

*Журнал включен в «Перечень периодических научных и научно-технических изданий РФ, рекомендованных для публикации основных результатов диссертаций на соискание ученой степени доктора наук»*

**МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ**

Известия высших учебных заведений

**ПРИКЛАДНАЯ НЕЛИНЕЙНАЯ ДИНАМИКА**

*научно-технический журнал*

издается с 1993 года

Выходит 6 раз в год

Том 25, № 2, 2017, Саратов

---

**СО Д Е Р Ж А Н И Е**

От редактора .....	3
<b>ОБЗОРЫ АКТУАЛЬНЫХ ПРОБЛЕМ НЕЛИНЕЙНОЙ ДИНАМИКИ</b>	
<i>Гонченко А. С., Гонченко С. В., Казаков А. О., Козлов А. Д.</i> Математическая теория динамического хаоса и её приложения: Обзор. Часть 1. Псевдогиперболические аттракторы .....	4
<b>ПРИКЛАДНЫЕ ЗАДАЧИ НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ КОЛЕБАНИЙ И ВОЛН</b>	
<i>Мищенко М. А., Матросов В. В.</i> Синхронизация биений в системах фазовой автоподстройки частоты .....	37
<i>Переварюха А. Ю.</i> Переход от релаксационных колебаний к псевдопериодической траектории в новой модели динамики численности популяции...	51
<b>АВТОВОЛНЫ. САМООРГАНИЗАЦИЯ</b>	
<i>Усанов Д. А., Рытик А. П., Кутикова О. Ю., Иванова А. А.</i> Влияние микропримесей на характеристики осцилляций реакции Бриггса–Раушера.....	63
<b>НОВОЕ В ПРИКЛАДНОЙ ФИЗИКЕ</b>	
<i>Павлов Е. С., Высоцкий С. Л., Кожевников А. В., Дудко Г. М., Филимонов Ю. А.</i> Влияние параметрической неустойчивости поверхностных магнитостатических спиновых волн на формирование дефектных мод в одномерных магнетонных кристаллах с дефектами .....	74
<b>ИСТОРИЯ. PERSONALIA</b>	
<i>Трубецкова И. А.</i> Университетская вселенная ректора Г.К. Хворостина: Рождение и гибель.....	89

C O N T E N T S

От редактора .....	3
REVIEWS OF ACTUAL PROBLEMS OF NONLINEAR DYNAMICS	
<i>Gonchenko A. S., Gonchenko S. V., Kazakov A. O., Kozlov A. D.</i> Mathematical theory of dynamical chaos and its applications: Review. Part 1. Pseudohyperbolic attractors .....	4
APPLIED PROBLEMS OF NONLINEAR OSCILLATION AND WAVE THEORY	
<i>Mishchenko M.A., Matrosov V.V.</i> Synchronization of beats in phase-locked loops .....	37
<i>Perevaryukha A. Yu.</i> Transition from relaxation oscillations to pseudoperiodic trajectory in the new model of population dynamics .....	51
AUTOWAVES. SELF-ORGANIZATION	
<i>Usanov D. A., Rytik A. P., Kutikova O. U., Ivanova A. A.</i> The influence of the trace substances on the nature of the Briggs–Rauscher oscillating reaction .....	63
INNOVATIONS IN APPLIED PHYSICS	
<i>Pavlov E. S., Vysotsky S. L., Kozhevnikov A. V., Dudko G. M., Filimonov Yu. A.</i> Influence of parametric instability of magnetostatic surface spin waves on formation of defect modes in one-dimensional magnonic crystal with defect .....	74
HISTORY. PERSONALIA	
<i>Трубецкова И. А.</i> University Universe of the principal G. K. Chvorostin: The birth and the death .....	89



## МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ДИНАМИЧЕСКОГО ХАОСА И ЕЁ ПРИЛОЖЕНИЯ: ОБЗОР

### Часть 1. Псевдогиперболические аттракторы

А. С. Гонченко<sup>1</sup>, С. В. Гонченко<sup>1</sup>, А. О. Казаков<sup>2,1,3</sup>, А. Д. Козлов<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Нижегородский национальный исследовательский университет имени Н.И. Лобачевского  
Россия, 03950 Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23

<sup>2</sup>Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»  
Россия, 603155 Нижний Новгород, ул. Большая Печерская, д.25/12

<sup>3</sup>Удмуртский государственный университет  
Россия, 426034 Ижевск, ул. Университетская, 1  
E-mail: agonchenko@mail.ru, sergey.gonchenko@mail.ru,  
kazakovdz@yandex.ru, kozzloff@list.ru

В работе рассматриваются актуальные вопросы современной математической теории динамического хаоса и ее приложений. В настоящее время принято считать, что в конечномерных гладких динамических системах могут наблюдаться три принципиально различных формы хаоса. Это *диссипативный хаос*, математическим образом которого является странный аттрактор; *консервативный хаос*, для которого все фазовое пространство является большим «хаотическим морем» с беспорядочно расположенными внутри него эллиптическими островами; и *смешанная динамика*, характеризующаяся принципиальной неотделимостью в фазовом пространстве аттракторов, репеллеров и консервативного поведения траекторий.

В настоящей работе (открывающей цикл из трех статей) представлены элементы теории псевдогиперболических аттракторов многомерных отображений. Такие аттракторы, также как и гиперболические, являются настоящими странными аттракторами, однако, допускают существование гомоклинических касаний. Мы приводим математическое определение псевдогиперболического аттрактора для случая многомерных отображений, из которого выводим необходимые условия для его существования в трехмерном случае, формулируемые с помощью показателей Ляпунова. Мы также даем описание феноменологических сценариев возникновения псевдогиперболических аттракторов различных типов в однопараметрических семействах трехмерных диффеоморфизмов, предлагаем новые методы исследования таких аттракторов (в частности, метод карт седел и модифицированный метод диаграмм Ляпунова), а в качестве примеров рассматриваем ориентируемые и неориентируемые трехмерные обобщенные отображения Эно.

Во второй части будет дан обзор теории спиральных аттракторов как важного и часто встречающегося в приложениях типа диссипативного хаоса. Третья часть будет посвящена смешанной динамике – нового типа хаоса, который характерен, в частности, для обратимых (реверсивных) систем, то есть систем инвариантных относительно некоторых

замен координат и обращения времени. Хорошо известно, что такие системы встречаются во многих задачах механики, электродинамики и других областей естествознания.

*Ключевые слова:* Странный аттрактор, псевдогиперболичность, гомоклиническое касание, дискретный аттрактор Лоренца, трехмерное обобщенное отображение Эно.

DOI: 10.18500/0869-6632-2017-25-2-4-36

*Образец цитирования:* Гонченко А.С., Гонченко С.В., Казаков А.О., Козлов А.Д. Математическая теория динамического хаоса и её приложения: Обзор. Часть 1. Псевдогиперболические аттракторы // Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2017. Т. 25, № 2. С. 4–36.

## MATHEMATICAL THEORY OF DYNAMICAL CHAOS AND ITS APPLICATIONS: REVIEW

### Part 1. Pseudohyperbolic attractors

*A. S. Gonchenko<sup>1</sup>, S. V. Gonchenko<sup>1</sup>, A. O. Kazakov<sup>2,1,3</sup>, A. D. Kozlov<sup>1</sup>*

<sup>1</sup> N.I. Lobachevsky State University of Nizhny Novgorod – National Research University  
23 Prospekt Gagarina (Gagarin Avenue) BLDG 2, 2nd floor, 603950 Nizhny Novgorod, Russia

<sup>2</sup> National Research University Higher School of Economics  
25/12 Bolshaya Pecherskaya Ulitsa, 603155 Nizhny Novgorod, Russia

<sup>3</sup> Udmurt State University, Universitetskaya 1, 426034 Izhevsk, Russia

E-mail: agonchenko@mail.ru, sergey.gonchenko@mail.ru,

kazakovdz@yandex.ru, kozzloff@list.ru

We consider important problems of modern theory of dynamical chaos and its applications. At present, it is customary to assume that in the finite-dimensional smooth dynamical systems three fundamentally different forms of chaos can be observed. This is the dissipative chaos, whose mathematical image is a strange attractor; the conservative chaos, for which the whole phase space is a large «chaotic sea» with elliptical islands randomly disposed within it; and the mixed dynamics which is characterized by the principle inseparability, in the phase space, of attractors, repellers and orbits with conservative behavior.

In the first part of this series of our works, we present some elements of the theory of pseudohyperbolic attractors of multidimensional maps. Such attractors, the same as hyperbolic ones, are genuine strange attractors, however, they allow homoclinic tangencies. We also give a description of phenological scenarios of the appearance of pseudohyperbolic attractors of various types for one parameter families of three-dimensional diffeomorphisms, and, moreover, consider some examples of such attractors in three-dimensional orientable and nonorientable Hénon maps.

In the second part, we will give a review of the theory of spiral attractors. Such type of strange attractors are very important and are often observed type in dynamical systems. The third part will be dedicated to mixed dynamics – a new type of chaos which is typical, in particular, for (time) reversible systems i.e. systems which are invariant with respect to some changes of coordinates and time reversing. It is well known that such systems occur in many problems of mechanics, electrodynamics, and other areas of natural sciences.

*Keywords:* Strange attractor, pseudohyperbolicity, homoclinic tangency, discrete Lorenz attractor, three-dimensional generalized Hénon map.

DOI: 10.18500/0869-6632-2017-25-2-4-36

*Paper reference:* Gonchenko A.S., Gonchenko S.V., Kazakov A.O., Kozlov A.D. Mathematical theory of dynamical chaos and its applications: Review. Part 1. Pseudohyperbolic attractors. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*. 2017. Vol. 25. Issue 2. P. 4–36.



## Введение

В настоящее время можно выделить три сравнительно независимых и различных формы динамического хаоса гладких конечномерных систем – это «диссипативный хаос», «консервативный хаос» и «смешанная динамика». Первый из них характеризуется существованием у (диссипативной) системы *странного аттрактора* – нетривиального притягивающего замкнутого инвариантного множества, лежащего в фазовом пространстве системы внутри поглощающей области, в которую входят все траектории, пересекающие границу этой области. В отличие от диссипативного, консервативный хаос как бы «размазан» по всему фазовому пространству – в этом случае все точки являются неблуждающими (по теореме Пуанкаре о возвращаемости). Если говорить в терминах аттракторов ( $\mathcal{A}$ ) и репеллеров – аттракторов при обращении времени ( $\mathcal{R}$ ), которые, по известной теореме Конли [1], существуют у любой системы с компактным фазовым пространством, то  $\mathcal{A} \cap \mathcal{R} = \emptyset$  в случае диссипативного хаоса, и  $\mathcal{A} = \mathcal{R}$  в случае консервативного хаоса. Для сравнения, «смешанная динамика» – это тот новый тип хаоса, который характеризуется тем, что устойчивые элементы динамики (например, устойчивые периодические траектории) сосуществуют с вполне неустойчивыми, и они неотделимы друг от друга.

Само явление смешанной динамики было открыто в работе Гонченко–Шильникова–Тураева [2]. В этой работе, в частности, было доказано, что в случае двумерных диффеоморфизмов существуют области Ньюхауса, в которых плотны диффеоморфизмы со счетным множеством устойчивых, вполне неустойчивых и седловых периодических траекторий; при этом замыкания множеств траекторий разных типов имеют непустое пересечение. Естественно, что при любом определении аттрактора, это должно быть, во всяком случае, замкнутое инвариантное множество, которое устойчиво и которое должно содержать устойчивые периодические траектории, если они есть. То же самое (относительно вполне неустойчивых периодических траекторий) должно выполняться и для репеллеров. Таким образом, в [2] было показано, что аттрактор может пересекаться с репеллером, что формально согласуется с теоремой Конли [1]. Математическое обоснование этого явления дано, например, в работах [3,4]. Тогда для «смешанной динамики» формально выполняются условия  $\mathcal{A} \cap \mathcal{R} \neq \emptyset$  и  $\mathcal{A} \neq \mathcal{R}$ , которые являются дополнительными к условиям для «консервативного хаоса» ( $\mathcal{A} = \mathcal{R}$ ) и «диссипативного хаоса» ( $\mathcal{A} \cap \mathcal{R} = \emptyset$ ).

Что касается странных аттракторов, которым посвящена настоящая статья, то их общепринятого определения, которое годилось бы на все случаи жизни, до сих пор не существует. Исключения составляют так называемые *настоящие странные аттракторы*, определение которых включают два основных момента: 1) существование поглощающей области в фазовом пространстве (в которую входят все траектории, пересекающие границу этой области) и 2) неустойчивость траекторий на аттракторе, которая постулируется тем, что у каждой траектории на аттракторе существует положительный максимальный ляпуновский показатель. Предполагается также, что свойства «1» и «2» выполняются для всех близких систем. С другой стороны, к странным аттракторам, с должным на то основанием (см. дискуссию в [5–7]) относят также так называемые *квазиаттракторы* – нетривиальные притягивающие инвариантные множества, которые либо сами содержат устойчивые периодические

траектории весьма больших периодов (и с очень узкими областями притяжения), либо такие траектории появляются при сколь угодно малых гладких возмущениях. Последнее обстоятельство связано с тем, что квазиаттракторы допускают существование седловых периодических траекторий, у которых устойчивые и неустойчивые инвариантные многообразия пересекаются нетрансверсально. В свою очередь, бифуркации таких гомоклинических касаний при выполнении определенных условий-критериев [8–12] приводят к рождению асимптотически устойчивых периодических траекторий, притягивающих инвариантных торов, маленьких странных аттракторов типа аттракторов Эно [13–17] и даже аттракторов лоренцевского типа [18–22] и т.п.

Заметим также, что в диссипативных системах со специальными структурами могут встречаться странные аттракторы других типов, формально не вписывающиеся в эту схему. Например, негладкие или разрывные системы могут обладать аттракторами с сингулярно гиперболическим поведением траекторий, в том смысле, что у некоторых траекторий не определены их ляпуновские показатели (в силу негладкости самой системы), хотя здесь существует и поглощающая область, и нужное разбегание траекторий на аттракторе. Примерами таких аттракторов являются аттрактор Лози [23] и аттрактор Белых [24]. Совершенно другой тип сложного непериодического поведения траекторий демонстрируют так называемые странные нехаотические аттракторы, которые возникают в специальных моделях, имеющих структуру прямого произведения неспецифической динамической системы и квазипериодической системы. Они характеризуются тем, что у любой траектории один из ляпуновских показателей равен нулю, а остальные – меньше нуля; допускается также существование небольшого числа (меры нуль) траекторий с положительным показателем. Более подробно о таких аттракторах см., например, в [25].

Можно сказать, что большинство известных странных аттракторов гладких динамических систем, в том числе встречающихся в приложениях, являются, по существу, квазиаттракторами. Примерами таких аттракторов являются: многочисленные аттракторы типа «тор-хаос», возникающие в результате разрушения двумерного тора, [26]; аттракторы в цепях Чуа [27]; аттрактор Эно [28, 29]; аттракторы в периодически возмущенных двумерных системах с гомоклиническими восьмерками седла [30] и многие другие. Особый класс квазиаттракторов составляют так называемые спиральные аттракторы, которые содержат седло-фокусы. Они часто возникают в приложениях, и примеры таких аттракторов хорошо известны. Это, например, спиральные аттракторы трехмерных потоков, такие как аттрактор Рёсслера [31, 32], аттракторы в моделях Арнеодо–Калле–Трессе [33–35] и т.п. Отметим, что в работе Л.П.Шильникова [36] был предложен достаточно простой и универсальный феноменологический сценарий возникновения спиральных аттракторов в однопараметрических семействах трехмерных потоков, причем таких аттракторов, которые содержат седло-фокус с двумерным неустойчивым многообразием. С некоторыми модификациями этот сценарий легко переносится и на случай трехмерных отображений [37]. Поэтому для таких спиральных аттракторов нами в [38] был предложен обобщающий термин «аттрактор Шильникова» для потоков (к ним относятся, в частности, указанные выше аттракторы Рёсслера и АСТ-аттракторы), или «дискретный аттрактор Шильникова» для отображений. Различные примеры последних были найдены в трехмерных отображениях Эно [37–41], здесь нами были получены достаточно ин-

тересные результаты, которые мы предполагаем представить во второй части нашего цикла работ.

До сравнительно недавнего времени к настоящим странным аттракторам гладких динамических систем можно было с уверенностью относить только лишь гиперболические аттракторы и аттракторы Лоренца. Однако ситуация изменилась после работы Тураева и Шильникова [42], в которой был введен новый класс настоящих странных аттракторов, так называемых *диких гиперболических аттракторов*. Эти аттракторы, в отличие от гиперболических, допускают существование гомоклинических касаний, но не содержат устойчивых периодических траекторий и любых других собственных устойчивых инвариантных подмножеств, которые не возникают также при малых гладких возмущениях. Системы с дикими гиперболическими аттракторами принадлежат областям Ньюхауса, то есть открытым ( $C^2$ -топологии) областям из пространства динамических систем, в которых плотны системы с гомоклиническими касаниями.<sup>1</sup> Однако эти касания, в отличие от гомоклинических касаний у систем с квазиаттракторами, являются такими, что их бифуркации не приводят к рождению устойчивых периодических траекторий [10–12] (см. также ниже раздел 1).

В работе [42] был также построен пример четырехмерного потока с диким спиральным аттрактором, содержащим состояние равновесия типа седло-фокус. Одной из главных особенностей спирального аттрактора Тураева–Шильникова является то, что он обладает *псевдогиперболической структурой*. В двух словах, эта его особенность проявляется в том, что в окрестности аттрактора, в некоторой его поглощающей области  $D$ , имеет место слабый вариант гиперболичности: существует разбиение окрестности на инвариантные относительно дифференциала и трансверсальные подпространства такие, что на одном из них имеет место экспоненциальное сжатие вдоль всех направлений, а на другом – экспоненциальное растяжение объема. Требуется также, что такое разбиение непрерывно зависит от точки на  $D$ ; соответствующие коэффициенты сжатия и растяжения, а также углы между касательными векторами подпространств равномерно ограничены; в растягивающем объеме подпространстве если и есть какие-то сжатия, то все они равномерно слабее, чем любое сжатие в сильно сжимающем пространстве.

Заметим, что условия псевдогиперболичности проверяются для точек поглощающей области  $D$ . Если они выполняются, то тогда, как показано в [42]: аттрактор существует и он единственный; у каждой его траектории существует положительный максимальный ляпуновский показатель (это вытекает из свойства растяжения объемов), а сам аттрактор является аттрактором по Рюэллю [44], то есть замкнутым, инвариантным, асимптотически устойчивым и цепно транзитивным множеством (см. подробнее ниже в разделе 2).

Фактически, в работе [42] были заложены основы очень перспективной теории псевдогиперболических странных аттракторов. Новые примеры таких аттракторов были также вскоре найдены. Так, в работе [45] было показано, что у трехмерных

---

<sup>1</sup>Сам термин «дикий» восходит к статье Ньюхауса [43], в которой было введено понятие «дикого гиперболического множества», то есть такого равномерно гиперболического инвариантного множества, у которого среди его устойчивых и неустойчивых инвариантных многообразий всегда есть пересекающиеся нетрансверсально, и это свойство сохраняется при всех малых  $C^2$ -гладких возмущениях.

отображений Эно вида

$$\bar{x} = y, \quad \bar{y} = z, \quad \bar{z} = M_1 + Bx + M_2y - z^2, \quad (1)$$

где  $M_1, M_2, B$  – параметры ( $B$  – якобиан отображения), в некоторой области параметров, примыкающих к точке  $A^* = (M_1 = 1/4, M_2 = 1, B = 1)$ , существуют дискретные аттракторы Лоренца.<sup>2</sup> На рис. 1 показаны примеры дискретных аттракторов Лоренца в случае отображения (1). Заметим, что их фазовые портреты очень похожи на потоковые аттракторы Лоренца. Однако значения параметров, при которых эти аттракторы наблюдаются, совсем не близки к  $A^*$ : здесь  $M_1 = 0, M_2 = 0.85, B = 0.7$  (рис. 1, а) и  $M_1 = 0, M_2 = 0.825, B = 0.7$  (рис. 1, б). Поэтому условия псевдогиперболичности таких аттракторов нужно проверять дополнительно.

Для авторов настоящей статьи такая задача представляется очень сложной. Фактически, мы можем только лишь проверить некоторые необходимые условия. Например, для псевдогиперболического аттрактора трехмерного отображения его ляпуновские показатели  $\Lambda_1 > \Lambda_2 > \Lambda_3$  должны удовлетворять условиям

$$\Lambda_1 > 0, \quad \Lambda_1 + \Lambda_2 > 0, \quad \Lambda_1 + \Lambda_2 + \Lambda_3 < 0. \quad (2)$$

Первое и третье условия говорят о том, что наблюдаемый аттрактор является странным, а второе – то, что на нем имеет место растяжение двумерных площадей.

Однако ляпуновские показатели являются усредненными характеристиками траекторий на аттракторе, поэтому, в принципе, не исключена ситуация, когда

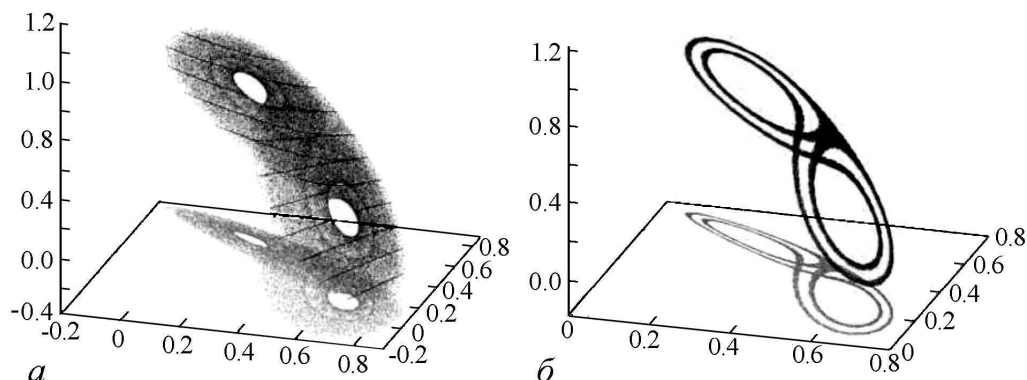


Рис. 1. Портреты дискретных аттракторов Лоренца в случае отображения (1) при  $M_1 = 0, B = 0.7$  и различных значениях  $M_2$ : а – 0.85, б – 0.825. В обоих случаях показано порядка  $10^5$  итераций одной начальной точки на аттракторе. Показаны также проекции аттракторов на плоскость  $(x, y)$  и некоторые срезы аттрактора плоскостью  $z = \text{const}$  (хотя эти срезы выглядят как линии, на самом деле они имеют сложную канторову структуру). Рисунок из работы [45]

<sup>2</sup>Псевдогиперболичность таких аттракторов проверялась в [45] аналитически на основе того, что при близких к  $A^*$  значениях параметров квадрат отображения в некоторой окрестности седловой неподвижной точки может быть представлен как отображение Пуанкаре периодически возмущенной системы Шимицу–Мориока, которая имеет аттрактор Лоренца [46, 47]. Если возмущение достаточно мало (что определяется близостью параметров к  $A^*$ ), то искомая псевдогиперболичность должна естественно наследоваться от аттрактора Лоренца (который сам является таковым [48, 49]). В частности, в работе [50] было показано, что свойство псевдогиперболичности потоков сохраняется также и для их отображений Пуанкаре при малых периодических возмущениях.

аттрактор имеет очень маленькие «дырки» (размеры которых могут быть меньше всякой разумной точности счета), где условия (2) для соответствующих траекторий нарушаются. По нашей просьбе, условия псевдогиперболичности аттракторов (см. рис. 1) были проверены с помощью методов интервальной арифметики математиками из университета Уппсалы (Швеция) Ж. Фигуеросом и В. Такером, которые получили весьма интересные и очень тонкие результаты. Так, в случае аттрактора (см. рис. 1, а) внутри него была найдена устойчивая периодическая траектория с областью притяжения размером порядка  $10^{-40}$ , тогда как дискретный аттрактор Лоренца (см. рис. 1, б) оказался настоящим псевдогиперболическим аттрактором. Также независимо и другими методами аналогичные результаты были получены саратовскими математиками С.П. Кузнецовым и П.В. Купцовым. При этом были проверены на псевдогиперболичность также и некоторые другие аттракторы из нашей работы [40]. Надеемся, что эти интересные результаты будут опубликованы в ближайшее время.

С другой стороны, сам факт существования гомоклинических касаний в аттракторе уже может подсказать, является ли рассматриваемый аттрактор настоящим (псевдогиперболическим) аттрактором или квазиаттрактором. Так, например, аттракторы (см. рис. 1) содержат седловую неподвижную точку с мультипликаторами  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  такими, что  $\lambda_1 < -1, 0 < \lambda_2 < 1, -1 < \lambda_3 < 0, |\lambda_2| > |\lambda_3|$  и  $\lambda_1\lambda_2\lambda_3 = B = 0.7 < 1$ , а кроме того, седловая величина  $\sigma = |\lambda_1\lambda_2|$  больше 1. Тогда неизбежно возникающие здесь гомоклинические касания в общем случае будут такими, как на рис. 3, и бифуркации таких касаний<sup>3</sup> не приводят к рождению устойчивых периодических траекторий [10–12].

*Замечание 1.* С другой стороны, устойчивые периодические траектории обязательно рождаются, если  $\sigma < 1$ , или если неподвижная (периодическая) точка на аттракторе является седло-фокусом (неважно, с одномерным или двумерным неустойчивым многообразием). В частности, спиральные аттракторы трехмерных гладких отображений или потоков всегда являются квазиаттракторами. В этой связи, кажется весьма интересной и такая проблема: *пусть трехмерный диффеоморфизм в  $R^3$  имеет странный аттрактор, содержащий седловую неподвижную точку с двумерным неустойчивым инвариантным многообразием, тогда этот аттрактор является квазиаттрактором.*<sup>4</sup>

По этой причине в настоящей работе мы рассматриваем только такие странные аттракторы трехмерных отображений, которые содержат неподвижные точки типа

<sup>3</sup>В общем случае такие (квадратичные) гомоклинические касания называются «простыми» [12], и в случае  $\sigma > 1$  они не разрушают псевдогиперболичность, если сама неподвижная точка является псевдогиперболической, хотя и влекут «дикую гиперболичность» (более подробно об этом см. в [10, 12, 51]).

<sup>4</sup>Эта проблема кажется весьма трудной, и ее решение связано, например, с доказательством существования так называемых непростых гомоклинических касаний [21, 52, 53], примеры которых показаны на рис. 4, только здесь направление стрелок нужно поменять на противоположное, чтобы неустойчивое многообразие точки  $O$  стало двумерным. Заметим, что бифуркации таких касаний приводят к рождению устойчивых периодических траекторий [52]. В свою очередь, появление непростых касаний в рассматриваемом случае следует ожидать из-за того, что само двумерное неустойчивое многообразие, чтобы оно принадлежало аттрактору, должно бесконечно много раз «складываться» в разных направлениях (это похоже на то, как если бы мы пытались «упаковать» двумерную плоскость в трехмерный куб, избегая при этом появления острых углов).

седло с одномерными неустойчивыми многообразиями и с седловой величиной  $\sigma$  большей 1. Более того, основное внимание мы уделяем так называемым гомоклиническим аттракторам, которые содержат *ровно одну* неподвижную точку. Как показано в работах [37, 38, 40, 41, 45], это направление является весьма перспективным.

*Содержание работы.* В разделе 1 рассматриваются основные свойства псевдогиперболических отображений (диффеоморфизмов) и обсуждаются типы гомоклинических касаний, которые поддерживают или разрушают псевдогиперболичность. В разделе 2 обсуждаются феноменологические сценарии возникновения странных гомоклинических аттракторов в однопараметрических семействах трехмерных диффеоморфизмов, как ориентируемых так и неориентируемых. В разделе 3 приводятся примеры таких аттракторов в случае трехмерных обобщенных отображений Эно. В Приложении дается определение псевдогиперболического диффеоморфизма.

## 1. Псевдогиперболичность и гомоклинические касания

В этом разделе рассмотрим основные понятия теории псевдогиперболических странных аттракторов. В случае потоков определение псевдогиперболичности было дано в работе Тураева и Шильникова [42] (см. также [50, 54]), а в случае отображений определение дано в [55] (см. также Приложение к настоящей статье). Если говорить коротко, то псевдогиперболичность диффеоморфизма  $f$  на некоторой области  $\mathcal{D}$  означает, что в каждой точке этой области существуют два трансверсальных линейных подпространства  $N_1$  и  $N_2$ , непрерывно зависящие от точки и инвариантные относительно дифференциала  $Df$  отображения, такие, что  $Df$  является экспоненциально сильно сжимающим на  $N_1$  и растягивающим (экспоненциально) объемы на  $N_2$  (здесь слово «сильно» означает, что любое возможное сжатие в  $N_2$  равномерно слабее любого сжатия в  $N_1$ ). Таким образом, в отличие от гиперболичности, здесь не требуется, чтобы растяжение в  $N_2$  существовало по всем направлениям. Тем не менее, псевдогиперболичность также, как и гиперболичность, сохраняется при малых гладких возмущениях [42]. Поэтому если диффеоморфизм  $f$  имеет аттрактор в  $\mathcal{D}$ , то этот аттрактор является странным, так как растяжение объемов в  $N_2$  гарантирует существование положительного максимального ляпуновского показателя у любой траектории. Другими словами, псевдогиперболические аттракторы являются настоящими аттракторами.

Однако в отличие от гиперболических аттракторов и аттракторов Лоренца, у псевдогиперболических аттракторов могут существовать *гомоклинические касания*. Более того, если заранее не известно, что странный аттрактор является гиперболическим, то у него помимо грубых гомоклинических траекторий (в точках которых устойчивые и неустойчивые инвариантные многообразия седловых периодических траекторий пересекаются трансверсально) должны существовать и негрубые. Само по себе возникновение определенного гомоклинического касания не является чем-то исключительным – это бифуркационный момент коразмерности один в общем случае (когда касание квадратичное). Однако, как показал еще Ньюхаус [43], эта бифуркация влечет чрезвычайно сложную структуру бифуркационного множества. В частности, здесь возникает бесконечно много вторичных гомоклинических касаний. Эти касания могут быть вырожденными [56], что, в свою очередь, означает воз-

возможность появления сколь угодно вырожденных периодических траекторий и т.п. Все это приводит к тому, что бифуркации гомоклинических касаний нельзя изучить полностью, например, с помощью конечно-параметрических семейств – традиционного аппарата классической теории бифуркаций. Здесь по необходимости возникают задачи другого рода, связанные с исследованием основных бифуркаций и основных характеристических свойств таких систем. При этом, что является весьма важным и интересным, вопрос о том, какие бифуркации и какие характеристические свойства являются основными, должен решать сам исследователь.

В теории странных аттракторов гладких динамических систем один из наиболее важных вопросов связан с определением того, является ли данный аттрактор квазиаттрактором или настоящим аттрактором (в частности, псевдогиперболическим). Иногда этот вопрос решается просто и параллельно с основными компьютерными вычислениями. В случае странных аттракторов двумерных диффеоморфизмов (если таковые не являются гиперболическими) бифуркации неизбежных в них гомоклинических касаний приводят к возникновению устойчивых периодических траекторий весьма больших периодов [8], и соответственно любой такой аттрактор следует считать квазиаттрактором.<sup>5</sup>

В случае странных аттракторов трехмерных диффеоморфизмов, которые являются основным объектом настоящей статьи, вопрос об определении их типов (квазиаттрактор или настоящий аттрактор) является более сложным. Однако и здесь гомоклинические касания, обнаруживаемые в аттракторах, являются своеобразными индикаторами. Так, если аттрактор допускает гомоклинические касания к неподвижной или периодической точке такие, как на рис. 2, то он определенно является квазиаттрактором. В первом случае (рис. 2, а) неподвижная точка является седлом с седловой величиной  $\sigma$  меньше единицы, а во втором случае (рис. 2, б) – седло-фокусом. Здесь требуется только, чтобы якобиан  $J$  неподвижной точки был меньше единицы, и в случае седла его неустойчивое многообразие одномерно (в случае седло-фокуса оно может быть как одномерным, так и двумерным).

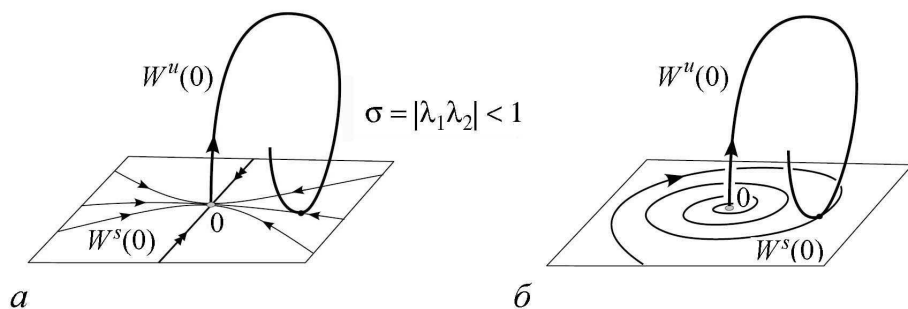


Рис. 2. Гомоклинические касания, бифуркации которых приводят к рождению устойчивых периодических траекторий

<sup>5</sup>Это справедливо, например, и для аттракторов Эно, у которых устойчивые периодические траектории могут отсутствовать для значений параметров, образующих нигде не плотное множество положительной меры, согласно теории Бенедикса–Карлесона [29]. Однако они сразу возникают при сколь угодно малых возмущениях.

С другой стороны, весьма важно, что существуют гомоклинические касания, которые не разрушают псевдогиперболичность. В случае трехмерных диффеоморфизмов таковыми являются *простые гомоклинические касания*, [10,51], при условии, что  $\sigma > 1$ . Пусть, например, диффеоморфизм  $f$  имеет седловую неподвижную (периодическую) точку  $O$  с действительными мультипликаторами  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  такими, что  $|\lambda_1| > 1 > |\lambda_2| > |\lambda_3| > 0$  при условии, что  $\sigma = |\lambda_1||\lambda_2| > 1$ . У таких касаний сама точка является псевдогиперболической: у неё  $N_1(O)$  – это прямая, проходящая через  $O$  в направлении собственного вектора матрицы линеаризации  $A$ , отвечающего её сильно устойчивому собственному значению (мультипликатору)  $\lambda_3$ , а  $N_2(O)$  – это плоскость, натянутая на собственные вектора матрицы  $A$ , отвечающие мультипликаторам  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$ . Очевидно, у любой точки  $p$  из малой окрестности  $U(O)$  седла  $O$  будут такие же инвариантные разложения на пространства  $N_1(p)$  и  $N_2(p)$ . Аналогичные инвариантные разложения вблизи всей гомоклинической траектории также удастся получить, если гомоклиническое касание простое.

Последнее означает следующее. Возьмем две произвольные гомоклинические точки  $p$  и  $q$  в  $U(O)$  такие, что  $p \in W_{loc}^u(O)$  и  $q \in W_{loc}^s(O)$ , по которым<sup>6</sup> определим так называемое глобальное отображение  $T_1$ , строящееся по траекториям рассматриваемого диффеоморфизма и действующее из малой окрестности  $V(p)$  точки  $p$  в малую окрестность точки  $q$  так, что  $T_1(p) = q$  (заметим, что если  $f^s(p) = q$  для некоторого натурального  $s$ , то  $T_1 = f^s|_{V(p)}$ ). Тогда требуется, что плоскость  $DT_1(N_2(p))$  пересекается трансверсально с  $N_1(q)$  и с  $W_{loc}^s(O)$ . Заметим, что при этом кривая  $T_1(W_{loc}^u(O))$  касается двумерной плоскости  $W_{loc}^s(O)$  вдоль вектора  $l_{tan}$ , который, в свою очередь, образует ненулевой угол с прямой  $N_1(q)$ , (рис. 3).

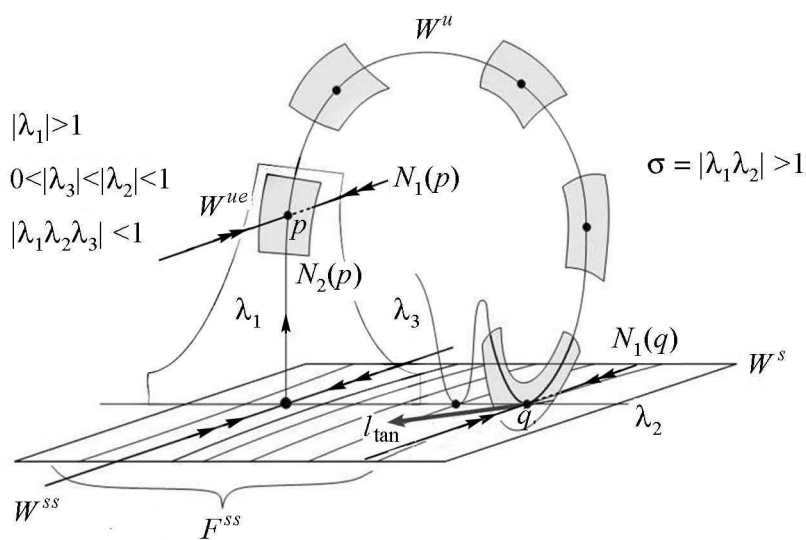


Рис. 3. К определению простого гомоклинического касания

<sup>6</sup>Заметим, что локальные инвариантные многообразия  $W_{loc}^u(O)$  и  $W_{loc}^s(O)$  всегда можно распрямить, введя в  $U(O)$  такие  $C^r$ -гладкие координаты  $(x, y, z)$ , в которых  $W_{loc}^u(O) = \{x = 0, y = 0\}$  и  $W_{loc}^s(O) = \{z = 0\}$ , [12].



Если аттрактор трехмерного гладкого отображения является псевдогиперболическим, то он может содержать только простые гомоклинические касания.<sup>7</sup> При любых малых гладких возмущениях псевдогиперболичность сохраняется, но если эти возмущения не слишком малы, она может разрушиться. При этом само разрушение может быть вызвано появлением таких гомоклинических касаний как на рис. 2 (например, сама неподвижная точка, первоначально с  $\sigma > 1$ , в процессе эволюции может стать точкой с  $\sigma < 1$ , или, вообще, седло-фокусом). Более тонкий механизм разрушения псевдогиперболичности связан с возникновением так называемых непростых гомоклинических касаний, примеры которых показаны на рис. 4. При этом, как было установлено в [52, 53, 58], при бифуркациях таких гомоклинических касаний уже могут рождаться устойчивые периодические траектории, замкнутые инвариантные кривые и даже нетривиальные притягивающие инвариантные множества, например, маленькие аттракторы лоренцевского типа [58].

Отсюда можно сделать важный вывод для теории странных аттракторов трехмерных гладких отображений: если такой аттрактор является настоящим, то он должен быть либо гиперболическим, либо псевдогиперболическим. Что касается гиперболических аттракторов, то их математическая теория достаточно хорошо развита (см., например, [59]). Более того, после замечательных работ С.П. Кузнецова [60–63] стало известно, что такие аттракторы встречаются также и в приложениях. Заметим, что для доказательства того, что странный аттрактор в некоторой модели является гиперболическим, разработаны достаточно тонкие качественные и компьютерные методы. Как мы знаем, аналогичные методы сейчас создаются и для детектирования псевдогиперболических аттракторов в научных школах из Нижнего Новгорода, Саратова и Уппсалы (Швеция). В частности, в наших недавних работах были предложены новые качественные методы исследования таких аттракторов, включая построение феноменологических сценариев их возникновения в однопараметрических семействах [37, 38, 40, 41], поисковые методы, основанные на эффективном использо-

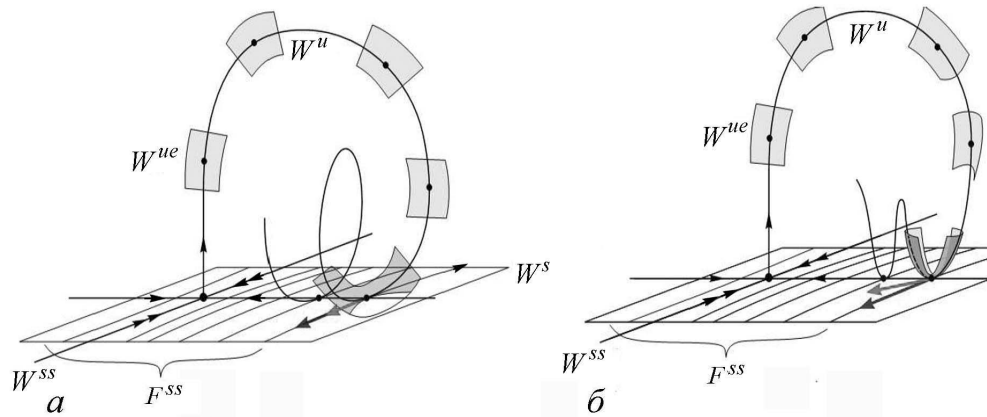


Рис. 4. Два типа непростых гомоклинических касаний: *a* – поверхность  $T_1(N_2(p))$  пересекается трансверсально с  $W_{loc}^s(O)$ , но вектор  $\ell_{tan}$  лежит в  $N_1(q)$ ; *б* – поверхность  $T_1(N_2(p))$  касается  $W_{loc}^s(O)$

<sup>7</sup>При этом кроме квадратичных касаний, здесь могут существовать гомоклинические касания произвольно больших порядков [56], однако все они тоже являются простыми в том смысле, что в любой гомоклинической точке  $p$  подпространства  $N_2(p)$  и  $N_1(p)$  пересекаются трансверсально (см. подробнее в [57]).

вании так называемых «карт седел» [40] и ляпуновских диаграмм и т.п. В следующих разделах мы дадим некоторый обзор этих методов и приведем примеры некоторых полученных с помощью этих методов аттракторов, которые при первом рассмотрении кажутся настоящими (псевдогиперболическими) аттракторами.

## 2. О феноменологических сценариях возникновения странных аттракторов трехмерных отображений

В этом разделе мы рассмотрим вопросы качественного изучения странных аттракторов трехмерных отображений. При этом основное внимание будем уделять тем аттракторам, которые могут быть псевдогиперболическими. Здесь имеется в виду то, что для рассматриваемых аттракторов мы проверяем только необходимое условие (2) (см. также *Замечание 1*). Кроме того, ограничимся исследованием так называемых *гомоклинических аттракторов*, то есть содержащих только одну неподвижную точку  $O$  и её неустойчивое многообразие.

При этом под аттрактором отображения  $f$ , следуя Рюэллю [44], будем понимать *замкнутое, инвариантное, устойчивое и цепно-транзитивное множество*  $A$ . В качестве устойчивости здесь будем рассматривать обычную асимптотическую устойчивость, означающую, что аттрактор лежит внутри некоторой поглощающей области  $D$ , все точки которой при положительных итерациях отображения  $f$  стремятся к  $A$ . Напомним, что цепная транзитивность (см., например, [42]) означает, что любые две точки на аттракторе могут быть соединены  $\varepsilon$ -траекторией для любого  $\varepsilon > 0$ . Это значит, что для любых точек  $a, b \in A$  и любого  $\varepsilon > 0$  в  $A$  существуют точки  $a = x_0, x_1, \dots, x_{N-1}, x_N = b$  (здесь  $N = N(\varepsilon)$ ) такие, что  $x_i \in A$  и  $\text{dist}(x_{i+1}, f(x_i)) < \varepsilon, i = 0, \dots, N - 1$ . Последовательность точек  $\{x_i\}$  называется  $\varepsilon$ -траекторией точки  $x_0$  длины  $N + 1$ , а точка  $b$  называется  $\varepsilon$ -достижимой от точки  $a$ . Тогда гомоклинический аттрактор с точкой  $O$  – это замкнутое, инвариантное множество, состоящее из точек,  $\varepsilon$ -достижимых от точки  $O$ , или, как говорят,  $A$  является пролонгацией точки  $O$ .

В этом случае геометрически аттрактор  $A$ , как множество в  $R^3$ , можно рассматривать как замыкание (пролонгацию) неустойчивого многообразия его неподвижной точки  $O$ . Из этого в общем-то очевидного наблюдения, можно сделать вывод, что геометрические, а также динамические свойства гомоклинического аттрактора во многом определяются его гомоклинической структурой, то есть характером пересечений устойчивых и неустойчивых инвариантных многообразий самой точки  $O$ . В связи с этим, в работе [37] нами были предложены достаточно простые феноменологические сценарии возникновения некоторых типов гомоклинических аттракторов в однопараметрических семействах отображений, начинающихся с простого аттрактора – устойчивой неподвижной точки. Два таких сценария схематически представлены на рис. 5.

Отметим в этих сценариях две главные, с нашей точки зрения, особенности. Первая – это то, что устойчивая неподвижная точка  $O$  теряет устойчивость при изменении параметра в результате бифуркации удвоения периода. Сразу после этой бифуркации точка  $O$  становится седлом с одномерным неустойчивым многообразием, а в ее окрестности рождается устойчивый цикл  $(p_1, p_2)$  периода 2 (то есть  $f(p_1) = p_2$

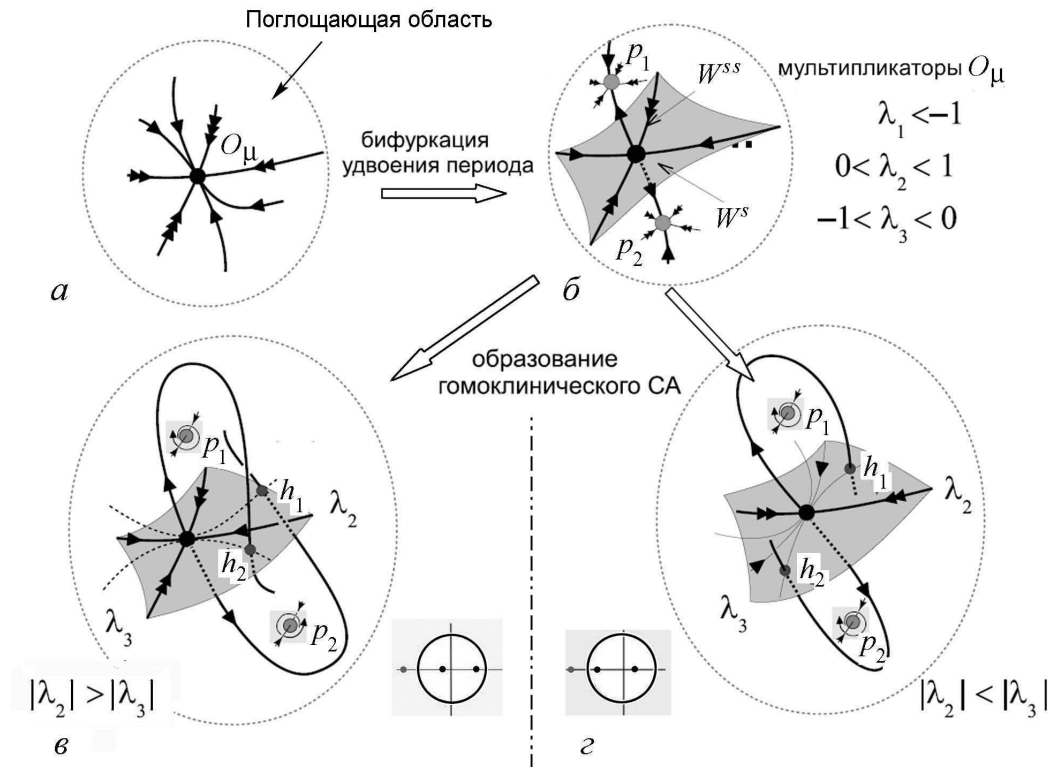


Рис. 5. Два феноменологических сценария возникновения гомоклинических аттракторов либо лоренцевского типа, путь (а) → (b) → (c); либо восьмерочного типа, путь (а) → (b) → (d)

и  $f(p_2) = p_1$ ), который становится аттрактором. При этом точка  $O$  должна иметь собственные значения  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  такие, что  $\lambda_1 < -1$ ,  $|\lambda_{2,3}| < 1$  и  $\lambda_2\lambda_3 < 0$ . Пусть при дальнейшем изменении параметра точка  $O$  больше не претерпевает бифуркаций, а цикл  $(p_1, p_2)$  теряет свою устойчивость. Каким образом это происходит, пока не имеет значения, но вот что важно – и это является второй главной особенностью указанных сценариев – происходит глобальная бифуркация, связанная с образованием гомоклинических пересечений одномерного неустойчивого  $W^u$  и двумерного устойчивого  $W^s$  инвариантных многообразий точки  $O$ . При этом конфигурация этих многообразий будет похожа на то, что мы видим на рис. 5, в и г.

Чтобы объяснить, как образуются две такие разные конфигурации, предположим для определенности, что  $\lambda_2 > 0$  и  $\lambda_3 < 0$  (здесь также  $\lambda_1 < -1$ ). Тогда  $W^u$  разбивается точкой  $O$  на две связные компоненты-сепаратрисы  $W^{u+}$  и  $W^{u-}$ , инвариантные относительно  $f^2$  такие, что  $f(W^{u+}) = W^{u-}$  и  $f(W^{u-}) = W^{u+}$ . Пусть предположим,  $W^{u+}$  пересекает  $W_{loc}^s(O)$  в точке  $h_1$ , тогда автоматически  $W^{u-}$  пересекает  $W_{loc}^s(O)$  в точке  $h_2 = f(h_1)$ . Отображение  $f$  в ограничении на  $W_{loc}^s(O)$  устроено очень просто: оно имеет здесь устойчивую неподвижную точку  $O$  типа неориентируемый узел, так как  $\lambda_2\lambda_3 < 0$ .

В случае, когда  $|\lambda_2| > |\lambda_3|$  (см. рис. 5 в), на  $W_{loc}^s(O)$  существует сильно устойчивое многообразие  $W^{ss}$  – инвариантная относительно  $f$  кривая, касающаяся в точке  $O$  собственного направления, отвечающего отрицательному мультипликатору  $\lambda_3$ . Кривая  $W^{ss}$  разбивает плоскость  $W_{loc}^s(O)$  на две компоненты  $W_1^s$  и  $W_2^s$ . Так как

$\lambda_2 > 0$  (и  $|\lambda_2| > |\lambda_3|$ ), то каждая из компонент инвариантна относительно  $f$ , то есть точки из  $W_1^s$  не могут попасть в  $W_2^s$  при итерациях  $f$  и наоборот. На  $W_{loc}^s$  существуют также непрерывное семейство гладких инвариантных кривых, которые все входят в точку  $O$ , касаясь ведущего собственного направления, отвечающего положительному мультипликатору  $\lambda_2$ . Пусть точка  $h_1$  принадлежит какой-то из этих кривых, скажем  $l_1$ . Тогда кривая  $l_2 = f(l_1)$  будет также инвариантной кривой из этого семейства, и  $h_2 \in l_2$ . Кривые  $l_1$  и  $l_2$  лежат ровно в одной компоненте, в  $W_1^s$  или  $W_2^s$ , и входят в  $O$ , образуя конфигурацию «клина с нулевым углом». Соответственно, конфигурация неустойчивых сепаратрис точки  $O$  (см. рис. 5, в) будет напоминать ту, которая характерна для неустойчивых сепаратрис аттрактора Лоренца. Поэтому возникающий здесь аттрактор был назван в [39] «дискретным аттрактором Лоренца».

Аналогичные простые геометрические рассуждения для случая  $|\lambda_2| < |\lambda_3|$  (см. рис. 5, г) показывают, что здесь конфигурация неустойчивых сепаратрис точки  $O$  будет совсем другой. Она скорее похожа на конфигурацию сепаратрис в аттракторе отображения Пуанкаре периодически возмущенной двумерной системы с гомоклинической восьмеркой седла [30]. Поэтому возникающий в этом случае аттрактор был назван в [38] «дискретным восьмерочным аттрактором» (рис. 1 и приведенный ниже рис. 7 дают представление о типичной форме такого аттрактора).

Заметим, что для обоих таких аттракторов условие  $\sigma > 1$  (здесь  $\sigma = |\lambda_1 \lambda_2|$  в лоренцевском и  $\sigma = |\lambda_1 \lambda_3|$  в восьмерочном случаях, соответственно) является очень важным, так как оно просто необходимо для псевдогиперболичности рассматриваемого аттрактора. В противном случае, это будут либо квазиаттракторы лоренцевском или восьмерочного типа; либо – другой вариант – из образовавшейся гомоклинической конфигурации в случае  $\sigma < 1$  может «отродиться» большая охватывающая её устойчивая замкнутая инвариантная кривая (тор), которая может, в свою очередь, разрушиться, и на её месте может возникнуть хаос уже совсем другой природы (например, «тор-хаос»). Обе эти возможности хорошо наблюдаются при компьютерных экспериментах (см., например, [37]).

Эти очевидные наблюдения подсказывают нам, что и в случаях седловых неподвижных точек других типов также можно ожидать существование гомоклинических аттракторов, конфигурация которых будет существенно зависеть от собственных значений этих точек и, в первую очередь, от их знаков. В случае, когда среди собственных значений есть комплексно-сопряженные, можно ожидать также существование дискретных аттракторов спирального типа.

**Замечание 2.** Однако наши «дискретные» лоренцевский и восьмерочный аттракторы существенно отличаются от их аналогов, получаемых в отображениях Пуанкаре периодически возмущенных трехмерных потоков. Так, при малом периодическом возмущении системы с аттрактором Лоренца получается псевдогиперболический аттрактор [50], который имеет седловую неподвижную точку со всеми положительными мультипликаторами, и в «дырках» аттрактора лежат неподвижные точки. В случае «дискретного аттрактора Лоренца» неподвижная точка имеет два отрицательных мультипликатора, и в «дырках» лежит траектория периода два. Возможно, «дискретные восьмерочные аттракторы» вообще не имеют потоковых аналогов. Это связано с тем, что если соответствующая система имеет гомоклиническую вось-

мерку седла, то либо эта «восьмерка» устойчива (аттрактор), но тогда получаемый аттрактор будет иметь  $\sigma < 1$ , либо неустойчива, тогда аттрактора вообще нет. Это позволяет говорить, что и «дискретный аттрактор Лоренца» и «дискретный восьмерочный аттрактор» являются новыми.

Сама задача изучения и классификации гомоклинических аттракторов трехмерных диффеоморфизмов была впервые поставлена в работе [37], хотя первые результаты на эту тему были получены ещё в работе [45], в которой у трехмерных отображений Эно были обнаружены дискретные аттракторы Лоренца. Заметим, что возможность появления таких аттракторов при локальных бифуркациях трехкратно вырожденных неподвижных точек, например, имеющих мультипликаторы  $+1; -1; -1$ , была исследована в работе [64]. Так как отображение Эно (1) содержит три параметра, то в нем такая точка существует, и более того, как показано в [45], для нее выполнены условия из [64]. Таким образом, основная идея нашей работы [45] состояла в применении знаний о свойствах вырожденных локальных бифуркаций к конкретной ситуации. Очевидно, что этот подход может быть также использован при изучении различных других моделей, содержащих не менее трех параметров.

В работе [37] была предложена другая идея, основанная на реализации феноменологических сценариев возникновения странных гомоклинических аттракторов, возможных в однопараметрических семействах трехмерных отображений. Такие сценарии, как, например, представленные на рис. 5, выглядят вполне реализуемыми в конкретных системах и очень удобными для компьютерных исследований – здесь, например, не нужно знать всех тонкостей глобальной бифуркации, приводящей к возникновению гомоклинических структур, а достаточно только вычислить/построить основные простые характеристики (фазовый портрет, мультипликаторы неподвижной точки, ляпуновские показатели и т.п.). Сама идея изучения странных аттракторов с помощью феноменологических сценариев, включающих два основных бифуркационных этапа – потеря устойчивости простого аттрактора (состояния равновесия, предельного цикла, неподвижной точки и т.п.) и возникновение гомоклинического аттрактора – впервые была предложена в работе Л.П. Шильникова [36], в которой такой сценарий был использован для объяснения явления возникновения спирального хаоса в случае многомерных потоков.

В настоящей работе мы проиллюстрируем, как эти идеи могут быть применены в исследовании странных гомоклинических аттракторов в конкретных моделях.

**2.1. Метод карт седел.** Тот факт, что конфигурация таких аттракторов существенно зависит от собственных значений их неподвижных точек, был использован в работе [40] для целей их классификации в случае ориентируемых трехмерных отображений. Если ограничиться только псевдогиперболическими гомоклиническими аттракторами, то такая задача оказывается вполне разрешимой, если различать аттракторы по типам их гомоклинических структур. В этом случае, как показано в [40], возможно 5 разных типов таких псевдогиперболических аттракторов. Все они относятся к случаю, когда неподвижная точка является седлом (все мультипликаторы действительны) с одномерным неустойчивым многообразием. Два из этих типов – дискретные лоренцевские и восьмерочные аттракторы – наблюдаются в случае, когда неустойчивый мультипликатор  $\lambda_1$  отрицателен,  $\lambda_1 < -1$ , а остальные («двойной

восьмерочный», «супервосьмерочный» и «суперлоренцевский») относятся к случаю, когда  $\lambda_1 > 1$  [40].

Для нахождения таких аттракторов в конкретных моделях в работе [40] был предложен так называемый «метод карт седел». Проиллюстрируем суть этого метода на примере *трехмерного обобщенного отображения Эно* вида

$$\bar{x} = y, \quad \bar{y} = z, \quad \bar{z} = Bx + Ay + Cz + f(y, z), \quad (3)$$

где функция  $f$  зависит только от координат  $y$  и  $z$ , а также  $f(0, 0) = 0$ ,  $f'_y(0, 0) = f'_z(0, 0) = 0$ . Отображение (3) зависит от трех параметров  $A$ ,  $B$  и  $C$ , имеет постоянный якобиан, равный  $B$ . Очевидно, к виду (3) может быть приведено любое отображение вида  $\bar{x} = y$ ,  $\bar{y} = z$ ,  $\bar{z} = M_1 + Bx + g(y, z)$ , имеющее неподвижную точку (например, отображение (1) при  $(1 + B - M_2)^2 + 4M_1 > 0$ ), если эту точку сдвинуть в начало координат.

Точка  $O(0, 0, 0)$  является неподвижной для отображения (3), в которой оно имеет характеристическое уравнение вида

$$\chi(\lambda) \equiv \lambda^3 - A\lambda^2 - C\lambda - B = 0. \quad (4)$$

Здесь важно, что собственные значения точки  $O$  уже не зависят от нелинейностей  $f(y, z)$ , а являются функциями только параметров  $A, B$  и  $C$ . Поэтому для отображения (3) можно построить разбиение множества значений параметров на области, отвечающие разным типам расположения собственных значений точки  $O$ . Такое разбиение при фиксированном значении якобиана, то есть в данном случае при фиксированном  $B$ , называется «картой седел» [40]<sup>8</sup>. Отметим также, что на этой карте мы различаем также области, отвечающие  $\sigma > 1$  и  $\sigma < 1$  в случае, когда неустойчивое многообразие точки  $O$  одномерно. Примеры таких карт седел показаны на рис. 6.

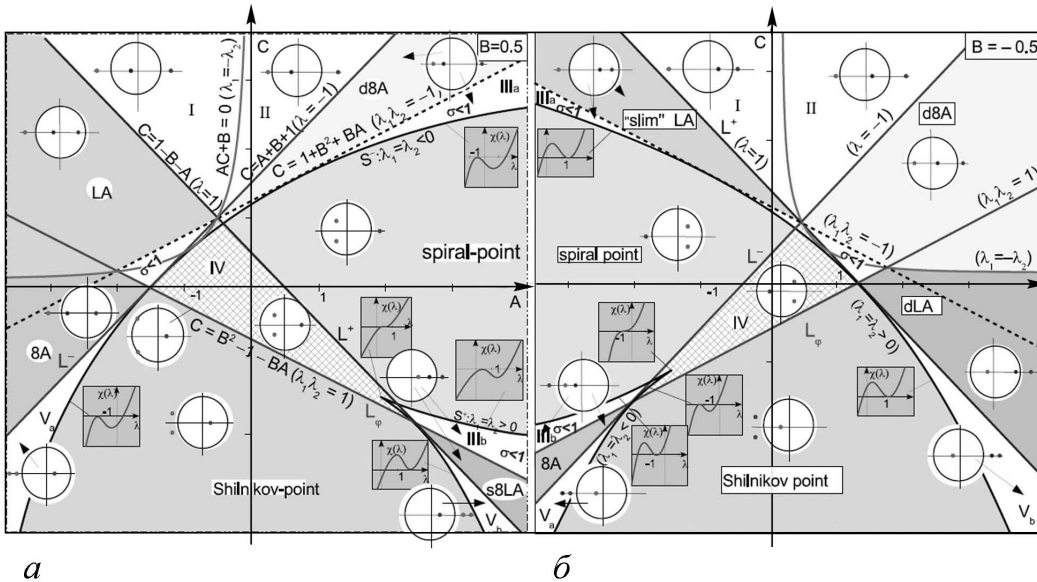


Рис. 6. Пример карты седел для отображения (3) для различных значений  $B$ :  $a - 0.5$ ,  $b - (-0.5)$

<sup>8</sup>В случае трехмерных потоков аналогичная «карта седел» для состояний равновесия была предложена в форме таблицы в [65, Приложение С.2.]

На этих картах выделена область IV, так называемый «треугольник устойчивости» (область  $\{C > B^2 - 1 - BA\} \cap \{C < A + B + 1\} \cap \{C < 1 - B - A\}$ ), когда неподвижная точка  $O(0, 0, 0)$  является асимптотически устойчивой. При всех других значениях параметров  $A$  и  $C$  (кроме бифуркационных кривых) точка  $O(0, 0, 0)$  является седловой – она имеет мультипликаторы как внутри, так и вне единичного круга (их расположение также показано на рис. 6). Границами областей на карте седел служат 7 основных кривых. Это, во-первых, три бифуркационные кривые, при значениях параметров на которых у точки  $O(0, 0, 0)$  появляются мультипликаторы на единичной окружности:

- кривая  $L_+$ :  $C = 1 - B - A$  (мультипликатор  $\lambda = +1$ );
- кривая  $L_-$ :  $C = 1 + B + A$  (мультипликатор  $\lambda = -1$ );
- кривая  $L_\varphi$ :  $C = B^2 - 1 - BA$  при  $-2 < A - B < 2$  (мультипликаторы  $e^{\pm i\varphi}$ ).

Заметим, что кривая  $C = B^2 - 1 - BA$  входит в границы областей на самом деле целиком, но при  $|A - B| \geq 2$  она не является бифуркационной: здесь при  $A - B \leq -2$  точка  $M$  имеет мультипликаторы вида  $(B, -|\lambda|, -|\lambda|^{-1})$ , а при  $A - B \geq 2$  – вида  $(B, |\lambda|, |\lambda|^{-1})$ . Во-вторых, на карте седел есть 4 дополнительные кривые:

- «резонансная кривая»  $AC + B = 0$ ,  $A < 0$  (когда  $\lambda_1 = -\lambda_2$ ),
- кривая « $\sigma = 1$ »  $C = 1 + B^2 + AB$  (когда  $\lambda_1 \lambda_2 = -1$ )

и две кривые «равных корней»

- $S^-$  (когда  $\lambda_1 = \lambda_2 < 0$ ),
- $S^+$  (когда  $\lambda_1 = \lambda_2 > 0$ ),

которые разделяют области с точками типа «узел» и «фокус», а также «седло» и «седло-фокус». Последние кривые задаются формулой

$$S^\pm : (\lambda_\pm)^3 - A(\lambda_\pm)^2 - C\lambda_\pm - B = 0,$$

где

$$\lambda_\pm = \frac{A \pm \sqrt{A^2 + 3C}}{3}$$

при  $A^2 + 3C > 0$  (то есть  $\lambda_\pm$  – это корни уравнения  $3\lambda^2 - 2A\lambda - C = 0$ ).

Для целей нашей статьи (исследование псевдогиперболических аттракторов) наибольший интерес представляют 4 области, при значении параметров из которых неподвижная точка  $O(0, 0, 0)$  отображения (3) является седловой с одномерным неустойчивым многообразием и седловой величиной  $\sigma > 1$ . Это области LA, 8A, d8A и sL8A в ориентируемом случае – рис. 6, а; а также области «slim» LA, 8A, d8A и dLA в неориентируемом случае – рис. 6, б. В остальных областях, кроме «треугольника устойчивости», точка является либо седло-фокусом, либо седлом с двумерным неустойчивым многообразием, либо имеет  $\sigma < 1$ . Как мы предполагаем, если отображение имеет гомоклинический аттрактор (содержащий точку  $O$ ) при значениях параметров из этих последних областей, то он является, по нашему мнению, квазиаттрактором (см. *Замечание 1*).

Использование карт седел при численных исследованиях является очень удобным вспомогательным инструментом наряду с методом ляпуновских диаграмм. Однако здесь мы также несколько модифицируем этот последний метод. Стандартно

он состоит в построении карт ляпуновских показателей, в которых разным цветом (на черно-белых рисунках цифрой) обозначаются области параметров, отвечающих разным спектрам ляпуновских показателей  $\Lambda_1 > \Lambda_2 > \Lambda_3$ . Мы используем, в частности, зеленый цвет (цифра «1») для обозначения областей устойчивых периодических режимов ( $\Lambda_1 < 0$ ); голубой (цифра «2») – для квазипериодических ( $\Lambda_1 = 0$ ); желтый (цифра «3») – когда  $\Lambda_1 > 0$ ,  $\Lambda_2 < 0$ ; красный (цифра «4»), когда  $\Lambda_1 > 0$ ,  $\Lambda_2 \sim 0$ ; синий (цифра «5»), когда  $\Lambda_1 > \Lambda_2 > 0$  – для странных аттракторов.<sup>9</sup> К этим пяти цветам мы добавили еще один – темно-серый (цифра «6») для обозначения областей с гомоклиническими аттракторами, когда численно получаемые точки на аттракторе приближаются к точке  $O$  на расстояние не меньше, чем  $10^{-4}$ .

### 3. Примеры странных аттракторов в обобщенных отображениях Эно

В этом разделе мы проиллюстрируем возможность эффективного использования «карты седел» (такой как на рис. 6) для поиска гомоклинических аттракторов различных типов в обобщенных отображениях Эно вида (3).

Заметим, что существует много различных способов исследования хаотической динамики в конкретных моделях. Один из регулярных и разумных подходов к этой проблеме связан с построением карт динамических режимов и/или диаграмм показателей Ляпунова. Именно таким способом (с привлечением диаграмм ляпуновских показателей) в работе [45] были найдены дискретные аттракторы Лоренца в трехмерном отображении Эно вида (1) (см. также рис. 1). Теперь мы можем найти такой аттрактор, как говорится, «целенаправленно», используя наш подход. Для этого рассмотрим отображение (1) в «приведенном» виде

$$\bar{x} = y, \quad \bar{y} = z, \quad \bar{z} = Bx + Az + Cy - z^2 \quad (5)$$

и возьмем фактически готовую для него карту седел такую, как на рис. 6, а, но построенную при нужном фиксированном  $B$ , в данном случае при  $B = 0.7$ . Далее, на фоне этой карты строим численно диаграмму показателей Ляпунова. В результате получим такую картину, как на рис. 7, где, в частности, область хаоса «темно-серого» цвета (в черно-белом изображении цифра «6») пересекается с областью LA. Это говорит о том, что здесь при соответствующих значениях параметров  $A$  и  $C$  может наблюдаться дискретный аттрактор Лоренца. Результаты численного счета, показанные на рисунке, подтверждают это.

Очевидно, в случае отображения (3) вид карты седел не зависит от его нелинейных членов. В то же время ляпуновская диаграмма как раз и определяется этими членами. На современных компьютерах построение диаграмм ляпуновских показателей, в особенности в случае отображений, не занимает много времени (а карта

<sup>9</sup>Области с красным цветом (в нашем случае цифра «4»),  $\Lambda_1 > 0$ ,  $\Lambda_2 \sim 0$ , были специально выделены еще в работе [45] для обозначения тех областей, у которых значение  $\Lambda_2$  либо всегда колебалось в очень узких границах около нуля, либо отличалось от нуля на величину (порядка  $10^{-5}$  или  $10^{-6}$ ), сравнимую с точностью вычисления показателей. На удивление, такие области оказались весьма большими, и этот феномен (связанный, по-видимому, с тем, что отображение на аттракторе оказалось очень близким к дискретизации некоторого потока, например, с аттрактором Лоренца) обсуждался в [45].



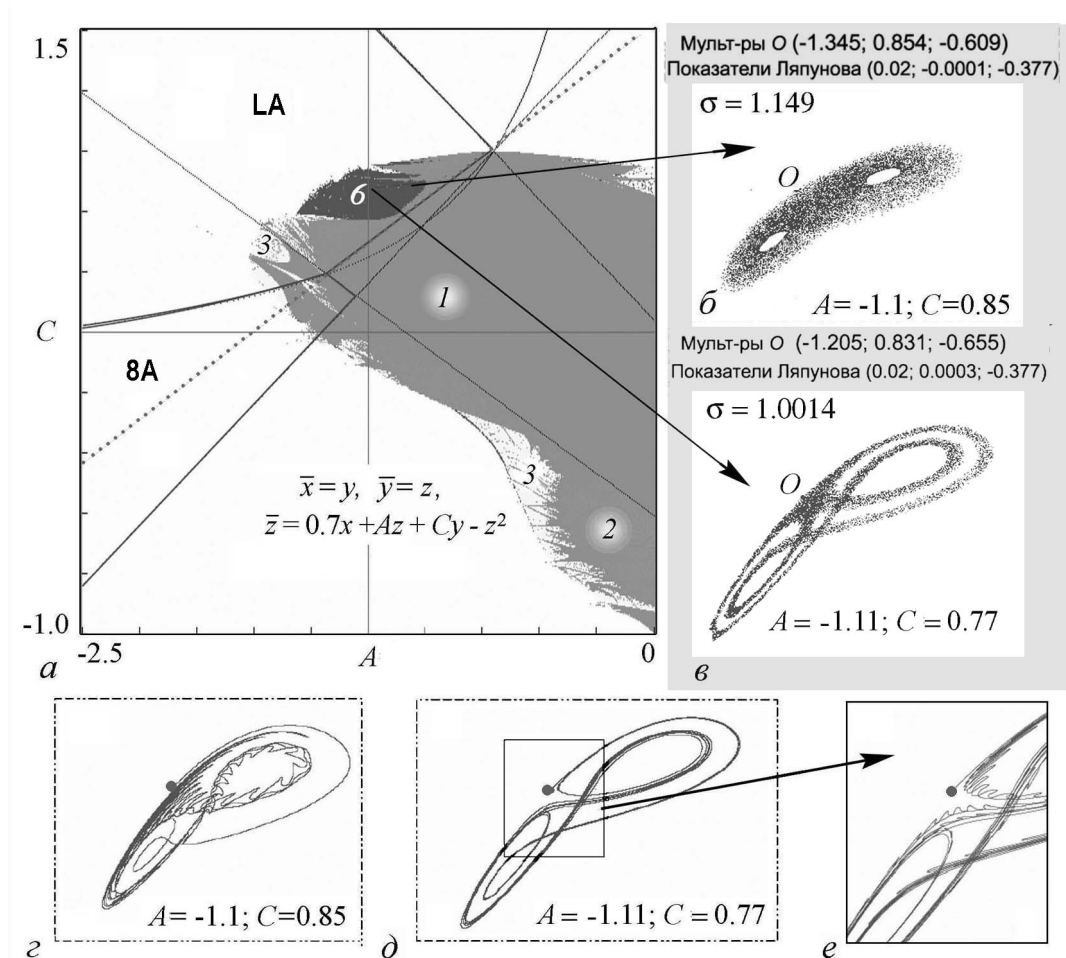


Рис. 7. *a* – диаграмма показателей Ляпунова на фоне «карты седел» на плоскости параметров  $A$  и  $C$  для отображения (5) при  $B = 0.7$ ; *b* и *v* – фазовые портреты (примерно  $10^4$  итераций одной точки) аттракторов; *z* и *d* – численно построенная одна из неустойчивых сепаратрис точки  $O$  (другая сепаратриса будет выглядеть симметрично, так как  $\lambda_1 < -1$ ), присутствие характерных «колябушек» на сепаратрисе свидетельствует о том, что аттрактор является диким гиперболическим, то есть содержит гомоклинические касания; *e* – увеличенный фрагмент рис. *d*. Рисунок из работы [40]

седел для отображения (3) строится мгновенно), в особенности, на «поисковом этапе». Кроме того, как показывает наш опыт, при изменении нелинейностей можно увидеть определенные тенденции, в частности, в изменении места расположения «темно-серого пятна» (когда аттрактор гомоклинический), и при желании его можно «загнать» внутрь любой из областей карты седел (кроме «треугольника устойчивости») и, соответственно, обнаружить интересующий нас аттрактор. На этом пути в работе [40] были найдены разнообразные гомоклинические аттракторы отображения (3), некоторые из них (для значений параметров  $A$  и  $C$  из областей LA, 8A, d8A и sL8A), когда выполняется необходимое условие (2), были предъявлены в качестве кандидатов в псевдогиперболические аттракторы. Примеры таких аттракторов показаны на рис. 8.

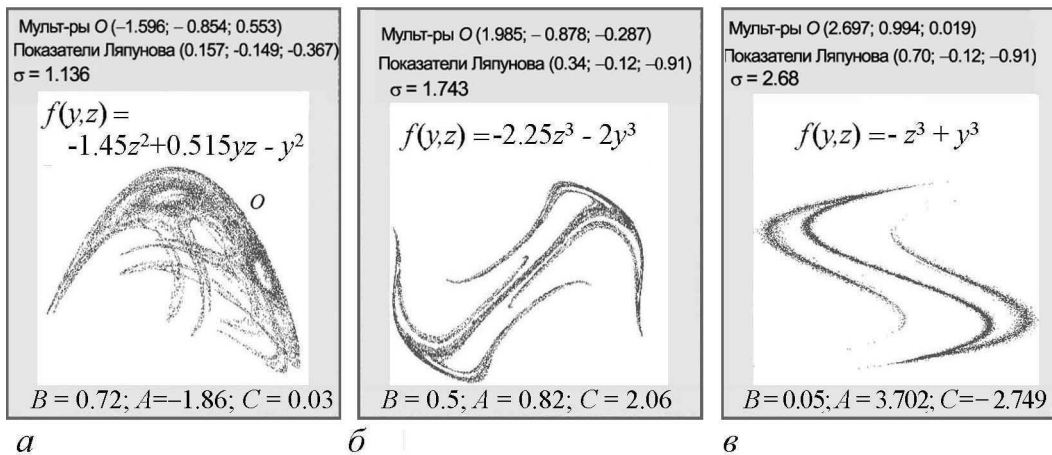


Рис. 8. Примеры дискретных гомоклинических аттракторов, соответствующих обобщенным отображениям Эно: *а* – восьмерочный аттрактор из области  $8A$ ; *б* – двойной восьмерочный аттрактор из области  $d8A$ ; *в* – супервосьмерочный аттрактор из области  $sL8A$

**3.1. Примеры псевдогиперболических аттракторов в трехмерных неориентируемых отображениях Эно.** Естественно ожидать, что и в случае *неориентируемых* трехмерных отображений (дiffeоморфизмов) могут реализовываться сценарии возникновения странных аттракторов аналогичные, например, приведенным на рис. 5. Однако, в силу неориентируемости отображений, как показано в работе [41], все они имеют свою специфику.

На рис. 9 схематически изображены 3 таких сценария, которые могут быть реализованы в однопараметрических семействах. Эти сценарии очень похожи на то, что происходит в ориентируемом случае: все они начинаются с устойчивой неподвижной точки  $O$ , с которой затем происходит бифуркация удвоения периода, и точка  $O$  становится седловой с одним неустойчивым мультипликатором  $\lambda_1 < -1$  и т.д. Отличие состоит в том, что отображение  $f$  в ограничении на  $W_{loc}^s(O)$  является ориентируемым, и здесь у  $f|_{W^s}$  точка  $O$  является либо узлом-плюс ( $\lambda_2 > 0, \lambda_3 > 0$ ), либо узлом-минус ( $\lambda_2 < 0, \lambda_3 < 0$ ), либо фокусом ( $\lambda_{2,3} = \rho e^{\pm i\varphi}, 0 < \rho < 1$ ). Поэтому и конфигурация получаемых гомоклинических аттракторов становится другой. Мы назвали такие дискретные неориентируемые аттракторы соответственно как «тонкий лоренцевский», «восьмерочный» и «спиральный». Первые два могут быть, в принципе, псевдогиперболическими, последний – всегда квазиаттрактор.

**Замечание 3.** Неориентируемый восьмерочный аттрактор очень похож на ориентируемый (ср. рис. 9, *з* и рис. 5, *з*). «Тонкий лоренцевский» аттрактор не совсем похож на его ориентируемый аналог (ср. рис. 9, *в* и рис. 5, *в*). Это связано с тем, что в случае «тонкого» аттрактора гомоклиническая точка  $h_1$  на  $W_{loc}^s(O)$  и все её дальнейшие итерации лежат на одной и той же инвариантной кривой  $\ell$ , входящей в  $O$  (отсюда – термин «тонкий»), а у ориентируемого аттрактора итерации точки  $h_1$  лежат поочередно на двух разных кривых  $\ell_1$  и  $\ell_2$ , сходящихся в  $O$ , касаясь друг друга.

Эти аттракторы были найдены в [41] у неориентируемых трехмерных отображений Эно вида (3) при  $B < 0$ . Для таких отображений также может быть построена карта седел, такая как на рис. 6, *б*, и модифицированная диаграмма ляпуновских

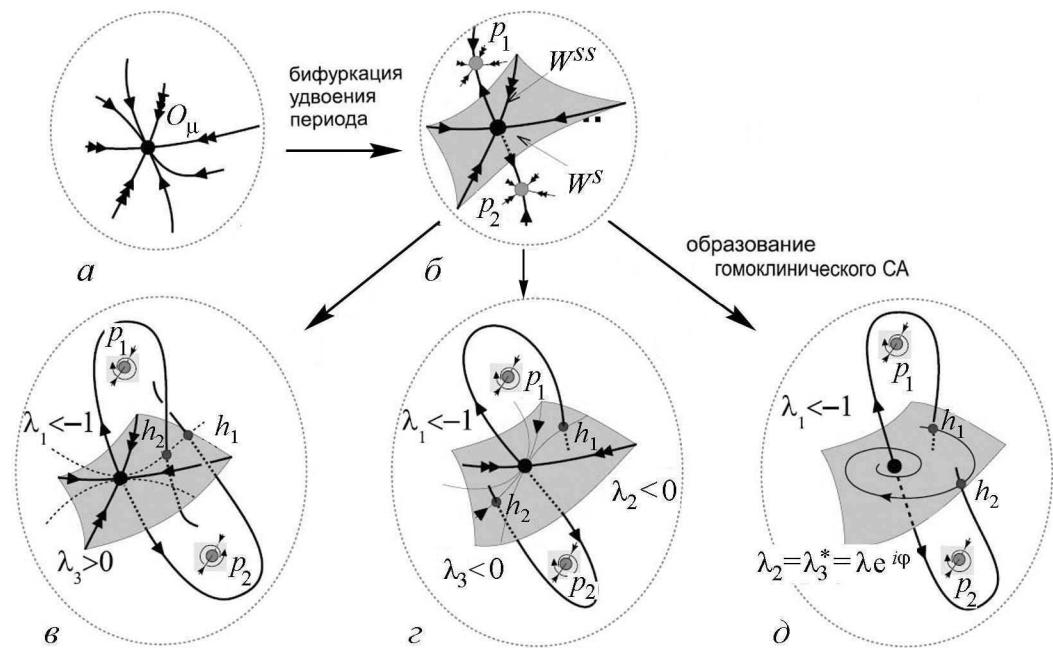


Рис. 9. Иллюстрация бифуркационных сценариев, приводящих к возникновению дискретных неориентируемых гомоклинических аттракторов: «тонкого» аттрактора Лоренца (путь  $a \Rightarrow b \Rightarrow \text{в}$ ); восьмерочного аттрактора (путь  $a \Rightarrow b \Rightarrow \text{з}$ ); спирального аттрактора (путь  $a \Rightarrow b \Rightarrow \text{д}$ ). Здесь показаны точки  $h_1$  и  $h_2$ , принадлежащие одной и той же гомоклинической траектории такие, что  $h_i \in W^s(O_\mu) \cap W^u(O_\mu)$  и  $h_2 = f(h_1)$ . Эти точки расположены с одной стороны от  $W_{loc}^{ss}(O_\mu)$  в лоренцевском случае (в), по разные стороны от  $W_{loc}^{ss}(O_\mu)$  в случае восьмерочного аттрактора (з), а гомоклинические точки лежат в  $W_{loc}^{ss}(O_\mu)$  на спирали, закручивающейся вокруг  $O_\mu$ , в случае спирального аттрактора (д)

показателей. Тогда, используя тот факт, что тонкий лоренцевский аттрактор может существовать при значениях параметров  $A$  и  $C$  из области «slim» LA, а неориентируемый восьмерочный – из области 8A, можно уже целенаправленно найти такие аттракторы. Примеры тонкого лоренцевского и восьмерочного аттракторов показаны на рис. 10.

Что весьма интересно, у трехмерных неориентируемых отображений могут существовать такие же странные гомоклинические аттракторы, как и в ориентируемом случае, но только с точками периода два. Такие аттракторы состоят из двух компонент, каждая из которых содержит точку цикла периода 2. Кроме того, каждая компонента аттрактора инвариантна относительно  $f^2$ . Примеры дискретных (ориентируемых) периода 2 аттракторов Лоренца и восьмерочного в случае отображения (5) показаны на рис. 11, а и б, соответственно.

В принципе, эти аттракторы возникают «внутри» неориентируемого сценария (см. рис. 9), но по ориентируемому сценарию (см. рис. 5) для отображения  $f^2$ , у которого каждая точка цикла периода 2 является неподвижной. Понятно, что момент возникновения аттракторов периода 2, приведенных на рис. 11, – это некоторый промежуточный этап сценария образования гомоклинического аттрактора с неподвижной точкой  $O$ . Одна из таких финальных стадий этого сценария показана на рис. 11, в, на котором изображен «четыреглазый» аттрактор, возникающий при слиянии аттрактора Лоренца периода 2 с неподвижной точкой  $O$  типа седло-фокус. Представляется, что ориентируемость отображения не является необходимым условием для

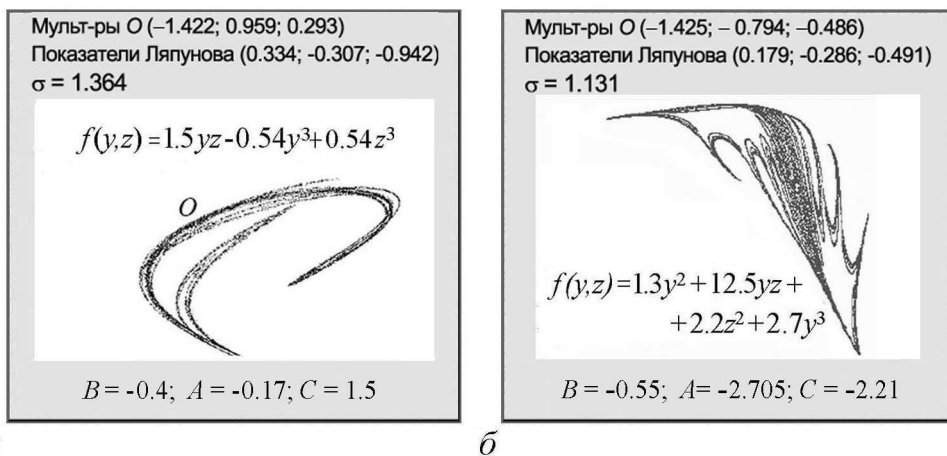


Рис. 10. Примеры неориентируемых гомоклинических аттракторов, соответствующих отображений Эно: *a* – тонкий лоренцевский аттрактор; *б* – восьмерочный аттрактор (у этого аттрактора  $\Lambda_1 + \Lambda_2 = -0.107 < 0$ , поэтому он – квазиаттрактор)

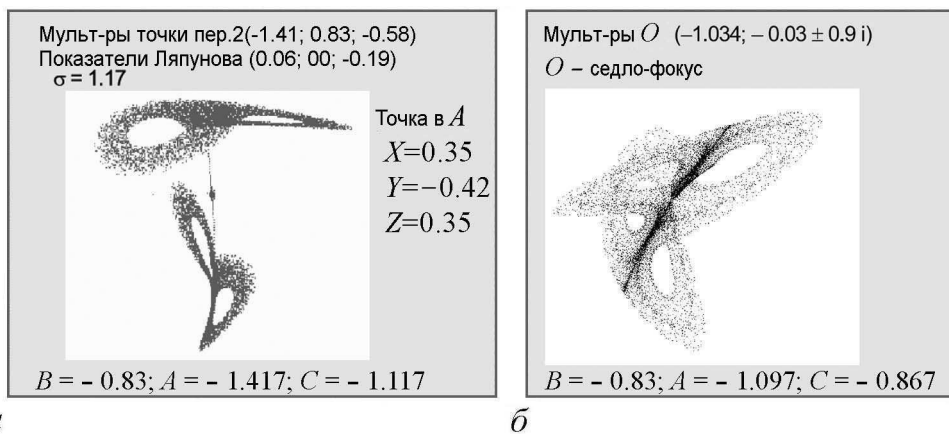


Рис. 11. Примеры странных аттракторов в неориентируемом отображении (5): *a* – дискретный аттрактор Лоренца периода 2; *б* – дискретный спирально-лоренцевский аттрактор

возникновения таких аттракторов. Кроме того, интересным является вопрос о существовании таких аттракторов с неподвижной точкой типа седло, которые могли бы дать примеры дискретных псевдогиперболических аттракторов новых типов.

## Приложение

### К определению псевдогиперболичности отображений

Рассмотрим диффеоморфизм  $f$ , определенный в  $\mathbb{R}^m$ , и пусть  $Df$  – это его дифференциал.<sup>10</sup> Открытая область  $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^m$  называется *поглощающей областью* диффеоморфизма  $f$ , если  $f(\overline{\mathcal{D}}) \subset \mathcal{D}$ .

<sup>10</sup>Напомним, что дифференциал в точке  $x_0$  отображения  $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$  – это линейный оператор  $A = \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x=x_0}$ , переводящий вектор  $\ell_{x_0}$  в точке  $x_0$  в вектор  $\ell_{x_1} = A\ell_{x_0}$  в точке  $x_1 = f(x_0)$ .

**Определение 1.** Дiffeоморфизм  $f$  называется *псевдогиперболическим* на  $\mathcal{D}$ , если выполняются следующие условия.

- 1) У каждой точки из  $\mathcal{D}$  существуют два трансверсальных линейных подпространства  $N_1$  и  $N_2$ , которые имеют дополнительные размерности ( $\dim N_1 = k \geq 1, \dim N_2 = m - k \geq 2$ ), непрерывно зависят от точки, инвариантны относительно  $Df$ , то есть

$$Df(N_1(x)) = N_1(f(x)), \quad Df(N_2(x)) = N_2(f(x)),$$

и такие, что у каждой траектории  $L : \{x_i \mid x_{i+1} = f(x_i), i = 0, 1, \dots; x_0 \in \mathcal{D}\}$  максимальный ляпуновский показатель, отвечающий подпространству  $N_1$ , строго меньше, чем минимальный ляпуновский показатель, отвечающий подпространству  $N_2$ , то есть выполняется такое неравенство:

$$\begin{aligned} \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \left( \sup_{\substack{u \in N_1(x_0) \\ \|u\| = 1}} \|Df^n(x_0)u\| \right) < \\ < \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \left( \inf_{\substack{v \in N_2(x_0) \\ \|v\| = 1}} \|Df^n(x_0)v\| \right), \end{aligned} \quad (6)$$

где  $Df^n$  – матрица размера  $m \times m$ , определяемая соотношением

$$Df^n = Df_{x_{n-1}} \cdot \dots \cdot Df_{x_1} \cdot Df_{x_0},$$

а  $\limsup_{n \rightarrow \infty}$  и  $\liminf_{n \rightarrow \infty}$  – соответственно верхний и нижний пределы.

- 2) Дiffeоморфизм  $f$  в ограничении на  $N_1$  является равномерно сжимающим, то есть существуют такие константы  $\lambda > 0$  и  $C_1 > 0$ , что

$$\|Df^n(N_1)\| \leq C_1 e^{-\lambda n}. \quad (7)$$

- 3) Дiffeоморфизм  $f$  в ограничении на  $N_2$  растягивает экспоненциально  $(m - k)$ -мерные объемы, то есть существуют такие константы  $\sigma > 0$  и  $C_2 > 0$ , что<sup>11</sup>

$$|\det Df^n(N_2)| \geq C_2 e^{\sigma n}. \quad (8)$$

Из *Определения 1* немедленно вытекает, что

- 1\* все траектории в  $\mathcal{D}$  неустойчивы: каждая траектория имеет положительный максимальный ляпуновский показатель

$$\Lambda_{max}(x) = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \|Df^n(x)\| > 0.$$

<sup>11</sup>Если  $\dim N_2 = 1$ , то получается обычное определение равномерной гиперболичности, поэтому мы требуем в определении, что  $\dim N_2 \geq 2$ .

Заметим, что условия псевдогиперболичности означают, что на  $(m - k)$ -мерных подпространствах  $N_2$  растягиваются  $(m - k)$ -мерные объемы. Это не запрещает существования на  $N_2$  сжимающих направлений, но сжатие вдоль них должно быть равномерно не таким сильным, как любое сжатие в  $N_1$ . Поэтому условия псевдогиперболичности являются более слабыми, чем условия равномерной гиперболичности, которые означают, что  $\|Df^{-n}(N_2)\| < Ce^{-\sigma n}$ , то есть равномерное растяжение должно иметь место по всем направлениям в  $N_2$ . Тем не менее, также как и в случае гиперболических систем, здесь стандартно доказывается [66,42] следующий результат.

2\* Условия псевдогиперболичности сохраняются при всех достаточно малых  $C^r$ -возмущениях системы. Более того, пространства  $N_1$  и  $N_2$  меняются при этом непрерывно.

Из утверждения 1\* вытекает, что если диффеоморфизм  $f$  имеет аттрактор в  $\mathcal{D}$ , то этот аттрактор является странным, и он не содержит устойчивых периодических траекторий, которые, как следует из условия 2\*, не появляются также при малых гладких возмущениях. Другими словами, псевдогиперболические аттракторы являются настоящими аттракторами.

Авторы благодарят С.П. Кузнецова, В. Такера и Д. Тураева за полезные замечания.

*Работа поддержана грантом РФФ No. 14-41-00044. Численные эксперименты были выполнены в рамках гранта РФФ No. 15-12-20035. Работа выполнена при частичной поддержке грантов РФФИ No. 16-01-00364 и No. 16-51-10005 КО. А. Гонченко и С. Гонченко были частично поддержаны Министерством науки и образования РФ по проекту 1.3287.2017/ПЧ. А. Казаков был также поддержан ЦФИ ВШЭ (проект 90) в 2017г., а также фондом «Династия».*

## Библиографический список

1. Conley C.C. Isolated invariant sets and the Morse index // American Mathematical Soc. 1978. No. 38.
2. Гонченко С.В., Тураев Д.В., Шильников Л.П. Об областях Ньюхауса двумерных диффеоморфизмов, близких к диффеоморфизму с негрубым гетероклиническим контуром // Труды МИАН. 1997. Т. 216. С. 76–125.
3. Gonchenko S. Reversible mixed dynamics: A concept and examples // Discontinuity, Nonlinearity, and Complexity. 2016. Vol. 5, No. 4. Pp. 345–354.
4. Gonchenko S., Turaev D. On three types of dynamics, and the notion of attractor. – To appear.
5. Aframovich V.S., Shilnikov L.P. Strange attractors and quasiattractors. In book «Nonlinear Dynamics and Turbulence» / Eds G.I. Barenblatt, G. Iooss, D.D. Joseph. Boston, Pitmen, 1983.
6. Shilnikov V.S. Mathematical problems of nonlinear dynamics: A tutorial // Int. J. Bif. and Chaos. 1997. Vol. 9, No. 7. Pp. 1953–2001.

7. *Gonchenko S.V., Shilnikov L.P., Turaev D.V.* Quasiattractors and homoclinic tangencies // *Computers Math. Applic.* 1997. Vol. 34, No. 2–4. Pp. 195–227.
8. *Гаврилов Н.К., Шильников Л.П.* О трехмерных динамических системах, близких к системам с негрубой гомоклинической кривой // *Матем. сборник.* 1972. Т. 88(130), № 4. Ч. 1. С. 475–492; *Матем. сборник.* 1973. Т. 90(132), № 1. Ч. 2. С. 139–156.
9. *Гонченко С.В.* Об устойчивых периодических движениях в системах, близких к системам с негрубой гомоклинической кривой // *Мат. заметки.* 1983. Т. 33, вып. 5. С. 745–755.
10. *Гонченко С.В., Тураев Д.В., Шильников Л.П.* Динамические явления в многомерных системах с негрубой гомоклинической кривой Пуанкаре // *Докл. Росс. Акад. Наук.* 1993. Т. 330, № 2. С. 144–147.
11. *Gonchenko S.V., Shilnikov L.P., Turaev D.V.* Dynamical phenomena in systems with structurally unstable Poincare homoclinic orbits // *Chaos.* 1996. Vol. 6, No. 1. Pp. 15–31.
12. *Gonchenko S.V., Shilnikov L.P., Turaev D.V.* On dynamical properties of multidimensional diffeomorphisms from Newhouse regions // *Nonlinearity.* 2008. Vol. 21(5). Pp. 923–972.
13. *Mora L., Viana M.* Abundance of strange attractors // *Acta Math.* 1993. Vol. 171. Pp. 1–71.
14. *Palis J., Viana M.* High dimension diffeomorphisms displaying infinitely many sinks // *Ann. Math.* 1994. Vol. 140. Pp. 91–136.
15. *Gonchenko S.V., Sten'kin O.V., Turaev D.V.* Complexity of homoclinic bifurcations and  $\Omega$ -moduli // *Int. Journal of Bifurcation and Chaos.* 1996. Vol. 6, No. 6. Pp. 969–989.
16. *Colli E.* Infinitely many coexisting strange attractors // *Ann. IHP. Anal. Non Lineaire.* 1998. Vol. 15. Pp. 539–579.
17. *Homburg A.J.* Periodic attractors, strange attractors and hyperbolic dynamics near homoclinic orbits to saddle-focus equilibria // *Nonlinearity.* 2002. Vol. 15. Pp. 1029–1050.
18. *Gonchenko S.V., Meiss J.D. and Ovsyannikov I.I.* Chaotic dynamics of three-dimensional Hénon maps that originate from a homoclinic bifurcation // *Regul. Chaotic Dyn.* 2006. Vol. 11. Pp. 191–212.
19. *Gonchenko S.V., Shilnikov L.P. and Turaev D.V.* On global bifurcations in three-dimensional diffeomorphisms leading to wild Lorenz-like attractors // *Regul. Chaotic Dyn.* 2009. Vol. 14. Pp. 137–147.
20. *Gonchenko S.V. and Ovsyannikov I.I.* On global bifurcations of three-dimensional diffeomorphisms leading to Lorenz-like attractors // *Mat. Model. of Nat. Phenom.* 2013. Vol. 8. Pp. 71–83.
21. *Gonchenko S.V., Ovsyannikov I.I. and Tatjer J.C.* Birth of Discrete Lorenz Attractors at the Bifurcations of 3D Maps with Homoclinic Tangencies to Saddle Points // *Regul. Chaotic Dyn.* 2014. Vol. 19. Pp. 495–505.

22. *Gonchenko S.V. and Ovsyannikov I.I.* Homoclinic tangencies to resonant saddles and discrete Lorenz attractors // *Discr. and Cont. Dyn. Sys. Series S.* 2017. Vol. 10, No. 2. Pp. 365–374.
23. *Lozi R.* Un attracteur de Henon // *J. Phys.* 1978. Vol. 39. Coll-C5. Pp. 9–10.
24. *Белых В.Н.* Хаотические и странные аттракторы двумерного отображения // *Матем. сб.* 1995. Т. 186. № 3. С. 3–18.
25. *Feudel U., Kuznetsov S., Pikovsky A.* Strange nonchaotic attractors: Dynamics between order and chaos in quasiperiodically forced systems // *Nonlinear Science.* Vol.56. World Scientific Series on Nonlinear Science: Monographs and Treatises, 2006.
26. *Афраймович В.С., Шильников Л.П.* Инвариантные двумерные торы, их разрушение и стохастичность // *Межвуз. сб. Методы КТДУ. Горький*, 1983. С. 3–26.
27. *Shilnikov L.P.* Chua's Circuit: Rigorous result and future problems // *Int. J. Bifurcation and Chaos.* 1994. Vol. 4, No. 3. Pp. 489–519.
28. *Henon M.* A two-dimensional mapping with a strange attractor // *Commun. Math. Phys.* 1976. Vol. 50. Pp. 69–77.
29. *Benedicks M., Carleson L.* The dynamics of the Henon map // *Ann. Math.* 1991. Vol. 133. Pp. 73–169.
30. *Gonchenko S.V., Simo C. and Vieiro A.* Richness of dynamics and global bifurcations in systems with a homoclinic figure-eight // *Nonlinearity.* 2013. Vol. 26, No.3. Pp. 621–678.
31. *Rössler O.E.* An equation for continuous chaos // *Physics Letters A.* 1976. Vol. 57, No.5. Pp. 397–398.
32. *Rössler O.E.* Different types of chaos in two simple differential equations // *Zeitschrift für Naturforschung A.* 1976. Vol. 31, No. 12. Pp. 1664–1670.
33. *Arneodo A., Couillet P., Tresser C.* Occurrence of strange attractors in three-dimensional Volterra equations // *Physics Letters A.* 1980. Vol. 79, No. 4. Pp. 259–263.
34. *Arneodo A., Couillet P., Tresser C.* Possible new strange attractors with spiral structure // *Commun. Math. Phys.* 1981. Vol. 79. Pp. 573–579.
35. *Arneodo A., Couillet P., Tresser C.* Oscillators with chaotic behavior: An illustration of a theorem by Shilnikov // *Journal of Statistical Physics.* 1982. Vol. 27, No. 1. Pp. 171–182.
36. *Шильников Л.П.* Теория бифуркаций и турбулентность – I // *Межвузовский сб. Методы КТДУ. Горький*, 1986. С. 150–163.
37. *Гонченко А.С., Гонченко С.В., Шильников Л.П.* К вопросу о сценариях возникновения хаоса у трехмерных отображений // *Нелинейная динамика.* 2012. Т. 8, № 1. С. 3–28.
38. *Gonchenko A.S., Gonchenko S.V., Kazakov A.O. and Turaev D.* Simple scenarios of onset of chaos in three-dimensional maps // *Int. J. Bif. and Chaos.* 2014. Vol. 24(8). 25 pages.
39. *Gonchenko S.V., Gonchenko A.S., Ovsyannikov I.I., Turaev D.V.* Examples of Lorenz-like attractors in Henon-like maps // *Math. Model. Nat. Phen.* 2013. Vol. 8(5). Pp. 48–70.
40. *Gonchenko A., Gonchenko S.* Variety of strange pseudohyperbolic attractors in three-dimensional generalized Henon maps // *Physica D.* 2016. Vol. 337. Pp. 43–57.



41. Гонченко А.С., Козлов А.Д. О сценариях возникновения хаоса в трехмерных неориентируемых отображениях // Журнал Средневолжского математического общества. 2016. Т. 18, № 4. С. 17–29.
42. Тураев Д.В., Шильников Л.П. Пример дикого странного аттрактора // Матем. сб. 1998. Т. 189, № 2. С. 137–160.
43. Newhouse S.E. The abundance of wild hyperbolic sets and non-smooth stable sets for diffeomorphisms // Publ. Math. Inst. Hautes Etudes Sci. 1979. Vol. 50. Pp. 101–151.
44. Ruelle D. Small random perturbations of dynamical systems and the definition of attractors // Comm. Math. Phys. 1981. Vol. 82. Pp. 137–151.
45. Gonchenko S., Ovsyannikov I., Simo C., Turaev D. Three-dimensional Henon-like maps and wild Lorenz-like attractors // Int. J. of Bifurcation and chaos. 2005. Vol. 15, No. 11. Pp. 3493–3508.
46. Шильников А.Л. Бифуркации и хаос в системе Мориока–Шимицу // Межвузовский сб. Методы КТДУ. Горький, 1986. С. 180–183.
47. Shilnikov A.L. On bifurcations of the Lorenz attractor in the Shimizu–Morioka model // Physica D. 1993. Vol. 62. Pp. 338–346.
48. Tucker W. The Lorenz attractor exists // Comptes Rendus de l'Academie des Sciences-Series I-Mathematics. 1999. Vol. 328, No.12. Pp. 1197–1202.
49. Ovsyannikov I.I., Turaev D. Analytic proof of the existence of the Lorenz attractor in the extended Lorenz model // Nonlinearity 2017. Vol. 30. Pp. 115–137.
50. Тураев Д.В., Шильников Л.П. Псевдогиперболичность и задача о периодическом возмущении аттракторов лоренцевского типа // Докл. РАН. 2008. Т. 418, № 1. С. 23–27.
51. Гонченко С.В., Тураев Д.В., Шильников Л.П. О существовании областей Ньюхауса вблизи систем с негрубой гомоклинической кривой Пуанкаре (многомерный случай) // Докл. Росс. Акад. Наук. 1993. Т. 329, № 4. С. 404–407.
52. Tatjer J.C. Three-dimensional dissipative diffeomorphisms with homoclinic tangencies // Ergodic Theory Dynam. Systems. 2001. Vol. 21. Pp. 249–302.
53. Gonchenko S.V., Gonchenko V.S., Tatjer J.C. Bifurcations of three-dimensional diffeomorphisms with non-simple quadratic homoclinic tangencies and generalized Hénon maps // Regular and Chaotic Dynamics. 2007. Vol. 12, No. 3. Pp. 233–266.
54. Сатаев Е.А. Стохастические свойства сингулярно гиперболических аттракторов // Нелинейная динамика. 2010. Т. 6, № 1. С. 187–206.
55. Gonchenko S.V., Gonchenko A.S., Kazakov A.O. Richness of chaotic dynamics in nonholonomic models of a Celtic stone // Regular and Chaotic Dynamics. 2013. Vol. 15, No. 5. Pp. 521–538.
56. Гонченко С.В., Тураев Д.В., Шильников Л.П. Гомоклинические касания произвольного порядка в областях Ньюхауса // Proc. of Int.Conf. Dedicated to 90th Anniversary of L.S.Pontryagin. Vol.6. Dynamical systems. В кн. «Итоги науки и техники, современная математика и ее приложения»: Тематические обзоры. 1999. Т. 67. С. 69–128.
57. Gonchenko S., Gonchenko A. and Ming-Chia Li. On topological and hyperbolic

properties of systems with homoclinic tangencies. In book «Nonlinear Dynamics New Directions». Springer International Publishing Switzerland, 2015. 27 pages.

58. Gonchenko S., Ovsyannikov I., Tatjer J.C. Birth of discrete Lorenz attractors at the bifurcations of 3D maps with homoclinic tangencies to saddle points // *Regular and Chaotic Dynamics*. 2014. Vol. 19, No. 4. Pp. 495–505.
59. Grines V., Levchenko Yu., Medvedev V. and Pochinka O. The topological classification of structurally stable 3-diffeomorphisms with two-dimensional basic sets // *Nonlinearity*. 2015. Vol. 28. Pp. 4081–4102.
60. Kuznetsov S.P. Example of a physical system with a hyperbolic attractor of the Smale–Williams type // *Phys. Rev. Lett.* 2005. Vol. 95. 144101.
61. Kuznetsov S.P. and Seleznev E.P. Strange attractor of Smale–Williams type in the chaotic dynamics of a physical system // *Zh. Eksper. Teoret. Fiz.* 2006 Vol. 129, No. 2. Pp. 400–412 [*J. Exp. Theor. Phys.* 2006. Vol. 102, No. 2. Pp. 355–364].
62. Kuznetsov S.P. and Pikovsky A. Autonomous coupled oscillators with hyperbolic strange attractors // *Physica D*. 2007. Vol. 232. Pp. 87–102.
63. Kuznetsov S.P. Example of blue sky catastrophe accompanied by a birth of the Smale–Williams attractor// *Regular and Chaotic Dynamics*. 2007. Vol. 12, No. 3. Pp. 233–266.
64. Shilnikov A.L., Shilnikov L.P., Turaev D.V. Normal forms and Lorenz attractors // *Int. J. of Bifurcation and Chaos*. 1993. Vol. 3. Pp. 1123–1139.
65. Shilnikov L.P., Shilnikov A.L., Turaev D.V., Chua L.O. Methods of qualitative theory in nonlinear dynamics // *World Scientific*. Part I, 1998; Part 2, 2002.
66. Аносов Д.В. Геодезические потоки на замкнутых римановых многообразиях отрицательной кривизны // *Тр. МИАН СССР*. 1967. Т. 90. С. 3–210.

## References

1. Conley C.C. Isolated invariant sets and the Morse index. *American Mathematical Soc.* 1978. No.38.
2. Gonchenko S.V., Shilnikov L.P., Turaev D.V. On Newhouse regions of two-dimensional diffeomorphisms close to a diffeomorphism with a nontransversal heteroclinic cycle. *Proc. Steklov Inst. Math.* Vol. 216. P. 70–118.
3. Gonchenko S. Reversible mixed dynamics: A concept and examples. *Discontinuity, Nonlinearity, and Complexity*. 2016. Vol. 5, No. 4. Pp.345–354.
4. Gonchenko S., Turaev D. On three types of dynamics, and the notion of attractor. To appear.
5. Aframovich V.S., Shilnikov L.P. Strange attractors and quasiattractors. *Nonlinear Dynamics and Turbulence.* Eds G.I. Barenblatt, G. Iooss, D.D. Joseph. Boston, Pitmen, 1983.
6. Shilnikov V.S. Mathematical problems of nonlinear dynamics: A tutorial. *Int. J. Bif. and Chaos*. 1997. Vol. 9, No. 7. Pp. 1953–2001.
7. Gonchenko S.V., Shilnikov L.P., Turaev D.V. Quasiattractors and homoclinic tangencies. *Computers Math. Applic.* 1997. Vol. 34, No. 2-4. Pp. 195–227.
8. Gavrilov N.K., Shilnikov L.P. On three-dimensional dynamical systems close to

- systems with a structurally unstable homoclinic curve. Part 1. *Math. USSR Sb.* 1972. Vol. 17. Pp. 467–485; Part 2. *Math. USSR Sb.* 1973. Vol. 19. Pp. 139–156.
9. Gonchenko S.V. On stable periodic motions in systems close to a system with a nontransversal homoclinic curve. *Mat. Zametki.* 1983. Vol. 33, No. 5. Pp. 745–755.
  10. Gonchenko S.V., Turaev D.V., Shilnikov L.P. Dynamical phenomena in multidimensional systems with non-rough Poincaré homoclinic curve. *Doklady Mathematics.* 1993. Vol. 330, No. 2. Pp. 144–147.
  11. Gonchenko S.V., Shilnikov L.P., Turaev D.V. Dynamical phenomena in systems with structurally unstable Poincaré homoclinic orbits. *Chaos.* 1996. Vol. 6, No. 1. Pp. 15–31.
  12. Gonchenko S.V., Shilnikov L.P., Turaev D.V. On dynamical properties of multidimensional diffeomorphisms from Newhouse regions. *Nonlinearity.* 2008. Vol. 21, No. 5. Pp. 923–972.
  13. Mora L., Viana M. Abundance of strange attractors. *Acta Math.* 1993. Vol. 171. Pp. 1–71.
  14. Palis J., Viana M. High dimension diffeomorphisms displaying infinitely many sinks. *Ann. Math.* 1994. Vol. 140. Pp. 91–136.
  15. Gonchenko S.V., Sten'kin O.V., Turaev D.V. Complexity of homoclinic bifurcations and  $\Omega$ -moduli. *Int. Journal of Bifurcation and Chaos.* 1996. Vol. 6, No. 6. Pp. 969–989.
  16. Colli E. Infinitely many coexisting strange attractors. *Ann. IHP. Anal. Non Lineaire.* 1998. Vol. 15. Pp. 539–579.
  17. Homburg A.J. Periodic attractors, strange attractors and hyperbolic dynamics near homoclinic orbits to saddle-focus equilibria. *Nonlinearity.* 2002. Vol. 15. Pp. 1029–1050.
  18. Gonchenko S.V., Meiss J.D. and Ovsyannikov I.I. Chaotic dynamics of three-dimensional Hénon maps that originate from a homoclinic bifurcation. *Regul. Chaotic Dyn.* 2006. Vol. 11. Pp. 191–212.
  19. Gonchenko S.V., Shilnikov L.P. and Turaev D.V. On global bifurcations in three-dimensional diffeomorphisms leading to wild Lorenz-like attractors. *Regul. Chaotic Dyn.* 2009. Vol. 14. P. 137–147.
  20. Gonchenko S.V. and Ovsyannikov I.I. On global bifurcations of three-dimensional diffeomorphisms leading to Lorenz-like attractors. *Mat. Model. of Nat. Phenom.* 2013. Vol. 8. Pp. 71–83.
  21. Gonchenko S.V., Ovsyannikov I.I. and Tatjer J.C. Birth of discrete Lorenz attractors at the bifurcations of 3D maps with homoclinic tangencies to saddle points. *Regul. Chaotic Dyn.* 2014. Vol. 19. Pp. 495–505.
  22. Gonchenko S.V. and Ovsyannikov I.I. Homoclinic tangencies to resonant saddles and discrete Lorenz attractors. *Discr. and Cont. Dyn. Sys. Series S.* 2017. Vol. 10, No. 2. Pp. 365–374.
  23. Lozi R. Un attracteur de Henon. *J. Phys.* 1978. Vol. 39. Coll-C5. Pp. 9–10.
  24. Belykh V.N. Chaotic and strange attractors of a two-dimensional map. *Sb. Mathematics.* 1995. Vol. 186, No. 3. Pp. 3–18.

25. Feudel U., Kuznetsov S., Pikovsky A. Strange nonchaotic attractors: Dynamics between order and chaos in quasiperiodically forced systems. *Nonlinear Science*. Vol.56. World scientific series on nonlinear science: Monographs and treatises, 2006.
26. Afraimovich V.S., Shilnikov L.P. Invariant two-dimensional tori, their breakdown and stochasticity. *Amer. Math. Soc. Transl.* 1991. Vol. 149, No. 2. Pp. 201–212.
27. Shilnikov L.P. Chua's circuit: Rigorous result and future problems. *Int. J. Bifurcation and Chaos*. 1994. Vol. 4, No. 3. Pp. 489–519.
28. Henon M. A two-dimensional mapping with a strange attractor. *Commun. Math. Phys.* 1976. Vol. 50. Pp. 69–77.
29. Benedicks M., Carleson L. The dynamics of the Henon map. *Ann. Math.* 1991. Vol. 133. Pp. 73–169.
30. Gonchenko S.V., Simo C. and Vieiro A. Richness of dynamics and global bifurcations in systems with a homoclinic figure-eight. *Nonlinearity*. 2013. Vol. 26, No. 3. Pp. 621–678.
31. Rössler O. E. An equation for continuous chaos. *Physics Letters A*. 1976. Vol. 57, No. 5. Pp. 397–398.
32. Rössler O.E. Different types of chaos in two simple differential equations. *Zeitschrift für Naturforschung A*. 1976. Vol. 31, No. 12. Pp. 1664–1670.
33. Arneodo A., Couillet P., Tresser C. Occurrence of strange attractors in three-dimensional Volterra equations. *Physics Letters A*. 1980. Vol. 79, No. 4. Pp. 259–263.
34. Arneodo A., Couillet P., C. Tresser. Possible new strange attractors with spiral structure. *Commun. Math. Phys.* 1981. Vol. 79. Pp. 573–579.
35. Arneodo A., Couillet P., Tresser C. Oscillators with chaotic behavior: An illustration of a theorem by Shilnikov. *Journal of Statistical Physics*. 1982. Vol. 27, No. 1. Pp. 171–182.
36. Shilnikov L.P. The theory of bifurcations and turbulence. *Selecta Math. Sovietica*. 1991. Vol. 10. Pp. 43–53.
37. Gonchenko A.S., Gonchenko S.V., Shilnikov L.P. Towards scenarios of chaos appearance in three-dimensional maps. *Nelineinaya Dinamika [Russian Journal of Nonlinear Dynamics]*. 2012. Vol. 8, No. 1. Pp. 3–28.
38. Gonchenko A.S., Gonchenko S.V., Kazakov A.O. and Turaev D. Simple scenarios of onset of chaos in three-dimensional maps. *Int. J. Bif. and Chaos*. 2014. Vol. 24, No. 8. 25 pages.
39. Gonchenko S.V., Gonchenko A.S., Ovsyannikov I.I., Turaev D.V. Examples of Lorenz-like attractors in Henon-like maps. *Math. Model. Nat. Phen.* 2013. Vol. 8, No. 5. Pp. 48–70.
40. Gonchenko A., Gonchenko S. Variety of strange pseudohyperbolic attractors in three-dimensional generalized Henon maps. *Physica D*. 2016. Vol. 337. Pp. 43–57.
41. Gonchenko A.S., Kozlov A.D. On scenaria of chaos appearance in three-dimension nonorientable maps. *J. SVO*. 2016. Vol. 18, No. 4. Pp. 17–29.
42. Turaev D.V., Shilnikov L.P. An example of a wild strange attractor. *Sb. Math.* 1998. Vol. 189. Pp. 291–314.

43. Newhouse S.E. The abundance of wild hyperbolic sets and non-smooth stable sets for diffeomorphisms. *Publ. Math. Inst. Hautes Etudes Sci.* 1979. Vol. 50. Pp. 101–151.
44. Ruelle D. Small random perturbations of dynamical systems and the definition of attractors. *Comm. Math. Phys.* 1981. Vol. 82. Pp. 137–151.
45. Gonchenko S., Ovsyannikov I., Simo C., Turaev D. Three-dimensional Henon-like maps and wild Lorenz-like attractors. *Int. J. of Bifurcation and Chaos.* 2005. Vol. 15, No. 11. Pp. 3493–3508.
46. Shilnikov A.L. Bifurcation and chaos in the Morioka–Shimizu system. *Selecta Math. Soviet.* 1991. Vol. 10, No. 2. Pp. 105–117.
47. Shilnikov A.L. On bifurcations of the Lorenz attractor in the Shimizu–Morioka model. *Physica D.* 1993. Vol. 62. Pp. 338–346.
48. Tucker W. The Lorenz attractor exists. *Comptes Rendus de l'Academie des Sciences-Series I-Mathematics.* 1999. Vol. 328, No. 12. Pp. 1197–1202.
49. Ovsyannikov I.I., Turaev D. Analytic proof of the existence of the Lorenz attractor in the extended Lorenz model. *Nonlinearity.* 2017. Vol. 30. Pp. 115–137.
50. Turaev D.V. and Shilnikov L.P. Pseudo-hyperbolicity and the problem on periodic perturbations of Lorenz-like attractors. *Doklady Mathematics.* 2008. Vol. 77, No. 1. Pp. 17–21.
51. Gonchenko S.V., Turaev D.V., Shilnikov L.P. On an existence of Newhouse regions near systems with non-rough Poincaré homoclinic curve (multidimensional case). *Doklady Akademii Nauk.* 1993. Vol. 329, No. 4. Pp. 404–407.
52. Tatjer J.C. Three-dimensional dissipative diffeomorphisms with homoclinic tangencies. *Ergodic Theory Dynam. Systems.* 2001. Vol. 21. Pp. 249–302.
53. Gonchenko S.V., Gonchenko V.S., Tatjer J.C. Bifurcations of three-dimensional diffeomorphisms with non-simple quadratic homoclinic tangencies and generalized Hénon maps. *Regular and Chaotic Dynamics.* 2007. Vol. 12, No.3. Pp. 233–266.
54. Sataev E.A. Stochastic properties of the singular hyperbolic attractors. *Nelineinaya Dinamika [Russian Journal of Nonlinear Dynamics]*. 2010. Vol. 6, No. 1. Pp. 187–206.
55. Gonchenko S.V., Gonchenko A.S., Kazakov A.O. Richness of chaotic dynamics in nonholonomic models of a Celtic stone. *Regular and Chaotic Dynamics.* 2013. Vol. 15, No. 5. Pp. 521–538.
56. Gonchenko S.V., Turaev D.V., Shilnikov L.P. Homoclinic tangencies of an arbitrary order in Newhouse domains. *Journal of Mathematical Sciences.* 2001. Vol. 105, No. 1. Pp. 1738–1778.
57. Gonchenko S., Gonchenko A. and Ming-Chia Li. On topological and hyperbolic properties of systems with homoclinic tangencies. In book «Nonlinear Dynamics New Directions». Springer International Publishing Switzerland, 2015. 27 pages.
58. Gonchenko S., Ovsyannikov I., Tatjer J.C. Birth of discrete Lorenz attractors at the bifurcations of 3D maps with homoclinic tangencies to saddle points. *Regular and Chaotic Dynamics.* 2014. Vol. 19, No. 4. Pp. 495–505.

59. Grines V., Levchenko Yu., Medvedev V. and Pochinka O. The topological classification of structurally stable 3-diffeomorphisms with two-dimensional basic sets. *Nonlinearity*. 2015. Vol. 28. Pp. 4081–4102.
60. Kuznetsov S.P. Example of a physical system with a hyperbolic attractor of the Smale–Williams type. *Phys. Rev. Lett.* 2005. Vol. 95. 144101.
61. Kuznetsov S.P. and Seleznev E.P. Strange attractor of Smale–Williams type in the chaotic dynamics of a physical system. *Zh. Eksp. Teoret. Fiz.* 2006. Vol. 129, No.2. Pp. 400–412 [*J. Exp. Theor. Phys.* 2006. Vol. 102, No. 2. Pp. 355–364].
62. Kuznetsov S.P. and Pikovsky A. Autonomous coupled oscillators with hyperbolic strange attractors. *Physica D*. 2007. Vol. 232. Pp. 87–102.
63. Kuznetsov S.P. Example of blue sky catastrophe accompanied by a birth of the Smale–Williams attractor. *Regular and Chaotic Dynamics*. 2007. Vol. 12, No. 3. Pp. 233–266.
64. Shilnikov A.L., Shilnikov L.P., Turaev D.V. Normal forms and Lorenz attractors. *Int. J. of Bifurcation and Chaos*. 1993. Vol. 3. Pp. 1123–1139.
65. Shilnikov L.P., Shilnikov A.L., Turaev D.V., Chua L.O. Methods of qualitative theory in nonlinear dynamics. *World Scientific*. Part I, 1998; Part 2, 2002 .
66. Anosov D.V. (ed.). Geodesic flows on closed Riemann manifolds with negative curvature. *American Mathematical Society*. 1969. No. 90.

Поступила в редакцию 22.02.2017



*Гонченко Александр Сергеевич* – родился в 1987 году, окончил Нижегородский государственный университет имени Н.И.Лобачевского (2010). С 2010 по 2012 обучался в очной аспирантуре в ННГУ им Н.И. Лобачевского. Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук (2013, ННГУ) по специальности 01.01.02 – «Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление». Работает в ННГУ научным сотрудником лаборатории динамических и управляемых систем. Опубликовал около 20 научных статей по исследованию динамического хаоса в различных динамических системах.

Россия, 603950 Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23  
 Нижегородский национальный исследовательский университет имени Н.И. Лобачевского  
 E-mail: agonchenko@mail.ru



*Гонченко Сергей Владимирович* – родился в 1953 году в Горьком. Окончил Горьковский государственный университет имени Н.И.Лобачевского (1975). Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук (1983, ГГУ) и доктора физико-математических наук (2004, ГГУ) по специальности 01.01.02 – «Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление». Автор монографии «Гомоклинические касания» (в соавторстве с Л.П. Шильниковым). Опубликовал 150 научных статей по направлениям, указанным выше. Федеральный профессор в области математики. Работает в ННГУ, заведующий отделом дифференциальных уравнений НИИ ПМК ННГУ (с 2011).

Россия, 603950 Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23  
 Нижегородский национальный исследовательский университет имени Н.И. Лобачевского  
 E-mail: sergey.gonchenko@mail.ru

*Казаков Алексей Олегович* – родился в 1987 году, окончил Нижегородский государственный университет имени Н.И.Лобачевского (2010). С 2010 по 2012 обучался в очной аспирантуре в ННГУ им Н.И. Лобачевского. Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук (2013, НИУ МИФИ) по направлению 05.13.18 – «Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ». Работал младшим научным сотрудником (2011–2013) в лаборатории «Нелинейного анализа и конструирования новых средств передвижения» в УдГУ (Ижевск). С 2013 года работает на кафедре «Теории управления и динамики систем» в ННГУ им. Н.И.Лобачевского и с 2015 года – научным сотрудником в лаборатории ТАПРА-ДЕСС в НИУ ВШЭ (Нижний Новгород). Опубликовал около 20 научных статей по исследованию динамического хаоса в различных динамических системах.



Россия, 603155 Нижний Новгород, ул. Большая Печерская, д.25/12  
Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»  
Россия, 603950 Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23  
Нижегородский национальный исследовательский университет имени Н.И. Лобачевского  
Россия, 426034 Ижевск, ул. Университетская, 1  
Удмуртский государственный университет  
E-mail: kazakovdz@yandex.ru

*Козлов Александр Дмитриевич* – родился в 1988 году, окончил Нижегородский государственный университет имени Н.И.Лобачевского (2011). После окончания ННГУ работает в исследовательской лаборатории компании Интел, параллельно занимается научной деятельностью в ННГУ. Область научных интересов – странные аттракторы в трехмерных диффеоморфизмах и четырехмерных потоках.



Россия, 603950 Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23  
Нижегородский национальный исследовательский университет имени Н.И. Лобачевского  
E-mail: kozzloff@list.ru



УДК 537.86; 001.891.573; 51.73; 621.376.9

## СИНХРОНИЗАЦИЯ БИЕНИЙ В СИСТЕМАХ ФАЗОВОЙ АУТОПОДСТРОЙКИ ЧАСТОТЫ

*М. А. Мищенко, В. В. Матросов*

Радиофизический факультет, Национальный исследовательский  
Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского  
Россия, 603950 Нижний Новгород, проспект Гагарина, 23  
E-mail: mischenko@neuro.nnov.ru, matrosov@rf.unn.ru

Изучается динамика двух систем фазовой автоподстройки частоты с интегрирующими фильтрами в цепях управления, связанных через дополнительный фазовый дискриминатор. Математические модели парциальных элементов представляют собой уравнения маятникового типа, которые при объединении систем фазовой автоподстройки в ансамбль трансформируются в систему четырех обыкновенных дифференциальных уравнений, определенную в цилиндрическом фазовом пространстве с двумя циклическими координатами. В случае малоинерционных цепей управления модель ансамбля превращается в динамическую систему с тороидальным фазовым пространством. Рассматриваемые модели обладают большим разнообразием движений, как регулярных, так и хаотических. В работе основное внимание уделяется анализу предельных циклов и хаотических аттракторов, которые являются математическими образами режимов биений систем фазовой автоподстройки. В режиме биений на выходе имеют место колебания с угловой модуляцией, свойствами которых можно управлять с помощью параметров систем, а в ансамблях – ещё и параметрами связей. Повышенный интерес к режимам биений в настоящее время обусловлен схожестью колебаний в режимах биений с колебаниями нейронов, то есть перспективой создания на базе систем фазовой автоподстройки частоты нейроподобного элемента. Цель работы – анализ режимов биений систем, объединенных в ансамбль для управления свойствами модулированных колебаний, в частности, для синхронизации этих колебаний. Изучение проведено путем численного моделирования, базирующегося на методах теории нелинейных колебаний и качественной теории бифуркаций. В результате в пространстве параметров моделей выделены области синхронизации режимов биений различных типов, в ансамбле систем фазовой автоподстройки с инерционными цепями управления установлена возможность совместного существования синхронных и асинхронных режимов, как следствие, гистерезисных явлений. Рассмотрены бифуркационные механизмы установления и нарушения синхронизации режимов биений. Показано, что объединение систем фазовой автоподстройки через дополнительный фазовый дискриминатор позволяет синхронизировать режимы биений.

*Ключевые слова:* Фазовая автоподстройка частоты, биения, синхронизация, автомодулированные колебания.

DOI: 10.18500/0869-6632-2017-25-2-37-50

*Образец цитирования:* Мищенко М.А., Матросов В.В. Синхронизация биений в системах фазовой автоподстройки частоты // Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2017. Т. 25, № 2. С. 37–50.



## SYNCHRONIZATION OF BEATS IN PHASE-LOCKED LOOPS

*M. A. Mishchenko, V. V. Matrosov*

Faculty of Radiophysics, National Research  
Lobachevsky State University of Nizhni Novgorod,  
23, Prospect Gagarina, 603950 Nizhni Novgorod, Russia  
E-mail: mischenko@neuro.nnov.ru, matrosov@rf.unn.ru

Dynamics of two phase-locked loops (PLL) with first order low-pass filters coupled via additional phase discriminator is studied. Mathematical models of the partial systems are pendulum-like type. Thus, mathematical model of the whole system consists of four ordinary differential equations. Phase space of the model is a cylindrical with two cyclic variables. In a case of low-inertial control loops the model transforms into dynamical system with toroidal phase space. The observed model has a great variety of dynamical modes both regular and chaotic. In the article, the main attention is paid to analysis of limit cycles and chaotic attractors, corresponding to beating modes of PLLs. In the beating mode oscillations with angular modulation exist at the PLL's output. The characteristics of the modulation could be controlled by PLL's parameters and, in case of ensemble, by coupling parameters. The actuality of the beating modes investigations is concerned with some possible applications in neurodynamics – oscillations in the beating modes are similar to the neuronal membrane potential oscillations. The goal of the paper is the analysis of beating modes of coupled PLLs to control the characteristics of modulated oscillations and to synchronize these oscillations in particular. The study is performed by numerical modelling with modern nonlinear dynamics methods and bifurcation theory applications. As a result, the regions of synchronization of beating modes are determined in parameter space of the model. The coexistence of beating modes synchronous and asynchronous dynamics are shown for PLLs with inertial control loop. Bifurcation mechanisms of beating mode synchronization loss are studied. The coupling of PLLs through additional phase discriminator is shown to synchronize beating mode oscillations.

*Keywords:* Phase-locked loop, beating modes, synchronization, automodulated oscillations.

DOI: 10.18500/0869-6632-2017-25-2-37-50

*Paper reference:* Mishchenko M.A., Matrosov V.V. Synchronization of beats in phase-locked loops. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*. 2017. Vol. 25. Issue 2. P. 37–50.

### Введение

Системы фазовой автоподстройки частоты (фазовой синхронизации, ФАП) повсеместно используются в электронике, радиотехнике и системах связи [1–4]. Их применяют для стабилизации частоты и фазы несущей в модуляторах и демодуляторах, в принимающих устройствах, для синтеза частот и многих других задач [1, 3, 5]. Классическая система фазовой синхронизации представляет собой петлю управления с отрицательной обратной связью и состоит из следующих основных элементов: управляемого напряжением генератора, который способен менять частоту колебаний в зависимости от подаваемого на вход напряжения; фазового дискриминатора, сравнивающего фазу управляемого генератора с фазой эталонного генератора и вырабатывающего напряжение, пропорциональное разности их фаз  $\varphi$ ; фильтра нижних частот, отсеивающего высокочастотные шумовые составляющие.

В многочисленных работах (например, [6–11]) было показано, что кроме типичного для таких систем синхронного режима они могут использоваться в качестве

генераторов сложных автоколебаний, в том числе хаотических, снимаемых с выхода фильтра в цепи управления. При этом сложность колебаний во многом определяется выбранным типом фильтра. Поскольку сигнал с выхода фильтра поступает на вход управляющего устройства генератора, корректирующего его угловую координату, то на выходе управляемого генератора будет наблюдаться сигнал с угловой модуляцией, закон которой определяется колебаниями в цепи управления.

Динамика системы в режиме синхронизации достаточно хорошо изучена, но асинхронные режимы остаются малоизученными. Также нерешенными остаются вопросы о коллективной динамике систем автоподстройки, находящихся в асинхронных режимах. На практике системы объединяют в ансамбли для того, чтобы добиться улучшения динамических свойств (увеличения полосы синхронизации, улучшения фильтрующих свойств и т.д.). Кроме того, объединение систем фазовой автоподстройки частоты в ансамбли представляет интерес в связи с возможностью использования этих систем для моделирования динамики нейронов [12, 13].

В данной работе исследуется синхронизация двух систем фазовой автоподстройки частоты, находящихся в режиме биений, то есть синхронизация колебаний с угловой модуляцией на выходе управляемых напряжением генераторов связанных систем. Показано, что возможна синхронизация биений в случае параллельного соединения систем через дополнительный фазовый дискриминатор.

## 1. Биения в фазовых системах

Рассмотрим динамику системы фазовой синхронизации частоты. В общем виде динамика системы фазовой синхронизации описывается следующим операторным уравнением [1]:

$$\frac{p\varphi}{\Omega} - K(p)F(\varphi) = \gamma, \quad (1)$$

где  $\varphi$  – мгновенное значение разности фаз управляемого и опорного генератора;  $p \equiv d/dt$  – оператор дифференцирования;  $\Omega$  – максимальная частотная расстройка, которую способна скомпенсировать цепь управления;  $K(p)$  – коэффициент передачи фильтра нижних частот в операторной форме;  $F(\varphi)$  – характеристика фазового дискриминатора;  $\gamma$  – относительная начальная частотная расстройка управляемого и опорного генератора.

Для получения конкретного дифференциального уравнения, описывающего динамику системы, необходимо подставить в уравнение (1) конкретные характеристики фазового дискриминатора и передаточную характеристику фильтра. Рассмотрим характеристики асинхронного режима в системах без фильтра ( $K(p) = 1$ ) и с интегрирующим фильтром ( $K(p) = 1/(1 + Tp)$ ) для случая синусоидальной характеристики фильтра, то есть  $F(\varphi) = \sin \varphi$ .

**1.1. Асинхронный режим в системе без фильтра.** Начнем рассмотрение с простейшего случая, когда  $K(p) = 1$ . Подставляя  $K(p)$  в (1), получим дифференциальное уравнение первого порядка

$$\frac{d\varphi}{d\tau} - \sin \varphi = \gamma, \quad (2)$$

где  $\tau = t\Omega$ . Такая система близка к реальной системе ФАП с очень широкой полосой пропускания фильтра. Фазовым пространством такой системы является окружность.

Из анализа уравнения (2) можно увидеть, что в системе при  $\gamma < 1$  существует пара состояний равновесия – устойчивое и неустойчивое. Устойчивое состояние равновесия в системе ФАП соответствует режиму синхронизации опорного и подстраиваемого генераторов. При  $\gamma > 1$  состояния равновесия исчезают, и в системе реализуется режим биений. Режиму биений соответствует угловая модуляция колебаний подстраиваемого генератора около собственной частоты. В режиме биений разность фаз опорного и подстраиваемого генераторов  $\varphi$  непрерывно нарастает во времени (с учетом  $2\pi$ -периодичности), а разность частот совершает колебания около некоторого среднего значения, близкого к  $\gamma$ .

Введем понятие частоты биений. Так как режиму биений в системе (2) в фазовом пространстве соответствует движение по окружности, то частота биений может быть вычислена по формуле:  $\nu = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \varphi(\tau)/(2\pi\tau)$ . Параметр  $\gamma$  позволяет плавно менять частоту биений (или частоту модуляции) на выходе системы.

**1.2. Асинхронный режим в системе с интегрирующим фильтром.** Похожие режимы наблюдаются для системы ФАП с интегрирующим фильтром, имеющим коэффициент передачи  $K(p) = 1/(1+Tp)$ , где  $T$  – постоянная времени фильтра. Подстановка в уравнение (1) после преобразования дает систему уравнений

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi}{d\tau} &= y, \\ \varepsilon \frac{dy}{d\tau} &= \gamma - y - \sin \varphi, \end{aligned} \quad (3)$$

где  $\tau = t\Omega$  – безразмерное время,  $\varepsilon = T\Omega$  – параметр инерционности фильтра. Данная система определена на фазовом цилиндре  $(\varphi \pmod{2\pi}, y)$ .

В книге [1] приводится исследование динамики рассматриваемой системы ФАП как в синхронном режиме, так и в асинхронном. Показано, что в асинхронном режиме в цепи управления наблюдаются негармонические периодические колебания, которые при увеличении  $\gamma$  приближаются к гармоническим. Зависимость частоты биений от параметра  $\gamma$  для различных значений  $\varepsilon$  аналогична полученной для системы без фильтра (2), с тем отличием, что в системе (3) есть ещё один управляющий параметр  $\varepsilon$ , позволяющий смещать характеристику. Кроме того, введение инерционности в цепь управления порождает бистабильность в виде одновременного существования в фазовом пространстве устойчивого состояния равновесия, соответствующего синхронному режиму, и устойчивого предельного цикла, соответствующего режиму биений.

Таким образом, в системах ФАП первого и второго порядков биения являются достаточно простыми, модуляция частоты при биениях является периодической, и частота биений  $\nu$  связана с величиной параметра  $\gamma$ . Существование более сложных биений показано в системах ФАП третьего порядка и выше. Добиться более сложной динамики можно путем усложнения фильтра, а также путем объединения простых систем в ансамбль. Рассмотрим возможность синхронизации биений двух систем ФАП.

## 2. Синхронизация биений в фазовых системах

В режиме биений в цепи управления системы ФАП могут наблюдаться автоколебания, а на выходе управляемого напряжением генератора – модулированные этими колебаниями сигналы. Исследуем возможность синхронизации таких колебаний. Похожие задачи встречались в работах [12, 14–22]. Однако в этих работах рассматривались преимущественно квазисинхронные режимы и возможность синхронизации хаотических колебаний.

Рассмотрим возможность синхронизации биений и, как следствие, модулированных колебаний на выходе управляемых генераторов двух связанных систем ФАП, соединенных через дополнительный фазовый дискриминатор (рис. 1). В качестве парциальных систем ФАП будут рассмотрены системы без фильтра (2) и с интегрирующими фильтрами (3) в цепи управления.

**2.1. Синхронизация биений двух систем ФАП без фильтра.** При соединении двух систем ФАП без фильтра, описываемых уравнением (2), по схеме, представленной на рис. 1, их динамика будет подчиняться следующей системе дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi_1}{d\tau} &= \gamma_1 - \sin \varphi_1 + k_{21} \sin(\varphi_2 - \varphi_1), \\ \frac{d\varphi_2}{d\tau} &= \gamma_1 + \Delta\gamma - \sin \varphi_2 - k_{12} \sin(\varphi_2 - \varphi_1). \end{aligned} \quad (4)$$

Здесь  $\Delta\gamma$  – разница между относительными начальными частотными расстройками двух систем относительно общего опорного генератора;  $k_{12}$  и  $k_{21}$  – параметры связи между системами.

Зададим значение параметра  $\gamma_1 > 1$ , чтобы в системах наблюдался режим биений. Очевидно, что в случае  $\Delta\gamma = 0$  и  $k_{12} = k_{21} = 0$  системы идентичны. Вполне логичным выглядит, что при увеличении силы связи также можно ожидать, что дополнительное воздействие через ФД<sub>3</sub> будет компенсировать расстройку между двумя системами и их колебания будут синхронны.

Фазовым пространством системы (4) является двумерный тор. Различным синхронным режимам будет соответствовать замкнутая траектория на торе с различным соотношением чисел вращения по координатам  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$ . В проекции на плоскость ( $d\varphi_1/d\tau$ ,  $d\varphi_2/d\tau$ ) синхронизации биений двух систем будет соответствовать замкнутая

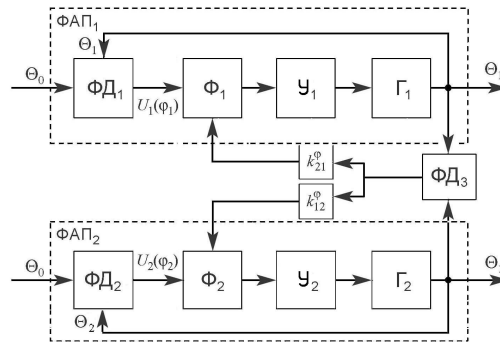


Рис. 1. Схема соединения двух систем ФАП через дополнительный фазовый дискриминатор. Системы ФАП<sub>1</sub> и ФАП<sub>2</sub>, содержащие генераторы, управляемые напряжением, Г<sub>1,2</sub>, имеют общий опорный генератор, текущее значение фазы которого  $\theta_0$  сравнивается с фазами генераторов Г<sub>1,2</sub> на фазовых дискриминаторах ФД<sub>1,2</sub>, соответственно. Получаемые при этом сигналы  $U_{1,2}$ , содержащие информацию о разности фаз опорного и подстраиваемых генераторов  $\varphi_{1,2}$ , преобразуются фильтрами нижних частот Ф<sub>1,2</sub> и корректируют частоты генераторов Г<sub>1,2</sub> через управляющие элементы У<sub>1,2</sub>. Дополнительный фазовый дискриминатор ФД<sub>3</sub> сравнивает фазы генераторов Г<sub>1,2</sub> и передает сигнал, содержащий информацию о разности фаз, в цепи управления систем ФАП<sub>1,2</sub> с весовыми коэффициентами  $k_{21}^\varphi$  и  $k_{12}^\varphi$ .

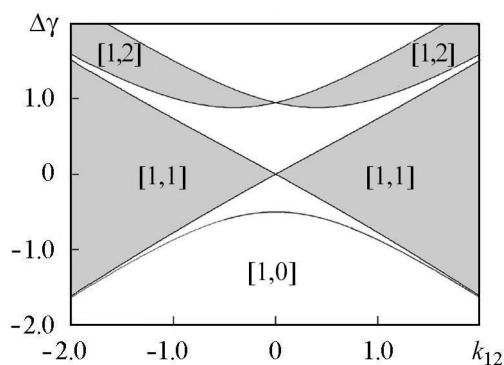


Рис. 2. Бифуркационная диаграмма модели (4) на плоскости параметров  $(k_{12}, \Delta\gamma)$  при  $k_{21} = 0$  и  $\gamma_1 = 1.5$

На рис. 2 выделены области синхронизации биений на основном тоне  $[1, 1]$ , когда скорость изменения переменных  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  одинакова и разность  $(\varphi_1 - \varphi_2)$  ограничена. Область  $[1, 2]$  соответствует кратной синхронизации, когда переменная  $\varphi_2$  нарастает в два раза быстрее, чем  $\varphi_1$ . Осциллограммы  $\dot{\varphi}_1(\tau)$ ,  $\dot{\varphi}_2(\tau)$  и проекции аттрактора на плоскости  $(\varphi_1, \varphi_2)$  и  $(d\varphi_1/d\tau, d\varphi_2/d\tau)$  для значений параметров из областей  $[1, 1]$  и  $[1, 2]$  представлены на рис. 3, *a* и *б*, соответственно. В области, обозначенной  $[1, 0]$ , наблюдается режим, в котором переменная  $\varphi_1$  непрерывно нарастает, что характерно для режима биений, а переменная  $\varphi_2$  ограничена, то есть наблюдается смерть биений в ведомой системе.

Смену динамических режимов при изменении параметров хорошо иллюстрирует бифуркационная диаграмма отображения Пуанкаре, приведенная на рис. 4. Она демонстрирует значение разности фаз  $(\varphi_1 - \varphi_2)$  двух систем ФАП при изменении параметра  $\Delta\gamma$  и фиксированном параметре силы связи  $k_{12} = 1$ . В качестве секущей отображения Пуанкаре выбрана плоскость  $\varphi_1 = \pi$ , поэтому фактически на диаграмме показано изменение значения  $\varphi_2$  в моменты пересечения секущей плоскости.

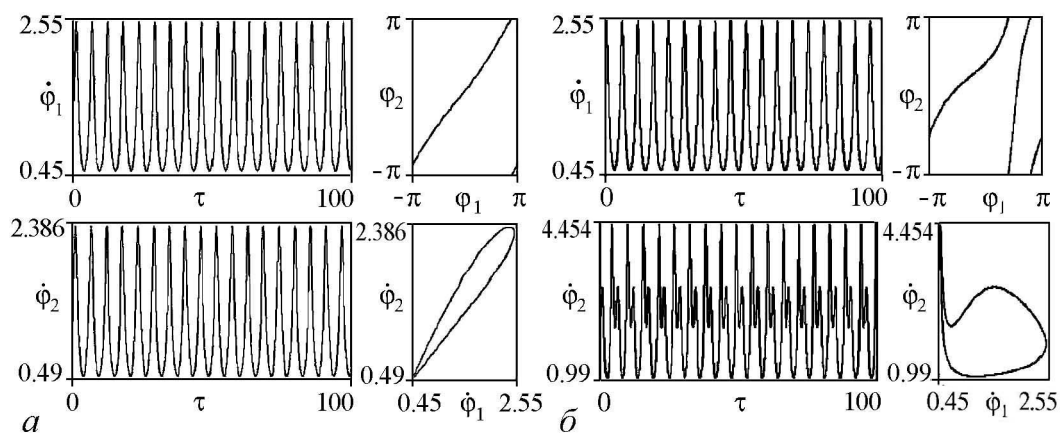


Рис. 3. Осциллограммы  $\dot{\varphi}_1(\tau)$ ,  $\dot{\varphi}_2(\tau)$  и проекции аттрактора на плоскости  $(\varphi_1, \varphi_2)$  и  $(d\varphi_1/d\tau, d\varphi_2/d\tau)$  системы (4) для значений параметров  $\gamma_1 = 1.5$ ,  $\Delta\gamma = 0.1$  и  $k_{12} = 0.6$ ,  $k_{21} = 0$  из области  $[1, 1]$  (*a*);  $\gamma_1 = 1.5$ ,  $\Delta\gamma = 1.5$  и  $k_{12} = 1$ ,  $k_{21} = 0$  из области  $[1, 2]$  (*б*)

Для каждого значения параметра  $\Delta\gamma$  производилось 100 итераций вычисления значений переменных на текущей плоскости. Из диаграммы видно, что в случае, когда значения параметров попадают в область синхронизации  $[1, 1]$ , в область кратной синхронизации  $[1, 2]$  или смерти биений  $[1, 0]$  (см. рис. 2), все 100 итераций дают одно значение разности фаз ( $\varphi_1 - \varphi_2$ ), в то время как вне обозначенных областей каждая итерация дает свое значение ( $\varphi_1 - \varphi_2$ ) и на диаграмме наблюдается характерная область.

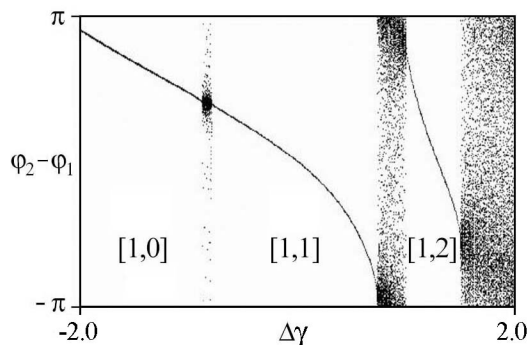


Рис. 4. Бифуркационная диаграмма отображения Пуанкаре системы (4) при изменении параметра  $\Delta\gamma$  и фиксированных параметрах  $\gamma_1 = 1.5$ ,  $k_{12} = 1$  и  $k_{21} = 0$

Кроме того, из диаграммы на рис. 4 по характеру выхода из «регулярных» областей  $[1, 0]$ ,  $[1, 1]$  и  $[1, 2]$  можно сделать заключение, что нарушение синхронизации связано с исчезновением устойчивого предельного цикла на торе, соответствующего режимам синхронизации, что порождает незамкнутую траекторию в двумерном тороидальном фазовом пространстве системы (4).

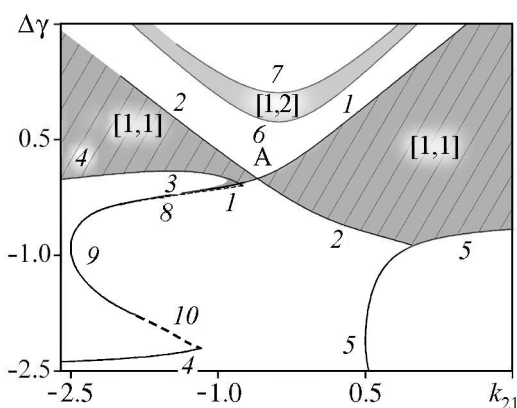


Рис. 5. Бифуркационная диаграмма модели (4) на плоскости параметров  $(k_{21}, \Delta\gamma)$  при  $k_{12} = 0.6$  и  $\gamma_1 = 1.5$

При добавлении в ансамбль малой обратной связи от ФАП<sub>2</sub> к ФАП<sub>1</sub> ( $k_{21} \neq 0$ ) можно ожидать, что качественно картина должна сохраниться, то есть синхронизация должна быть осуществима. Зафиксируем значение параметра связи  $k_{12} = 0.6$  и параметра  $\gamma_1 = 1.5$  и рассмотрим пространство параметров  $(k_{21}, \Delta\gamma)$ . На рис. 5 представлена бифуркационная диаграмма модели (4) на плоскости  $(k_{21}, \Delta\gamma)$ , на которой выделены области существования различных режимов синхронизации биений.

Как можно увидеть из рис. 5, бифуркационная картина значительно сложнее, чем представленная на рис. 2 для случая однонаправленной связи. Разберем подробнее бифуркационные кривые, ограничивающие области на рис. 5.

В области, обозначенной  $[1, 1]$ , реализуется синхронный режим, изображенный на рис. 3, а. Данная область состоит из двух частей, соединяющихся в точке А ( $k_{21} = -0.6$ ,  $\Delta\gamma = 0$ ), в которой уравнения в системе (4) оказываются идентичными, а сама система – вырожденной. Правая часть области  $[1, 1]$  ограничена сверху кривой 1, на которой мультипликатор предельного цикла, соответствующего синхронному режиму, обращается в «+1» и происходит бифуркация двукратного предельного цикла. Снизу данная область ограничена аналогичной кривой 2 и частью кривой 5, на которой происходит бифуркация петли сепаратрисы седлоузла. Левая часть области синхронизации  $[1, 1]$  ограничена сверху продолжением кривой 2, а снизу – продолжением кривой 1 и кривой бифуркации петли сепаратрисы седлоузла 4. В об-

ластях, ограниченных кривыми 5 и семейством кривых 4-8-9-10 существуют устойчивые состояния равновесия, которые соответствуют «смерти» биений в системах.

Кроме того, обнаружено перекрытие области синхронизации  $[1, 1]$  с областью существования состояния равновесия. Небольшой участок области синхронизации биений ограничен снизу кривой 1, а сверху – кривой бифуркации петли сепаратрис седла 3. Кривые 8, 9, 10 обозначают различные бифуркации состояний равновесия и более подробно рассмотрены в работе [22]. Штриховкой отмечена область захвата в режим синхронизации биений  $[1, 1]$ .

Кроме основной области синхронизации биений была выделена область синхронизации биений на кратной частоте с движениями типа  $[1, 2]$ , динамика которых была показана на рис. 3, б. Область существования данного режима ограничена кривыми 6 и 7, соответствующими бифуркации предельного цикла с мультипликатором «+1».

**2.2. Синхронизация биений двух систем ФАП с интегрирующим фильтром.** Продолжим рассмотрение синхронизации биений на примере систем ФАП с интегрирующим фильтром. Динамическая система по схеме, представленной на рис. 1, составленная из парциальных элементов, описываемых уравнением (3), описывается следующими дифференциальными уравнениями:

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi_1}{d\tau} &= y_1, \\ \varepsilon_1 \frac{dy_1}{d\tau} &= \gamma_1 - \sin \varphi_1 - y_1 + k_{21} \sin(\varphi_2 - \varphi_1), \\ \frac{d\varphi_2}{d\tau} &= y_2, \\ \varepsilon_2 \frac{dy_2}{d\tau} &= \gamma_1 + \Delta\gamma - \sin \varphi_2 - y_2 - k_{12} \sin(\varphi_2 - \varphi_1), \end{aligned} \quad (5)$$

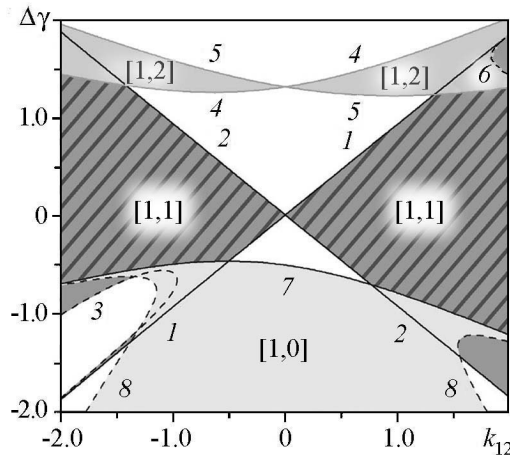


Рис. 6. Бифуркационная диаграмма модели (5) на плоскости параметров  $(k_{12}, \Delta\gamma)$  при  $\gamma_1 = 1.5$ ,  $\varepsilon_1 = 1.1$ ,  $\varepsilon_2 = 1$ ,  $k_{21} = 0$

где все переменные и параметры эквивалентны описанным выше для систем (3) и (4).

Сначала рассмотрим вариант односторонней связи ( $k_{21} = 0$ ). Зафиксируем часть параметров:  $\gamma_1 = 1.5$ ,  $\varepsilon_1 = 1.1$ ,  $\varepsilon_2 = 1.0$  и рассмотрим существование режима синхронизации биений на плоскости параметров  $(k_{12}, \Delta\gamma)$ . Полученное разбиение представлено на рис. 6.

Как можно увидеть из рис. 6, разбиение плоскости параметров для системы (5) качественно похоже на аналогичное разбиение для системы двух ФАП первого порядка (4), представленное на рис. 2. Но, в силу более высокой

размерности фазового пространства системы (5), на рис. 6 наблюдается пересечение областей существования различных режимов, порождающее бистабильность. Кроме того, внутри областей синхронизации  $[1, 1]$ ,  $[1, 2]$  и области  $[1, 0]$  обнаружены кривые 3, 6 и 8 бифуркации удвоения периода предельного цикла, соответствующие переходу к синхронизации более высоких порядков, синхронизации «в среднем» и асинхронному поведению.

При добавлении в систему (5) обратной связи от ФАП<sub>2</sub> к ФАП<sub>1</sub> ( $k_{21} \neq 0$ ) получается картина (рис. 7), качественно похожая на результат для системы (4), изображенный на рис. 5, хотя и более сложная по причине более высокой размерности динамической системы. В силу различных значений параметров  $\varepsilon_1 = 1.1$  и  $\varepsilon_2 = 1.0$ , ФАП<sub>1</sub> и ФАП<sub>2</sub> оказываются неидентичными, что приводит к отсутствию точки вырождения системы (5). Кроме того, так же как и для случая однонаправленной связи, для системы (5) с взаимными связями обнаружена мультистабильность, обусловленная пересечением областей существования различных динамических режимов.

Обнаружено пересечение основной области  $[1, 1]$  с областями кратной синхронизации биений  $[1, 2]$ , областями существования состояния равновесия и областями асинхронного хаотического поведения.

Интересующее нас явление синхронизации биений двух систем ФАП наблюдается в области  $[1, 1]$ . Данная область отвечает существованию аттрактора, изображенного на рис. 3, *a*, и ограничена бифуркационными кривыми, обозначенными буквой «А» (см. рис.7). В верхней части данная область ограничена кривыми  $A1$  и  $A2$ , соответствующими бифуркации двукратного предельного цикла. Снизу границей области выступают бифуркационные кривые двукратного предельного цикла  $A3$  и  $A4$ , а также кривая  $O1$ , отвечающая седло-узловой бифуркации состояний равновесия. Кроме того, внутри области  $[1, 1]$  обнаружены бифуркационные кривые удвоения периода  $A5$ ,  $A7$  и  $A8$  и кривая двукратного предельного цикла  $A6$ , которые

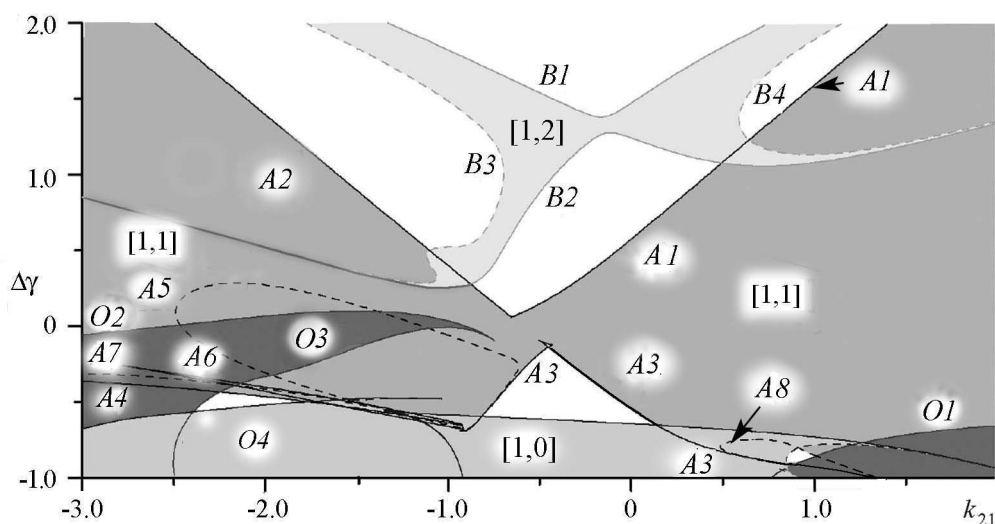


Рис. 7. Бифуркационная диаграмма модели (5) на плоскости параметров  $(k_{21}, \Delta\gamma)$  при  $\gamma_1 = 1.5$ ,  $\varepsilon_1 = 1.1$ ,  $\varepsilon_2 = 1.0$ ,  $k_{12} = 0.6$



усложняют структуру пространства параметров.

Обнаружена область кратной синхронизации биений [1, 2], которую ограничивают бифуркационные кривые двукратного предельного цикла  $B1$  и  $B2$  и бифуркационные кривые удвоения периода предельного цикла  $B3$  и  $B4$ .

В нижней части пространства параметров обнаружена область движений типа [1, 0].

Кроме того, на рис. 7 выделены области существования устойчивого состояния равновесия, ограниченные кривыми бифуркации седло-узла  $O1$ ,  $O2$  и  $O4$  и кривой бифуркации Андронова–Хопфа  $O3$ . Более подробная структура пространства параметров в данной области рассмотрена в работах [20, 22]. В данных областях наблюдается смерть биений в обеих системах ФАП.

Мультистабильность и смену динамических режимов и режимов синхронизации биений при изменении параметра  $\Delta\gamma$  иллюстрируют однопараметрические диаграммы отображения Пуанкаре, представленные на рис. 8. На диаграмме можно наблюдать явление гистерезиса между областями режимов [1, 0] и [1, 1] при изменении параметра  $\Delta\gamma$ . Кроме того, из диаграммы на рис. 8 можно увидеть наличие синхронизации биений типа [2, 2], [2, 4] и более высоких порядков, а также синхронизации биений в среднем, когда мгновенное значение разности фаз ( $\varphi_2 - \varphi_1$ ) случайно изменяется в некотором интервале, но в среднем ограничено.

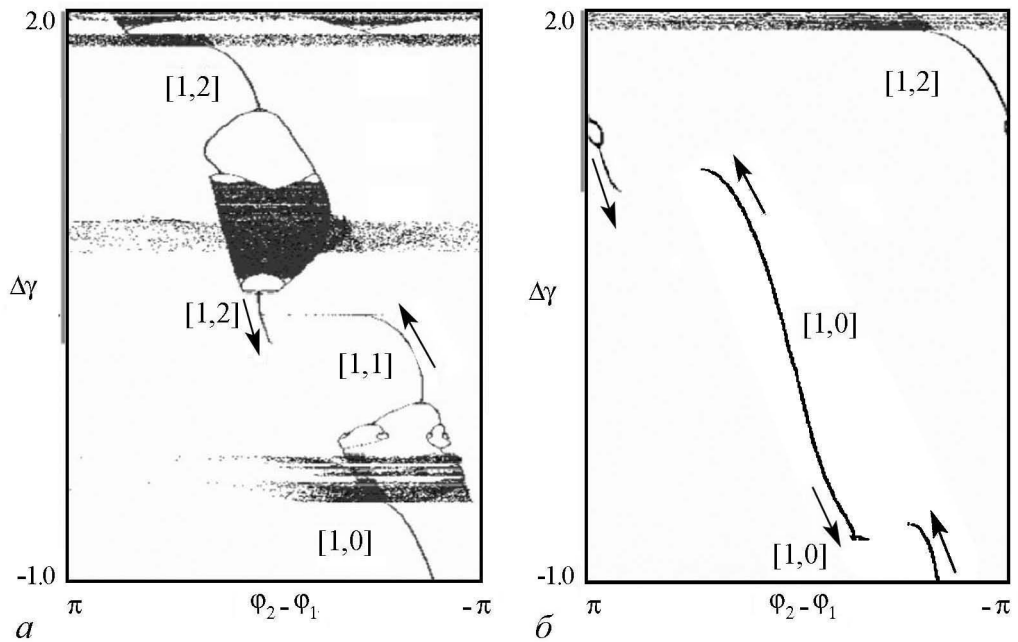


Рис. 8. Бифуркационная диаграмма отображения Пуанкаре системы (5) при изменении параметра  $\Delta\gamma$  и фиксированных параметрах  $\gamma_1 = 1.5$ ,  $\varepsilon_1 = 1.1$ ,  $\varepsilon_2 = 1.0$ ,  $k_{12} = 0.6$  и  $k_{21} = -1.0$  (а),  $k_{21} = 0.6$  (б)

### Заключение

В данной работе показана возможность использования систем фазовой автоподстройки частоты в качестве генераторов модулированных колебаний. Рассмотрено

ны случаи системы ФАП без фильтра и с интегрирующим фильтром первого порядка в цепи управления. В таких системах возможно существование режима биений, когда цепь управления не способна скомпенсировать частотную расстройку между опорным генератором и генератором, управляемым напряжением. В этом случае на выходе цепи управления наблюдаются регулярные негармонические колебания, а на выходе управляемого генератора наблюдаются колебания с угловой модуляцией – автомодулированные колебания.

Предложен вариант соединения двух систем ФАП для синхронизации автомодулированных колебаний через дополнительный фазовый дискриминатор. Определены области существования синхронных режимов биений в пространстве параметров и изучены бифуркационные механизмы выхода из синхронного режима биений при изменении параметров систем в случае однонаправленной и взаимной связей.

Показано, что введение инерционности в фильтре значительно усложняет области синхронизации биений в пространстве параметров и порождает мультистабильность и синхронизацию биений более высоких порядков и синхронизацию «в среднем».

*Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 16-31-60080 мол\_а\_дк и № 16-32-00643 мол\_а.*

*Авторы благодарят за частичную поддержку Министерство образования и науки России в рамках соглашения № 3.820.2014/К.*

## **Библиографический список**

1. *Шахгильдян В.В., Ляховкин А.А.* Системы фазовой автоподстройки частоты. 2-е изд. Москва: «СВЯЗЬ», 1972. 497 с.
2. *Линдсей В.* Системы синхронизации в связи и управлении /Пер. с англ. Под ред. Ю.Н. Бакаева и М.В. Капранова. М.: Сов. радио, 1978.
3. Lindsey W.C., Simon M.K., eds. Phase-locked Loops and Their Application. New York: IEEE Press, 1978.
4. *Best R.E.* Phase-Locked Loops: Design, Simulation, and Applications. 5th ed. New York: McGraw-Hill, 2003.
5. *Lindsey W.C.* Telecommunication Systems Engineering. Courier Dover Publications, 1972.
6. *Шалфеев В.Д., Матросов В.В.* Нелинейная динамика систем фазовой синхронизации. Нижний Новгород: Изд-во ННГУ, 2013. 366 с.
7. *Endo T., Chua L.* Chaos from phase-locked loops // IEEE Trans. Circuits Syst. 1988. Vol. 35. Issue 8. P. 987–1003.
8. *Endo T.* A review of chaos and nonlinear dynamics in phase-locked loops // J. Franklin Inst. 1994. Vol. 32. Issue 95. P. 859–902.
9. *Harb B.A., Harb A.M.* Chaos and bifurcation in a third-order phase locked loop // Chaos, Solitons & Fractals. 2004. Vol. 19. Issue 3. P. 667–672.

10. *Mishagin K.G. et al.* Multi-band chaotic oscillator with phase-locked loop // Progress In Electromagnetics Research Symposium Proceedings. Moscow, 2009. P. 1503–1507.
11. *Мищенко М.А., Шалфеев В.Д., Матросов В.В.* Нейроподобная динамика в системе фазовой синхронизации // Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2012. Т. 20, № 4. С. 122.
12. *Matrosov V.V, Mishchenko M.A., Shalfeev V.D.* Neuron-like dynamics of a phase-locked loop // Eur. Phys. J. Spec. Top. 2013. Vol. 222. Issue 10. P. 2399–2405.
13. *Hoppensteadt F.C., Izhikevich E.M.* Pattern recognition via synchronization in phase-locked loop neural networks // IEEE Trans. Neural Netw. 2000. Vol. 11. Issue 3. P. 734–738.
14. *Chattopadhyay D., Mandal M.* Secure communication using chaotic synchronization of PLL // Int. J. Electron. Electr. 2010. Vol. 3. Issue 1. P. 17–22.
15. *Endo T., Chua L.* Synchronization of chaos in phase-locked loops // Circuits Syst. IEEE Trans. 1991. Vol. 38. Issue 12. P. 1580–1588.
16. *Endo T., Chua L.* Synchronizing chaos from electronic phase-locked loops // Circuits Syst. 1992. ISCAS'92. 1992. P. 3–6.
17. *Sarkar B.C., Chakraborty S.* Self-oscillations of a third order PLL in periodic and chaotic mode and its tracking in a slave PLL // Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul. 2014. Vol. 19. Issue 3. P. 738–749.
18. *Bueno A.M. et al.* Design constraints for third-order PLL nodes in master-slave clock distribution networks // Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul. 2010. Vol. 15. Issue 9. P. 2565–2574.
19. *Алешин К.Н., Матросов В.В., Шалфеев В.Д.* Динамика малых ансамблей систем фазовой синхронизации с однонаправленными связями // Изв. вузов. Радиофизика. 2016. Т. 59, № 1. С. 55–66.
20. *Хрисанфова С.О. Кадина Е.Ю., Губина Е.В., Коган Л.В., Осипов Г.В.* Динамика системы двух нелинейно связанных маятников // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2016. Т. 24, № 3. С. 4–20.
21. *Матросов В.В.* Динамика двух параллельно связанных фазоуправляемых генераторов с малоинерционными цепями управления // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2006. Т. 14, № 1. С. 25–37.
22. *Матросов В.В.* Динамика двух фазоуправляемых, связанных через нелинейный элемент генераторов с малоинерционными цепями управления // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2007. Т. 15, № 3. С. 15–32.

## References

1. Shahgildyan V.V., Lyahovkin A.A. Phase-Locked Loops. 2nd ed. Moscow: Svyaz, 1972. 497 p. (in Russian).
2. Lindsey W.C. Synchronization Systems in Communication and Control. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 1972.
3. Lindsey W.C., Simon M.K., eds. Phase-Locked Loops and Their Application. New York: IEEE Press, 1978.

4. Best R.E. Phase-Locked Loops: Design, Simulation, and Applications. 5th ed. New York: McGraw-Hill, 2003.
5. Lindsey W.C. Telecommunication Systems Engineering. Courier Dover Publications, 1972.
6. Shalfeev V.D., Matrosov V.V. Nonlinear Dynamics of Phase-Locked Loops. Nizhni Novgorod: Izd. Nizhegorodskogo gosuniversiteta, 2013. 366 p. (in Russian).
7. Endo T., Chua L. Chaos from phase-locked loops. *IEEE Trans. Circuits Syst.* 1988. Vol. 35. Issue 8. P. 987–1003.
8. Endo T. A review of chaos and nonlinear dynamics in phase-locked loops. *J. Franklin Inst.* 1994. Vol. 32. Issue 95. P. 859–902.
9. Harb B.A., Harb A.M. Chaos and bifurcation in a third-order phase locked loop. *Chaos, Solitons & Fractals.* 2004. Vol. 19. Issue 3. P. 667–672.
10. Mishagin K.G. et al. Multi-band chaotic oscillator with phase-locked loop. *Progress In Electromagnetics Research Symposium Proceedings.* Moscow, 2009. P. 1503–1507.
11. Mischenko M.A., Shalfeev V.D., Matrosov V.V. Neuron-like dynamics in phase-locked loop. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics.* 2012. Vol. 20, № 4. P. 122 (in Russian).
12. Matrosov V. V, Mishchenko M.A., Shalfeev V.D. Neuron-like dynamics of a phase-locked loop. *Eur. Phys. J. Spec. Top.* 2013. Vol. 222. Issue 10. P. 2399–2405.
13. Hoppensteadt F.C., Izhikevich E.M. Pattern recognition via synchronization in phase-locked loop neural networks. *IEEE Trans. Neural Netw.* 2000. Vol. 11. Issue 3. P. 734–738.
14. Chattopadhyay D., Mandal M. Secure Communication using Chaotic Synchronization of PLL. *Int. J. Electron. Electr.* 2010. Vol. 3, № 1. P. 17–22.
15. Endo T., Chua L. Synchronization of chaos in phase-locked loops. *Circuits Syst. IEEE Trans.* 1991. Vol. 38. Issue 12. P. 1580–1588.
16. Endo T., Chua L. Synchronizing chaos from electronic phase-locked loops. *Circuits Syst.* 1992. ISCAS'92. 1992. P. 3–6.
17. Sarkar B.C., Chakraborty S. Self-oscillations of a third order PLL in periodic and chaotic mode and its tracking in a slave PLL. *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.* 2014. Vol. 19. Issue 3. P. 738–749.
18. Bueno A.M. et al. Design constraints for third-order PLL nodes in master-slave clock distribution networks. *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.* 2010. Vol. 15. Issue 9. P. 2565–2574.
19. Aleshin K.N., Matrosov V.V., Shalfeev V.D. The Dynamics of Small-Sized Ensembles of the Phase-Locked Loops with Unidirectional Couplings. *Radiophys. Quantum Electron.* 2016. Vol. 59, № 1. P. 48–58.
20. Khrisanfova S., Kadina E., Gubina E., Kogan L., Osipov G. The dynamics of the

two nonlinearly coupled oscillators. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*. 2016. Vol. 24, № 3. P. 4–20 (in Russian).

21. Matrosov V.V. Dynamics of two parallel phase-locked-loops with low-inertia control loops. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*. 2006. Vol. 14, № 1. P. 25–37 (in Russian).
22. Matrosov V.V. Dynamics of two phase-locked-loop system coupled through the phase discriminator. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*. 2007. Vol. 15, № 3. P. 15–32 (in Russian).

*Поступила в редакцию 7.12.2016*



*Мищенко Михаил Андреевич* – родился в Нижнем Новгороде (1987), окончил радиофизический факультет Нижегородского государственного университета им. Н.И. Лобачевского (2010). Кандидат физико-математических наук (2013). Область научных интересов – нейродинамика, нелинейная динамика и синхронизация. Научный сотрудник и старший преподаватель кафедры теории колебаний и автоматического регулирования Нижегородского государственного университета им. Н.И. Лобачевского.

Россия, 603950 Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23  
Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского  
E-mail: [mischenko@neuro.nnov.ru](mailto:mischenko@neuro.nnov.ru)



*Матросов Валерий Владимирович* – родился в 1960 году, окончил Горьковский государственный университет им. Н.И. Лобачевского (1982) по специальности «прикладная математика». Защитил диссертации на соискание ученых степеней кандидата физико-математических наук (1994), доктора физико-математических наук (2007). С 1999 года работает на радиофизическом факультете ННГУ, в настоящее время – профессор кафедры теории колебаний и автоматического регулирования. Область научных интересов – динамика нелинейных систем, динамический хаос, синхронизация и управление хаосом, математическое моделирование. Имеет более 100 публикаций в отечественных и зарубежных изданиях, является соавтором двух монографий и трех учебных пособий.

Россия, 603950 Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23  
Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского  
E-mail: [matrosov@rf.unn.ru](mailto:matrosov@rf.unn.ru)



## ПЕРЕХОД ОТ РЕЛАКСАЦИОННЫХ КОЛЕБАНИЙ К ПСЕВДОПЕРИОДИЧЕСКОЙ ТРАЕКТОРИИ В НОВОЙ МОДЕЛИ ДИНАМИКИ ЧИСЛЕННОСТИ ПОПУЛЯЦИИ

*А. Ю. Переварюха*

Санкт-Петербургский институт информатики и автоматизации РАН,  
Россия, 199178 Санкт-Петербург, 14-линия В.О., 39  
E-mail: temp\_elf@mail.ru

В статье рассматривается моделирование возникновения колебаний численности биологических видов и сопутствующих резких перемен в развитии популяционного процесса. Индукторы возникновения многих долгопериодических флуктуаций, например, сельдяных циклов в Тихом океане, полностью не установлены. Изменения популяционных циклов могут принимать экстремальный характер, нарушать сложившуюся выравненность биологического разнообразия и вызывать значительные последствия для экосистем. Отдельные варианты вспышки численности способны развиваться достаточно долго в форме серии пиков и приводить к временной деградации самой среды обитания вида. Спонтанные колебания могут возникать у изолированных лабораторных популяций вне внешнего воздействия при поддержании постоянных условий эксперимента. Для математического объяснения внутренних механизмов появления колебательных режимов применяются дифференциальные уравнения с запаздыванием. Широко известны несколько таких моделей: Никольсона, Кушинга и наиболее подробно исследованное уравнение Хатчинсона, которые демонстрируют возникновение циклов сложной формы после бифуркации Андронова–Хопфа. Характеристики релаксационных колебаний таких моделей, например, огромная амплитуда пиков при нереальной глубине минимумов, мало соответствуют экологической действительности. Выход на пиковые показатели численности начинается обычно после преодоления пороговых значений, когда вдруг резко ослабляется действие механизмов регуляции. Актуальной задачей остается модификация уравнений с запаздыванием для рассмотрения особых наблюдаемых в реальности сценариев популяционного процесса, например специфических случаев вспышек численности насекомых. Предложена модификация модели Хатчинсона для описания частного, но критического для состояния леса сценария популяционной динамики – вспышки численности в форме серии пиков, но без стремящихся к нулю минимумов. Любая вспышка является переходным режимом существования вида в экосистеме. Далее нами разработана принципиально иная модель, которая включает один из наблюдавшихся сценариев завершения подобных процессов и пересматривает традиционную трактовку параметра пороговой емкости среды. В новом уравнении возникающие после бифуркации релаксационные колебания с увеличением амплитуды не формируют орбитально устойчивый цикл, но резко переходят в неограниченно возрастающую псевдопериодическую траекторию. Потеря свойства диссипативности траектории означает фатальные последствия для существования популяции вида в локальном ареале. Практическую значимость модель с аномальным переходом представляет для ситуаций инвазии чужеродных видов в изолированную экосистему и размножения адаптировавшихся к химикатам вредителей в агроценозах. В системной экологии сценарий неконтролируемого истощения ресурсов исторически связывается с проблемой острова Пасхи.

*Ключевые слова:* Модели критической динамики популяций, уравнения с запаздыванием, релаксационные колебания, сценарии вспышек, переходные режимы экосистем.

DOI: 10.18500/0869-6632-2017-25-2-51-62

*Образец цитирования:* Переварюха А.Ю. Переход от релаксационных колебаний к псевдопериодической траектории в новой модели динамики численности популяции // Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2017. Т. 25, № 2. С. 51–62.

## TRANSITION FROM RELAXATION OSCILLATIONS TO PSEUDOPERIODIC TRAJECTORY IN THE NEW MODEL OF POPULATION DYNAMICS

*A. Yu. Perevaryukha*

St. Petersburg Institute for Informatics and Automation of RAS  
Russia, 199178 St. Petersburg, 14-ya liniya V. O., 39.  
E-mail: temp\_elf@mail.ru

In this article we consider simulation of appearance oscillations in abundance of biological species and concomitant abrupt changes in the population development process. The inductors for the appearance of many long-period fluctuations, such as herring cycles in the Pacific Ocean, have not yet been fully established. Changes in population cycles can take extreme nature and violate prevailing uniformity of biological diversity, even evoke significant impacts on ecosystems. Certain variation of abundance outbreaks can grow long enough in the form of series of peaks and lead to temporary habitat degradation. Spontaneous oscillations can occur in isolated laboratory populations without any external influence, while maintaining permanent experimental conditions. For the mathematical explanation of the internal mechanisms for the appearance of oscillatory regimes are used differential equations with delay. Widely known several such models Nicholson, Cushing, and Hutchinson equations – greater detail studied. Models show the occurrence of complicated forms of cycles after the Andronov–Hopf bifurcation. Features of relaxation oscillations in these models, like huge amplitude peaks at unreal depth lows, very few correspond to ecological reality. Burst to peak values of a population usually start after overcoming some threshold when suddenly action of mechanisms of regulation abruptly reduced. Modification of equation with delay remains an actual task for analysis of particular scenarios that are observed in reality for the population, such as the specific cases or insect outbreaks. We have proposed the modification of the Hutchinson model to describe the rare but critical for the condition of the forest scenario of population dynamics – the outbreak in the form of a series of peaks, but without intermediate minimums approaching to zero. Any outbreak of is a transient regime of existence of species within the ecosystem. Further, we have developed a basically different model, which involve one of the observed scenarios for completion of such process and reviewing the traditional interpretation of the parameter threshold capacity of environment. Relaxation oscillations occurring after the bifurcation in the new equation with increasing amplitude do not form a stable orbital cycle, but they are rapidly moving in infinitely increasing pseudo-periodic trajectory. The loss of properties of being dissipative trajectory is indicates fatal consequences for the existence of species in the local natural environment. Model with abnormal transition has practical significance in the description for the situations of invasion of alien species in isolated ecosystems and breeding of pests in agricultural areas already adapt to toxic chemicals. In the field of system ecology scenario of uncontrolled of resource exhaustion historically associated with the problem of Easter Island.

*Keywords:* Critical models of population dynamics, equations with delay, relaxation oscillations, scenarios of outbreaks, transitional regimes of ecosystems.

DOI: 10.18500/0869-6632-2017-25-2-51-62

*Paper reference:* Perevaryukha A.Yu. Transition from relaxation oscillations to pseudoperiodic trajectory in the new model of population dynamics. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*. 2017. Vol. 25. Issue 2. P. 51–62.

## Введение

Статья рассматривает моделирование изменений в динамике численности популяций, которые сопровождаются переходными режимами, способными принимать критический характер. При всем многообразии известных популяционных моделей остается проблемой формализация отдельных сценариев развития популяционного процесса, которые не укладываются в общие представления о сбалансированности трофического взаимодействия. Большинство долго существующих экосистем имеют сложившуюся или циклически колеблющуюся выравненность биологического разнообразия видов, то есть устойчивы, и потому экстремальные ситуации наблюдаются чаще при инвазии видов, что особенно актуально в современных условиях для исходно изолированных сообществ и искусственных агроценозов. Регуляция эффективности воспроизводства включена в эволюционные механизмы поддержания стабильности экосистем, но иногда ее механизмы ослабевают, и далее происходит лавинообразное нарастание факторов нестабильности.

Ряд известных в системной экологии моделей предложены как дополнения уравнения экспоненциального роста численности  $\dot{N} = \lambda N$  ( $\lambda$  – разность между мгновенной рождаемостью и убылью) в попытках формализовать саморегуляцию численности:  $\dot{N} = \lambda N \cdot f(N^\mu)$ , когда конкурентные факторы, силу действия которых отражает  $\mu > 0$ , в некоторый момент начинают тормозить скорость роста популяций. Первым описанием ограниченных возможностей размножения стала модель логистического роста, «logistic growth», предложенная в 1845 году Ферхюльстом [1] не для экологических задач, но для обсуждения актуальных социально-демографических проблем XIX века:

$$\frac{dN}{dt} = rN \left( 1 - \frac{N}{K} \right), \quad (1)$$

$$N(t) = \frac{N(0)e^{rt}}{1 + N(0)(e^{rt} - 1)/K}. \quad (1')$$

Асимптотика решения уравнения (1) для  $\forall N(0) > 0$  подразумевала плавный выход численности популяции  $N(t)$  с величиной репродуктивного потенциала  $r$  к стационарному значению  $K = N(t_K)$ , соответствующему балансу со средой. Кривая (1)' не рассматривалась Ферхюльстом как единственно возможная для модели ограниченного роста [2]. Далеко не всегда наблюдалось замедление темпов прироста населения, которое для (1) должно происходить после  $\hat{N} > K/2$ . В ряде альтернативных модификаций логистической модели варьируется именно положение точки кривой, где  $f''(\hat{N}) = 0$ .

В правую часть (1) можно добавить сомножитель  $(N - L)$ , увеличив число ее нулей,

$$\frac{dN}{dt} = rN \left( 1 - \frac{N}{K} \right) \cdot (N - L) \quad (2)$$

и получить дополнительно репеллерную точку равновесия  $L > 0$ , что предложил Базыкин для видов с минимально допустимой численностью группы [3].

Альтернативный способ – раздельно учесть смертность  $\theta$ , зависящую от плотности скопления особей традиционно в квадратичной форме  $\theta N^2$ , и естественную



убыль  $\vartheta$  и увеличить аналогично до двух число характеристик ( $\gamma$ ,  $\kappa$ ) интенсивности плотностного регулирования прироста

$$\frac{dN}{dt} = r_1 \frac{\gamma N^2}{\gamma + \kappa N} - \vartheta N - \theta N^2,$$

но такая форма триггерной модели трудна для практического использования.

Для формы правой части (2)  $f(N) \cdot (N - L)$  в вычислительных моделях еще необходима компенсирующая сверхбыстрый прирост перенормировка репродуктивного параметра  $r_1 \ll r$ , но движение траектории  $N(t) \rightarrow 0$  выглядит слишком стремительным для естественного вымирания. Массовые вымирания видов далеко не редкость и до антропогенной эпохи, только происходили они «быстро» в масштабе геологического времени.

Решение (1'), предсказывающее плавный выход к равновесию с замедлением скорости прироста, считается основополагающим, на нём основана теория максимального устойчивого изъятия при управлении биоресурсами, но оно мало соответствует многообразию встречающихся в экспериментах флуктуаций. Особенно противоречиво для (1) и (2) выглядят экстремальные сценарии популяционных процессов – как вспышки численности насекомых, так и деградации промысловых запасов крупных долгоживущих рыб.

Для фундаментальных задач расширения математических методов системной экологии интересно получение моделей нестационарных и переходных режимов. Одним из интересных явлений представляется возникновение всплесков негармонических флуктуаций у насекомых-вредителей. Дискретными итерационными моделями, несмотря на разнообразие их поведения, вряд ли возможно описать несколько интересных примеров. Ограничением при разработке моделей достаточно нетривиальных ситуаций служит то обстоятельство, что обосновать можно использование производной не выше первого порядка. Для целей учета специфических факторов регулирования кратко рассмотрим свойства колебаний в моделях с запаздыванием, имеющих популяционную интерпретацию, и предложим оригинальные модификации уравнений.

## 1. Получение невынужденных релаксационных колебаний

Дифференциальные уравнения с запаздыванием вызывают интерес в естественных науках, так как поддерживают теоретическое математическое объяснение для сценариев возникновения сложных колебательных режимов, когда внешние периодические воздействия исключены условиями наблюдений.

Решения (1) и (2) плохо согласовывались с наблюдавшимися разнообразного вида флуктуациями популяций. Система дифференциальных уравнений для трофического взаимодействия видов позволяет, как известно, получить циклическое решение. Казалось бы, бифуркация рождения цикла в уравнениях перераспределения биомассы может объяснить колебания с отставанием по фазе, наблюдаемые в сообществе организмов. Противоречие в том, что колебания не прекращаются, если сообщество теряет высшее звено трофической цепи – хищника. В лабораторных экспериментах Никольсона [4] установлено, что колебания численности могут появляться у изолированной популяции насекомых, обитающих при постоянных условиях и получающих фиксированное количество корма.

Хатчинсон [5] предложил пере-  
смотреть (1) исходя из запаздывающего  
действия регуляции, что привело к урав-  
нению с отклоняющимся по времени ар-  
гументом – логистической модели с за-  
паздыванием, «logistic delay differential  
equation (DDE)»

$$\frac{dN}{dt} = rN(t) \left( 1 - \frac{N(t - \tau)}{K} \right). \quad (3)$$

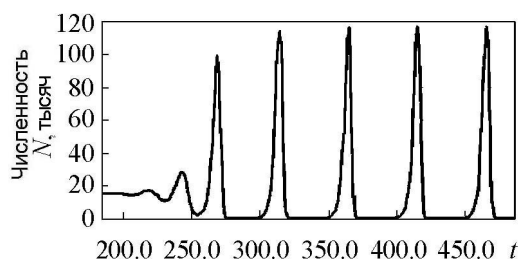


Рис. 1. Релаксационный цикл в уравнении (3),  
 $K = 15000$

Введенное в уравнение запаздывание  $\tau$  служит характеристикой использования и восстановления ресурсов. Дополнение «репродуктивного» множителя запаздыванием  $rN(t - \tau_1) \cdot f[N(t), N(t - \tau_2)]$  имеет мало теоретического обоснования.

Возникающие в уравнении режимы поведения траектории подробно обсуждались в фундаментальных работах (обычно в однопараметрической форме:  $\dot{N} = \lambda N(t)(1 - N(t + \tau))$ ) и продолжают исследоваться оригинальными современными методами, как в [6]. При малых значениях запаздывания  $\tau$  динамика модели описет затухающие колебания  $N(t) \rightarrow K$ . В (3) установлена возможность возникновения бифуркации Андронова–Хопфа с появлением устойчивого предельного цикла  $N_*(t, r)$ . Нарушение устойчивости состояния равновесия зависит от величины  $r\tau$ . Дальнейшее увеличение  $r\tau > \pi/2$  вызывает переход в режим релаксационных колебаний. Быстрое возрастание амплитуды колебаний выраженной негармонической формы [7] при увеличении временного промежутка между максимумами и минимумами, стремящиеся к неотличимым от нуля значениям, приводят такой релаксационный цикл (рис. 1) к затруднениям при экологическом обосновании. В аналитическом виде проблема обоснованности цикла модели (3) выражается следующим образом:

$$\min N_*(t, \lambda) = \exp \left( -e^\lambda + 2\lambda + \frac{1 + (1 + \lambda) \ln \lambda}{\lambda} + O \left[ \frac{\ln^2 \lambda}{\lambda^2} \right] - 1 \right).$$

Многим лесным насекомым свойственны долгопериодические колебания численности, но вспышки не будут начинаться из глубоких минимумов. Обычно пики следуют после преодоления некоторого порогового значения, когда регуляция естественных врагов становится недостаточной. Формы переходов к флуктуациям для автохтонных и инвазионных популяций могут быть различными, поэтому продолжают быть актуальными исследования в данном направлении математической биологии, наиболее тесно связанном с теорией колебаний.

В [8] рассматривалась модификация модели Хатчинсона (с приведенными коэффициентами)

$$\frac{dN}{dt} = \lambda N(t) f(N(t - 1)), \quad (4)$$

где  $f(x)$  – дифференцируемая функция, разложимая в асимптотический ряд, для которой выполняются условия

$$f(0) = 1, \quad f(x) = -a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{x^k}, \quad x \rightarrow \infty, \quad a_0 > 0. \quad (4')$$

Условиям (4') соответствует предложенная в [9] функция

$$f(x) = \frac{(1-x)}{(1+cx)}. \quad (4'')$$

В данной модификации, известной в англоязычной литературе как «food-limited DDE» (модели с запаздыванием при ограничении ресурсов), где коэффициент  $c$  отражает траты расходуемых на воспроизводство ресурсов, расширяется число параметров, определяющих характеристики релаксационного цикла неклассической формы. Так, при увеличении  $c$  в (4'') сжимается амплитуда цикла.

Из дополнительных ограничений при преобразовании исходного уравнения (4) к сингулярно возмущенному  $\dot{x} = F(x(t-1), \epsilon)$  и далее к предельному релейному уравнению с запаздыванием  $\dot{x} = R(x(t-1))$  предполагается, что  $\lambda \gg 1$ . В результате для (4) с (4') утверждается существование единственного орбитально экспоненциально устойчивого цикла. Не ясно соответствие свойств цикла какому-либо нелинейному популяционному процессу, так как из утверждения о характеристиках колебаний в [8] получено:

$$\min N_*(t, \lambda) \sim C_1 \exp(-\lambda a_0), \quad C_1, a_0 = \text{const} > 0,$$

и, как отмечено ранее,  $\lambda$  изначально указывается имеющим достаточно большое значение. При использовании функции (4'') наши вычислительные эксперименты показывают влияние демпфирующего колебания параметра  $c$  на все характеристики цикла, что напрямую не обсуждается в [8], и требуется условие  $c \gg 1$ , так как при малых  $c$  свойства цикла (4) будут значительно менее интерпретируемы, чем свойства цикла (3).

## 2. Преодоление плохо интерпретируемых особенностей цикла

Более обосновано, что между пиками колебаний численность удерживается на значительном уровне. Вернем параметр емкости среды  $K$ , неравномерно увеличив степень нелинейности в (4'')

$$\frac{dN}{dt} = rN(t) \left( \frac{K - N^2(t-\tau)}{(K + cN^3(t-\tau))} \right). \quad (5)$$

В новой модификации удастся преодолеть проблему быстрого снижения минимумов  $\min_{0 < t < T_*} N_*(t, r) \rightarrow \epsilon, \epsilon \ll 1$ , слишком низких для возможностей повторного быстрого роста численности при свойственных вредителям больших значениях  $r$ , при этом отойдя от условий (4'):  $f(x) \rightarrow 0, x \rightarrow +\infty$ .

Вычислительные исследования уравнения (5) позволяют говорить о математическом описании частного, но весьма неблагоприятного для лесного хозяйства варианта развития популяционной динамики. После бифуркации можем наблюдать сценарий перехода к релаксационному циклу (рис. 2), соответствующему вспышке численности вредителей, в виде последовательной серии пиков.

Основной значимый аспект (5) – очередной стремительный неконтролируемый рост численности начинается от значения, близкого к существовавшему перед бифуркацией равновесию, которое является результатом оптимального баланса репродуктивного потенциала и естественных регулирующих факторов.

Согласно всем постулатам системной экологии, динамика колебаний рис. 2 может реализоваться только на ограниченном временном интервале. Предполагаем, что достижение значения критической пороговой численности означает не уравнивание, но деградацию необходимой составляющей среды обитания.

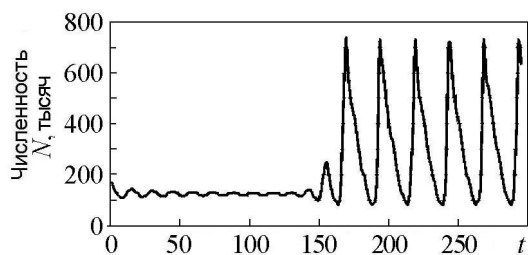


Рис. 2. Переход к релаксационному циклу в новой модели (5)

### 3. Модель с мягким порогом численности

Вспышка численности как переходный нелинейный процесс имеет не только начало, которое мы в (5) отождествляли с бифуркацией Андронова–Хопфа. Дальнейшая динамика ситуации не может быть исчерпывающе описана моделью с глобальным орбитально устойчивым подмножеством фазового пространства (циклом или хаотическим аттрактором), потому как вспышки – это экстремальные переходные режимы существования вида в среде. Завершение, часто оказывающееся неблагоприятным не только для биосистемы, но и для самой популяции, только в идеальном случае можно трактовать как обратную бифуркацию цикл – устойчивый фокус, то есть с восстановлением балансового равновесия.

В уравнении с запаздыванием можно получить описание еще одного специфического явления, которое не было рассмотрено в известных работах.

В случае вспышек насекомых понятие ёмкости экологической ниши из (1) утрачивает смысл асимптотического предела. Предположим существование предкритического порогового уровня  $H < K$ . Переход через мягкий порог имеет значение для механизмов контроля внутривидовой структуры. Тогда на динамику системы оказывает влияние отклонение  $[H - N(t - \tau)]$ , притом величина отклонения может быть как положительной, так и отрицательной. Модифицируем (3) следующим образом:

$$\frac{dN}{dt} = r_1 N \left( 1 - \frac{N(t - \tau)}{K} \right) (H - N(t - \tau)). \quad (6)$$

Можно считать, что при смене знака отклонения члены правой части (воспроизводства и регуляции) меняются своими функциональными ролями в модели. Для правой части (6) не выполняются условия (4'), указанные для  $f(x)$  при обосновании утверждения о глобальном аттракторе, поэтому не обязательно теорема (2.1) из [8] об орбитальной устойчивости такого цикла будет справедлива в нашем случае.

### 4. Вычислительный анализ новой модели

При малом значении запаздывания в (6) получаем затухающие осцилляции с  $N \rightarrow H$ . При увеличении  $\tau$  или  $r_1$  в таком уравнении (с  $r_1 = 10^{-3}r$ ) возникнет притягивающий цикл (рис. 3,  $K = 15000$ ,  $H = 5000$ ).

На рис. 3 динамика после плавного прохождения бифуркационного изменения по сценарию Андронова–Хопфа при переходе  $r_1$  через критическое значение

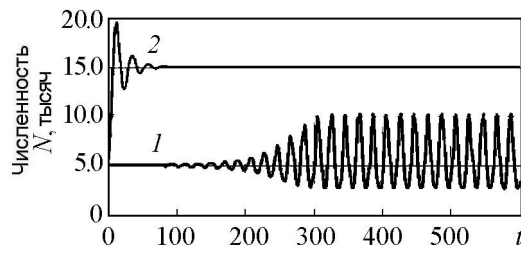


Рис. 3. Возникновение колебаний: 1 – цикл после бифуркации в (6), 2 – динамика (3) при аналогичных параметрах

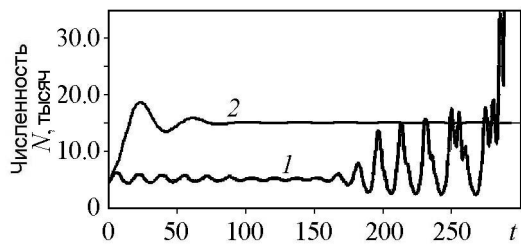


Рис. 4. Разрушение колебательного режима: 1 – выброс за границы емкости среды в (6), 2 – динамика (3) при аналогичном изменении параметра

Изойдет другое изменение поведения траектории, которая перестанет притягиваться к замкнутому подмножеству фазового пространства. При такой бифуркации траектория системы до установления цикла со всё увеличивающейся амплитудой будет резко выброшена за пределы допустимых для её существования значений при  $N(t - \tau) > K$ . На рис. 4 показана ситуация после бифуркации, когда в результате изменения параметра  $r_1$  (в сравнении с аналогичным изменением  $r$  в (3) в момент  $t = 150$ ) траектория в переходных релаксационных колебаниях преодолевает значение  $K$ , далее  $N(t) \rightarrow \infty$  и реализуется сценарий «кризиса сверхмногочисленного поколения» вплоть до деструкции всей биосистемы.

Цикл сжимается и выбрасывается, вычислительный эксперимент заканчивается сообщением программы о переполнении при вычислениях с плавающей точкой. Такая потеря неустановившегося режима считается катастрофической.

## 5. Обобщение двух новых модификаций

Чтобы лучше представлять, почему не все варианты возникающих в уравнениях с запаздыванием решений имеют теоретическое значение в экологии систем, выпишем уравнение с объединением идей двух предложенных модификаций в следующем виде:

$$\frac{dN}{dt} = \lambda N(t) \left( \frac{K - N^2(t - \tau)}{(K + cN^3(t - \tau))} \right) (H - N(t - \tau)), \quad (7)$$

увеличивая нелинейность в правой части до кубической. Тогда образующая для  $N(0) < H$  релаксационный цикл траектория при уменьшении  $c$  начнет достаточно

(в вычислительном эксперименте рис. 3 все параметры модели сохраняются), показывает установление цикла при  $N(0) = H + \epsilon$ ,  $H = 5000$ ,  $K = 15000$ .

Цикл быстро становится релаксационным с возрастанием  $r_1$ . Из обзора [10] теории колебаний в известных модификациях logistic DDE мы не можем утверждать его глобальную орбитальную устойчивость. Амплитуда колебаний в отличие от аналогичного случая модели (3) не возрастает до нереалистичных величин, остается в приемлемых границах. В (6) при  $N(0) < H$  переход к установившимся флуктуациям происходит не плавно, но через скачкообразный переходный режим.

Предположим, давление на выживаемость ослабнет совсем. При более резком увеличении значения  $r_1 \tau$  про-

параболически плавно и неограниченно возрастать (рис. 5,  $c_0 = 0.11$ , бифуркационное  $\hat{c} = 0.1$ ,  $\tau = 8$ ). Подобный путь потери решением свойства диссипативности видится необоснованным, и сценарий популяционной динамики вряд ли реализуется. Мы рассматривали ситуацию изолированной саморегулируемой популяции, поэтому должно присутствовать ограниченное сверху предельное состояние (равновесие, цикл или даже устойчивая по Пуассону хаотическая траектория), либо происходит деструкция биосистемы скачкообразно. Разрушение среды, такое как массовая гибель растительности в результате неограниченного роста численности популяции вредителей, скорее произойдет стремительно, чем при постепенном наращивании биомассы. В случае плавного параболического роста успевают включиться дополнительные, не связанные с конкуренцией регулирующие механизмы, например, эпизоотия у чрезмерно размножившейся популяции, которые способны снизить оказываемое на первичных продуцентов воздействие даже чужеродного вида-вселенца.

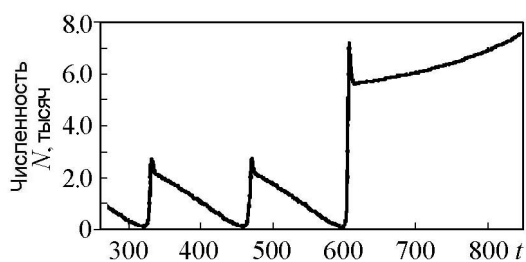


Рис. 5. Медленный сценарий ухода траектории из цикла в (7)

### Заключение

При совершенствовании модели специфического сценария популяционной динамики насекомых, связанной с улучшением характеристик колебаний, мы получили уравнение, поведение решения которого описывает катастрофическое завершение серии пиков численности после бифуркации Андронова–Хопфа. В современном обзоре по применению различных уравнений с запаздыванием [11] в математической биологии сценарий с разрушением автоколебаний не рассматривался. Современные работы в данной области пошли по пути расширения параметров и рассмотрения уравнений с более чем одним запаздыванием:  $N(t - \tau_1) \times N(t - \tau_2)$  [12]. Необходимо отметить, что для такого подхода должно быть грамотное биологическое обоснование самого появления эффекта запаздывающей регуляции. Запаздывание не есть свойство, присущее данному виду, как это можно часто прочитать, исходящее только из возраста полового созревания, иначе как трактовать циклы размножения одноклеточных? Запаздывание возникает при взаимодействии популяции с ее восстанавливающимися ресурсами, и может быть актуальным даже только для одной, самой старшей из стадий развития насекомого [13].

В уравнении обосновано значение  $H$  мягкого порогового состояния, в отличие от явной нижней критической точки  $L$  в (2) и жестким уровнем остановки прироста  $K$  в (1). Особенность предложенной модели возникновения/завершения взрывообразного популяционного процесса в том, что вместо дальнейшего увеличения амплитуды колебаний релаксационной формы при ослаблении факторов регуляции происходит выброс траектории в режим за рамками наличия условий дальнейшего прироста численности. Подобные свойства интересны для теоретической системной экологии, потому как относятся к анализу значительных трансформаций биоценозов.

Рассмотренные сценарии резких колебаний отличаются своей нерегулярностью возникновения и вариативностью. Некоторым популяциям вредителей действительно свойственно специфическое нерегулярное явление осциллирующей вспышки

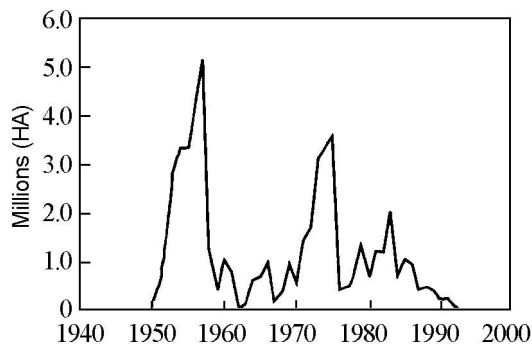


Рис. 6. Пилообразная вспышка листовертки в масштабах гибели леса, [14]

После вспышки в очаге индекс видового разнообразия претерпевает существенные изменения, соответственно область перестает быть пригодной для воспроизводства популяции, доминирующими на длительное время становятся другие виды растительности.

*Работа выполнена в рамках проектов РФФИ №15-04-01226 (ФГБНУ ВИЗР), 15-07-01230, 17-07-00125 (СПИИРАН).*

#### Библиографический список

1. *Verhulst P.* Recherches mathematiques sur la loi d'accroissement de la population // Nouveaux memoires de l'academie royale des sciences et belles-letters de Bruxelles. 1845. Vol.18. P. 1–38.
2. *Vacaer N.* A Short History of Mathematical Population Dynamics. London, Springer-Verlag, 2011.
3. *Базыкин А.Д.* Теоретическая и математическая экология: проблема опасных границ и критериев приближения к ним // Математика и моделирование. ОНТИ НЦБИ АН СССР. Пущино, 1990. С. 232–237.
4. *Nicholson A.* An outline of the dynamics of animal populations // Australian Journal of Zoology. 1954. Vol. 2. Issue 1. P. 9–65.
5. *Hutchinson G.* An Introduction to Population Ecology. New Haven, Yale University Press, 1978.
6. *Кащенко С.А.* Динамика логистического уравнения, содержащего запаздывание // Математические заметки. 2015. Т. 98. С. 85–100.
7. *Kolesov A.Yu., Kolesov Yu.S.* Relaxation Oscillations in Mathematical Models of Ecology. Rhode Island, AMS, 1993.
8. *Колесов А.Ю., Мищенко Е.Ф., Розов Н.Х.* Об одной модификации уравнения Хатчинсона // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2010. Т. 50. № 12. С. 1990–2002.
9. *Gopalsamy K., Kulenovic M., Ladas G.* Time lags in a «food-limited» population model // Applicable Analysis. 1988. Vol. 31. Issue 3. P. 225–237.
10. *Ladas G., Qian C.* Oscillation and global stability in a delay logistic equation // Dynamics and Stability of Systems. 1994. Vol. 9. Issue 2. P. 153–162.

11. Ruan S. Delay Differential Equations in Single Species Dynamics // Delay Differential Equations and Applications. Springer, Berlin, 2006. P. 477–517.
12. Lin X., Wang H. Stability analysis of delay differential equations with two discrete delays // Canadian Applied Mathematics Quarterly. 2012. Vol. 20. Issue 4. P. 519–533.
13. Perevaryukha A.Y. A model of development of a spontaneous outbreak of an insect with aperiodic dynamics // Entomological Review. 2015. Vol. 95. Issue 3. P. 397–405.
14. Cooke B., Nealis V., Regniere J. Insect defoliators as periodic disturbances in northern forest ecosystems // Plant Disturbance Ecology: The Process and the Response. Elsevier, Burlington, 2007. P. 487–525.
15. Gray D.R. Historical spruce budworm defoliation records adjusted for insecticide protection in New Brunswick // Journal of the Acadian Entomological Society. 2007. Vol. 115. Issue 1. P. 1–6.

## References

1. Verhulst P. Recherches mathematiques sur la loi d'accroissement de la population. *Nouveaux memoires de l'academie royale des sciences et belles-letters de Bruxelles*. 1845. Vol.18. P. 1–38.
2. Bacaer N. A Short History of Mathematical Population Dynamics. London, Springer-Verlag, 2011.
3. Bazykin A.D. Theoretical and mathematical ecology: dangerous boundaries and criteria of approach them. Mathematics and Modelling. Nova Sci. Publishers, N.-Y., 1993. P. 321–328.
4. Nicholson A. An outline of the dynamics of animal populations. *Australian Journal of Zoology*. 1954. Vol. 2. Issue 1. P. 9–65.
5. Hutchinson G. An Introduction to Population Ecology. New Haven, Yale University Press, 1978.
6. Kashchenko S.A. Dynamics of the logistic equation with delay. *Mathematical Notes*. 2015. Vol. 98. P. 98–110.
7. Kolesov A.Yu., Kolesov Yu.S. Relaxation Oscillations in Mathematical Models of Ecology. Rhode Island, AMS, 1993.
8. Kolesov A.Yu., Mishchenko E.F., Rozov N.K. A modification of Hutchinson's equation. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*. 2010. Vol. 50. Issue 12. P. 1990–2002.
9. Gopalsamy K., Kulenovic M., Ladas G. Time lags in a «food-limited» population model. *Applicable Analysis*. 1988. Vol. 31. Issue 3. P. 225–237.
10. Ladas G., Qian C. Oscillation and global stability in a delay logistic equation. *Dynamics and Stability of Systems*. 1994. Vol. 9. Issue 2. P. 153–162.
11. Ruan S. Delay Differential Equations in Single Species Dynamics. In the book: Delay Differential Equations and Applications. Springer, Berlin, 2006. P. 477–517.
12. Lin X., Wang H. Stability analysis of delay differential equations with two discrete delays. *Canadian applied mathematics quarterly*. 2012. Vol. 20. Issue 4. P. 519–533.



13. Perevaryukha A.Y. A model of development of a spontaneous outbreak of an insect with aperiodic dynamics. *Entomological Review*. 2015. Vol. 95. Issue 3. P. 397–405.
14. Cooke B., Nealis V., Regniere J. Insect defoliators as periodic disturbances in northern forest ecosystems. *Plant Disturbance Ecology: The Process and the Response*. Elsevier, Burlington, 2007. P. 487–525.
15. Gray D.R. Historical spruce budworm defoliation records adjusted for insecticide protection in New Brunswick. *Journal of the Acadian Entomological Society*. 2007. Vol. 115. Issue 1. P. 1–6.



*Переварюха Андрей Юрьевич* – родился в Астрахани (1980). Окончил Астраханский государственный технический университет (2004) по специальности «Автоматизированные системы обработки информации и управления» с дипломным проектом «Справочно-информационная система анализа данных экологического мониторинга состояния Каспийского бассейна». В Санкт-Петербургском институте информатики и автоматизации РАН защитил диссертацию «Анализ динамики возобновляемых биоресурсов с использованием комплекса гибридных моделей». Кандидат технических наук по специальности «Системный анализ». Старший научный сотрудник лаборатории Прикладной информатики СПИИРАН. Научные интересы – моделирование нелинейных явлений в биологических процессах, сценарии коллапса запасов осетровых рыб, смены всплеск численности и периодов депрессии насекомых-вредителей (по данным коллег из ФГНУ ВИЗР).

Россия, 199178 Санкт-Петербург, 14-линия В.О., 39  
 Санкт-Петербургский институт информатики и автоматизации РАН  
 E-mail:temp\_elf@mail.ru



## ВЛИЯНИЕ МИКРОПРИМЕСЕЙ НА ХАРАКТЕР ОСЦИЛЛЯЦИЙ РЕАКЦИИ БРИГГСА–РАУШЕРА

*Д. А. Усанов, А. П. Рытик, О. Ю. Кутикова, А. А. Иванова*

Саратовский национальный исследовательский  
государственный университет имени Н. Г. Чернышевского  
Россия, 410012 Саратов, ул. Астраханская, 83  
E-mail: UsanovDA@info.sgu.ru, ra4csz@yandex.ru,  
Oksana.296@mail.ru, IvaaLexsandra@yandex.ru

Для реакции Бриггса–Раушера обнаружен эффект сверхчувствительности характеристик колебаний при добавлении в качестве примеси в среду раствора реакции соли (NaCl). Период колебаний реакции изменялся уже при концентрации NaCl 0.006 % от общего объема смеси. Обнаружен так называемый пороговый эффект, заключающийся в остановке автоколебательного режима в одной из фаз, в зависимости от концентрации NaCl. При введении этанола или ацетона заметное изменение реакции происходило при минимальных концентрациях: для этанола 0.8 %, для ацетона – 1.7 %. Различная концентрация примеси приводит к изменению времени осцилляций, их числа и общего времени автоколебательного режима, амплитуды и формы релаксационных колебаний электрохимического потенциала. Сделан вывод о выраженности управления химическим процессом осцилляции и его остановки в определенной фазе, путем добавления примесей в реакции. Количественной основой для определения указанных и других веществ (и слабых внешних воздействий) может быть зависимость частоты (периода) колебаний от концентрации реагентов или катализатора. Данные, описанные в работе для химического осциллятора, подтверждаются процессами и в биологических автоколебательных процессах. Обнаруженный в работе так называемый пороговый эффект может быть полезен для понимания специфики стадии затухания процессов в биологических осцилляторах.

*Ключевые слова:* Автоколебательная реакция, нелинейная система, пороговый эффект, фаза колебаний.

DOI: 10.18500/0869-6632-2017-25-2-63-73

*Образец цитирования:* Усанов Д.А., Рытик А.П., Кутикова О.Ю., Иванова А.А. Влияние микропримесей на характер осцилляций реакции Бриггса–Раушера // Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2017. Т. 25, № 2. С. 63–73.

## THE INFLUENCE OF THE TRACE SUBSTANCES ON THE NATURE OF THE BRIGGS–RAUSCHER OSCILLATING REACTION

*D. A. Usanov, A. P. Rytik, O. U. Kutikova, A. A. Ivanova*

Saratov State University, Russia  
410012 Saratov, Astrakhanskaya str., 83  
E-mail: UsanovDA@info.sgu.ru, ra4csz@yandex.ru,  
Oksana.296@mail.ru, IvaaLexsandra@yandex.ru

The effect of hyperesthesia of characteristics of vibrations while adding the table salt (NaCl) as a trace substance into the reaction medium has been found for the Briggs–Rauscher oscillating reaction. The cycle of oscillations has already changed when the concentration of NaCl was 0.006 % of the total volume of the mixture. The so-called threshold effect involving the shutoff of self-induced vibration regime during one of the phases (dark or light phase) according to the concentration of NaCl was discovered. With the introduction of ethanol or acetone the significant change in the reaction has occurred at minimal concentration: 0.8 % for ethanol, 1.7 % for acetone. Different concentration of the trace substance leads to the change of the time and number of oscillations and the total time of self-induced vibration regime, the amplitude, and the form of relaxation vibrations of electrochemical potential. The conclusion about the degree of control of the process of oscillations and its shutoff in the certain phase by adding the trace substances into the reactions has been made. The quantitative basis for identifying of described and other substances (and their weak external influences) is meant to be the correlation between the oscillation frequency (period) and the concentration of the reagent and the catalyst. The information, described in the work for chemical oscillator, is confirmed by biological self-oscillating processes. The threshold effect, found in the work, may be useful for understanding of the specifics of the fading stage in biological oscillators.

*Keywords:* Self-oscillating reaction, non-linear system, threshold effect, vibration phase.

DOI: 10.18500/0869-6632-2017-25-2-63-73

*Paper reference:* The influence of the trace substances on the nature of the Briggs–Rauscher oscillating reaction. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*. 2017. Vol. 25. Issue 2. P. 63–73.

### Введение

Известны работы, посвященные исследованию влияния микропримесей на характер осцилляций химических автоколебательных реакций [1–3]. Эффект зачастую состоит в изменении времени остановки колебательного режима в зависимости от исходной концентрации примеси в реакции. Например, в [1] рассмотрено влияние фосфолипидного слоя в растворе при образовании новых ведущих центров, ответственных за автоколебания. Наличие подобного слоя позволяет изменять количество взаимодействующих центров реакции, что в свою очередь приводит к изменению времени протекания реакции. В [4] приведены исследования влияния интенсивности перемешивания раствора автоколебательной реакции Бриггса–Раушера (БР) на характер концентрационных колебаний. Подчеркивается возможность появления новых эффектов в нелинейных динамических системах при неидеальном перемешивании. Неустойчивость химической нелинейной системы сопровождается высокой чувствительностью к внешним и внутренним флуктуациям. Высокая чувствительность к начальным условиям, перемешиванию и воздействию внешних факторов наблюдается и в реакции Белоусова–Жаботинского, а также в других химических автоколебательных реакциях [5]. В частности, следует отметить, что влияние элект-

тромагнитного излучения также изменяет характер протекания химического автоколебательного процесса [6, 7]. В работе [6] показана возможность изменения времени режима автоколебаний при влиянии электромагнитного излучения, а в [7] – возможность инициирования новых центров реакции при воздействии ионизирующего излучения.

Вызывают интерес работы посвященные практическому применению специфичной высокой чувствительности автоколебательных реакций к воздействию на них внешних факторов. Так в работе [8] анализируется антиоксидантная активность в различных типах хорватских красных и белых вин, путем ингибирования автоколебательного режима реакции БР. Экспериментально была доказана линейная зависимость между общим содержанием фенольных групп и временем торможения реакции БР. В работе [3] приведены результаты использования автоколебательной реакции БР для анализа антиоксидантной активности в чае гибискуса.

Известны работы, показывающие, что повышение малой дозы NaCl в крови, протекающей через сердце лягушки, вызывает существенные замедления работы сердца, вплоть до полной остановки. После прибавления больших количеств NaCl отмечается небольшое снижение частоты сердцебиений на изолированном сердце млекопитающих. То есть, увеличение дозы выше некоторого значения вызывает ослабление действия вводимого вещества. При сохранении осмотического давления пониженное содержание NaCl вызывает обычно замедление ритма сердцебиений. Эффект сверхчувствительности характеристик колебаний (гормезис) наблюдается при исследовании разнообразных химических агентов: регуляторов роста растений, противоопухолевых препаратов, нейропептидов и гормонов, иммуномодуляторов, антиоксидантов и других как белковых, так и небелковых соединений [9].

Автоколебательная реакция БР включает в себя йодирование и окисление органического субстрата (малоновой кислоты или её производных) в присутствии  $H_2O_2$  и ионов  $Mn^{2+}$  как катализатора [10]. Интенсивное перемешивание раствора приводит к одновременному, по всему объему реактора, переключению фазы реакции, что характерно для большинства подобных систем [4, 5]. Представляет интерес исследовать чувствительность химических автоколебательных реакций к микропримесям, способным образовывать химические связи с основными компонентами реакции.

Целью работы явилось исследование влияния микропримесей, в частности, этанола, ацетона и NaCl, на характер автоколебательного режима реакции Бриггса-Раушера.

## 1. Экспериментальная часть

В ходе исследований в химический стакан, объемом 100 мл, помещали два электрода, расположенных параллельно друг другу на одном уровне: индикаторный йод- селективный электрод (ЙСЭ) «Элит-281» и электрод сравнения (рис. 1, а). Для регистрации потенциала датчики подсоединяли к химическому анализатору жидкости серии «Эксперт-001» (изготовитель научно-производственная фирма «Эконикс-Эксперт»). Стакан устанавливали на магнитной мешалке, после чего добавляли по 2.00 мл каждого из трех растворов реакции БР. В начальный момент при составлении раствора в качестве микропримеси в первой серии экспериментов добавляли ацетон. После добавления всех реактивов и запуска реакции при помощи программы Exр2рг анализировали колебания концентрации свободного йода в реакции БР.

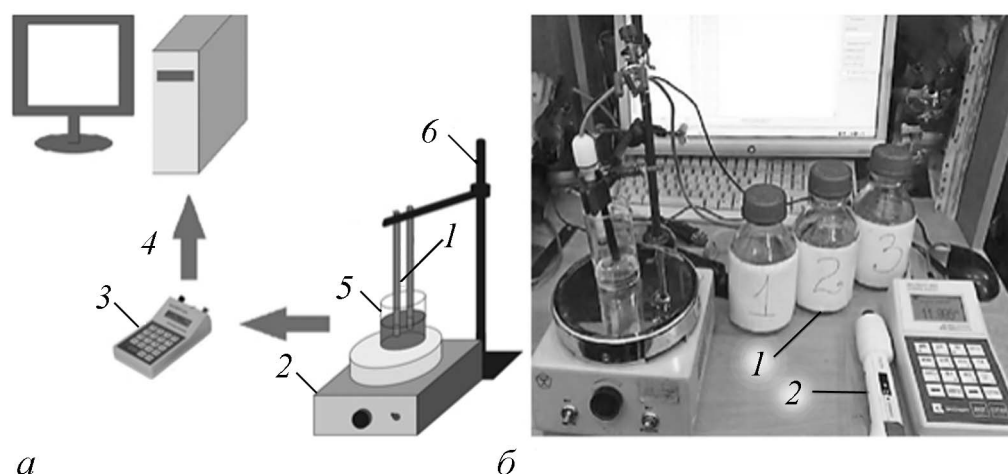


Рис. 1. *а* – блок-схема экспериментальной установки: 1 – электроды (йод-селективный электрод и электрод сравнения), 2 – магнитная мешалка, 3 – анализатор жидкости, 4 – ПК, 5 – химический стакан, 6 – штатив; *б* – фотография экспериментальной установки: 1 – растворы; 2 – дозатор

Запись данных эксперимента проводили в режиме реального времени и останавливали после прекращения колебаний в реакции. Для выявления влияния минимальной предельной массовой доли ацетона, заметно изменяющей ход реакции, аналогичные действия провели в последующих экспериментах, изменив только количество примеси. Все измерения проводились при комнатной температуре.

Для проведения реакции БР готовили следующие растворы.

*Раствор 1:* 360 мл пероксида водорода с массовой долей 33 % разбавляли до 1 л дистиллированной водой.

*Раствор 2:* 43 г иодата калия растворяли в 100 мл дистиллированной воды при 40–50°C, охлаждали, добавляли по каплям 4.4 мл концентрированной серной кислоты и разбавляли до 1 л дистиллированной водой.

*Раствор 3:* 0.3 г крахмала взбалтывали в стакане с небольшим объемом в 10 мл дистиллированной воды и вливали 100 мл кипящей дистиллированной воды.

Отдельно в 700 мл дистиллированной воды растворяли 3 г сульфата марганца (II) и 15.6 г малоновой кислоты. Оба раствора смешивали и разбавляли до 1 л дистиллированной водой.

Для составления реакции БР смешивались три вышеуказанных раствора по 2 мл каждого. В первой серии экспериментов после составления БР в качестве примеси в реакцию добавляли ацетон; во второй – этанол; в третьей – NaCl в количестве 0.0091 %, 0.0071 %, 0.0063 %, соответственно. Массовые доли получали путем растворения NaCl в дистиллированной воде.

## 2. Результаты и обсуждение

**Влияние ацетона.** В первой серии экспериментов исследовали особенности автоколебательного режима БР в присутствии ацетона. Установлено, что при добавлении в раствор ацетона происходит увеличение периода времени осцилляций реакции БР. Одной из возможных новых стадий реакции при добавлении ацетона могло быть взаимодействие ацетона с водой, содержащейся в растворе. При добавлении

ацетона могло происходить также взаимодействие ацетона с йодом с образованием трийодметана (йодоформ). Следует заметить, что протекание этой реакции более характерно для щелочной среды



Был установлен минимальный предел количества ацетона в среде реакции БР, при котором изменяется время между осцилляциями. В рамках данного исследования он составил 1.7% от общего объема смеси. Отметим, что образование йодоформа как соединения, устойчивого во времени, должно приводить к уменьшению количества свободного йода в среде реакции, что, в свою очередь, вызывает уменьшение амплитуды регистрируемого потенциала ЙСЭ.

На рис. 2 показана зависимость длительности периода колебаний от его номера с момента начала реакции. Из результатов, приведенных на рис. 2, видно, что в зависимости от концентрации ацетона происходит существенное отличие по периоду протекания колебательных процессов. В первые секунды протекания реакции колебания потенциала происходят у всех трёх образцов практически синхронно. Однако с увеличением времени видно, что в растворе образца с добавлением 1.70% ацетона колебания происходят с запаздыванием относительно тех же процессов в образцах с добавлением 3.20% и 4.80% ацетона.

Для оценки поведения колебаний во всех состояниях системы при добавлении примесей, в математическом пакете Mathcad14 было произведено построение фазовых портретов, которые представлены на рис. 3. Из рисунка видно, что в зависимости от концентрации примеси начальные точки «1» и конечные точки «2» осцилляций смещаются. Так, начальная точка «1» на рис. 3, в смещена по оси ординат относительно начальной точки на рис. 3, а и относительно этой же точки на рис. 3, б. Также из рисунка видно, что концентрация примеси существенно влияет и на характер колебаний, в частности, на количество осцилляций.

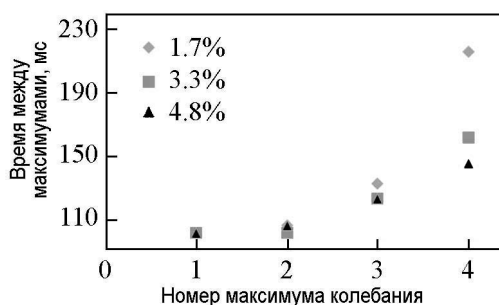


Рис. 2. Влияние концентрации ацетона и числа осцилляций на период между максимумами колебаний



Рис. 3. Фазовые портреты при разной концентрации микропримесей ацетона: а – 1.70%, б – 3.20%, в – 4.80%. Здесь и далее ЙСЭ – йодо-селективный электрод; 1 – точка начала осцилляций, 2 – точка окончания осцилляций

Наибольшее число осцилляций, а именно, 7 (см. рис. 3, б) соответствует случаю добавления 3.20 % примеси ацетона, а наименьшее их число наблюдается при концентрации примеси ацетона 1.70 % (см. рис. 3, а).

Таким образом, добавление ацетона оказывает прямое влияние на период колебания реакции БР и их число.

**Влияние этанола.** Во второй серии экспериментов в раствор реакции БР в качестве примеси добавляли этанол (чистотой 89 %) в объемах: 0.80 %, 1.70 %, 2.40 %, 3.20 %, 4.80 %. Как и в первой серии экспериментов, одной из возможных новых стадий в реакции БР может являться взаимодействие компонентов реакции с примесью, например, их пересольватация. Кроме того, добавление этанола, как и ацетона, может приводить к изменению свойств растворителя (например, его структуры) в реакции. Кроме того, входящая в состав раствора реакции БР малоновая кислота может вступать в реакцию со спиртом, что может приводить к изменению концентрации исходных компонентов реакции и, в свою очередь, изменять характер осцилляций

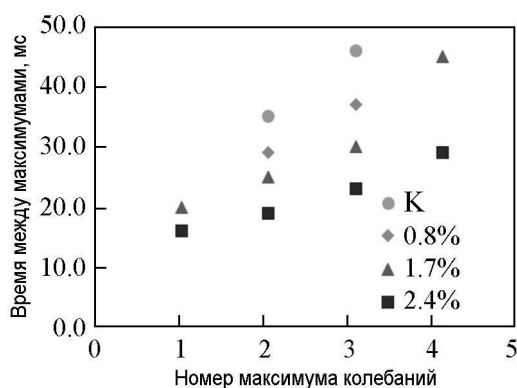
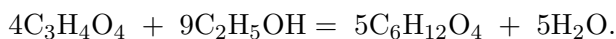


Рис. 4. Влияние концентрации этанола и числа осцилляций на период между максимумами колебаний. Здесь и далее К – контрольный раствор без примесей

На рис. 4 приведена зависимость длительности периода колебаний от их номера. Видно, что, в отличие от случая добавления ацетона, имеется существенная разница в периоде колебаний после первой осцилляции в зависимости от концентрации спирта.

Добавление этанола приводит к увеличению количества осцилляций и общего времени существования автоколебательного режима. Аналогично предыдущему случаю были построены фазовые портреты при разных концентрациях примеси этанола (рис. 5). Из рисунка видно, что точки начала и окончания реакции, в отличие от экспери-

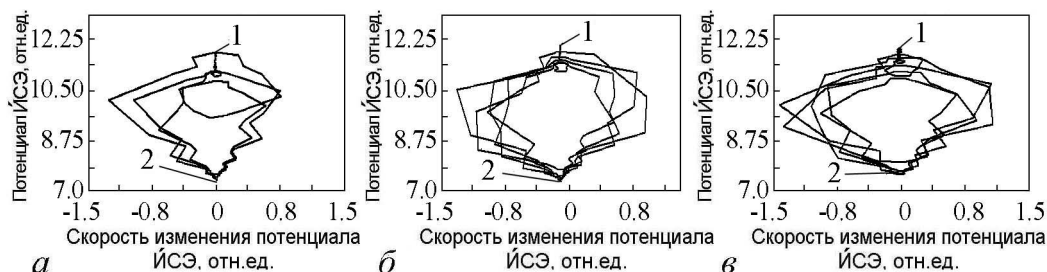


Рис. 5. Фазовые портреты при разной концентрации микропримесей этанола: а – 0.80 %, б – 1.70 %, в – 2.40 %

мента с добавлением ацетона, несущественно смещаются друг относительно друга по оси ординат. Так, начальная точка «1» на рис. 5, б смещена по оси ординат относительно начальной точки на рис. 5, а меньше, чем начальная точка на рис. 3, б относительно той же точки на рис. 3, а. В этом случае также количество осцилляций изменяется с добавлением примесей этанола, а именно: 4 при концентрации примеси 0.80 % (см. рис. 5, а) и 5 при концентрациях примеси 1.70 % и 2.40 % (см. рис. 5, б и в, соответственно).

**Влияние соли NaCl.** В третьей серии экспериментов исследовали особенности автоколебательного режима БР в присутствии хлорида натрия. Был установлен минимальный предел количества NaCl в среде реакции БР, при котором наблюдаются изменения времени между осцилляциями. В рамках данного исследования он составил 0.006 % от общего объема смеси. На рис. 6 приведен график зависимости потенциала йод-селективного электрода от времени протекания реакций. Из рисунка видно, что с момента времени 206с наблюдается разделение кривых по скорости протекания реакции в зависимости от концентрации добавленной примеси.

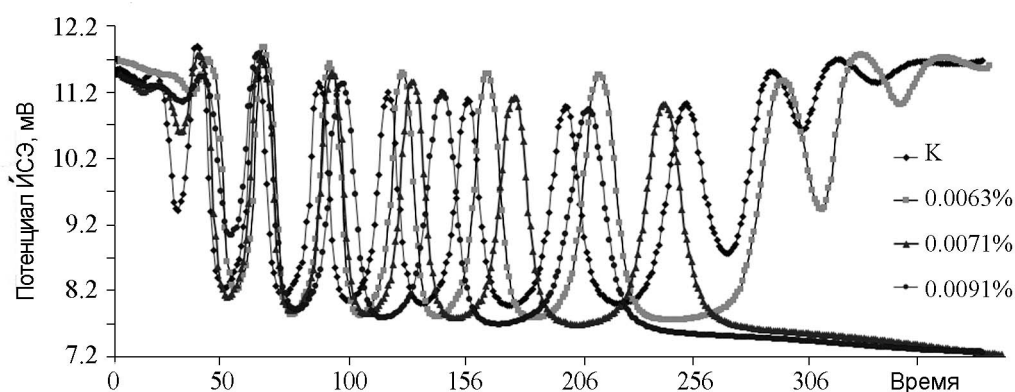


Рис. 6. Влияние концентрации NaCl на динамику изменения потенциала йод-селективного электрода во времени в ходе реакции БР

На рис.7 показана зависимость длительности периода колебаний от их номера.

Видно, что, также как и в случае с ацетоном, в начальный момент времени протекания реакции колебания потенциала происходят у всех образцов одновременно. Однако с течением времени в растворах образцов с повышенной массовой долей растворенного вещества (0.0091 % и 0.0071 %) колебания происходят с запаздыванием относительно начала колебаний в остальных образцах.

Стоит обратить внимание на то, что, в отличие от добавления примесей

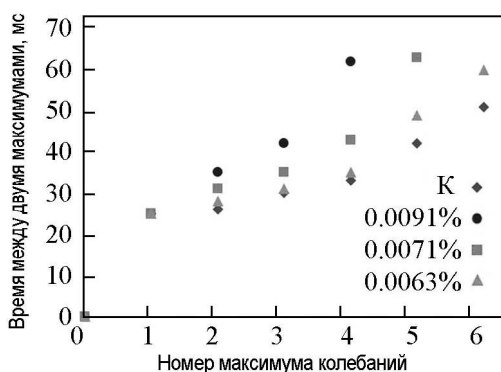


Рис. 7. Влияние концентрации NaCl и числа осцилляций на период между максимумами колебаний



в предыдущих сериях эксперимента, хлорид натрия влияет на так называемый пороговый эффект реакции. То есть, насыщение происходит в разных стадиях реакции, в зависимости от добавленного количества микропримеси NaCl. Для более наглядного представления порогового эффекта на рис. 8 представлены фазовые портреты реакции при разных концентрациях примеси хлорида натрия. Отметим, что это единственная примесь, которая при таких малых концентрациях уже вызывает пороговый эффект (ср. рис. 8, б и рис. 8, в).

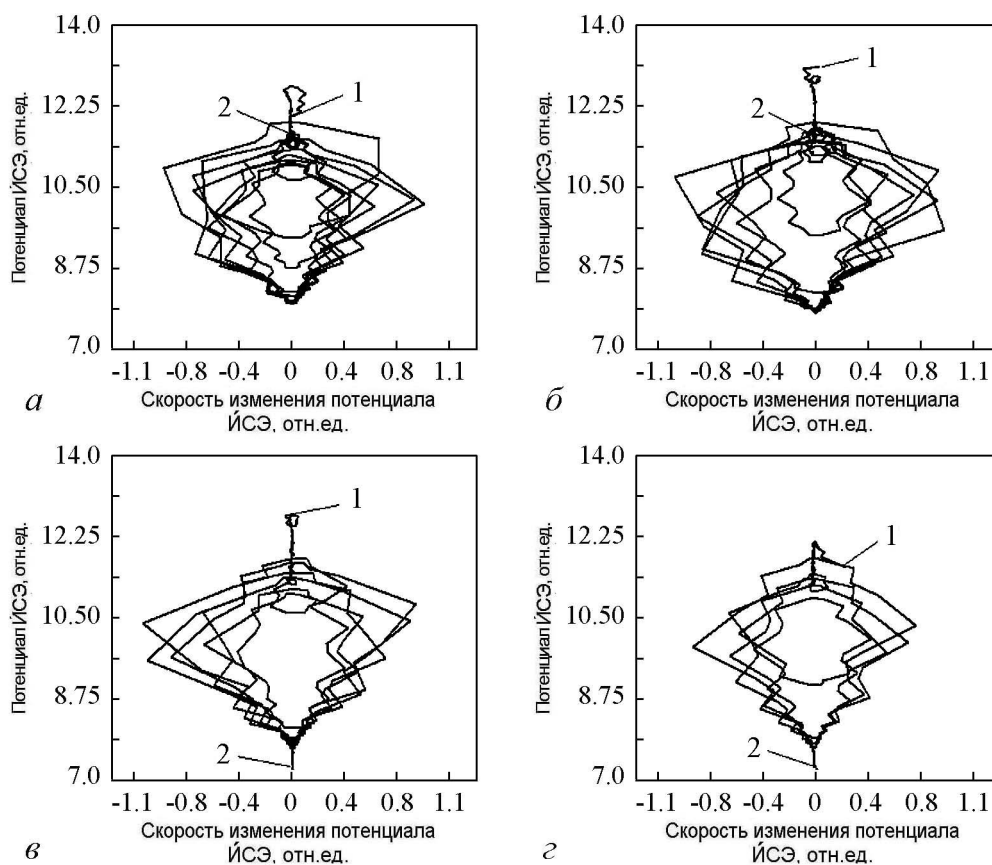


Рис. 8. Фазовые портреты при разной концентрации микропримесей NaCl: а – раствор без примесей, б – 0.0063 %, в – 0.0071 %, г – 0.0091 %

### Заключение

Таким образом, характеристики реакции Бриггса–Раушера демонстрируют высокую чувствительность к присутствию примесей ацетона, этанола и NaCl. Различная концентрация примеси приводит к изменению времени осцилляций, их числа и общего времени автоколебательного режима. Кроме того изменяется амплитуда и форма релаксационных колебаний электрохимического потенциала. При этом NaCl, является единственной примесью, которая вызывает сильный пороговый эффект при малых концентрациях. Поэтому можно говорить об управлении химическим процес-

сом осцилляции и его остановке в определенной фазе, путем добавления примесей в реакции. Количественной основой для определения указанных веществ (и слабых внешних воздействий) может быть зависимость частоты (периода) колебаний от концентрации реагентов или катализатора.

Полученные результаты могут представлять интерес при исследованиях, например, воздействия микропримесей на живые системы [11, 12]. Данные, описанные в работе для химического осциллятора, подтверждаются процессами и в биологических автоколебательных процессах. Так, определенные количества микропримеси NaCl в крови, протекающей через сердце лягушки, замедляют его работу, вплоть до полной остановки [13]. К тому же известно, что некоторые вещества, например, яд мускарин, может останавливать сердце в фазе систолы или диастолы. Таким образом обнаруженный в работе так называемый пороговый эффект может быть полезен для понимания специфики стадии затухания процессов в биологических осцилляторах.

### Библиографический список

1. *Szymanski J., Gorecki J., Hauser M.J.B.* Chemo-mechanical coupling in reactive droplets // *J. Phys. Chem.* 2013. Vol. 25. P. 117.
2. *Cervellati R.* The Briggs–Rauscher reaction as a test to measure the activity of antioxidants // *Helv. Chim. Acta.* 2001. Vol. 84. P. 3547.
3. *Prenci E.* Antioxidant power quantification of decoction and cold infusions of *Hibiscus sabdariffa* flowers // *Food Chem.* 2007. Vol. 100. P. 433.
4. *Vanag V.K., Boulanov D.V.* Behavior of the Belousov–Zhabotinskii oscillator in reverse micelles of AOT in octane // *J. Phys. Chem.* 1994. Vol. 98. P. 1449.
5. *Вавилин В.А.* Автокатализ и флуктуации в природе // *Природа.* 2005. № 6. С. 52.
6. *Рытик А.П., Усанов Д.А.* Влияние электромагнитного излучения на автоколебательную реакцию Бриггса–Раушера // *Журн. физ. химии.* 2013. Т. 87, № 5. С. 891.
7. *Лебедев В.М., Приселкова А.Б., Спасский А.В. и др.* Инициация ведущих центров в реакции Белоусова–Жаботинского под действием пучка альфа-частиц с энергией 30 МэВ // *Препринт НИИЯФ МГУ.* 2005. С. 31.
8. *Gajdoš Kljusuric J., Djakovic S., Kruhak I.* Application of Briggs–Rauscher reaction for measurement of antioxidant capacity of Croatian wines // *Acta Alimentaria,* 2005 Vol. 34. P. 483–492.
9. *Булатов В.В., Хохоев Т.Х., Дикий В.В. и др.* Проблема малых и сверхмалых доз в токсикологии. Фундаментальные и прикладные аспекты // *Рос. хим. ж. (Ж. Рос. хим. об-ва им. Д.И. Менделеева).* 2002. Т. XLVI, № 6. С. 58–62.
10. *Жаботинский А.М., Огмер Х., Филд Р. и др.* Колебания и бегущие волны в химических системах / *Пер. с англ. под ред. Р. Филда и М. Бургера.* М.: Мир, 1988. С. 720.
11. *Калиниченко Л.П., Христова М.Л., Шноль С.Э.* Влияние алифатических спиртов на амплитуду конформационных колебаний миозина и на скорость поглощения кислорода митохондриями. М.: Наука, 1969. С. 89–106.

12. Бреус Т.К., Чибисов С.М., Баевский Р.Н. и др. Хроноструктура ритмов сердца и факторы внешней среды. М.: Российск. ун-т. дружбы народов, 2002. С. 232.
13. Стерин И.Е. О парадоксальном действии калия и кальция-калиевая контрактура изолированного сердца лягушки // Физиологический журнал. СССР. 1934. Т. 17, № 4. С. 869.

## References

1. Szymanski J., Gorecki J., Hauser M.J.B. Chemo-mechanical coupling in reactive droplets. *J. Phys. Chem.* 2013. Vol. 25. P. 117.
2. Cervellati R. The Briggs–Rauscher reaction as a test to measure the activity of antioxidants. *Helv. Chim. Acta.* 2001. Vol. 84. P. 3547.
3. Prenesti E. Antioxidant power quantification of decoction and cold infusions of Hibiscus sabdariffa flowers. *Food Chem.* 2007. Vol. 100. P. 433.
4. Vanag V.K., Boulanov D.V. Behavior of the Belousov–Zhabotinskii oscillator in reverse micelles of AOT in octane. *J. Phys. Chem.* 1994. Vol. 98. P. 1449.
5. Vavilin V.A. Avtokataliz i fluktuatsii v prirode. *Priroda.* 2005. No.6. P. 52 (in Russian).
6. Rytik A.P. Usanov D.A. Vliyaniye elektromagnitnogo izlucheniya na avtokolebatelnuyu reaktsiyu Briggsa–Raushera. *Zhurn. fiz. khimii.* 2013. Vol. 87, No.5. P. 891 (in Russian).
7. Lebedev V.M., Priselkova A.B., Spasskiy A.V. i dr. Initsiatsiya vedushchikh tseftrov v reaktsii Belousova–Zhabotinskogo pod deystviyem puchka alfa-chastits s energiyey 30 MeV. *Preprint NIIYaF MGU.* 2005. P. 31 (in Russian).
8. Gajdoš Kljusuric J., Djakovic S., Kruhac I. Application of Briggs–Rauscher reaction for measurement of antioxidant capacity of Croatian wines. *Acta Alimentaria.* 2005. Vol. 34. P. 483–492.
9. Bulatov V.V., Khokhoyev T.Kh., Dikiy V.V. i dr. Problema malykh i sverkhmalykh doz v toksikologii. Fundamentalnyye i prikladnyye aspekty. *Ros. khim. zh. (Zh. Ros. khim. ob-va im. D.I. Mendeleeva).* 2002. Vol. XLVI, No.6. P. 58–62 (in Russian).
10. Zhabotinskiy A.M., Ogmer Kh., Fild. R. i dr. Kolebaniya i Begushchiye Volny v Khimicheskikh Sistemakh / Per. s angliyskogo pod red. R. Filda i M. Burgera. M.: Mir, 1988. P. 720 (in Russian).
11. Kalinichenko L.P., Khrstova M.L., Shnol S.E. Vliyaniye Aifaticheskikh Spirtov na Amplitudu Konformatsionnykh Kolebaniy Miozina i na Skorost Pogloshcheniya Kislороda Mitokhondriyami. M.: Nauka, 1969. P. 89–106 (in Russian).
12. Breus T.K., Chibisov. S.M., Bayevskiy R.N. i dr. Khronostruktura Ritmov Serdtsa i Faktory Vneshney Sredy. M.: Rossiysk. Universitet Druzhby Narodov, 2002. P. 232 (in Russian).
13. Sterin I.E. O paradoksalnom deystvii kaliya i kaltsiya–kaliyevaya kontraktura izolirovannogo serdtsa lyagushki. *Fiziologicheskii zhurnal.* SSSR. 1934. Vol. 17, No. P. 869 (in Russian).

Поступила в редакцию 14.02.2017  
После доработки 14.03.2017



*Усанов Дмитрий Александрович* – родился (1943) в Менделеевске (Татарстан). Окончил физический факультет Саратовского госуниверситета (1965). Защитил диссертацию на соискание учёной степени кандидата физико-математических наук по специальности «физика полупроводников и диэлектриков» (1972, СГУ) и диссертацию на соискание учёной степени доктора физико-математических наук по специальности «радиофизика, включая квантовую радиофизику» (1989, СГУ). Заведующий кафедрой физики твёрдого тела (с 1985, СГУ), занимал должность проректора СГУ по научной работе (1989–2013). Заслуженный деятель науки Российской Федерации (1998). Обладатель Государственной научной стипендии РАН для учёных (2000). Автор монографий и более 200 статей в центральной и зарубежной печати и 174 авторских свидетельств и патентов.

Россия, 410012 Саратов, ул. Астраханская, 83  
Саратовский государственный университет  
E-mail: UsanovDA@info.sgu.ru



*Рытик Андрей Петрович* – родился в Саратове (1980). Защитил диссертацию на соискание степени кандидата физико-математических наук (2006, СГУ). В 2010 году присвоено ученое звание Доцент кафедры медицинской физики (с 2010). Область научных интересов: биомедицинская физика, физика взаимодействия терагерцового излучения с физическими средами. Опубликовал более 100 статей в отечественных и зарубежных журналах.

Россия, 410012 Саратов, ул. Астраханская, 83  
Саратовский государственный университет  
E-mail: UsanovDA@info.sgu.ru, ra4csz@yandex.ru,  
IvaaLexusandra@yandex.ru, Oksana.296@mail.ru



*Кутикова Оксана Юрьевна* родилась в Саратове (1996). В 2013 году поступила в Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н.Г. Чернышевского» на факультет нано- и биомедицинских технологий, направление «физика», кафедра медицинской физики. Отличником учебы. Принимает участие с докладами в ежегодной студенческой конференции, на которой в 2016 году заняла первое место. Научные интересы: автоколебания в биофизике.

Россия, 410012 Саратов, ул. Астраханская, 83  
Саратовский государственный университет  
E-mail: Oksana.296@mail.ru



*Иванова Александра Андреевна* родилась в 1995 году в Саратове. В 2013 году поступила в Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н.Г. Чернышевского» на факультет нано- и биомедицинских технологий, направление «физика», кафедра медицинской физики. Принимает участие с докладами в ежегодной студенческой конференции. Научные интересы: автоколебания в биофизике.

Россия, 410012 Саратов, ул. Астраханская, 83  
Саратовский государственный университет  
E-mail: IvaaLexusandra@yandex.ru



**ВЛИЯНИЕ ПАРАМЕТРИЧЕСКОЙ НЕУСТОЙЧИВОСТИ  
ПОВЕРХНОСТНЫХ МАГНИТОСТАТИЧЕСКИХ СПИНОВЫХ ВОЛН  
НА ФОРМИРОВАНИЕ ДЕФЕКТНЫХ МОД В ОДНОМЕРНЫХ  
МАГНОННЫХ КРИСТАЛЛАХ С ДЕФЕКТАМИ**

*Е. С. Павлов<sup>1</sup>, С. Л. Высоцкий<sup>1,2</sup>, А. В. Кожевников<sup>1</sup>,  
Г. М. Дудко<sup>1</sup>, Ю. А. Филимонов<sup>1,2</sup>*

<sup>1</sup>Институт радиотехники и электроники им. Котельникова РАН Саратовское отделение  
Россия, 410019 Саратов, ул. Зеленая, 38

<sup>2</sup>Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского  
Россия, 410012 Саратов, ул. Астраханская, 83

E-mail: gekapavlov@gmail.com, vysotsl@gmail.com, kzhavl@gmail.com,  
dugal\_2010@hotmail.com, yuri.a.filimonov@gmail.com

Экспериментально исследуется влияние трех- и четырехмагнонных процессов на возбуждение дефектной моды в одномерном магнонном кристалле со структурным дефектом.

Интерес к исследованиям магнонных кристаллов с дефектами обусловлен возможностью возбуждения в запрещенных зонах дефектных мод, которые могут использоваться для усиления нелинейных эффектов и управления сигналами в СВЧ диапазоне.

Исследуемая структура получена с помощью вытравливания периодической решетки канавок с периодом 150 мкм, в центре которой был сформирован дефект (шириной, равной периоду решетки) в виде пропуска одной канавки. В геометрии возбуждения поверхностных магнитостатических спиновых волн с помощью векторного анализатора цепей снимались частотные зависимости коэффициентов прохождения и отражения в зависимости от уровня мощности сигнала накачки.

Обнаружено, что трехмагнонный распад ПМСВ приводит к разрушению резонаторных (дефектных) мод. Пороговая мощность накачки для трехмагнонных процессов меньше значений для разрушения брэгговского резонанса, что объясняется эффектом локального усиления поля спиновой волны и формированием неравновесного участка распространения спиновых волн в области дефекта. В условиях четырехмагнонных распадов при больших уровнях надкритичности накачки обнаружен сдвиг дефектной моды вместе с полосой брэгговского резонанса в сторону длинноволновой границы, что объясняется сдвигом дисперсии волны накачки при больших углах прецессии намагниченности.

*Ключевые слова:* Дефектная мода, магнонный кристалл, параметрическая неустойчивость.

DOI: 10.18500/0869-6632-2017-25-2-74-88

*Образец цитирования:* Павлов Е.С., Высоцкий С.Л., Кожевников А.В., Дудко Г.М., Филимонов Ю.А. Влияние параметрической неустойчивости поверхностных магнитостатических спиновых волн на формирование дефектных мод в одномерных магнонных кристаллах с дефектами // Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2017. Т. 25, № 2. С. 74–88.

# INFLUENCE OF PARAMETRIC INSTABILITY OF MAGNETOSTATIC SURFACE SPIN WAVES ON FORMATION OF DEFECT MODES IN ONE-DIMENSIONAL MAGNONIC CRYSTAL WITH DEFECT

*E. S. Pavlov*<sup>1</sup>, *S. L. Vysotsky*<sup>1,2</sup>, *A. V. Kozhevnikov*<sup>1</sup>,  
*G. M. Dudko*<sup>1</sup>, *Yu. A. Filimonov*<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup>V. A. Kotelnikov Institute of Radio Engineering and Electronics of RAS, Saratov Branch  
Zelenaya str., 38, 410019 Saratov, Russia

<sup>2</sup>National Research Saratov State University  
Astrakhanskaya str., 83, 410012 Saratov, Russia

E-mail: gekapavlov@gmail.com, vysotsl@gmail.com, kzhavl@gmail.com,  
dugal\_2010@hotmail.com, yuri.a.filimonov@gmail.com

Propagation of nonlinear magnetostatic surface waves through the one-dimensional magnonic crystal based on yttrium-iron garnet film with the defect of periodic array was experimentally studied.

Interest in the study of the magnonic crystals with defects is caused by the possibility of exciting of defect modes inside the forbidden gaps of MSSW spectrum that can be used to enhance the non-linear effects and signals control in the microwave range.

The studied structure was developed by etching of the periodic array of grooves with the defect in the form of increasing of the one separation width between two grooves up to the period of the surface structure. Magnetostatic surface waves were excited in the structure. Frequency dependencies of transmission and reflection coefficients were studied for different levels of the pump signal using a microwave network analyzer.

It was found that defect mode fade out as a result of three-magnon process. The threshold power for this process is less than the same parameter for Bragg resonance as a result of effect of local increasing of spin wave field as well as because of formation of non-equilibrium region of spin wave propagation that is localized near the defect. The shift of defect mode frequency and Bragg forbidden gap toward long wavelength limit of MSSW spectrum was found in the condition of four-magnon process at high pumping level as a result of change of MSSW dispersion at large angles of magnetization precession.

*Keywords:* Defect modes, magnonic crystal, parametric instability.

DOI: 10.18500/0869-6632-2017-25-2-74-88

*Paper reference:* Pavlov E.S., Vysotsky S.L., Kozhevnikov A.V., Dudko G.M., Filimonov Yu.A. Influence of parametric instability of magnetostatic surface spin waves on formation of defect modes in one-dimensional magnonic crystal with defect. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*. 2017. Vol. 25. Issue 2. P. 74–88.

## Введение

Исследование эффектов при резонансном рассеянии спиновых волн (СВ) в периодических магнитных микроструктурах – магнонных кристаллах (МК) представляет фундаментальный и прикладной интерес как с точки зрения изучения волновой динамики, так и для расширения возможностей управления спектром СВ и создания устройств СВЧ диапазона [1].

Одним из важнейших параметров, характеризующих спектр СВ в МК, является ширина полос непропускания (магнонных запрещённых зон)  $\Delta\omega^B$ , формирующихся на частотах брэгговских резонансов. Большинство исследований направлено на изучении зависимости  $\Delta\omega^B$  от параметров решётки МК: контраста намагниченности, плотности упаковки, симметрии МК, величины модуляции размеров волновода СВ [2–4], а также перестройки полосы  $\Delta\omega^B$  с помощью изменения величины и направления магнитного поля. Несовершенства структуры (дефекты) периодической

решётки приводят к нарушению трансляционной симметрии МК и влияют на параметры  $\Delta\omega^B$ . Такие дефекты могут быть связаны как с технологией создания МК, так и созданы специально с целью модификации спектра магнонов в МК.

До сих пор при изучении особенностей формирования спектра СВ в МК с дефектами уделялось внимание, в основном, линейному режиму распространения СВ. Исследовалось влияние на формирование  $\Delta\omega^B$  случайных отклонений периодичности [5, 6], модуляции нескольких параметров периодической решётки [7, 8], неоднородности распределения диссипативных параметров [9], качества, профиля и конечных толщин на границе между участками с различными параметрами [10, 11]. Как было показано в работах [5, 7–9], локальное изменение толщины одного из слоёв одномерного МК приводит к появлению в запрещённых зонах  $\Delta\omega^B$  дискретных уровней возбуждений на частотах, соответствующих резонансам стоячих СВ по ширине дефектного слоя. Наличие одного дефекта в более общем случае, когда меняются и пространственные и магнитные параметры, может приводить к появлению одного или нескольких типов дефектных мод [7, 8] в запрещённой зоне. В экспериментах дефектные моды наблюдались для одно- (1D) и двумерных (2D) МК со структурными дефектами [1, 12, 13] в виде пиков пропускания внутри полос  $\Delta\omega^B$ .

Целью данной работы является экспериментальное исследование влияния параметрических процессов на формирование дефектных мод при распространении нелинейных поверхностных магнитостатических волн (ПМСВ) в 1D МК со структурным дефектом. Рассмотрено влияние трех- (3М) и четырехмагнонных (4М) процессов распада СВ, для которых, соответственно, выполняются следующие законы сохранения:

$$f_{k_p} = f_{k_1} + f_{k_2}, \quad \vec{k}_p = \vec{k}_1 + \vec{k}_2, \quad (1)$$

$$2f_{k_p} = f_{k_1} + f_{k_2}, \quad 2\vec{k}_p = \vec{k}_1 + \vec{k}_2, \quad (2)$$

где  $f_{k_p}$  и  $\vec{k}_p$  – частота и волновой вектор волны накачки,  $f_{k_{1,2}}$  и  $\vec{k}_{1,2}$  – аналогичные величины для параметрических СВ. При этом, процессы (1) для ПМСВ с волновым числом  $k_p$  разрешены и доминируют для частот  $f_{k_p} \geq 2f_H$ , где  $f_H = \gamma H_0$  – частота «дна» спектра СВ [14], а  $\gamma = 2.8$  МГц/Э – гиромагнитное отношение и  $H_0$  – величина магнитного поля. В случае изотропных пленок процессы (1) разрешены во всей полосе частот существования ПМСВ для величин магнитного поля  $H_0$

$$H_0 < \frac{4}{3}\pi M_0, \quad (3)$$

где  $4\pi M_0$  – намагниченность насыщения. При значениях поля

$$H_0 > 2\pi M_0 \quad (4)$$

разрешены только 4М процессы (2). При мощности ПМСВ  $P_{in} > P^{th}$ , где  $P^{th}$  – порог параметрической неустойчивости по отношению к процессам (1) или (2), закон дисперсии и затухание волны накачки могут сильно меняться за счёт возбуждения неравновесных магнонов в коротковолновых участках спектра обменных СВ.

Отметим, что влияние параметрических процессов на формирование запрещённых зон в спектре спиновых волн в 1D МК ранее экспериментально исследовалось в [15–17]. Было показано [17], что развитие 3М процессов приводит к разрушению полос  $\Delta\omega^B$  в спектре ПМСВ. В работе [15] было показано, что в условиях

4М распадов рост мощности приводил к сдвигу запрещенных зон  $\Delta\omega^B$  в спектре ПМСВ в область низких частот.

В отличие от работ [15–17], в данной статье изучено влияние параметрических процессов (1), (2) на формирование дефектных мод. При этом было уделено внимание сравнению величин порогов параметрической неустойчивости на частоте возбуждения дефектной моды и других частот из спектра ПМСВ в 1D МК со структурным дефектом.

## 1. Исследуемая структура и методика эксперимента

Эксперименты выполнялись с помощью макета линии задержки (ЛЗ) на ПМСВ, схематически показанного на рис. 1, *a*. Макет состоял из входного и выходного микрополосковых преобразователей и 1D МК с дефектом на основе пленки ЖИГ толщиной  $d \approx 14.7$  мкм, шириной  $w \approx 4$  мм, длиной  $b \approx 7$  мм, с линией ферромагнитного резонанса (ФМР)  $2\Delta H \approx 0.6$  Э, намагниченностью насыщения  $4\pi M_0 \approx 1750$  Гс. На участке поверхности пленки ЖИГ с помощью химического травления был сформирован 1D МК в виде периодической решетки канавок глубиной  $\delta d \approx 1.8$  мкм, шириной  $w_g \approx 80$  мкм и периодом  $\Lambda \approx 150$  мкм (рис. 1, *б*, *в*). Из-за анизотропии травления профиль канавки имел трапецевидную форму (см. рис. 1, *в*). Центральная часть периодической решетки 1D МК содержала дефект в виде микрополоски шириной  $L_d \approx \Lambda \approx 150$  мкм (см. рис. 1, *б*).

Микрополосковые преобразователи были изготовлены на поверхности платы из поликора, имели ширину  $w \approx 30$  мкм и были разнесены на расстояние  $S \approx 5.5$  мм. Магнетонный кристалл размещался на преобразователях таким образом, чтобы дефект был параллелен преобразователям и находился примерно посередине между ними (см. рис. 1, *a*).

Макет ЛЗ помещался в зазор между полюсами электромагнита в магнитное поле  $H_0$ , направленное вдоль преобразователей (см. рис. 1, *a*), что отвечало геометрии возбуждения ПМСВ с законом дисперсии [14]

$$f^2(k) - f_0^2 - \frac{f_m^2(1 - e^{-2kd})}{4} = 0, \quad (5)$$

где  $k$  – волновое число ПМСВ,  $f_0 = \sqrt{f_H(f_H + f_m)}$ ,  $f_m = \gamma 4\pi M_0$ . Величина поля  $H_0$  могла меняться в диапазоне  $H_0 \approx 0-7$  кЭ.

Макет ЛЗ подключался в измерительный СВЧ тракт векторного анализатора цепей (VNA) Agilent ENA5071C-480 через последовательно подключенные малошумящий СВЧ усилитель Agilent и направленный ответвитель. С помощью VNA снимались частотные

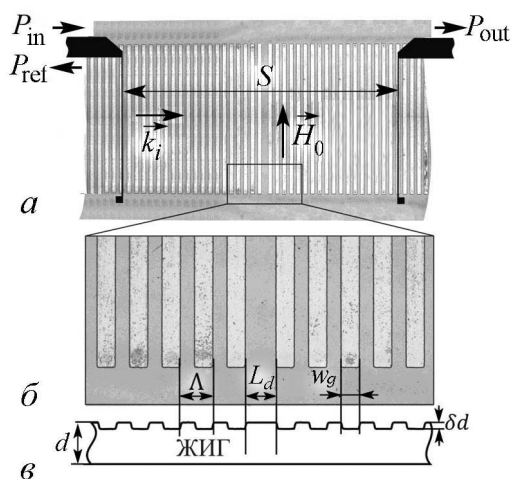


Рис. 1. *a* – схема эксперимента по возбуждению ПМСВ в 1D МК с дефектом; *б* – микрофотография поверхности и *в* – профиль участка периодической структуры 1D МК, содержащей дефект в форме гребня шириной  $L_d \approx \Lambda \approx 150$  мкм



зависимости модулей коэффициентов отражения  $R(f) = 10 \lg(P_{\text{ref}}(f)/P_{\text{in}})$  и передачи  $T(f) = 10 \lg(P_{\text{out}}(f)/P_{\text{in}})$ , где  $P_{\text{in}}$ ,  $P_{\text{ref}}$ ,  $P_{\text{out}}$  – величины падающей, отраженной и прошедшей мощностей, соответственно (см. рис. 1, а). Фаза коэффициента прохождения  $\varphi_T(f)$  использовалась для получения экспериментальных значений волновых чисел  $k(f) \approx \pi\varphi_T(f)/(180S)$  [18]. Уровень входной мощности  $P_{\text{in}}$  мог изменяться в пределах от  $-30$  дБм до  $+18$  дБм, где верхнее значение было ограничено динамическим диапазоном усилителя.

## 2. Влияние трехмагнотных процессов распада

В экспериментах по исследованию влияния 3М процессов величина поля подмагничивания бралась примерно равной  $H_0 \approx 210$  Э, что удовлетворяло условию (3) и законы сохранения (1) выполнялись во всей полосе частот возбуждения ПМСВ.

На рис. 2, а, б показаны характеристики  $T(f)$  и  $R(f)$  в исследуемом макете в зависимости от уровня сигнала накачки  $P_{\text{in}}$  во всей полосе частот возбуждения ПМСВ. На рис. 2, в, г приведены более подробно участки характеристик в окрестности полосы непропускания В1. На рис. 3 показаны зависимости характеристики  $R(P_{\text{in}})$ , снятые для трёх частот из спектра ПМСВ:  $f_{\text{p1}} \approx 2315$  МГц,  $f_{\text{DM}} \approx 2359$  МГц и  $f_{\text{1B}} \approx 2370$  МГц, которые показаны на рис. 2, г кружками.

Следует отметить, что для дефектной моды характерно усиление поля волны в области дефекта [19–21]. Поэтому ожидалось, что на частоте  $f_{\text{DM}}$  величина пороговой мощности будет ниже, чем на частотах  $f_{\text{B1}}$  и  $f_{\text{p1}}$ . Действительно, как можно видеть из рис. 3, между величинами пороговых мощностей для выбранных частот выполняется соотношение  $P_{\text{DM}}^{\text{th}} < P_{\text{B1}}^{\text{th}} < P_{\text{p1}}^{\text{th}}$ . При этом пороговая мощность на частоте  $f_{\text{DM}}$  составляет величину  $P_{\text{DM}}^{\text{th}} \approx -25.7$  дБм, что на 3 дБ и 5 дБ меньше чем на частотах  $f_{\text{B1}}$  и  $f_{\text{p1}}$ , соответственно.

Для анализа влияния мощности ПМСВ на зависимости  $T(f)$  и  $R(f)$  удобно воспользоваться параметром  $C = 10 \lg(P_{\text{in}}/P_{\text{DM}}^{\text{th}})$ , характеризующим надкритичность накачки [22–24, 16, 17]. В линейном режиме распространения ПМСВ (см. рис. 2, а, б, кривая 1) при  $C < 0$  дБ на участках спектра В1 и В2 на частотах  $f_{\text{B1}} \approx 2361$  МГц и  $f_{\text{B2}} \approx 2653$  МГц наблюдаются запрещённые зоны  $\Delta f_{\text{B1,2}}$ , которые в спектре коэффициента передачи  $T(f)$  проявляются как узкие полосы непропускания сигнала одновременно с ростом величины. Значения волновых чисел  $k_{\text{B1}} \approx 209 \text{ см}^{-1}$  и  $k_{\text{B2}} \approx 410 \text{ см}^{-1}$ , отвечающих центральным частотам запрещённых зон  $f_{\text{B1,2}}$  и рассчитанных с помощью соотношения (5), находятся в согласии с условием возникновения брэгговского резонанса [25]

$$k_{\text{Bn}} = \frac{n\pi}{\Lambda}. \quad (6)$$

Из рис. 2, в, г видно, что на центральной частоте  $f_{\text{DM}} \approx 2359$  МГц в пределах полосы  $\Delta f_{\text{DM}} \approx 10$  МГц, лежащей внутри полосы  $\Delta f_{\text{B1}} \approx 55$  МГц брэгговского резонанса В1, возбуждается дефектная мода [12]. На зависимости  $T(f)$  ей соответствует пик пропускания сигнала амплитудой  $\Delta T_{\text{DM}} \approx 15$  дБ, а на зависимости  $R(f)$  – участок уменьшения отраженной мощности  $\Delta R_{\text{DM}} \approx 6$  дБ.

Как видно из рис. 2, в при надкритичности  $C \approx 9$ –26 дБ, величина  $\Delta T_{\text{DM}}$  существенно уменьшается. При  $C \geq 26$  дБ в результате роста нелинейного затухания [23, 24] 3М процессы приводят к понижению величины  $\Delta T_{\text{DM}}$  до уровня

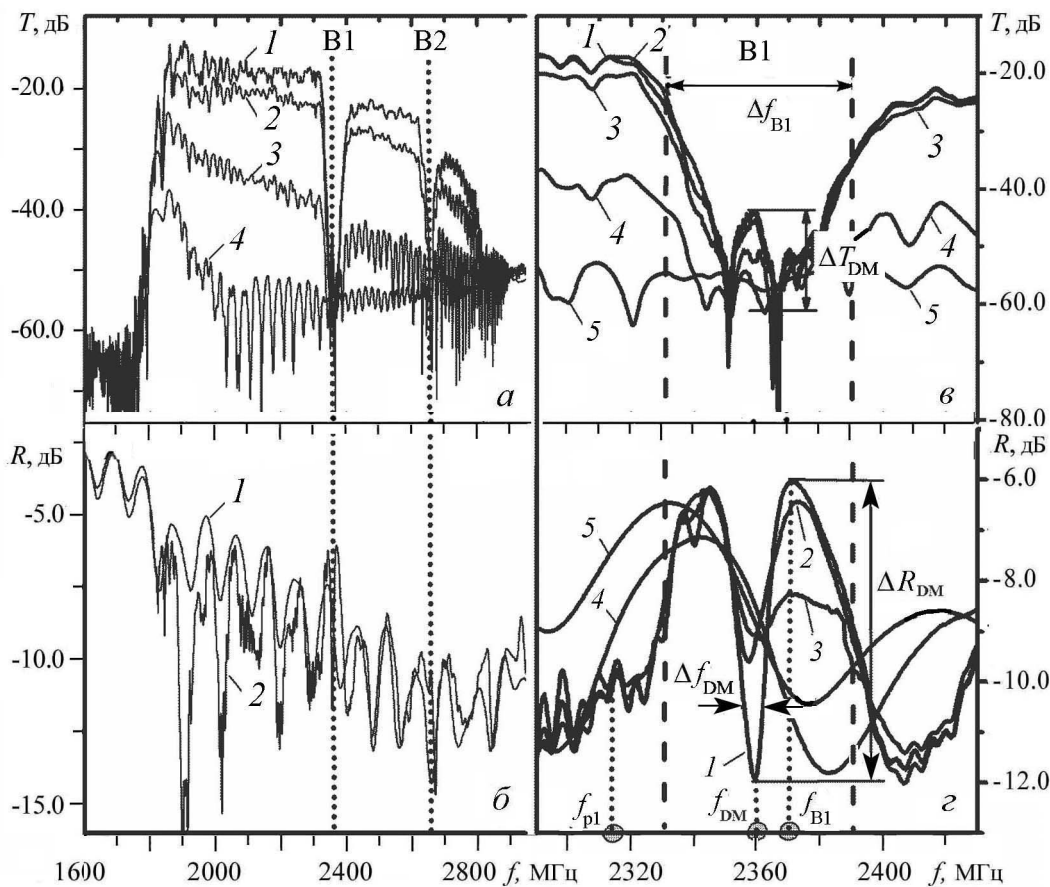


Рис. 2. Зависимости коэффициентов  $T(f)$  (а) и  $R(f)$  (б) ПМСВ в 1D магнонном кристалле с дефектом, шириной  $L_d \approx 150$  мкм, при уровнях надкритичности  $C$ : 1 – (-4), 2 – 6, 3 – 9, 4 – 21, 5 – 36. Фрагменты кривых  $T(f)$  (в) и  $R(f)$  (г) в окрестности полосы В1 в условиях 4М процессов распада. Величина поля подмагничивания  $H_0 \approx 210$  Э

$\Delta T_{DM} \approx 0$  дБ, которому соответствует разрушение как дефектной моды, так и запрещённой зоны В1, аналогично случаю, описанному в [16, 17].

Изменение зависимости  $\Delta R_{DM}$  с ростом  $C$  показано на рис. 2, г. При величине  $C \leq -4$  дБ, отвечающей линейному распространению ПМСВ, величина  $\Delta R_{DM} \approx 6$  дБ. При  $C \approx 6$  дБ изменение  $\Delta R_{DM} \approx 3.7$  дБ, а при  $C \approx 9$  дБ не превышает  $\Delta R_{DM} \approx 0.7$  дБ. При надкритичности  $C > 11$  дБ величина  $\Delta R_{DM} \approx 0$ , что соответствует исчезновению резонанса дефектной моды в отраженной мощности.

Отметим, что из сравнения величин  $P_{DM}^{th}$  и  $P_{p1}^{th}$ , приведенных на рис. 3,

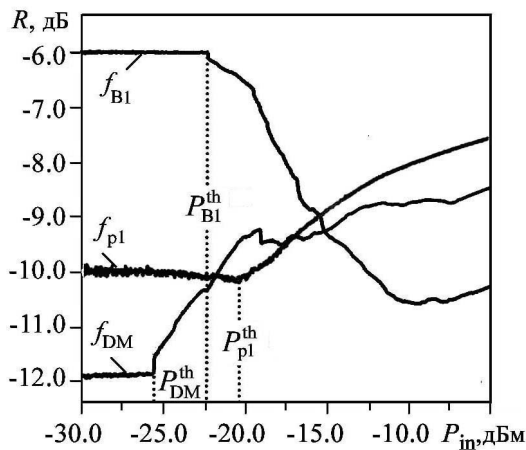


Рис. 3. Характеристики снятые для частот  $f_p$ , МГц: 1 – 2359, 2 – 2370, 3 – 2315. Величина поля подмагничивания  $H_0 \approx 210$  Э

можно показать, что на частоте  $f_{DM}$  действительно имеет место эффект усиления амплитуды поля волны. Для этого мощность ПМСВ  $P_{sw}$  свяжем с амплитудой СВЧ намагниченности  $m$  спиновой волны с помощью выражения [23]

$$P_{sw} \approx v_g d w m^2, \quad (7)$$

где  $v_g$  – групповая скорость определяется из (5),  $w$  – ширина плёнки, а величина  $m^2$  характеризует плотность энергии волны в единице объема. Тогда отношение плотностей энергии волны на частотах  $f_{DM}$  и  $f_{p1}$  при уровнях мощности  $P_{DM}^{th} \approx 2.7$  мкВт,  $P_{p1}^{th} \approx 9$  мкВт, отвечающих порогам развития 3М распадов на рис. 3, можно представить в виде

$$\frac{m_{DM}^2}{m_{p1}^2} = \frac{P_{DM}^{th} f_{DM}}{P_{p1}^{th} f_{p1}} e^{2d\Delta K}, \quad (8)$$

где  $\Delta K = k_{DM} - k_{p1}$ . Если предположить, что параметр диссипации СВ  $\Delta H_k$  на дефектном участке и в остальной части МК одинаков и равен  $\Delta H$  исходной пленки ЖИГ, и учесть значения волновых чисел  $k_{DM} \approx 210$  см<sup>-1</sup> и  $k_{p1} \approx 180$  см<sup>-1</sup> ( $\Delta k \approx 30$  см<sup>-1</sup>) на частотах  $f_{DM}$  и  $f_{p1}$  ПМСВ, соответственно, то из (8) получим отношение амплитуд СВ  $m_{DM}/m_{p1} \approx 1.7$ . Последнее говорит об эффекте усиления поля волны в области дефекта.

### 3. Влияние четырехмагнонных процессов распада

Для исследования влияния 4М процессов (2) величина магнитного поля  $H_0$  бралась равной  $H_0 \approx 905$  Э в соответствии с условием (4). На рис. 4 представлены кривые  $T(f)$  и  $R(f)$  в зависимости от уровня сигнала накачки  $P_{in}$  в условиях 4М процессов распада. На рис. 4, *а, б* показаны характеристики  $T(f)$  и  $R(f)$ , снятые в линейном режиме распространения во всей полосе частот возбуждения ПМСВ. На рис. 4, *в, г* показаны участки исследуемых характеристик в окрестности полосы непропускания В1, в пределах которой наблюдается формирование дефектной моды. На кривых  $T(f)$  и  $R(f)$  можно видеть возбуждение дефектной моды на частоте  $f_{DM} \approx 4636$  МГц с шириной  $\Delta f_{DM} \approx 10$  МГц в полосе В1 шириной  $\Delta f_{B1} \approx 30$  МГц.

Для определения порога развития 4М процессов воспользуемся, следуя [24], зависимостью относительного сдвига частоты дефектной моды  $\Delta f_{DM}^T(P_{in})$  на характеристике  $T(f)$  и  $\Delta f_{DM}^R(P_{in})$  на характеристике  $R(f)$ , соответственно (рис. 5, *а*). Как видно из рисунка сдвиг частоты дефектной моды наблюдается при уровне мощности  $P_{in} \geq P_{4M}^{th} \approx -0.4$  дБм, отвечающему порогу развития 4М процессов. Отметим, что определенное таким образом значение  $P_{4M}^{th}$  может быть завышено на несколько децибелл [24]. Далее будем использовать параметр надкритичности  $C = 10 \lg(P_{in}/P_{4M}^{th})$ .

Как видно из рис. 4, *в, г* при величине надкритичности  $C > 5$  дБ наблюдается нелинейный сдвиг частоты дефектной моды  $\Delta f_{DM}^T$ ,  $\Delta f_{DM}^R$  и полосы брэгговского резонанса  $\Delta f_{B1}$  в сторону меньших частот. На рис. 5, *а* приведена зависимость величин  $\Delta f_{DM}^T$  и  $\Delta f_{DM}^R$  от уровня входной мощности  $P_{in}$  (или надкритичности накачки  $C$ ). Видно, что при значениях надкритичности в диапазоне  $C \approx 5-18$  дБ наблюдается значительная разница в значениях  $\Delta f_{DM}^T(P_{in})$  (кривая 1) и  $\Delta f_{DM}^R(P_{in})$  (кривая 2), достигающая величин порядка 5–20 МГц.

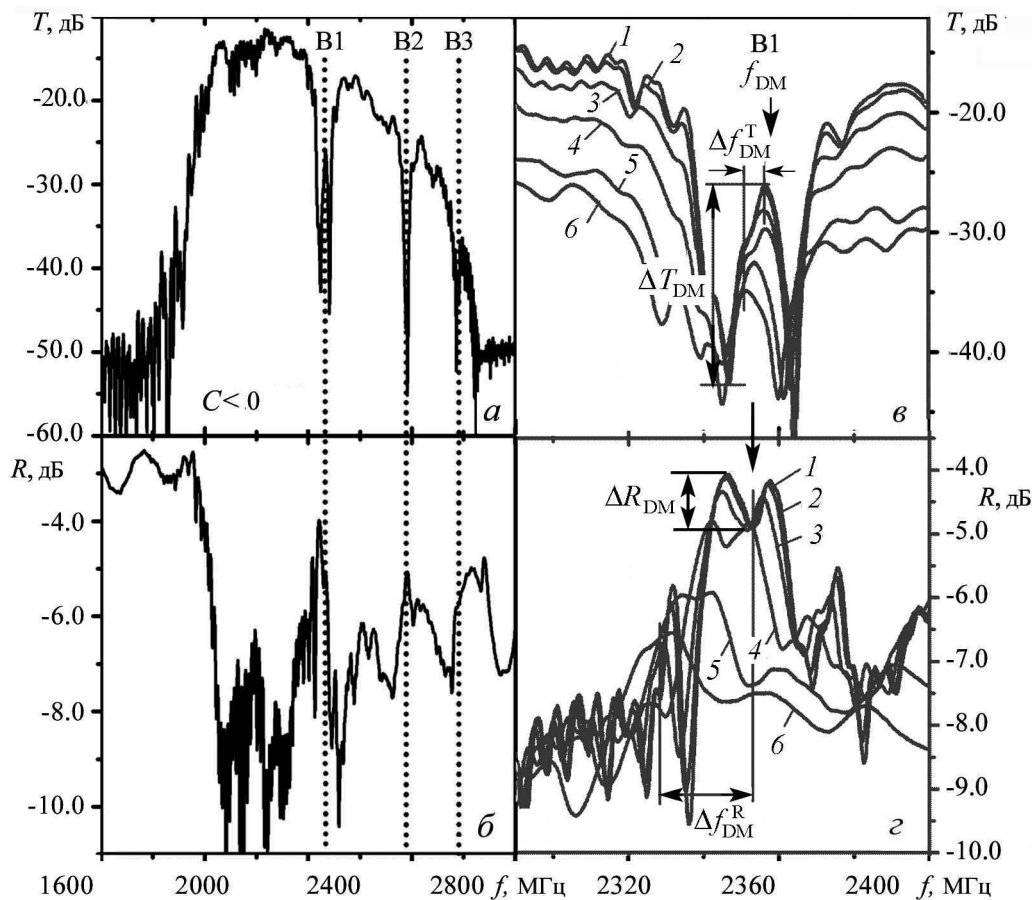


Рис. 4. Зависимости коэффициентов  $T(f)$  (а) и  $R(f)$  (б) ПМСВ в 1D магнонном кристалле с дефектом, шириной  $L \approx 150$  мкм для уровней надкритичности  $C$ , дБ: 1 – (–5), 2 – 0, 3 – 5, 4 – 10, 5 – 15, 6 – 18. Фрагменты (в) и (z) кривых  $T(f)$  (а) и  $R(f)$  (б) в окрестности полосы В1 в условиях 4М процессов распада. Величина поля подмагничивания  $H_0 \approx 905$  Э

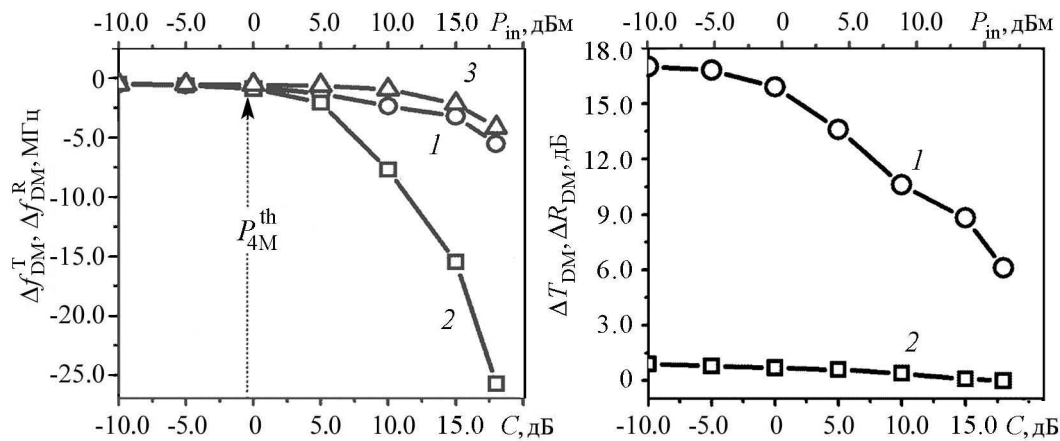


Рис. 5. а – зависимости нелинейного сдвига частоты  $\Delta f$  дефектной моды  $f_{DM} \approx 4636$  МГц от входной мощности, полученные для характеристик  $\Delta f_{DM}^T(P_{in})$  (кривая 1) и  $\Delta f_{DM}^R(P_{in})$  (кривая 2), расчет  $\delta f_p$  (кривая 3). б – зависимости нелинейного сдвига величин  $\Delta T_{DM}$  (кривая 1) и  $\Delta R_{DM}$  (кривая 2). Величина поля подмагничивания  $H_0 \approx 905$  Э

Снижение частот брэгговских резонансов и дефектной моды с ростом надкритичности на рис. 4, в, з и отрицательный сдвиг частот  $\Delta f_{\text{DM}}^{\text{T}}(P_{\text{in}})$  и  $\Delta f_{\text{DM}}^{\text{R}}(P_{\text{in}})$  объясняется эффектом уменьшения эффективной длины продольной  $z$ -компоненты вектора намагниченности среды  $M_0^2 = M_z^2 + |m|^2$  [14], где

$$M_z \approx M_0 - \frac{|m|^2}{2M_0} = M_0(1 - |\psi|^2) \quad (9)$$

с ростом угла прецессии намагниченности  $\psi = |m|/(\sqrt{2}M_0)$ . В этом случае на частоте накачки за счет нелинейности дисперсии возникает сдвиг спектра ПМСВ  $\delta f_{\text{p}}$  [14, 26–29]

$$\delta f_{\text{p}} = -\frac{\omega_H \omega_M |m|^2}{8\pi \omega_0 M_0^2}. \quad (10)$$

Значение  $m$  можно рассчитать с помощью (7), где необходимо использовать значение мощности ПМСВ  $P_{\text{sw}}$  в пленке. В свою очередь, значение  $P_{\text{sw}}$  можно оценить с помощью соотношения [22–24]

$$P_{\text{sw}} \approx P_{\text{ref}}(H_1) - P_{\text{ref}}(H_0), \quad (11)$$

где  $P_{\text{ref}}(H_0)$  и  $P_{\text{ref}}(H_1)$  – величины отраженной мощности, снятые при поле  $H_0$ , отвечающего возбуждению ПМСВ, и при поле  $H_1 > f_{\text{p}}/\gamma$ , когда частота накачки лежит ниже «дна» спектра спиновых волн. Выражение (11) можно представить в виде

$$P_{\text{sw}} \approx P_{\text{in}} \left[ 10^{\frac{R(H_1)}{10}} - 10^{\frac{R(H_0)}{10}} \right], \quad (12)$$

где  $R(H_i)$  – экспериментальные значения коэффициента отражения, измеренные при заданном уровне падающей мощности  $P_{\text{in}}$ .

На рис. 5, а показана рассчитанная с помощью (10) зависимость частотного сдвига спектра СВ  $\delta f_{\text{p}}$  (кривая 3) от величины входной мощности. Можно видеть, что имеется качественное согласие результатов расчета и экспериментальной зависимости  $\Delta f_{\text{DM}}^{\text{T}}(P_{\text{in}})$  (кривая 1).

На рис. 5, б показаны зависимости от уровня надкритичности  $C$  величин амплитуд резонансных особенностей на частоте дефектной моды в прошедшем ( $\Delta T_{\text{DM}}$ ) и отраженном ( $\Delta R_{\text{DM}}$ ) сигналах (см. рис. 4, в, з). Можно видеть, что при  $C > 0$  дБ величина  $\Delta T_{\text{DM}}$  начинает заметно снижаться и при уровне  $C \approx 18$  дБ она уменьшается почти в 3 раза относительно своего значения в линейном режиме. Одновременно с этим, при указанном уровне  $C$  величина  $\Delta R_{\text{DM}}$  становится равной  $\Delta R_{\text{DM}} \approx 0$  дБ, что означает исчезновение сигнала резонанса дефектной моды в отраженном сигнале.

Различие в значениях величин сдвига резонансных частот в спектре отраженного  $\Delta f_{\text{DM}}^{\text{R}}(P_{\text{in}})$  и прошедшего  $\Delta f_{\text{DM}}^{\text{T}}(P_{\text{in}})$  сигналов и поведение амплитуд резонансных пиков  $\Delta R_{\text{DM}}$  и  $\Delta T_{\text{DM}}$  следует связать с затуханием ПМСВ при распространении вдоль структуры. По этой причине плотность энергии  $m^2$  волны, определяющая величину сдвига частот  $\delta f_{\text{p}}$  в формуле (10), на выходной антенне оказывается в рассматриваемом случае на  $\Delta T = 8.86k''L \approx 18$  дБ меньше, чем на входной. При этом вызванные развитием параметрической неустойчивости вклады в дисперсию  $\Delta k'$  и пространственный декремент  $\Delta k''$  ПМСВ определяются не только уровнем

надкритичности  $C$ , но также расстоянием  $L$ , которое пробежала волна. В случае 3М процессов нелинейные добавки при надкритичностях  $C > 0$  дБ могут составить  $\Delta k' \sim \Delta k'' \approx 30\text{--}50 \text{ см}^{-1}$ , тогда как в случае 4М распадов имеем  $\Delta k' \sim \Delta k'' \approx 2\text{--}4 \text{ см}^{-1}$  [23]. С другой стороны, величина изменения дисперсии на частоте дефектной моды составляет  $\Delta k_{\text{DM}} \approx 5 \text{ см}^{-1}$  [12]. По этой причине влияние 3М и 4М параметрических процессов на формирование дефектной моды при одинаковых уровнях надкритичности накачки проявляется по-разному: при  $C \approx 15$  дБ в условиях 3М распадов дефектная мода полностью исчезает, а в случае 4М процессов ещё наблюдаема на характеристике  $\Delta T_{\text{DM}}$ .

### Заключение

В работе исследовано:

- влияние трех- и четырехмагнонных процессов распада поверхностных магнитостатических спиновых волн на формирование дефектных мод в одномерном магнонном кристалле со структурным дефектом;
- показано, что трехмагнонный распад поверхностных магнитостатических спиновых волн приводит к разрушению дефектных мод; пороговые мощности развития трехмагнонных процессов на частотах дефектных мод примерно в два раза меньше пороговых мощностей разрушения брэгговского резонанса; такая особенность объясняется эффектом локального усиления поля спиновой волны в области дефекта и формировании в нем неравновесного участка распространения спиновых волн;
- в условиях развития четырехмагнонных процессов при больших уровнях надкритичности накачки обнаружен сдвиг дефектной моды вместе с полосой брэгговского резонанса в сторону длинноволновой границы, что объясняется сдвигом дисперсии волны накачки при больших углах прецессии намагниченности.

*Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты № 16-02-01073\_а, № 17-07-01452 А).*

### Библиографический список

1. Никитов С.А., Калябин Д.В., Лисенков И.В., Славин А.Н., Барабаненков Ю.Н., Осокин С.А., Садовников А.В., Бегинин Е.Н., Морозова М.А., Шараевский Ю.П., Филимонов Ю.А., Хивинцев Ю.В., Высоцкий С.Л., Сахаров В.К., Павлов Е.С. Магноника – новое направление спинтроники и спин-волновой электроники // УФН. 2015. Т. 185, № 10. С. 1099–1128.
2. Chumak A.V., Serga A.A., Hillebrands B., Kostylev M.P. Scattering of backward spin waves in a one-dimensional magnonic crystal // Appl. Phys. Lett. 2008. Vol. 93. P. 022508.
3. Lee K.S., Han D.S., Lim S.K. Physical origin and generic control of magnonic band gaps of dipole-exchange spin waves in width-modulated nanostrip waveguides // Phys. Rev. Lett. 2009. Vol. 102. P. 127202.
4. Гуляев Ю.В., Никитов С.А., Плесский В.П. Распространение магнитостатических волн в нормально намагниченной пластине феррита с периодически неровными поверхностями // ФТТ. 1980. Т. 22. С. 2831.

5. Nikitov S.A., Taihades Ph., Tsai C.S. Spin waves in periodic magnetic structures – magnonic crystals // Journ. Magn. Magn. Mater. 2001. Vol. 0236. P. 320–330.
6. Ignatchenko V.A., Mankov Y.I., Maradudin A.A. Spectrum of waves in randomly modulated multilayers // Phys. Rev. B. 1999. Vol. 59. P. 42–45.
7. Kruglyak V.V., Kuchko A.N. Spectrum of spin waves propagating in a periodic magnetic structure // Physica B: Condensed Matter. 2003. Vol. 339, № 2–3. P. 130–133.
8. Kuchko A.N., Sokolovskii M.L., Kruglyak V.V. // The Physics of Metals and Metallography. 2006. Vol. 101, № 6. P. 513–518.
9. Kruglyak V.V., Kuchko A.N. Damping of spin waves in a real magnonic crystal // Journ. Magn. Magn. Mater. 2004. Vol. 272–276, No. 1. P.302–303.
10. Tkachenko V.S., Kruglyak V.V., Kuchko A.N. Spin waves in a magnonic crystal with sine-like interfaces // Journ. Mag. Mag. Mater. 2006. Vol. 307, No. 1. P. 48–52.
11. Ignatchenko V.A., Mankov Y.I., Maradudin A.A. Wave spectrum of multilayers with finite thicknesses of interfaces // Phys. Rev. B. 2000. Vol. 62, No. 3. P. 2181–2184.
12. Filimonov Yu.A., Pavlov E.S., Vysotskii S.L., Nikitov S.A. Magnetostatic surface wave propagation in a one-dimensional magnonic crystal with broken translational symmetry // Appl. Phys. Lett. 2012. Vol. 101. P. 242408.
13. Павлов Е.С., Филимонов Ю.А. Бистабильность спиновых волн в нелинейных брэгговских резонаторах на основе ферритовых магнетонных кристаллов // Нелинейный мир. 2015. Т. 13, № 2. С. 35–36.
14. Гуревич А.Г., Мелков Г.А. Магнитные колебания и волны М.: Физматлит, 1994. 464 с.
15. Ustinov A.B., Drozdovskii A.V., Kalinikos B.A. Multifunctional nonlinear magnonic devices for microwave signal processing // Appl. Phys. Lett. 2010. Vol. 96. P. 142513.
16. Высоцкий С.Л., Кожевников А.В., Филимонов Ю.А. и др. Параметрическая неустойчивость поверхностных магнетостатических волн в двумерных магнетонных кристаллах // Известия вузов. ПНД. 2007. Т. 15, № 3. С. 58–73.
17. Высоцкий С.Л., Никитов С.А., Новицкий Н.Н., Павлов Е.С., Стогний А.И., Филимонов Ю.А. Влияние параметрической неустойчивости первого порядка на формирование полос непропускания в спектре поверхностных магнетостатических волн в одномерном ферритовом магнетонном кристалле // Изв. вузов ПНД. 2012. Т. 20, № 2. С. 3–11.
18. Медведев В.В., Фетисов Ю.К. Вопросы кибернетики. Устройства и системы. М.: МИРЭА, 1983. 171 с.
19. Soljacic M., Joannopoulos J.D. Enhancement of nonlinear effects using photonic crystals // Nature Mater. 2004. Vol. 3. P. 211–219.
20. Khanikae A.B., Baryshev A.V., Fedyanin A.A., et al. Anomalous Faraday effect of a system with extraordinary optical transmittance // Optics Express. 2007. Vol. 15. P. 6612.
21. Kai Di, Vanessa Li Zhang, Meng Hau Kuok, Hock Siah Lim, Ser Choon Ng. Band structure of magnonic crystals with defects: Brillouin spectroscopy and micromagnetic simulations // Phys. Rev. B. 2014. Vol. 90. P. 060405.
22. Kozhevnikov A.V., Nikitov S.A., Filimonov Yu.A. Attenuation of non-linear surface magnetostatic waves in ferrite films // J. de Physique IV. Colloque C1. 1997. Vol. 7. P. 401–402.

23. Казаков Г.Т., Кожевников А.В., Филимонов Ю.А. Влияние параметрически возбуждённых спиновых волн на дисперсию и затухание поверхностных магнитостатических волн в ферритовых плёнках // ЖЭТФ. 1999. Т. 115, вып. 1. С. 1–15.
24. Казаков Г.Т., Кожевников А.В., Филимонов Ю.А. Четырехмагнонный распад поверхностных магнитостатических волн в пленках ЖИГ // ФТТ. 1997. Т. 39, № 2. С. 330–338.
25. Гуляев Ю.В., Никитов С.А., Плесский В.П. Отражение поверхностных магнитостатических волн от периодически неровного участка поверхности феррита // Радиотехника и электроника. 1981. Т. 23. С. 2282.
26. Suhl H. The theory of ferromagnetic resonance at high signal powers // J. Phys. Chem. Sol. 1957. Vol. 1, № 4. P. 209–227.
27. Лукомский В.П. Нелинейные магнитостатические волны в ферромагнитных пластинах // Укр. Физ. журн. 1978. Т. 23, № 1. С. 134–139.
28. Ваишковский А.В., Стальмахов В.С., Шараевский Ю.П. Магнитостатические волны в электронике сверхвысоких частот. Саратов: Изд-во СГУ, 1993. 312 с.
29. Tsankov M.A., Chen M., Patton C.E. Magnetostatic wave dynamic magnetization response in yttrium iron garnet films // J. Appl. Phys. 1996. Vol. 79, № 3. P. 1595–1603.

## References

1. Nikitov S.A., Kalyabin D.V., Lisenkov I.V., Slavin A.N., Barabanenkov Yu.N., Osokin S.A., Sadovnikov A.V., Beginin E.N., Morozova M.A., Sharaevsky Yu.P., Filimonov Yu.A., Khivintsev Yu.V., Vysotsky S.L., Sakharov V.K., Pavlov E.S. Magnonics: A new research area in spintronics and spin wave electronics. *Physics – Uspekhi*. 2015. Vol. 58, No. 10. P. 1002–1028.
2. Chumak A.V., Serga A.A., Hillebrands B., Kostylev M.P. Scattering of backward spin waves in a one-dimensional magnonic crystal. *Appl. Phys. Lett.* 2008. Vol. 93. P. 022508.
3. Lee K.S., Han D.S., Lim S.K. Physical origin and generic control of magnonic band gaps of dipole-exchange spin waves in width-modulated nanostrip waveguides. *Phys. Rev. Lett.* 2009. Vol. 102. P. 127202.
4. Gulyaev Yu.V., Nikitov S.A., Plesskii V.P. The propagation of magnetostatic waves in a normally magnetized ferrite plate with periodically uneven surfaces. *Sov. Phys. Solid State*. 1980. Vol. 22, No. 9. P.1651–1652.
5. Nikitov S.A., Taihades Ph., Tsai C.S. Spin waves in periodic magnetic structures – magnonic crystals. *Journ. Magn. Magn. Mater.* 2001. Vol. 0236. P. 320–330.
6. Ignatchenko V.A., Mankov Y.I., Maradudin A.A. Spectrum of waves in randomly modulated multilayers. *Phys. Rev. B*. 1999. Vol. 59. P. 42– 45.
7. Kruglyak V.V., Kuchko A.N. Spectrum of spin waves propagating in a periodic magnetic structure. *Physica B: Condensed Matter*. 2003. Vol. 339, No. 2–3. P. 130–133.
8. Kuchko A.N., Sokolovskii M. L., Kruglyak V.V. *The Physics of Metals and Metallography*. 2006. Vol. 101, No. 6. P. 513–518.
9. Kruglyak V.V., Kuchko A.N. Damping of spin waves in a real magnonic crystal. *Journ. Magn. Magn. Mater.* 2004. Vol. 272–276, No. 1. P. 302–303.



10. Tkachenko V.S., Kruglyak V.V., Kuchko A.N. Spin waves in a magnonic crystal with sine-like interfaces. *Journ. Mag. Mag. Mater.* 2006. Vol. 307, No. 1. P. 48–52.
11. Ignatchenko V.A., Mankov Y.I., Maradudin A.A. Wave spectrum of multilayers with finite thicknesses of interfaces. *Phys. Rev. B.* 2000. Vol. 62, No. 3. P. 2181–2184.
12. Filimonov Yu.A., Pavlov E.S., Vysotskii S.L., Nikitov S.A. Magnetostatic surface wave propagation in a one-dimensional magnonic crystal with broken translational symmetry. *Appl. Phys. Lett.* 2012. Vol. 101. P. 242408.
13. Pavlov E.S., Filimonov Yu.A. Spin-wave bistability in a nonlinear Bragg resonators based on ferrite magnonic crystal. *Nelineinyi mir.* 2015. Vol. 13, No. 2. P. 35–36 (in Russian).
14. Gurevich A.G., Melkov G.A. Magnetization Oscillations and Waves. CRC Press, 1996. 456 p.
15. Ustinov A.B., Drozdovskii A.V., Kalinikos B.A. Multifunctional nonlinear magnonic devices for microwave signal processing. *Appl. Phys. Lett.* 2010. Vol. 96. P. 142513.
16. Vysotsky S.L., Kozhevnikov A.V., Kazakov G.T., Nikitov S.A., Filimonov Yu.A. Magnetostatic surface waves parametric instability in two-dimensional 2D magnonic crystals. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics.* 2007. Vol. 15, No. 3. P. 58–73 (in Russian).
17. Vysotsky S.L., Nikitov S.A., Novitsky N.N., Pavlov E.S., Stognij A.I., Filimonov Yu.A. Influence of first order parametric instability on formation of forbidden gaps in spectra of magnetostatic surface waves in one-dimensional ferrite magnonic crystal. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics.* 2012. Vol. 20, No. 2. P. 3–11 (in Russian).
18. Medvedev V.V., Fetisov Yu.K. Voprosy Kibernetiki: Ustroystva i Sistemy. M.: MIREA, 1983. P. 171 (in Russian).
19. Soljacic M., Joannopoulos J.D. Enhancement of nonlinear effects using photonic crystals. *Nature Mater.* 2004. Vol. 3. P. 211–219.
20. Khanikae A.B., Baryshev A.V., Fedyanin A.A., et al. Anomalous Faraday effect of a system with extraordinary optical transmittance. *Optics Express.* 2007. Vol. 15. P. 6612.
21. Kai Di, Vanessa Li Zhang, Meng Hau Kuok, Hock Siah Lim, Ser Choon Ng. Band structure of magnonic crystals with defects: Brillouin spectroscopy and micromagnetic simulations. *Phys. Rev. B.* 2014. Vol. 90. P. 060405.
22. Kozhevnikov A.V., Nikitov S.A., Filimonov Yu.A. Attenuation of non-linear surface magnetostatic waves in ferrite films. *J. de Physique IV. Colloque C1.* 1997. Vol. 7. P. 401–402.
23. Kazakov G.T., Kozhevnikov A.V., Filimonov Yu.A. The effect of parametrically excited spin waves on the dispersion and damping of magnetostatic surface waves in ferrite films. *Zh. Eksp. Teor. Fiz.* 1999. Vol. 115, No. 1. C. 1–15.
24. Kazakov G.T., Kozhevnikov A.V., Filimonov Yu.A. Four-magnon decay of magnetostatic surface waves in yttrium iron garnet films. *Physics of the Solid State.* 1997. Vol. 39, No. 2. P. 288–295.
25. Gulyaev Yu.V., Nikitov S.A., Plesskii V.P. Reflection of surface magnetostatic waves from the periodically corrugated part of the ferrite slab surface. *Sov. J. Telecom. Radioeng.* 1981. Vol. 26, No. 11. P. 2282–2291.

26. Suhl H. The theory of ferromagnetic resonance at high signal powers. *J. Phys. Chem. Sol.* 1957. Vol. 1, No. 4. P. 209–227.
27. Lukomskiy V.P. Nelineynie magnitosticheskie volny v ferromagnitnih plastinakh. *Ukr. Fiz. Zhurn.* 1978. Vol. 23, No. 1. P. 134–139 (in Russian).
28. Vashkovsky A.V., Stalmachov V.S., Sharaevsky Yu.P. Magnitosticheskie Volny v Elektronike Sverhвысокй Chastot. Saratov: Izd-vo SGU, 1993. 312 p. (in Russian).
29. Tsankov M.A., Chen M., Patton C.E. Magnetostatic wave dynamic magnetization response in yttrium iron garnet films. *J. Appl. Phys.* 1996. Vol. 79, No. 3. P. 1595–1603.

*Поступила в редакцию*      1.12.2016  
*После доработки*                16.03.2017



*Павлов Евгений Сергеевич* – родился в 1986 году. Окончил факультет нано- и биомедицинских технологий Саратовского государственного университета в (2008). Научный сотрудник Саратовского филиала Института радиотехники и электроники РАН. Область научных интересов – физика твердого тела, спиновые волны в магнитных пленках, нелинейные явления в ферритах. Автор 12 работ в реферируемых научных журналах.

Россия, 410019 Саратов, Зеленая, д. 38  
Институт радиотехники и электроники  
им. В.А. Котельникова РАН, Саратовский филиал  
E-mail: gekapavlov@gmail.com



*Высоцкий Сергей Львович* родился в 1955 году в Саратове. Окончил Саратовский политехнический институт (1977). С 1981 года работает в Саратовском филиале Института радиотехники и электроники им. В.А. Котельникова РАН, в настоящее время - ведущим научным сотрудником лаборатории «Магнитоэлектроники СВЧ». Кандидат физико-математических наук (1994), тема диссертационной работы «Влияние анизотропии и межслойного обменного взаимодействия на распространение магнитостатических волн в слоистых ферритовых структурах». Область научных интересов: магнитоэлектроника СВЧ. Автор более 40 статей в российских и международных журналах.

Россия, 410019 Саратов, Зеленая, д. 38  
Институт радиотехники и электроники  
им. В.А. Котельникова РАН, Саратовский филиал  
Россия, 410012 Саратов, Астраханская, 83  
Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского  
E-mail: vysotsl@gmail.com



*Дудко Галина Михайловна* родилась в 1961 году в Свердловске. Окончила физический факультет Саратовского университета им. Н.Г. Чернышевского (1983) по специальности «радиофизика и электроника». 2002 года. Защитила кандидатскую диссертацию (2002) на тему «Эффекты самовоздействия магнитостатических волн в ферромагнитных пленках». Область научных интересов: нелинейная динамика магнитостатических волн, численное моделирование процессов самомодуляции и самофокусировки магнитостатических волн, колебаний намагниченности и распространения спиновых волн в ферромагнитных нано- и микроструктурах. Автор более 20 статей в высокорейтинговых российских и международных журналах.

Россия, 410019 Саратов, Зеленая, д. 38  
Институт радиотехники и электроники  
им. В.А. Котельникова РАН, Саратовский филиал  
E-mail: dugal\_2010@hotmail.com



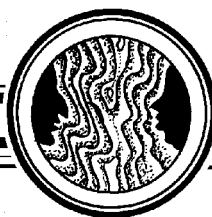
*Филимонов Юрий Александрович* родился в Куйбышев (1955). Окончил факультет физической и квантовой электроники МФТИ (1979). Доктор физико-математических наук (2008), профессор (2012). Директор Саратовского филиала ИРЭ им. В.А. Котельникова РАН, Область научных интересов: магнетика и спинтроника, магнитные материалы и структуры, электронная компонентная база. Имеет более 120 публикаций.

Россия, 410019 Саратов, Зеленая, д. 38  
Институт радиотехники и электроники  
им. В.А. Котельникова РАН, Саратовский филиал  
Россия, 410012 Саратов, Астраханская, 83  
Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского  
E-mail: yuri.a.filimonov@gmail.com



*Кожевников Александр Владимирович* родился в 1962 году в Саратове. Окончил физический факультет Саратовского университета им. Н.Г. Чернышевского (1984) по специальности «полупроводники и диэлектрики». Кандидат физико-математических наук (2011), тема диссертационной работы «Влияние параметрических спиновых волн на дисперсию и затухание магнитоэлектрических волн в пленках железоиттриевого граната». Область научных интересов: физика твердого тела, нелинейная динамика распределенных систем, спиновые волны в ферритовых планарных структурах.

Россия, 410019 Саратов, Зеленая, д. 38  
Институт радиотехники и электроники  
им. В.А. Котельникова РАН, Саратовский филиал  
E-mail: kzhavl@gmail.com



## УНИВЕРСИТЕТСКАЯ ВСЕЛЕННАЯ РЕКТОРА Г. К. ХВОРОСТИНА: РОЖДЕНИЕ И ГИБЕЛЬ\*

*И. А. Трубецкова*

МОУ «Лицей прикладных наук»  
Россия, 410031 Саратов, ул. Комсомольская, 39  
E-mail: irenetrubetskova@gmail.com

Статья посвящена исследованию малоизвестных фактов жизни и деятельности репрессированного ректора Саратовского университета Г.К. Хворостина, возглавлявшего вуз в 1935–1937 годы и за это короткое время превратившего его из провинциального, ослабленного партийными «чистками» учебного заведения в передовой научный центр. Впервые вводятся в научный оборот неопубликованные архивные материалы из личного дела Хворостина, протоколов заседания парткома университета и райкома партии, хранящиеся в Государственном архиве новейшей истории Саратовской области и архиве Саратовского университета.

Основное внимание в статье уделено кадровой политике репрессированного ректора: открытию новых кафедр и институтов, приглашению на работу профессоров, по идеологическим причинам уволенных из московских и ленинградских вузов, созданию благоприятных условий для роста молодых талантливых ученых. Г.К. Хворостин был увлечен идеей преобразовать Саратовский университет в новый «Гёттинген на Волге». В статье приведена статистика, показывающая, как много было им достигнуто.

Деятельность неординарного ректора была прервана арестом. Приглашение столичных ученых, часть из которых была опальными, вызывало резкую критику парткома университета. Ректора обвинили в троцкизме и вредительстве. При этом приглашенные Хворостиним ученые, такие как И.Г. Петровский, А.Я. Хинчин позднее стали гордостью российской науки.

Архивные материалы, приведенные в статье, показывают драматизм последних дней работы Г.К. Хворостина перед его исключением из партии и арестом 2 августа 1937 года. Несмотря на посмертную реабилитацию в 1956 году, имя Г.К. Хворостина до конца 1980-х упоминалось лишь мельком в официальной истории Саратовского университета, и на сегодняшний день многие факты его биографии и деятельности нуждаются в уточнении и детальном изучении, что обуславливает актуальность статьи.

*Ключевые слова:* Г.К. Хворостин, директор Саратовского университета, А.Я. Хинчин, И.Г. Петровский, репрессии 1937 года.

DOI: 10.18500/0869-6632-2017-25-2-89-103

*Образец цитирования:* Трубецкова И.А. Университетская вселенная ректора Г.К. Хворостина: Рождение и гибель // Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2017. Т. 25, № 2. С. 89–103.

\*Статья написана по материалам доклада автора «Ректор Саратовского университета Г.К. Хворостин: Проблема восстановления исторической достоверности» на LVII Международной научной конференции студентов, аспирантов и молодых ученых «Новый век: Человек, общество, история глазами молодых», 25–26 апреля 2014, Саратов, Институт истории и международных отношений СГУ.

## UNIVERSITY UNIVERSE OF THE PRINCIPAL G. K. HVOROSTIN: THE BIRTH AND THE DEATH

*I. A. Trubetskova*

Applied Sciences Lyceum  
Komsomol'skaya St., 39, 410031 Saratov, Russia  
E-mail: irenetrubetskova@gmail.com

This article is dedicated to the investigation of little-known facts of the life and the activity of the repressed principal of Saratov University G. K. Hovorostin, who headed the HEI in 1935–1937 years and during this short time transformed it from provincial, weaken (because of political "cleaning") educational institute into progressive scientific center. For the first time ever into scientific rotation inducts unpublished materials of Hovorostin's personal data file, records of hearings of party committee, kept in The State Archive of the newest history of Saratov region and in The Archive of Saratov University. The main attention is paid to the personnel policy of the repressed principle: the opening of the new departments and institutes, the invitation to work of new professors, because of ideological reasons fired from HEI's of Moscow and Saint-Petersburg, the creation of favorable conditions for growth conditions of young talented scientists. G. K. Hovorostin was involved into the idea of the transformation of SSU into the new "University of Gottingen in Volga-river". In this article is adducted the statistic which shows, how many goals he reached. The activity of unordinary principle was interrupted by the arrestment. Invitation of metropolitan scientists, whose part was disgraced, raised incisive criticism from the university's party committee. The principle was accused in Trotskyism and sabotage. Under these circumstances scientists, invited by Hovorostin, like I.G. Petrovskiy, A.Y. Hinchin, later have become the pride of the Soviet science. Archived materials, contained in the article, show the drama of the last days of Hovorostin's work before his expulsion from the party and the arrestment in the 2 of August in 1937. Despite of the posthumous rehabilitation in 1956, the name of G.K. Hovorostin wasn't mentioned in the official history of Saratov State University, and until nowadays many facts of his biography and activity need improvement and elaborate study, what contribute to the actuality of the article.

*Keywords:* G.K. Hovorostin, principal of Saratov University, A.Ya. Hinchin, I.G. Petrovskii, repressions in 1937 year.

DOI: 10.18500/0869-6632-2017-25-2-89-103

*Paper reference:* Trubetskova I.A. University Universe of the principal G.K. Hovorostin: The birth and the death. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*. 2017. Vol. 25. Issue 2. P. 89–103.

Одна из самых ярких и, к сожалению, трагических страниц истории Саратовского университета связана с именем Гавриила Кирилловича Хворостина. Он руководил СГУ всего два года – с 1935-го до ареста 2 августа 1937-го, но за это время из рядового провинциального университета, ослабленного партийными «чистками», увольнением и переводом профессоров во вновь открытые вузы Саратова<sup>1</sup>, университет начал превращаться в крупный научный центр. Сам Хворостин мечтал создать «Гёттингенский университет на Волге», и ему удалось привлечь в Саратов ведущих ученых, открыть новые кафедры и институты. Но в 1937 году он был арестован и затем расстрелян. Многие из приглашенных профессоров уехали в Москву. «Вторым Гёттингеном» Саратов не стал.

<sup>1</sup>По решению правительства, СГУ выделил из своего состава восемь институтов (Медицинский, Педагогический, Советского права, Советского строительства, Финансово-экономический, Планово-экономический, Технологический и Кооперативный) и два научно-исследовательских учреждения (Краеведческий институт и Институт болезней верхних дыхательных путей). Вследствие этого вуз был значительно ослаблен (так, численность студентов уменьшилась с 4000 до 400 человек).

Долгое время в истории Саратовского университета имя Хворостина упоминалось лишь мельком (см., например, [1, с. 269]). Только в 1989 году директор библиотеки СГУ В.А. Артисевич впервые публично напомнила о роли директора СГУ 1935–1937 годов Г.К. Хворостина в деле строительства университета [2]. В 1990–2000-е годы появились публикации, освещающие разные стороны деятельности репрессированного директора [3–5]. Но и ныне в научной литературе образ Г.К. Хворостина не полон<sup>2</sup>, архивные материалы из фондов Государственного архива Саратовской области (ГАСО), Государственного архива новейшей истории Саратовской области (ГАНИСО), ведомственного архива СГУ (ВА СГУ) не полностью проанализированы. Архивные материалы о работе Хворостина в МГУ до перевода в Саратов в настоящее время утрачены. Поэтому Саратов остаётся единственным центром, где возможно найти реальные данные о работе Г.К. Хворостина.



Биография Хворостина ярко отразила противоречивую историю страны. Как свидетельствуют архивные документы и редкие публикации, семнадцатилетний Г.К. Хворостин партизанил и воевал с колчаковцами в Сибири, был арестован и заключён в тюрьму. В партизанах вступил в партию большевиков. После окончания гражданской войны в 1920 году поступил на рабфак им. М.Н. Покровского при МГУ. Ради постижения наук даже приостановил своё членство в партии, за что был переведён в кандидаты и получил выговор [6, л. 91–92]. Осенью 1923 года он стал студентом физико-математического факультета Московского университета. С первых дней учёбы активно занимался общественной работой. Выступал вместе с «пролетарским студенчеством» в 1924 году против всемирно известного учёного Д.Ф. Егорова<sup>3</sup>, которого в итоге сместили с поста председателя Предметной комиссии по математике. Спустя несколько лет Д.Ф. Егоров был отстранён от должности директора НИИ математики и механики МГУ [8, с. 75]. После ухода Егорова из Предметной комиссии в 1925 году Хворостин был избран её секретарём. Однако 1925/26 учебный год Гавриил Кириллович пропустил из-за болезни, а секретарём комиссии по математике стал И.Г. Петровский, будущий ректор МГУ [8, с. 75–78, 80, 81].

<sup>2</sup>В.А. Артисевич в своей статье называет Хворостина не Гавриилом, а Георгием [2]. Исследователь В.Н. Семёнов без ссылок на источники указывает, что Г.К. Хворостин родился 3 июля 1900 года [3, с. 131].

<sup>3</sup>Д.Ф. Егоров был учителем Н.Н. Лузина. Они оба явились основателями русской математической школы начала XX века (прозванной членами кружка «Лузитания») и сумели продолжить подготовку молодых математиков в годы Гражданской войны. В 1930 году Д.Ф. Егоров был арестован, выслан в Казань, где и умер в 1931 году [7, с. 2], [4, с. 13,16,17].

Интересно, что в статье Ч. Форда утверждается, что Хворостин в своей автобиографии в 1929 году написал: «...из-за большой загруженности общественной работой <...> не смог завершить учёбу на физико-математическом факультете. <...> С 1929 года был одним из студентов рабоче-крестьянского происхождения, обучавшихся [по] специальной программе» [8, с. 81]. Тем не менее, в декабре 1929 года его зачисляют в аспирантуру.

Уже в начале 1930 года Хворостин включается в новый этап борьбы против Д.Ф. Егорова. По свидетельству профессора А.Я. Хинчина, в кампании по изгнанию из МГУ знаменитого учёного участвовала «...исключительно темпераментная математическая молодёжь, темпераментная в политическом отношении», «...как Хворостин и др.» (цит. по [4, с. 100]). В этих условиях в 1930 году из МГУ уходит и академик Н.Н. Лузин, который даже переезжает из Москвы в Ленинград. Пытаясь объяснить смысл указанных кампаний против видного математика, выделим то, на что указывали сами «активисты»: стремление преобразовать абстрактную, бесклассовую математическую науку, «математику для математиков» в действенную марксистскую дисциплину, созидающую новое общество.

Научным руководителем Хворостина в аспирантуре механико-математического факультета МГУ был профессор Некрасов<sup>4</sup> [9, л. 111], [5, с. 158]. В 1931 году Гавриил Кириллович был на стажировке в Германии [10, л. 1], где работал под руководством профессора Куранда (позже бежавшего от фашистов в Америку) и профессора Лизиса (эмигрировавшего в Турцию) [9, л. 111]. В 1934 году Хворостин был назначен заместителем директора Института математики и механики МГУ и вошел в состав правления Математического общества [4, с. 218].

Из краткого экскурса в биографию Хворостина следует, что это был принципиальный человек, преданный идеалам новой жизни. Этим обусловлено его участие в общественной деятельности, политических и идеологических кампаниях 1920–1930-х годов. Отметим, что, в отличие от иных участников «избиения» старых кадров, Г.К. Хворостин искренне верил, что наука обязана быть политически активной. Руководствуясь этим, он решительно боролся с инакомыслящими, сам последовательно проводил в жизнь эти идеи и, в конечном счёте, сам оказался раздавленным репрессивным молохом, управляемым партийными политиками и демагогами от науки.

Как пишут исследователи истории Саратовского университета [5, с. 158], Г.К. Хворостин «окончил аспирантуру механико-математического факультета МГУ, но не успел защитить диссертацию...», так как неожиданно был назначен исполняющим обязанности директора СГУ с 17 июня 1935 года<sup>5</sup>. Сам Г.К. Хворостин утверждал, что вначале «...решительно отказывался от поста директора Университета...» [6, л. 79]. Но партийное руководство настаивало. В 1937 году он утверждал, что ещё перед отъездом в Саратов он изложил в ЦК ВКП(б) (Бубнову) и Народный Комиссариат Просвещения (зам. наркома Волину) свой план реформирования университета

<sup>4</sup>По всей видимости, имеется в виду Александр Иванович Некрасов (1883–1957), крупный советский математик и механик, работавший в МГУ с 1918 года, член-корреспондент АН СССР (с 1932) и действительный член АН СССР (с 1946 года).

<sup>5</sup>Интересно, что доктор физико-математических наук В.В. Вагнер, окончивший московскую аспирантуру Академии связи, уже 17 июня 1935 года обратился с письмом в Саратов к Г.К. Хворостину как к директору СГУ с просьбой вызвать его в университет на работу и обеспечить квартирой. Тут же он пересылает письмо своего наставника с аналогичным обращением к Хворостину от 15 июня 1935 года [11, л. 2-4а].

и, прежде всего, приглашения для преподавания ведущих специалистов: «Кадров в Университете нет, всё, что было разогнали. <...> Саратовский университет был пустым местом. Я не мог поднять Университет с имеющимися малоквалифицированными кадрами. Я взял курс на приглашение большого числа научных работников в Саратов» [6, л. 79].

Гавриил Кириллович отмечал, что, когда «...приступил к работе в университете, аппарат не был укомплектован, трудности в работе были и они <...> усугублялись тем, что до этого времени я не имел опыта в административной работе» [12, л. 26 (об.)]. Однако он грамотно определил основные направления руководства вузом, которые должны были помочь перестроить работу Саратовского университета на новый лад: подбор талантливых кадров, поднятие на новый методологический уровень научных и учебных занятий, возведение новых корпусов и развитие материальной базы СГУ как основного вопроса в строительстве нового вуза [12, л. 27].

Г.К. Хворостин кадровую проблему решал, сохраняя местных талантливых учёных (с обязательной активизацией их научной деятельности), поддерживая перспективных исследователей (в ряде случаев направляя их на стажировку в МГУ); при этом приглашал известных деятелей науки из Москвы и Ленинграда.

В этом плане характерна судьба саратовского математика Н.Г. Чудакова. В связи с этим учёным Хворостина обвинили в распылении кадров СГУ, так как Чудаков, по договорённости с АН СССР в 1935 году, продолжил научную работу в Москве у академика И.М. Виноградова. Директору СГУ пришлось выслушивать и упрёки в «лузиновщине» (то есть в преклонении перед западной наукой, стремлении печатать свои работы не в СССР, а за рубежом). Дело в том, что член редколлегии «Учёных записок СГУ» А.Я. Хинчин [13, л. 29] в 1936 году рекомендовал Чудакову не печатать свои статьи в Саратове<sup>6</sup>, а публиковаться за границей или на английском языке в «Математическом сборнике» (что по тем временам способствовало бы мировому признанию его достижений)<sup>7</sup>. А.Я. Хинчин открыто высказывал своё мнение, «...что в ущерб мировой науке и в ущерб престижу русской науки было то, что большинство из наших дореволюционных математиков печатались исключительно на русском языке, печатались исключительно в России. <...> Самое крупное, что в этой науке за всё время её существования было сделано, прежде чем она стала известна научному миру, было два или три раза «переоткрыто» европейскими математиками. В конце концов, нужно позаботиться о том, чтобы наши статьи появлялись на иностранных языках, иначе это грозит престижу советской математики» [4, с. 117].

Хворостин же по этому поводу заявил: «Я желал не раболепствовать перед западом, а представить все направления науки <...> в СГУ» [12, л. 72].

После защиты в 1936 году Чудаковым докторской диссертации Гавриил Кириллович предложил ему возглавить кафедру чисел в СГУ. Но посчитали более полезным для молодого доктора ещё несколько лет поработать в МГУ [9, л. 108]. После этого директора обвиняли уже в изгнании Чудакова из вуза, так как руководство, якобы, не предоставило ему аудиторных часов, чем и вызвало его повторный отъезд в Москву [12, л. 69]; [9, л. 4(об.), 66, 67].

<sup>6</sup>Одной из причин такой рекомендация Хинчина было то, что «Учёные записки СГУ» в 1936 году вышли только одним номером (из-за не выделения Наркомпросом необходимой бумаги). Полиграфическая база в провинции была отвратительной, в связи с чем опубликованные статьи не получали широкого научного звучания [12, л. 113].

<sup>7</sup>Именно в 1936 году Чудаков впервые опубликует свои новые работы во Франции и на английском языке в «Математическом сборнике» [14, с. 8].



Отметим, что сотрудничество с академиком И.М. Виноградовым позволило Н.Г. Чудакову получить весьма интересные и перспективные результаты [1, с. 145–146]. Вернувшийся в Саратов профессор Н.Г. Чудаков стал с 1940 года заведовать кафедрой алгебры и теории чисел СГУ [1, с. 139].

Местных молодых учёных Г.К. Хворостин аттестовал исключительно по результатам научных достижений, освобождаясь от работников, не соответствующих высокому уровню требований университета. На партийном собрании вуза 27 марта 1936 года он заявил: «Я хочу, чтобы наш университет стал действительно культурным. Поэтому я хочу, чтобы наши студенты слушали лекции из уст учителей, а не учащихся» [12, л. 19 (об.)].

Позже, 17 июня 1936 года на заседании парткома Г.К. Хворостин изложил план мероприятий по повышению квалификации научных работников-коммунистов, с учётом «...их знаний и того, что они могут дать» [15, л. 1]. Тема для обсуждения была опасная – увольнение членов партии. Отвечая на вопрос: кому он отдаёт предпочтение – партийным или беспартийным, директор подчеркнул, что будет «подходить одинаково резко и ко всем остальным при подборе научных работников» [15, л. 1]. Хворостину удалось убедить партком, который его поддержал. В резолюции сказано: «увольнение группы работников коммунистов не есть эксперимент директора, а есть борьба за качество учёбы» [15, л. 2].

На общеуниверситетском собрании 27 июня 1936 года секретарь парткома Смирнов объяснит позицию партийной организации: «Часть коммунистов – научных работников будут освобождены от работы в университете <...> по недостаточности их знаний для университета» [12, л. 43]. Партком обяжет Хворостина трудоустроить уволенных в другие вузы Саратова.

Но партийные чиновники летом 1937 года обвинят Хворостина в нежелании воспитывать партийных учёных. Директор резко выступит против: «Мне приписывают курс на разгон основного костяка научных работников коммунистов. Почему? За то, что я в своё время сказал о трёх коммунистах аспирантах и этого мне очевидно никогда не простят – оскорбив духа святого – людей с партийным билетом. Я сказал, что они не могут работать в Университете, но могут работать в других Вузах. Я считаю, что люди, взявшиеся за дело, до которого они не доросли, не дело делают» [6, л. 85].

Угроза изгнания из СГУ породила большое количество недовольных. Начались доносы, искажения реальных событий. Представители «доморощенной философии» вступали в борьбу с новыми веяниями. Поэтому следующим фронтом противостояния стала критика практики приглашения талантливых учёных из центра.

Известно, что с середины 1935 года в Саратов приехали заведовать кафедрами СГУ такие учёные, как А.Я. Хинчин (кафедрой теории вероятностей и теории чисел), И.Г. Петровский (кафедрой математического анализа), В.В. Вагнер (геометрии), А.Г. Курош (алгебры), Я.М. Кабак (создал и возглавил кафедру динамики развития организма в СГУ) и др. [1, с. 138]; [5, с. 159]. Всем приглашенным были предоставлены квартиры, и В.Н. Семенов справедливо считает, что это стало возможным только благодаря сложившимся хорошим личным отношениям нового директора с первым секретарем обкома партии А.И. Криницким, который поддерживал проводимые Хворостиним преобразования [3, с. 134–135].

Приведённые выше факты о студенческой и аспирантской учёбе Г.К. Хворостина в определённой степени объясняют его позицию по отношению к пригла-

шёнными крупными учёными из центра. Практически все они учились или работали до этого вместе, знали друг друга, участвовали в политических кампаниях и преобразованиях советской вузовской системы в столице СССР. Хворостин верил им и планировал опираться на них в период саратовских преобразований. Например, А.Я. Хинчин имел опыт плодотворной работы не только в столичных вузах, но и в провинциальном педагогическом институте г. Иваново в 1918–1922 годах, И.Г. Петровский был организатором преобразований в НИИ математики и механики МГУ.

В ответ на обвинение, что директор СГУ организовал противостояние саратовских «доморощенных профессоров» с москвичами и ленинградцами, Г.К. Хворостин подчеркивает: «Я никогда не говорил о «доморощенных профессорах». Я говорил о доморощенной философии и никогда не намеревался этим самым дискредитировать старых научных работников. Это неверно, что я считаю, что в нашем университете старые научные работники плохие, просто у некоторых из них сильно загружено время, и они не имели возможности активно работать над научными работами» [6, л. 85]. Динамика пополнения корпуса педагогов СГУ профессорами и докторами наук в 1935–1937 годах отчётливо прослеживается в таблице<sup>8</sup>.

Из таблицы видно, как резко изменился университет под руководством Г.К. Хворостина. После выделения из СГУ ряда институтов в 1930–1931 годах и перевода значительного количества профессоров в другие вузы Саратова в СГУ осталось всего 20 профессоров (в том числе 30 % были совместителями). За два года работы Хворостина их количество увеличилось почти на 70 %, и появилось 13 докторов наук. В отчёте парткома СГУ за 1934–1937 годы говорилось, что «рост количества научных работников шёл главным образом за счёт приглашения из научных центров Москвы и Ленинграда. Это весьма положительный момент в деле укрепления Университета. Влившиеся новые научные силы, бесспорно, внесли свежую струю в научную и педагогическую работу Университета» [16, л. 63]. Одновременно была отмечена и неудовлетворительная работа по подготовке и защите диссертаций в стенах СГУ. С момента образования аспирантуры в университете и до начала 1937 года защитилось только 5 человек: в Москву были представлены 1 докторская и 2 кандидатские, а в Саратовском университете были защищены только 2 кандидатские диссертации [16, л. 64].

Разный уровень подготовки столичных и провинциальных учёных объективно должен был привести к конфликту, из которого университет мог бы выйти обновлённым. Весь вопрос заключался в том, кто победит – представители передовых методологий или доморощенной философии?

Таблица

Динамика изменения качественного состава преподавателей СГУ в 1935–1937 гг.

Дата	Профессора			Доктора наук
	Основное место работы	Совместители	Всего	
1.1/35 г.	13	7	20	нет
1.1/36 г.	23	10	33	9
1.1/37 г.	27	7	34	13

<sup>8</sup>Таблица составлена автором на основе материалов [16, л. 62, 63].

Позиция Хворостина была однозначно категорична по отношению к оппонентам, утверждающим, что «мы приглашаем людей, а своих не растим» [12, л. 43 (об.)]. Он говорил: «По-моему, растить можно только тогда, когда имеются действительно квалифицированные люди, у которых есть чему поучиться» [12, л. 43 (об.)].

Но «оппозиционеры» находят «слабые» места у директора, который, в целях решения материальных проблем приглашённых учёных, некоторым из них определил повышенные оклады. В 1935 году Базилевичу и кандидату математических наук Гордону, в 1936 не остепенённому Симонову Хворостин даст доцентские ставки [11, л. 1], [17, л. 127 (об.)], [13, л. 28], доктору Вагнеру – профессорскую [17, л. 174а], Кабаку – и.о. профессора и назначит руководителем кафедры динамики развития организма [13, л. 28], объявит на Учёном совете об учёных званиях Кабака, Никольского, Дахшлегера и др., которые им ещё не были присуждены. В ответ прозвучит: «Г.К. Хворостин в целях создания ложного авторитета и преувеличения своих заслуг <...>, выдавал приглашённых им младших и средних научных работников за высококвалифицированных специалистов-профессоров. Так, например научные работники: тт. Кабак, Дахшлегер, Никольский, Вагнер и др., не имея профессорских званий, выдаются Хворостиным за профессоров» [6, л. 114]. И резюме секретаря парткома СГУ Колтакова от 31 июля 1937 года, то есть за два дня до ареста Хворостина: исключить Хворостина из партии и просить ЦК ВКП(б) и Саратовский Обком ВКП(б) снять его с поста директора Университета. Это означало только одно – арест.

Гавриил Кириллович будет доказывать, что вопрос с присуждением Вагнеру звания профессора сильно затягивается Москвой. Б.П. Никольский<sup>9</sup> тоже пока профессорского звания не имеет, но уже и ныне как учёный на 10 голов выше местного доктора наук. Дахшлегер<sup>10</sup> утверждён Наркомпросом и.о. профессора, хотя такие, как он уже утверждены докторами, и он добьётся этой степени [6, л. 92]. Такие учёные в любом звании необходимы Саратовскому университету.

Отметим, что в дальнейшем, после отъезда из Саратова, профессор А.Я. Хинчин возглавит кафедру в МГУ, будет избран членом-корреспондентом АН СССР, академиком РАПН, получит Сталинскую премию; профессор И.Г. Петровский станет академиком АН СССР и ректором МГУ; защитившийся в 1935 году молодой доктор В.В. Вагнер, оставшийся в СГУ, станет профессором и заведующим кафедрой геометрии; профессор А.Г. Курош защитит докторскую диссертацию и будет работать профессором МГУ; доцент Я.М. Кабак после возвращения в Москву защитит докторскую диссертацию и будет избран профессором МГУ. И этот список можно продолжать.

Другая область обвинений Хворостина – принятие на работу в СГУ троцкистов и политически ненадёжных лиц. Ещё 26–27 марта 1936 года на партсобрании СГУ возникнет эта проблема. Хворостин её в определённой степени нейтрализует, вспомнив изгнание из Саратова нескольких профессоров, в частности – Голубева,

<sup>9</sup>Никольский Борис Петрович в 1935 году арестован и выслан в Саратов. В том же году организует и становится заведующим кафедрой электрохимии и коллоидной химии в СГУ. В конце 1937 года повторно арестован и приговорён к 10 годам лагерей. В 1939 году дело прекращено за отсутствием улик. Вернувшись в Ленинград, защитил докторскую диссертацию, с 1 сентября 1939 почти 50 лет заведовал кафедрой в ЛГУ. В 1953 году избран членом-корреспондентом АН СССР, с 1968 – академик АН СССР, в 1970 году – Герой Социалистического Труда.

<sup>10</sup>Дахшлегер Владимир Кондратьевич родился в Одессе (1885). Профессор, заведующий кафедрой СГУ. Арестован в апреле 1938 года, в феврале 1939 дело прекращено за отсутствием вины. Дальнейшая судьба неизвестна [18].

которого в МГУ знают «...как прекрасного общественника. <...> Следовательно, в Саратове не воспитывали, а изолировали. НКВД, как известно, воспитывает и врагов, их награждает орденами за хорошую работу» [12, л. 17 (об.)].

В ответ звучит объяснение изгнания Голубева из СГУ: «Он был хороший профессор, но он в своё время заявил: “что он не будет участвовать в выборе ректора Университета, так как участие компартии превращает выборы в комедию и он в ней не желает участвовать”. <...> Голубев сам демонстративно уехал» [12, л. 18].

Тем не менее, в решении партсобрания в 1936 году пока ещё не прозвучала критика видных учёных. Было только отмечено, что «...в Университете собралось на разных работах до 22-х человек, высланных из Ленинграда и других городов, <...> значительная часть из них не представляет для Университета никакой научной и другой ценности (ассистенты, лаборанты, библиотечные работники и другие) и без всякого ущерба делу могут быть заменены людьми вполне благонадёжными, советскими» [12, л. 20 (об.)]. Отметим двойственность требований оппонентов: заботиться о научном и педагогическом росте бесталанных преподавателей-коммунистов, и увольнять, пусть и талантливых, но политически неблагонадёжных учёных.

Формально, ситуация в СГУ 1936–1937 годов напоминала годы борьбы Хворостина с Егоровым и Лузиным. На самом деле, Гавриил Кириллович стоит на прежних позициях – вверенный ему вуз должен стать образцовым советским учебным и научным заведением. Поэтому он активно борется за Никольского, Орлова, Вагнера, Хинчина, Дахшлегера и др., уверенный, что они принесут пользу стране. Он заявляет, что регулярно контролирует работу ленинградцев, и пока нет ни единой жалобы на них [12, л. 27].

На заседании университетского партийного комитета 31 июля 1937 года Хворостин признает обвинение в приглашении административно высланных, но подчеркнёт, что всегда предварительно согласовывал каждую кандидатуру с партийными органами и местным НКВД. Он бросит обвинение в лицо секретарю парткома СГУ: «...кашу Вы заварили (обращаясь к Колтакову). Вы – повар всего этого варева...» [6, л. 81]. И напомнит, что именно Колтаков, работая в Крайкоме, принял на работу в СГУ троцкиста Зайделя, а теперь все валит на директора. Хворостин уточнит, что всех оппозиционеров принимал только с согласия или по рекомендации Крайкома партии [6, л. 82], «...а в Университете оказались люди, которые пользовались этим и, прикрывая свою шкуру, скрываясь, действовали против меня» [6, л. 79]. «Парторганизация стояла в стороне и в вопросе сохранения корпусов за СГУ, которые хотели передать мединституту, в стороне она была и тогда, когда стали приезжать люди из центра, а Наркомпрос стал тормозить с деньгами, а здесь, в Саратове, тормозили с предоставлением квартир. Наоборот, парторганизация старалась помешать директору» [6, л. 79–80].

Понимая, что на этом заседании решается вопрос не только работы, но и жизни, Г.К. Хворостин резюмирует: «...В Саратове имеется 13 Вузов и вот, желая показать слабое звено в Вузах, взяли в качестве такого слабого звена Саратовский Университет. Я скажу прямо, что в течение двух лет, пока я здесь работаю, мы работали лучше других за это время» [6, л. 81]. «Я во имя работы приглашал сюда людей, организовывал лаборатории, старался создать условия для научной работы. <...> Я многое сделал для работы молодых ученых, в том числе и коммунистов <...> и у нас в этом отношении сделано больше, чем в других университетах» [6, л. 85–86].

Но партийный комитет 31 июля 1937 года вынес решение об исключении Хворостина из партии и вышел с ходатайством перед ЦК ВКП(б) и Саратовским Обкомом ВКП(б) о снятии Хворостина с поста директора Университета [6, л. 114]. Через два дня, 2 августа Г.К. Хворостина арестовали. В ходе следствия он не назвал никого, что позволило уехать из Саратова видным москвичам, сохранило им жизнь, а стране – учёных. В 1938 году Г.К. Хворостина и его жену расстреляли.

Г.К. Хворостин был увлечен идеей преобразовать Саратовский университет в новый «Гёттинген на Волге». Он активно строил новые корпуса, не менее энергично приглашал лучших столичных учёных для основания новых научных школ, направлял в Москву местных одарённых аспирантов и ассистентов для стажировки и написания докторских диссертаций.

Эта работа всколыхнула университет, но и затронула околонучные силы. В результате, используя промахи молодого директора, фальсифицируя его мысли и решения, используя репрессивную политическую кампанию, его идеи и дела были искажены, а он был обвинён во вредительстве. За борьбой личностей, амбиций, на самом деле шла борьба за новые традиции Саратовского университета, за новую методологию науки, за новые кадры и будущее СГУ им. Н.Г. Чернышевского.

Гавриил Кириллович Хворостин проиграл. Его расстреляли. В результате потребовались десятилетия, чтобы вуз вышел на рубежи, которые мог занять ещё в конце 1930-х годов.

Как отметила в своей статье В.А. Артисевич, «Благодаря стараниям ректора Московского университета академика И.Г. Петровского в 1956 году Г.К. Хворостин и его жена были реабилитированы посмертно» [2].

Но произошло это только через 18 лет после смерти Гавриила Кирилловича. При жизни он оказался непонятым и оклеветанным. Но и в тяжелую минуту он никого не предал, никого не оклеветал, сделал все, чтобы приглашенные им ученые смогли уехать из Саратова и избежали репрессий. Последующая полноценная и удачная научная жизнь многих из уехавших напрямую обязана расстрелянному Гавриилу Кирилловичу Хворостину.

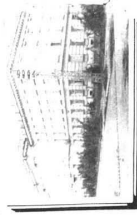
*Выражаю глубокую благодарность своему учителю и научному руководителю – кандидату исторических наук Александру Сергеевичу Юсину, без которого этой статьи просто не было бы. Он всегда находил интересные малоизученные темы для исследования, умел увлечь и сделать историю по-настоящему живой. Он привел меня и моих одноклассников, интересующихся историей, в Государственный архив новейшей истории Саратовской области (ГАНИСО), научил работать с архивными документами. На всех этапах работы над докладами, посвященными жизни и кадровой политике Г.К. Хворостина, и при написании статьи я получала его постоянную поддержку и помощь.*

*Большое спасибо доктору филологических наук, проректору Саратовского государственного университета Елене Генриховне Елиной, благодаря которой я получила возможность работать в архиве университета с личным делом Г.К. Хворостина и приказами по университету, изданными за время его работы в должности директора.*

*Огромную признательность выражаю профессору Саратовского университета, доктору технических наук Александру Савельевичу Фальковичу, предоставившему уникальные фотографии с Г.К. Хворостиным из семейного архива, составившему комментарий к ним и поделившимся воспоминаниями о рассказах своего отца, Савелия Владимировича Фальковича, учившегося в университете в годы директорства Хворостина.*



**САДЯКОВСКИИ УНИВЕРСИТЕТ**  
 1937. ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ. 1936г.



 ШТЕГАН Б.С.	 Филишин И.И.	 Перов И.И.	 Абашицкий А.С.	 ЩЕГАН Б.Г.	 Лисевский И.И.	 Погорельян М.Д.	 Филимонов С.В.	 Звянчиков В.И.	 Розенко Г.Т.	 Чудяков И.Г.	 Быстров И.И.
 Проф. Г.П. БОЛЕВ.	 Докт. Б.К. Дьяконов.	 Докт. П.В. Бишнов.	 Докт. Н.А. Чиргова.	 Докт. А.К. Павловичук.	 Докт. В.П. ЖУЗЖ.	 Докт. С.И. КОЗЛОВ.	 Докт. Г.А. Островский.	 Проф. П.С. ГОЛУБОВ.	 Докт. Б.И. НЕРМОВ.	 Докт. Г.А. Островский.	 Проф. Н.А. ПРОХОРОВ.
 Докт. В.И. РЫКОВА.	 Докт. М.И. ЗОЛОТАРЕВ.	 Докт. Н.А. Чиргова.	 Докт. С.И. КОЗЛОВ.	 Докт. Б.И. НЕРМОВ.	 Докт. Г.А. Островский.	 Докт. С.И. КОЗЛОВ.	 Докт. Г.А. Островский.	 Докт. Б.И. НЕРМОВ.	 Докт. Г.А. Островский.	 Докт. С.И. КОЗЛОВ.	 Докт. Г.А. Островский.
 Докт. В.И. РЫКОВА.	 Докт. М.И. ЗОЛОТАРЕВ.	 Докт. Н.А. Чиргова.	 Докт. С.И. КОЗЛОВ.	 Докт. Б.И. НЕРМОВ.	 Докт. Г.А. Островский.	 Докт. С.И. КОЗЛОВ.	 Докт. Г.А. Островский.	 Докт. Б.И. НЕРМОВ.	 Докт. Г.А. Островский.	 Докт. С.И. КОЗЛОВ.	 Докт. Г.А. Островский.
 Докт. В.И. РЫКОВА.	 Докт. М.И. ЗОЛОТАРЕВ.	 Докт. Н.А. Чиргова.	 Докт. С.И. КОЗЛОВ.	 Докт. Б.И. НЕРМОВ.	 Докт. Г.А. Островский.	 Докт. С.И. КОЗЛОВ.	 Докт. Г.А. Островский.	 Докт. Б.И. НЕРМОВ.	 Докт. Г.А. Островский.	 Докт. С.И. КОЗЛОВ.	 Докт. Г.А. Островский.

## Комментарии к фотографиям

На коллективной фотографии выпускников физико-математического факультета 1936 года в центре, среди преподавателей – портрет Г.К. Хворостина, директора СГУ. После расстрела Гавриила Кирилловича по чьей-то инициативе коллективные фотографии выпуска 1936 года были заменены на новые, где на месте портрета Хворостина было помещено изображение 3-го корпуса университета (в котором располагался физико-математический факультет). Среди выпускников 1936 года были С.В. Фалькович и М.Д. Погорелая, которые вскоре поженились, и в семье оказалось две фотографии. При обмене они одну фотографию заменили, чтобы было, как у всех, а другую спрятали и сохранили.

**Преподаватели.** *Черномащенко Н.А.*, доцент – работал на кафедре теоретической механики; *Правдолюбов А.Л.*, доцент (см. о нём: Штокало И.З. История отечественной математики. В 4 т. Киев: Наукова Думка, 1966–1970. Т. 3. С. 77); *Боев Георгий Петрович*, профессор – зав. кафедрой математического анализа, декан физико-математического факультета (1943–1945), первый декан мехмата (1945–1947), проректор по учебной работе (1947–1950) (см. о нём: История Саратовского университета 1909–2009. Т. 2. Саратов: Изд-во Сар. ун-та, 2009. С. 45); *Ризенкамф Bruno Константинович*, доцент – учитель С.В. Фальковича, зав. кафедрой теоретической механики (см. о нём: История Саратовского университета 1909–2009. Т. 1. Саратов: Изд-во Сар. ун-та, 2009. С. 173); *Вьюшков Павел Васильевич*, доцент – зав. кафедрой астрономии (1930–1954) (см. о нём: История Саратовского университета 1909–2009. Т. 2. Саратов: Изд-во Сар. ун-та, 2009. С. 97); *Немов В.Н.*, доцент – работал на кафедре общей физики; *Голубков Петр Васильевич*, профессор – зав. кафедрой общей физики (1932–1969), декан физико-математического факультета (1933–1936, 1942–1944), проректор по научной работе (1938–1939, 1943–1946), ректор СГУ (1946–1950) (см. о нём: История Саратовского университета 1909–2009. Т. 2. Саратов: Изд-во Сар. ун-та, 2009. С. 17); *Хворостин Г.К.*, директор; *Чудаков Николай Григорьевич*, доцент – зав. кафедрой алгебры и теории чисел (1940–1962, 1972–1983); с 1962 по 1972 годы работал в Ленинградском отделении Математического института Академии наук (см. о нём: История Саратовского университета 1909–2009. Т. 2. Саратов: Изд-во Сар. ун-та, 2009. С. 61); *Павлючук Алексей Кондратьевич*, доцент – вся его жизнь связана с мехматом СГУ: в первой половине 1970-х работал на кафедре алгебры, преподавал высшую алгебру и основы численных методов – «матпрактикум»; *Остроумов Георгий Андреевич*, доцент – создатель электрогидродинамики, работал в СГУ на кафедре общей физики недолгое время (см. о нём, например, Википедия); *Калинин Венедикт Иванович*, доцент (см. о нём: Анищенко В.С. Профессор В.И.Калинин и университетское образование // Известия Саратовского университета. 2007. Т. 7. Сер. Физика, вып. 1. С. 58–64); *Жузе Владимир Пантелеймонович*, доцент (см. о нём, например, Википедия).

**Студенты.** *Тарасов Иван Степанович(?)* – жил в Энгельсе; *Сус Алексей Николаевич* – преподавал в СГУ на кафедре общей физике и кафедре физики в Саратовском мединституте; *Катаржина А.Н.*; *Селиверстов Борис Николаевич* – преподавал математику в техникумах Саратова; *Кирияшкина Зинаида Ивановна* – д.ф.-м.н., профессор, зав. кафедрой физики твердого тела (1945–1985) (см. о ней: История Саратовского университета 1909–2009. Т. 2. Саратов: Изд-во Сар. ун-та, 2009. С. 63); *Штепан В.Э.* – астроном (?); *Погорелая (Фалькович) Мария Дмитриевна* (1915–1989) – преподавала математику в вузах Саратова: с 1937 (1938?) по 1953 и в 1960-х в Институте механизации сельского хозяйства им. М.И. Калинина, в 1950-х в Автодорожном институте; *Фалькович Савелий Владимирович* (1911–1982) – д.ф.-м.н., профессор, зав. кафедрой аэро- и гидродинамики и теоретической механики (1949–1982), работал в СГУ (1936–1944, 1949–1982) и в 1944–1949 в Москве в Институте механики АН СССР и в ЦАГИ; *Раушенбах Т.Э.*; *Чудаков Иван Григорьевич* (брат Н.Г. Чудакова) – работал в СГУ на кафедре аэро- и гидродинамики и теоретической механики.

**Фотографии из семейного архива и комментарии к ним предоставил  
профессор СГУ Фалькович А.С.**



## Библиографический список

1. Саратовский университет 1909–1959. Саратов: Изд-во Саратов. Гос. Ун-та, 1959. 291 с.
2. *Артисевич В.А.* Яркая личность // Ленинский путь. Орган парткома, ректората, профкома и комитета ВЛКСМ СГУ им. Н.Г. Чернышевского. 1989. 13 апреля. С. 3.
3. *Семёнов В.Н.* Ректоры Саратовского университета: Факты жизни и деятельности. Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 1999. 304 с.
4. Дело академика Николая Николаевича Лузина. СПб.: Изд-во РХГИ, 1999. 311 с.
5. История Саратовского университета. 1909–2009. В 2 т. Аврус А.И., Гапоненков А.А., Данилов В.Н. Т. 1. 1909–1945. Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 2009. 295 с.
6. Государственный Архив Новейшей Истории Саратовской области (далее – ГАНИСО) Ф. 35. Оп. 1. Д. 161. 246 об.л.
7. *Гнеденко Б.* Александр Яковлевич Хинчин. К 100-летию со дня рождения выдающегося учёного и педагога // Квант. Научно-популярный физико-математический журнал Президиума РАН. 1994. № 6. С. 2–6.
8. *Форд Ч.* Великий перелом на математическом фронте (США) // Историко-математические исследования. РАН. Институт истории естествознания и техники им. С.И. Вавилова. Вторая серия. Вып. 3(38). М.: Янус-К, 1999. С. 74–92.
9. ГАНИСО. Ф. 35. Оп. 1. Д. 160. 215 об.л.
10. Ведомственный архив Саратовского государственного университета им. Н.Г. Чернышевского (далее – ВА СГУ). Личное дело № 11133 Хворостина Гавриила Кирилловича 08 мая 1935 – 25 сентября 1937 г. 12 л.
11. ВА СГУ. Личное дело Вагнера Виктора Владимировича. 89 л.
12. ГАНИСО. Ф. 35. Оп. 1. Д. 149. 121 об. л.
13. ВА СГУ. Приказы по университету с № 1 от 13/I–1936 по № 57 от 29/XII–1936. 155 л.
14. Николай Григорьевич Чудаков (1904–1986). Биобиблиографический указатель / Сост. Г.Я. Палагина. Саратов: ЗНБ СГУ, 2004. 22 с.
15. ГАНИСО. Ф. 35. Оп. 1. Д. 157. 2 об. л.
16. ГАНИСО. Ф. 35. Оп. 1. Д. 158. 66 л.
17. ВА СГУ. Приказы по университету с № 2 от 7/I–1935 по № 123 от 19/XII–1935 г. 153 л.
18. Материалы к Книге памяти Саратовской области. Архивное уголовное дело № ОФ-8729.

## References

1. Saratov University 1909-1959. Saratov: Saratov Univ. Press, 1959. 291 s. (in Russian)
2. Artisevich V. Yarkaya lichnost. *Leninskiy Put'*. Organ partkoma, rectorata, profkoma i komiteta VLKSM Saratovskogo Gosudarstvennogo Universiteta im. N.G. Chernyshevskogo. 1989. 13 apr. S. 3 (in Russian).
3. Semenov V.N. Rectory Saratovskogo Universiteta. Saratov: Saratov Univ. Press, 1999. 304 s. (in Russian).
4. Delo akademika Nikolaya Nikolaevicha Luzina. SPb.: RHGI, 1999. 311 s. (in Russian).
5. History of the Saratov University 1909–2009 (2 T). Avrus A.I., Gaponenkov A.A., Danilov V.N. T.1. 1909–1945. Saratov: Saratov Univ. Press, 2009. 295 s. (in Russian).
6. Gosudarstvennyi Arkhiv Noveishei Istorii Saratovskoi Oblasti. F. 35. Op. 1. D. 161. 246 ob. l. (in Russian).
7. Gnedenko B. Alexandr Yakovlevich Khinchin. *Kvant*. 1994. N. 6. S. 2–6 (in Russian).

8. Ford Ch. Velikiy perelom na matematicheskom fronte. *Historical and Mathematical Researches*. Russian Academy of Sciences. Institut Istorii Estestvoznaniya i Tekhniki imeni S.I. Vavilova. Seriya 2. Vyp. 3(38). M.: Yanus-K, 1999. S.74–92 (in Russian).
9. Gosudarstvennyi Arkhiv Noveishei Istorii Saratovskoi Oblasti. F. 35. Op. 1. D. 160. 215 ob. 1. (in Russian).
10. Arkhiv Saratovskogo gosudarstvennogo universiteta. Lichnoye delo № 11133 Hvorostina Gavriila Kirillovicha. 08.05.1935 – 25.09.1937. 12 l. (in Russian).
11. Arkhiv Saratovskogo gosudarstvennogo universiteta. Lichnoye delo Vagnera Victora Vladimirovicha. 89 l. (in Russian).
12. Gosudarstvennyi Arkhiv Noveishei Istorii Saratovskoi Oblasti. F. 35. Op. 1. D. 149. 121 ob. 1. (in Russian).
13. Arkhiv Saratovskogo gosudarstvennogo universiteta. Prikazy po universitety s № 1 ot 13/I–1936 po № 57 ot 29/XII–1936. 155 l. (in Russian).
14. Nikolai Grigor'evich Chudakov. *Biobibliographicheskii ukazatel'*. Saratov, 2004. 22 s. (in Russian).
15. Gosudarstvennyi Arkhiv Noveishei Istorii Saratovskoi Oblasti. F. 35. Op. 1. D. 157. 2 ob.l. (in Russian).
16. State Gosudarstvennyi Arkhiv Noveishei Istorii Saratovskoi Oblasti. F. 35. Op. 1. D. 158. 66 l. (in Russian).
17. Arkhiv Saratovskogo gosudarstvennogo universiteta. Prikazy po universitety s № 2 ot 7.01.1935 po № 123 ot 19.12.1935. 153 l. (in Russian).
18. Materialy k Knige pamyati Saratovskoi obl. Arkhivnoye ugovnoye delo № OF-8729 (in Russian).

*Поступила в редакцию 15.12.2015*

*Трубецкова Ирина Алексеевна* – родилась в Энгельсе (1998). Окончила Лицей прикладных наук (Саратов, 2016). Область интересов – история, литература, иностранные языки. Выступала с докладами по исторической проблематике и стала призером и победителем школьных региональных и муниципальных конференций (2013–2016), с докладом «Гёттингенский университет на Волге. Опыт восстановления исторической достоверности» заняла 2 место в региональном этапе Всероссийского конкурса им. В.И. Вернадского (2015). Победитель регионального и призер заключительного этапа Всероссийской олимпиады школьников по литературе (2016). В настоящее время – студентка первого курса факультета международной журналистики МГИМО.



410031, Саратов, улица Комсомольская, 39  
 Лицей прикладных наук  
 19454, Москва, проспект Вернадского, 76  
 ФГАОУ ВО «Московский государственный институт международных отношений (университет) Министерства иностранных дел Российской Федерации»  
 E-mail: irenetrubetskova@gmail.com

P.S. В дополнение к Библиографическому списку статьи рекомендуем следующую публикацию: Аврус А.И. «Я работаю и делаю дело...» (Гавриил Кириллович Хворостин. 1900–1938) // История и историческая память. 2015. Вып.12. С.281–299.

*Редакция*