B.N. About perception, numerical rating and protection of scientific results. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics.* 2014. Vol. 22, iss. 6. Pp. 25–34 (in Russian).

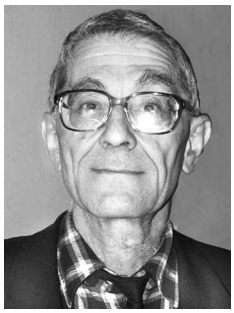
© *В.М. Аникин, Б.Н. Пойзнер*

12. Anikin V.M., Poizner B.N. The nature of the interest and definition of scientific character as an epistemological component of the professional competence of a physicist and an engineer. *Izvestiya VUZ. Fizika.* 2013. Vol. 56, iss. 10/3. Pp. 118–120 (in Russian).
13. Anikin V.M., Izmailov I.V., Poizner B.N. Dissertation: Scientific characteristics. *Geteromagnitnaya Mikroelektronika.* 2014. Iss. 16. Pp. 105–118 (in Russian).
14. Anikin V.M., Poizner B.N. On validation arguments of defended scientific statements and results. *Izvestiya VUZ. Fizika.* 2011. Vol. 54, iss. 6. Pp. 105–108 (in Russian).
15. Anikin V.M., Izmailov I.V., Poizner B.N., Sosnin E.A. A defended statement in a thesis as a transdisciplinary scientific genre. *Izvestiya VUZ. Fizika.* 2015. Vol. 58, iss. 8/3. Pp. 300–303 (in Russian).
16. Anikin V.M., Poizner B.N. Epistemological exercises of master student: formulation and evaluation of scientific statements in his thesis. *Izvestiya VUZ. Fizika.* 2012. Vol. 55, iss. 8/3. Pp. 213–214 (in Russian).
17. Anikin V.M., Poizner B.N., Usanov D.A. Scheme of the aspect characteristic of the dissertation: rules, recommendations, examples. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics.* 2009. Vol. 17, iss. 3(97). Pp. 137–150 (in Russian).
18. Anikin V.M., Usanov D.A. Abstract of the thesis: functions, structure, significance. *Izv. Saratov Univ. (N.S.). Ser. Fizika.* 2008. Vol. 8, iss. 2. Pp. 61–73 (in Russian).
19. Anikin V.M., Poizner B.N. Communicative function of thesis and professional grade of dissertator. *Izvestiya Saratov Univer. (N.S.), Ser. Fizika.* 2013. Vol. 13, iss. 1. Pp. 80–86 (in Russian).
20. Schwarz A.N. My correspondence with Stolypin. My memories of the Emperor. Moscow: Yu.A. Shichalin's Greco-Latin room, 1994. 362 p. (in Russian).
21. Ogurtsov A.P. The Philosophy of Science: Twentieth Century: Conceptions and Problems. In 3 parts. P. 2. St-Petersburg: Мигъ. 2011. 495 p. (in Russian).
22. Serdyukova E.V. Materials from the Archives of N.O. Lossky and A. Einstein: The Discussion of Space and Time (the 1950s) // *Voprosy Filosofii* [*Russian Studies in Philosophy*]. 2017. Vol. 1, Pp. 81–90 (in Russian).
23. Rozin V.M., Disenchanting and Destruction of «Object» Concept (the Methodological Analysis). *Voprosy Filosofii.*[*Russian Studies in Philosophy*]. 2015. Vol. 6. Pp. 41–52 (in Russian).
24. Rozin V.M., The Terms «Subject» and «Object» (the Methodological Analysis). *Voprosy Filosofii.* [*Russian Studies in Philosophy*]. 2012. Vol. 11. P. 85–96 (in Russian).
25. Sosnin E.A., Poizner B.N. Meaningful Scientific Activity, Moscow: INFRA-M, 2016. 148 p. (in Russian).
26. Luhman N. The World Time and History of Systems. *Logos: Journal of Philosophy and Pragmatics of Culture.* 2004. Vol. 5(44). Pp. 131–168 (in Russian).
27. Korogodin V.I. Information and the Phenomenon of Life. Pushchino: Pushchino Research Center of Russian Academy of Sciences Publ. 1991. 204 p. (in Russian).
28. Sosnin E.A. Methods for Solving Scientific, Technical and Social Problems: Textbook manual. Ed. A.N. Soldatov. Tomsk, TSU Publishing House, 2016. 376 p. (in Russian).

© *В.М. Аникин, Б.Н. Пойзнер*

29. Poizner B.N. On the Self-organization «Subject». *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics.* 1996. Vol. 4, No 4–5. Pp. 149–158 (in Russian).
30. Gasparyan D.E. The Mistery of the Natural Semantics: The Transcendental Dimension Meaning and the Problem of Artificial Intelligence. *Voprosy Filosofii [Russian Studies in Philosophy].* 2017. Vol. 4. P. 81–94 (in Russian).

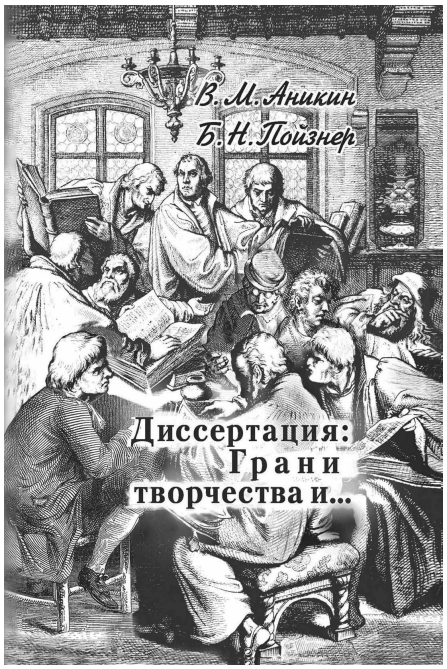
Аникин Валерий Михайлович – родился в г. Аткарске Саратовской области (1947). Окончил физический факультет Саратовского государственного университета (1970). Доктор физико-математических наук, профессор, декан физического факультета СГУ, заведующий кафедрой компьютерной физики и метаматериалов на базе Саратовского филиала Института радиотехники и электроники им. В.А. Котельникова РАН, ученый секретарь диссертационного совета Д 212.243.01 на базе СГУ. Область научных интересов – математическое моделирование хаотических и стохастических процессов, диссертациеведение. Почетный работник высшего профессионального образования Российской Федерации (2012).
410012, Россия, Саратов, ул. Астраханская, 83
Саратовский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского, Физический факультет
E-mail: AnikinVM@info.sgu.ru



Пойзнер Борис Николаевич – родился в Томске (1941). Окончил радиофизический факультет Томского государственного университета (1963). Защитил диссертацию на соискание учёной степени кандидата физико-математических наук (1970). Профессор кафедры квантовой электроники и фотоники. Читает лекции по нелинейной оптике, лазерной технике, основам синергетики, социальной информатике. Автор и соавтор более 400 публикаций, 10 изобретений, 20 учебных пособий и монографий по физике лазеров, процессам самоорганизации и хаотизации в оптических, радиофизических, социокультурных системах, вопросам вузовской педагогики и (само)образования, науковедению и культурологии, проблемам творчества как целенаправленной деятельности в обществе. Заслуженный работник высшей школы РФ (2005). Учёный секретарь диссертационного совета Д 212.267.04 на базе ТГУ. Действительный член Национального союза библиофилов РФ.
634050, Россия, Томск, пр. Ленина, 36
Радиофизический факультет
E-mail: pznr@mail.tsu.ru

© *В.М. Аникин, Б.Н. Пойзнер*

УДК 001; 124; 159.9; 165; 167



Серия «След вдохновений и трудов упорных...»
Приложение к журналу «Изв. вузов. ПНД»

ДИССЕРТАЦИЯ: ГРАНИ ТВОРЧЕСТВА И...

В. М. Аникин, Б. Н. Пойзнер

© Аникин В.М., Пойзнер Б.Н., 2017
© Редакция журнала «Изв. вузов. ПНД», 2017
Под ред. и с предисл. Д.И. Трубецкова
Саратов: ООО ИЦ «Наука», 2017. 142 с.
ISBN 978-5-9999-2579-4

В книге систематизированы статьи авторов науковедческой и диссертациеведческой тематики. Рассмотрены вопросы представления научных результатов в форме диссертаций. Издание адресовано магистрантам, аспирантам, членам научных экспертных и диссертационных советов в области естественных наук.

Содержание

Предисловие. *Д.И. Трубецков*
Введение
Раздел 1. Аспиранты и магистранты в системе научной деятельности
1.1. Научное руководство аспирантами и магистрантами: «внутренние» и «внешние» регуляторы. 1.2. Когнитивный менеджмент в подготовке аспирантов и магистрантов. 1.3. Осмысленная научная деятельность: как разъяснить её принципы творческой молодёжи? 1.4. Государственная итоговая аттестация аспиранта: от формальности к превентиве.
Раздел 2. Воспринимаемость новых знаний: диалектика истинности, научной новизны и значимости, распространения знаний
2.1. Диссертанту о воспринимаемости, числовой оценке и защите научных результатов. 2.2. Автореферат – «путеводитель» по диссертации. 2.3. Статус защищаемого диссертантом положения в познавательном процессе. 2.4. Защищаемое положение в диссертации как трансдисциплинарный научный жанр.

Раздел 3. Защищаемые научные положения – творческое лицо диссертанта
3.1. Как сформулировать защищаемые научные положения. 3.2. Как аргументировать достоверность положений и результатов, выносимых на защиту. 3.3. О лингво-дисциплинарной компетенции диссертанта.
Раздел 4. «Предзащита» и защита диссертации: формальные требования и традиции
Раздел 5. Стили лидерства в науке
Заключение
Приложение. Как защищали диссертации 100 и более лет назад
Библиографический список

Предисловие

> Следует понимать, что научный текст – это модель, отражающая закономерности кодирования и извлечения информации, исторически сложившиеся коммуникативные стандарты, обусловленные потребностью быть понятым и принятым в определенную социальную общность. Научный результат через текст включается в систему многих конвенций. Коммуникация в науке задает рамочное пространство, подчиняющее учёного социокультурным и речевым образцам, которые действуют как «фильтры», идентифицирующие «своих» и «чужих» при оценке качества научного изложения. Их игнорирование связано с риском невнимания к представляемому результату со стороны сообщества экспертов и специалистов и риском исключения его из научного оборота. Этот факт оказывается недооцененным.
>
> *В. Чернявская*[*]

В этой книге собраны опубликованные в разные годы статьи профессоров Валерия Михайловича Аникина и Бориса Николаевича Пойзнера, представляющих два ведущих Национальных исследовательских университета России – Саратовский и Томский. Статьи объединяет одна тема – подготовка и защита диссертаций в области физико-математических наук. Проблема эта авторам близка, поскольку они являются учёными секретарями диссертационных советов в своих университетах на протяжении многих лет и, соответственно, были свидетелями сотен диссертационных защит. Написание статей диктовалось желанием авторов повысить методический уровень подготовки (как правило, в аспирантуре) и представления диссертационных работ.

Статьи адресованы соискателям учёных степеней, их научным руководителям, членам диссертационных советов и затрагивают круг вопросов, уяснение которых позволит заинтересованным читателям методически грамотно провести процесс представления результатов своей научной деятельности. И хотя статьи нацелены, в основном, на различные аспекты диссертационного творчества, их ареал значительно шире, а «обитатели» его весьма разнообразны.

Замечу, что несмотря на разницу в стиле в данной книге много общего с автобиографической книгой знаменитого биолога Джеймса Уотсона «Избегайте занудства. Уроки жизни, прожитой в науке»[**]. Каждую из глав можно иллюстрировать «усвоенными уроками» по Уотсону (особенно интересна в этом плане глава 2).

---

[*] *Валерия Чернявская*. Как подать... Успех научной статьи определяет лингвистическая стратегия // Поиск. 2015, 3 апреля. № 14. С. 21.

[**] См.: *Джеймс Уотсон*. Избегайте занудства. Уроки жизни, прожитой в науке. М.: Астрель: CORPUS, 2010. 463 с. Перевод с англ.: James Watson. Avoid Boring People. Lessons from a Life in Science.

Большинство статей опубликовано в журналах из серии «Известия высших учебных заведений». Это не случайно, а в настоящее время является более чем оправданным в связи с приданием аспирантуре статуса заключительной ступени высшего образования, хотя её новый статус не кажется мне полезным, поскольку отвлекает аспиранта от главного – от собственных исследований. Политика поддержки молодых учёных журналом «Прикладная нелинейная динамика» является традиционной. Она реализуется посредством публикации статей начинающих авторов (в специальной рубрике), научных и историко-научных обзоров, анонсов и итогов научных конференций с участием молодых учёных, а также разнообразных методических материалов (образовательных программ, рекомендаций и т.д.).

Начальные статьи данного сборника посвящены проблеме подготовки в аспирантуре и научного руководства аспирантами. Затем обосновывается, вытекающая, собственно, из логики развития науки, необходимость корректного (своевременного и верифицированного) представления научных результатов, а также рассматриваются сопутствующие технические и этические моменты «популяризации» своего труда в научной среде.

Далее серьезное внимание уделяется логической и содержательной структуре автореферата как «ворот» диссертации и формулировке аспектных характеристик диссертационных работ – объекта и предмета исследования, целеполагания, формулировки защищаемых положений, аргументации в пользу истинности полученных результатов, оценки теоретической и прикладной значимости работы, лингво-дисциплинарной грамотности соискателя. Даются также рекомендации по содержанию и структуре устного доклада при защите диссертации.

В науковедческом аспекте интересным представляется авторское рассмотрение работы над диссертацией в контексте теории целенаправленной системы деятельности. Исторический сюжет книги посвящен диссертационной эпопее выдающегося отечественного физика, основателя первой научной школы по физике в России Петра Николаевича Лебедева.

Статьи из настоящего сборника отличает развернутость изложения, разнообразие постановки проблем и исторических экскурсов, обращение к мнениям теоретиков науки.

Поскольку теперь полный текст диссертации размещается в интернете, то она оказывается полностью опубликованной. В этом плане интересна следующая цитата из упоминавшейся статьи профессора В. Чернявской: «Успешная публикация – это сложная сосредоточенная выверенная стратегия автора. Для российского учёного в ситуации практически уничтоженной русскоязычной научной периодики лингвистические стратегии получают статус ключевых. Они предполагают среди прочего: знание традиций предметной области, академических стандартов построения научного текста, взвешенный выверенный баланс преемственности и четко сформулированной новизны».

Обо всём этом – рецензируемая книга. Она содержит материал, который позволяет (в первую очередь – начинающим авторам) преодолеть терминологические, смысловые, психологические и организационные трудности, которые могут встать при написании диссертационной работы. Некоторые фрагменты различных статей могут перекликаться друг с другом, но они органично вписываются в «ткань» соответствующих изложений.

Уверен, что для каждого читателя этого сборника найдётся хотя бы одна статья, которая поможет ему трояко: как творческому субъекту в науке, как автору специфических текстов, т.е. диссертации, автореферата её, официальных отзывов на них etc., и как объекту административного внимания со стороны управляющих структур.

Чл.-корр. РАН, д.ф.-м.н.,
профессор Д.И. Трубецков

© Изв. вузов «ПНД», т. 25, № 6, 2017

Научное издание

Зав. редакцией *Н.Н. Левина*
Редакторы *Н.Н. Левина, Л.А. Сидорова*
Оформление художника *Д.В. Соколова*
Оригинал-макет подготовлен
И.А. Пономаревой, О.Н. Строгановой
в пакете L^AT_EX

Подписка на 2018 год
осуществляется по Объединенному Каталогу «Пресса России»
Раздел: 30. «Научно-технические издания.
Известия РАН. Известия ВУЗов»
и по Интернет-Каталогу Агентства «Книга-Сервис»
а также по Договору между Подписчиком
(юридическим или физическим лицом)
и Издателем (Саратовским государственным университетом)

Цена годовой подписки (6 номеров) договорная
Заявки на заключение Договора принимаются
по почте, по телефону редакции, по эл. почте редакции

Адрес редакции: 410012 Саратов, Астраханская, 83
Тел./факс: (845-2) 52-38-64
E-mail:and@nonlin.sgu.ru
Сайт журнала http://andjournal.sgu.ru

Распространение журнала осуществляется
редакцией журнала по адресной системе

Условия подписки на электронную версию журнала на сайте
Научной электронной библиотеки http://elibrary.ru

Сдано в набор 1.12.2017. Подписано к печати 29.12.2017
Формат 70x108/16. Бумага офсетная. Печать офсетная
Усл. печ. л. 9,0 (6,4). Уч.-изд. л. 8,0. Заказ № –Т.

Отпечатано в Типографии ФГБОУ ВО СНИГУ
410012 Саратов, Б.Казачья, 112А, тел. (845-2) 27-33-85

© Редакция журнала
«Известия вузов. ПНД», 2017
© Оформление художника
Д.В. Соколова, 2017