

СОДЕРЖАНИЕ

*Нелинейная динамика в Нижегородском университете
(к 75-летию со дня основания ННГУ)*

<i>Шалфеев В.Д.</i> От редактора	3
ОБЗОРЫ АКТУАЛЬНЫХ ПРОБЛЕМ НЕЛИНЕЙНОЙ ДИНАМИКИ	
<i>Абарбанель Г.Д.И., Рабинович М.И., Цимринг Л.Ш.</i> «Кристаллы» и «квазикристаллы» в неравновесных средах	5
ПРИКЛАДНЫЕ ЗАДАЧИ НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ КОЛЕБАНИЙ И ВОЛН	
<i>Осипов Г.В., Суцук М.М.</i> Механизм образования локализованных структур в связанных цепочках автогенераторов.	24
<i>Пономаренко В.П., Заулин И.А.</i> Сложная динамика систем с неединственным состоянием равновесия	30
<i>Максимов А.Г.</i> О численном построении двоякоасимптотических траекторий в фазовом пространстве динамических систем	43
<i>Баженов М.В., Сабаев Е.Ф.</i> Глобальная ограниченность решений некоторых уравнений математической физики	52
ДЕТЕРМИНИРОВАННЫЙ ХАОС	
<i>Корзинов Л.Н., Рабинович М.И.</i> Диагностика пространственно-временного беспорядка	59
<i>Алексеев А.А., Козлов А.К., Шалфеев В.Д.</i> Хаотический режим и синхронный отклик в автогенераторе, управляемом по частоте	71
НЕЛИНЕЙНАЯ ДИНАМИКА В ЛИЦАХ. ИСТОРИЯ. PERSONALIA	
<i>Андронов Александр Александрович (11.04.1901 – 31.10.1952).</i> Автобиография	78
<i>Горяченко В.Д.</i> Андронов Александр Александрович	81
КНИЖНАЯ ПОЛКА СТУДЕНТА	86
ШКОЛЫ. КОНФЕРЕНЦИИ. СЕМИНАРЫ. СИМПОЗИУМЫ	
<i>Агудов Н.В.</i> Информационное сообщение о международной конференции по экспериментальному хаосу	89
АНОНС	
Специальный выпуск	23 70
Новая книга	77

HIGH EDUCATION STATE COMMITTEE OF RUSSIAN FEDERATION

Izvestiya VUZ

APPLIED NONLINEAR DYNAMICS

scientific-technical journal

published since 1993

Published 6 times a year

Vol.2, №1, 1994, Saratov

CONTENTS

Nonlinear dynamics in Nizhegorodskiy University
(Dedicated to 75-th anniversary of NNSU)

Editorial. <i>V.D. Shalfeev</i>	3
REVIEWS OF ACTUAL PROBLEMS OF NONLINEAR DYNAMICS	
«Crystals» and «quasicrystals» in nonequilibrium media. <i>H.D.I. Abarbanel, M.I. Rabinovich and L.Sh.Tsimring</i>	5
APPLIED PROBLEMS OF NONLINEAR DYNAMICS	
The mechanism of the formation of localized structures in coupled chains of self-excited oscillators. <i>G.V. Osipov and M.M.Sushchik</i>	24
Complex dynamics of the systems with the unonly equilibrium state. <i>V.P.Ponomarenko and I.A. Zaulin</i>	30
On construction of two asymptotic orbits in the phase space of dynamic systems. <i>A.G.Maksimov</i>	43
The global boundedness of solutions to some equations of mathematical physics. <i>M.V. Bazhenov and E.F. Sabaev</i>	52
DETERMINISTIC CHAOS	
The diagnostics of spatio-temporal disorder. <i>L.N. Korzinov and M.I. Rabinovich</i> . .	59
Chaotic regime and synchronous response in generator with frequency feedback control loop. <i>A.A. Alekseyev, A.K. Kozlov and V.D. Shalfeev</i>	71
HISTORY OF NONLINEAR DYNAMICS. PERSONALIA	
Autobiography. <i>Alexander A. Andronov</i> (11.04.1901 – 31.10.1952)	78
A.A. Andronov (Book extracts) <i>V.D. Goryachenko</i>	81
STUDENT'S BOOKSHELF	86
CONFERENCES. MEETINGS. SYMPOSIUMS. SCIENTIFIC SCHOOLS	
On the «2-nd Experimental Chaos Conference», 1993, 6–8 October, Arlington, USA. <i>N.V. Agudov</i>	89
ANNOUNCEMENTS	
Special issue	23 70
New book	77

В 1993 г. Нижегородскому государственному университету им. Н.И. Лобачевского исполнилось 75 лет. Отмечая этот юбилей и принимая во внимание выдающуюся роль нижегородской научной школы теории нелинейных колебаний академика А.А.Андропова в становлении и развитии нелинейной динамики в отечественной и мировой науке, редакция журнала «Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика» предоставляет свои страницы ученым нижегородского университета. Выпуски №№ 1, 2 в 1994 г. являются специальными, посвященными 75-летию Нижегородского университета.

Редакционная коллегия

ОТ РЕДАКТОРА

Еще в прошлом веке, на Всероссийской торгово-промышленной выставке 1896 г. был начат сбор средств для первого нижегородского высшего учебного заведения. Естественным результатом этого процесса явилось создание в марте 1918 г. Нижегородского государственного университета. Нижегородский университет с самого начала развивался как учебно-научное заведение, в котором учебный процесс был тесно переплетен с научными исследованиями. Просто нелегко пытаться собрать в одном-двух выпусках журнала статьи, представляющие сколь-нибудь полно различные направления нелинейной динамики, развивающиеся сейчас в Нижнем Новгороде (или даже только в Нижегородском университете) на базе научной школы нелинейных колебаний академика А.А. Андропова. Это не реально хотя бы потому, что в Нижнем Новгороде живет и работает не одно, а несколько поколений ученых, воспитанных этой научной школой (как в области физики и математики, так и в других областях науки, а также в промышленности). По этой причине в данных выпусках собраны статьи, представляющие только одну кафедру Нижегородского университета – кафедру теории колебаний и автоматического регулирования радиофизического факультета, созданную академиком А.А. Андроновым. Эти работы выполнены в рамках научной тематики кафедры и филиала кафедры в Институте прикладной физики РАН (рук. филиала чл.-корр. РАН М.И. Рабинович) преподавателями, научными сотрудниками, недавними выпускниками кафедры. Статьи не подбирались специально по тематике, однако спектр затрагиваемых вопросов от классических задач теории колебаний до задач исследования пространственно-временного хаоса, процессов структурирования, диагностики и обработки хаотических сигналов, достаточно полно отражает современные научные интересы кафедры в области нелинейной динамики.

Редактор выпуска
зав. каф. теории колебаний
и автоматического регулирования
Нижегородского университета,
д.ф.-м.н., профессор,
чл.-корр. Академии инженерных наук РФ

В.Д. Шалфеев

«...Главной целью создания Нижегородского государственного университета стало предоставление самому широкому кругу рабочей и крестьянской молодежи возможности получить современное университетское образование.

К началу 20-х годов в Нижегородском университете учились уже более 2.5 тысяч студентов, работали более 300 преподавателей, 60 профессоров из ведущих университетов и институтов России. Здесь действовали факультеты: агрономический, химический, физико-математический, медицинский, строительный, историко-филологический и др.

На рубеже 30-х годов факультеты НГУ стали основой для создания ряда нижегородских институтов – политехнического, инженерно-строительного, медицинского, сельскохозяйственного. Тогда же в НГУ появился один из первых в России Научно-исследовательский физико-технический институт. Слова «первые в России» относятся ко многим событиям жизни Нижегородского университета, что говорит о его динамичном, уверенном развитии на уровне требований времени. Так, в 1944 г. в НГУ появился научно-исследовательский институт химии, в 1945 г. радиофизический факультет, в 1963 г. – факультет вычислительной математики и кибернетики и одноименный научно-исследовательский институт, в 1974 г. – Научно-исследовательский институт механики.

Сильные научные школы в области химии, математики, биологии стали складываться в НГУ уже в 20-х годах. Затем появились научные школы и направления в области истории, литературы, радиофизики, физики твердого тела, экономики, философии. В формировании научных школ и направлений Нижегородского университета участвовали известные в России и в мире ученые, академики А.А. Андронов, П.К. Анохин, Н.В. Белов, В.Л. Гинзбург, А.В. Гапонов-Грехов, А.В. Шубников, Г.А. Разуваев, Г.Г. Девярых, С.И. Архангельский, А.Ф. Капустинский, А.Д. Петров, С.М. Рыгов, основатель популяционной генетики профессор С.С. Четвериков, известный ботаник С.С. Станков, профессор математики И.Р. Брайцев. Этот перечень можно продолжить ...

Ректор А.Ф. Хохлов

РАДИОФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

Радиофизический факультет был организован в 1945 г. Основателями сложившейся в нашем городе, пользующейся мировой известностью научной школы были А.А. Андронов, В.Л. Гинзбург, Г.С. Горелик, М.Т. Грехова. Интеллектуальный потенциал и динамизм радиофизиков проявился в их мощной «экспансии» в другие области знания (океанологию, биологию, медицину), привел к созданию на основе радиофизического факультета и ГИФТИ Научно-исследовательского радиофизического института, а впоследствии на его базе – Института прикладной физики Академии наук, а также 5 ведущих в области электроники, радиосвязи и приборостроения технологических центров, в которых работают в основном выпускники радиофизического факультета. Хорошо известны имена таких выпускников факультета, как А.В. Гапонов-Грехов, В.И. Ильичев, В.И. Таланов, В.В. Железняков, В.А. Зверев, Г.Г. Гетманцев, Н.Г. Денисов, Н.С. Степанов, А.Н. Малахов, М.А. Миллер.

Факультет является интеллектуальным ядром и учебным центром сложившегося в Нижнем Новгороде крупного научно-технологического комплекса по радиоэлектронике. На факультете 11 кафедр, которые готовят радиофизиков-исследователей высшей квалификации со специализацией в следующих областях: электродинамика, физика плазмы, квантовая радиофизика, электроника, высокотемпературная сверхпроводимость, распространение радиоволн и физика ионосферы, радиоастрономия и физика космоса, нелинейные колебания и волны, радиотехника и радиофизические измерения, автоматизация радиофизических исследований и проектирования, радиооптика и голография, радиофизические методы в биологии и медицине, статистическая радиофизика, радиофизические методы исследования океана и недр, компьютерное обеспечение радиофизического эксперимента, математическая физика.

На факультете работают 30 докторов и 60 кандидатов наук. Факультет перешел на принятую за рубежом структуру высшего образования: бакалавр – магистр. Сложилась особая система образования. Ее отличительные черты: сочетание фундаментальности и глубины образования со специализацией в самых современных направлениях; обучение ведут преподаватели, активно работающие в науке, в том числе ведущие ученые академических институтов и исследовательских центров радиоэлектронной промышленности (ИПФ РАН, НИИМаш РАН, НИРФИ, ННИИРС, ННИИРТ, НПО «Кварц» (ННИПИ), НПО «Салют», НИИТОП, НИИИС и др.); сочетание глубокой физико-математической подготовки с высоким уровнем овладения компьютерной техникой и хорошим знанием английского языка; связи факультета с крупными научными центрами мира (Кембридж, Итака, Сан-Диего и др.), возможность стажировки студентов за рубежом.»

© Нижегородский государственный университет
им. Н.И. Лобачевского в юбилейном 1993 году.
Н. Новгород: Изд-во ННГУ, 1993. 43 с.



«Кристаллы» и «квазикристаллы» в неравновесных средах

Генри Д.И. Абарбанель, М.И. Рабинович, Л.Ш. Цимринг

Предлагаемый читателю материал представляет собой переработанные специально для данного выпуска две главы обзорного характера, готовящейся к изданию книги авторов «Теория динамического беспорядка». С позиций нелинейной динамики обсуждается формирование регулярных кристаллических и квазикристаллических структур в различных неравновесных средах, в частности, квазидвумерных гидродинамических течениях.

Введение

Данная статья посвящена обсуждению того, что можно назвать «Динамическая теория паттернов». Под словом «паттерны» здесь понимаются пространственные узоры или структуры в самом широком смысле. Это и регулярные пространственные распределения полей, и другой предельный случай – пространственный беспорядок.

Обратимся к трем экспериментальным результатам по исследованию паттернов на поверхности жидкости. Они представлены на фотографиях рис. 1–3. На рис. 1 изображен мгновенный снимок регулярно взволнованной поверхности бассейна [1], на рис. 2 – шестигранная решетка конвекции Бенара – Марангони [2], на рис. 3 – неупорядоченная картина капиллярной ряби слоя жидкости, находящегося в осциллирующем гравитационном поле [3]. Исследование подобных паттернов с позиций нелинейной динамики требует ответа на множество вопросов, а именно: почему паттерны устойчивы, как они устанавливаются из произвольных начальных условий, как модифицируется паттерн при изменении параметров эксперимента и, наконец, как описывать подобные структуры?

Кажется, что последний вопрос – как описывать уже имеющиеся структуры – проще других. При рассмотрении фотографий прежде всего бросается в глаза существование определенного пространственного масштаба. В случае регулярной решетки (см. рис. 1) – это длина взаимноортогональных стоячих волн, в случае неупорядоченной ряби (см. рис. 3) – длина параметрически возбуждаемых волн на поверхности слоя жидкости. Таким образом, естественно представить наблюдаемое поле в виде суперпозиции плоских волн с одинаковыми по модулю волновыми векторами

$$u(\mathbf{r}, t_0) = \sum_n a_n e^{i\mathbf{k}_n \cdot \mathbf{r}} + c.c., \quad (1)$$

где a_n – числа, а все волновые вектора \mathbf{k}_n одинаковы по модулю $|\mathbf{k}_n| = k_0$. Тогда решетке с квадратными ячейками отвечают четыре моды с волновыми векторами, развернутыми под углом 90° (рис. 4, а); решетке с шестигранными ячейками – шесть плоских волн, волновые вектора которых повернуты на угол 60°

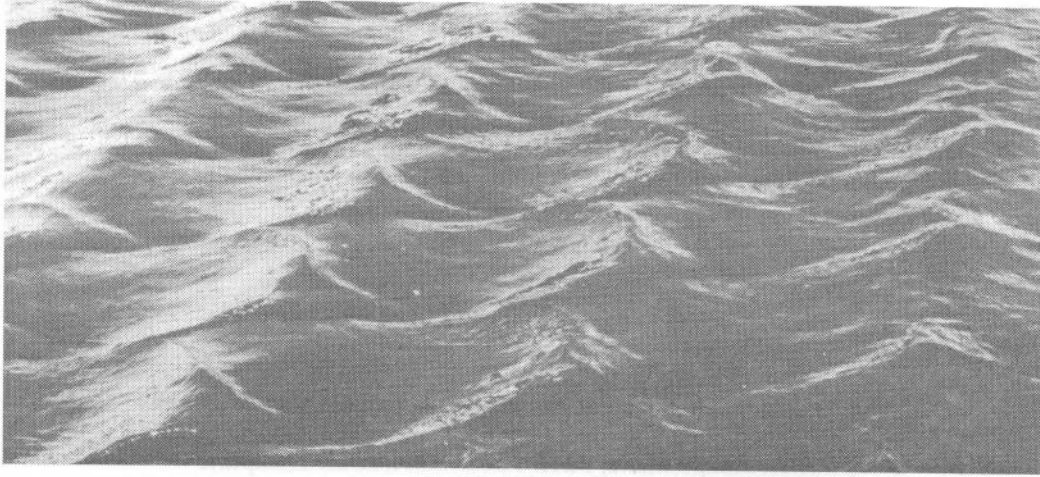


Рис. 1. Решетка стоячих поверхностных волн с квадратными ячейками [1]

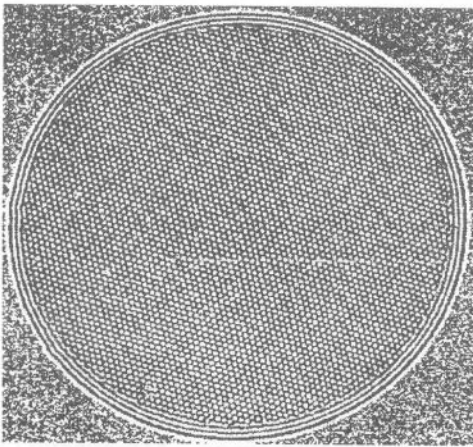


Рис. 2. Шестигранная структура конвекции в горизонтальном слое жидкости, подогреваемом снизу [2]

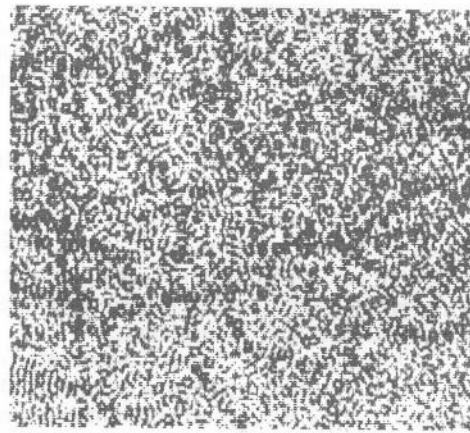


Рис. 3. Пространственно-временной беспорядок капиллярных волн на поверхности горизонтального слоя жидкости, помещенного в осциллирующее гравитационное поле [3] – неупорядоченная «рябь Фарадея»

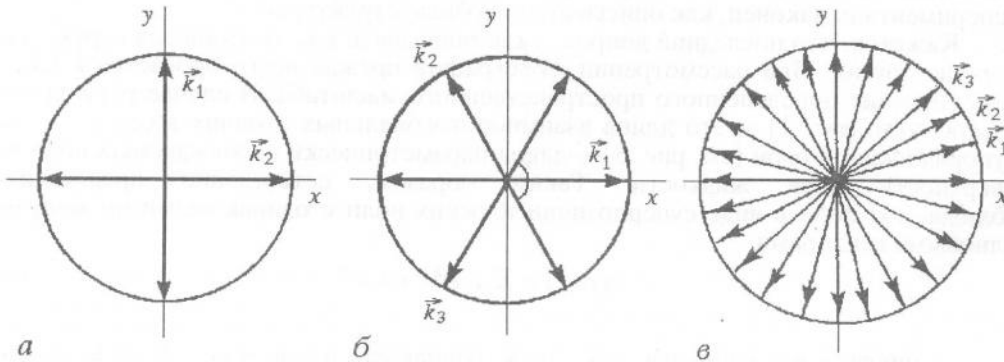


Рис. 4. Модовая структура двумерных «кристаллов»: *a* – распределение волновых векторов для квадратной решетки; *б* – модовый состав шестигранной решетки, *в* – картина мод, образующих «турбулентный кристалл»

относительно друг друга (рис. 4, б). Картина, подобная представленной на рис. 3, может быть образована также из плоских волн с одинаковыми по модулю волновыми числами, если их достаточно много и если их волновые вектора равномерно распределены по углу (рис. 4, в). На рис. 5 представлены результаты компьютерного моделирования, подтверждающие правильность подобного описания [4].

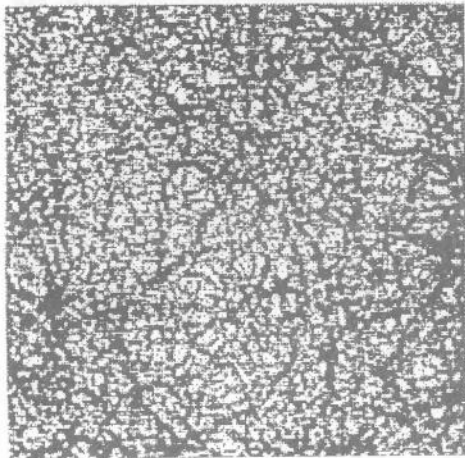


Рис. 5. Пространственный беспорядок, сформированный 400 модами с одинаковыми по модулю волновыми векторами со случайными амплитудами и фазами, равномерно распределенными по углу [4]

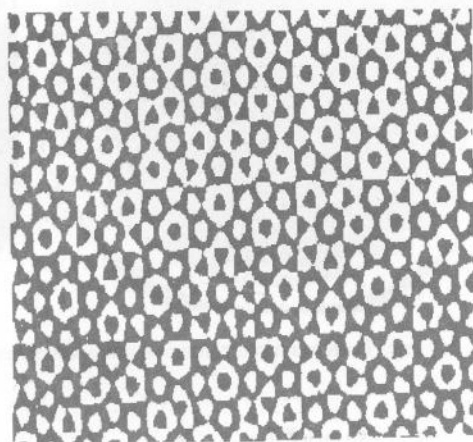


Рис. 6. «Квазикристаллы» капиллярной ряби с симметрией 4 (8) порядка [6]

Полученный результат заключается в том, что случайную картину поля, подобную представленной на фото рис. 3, можно описать с помощью достаточно большого числа гармонических волн (мод) даже и с одинаковой длиной волны, не столь уж удивителен. Действительно, если амплитуды мод случайны и их фазы произвольны (не синхронизованы), ориентация волновых векторов также случайна (см. рис. 4, в). Заметим, что пространственные корреляции при гауссовом распределении амплитуд спадают достаточно быстро в соответствии с формулой, найденной М.Вегу [5]

$$K(\delta) = p u^{\text{rand}}(x) u^{\text{rand}}(x+\chi) a^2 x = \text{const } J_0(k_0 \chi), \quad (2)$$

где J_0 – функция Бесселя нулевого порядка, k_0 – модуль волновых векторов, а χ – аргумент корреляционной функции. Удивительно в данном эксперименте другое – почему амплитуды волн в *установившемся режиме распределены по Гауссу*? Почему фазы отдельных волн произвольны и не синхронизируются по времени? Эти вопросы относятся уже к динамической теории.

Между чисто периодическим («кристаллическим») и предельно неупорядоченным распределениями поля в пространстве могут существовать самые различные промежуточные паттерны с различной степенью неупорядоченности или упорядоченности. Одним из замечательных экспериментальных достижений последних лет является наблюдение «квазикристаллического порядка» в гидродинамических течениях – имеется в виду капиллярная рябь, параметрически возбуждаемая осциллирующим гравитационным полем [6,7]. Эти «квазикристаллы» представлены на рис. 6 [6] и рис. 7 [7]. Путем построения картины поля на компьютере можно убедиться в том, что неперiodические паттерны, для которых характерен дальний порядок, образованы соответственно восемью (рис. 8, а) или двенадцатью (рис. 8, б) плоскими волнами с одинаковыми по модулю волновыми векторами, углы между которыми соответственно 45° и 30° .

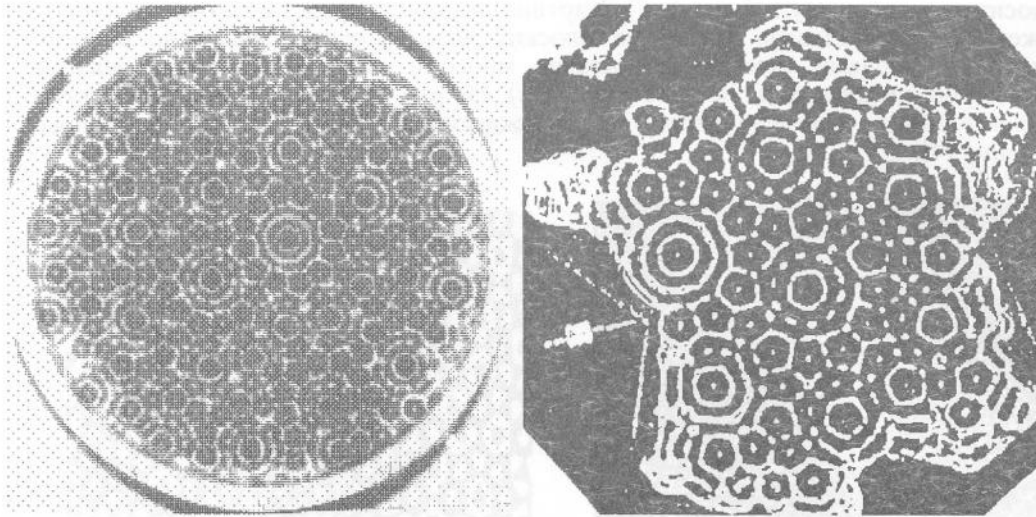


Рис. 7. «Квазикристаллы» капиллярной ряби с симметрией 6 (или 12) порядка [7]

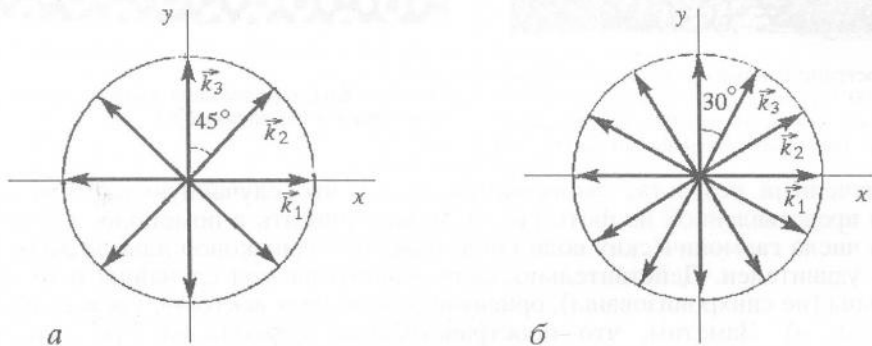


Рис. 8. Модовый состав двумерных квазикристаллов: а – с симметрией 4 (или 8) порядка; б – с симметрией 6 (или 12) порядка

И опять тот факт, что «квазикристалл» можно построить всего из 8 (или 12) мод, не объясняет существования наблюдаемых паттернов. Действительно, почему устойчиво наблюдается именно совокупность 8 (или 12) мод? Отчего, вообще, зависит их число? Можно ли, меняя параметры, например, частоту осциллирующего гравитационного поля, видоизменять тип симметрии картинки? Эти вопросы также представляют предмет динамической теории.

1. «Живые» кристаллы

Кристаллические формы, исключительно примитивные с точки зрения художника, во всяком случае несут в себе нечто от эстетической привлекательности простоты...

Charles Bunn. Crystals. 1964

Конечно, показанные на рис. 1–2 полностью упорядоченные паттерны, которые мы обобщенно называем «живой» кристалл, предельно просты. Однако именно эта простота и регулярность вызывают непростые вопросы, главные из

которых: почему нелинейное поле в процессе эволюции переходит из начального неупорядоченного в полностью регулярное состояние, и каким образом в природе осуществляется отбор структур? Первый шаг к ответу на эти вопросы мы сделали выше, обратив внимание на «резонансный» или избирательный в пространстве характер исходной неустойчивости. Именно такая неустойчивость обычно является необходимой для рождения упорядоченных паттернов, вызывающих наше восхищение. Однако, как мы видели, те же неустойчивости при изменении параметров задачи могут привести совсем к другим структурам или к рождению беспорядка. Таким образом, одного факта «резонансности» исходной неустойчивости еще недостаточно для формирования упорядоченной в пространстве кристаллической картины. Главным здесь является следующий этап эволюции разных упорядоченных и неупорядоченных структур во времени, а именно, процесс взаимодействия разных мод. Это процессы конкуренции и селекции, которые и обеспечивают рождение порядка из первоначального хаоса.

Идеальное кристаллическое распределение поля (параметра порядка) выделяется среди прочих наличием трансляционной симметрии. Для двух пространственных координат это означает существование двух базисных векторов $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$, таких, что рассматриваемая картина остается неизменной при параллельных переносах (трансляциях) на любой вектор, представляющий собой линейную комбинацию этих двух векторов с целочисленными коэффициентами. Рассмотрим только идеальные «кристаллы» (без дефектов, неоднородностей, границ и т.д.). Пространственный Фурье-спектр идеального кристалла состоит из конечного числа дискретных компонент

$$A_{\mathbf{k}} = \sum_{j=1}^{2N} A_j \delta_{\mathbf{k}-\mathbf{k}_j}, \quad \mathbf{k}_{j+N} = -\mathbf{k}_j, \quad A_{j+N} = -A_j^*, \quad (3)$$

\mathbf{k}_j – базисные вектора решетки, все они лежат на окружности $|\mathbf{k}_j| = k_0 = 1$ и углы между ними равны. Для двумерных паттернов только $N = 1, 2, 3$ соответствуют кристаллам. Любой другой набор N формирует квазикристалл (см. ниже). Структура из роликов отвечает случаю $N = 2$, шестигранные Релей – Бенаровские ячейки $N = 6$ и решетки с квадратными ячейками (например, капиллярной ряби) $N = 4$.

Помимо исходных уравнений для параметра порядка, например, уравнения Свифта – Хоенберга (SHE) или уравнения Гинзбурга – Ландау [8,9], удобно использовать также спектральную форму эволюционного уравнения. Так, для SHE

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \varepsilon u + \beta u^2 - u^3 - (k_0^2 + \nabla^2)^2 u \quad (4)$$

будем иметь для спектральных компонент такую систему интегральных уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{\partial A_{\mathbf{k}}}{\partial t} = & [\varepsilon - (k_0^2 - 1)^2] A_{\mathbf{k}_1} - \beta \int A_{\mathbf{k}_1} A_{\mathbf{k}_2} \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2) d\mathbf{k}_1 d\mathbf{k}_2 - \\ & - \int \rho(\theta) A_{\mathbf{k}_1} A_{\mathbf{k}_2} A_{\mathbf{k}_3} \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_3) d\mathbf{k}_1 d\mathbf{k}_2 d\mathbf{k}_3. \end{aligned} \quad (5)$$

Здесь $A_{\mathbf{k}} = A_{-\mathbf{k}}^*$ – комплексные амплитуды $e^{\pm i\mathbf{k}\mathbf{r}}$ мод, образующих двумерные паттерны, где \mathbf{k} и \mathbf{r} – двумерные векторы, лежащие в плоскости этих паттернов, ε – расстояние до порога неустойчивости, β – параметр квадратичной нелинейности, определяющий трехмодовые взаимодействия типа $\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 = \mathbf{k}$, $\delta(x)$ – дельта функция, $\rho(\theta)$ – матричный элемент четырехволнового взаимодействия $\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3 = \mathbf{k}$, определяемого кубической нелинейностью, θ – угол раствора ромба,

составленного из векторов k, k_1, k_2, k_3 . Для однородной и изотропной среды без вращения $\rho(\theta)$ удовлетворяет условиям симметрии

$$\rho(-\theta) = \rho(\theta) = \rho(\pi-\theta). \quad (6)$$

Обсудим вначале более подробно случай, когда A_k есть Фурье-образ параметра порядка, описываемого SHE. Тогда непосредственно из (4) будем иметь (ср. (5))

$$\rho(\theta) = \text{const} = \rho(0). \quad (7)$$

Если квадратичная нелинейность отсутствует ($\beta=0$), то для комплексных амплитуд любой пары пространственно однородных мод получается простая динамическая система

$$\dot{A}_{1,2} = \epsilon A_{1,2} - 3/8[|A_{1,2}|^2 + 2|A_{2,1}|^2]A_{1,2}. \quad (8)$$

Здесь использовано представление $u(r, t) = A_1(t)e^{ik_1 r} + A_2(t)e^{ik_2 r} + c.c.$, где $|k_{1,2}|^2 = 1$. Фазовый портрет (7) представлен на рис. 9. Помимо неустойчивого состояния $A_1 = A_2 = 0$, здесь имеется еще седло с координатами $A_1 = A_2 = (2\sqrt{2\epsilon})/3$ и два устойчивых узла: $A_1 = (2\sqrt{2\epsilon})/\sqrt{3}, A_2 = 0$ и $A_1 = 0, A_2 = (2\sqrt{2\epsilon})/\sqrt{3}$. Этот фазовый портрет описывает известный эффект конкуренции мод. Как видно, устойчивым оказывается лишь однороликовый режим. Другие возмущения подавляются.

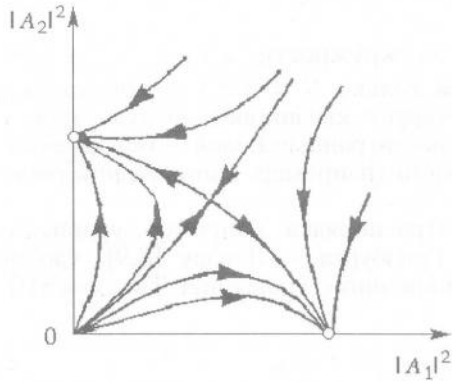


Рис. 9. Конкуренция двух различных пространственных мод во времени – режим совместной генерации неустойчив. Установление при $t \rightarrow \infty$ той или иной структуры зависит от начальных условий

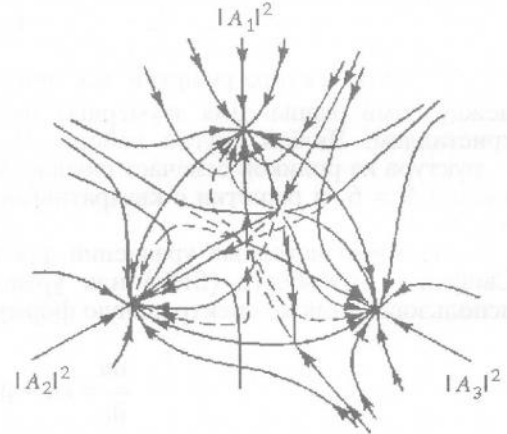


Рис. 10. Фазовый портрет, описывающий конкуренцию трех мод

На рис. 10 изображен фазовый портрет, описывающий конкуренцию трех мод. К сожалению, трудно представить траектории, отвечающие динамике N -модовой конкуренции, которая описывается системой

$$\dot{A}_j = \epsilon A_j - A_j [|A_j|^2 + \sum_{l \neq j} \rho_{jl} |A_l|^2], \quad \rho_{ji} = \rho_{ij}, \quad \rho_{ji} > \rho_{jj} \quad (9)$$

для SHE $\rho_{ji} = 6/8, \rho_{jj} = 3/8$. Однако, воспользовавшись выражением для свободной энергии, можно убедиться, что режим совместного сосуществования роликов различной ориентации неустойчив, независимо от числа N . Действительно, из выражения для F

$$F = -\varepsilon \sum_{j=1}^N |A_j|^2 + \frac{1}{2} \sum_{l=1}^N \sum_{j=1}^N \rho_{jl} |A_j|^2 |A_l|^2 \quad (10)$$

следует, что в одномодовом режиме

$$F = F_1 = -\frac{1}{2} \varepsilon / \rho_{jj} . \quad (11)$$

В то же время в режиме совместной генерации N мод с интенсивностями $|A_j| = \varepsilon / (\sum_{l=1}^N \rho_{jl})$ имеем

$$F_N = -\frac{N \varepsilon}{2 \sum_l \rho_{jl}} , \quad (12)$$

но $\frac{1}{N} \sum_{l=1}^N \rho_{jl} > \rho_{jj}$, следовательно, $F_N > F_1$.

Таким образом, в рамках градиентной системы (9) всегда устанавливается в результате эволюции кристаллическая структура простейшего вида – периодическая система роликов. Их ориентация в пространстве произвольна и зависит от начальных условий.

Если $\beta \neq 0$, то простая роликовая структура может оказаться неустойчивой по отношению к возбуждению пары мод, удовлетворяющих условию трехмодового резонанса $k_1 + k_2 = k_3$. Действительно, если, например, для конвекции небуссиновские эффекты существуют, именно такая неустойчивость, приводящая к рождению «кристалла» с симметрией 3 (6) порядка, и наблюдается в экспериментах (см. рис. 2). Замечательно, что рождение шестигранной кристаллической решетки при сильной надкритичности практически не зависит от начальных условий. На рис. 11 показаны результаты компьютерного эксперимента [10], иллюстрирующие различные пути рождения такого кристалла в рамках модели (4). Как видно, промежуточные состояния могут быть весьма разнообразны – ролики, цилиндрические паттерны, локализованные шестигранники. Однако все они неустойчивы, и при $t \rightarrow \infty$ устанавливается состояние, отвечающее минимуму свободной энергии системы (4) – шестигранная решетка. В компьютерном эксперименте этот факт проверялся непосредственным вычислением функционала свободной энергии уравнения (4). Оно, как известно, представляется в градиентной форме

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\delta F}{\delta u} , \quad (13)$$

где в правой части стоит вариационная производная от функционала свободной энергии F . В свою очередь, F представляется в виде

$$F = \int_{\Omega} \left\{ -\frac{\varepsilon}{2} u^2 - \beta \frac{u^3}{3} + \frac{u^4}{4} + [(k_0^2 + \nabla^2)u] \right\} dr. \quad (14)$$

Легко заметить, что

$$\frac{dF}{dt} = - \int \left| \frac{\partial u}{\partial t} \right|^2 dr \leq 0, \quad (15)$$

а, следовательно, в градиентных системах «свободная энергия» может лишь монотонно уменьшаться вдоль траектории или оставаться постоянной в точках экстремума.

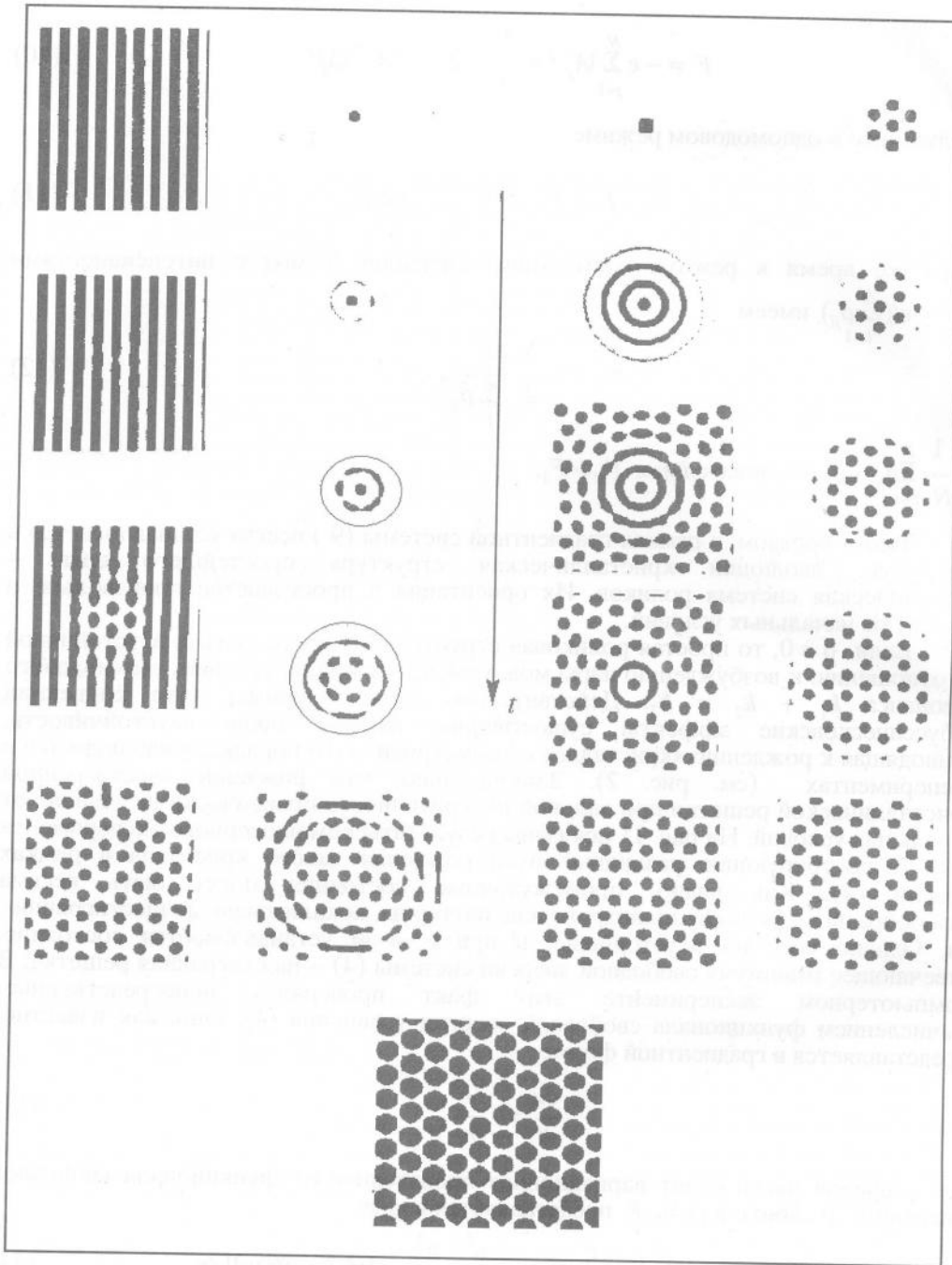


Рис. 11. Пути рождения шестигранной кристаллической решетки в рамках модели (4) [10]

Ориентация установившейся шестигранной решетки в «большой» системе слабо зависит от граничных условий и от эксперимента к эксперименту может быть различной. Добавим, что если надкритичность увеличивать, то, как правило, устанавливается не идеальная кристаллическая структура, а решетка с дефектами или паттерн, состоящий из «кусков» шестигранной решетки различной ориентации (доменов), как на рис. 12 [11].

Используя терминологию языка мод, шестигранную решетку можно описывать системой обыкновенных дифференциальных уравнений (ODE) вида

$$\dot{A}_j = \varepsilon A_j - \beta' A_l^* A_q^* - A_j [|A_j|^2 + 2 \sum_{l \neq j} |A_l|^2]. \quad (16)$$

При не слишком малых β эта система имеет лишь одно устойчивое равновесие $A_1 = A_2 = A_3 = A^0$, которое и отвечает регулярной шестигранной решетке. Естественно, рассматриваемая система, как и исходное уравнение (4), имеет градиентный характер, то есть $\partial A / \partial t = -\delta \tilde{F} / \delta A_j$ с функционалом \tilde{F}

$$\begin{aligned} \tilde{F} = & -\{\varepsilon |A_1|^2 + |A_2|^2 + |A_3|^2 - \frac{1}{2} (|A_1|^4 + |A_2|^4 + |A_3|^4) - \\ & - 2(|A_1|^2 |A_2|^2 + |A_1|^2 |A_3|^2 + |A_2|^2 |A_3|^2) - \beta' A_1^* A_2^* A_3^* + c.c.\}. \end{aligned} \quad (17)$$

Таким образом, формирование кристаллической решетки с симметрией 3 (6) порядка в данной модели должно происходить монотонно во времени, без всяких колебаний, что и подтверждается физическими и компьютерными экспериментами (см. рис. 11)¹.

Рождение шестигранной решетки в рамках модели (4) или (16) является примером рождения «кристалла», в котором не только амплитуды, но и фазы образующих его мод связаны. Такие кристаллы мы будем называть «жесткими». Нетрудно, однако, заметить, что для совместного существования разноориентированных мод, которые могут сформировать кристалл, вовсе не обязательно, чтобы одни моды генерировали другие, вполне определенные. Необходимо другое – чтобы одни моды «не мешали» существованию других. Другими словами, чтобы не было сильной конкуренции. Возможно ли такое? Формальный ответ прост: если матричные элементы ρ_{jl} таковы, что (см. (9))

$$\rho_{jj} > \rho_{jl} \quad (l \neq j), \quad (18)$$

то режим совместной генерации разноориентированных мод будет устойчив. Фазовый портрет амплитудных уравнений, описывающих взаимодействие двух мод в случае (18), представлен на рис.13. Видно, что простые паттерны в виде роликов неустойчивы, а режим $|A_1|^2 = |A_2|^2 = \varepsilon / (\rho_{11} + \rho_{12})$, отвечающий, например, ромбическому кристаллу, будет устанавливаться в процессе эволюции при любых начальных условиях. Такие кристаллические структуры можно назвать «мягкими кристаллами». Фазы образующих их мод, в отличие от случая «жестких кристаллических структур», произвольны, то есть не связаны друг с другом.

Данный нами формальный ответ, однако, ничего не говорит о физике явления. А именно: почему в одних случаях элементарные (нормальные) моды конкурируют сильно, а в других – практически «не замечают» друг друга?

¹ Мы здесь ничего не говорим о роли малых шумов. Этот вопрос требует специального обсуждения.

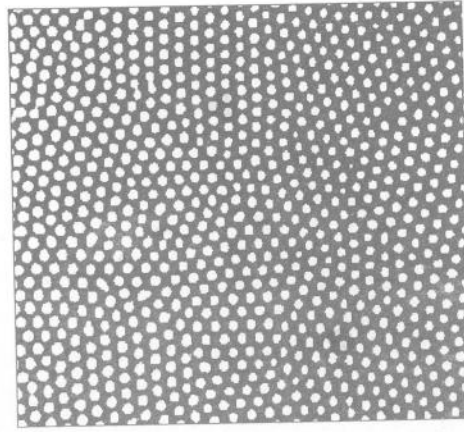


Рис. 12. Домены шестигранников в двумерном химическом реакторе, где протекает автокаталитическая реакция [11]

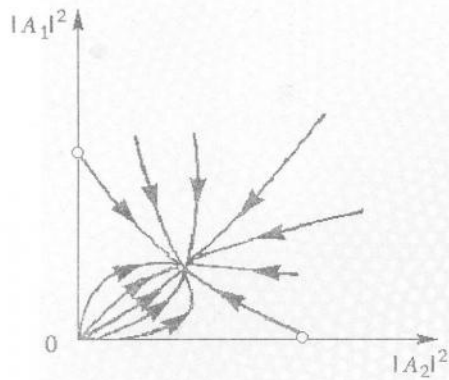


Рис. 13. Фазовая плоскость, иллюстрирующая устойчивость режима двухмодовой генерации

Это удобно пояснить в терминах энергетики процесса. Непосредственно из уравнения (9) следует, что феномен конкуренции есть результат дополнительного нелинейного затухания, которое одна мода создает для другой. Если моды энергетически слабо зависимы (в простейшем случае «питаются» от разных источников), то такое дополнительное затухание незначительно. Именно так обстоит дело, например, в задаче о капиллярной ряби, при возбуждении на двух разных частотах или для конвекции с плохой теплопроводностью от нижней части слоя к верхней. При этом SHE недостаточно адекватно описывает ситуацию, и нелинейность, ответственная за стабилизацию неустойчивости, должна быть дополнена слагаемыми, зависящими не только от амплитуды возмущения, но и от градиента ее неоднородного распределения в пространстве. Это могут быть различные добавки вида $(\nabla u)^2 u$, $u(\nabla^2 u)^2$, $u(\nabla^4 u)^2$ и т.д. Выбор того или иного слагаемого определяется физикой задачи. В частности, для конвекции с плохой теплопроводностью от нижней части слоя к верхней записывают нелинейную диссипацию в форме $u^3 - bu\nabla^4 u$. Тогда вместо (4) будем иметь

$$\frac{\partial u}{\partial t} = [\varepsilon - (\nabla^2 + k_0^2)] u - u^3 + bu\nabla^2(\nabla u)^2. \quad (19)$$

Эта же модель используется и для описания конвекции в бинарных смесях. Прямой подстановкой в (19) решения в виде $u = A_1 e^{ikx} + A_2 e^{iky} + c.c.$ для амплитуд взаимно ортогональных роликовых структур после усреднения можно получить при $b > 0$ уравнение вида (9) с коэффициентами ρ_{jk} , удовлетворяющими условию (18). Диссипация, описываемая слагаемым $\sim b$, увеличивает вклад в самодействие и тем самым снижает конкуренцию между роликовыми структурами. На рис. 14[12] показана временная эволюция случайного начального распределения поля u в рамках модели (19). Даже в круглой кювете при достаточно большом t устанавливается кристаллическая решетка с квадратными ячейками. Именно такой «кристалл» с квадратными ячейками наблюдается вблизи порога неустойчивости для конвекции в плоском слое между двумя пластинами с плохой

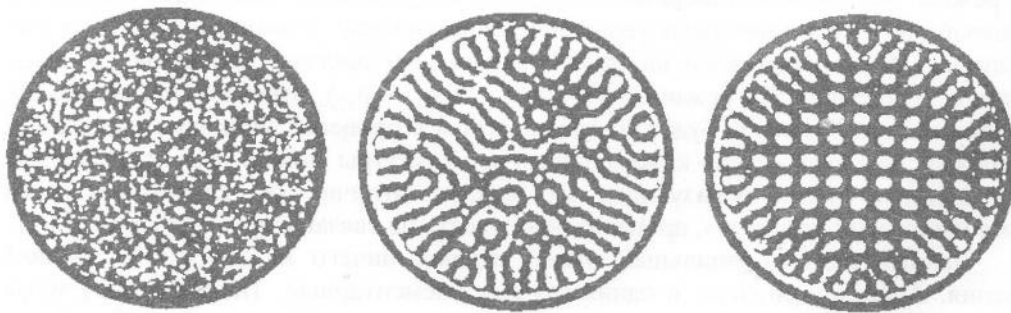


Рис. 14. Установление квадратной конвективной решетки в круглой кювете. Компьютерный эксперимент в рамках модели (19) [12]

теплопроводностью между ними, как показано на рис. 15 [13].

Таким образом мы познакомились с двумя возможными динамическими механизмами формирования кристаллических паттернов. Один из них связан со слабой конкуренцией, допускающей сосуществование и устойчивость режима совместной генерации мод. Такие кристаллы мы назвали «мягкими». Другой механизм связан с резонансным взаимодействием мод, когда моды не просто «не мешают», но и индуцируют друг друга. Такие кристаллы естественно назвать «жесткими». В качестве примера можно привести известную нам решетку из шестигранников.

Одно из наиболее очевидных, и в то же время наиболее принципиальных, свойств кристаллов – это свойство симметрии, определяемое наличием решетки. Однако не всякая симметрия свойственна кристаллам. К примеру, симметрия пятого порядка не может реализовываться кристаллической решеткой, но, в то же время, типична для «элементов жизни». Вспомним цветы яблони или вишни, розу, наконец! Симметрия пятого порядка характерна и для колоний вирусов, строящих «жизнь». Одно время даже бытовало мнение, что живая природа «выбрала» симметрию пятого порядка именно потому, чтобы не быть захваченной в «мертвую кристаллическую решетку». Однако столь тривиальный признак разделения «живого» и «неживого» оказался неспособен. И виной этому, в частности, квазикристаллы. Это квазипериодические решетки, для которых симметрия пятого порядка столь же естественна, как, скажем, симметрия четвертого порядка для кристаллов.

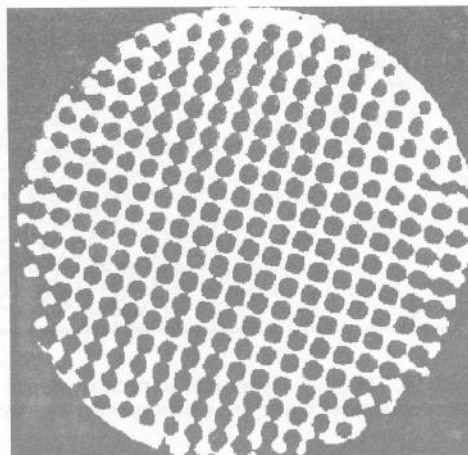


Рис. 15. Экспериментально наблюдавшаяся в круглой кювете кристаллическая решетка в виде суперпозиции взаимно ортогональных семейств роликов [13]

2. «Квазикристаллы» и «турбулентные кристаллы»

Это число является не чем иным, как отношением, известным под названием «золотого сечения», играющим столь важную роль в попытках сведения красоты пропорций к математической формуле.

Герман Вейль. Симметрия. 1952

Спроецируем периодическую структуру в виде решетки из M -мерных кубических ячеек на плоскость меньшей размерности m . При $M = 5$ и $m = 2$ и большинстве углов проецирования мы получим на плоскости удивительный по красоте неперiodический узор, изображенный на рис. 16 [14]. Это знаменитый паркет Пенроуза. Он составлен из ромбов двух видов с острыми углами 36° и 72° . Паркет Пенроуза иногда называют геометрической игрушкой, однако такой квазикристалл с симметрией пятого порядка наблюдается в природе (см. также [15–17]). Сейчас известны двумерные квазикристаллы с симметрией 4-го порядка в тонких пленках сплавов, 5-го порядка в слоистых веществах и 6-го порядка в малых твердых частицах. Известная «алгебраическая» модель двумерного квазикристалла связана с представлением стационарного распределения плотности

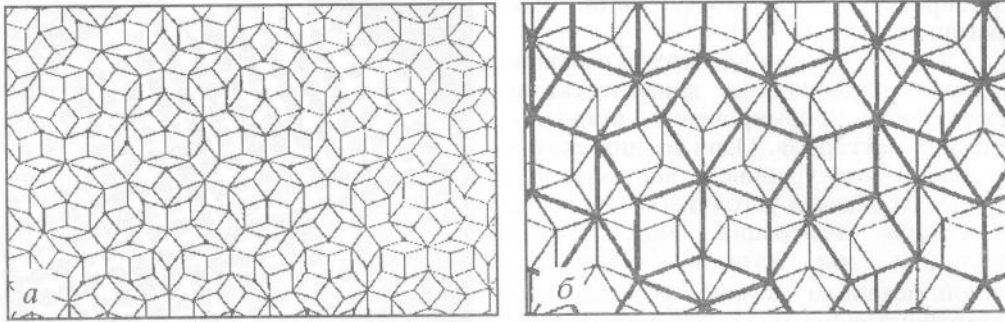


Рис. 16. Паркет Пенроуза: а–расположение атомов в двумерном «квазикристалле»; б–пример самоподобных структур с симметрией 5-го порядка

вещества (или параметра порядка) в формуле (3) $A_k = \sum_{j=1}^{2N} A_j \delta_{k-k_j}$, при условии, что проекции векторов k на любую ось являются взаимно несоизмеримыми². Именно базис из пяти стоячих волн (волновых векторов) с равными углами в 72° между соседями и порождает паркет Пенроуза. Подобно обычным кристаллам структура на рис. 16 обладает дальним порядком (это следует хотя бы из того, что такой рисунок получен как проекция строгого кристалла). Однако паркет Пенроуза обладает и локальной симметрией относительно поворота вокруг некоторой оси на угол 72° ³, а это уже несовместимо с необходимой для кристаллов трансляционной инвариантностью. Добавим, что в узоре на рис. 16 можно найти сколь угодно большие фрагменты с симметрией пятого порядка, а если сравнить соотношение масштабов подобных структур, то станет понятно, откуда красота пропорций – масштабы отличаются в $\mu = (1 + \sqrt{5})/2$ раз. Число μ – это и есть золотое сечение!

Реально наблюдаемый пространственный Фурье–спектр квазикристалла несколько отличается от (3). Он содержит не только N главных мод, проекции которых несоизмеримы, но и их высшие и комбинационные пространственные гармоники

$$u(\mathbf{r}) = \sum_{j=1}^{2N} A_j e^{i\mathbf{k}_j \cdot \mathbf{r}} + (\text{высшие и комбинационные пространственные гармоники}). \quad (20)$$

Таким образом спектр квазикристалла, состоящий из дискретных компонент, может содержать их сколь угодно много и они могут быть расположены сколь угодно плотно, образуя канторовское множество. Однако особенных пиков, отвечающих несоизмеримым периодическим модам, формирующим квазикристаллы, может быть немного. Именно эти пики и обнаруживаются в экспериментах по Брэгговскому рассеянию в металлических сплавах.

Хотя за последние десять лет появилось множество экспериментов, позволяющих наблюдать квазикристаллические структуры, все они были связаны с микрофизическими объектами, прежде всего, с металлическими сплавами. Первые наблюдения квазикристаллического порядка в макрофизике были сделаны только в 1992 году [6, 7]. Это устойчивые квазикристаллические паттерны на поверхности слоя жидкости в осциллирующем гравитационном поле

² Квазипериодическое покрытие плоскости можно осуществить не только разными ромбами, но и другими фигурами, например, двумя «цыплятами», как это сделал тот же Пенроуз. Как заметил В.Е. Корепин [18], возможное объяснение «цыплят» связано с тем, что стороны ромбов (или в более общем случае параллелограммов), покрывающих плоскость, можно произвольным образом искривлять, оставляя на месте вершины параллелограммов и сохраняя параллельность их сторон.

³ Вообще локальная симметрия N -ого порядка определяется углом поворота, где $\chi = \pi/N$.

(квазикристаллы ряби, о которых мы говорили во Введении). Копенгагенская группа обнаружила устойчивые октагоны – квазикристаллы с симметрией четвертого (восьмого) порядка ($N = 4$), образованные четырьмя стоячими капиллярными волнами, развернутыми под углом 45° (см. рис. 6 [6]). Эксперименты проводились с вязкой жидкостью в цилиндрической ячейке большого диаметра в $d \sim 50\Lambda$ (где $\Lambda = 2\pi/k_0$ – длина параметрически возбуждаемых капиллярных волн). Французская группа наблюдала квазикристалл, образованный шестью стоячими волнами, угол между которыми составлял 30° (см. рис. 7 [7]). В этом эксперименте специально изменялась форма большой ячейки и, как видно из рисунка, и в круглой кювете, и в ячейке с границами, повторяющими карту Франции (где расстояние от Бордо до Женевы было 5 см), форма квазикристаллических паттернов не менялась. Существенной особенностью этого эксперимента была бигармоничность накачки. В результате одновременно могли возбуждаться моды с $|k| = k_0$ и с $|k| = k_0 + \delta k$, где $\delta k/k_0 \approx 0.17$. Проистекающие отсюда следствия весьма важны, и мы их обсудим специально чуть ниже.

Октагоны ($N=4$), декагоны ($N=5$) и додекагоны ($N=6$). Обратимся вновь к системе (3), описывающей динамику кристаллических или квазикристаллических паттернов с дискретным набором $2N$ Фурье-компонент. Для амплитуд этих мод как функций времени из (5) можно получить [19]

$$\dot{A}_j = [\gamma_0 - 4\rho(0)|A_j|^2 - 8\sum_{l \neq j}^N \rho(\theta_{jl})|A_l|^2]A_j + \beta' A_{j+2}^* A_{j+4}^* \quad (21)$$

Здесь $\beta' \neq 0$ только в случае, когда $N = N/6$; $\theta_{jl} = \pi(j-l)/N$ – угол между векторами k_j и k_l ; и, как и прежде, $\rho(\theta) = \rho(\pi - \theta) = \rho(\theta + \pi m)$. Ясно, что динамическая система (21) имеет смысл только в случае, если число взаимодействующих мод не слишком велико. Действительно, мы можем выделить лишь такие моды, угол между волновыми векторами которых значительно превосходит относительную ширину пакета взаимодействующих мод, пропорциональную $\epsilon^{1/2}$.

При $N=4$ динамика системы (21) характеризуется двумя контрольными параметрами

$$\gamma_1 = 2\rho(\pi/4)/\rho(0) \quad \text{и} \quad \gamma_2 = 2\rho(\pi/2)/\rho(0). \quad (22)$$

Квазикристаллам с $N=4$ (октагонам) отвечает состояние равновесия (21)

$$A_1 = A_2 = A_3 = A_4 = \left[\frac{\gamma_0}{1 + 2\gamma_1 + \gamma_2} \right]^{1/2}. \quad (23)$$

Анализ устойчивости этого состояния в рамках системы (21) дает нам необходимые критерии устойчивости октагонов

$$\gamma_1 < (1 + \gamma_2)/2, \quad \gamma_2 < 1. \quad (24)$$

Полный анализ устойчивости по отношению к произвольным возмущениям должен проводиться на основе линеаризованного вблизи решения (23) уравнения (5) (ввиду громоздкости мы его здесь опускаем, см. работу [19]).

Квазикристалл с $N=5$ изображен на рис. 15. Его, также как и октагоны, можно описать с помощью лишь амплитудных уравнений (21) при $\beta'=0$. В этом случае мы имеем два независимых параметра

$$\gamma_1 = 2\rho(\pi/5)/\rho(0) \quad \text{и} \quad \gamma_2 = 2\rho(2\pi/5)/\rho(0). \quad (25)$$

Квазикристаллической структуре отвечает состояние равновесия с равным значением амплитуд всех мод

$$A_1 = A_2 = A_3 = A_4 = A_8 = [\gamma_0 / (1 + 2\gamma_1 + 2\gamma_2)]^{1/2} \quad (26)$$

и произвольными фазами мод. Необходимые условия устойчивости (в рамках (21)) также легко находятся [19]

$$1 + \psi\gamma_1 - \mu\gamma_2 > 0, \quad 1 + \psi\gamma_2 - \mu\gamma_1 > 0, \quad (27)$$

где $\mu = 2\cos\frac{\pi}{5}$ – золотое сечение, а $\psi = 2\cos\frac{2\pi}{5} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

Квазикристаллы с $N=6$ – додекагоны – при $\beta' = 0$, как и квазикристаллы с более низкой симметрией ($N=4,5$), не несут никакой информации о фазах образующих их мод. Фазы произвольны. Однако, при $\beta' \neq 0$ квазикристаллические структуры, обнаруженные в эксперименте [6], представляют собой композицию уже не стоячих волн, а гексагонов, которые в данном случае можно рассматривать как нормальные формы. Внутри каждой резонансной тройки мод $k_j + k_l + k_1 = 0$ фазы ϕ_j связаны независимыми соотношениями

$$\sin \phi_j = 0, \quad (28)$$

здесь j – четно для одной тройки волн (одной подрешетки) и нечетно для другой.

Мы уже упоминали еще об одном проявлении квадратичной нелинейности в уравнениях типа (5) или (21) – с такой нелинейностью связан механизм взрывной неустойчивости. Существенно, что взрывная неустойчивость приводит, в частности, к жесткому возбуждению структур, то есть к их генерации в «субкритическом» случае, когда $\gamma_0 < 0$. Подобный механизм возбуждения характерен и для гексагонов.

В заключение этого раздела вернемся к обсуждавшемуся выше эксперименту о наблюдении «капиллярных квазикристаллов» с $N=6$. Как мы сейчас знаем, додекагоны можно рассматривать как композицию двух гексагонов с примерно равными амплитудами и развернутыми друг относительно друга на 30° . Для устойчивого сосуществования таких гексагонов необходимо, чтобы они слабо конкурировали друг с другом. Одна из возможностей реализовать это в эксперименте – доставлять энергию разным гексагонам из разных источников. Именно это и осуществляется в работе [6] при возбуждении капиллярных квазикристаллов однородной накачкой с двумя разными, но близкими частотами.

«Турбулентный кристалл». Квазикристаллы с $N=4,5,6 \dots$ – это простейшие квазипериодические пространственные структуры, уже содержащие элементы неопределенности фазы мод. Вспомним здесь известную модель турбулентности Ландау – Хопфа [20,21]. В рамках этой модели турбулентность представлялась как набор мод с несоизмеримыми частотами и произвольными фазами. Соответствующая временная реализация – наблюдаемая

$$u(t) = \sum_{j=1}^N A_j e^{i\omega_j t + i\phi_j} + c.c. \quad (29)$$

при достаточно большом N выглядит абсолютно случайной и вполне подходит для моделирования нерегулярных и непредсказуемых турбулентных пульсаций. Корреляционная функция процесса (29) достаточно быстро спадает и вновь становится близкой к единице лишь через время возврата T , которое очень велико:

время возврата Пуанкаре $T \sim e^{\alpha N}$ ($\alpha \sim 1$) очень быстро растет с ростом N . Подобная модель случайных временных пульсаций (ее математический образ – незамкнутая

намотка на N -мерном торе в фазовом пространстве некоторой динамической системы) действительно имела бы право на жизнь, однако, как показывают математические исследования, выполненные в конце 60-х годов, квазипериодические движения динамической системы с $N=3$ обычно неустойчивы. Незамкнутая намотка на торе либо замыкается, образуя периодический аттрактор – предельный цикл, либо разрушается сам N -тор и вместо него рождается другой аттрактор – странный, который и служит математическим образом устойчивых хаотических пульсаций, порождаемых динамической системой (подробнее см., например, [22]).

Вышеприведенное обсуждение относилось к сосуществованию несоизмеримых временных мод. Обратимся теперь к пространственным модам. Очень вероятно, что устойчивое сосуществование 6-ти мод, а если говорить не о самих модах, а о волнах, то и 12-ти, возможно. Значительно увеличим N . Тогда дальний порядок можно будет обнаружить лишь на столь далеких расстояниях (напомним, «длина возврата» $L \sim e^{\alpha N}$), что это теряет всякий физический смысл. Таким образом, это будет уже не квазикристалл, а хаотическое «турбулентное» распределение параметра порядка в пространстве, которое можно назвать «турбулентный кристалл» [23].

Рассмотрим в качестве примера эволюцию параметра порядка $u(r,t)$, определяемую вариационной моделью с функционалом свободной энергии вида [21]

$$F = \int dx dy \left\{ \frac{1}{2} [(\nabla^2 + 1)u]^2 - \frac{1}{2} \epsilon u^2 + \alpha_1 (\nabla^2 u)^4 + \alpha_2 (\nabla u)^4 + \right. \\ \left. + \sum_{m=1}^n \frac{1}{2} [(\nabla^2 + q_m^2)u_m]^2 + \frac{1}{2} \mu^2 u_m^2 + \mu \Gamma_m u_m u^2 \right\}. \quad (30)$$

Здесь u_m – некоторые вторичные поля, которые играют важную роль в снижении конкуренции между отдельными модами, формирующими квазикристалл. Формально это связано с «организацией» такой зависимости коэффициента $\rho(\theta)$, которая дает возможность сосуществовать очень большому числу мод. Добавим, что, например, в конвекции роль одного из полей u_m может играть среднее течение. Представим u в виде

$$u = \sum_{j=1}^N (A_j e^{ik_j r} + c.c.) + O(\epsilon^{3/2}), \quad (31)$$

где A_j имеют порядок $\epsilon^{1/2}$. Поле u_m запишем так:

$$u_m = \epsilon u_{m_1} + \dots \quad (32)$$

Ньюэлл и Помо показали, что при $\mu \ll \epsilon^2$ коэффициент $\rho(\theta)$ описывается выражением [23]

$$\rho(\theta) = 24\alpha_1 + (8 + 16\cos^2\theta)\alpha^2 - \sum_{m=1}^n 8r_m^2 \left(\frac{\epsilon^2}{\epsilon^2 + (q_m^2 - 2 - 2\cos\theta)^2} + \right. \\ \left. + \frac{\epsilon^2}{\epsilon^2 + (q_m^2 - 2 + 2\cos\theta)^2} + \frac{\epsilon^2}{\epsilon + q_m^4} \right). \quad (33)$$

Если число вторичных полей n большое, то можно реализовать ситуацию, когда $\rho(\theta) < \frac{1}{2}\rho(0)$ (см.(3)), что и необходимо для существования «турбулентного кристалла».

Внешне пространственное распределение поля в «турбулентном кристалле»

должно напоминать беспорядок, изображенный на рис. 1 [1]. Их статистические характеристики также будут похожи. Действительно, в установившемся режиме равных амплитуд мод

$$u(x,y) = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\langle \rho \rangle}} \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_j^N \cos(k_j r + \phi_j), \quad (34)$$

где $\langle \rho \rangle = \frac{\rho_0 + \dots + \rho_{N-1}}{N}$. Поскольку фазы ϕ_j имеют случайное распределение с нулевым средним, параметр порядка u распределен по Гауссу с нулевым средним. При вычислении двухточечной пространственной корреляции $\langle u(x,y), u(x',y') \rangle$ вследствие вращательной инвариантности можно положить $y = y' = 0$. Тогда получаем [5]

$$\begin{aligned} \langle u(x,0), u(x',0) \rangle &= \left\langle \frac{\varepsilon}{\langle \rho \rangle} \frac{1}{N} \cos(x \cos \theta_j + \phi_j) \cos(x' \cos \theta_l + \phi_k) \right\rangle = \\ &= \frac{\varepsilon}{2 \langle \rho \rangle} \frac{1}{N} \sum_j \cos((x-x') \cos \theta_j) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \frac{\varepsilon}{2 \langle \rho \rangle} \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos[(x-x') \cos \theta] d\theta = \\ &= \frac{\varepsilon}{2 \langle \rho \rangle} J_0(|x-x'|) \end{aligned} \quad (35)$$

(ср. с (2)). Таким образом пространственные корреляции экспоненциально быстро затухают. Как мы видели (см. Введение), для этого достаточно $N \sim 100$.

3. От «квазикристаллов» к динамическому беспорядку

Попытки конструирования «турбулентного кристалла» – это естественное желание использовать наиболее наглядный путь построения «статистического» пространственного беспорядка. В то же время сам факт существования квазикристалла – уже предвестник динамического детерминированного пространственного беспорядка. Действительно, незамкнутые «наматки на торе» в фазовом пространстве динамической системы обычно структурно неустойчивы, и при сколь угодно малом изменении параметров топология траекторий качественно меняется: образуется периодическая (замкнутая) траектория либо стохастическое множество. На основании пространственно-временной аналогии можно сказать, что первая возможность соответствует «кристаллу», а вторая – пространственному беспорядку. Теперь представим себе, что у нас есть управляющий параметр, например, амплитуда внешнего периодического в пространстве поля. Если этот параметр увеличивается, то, поскольку в некотором фазовом пространстве незамкнутая намотка на торе может разрушиться, кажется весьма правдоподобным, что при этом (как и в одномерном случае) произойдет переход от квазипериодичности к конечномерному пространственному беспорядку.

Сформулированная выше двумерная задача не только никем не решалась, но даже и не ставилась. Несомненно, в ближайшее время задачу о рождении пространственного беспорядка при увеличении управляющего параметра удастся решить, хотя она требует введения довольно тонких математических понятий, связанных именно с двумерностью или трехмерностью пространства. Например, необходимо ввести такое понятие, как незамкнутая намотка на торе в некотором матричном пространстве.

Как нам сейчас кажется, эту задачу можно поставить несколько более

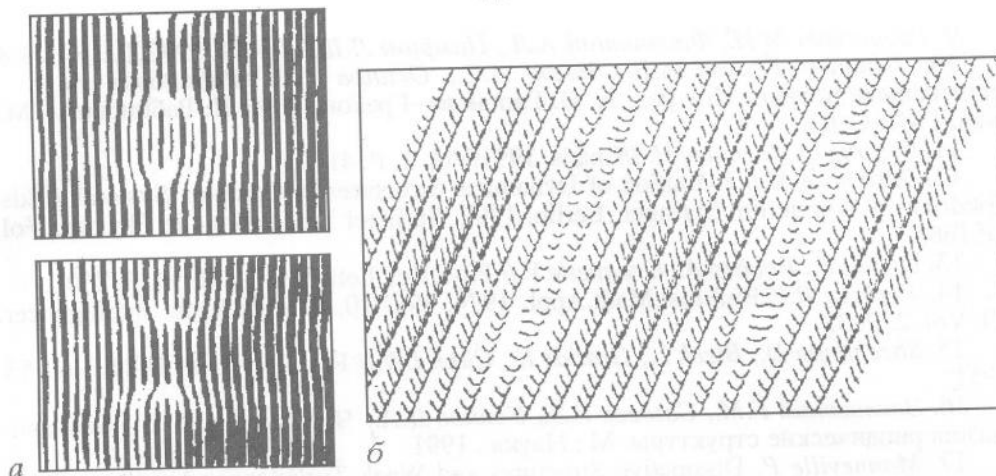


Рис. 17. «Волновые» дефекты: *a* – наблюдаемые при электрогидродинамической конвекции в жидком кристалле [24]; *б* – формируемые функцией вида $u(x,y) = \cos x + 1.3\cos y \cos(1.26x)$, $y \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, [25]

просто. Как известно, во многих экспериментах, например, с жидкими кристаллами или в конвекции Бенара, наблюдаются весьма интригующие картины неупорядоченного расположения дефектов. Часто сами дефекты могут быть принципиально неоднородными, например, типа «розеточек», но могут быть и дефекты попроще – волнового типа, изображенные на рис. 17. Подобные дефекты можно рассматривать в рамках почти одномерной задачи, если по одной из координат взять небольшое число мод (например, исследуя магнетогидродинамическую конвекцию в узкой «полосе» жидкого кристалла [24]), а вторую координату считать безграничной. Тогда мы получаем систему обыкновенных дифференциальных уравнений по этому безграничному направлению. Так можно сконструировать периодическую дорожку дефектов из небольшого числа мод. Это сделано Экманом и Прокаччиа [25]. Но здесь еще нет динамического беспорядка. Если же приложить контролируемое внешнее периодическое поле (в данном случае мы имеем дело с незамкнутой катушкой на торе в обычном, векторном, фазовом пространстве системы обыкновенных дифференциальных уравнений), то можно получить и пространственный беспорядок подобных дефектов. В работе [9] можно найти краткое обсуждение проблемы динамического беспорядка.

Библиографический список

1. Ван-Дайк М. Альбом течений жидкости и газа / Пер. с англ; Под ред. Г.И.Баренблатта и В.П.Шидловского. М.: Мир, 1986.
2. Bodenschats E., de Bruyn J.R., Ahlers G., Cannell D. // Phys.Rev. Lett. 1991. Vol. 65. P. 2370.
3. Blumel R., Davidson I.H., Reinhardt W.P. // Phys.Rev. A., 1992, Vol. 45. P. 2641.
4. O'Connor P., Gehlen J., Heller E.J. // Phys.Rev.Lett. 1987. Vol. 58. P. 1296.
5. Berry M.V. // Chaotic Behaviour of Deterministic Systems/ Eds. G.Looss, R.Hellerman, R. Stora. North Holland, N.Y., 1983. P. 171.
6. Christiansen B., Alstrom Preben, Levinson M.T. // Phys.Rev.Lett. 1992. Vol. 68. P. 2157.
7. Edwards W.S., Rauve S. // Phys.Rev. E. 1993. Vol. 47. P. 788.
8. Cross M.C., Hohenberg P.C // Rev.mod.Phys. 1993. Vol. 65. P. 3.

9. Рабинович М.И., Фабрикант А.Л., Цимринг Л.Ш. // УФН. 1992. Т. 162, № 8.
10. Гапонов-Грехов А.В., Ломов А.С., Осипов Г.В., Рабинович М.И. // Нелинейные волны / Под ред. А. В. Гапонова-Грехова и М. И. Рабиновича. М.: Наука, 1987. С. 61.
11. *Ouyang Q., Swinney H.* // *Chaos*. 1991. Vol. 1. P. 411.
12. *Bestehorn M.* // *Evolution of Dynamical Structures in Complex Systems* / Eds. R. Friedrich, A. Wunderlin. Springer, Berlin, 1992. Springer Proceedings in Physics. Vol. 69. P. 166.
13. *Le Gal P., Pochen A., Croquette V.* // *Phys. Rev. Lett.* 1985, Vol. 54. P. 2501.
14. *Penrose R.* // *Bull. Inst. Math. Appl.* 1974. Vol. 10. P. 266; *Math. Intelligencer*. 1979. Vol. 2. P. 32.
15. *Shechtman D., Bleck L., Gratias K., Cahn I.W.* // *Phys. Rev. Lett.* 1984. Vol. 53. P. 1951.
16. Заславский Г.М., Сагдеев Р.З., Усиков Д.А., Черников А.С. Слабый хаос и квазипериодические структуры. М.: Наука, 1991.
17. *Manneville P.* *Dissipative Structures and Weak Turbulence*. Academic Press, Boston, 1990.
18. Корепин В.Е. Записки научных семинаров ЛОМИ. Л.: Наука, 1986. Т. 155. С. 116.
19. Маломед Б.А., Непомнящий А.А., Трибельский М.И. // ЖЭТФ. 1989. Т. 96. С. 684.
20. *Landau L.D.* ДАН СССР. 1944. Т. 44. С. 339.
21. *Hopf E.* // *Comm. Pure and Appl. Math.* 1948. Vol. 1. P. 3031.
22. Лихтенберг А., Либерман М. Регулярная и стохастическая динамика. М.: Мир, 1984.
23. *Newell A., Pomo Y.* *Turbulent crystal*. Preprint. Tucson, 1993.
24. *Kai S., Chizumi N., Hohno M.* // *Phys. Rev.* 1989. A 40. P. 6554.
25. *Eckman J.P., Procaccia I.* // *Nonlinearity*. 1991. Vol. 4. P. 542.

Нижегородский государственный
университет

Поступила в редакцию 17.12.93
после переработки 29.04.94



Генри Д.И. Абарбанель – профессор физики и физик-исследователь Института океанографии Скриппса в Калифорнийском университете, Сан-Диего, UCSD, США. Получил степень доктора в Принстонском университете и преподавал в Принстоне, Станфорде, Нортвестерне, Чикаго и Калифорнийском университете в Беркли, с 1983 г. работает в Калифорнийском университете в Сан-Диего. Занимается анализом хаотических явлений в геофизических и лабораторных установках. Директор Института нелинейных наук при UCSD.



Михаил Израилевич Рабинович – 1941 г. рождения, д.ф. – м.н., член-корр. РАН, зав. отделом Института Прикладной Физики РАН. Область научных интересов: динамическая теория жидкости; проблемы хаоса и структурообразования; нелинейные волны в неравновесных средах. Общее число публикаций – более 200; из них 5 книг, около 10 обзоров, учебные пособия и курсы лекций; статьи в отечественных и иностранных журналах.



Цимринг Лев Шулимович – родился в 1959 г. в Саратове, окончил радиофизический факультет Горьковского государственного университета. Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности «океанология» (1985). Старший научный сотрудник Института прикладной физики РАН (в настоящее время – по контракту в Институте нелинейных исследований Калифорнийского университета в Сан-Диего, США). Область научных интересов – пространственно-временной хаос в неравновесных средах и методы его диагностики.



Редакция журнала «Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика» планирует выпуск специального номера, посвященного исследованиям роли флуктуаций в динамике нелинейных систем. Предполагаются следующие основные разделы:

- влияние флуктуаций на бифуркации и эволюцию нелинейных систем со сложной динамикой;
- нелинейное броуновское движение;
- стохастический резонанс в автоколебательных и других нелинейных системах;
- диагностика нелинейных систем по статистическим характеристикам на основе экспериментальных данных.

Ответственный редактор выпуска – профессор *Вадим Семенович Анищенко*.

Авторов, заинтересованных в опубликовании статей в выпуске, просим сообщить об этом заранее. Оформленные по принятым для журнала правилам рукописи должны быть представлены не позднее 1 декабря 1994 г.

анонсанонс анонс анонс анонс анонс анонс анонс анонс анонс анонс анонс
онс анонс а анонс анонс анонс анонс а анонс анонс анонс анонс анонс анонс
с анонс анонс а анонс анонс анонс анонс а анонс анонс анонс анонс анонс



МЕХАНИЗМ ОБРАЗОВАНИЯ ЛОКАЛИЗОВАННЫХ СТРУКТУР В СВЯЗАННЫХ ЦЕПОЧКАХ АВТОГЕНЕРАТОРОВ

Г.В.Осипов, М.М.Суцук

Представлен новый механизм образования локализованных структур в ансамблях автогенераторов, связанный с эффектами «вымирания» автоколебаний при разрушении режима их взаимной синхронизации.

1. Известно, что в цепочках автогенераторов с различающимися частотами при достаточно сильной диффузионной связи между элементами цепочки возможно образование локализованных структур или доменов с интенсивными взаимно синхронизованными колебаниями, сосуществующими рядом с областями, где эти колебания отсутствуют или пренебрежимо малы [1,2]. Один из механизмов формирования таких областей связан с эффектом «вымирания» автоколебаний [3,4], «... когда после срыва синхронизации влияние достаточно большой диссипативной связи приводит к увеличению потерь для каждого из автоколебаний». Из-за неоднородности расстройки частот или влияния концевых эффектов срыв синхронизации происходит локально, что и приводит к формированию локализованных структур и фронтов. В настоящей работе продемонстрировано, что в двух связанных цепочках при наличии зависимости частоты автоколебаний от амплитуды этот механизм может приводить к образованию локализованных структур даже в отсутствие концевых эффектов и неоднородности частотной расстройки вдоль цепочки.

2. Рассмотрение ведется на примере двух связанных цепочек автогенераторов, динамика которых в квазигармоническом приближении описывается уравнениями для медленно меняющихся комплексных амплитуд a_j и b_j :

$$\dot{a}_j = (p + i\Delta)a_j - (1 + i\alpha)|a_j|^2 a_j + d(a_{j+1} - 2a_j + a_{j-1}) + c(b_j - a_j), \quad (1)$$

$$\dot{b}_j = pb_j - |b_j|^2 b_j + d(b_{j+1} - 2b_j + b_{j-1}) + c(a_j - b_j), \quad (2)$$

$$j = 1, \dots, N,$$

с граничными условиями: $a_0 = a_1$; $a_{N+1} = a_N$; $b_0 = b_1$; $b_{N+1} = b_N$.

Здесь зависимые переменные $a_j = |a_j|e^{i\varphi a}$ и $b_j = |b_j|e^{i\varphi b}$ характеризуют амплитуды и фазы квазигармонических колебаний x_j и y_j в цепочках ($x_j = a_j(\tau)\exp(it) + a_j^*(\tau)\exp(-it)$; $y_j = b_j(\tau)\exp(it) + b_j^*(\tau)\exp(-it)$); точкой обозначена производная по медленному времени $\tau = 1/2\epsilon t$; Δ и α описывают линейную и нелинейную расстройку частот генераторов; p – инкремент, d – связь между

элементами в цепочках, а c — между цепочками (здесь мы ограничиваемся случаем чисто активных связей $d=|d|$, $c=|c|$). Параметр малости ε характеризует близость колебаний в рассматриваемых автогенераторах к гармоническим. В данном конкретном случае прототипом являлись цепочки генераторов Ван-дер-Поля

$$\frac{d^2}{dt^2}x_j + (1 + \varepsilon\Delta - \frac{\varepsilon}{3}\alpha x_j^2)x_j = \varepsilon(p - x_j^2)\frac{d}{dt}x_j + \varepsilon\frac{d}{dt}[d(x_{j+1} - 2x_j + x_{j-1}) + c(y_j - x_j)], \quad (3)$$

$$\frac{d^2}{dt^2}y_j + y_j = \varepsilon(p - y_j^2)\frac{dy_j}{dt} + \varepsilon\frac{d}{dt}[d(y_{j+1} - 2y_j + y_{j-1}) + c(x_j - y_j)], \quad j=1, \dots, N, \quad (4)$$

с граничными условиями: $x_0 = x_1$, $x_{N+1} = x_N$, $y_0 = y_1$, $y_{N+1} = y_N$.

Хотя подробно исследовалась лишь система амплитудных уравнений (1),(2), контрольные расчеты показали, что система (3),(4) имеет подмножество решений, качественно совпадающих с решениями амплитудных уравнений (1),(2) вплоть до $\varepsilon=1$.

3. Для качественного анализа режимов, наблюдавшихся в численных решениях для длинных цепочек, воспользуемся бифуркационной диаграммой для однородных ($a_j = a$, $b_j = b$) решений при $\alpha = 0$, которая совпадает с диаграммой для двух связанных генераторов и схематично изображена на рис. 1. В зависимости от качественных свойств решений на диаграмме можно выделить три основные области [4]: 1 — область «вымирания» автоколебаний, в которой устойчивым является тривиальное решение (напомним, что здесь везде речь идет о случае, когда для изолированных генераторов ($c=0$, $d=0$) выполнены условия самовозбуждения $p > 0$); 2 — область синхронизации ($\varphi_a = \varphi_b$); 3 — область несинхронизованных колебаний ($\lim_{T \rightarrow \infty} T^{-1}(\varphi_a - \varphi_b) \neq 0$).

Переход между областями 2 и 3 имеет сложную структуру и, в общем случае, здесь возможны автоколебания как с регулярной, так и хаотической модуляцией. Переходы между областями 1 и 2 или 1 и 3 существенно проще и в рамках системы (1),(2) определяются из анализа малых возмущений, для собственных чисел λ которых имеем

$$\lambda_{1,2} = p - c + \frac{i\Delta \pm \sqrt{4c^2 - \Delta^2}}{2}. \quad (5)$$

Как видно из этого выражения, при сильной связи ($c > p$) нарушение условий синхронизации при увеличении расстройки делает невозможным существование устойчивых колебаний с конечной амплитудой (фактически, уже при $\Delta^2 > 4c^2 - 4(c-p)^2$ сдвиг фаз между a и b становится настолько большим, что слагаемые связи пропорциональные c в (1), (2) вносят потери, превышающие усиление). Однако, если хотя бы в одном из генераторов имеется нелинейный сдвиг частоты (пропорциональный $\alpha|a|^2$), способный скомпенсировать линейную расстройку Δ , то это эквивалентно смещению вниз на диаграмме рис.1 и при

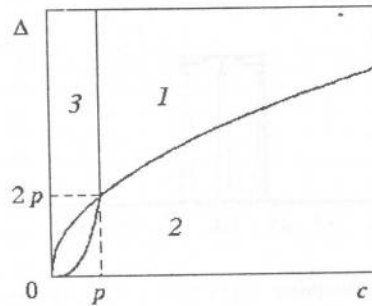


Рис. 1. Бифуркационная диаграмма для двух связанных генераторов: 1 — область устойчивости тривиального равновесия; 2 — область синхронизации; 3 — область несинхронизованных колебаний

$$4c^2 - 4(c-p)^2 < \Delta^2 < 4c^2 - 4(c-p)^2 + \left(\frac{1}{2} \Delta \alpha - 2(c-p)^2\right) \left(1 + \frac{\alpha^2}{4}\right)^{-1},$$

$$\Delta \alpha - 4(c-p) > 0 \quad (6)$$

появляются еще два нетривиальных состояния равновесия для амплитуд [5]

$$|a_{1,2}^{(0)}| = |b_{1,2}^{(0)}| = \frac{\Delta \alpha - 4(c-p) \pm \sqrt{[\Delta \alpha - 4(c-p)]^2 - (1 + \alpha^2/4)[\Delta^2/4 - c^2 - (c-p)^2]}}{4(1 + \alpha^2/4)} \quad (7)$$

Одно из этих состояний, соответствующее большим амplitудам, является устойчивым. Наличие тривиального и нетривиального асимптотических состояний, устойчивых в предположении однородности решения свидетельствуют, что при определенных ограничениях на величину связи в цепочках из этих состояний могут быть сформированы локализованные структуры. Этот вывод подтверждается приведенными ниже численными решениями.

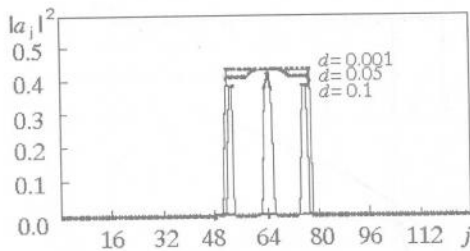


Рис.2. Стационарные структуры $|a_j|^2$, реализующиеся в системе (1),(2) при значениях параметров $\Delta = 2.0$, $\alpha = 5.75$, $p = 0.5$, $c = 0.5$ с начальными условиями $\varphi_{a,j} = \varphi_{b,j}$ для всех j , $|a_j|^2 = |b_j|^2 = 0.434$, при $j = 51, \dots, 78$; $|a_j|^2 = |b_j|^2 = 0.0$ при $j = 1, \dots, 50$ и при $j = 79, \dots, 128$

4. На рис. 2 представлены структуры, которые формируются при задании в начальный момент амплитуды локализованных колебаний $a_j = b_j = |a|$ согласно соотношениям (7). В случае слабой связи ($d \approx 10^{-3}$) генераторов внутри цепочки распределение начальных и установившихся амплитуд практически совпадают. С ростом d сказывается влияние связи с невозбужденными генераторами и амплитуда $|a|$ и, следовательно, нелинейная частотная расстройка пропорциональная $\alpha |a|^2$ становятся зависимыми от положения в цепочке. При $d \approx 0.1$ эта расстройка возрастает настолько, что приводит к локальному срыву синхронизации и образованию более мелких структур. Вблизи критического значения параметра связи $d_{кр}$

результатирующее распределение амплитуд существенно зависит от величины значения параметра связи (рис. 3) и величины начального значения амплитуды (рис. 4), несмотря на то, что это значение находится в области $|a| \geq |a^{(0)}|$, то есть при заведомо выполненных условиях жесткого возбуждения в каждом из отдельно взятых генераторов.

Пространственно-временные диаграммы на рис. 5 иллюстрируют процессы установления при задании в начальный момент распределения амплитуд в виде ступеньки. На этом рисунке представлены зависимости от времени квадрата модуля амплитуды колебаний на каждом элементе цепочки. Затемненные участки соответствуют $|a_j(t)|^2 > 0.5 \max_{j,t} \{|a_j(t)|^2\}$, а светлые $|a_j(t)|^2 < 0.5 \max_{j,t} \{|a_j(t)|^2\}$.

Положение границы между ними фактически определяет фронт переброса автогенераторов из возбужденного состояния в невозбужденное, поскольку в переходной области содержится всего лишь несколько элементов цепочки. Средняя скорость фронта практически не зависела от c в интервале его изменения от 0.5 до 1.0 и имела характерную для критических явлений корневую зависимость от параметра связи $v = 0.92\sqrt{d} - 0.09$ (рис. 6). Вблизи критического значения $d_{кр} \approx 0.09$ одновременно с усложнением формирующихся структур (см. рис. 4) усложняется и переходной процесс (см. рис. 5, а).

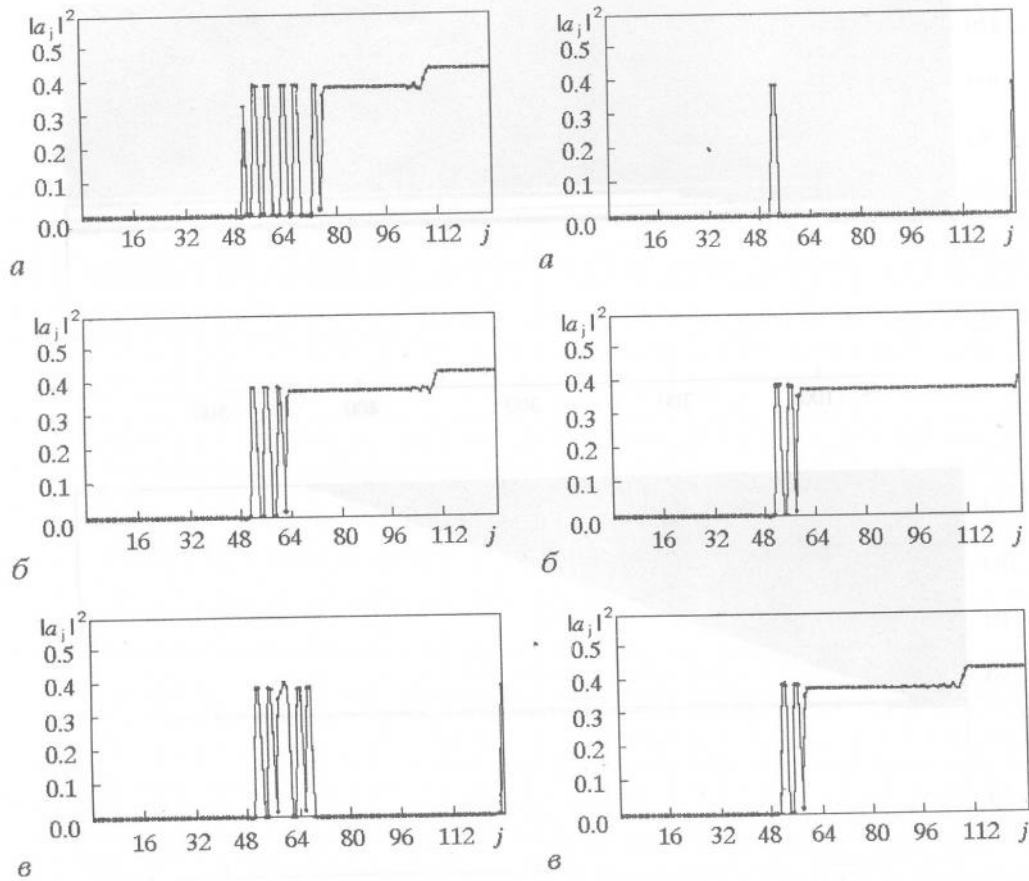


Рис. 3. Стационарные структуры $|a_j|^2$, реализующиеся в системе (1),(2) при $\Delta=2.0$, $\alpha=5.75$, $p=0.5$, $c=0.51$ с начальными условиями $\varphi_{a,j} = \varphi_{b,j}$ для всех j , $|a_j|^2 = |b_j|^2$ при $j=51, \dots, 128$; $|a_j|^2 = |b_j|^2 = 0.0$ при $j=1, \dots, 50$; $a-d=0.095$; б - $d=0.0985$; в - $d=0.102$

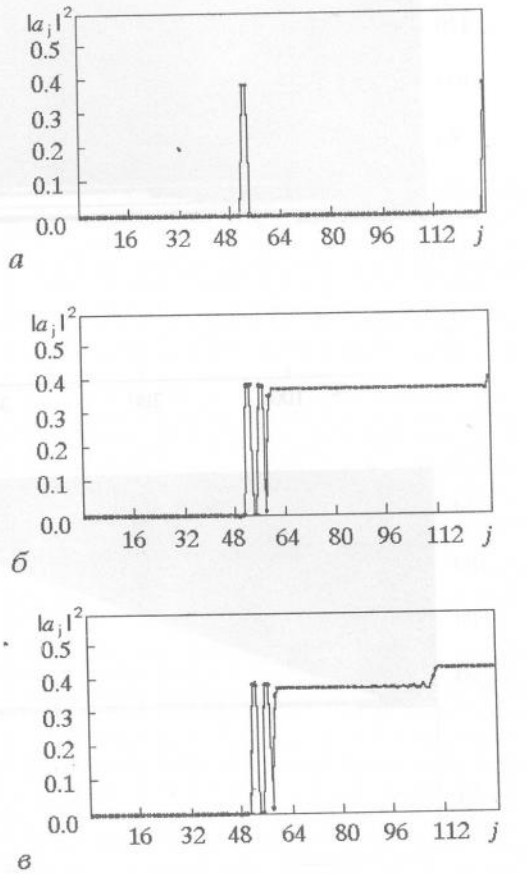


Рис. 4. Стационарные структуры $|a_j|^2$, реализующиеся в системе (1),(2) при $\Delta=2.0$, $\alpha=5.75$, $p=0.5$, $c=0.51$, $d=0.099$ с начальными условиями: $\varphi_{a,j} = \varphi_{b,j}$ для всех j , $|a_j|^2 = |b_j|^2 = a^2$ при $j=51, \dots, 128$, $|a_j|^2 = |b_j|^2 = 0.0$ при $j=1, \dots, 50$; $a-a^2=2.0$; б - $a^2=0.72$; в - $a^2=0.5$

5. Рассмотренный выше механизм формирования локализованных структур может представлять интерес как для прикладных задач, так и для более глубокого понимания происхождения маломерного хаоса в многомерных и распределенных системах. В частности, в больших ансамблях N автогенераторов (в том числе с различающимися параметрами) часто образуются слабо связанные кластеры с $m < N$ элементами. При этом, как можно ожидать с учетом приведенного выше рассмотрения, в определенной области параметров возможно выживание лишь кластеров с синхронизованными (по крайней мере, хотя бы частично) элементами. В результате эффективное число степеней свободы, достаточное для описания динамики системы, существенно уменьшается. Предварительный анализ подтверждает, что при определенных условиях этот механизм эффективен также при стохастической синхронизации и приводит к формированию локализованных структур с маломерной хаотической динамикой. С другой стороны, наблюдавшееся формирование разнообразных сложных паттернов при сравнительно простых, но неоднородных начальных условиях, свидетельствует, что рассмотренное явление может быть также ответственно за формирование пространственного беспорядка при распространении фронтов в цепочках автогенераторов.

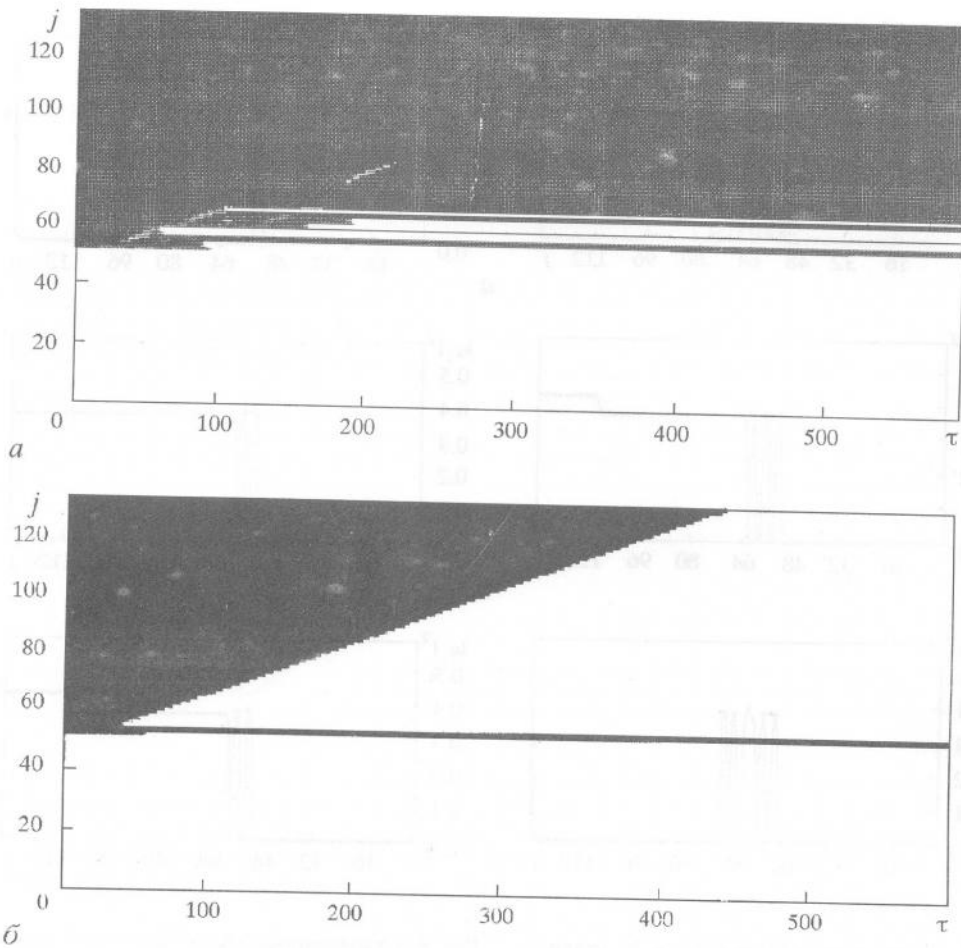


Рис. 5. Пространственно-временные диаграммы установления стационарных структур в системе (1), (2) при значениях параметров $\Delta=2.0$, $\alpha=5.75$, $p=0.5$, $c=0.51$ с начальными условиями $\Phi_{a,j} = \Phi_{b,j}$ для всех j , $|a_j|^2 = |b_j|^2 = 0.72$ при $j=51, \dots, 128$, $|a_j|^2 = |b_j|^2 = 0.0$ при $j=1, \dots, 50$; $a-d = 0.095$, $\bar{b}-d=0.1$

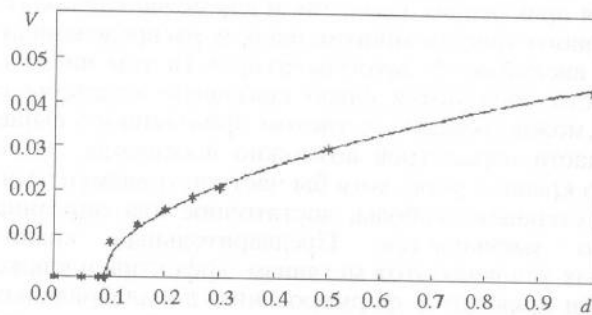


Рис. 6. Скорость распространения фронта перехода из возбужденного состояния в невозбужденное при $\Delta = 2.0$, $\alpha = 5.75$, $p = 0.5$, $c = 0.51$ в зависимости от величины параметра связи d

Отметим также, что ввиду простоты и общности механизма вымирания автоколебаний все сформулированные выводы без особого труда могут быть перефразированы на случай связанных многомерных решеток при наличии частотных линейных и нелинейных расстройок. Кроме того, трактуя две связанные цепочки как предельный случай сильно неоднородной двумерной решетки, на основании приведенного выше можно сделать вывод, что в двумерных системах введение неоднородности (напри-

мер, частотной расстройки) по одной из координат может приводить к появлению состояний, локализованных по обеим координатам.

Работа выполнена частично при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 93-02-15424).

Библиографический список

1. Дрендель С.Д., Хорс Н.П., Васильев В.А. Режим синхронизации клеток гладкомышечных тканей // Динамика клеточных популяций. Горький: Изд-во Горьк. ун-та, 1984. С. 108.
2. Васильев В.А., Романовский Ю.М., Яхно В.Г. Автоволновые процессы. М: Наука, 1987.
3. Bar-Eli K. On the stability of coupled chemical oscillators/ / Physica D. 1985. Vol. 14. P. 242.
4. Ermentrout G.B. Oscillator death in populations of «all to all» coupled nonlinear oscillators // Physica D. 1990. Vol. 41. P.219.
5. Aronson D.G., Ermentrout G.B. and Kopell N. Amplitude response of coupled oscillators // Physica D. 1990. Vol. 41. P. 403.

*Институт прикладной физики РАН
Нижегородский государственный
университет*

*Поступила в редакцию 22.03.94
после переработки 29.04.94*

THE MECHANISM OF THE FORMATION OF LOCALIZED STRUCTURES IN COUPLED CHAINS OF SELF-EXCITED OSCILLATORS

G.V.Osipov, M.M.Sushchik

We present a new mechanism responsible for the formation of localized structures in ensembles of self-excited oscillators that is associated with the effects of oscillator death as result of breaking of the phase-locking regime.



Осипов Григорий Владимирович – родился в 1960 г. в г. Горьком, окончил Горьковский госуниверситет в 1982 г. Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук в 1989 г. Доцент Нижегородского госуниверситета. Область научных интересов – нелинейная теория колебаний и волн, теория бифуркаций, структурообразование, вычислительный эксперимент в нелинейной динамике. Соавтор монографии «Устойчивость, структуры и хаос в нелинейных сетях синхронизации».



Сущик Михаил Михайлович – родился в 1941 г. в г. Городня Черниговской обл., окончил радиофизический факультет Горьковского госуниверситета в 1965 г. Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук в 1972 г. Старший научный сотрудник Института прикладной физики РАН. Область научных интересов – автоколебательные процессы в гидродинамических течениях, когерентные структуры, динамические модели турбулентности.



СЛОЖНАЯ ДИНАМИКА СИСТЕМ С НЕЕДИНСТВЕННЫМ СОСТОЯНИЕМ РАВНОВЕСИЯ

В.П. Пономаренко, И.А. Заулин

Представлены результаты качественно-численного исследования динамики систем с частотным и фазовым управлением с фильтром третьего порядка в цепи управления. Установлены режимы и особенности поведения систем вне области локальной устойчивости состояний равновесия. Выявлена сильная зависимость динамики систем от параметров инерционности цепи управления.

Введение

Нелинейные динамические системы с неединственным состоянием равновесия являются моделями ряда автоколебательных систем, в том числе автогенераторных систем и усилительных устройств с частотным и фазовым управлением. К таким системам относятся системы частотной автоподстройки частоты, автофазирования и слежения за задержкой во времени [1–3], узкополосные фильтры с фазовым управлением, системы автонастройки колебательных контуров [4,5] и др. Обобщенная схема систем содержит управляемый автогенератор или усилитель, нелинейный элемент – дискриминатор рассогласований с апериодической или периодической характеристикой и линейную часть – инерционную цепь управления с фильтром низких частот.

Основной интерес к рассматриваемым системам обусловлен многими задачами радиофизики и радиотехники, требующими формирования высоко-стабильных колебаний с управляемыми параметрами (частотой и фазой). В этих задачах основным режимом систем является синхронный режим, в котором параметры управляемого и опорного (входного) колебаний минимально отличаются. Условие реализации синхронного режима в значительной степени определяется числом состояний равновесия и инерционными свойствами фильтра в цепи управления, в зависимости от которых в системах могут развиваться процессы, приводящие к возникновению автоколебательных (автомодуляционных) режимов. В связи с этим приобретает актуальность исследование явлений нелинейной динамики, происходящих в системах из-за неединственности состояний равновесия и инерционности цепи управления. Устанавливаемые при этом закономерности возникновения и развития автоколебательных режимов представляют интерес, в том числе и для реализации на основе рассматриваемых систем устройств с новыми функциональными возможностями.

Согласно результатам [3,6,7] автоколебательные режимы в рассматриваемых системах с частотным и фазовым управлением могут возникать при наличии в цепи управления фильтра не ниже третьего порядка. Данная работа развивает исследования [3,6,7]. В ней изучены динамические режимы и

бифуркационные явления в моделях систем с апериодической и синусоидальной характеристикой дискриминатора и фильтром третьего порядка, имеющим коэффициент передачи $K(p) = (1 + a_1 p) / (1 + b_1 p + b_2 p^2 + b_3 p^3)$. Исследуемые модели, получаемые из общих уравнений систем с частотным и фазовым управлением [1 – 7], представляются следующими уравнениями:

$$\frac{dx}{d\tau} = y, \quad \frac{dy}{d\tau} = z, \quad \frac{dz}{d\tau} = (\sigma - \Phi(x) - (\lambda + b \Phi'(x))y - z) / \mu, \quad (*)$$

где x – рассогласование частот или фаз управляемого и опорного (входного) колебаний; $\Phi(x) = x + D(x)$ – обобщенная нелинейность систем; $D(x)$ – характеристика дискриминатора: апериодическая для систем с частотным управлением – модель 1, синусоидальная для систем с фазовым управлением – модель 2; σ – начальное рассогласование; λ, b, μ – параметры инерционности: $\lambda = (b_1 - a_1) / \sqrt{b_2}$, $b = a_1 / \sqrt{b_2}$, $\mu = b_3 / (b_2 \sqrt{b_2})$, $\lambda > 0$. Исследование системы уравнений (*) выполнено методами компьютерного моделирования, основанными на построении и изучении фазовых портретов и сечений Пуанкаре при изменении параметров, на вычислении мультипликаторов периодических движений и ляпуновских показателей. Нелинейность $D(x)$ аппроксимировалась функциями $D_1(x) = 2ax / (1 + a^2 x^2)$ и $D_2(x) = a \sin x$, где a – параметр. Направление исследований состояло в выявлении возможных сценариев развития режимов при изменении параметра λ .

1. Устойчивость состояний равновесия

Модель 1 в зависимости от параметров σ и a может иметь одно или три, а модель 2 – одно, три и более состояний равновесия. Границы областей значений σ и a с различным числом состояний равновесия определены в [6,7]. Состояния равновесия $A_{2j+1}(x_{2j+1}(\sigma, a), 0, 0)$, где $j = 0, 1, 2, \dots$, соответствующие участкам обобщенной нелинейности $\Phi(x)$ с положительной крутизной ($\Phi'(x) > 0$), являются устойчивыми при значениях $\lambda > \lambda_{2j+1}(\sigma, a, b, \mu) = -(b - \mu)\Phi'(x_{2j+1}(\sigma, a))$ и неустойчивыми (типа седло или седло–фокус) при $\lambda < \lambda_{2j+1}(\sigma, a, b, \mu)$; состояния равновесия $A_{2j+2}(x_{2j+2}(\sigma, a), 0, 0)$, соответствующие участкам $\Phi(x)$ с $\Phi'(x) < 0$, являются неустойчивыми типа седло или седло–фокус. Координаты x_{2j+1} и x_{2j+2} находятся из уравнения $\sigma - x - D(x) = 0$. На рис.1 показано расположение на плоскости параметров (a, λ) границ $\lambda = \lambda_{2j+1}$ при значениях $\mu = 1, b = 0.1$ для нелинейности $D_1(x)$ при $\sigma = 0.75$ (см. рис.1, а) и для нелинейности $D_2(x)$ при $\sigma = 1.57078$ (см. рис.1, б).

Первая ляпуновская величина, вычисленная в соответствии с [8], при рассматриваемых значениях параметров является отрицательной, т.е. границы устойчивости $\lambda = \lambda_{2j+1}$ – безопасные. При пересечении этих границ с уменьшением λ или с возрастанием a в фазовом пространстве мягко рождаются устойчивые предельные циклы L_{2j+1} , содержащие внутри себя ставшие неустойчивыми состояния равновесия A_{2j+1} .

Неединственность устойчивых состояний равновесия означает, что системы могут формировать различные значения частоты или фазы управляемого колебания в зависимости от начального состояния. Устойчивое состояние равновесия $A_1(x_1, 0, 0)$ с наименьшей по модулю величиной расстройки x

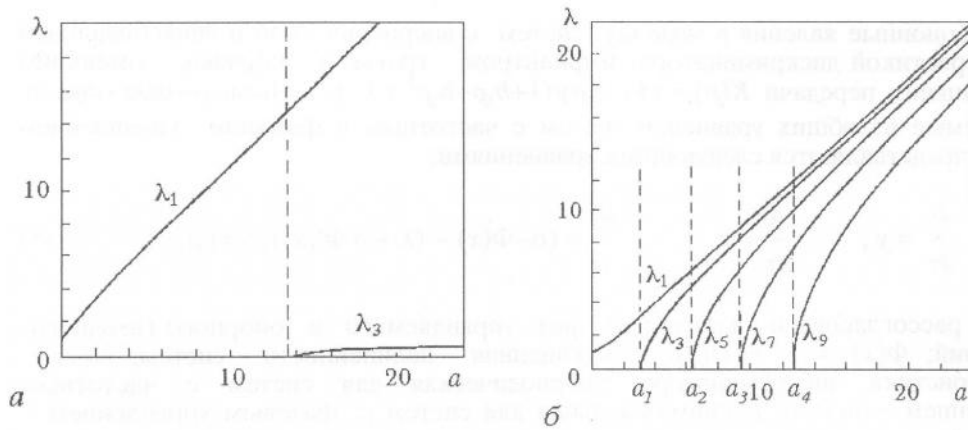


Рис. 1. Границы областей устойчивости состояний равновесия модели 1 (а) и модели 2 (б)

определяет синхронный режим, в котором x_1 существенно меньше начальной расстройки σ . Остальные устойчивые состояния равновесия определяют стационарные режимы с расстройками, близкими к σ или большими по модулю, чем σ . Устойчивые предельные циклы L_{2j+1} определяют автоколебательные режимы систем в окрестности состояний равновесия A_{2j+1} .

Для значений $\lambda > \lambda_1(\sigma, a, b, \mu)$ модели 1 и 2 имеют структуру S фазового портрета, когда предельные циклы отсутствуют и аттракторами системы являются состояния равновесия A_{2j+1} . Двумерные аналоги структуры S приведены в [3,6,7]. В области значений $0 < \lambda < \lambda_1(\sigma, a, b, \mu)$ существуют различные автоколебательные режимы, претерпевающие бифуркации при изменении параметров λ и a . Ниже приводятся результаты численного исследования моделей 1 и 2 в случаях, когда они имеют три или пять состояний равновесия, показывающие, какие новые режимы и бифуркации возникают в исследуемых системах с частотным и фазовым управлением в области значений $0 < \lambda < \lambda_1$.

2. Динамика модели 1

При численном исследовании модели 1 были выбраны значения параметров $\sigma = 0.75$, $b = 0.1$, $\mu = 1.0$, $a = 20$, при которых бифуркационные значения $\lambda_1 \cong 21.6845$, $\lambda_3 \cong 0.7078$. Рассмотрим эволюцию синхронного режима с уменьшением λ , взяв за исходное состояние структуру S фазового портрета с двумя аттракторами A_1 и A_3 . На рис. 2 показаны проекции фазовых портретов аттракторов модели 1 в окрестности состояния равновесия A_1 , возникающих при уменьшении λ . При переходе через значение $\lambda = \lambda_1$ состояние равновесия A_1 становится неустойчивым и в области значений $6.973 < \lambda < \lambda_1$ аттракторами модели 1 служат предельный цикл L_1 , характеризующий стационарный режим колебаний относительно A_1 , и состояние равновесия A_3 (диаг. 1). В области значений $6.1 < \lambda < 6.973$ наблюдались бифуркации удвоения периода цикла L_1 , вслед за которыми при $\lambda < 6.1$ в фазовом пространстве возникает хаотический аттрактор P_1 , который сохраняется до значения $\lambda = 5.1495$. Фазовый портрет и сечение Пуанкаре, соответствующие аттрактору P_1 , при $\lambda = 5.5$ показаны на диаг. 2, 3.

С уменьшением λ аттрактор P_1 сменяется при $\lambda < 5.1495$ регулярным

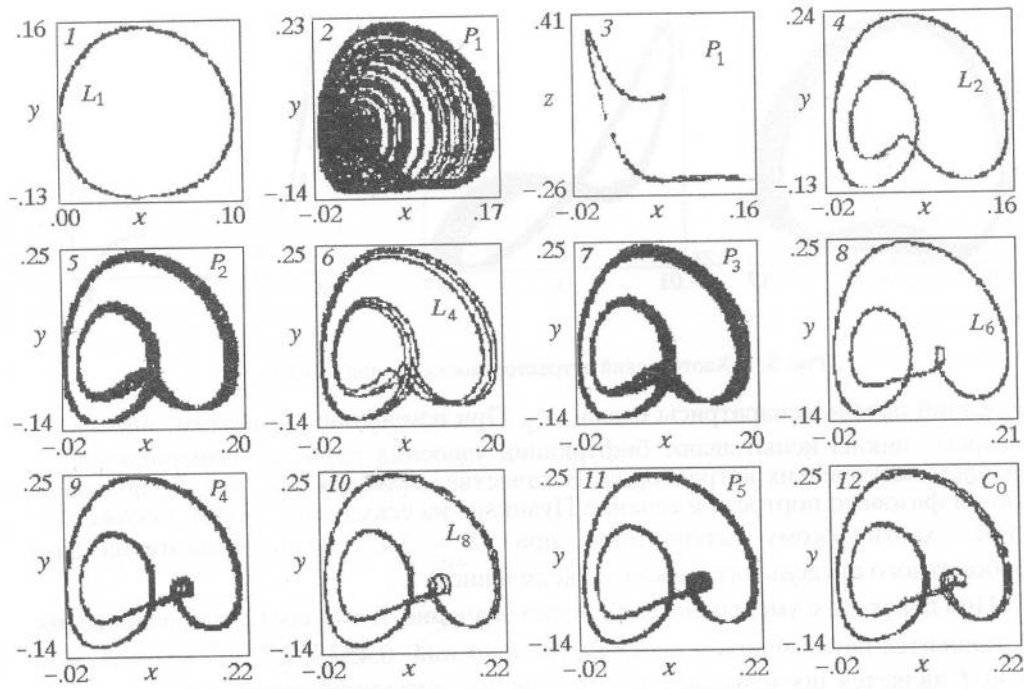


Рис. 2. Фазовые портреты аттракторов модели 1 при $\lambda=7.3$ (1); 5.5 (2,3); 5.134 (4); 4.8 (5); 4.765 (6); 4.7 (7); 4.6 (8); 4.4 (9); 4.36 (10); 4.3 (11); 4.275 (12)

периодическим режимом, определяемым устойчивым двухоборотным предельным циклом L_2 , возникающим в результате седло-узловой бифуркации (диаг. 4). Затем цикл L_2 претерпевает последовательность бифуркаций удвоения периода, завершающуюся возникновением при $\lambda < 4.85$ хаотического аттрактора P_2 (диаг. 5). При продолжении уменьшения λ аттрактор P_2 сменяется при $\lambda < 4.773$ устойчивым шестиоборотным предельным циклом L_4 (диаг. 6), который через последовательность бифуркаций удвоения периода переходит при $\lambda < 4.755$ в хаотический аттрактор P_3 (диаг. 7), существующий до значения $\lambda = 4.68$. При последующем уменьшении λ аттрактор P_3 сменяется при $\lambda < 4.68$ устойчивым двухоборотным предельным циклом L_6 (диаг. 8), далее в интервале значений $4.4 < \lambda < 4.5455$ следуют бифуркации удвоения периода цикла L_6 и при $\lambda < 4.4$ в окрестности A_1 снова возникает хаотический аттрактор P_4 (диаг. 9); аттрактор P_4 при $\lambda < 4.3716$ сменяется устойчивым шестиоборотным предельным циклом L_8 (диаг. 10), претерпевающим последовательность бифуркаций удвоения периода, завершающуюся при $\lambda < 4.34$ возникновением хаотического аттрактора P_5 (диаг. 11), затем аттрактор P_5 сменяется устойчивым шестиоборотным предельным циклом C_0 при $\lambda < 4.29075$ (диаг. 12), исчезающим в шестиобходную петлю сепаратрисы седла A_2 при $\lambda \in (4.22875, 4.228)$. При дальнейшем уменьшении λ система выходит на стационарный режим, определяемый устойчивым состоянием равновесия A_3 .

В интервале значений $\lambda_1 < \lambda < 4.228$ в фазовом пространстве модели 1, наряду с A_3 , существуют одно-, двух- и шестиоборотные устойчивые предельные циклы, возникающие и исчезающие в результате седло-узловых бифуркаций и

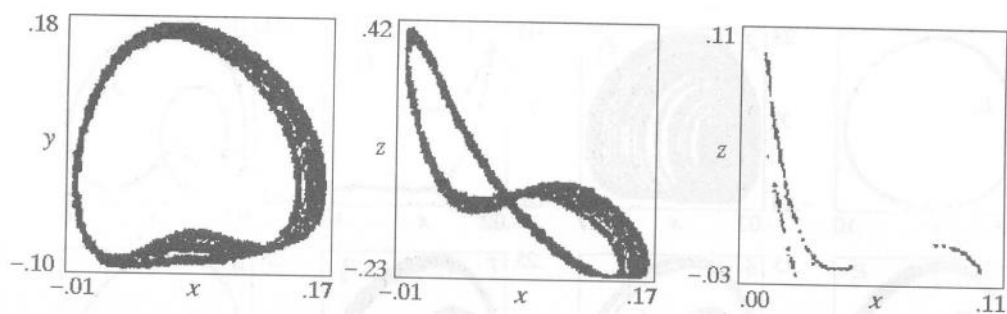


Рис. 3. Хаотический аттрактор модели 1 при $\lambda=3.1$

бифуркаций петель сепаратрисы седла A_2 . При изменении λ в этом интервале некоторые циклы испытывают бифуркации удвоения периода, завершающиеся рождением хаотических аттракторов. В качестве примера на рис. 3 показаны проекции фазового портрета и сечение Пуанкаре на секущей $y = -0.08$, соответствующие хаотическому аттрактору при $\lambda = 3.1$, возникающему на базе однооборотного предельного цикла с увеличением λ .

При переходе с уменьшением λ через значение $\lambda = \lambda_3$ состояние равновесия A_3 становится неустойчивым и в области значений $0.457 < \lambda < \lambda_3$ аттрактором модели 1 является предельный цикл L_3 , характеризующий стационарный режим колебаний относительно A_3 . С уменьшением λ цикл L_3 теряет устойчивость в результате бифуркации удвоения периода и в интервале значений $0.4319 < \lambda < 0.457$ аттрактором модели 1 является двухоборотный предельный цикл L_3^2 . При $\lambda \in (0.4319, 0.44175)$ цикл L_3^2 исчезает в двух-обходную петлю сепаратрисы седла A_2 , после чего система выходит на автоколе-бательный режим, определяемый предельным циклом L_0 , динамический диапазон которого значительно превосходит рабочую область нелинейности $D_1(x)$.

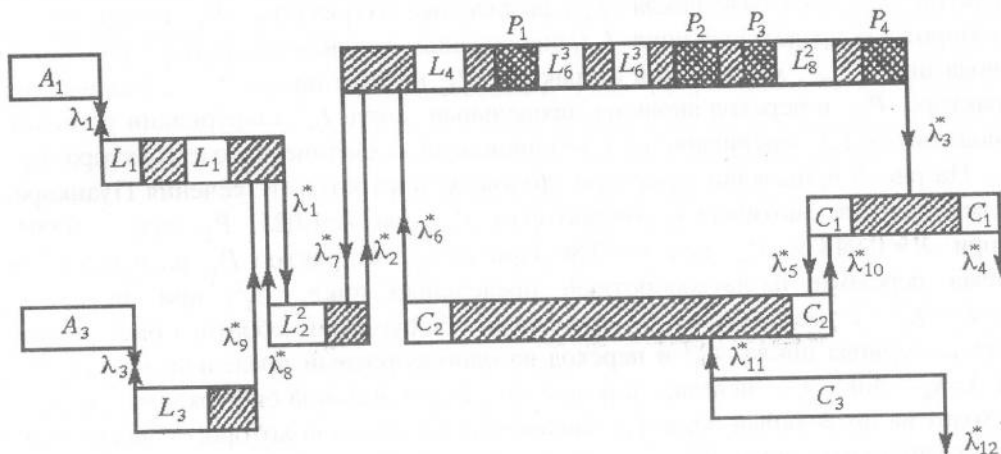
3. Динамические режимы и бифуркационные явления в модели 2

В качестве характерных примеров поведения модели 2 приведем результаты ее исследования при значениях $\mu=1$, $b = 0.1$ в двух случаях: во-первых, при $a = 4.6$, $\sigma = 0.78539$, когда она имеет три состояния равновесия A_1, A_2, A_3 ; во-вторых, при $a = 8$, $\sigma = 1.57078$, когда она имеет пять состояний равновесия A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 . Для описания эволюции состояния системы при изменении параметра λ построены качественные диаграммы смены динамических режимов (рис. 4, 5), на которых светлые области соответствуют регулярным движениям (состояниям равновесия или предельным циклам); области, отмеченные однократной штриховкой, отвечают бифуркациям удвоения периода предельных циклов; области, выделенные двойной штриховкой, соответствуют хаотическим колебаниям. Уменьшению λ соответствует движение по диаграммам слева направо; линиями со стрелками обозначены переходы системы из одного режима в другой в результате бифуркаций. Значения λ , соответствующие этим переходам, приведены в таблице. Приведенные диаграммы смены режимов позволяют наглядно представить поведение модели 2 при изменении λ .

Таблица

Значения λ	$a = 4.6$ $\sigma = 0.78539$	$a = 8.$ $\sigma = 1.57078$
λ_1	(4.999; 5)	(7.989; 7.99)
λ_3	(2.385; 2.386)	(7.047; 7.048)
λ_5		(4.647; 4.648)
λ_1^*	(1.227203225; 1.22720325)	(2.79153125; 2.7915625)
λ_2^*	(1.172829087; 1.172829089)	(2.1976; 2.1978)
λ_3^*	(0.852; 0.8535)	(1.6625; 1.675)
λ_4^*	(0.78475; 0.785393)	(0.86545; 0.86548)
λ_5^*	(0.91106; 0.91175)	(1.6835; 1.69)
λ_6^*	(1.13015; 1.31)	(2.2195; 2.22)
λ_7^*	(1.172851252; 1.1728512575)	(2.7925535; 2.7925575)
λ_8^*	(1.2296275; 1.2296325)	
λ_9^*	(1.2638625; 1.2638685)	(3.11; 3.115)
λ_{10}^*	(0.902; 0.902658)	
λ_{11}^*	(0.993035; 0.994)	
λ_{12}^*	(0.837; 0.838325)	
λ_{13}^*		(2.3096; 2.3097)

Из диаграммы, приведенной на рис. 4, устанавливаем, что если в качестве исходного состояния системы рассмотреть синхронный режим, определяемый устойчивым состоянием равновесия A_1 , тогда с уменьшением λ развитие режимов идет по следующему сценарию. При $\lambda > \lambda_1$ – синхронный режим; при значениях $\lambda_1^* < \lambda < \lambda_1$ – переход в автоколебательный режим, определяемый устойчивым предельным циклом L_1 , бифуркация удвоения периода цикла L_1 и

Рис. 4. Диаграмма смены режимов модели 2 при $a=4.6, \sigma=0.78539$

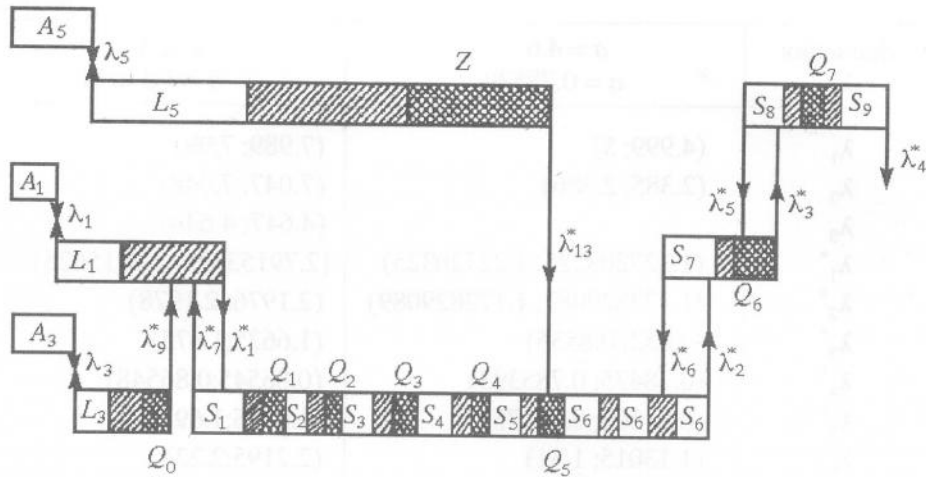


Рис. 5. Диаграмма смены режимов модели 2 при $a=8.$, $\sigma=1.57078$

переход на двухоборотный цикл L_1^2 , бифуркация, обратная удвоению и переход на цикл L_1 , бифуркации удвоения периода цикла L_1 и бифуркации, обратные бифуркациям удвоения, завершающиеся переходом системы на цикл L_1^2 ; при $\lambda=\lambda_1^*$ – исчезновение цикла L_1^2 в результате седло–узловой бифуркации и переход на другой двухоборотный предельный цикл L_2^2 ; при значениях $\lambda_2^* < \lambda < \lambda_1^*$ – бифуркация удвоения периода цикла L_2^2 и переход на четырехоборотный предельный цикл L_2^4 ; при $\lambda = \lambda_2^*$ – исчезновение цикла L_2^4 и переход на двухоборотный предельный цикл L_4^2 .

В области значений $\lambda_3^* < \lambda < \lambda_2^*$ с уменьшением λ происходят следующие события: бифуркации удвоения и обратные удвоениям периода цикла L_4^2 , переход на однооборотный предельный цикл L_4 , бифуркации удвоения периода цикла L_4 , завершающиеся возникновением хаотического аттрактора P_1 ; разрушение аттрактора P_1 и переход на трехоборотный предельный цикл L_6^3 , бифуркации удвоения и обратные удвоениям периода цикла L_6^3 , хаотический аттрактор P_2 на базе цикла L_6^3 ; разрушение аттрактора P_2 и переход на двухоборотный предельный цикл L_8^2 , бифуркации удвоения и обратные удвоениям периода цикла L_8^2 , хаотический аттрактор P_3 на базе цикла L_8^2 ; разрушение аттрактора P_3 и переход вновь на предельный цикл L_8^2 , бифуркации удвоения периода цикла L_8^2 , завершающиеся возникновением хаотического аттрактора P_4 .

На рис. 6 приведены проекции фазовых портретов и сечения Пуанкаре, соответствующие хаотическим аттракторам P_1 при $\lambda=1.025$, P_2 при $\lambda=0.961$, P_3 при $\lambda = 0.948$ и P_4 при $\lambda = 0.86$. При $\lambda=\lambda_3^*$ аттрактор P_4 разрушается и система переходит на двухоборотный предельный цикл C_1^2 ; при значениях $\lambda_4^* < \lambda < \lambda_3^*$ с уменьшением λ происходит бифуркация, обратная бифуркации удвоения периода цикла C_1^2 и переход на однооборотный предельный цикл C_1 . При $\lambda=\lambda_4^*$ цикл C_1 исчезает в результате седло–узловой бифуркации; система переходит на предельный цикл L_0 , динамический диапазон которого значительно превосходит размах цикла C_1 .

Если же рассмотреть в качестве исходного состояния системы, например, режим автоколебаний, определяемый предельным циклом C_1 при значениях

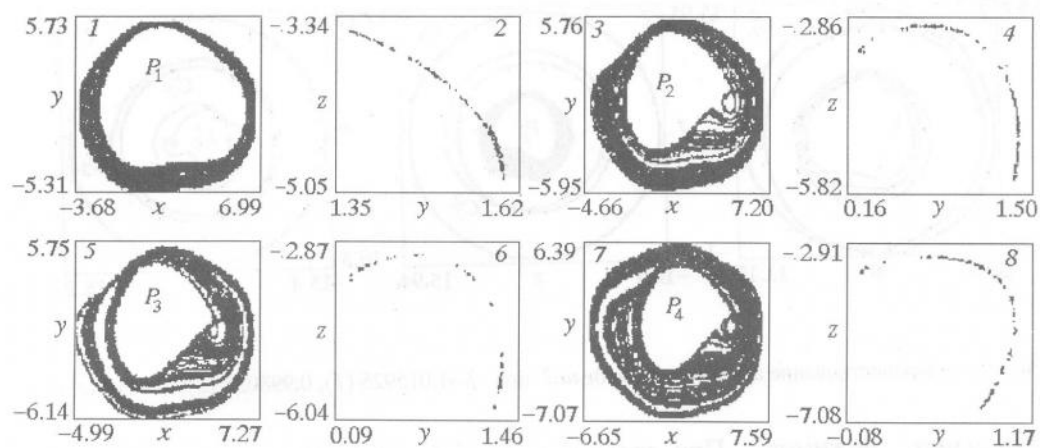


Рис. 6. Хаотические аттракторы модели 2 $P_1(1,2), P_2(3,4), P_3(5,6), P_4(7,8)$

$\lambda_4^* < \lambda < \lambda_3^*$, и увеличивать λ , то в соответствии с диаграммой на рис. 4 в системе фиксируется следующая, отличная от рассмотренной выше при уменьшении λ , цепочка событий. При значениях $\lambda_4^* < \lambda < \lambda_5^*$ происходят бифуркации удвоения и обратные удвоения периода предельного цикла C_1 ; при $\lambda = \lambda_5^*$ цикл C_1 исчезает в результате седло–узловой бифуркации и система переходит на однооборотный предельный цикл C_2 . При значениях $\lambda_5^* < \lambda < \lambda_6^*$ происходят бифуркации удвоения и обратные удвоения периода цикла C_2 ; при $\lambda = \lambda_6^*$ цикл C_2 исчезает в результате седло–узловой бифуркации и система переходит на двухоборотный предельный цикл L_4^2 . В интервале значений $\lambda_6^* < \lambda < \lambda_7^*$ следуют бифуркации удвоения и обратные удвоения периода цикла L_4^2 ; при $\lambda = \lambda_7^*$ цикл L_4^2 исчезает в результате седло–узловой бифуркации, система выходит на четырехоборотный предельный цикл L_2^4 . При дальнейшем увеличении λ цикл L_2^4 испытывает бифуркацию, обратную бифуркации удвоения периода; при $\lambda = \lambda_8^*$ исчезает в результате седло–узловой бифуркации цикл L_2^4 , и система переходит на другой двухоборотный предельный цикл L_1^2 ; затем следуют бифуркации удвоения и обратные удвоения периода цикла L_1^2 и переход на предельный цикл L_1 , который при $\lambda = \lambda_1$ исчезает в результате стягивания к состоянию равновесия A_1 . При $\lambda > \lambda_1$ в системе наблюдается синхронный режим.

Из диаграммы на рис. 4 следует, что имеются значения λ , отвечающие сосуществованию в фазовом пространстве модели 2 двух, трех или четырех аттракторов. В качестве примера на рис. 7 изображены (x, y) –проекции фазового портрета модели 2, отвечающие сосуществованию устойчивых трехоборотного предельного цикла L_3^6 и двухоборотного предельного цикла C_2^2 при $\lambda = 1.015925$, предельных циклов C_2^2, C_3 и хаотического аттрактора P_2 при $\lambda = 0.993035$, устойчивых предельных циклов L_8^2, C_1, C_2, C_3 при $\lambda = 0.91106$.

Из представленных результатов исследования моделей 1 и 2 следует, что динамика рассматриваемых управляемых систем с фильтром третьего порядка при варьировании параметра инерционности λ характеризуется наличием между синхронным режимом и автоколебательным режимом с большим динамическим диапазоном чередующихся сложных регулярных и хаотических автоко-

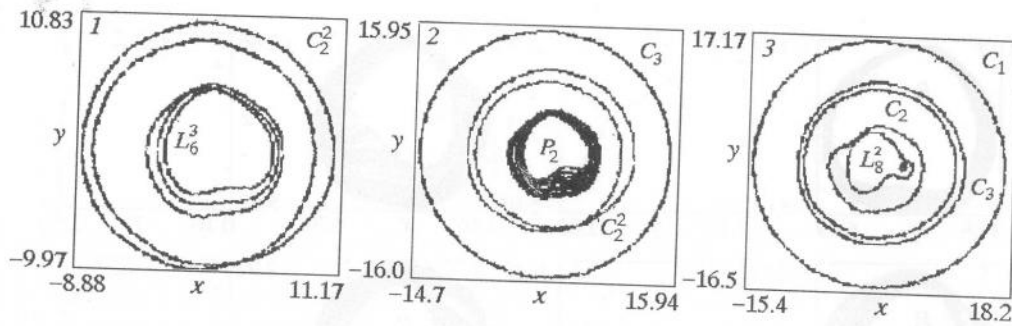


Рис. 7. Сосуществование аттракторов модели 2 при $\lambda=1.015925$ (1); 0.993035 (2); 0.91106 (3)

лебательных режимов. При этом в модели 1 бифуркационные явления и сложные режимы в окрестности состояния равновесия A_1 наблюдаются при существовании устойчивого состояния равновесия A_3 , в то время как в модели 2 эти события происходят при тех значениях λ , когда A_3 неустойчиво. Сосуществование в фазовом пространстве двух и большего числа аттракторов дает возможность наблюдать явление гистерезиса при варьировании параметра λ .

Рассмотрим теперь диаграмму смены режимов, приведенную на рис. 5, которая показывает усложнение динамики модели 2, обусловленное возрастанием параметра a . Если при значениях $\lambda > \lambda_1$ зафиксировать начальное состояние системы в синхронном режиме, определяемом состоянием равновесия A_1 , и уменьшать λ , то при $\lambda < \lambda_1$ возникает устойчивый предельный цикл L_1 , представленный на рис. 8, диаг. 1, в интервале значений $\lambda_1^* < \lambda < \lambda_1$ этот цикл испытывает бифуркацию удвоения периода, и система переходит на двухоборотный предельный цикл L_1^2 (см. рис. 8, диаг. 2). Как видно из диаграммы на рис. 5, при $\lambda_1^* < \lambda < \lambda_1$ в фазовом пространстве модели 2 одновременно могут существовать еще устойчивый предельный цикл L_3 в окрестности неустойчивого состояния равновесия A_3 , устойчивый предельный цикл L_5 в окрестности неустойчивого состояния равновесия A_5 и хаотический аттрактор Q_0 , возникающий в результате последовательности бифуркаций удвоения периода цикла L_3 .

При $\lambda = \lambda_1^*$ цикл L_1^2 исчезает в результате седло-узловой бифуркации, и система переходит на устойчивый четырехоборотный предельный цикл S_1 (см. рис. 8, диаг. 3, 4). В области значений $\lambda_2^* < \lambda < \lambda_1^*$ в фазовом пространстве существуют устойчивые предельные циклы: шестиоборотный S_2 , четырехоборотный S_3 , трехоборотный S_4 , однооборотный S_5 , двухоборотный S_6 (см. рис. 8, диаг. 6, 8, 10, 12, 14). При уменьшении λ циклы S_1, S_2, S_3, S_4, S_5 претерпевают бифуркации удвоения периода, завершающиеся возникновением хаотических аттракторов Q_1, Q_2, Q_3, Q_4, Q_5 (см. рис. 8, диаг. 5, 7, 9, 11, 13); цикл S_6 испытывает бифуркации удвоения и обратные удвоения периода. Кроме этого, при значениях $\lambda_{13}^* < \lambda < \lambda_1^*$ в фазовом пространстве существуют устойчивый предельный цикл L_5 , претерпевающий серию бифуркаций удвоения периода, и хаотический аттрактор Z , возникающий в результате этих бифуркаций (см. рис. 5).

При $\lambda = \lambda_2^*$ предельный цикл S_6 исчезает в результате седло-узловой бифуркации, система переходит на двухоборотный предельный цикл S_7 , который с уменьшением λ испытывает последовательность бифуркаций удвоения периода, завершающуюся возникновением хаотического аттрактора Q_6 (см. рис. 8, *диаг. 16*). При $\lambda = \lambda_3^*$ аттрактор Q_6 разрушается и система переходит на однооборотный предельный цикл S_8 . С дальнейшим уменьшением λ в интервале значений $\lambda_4^* < \lambda < \lambda_3^*$ следуют: бифуркации удвоения периода цикла S_8 ; возникновение хаотического аттрактора Q_7 на базе цикла S_8 ; разрушение аттрактора Q_7 ; бифуркации, обратные удвоениям, завершающиеся выходом системы на предельный цикл S_9 (см. рис. 8, *диаг. 17, 18, 19*). При $\lambda = \lambda_4^*$ цикл S_9 исчезает в результате седло-узловой бифуркации, следствием которой является жесткий переход системы на предельный цикл L_0 , динамический диапазон которого значительно превосходит размах цикла L_0 .

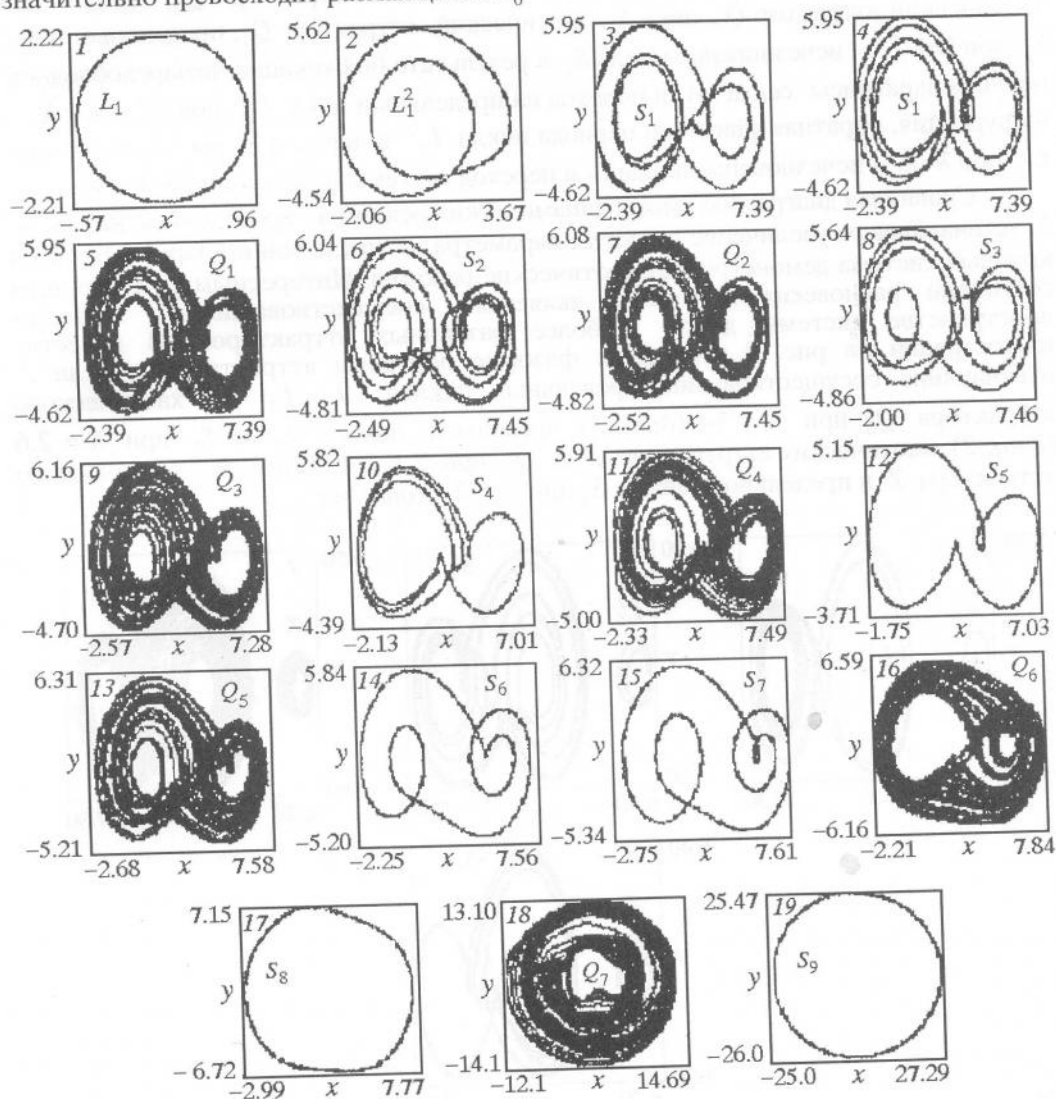


Рис. 8. Фазовые портреты аттракторов модели 2 при $\lambda = 7.5$ (1); 3.2 (2); 2.79 (3); 2.7225 (4); 2.63 (5); 2.6 (6); 2.556 (7); 2.55 (8), 2.5 (9); 2.4 (10); 2.35 (11); 2.33 (12); 2.305 (13); 2.3 (14); 2.1976 (15); 1.7 (16); 1.63 (17); 1.0 (18); 0.8675 (19)

Если рассмотреть в качестве начального состояния системы, например, режим автоколебаний, определяемый предельным циклом S_9 , и увеличивать параметр λ , тогда в соответствии с диаграммой на рис. 5 система проходит через следующую последовательность состояний: при $\lambda_4^* < \lambda < \lambda_5^*$ – цикл S_9 , бифуркации удвоения периода цикла S_9 , хаотический аттрактор Q_7 , разрушение аттрактора Q_7 , переход на предельный цикл S_8 ; при $\lambda = \lambda_5^*$ – исчезновение цикла S_8 и переход на хаотический аттрактор Q_6 ; при $\lambda_5^* < \lambda < \lambda_6^*$ – разрушение аттрактора Q_6 и переход на предельный цикл S_7 ; при $\lambda = \lambda_6^*$ – исчезновение цикла S_7 и переход на многооборотный предельный цикл (возникающий на базе удвоений цикла S_6); при значениях $\lambda_6^* < \lambda < \lambda_7^*$ – бифуркации удвоения и обратные удвоения периода цикла S_6 , хаотический аттрактор Q_5 , предельный цикл S_5 , хаотический аттрактор Q_4 , цикл S_4 , хаотический аттрактор Q_3 , цикл S_3 , хаотический аттрактор Q_2 , цикл S_2 , хаотический аттрактор Q_1 , предельный цикл S_1 ; при $\lambda = \lambda_7^*$ – исчезновение цикла S_1 в результате бифуркации четырехобходной петли сепаратрисы седла A_2 и переход на предельный цикл L_1^2 ; при $\lambda_7^* < \lambda < \lambda_1$ – бифуркация, обратная удвоению периода цикла L_1^2 и переход на предельный цикл L_1 ; при $\lambda = \lambda_1$ – исчезновение цикла L_1 и переход системы в синхронный режим.

Сравнивая диаграммы смены динамических режимов, приведенные на рис. 4, 5, устанавливаем увеличение с ростом параметра a числа зон по параметру λ , в которых система демонстрирует хаотические режимы. Интересным в случае пяти состояний равновесия модели 2 является сосуществование в фазовом пространстве системы двух и более различных аттракторов. В качестве иллюстрации на рис. 9 приведены фазовые портреты аттракторов модели 2, отвечающие сосуществованию предельных циклов L_5 , L_1^2 и хаотического аттрактора Q_0 при $\lambda = 3.4$ (диаг. 1), предельных циклов L_5^2 и S_2 при $\lambda = 2.6$ (диаг. 2), хаотических аттракторов Z и Q_3 при $\lambda = 2.45$ (диаг. 3), хаотического аттрактора Z и предельного цикла S_4 при $\lambda = 2.4$ (диаг. 4).

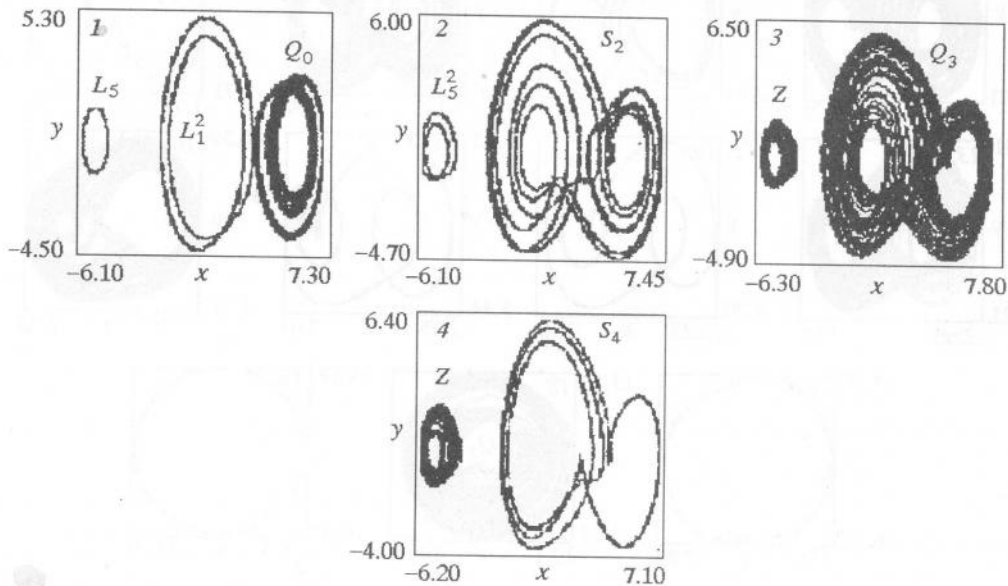


Рис. 9. Сосуществование аттракторов модели 2 при $\lambda=3.4$ (1); 2.6 (2); 2.45 (3); 2.4 (4)

Заключение

В данной работе представлены новые результаты исследования режимов динамического поведения систем с частотным и фазовым управлением, содержащих фильтр третьего порядка в цепи управления. Изучены автоколебательные режимы и их бифуркации, установлены возможные сценарии эволюции режимов при изменении параметра инерционности λ для аperiodической и синусоидальной характеристик дискриминаторов.

Сопоставляя полученные результаты по динамике моделей 1 и 2 с результатами работ [3,6,7], устанавливаем, что поведение исследуемых систем с фильтром третьего порядка характеризуется режимами и бифуркационными явлениями, не наблюдаемыми в системах с фильтром второго порядка; в системах возникают хаотические режимы; динамика систем при варьировании параметра λ характеризуется наличием разнообразных периодических и хаотических колебательных режимов, свойствами мультистабильности и гистерезиса. Примечательно, что существенное усложнение динамики систем наступает уже при сравнительно небольших величинах параметра инерционности μ .

Установленные эффекты и явления динамики моделей 1 и 2 вне областей локальной устойчивости состояний равновесия, обусловленные влиянием параметров λ и μ , имеют принципиальное значение для понимания особенностей поведения систем при нарушении устойчивости синхронного режима, а также для решения задач формирования сложных регулярных и шумоподобных колебаний на основе исследуемых систем с частотным и фазовым управлением.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 93-02-15424).

Библиографический список

1. Капранов М.В., Кулешов В.Н., Уткин Г.М. Теория колебаний в радиотехнике. М.: Наука, 1984.
2. Уткин Г.М., Капранов М.В., Белов Л.А. и др. Автоматическая подстройка фазового набег в усилителях / Под ред. М.В. Капранова М.: Сов. радио, 1972.
3. Пономаренко В.П. Исследование модели корреляционно экстремальной системы слежения за задержкой шумового сигнала // Изв. АН СССР. Сер. Техническая кибернетика. 1985. № 5. С.177.
4. Белов В.Н. Узкополосный фильтр, автоматически управляемый по фазе // Вопросы радиоэлектротехники. Сер. Техника проводной связи. 1970. Вып.1. С.54.
5. Каганов В.И. Системы автоматического регулирования в радиопередатчиках. М.: Связь, 1969.
6. Пономаренко В.П. Об устойчивости системы частотной автоподстройки с фильтром второго порядка // Радиотехника и электроника. 1982. Т.27, № 1. С.113.
7. Заулин И.А., Пономаренко В.П. Анализ динамических процессов в статических системах синхронизации // Радиотехника и электроника. 1989. Т.34. № 1. С. 106.
8. Баутин Н.Н. Поведение динамических систем вблизи границ области устойчивости. М.: Наука, 1984.

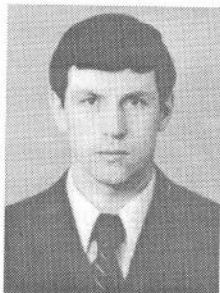
НИИ прикладной математики
и кибернетики

Поступила в редакцию 17.01.94
после переработки 22.03.94

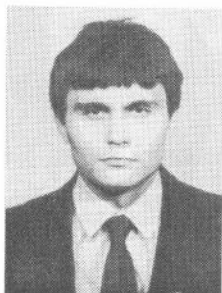
COMPLEX DYNAMICS OF THE SYSTEMS WITH THE UNONLY EQUILIBRIUM STATE

V.P. Ponomarenko, I.A. Zaulin

The results of qualitative and numerical analysis of dynamics of frequency and phase control systems, containing the third order filter in control circuit, are presented. Regimes and special features of system's behaviour out of the local stability region of equilibrium points are achieved. High system's dynamics dependence on inertia parameters of control circuit is ascertained.



Пономаренко Валерий Павлович – родился в 1941 году в Мурманске, окончил Горьковский государственный университет в 1963 году. С 1968 года работает в Научно-исследовательском институте прикладной математики и кибернетики при Нижегородском университете (НИИ ПМК при ННГУ). Защитил диссертации на соискание ученой степени кандидата технических наук (1972) и доктора физико-математических наук (1993) в области теории синхронизации, теории колебаний и динамики систем. С 1991 года – заместитель директора НИИ ПМК при ННГУ. Область научных интересов – теория колебаний и волн, применение нелинейной динамики в радиоавтоматике, синхронизация автоколебательных систем, математическое моделирование. Соавтор коллективных монографий «Фазовая синхронизация» и «Системы фазовой синхронизации». Опубликовал много научных статей по направлениям, указанным выше.



Зулин Игорь Александрович – родился в 1962 году в Горьком, окончил Горьковский государственный университет в 1984 году. После окончания ГГУ работает научным сотрудником в НИИ ПМК при ННГУ. Область научных интересов – динамика систем, математическое моделирование, применение нелинейной динамики в задачах синхронизации автоколебательных систем. Опубликовал 14 научных статей по направлениям, указанным выше, соавтор двух учебных пособий.



О ЧИСЛЕННОМ ПОСТРОЕНИИ ДВОЯКОАСИМПТОТИЧЕСКИХ ТРАЕКТОРИЙ В ФАЗОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

А.Г. Максимов

Предложена методика численного построения бифуркационного множества, соответствующего существованию двоякоасимптотических траекторий в фазовом пространстве G конечномерных динамических систем. Он основан на анализе взаимного расположения в G одномерной неустойчивой сепаратрисы и семейства поверхностей без контакта. Описываемый метод существенно снижает затраты «машинного» времени и достаточно эффективно работает даже в случае, если исследуемое бифуркационное множество и двоякоасимптотические траектории устроены сложно. Приведены результаты использования данного метода для конкретных динамических систем.

1. Построение бифуркационных множеств, отвечающих гомо- и гетероклиническим траекториям в фазовом пространстве динамических систем – задача актуальная и довольно сложная. Актуальность ее определяется тем фактом, что эти множества являются границей в пространстве параметров динамической системы, при пересечении которой происходят топологические изменения в ее фазовом пространстве. В зависимости от назначения физического объекта, для которого построена динамическая модель, знание структуры ее фазового пространства может быть полезно для определения устойчивости определенного типа решений, их ограниченности и области притяжения [1]. Актуальность этой задачи определяется еще и тем, что гомо- и гетероклинические траектории являются образом автоволновых структур типа «бегущий импульс», «бегущий фронт», распространяющихся в средах различной физической природы [2,3].

Известен целый ряд способов получения бифуркационных множеств, отвечающих гомо- и гетероклиническим траекториям. Среди них – так называемый метод расщепления сепаратрис (см., например, [4]). Он применяется, в основном, для исследования динамических систем 3-го порядка и основан на анализе взаимного расположения одномерной сепаратрисы и касательной плоскости к двумерному многообразию в окрестности состояния равновесия. Являясь достаточно универсальным и удобным для применения (в частности, он использован в пакете программ LOOPLP, разработанного в НЦБИ АН СССР, Пушино-на-Оке), этот метод не лишен недостатков. Основной среди них связан с точностью аппроксимации двумерного многообразия касательной плоскостью, которая тем точнее, чем ближе к состоянию равновесия. Но, с другой стороны, с приближением к состоянию равновесия увеличивается чувствительность интегрируемой одномерной сепаратрисы к погрешностям счета. Кроме того, затруднен поиск бифуркационного множества при «старте» из произвольной точки пространства параметров, в силу того, что одномерную сепаратрису

необходимо «затащить» в некоторую окрестность состояния равновесия, чтобы метод эффективно заработал.

Известен метод, основанный на использовании сжимающих отображений, построенных по конкретной динамической системе [5]. С его помощью можно с «любой» точностью (до погрешностей машинного счета, разумеется) найти точку пересечения сепаратрисы с произвольной поверхностью и, не производя построения этой сепаратрисы, т.е. не интегрируя динамическую систему, при помощи итерационных методов получать двоякоасимптотические траектории в фазовом пространстве. Обладая возможностью нахождения бифуркационной точки в пространстве параметров с высокой точностью, этот метод требует больших затрат машинного времени и эффективно работает в достаточно малой окрестности бифуркационного множества.

Известен способ построения двоякоасимптотических траекторий при помощи сведения этой задачи к решению соответствующей краевой задачи на прямой (см., например, [6,7]). Однако, как показано в [8], такой переход не всегда является корректным.

Кроме того, вышеперечисленные методы плохо работают, когда двумерное многообразие недостаточно гладкое, а так же, если состояние равновесия, в которое приходит сепаратриса, является седло-фокусом. Но наибольшие трудности возникают в случае, если форма гомо- или гетероклинической траектории достаточно сложна (траектория несколько раз, например, проходит в своей расширенной окрестности), а так же если бифуркационное множество, отвечающее таким траекториям, достаточно сложно устроено [9–11].

2. Действие предлагаемого алгоритма поиска бифуркационных множеств, соответствующих двоякоасимптотическим траекториям, основано на анализе взаимного расположения одномерной неустойчивой сепаратрисы и семейства поверхностей без контакта в фазовом пространстве исследуемой динамической системы.

Рассмотрим динамическую систему (1) в фазовом пространстве G

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} = F(\mathbf{u}, \mathbf{a}, c), \quad (1)$$

где $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots, u_i)$ – переменные, $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_j)$, c – параметры, $F(\cdot)$ – нелинейная функция. Без нарушения общности, будем считать $i = 3$. (Все дальнейшие результаты могут быть обобщены на случай $i > 3$). В пространстве параметров $d: \{\mathbf{a}, c\}$ будем искать бифуркационное множество, отвечающее гетероклиническим траекториям в G . Для этого в d система (1) должна иметь, по крайней мере, 2 состояния равновесия седлового типа $O_1(\mathbf{u}^1)$ и $O_2(\mathbf{u}^2)$, где $\mathbf{u}^1(\mathbf{a}, c)$ и $\mathbf{u}^2(\mathbf{a}, c)$ таковы, что $F(\mathbf{u}^i, \mathbf{a}, c) = 0$, $i = 1, 2$.

Пусть $O_1(O_2)$ имеет одномерное неустойчивое многообразие $W_1^u (W_2^u)$ и двумерное устойчивое $W_1^s (W_2^s)$ ¹. Если W_1^u лежит на W_2^s , то это означает, что в фазовом пространстве G при данных значениях параметров из d существует гетероклиническая траектория, при $t \rightarrow -\infty$ выходящая из O_1 , приходящая в O_2 при $t \rightarrow +\infty$. Для поиска параметров из d , отвечающих случаю $W_1^u \cap W_2^s \neq \emptyset$ поступим следующим образом.

¹ Другие возможные варианты здесь рассматриваться не будут в силу следующих причин. Поиск связи сепаратрис, образованных лежащей на двумерном неустойчивом многообразии одного состояния равновесия одномерной устойчивой сепаратрисой, сводится к рассматриваемому заменой времени $t \rightarrow -t$. Бифуркация «слияния» одномерной неустойчивой сепаратрисы одного состояния равновесия и одномерной устойчивой сепаратрисы другого в общем случае имеет коразмерность 2 и встречается редко. Трансверсальное пересечение двумерного неустойчивого многообразия одного состояния равновесия и двумерного устойчивого другого в общем случае не исчезает при «шевелении» параметров, и, в силу этого, поиск бифуркационного множества не вызывает особых трудностей.

Введем в фазовом пространстве G семейство поверхностей

$$V(\mathbf{u}, \mathbf{a}, c) = C, \quad (2)$$

где $C = \text{const}$, обладающих следующими свойствами.

1. $V(\cdot)$ определена во всем d ;
2. Существует такое $C = C^*$, что $V = C^*$ состоит из двух частей V^1 и V^2 таких, что:

$$\text{а) } V^1 \cup V^2 = V,$$

$$\text{б) } V^1 \cap V^2 = O_2,$$

в) V^1 и V^2 топологически эквивалентны параболоидам с вершиной в O_2 .

3. Производная от V , взятая в силу системы (1), удовлетворяет неравенству

$$\dot{V} \leq 0, \quad (3)$$

причем, $\dot{V} = 0$ только в O_2 .

Неравенство (3), другими словами, означает, что все траектории динамической системы (1) пересекают поверхность V вовнутрь трансверсально всюду, кроме O_2 . Будем анализировать взаимное расположение W_1^u и $V(\cdot) = C^*$.

Для получения W_1^u необходимо построить вектор \mathbf{D} , касательный к многообразию W_1^u в точке O_1 , и на расстоянии ϵ^2 от O_1 взять на векторе \mathbf{D} точку E' . Точкой E' будем аппроксимировать точку $E \in W_1^u$ и использовать ее в качестве начальной для получения W_1^u путем прямого интегрирования на компьютере системы (1).

Для построения гетероклинической траектории нужно так подобрать параметры системы (1), чтобы W_1^u легло на устойчивое многообразие W_2^s , т.е. образовала связку сепаратрис $O_1 \rightarrow O_2$.

Для этого рассмотрим взаимное расположение W_1^u и поверхности $V(\mathbf{u}, \mathbf{a}, c) = C^*$. Возьмем в области d точку K . Пусть для этих параметров одномерная неустойчивая «сепаратриса» исследуемой системы, полученная путем интегрирования на ЭВМ (1) от точки E , пересекает один из параболоидов (например, V^1) в точке M^1 . А для $K' \in d$ точки M^1 не существует – эта сепаратриса с поверхностью V не пересекается вообще и (или) появляется точка $M^2 \in V^2$. Тогда, учитывая свойства поверхности V , при движении вдоль линии, соединяющей K и K' и принадлежащей d , точка M^1 может исчезнуть только в случае, если сепаратриса пройдет через точку O_2 (где производная \dot{V} в силу системы (1) равна 0), т.е. при образовании гетероклинической траектории. Таким образом, на этой линии, соединяющей точки K и K' , существует, по крайней мере, одна точка \hat{K} , принадлежащая искомому бифуркационному множеству. Уменьшая расстояние между K и K' , можно получить точку \hat{K} (бифуркационное значение набора параметров системы (1), которому соответствует существование в ее фазовом пространстве гетероклинической траектории) с «любой» степенью точности (учитывая, естественно, погрешности аппроксимации точки E' и интегрирования сепаратрисы системы (1)).

² Уменьшая ϵ , можно до определенной степени улучшать качество аппроксимации, однако, брать очень малое ϵ не имеет смысла, т.к. возможна ситуация, когда накопление ошибки в результате погрешности счета в непосредственной близости \mathbf{u}^1 не уменьшит, а наоборот увеличит отклонение от W_1^u . Чтобы этого избежать, можно, например, воспользоваться способом, описанным в [5]. Что касается приведенных ниже примеров, то с учетом того, что при изменении величины ϵ в интервале от 10^{-8} до 10^{-4} , относительная погрешность в определении значения бифуркационного параметра не превышает 10^{-6} , можно считать подобную аппроксимацию вполне достаточной.

3. К сожалению, не всегда удается подобрать поверхность $V(\cdot) = C^*$, удовлетворяющую всем выше перечисленным условиям во всем фазовом пространстве G (имеется ввиду топологическая эквивалентность конусу и выполнение неравенства (3)). Однако, описанный метод может быть применен и в случае, если $V(\cdot) = C^*$ удовлетворяет условиям в некоторой окрестности точки O_2 : в $\hat{G} \subset G$. При этом, правда, существует «опасность», что точка M^1 сойдет с конуса $V(\cdot) = C^*$ вне \hat{G} или попадет в область притяжения какого-либо аттрактора (устойчивого состояния равновесия или предельного цикла). Исключить ошибку, связанную с подобными ситуациями, можно путем дополнительного анализа системы (1) на предмет отсутствия этих структур в G , и следя за характером поведения координат M^1 в G вблизи параметров из области d , когда точка исчезает.

4. При помощи предложенной методики можно искать бифуркационное множество, отвечающее и гомоклиническим траекториям. В этом случае роль состояния равновесия O_2 для $V(\cdot) = C^*$ будет выполнять состояние равновесия O_1 . Однако, и это принципиально, конус $V(\cdot) = C^*$ удовлетворяет условиям 1–3, п. 2 только в некоторой глобальной окрестности точки O_2 : в $G \subset G$ (сепаратриса W_1^u должна иметь «возможность» выйти из V^1). В силу этого, всегда актуальна проверка «неприятных» ситуаций, описанных в предыдущем пункте.

5. Основным недостатком данной методики построения гетероклинической траектории состоит в сложности конструирования поверхности $V(\cdot) = C^*$. Естественно, для каждой конкретной динамической системы типа (1) поверхность $V(\cdot)$ своя и ее построение есть своего рода «искусство». Но, хотя это и делается аналитически, облегчить поиск поверхности $V(\cdot) = C^*$ может, например, применение пакетов алгебраических вычислений на компьютере типа REDUCE. Однако, вместе с этим, семейство $V(\cdot) = C$ дает дополнительную информацию о структуре фазового пространства системы, что может быть полезно для ее исследования.

Основное достоинство методики состоит в существенном сокращении затрат машинного времени на построение бифуркационных поверхностей, связанное с тем, что сепаратрисы W_1^u нужно «доводить» не до малой окрестности состояния равновесия O_2 , а до пересечения с поверхностью $V(\cdot) = C^*$ (с этим же связана и высокая точность получения бифуркационного значения параметров – не происходит накопления ошибок в окрестности O_2). Но самое главное – это достаточно эффективная работа в случае, когда бифуркационное множество или гетеро-; гомоклиническая траектория имеет сложную форму.

Рассмотрим применение описанного алгоритма построения бифуркационных множеств, отвечающих двоякоасимптотическим траекториям к состояниям равновесия седлового типа для автономных систем, соответствующих модели Фитц-Хью – Нагумо (ФХН) и возмущенному уравнению Син-Гордона.

6.1. Автономная система, соответствующая модели ФХН, имеет вид:

$$\begin{aligned} \dot{u} &= w, \\ \dot{w} &= cw - f(u) + v, \\ \dot{cv} &= b(u - \gamma v), \end{aligned} \quad (4)$$

где $f(u) = -u(u-n)(u-1)$, $0 \leq n < 1/2$; γ, b – параметры, точкой обозначено дифференцирование по бегущей координате $\xi = x + ct$.

6.2. Будем исследовать (4) в трехмерном фазовом пространстве G и области параметров d^* : $\{b > 0, c > 0, \gamma > \gamma_0\}$, $\gamma_0 = 4(1-n)^{-2}$. Несложно видеть, что (4) имеет в d^* три состояния равновесия: $O_0(0,0,0)$, $O_1(u_1, 0, \gamma^{-1}u_1)$, $O_2(u_2, 0, \gamma^{-1}u_2)$, где

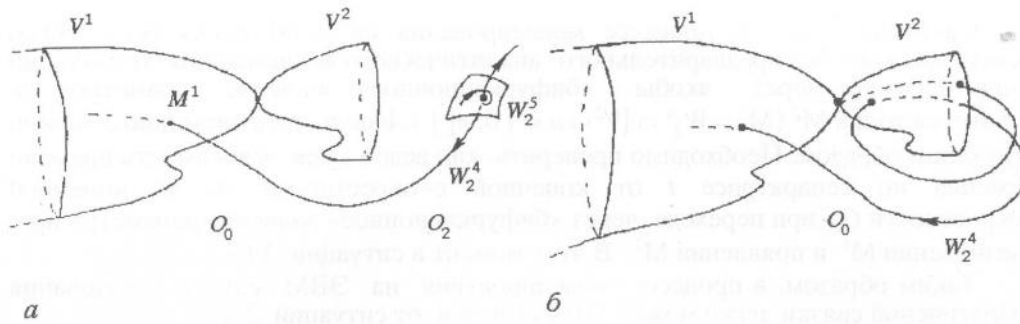


Рис. 1. Иллюстрация к методике построения двоякоасимптотических траекторий: *а* – гетероклинической; *б* – гомоклинической

$$u_i = \frac{1+n}{2} \pm \sqrt{\frac{(1-n)^2}{4} - \gamma^{-1}}, \quad i = 2, 1.$$

Для всех точек области d^* состояние равновесия O_0 имеет седловой тип с одномерным неустойчивым W_0^u и двумерным устойчивым W_0^s многообразиями.

Состояние равновесия O_2 в d^* – либо седлового типа с одномерным неустойчивым W_2^u и двумерным устойчивым W_2^s многообразиями, либо неустойчивый фокус или неустойчивый узел (подробнее см. [12,13]). В дальнейшем будем работать в области параметров d , в которой состояния равновесия O_0, O_2 имеют седловой тип.

Получим связку сепаратрис, являющуюся результатом пересечения одномерного неустойчивого многообразия W_2^u состояния равновесия O_2 и двумерного устойчивого многообразия W_0^s состояния равновесия O_0 (рис. 1, *а*). Для этого в качестве $V(u, w, v) = C^*$ может быть выбрана функция

$$\frac{1}{2} \frac{c}{b\gamma} v^2 + \rho \frac{w^2}{2} - \frac{uw}{\gamma} + \frac{c}{2\gamma} u^2 + \rho \int_0^u f(x) dx = 0, \quad (5)$$

где

$$0 < \rho < \min \{1/\gamma c, 2(\sqrt{c^2 + 1/\gamma} - c)\}. \quad (6)$$

Несложно видеть, что $\dot{V}(u, w, v)$, взятая в силу системы (4), будет иметь вид

$$\dot{V} = -v^2 + \left(\rho c - \frac{1}{\gamma}\right) w^2 + \rho v w + \frac{1}{\gamma} u f(u). \quad (7)$$

Поверхность $V(u, w, v) = 0$ при $u \in]-\infty, n]$ удовлетворяет условиям 1–3, п. 2. Таким образом, если существует точка M^1 , являющаяся результатом пересечения одномерного неустойчивого многообразия O_2 и поверхности V^1 , то при изменении параметров системы (4) (не выходя при этом из области d), точка M^1 может исчезнуть только в следующих ситуациях.

1. «Пройдя» через O_0 , т.е. образовав искомую связку сепаратрис.
2. Если W_2^u попадает в область притяжения устойчивого состояния равновесия (легко видеть, что в G для d такого нет) или устойчивого предельного цикла.
3. Если W_2^u «соскочит» с V^1 , «уйдя» по неустойчивому многообразию седлового предельного цикла.

Ситуации 2 и 3 в процессе моделирования на ЭВМ могут быть легко исключены даже без предварительного аналитического исследования. В ситуации 2 при переходе через якобы «бифуркационное» значение параметров не появляется точка M^2 ($M^2 = W_2^u \cap \{V^2 \cup u \in]0, n[\}$). Исключить ситуацию 3 можно следующим образом. Необходимо проверить, как ведет себя зависимость времени движения по сепаратрисе \hat{t} от конечной ε -окрестности O_2 до конечной ε -окрестности O_0 при переходе через «бифуркационное» значение параметра при исчезновении M^1 и появлении M^2 . В этот момент в ситуации 3 $\hat{t} \rightarrow \infty$.

Таким образом, в процессе моделирования на ЭВМ случай образования сепаратрисной связки легко может быть отделен от ситуаций 2 и 3.

6.3. Аналогичным образом ищется бифуркационное множество, отвечающее связке сепаратрис, являющееся результатом пересечения одномерного неустойчивого многообразия W_0^u состояния равновесия O_0 и двумерного устойчивого многообразия W_2^s состояния равновесия O_2 . В этом случае в качестве поверхности V выбирается следующая:

$$\frac{1}{2} \frac{c}{b\gamma} \left(v - \frac{u}{\gamma} \right) + \frac{1}{2} \rho w^2 + \rho \int_{u_2}^u f(u) du - (u - u_2) \left(\frac{w}{\gamma} + \rho u_2 - \frac{c}{2\gamma} (u - u_2) \right) = 0. \quad (8)$$

Производная \dot{V} , взятая в силу системы (4), будет иметь вид

$$\dot{V} = - \left(v - \frac{u_2}{\gamma} \right)^2 - w^2 \left(\frac{1}{\gamma} - \rho c \right) + \left(v - \frac{u_2}{\gamma} \right) w + \frac{1}{\gamma} (u - u_2) \left[f(u) - \frac{u_2}{\gamma} \right]. \quad (9)$$

Несложно видеть, что на интервале $u \in [u^*, \infty[$ $V(u, w, v)$ удовлетворяет условиям 1–3, п.2. Поиск бифуркационных значений параметров, отвечающих связке сепаратрис $O_0 \rightarrow O_2$, полностью аналогичен описанному для $O_2 \rightarrow O_0$. Единственное отличие состоит в том, что нужно получить точку M^2 и следить за ее исчезновением и появлением точки M^1 . Это связано с тем, что V^2 не ограничено по u справа и уходит в бесконечность, в то время как V^1 расположено в существенно меньшей области пространства G : между O_2 и плоскостью $\{u = u^*\}$.

6.4. Будем рассматривать систему (4) при условии $\gamma < \gamma_0$. Несложно видеть, что в этом случае она имеет одно состояние равновесия $O_1 (u=0, w=0, v=0)$ седлового типа с одномерным неустойчивым W^u и двумерным устойчивым W^s многообразиями. Если сепаратриса W^u принадлежит устойчивому многообразию W^s , то она образует в G гомоклиническую траекторию – петлю сепаратрисы. Для построения бифуркационного множества, отвечающего в G гомоклинической траектории, в качестве поверхности без контакта взята функция V , приведенная в (5). Поиск бифуркационного значения параметра осуществляется аналогично случаю поиска сепаратрисной связки $O_2 \rightarrow O_0$.

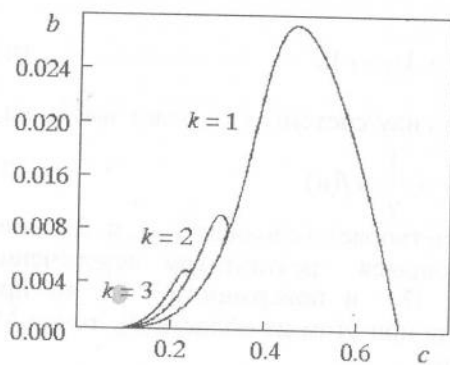


Рис. 2. Элементы бифуркационного множества k -обходных гомоклинических траекторий (4) ($\gamma = 3, n = 0.01$)

³ Здесь u^* ищется из условия $f(u^*) = \frac{u_2}{\gamma}, n < u^* < u_2$.

Использованный алгоритм позволил найти бифуркационное множество, отвечающее гомоклинической траектории более сложной формы (рис. 2): двух-, трех-, ...-обходной петле сепаратрисы – гомоклинической траектории в G , проходящей в своей расширенной окрестности два, три и более раз. Для этого нужно «следить» за поведением точки M^2 , являющейся результатом, соответственно, 2-го, 3-го, ... пересечения W^u и V^2 (см. рис.1, б).

6.5. При помощи описанного алгоритма строилось бифуркационное множество, отвечающее двоякоасимптотическим траекториям в фазовом пространстве автомодельной системы, соответствующей возмущенному уравнению Син–Гордона

$$\varphi_{xx} - \varphi_{tt} = \sin \varphi + \alpha \varphi_t - \beta \varphi_{xxt} - \gamma. \quad (10)$$

Данный алгоритм продемонстрировал свою эффективность и в случае, когда это множество устроено очень сложно. Некоторые элементы этого бифуркационного множества приведены в [14,15].

Выводы

Описана методика нахождения бифуркационных множеств, отвечающих гомо- и гетероклиническим траекториям, для нелинейных динамических систем. Она основана на анализе взаимного расположения в фазовом пространстве исследуемой системы сепаратрисы W^u седлового состояния равновесия и семейства поверхностей без контакта $V(\cdot) = \text{const}$. Основной недостаток данной методики связан со сложностью конструирования семейства V . Для каждой конкретной системы $V(\cdot)$ – своё и его построение своего рода «искусство». Но вместе с этим, знание семейства поверхностей $V(\cdot) = \text{const}$ дает дополнительно полезную информацию о структуре фазового пространства, что особенно важно, например, при проверке полученных в численном моделировании результатов. Основное же достоинство методики состоит в существенном сокращении затрат машинного времени на построение бифуркационных множеств, связанное с тем, что сепаратрису нужно «доводить» не до малой окрестности состояния равновесия, а до пересечения с поверхностью $V(\cdot) = C^*$. С этим же связана и высокая точность получения бифуркационных значений параметров – не происходит накопление ошибок в окрестности состояния равновесия. Именно это определяет более эффективную работу данной методики в случае, когда бифуркационное множество или гомо-, гетероклиническая траектория имеют сложную форму.

Использование описанной методики для исследования автоволновых решений в системах ФХН и возмущенном уравнении Син–Гордона подтвердило эти ее преимущества. Более того, удалось уточнить сложную структуру диаграммы зависимости скорости распространения и формы солитонов от параметров возмущенного уравнения Син–Гордона, приведенную, например, в [16], построить элементы бифуркационного множества, отвечающие двух-, трех-обходным гомоклиническим траекториям в «автомодельном» варианте системы ФХН.

Автор благодарен В.И. Некоркину за полезные дискуссии и постоянное внимание к работе.

Библиографический список

1. Андронов А.А., Витт А.А., Хайкин С.Э. Теория колебаний. М.: Физматгиз, 1959.
2. Гапонов-Грехов А.В., Рабинович М.И. Нелинейная физика. Стохастичность и структуры // Физика XX века: Развитие и перспективы. М.: Наука, 1984. С. 219.
3. Васильев В.А., Романовский Ю.М., Яхно В.Г. Автоволновые процессы / под ред. Д.С. Чернавского. М.: Наука, 1987.
4. Кузнецов Ю.А. Одномерные сепаратрисы системы обыкновенных дифференциальных уравнений, зависящих от параметров // Алгоритмы и программы на ФОРТРАНе: Материалы по математическому обеспечению ЭВМ. Вып. 8. Пущино: НИВЦ АН СССР, 1983.
5. Коган Л.В. Применение вспомогательных отображений к отысканию инвариантных многообразий: Автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук. Горький: ГГУ, 1990; Его же. О некоторых приемах численного построения инвариантных многообразий динамических систем // Динамика систем: Межвуз. сб. Горький: ГГУ, 1980. С. 121.
6. Кузнецов Ю.А., Панфилов А.В. Стохастические волны в системе Фитц-Хью – Нагумо // Препринт НИВЦ АН СССР. Пущино, 1981.
7. Christov C.I. A Method for Identification of Homoclinic Trajectories // Mathematics and Education in Mathematics: Proc. IV Conf. BMU. Sofia, 1985. P. 571.
8. Афраймович В.С., Некоркин В.И. Метод конечномерных аппроксимаций в теории устойчивости движений цепочечных моделей неограниченных неравновесных сред. Н.Новгород: ННГУ, 1991. 43 с. Деп. в ВИНТИ № 2643.
9. Шильников Л.П. К вопросу о расширенной окрестности грубого состояния равновесия типа седло–фокус // Мат. сб. 1970. Т. 81. № 1. С. 92.
10. Беляков Л.А., Шильников Л.П. Гомоклинические траектории и сложные уединенные волны // Методы качественной теории дифф. уравнений: Межвуз. сб. Горький: ГГУ, 1985. С. 22.
11. Беляков Л.А. О структуре бифуркационных множеств в системах с петлей сепаратрисы седло–фокуса // IX Международная конференция по нелинейным колебаниям: Тез. докл. Киев: Наукова думка, 1984. Т. 2. С. 153.
12. Максимов А.Г., Некоркин В.И. Гетероклинические траектории и фронты сложной формы модели Фитц–Хью – Нагумо // Математическое моделирование. 1990. Т. 2. № 2. С. 129.
13. Максимов А.Г. Фронты и солитонные пакеты в мультистабильных распределенных системах. Автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук. Н.Новгород: Изд-во ННГУ, 1993.
14. Максимов А.Г., Некоркин В.И. Фронты в распределенных джозефсоновских контактах // Изв. вузов. Сер. Радиофизика. 1991. № 8. С. 956.
15. Максимов А.Г., Некоркин В.И., Рабинович М.И. Солитонные «пакеты» и вольт–амперная характеристика протяженных джозефсоновских контактов // Препринт ИПФ РАН. Н.Новгород, 1992.
16. Бароне А., Патерно Дж. Эффект Джозефсона. М.: Мир, 1984.

Нижегородский государственный
университет

Поступила в редакцию 17.12.93
после переработки 22.03.94

ON CONSTRUCTION OF TWO ASYMPTOTIC ORBITS IN THE PHASE SPACE OF DYNAMIC SYSTEMS

A.G. Maksimov

The method of numerical construction of bifurcation multitude corresponding to the existence of two asymptotic orbits in the phase space G of finite dimensional dynamic systems has been suggested. It is based on the analysis of mutual arrangement of one dimensional unstable separatrix and a family of contactless surface in G . The described method sufficiently decreases expenditure of «computer» time and it is rather effective even in the case of complex bifurcation multitudes and two asymptotic orbits. The results of application of the method for particular dynamic systems are given.



Максимов Андрей Геннадьевич – родился в 1961 в г. Запорожье. Окончил радиофизический факультет Горьковского государственного университета. Старший преподаватель кафедры теории колебаний и автоматического регулирования ННГУ. Кандидат физико-математических наук (1993, ННГУ). Область научных интересов: динамические системы, неравновесные среды, бегущие волны, пространственно-временной хаос, синхронизация, теория бифуркаций, качественные методы теории дифференциальных уравнений, численное моделирование.



ГЛОБАЛЬНАЯ ОГРАНИЧЕННОСТЬ РЕШЕНИЙ НЕКОТОРЫХ УРАВНЕНИЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

М.В. Баженов, Е.Ф. Сабаев

Исследуются вопросы глобальной ограниченности решений специального класса уравнений математической физики, описывающих динамику реактора. Доказательство ограниченности основано на использовании теории положительных и монотонных операторов сдвига по траекториям дифференциальных уравнений. Получены оценки на норму решения сверху.

Вопрос о глобальной ограниченности решений уравнений теоретической физики имеет важное, а в некоторых случаях принципиальное значение. Необходимость решения этого вопроса возникает, например, при анализе условий применимости той или иной математической модели для адекватного описания реального физического явления. Исследование проблемы глобальной ограниченности решений играет важную роль при доказательстве наличия в фазовом пространстве рассматриваемой системы притягивающего стохастического множества – странного аттрактора. Наконец, решающее значение этот вопрос приобретает при исследовании условий нормального функционирования различных физических систем.

Традиционным методом решения указанной проблемы является качественный анализ фазового пространства исследуемой системы с привлечением для этих целей метода функционалов Ляпунова. Однако практическое применение такого подхода вызывает значительные трудности, которые в случае распределенных систем часто становятся непреодолимыми. Ниже для доказательства глобальной ограниченности решений используются принципиально иные методы, основанные на построении систем сравнения с последующим привлечением для их анализа теории положительных и монотонных операторов сдвига по траекториям дифференциальных уравнений [1,2]. Рассматривается популярная в теории реакторов модель активной среды

$$\begin{aligned}
 l \frac{\partial \Phi}{\partial t} &= M^2 \nabla^2 \Phi + \Phi p(x, t) + \sum_{i=1}^N \beta_i (\Phi_i - \Phi), \\
 \frac{\partial \Phi_i}{\partial t} &= \lambda_i (\Phi - \Phi_i), \quad i = 1, 2, \dots, N, \\
 \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t} &= A \mathbf{x} + \mathbf{a} \Phi
 \end{aligned} \tag{1}$$

с краевым условием

$$\Phi + \alpha (\nabla \Phi, \mathbf{n}) = 0, \quad \alpha > 0 \tag{2}$$

на границе Γ области Ω . Здесь $l, M^2, \lambda_i, \beta_i$ положительные числа; $\rho(\mathbf{x}, t)$ — непрерывно дифференцируемая функция: $\mathbf{R}^{m+1} \rightarrow \mathbf{R}$; A — матрица $m \times m$ с компонентами, зависящими от радиус-вектора \mathbf{r} ; \mathbf{a} — вектор из \mathbf{R}^m с компонентами, зависящими от \mathbf{r} ; Γ — замкнутая выпуклая поверхность. Решение уравнения (1) будем рассматривать в пространстве непрерывных вектор-функций, заданных на $\Omega + \Gamma = \bar{\Omega}$ с нормой

$$\|(\Phi, \Phi_1, \dots, \Phi_N, x_1, \dots, x_m)\| = \sup_{\mathbf{r} \in \Omega} (|\Phi| + \sum_{i=1}^N |\Phi_i| + \sum_{i=1}^m |x_i|).$$

Наряду с диффузионной моделью (1), (2) рассмотрим сосредоточенную модель

$$\begin{aligned} \dot{n} &= n\rho(\mathbf{x}, t) + \sum_{i=1}^N \beta_i(n_i - n), \\ \dot{n}_i &= \lambda_i(n - n_i), \quad i = 1, \dots, N, \\ \dot{\mathbf{x}} &= A\mathbf{x} + \mathbf{a}n, \end{aligned} \quad (3)$$

определенную в конечномерном евклидовом пространстве \mathbf{R}^{N+m+1} . Здесь элементы матрицы A и вектора \mathbf{a} — постоянные числа. Уравнения (3) могут быть получены из системы (1) с помощью теории возмущений. Заметим, что по физическому смыслу переменные n, n_i, Φ, Φ_i — неотрицательны.

Будем предполагать, что функция $\rho(\mathbf{x}, t)$ удовлетворяет неравенству

$$\rho(\mathbf{x}, t) \leq \rho_0 - f(\mathbf{b}^T \mathbf{x}), \quad (4)$$

где $f(\mathbf{b}^T \mathbf{x})$ — некоторая монотонно возрастающая функция: $\mathbf{R}^m \rightarrow \mathbf{R}$, непрерывно дифференцируемая и удовлетворяющая условию Липшица; \mathbf{b} — вектор из \mathbf{R}^m с постоянными компонентами для модели (3) и компонентами, зависящими от радиус-вектора \mathbf{r} для модели (1), (2).

Существование и единственность решений уравнений (1), (2) и (3) при этих предположениях легко могут быть установлены [3,4]. Кроме того, можно показать, что оператор сдвига по траекториям уравнений (1) и (3) положительный по конусу векторов с неотрицательными компонентами

$$K_+ = \{\mathbf{x}: \mathbf{x} = (x_1, \dots, x_{N+1}), x_i \geq 0, i = 1, \dots, N+1\}, \quad (5)$$

т.е. $\Phi(\mathbf{r}, t) \geq 0, \Phi_i(\mathbf{r}, t) \geq 0 (n(t) \geq 0, n_i(t) \geq 0)$, если $\Phi(\mathbf{r}, 0) \geq 0, \Phi_i(\mathbf{r}, 0) \geq 0 (n(0) \geq 0, n_i(0) \geq 0)$ [1].

Помимо конуса векторов с неотрицательными компонентами K_+ , в дальнейшем нам потребуется еще один конус

$$K(A, \mathbf{b}) = \{\mathbf{x}: \mathbf{b}^T e^{A\tau} \mathbf{x} \geq 0, \tau \geq 0\}. \quad (6)$$

Если $K(A, \mathbf{b})$ содержит хотя бы одну внутреннюю точку, то конус $K(A, \mathbf{b})$ — телесный. Легко показать, что если $\mathbf{x} \in K(A, \mathbf{b})$, то вектора $\exp(A\tau)\mathbf{x}, \tau \geq 0$ также принадлежат конусу. Действительно,

$$\mathbf{b}^T e^{A\tau} e^{A\tau} \mathbf{x} = \mathbf{b}^T e^{A(t+\tau)} \mathbf{x} \geq 0,$$

поскольку $\mathbf{x} \in K(A, \mathbf{b})$ и $t + \tau \geq 0$. Линейный функционал $\sigma = \mathbf{b}^T \mathbf{x}$ принимает на конусе $K(A, \mathbf{b})$ неотрицательные значения.

Рассмотрим уравнение

$$\dot{x} = Ax + an. \quad (7)$$

Реакция уравнения (7) на дельта-функцию ($n(t) \equiv \delta(t)$) может быть представлена в виде $x(t) = \exp(At)a$, $t \geq 0$. Очевидно, что если $a \in K(A, b)$, то $x(t) \in K(A, b)$ для всех $t \geq 0$ и наоборот.

Лемма 1. Пусть в уравнении (7) $a \in \text{int}K(A, b)$, $n(t) \geq 0$ ($t \geq 0$) и матрица A – гурвицева. Тогда для каждого решения уравнения (7) $x(t)$ существует число $T \geq 0$ такое, что решение $x(t) \in K(A, b)$ для всех $t \geq T$.

Доказательство. Представим $x(t)$ в виде

$$x(t) = e^{At} x_0 + \int_0^t e^{A(t-r)} an(r) dr, \quad (8)$$

где $x_0 = x(0)$ и рассмотрим выражение

$$b^T e^{A\tau} x(t) = b^T e^{A(t+\tau)} x_0 + \int_0^t b^T e^{A(t+\tau-r)} an(r) dr. \quad (9)$$

Очевидно, что второе слагаемое в правой части (9) неотрицательно, поскольку $a \in \text{int}K(A, b)$ и $n(t) \geq 0$. Если $x_0 \in K(A, b)$, то и первое слагаемое так же неотрицательно и, следовательно, $x(t) \in K(A, b)$ для всех $t \geq 0$.

Пусть $x_0 \notin K(A, b)$. Спектр матрицы A принадлежит левой полуплоскости, поэтому при $t \rightarrow \infty$ имеем $b^T \exp(At)x_0 \rightarrow 0$, и, начиная с некоторого момента времени $T > 0$, решение (8) принадлежит конусу (6), $x(t) \in K(A, b)$. ■

Лемма 2. Пусть выполнены условия Леммы 1. Тогда для любых достаточно больших моментов времени t и t' таких, что $t \geq t'$ имеет место неравенство

$$n(t') \geq n(t) \exp[-p_0(t - t')], \quad (10)$$

где $n(t)$ – решение уравнения (3), p_0 – максимальный корень уравнения

$$lp + \sum_{i=1}^N \frac{p\beta_i}{p + \lambda_i} = p_0. \quad (11)$$

Доказательство. Согласно Лемме 1 при любых начальных возмущениях $x(0) = x_0$, существует момент времени $T \geq 0$ такой, что условие $b^T x(t) \geq 0$ выполняется для всех $t \geq T$. Поскольку $n(t) \geq 0$ учитывая (4), для $t \geq T$ имеем

$$\begin{aligned} \dot{ln} &\leq np_0 + \sum_{i=1}^N \beta_i(n_i - n), \\ \dot{n}_i &= \lambda_i(n - n_i), \quad i = 1, \dots, N. \end{aligned} \quad (12)$$

Все внедиагональные элементы матрицы в правой части линейной системы (12) неотрицательны. Следовательно, оператор сдвига по траекториям для системы сравнения (12) обладает свойством монотонности по конусу векторов с неотрицательными компонентами K_+ [1].

Выражение (11) дает характеристическое уравнение линейной системы сравнения (12). Тривиальный анализ показывает, что характеристическое уравнение (11) имеет только действительные корни и его максимальный корень p_0 – неотрицателен, если $p_0 \geq 0$. Если $p_0 < 0$, то $p_0 < 0$, т.е. спектр собственных

значений линейной системы сравнения (12) лежит в левой полуплоскости и все решения уравнения (12) стремятся к нулю при $t \rightarrow \infty$. Тогда, в силу монотонности оператора сдвига по траекториям системы (12) и гурвицевости матрицы A , все решения системы (3) при $t \rightarrow \infty$ стремятся к тривиальному решению.

Любое решение системы сравнения (12) $\tilde{n}(t)$ не может расти быстрее чем с показателем p_0 , и, следовательно, для любых t и t' ($t \geq t'$) имеет место неравенство

$$\tilde{n}(t) \leq \tilde{n}(t') \exp[p_0(t - t')]. \quad (13)$$

Отсюда, учитывая монотонность оператора сдвига по траекториям системы сравнения (12), имеем неравенство (10) для всех $t \geq t' \geq T$. ■

Из Леммы 2, в частности, следует, что поскольку решения системы (3) растут не быстрее чем с показателем p_0 , не существует решений, уходящих на бесконечность за конечное время.

Теорема 1. Пусть выполняются следующие условия:

1. Матрица A в уравнении (7) гурвицева;

2. $\rho(\mathbf{x}, t) \leq \rho_0 - f(\mathbf{b}^T \mathbf{x})$, $f(\mathbf{b}^T \mathbf{x})$ – монотонно возрастающая дифференцируемая функция, $f(0) = 0$, $f(\bar{\sigma}) = \rho_0$, $\bar{\sigma} \geq 0$.

3. Реакция уравнения обратной связи (7) на единичный импульс положительна по конусу $K(A, \mathbf{b}) : \mathbf{b}^T \exp(At) \mathbf{a} > 0$ при всех $t > 0$.

Тогда все решения конечномерной системы уравнений (3), ограничены на $[0, \infty)$, а при $t \rightarrow \infty$ существует оценка сверху на норму решения уравнения (3) вида $\max(n, n_1, \dots, n_N) \leq \bar{n}$, где \bar{n} – корень уравнения $\rho = f[\mathbf{b}^T(p_0 I - A)^{-1} \mathbf{a} n]$, p_0 – неотрицательное число.

Доказательство. Рассмотрим уравнение (7). Используя представление (8) решения $\mathbf{x}(t)$ имеем

$$\mathbf{b}^T \mathbf{x}(t) = \mathbf{b}^T e^{At} \mathbf{x}_0 + \int_0^t \mathbf{b}^T e^{A(t-t')} \mathbf{a} n(t') dt'. \quad (14)$$

В силу условия 3 Теоремы $\mathbf{a} \in \text{int} K(A, \mathbf{b})$. Действительно, множество точек из $\text{int} K(A, \mathbf{b})$ определяется неравенством $\mathbf{b}^T \exp(At) \mathbf{x} > 0$ при $t > 0$. Следовательно, можно воспользоваться Леммой 2 и переписать (14) в виде неравенства

$$\begin{aligned} \mathbf{b}^T \mathbf{x}(t) &\geq \mathbf{b}^T \exp(At) \mathbf{x}_0 + \int_0^t \mathbf{b}^T \exp[(A - Ip_0)(t-t')] \mathbf{a} n(t) dt = \\ &= \mathbf{b}^T \exp(At) \mathbf{x}_0 + \mathbf{b}^T (A - Ip_0)^{-1} \exp[(A - Ip_0)t] \mathbf{a} n(t) - \mathbf{b}^T (A - Ip_0)^{-1} \mathbf{a} n(t). \end{aligned} \quad (15)$$

Далее будем предполагать $\rho_0 \geq 0$. Случай $\rho_0 < 0$ тривиален и обсуждался в Лемме 2. Тогда $p_0 \geq 0$ и, поскольку спектр матрицы A принадлежит левой полуплоскости, первые два слагаемых в правой части (15) при $t \rightarrow \infty$ стремятся к нулю как $\exp(-\varepsilon t)$, $\text{Re}[\sigma(A)] \leq -\varepsilon$, $\varepsilon > 0$. Таким образом, при $t \geq T_1(C)$ имеет место оценка

$$\mathbf{b}^T \mathbf{x}(t) \geq \mathbf{b}^T (p_0 I - A)^{-1} \mathbf{a} n(t) - C = \chi(p_0) n(t) - C, \quad (16)$$

где $C > 0$, $T_1(C) \rightarrow \infty$ при $C \rightarrow 0$. Заметим, что $\chi(p_0) > 0$, поскольку $p_0 \geq 0$ и $\mathbf{a} \in \text{int} K(A, \mathbf{b})$.

Воспользуемся условиями (4), (16) и при $t \geq T_1(C)$ найдем

$$\begin{aligned} \dot{n} &\leq n[\rho_0 - f(\chi(p_0) n - C)] + \sum_{i=1}^N \beta_i (n_i - n), \\ \dot{n}_i &= \lambda_i (n - n_i), \quad i = 1, \dots, N. \end{aligned} \quad (17)$$

Система сравнения получается заменой знака \leq знаком $=$.

Недиагональные элементы линейного оператора в правой части (17) неотрицательны и, следовательно, его резольвента является антимонотонным по K_+ оператором. Слагаемое $-nf(\chi(p_0)n)$, не вошедшее в линейный оператор, зависит только от переменной $n(t)$, стоящей в первом уравнении системы (17) на главной диагонали. Поэтому оператор сдвига по траекториям для системы сравнения обладает свойством монотонности по конусу векторов с неотрицательными компонентами K_+ [1]. Используя это утверждение, несложно так же показать, что состояние равновесия

$$n = n_0 = \bar{n}, \quad \rho_0 = f(\chi(p_0)\bar{n} - C) \quad (18)$$

системы сравнения (17) асимптотически устойчиво при любых начальных условиях из K_+ .

Таким образом, решения конечномерной системы (3) ограничены на $[0, \infty)$, а при $t \rightarrow \infty$ переменная $n(t)$ ограничена числом \bar{n}

$$\max(n, n_1, \dots, n_N) \leq \bar{n},$$

удовлетворяющим уравнению (18); причем, если функция f линейная ($\rho(x, t) \leq \rho_0 - \mathbf{b}^T \mathbf{x}$),

$$\bar{n} = \rho_0 / \chi(p_0). \blacksquare$$

Заметим, что ограниченность решений уравнения (7) при условии ограниченности функции $n(t)$ и гурвицевости матрицы A легко устанавливается методом функций Ляпунова.

Предложенное выше доказательство ограниченности решений конечномерной системы (3) легко обобщается на случай нелинейной диффузионной модели (1), (2) в пространстве $\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 \times \mathbf{E}_2 \times \dots \times \mathbf{E}_N$, где \mathbf{E}_i — банахово пространство, образованное совокупностью непрерывных скалярных функций, заданных на $\Omega + \Gamma$ с нормой в $\mathbf{C}[\bar{\Omega}]$.

Теорема 2. Пусть выполнены условия Теоремы 1. Тогда все решения уравнений (1), (2) ограничены на $[0, \infty)$, а при $t \rightarrow \infty$ существует оценка сверху на норму решения уравнения (1) вида $\max_{\mathbf{r} \in \Omega} (\Phi, \Phi_1, \dots, \Phi_N) \leq \bar{\Phi}$, где $\bar{\Phi}$ — корень уравнения $\rho = f[\mathbf{b}^T(\bar{\rho}_0 I - A)^{-1} \mathbf{a} \Phi]$; $\bar{\rho}_0$ — неотрицательное число.

Воспользуемся Леммой 1 и условием (4) и для всех $t \geq T \geq 0$ ($T = 0$, если $\mathbf{x}_0 \in K$) рассмотрим систему сравнения

$$l \frac{\partial \Phi}{\partial t} \leq M^2 \nabla^2 \Phi + \Phi \rho_0 + \sum_{i=1}^N \beta_i (\Phi_i - \Phi), \quad (19)$$

$$\frac{\partial \Phi_i}{\partial t} = \lambda_i (\Phi - \Phi_i), \quad i = 1, \dots, N$$

с краевым условием (2) на Γ .

Система сравнения (19) является линейной, $M = \text{const}$, $\rho_0 = \text{const}$, $\beta_i = \text{const}$, $\lambda_i = \text{const}$ и поэтому, разделяя переменные $\Phi(\mathbf{r}, t) = \sum \Phi_0(\mathbf{r}) n(t)$, $\Phi_i(\mathbf{r}, t) = \sum \Phi_0(\mathbf{r}) n_i(t)$, можно перейти к конечномерной системе сравнения для $n(t)$, $n_i(t)$

$$l \dot{n} \leq n(\rho_0 + \lambda_0) + \sum_{i=1}^N \beta_i (n_i - n), \quad (20)$$

$$\dot{n}_i = \lambda_i (n - n_i), \quad i = 1, \dots, N$$

и уравнению для $\Phi_0(\mathbf{r})$

$$M^2 \nabla^2 \Phi_0 = \lambda_0 \Phi_0, \\ (\Phi_0 + \alpha(\nabla \Phi_0, \mathbf{n}))|_{\Gamma} = 0. \quad (21)$$

Здесь в качестве $\bar{\lambda}_0$ выбрано ведущее собственное значение оператора (21).

Конечномерная система сравнения (20) совпадает с системой (12), рассмотренной в Лемме 2. Поэтому, согласно Лемме 2, для всех достаточно больших значений t и t' таких, что $t \geq t' \geq 0$ имеет место неравенство

$$n(t') \geq n(t) \exp[-\bar{\rho}_0(t - t')], \quad (22)$$

где $\bar{\rho}_0$ — максимальный корень уравнения

$$lp + \sum_{i=1}^N \frac{p\beta_i}{p + \lambda_i} = \rho_0 + \bar{\lambda}_0. \quad (23)$$

Заметим, что если $\rho_0 + \bar{\lambda}_0 < 0$, то в силу Леммы 2 тривиальное решение системы (1), (2) $\Phi \equiv \Phi_i \equiv 0$ асимптотически устойчиво в целом. Поэтому далее будем предполагать $\rho_0 + \bar{\lambda}_0 \geq 0$ и, следовательно, $\bar{\rho}_0 \geq 0$.

Используя (22) и повторяя приведенные выше рассуждения, приходим при $t \geq T_1(C)$ к неравенству

$$\mathbf{b}^T \mathbf{x} \geq \chi(\bar{\rho}_0) \Phi - C, \quad C > 0, \quad T_1(C) \rightarrow \infty \quad \text{при } C \rightarrow 0$$

и, следовательно, к системе сравнения

$$l \frac{\partial \Phi}{\partial t} \leq M^2 \nabla^2 \Phi + \Phi[\rho_0 - f(\chi(\bar{\rho}_0) \Phi - C)] + \sum_{i=1}^N \beta_i (\Phi_i - \Phi), \\ \frac{\partial \Phi_i}{\partial t} = \lambda_i (\Phi - \Phi_i), \quad i = 1, \dots, N \quad (24)$$

с краевым условием (2).

Оператор сдвига по траекториям для системы сравнения (24) — монотонный по конусу K_+ вектор-функций $\mathbf{u} = (\Phi, \Phi_1, \dots, \Phi_N)$ с неотрицательными компонентами. Кроме того, можно показать, что стационарное решение $\Phi \equiv \Phi_i \equiv \bar{\Phi}$ системы сравнения (24)

$$M^2 \nabla^2 \bar{\Phi} + \bar{\Phi}[\rho_0 - f(\chi(\bar{\rho}_0) \bar{\Phi} - C)] = 0, \\ (\bar{\Phi} + \alpha(\nabla \bar{\Phi}, \mathbf{n}))|_{\Gamma} = 0 \quad (25)$$

асимптотически устойчиво в целом. В свою очередь функция $\bar{\Phi}$ удовлетворяет неравенству $\bar{\Phi} \leq \bar{\Phi}$, где $\bar{\Phi}$ — число, которое находится из алгебраического уравнения

$$\rho_0 = f(\chi(\bar{\rho}_0) \bar{\Phi} - C). \quad (26)$$

Итак, доказано, что решения системы (1), (2) ограничены, а при $t \rightarrow \infty$ имеет место оценка на норму решения $\max_{\mathbf{r} \in \Omega} (\Phi, \Phi_1, \dots, \Phi_N) \leq \bar{\Phi}$. ■

В заключение отметим, что предложенный в работе подход к анализу глобального поведения нелинейных динамических систем (см. так же [5]) является достаточно универсальным и без каких либо принципиальных затруднений может быть перенесен на другие модели как конечномерные, так и в банаховом пространстве.

Библиографический список

1. *Красносельский М.А.* Оператор сдвига по траекториям дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1966.
2. *Крейн С.Г.* Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве. М.: Наука, 1967.
3. *Сабаев Е.Ф.* Системы сравнения для нелинейных дифференциальных уравнений и их приложения в динамике реакторов. М.: Атомиздат, 1980.
4. *Хартман Ф.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Мир, 1970.
5. *Баженов М.В., Сабаев Е.Ф.* Применение дифференциальных неравенств к доказательству глобальной ограниченности решений одного специального класса уравнений математической физики. Препринт № 338 ИПФ РАН. Нижний Новгород, 1993.

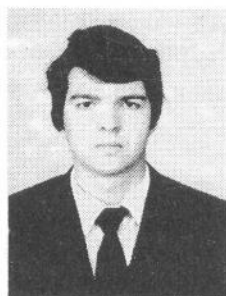
*Институт прикладной физики РАН
Нижегородский университет*

*Поступила в редакцию 17.12.93
после переработки 22.03.94*

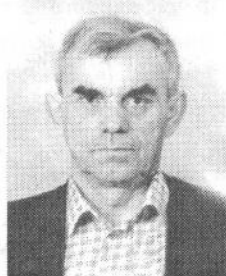
THE GLOBAL BOUNDEDNESS OF SOLUTIONS TO SOME EQUATIONS OF MATHEMATICAL PHYSICS

M.V. Bazhenov, E.F. Sabaev

The problems of global boundedness of solutions to a particular class of the equations of mathematical physics describing reactor dynamics are investigated. The boundedness is proved proceeding from the theory of positive and monotonic operators of translation along trajectories of differential equations. The upper estimates for the solutions are obtained.



Баженов Максим Владимирович, 1967 г. рождения, научный сотрудник Института прикладной физики РАН. В 1989 г. окончил радиофизический факультет Горьковского университета. Область научных интересов: качественная теория дифференциальных уравнений, теория пространственно-временного хаоса и структурообразования в распределенных неравновесных системах. Имеет 17 публикаций в отечественных и иностранных журналах.



Сабаев Евгений Федорович, 1930 г. рождения, доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой теоретической механики Нижегородского государственного университета. Область научных интересов – качественная теория дифференциальных уравнений и динамика ядерных энергетических установок. Имеет 2 монографии и более 80 публикаций в отечественных и зарубежных журналах.



ДИАГНОСТИКА ПРОСТРАНСТВЕННО-ВРЕМЕННОГО БЕСПОРЯДКА

Л.Н.Корзинов, М.И.Рабинович

Если имеется лишь фотография, на которой зафиксирован пространственный беспорядок, представляющий мгновение в жизни распределенной динамической системы, в принципе, с помощью специальной обработки пространственной наблюдаемой возможно отличить стационарный беспорядок от пространственно-временного хаоса и от пространственно-временного шума. Идеи и результаты такой обработки, связанной с вычислением дифференциальной пространственной размерности, обсуждаются в данной статье.

Введение

Зададимся очень простым по постановке вопросом. Возможно ли, анализируя две фотографии, на которых представлено неупорядоченное распределение различных полей в пространстве в некоторый фиксированный момент времени, сказать, какая из фотографий отвечает беспорядку, не меняющемуся во времени («замороженный» беспорядок), а какая соответствует, скажем, распределению поля турбулентности? Другими словами, можно ли, обрабатывая лишь мгновенные снимки неупорядоченных полей, высказаться о наличии у них временной динамики? На первый взгляд ответ очевиден: нет. Действительно, пространственные Фурье-спектры и в том, и в другом случае сплошные, корреляционные функции – спадающие и т.д. И тем не менее, для некоторого класса неупорядоченных полей, а именно, полей, порожденных распределенными динамическими системами (например, уравнениями в частных производных без флуктуационных источников), на поставленный вопрос можно ответить положительно.

Будем для придания конкретности говорить о распределенных динамических системах с одной пространственной координатой и временем. Предположим также, что длина пространственной корреляции много меньше размеров системы. В качестве примеров воспользуемся двумя различными моделями: уравнением Свифта – Хоенберга с жестким режимом возбуждения

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -u + \beta u^2 - u^3 - (k_0^2 + \frac{\partial^2}{\partial x^2})^2 u \quad (1)$$

и комплексным уравнением Гинзбурга – Ландау (CGLE)

$$\frac{\partial a}{\partial t} = a - (1 + i\beta) |a|^2 a + (1 + i\alpha) \frac{\partial^2 a}{\partial x^2}. \quad (2)$$

Первая модель демонстрирует при $t \rightarrow \infty$ устойчивый статический пространственный беспорядок. В зависимости от начальных условий этот беспорядок может быть в среднем однородным по x , локализованным, либо неоднородным [1].

Модель CGLE в определенной области параметров генерирует стационарный пространственно-временной хаос, средние характеристики которого оказываются постоянными по времени и по координате [2,3].

Основная идея настоящей работы заключается в построении по данному мгновенному снимку, то есть заданному в момент времени t_0 распределению поля по координате x , пространственных корреляционных интегралов $C(\varepsilon, d_E)$. По свойствам корреляционного интеграла – локальному наклону и наличию квадратичной компоненты – возможно судить о свойствах временной динамики системы. В частности, для стационарного детерминированного беспорядка определяемая по дифференциальному наклону $\log C(\varepsilon, d_E)$ величина пространственной плотности корреляционной размерности и квадратичная компонента корреляционного интеграла оказываются равными нулю. Для пространственно-временного хаоса они конечны, и для пространственно-временного шума скейлинг отсутствует (плотность размерности и квадратичная компонента не определены).

1. Статический беспорядок

Как известно, система (1) на интервале $0 < x < L$ при произвольно большом L записывается в градиентной форме $\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\delta F}{\delta u}$ с функционалом свободной энергии [1,4]

$$F = \int_0^L \left\{ \frac{u^2}{2} - \beta \frac{u^3}{3} + \frac{u^4}{4} + (k_0^2 - \frac{\partial^2}{\partial x^2}) u l^2 \right\} dx, \quad (3)$$

который может лишь убывать вдоль траектории изменяющегося во времени решения, поскольку

$$\frac{dF}{dt} = - \int_{-L}^L \left| \frac{\partial u}{\partial t} \right|^2 dx \leq 0. \quad (4)$$

Величина F достигает локального экстремума на статических ($\frac{\partial}{\partial t} = 0$) решениях (1). Это означает, что всякий «эволюционно зрелый», то есть установившийся при $t \rightarrow \infty$, пространственный беспорядок должен описываться трансляционной динамической системой

$$\frac{d^4 u}{dx^4} + 2k_0^2 \frac{d^2 u}{dx^2} + u[(1 + k_0^4) - \beta u + u^2] = 0. \quad (5)$$

Как показано Глебским и Лерманом [5], в фазовом пространстве (5) существует гомоклиническая структура. Среди траекторий, принадлежащих этой структуре, содержатся и те, которые отвечают установившемуся при $t \rightarrow \infty$ пространственному беспорядку. На рис. 1 демонстрируется пример такого беспорядка [1].

Поскольку система (5) представляет собой обыкновенное

дифференциальное уравнение 4-го порядка, то пространственная корреляционная размерность распределения $u(x)$, отвечающая установившемуся беспорядку, будет конечной. Кроме того, если учесть, что система (5) гамильтонова, то размерность D^s стохастического множества, соответствующего гомоклинической структуре, должна быть меньше 3. Это подтверждает прямой компьютерный эксперимент.

Для определения пространственной размерности реконструировалось фазовое пространство с размерностью вложения d_E по формуле

$$u_k^s = \{u(x_k, t), u(x_k + l, t), u(x_k + 2l, t), \dots, u(x_k + (d_E - 1)l, t)\}, \quad (6)$$

где u_k^s – векторы, принадлежащие стохастическому множеству в пространстве вложения, l – расстояние между отсчетами при построении вектора u_k^s . Пространственный корреляционный интеграл $C^s(\epsilon, d_E)$ вычисляется как

$$C^s(\epsilon, d_E) = \frac{1}{NM} \sum_{i,j} \theta(\epsilon - \|u_i^s - u_j^s\|). \quad (7)$$

Здесь N – общее число векторов u_k^s в реконструированном фазовом пространстве размерности d_E , M – число опорных векторов, которое выбиралось равным $(0.1-0.3)N$.

На рис. 2 представлена зависимость от $\log \epsilon$ дифференциальной размерности, которую мы определяем как

$$\tilde{D}_2^s(\epsilon, d_E) = \frac{d \log C^s(\epsilon, d_E)}{d \log \epsilon} \quad (8)$$

для беспорядка, изображенного на рис. 1. Наличие линейного участка на этом рисунке дает оценку пространственной размерности D_2^s , а аналогичная зависимость $\log C^s$ от d_E позволяет определить пространственную энтропию

$$K_2^s(\epsilon, d_E) = \log C^s(\epsilon, d_E) - \log C^s(\epsilon, d_E - 1). \quad (9)$$

Мы здесь не указываем переходов к пределам при $\epsilon \rightarrow 0$ и при $d_E \rightarrow \infty$, поскольку в реальных вычислениях ни один из них не достигим. Однако, наличие «плато» конечной ширины по ϵ^1 при увеличении d_E , скажем, от 2 до 10–15 говорит о существовании скейлинга в поведении $K_2^s(\epsilon, d_E)$ и $\tilde{D}_2^s(\epsilon, d_E)$, который и дает возможность оценить интересующие нас величины K_2^s и D_2^s .

Возвращаясь к определению пространственного корреляционного интеграла,

¹ Как правило, оценка размерности и энтропии считаются надежными, если плато шире, чем две степени двойки по ϵ .

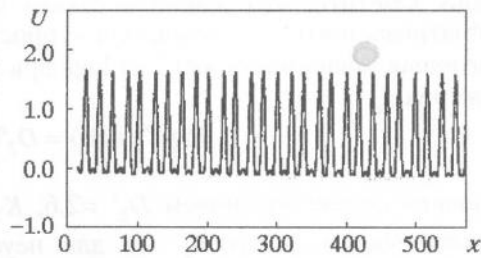


Рис. 1. Решение уравнения (1) при $t \rightarrow \infty$, замороженный беспорядок

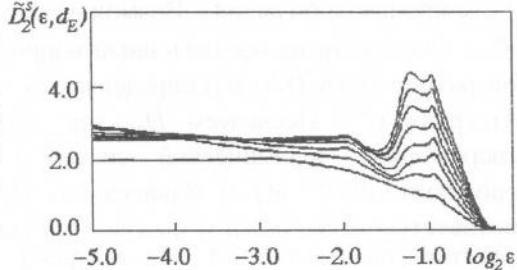


Рис. 2. Дифференциальная размерность $\tilde{D}_2^s(\epsilon, d_E)$ для пространственно-хаотического поля, изображенного на рис. 1; d_E изменяется от 2 до 10

можно заметить, что, как и в случае маломерного временного хаоса, для рассматриваемого статического пространственного беспорядка справедлива следующая зависимость $\log C^s$ от $\log \epsilon$ при уменьшении ϵ и увеличении размерности вложения d_E

$$\log C^s(\epsilon, d_E) = D_2^s \log \epsilon - K_2^s d_E l. \quad (10)$$

В данном случае мы имеем $D_2^s = 2.6$; $K_2^s = 0.28$. Естественной представляется попытка ввести D_2^s и K_2^s и для неустановившегося беспорядка, например, определить эти величины для последовательности пространственных распределений в различные моменты времени. Это, в частности, позволит описать процесс формирования устойчивого беспорядка. Подобная идея была реализована в [1], где было установлено, что в процессе формирования беспорядка пространственная энтропия K_2^s увеличивается от нуля до положительного значения

$$K_2^s(t \rightarrow \infty) = 0.28.$$

2. Характеристики пространственно-временного хаоса в «больших» системах

Если пространственно-временной хаос в распределенной системе является в некотором смысле развитым, то большинство степеней свободы неравновесной среды не связаны алгебраически друг с другом. Размерность такого хаоса, вычисленная как из временного ряда (по осциллограмме, снятой в одной точке пространства), так и из пространственной наблюдаемой (по мгновенному снимку), может быть весьма велика и, вообще говоря, должна расти при увеличении размеров системы. Таким образом, наиболее трудной задачей представляется научиться отличать мгновенные снимки пространственно-временного хаоса не от статического беспорядка, размерность которого конечна, а от пространственно-временного шума, размерность мгновенного снимка которого также произвольно велика. Возможно ли это?

Для ответа на поставленный вопрос рассмотрим свойства дифференциальной размерности $\tilde{D}_2^s(\epsilon, d_E)$, определяемой по пространственному корреляционному интегралу (7). Исследуем \tilde{D}_2^s для пространственной наблюдаемой (рис. 3), генерируемой динамической системой (2) с периодическими граничными условиями: $u(0, t) = u(L, t)$. Зависимость \tilde{D}_2^s от d_E и $\log \epsilon$ для мгновенного снимка, соответствующего режиму фазовой турбулентности в модели, описываемой CGLE, представлена на рис. 4. Из графика видно, что при фиксированном ϵ

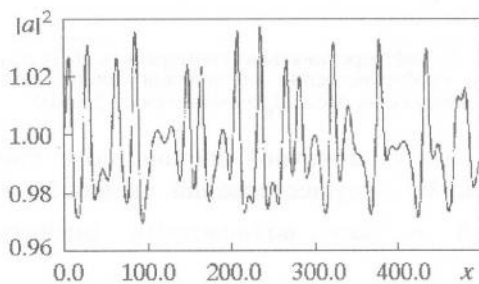


Рис. 3. Решение уравнения (2), отвечающая стационарному пространственно-временному хаосу при значении параметров $\beta = -1.3$, $\alpha = 1.15$

$\tilde{D}_2^s(\epsilon, d_E)$ растет линейно с увеличением d_E (то есть $\tilde{D}_2^s(\epsilon, d_E) - \tilde{D}_2^s(\epsilon, d_E - 1) = f(l)$, рис. 5), а при фиксированном d_E линейно убывает с увеличением $\log \epsilon$ (то есть $\partial \tilde{D}_2^s(\epsilon, d_E) / \partial \log \epsilon = \text{const} = q^s$, (рис. 6)).

Таким образом, как следует из эксперимента, функцию \tilde{D}_2^s можно представить в виде

$$\tilde{D}_2^s(\epsilon, d_E) = -q^s \log \epsilon + f(l) d_E + A^s, \quad (11)$$

где q^s , A^s – константы, $f(l)$ – некоторая

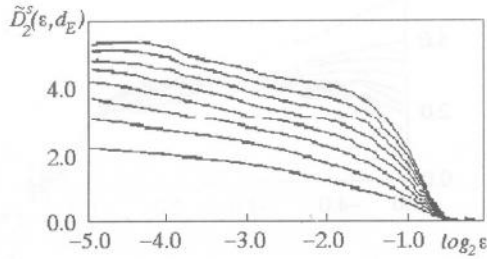


Рис. 4. Дифференциальная размерность \tilde{D}_2^s , вычисленная для пространственного распределения поля, взятого в один момент времени из стационарного пространственно-временного хаоса, изображенного на рис. 3; d_E изменяется от 2 до 10

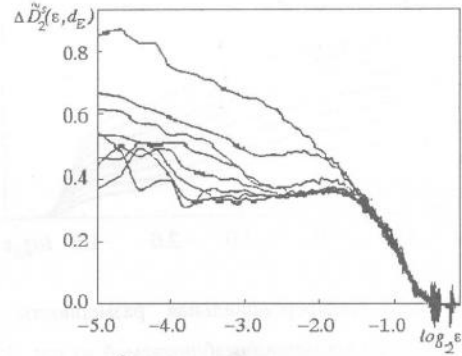


Рис. 5. $\Delta \tilde{D}_2^s(\epsilon, d_E) = \tilde{D}_2^s(\epsilon, d_E) - \tilde{D}_2^s(\epsilon, d_E - 1)$. Насыщение на графике при увеличении d_E от 2 до 9 происходит на уровне $\tilde{D}_2^s(\epsilon, d_E) = 0.35$

функция от l . Поскольку $\tilde{D}_2^s(\epsilon, d_E)$ растет линейно с увеличением d_E (или при увеличении пространственной длины $\Lambda = d_E l$ подсистемы), естественно предположить, что $f(l)$ должна быть также линейной функцией: $f(l) = \rho_2 l$, где ρ_2 назовем плотностью размерности D_2^s . Тогда выражение для $\tilde{D}_2^s(\epsilon, d_E)$ можно записать в виде

$$\tilde{D}_2^s(\epsilon, d_E) = -q^s \log \epsilon + \rho_2 l d_E + A^s. \quad (12)$$

Заметим, что для временной дифференциальной размерности справедлива аналогичная формула (см. рис. 7, 8, 9, а также [2,3])

$$\tilde{D}_2^t(\epsilon, d_E) = -q^t \log \epsilon + \sigma_2 t d_E + A^t, \quad (13)$$

где σ_2 — плотность «временной» размерности, t — время задержки между соседними отсчетами, q^t, A^t — константы.

Итак, увеличение длины подсистемы $\Lambda = d_E l$ приводит к увеличению дифференциальной размерности. С другой стороны, такой же эффект дает увеличение разрешения, то есть уменьшение ϵ . Последнее обстоятельство, по-видимому, связано с увеличением временной памяти системы (то есть длины подсистемы по времени) по мере уменьшения ϵ . Действительно, предыстория поведения системы, демонстрирующей пространственно-временной хаос, накладывает отпечаток на свойства мгновенного снимка, полученного в данный момент времени. Причем, чем выше степень разрешения при обработке мгновенного снимка, тем более далекое прошлое проявляется в нем. Или, более формально: если мы знаем состояние системы длины Λ с точностью ϵ , то нам известно [3] количество информации

$$I_0 = -\rho_2 \Lambda \log \epsilon.$$

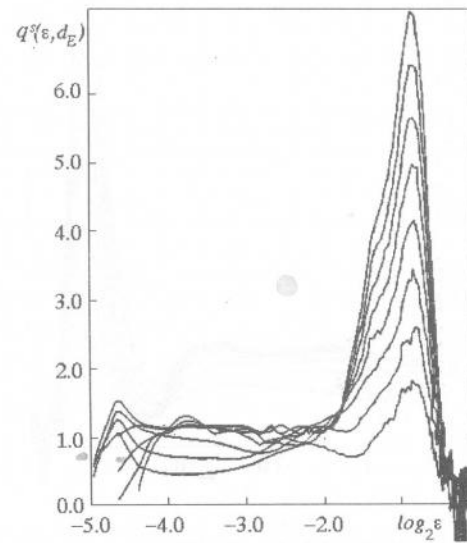


Рис. 6. Квадратичная компонента пространственного корреляционного интеграла $q^s(\epsilon, d_E) = \partial \tilde{D}_2^s(\epsilon, d_E) / \partial \log \epsilon$; d_E изменяется от 2 до 10

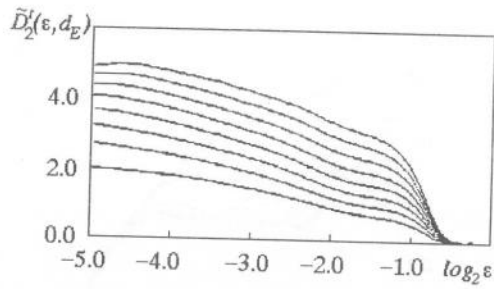


Рис. 7. Дифференциальная размерность $\tilde{D}_2^s(\epsilon, d_E)$ для временной наблюдаемой из рис. 3; d_E изменяется от 2 до 10

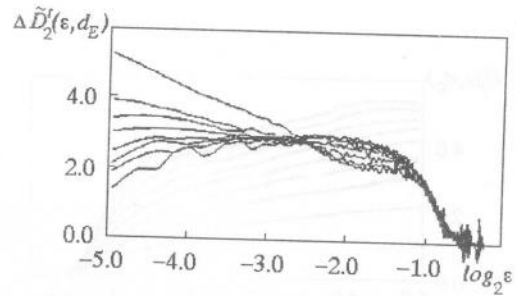


Рис. 8. Зависимость $\sigma_2(\epsilon, d_E)t = \Delta \tilde{D}_2^s(\epsilon, d_E) = \tilde{D}_2^s(\epsilon, d_E) - \tilde{D}_2^s(\epsilon, d_E - 1)$. Насыщение на графике при увеличении d_E от 2 до 9 происходит на уровне $\sigma_2 t = 0.33$

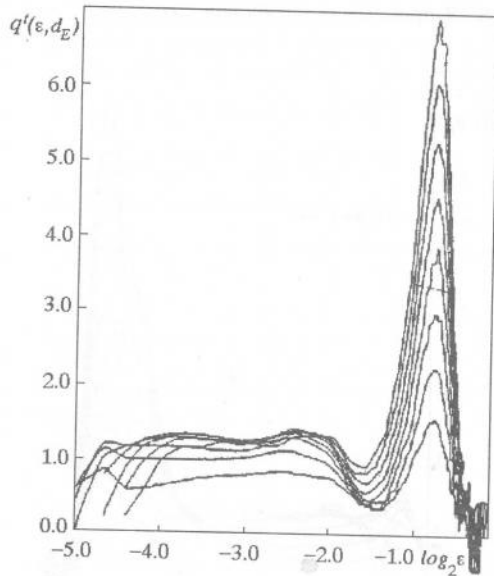


Рис. 9. Квадратичная компонента временного корреляционного интеграла $q^s(\epsilon, d_E) = \partial \tilde{D}_2^s(\epsilon, d_E) / \partial \log_2 \epsilon$, d_E изменяется от 2 до 10

Поскольку энтропия системы положительна, то через время t мы будем знать о системе уже меньше: количество информации определяется выражением

$$I(t) = I_0 - K_2 t, \quad (14)$$

где K_2 — энтропия системы длины Λ . Как следует из эксперимента [3], энтропия растет линейно с ростом Λ . Это обстоятельство дает возможность определить плотность энтропии: $\eta_2 = K_2 / \Lambda$. В этих обозначениях (14) можно записать в виде

$$I(t) = -\rho_2 \Lambda \log \epsilon - \eta_2 \Lambda t.$$

Отсюда следует, что время T_{\max} , при котором мы уже не будем иметь никакой информации о состоянии системы ($I(T_{\max}) = 0$) вычисляется по формуле

$$T_{\max} = (\rho_2 / \eta_2) \log(1/\epsilon). \quad (15)$$

С другой стороны, можно предположить, что в динамической системе значение T_{\max} пропорционально времени корреляции системы τ_c и точности задания ее координат при $t = 0$, то есть $\log(1/\epsilon)$

$$T_{\max} \sim \tau_c \log(1/\epsilon).$$

По определению

$$\tau_c = c \rho_2 / \eta_2, \quad (16)$$

где c — константа, подлежащая вычислению. Если учесть, что система демонстрирует установившийся пространственно-временной хаос, то есть находится на аттракторе, то сумма положительных ляпуновских экспонент равна сумме отрицательных. Это эквивалентно тому, что потеря информации о состоянии системы будет происходить с одинаковой скоростью как при

увеличении t , так и при уменьшении t . Другими словами, система «хранит» информацию от $-T_{\max}$ до T_{\max} , таким образом «время памяти» равно не T_{\max} , а $2T_{\max}$.

Имея это в виду, корреляционный интеграл вычисленный по пространственному распределению, представляющему собой «мгновение» в жизни пространственно-временного хаоса, можно записать в форме, аналогичной (10), если учесть, что D_2^s и K_2^s пропорциональны «временной памяти» или «временной длине» подсистемы $2T_{\max}$: $D_2^s \sim 2T_{\max}$ и $K_2^s \sim 2T_{\max}$. Соответствующие коэффициенты пропорциональности естественно назвать плотностью временной размерности σ_2 (то есть $D_2^s = 2\sigma_2 T_{\max}$) и плотностью пространственной энтропии γ_2 (то есть $K_2^s = 2\gamma_2 T_{\max}$). Тогда для $\log C^s(\epsilon, d_E)$ выражение (10) можно представить в форме

$$\log C^s(\epsilon, d_E) = -\sigma_2 \tau_c (\log \epsilon)^2 + 2\gamma_2 \tau_c l d_E \log \epsilon + A^s \log \epsilon + B^s. \quad (17)$$

Отсюда легко найти выражение для дифференциальной размерности $\tilde{D}_2^s(\epsilon, d_E)$ пространственного корреляционного интеграла

$$\tilde{D}_2^s(\epsilon, d_E) = -2\sigma_2 \tau_c \log \epsilon + 2\gamma_2 \tau_c l d_E + A^s. \quad (18)$$

Выражение (17) аналогично выражению для временного корреляционного интеграла, которое обсуждалось в [3]

$$\log C^t(\epsilon, d_E) = -\rho_2 l_c (\log \epsilon)^2 + 2\eta_2 l_c t d_E \log \epsilon + A^t \log \epsilon + B^t, \quad (19)$$

здесь t – время задержки между соседними отсчетами, A^t и B^t – константы. По аналогии с определением (16) можно ввести и длину корреляции l_c

$$l_c \sim \sigma_2 / \gamma_2. \quad (20)$$

Кроме соотношений (16) и (20) должны выполняться также равенства

$$\begin{aligned} 2\eta_2 l_c &= \sigma_2, \\ 2\gamma_2 \tau_c &= \rho_2, \end{aligned} \quad (21)$$

где первое следует из (12) и (18), а второе – из аналогичных выражений для временного корреляционного интеграла (13) и (19). Учитывая определения l_c и τ_c (21) можно записать в виде

$$\begin{cases} 2c \eta_2 / \gamma_2 = 1, \\ 2c \gamma_2 / \eta_2 = 1. \end{cases}$$

Отсюда находим, что $c = 1/2$ и $\eta_2 = \gamma_2$. Это означает, что вновь введенная величина γ_2 , плотность пространственной энтропии, будет в точности равна η_2 , плотности «обычной» энтропии. Интересно заметить, что по размерности эти величины одинаковы и в некотором смысле «двумерны»

$$[\eta_2] = [\gamma_2] = \frac{\text{бит}}{\text{см} \cdot \text{с}},$$

то есть означают производство информации на единицу длины за единицу времени. Естественно ожидать, что такая величина единственна для каждой конкретной системы, и именно поэтому $\eta_2 = \gamma_2$.

Кроме плотности энтропии существуют еще две величины, характеризующие пространственно-временной беспорядок, плотность пространственной размерности ρ_2 и плотность временной размерности σ_2 . Эти

величины «одномерны»

$$[\rho_2] = \frac{\text{бит}}{\text{см}}, \quad [\sigma_2] = \frac{\text{бит}}{\text{с}}$$

и характеризуют скорость производства беспорядка по пространственной координате и по времени. Их отношение, как было показано в [3], равно скорости распространения информации в среде

$$\sigma_2 / \rho_2 = V.$$

Таким образом, можно выделить три величины, полностью характеризующие локальные свойства пространственно-временного хаоса: это плотности временной и пространственной размерностей σ_2 и ρ_2 и плотность энтропии η_2 . Все остальные величины, такие как время и длина корреляции, скорость распространения информации выражаются через ρ_2 , σ_2 и η_2 посредством формул (16), (20), (21).

3. Компьютерный эксперимент

Для анализа пространственного и пространственно-временного хаоса использовалось прямое интегрирование уравнений (1) и (2) с периодическими граничными условиями: $u(0,t) = u(L,t)$. Вычисления проводились по схеме операторной экспоненты, обеспечивающей большую точность, чем сеточные схемы, что позволило увеличить шаг по времени до 0.2. Физическая длина системы L^2 выбиралась настолько большой, насколько это требовалось для надежного вычисления размерностей. Большинство вычислений дифференциальной размерности были проведены при числе гармоник $N = 32768$. В этом случае все характеристики пространственного и пространственно-временного хаоса не изменялись при увеличении длины резонатора до $N = 262114$, что свидетельствует о достаточном количестве гармоник $N = 32768$.

В численном эксперименте с моделью CGLE выход на режим установившейся турбулентности наблюдался из состояния близкого к тривиальному, которому отвечает режим малых флуктуаций, вызванных ошибкой представления числа в машине (начальные условия примерно 10^{-15}).

Установление режима пространственного беспорядка в модели (1) наблюдалось при начальных условиях вида

$$u(x) = 1.8\sin(kx) + \epsilon f(x), \quad (22)$$

где $k = 0.1$ соответствует неустойчивой периодической решетке (детали см. в [1]), $f(x)$ – случайная функция с равномерным распределением в интервале $[0,1]$, $\epsilon \sim 0.1$ – малый параметр.

Решение уравнения (1), представленное на рис. 1, было получено для $t = 1000$, хотя вид распределения поля не меняется уже при $t \sim 100$. Поэтому можно утверждать, что решение, представленное на рис. 1, соответствует статическому беспорядку при $t \rightarrow \infty$ и, следовательно, описывается обыкновенным дифференциальным уравнением (5). Расстояния между соседними отсчетами l в формуле (6), определенное из критерия первого минимума взаимной информации [7], оказалось равным длине $l = 0.6$. Для вычисления корреляционного интеграла было взято $N = 32768$ и $M = 10000$ (см. (7)).

Соответственно, для модели (2) параметры вычислений корреляционного интеграла были следующие: $l = 0.6$, $N = 32768$; $M = 10000$. Как следует из рис. 4, дифференциальная размерность не насыщается при увеличении d_E . В этом

² Эта длина связана с числом гармоник N соотношением $L = 0.2 \pi N$.

заклучается основное отличие детерминированного хаоса в распределенных системах от маломерного хаоса в сосредоточенных системах. Кроме того, дифференциальная размерность при уменьшении $\log \epsilon$ растет линейно с показателем q^s , что говорит об универсальности свойств реконструированного хаотического множества. Таким образом, насыщение происходит не на графиках зависимости дифференциальной размерности от $\log \epsilon$

и d_E , а на графиках $\Delta \tilde{D}_2^s(\epsilon, d_E)$ и $q^s(\epsilon, d_E)$ от $\log \epsilon$ и d_E .

В случае, когда корреляционный интеграл строится по мгновенному снимку, насыщение на этих графиках при увеличении d_E происходит при значениях $\rho_2 l = 0.35$ и $q^s = 1.2$ соответственно (см. (12) и (17)). Учитывая, что $l = 0.6$, получаем: $\rho_2 = 0.35/l \approx 0.58$ (см. рис.5), и $q^s = \sigma_2 \tau_c = 1.2$ (см. рис.6)

Таким образом, имея лишь один мгновенный снимок, мы уже можем определить, что $\sigma_2 > 0$ (очевидно, что τ_c конечно), и, следовательно, система демонстрирует хаотическое поведение во времени. Для пространственного хаоса на рис. 1, напротив, $q^s = 0$, а значит и $\sigma_2 = 0$, что доказывает статичность такого беспорядка.

Анализируя поведение квадратичной компоненты в зависимости от $\log \epsilon$ нетрудно отличить детерминированный пространственно-временной хаос от шумового поля (рис. 10, 11, 12). Как видно из рис. 6, в случае детерминированного пространственно-временного хаоса q^s имеет постоянное значение в довольно широком интервале ϵ . Для шумового поля значения q^s не постоянны при изменении ϵ (см. рис.12).

Анализ поведения квадратичной компоненты q^s позволяет выделить следующие характерные случаи: 1) $q^s(\epsilon, d_E) = 0$ – статический пространственный беспорядок; 2) $q^s(\epsilon, d_E) = \text{const} > 0$ – детерминированный пространственно-временной хаос, для такого режима $\sigma_2 \tau_c = q^s$ и 3) наконец, когда зависимость $q^s(\epsilon, d_E)$ от $\log \epsilon$ не имеет плато. Как нам представляется, подобный мгновенный снимок отвечает пространственно-временному шуму, не имеющему динамической природы.

Дискуссия

Как выяснилось в самое последнее время, распознать, какой тип поведения демонстрирует исследуемая распределенная система, можно располагая временной последовательностью, полученной лишь в одной точке пространства сколь угодно «большой» системы [2]. Это выглядит удивительно и даже вызывало определенный скептицизм [7]. Однако, сейчас уже имеются убедительные результаты, доказывающие справедливость этого утверждения. Ключевой характеристикой для подобного рода диагностики может служить плотность размерности D_2^s , вычисленной по временной последовательности с помощью алгоритма Грассбергера – Прокаччия. При этом обычно предполагается, что размерность D_2^s растет линейно с ростом L для одномерной распределенной

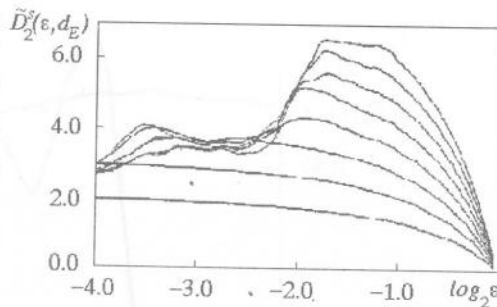


Рис.10. Дифференциальная размерность $\tilde{D}_2^s(\epsilon, d_E)$ для шума, равномерно распределенного в интервале $[0,1]$; d_E изменяется от 2 до 10

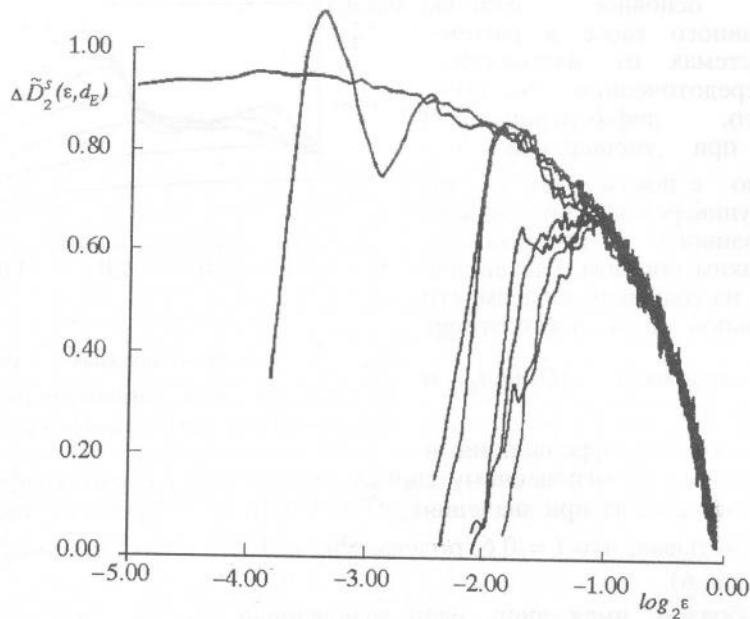


Рис.11. Зависимость $\rho_2(\epsilon, d_E)l = \Delta \tilde{D}_2^s(\epsilon, d_E) = \tilde{D}_2^s(\epsilon, d_E) - \tilde{D}_2^s(\epsilon, d_E - 1)$ для шумового поля; d_E изменяется от 2 до 9

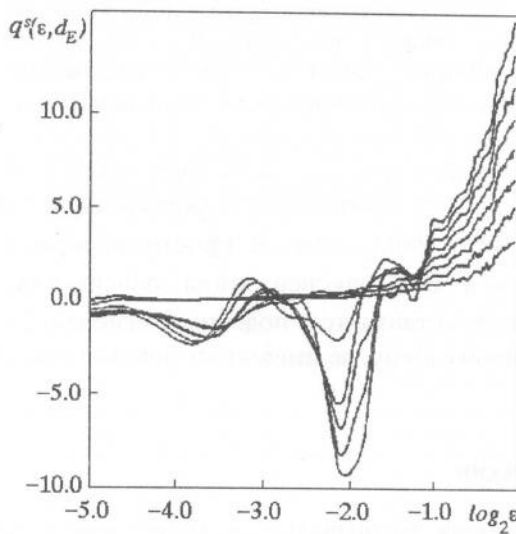


Рис. 12. Квадратичная компонента пространственного корреляционного интеграла

$q^s(\epsilon, d_E) = \tilde{D}_2^s(\epsilon, d_E) / \partial \log \epsilon$ для шумового поля; d_E изменяется от 2 до 10

[9], и т.д. При такой динамике мы будем иметь $\rho_2 = q^s = 0$.

2. Поведение системы регулярно в пространстве и хаотично во времени

системы [3], то есть $\rho_2 = \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{D_2^s}{L}$.

Можно ли решить аналогичную задачу, опираясь не на анализ временной последовательности, а на анализ лишь пространственной последовательности, то есть имея в распоряжении лишь фотографию, один мгновенный снимок поля? Как мы показали выше, это действительно возможно, если опираться на характеристики ρ_2 и η_2 .

Если не говорить о деталях, то многообразие динамики распределенных систем можно представить следующей приближенной схемой:

1. Поведение системы регулярно в пространстве и во времени – структуры в виде кристаллов или квазикристаллов, периодические решения в виде спиральных волн, стационарные волны

например, хаос в течении Колмогорова³. В этом случае получим $\rho_2 = 0$, $q^s > 0$.

3. Наблюдается пространственный беспорядок, поведение же во времени регулярно. Простейший случай, когда пространственная картина вообще не меняется во времени – замороженный беспорядок или стационарные хаотические волны. Однако имеются примеры, когда устойчив и пространственный беспорядок, периодически осциллирующий во времени⁴. При этом мы должны получить $\rho_2 > 0$, $q^s = 0$.

4. Поведение нерегулярно и во времени, и в пространстве. Сюда относится пространственно–временной хаос структур и развитая турбулентность. В этом случае $\rho_2 > 0$, $q^s > 0$.

Проблему разделения с помощью анализа характеристик мгновенного снимка, скажем, турбулентности дефектов и развитой турбулентности, характеризующейся наличием инерционного интервала, еще предстоит решить. Добавим, что весьма интересным и многообещающим представляется обобщение результатов, полученных в данной работе на 2-х и 3-х мерные распределенные системы.

Авторы признательны Л.Ш. Цимрингу, инициировавшему данную работу своими исследованиями по скейлингу временной наблюдаемой [2], а также И.М. Старобинцу, М.В. Баженову и Л.Ю. Глебскому за плодотворные дискуссии.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 93-02-15424).

Библиографический список

1. Gorshkov K.A., Korzinov L.N., Rabinovich M.I., Tsimring L.Sh. Random pinning of localized states and the birth of spatial disorder within gradient models // J.Stat.Physics. 1994. Vol. 74, N 5/6. P. 1033.
2. Tsimring L.Sh. Nested strange attractors and universality of spatio-temporal chaos // Phys.Rev.E. 1993. Vol. 48, № 5. P. 3446.
3. Grassberger P. Information Content and Predictability of Lumped and Distributed Dynamical Systems // Physica Scripta. 1987. Vol. 40. P. 346.
4. Bauer M., Heng H., Martinssen W. Characterization of spatio-temporal chaos from time series // Phys.Rev.Lett. 1993. Vol. 71 (4). P. 521.
5. Глебский Л.Ю., Лерман Л.М. Стационарные самолокализованные решения обобщенного Свифта – Хоеенберга: Тез. докл. III конференции «Нелинейные колебания механических систем». НИИ ПМК ННГУ, сентябрь 1993 г.
6. Grassberger P., Procaccia I. Measuring the strangeness of the strange attractors // Physica D. 1983. Vol. 9. P.141.
7. Fraser A.M., Swinney H.L. Independent coordinates for strange attractors from mutual information // Phys.Rev. A. 1986. Vol. 33. P. 1134.
8. Torcini A, Politi A., Puccioni G.P., D'Alessandro G. Fractal dimension of spatially extended systems // Physica D. 1991. Vol. 53. P. 85.
9. Gaponov-Grekhov A.V., Rabinovich M.I. Nonlinearities in Action. Berlin-Heidelberg: Springer-Verlag, 1992.

Институт прикладной физики РАН
Нижегород

Поступила в редакцию 17.01.94
после переработки 29.04.94

³ В больших системах подобные решения, как правило, существуют в весьма узкой области параметров.

⁴ Обычно это происходит в результате синхронизации частот и фаз структур, формирующих беспорядок.

THE DIAGNOSTICS OF SPATIO-TEMPORAL DISORDER

L.N.Korzinov, M.I.Rabinovich

A single photo of spatial disorder that is merely an instant in the life of an extended dynamical system and a novel technique for processing of a space series may, in principle, enable one to distinguish between stationary disorder, spatio-temporal chaos and spatio-temporal noise. The ideas and results of such a processing are presented in this paper.



Корзинов Лев Николаевич закончил Нижегородский государственный университет в 1992 году. В настоящее время работает в Институте прикладной физики РАН младшим научным сотрудником. Область научных интересов – нелинейная динамика распределенных систем, пространственно-временной хаос. Имеет 7 публикаций в отечественных и зарубежных изданиях.



Editorial board of the journal «Applied nonlinear dynamics» plans to publish special issue on the problems of the investigation of the fluctuation influence onto dynamics of nonlinear systems. The following basic sections are suggested:

- influence of fluctuations onto bifurcations and evolution of nonlinear systems with complicated dynamics;
- nonlinear Brownian motion;
- stochastic resonance from auto-oscillatory and other nonlinear systems;
- diagnostics of nonlinear systems using statistic characteristics calculated from the experimental data.

The editor of this issue is professor *Vadim S. Anishchenko*.

Those who wish to participate in this special issue are invited to inform the editorial board about their intentions and submit the papers to the editorial office not later than 1 December 1994.





ХАОТИЧЕСКИЙ РЕЖИМ И СИНХРОННЫЙ ОТКЛИК В АВТОГЕНЕРАТОРЕ, УПРАВЛЯЕМОМ ПО ЧАСТОТЕ

А.А.Алексеев, А.К.Козлов, В.Д.Шалфеев

Рассмотрена нелинейная обработка сложных сигналов с использованием эффектов хаотической генерации и синхронного отклика на основе модели автогенератора, имеющего локальную цепь управления по частоте. Определены условия работоспособности системы.

1. Генерации хаотических сигналов посвящена обширная литература. Однако специфические свойства таких колебаний и ожидаемый эффект от их использования по-прежнему оставляют эти вопросы в ряду весьма актуальных. Установление новых свойств систем, обладающих хаотической динамикой, в частности, возможности стохастической синхронизации диссипативных систем [1], стимулировало прикладные исследования в этой области [2–4]. Кроме того, появился определенный интерес к задачам синхронной обработки хаотических сигналов. Сравнительно недавно было предложено новое решение [5], отличающееся от вынужденной и взаимной синхронизации более высокой надежностью, обусловленной тем, что обработка производится с помощью устойчивых систем отклика. Преимущества синхронного хаотического отклика сделали актуальными задачи управления, передачи, фильтрации в условиях детерминированного хаоса и дали новый толчок экспериментальным и теоретическим работам в этих областях [6–10]. В данной работе решение задачи о скрытой передаче сигнала с использованием эффектов хаотической генерации и синхронного отклика [8–10] рассматривается на основе модели автогенератора, имеющего локальную цепь управления по частоте [11,12]. Наличие цепи управления по частоте существенно расширяет динамические возможности генератора, допуская большое разнообразие регулярных и хаотических режимов, и позволяет осуществлять эффективное управление режимами работы с помощью варьируемых параметров.

2. Рассмотрим автоколебательную систему, представляющую собой автогенератор с петлей обратной связи управления по частоте. Пользуясь автономной математической моделью [11] этой системы, можно записать уравнения, описывающие динамику процессов в ней при внешнем воздействии, в следующем виде:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y + s(t), & \dot{y} &= z, \\ \mu \dot{z} &= \gamma - x - \Phi(x) - \lambda y - z + s(t), \end{aligned} \quad (1)$$

$$\Phi(x) = \frac{2\beta x}{1 + (\beta x)^2},$$

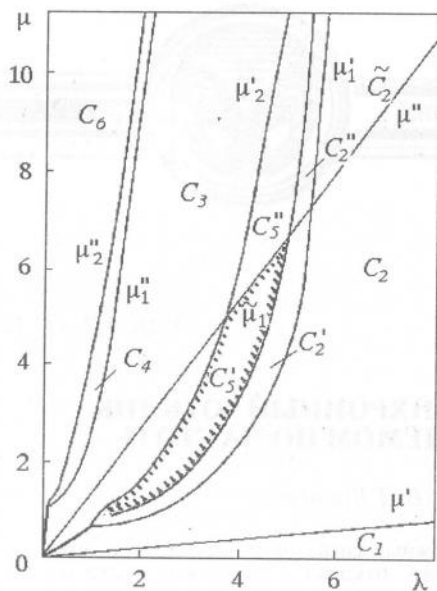


Рис. 1. Бифуркационная диаграмма режимов системы (1) в плоскости параметров μ, λ . Выделена рабочая область C_5'

ответствующие режимам с малой и большой остаточной расстройкой частот управляемого генератора и опорного сигнала. Особый интерес представляют режимы нерегулярных автоколебаний. Для системы (1) им отвечают значения параметров μ и λ из областей C_5', C_5'' и C_4 . В области C_4 имеют место хаотические автоколебания текущей расстройки частот управляемого генератора и опорного сигнала в окрестности режима неэффективной синхронизации A_3 . Странный аттрактор P_s'' , существующий в фазовом пространстве системы (1), в этом случае является единственным притягивающим множеством, так как режим эффективной синхронизации A_1 – неустойчив. При разрушении P_s'' на линии μ_2'' все траектории системы уходят на бесконечность – область C_6 . На рис. 2 приведены проекция аттрактора P_s' системы (1) на плоскость (x, y) и спектр мощности сигнала для значений параметров $\lambda = 3, \mu = 1.5$ из области C_5' . В данном случае, рождение странного аттрактора происходит по сценарию удвоения периода автоколебаний в окрестности режима эффективной синхронизации A_1 . Аттрактор имеет однопетлевую структуру и при увеличении параметра μ разрушается на линии μ_2' . Механизм разрушения, возможно, связан с бифуркацией петли сепаратрисы седло–фокуса A_2 с положительной седловой величиной [13]. После чего режим A_1 становится неустойчивым, и единственным аттрактором системы является режим A_3 (область C_5). В области C_5'' в окрестности A_3 существует устойчивый предельный цикл, мягко рождающийся на прямой μ'' . В остальной динамике в C_5'' аналогична динамике в C_5' .

Таким образом, система (1) в автономном случае ($s(t) \equiv 0$) обладает разными аттракторами, в том числе хаотического типа. Области регулярной и хаотической динамики достаточно протяженны, что дает некоторую свободу в выборе

где x, y, z – безразмерные переменные, $\mu, \lambda, \gamma, \beta$ – безразмерные параметры, $s(t)$ – информационный сигнал. В работе [12] методами аналогового и численного моделирования изучались возможные регулярные и хаотические режимы, реализуемые в системе (1) в автономном случае ($s(t) \equiv 0$). На рис. 1 приведена бифуркационная диаграмма в плоскости параметров μ, λ ; параметры γ и β – фиксированы: $\gamma = 1, \beta = 8$. Отмечено существование областей, отвечающих как регулярной (состояния равновесия, предельные циклы), так и хаотической (странные аттракторы) динамике. Устойчивые состояния равновесия отвечают режимам синхронизации; при этом в случае двух устойчивых состояний равновесия различают режимы эффективной и неэффективной синхронизации, соот-

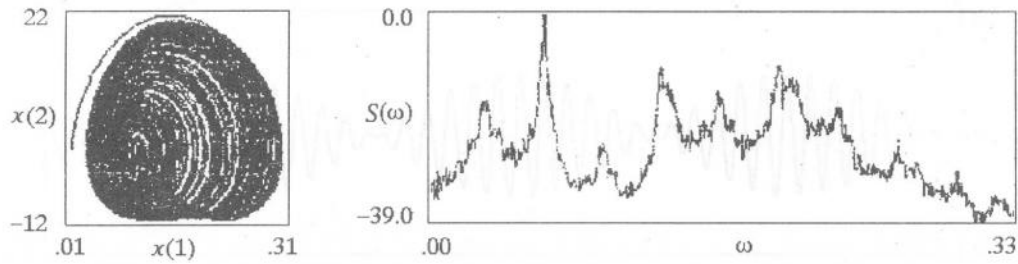


Рис. 2. Проекция аттрактора P_s' системы (1) ($x(1) = x$, $x(2) = y$) и спектр мощности сигнала для $\lambda = 3$, $\mu = 1.5$ (область C_5')

параметров системы и обеспечивает возможность управления характеристиками режима заданного типа. Наличие непрерывной составляющей в спектре хаотического процесса (см. рис. 2) приводит к мысли об использовании его для маскировки сообщения $s(t)$ при передаче. В этом случае основной задачей приема будет выделение информационной компоненты из хаоса.

3. Рассмотрим способ выделения сигнала из хаоса, использующий явление синхронного отклика, и в этой связи обсудим возможности применения хаотических режимов системы (1). Пусть хаотический процесс $x(t)$, являющийся решением системы (1) при некотором информационном сигнале $s(t)$, действует на следующую систему отклика:

$$\begin{aligned} \dot{u} &= v, \\ \dot{v} &= w, \\ \mu \dot{w} &= \gamma - \Phi(x(t)) - u - \lambda v - w. \end{aligned} \quad (2)$$

С помощью подстановки $u = x(t) - s$ нетрудно убедиться, что системы (1) и (2) эквивалентны при равенстве значений одноименных параметров. Следовательно, в результате синхронного отклика значения исходного сигнала $s(t)$ для достаточно больших t могут быть восстановлены из двух хаотических реализаций:

$$s(t) \cong x(t) - u(t), \quad (3)$$

причем

$$v(t) \cong y(t), \quad w(t) \cong z(t). \quad (4)$$

Укажем условия, при которых синхронный отклик осуществим. Необходимым условием является устойчивость линейной системы (2) в отсутствие внешнего воздействия ($x(t) \equiv 0$), то есть при

$$\mu < \lambda \quad (5)$$

и любых значениях параметров γ и β . В рассматриваемом примере это условие является также и достаточным. В самом деле, асимптотическая устойчивость режима синхронного отклика (3), (4) следует из устойчивости линейной системы

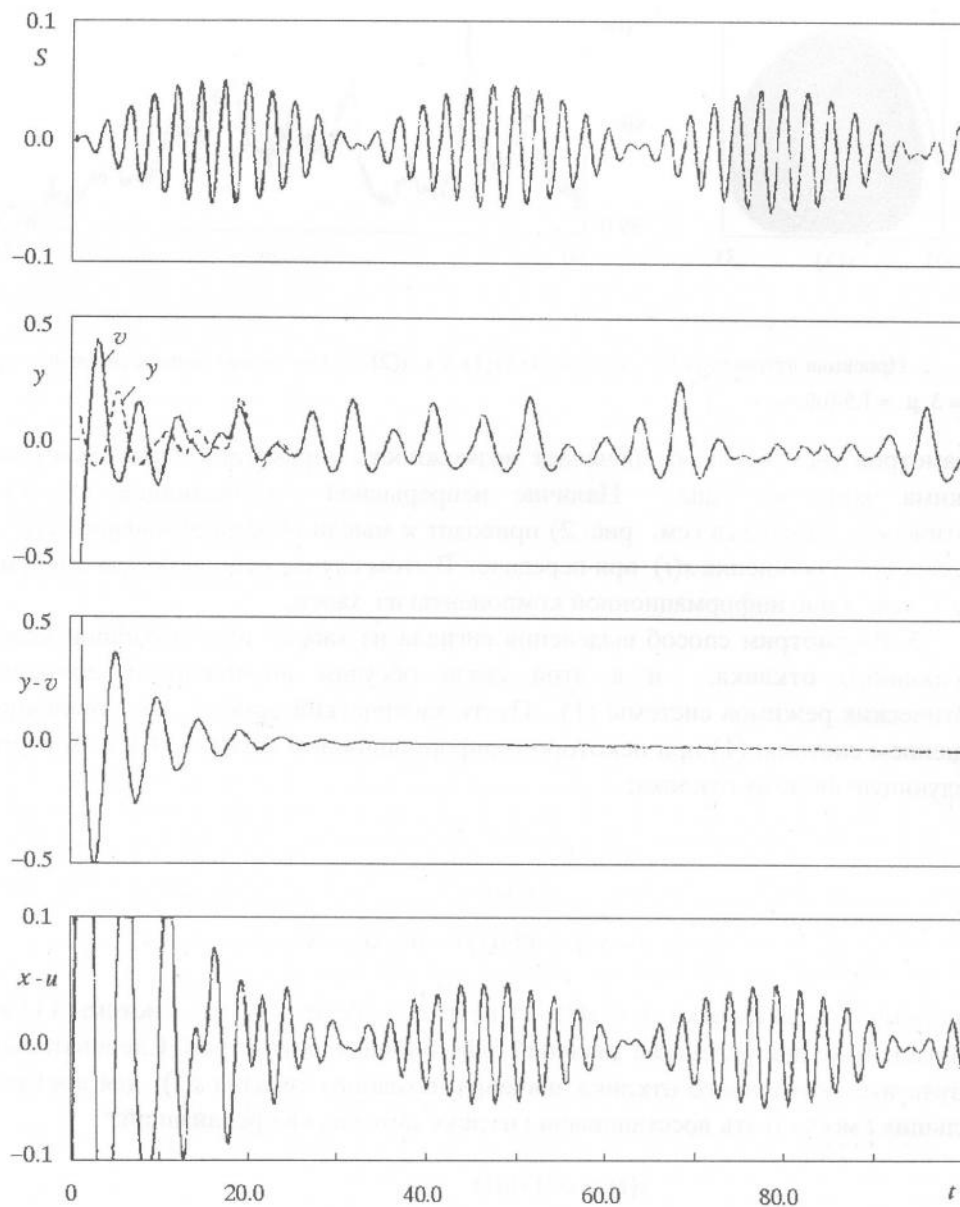


Рис. 3. Синхронный отклик системы (2) на хаотическое воздействие со стороны системы (1) и выделение информационного сигнала из хаотической реализации

$$\begin{aligned}
 \dot{\Delta}_1 &= \Delta_2, \\
 \dot{\Delta}_2 &= \Delta_3, \\
 \mu \dot{\Delta}_3 &= -\Delta_1 - \lambda \Delta_2 - \Delta_3,
 \end{aligned} \tag{6}$$

где $\Delta_1 = x - u - s(t)$, $\Delta_2 = y - v$, $\Delta_3 = z - w$. Система (6) устойчива при выполнении того же неравенства (5). Следовательно, в системе (2) синхронный режим (3), (4)

устанавливается при любых начальных условиях, если справедливо неравенство (5). Переходные процессы, как следует из (6), спадают экспоненциально, и скорость затухания определяется только параметрами λ и μ .

Условие устойчивости синхронного отклика (5) ограничивает возможности использования хаотических режимов системы (1). При выбранных значениях параметров γ и β наиболее эффективным является режим P'_s , (см. рис. 2), существующий в области C'_5 (см. рис. 1). На рис. 3 приведены результаты численного эксперимента, проведенного при значениях параметров $\gamma = 1$, $\beta = 8$, $\lambda = 3$, $\mu = 1.5$, соответствующих режиму P'_s начальных условиях $x(0) = y(0) = z(0) = 0.1$ для (1) и $u(0) = v(0) = w(0) = 0.5$ для (2), информационном сигнале $s(t) = 0.05 \sin(0.1t) \sin(2.4t)$. Для выбранных значений параметров и начальных условий при $t \geq 40$ в системе (2) устанавливается синхронный отклик, в результате чего становится возможным выделение из хаотической реализации, являющейся решением системы (1), исходного информационного сигнала.

4. Данная работа продолжает исследования в направлении практического использования детерминированного хаоса [5,7,8,10] и представляет пример регулярного конструирования хаотических систем с заданными характеристиками. Для модели управляемого по частоте генератора установлены следующие свойства: 1) многообразие регулярных и хаотических режимов, 2) возможность построения системы отклика и асимптотическая устойчивость режима синхронного отклика, 3) возможность отдельного управления режимами хаотической генерации и синхронного отклика с помощью независимых параметров. Эти особенности позволяют рассматривать данную модель в качестве удобного объекта для исследования закономерностей синхронного отклика. Перспективными для дальнейшего исследования являются не только задачи управления характеристиками хаоса, но и задачи управления системами при помощи хаотических процессов. Актуальными остаются вопросы поиска путей построения устойчивых систем отклика, а также новых способов синхронной обработки сложных сигналов.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 93-03-15424).

Библиографический список

1. Афраймович В.С., Веричев Н.Н., Рабинович М.И. Стохастическая синхронизация колебаний в диссипативных системах //Изв. вузов. Радиофизика. 1986. Т.29, № 9. С. 1050.
2. Анищенко В.С., Вадивасова Т.Е., Постнов Д.Э., Сафонова М.А. Вынужденная и взаимная синхронизации хаоса //Радиотехника и электроника. 1991. Т.36, № 2. С. 338.
3. Волковский А.Р., Рульков Н.Ф. Пороговая синхронизация релаксационных хаотических генераторов //Письма в ЖТФ. 1992. Т.18. Вып.13. С. 22.
4. Алексеев А.А., Шалфеев В.Д. Стохастическая синхронизация в ансамбле автоколебательных систем с обратной связью //Письма в ЖТФ. 1993. Т.19, №21. С.12.
5. Pecora L.M., Carroll T.L. Synchronization in chaotic systems //Phys.Rev.Lett. 1990. Vol.64. P. 821.

6. Chua L.O., Kocarev Lj., Eckert K. Experimental chaos synchronization in Chua's circuit //Int.J.Bifurcation and Chaos. 1992. Vol.2, №3. P. 705.

7. de Sousa Vieira M., Khoury P., Lichtenberg A.J., Lieberman M.A., Woncho-ba W., Gullicksen J., Huang J.Y., Sherman R., Steinberg M. Numerical and exper-imental studies of self-synchronization and synchronized chaos //Int.J.Bifurcation and Chaos. 1992. Vol.2, № 3. P. 645.

8. Kocarev Lj., Halle K.S., Eckert K., Chua L.O. Experimental demonstration of secure communications via chaotic synchronization //Int.J.Bifurcation and Chaos. 1992. Vol.2, № 3. P. 709.

9. Волковский А.Р., Рувльков Н.Ф. Синхронный хаотический отклик нелинейной колебательной системы как принцип детектирования информационной компоненты хаоса //Письма в ЖТФ. 1993. Т.19. Вып.3. С. 71.

10. Бельский Ю.Л., Дмитриев А.С. Передача информации с помощью детерминированного хаоса //Радиотехника и электроника. 1993. Т.38, №7. С. 1310.

11. Заулин И.А., Пономаренко В.П. Динамические режимы и бифурка-ционные явления в нелинейных статических системах синхронизации // Радио-техника и электроника. 1993. Т.38, № 5. С. 889.

12. Алексеев А.А. Регулярные и хаотические режимы управляемого по частоте генератора // Письма в ЖТФ. 1993. Т.19, № 21. С. 16.

13. Шильников Л.П. Теория бифуркаций и модель Лоренца // Мардсен Дж., Мак-Кракен М. Бифуркация рождения цикла и ее приложения. М., 1980. С. 317.

Нижегородский государственный
университет

Поступила в редакцию 17.12.93
после переработки 22.03.94

CHAOTIC REGIME AND SYNCHRONOUS RESPONSE IN GENERATOR WITH FREQUENCY FEEDBACK CONTROL LOOP

A.A. Alekseyev, A.K. Kozlov, V.D. Shalfeev

The nonlinear complex signal processing based on the phenomena of chaotic generation and synchronous response is considered in application to the model of generator with the local frequency control feedback loop. The conditions for the perfect system's functioning are defined.



Алексеев Александр Александрович – родился в 1971 году в Горьком, окончил Нижегородский государственный университет в 1993 году. Инженер кафедры теории колебаний ННГУ. Работает в области исследования нелинейной динамики сложных автоколебательных систем, систем синхронизации и управления.



Козлов Александр Константинович – родился в 1964 году в Горьком, окончил Горьковский государственный университет в 1989 году. Младший научный сотрудник НИИ прикладной математики и кибернетики при ННГУ. Работает в области исследования нелинейной динамики систем управления колебаниями, в том числе с запаздывающими обратными связями.



Шалфеев Владимир Дмитриевич – родился в 1941 году, окончил Горьковский университет в 1963 году. Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук в ГГУ (1969) и доктора физико-математических наук в СГУ (1990) в области нелинейной динамики систем синхронизации, профессор ННГУ. Заведует кафедрой теории колебаний Нижегородского университета. Области научных интересов: динамика нелинейных систем, теория синхронизации, пространственно-временной хаос, структуры. Соавтор монографий «Системы фазовой синхронизации», «Устойчивость, структуры и хаос в нелинейных сетях синхронизации».

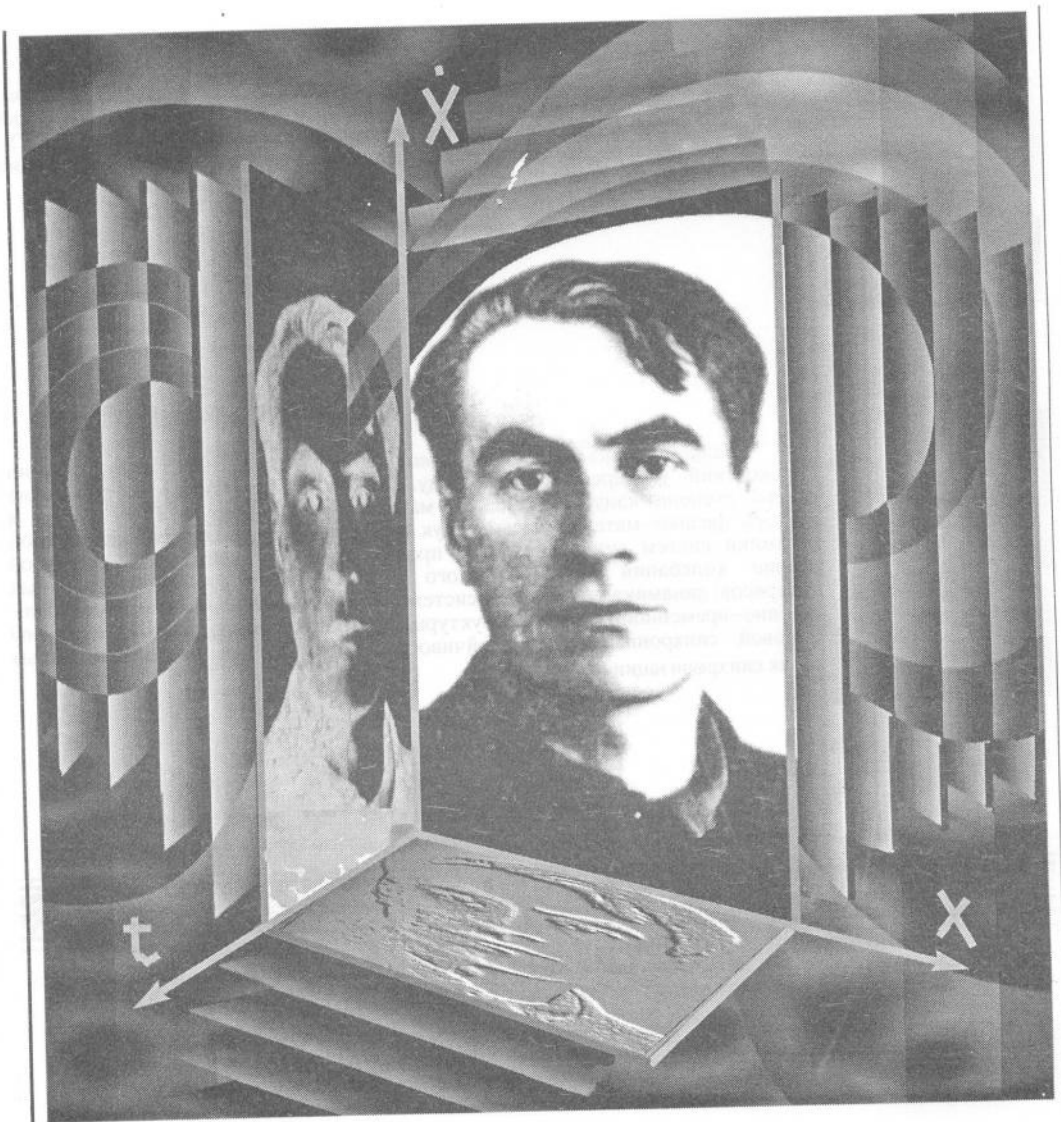


В издательстве Нижегородского университета вышла в свет в 1993 году книга

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ В ОБРАЗОВАНИИ.
Программные средства: Межвуз. тематич. сб. науч. тр. / Под ред. Р.Г. Стронгина.
Нижний Новгород: Нижегород. гос. ун-т., 1993. 171 с.

В сборнике публикуется ряд лабораторных работ по математическому моделированию объектов, явлений и процессов, используемых в Нижегородском государственном университете в составе лабораторных практикумов для студентов, обучающихся по специальности естественно-научного цикла. Часть тиража снабжена приложением – записанной на дискеты документацией для немедленного включения работ в учебный процесс вуза с преподаванием на русском языке. Дискеты могут быть высланы по запросу. Сборник рассчитан на преподавателей и студентов вузов.

анонсанонс анонс анонс анонс анонс анонс анонс анонс анонс
онс анонс алонс анонс анонс анонс алонс анонс анонс алонс алонс ан
с анонс анонс алонс алонс анонс анонс алонс анонс анонс алонс



Предлагаемая вниманию читателя автобиография не предназначалась автором для печати и, строго говоря, не может быть отнесена к научной биографии, как это принято понимать сейчас. Более того, она охватывает лишь часть творческого пути ученого в науке. Тем не менее, на наш взгляд, автобиография – это уникальный источник из всех материалов к биографии ученого, позволяющий видеть события минувших лет глазами самого автора. Кроме того, нам хотелось привлечь внимание читателей к интересному изданию, из которого перепечатывается данный материал – сборник автобиографий выдающихся советских физиков, избранных в действительные члены-корреспонденты Академии наук СССР в 1917–1946 гг. Изданный в 1990 г. небольшим тиражом, он содержит в основном ранее не публиковавшиеся документы из Архива Академии наук СССР, из центральных государственных и ведомственных архивов и архивов научных и учебных заведений.

Редакционная коллегия



Изв. вузов «ПНД», т. 2, № 1, 1994

**АНДРОНОВ
АЛЕКСАНДР АЛЕКСАНДРОВИЧ**

(11.04.1901 – 31.10.1952)

Автобиография

15 мая 1943 г.

Я родился в 1901 г. в Москве. Отца не знаю, так как мать разошлась с отцом, когда мне было несколько месяцев. Ряд лет мы, мать, я и сестра, жили на средства деда со стороны матери – купца, который умер, кажется, в 1907 г. В 1909 г. мать вышла замуж за врача К.А. Липского, который заменил мне отца, вместе с которым я прожил свыше двадцати лет и в основном на средства которого я получил образование. Сейчас мать и отчим живут в Москве, отчим работает в одном из московских родильных домов.

В 1918 г. я окончил в Москве трудовую школу 2-й ступени. В 1918–1920 гг. я работал браковщиком, монтером, лектором политотдела. В 1920 г. я был тяжело болен (плеврит) и затем признан негодным к военной службе. Осенью 1920 г. я поступил в МВТУ, на электротехнический факультет, где была специальность по радиотехнике. В 1923 г., окончив три курса МВТУ, я перевелся на физмат МГУ, который и закончил в течение двух лет по специальности «теоретическая физика».

Весной 1925 г. я был зачислен аспирантом НИИФа МГУ. Осенью 1925 г. в Москву переехал профессор Л.И.Мандельштам, который был утвержден моим руководителем по аспирантуре и которому я был обязан научной школой.

В 1926 г. я (совместно с М.А. Леонтовичем) опубликовал первую научную работу по теоретической оптике¹. В 1929 г. окончил аспирантуру. Тема моей заключительной диссертации «Предельные циклы Пуанкаре и теория колебаний». Эта работа, краткое изложение которой было опубликовано по-русски в 1928 г. и в другой редакции по-французски в «Докладах Парижской Академии» в 1929 г., определила область моей дальнейшей научной деятельности – теория колебаний и смежные вопросы математики и теоретической физики.

В 1929 – 1933 гг. я работал в ВЭИ и НИИФе МГУ в качестве научного сотрудника и в 2-м МГУ (теперь Московский государственный педагогический институт) в качестве доцента кафедры теоретической физики.

За это время мною выполнен ряд работ по теории нелинейных колебаний, по качественной теории дифференциальных уравнений и по теории флуктуаций. Большая часть этих работ была опубликована несколько позднее (значительная часть этих работ выполнена совместно с А.А. Виттом).

В конце 1931 г. я подал заявление в Сектор науки Наркомпроса о желании работать в провинции. Наркомпрос меня направил в Горький, куда я переехал в 1932 г. и где в настоящее время я заведую кафедрой теоретической физики и теории колебаний Горьковского государственного университета, а также веду курс «Теоретическая радиотехника» в Горьковском индустриальном институте.

В 1934 г. я был утвержден ВАКом Наркомпроса в звании профессора, в 1935 г. – в ученой степени доктора физико-математических наук.

В 1932–1939 гг. моя научная работа, которую следует рассматривать вместе с работой моих сотрудников, велась в следующих трех направлениях.

Первое направление – применение теории нелинейных колебаний к решению

конкретных задач, интересующих физику и технику (прежде всего радиотехнику). Наиболее существенными из этой, довольно большой группы работ являются, на мой взгляд, работы по вынужденным колебаниям, по связанным системам (Майер) и по колебаниям в электрических машинах (Власов).

Второе направление – разработка вопросов теоретической физики, связанных с вопросами физики колебаний. Здесь следует отметить работы по теории токов в вакууме (Белюстина) и работу по расчету размытости спектра катодного генератора (Бернштейн).

Третье направление – разработка качественной теории дифференциальных уравнений. Основным результатом здесь, кроме теории так называемых «грубых» систем (которая была дана в 1935 г. в совместной работе с математиком Л.С. Понтрягиным)², на мой взгляд, следует считать общую теорию разбиения фазовой плоскости на траектории (Е. Леонтович и А. Майер) и теорию зависимости от параметра разбиения фазовой плоскости на траектории (А. Андронов и Е. Леонтович).

Последние три года (1940–1942) я и ряд моих сотрудников (Майер, Баутин, Бутенин, Николаев) занимались теорией автоматического регулирования. В этой области нами получен ряд новых научных результатов. Большая часть этих результатов еще не опубликована (напечатана лишь статья И.В. Бутенина в «Прикладной математике и механике»). Часть этих результатов, относящихся главным образом к автоколебаниям в устройствах автоматического регулирования, была доложена мною весной 1941 г. на собрании Физико-математического отделения Академии наук СССР. Кроме того, уже после начала войны, в июле 1941 г. в Горьковском государственном университете были защищены две кандидатские диссертации (Баутина и Бутенина), посвященные теории автоматического регулирования. С осени 1941 г. я выполнял административную работу (проректор ГГУ), от которой был освобожден (для проведения оборонной работы) в ноябре 1942 г.

За последнее время мною выполнен ряд расчетов непосредственно оборонного характера и возобновлена работа по теории регулирования.

А. Андронов

ААН СССР, ф. 411, оп. 25, д. 12, л. 3–6. Подлинник.

20 марта 1946 г.

[...] Последние годы, начиная с 1941 г., основной областью научной работы, как моей, так и большинства моих сотрудников, стала теория автоматического регулирования, которую мы рассматриваем как один из разделов теории колебаний.

Хотя Великая Отечественная война несколько задержала нашу работу, но все же с 1943 г. мы начали систематическую публикацию научных результатов, полученных в этой области.

Во время войны я и мои сотрудники занимались по спецзаданиям нескольких конструкторских бюро работами непосредственно оборонного значения (магнитная защита кораблей, траление магнитных мин, траление антенных мин и др.). Эти работы были отмечены 1 декабря 1943 г. приказом наркома по просвещению тов. В.П. Потемкина, в котором мне была объявлена благодарность и присуждена премия. 4 ноября 1944 г. я был награжден орденом Красной Звезды.

С 1944 г. на основании специального разрешения председателя ВКВШ тов. С.В. Кафанова я совмещаю работу в Горьком с работой в Москве, в Академии наук СССР.

В 1945 г. я принимал участие в организации радиофизического факультета Горьковского государственного университета.

А. Андронов

ААН СССР, ф. 411, оп. 3, д. 163, л. 10–12. Подлинник.

1. См.: Zur Theorie der molekularen Lichtzerstreuung an Flüssigkeitsoberflächen // Ztschr. Phys. 1926. Bd 38, H.6–7. S. 485–501 (совместно с М.А. Леонтовичем). На русск. яз. см.: Андронов А.А. Собрание трудов. М., 1956. С. 5–18.

2. См.: Грубые системы // ДАН СССР. 1937. Т. 14, N 5. С. 247–251 (совместно с Л.С. Понтрягиным). См. также: Андронов А.А. Собрание трудов. М., 1956. С. 142–160.



Изв. вузов «ПНД», т. 2, № 1, 1994

АНДРОНОВ АЛЕКСАНДР АЛЕКСАНДРОВИЧ*В.Д. Горяченко**(отрывки из книги)*

В А.А. Андронове мы должны видеть не только крупного ученого, но и большого труженика в области истории науки. Разумеется, интеллигентный и любознательный человек (каким был и А.А. Андронов) не может не интересоваться историей той науки, которой он посвятил жизнь. У А.А. Андронова этот интерес был обусловлен еще и его стилем работы, достойным подражания. Именно, «приступая к новым исследованиям, А.А. Андронов всегда проводил мощную «мобилизацию информации». Ему в этом помогала его редкая библиографическая память. А.А. Андронов очень быстро сделался крупнейшим, вероятно, не только в СССР, но и во всем мире, специалистом по литературе и истории автоматического регулирования. Большое значение для развития работ А.А. Андронова по теории автоматического регулирования имело его знакомство и сотрудничество с И.Н. Вознесенским, выдающимся деятелем техники автоматического регулирования. Исчерпывающее знание литературы помогло А.А. Андронову сосредоточить свои силы на вопросах, имеющих фундаментальное значение для теории автоматического регулирования.

А.А. Андронову принадлежит (совместно с И.Н. Вознесенским) в высшей степени содержательное исследование «О работах Д.К. Максвелла, И.А. Вышнеградского и А. Стодоло в области теории регулирования машин». (Оно помещено в изданном под редакцией А.А. Андронова и И.Н. Вознесенского в серии «Классики науки» сборнике: Д.К. Максвелл, И.А. Вышнеградский, А. Стодола. Теория автоматического регулирования. М.: Изд-во АН СССР, 1949). На основании тщательного анализа авторы пришли к следующему выводу: «Только из сравнения работ Максвелла и Вышнеградского можно по-настоящему понять, что сделано Вышнеградским и что именно с Вышнеградского начинается инженерная теория регулирования машин».

По инициативе и под руководством А.А. Андронова в Горьковском областном архиве была проведена большая работа для того, чтобы выяснить, где и когда родился Лобачевский: имевшиеся ранее сведения были противоречивы. Разбор большого числа документов с несомненностью доказал, что Лобачевский родился в Нижнем Новгороде, было установлено, где находился дом, в котором родился Лобачевский* была установлена точная дата его рождения, были добыты

* Во дворе «Гастронома», расположенного на углу улиц Октябрьской и Дзержинского, находился маленький земельный участок, принадлежавший матери Лобачевского, вместе с домиком, в котором и родился великий математик.

интересные сведения о его семье. Подробнее об этих изысканиях рассказано в статье самого А.А. Андропова [1] и статье Н.И. Приваловой [33].

* * *

«Мобилизация информации», предельно добросовестное отношение к трудам предшественников в значительной мере определили бережное, уважительное отношение А.А. Андропова к научным библиотекам. Приведем следующее поучительное высказывание А.А. Андропова: «Библиотека для научного работника является одним из основных «орудий производства». Она должна быть хорошо подобрана, и именно подбор книг библиотеки, а не количество книг должно стоять на первом месте в отношении предъявляемых требований. В библиотеке научного учреждения особенно показательны и ценны следующие ее отделы: во-первых, отдел русских и иностранных журналов. Они особенно ценны в виде целых комплектов, длинных серий за ряд лет. Здесь самое существенное, самое важное, чтобы не было пропусков («лакун»). Библиотека с пропусками в основных журналах – это некультурная, плохая библиотека. Во-вторых, отдел классиков данной науки, например, в отношении физики – сочинения Кирхгофа, Максвелла, Стокса, Рэлея, Гельмгольца, Ампера, Вильяма Томсона, Жуковского и так далее. В-третьих, отдел справочников, хандбухов и энциклопедических словарей. Наконец, в-четвертых, ценен и подбор монографий, оттисков, фотокопий и даже литографированных курсов по отдельным научным вопросам. Такой подбор должен быть сделан специалистом, работающим или работавшим в данной области науки», – это высказывание было одним из ответов проф. М.И. Рокотовскому, который обратился к А.А. Андропову с просьбой поделиться личным опытом научной работы в связи с написанием книги «Организация труда научных работников».

Научные труды и общественная деятельность А.А. Андропова были высоко оценены правительством и народом. А.А. Андронов – не только академик; в 1947 году он избран депутатом Верховного Совета РСФСР. Он также избран членом Президиума Верховного Совета РСФСР. В 1950 году А.А. Андронов был избран депутатом Верховного Совета СССР. Он был образцовым депутатом и уделял много времени своим депутатским обязанностям, не оставляя без внимания ни одно письмо, ни одно обращение. Другой стороной общественной работы А.А. Андропова была его активная редакционная деятельность. В частности, он был членом редколлегии журнала «Автоматика и телемеханика». Его переписка с отв. редактором Б.Н. Петровым, его рецензии и другие материалы говорят о том, что А.А. Андронов был взыскательным, объективным и предельно добросовестным членом редколлегии. Поучительно его высказывание о требованиях к рецензиям, которые он сформулировал в письме к Б.Н. Петрову от 14 июля 1949 года: «Необходимо выбирать компетентных, независимых и вездливых рецензентов». По словам Г.С. Горелика, А.А. Андронов был необычайно требователен к качеству изложения научных результатов. Он не мог без раздражения читать работы, где неясно, что постулируется, что и при каких предположениях доказывается. Вряд ли стоит говорить, сколь взыскателен был А.А. Андронов к своим собственным работам, к статьям своих ближайших учеников, которым эта взыскательность и передалась по наследству от учителя. Хорошо помню, как неумолим был наш заведующий отделом Н.А. Железцов, когда читал наши научные отчеты и другую продукцию, заставляя уточнять и шлифовать каждое высказывание*. Думаю, что другие ученики А.А. Андропова по

* Такая работа дала хорошие плоды. Сейчас, просматривая статьи, поступающие для опубликования в наших межвузовских сборниках, я убеждаюсь, что не только с научной точки зрения, но и с точки зрения четкости, логичности и аккуратности изложения статьи наших сотрудников находятся на уровне лучших всесоюзных стандартов.

отношению к своим ученикам и подчиненным проводили и проводят столь же суровую и, безусловно, правильную политику.

* * *

Личные качества А.А. Андропова, черты его характера заслуживают большого внимания, поскольку в очень многих отношениях он может служить образцом для подражания.

Разные люди, лично знавшие А.А. Андропова, раскрывают разные стороны его характера, но все они единодушно и с особой силой подчеркивают его честность и принципиальность – и при решении крупных вопросов, и в мелочах.

В ГИФТИ работал механик Николай Александрович Кулагин *, одно время исполнявший обязанности шофера акад. А.А. Андропова. Когда я спросил его, какая черта А.А. Андропова – человека кажется ему наиболее яркой, характерной, ответ был кратким и незамедлительным: «Абсолютная честность!»

Много теплых слов об А.А. Андропове было высказано Яковом Никитичем Николаевым, его учеником, который в начале 50-х гг. был деканом радиофизического факультета ГГУ, затем до 1965 года занимал пост директора ГИФТИ. Я.Н. Николаев чаще других качеств А.А. Андропова называл следующие: превосходный педагог; нетерпим к фальши, к любым проявлениям непорядочности; энергичный, неутомимый труженик; бывал вспыльчив и резок – это как реакция на несправедливость и беспринципность.

Заслуживает внимания следующий отзыв Я.Н. Николаева об А.А. Андропове: «Замечательный лектор, он умел с предельной ясностью и безукоризненной научной строгостью излагать самые сложные физические проблемы. Его лекции были захватывающе интересными и потому, что он великолепно знал историю естественных наук и физики прежде всего и умело пользовался этим». В качестве недостатка Я.Н. Николаев отмечал, что А.А. Андронов иногда давал заниженные оценки научным трудам других школ и направлений, в частности работам Н.Н. Боголюбова.

В высказываниях об А.А. Андропове других его учеников и сотрудников также сквозят чувства большого уважения и бережного, теплого отношения к нему как к человеку. Н.В. Бутенин, вспоминая годы аспирантуры у А.А. Андропова, рассказывал, что А.А. Андронов был для него и других молодых сотрудников образцом во всем; пытались подражать ему даже в поведении, даже свой почерк пытались изменить и сделать таким, как у А.А. Андропова.

Развернутую характеристику личности А.А. Андропова дал Г.С. Горелик. Приведем здесь его высказывания.

«Я лично не знал и не знаю ни одного человека, который бы отличался от моего идеала хорошего человека меньше, чем А.А. Андронов. Полное бескорыстие, абсолютное отсутствие лицемерия, мелкого «ученого» самолюбия, академического чванства, бесконечная готовность жертвовать своим спокойствием, если нужно помочь товарищу и просто человеку, деятельная доброжелательность ко всему живому и талантливому!»[19]. «В А.А. Андропове бросается в глаза ряд контрастов. Необычайная любознательность и разносторонность, жадный интерес к людям и ко всему на свете, огромная образованность и начитанность, простирающаяся от медицины до экономической географии, от русской истории до математической логики. И вместе с тем 25-летняя научная работа, развивающаяся по определенному и своеобразному, резко очерченному, хотя и широкому руслу, работа которая выглядит так, как-будто она строилась по единому заранее составленному плану, работа, характеризующаяся

* Умер в ноябре 1972 года.

редким единством стиля и метода. Экспансивность, богатство идей, склонность к большим научным обобщениям, вкус к длинным спорам обо всем на свете (в русском стиле прошлого столетия), словотворчество, пристрастие к острому, крылатому словечку. И, крайняя, необычайная – может быть, даже чрезмерная – осторожность внутри своей специальности, скупость в опубликовании научных результатов, взвешивание каждого слова в научных статьях и докладах не на аптекарских – это было бы слишком слабо сказано, – а на аналитических весах! Шлифовка, вылизывание каждой детали, бесконечная требовательность к самому себе и к своим сотрудникам» [20].

«А.А. Андронов был цельным жизнерадостным человеком, очень много знавшим и жадно всем интересовавшимся. При всей своей целеустремленности в научных исследованиях он был полной противоположностью тому, что имеют в виду, когда говорят «узкий специалист». Он обладал обширным умом и богатой, разносторонней культурой. В круг его непосредственных научных интересов входили: вся физика, математика, техника, астрономия. Его живейшим образом интересовало все естествознание, медицина, история, литература, живопись. Он был знатоком русской культуры. Речь А.А. Андронова была сильной, остроумной, неотразимой. Прямота его часто доходила до резкости. Вместе с тем он был прост в обращении, отзывчив и чистосердечен. В нем не было эгоизма и неуверенного в себе мелкого самолюбия» [20].

Много интересных высказываний об А.А. Андронове собрала А.М. Ливанова [25]. Приведем только одно из них, принадлежащее Н.Н. Баутину и дополняющее характеристику, данную Г.С. Гореликом.

«При каждом случайно возникавшем разговоре на любую тему обнаруживалось, что и это Андронов тоже знает. Наконец, мы вовсе перестали удивляться энциклопедичности его знаний, какой бы области они ни касались. Часто в наших спорах мы стали пользоваться «недозволенным приемом», при недостатке собственных аргументов говорили: «Так сказал Александр Александрович». Это действовало мгновенно и безотказно, о чем бы спор ни заходил – о физике или математике, о биологии, медицине или истории.

Что касается художественной литературы, то у Андронова были очень резко выраженные вкусы и пристрастия по отношению к писателям и даже к отдельным произведениям. Очень любил он и отлично знал всего Пушкина, Герцена, Лескова. Он мог читать наизусть, страница за страницей, не только стихи, но и прозаические произведения, даже прозу Герцена, такую непростую. Любил «Думу про Опанаса» Багрицкого. Не сразу, но крепко полюбил Пастернака...»

1. Андронов А.А. Где и когда родился Н.И. Лобачевский // Горьковская коммуна. 1948. 9 мая. № 109 (8866).

19. Горелик Г.С. Из истории развития теории колебаний в СССР // Динамика систем. Математические методы теории колебаний: Межвуз. сб. Горьк. ун-т. 1977. Вып. 12. С.3.

20. Горелик Г.С. Жизнь и труды А.А. Андронова // Памяти Александра Александровича Андронова. М.: Изд-во АН СССР, 1955. С. 3.

25. Ливанова А.М. Из рассказов об А.А. Андронове // А.М. Ливанова. Физики о физиках. М.: Молодая гвардия, 1968. С. 200.

33. Привалова Н.И. Работа академика А.А. Андронова над материалами для биографии Н.И. Лобачевского // Записки краеведов. Горький: Волго-Вятское книжное издательство, 1983. С. 63.



Горяченко Вадим Демьянович (1934–1990) окончил радиофизический факультет ГГУ и с 1957 г. начал работать в Горьковском исследовательском физико–техническом институте младшим научным сотрудником. С 1970 г. заведовал лабораторией НИИ механики при Горьковском университете, а в 1988 г. стал директором института. Параллельно, начиная с 1969 г., вел педагогическую работу в ГГУ в должности профессора. В 1979 г. защитил докторскую диссертацию, а в 1987 г. избран заведующим кафедрой теоретической механики ГГУ.

Область научных интересов – прикладная теория колебаний, динамика ядерных энергетических систем, теория популяций биологических сред и организмов. По результатам работы им опубликовано 5 монографий и свыше 100 научных статей. По курсам читаемых лекций выпустил 10 учебных пособий для студентов университета.

В течение многих лет являлся редактором межвузовских сборников по теории колебаний и динамике биологических популяций, был ответственным за выпуск межотраслевого сборника «Вопросы атомной науки и техники» (серия «Динамика ядерных энергетических установок»).

© Горяченко В.Д. Андронов Александр Александрович (11 апреля 1901 г.– 31 октября 1952 г.): Монография. Нижний Новгород: Изд-во Нижегородского университета, 1992. 64 с.



World Scientific Lecture Notes in Physics – Vol. 53

INTRODUCTION TO NONLINEAR DYNAMICS FOR PHYSICISTS

by Henry D.I. Abarbanel, Mikhael I. Rabinovich & Mikhael M. Sushchik

Department of Physics and Institute for Nonlinear Science
University of California, San Diego,
La Jolla, Ca 92093-0402, USA

ISBN 981-02-1409-X,
981-02-1410-3 (pbk)

Published by World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd.
PO Box 128, Farrer Road, Singapore 9128
USA office: Suite 1B, 1060 Main Street, River Edge, NJ 07661
UK office: 73 Lynton Mead, Totteridge, London N20 8 DH

Printed in Singapore by Continental Press Pte. Ltd.

От авторов

Данная серия лекций по нелинейной динамике для физиков рассчитана на студентов старших курсов и аспирантов. Предполагается, что студенты прослушали курс механики и знакомы с математической физикой в той мере, в какой это необходимо для изучения курсов электричества и магнетизма или квантовой механики. Знание нелинейной динамики необязательно, однако знакомство с обыкновенными дифференциальными уравнениями необходимо. Некоторая часть материала выходит за указанный уровень и может вызвать затруднение у читателей-студентов, однако мы полагаем, что поскольку предмет является достаточно интересным и богатым, постановка трудных вопросов должна быть одной из целей такого курса. С другой стороны, некоторые вопросы изложены на более элементарном уровне, что полезно как для повторения, так и для представления различных точек зрения.

Таким образом, основная цель лекций состоит в ознакомлении слушателей с качественной стороной явления в нелинейных системах с демонстрацией достаточно обширного количественного материала, что позволило бы студенту сориентироваться в схожих ситуациях без преподавательской «палочки-выручалочки». Мы сознаем, что поставили перед собой практически невыполнимую задачу, однако надеемся, что читатель оценит наши скромные успехи в достижении этой цели. В любом случае мы ожидаем «обратной связи» с читателями по поводу вызывающих затруднение вопросов, как включенных в курс, так и оставшихся вне поля зрения, а также других тем, относящихся к научной и методической стороне изложения.

Мы рассчитываем, что читатель, в особенности тот, которому довелось прослушать лекции, относительно законченный вариант которых и представляет этот курс, поставит перед собой три основных вопроса о нелинейной динамике:

- Что такое нелинейная динамика и что отличает ее от линейной динамики, которой посвящены все известные учебники?
- Зачем, с точки зрения физика, изучать нелинейную динамику, выходя за рамки привычной и удобной линейной теории?
- Каким образом преуспеть в изучении нелинейных систем, анализируя известные системы и наблюдая в эксперименте поведение новых систем?

Конечно ни данные лекции, ни даже труд ученого в течение всей его жизни не могут дать детальный ответ на все эти вопросы. Тем не менее мы поставили перед собой эту невыполнимую задачу, чтобы студент вслед за нами мог слегка прикоснуться к достаточно сложным проблемам.

Первоначально эти лекции были прочитаны М.И. Рабиновичем в течение осеннего семестра 1992/93 г.г. на физическом факультете Калифорнийского университета в Сан-Диего UCSD. Они были записаны М.М. Суцником и отредактированы Г.Д.И. Абарбанелем. Мы рассчитываем, что этот курс будет прочитан Абарбанелем в 1993/94 г.г. в UCSD с постепенной доработкой в соответствии с отзывами студентов каждого курса. В конечном итоге мы предполагаем издать эти лекции в качестве монографии-учебника, но на пути превращения лекционного курса в законченную книгу еще много препятствий.

Задачи не были первоначально включены, но мы добавили их для облегчения понимания материала и планируем использовать при последующем прочтении лекций. Мы настойчиво просим читателей сообщить свое мнение об этом курсе. Он, может быть, носит несколько незавершенный характер, но, надеемся, будет интересен физикам.

Январь, 1993

Г.Д.И. Абарбанель
М.И. Рабинович
М.М. Суцник

Перевод Н.М. Рыскина

Редколлегия полагает, что читателю будет небезинтересно ознакомиться с содержанием курса лекций по оглавлению монографии

Contents

Preface

1. Introduction	1
2. Nonlinear Oscillator without Dissipation	6
3. Equilibrium States of a Nonlinear Oscillator with Dissipation	11
4. Oscillations in Systems with Nonlinear Dissipation-Generators	17
5. The Van der Pol Generator	22
6. The Poincare Map	27
7. Slow and Fast Motions in Systems with One Degree of Freedom	33
8. Forced Nonlinear Oscillators : Linear and Nonlinear Resonances	38
9. Forced Generator: Synchronization	45
10. Competition of Modes	51
11. Poincare Indices and Bifurcations of Equilibrium States	55
12. Resonance Interactions between Oscillators	62
13. Solitons	69
14. Steady Propagation of Shock Waves	80
15. Formation of Shock Waves	86

16. Solitons. Shock Waves. Wave Interaction. The Spectral Approach	89
17. Weak Turbulence. Random Phase Approximation	95
18. Regular Patterns in Dissipative Media	100
19. Deterministic Chaos. Qualitative Description	104
20. Description of a Circuit with Chaos. Chaos in Maps	111
21. Bifurcations of Periodic Motions. Period Doubling	116
22. Controlled Nonlinear Oscillator. Intermittency	122
23. Scenarios of the Onset of Chaos. Chaos through Quasi-Periodicity	132
24. Characteristics of Chaos. Experimental Observation of Chaos	139
24.1. Fractal Dimension	140
24.2. Lyapunov Exponents	141
25. Multidimensional Chaos. Discrete Ginzburg-Landau Model	147
26. Problems to Accompany the Lectures	151
26.1 – 26.25 Lecture One – Lecture Twenty-five	151–158



Изв.вузов «ПНД», т.2, №1, 1994

С 6 по 8 октября 1993 года в г. Арлингтоне (США) состоялась «Вторая конференция по экспериментальному хаосу» («2-nd Experimental Chaos Conference»). Цель конференции – обсуждение последних достижений в технике проведения экспериментов по нелинейной динамике. Спонсор конференции – Министерство научных исследований военно-морского флота США (The Office of Naval Research). В конференции приняли участие более 300 ученых из разных стран, было представлено 41 устный и 82 стендовых доклада по следующим разделам, соответствующим различным областям приложения проблем нелинейной динамики: оптика, биология, химия, метеорология и океанография, связь, управление, пространственно-временной хаос, общий хаос. Для демонстрации экспериментов организаторы предоставили возможность использовать различные приборы, компьютеры и видеоаппаратуру.

Работали секции: общие вопросы изучения хаоса, пространственно-временной хаос, хаос в оптике, хаос в биологии, приложения в связи, приложения в управлении. Интересно отметить, что наряду с традиционной тематикой, связанной с изучением хаоса на различных моделях турбулентности, квантового хаоса на конференции была широко представлена тематика по синхронизации хаотических систем, управлению хаотическими системами, использованию хаоса для коммуникаций. Значительное число докладов было посвящено изучению хаотической динамики химических систем, систем метеорологии и океанографии, медицинских и биологических систем, а также моделей из области экономики и политики.

Нижегородский госуниверситет на этой конференции был представлен докладами Н.Ф. Рулькова, А.Р. Волковского «Синхронизация импульсно-связанных хаотических генераторов» и Н.В. Агудова, А.Н. Малахова «К вопросу об увеличении длины периодического режима в явлении перемежаемости при отображениях отрезка в себя под действием возрастающей интенсивности внешних флуктуаций».

Проведение следующей конференции планируется через 2 года в Швеции.

Н.В. Агудов

К СВЕДЕНИЮ АВТОРОВ

Правила оформления рукописей

1. Статьи объемом не более 16 страниц должны быть напечатаны на белой бумаге через два интервала и представлены в двух экземплярах. При компьютерном наборе размер шрифта – не меньше стандартного машинописного.

2. На первой странице перед текстом статьи должны быть напечатаны: индекс УДК, название статьи, инициалы и фамилии авторов, *краткий реферат статьи, составленный по форме удобной для непосредственного включения его в РЖ «Физика», издаваемый ВИНИГИ* (см. ниже). К статье прилагаются:

а) перевод на английский язык названия статьи, инициалов и фамилий авторов, краткого реферата;

б) краткие сведения об авторах с фотографиями любого формата.

Приложения даются в двух экземплярах.

3. Весь иллюстративный материал представляется в двух экземплярах. Рисунки выполняются тушью на белой бумаге. Рисунки, полученные машинной графикой, должны быть достаточно четкими и яркими. На обороте указываются: порядковый номер рисунка, фамилии авторов, название статьи. Подрисуночные подписи печатаются на отдельном листе и не должны дублировать внутритекстовое описание рисунка.

4. Все формулы должны быть вписаны черными чернилами четко и ясно. Формулы должны быть размечены во всех случаях, когда строчные и прописные буквы одинаковы по начертанию и отличаются только своими размерами (С и с, V и v, U и u, W и w, S и s, P и p, K и k, X и x, Y и y, Z и z, Q и q, J и j). Необходимо прописные буквы подчеркивать простым карандашом двумя черточками снизу ($\underline{\underline{C}}$, $\underline{\underline{V}}$), а строчные – двумя черточками сверху ($\overline{\overline{c}}$ и $\overline{\overline{v}}$). При написании необходимо также делать ясное различие между буквами J и I и пояснять их на полях. Буква O подчеркивается двумя черточками снизу, цифра 0 не подчеркивается. Особенно четко следует вписывать схожие по написанию l и e (l подчеркивается зеленым карандашом), k (русское) и k (латинское), h и n, q и g, «,» (запятую), «'» (штрих), «1» (единицу), «2» (двойку), г и z. Особое внимание должно быть обращено на аккуратное написание индексов и показателей степеней. Надстрочные знаки нужно отчеркивать дугой – \cup , подстрочные дугой – \cap . Индексы, являющиеся сокращениями слов, должны быть пояснены отдельно. В вещественных числах ставится десятичная точка.

5. Греческие буквы подчеркиваются красным карандашом, прописные указываются особо. Для обозначения вектора используются стрелки над буквой, для усреднения величины – черта сверху.

6. В библиографическом списке нумерация источников должна соответствовать очередности ссылок на них в тексте. В списке должны быть указаны:

а) для книг – фамилия автора, инициалы, название книги, город, издательство, год издания, том;

б) для журнальных статей – фамилия автора, инициалы, название статьи, название журнала, серия, год, том, номер, выпуск, первая страница статьи;

в) для депонированных статей – название статьи, инициалы, фамилия автора, название организации, в которой выполнена работа, город, год, объем статьи, название депонирующей организации, дата депонирования, регистрационный номер;

г) для препринта – фамилия автора, инициалы, название издания, полное название издающей организации, год, количество страниц;

д) для материалов конференций, школ, семинаров – фамилия автора, инициалы, название статьи, название издания, время и место проведения конференции, город, издательство, год, первая страница статьи.

Ссылки на неопубликованные работы нежелательны.

7. Статьи, направляемые авторам на переработку, должны быть возвращены в редакцию не позднее двух месяцев после получения. При нарушении этого условия статья рассматривается как вновь поступившая.

Статьи, присланные без соблюдения перечисленных выше правил, к рассмотрению редакцией не принимаются.

Рекомендации по составлению «краткого реферата» и «сведений об авторах»

1. Публикация реферата преследует две основные цели:

а) помочь ученым, работающим над теми же вопросами, по которым написана статья, уточнить, имеет ли смысл читать статью полностью;

б) упростить и ускорить работу реферативных журналов, которые получают возможность немедленно перепечатывать авторские рефераты;

Реферат должен представлять собой самостоятельное законченное сообщение объемом не более 200–250 слов. В нем должны быть обозначены основные идеи и результаты, содержащиеся в статье. Авторы должны иметь в виду, что рефераты могут оказаться единственными материалами, которые будут прочитаны.

2. Краткие сведения об авторах составляются по следующей форме:

Иванов Петр Сидорович – родился в 1938 году в Москве, окончил Московский физико-технический институт в 1961 году. После окончания МФТИ работает в ФИАН. Защитил докторскую диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук в МГУ (1964) и доктора физико-математических наук (1977) в области теории колебаний и волн, радиофизика и электроника, применение нелинейной динамики в различных областях науки. Автор монографии «Детерминированный хаос и экономика» и соавтор учебника «Волны в экологии». Опубликовал много научных статей по направлениям, указанным выше. Лауреат Государственной премии СССР. Редактор журнала International Journal of Chaos Theory и член редакционной коллегии журнала «Физика и жизнь».

Статьи принимаются на дискетах для компьютера IBM PC, формат MS DOS – 5,25" или 3,5". Текстовые файлы записываются в ASC II-кодировке. Иллюстрации – в виде файлов в формате PCX, TIFF или GIF. Наличие текста на дискете не исключает необходимость представления размеченной распечатки статьи (в двух экз.), с которой работает рецензент и из которой вносятся формулы в макет статьи. В конце статьи авторы должны указать наименование программы, в рамках которой выполнена работа, или наименование фонда поддержки. **Возврат дискет гарантируется.**

Зав. редакцией *Н.Н. Лёвина*
Редакторы *М.В. Попова, Н.Н. Лёвина*
Художник *Д.В. Соколов*
Оригинал – макет подготовлен *Г.А. Суминой* с использованием
программы Design Studio на компьютерной системе Apple Macintosh

Сдано в набор 22.03.94. Подписано к печати 27.06.94. Формат 70x108/16.
Бумага типографская №1. Печать офсетная. Гарнитура Латинская.
Усл. печ.л. 8,05 (5,75). Уч.-изд. л. 7,6. Тираж 200 экз. Заказ 2080.

Распространение журнала по подписке и предварительным заявкам
осуществляется Государственным учебно-научным центром «Колледж»
при Саратовском государственном университете.
Банковские реквизиты – р/с № 000609446 в КБ «Экономбанк»
г. Саратова, МФО 251279, корсчет банка 700161122, РКЦ, МФО 251008.

Подписная цена без стоимости почтовых расходов – 6000 руб.

Издательство ГосУНЦ «Колледж».
410071, Саратов, ул. Астраханская, 83.
Тел. (845-2)514298, факс (845-2) 240446

МГП «Типография №1». 410040, Саратов, Вишнёвая, 10.

© Издательство ГосУНЦ «Колледж»



© Оформление художника Д.В. Соколова, 1994