

Журнал включен в «Перечень периодических научных и научно-технических изданий РФ, рекомендованных для публикации основных результатов диссертаций на соискание ученой степени доктора наук»

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Известия высших учебных заведений

ПРИКЛАДНАЯ НЕЛИНЕЙНАЯ ДИНАМИКА

научно-технический журнал

издается с 1993 года

Выходит 6 раз в год

Том 26, № 1, 2018, Саратов

СО Д Е Р Ж А Н И Е

От главного редактора. <i>Гуляев Ю. В.</i>	3
ПРИКЛАДНЫЕ ЗАДАЧИ НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ КОЛЕБАНИЙ И ВОЛН	
<i>Кульминский Д. Д., Пономаренко В. И., Прохоров М. Д.</i> Влияние инерционных свойств и запаздывания общего поля на коллективную динамику глобально связанных бистабильных осцилляторов с запаздыванием	4
<i>Пицик Е. Д., Горемыко М. В., Макаров В. В., Храмов А. Е.</i> Математическое моделирование сетей профессионального взаимодействия	21
<i>Кузнецов С. П., Тюрюкина Л. В.</i> Сложная динамика и хаос в электронном автогенераторе с насыщением, обеспечиваемым параметрическим распадом	33
<i>Шабунин А. В.</i> Мультистабильность бегущих волн в ансамбле гармонических генераторов с дальнедействующими связями	48
ДЕТЕРМИНИРОВАННЫЙ ХАОС	
<i>Кузнецов С. П.</i> Аттрактор Белых в отображении Заславского и его трансформация при сглаживании	64
<i>Журавлев М. О., Короновский А. А., Москаленко О. И., Храмов А. Е.</i> Статистические характеристики индуцированной шумом перемежаемости в мультистабильных системах	80
МЕТОДИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ ПО НЕЛИНЕЙНОЙ ДИНАМИКЕ	
<i>Аникин В. М., Инкин М. Г., Плеханов О. С.</i> Сохраняющие меру хаотические отображения областей в форме тел вращения	90
PERSONALIA	
Памяти В. С. Афраймовича (2.04.1945 – 21.02.2018)	104

C O N T E N T S

Editorial. <i>Gulyaev Yu. V.</i>	3
APPLIED PROBLEMS OF NONLINEAR OSCILLATION AND WAVE THEORY	
<i>Kulminskiy D. D., Ponomarenko V. I., Prokhorov M. D.</i> Influence of inertial properties and delay of the mean field on the collective dynamics of globally coupled bistable delayed-feedback oscillators.....	4
<i>Pitsik E. N., Goremyko M. V., Makarov V. V., Hramov A. E.</i> Mathematical modelling of the network of professional interactions	21
<i>Kuznetsov S. P., Turukina L. V.</i> Complex dynamics and chaos in electronic self-oscillator with saturation mechanism provided by parametric decay	33
<i>Shabunin A. V.</i> Multistability of traveling waves in an ensemble of harmonic oscillators with long-range couplings	48
DETERMINISTIC CHAOS	
<i>Kuznetsov S. P.</i> Belykh attractor in Zaslavsky map and its transformation under smoothing.....	64
<i>Zhuravlev M. O., Koronovskii A. A., Moskalenko O. I., Hramov A. E.</i> Statistical characteristics of noise-induced intermittency in multistable systems	80
METHODICAL PAPERS IN NONLINEAR DYNAMICS	
<i>Anikin V. M., Inkin M. G., Plekhanov O. S.</i> Preserving measure chaotic maps of domains in the form of rotation figures	90
PERSONALIA	
The memory of V. S. Afraimovich (2.04.1945 – 21.02.2018)	104

От главного редактора

Недавно мне попала в руки книга самого известного математика Великобритании Маркуса дю Сотоя «О том, чего мы не можем знать: Путешествие к рубежам знаний»*. Главы книги именуются «Рубежами». Для нас интересен «Рубеж первый», а в нем – история физика Роберта Мэя, который родился в 1938 году в Австралии и работал в области сверхпроводимости. Однако после того, как Мэй познакомился с движением социальной ответственности в науке, он стал заниматься математическим исследованием закономерностей динамики популяций живых существ. В знаменитой статье «Простые математические модели с чрезвычайно сложной динамикой», опубликованной в 1976 году в «нобелевском» журнале «Nature», он рассмотрел динамику простого дискретного уравнения для численности некой популяции в виде

$$x_{n+1} = rx_n(1 - x_n).$$

Здесь линейный член описывает скорость роста вида в условиях неограниченных ресурсов, а квадратичный – связан с внутривидовой конкуренцией и ограниченностью ресурсов. Исследование показало, что с ростом « r » численность популяции каждый раз удваивается, а затем за некоторым пороговым значением « r » динамика превращается из периодической в хаотическую. Прочитав далее Сотоя о реакции Мэя на полученный результат: «Перед его кабинетом в Сиднее была доска, на которой он повесил объявление, обещающее 10 австралийских долларов любому, кто сможет объяснить такое поведение системы. На доске он написал: “По-моему, полная неразбериха”».

Ответ получаем от американского математика Джеймса Йорка, который «...никогда раньше не сталкивался с таким удваивающимся поведением, но зато точно знал, что происходит на следующем участке». Там возникает хаос, который после дальнейшего увеличения « r » за точкой $r = 3.56995$ прерывается участками регулярного поведения. Так появилась не менее известная статья Йорка и Ли о том, что «период три» порождает хаос.

Еще одна цитата из Сотоя, который цитирует Мэя в параграфе «Политика хаоса»: «Не только в научных исследованиях, но и в мире повседневной политики и экономики было бы гораздо лучше, если бы большее количество людей понимало, что простые системы далеко не всегда обладают простыми динамическими свойствами».

Сегодня лорд Роберт Мэй, барон Оксфордский, воплощает свои убеждения, сочетая научную работу с активной политической деятельностью как член Палаты лордов. До этого он был консультантом консервативного Правительства Джона Мейджора, а потом – лейбористского Кабинета Тони Блэра.

В общем, книгу стоит читать: в ней много интересного. Не удержусь еще от одной цитаты, которая, может быть, интереснее всего для наших авторов:

«Мэй шутит, что его наиболее цитируемая работа – это не одна из резонансных статей, напечатанных в научных журналах, как «Nature», а театральная программка, которую он написал к первой постановке пьесы Стоппарда* в лондонском Национальном театре. “Как бы в насмешку над всеми этими индексами цитирования как критериями значимости научного исследования”».

Научный руководитель ИРЭ РАН,
академик РАН

Ю.В. Гуляев

*М.: Колибри, Азбука–Аттикус, 2017, 560 с.

*Имеется в виду пьеса Тома Стоппарда «Аркадия».



УДК 537.86

ВЛИЯНИЕ ИНЕРЦИОННЫХ СВОЙСТВ И ЗАПАЗДЫВАНИЯ ОБЩЕГО ПОЛЯ НА КОЛЛЕКТИВНУЮ ДИНАМИКУ ГЛОБАЛЬНО СВЯЗАННЫХ БИСТАБИЛЬНЫХ ОСЦИЛЛЯТОРОВ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

Д. Д. Кульминский^{1,2}, В. И. Пономаренко^{1,2}, М. Д. Прохоров¹

¹Саратовский филиал Института радиотехники и электроники
имени В.А. Котельникова РАН
Россия, 410019 Саратов, ул. Зелёная, 38

²Саратовский национальный исследовательский государственный университет
Россия, 410012 Саратов, ул. Астраханская, 83
E-mail: kulminskydd@gmail.com, ponomarenkovi@gmail.com,
mdprokhorov@yandex.ru

Поступила в редакцию 16.08.2017, после доработки 27.10.2017

Исследованы особенности коллективной динамики осцилляторов в ансамбле идентичных бистабильных систем с запаздывающей обратной связью, глобально связанных между собой через общее поле. Такие ансамбли связанных осцилляторов существуют в объектах живой и неживой природы, включая физические, химические и биологические системы. Рассмотрено влияние инерционных свойств и запаздывания общего поля на коллективную динамику осцилляторов. Показано, что разнообразие колебательных режимов в ансамбле обусловлено тем, что бистабильные состояния парциальных элементов имеют существенно различающиеся основные частоты колебаний. При соответствующем выборе параметров общего поля это позволяет обеспечить разную величину фазового сдвига сигнала общего поля для осцилляторов, находящихся в различных колебательных режимах. Показано, что при определенном задании начальных условий в исследуемом ансамбле любого числа элементов формируется два кластера, каждый из которых в зависимости от величины фазового сдвига сигнала общего поля может демонстрировать как синхронное, так и несинхронное поведение входящих в него элементов. В случае, когда связь оказывается притягивающей для элементов одного кластера и отталкивающей для элементов другого кластера, в ансамбле возникает состояние «химера», при котором в ансамбле одновременно сосуществуют кластер с синхронным и кластер с несинхронным поведением элементов. Полученные результаты могут оказаться востребованными при решении задачи управления колебательными режимами в сети глобально связанных осцилляторов в ситуациях, когда имеется возможность изменять параметры общего поля.

Ключевые слова: ансамбли связанных осцилляторов, кластеризация, синхронизация, системы с запаздыванием.

DOI: 10.18500/0869-6632-2018-26-1-4-20

Образец цитирования: Кульминский Д.Д., Пономаренко В.И., Прохоров М.Д. Влияние инерционных свойств и запаздывания общего поля на коллективную динамику глобально связанных бистабильных осцилляторов с запаздыванием // Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2018. Т. 26, № 1. С. 4–20. DOI: 10.18500/0869-6632-2018-26-1-4-20

INFLUENCE OF INERTIAL PROPERTIES AND DELAY OF THE MEAN FIELD ON THE COLLECTIVE DYNAMICS OF GLOBALLY COUPLED BISTABLE DELAYED-FEEDBACK OSCILLATORS

D. D. Kulminskiy^{1,2}, V. I. Ponomarenko^{1,2}, M. D. Prokhorov¹

¹ Kotelnikov Institute of Radio Engineering and Electronics
of Russian Academy of Sciences, Saratov Branch
38, Zelyonaya, 410019 Saratov, Russia

²Saratov State University
83, Astrakhanskaya, 410012 Saratov, Russia
E-mail: kulminskydd@gmail.com, ponomarenkovi@gmail.com,
mdprokhorov@yandex.ru

Received 16.08.2017, revised 27.10.2017

The features of collective dynamics of oscillators are studied in an ensemble of identical bistable time-delay systems globally coupled via the mean field. The influence of inertial properties and delay of the mean field on the collective dynamics of oscillators is considered. It is shown that a variety of oscillation regimes in the ensemble is caused by the presence of bistable states with considerably different basic frequencies in coupled oscillators. Under the corresponding choice of the mean field parameters, it allows us to ensure different phase shifts of the mean field signal for oscillators in different regimes of oscillations. It is shown that under a specific choice of initial conditions, two clusters are formed in the ensemble. Depending on the phase shift of the mean field, each of these clusters can contain either synchronous or asynchronous oscillators. If the coupling is attractive for oscillators in one cluster and repulsive for oscillators in another cluster, a chimera state takes place in the ensemble, in which a cluster with synchronized oscillators coexists with a cluster with non-synchronized oscillators. The obtained results can be useful for solving the problem of controlling the oscillation regimes in the networks of globally coupled oscillators in situations, where it is possible to vary the mean field parameters.

Key words: ensembles of coupled oscillators, clusterization, synchronization, time-delay systems.

DOI: 10.18500/0869-6632-2018-26-1-4-20

References: Kulminskiy D.D., Ponomarenko V.I., Prokhorov M.D. Influence of inertial properties and delay of the mean field on the collective dynamics of globally coupled bistable delayed-feedback oscillators. *Izvestiya VUZ, Applied Nonlinear Dynamics*, 2018, vol. 26, iss. 1, pp. 4–20. DOI: 10.18500/0869-6632-2018-26-1-4-20

Введение

Исследование пространственно-временной динамики ансамблей осцилляторов давно привлекает внимание многих авторов [1, 2]. При ее изучении были обнаружены многие нелинейные явления, включая образование различных структур, кластеризацию и синхронизацию. В гетерогенных ансамблях осцилляторов были найдены режимы, при которых осцилляторы с близкими частотами синхронизируются между собой, а осцилляторы с существенно отличающимися частотами совершают несинхронные колебания, что приводит к одновременному существованию в ансамбле кластеров с синхронным и несинхронным поведением осцилляторов. Существование таких режимов в ансамблях, состоящих из идентичных осцилляторов, считалось невозможным. Лишь недавно было показано, что и в ансамблях идентичных осцилляторов возможно состояние, при котором часть элементов ансамбля совер-

шает синхронные колебания, а другая часть элементов колеблется несинхронно [3]. Такое состояние было названо состоянием «химера» [4].

Состояния «химера» были сначала обнаружены в ансамблях идентичных фазовых осцилляторов со слабой нелокальной связью элементов [4]. Потом было показано, что состояния «химера» можно наблюдать и в ансамблях осцилляторов с локальной связью (только с ближайшими соседями) [5] и в ансамблях осцилляторов с глобальной связью [6]. Помимо ансамблей фазовых осцилляторов состояния «химера» были обнаружены в ансамблях, состоящих из других осцилляторов [7–9], и в ансамблях связанных отображений [10]. Теоретическому, численному и экспериментальному исследованию состояний «химера» в последние годы было посвящено большое количество публикаций [11–19].

В настоящей работе исследованы особенности коллективной динамики, в том числе состояния «химера», в ансамбле идентичных бистабильных систем с запаздывающей обратной связью, а также в случае глобально связанных между собой через общее поле. Глобальная связь осцилляторов, приводящая к их синхронизации, является достаточно распространенной в многоэлементных системах различной природы, включая группы насекомых [20], живые клетки [21], аплодисменты зрителей в больших аудиториях [22], пешеходы на мосту [23], электрохимические осцилляторы [24], а запаздывание присуще многим объектам и процессам в природе [25]. Рассмотрены различные способы формирования общего поля, осуществляющего глобальную связь осцилляторов, и исследовано влияние инерционных свойств и запаздывания общего поля на коллективную динамику осцилляторов.

1. Колебательные режимы в ансамбле бистабильных систем с запаздыванием, связанных через общее поле

Рассмотрим ансамбль, который состоит из идентичных систем с задержкой, описываемых в отсутствие связи дифференциальным уравнением с запаздыванием

$$\varepsilon \dot{x}(t) = -x(t) + f(x(t-\tau)), \quad (1)$$

где ε – параметр инерционности, τ – время запаздывания, f – нелинейная функция. В общем случае уравнение (1) является математической моделью осциллятора, представляемого кольцом из трех идеализированных элементов: задержки, нелинейного и инерционного (рис. 1).

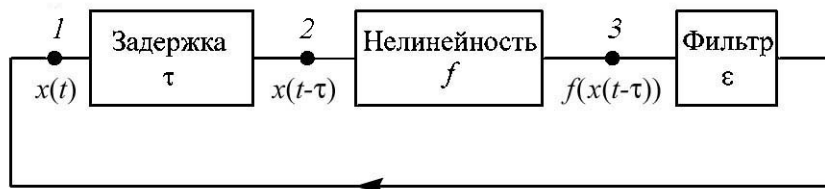


Рис. 1. Блок-схема кольцевой системы с запаздывающей обратной связью. Цифрами 1–3 отмечены точки, в которые можно подать внешнее воздействие

Fig. 1. Block diagram of a ring system with time-delayed feedback. Numerals 1–3 denote points in which an external signal can be fed into the system

Пусть нелинейный элемент осциллятора описывается кубической нелинейной функцией

$$f(x) = a + b(x - d) - c(x - d)^3. \quad (2)$$

При такой нелинейности, в зависимости от начальных условий осциллятор может совершать два вида колебаний, демонстрируя бистабильность. Эти колебания происходят вблизи неустойчивых неподвижных точек (рис. 2), которые обозначены буквами А и В. Вблизи точки А наблюдаются периодические колебания на основной моде, частота которых близка к величине $\nu_1 = 1/(2\tau)$. Около точки В реализуются хаотические колебания на третьей гармонике основной моды, основная частота которых близка к величине $\nu_2 = 3/(2\tau)$. Характерный вид временных реализаций периодических и хаотических колебаний осциллятора в области бистабильности будет рассмотрен ниже.

Качественно похожие режимы периодических и хаотических колебаний наблюдаются в системах с запаздыванием (1), имеющих синусоидальную нелинейность. Подробное исследование колебательных режимов, соответствующих фундаментальному решению и решениям на высших гармониках для уравнения (1) с синусной функцией f , а также вычисление периодов (частот), возникающих в системе колебаний, проведено в [26].

Осцилляторы с запаздыванием (1) свяжем между собой через общее поле $G(t)$, которое действует на каждый элемент ансамбля и осуществляет глобальную связь между элементами. Сигнал $G(t)$ можно подать в различные точки кольцевого осциллятора с запаздыванием [26], обозначенные на рис. 1 цифрами 1, 2 и 3. При этом динамика каждого из осцилляторов ансамбля описывается одним из следующих уравнений:

$$\varepsilon \dot{x}_i(t) = -x_i(t) + f(x_i(t - \tau) + kG(t - \tau)), \quad (3)$$

$$\varepsilon \dot{x}_i(t) = -x_i(t) + f(x_i(t - \tau) + kG(t)), \quad (4)$$

$$\varepsilon \dot{x}_i(t) = -x_i(t) + f(x_i(t - \tau) + kG(t)), \quad (5)$$

где $i = 1, \dots, N$, N – число элементов в ансамбле, k – коэффициент связи. Осциллятор описывается: уравнением (3), если сигнал $G(t)$ воздействует на систему с запаздыванием в точке 1; уравнением (4), если $G(t)$ подается в точке 2; уравнением (5), если $G(t)$ подается в точке 3.

1. В наиболее простом случае общее поле формируется путем сложения сигналов $x_i(t)$ всех осцилляторов и нормировки суммарного сигнала на N

$$G(t) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i(t). \quad (6)$$

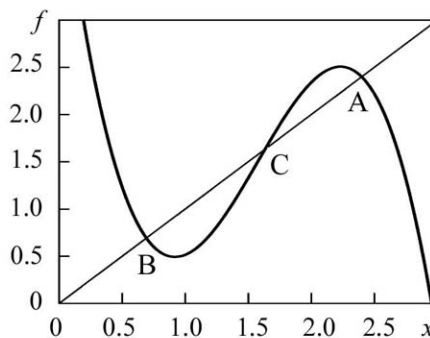


Рис. 2. График кубической функции (2) при $a = 1.5$, $b = 2.3$, $c = 1.78$, $d = 1.57$. Буквами А, В и С обозначены неустойчивые неподвижные точки

Fig. 2. Plot of cubic function (2) at $a = 1.5$, $b = 2.3$, $c = 1.78$ and $d = 1.57$. A, B, and C are unstable fixed points

Вид колебательного режима в исследуемом ансамбле определяется выбором начальных условий в связанных осцилляторах. Если начальные условия задать таким образом, что в одних осцилляторах колебания реализуются на основной моде, а в других осцилляторах колебания реализуются на третьей гармонике основной моды, то все элементы ансамбля окажутся разделены на два кластера, отличающихся частотой колебаний осцилляторов. Поведение элементов внутри каждого кластера определяется величиной фазового сдвига $\Delta\varphi$ сигнала общего поля $G(t)$ относительно $x_i(t)$: при $|\Delta\varphi| < \pi/2$ связь через общее поле является притягивающей и элементы ансамбля синхронизируются между собой после переходного процесса; при $\pi/2 < |\Delta\varphi| < 3\pi/2$ связь является отталкивающей и элементы колеблются несинхронно [6].

Пусть сигнал общего поля $G(t)$ воздействует на осцилляторы в точке I (см. рис. 1), действуя на переменную $x_i(t)$. (Далее, если это не оговорено особо, общее поле также будет воздействовать на осциллятор в точке I .) Если общее поле имеет вид (6), то фазовый сдвиг $\Delta\varphi$ сигнала $G(t)$ относительно $x_i(t)$ будет отсутствовать и наблюдается синхронизация элементов как в первом, так и во втором кластерах.

В общем случае общее поле может формироваться сложным образом и описываться уравнением более сложного вида, чем уравнение (6). Например, среда, через которую связаны осцилляторы, может обладать инерционными свойствами или иметь собственную задержку, связанную с конечной скоростью распространения и обработки сигналов. Сложный вид сигнала общего поля может привести к большему разнообразию колебательных режимов в ансамбле связанных осцилляторов и заметно обогатить его динамику.

2. Рассмотрим сначала влияние инерционных свойств общего поля на коллективную динамику связанных осцилляторов, описываемых уравнением (3). Предположим, что инерционные свойства общего поля обусловлены линейной фильтрацией суммарного сигнала (6) низкочастотным фильтром первого порядка и общее поле $G(t)$ описывается уравнением следующего вида:

$$\gamma\dot{G}(t) + G(t) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i(t), \quad (7)$$

где $\gamma = 1/f_F$ – постоянная времени фильтра, а f_F – частота среза фильтра. Поскольку в формировании общего поля участвуют все осцилляторы ансамбля, в сигнале (6) имеются две основные составляющие с частотами, близкими ν_1 и ν_2 . При прохождении через линейный низкочастотный фильтр первого порядка каждая из этих частотных составляющих претерпевает фазовый сдвиг

$$\Delta\varphi = -\arctan(2\pi\nu\gamma), \quad (8)$$

величина которого зависит от частоты ν . В уравнении (8) для низкочастотной составляющей сигнала $G(t)$ имеем $\nu = \nu_1$ и $\Delta\varphi = \Delta\varphi_1$, а для высокочастотной составляющей – $\nu = \nu_2$ и $\Delta\varphi = \Delta\varphi_2$. Так как для фазового сдвига $\Delta\varphi$, определяемого уравнением (8), всегда выполняется условие $|\Delta\varphi| < \pi/2$, то связь через общее поле является притягивающей для элементов обоих кластеров. В этом случае осцилляторы синхронизируются внутри первого и внутри второго кластера, также как в рассмотренном выше случае отсутствия у общего поля инерционных свойств (см. п. 1).

3. Рассмотрим более сложную ситуацию, при которой инерционные свойства общего поля обусловлены линейной фильтрацией суммарного сигнала (6) двумя последовательными низкочастотными фильтрами первого порядка и общее поле $G(t)$ описывается уравнением следующего вида:

$$\gamma_1\gamma_2\ddot{G}(t) + (\gamma_1 + \gamma_2)\dot{G}(t) + G(t) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i(t), \quad (9)$$

где $\gamma_1 = 1/f_{F1}$ и $\gamma_2 = 1/f_{F2}$ – постоянные времени фильтров, а f_{F1} и f_{F2} – частоты среза первого и второго фильтров, соответственно. При такой фильтрации частотные составляющие сигнала (6) претерпевают фазовый сдвиг

$$\Delta\varphi = -\arctan(2\pi\nu\gamma_1) - \arctan(2\pi\nu\gamma_2), \quad (10)$$

величина которого зависит от частоты ν . В уравнении (10) первый член определяет фазовый сдвиг, вносимый первым фильтром, а второй член определяет фазовый сдвиг, вносимый вторым фильтром. Если $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma$, то уравнение (9) можно переписать в виде

$$\gamma^2\ddot{G}(t) + 2\gamma\dot{G}(t) + G(t) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i(t). \quad (11)$$

3.а. В случае воздействия общего поля на осцилляторы в точке 1 его составляющие с частотами, близкими ν_1 и ν_2 , претерпевают соответственно фазовые сдвиги $\Delta\varphi_1$ и $\Delta\varphi_2$

$$\Delta\varphi_1 = -2\arctan(2\pi\nu_1\gamma), \quad (12)$$

$$\Delta\varphi_2 = -2\arctan(2\pi\nu_2\gamma). \quad (13)$$

Для фазовых сдвигов (12) и (13) всегда выполняется условие $|\Delta\varphi_{1,2}| < \pi$, при этом, если $\pi/2 < |\Delta\varphi_{1,2}| < \pi$, то связь через общее поле является отталкивающей и элементы кластера колеблются несинхронно. На рис. 3, а построены зависимости $\Delta\varphi_1(\gamma)$ и $\Delta\varphi_2(\gamma)$ при $\tau = 100$ ($\nu_1 = 1/200$ и $\nu_2 = 3/200$). Так как $\nu_1 < \nu_2$, фазовый сдвиг (12) меньше по абсолютной величине, чем фазовый сдвиг (13). В зависимости от величины γ возможны три различные ситуации: 1) $|\Delta\varphi_1| < \pi/2$, $|\Delta\varphi_2| < \pi/2$; 2) $|\Delta\varphi_1| < \pi/2$, $\pi/2 \leq |\Delta\varphi_2| < \pi$; 3) $\pi/2 \leq |\Delta\varphi_1| < \pi$, $\pi/2 \leq |\Delta\varphi_2| < \pi$.

Области, соответствующие этим трем ситуациям, отмечены на рис. 3, а как SS, CS1 и AS, соответственно. При значениях γ из области SS имеет место синхронизация осцилляторов в первом кластере и синхронизация осцилляторов во втором кластере. В области CS1 осцилляторы в первом кластере, совершающие колебания на основной моде, демонстрируют синхронное поведение, а осцилляторы во втором кластере, совершающие колебаний на третьей гармонике основной моды, колеблются несинхронно. Такая ситуация соответствует состоянию «химера». В области AS колебания осцилляторов в обоих кластерах являются несинхронными.

3.б. В случае, когда сигнал $G(t)$ воздействует на осцилляторы в точке 2 (см. рис. 1), он действует на переменную $x_i(t - \tau)$. При таком воздействии имеется

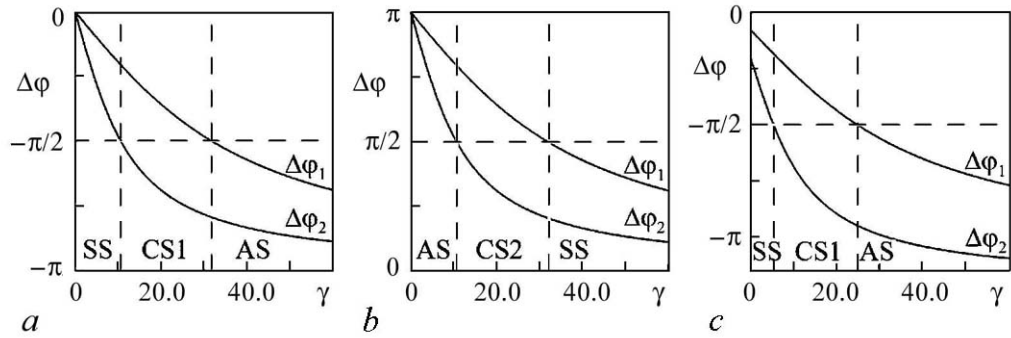


Рис. 3. Зависимости $\Delta\varphi_1(\gamma)$ и $\Delta\varphi_2(\gamma)$, описываемые уравнениями (12) и (13) (a), (14) и (15) (b), (16) и (17) (c) при $\nu_1 = 1/200$ и $\nu_2 = 3/200$. Здесь: SS – области с синхронным поведением осцилляторов внутри кластеров; AS – области с несинхронным поведением осцилляторов внутри кластеров; CS1 и CS2 – области существования состояний «химера»

Fig. 3. Dependencies $\Delta\varphi_1(\gamma)$ and $\Delta\varphi_2(\gamma)$, described by Eqs. (12) and (13) (a), Eqs. (14) and (15) (b), Eqs. (16) and (17) (c) at $\nu_1 = 1/200$ and $\nu_2 = 3/200$. SS are the regions of synchronous behavior of oscillators in both clusters. AS are the regions of non-synchronous behavior of oscillators in both clusters. CS1 and CS2 are the regions of chimera states

фазовый сдвиг сигнала $G(t)$ относительно $x_i(t)$. Этот сдвиг равен π для колебаний на основной моде и 3π для колебаний на третьей гармонике основной моды. Его необходимо учитывать при вычислении общего фазового сдвига в присутствии инерционности общего поля. Поскольку фаза является 2π -периодической функцией, уравнения (12) и (13) в случае воздействия $G(t)$ на $x_i(t - \tau)$ принимают следующий вид:

$$\Delta\varphi_1 = -2 \arctan(2\pi\nu_1\gamma) + \pi, \quad (14)$$

$$\Delta\varphi_2 = -2 \arctan(2\pi\nu_2\gamma) + \pi. \quad (15)$$

На рис. 3, b построены зависимости $\Delta\varphi_1(\gamma)$ и $\Delta\varphi_2(\gamma)$, описываемые уравнениями (14) и (15), при $\nu_1 = 1/200$ и $\nu_2 = 3/200$. В зависимости от величины γ возможны три различные ситуации: 1) $|\Delta\varphi_1| < \pi/2$, $|\Delta\varphi_2| < \pi/2$; 2) $\pi/2 \leq |\Delta\varphi_1| < \pi$, $|\Delta\varphi_2| < \pi/2$; 3) $\pi/2 \leq |\Delta\varphi_1| < \pi$, $\pi/2 \leq |\Delta\varphi_2| < \pi$.

Области, соответствующие этим трем ситуациям, отмечены на рис. 3, b как SS, CS2 и AS. При значениях γ из области CS2 существует состояние «химера». Однако, в отличие от состояния «химера», существующего в области CS1 на рис. 3, a, осцилляторы в первом кластере, совершающие колебания на основной моде, демонстрируют несинхронное поведение, а осцилляторы во втором кластере, совершающие колебаний на третьей гармонике основной моды, колеблются синхронно.

3.в. В случае, когда сигнал $G(t)$ воздействует на осцилляторы в точке 3 (см. рис. 1), фазовые сдвиги $\Delta\varphi_1$ и $\Delta\varphi_2$ описываются следующими уравнениями:

$$\Delta\varphi_1 = -2 \arctan(2\pi\nu_1\gamma) - \arctan(2\pi\nu_1\varepsilon), \quad (16)$$

$$\Delta\varphi_2 = -2 \arctan(2\pi\nu_2\gamma) - \arctan(2\pi\nu_2\varepsilon). \quad (17)$$

На рис. 3, *c* построены зависимости $\Delta\varphi_1(\gamma)$ и $\Delta\varphi_2(\gamma)$, описываемые уравнениями (16) и (17), при $\nu_1 = 1/200$, $\nu_2 = 3/200$ и $\varepsilon = 8$. Также как на рис. 3, *a*, имеются три области, обозначенные на рис. 3, *c* как SS, CS1 и AS, в которых реализуются синхронный режим, состояние «химера» и несинхронный режим, соответственно.

4. Рассмотрим теперь влияние запаздывания в общем поле на коллективную динамику связанных осцилляторов, описываемых уравнением (3). В случае, когда сигнал воздействует на осцилляторы в точке *l* общее поле имеет вид

$$G(t) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i(t - \tau_m), \quad (18)$$

где τ_m – собственное время запаздывания общего поля. Фазовые сдвиги $\Delta\varphi_1$ и $\Delta\varphi_2$ для частотных составляющих сигнала $G(t)$, соответствующих колебаниям на основной моде и на третьей гармонике основной моды, соответственно, линейно зависят от τ_m

$$\Delta\varphi_1 = -2\pi\nu_1\tau_m, \Delta\varphi_2 = -2\pi\nu_2\tau_m. \quad (19)$$

На рис. 4 построены зависимости $\Delta\varphi_1(\tau_m)$ и $\Delta\varphi_2(\tau_m)$ при $\nu_1 = 1/200$ и $\nu_2 = 3/200$. В зависимости от величины τ_m существует четыре области, обозначенные на рис. 4 как SS, CS1, CS2 и AS. При наличии запаздывания в общем поле в ансамбле могут существовать два разных состояния «химера» (одно в области CS1, а другое в области CS2) в отличие от рассмотренного выше (см. п. 3.а) случая инерционности общего поля, при котором в ансамбле может существовать только одно состояние «химера». Отметим, что для осцилляторов во втором кластере, совершающих колебаний на третьей гармонике основной моды, связь является отталкивающей при $\pi/2 < |\Delta\varphi_2| < 3\pi/2$ и притягивающей при $3\pi/2 < |\Delta\varphi_2| < 5\pi/2$. Поскольку фаза является 2π -периодической функцией, последнее условие эквивалентно условию $|\Delta\varphi_2| < \pi/2$.

Таким образом, коллективная динамика осцилляторов ансамбля зависит от инерционных свойств и запаздывания общего поля, через которое они связаны. Если имеется возможность изменять параметры общего поля, то можно управлять поведением осцилляторов внутри кластеров, в том числе, контролируя состояния «химера». В общем случае общее поле может обладать одновременно и инерционными свойствами и запаздыванием, но в данной работе мы такую ситуацию не рассматриваем.

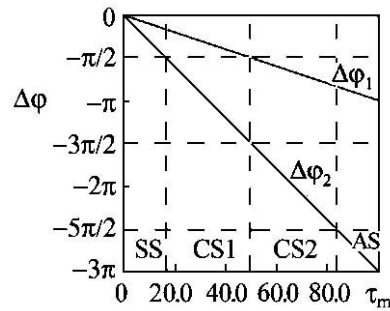


Рис. 4. Зависимости $\Delta\varphi_1(\tau_m)$ и $\Delta\varphi_2(\tau_m)$ при $\nu_1=1/200$ и $\nu_2 = 3/200$. SS – области с синхронным поведением осцилляторов внутри кластеров. AS – области с несинхронным поведением осцилляторов внутри кластеров. CS1 и CS2 – области существования состояний «химера»

Fig. 4. Dependencies $\Delta\varphi_1(\tau_m)$ and $\Delta\varphi_2(\tau_m)$ at $\nu_1=1/200$ and $\nu_2 = 3/200$. SS are the regions of synchronous behavior of oscillators in both clusters. AS are the regions of non-synchronous behavior of oscillators in both clusters. CS1 and CS2 are the regions of chimera states

2. Численное моделирование коллективной динамики осцилляторов в ансамбле

В зависимости от выбора начальных условий осцилляторы могут совершать периодические колебания на основной моде с частотой вблизи ν_1 , либо хаотические колебания на третьей гармонике основной моды с основной частотой вблизи $\nu_2 = 3\nu_1$. Начальные условия можно задать как постоянную величину на интервале времени, равном времени запаздывания осцилляторов. В этом случае число p периодических осцилляторов и число n хаотических осцилляторов в ансамбле полностью определяется выбором начальных условий. Например, при задании начальных условий, равными 0.5, в осцилляторе устанавливаются хаотические колебания вблизи неподвижной точки В (см. рис. 2), а при задании начальных условий, равными 2, в осцилляторе устанавливаются периодические колебания вблизи неподвижной точки А.

Для ансамбля, состоящего из N бистабильных осцилляторов, в зависимости от начальных условий возможно $N + 1$ различных ситуаций, при которых n и p принимают значения от 0 до N , причем $n + p = N$. При $p = 0$ и $p = N$ в ансамбле формируется лишь один кластер, состоящий из хаотических или периодических осцилляторов, соответственно. В зависимости от величины фазового сдвига между сигналами $G(t)$ и $x_i(t)$ осцилляторы внутри такого кластера демонстрируют либо синхронное, либо асинхронное поведение. При $p = 1, \dots, N - 1$ в ансамбле имеются как периодические, так и хаотические осцилляторы. Однако при $p = 1$ и $p = N - 1$ имеется лишь один периодический или один хаотический осциллятор, соответственно, для которого понятие синхронной или асинхронной коллективной динамики лишено смысла. Поэтому, при $p = 1$ и $p = N - 1$ состояния «химера» не наблюдаются. Как было недавно показано в работах [18, 28, 29], состояния «химера» могут существовать и в малых ансамблях связанных осцилляторов. Для наблюдения состояний «химера» достаточно четырех идентичных связанных осцилляторов [18, 28, 29].

Нами было проведено численное исследование коллективной динамики ансамбля из $N = 8$ бистабильных осцилляторов с запаздыванием вида (3) при $\tau = 100$ и $\varepsilon = 8$, имеющих нелинейную функцию (2) с теми же значениями параметров, что на рис. 2, и связанных между собой через общее поле $G(t)$ вида (9) при $k = 0.01$. Состояние «химера» наблюдалось при $p = 2, \dots, 6$.

Начальные условия в осцилляторах можно задать случайным образом. Для случайного задания начальных условий в осцилляторах действуем на каждый из них независимым равномерным шумом, значения которого принадлежат отрезку $[0.7, 2.5]$. При таком шуме начальные условия могут оказаться в бассейне притяжения как периодического, так и хаотического аттрактора. После отключения шума мы имеем случайную комбинацию колебательных режимов в осцилляторах ансамбля. Часть осцилляторов оказывается в периодическом режиме, а другая часть в хаотическом режиме.

Нами рассмотрен случай, при котором четыре осциллятора совершают периодические колебания на основной моде с частотой вблизи ν_1 , а четыре других осциллятора совершают хаотические колебания на третьей гармонике основной моды с основной частотой вблизи $\nu_2 = 3\nu_1$.

Фрагменты временных реализаций колебаний динамической переменной $x_i(t)$ во всех восьми связанных осцилляторах показаны на рис. 5 при различных значениях фазовых сдвигов $\Delta\varphi_1$ и $\Delta\varphi_2$. В верхней части рисунков показаны реализации периодических колебаний осцилляторов, а в нижней части рисунков показаны реализации хаотических колебаний осцилляторов.

На рис. 5, *a* показан случай, когда осцилляторы, совершающие периодические колебания, полностью синхронны, а осцилляторы, совершающие хаотические колебания, находятся в режиме фазовой синхронизации, при которой они могут иметь разные амплитуды колебаний. Рис. 5, *b* соответствует состоянию «химера», при котором периодические осцилляторы синхронны между собой, а хаотические осцилляторы совершают несинхронные колебания. Так как осцилляторы абсолютно идентичны, временные реализации всех периодических осцилляторов на рис. 5, *a*, *b* полностью совпадают и неразличимы между собой. На рис. 5, *c* колебания как периодических, так и хаотических осцилляторов несинхронны. Качественно похожие результаты были получены при экспериментальном исследовании ансамбля бистабильных электронных автогенераторов с запаздыванием, связанных через общее поле [30].

На рис. 6 приведены пространственно-временные диаграммы колебаний $x_i(t)$ в каждом из восьми осцилляторов. Осцилляторы, совершающие периодические колебания, обозначены номерами $i = 1..4$, а осцилляторы, совершающие хаотические колебания, обозначены номерами $i = 5..8$. На рис. 6, *a* осцилляторы $i = 1..4$ демонстрируют полную синхронизацию, а осцилляторы $i = 5..8$ находятся в режиме фазовой синхронизации, при которой амплитуда колебаний в осцилляторах может отличаться. Рис. 6, *b* иллюстрирует состояние «химера», при котором периодические осцилляторы совершают синхронные колебания, а хаотические осцилля-

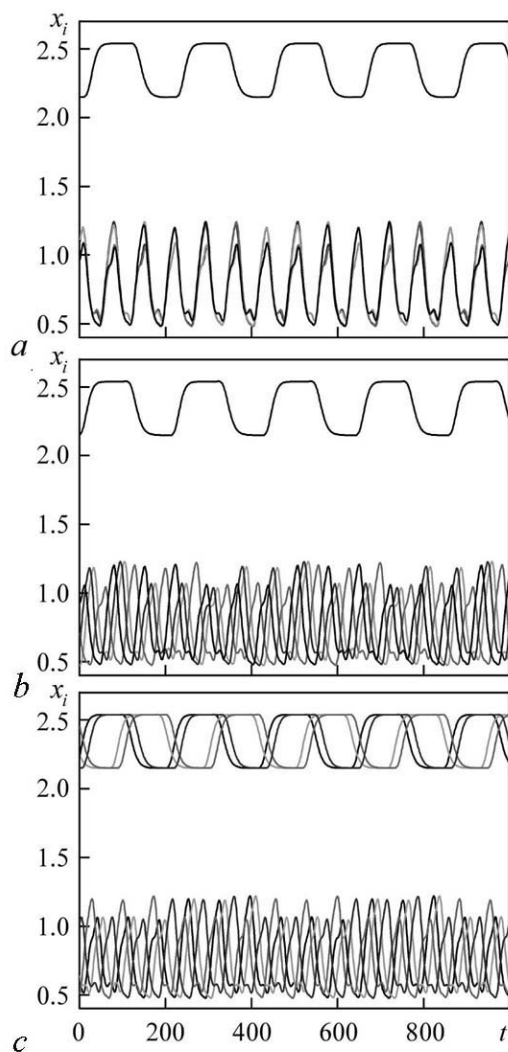


Рис. 5. Временные реализации колебаний связанных осцилляторов (3) при $|\Delta\varphi_1| = 0.04\pi$, $|\Delta\varphi_2| = 0.12\pi$ (*a*), $|\Delta\varphi_1| = 0.36\pi$, $|\Delta\varphi_2| = 0.69\pi$ (*b*) и $|\Delta\varphi_1| = 0.64\pi$, $|\Delta\varphi_2| = 0.87\pi$ (*c*)

Fig. 5. Time series of oscillations in coupled oscillators (3) at $|\Delta\varphi_1| = 0.04\pi$ and $|\Delta\varphi_2| = 0.12\pi$ (*a*), $|\Delta\varphi_1| = 0.36\pi$ and $|\Delta\varphi_2| = 0.69\pi$ (*b*) and $|\Delta\varphi_1| = 0.64\pi$ and $|\Delta\varphi_2| = 0.87\pi$ (*c*)

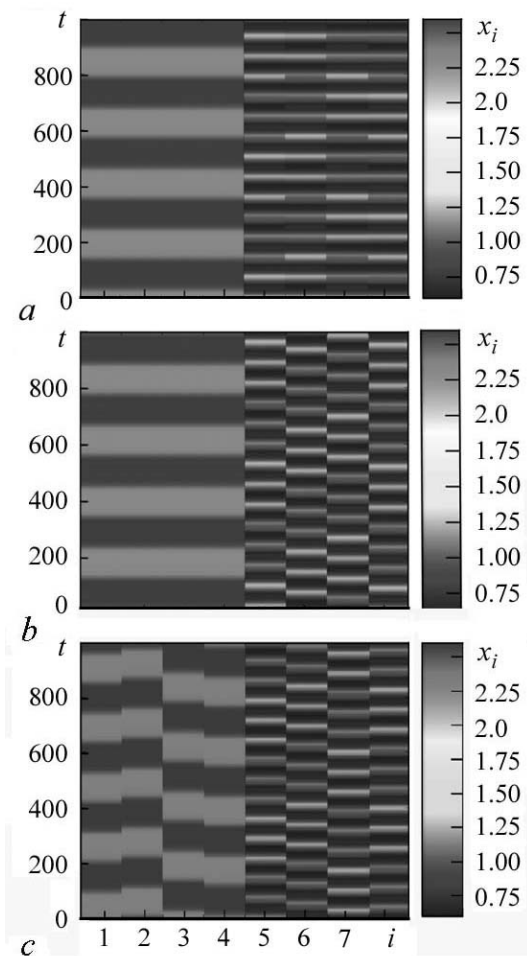


Рис. 6. Пространственно-временные диаграммы колебаний динамической переменной $x_i(t)$ связанных осцилляторов (3) при $|\Delta\varphi_1| = 0.04\pi$, $|\Delta\varphi_2| = 0.12\pi$ (a), $|\Delta\varphi_1| = 0.36\pi$, $|\Delta\varphi_2| = 0.69\pi$ (b) и $|\Delta\varphi_1| = 0.64\pi$, $|\Delta\varphi_2| = 0.87\pi$ (c)

Fig. 6. Space-time plots of oscillations of dynamical variable $x_i(t)$ in coupled oscillators (3) at $|\Delta\varphi_1| = 0.04\pi$ and $|\Delta\varphi_2| = 0.12\pi$ (a), $|\Delta\varphi_1| = 0.36\pi$ and $|\Delta\varphi_2| = 0.69\pi$ (b) and $|\Delta\varphi_1| = 0.64\pi$ and $|\Delta\varphi_2| = 0.87\pi$ (c)

построена пространственно-временная диаграмма колебаний $x_i(t)$ в каждом из восьми осцилляторов. Отметим, что границы существования различных колебательных режимов в численном эксперименте хорошо согласуются с границами областей, построенными на рис. 3.

Наконец, проиллюстрируем коллективную динамику связанных осцилляторов, описываемых уравнением (3), при наличии запаздывания в общем поле, имеющем вид (18). В полном соответствии с результатами, приведенными в разделе 1, в таком ансамбле можно наблюдать четыре разных колебательных режима. Для каждого из

торы колеблются несинхронно, при этом отличия амплитуды их колебаний более заметны, чем на рис. 6, a. Рис. 6, c иллюстрирует ситуацию, при которой и периодические и хаотические осцилляторы совершают несинхронные колебания.

Результаты, похожие на результаты, представленные на рис. 5 и 6, были получены также и для ансамбля, состоящего из осцилляторов с запаздыванием вида (5), связанных между собой через общее поле вида (9).

Исследована также динамика ансамбля для случая, при котором динамика каждого осциллятора описывается уравнением (4). В зависимости от величины фазовых сдвигов $\Delta\varphi_1$ и $\Delta\varphi_2$ частотных составляющих сигнала $G(t)$ вида (9) наблюдался режим, при котором и периодические, и хаотические осцилляторы были синхронны, и режим, при котором и периодические и хаотические осцилляторы были несинхронны. Кроме того, в ансамбле наблюдалось состояние «химера», которого не было в ансамбле связанных осцилляторов вида (3). В этом режиме синхронные колебания совершают хаотические осцилляторы, а периодические осцилляторы демонстрируют несинхронное поведение.

Для такого состояния «химера» на рис. 7, a показаны фрагменты временных реализаций колебаний динамической переменной $x_i(t)$ во всех восьми связанных осцилляторах, а на рис. 7, b

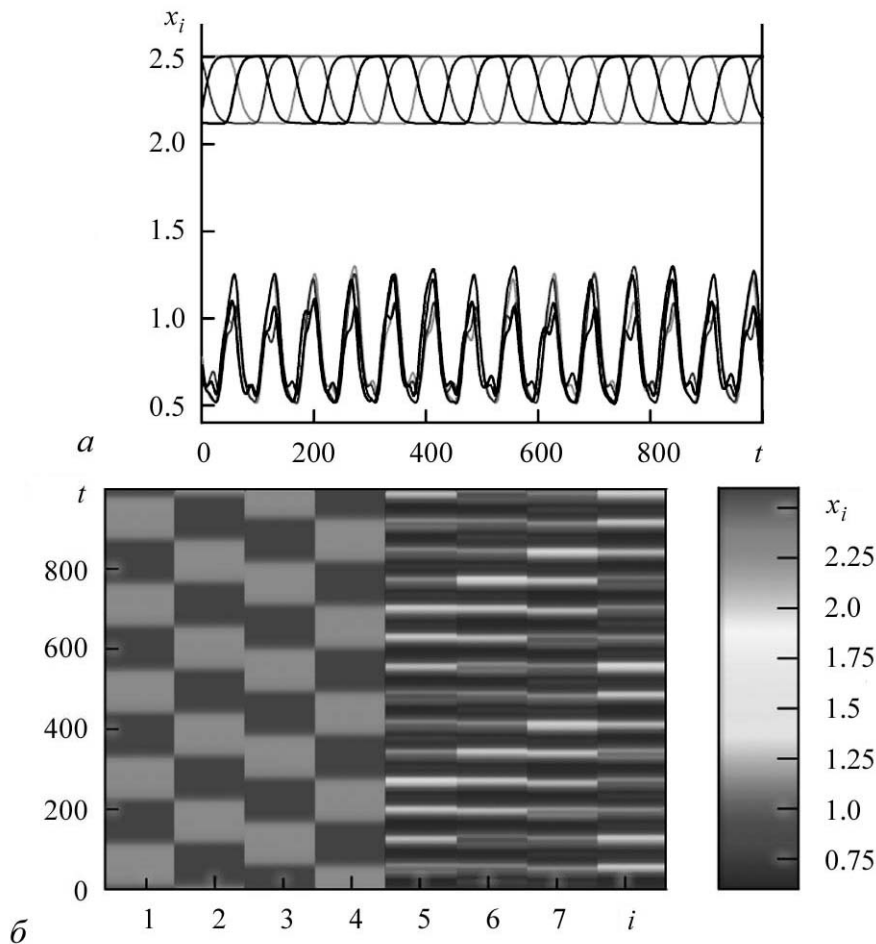


Рис. 7. Временные реализации (а) и пространственно-временная диаграмма (б) колебаний динамической переменной $x_i(t)$ связанных осцилляторов (4) для состояния «химера» при $|\Delta\varphi_1| = 0.72\pi$, $|\Delta\varphi_2| = 0.40\pi$

Fig. 7. Time series of oscillations (a) and space-time plot (b) of oscillations of dynamical variable $x_i(t)$ in coupled oscillators (4) for a chimera state at $|\Delta\varphi_1| = 0.72\pi$ and $|\Delta\varphi_2| = 0.40\pi$

этих режимов на рис. 8 показаны мгновенные состояния динамической переменной $x_i(t)$ в осцилляторах. Осцилляторы, совершающие периодические колебания, обозначены номерами $i = 1...4$, а осцилляторы, совершающие хаотические колебания, обозначены номерами $i = 5...8$.

Режим, при котором синхронными являются и периодические осцилляторы, и хаотические осцилляторы, показан на рис. 8, а. Рис. 8, б и в иллюстрируют два разных состояния «химера». В первом из них периодические осцилляторы синхронны, а хаотические несинхронны (см. рис. 8, б), а во втором, наоборот, периодические осцилляторы несинхронны, а хаотические синхронны (см. рис. 8, в). Режим, при котором и периодические и хаотические осцилляторы демонстрируют несинхронное поведение, представлен на рис. 8, д. Отметим, что собственное время запаздывания осцилляторов τ не влияет на их коллективную динамику. Оно оказывает существенное влияние лишь на вид колебаний частичных элементов ансамбля.

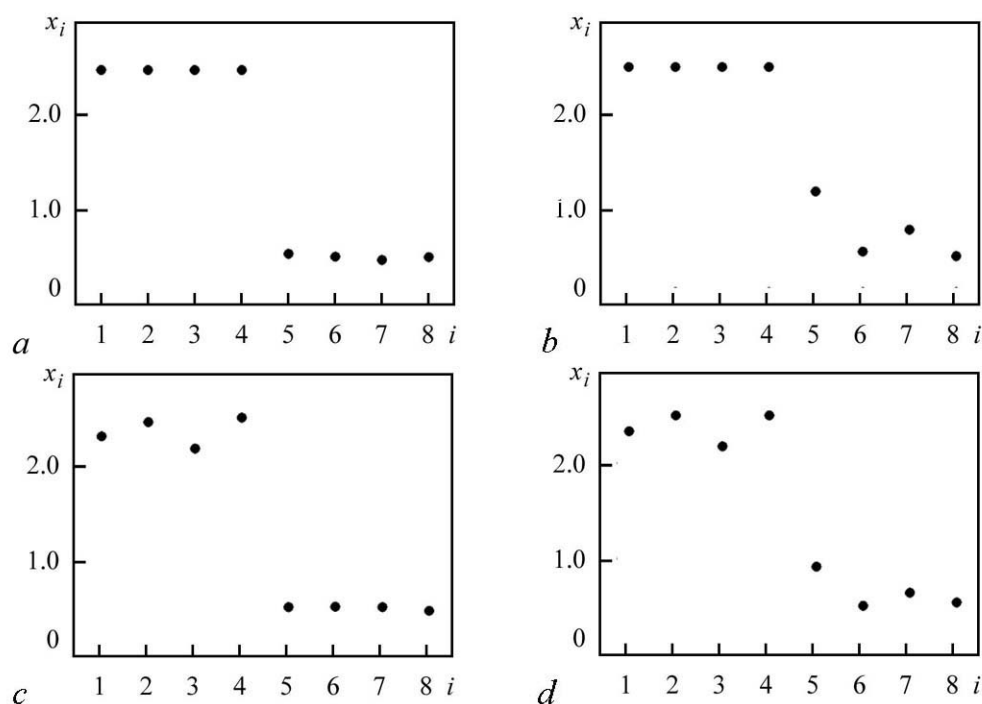


Рис. 8. Мгновенные состояния динамической переменной $x_i(t)$ в каждом из восьми связанных осцилляторов (3) при наличии запаздывания в общем поле при $|\Delta\varphi_1| = 0.05\pi$, $|\Delta\varphi_2| = 0.15\pi$ (a), $|\Delta\varphi_1| = 0.24\pi$, $|\Delta\varphi_2| = 0.72\pi$ (b), $|\Delta\varphi_1| = 0.63\pi$, $|\Delta\varphi_2| = 1.89\pi$ (c) и $|\Delta\varphi_1| = 0.91\pi$, $|\Delta\varphi_2| = 2.73\pi$ (d)

Fig. 8. Snapshots of variables $x_i(t)$ in each of eight coupled oscillators (3) in the presence of delay in the mean field at $|\Delta\varphi_1| = 0.05\pi$ and $|\Delta\varphi_2| = 0.15\pi$ (a), $|\Delta\varphi_1| = 0.24\pi$ and $|\Delta\varphi_2| = 0.72\pi$ (b), $|\Delta\varphi_1| = 0.63\pi$ and $|\Delta\varphi_2| = 1.89\pi$ (c) and $|\Delta\varphi_1| = 0.91\pi$ and $|\Delta\varphi_2| = 2.73\pi$ (d)

Заключение

Исследованы особенности коллективной динамики в ансамбле идентичных бистабильных систем с запаздывающей обратной связью, связанных между собой через общее поле. Рассмотрены различные способы формирования общего поля, осуществляющего глобальную связь осцилляторов. Исследовано влияние инерционных свойств и запаздывания общего поля на коллективную динамику осцилляторов.

Разнообразие колебательных режимов в исследованном ансамбле связанных осцилляторов обусловлено тем, что бистабильные состояния парциальных элементов имеют существенно различающиеся основные частоты колебаний. Один из бистабильных режимов реализуется на основной моде колебаний системы с запаздыванием, а другой колебательный режим реализуется на третьей гармонике основной моды. При соответствующем выборе параметров общего поля это позволяет обеспечить разную величину фазового сдвига сигнала общего поля для осцилляторов, находящихся в различных колебательных режимах.

Вид колебательного режима в исследуемом ансамбле зависит от выбора начальных условий в связанных осцилляторах. Начальные условия могут быть заданы желаемым образом для каждого осциллятора отдельно, а могут быть заданы случайным образом при помощи шума. Показано, что в исследуемом ансамбле формиру-

ется два кластера, каждый из которых в зависимости от величины фазового сдвига сигнала общего поля может демонстрировать как синхронное, так и несинхронное поведение входящих в него элементов. В случае, когда связь оказывается притягивающей для элементов одного кластера и отталкивающей для элементов другого кластера, в ансамбле возникает состояние «химера», при котором в ансамбле одновременно сосуществуют кластер с синхронным и кластер с несинхронным поведением элементов. Таким образом, изменяя параметры общего поля, можно управлять поведением осцилляторов внутри кластеров, в том числе, контролировать состояния «химера».

Рассмотрена ситуация, при которой в одном из бистабильных состояний осцилляторы совершают периодические колебания, а в другом бистабильном состоянии они колеблются хаотически. Однако качественно похожие результаты можно получить и для случаев, когда оба бистабильных состояния элементов являются периодическими или оба состояния являются хаотическими. Следует лишь отметить, что в случае притягивающей связи идентичные периодические осцилляторы демонстрируют полную синхронизацию, а хаотические осцилляторы демонстрируют фазовую синхронизацию.

Особенности коллективной динамики в ансамбле идентичных бистабильных осцилляторов с запаздыванием исследованы для случаев, когда сигнал общего поля вводится в различные точки кольцевых систем с запаздыванием. Показаны сходства и отличия таких ситуаций.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант № 16-02-00091.

Библиографический список

1. *Афраймович В.С., Некоркин В.И., Осипов Г.В., Шалфеев В.Д.* Устойчивость, структуры и хаос в нелинейных сетях синхронизации // Под ред. Гапонова-Грехова А.В. и Рабиновича М.И. Горький: ИПФ АН СССР, 1989.
2. *Boccaletti S., Latora V., Moreno Y., Chavez M., Hwang D.U.* Complex networks: Structure and dynamics // Phys. Rep. 2006. Vol. 424. P. 175.
3. *Kuramoto Y., Battogtokh D.* Coexistence of coherence and incoherence in nonlocally coupled phase oscillators // Nonlinear Phenom. Complex Syst. 2002. Vol. 5. P. 380.
4. *Abrams D.M., Strogatz S.H.* Chimera states for coupled oscillators // Phys. Rev. Lett. 2004. Vol. 93. 174102.
5. *Laing C.R.* Chimeras in networks with purely local coupling // Phys. Rev. E. 2015. Vol. 92. 050904(R).
6. *Yeldesbay A., Pikovsky A., Rosenblum M.* Chimeralike states in an ensemble of globally coupled oscillators // Phys. Rev. Lett. 2014. Vol. 112. 144103.
7. *Mishra A., Hens C., Bose M., Roy P.K., Dana S.K.* Chimeralike states in a network of oscillators under attractive and repulsive global coupling // Phys. Rev. E. 2015. Vol. 92. 062920.
8. *Semenova N., Zakharova A., Anishchenko V., Schöll E.* Coherence-resonance chimeras in a network of excitable elements // Phys. Rev. Lett. 2016. Vol. 117. 014102.
9. *Ulonka S., Omelchenko I., Zakharova A., Schöll E.* Chimera states in networks of van der Pol oscillators with hierarchical connectivities // Chaos. 2016. Vol. 26. 094825.

10. *Omelchenko I., Maistrenko Y., Hövel P., Schöll E.* Loss of coherence in dynamical networks: Spatial chaos and chimera states // *Phys. Rev. Lett.* 2011. Vol. 106. 234102.
11. *Hagerstrom A.M., Murphy T.E., Roy R., Hoevel P., Omelchenko I., Schöll E.* Experimental observation of chimeras in coupled-map lattices // *Nat. Phys.* 2012. Vol. 8. P. 658.
12. *Sethia G.C., Sen A., Johnston G.L.* Amplitude-mediated chimera states // *Phys. Rev. E.* 2013. Vol. 88. 042917.
13. *Zakharova A., Kapeller M., Schöll E.* Chimera death: Symmetry breaking in dynamical networks // *Phys. Rev. Lett.* 2014. Vol. 112. 154101.
14. *Kapitaniak T., Kuzma P., Wojewoda J., Czołczynski K., Maistrenko Y.* Imperfect chimera states for coupled pendula // *Sci. Rep.* 2014. Vol. 4. P. 6379.
15. *Gambuzza L.V., Buscarino A., Chessari S., Fortuna L., Meucci R., Frasca M.* Experimental investigation of chimera states with quiescent and synchronous domains in coupled electronic oscillators // *Phys. Rev. E.* 2014. Vol. 90. 032905.
16. *Schmidt L., Krischer K.* Clustering as a prerequisite for chimera states in globally coupled systems // *Phys. Rev. Lett.* 2015. Vol. 114. 034101.
17. *Kemeth F.P., Haugland S.W., Schmidt L., Kevrekidis I.G., Krischer K.* A classification scheme for chimera states // *Chaos.* 2016. Vol. 26. 094815.
18. *Hart J.D., Bansal K., Murphy T.E., Roy R.* Experimental observation of chimera and cluster states in a minimal globally coupled network // *Chaos.* 2016. Vol. 26. 094801.
19. *Shepelev I.A., Vadivasova T.E., Bukh A.V., Strelkova G.I., Anishchenko V.S.* New type of chimera structures in a ring of bistable FitzHugh–Nagumo oscillators with nonlocal interaction // *Phys. Lett. A.* 2017. Vol. 381. P. 1398.
20. *Buck J., Buck E.* Mechanism of rhythmic synchronous flashing of fireflies // *Science.* 1968. Vol. 159. P. 1319.
21. *Danø S., Sørensen P.G., Hynne F.* Sustained oscillations in living cells // *Nature (London).* 1999. Vol. 402. P. 320.
22. *Néda Z., Ravasz E., Brechet Y., Vicsek T., Barabási A.-L.* Self-organizing processes: The sound of many hands clapping // *Nature (London).* 2000. Vol. 403. P. 849.
23. *Dallard P., Fitzpatrick T., Flint A., Low A., Smith R.R., Willford M., Roche M.* London Millennium Bridge: Pedestrian-induced lateral vibration // *J. Bridge Eng.* 2001. Vol. 6. P. 412.
24. *Kiss I., Zhai Y., Hudson J.* Emerging coherence in a population of chemical oscillators // *Science.* 2002. Vol. 296. P. 1676.
25. *Kuang Y.* Delay Differential Equations with Applications in Population Dynamics. Boston: Academic Press, 1993.
26. *Ikeda K., Matsumoto K.* High-dimensional chaotic behavior in systems with time-delayed feedback // *Physica D.* 1987. Vol. 29, P. 223.
27. *Prokhorov M.D., Ponomarenko V.I.* Estimation of coupling between time-delay systems from time series // *Phys. Rev. E.* 2005. Vol. 72. 016210.
28. *Ashwin P., Burylko O.* Weak chimeras in minimal networks of coupled phase oscillators // *Chaos.* 2015. Vol. 25. 013106.

29. Röhm A., Böhm F., Lüdge K. Small chimera states without multistability in a globally delay-coupled network of four lasers // *Phys. Rev. E*. 2016. Vol. 94. 042204.
30. Пономаренко В.И., Кульминский Д.Д., Караваев А.С., Прохоров М.Д. Коллективная динамика идентичных бистабильных автогенераторов с запаздыванием, связанных через общее поле // *Письма в ЖТФ*. 2017. Т. 43, вып. 6. С. 64.

References

1. Afraimovich V.S., Nekorkin V.I., Osipov G.V., Shalfeev V.D. Stability, Structures, and Chaos in Nonlinear Synchronization Networks. Eds. Gaponov-Grekhov A.V., Rabinovich M.I. Gorky: IPF AN USSR, 1989 (in Russian).
2. Boccaletti S., Latora V., Moreno Y., Chavez M., Hwang D.U. *Phys. Rep.* 2006. Vol. 424. P. 175.
3. Kuramoto Y., Battogtokh D. *Nonlinear Phenomena in Complex Systems*. 2002. Vol. 5. P. 380.
4. Abrams D.M., Strogatz S.H. *Phys. Rev. Lett.* 2004. Vol. 93. 174102.
5. Laing C.R. *Phys. Rev. E*. 2015. Vol. 92. 050904(R).
6. Yeldesbay A., Pikovsky A., Rosenblum M. *Phys. Rev. Lett.* 2014. Vol. 112. 144103.
7. Mishra A., Hens C., Bose M., Roy P.K., Dana S.K. *Phys. Rev. E*. 2015. Vol. 92. 062920.
8. Semenova N., Zakharova A., Anishchenko V., Schöll E. *Phys. Rev. Lett.* 2016. Vol. 117. 014102.
9. Ulonska S., Omelchenko I., Zakharova A., Schöll E. *Chaos*. 2016. Vol. 26. 094825.
10. Omelchenko I., Maistrenko Y., Hövel P., Schöll E. *Phys. Rev. Lett.* 2011. Vol. 106. 234102.
11. Hagerstrom A.M., Murphy T.E., Roy R., Hoevel P., Omelchenko I., Schöll E. *Nat. Phys.* 2012. Vol. 8. P. 658.
12. Sethia G.C., Sen A., Johnston G.L. *Phys. Rev. E*. 2013. Vol. 88. 042917.
13. Zakharova A., Kapeller M., Schöll E. *Phys. Rev. Lett.* 2014. Vol. 112. 154101.
14. Kapitaniak T., Kuzma P., Wojewoda J., Czolczynski K., Maistrenko Y. *Sci. Rep.* 2014. Vol. 4. P. 6379.
15. Gambuzza L.V., Buscarino A., Chessari S., Fortuna L., Meucci R., Frasca M. *Phys. Rev. E*. 2014. Vol. 90. 032905.
16. Schmidt L., Krischer K. *Phys. Rev. Lett.* 2015. Vol. 114. 034101.
17. Kemeth F.P., Haugland S.W., Schmidt L., Kevrekidis I.G., Krischer K. *Chaos*. 2016. Vol. 26. 094815.
18. Hart J.D., Bansal K., Murphy T.E., Roy R. *Chaos*. 2016. Vol. 26. 094801.
19. Shepelev I.A., Vadivasova T.E., Bukh A.V., Strelkova G.I., Anishchenko V.S. *Phys. Lett. A*. 2017. Vol. 381. P. 1398.
20. Buck J., Buck E. *Science*. 1968. Vol. 159. P. 1319.
21. Danø S., Sørensen P.G., Hynne F. *Nature (London)*. 1999. Vol. 402. P. 320.
22. Neda Z., Ravasz E., Brechet Y., Vicsek T., Barabási A.-L. *Nature (London)*. 2000. Vol. 403. P. 849.
23. Dallard P., Fitzpatrick T., Flint A., Low A., Smith R.R., Willford M., Roche M.J. *Bridge Eng.* 2001. Vol. 6. P. 412.

24. Kiss I., Zhai Y., Hudson J. *Science*. 2002. Vol. 296. P. 1676.
25. Kuang Y. *Delay Differential Equations with Applications in Population Dynamics*. Boston: Academic Press, 1993.
26. Ikeda K., Matsumoto K. *Physica D*. 1987. Vol. 29. P. 223.
27. Prokhorov M.D., Ponomarenko V.I. *Phys. Rev. E*. 2005. Vol. 72. 016210.
28. Ashwin P., Burylko O. *Chaos*. 2015. Vol. 25. 013106.
29. Röhm A., Böhm F., Lüdge K. *Phys. Rev. E*. 2016. Vol. 94. 042204.
30. Ponomarenko V.I., Kul'minskii D.D., Karavaev A.S., Prokhorov M.D. *Tech. Phys. Lett.* 2017. Vol. 43. P. 309.



Кульминский Данил Дмитриевич – родился в Саратове (1991). Окончил Саратовский государственный университет (2014). После окончания СГУ работает младшим научным сотрудником в Саратовском филиале Института радиотехники и электроники им. В.А. Котельникова РАН и ассистентом кафедры динамического моделирования и биомедицинской инженерии СГУ. Область научных интересов: теория динамических систем, анализ временных рядов, математическое моделирование. Имеет 20 научных статей в отечественных и зарубежных журналах. Стипендиат фонда «Династия».

Россия, 410019 Саратов, ул. Зеленая, 38
 Саратовский филиал Института радиотехники
 и электроники им. В.А. Котельникова РАН
 Россия, 410012 Саратов, ул. Астраханская, 83
 Саратовский университет имени Н.Г. Чернышевского
 E-mail: kulminskydd@gmail.com



Пономаренко Владимир Иванович – родился в Саратове (1960). Окончил Саратовский государственный университет (1982). Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук (1992) и доктора физико-математических наук (2008). Ведущий научный сотрудник Саратовского филиала Института радиотехники и электроники им. В.А. Котельникова РАН. Область научных интересов: нелинейная динамика, системы с запаздыванием, синхронизация, моделирование биологических систем. Автор более 200 научных публикаций.

Россия, 410019 Саратов, ул. Зеленая, 38
 Саратовский филиал Института радиотехники
 и электроники им. В.А. Котельникова РАН
 Россия, 410012 Саратов, ул. Астраханская, 83
 Саратовский университет имени Н.Г. Чернышевского
 E-mail: ponomarenkovi@gmail.com



Проخورов Михаил Дмитриевич – родился в Саратове (1968). Окончил Саратовский государственный университет (1992). Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук (1997) и доктора физико-математических наук (2008). Заведующий лабораторией Саратовского филиала Института радиотехники и электроники им. В.А. Котельникова РАН. Область научных интересов: нелинейная динамика и ее приложения, математическое моделирование, анализ временных рядов. Имеет более 200 научных публикаций.

Россия, 410019 Саратов, ул. Зеленая, 38
 Саратовский филиал Института радиотехники
 и электроники им. В.А. Котельникова РАН
 E-mail: mdprokhorov@yandex.ru



УДК 519.179.2

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ СЕТЕЙ ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ

Е. Н. Пицук, М. В. Горемыко, В. В. Макаров, А. Е. Храмов

Саратовский государственный технический университет им. Гагарина Ю.А.
Россия, 410054 Саратов, ул. Политехническая, 77
E-mail: pitsikelena@gmail.com, gormv67@sstu.ru,
vladmak404@gmail.com, hramovae@gmail.com

Поступила в редакцию 2.09.2017, после доработки 28.10.2017

Описание реально существующих систем взаимодействующих элементов с помощью сетевой модели является эффективным методом их изучения как в макро-, так и в микроскопических масштабах. Наличие схожих свойств в реальных системах, принципиально различающихся по своей природе, обеспечило широкое распространение предлагаемой в данной статье модели в различных областях науки для получения новых фундаментальных знаний о функционировании сетевых структур.

По этой причине предметом данной статьи является моделирование мультиплексной сети, построенной на основе реальных данных о сотрудничестве в мировом музыкальном сообществе. Изменения характеристик в предлагаемой модели отражают структурные и динамические свойства реальных сетей, такие как безмасштабная структура связей и тенденция узлов сети к объединению в кластеры.

Результаты, полученные для мультиплексной сети, говорят о том, что при объединении изолированных сетей их топологии претерпевают заметные изменения. В частности, были выявлены существенные изменения в значениях центральностей узлов, а также в формировании сообществ (кластеров) внутри сети. Помимо этого, были выявлены зависимости характеристик друг от друга и динамика этих зависимостей в процессе объединения изолированных сетей в общую сеть.

Полученные результаты подтверждают эффективность использования модели мультиплексной сети для изучения структурно-динамических процессов во многих реальных системах.

Ключевые слова: сеть со сложной топологией, многослойная сеть, математическое моделирование, социальная система.

DOI: 10.18500/0869-6632-2018-26-1-21-32

Образец цитирования: Пицук Е.Н., Горемыко М.В., Макаров В.В., Храмов А.Е. Математическое моделирование сетей профессионального взаимодействия // Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2018. Т. 26, № 1. С. 21–32. DOI: 10.18500/0869-6632-2018-26-1-21-32

MATHEMATICAL MODELLING OF THE NETWORK OF PROFESSIONAL INTERACTIONS

E. N. Pitsik, M. V. Goremyko, V. V. Makarov, A. E. Hramov

Yuri Gagarin State Technical University of Saratov
77, Politechnicheskaya street, Saratov 410054, Russia
E-mail: pitsikelena@gmail.com, gormv67@sstu.ru,
vladmak404@gmail.com, hramovae@gmail.com

Received 2.09.2017, revised 28.10.2017

Description of real-world systems of interacting units by the means of network model is an effective method of research both in macro- and microscale. In addition, using the simple one-layer networks with one type of connections between the nodes when describing real-world networks is inefficiently because of their complex structural and dynamical nature. Besides, presence of similar features in real networks that are fundamentally different by their nature provided a wide spread of proposed model in many fields of science for the acquisition of new fundamental knowledge about functioning of the real network structures. For this reason the object of this article is modelling of multiplex network build on the basis of real data about professional interactions in world-wide musical community. The changes in characteristics in in proposed model reflects structural and dynamical features of real network, such as scale-free connection structure and clusters formation. Results obtained for multiplex network shows that after uniting the isolated systems their topologies undergo noticeable changes. In particular, significant changes in centrality values and in cluster formation inside the network were obtained. Besides, the correlations between the characteristics and dynamics of these correlations in process of uniting the isolated systems in general network. Obtained results confirm the effectiveness of multiplex network model for studying structural and dynamical processes of many real systems.

Key words: complex network, multiplex network, mathematical modelling, social system.

DOI: 10.18500/0869-6632-2018-26-1-21-32

References: Pitsik E.N., Goremyko M.V., Makarov V.V., Hramov A.E. Mathematical modelling of the network of professional interactions. *Izvestiya VUZ, Applied Nonlinear Dynamics*, 2018, vol. 26, iss. 1, pp. 21–32. DOI: 10.18500/0869-6632-2018-26-1-21-32

Введение

Многие явления, характеризующиеся взаимодействием между большим числом элементов, связанных друг с другом какими-либо отношениями, можно описать с помощью моделей сетевых структур. Существует неограниченное число таких систем в макро- и микроскопических масштабах: нейронные сети мозга [1–3], сложные биологические системы как в отдельных клетках, так и во всём организме [4, 5], транспортные сети [6, 7], сети беспроводной мобильной связи [8], социальные сети [9], системы цитирования научных статей [10–12], компьютерные сети [13] и т.д. Отдельного внимания заслуживает тот факт, что несмотря на глобальные различия многие реальные сетевые структуры обладают некоторыми общими фундаментальными свойствами, такими как свободно масштабируемая структура связей между элементами в сети и тенденция узлов к объединению в кластеры (сообщества) [14, 15]. Первое свойство означает, что в сети существуют узлы, чья степень (число связей) значительно превосходит степени других узлов – так называемые, хабы или концентраторы – и объясняется наблюдаемым в реальных системах эффектом аддитивности, то есть свойством узлов с большой степенью притягивать больше связей,

чем узлы с меньшей степенью. Второе свойство связано с протеканием влияющих на структуру сети динамических процессов, а также принципом гомеостазиса [16], известным в теории социальных систем как число Данбара, то есть ограничение на количество постоянных социальных связей, которые каждый индивидум может поддерживать [17–19]. Эти процессы приводят к объединению участников социальных систем по различным общим признакам, что приводит к возникновению в сети кластерных структур (или сообществ), внутри которых узлы связаны друг с другом плотнее, чем с узлами в других кластерах (сообществах).

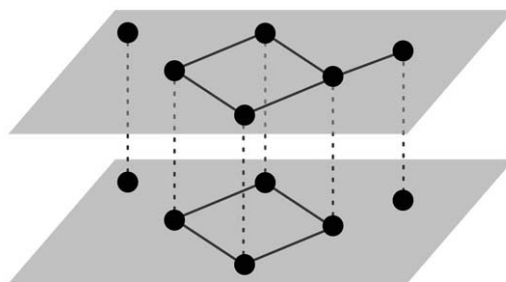


Рис. 1. Схематическое изображение структуры двухслойной мультиплексной сети

Fig. 1. Schematic illustration of two-layer multiplex network structure

Природа реальных систем такова, что их описание с помощью традиционных однослойных сетей, в которых узлы соединены друг с другом через одинаковые типы связей, зачастую не способно учесть все аспекты взаимодействия между элементами [20]. Примером таких связей могут служить различные типы взаимоотношения между участниками социальной сети, такие как дружеские отношения, профессиональное сотрудничество и т.д. Если моделировать такие процессы как распространение слухов [21–24] или эпидемического заболевания [25], рассматривая социальную систему как традиционную однослойную сеть, то полученные результаты будут резко отличаться от реальной картины. По этой причине среди исследователей при описании реальных систем все чаще используется модель мультиплексной сети, которая подразумевает возможность взаимодействия между элементами сети на разных уровнях. Каждый такой уровень может рассматриваться как отдельный слой мультиплексной сети, который имеет идентичный набор узлов, но свою уникальную структуру. При этом каждый узел имеет не только связи внутри своего слоя, но и связь со своим «прообразом» на других слоях. Схематическое изображение такой сети представлено на рис. 1.

В данной работе моделируется сложная социальная сеть, основанная на статистических данных о профессиональной деятельности музыкантов. Анализ характеристик такой сети позволяет выделить степень влияния различных типов профессионального взаимодействия на характеристики социальной системы, которые имеют принципиальное значение для изучения механизмов распространения различных процессов в обществе и понимания закономерностей протекания этих процессов – распространение болезней, формирование общественного мнения, формирование сообществ и т.д. Таким образом обеспечивается понимание структурных и динамических особенностей реально существующих систем.

Исследуемые данные

В качестве частного примера социального взаимодействия было выбрано мировое сообщество музыкантов. Статистические данные для исследования были получены из Allmusic.com [26] – музыкальной базы данных, обладающей крупнейшим

музыкальным архивом, которая содержит информацию о жанрах музыки, музыкантах и исполнителях. Полученные данные содержат два набора параметров. Первый отражает жанровую принадлежность исполнителей, в которой два элемента связаны друг с другом, если соответствующие им исполнители играли в одном музыкальном жанре. Второй набор данных является списком профессиональных связей между индивидуумами, если таковые имелись, а именно, связь между узлами существует, если исполнители работали совместно над одним или более музыкальными альбомами. Исходный набор данных о жанровой принадлежности артистов содержал 32377 узла и 117621 связь, о сотрудничестве между ними – 34724 узла и 123082 связи. Дальнейшая обработка данных предполагает выделение главной компоненты сети, то есть наибольшего множества связанных между собой узлов [27]. Стоит учитывать, что каждый конкретный узел может принадлежать к главной компоненте (1) обоих слоев, (2) одного из слоев или же (3) не принадлежать ни к одной из них (см. рис. 1). В данном исследовании нас интересуют только узлы, принадлежащие как к (1), так и (2) группам. Удалив из наборов другие узлы, мы выделили главную связанную компоненту сети, размер которой составил $N = 8279$ узлов в каждом слое и с которой проводилась дальнейшая работа. Такой подход является типичным при исследовании реальных сетевых структур, в том числе и социальных. Он позволяет избежать искажений характеристик исследуемой системы, вносимых большим количеством узлов, не имеющих связей, не теряя при этом информации об основных наблюдаемых и исследуемых тенденциях.

Математическая модель

Для исследования сформирована модель многослойной сети, первый слой которой построен на основе данных о жанровой принадлежности музыкантов (далее $G - genre$), второй слой отражает сотрудничество между ними (далее $C - collaboration$). Приведенные распределения степеней узлов сети (на рис. 2 показаны точками) свидетельствуют о том, что ее структура обладает свойством свободного масштабирования: зависимости могут быть аппроксимированы степенным законом $P(D) = D^{-\gamma}$, где D – степень узла, $\gamma \approx 2.4$ (аппроксимация показана на рис. 2 линиями). Таким

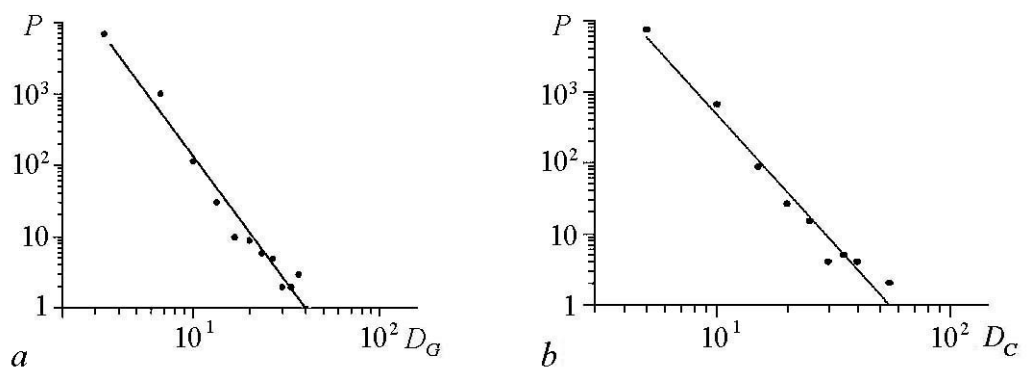


Рис. 2. Графики распределения степеней узлов для сетей G (a) и C (b) в логарифмической шкале

Fig. 2. Degree distribution for the networks G (a) and C (b) in logarithmic scale

образом, построенная сеть по своим свойствам соответствует реально существующим системам, что является важным критерием достоверности результатов, которые будут получены с использованием данной структуры.

Для исследования структурных особенностей слоев сети, а также их влияния друг на друга был рассчитан ряд характеристик для случая, когда слои не связаны между собой (межслойные связи отсутствуют) и в присутствии межслойных связей. Во-первых, это степени узлов для обеих сетей, то есть количество связей каждого узла. Помимо этого, важной характеристикой представляется центральность по посредничеству B_k (betweenness centrality), которая характеризует нагрузку на узел в сети и равна количеству кратчайших путей от каждого узла до всех остальных узлов, проходящих через данный узел [28],

$$B_k = \sum_{i \neq k \neq j} \frac{\sigma_{ij}(k)}{\sigma_{ij}}, \quad (1)$$

где σ_{ij} – общее количество кратчайших путей из узла i в узел j , а $\sigma_{ij}(k)$ – количество таких путей, проходящих через данный узел k .

Одним из интересующих нас свойств сети является способность её узлов объединяться в группы – кластеры или модули. Обнаружение таких структур в сети имеет важное практическое значение во многих областях науки, в том числе оно предоставляет возможность отследить процессы формирования групп и сообществ в реальных социальных сетях [29–31]. Для того чтобы охарактеризовать степень принадлежности узла к сильно-связанной группе, был рассчитан локальный коэффициент кластеризации

$$C_i = \frac{t_i}{q_i(q_i - 1)/2}, \quad (2)$$

где i – данный узел, q_i – количество ближайших соседей данного узла, t_i – число связей между ближайшими соседями. Данный параметр характеризует вероятность того, что два ближайших соседа узла являются ближайшими соседями друг для друга. Число t_i так же интерпретируется как суммарное число треугольников, прикрепленных к узлу i , а $q_i(q_i - 1)/2$ – максимально возможное количество треугольников. Коэффициент кластеризации равен нулю, если между соседними узлами не может быть такой связи – примером такой структуры может служить иерархическое дерево. Если же все соседи данного элемента связаны друг с другом, то коэффициент кластеризации данного узла равен единице.

Тем не менее, для определения числа мезоскопических структур в каждом слое и их характеристик при появлении межслойной связи был рассчитан более сложный параметр, а именно, модулярность сети [32]

$$M = \frac{1}{2m} \sum_{ij} \left(A_{ij} - \gamma \frac{k_i k_j}{2m} \right) \delta_{g_i g_j}, \quad (3)$$

где m – общее количество связей в сети; A_{ij} – матрица смежности; $\delta_{g_i g_j}$ обозначает символ Кронекера и является индикатором равенства групп g_i и g_j , которым принадлежат элементы i и j , соответственно; k_i – степень узла i и γ – параметр, значение которого определяет размер сообществ и их количество.

В качестве еще одной характеристики рассматривалась центральность по собственному вектору E_i (eigenvector centrality) – другой вид центральности, определяющий влияние узла на сеть [33]. Каждый узел получает оценку исходя из предположения, что его связи с узлами с высокой центральностью вносят больший вклад в его собственную оценку, чем связи с узлами с низкой центральностью. Таким образом, значение центральности по собственному вектору зависит не только от количества связей данного узла с другими узлами, но и от центральности этих узлов, позволяя таким образом выделить небольшую группу узлов, которая имеет весомое влияние на всю сеть в целом. При этом из этой группы исключаются узлы, имеющие большое количество связей, но чье влияние на сеть не выходит за пределы их собственных соседей, то есть изолированные кластеры, не имеющие важности в масштабе всей сети. Таким образом, центральность по собственному вектору представляет собой собственный вектор, соответствующий наибольшему собственному числу матрицы смежности,

$$E_i = \frac{1}{\lambda} \sum_{j \in M} w_{ij} E_j. \quad (4)$$

Стоит отметить, забегая вперед, что в силу своей специфичности значения данного параметра будут сильно отличаться для случаев связанных и изолированных слоев.

Результаты анализа построенной модели сети профессиональных отношений

В ходе исследования были проанализированы корреляционные связи между всеми параметрами сети. В данном разделе рассмотрены только те зависимости, которые наиболее ярко отражают структурные особенности системы.

Приведённые в прошлом разделе характеристики были вычислены сначала отдельно для каждой сети, а затем, объединив их в мультиплексную сеть, для каждого слоя полученной сети. Данный подход к исследованию характеристик сети позволяет определить, каким образом слои внутри одной сложной сети влияют на структурные и динамические характеристики друг друга.

Сначала рассмотрим зависимости между характеристиками узлов внутри изолированных слоев, которые приведены на рис. 3. В результате расчётов было обнаружено, что центральность по посредничеству узлов находится в обратной корреляции с коэффициентом кластеризации как в сети G, так и в сети C (рис. 3, *a, b*). Это говорит о том, что если узел пропускает через себя большое количество кратчайших путей, то он обладает малым коэффициентом кластеризации, то есть находится вне структурного кластера. Похожая зависимость наблюдается между степенью узла и его коэффициентом кластеризации (рис. 3, *c, d*). Это свидетельствует о том, что находящиеся в кластерах элементы обладают ограниченным числом связей со своими соседями. В то же время, узлы, имеющие большую центральность по посредничеству и находящиеся вне кластеров, представляют собой структурные хабы. С точки зрения реальной сети, имеем два варианта. С одной стороны, чем в большем количестве жанров играет исполнитель, тем меньшее число его соседей играют в одном

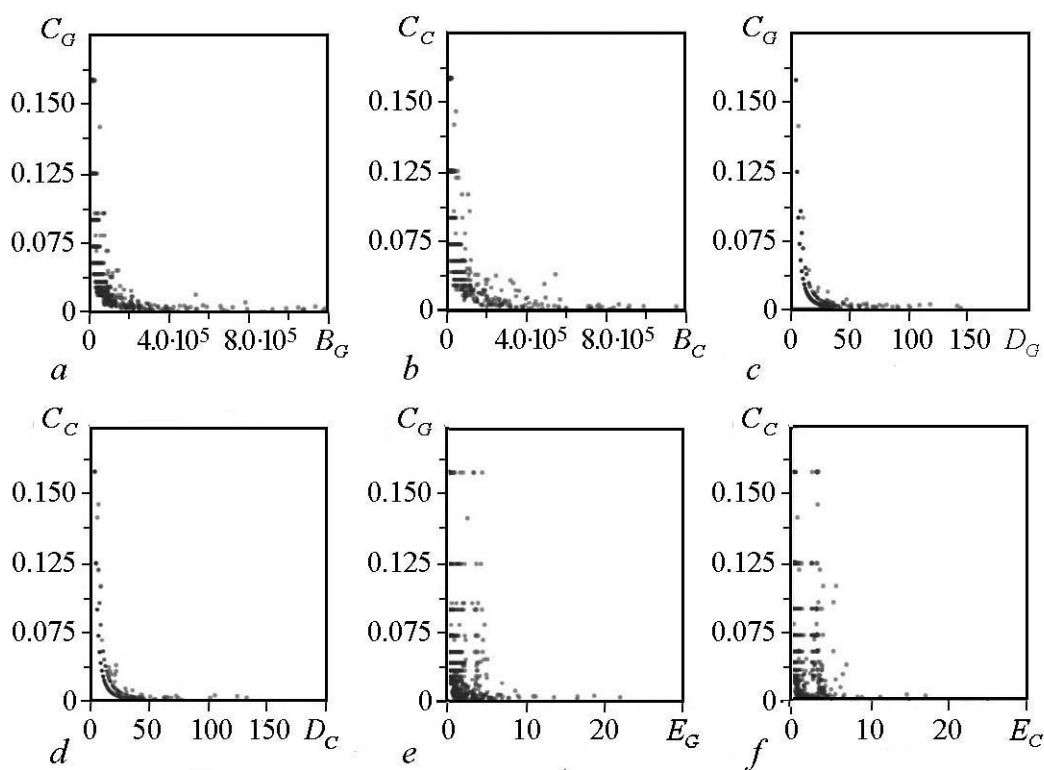


Рис. 3. Корреляционные зависимости характеристик узлов для слоя G (a, c, e) и C (b, d, f). На рисунках представлены зависимости коэффициента кластеризации от центральности по посредничеству (a, b), от степени узла (c, d) и от центральности по собственному вектору (e, f)

Fig. 3. Correlations of nodes characteristics for layer G (a, c, e) and C (b, d, f). Figures show the correlations between clustering coefficient and betweenness centrality (a, b), node degree (c, d) and eigenvector centrality (e, f)

жанре. Вывод логичен, так как среди связанных с данным исполнителем музыкантов слишком много разных жанров. С другой стороны, чем активнее исполнитель сотрудничает с другими исполнителями, тем слабее его соседи сотрудничают друг с другом.

Обратная корреляция между центральностью по собственному вектору и коэффициентом кластеризации (рис. 3, e, f) говорит о наличии в сети большого количества кластеров, имеющих ограниченное число связей внутри и обладающих сильным влиянием на сеть из-за большой центральности по собственному вектору узлов, входящих в них. Такой результат свидетельствует о неоднородной структуре сети, в которой узлы с большим коэффициентом кластеризации находятся вне центрального кластера.

Рассмотрим теперь характеристики сети после её объединения в многослойную сеть P. Теперь сеть жанров G будет рассматриваться как первый слой, а сеть сотрудничества C – как второй слой сети P.

На рис. 4 для каждого слоя сети показано изменение центральности по посредничеству и центральности по собственному вектору при переходе от изолированного слоя (ось ординат) к многослойной сети (ось абсцисс). Можно отметить, что для обо-

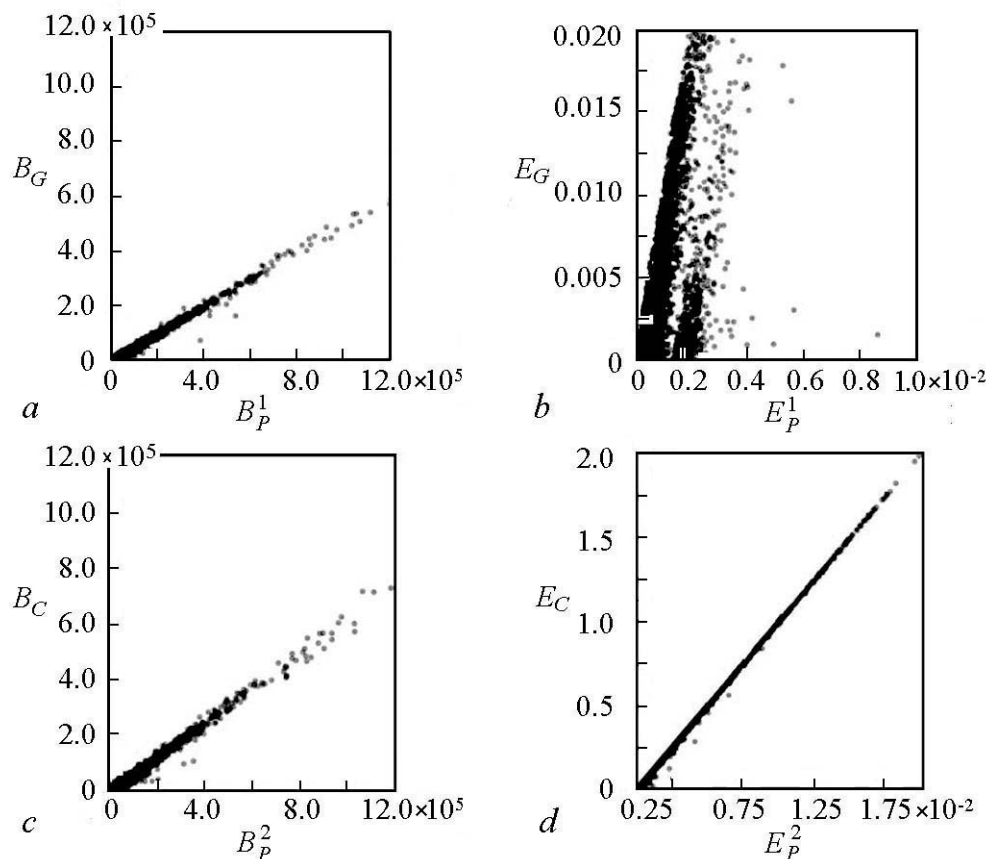


Рис. 4. Корреляция между центральностями сети G (a, b) и C (c, d) до и после объединения сети. Здесь: B_p^1 , B_p^2 , E_p^1 и E_p^2 – центральности узлов первого и второго слоя мультиплексной сети P, соответственно
 Fig. 4. Correlation between centralities of the networks G (a, b) and C (c, d) before and after uniting of the network; B_p^1 , B_p^2 , E_p^1 и E_p^2 – centralities of the nodes of first and second layer of multiplex network P, respectively

их слоев центральность по посредничеству не демонстрирует практически никакого изменения при переходе к мультиплексной сети (рис. 4, a, b). Это говорит о том, что, несмотря на совершенно разные критерии построения слоев, наибольшей центральностью по посредничеству в них обладает один и тот же набор узлов. Тем не менее, если мы обратимся к центральности собственного вектора (рис. 4, c, d), то обнаружим, что при переходе к многослойной сети значения данной характеристики сильно уменьшились для узлов, находящихся в слое жанровой принадлежности. Это, главным образом, связано со специфичностью расчета данной характеристики, и в случае мультиплексной сети такая динамика говорит о более оптимальной структуре слоя сотрудничества.

На рис. 5 представлены графики функции плотности вероятности $\omega(M)$ для параметра модулярности M . Функция плотности вероятности означает, что вероятность попадания узла q в сообщество t равна площади фигуры, ограниченной интервалом $[t - 1, t]$ и графиком кривой $\omega(M)$. Таким образом, чем больше y -координата в данной точке, тем многочисленнее соответствующее сообщество.

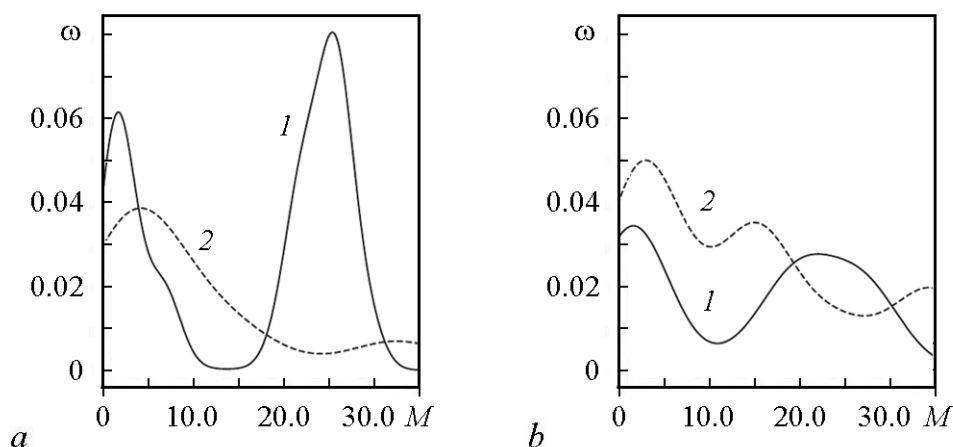


Рис. 5. График изменения плотности вероятности для параметра модулярности до объединения в общую сеть (а) и после объединения (б). Здесь 1 – модулярность сети G, 2 – модулярность сети С. На оси абсцисс отмечены рассчитанные сообщества, по оси ординат – значения функции плотности распределения

Fig. 5. Probability density for modularity parameter before unifying in general network (а) and after (б). 1 – modularity of the network G, 2 – modularity of the network C. X-axis and Y-axis are marked with calculated communities and the values of probability density function, respectively

На графиках видны заметные изменения в формировании сообществ внутри сетей: тогда как в изолированном случае хорошо видна сильная неоднородность в размере структурных единиц, появление межслойных связей приводит к возникновению связей между кластерами, пересекающимися на различных слоях мультиплексной сети. В связи с этим как следствие структура сети становится более однородной.

Заключение

В ходе исследования была построена модель мультиплексной сети на основе реальных статистических социальных данных о профессиональном взаимодействии музыкантов. Были рассчитаны основные структурные характеристики как для изолированных сетей, так и для каждого слоя мультиплексной сети. Для двух изолированных сетей были выявлены определённые сходства в полученных зависимостях между характеристиками, что говорит об общих закономерностях в процессах формирования топологий сетей.

Результаты, полученные для мультиплексной сети, говорят о том, что при объединении изолированных сетей характеристики их узлов претерпевают заметные изменения. В частности, были выявлены изменения в значениях центральностей узлов и в формировании сообществ внутри сети. Данные результаты подтверждают эффективность использования модели мультиплексной сети для изучения структурно-динамических процессов во многих реальных системах.

Работа выполнена при поддержке гранта Президента РФ для ведущих научных школ (проект НШ-2737.2018.2).

References

1. Sporns O., Chialvo D.R., Hilgetag C.C. Organization, development and function of complex brain networks. *Trends Cogn. Sci.*, 2004, vol. 8, pp. 418–425.
2. Maksimenko V.A., Lüttjohann A., Makarov V.V., Goremyko M.V., Koronovskii A.A., Nedaivozov V., Runnova A.E., van Luijelaar G., Hramov A.E., Boccaletti S. Macroscopic and microscopic spectral properties of brain networks during local and global synchronization. *Phys. Rev. E.*, 2017, vol. 96, no. 1.
3. Kirsanov D.V., Nedaivozov V.O., Makarov V.V., Goremyko M.V., Hramov A.E. Study of pattern formation in multilayer adaptive network of phase oscillators in application to brain dynamics analysis. *Proc. SPIE*, 2017, vol. 10337, pp. 103370Z-1–7.
4. Kai S., Gonçalves J.P., Larminie C., Pržuli N. Predicting disease associations via biological network analysis. *BMC Bioinformatics*, 2014, vol. 15.
5. Sharan R. and Ideker T. Modeling cellular machinery through biological network comparison. *Nat. Biotechnol.*, 2006, vol. 24, pp. 427–433.
6. Ma X., Yu H., Wang Y., Wang Y. Large-Scale transportation network congestion evolution prediction using deep learning theory. *PLoS ONE*, 2015, vol. 10, no. 3.
7. He X., Liu X.H. Modeling the day-to-day traffic evolution process after an unexpected network disruption. *Transp. Res. Part B Methodol.*, 2012, vol. 46, no. 1, pp. 50–71.
8. Wang L., Kuo G.S. Modeling for network selection in heterogeneous wireless networks. A tutorial. *IEEE Commun. Surveys Tuts.*, 2013, vol. 15, no. 1, pp. 271–292.
9. Yang S., Yang X., Zhang C., Spyrou E. Using social network theory for modeling human mobility. *IEEE Netw.*, 2010, vol. 24, no. 5, pp. 6–13.
10. Dawson S., Gašević D., Siemens G., Joksimovic S. Current State and Future Trends: A Citation Network Analysis of the Learning Analytics Field, ACM, 2014, pp. 231–240.
11. Érdi P., Makovi K., Somogyvári Z., Strandburg K., Volf P., Zalányi L. Prediction of emerging technologies based on analysis of the US patent citation network. *Scientometrics*, 2013, vol. 95, pp. 225.
12. Ta-Shun C., Hsin-Yu S. Using social network theory for modeling human mobility. *IEEE Netw.*, 2010, vol. 24, no. 5, pp. 6–13.
13. Shakkottai S., Srikant R. Network optimization and control. *Found. Trends. Network.*, 2008, vol. 2, no. 3, pp. 271–379.
14. Battiston F., Nicosia V., Latora V. Structural measures for multiplex networks. *Phys. Rev. E*, 2014, vol. 89, no. 3.
15. Makarov V.V., Koronovskii A.A., Maksimenko V.A., Hramov A.E., Moskalenko O.I., Buldú J.M., Boccaletti S. Emergence of a multilayer structure in adaptive networks of phase oscillators. *Chaos, Solitons, Fractals*, 2016, vol. 84, pp. 23–30.
16. Turrigiano G.G., Nelson S.B. Homeostatic plasticity in the developing nervous system. *Nat. Rev. Neurosci.*, 2004, Vol. 5, pp. 97–107.

17. Arnaboldi V., Conti M., Passarella A., Pezzoni F. Ego networks in Twitter: An experimental analysis. *IEEE CCW*, 2013, pp. 229–234.
18. Gonçalves B., Perra N., Vespignani A. Modeling users' activity on twitter networks: Validation of Dunbar's number. *PLoS ONE*, 2011, vol. 6, no. 8, pp. 1–5.
19. de Ruiter J., Weston G., Lyon S.M. Dunbar's Number: Group Size and Brain Physiology in Humans Reexamined. *Am Anthropol.*, 2011, vol. 113, no. 4, pp. 557–568.
20. Menichetti G., Remondini D., Panzarasa P., Mondragón R.J., Bianconi G. Weighted multiplex networks. *PLoS ONE*, 2014, vol. 9, no. 6, pp. 1–8.
21. Ru-Ya T., Xue-Fu Z., Yi-Jun L. SSIC model: A multi-layer model for intervention of online rumors spreading. *Physica A*, 2015, vol. 427, pp. 181–191.
22. Zhao L., Wang J., Chen Y., Wang Q., Cheng J., Cui H. SIHR rumor spreading model in social networks. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 2012, vol. 391, no. 7, pp. 2444–2453.
23. Hu Q., Gao Y., Ma P., Yin Y., Zhang Y., Xing C. A New Approach to Identify Influential Spreaders in Complex Networks / Web-Age Information Management: 14th International Conference. Springer Berlin Heidelberg, 2013, pp. 99–104.
24. Roshani F., Naimi Y. Effects of degree-biased transmission rate and nonlinear infectivity on rumor spreading in complex social networks. *Phys. Rev. E*, 2012, vol. 85, no. 3.
25. Buono C., Alvarez-Zuzek L.G., Macri P.A., Braunstein L.A. Epidemics in partially overlapped multiplex networks. *PLoS ONE*, 2014, vol. 9, no. 3, pp. 1–5.
26. Allmusic.com
<http://www.allmusic.com/>
27. Callaway D.S., Newman M.E.J., Strogatz S.H., Watts D.J. Network robustness and fragility: Percolation on random graphs. *Phys. Rev. Lett.*, 2000, vol. 85, no. 25, pp. 5468–5471.
28. Brandes U. A faster algorithm for betweenness centrality. *J. Math. Sociol.*, 2001, vol. 25, no. 3, pp. 163–177.
29. Papadopoulos S., Kompatsiaris Y., Vakali A., Spyridonos P. Community detection in Social Media. *Data Min Knowl Discov.*, 2012, vol. 24, no. 3, pp. 515–554.
30. Aggarwal C.C. An Introduction to Social Network Data Analytics. Social Network Data Analytics. Springer US, 2011, pp. 1–15.
31. Leskovec J., Lang Kevin J., Mahoney M. Empirical comparison of algorithms for network community detection. *Proceedings of the 19th International Conference on World Wide Web. ACM*, 2010, pp. 631–640.
32. Newman M.E.J. Equivalence between modularity optimization and maximum likelihood methods for community detection. *Phys. Rev. E*, 2016, vol. 94, no. 5.
33. Newman M.E.J. Mathematics of Networks. The New Palgrave Dictionary of Economics. Palgrave Macmillan, 2008.



Пицик Елена Николаевна родилась в Саратове (1994), окончила факультет КНиИТ Саратовского университета по направлению «Программная инженерия» (2015, бакалавриат) и по направлению «Информатика в образовании» (2017, магистратура). После окончания СГУ работает в НОЦ «Системы искусственного интеллекта и нейротехнологии» на базе Саратовского технического университета. Научные интересы: нейродинамика, компьютерное обучение, когнитивные процессы.

Россия, 410054 Саратов, ул. Политехническая, 77
Саратовский государственный технический университет
E-mail: pitsikelena@gmail.com



Горемыко Михаил Владимирович окончил физический факультет СГУ (1992). Педагогическую деятельность начал в качестве учителя физики, а затем директора (1997) экспериментальной школы-системы № 4 Саратова. С 1999 года по 2016 год занимал ряд руководящих должностей в областной и городской администрации Саратова. С 2016 года – проректор Саратовского технического университета.

Россия, 410054 Саратов, ул. Политехническая, 77
Саратовский государственный технический университет
E-mail: gormv67@sstu.ru



Макаров Владимир Владимирович – окончил факультет нелинейных процессов Саратовского университета по специальности «Физик/системный аналитик» (2013). Защитил кандидатскую диссертацию по специальности «Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ» (2016). Старший научный сотрудник НОЦ «Системы искусственного интеллекта и нейротехнологии» Саратовского технического университета. Научные интересы: нейродинамика, математические методы в нейронауке, сети и сложные системы, вейвлетный анализ.

Россия, 410054 Саратов, ул. Политехническая, 77
Саратовский государственный технический университет
E-mail: vladmak404@gmail.com



Храмов Александр Евгеньевич окончил кафедру электронных и волновых процессов физического факультета Саратовского университета (1996). Кандидат физико-математических наук (1999), доктор физико-математических наук (2005). С 2012 года главный научный сотрудник и научный руководитель Научно-образовательного центра «Системы искусственного интеллекта и нейротехнологии» (до 2018 года – «Нелинейная динамика сложных систем») Саратовского технического университета, с 2015 года заведующий кафедрой «Автоматизация, управление, мехатроника». Главный редактор журнала «Инфокоммуникационные и радиоэлектронные технологии» (с 2016), член редакционной коллегии журнала «Chaos, Solitons and Fractals». Автор и соавтор более 200 научных публикаций, в том числе монографий, учебников, патентов.

Россия, 410054 Саратов, ул. Политехническая, 77
Саратовский государственный технический университет
E-mail: hramovae@gmail.com



УДК 517.9:621.373.7

СЛОЖНАЯ ДИНАМИКА И ХАОС В ЭЛЕКТРОННОМ АВТОГЕНЕРАТОРЕ С НАСЫЩЕНИЕМ, ОБЕСПЕЧИВАЕМЫМ ПАРАМЕТРИЧЕСКИМ РАСПАДОМ

С. П. Кузнецов^{1,2}, Л. В. Тюрюкина^{1,2}

¹Саратовский филиал Института радиотехники и электроники им. В.А. Котельникова РАН
Россия, 410019 Саратов, ул. Зеленая, д. 38

²Саратовский национальный исследовательский государственный университет
Россия, 410012 Саратов, ул. Астраханская, д. 83
E-mail: spkuz@yandex.ru, lvtur@rambler.ru

Поступила в редакцию 22.09.2017

Рассматривается электронный генератор на основе двух колебательных контуров, один из которых включает отрицательную проводимость (активный контур), где реализуется сложная динамика и хаос, соответствующие модели волновой турбулентности Вышкинд–Рабиновича. Эффект насыщения автоколебаний и их хаотизация обусловлены параметрическим механизмом благодаря присутствию квадратичного нелинейного реактивного элемента на основе операционного усилителя и аналогового умножителя.

Исследование основано на сочетании схемотехнического моделирования с использованием программного продукта Multisim и численного решения уравнений, непосредственно описывающих осцилляции напряжений и токов в колебательных контурах, амплитудных уравнений и уравнений в форме, предложенной С.Я. Вышкинд и М.И. Рабиновичем.

Для указанных моделей построены временные зависимости динамических переменных от времени, портреты аттракторов, зависимости показателей Ляпунова от параметров. Для модели Вышкинд–Рабиновича построена также карта динамических режимов на плоскости параметров. Показано что все модели демонстрируют переход к хаосу через последовательность бифуркаций удвоения периода при уменьшении параметра надкритичности в активном колебательном контуре. Возникающий хаотический аттрактор по своей структуре аналогичен аттрактору Ресслера.

Предложенная схема является новой и позволяет наблюдать в радиотехническом устройстве хаотическую динамику резонансного триплета при неустойчивости высокочастотной моды, рассмотренную в свое время Вышкинд и Рабиновичем и интерпретируемую как модель определенного типа волновой турбулентности в диссипативных средах. Представленные результаты свидетельствуют о возможности использования предлагаемой электронной схемы для аналогового моделирования колебательно-волновых явлений в системах, к которым применима модель Вышкинд–Рабиновича.

Ключевые слова: параметрическое взаимодействие мод, хаотический аттрактор, автоколебания, аналоговое моделирование.

DOI: 10.18500/0869-6632-2018-26-1-33-47

Образец цитирования: Кузнецов С.П., Тюрюкина Л.В. Сложная динамика и хаос в электронном автогенераторе с насыщением, обеспечиваемым параметрическим распадом // Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2018. Т. 26, № 1. С. 33–47.

DOI: 10.18500/0869-6632-2018-26-1-33-47

COMPLEX DYNAMICS AND CHAOS IN ELECTRONIC SELF-OSCILLATOR WITH SATURATION MECHANISM PROVIDED BY PARAMETRIC DECAY

S. P. Kuznetsov^{1,2}, L. V. Turukina^{1,2}

¹Kotelnikov Institute of Radio-Engineering and Electronics of RAS, Saratov Branch
38, Zelenaya, 410019 Saratov, Russia

²Saratov State University
83, Astrakhanskaya, 410012 Saratov, Russia
E-mail: spkuz@yandex.ru, lvtur@rambler.ru

Received 22.09.2017

We consider an electronic oscillator based on two LC-circuits, one of which includes negative conductivity (the active LC-circuit), where complex dynamics and chaos occur corresponding to the model of wave turbulence of Vyshkind–Rabinovich. The saturation effect for the self-oscillations and their chaotisation take place due to parametric mechanisms due to the presence of a quadratic nonlinear reactive element based on an operational amplifier and an analog multiplier.

The study is based on combination of circuit simulation with the use of the software product Multisim and of numerical computations with equations that directly describe the oscillations of voltages and currents in the oscillatory circuit, amplitude equations, and the equations represented in the form suggested by S.Y. Vyshkind and M.I. Rabinovich.

For all these models, time dependences of dynamic variables are presented as well as portraits of attractors, and Lyapunov exponents depending on parameters. For the Vyshkind–Rabinovich model we additionally present a chart of dynamic regimes in the parameter plane. It is shown that all models demonstrate transitions to chaos through period-doubling bifurcation scenario observed under decrease in the supercriticality parameter in the active LC-circuit. The resulting chaotic attractor is similar in structure to the Rössler attractor.

The proposed scheme allows observing in the electronic device chaotic dynamics of the resonant triplet under instability of the high-frequency mode, considered in due time by Vyshkind and Rabinovich and interpreted as a model of a certain type of wave turbulence in dissipative media. The presented results testify a possibility of using the considered electronic circuit for analog simulation of oscillatory and wave phenomena in systems to which the Vyshkind–Rabinovich model is applicable.

Key words: parametric mode interaction, chaotic attractor, auto-oscillations, analog simulation.
DOI: 10.18500/0869-6632-2018-26-1-33-47

References: Complex dynamics and chaos in electronic self-oscillator with saturation mechanism provided by parametric decay. *Izvestiya VUZ, Applied Nonlinear Dynamics*, 2018, vol. 26, iss. 1, pp. 33–47. DOI: 10.18500/0869-6632-2018-26-1-33-47

Введение

Трехволновое параметрическое взаимодействие колебаний и волн в системах с квадратичной нелинейностью встречается в физике плазмы, нелинейной оптике, акустике, электронике. Общей моделью, охватывающей ситуации различной физической природы, служит система, о которой говорят как о резонансном триплете, имея в виду слабое взаимодействие на квадратичной нелинейности трех колебательных мод, частоты которых подчинены условию параметрического резонанса $\omega_2 = \omega_1 + \omega_0$.

Если в системе имеет место возбуждение высокочастотной моды вследствие линейной неустойчивости, а низкочастотные моды характеризуются затуханием, то на определенном уровне амплитуд в динамике резонансного триплета имеет место

насыщение колебаний, определяемое, как говорят, параметрическим распадом. В работе Вышкинд и Рабиновича [1] было в свое время показано, что в этой ситуации динамика может становиться хаотической, причем переход к хаосу при изменении параметров осуществляется через каскад бифуркаций удвоения периода автоколебательных режимов.

Простейший случай относится к вырожденному параметрическому резонансу, когда частоты ω_0 и ω_1 одинаковы, так что условие на частоты принимает вид $\omega_2 = 2\omega_1$, и задача редуцируется к рассмотрению взаимодействия двух мод. Такое предположение облегчает рассмотрение и делает анализ более обозримым, поскольку динамика зависит от меньшего числа параметров. Для этого случая в работе Вышкинд и Рабиновича выведена и проанализирована модель, описываемая системой трех дифференциальных уравнений первого порядка, которую авторы считают оправданным трактовать как модель определенного типа волновой турбулентности в диссипативных средах. Эта модель в настоящее время признана одним из классических примеров маломерных систем, демонстрирующих динамический хаос.

Задача о динамике резонансного триплета при неустойчивости высокочастотной моды может рассматриваться как обобщение, охватывающее системы различной физической природы, многие из которых имеют очевидное прикладное значение. В частности, уместно сослаться на работы, посвященные спиновым волнам в магнитных пленках и процессам, связанным с генерацией второй гармоники в нелинейной оптике [2–6].

Так, в работе [2] исследована модуляционная неустойчивость спиновых волн в магнитных пленках в условиях трехмагنونного распада, выяснены механизмы этого явления и стохастизации огибающей при автомодуляции. А в работе [3] представлено экспериментальное исследование кольцевой автоколебательной системы на основе ферромагнитной структуры в случае, когда разрешены трехмагнотные процессы распада, и построена модель, на основе которой рассчитаны характерные режимы генерации, включая генерацию хаотической последовательности СВЧ-импульсов. Результаты численного моделирования сравниваются с экспериментальными данными. В работе [4] изучена простая модель нелинейного насыщения неустойчивой моды и показано, что по мере увеличения затухания в системе имеет место переход к хаосу через последовательность бифуркаций. Объяснение этому дается на основе одномерного отображения, которое численно выводится из исходной системы дифференциальных уравнений.

Естественной и полезной видится возможность аналогового моделирования динамических феноменов с использованием простейшего представителя систем, охватываемых в рамках данного обобщения, удобного для реализации и экспериментального исследования. В качестве такового представляет интерес предлагаемая в настоящей статье простая электронная схема. Это схема на основе двух колебательных контуров, один из которых включает отрицательную проводимость, и при этом присутствует специально сконструированный реактивный нелинейный элемент с характеристикой, практически точно даваемой квадратичной функцией, который ранее был использован применительно к другой системе с параметрическим взаимодействием мод [7]. Теоретическое описание схемы позволяет получить для нее уравнения, совпадающие с моделью турбулентности Вышкинд–Рабиновича [1].

1. Схема параметрического генератора

Рассмотрим приведенную на рис. 1 схему, составленную из двух колебательных контуров, один из которых включает отрицательную проводимость, обеспеченную подключением операционного усилителя ОА2.

Эффект насыщения автоколебаний и их хаотизация обусловлены параметрическим механизмом благодаря присутствию квадратичного нелинейного реактивного элемента на основе операционного усилителя ОА1 и аналогового умножителя А1. При подаче напряжения U на вход этого элемента, такой потенциал относительно земли имеет место на обеих входных клеммах операционного усилителя. Поскольку входное сопротивление операционного усилителя в идеале бесконечное, наличие тока U/R через резистор R_5 , имеющий заземленный отвод, подразумевает наличие такого же тока через соединенный с ним резистор R_4 , поэтому напряжение на входе аналогового умножителя А1 обязано быть равным $2U$. Следовательно, на его выходе имеем напряжение $4KU^2$, где K – коэффициент передачи, имеющий размерность обратного напряжения. Токи, протекающие через один и другой конденсаторы C_0 , составляют $C_0 dU/dt$ и $(d/dt)(4KU^2 - C_0U)$, давая в сумме ток через нелинейный элемент \tilde{C} .

Собственные частоты колебательных контуров без учета диссипации полагаем удовлетворяющими, по крайней мере, приближенно, условиям параметрического резонанса

$$\Omega_2 \approx \Omega_1. \tag{1}$$

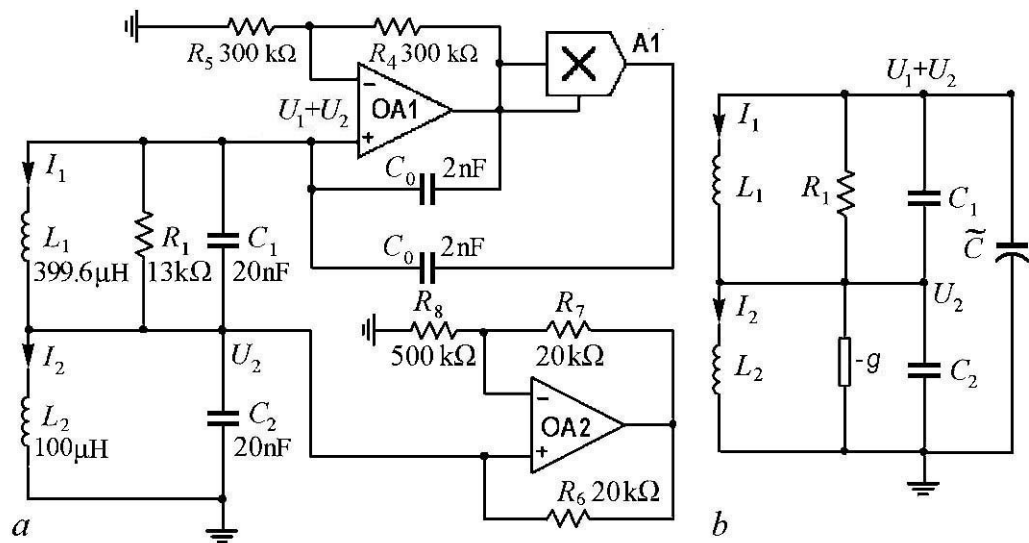


Рис. 1. Схема параметрического генератора хаоса (а) и её эквивалентная схема (b), где $(-g)=1/R_g$ – отрицательная проводимость, наличие которой обеспечено присутствием операционного усилителя ОА2, а \tilde{C} обозначает реактивный элемент – двухполюсник с квадратичной нелинейностью, реализованный с использованием операционного усилителя ОА1. Коэффициент передачи умножителя А1 составляет $K = 1/8 \text{ V}^{-1}$

Fig. 1. The scheme of the parametric chaos generator (a) and its equivalent scheme (b), $(-g)=1/R_g$ is negative conductivity, the presence of which is provided by the presence of an operational amplifier ОА2, \tilde{C} is reactive element (it is a two-terminal network with a quadratic nonlinearity realized using an operational amplifier ОА1). Multiplier transfer factor А1 is $K = 1/8 \text{ V}^{-1}$

На рис. 2 представлены графики реализаций напряжения на конденсаторах C_1 и C_2 , полученные с помощью виртуального осциллографа при моделировании схемы в среде Multisim с номиналами компонентов, указанными в подписи к рисунку. После переходного процесса возникает режим нелинейных колебаний. В приведенном масштабе неразличимо высокочастотное заполнение, но видна нерегулярная, очевидно, хаотическая, динамика амплитуд.

В рамках схемотехнического моделирования в среде Multisim затруднительно выявить некоторые существенные особенности динамики, включая ожидаемое присутствие хаотического аттрактора, и определить такие характеристики, как показатели Ляпунова, поэтому в следующих разделах рассматриваются уравнения, описывающие систему, и анализируются результаты их численного решения.

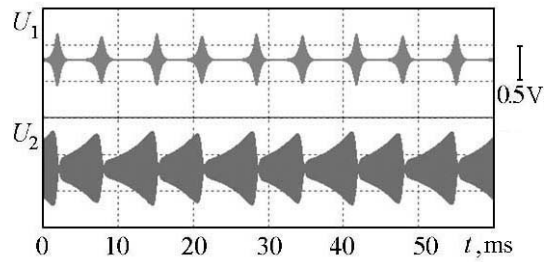


Рис. 2. Типичный вид временных зависимостей напряжений на конденсаторах C_1 и C_2 при моделировании схемы в среде Multisim с $R_8 = 500 \text{ k}\Omega$ и остальными номиналами компонентов, приведенными на рис. 1

Fig. 2. A typical type of time dependences of voltage on capacitors C_1 and C_2 obtained by simulation of the scheme in the Multisim with $R_8 = 500 \text{ k}\Omega$. The other nominal values of the components are shown in Fig. 1

2. Основные уравнения параметрического генератора

Пусть U_1, U_2 – напряжения на конденсаторах C_1 и C_2 , имеющих одинаковую емкость C , а I_1, I_2 – токи через катушки индуктивности L_1 и L_2 . Уравнения Кирхгофа записываются в виде

$$\begin{aligned} L_1 \dot{I}_1 &= U_1, \\ L_2 \dot{I}_2 &= U_2, \\ C \dot{U}_1 + U_1/R_1 + I_1 &= -I, \\ C \dot{U}_2 + U_2/R_2 + I_2 &= -I, \end{aligned} \quad (2)$$

где I – ток через нелинейный элемент, определяемый выражением

$$I = \frac{d}{dt} 4KC_0 U^2 = \varepsilon \frac{dU^2}{dt} \quad (3)$$

Здесь $\varepsilon = 8KC_0/C$, $C = C_1 = C_2$, и

$$U = U_1 + U_2. \quad (4)$$

Уравнения также можно переписать в виде

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dt^2} \left(U_1 + \frac{1}{2} \varepsilon U^2 \right) + \frac{1}{R_1 C} \frac{dU_1}{dt} + \frac{U_1}{L_1 C} &= 0, \\ \frac{d^2}{dt^2} \left(U_2 + \frac{1}{2} \varepsilon U^2 \right) - \frac{g}{C} \frac{dU_2}{dt} + \frac{U_2}{L_2 C} &= 0. \end{aligned} \quad (5)$$

Введем нормированное безразмерное время $t' = t/(2R_1C)$. Тогда уравнения переписутся в виде

$$\begin{aligned} \ddot{X}_1 + 2\dot{U}_1 + \Omega_1^2 U_1 &= 0, \\ \ddot{X}_2 - 2\gamma\dot{U}_2 + \Omega_2^2 U_2 &= 0, \\ X_{1,2} &= U_{1,2} + \frac{1}{2}\varepsilon U^2, \end{aligned} \quad (6)$$

где

$$\gamma = gR_1 = \frac{R_1}{R_g}, \quad \Omega_{1,2} = 2R_1\sqrt{\frac{C}{L_{1,2}}}, \quad (7)$$

и точки обозначают производные по безразмерному времени. Для численного решения их удобно переписать в виде системы первого порядка:

$$\begin{aligned} \dot{Y}_1 &= -\Omega_1 U_1, & \dot{X}_1 &= \Omega_1 Y_1 - 2U_1, \\ \dot{Y}_2 &= -\Omega_2 U_2, & \dot{X}_2 &= \Omega_2 Y_2 + 2\gamma U_2, \\ U_{1,2} &= X_{1,2} - \frac{1}{2}\varepsilon U^2, & U &= \frac{-1 + \sqrt{4\varepsilon(X_1 + X_2) + 1}}{2\varepsilon}. \end{aligned} \quad (8)$$

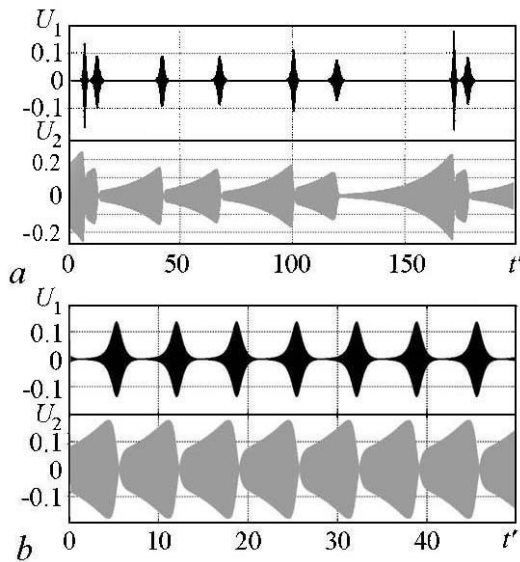


Рис. 3. Типичный вид временных зависимостей напряжений на конденсаторах C_1 и C_2 , полученных численным решением уравнений (8) при $\varepsilon = 0.1$: a – хаотический режим $\gamma = 0.026$; b – периодический режим $\gamma = 0.2$

Fig. 3. Typical type of time dependences of voltage on capacitors C_1 and C_2 obtained by numerical solution of equations (8) at $\varepsilon = 0.1$: a – chaotic regime $\gamma = 0.026$; b – periodic regime $\gamma = 0.2$

Собственные частоты колебательных контуров без учета диссипации полагаем удовлетворяющими, по крайней мере, приближенно, условию параметрического резонанса (1).

На рис. 3 показаны временные зависимости величин U_1 и U_2 , полученные при численном решении уравнений (8).¹ Сравнивая графики на рис. 2 и рис. 3, a , можно видеть некоторое соответствие наблюдаемой динамики. В обоих случаях имеем хаотические по виду реализации, содержащие похожие по виду фрагменты сигналов. При этом можно видеть соответствие по характерным масштабам времен и напряжений.

Расчет показателей Ляпунова путем совместного численного решения уравнений (8) и соответствующих уравнений в вариациях на основе известного алгоритма с ортогонализацией векторов возмущения по Граму–Шмидту [8, 9] дает² $\lambda_1=0.00956\pm 0.00001$, $\lambda_2=0.0000\pm 0.0001$, $\lambda_3=-0.00854\pm 0.00001$, $\lambda_4=-1.9506\pm 0.0001$.

¹Для схемы, показанной на рис. 1, изменение параметра γ обеспечивается заданием сопротивления $R_g = 500$ к Ω . Остальные номиналы схемы соответствуют приведенным на рис. 1.

²Вычисления показателей Ляпунова проводились на интервалах нормированного времени длительности 3500 с подсчетом среднего значения и среднеквадратичного отклонения по 50 реализациям. В качестве погрешности указывается оценка среднеквадратичного отклонения.

Присутствие положительного показателя говорит о наличии хаоса, характеризуемого экспоненциальным ростом отклонения от опорной траектории на аттракторе при малом возмущении начальных условий. Второй показатель, равный нулю с точностью до ошибки вычисления, ассоциируется с возмущением типа сдвига вдоль траектории. Третий и четвертый показатели – отрицательные и отвечают за приближение траекторий к аттрактору. Тот факт, что сумма показателей отрицательна, свидетельствует о сжатии фазового объема в трехмерном пространстве состояний. Она согласуется с аналитическим вычислением дивергенции векторного поля, заданного правыми частями уравнений (8): $\text{div } \mathbf{F} = \partial_x f_x + \partial_y f_y + \partial_z f_z + \partial_w f_w = \gamma - 1 = -0.974$. Оценка размерности аттрактора по известной формуле Каплана–Йорке дает $D = 3 + \lambda_1/|\lambda_3| \approx 3.005$.

На рис. 4 приводится зависимость четырех показателей Ляпунова модели (8) от параметра γ . Из рисунка видно, что при $\gamma < 0.1$ старший показатель положительный (пусть и небольшой по величине), что говорит о наличии хаотической динамики. А вот при значениях параметра $\gamma > 0.1$ первый и второй показатели равны нулю, а третий и четвертый отрицательные, то есть в данной области реализуется периодический режим. Соответствующие зависимости величин U_1 и U_2 , полученные при численном решении уравнений (8) представлены на рис. 3, *b*, а показатели Ляпунова равны: $\lambda_1 = 0.0000 \pm 0.0001$, $\lambda_2 = 0.0000 \pm 0.0001$, $\lambda_3 = -0.3539 \pm 0.0001$, $\lambda_4 = -1.2486 \pm 0.0001$. При этом на графике старшего показателя Ляпунова можно видеть провалы (окна регулярности), которые сопровождаются также выбросами или провалами на графиках остальных показателей. Именно такой вид графиков показателей Ляпунова в зависимости от параметра характерен для одномерных отображений с квадратичным экстремумом и многих других диссипативных систем, включая отображение Эно и модель Рёсслера, которые демонстрируют переход к хаосу через каскад бифуркаций удвоения периода [10, 11] и ассоциируются с концепцией квазиаттрактора [12, 13].

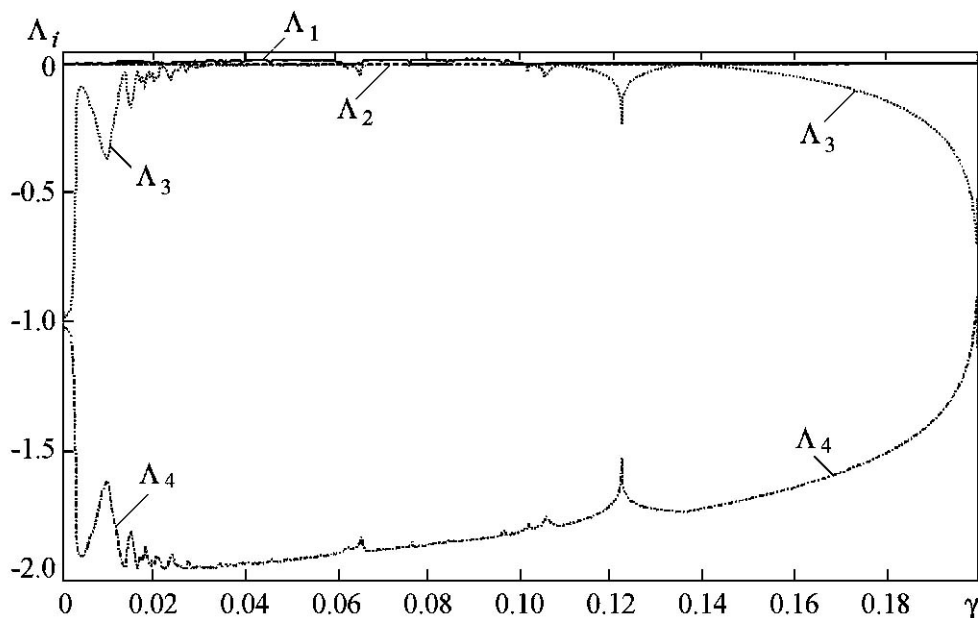


Рис. 4. Зависимость четырёх показателей Ляпунова от параметра γ , полученная численно для уравнений (8) при $\varepsilon = 0.1$

Fig. 4. Numerically graphs of four Lyapunov exponents for equations (8) at the value of the parameter $\varepsilon = 0.1$

3. Уравнения для медленных амплитуд

Для получения уравнений в форме, допускающей сравнение с моделью Вышкинд–Рабиновича, нужно использовать метод медленных комплексных амплитуд.

Начнем с того, что перепишем уравнения еще раз, учитывая только те члены, которые могут отвечать за резонансные взаимодействия мод при предполагаемом соотношении частот. Согласно (3) имеем

$$\begin{aligned}\frac{d^2U_1}{dt^2} + 2\frac{dU_1}{dt} + \Omega_1^2U_1 &= -\frac{1}{2}\varepsilon\frac{d^2U^2}{dt^2}, \\ \frac{d^2U_2}{dt^2} - 2\gamma\frac{dU_2}{dt} + \Omega_2^2U_2 &= -\frac{1}{2}\varepsilon\frac{d^2U^2}{dt^2},\end{aligned}\quad (9)$$

здесь и далее штрихи у временной переменной для краткости опущены.

В первом и втором уравнениях, учитывая лишь резонансные члены, следует положить, соответственно,

$$\frac{1}{2}U^2 \approx U_1U_2, \quad \frac{1}{2}U^2 \approx \frac{1}{2}U_1^2, \quad (10)$$

и, кроме того, можно заменить операцию взятия второй производной в правых частях множителями $(-\Omega_{1,2}^2)$. В результате имеем

$$\begin{aligned}\ddot{U}_1 + 2\dot{U}_1 + \Omega_1^2U_1 &= \varepsilon\Omega_1^2U_1U_2, \\ \ddot{U}_2 - 2\gamma\dot{U}_2 + \Omega_2^2U_2 &= \frac{1}{2}\varepsilon\Omega_2^2U_1^2.\end{aligned}\quad (11)$$

Будем искать решение в виде

$$\begin{aligned}U_1 &= A_1e^{i\omega_1t} + A_1^*e^{-i\omega_1t}, \quad \dot{U}_1 = i\omega_1A_1e^{i\omega_1t} - i\omega_1A_1^*e^{-i\omega_1t}, \\ U_2 &= A_2e^{i\omega_2t} + A_2^*e^{-i\omega_2t}, \quad \dot{U}_2 = i\omega_2A_2e^{i\omega_2t} - i\omega_2A_2^*e^{-i\omega_2t}\end{aligned}\quad (12)$$

что подразумевает выполнение дополнительных условий на введенные комплексные амплитудные переменные A_1 и A_2

$$\dot{A}_1e^{i\omega_1t} + \dot{A}_1^*e^{-i\omega_1t} = 0, \quad \dot{A}_2e^{i\omega_2t} + \dot{A}_2^*e^{-i\omega_2t} = 0. \quad (13)$$

Опорные частоты $\omega_{1,2}$ определим как

$$\omega_1 = \Omega_1, \quad \omega_2 = 2\Omega_1, \quad (14)$$

при этом $\omega_2 \approx \Omega_2$, но точное равенство не предполагается – будет учтена соответствующая расстройка. Подстановка в уравнения (11) дает

$$\begin{aligned}2i\omega_1\dot{A}_1 + 2i\omega_1A_1 &= \varepsilon\Omega_1^2A_1^*A_2, \\ 2i\omega_2\dot{A}_2 - 2i\omega_2\gamma A_2 - (\Omega_2^2 - \omega_2^2)A_2 &= \frac{1}{2}\varepsilon\Omega_2^2A_1^2,\end{aligned}\quad (15)$$

или

$$\begin{aligned}\dot{A}_1 + A_1 &= -\frac{1}{2}i\varepsilon\Omega_1A_1^*A_2, \\ \dot{A}_2 - \gamma A_2 - i\delta A_2 &= -\frac{1}{4}i\varepsilon\Omega_2A_1^2,\end{aligned}\quad (16)$$

где

$$\delta = \frac{\omega_2^2 - \Omega_2^2}{2\omega_2} = \frac{(2\Omega_1 - \Omega_2)(2\Omega_1 + \Omega_2)}{2\omega_2} \approx 2\Omega_1 - \Omega_2 \quad (17)$$

представляет собой частотную расстройку.

Выполним теперь перенормировку

$$A_1 = \frac{2\sqrt{2}}{\varepsilon\sqrt{\Omega_1\Omega_2}}a_1 \approx \frac{2}{\varepsilon\Omega_1}a_1, \quad A_2 = \frac{2}{\varepsilon\Omega_1}a_2 \quad (18)$$

и получим окончательно

$$\begin{aligned} \dot{a}_1 + a_1 &= -ia_1^*a_2, \\ \dot{a}_2 - \gamma a_2 - i\delta a_2 &= -ia_1^2. \end{aligned} \quad (19)$$

Это и есть система укороченных уравнений модели (8). Для того чтобы получить модель Вышкинд–Рабиновича, сделаем подстановку вида

$$a_1 = Ae^{i\varphi}, \quad a_2 = Be^{i\Phi}, \quad \Phi = \varphi - 2\varphi \quad (20)$$

в уравнения (19). Здесь A и B вещественные переменные, а Φ разность фаз. Тогда получаем

$$\begin{aligned} \dot{A} &= AB \sin \Phi - A, \\ \dot{B} &= -A^2 \sin \Phi + \gamma B, \\ \dot{\Phi} &= (2B - A^2 B^{-1}) \cos \Phi + \delta. \end{aligned} \quad (21)$$

Если теперь ввести новые переменные

$$X = -B \sin \Phi, \quad Y = -B \cos \Phi, \quad Z = A^2, \quad (22)$$

то уравнения (21) примут вид

$$\begin{aligned} \dot{X} &= Z + \delta Y - 2Y^2 + \gamma X, \\ \dot{Y} &= -\delta X + 2XY + \gamma Y, \\ \dot{Z} &= -2Z(X + 1), \end{aligned} \quad (23)$$

что соответствует модели Вышкинд–Рабиновича, полученной в работе [1] для описания турбулентности в диссипативной среде с гидродинамическим типом нелинейности.

4. Динамика системы укороченных уравнений

Теперь рассмотрим динамику системы укороченных уравнений (19). На рис. 5 представлена полученная численно зависимость четырех показателей Ляпунова модели (19) от параметра γ . Отметим, что зависимости показателей Ляпунова исходной системы (8) и укороченных уравнений (19) очень близки, за исключением области малых значений параметра $\gamma < 0.03$.

На рис. 6 для хаотического и периодического режимов представлены зависимости медленных амплитуд $|a_1|$ и $|a_2|$ от времени. Реализации демонстрируют

типичное для указанных режимов поведение. Показатели Ляпунова для хаотического режима: $\lambda_1=0.009593\pm 0.000001$, $\lambda_2=0.000000\pm 0.000001$, $\lambda_3=0.000000\pm 0.000001$, $\lambda_4= - 1.957592\pm 0.000001$; для периодического: $\lambda_1=0.000000\pm 0.000001$, $\lambda_2=0.000000\pm 0.000001$, $\lambda_3= - 0.145560\pm 0.000001$, $\lambda_4= - 1.454439\pm 0.000001$.

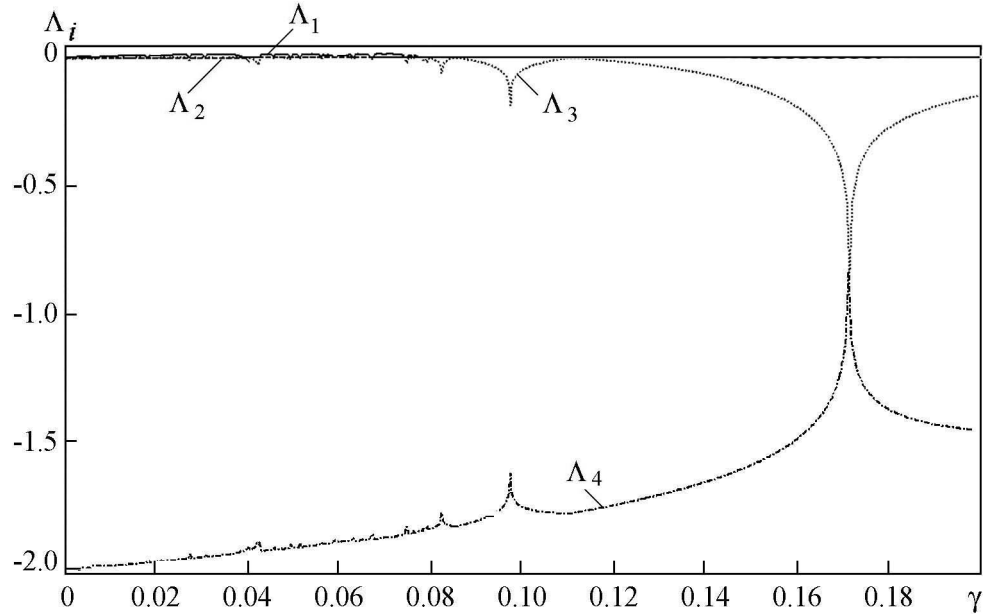


Рис. 5. Зависимость показателей Ляпунова от параметра γ , полученная численно для уравнений (19). $\delta = 0.184$

Fig. 5. Numerically graphs of four Lyapunov exponents of equations (19) at the value of the parameter $\delta = 0.184$

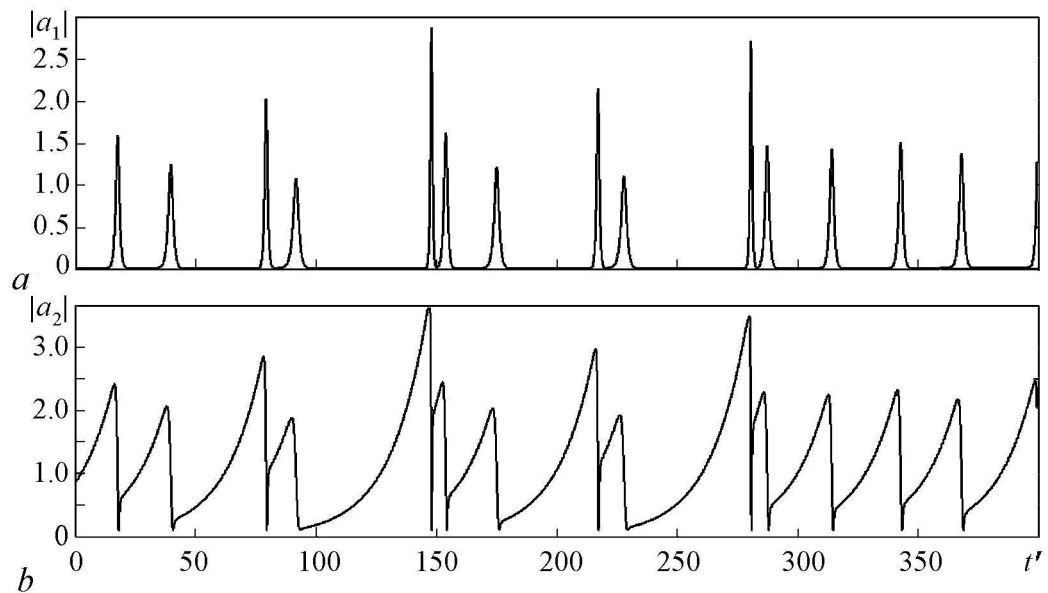


Рис. 6. Типичный вид временных зависимостей величин $|a_1|$ и $|a_2|$ системы укороченных уравнений (19). a – хаотический режим $\gamma = 0.026$; b – периодический режим $\gamma = 0.2$. $\varepsilon = 0.1$

Fig. 6. Typical type of time dependences of $|a_1|$ and $|a_2|$ system of truncated equations (19). a – chaotic regime $\gamma = 0.026$; b – periodic regime $\gamma = 0.2$. $\varepsilon = 0.1$

5. Регулярная и хаотическая динамика модели Вышкинд–Рабиновича

Обратимся к рассмотрению модельной системы Вышкинд–Рабиновича (23) и построим для нее карту динамических режимов на плоскости параметров (δ, γ) . Процедура состоит в сканировании путем перебора узлов сетки с некоторым шагом по двум параметрам. В каждой точке выполняется порядка 500 итераций отображения Пуанкаре, определенного для системы (23) с помощью секущей поверхности в фазовом пространстве $S = Z + \delta Y - 2Y^2 + \gamma X = 0$ (с проходом в направлении возрастания S). По результатам последних шагов итераций проводится анализ присутствия или отсутствия периода повторения состояний в сечении Пуанкаре от 1 до 16 с некоторым заданным изначально уровнем допустимой погрешности. При обнаружении периодичности соответствующий пиксель на диаграмме обозначается цветом, определяемым периодом повторения состояний, в противном случае пиксель отмечается черным цветом. Далее производится переход к анализу следующей точки на плоскости параметров. При этом в качестве начальных условий в новой точке разумно задавать состояние, полученное в итоге итераций в предыдущей точке («сканирование с наследованием»), что способствует ускорению сходимости к установившемуся режиму динамики. Соответствующая карта показана на рис. 7. По периферии рисунка изображены портреты аттракторов, отвечающие точкам, отмеченным на плоскости параметров.

Отметим, что карта динамических режимов имеет типичный для динамических систем с переходом к хаосу через каскад бифуркаций удвоения периода вид. Аттрактор в области хаоса похож на аттрактор Ресслера [8, 10]. Расчет показателей дает для хаотического режима: $\lambda_1 = 0.00961 \pm 0.00001$, $\lambda_2 = 0.00000 \pm 0.00001$, $\lambda_3 = -1.95760 \pm 0.00001$; для режима периода 1: $\lambda_1 = 0.000000 \pm 0.000001$,

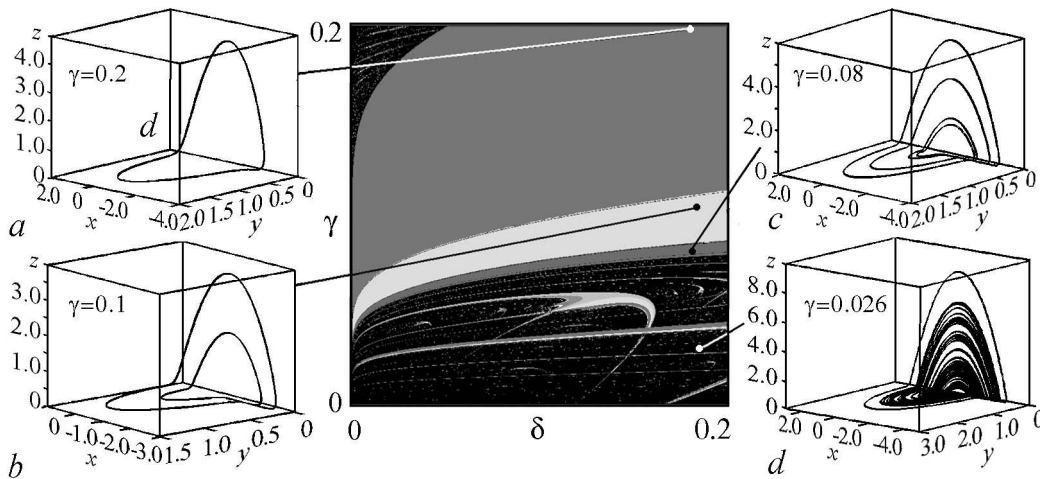


Рис. 7. Карта динамических режимов системы (23) на плоскости параметров (δ, γ) и портреты аттракторов в выделенных точках; для всех аттракторов $\delta = 0.184$

Fig. 7. Chart of dynamical regimes of model (23) at the parameter plane (δ, γ) and attractors plotted at the marked points; for all attractors $\delta = 0.184$

$\lambda_2 = -0.14556 \pm 0.00001$, $\lambda_3 = -1.45444 \pm 0.00001$. А размерность хаотического аттрактора $D = 2 + \lambda_1/|\lambda_3| \approx 2.004909$.

На рис. 8 приводится зависимость трех показателей Ляпунова модели (23) от параметра γ . Отметим, что на качественном уровне зависимости показателей Ляпунова исходной системы (8) и модели Вышкинд–Рабиновича (23) идентичны (сравним рис. 4 и рис. 8). В обоих случаях в области небольших значений параметра γ наблюдается хаос, который рождается из предельного цикла в результате каскада бифуркаций удвоения периода.

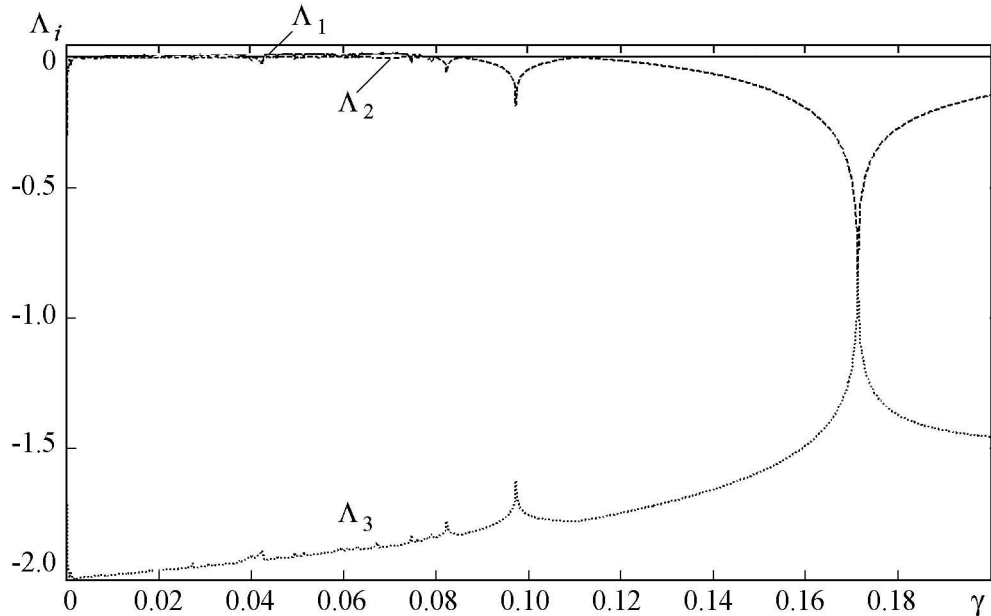


Рис. 8. Зависимость показателей Ляпунова от параметра γ , полученная численно для уравнений (23); $\delta = 0.184$

Fig. 8. Graphs of three Lyapunov exponents of equations (23) at the value of the parameter $\delta = 0.184$

Заключение

В работе проанализирована схема параметрического генератора хаоса на базе двух колебательных контуров, один из которых включает отрицательную проводимость. Для нее получены уравнения, описывающие динамику системы, в том числе уравнения, непосредственно описывающие осцилляции напряжений и токов в колебательных контурах, амплитудные уравнения и уравнения в форме модели Вышкинд–Рабиновича. Динамика указанных моделей была исследована численно с помощью методов теории динамического хаоса: построены реализации динамических переменных от времени, портреты аттракторов, зависимости показателей Ляпунова. Для модели Вышкинд–Рабиновича также была построена карта динамических режимов на плоскости параметров. Результаты, полученные для всех моделей, находятся в хорошем соответствии. Показано, что все системы демонстрируют переход к хаосу через последовательность бифуркаций удвоения периода при уменьше-

нии одного из параметров. Возникающий хаотический аттрактор по своей структуре аналогичен аттрактору Ресслера.

Проведено схемотехническое моделирование системы с использованием программного продукта Multisim, результаты которого согласуются с результатами численного исследования системы.

Проведенный анализ показывает возможность использования рассмотренной электронной схемы для аналогового моделирования колебательно-волновых явлений в системах, к которым применимы модельные представления, развитые С.Я. Вышкинд и М.И. Рабиновичем.

Разработка схемы электронного генератора, вывод уравнений и схемотехническое моделирование (разделы 1, 2 3) выполнены при поддержке гранта РФФИ № 15-02-02893. Численные расчеты, обработка и интерпретация результатов (разделы 4, 5) выполнены за счет гранта Российского научного фонда (проект № 17-12-01008).

Библиографический список

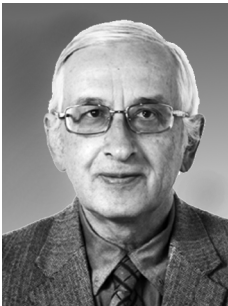
1. *Вышкинд С.Я., Рабинович М.И.* Механизм стохастизации фаз и структура волновой турбулентности в диссипативных средах // ЖЭТФ. 1976. Т. 71, № 2. С. 557–571.
2. *Демидов В.Е., Ковшиков Н.Г.* Механизм возникновения и стохастизации автомодуляции интенсивных спиновых волн // Журнал технической физики. 1999. Т. 69, № 8. С. 100–103.
3. *Романенко Д.В.* Генерация хаотической последовательности СВЧ-импульсов в автоколебательной системе с ферромагнитной плёнкой // Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика. 2012. Т. 20, № 1. С. 67–74.
4. *Wersinger J.M., Finn J.M., Ott E.* Bifurcation and «strange» behavior in instability saturation by nonlinear three-wave mode coupling // The Physics of Fluids. 1980. Vol. 23, № 6. Pp. 1142–1154.
5. *Savage C.M., Walls D.F.* Optical chaos in second-harmonic generation // Journal of Modern Optics. 1983. Vol. 30, № 5. Pp. 557–561.
6. *Lythe G.D., Proctor M.R.E.* Noise and slow-fast dynamics in a three-wave resonance problem // Physical Review E. 1993. Vol. 47, no. 5. 3122.
7. *Кузнецов С.П.* Аттрактор типа Лоренца в электронном параметрическом генераторе и его трансформация при нарушении точных условий параметрического резонанса // Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика. 2016. Т. 24, № 3. С. 68–87.
8. *Кузнецов С.П.* Динамический хаос. Москва: Физматлит, 2001. 296 с.
9. *Benettin G., Galgani L., Giorgilli A., Strelcyn J.-M.* Lyapunov characteristic exponents for smooth dynamical systems and for Hamiltonian systems: A method for computing all of them // Meccanica. 1980. Vol. 15. P. 9–20.

10. Rössler O.E. Continuous chaos: four prototype equations // *Ann. New York Academy of Sciences*. 1979. Vol. 316. P. 376–392.
11. Hénon M. A two-dimensional mapping with a strange attractor // *Commun. Math. Phys.* 1976. Vol. 50. P. 69–77.
12. Afraimovich V.S. Strange attractors and quasiattractors // *Nonlinear and turbulent processes in physics*. 1984. Vol. 1. P. 1133–1138.
13. Шильников Л.П. Бифуркации и странные аттракторы // *Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского*. 2011. № 4(2). С. 364–366.

References

1. Vyshkind S.Y., Rabinovich M.I. The phase stochastization mechanism and the structure of wave turbulence in dissipative media. *Soviet Journal of Experimental and Theoretical Physics*, 1976, vol. 44, pp. 292–299.
2. Demidov V.E., Kovschikov N.G. Mechanism of occurrence and stochastization of self-modulation of intense spin waves. *Technical Physics*, 1999, vol. 69, iss. 8, pp. 100–103.
3. Romanenko D.V. Chaotic microwave pulse train generation in self-oscillatory system based on a ferromagnetic film. *Izvestiya VUZ, Applied Nonlinear Dynamics*, 2012, Vol. 20, iss. 1, pp. 67–74 (in Russian).
4. Wersinger J.M., Finn J.M., Ott E. Bifurcation and «strange» behavior in instability saturation by nonlinear three-wave mode coupling. *The Physics of Fluids*, 1980, vol. 23, no. 6, pp. 1142–1154.
5. Savage C.M., Walls D.F. Optical chaos in second-harmonic generation. *Journal of Modern Optics*, 1983, vol. 30, no. 5, pp. 557–561.
6. Lythe G.D., Proctor M.R.E. Noise and slow-fast dynamics in a three-wave resonance problem. *Physical Review E*, 1993, vol. 47, no. 5, 3122.
7. Kuznetsov S.P. Lorenz type attractors in electronic parametric generator and its transformation outside the accurate parametric resonance. *Izvestiya VUZ, Applied Nonlinear Dynamics*, 2016, vol. 24, iss.3, pp. 68–87 (in Russian).
8. Kuznetsov S.P. *Dynamical Chaos*. Moscow: Fizmatlit, 2006. 356h. (in Russian).
9. Benettin G., Galgani L., Giorgilli A., Strelcyn J.-M. Lyapunov characteristic exponents for smooth dynamical systems and for Hamiltonian systems: A method for computing all of them. *Meccanica*, 1980, Vol. 15, pp. 9–20.
10. Rössler O.E. Continuous chaos: four prototype equations. *Ann. New York Academy of Sciences*, 1979, vol. 316, pp. 376–392.
11. Hénon M. A two-dimensional mapping with a strange attractor. *Commun. Math. Phys.* 1976, vol. 50, pp. 69–77.
12. Afraimovich V.S. Strange attractors and quasiattractors. *Nonlinear and turbulent processes in physics*, 1984, vol. 1, pp. 1133–1138.
13. Shilnikov L.P. Bifurcations and strange attractors. *Vestnik Nizhegorodskogo Universiteta*, 2011, no. 4(2), pp. 364–366 (in Russian).

Кузнецов Сергей Петрович – родился в Москве (1951). Окончил Саратовский государственный университет (1973). Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук (СГУ, 1977) и доктора наук (СГУ, 1987) по специальности радиофизика. Профессор базовой кафедры динамических систем СГУ. Главный научный сотрудник Саратовского филиала Института радиотехники и электроники им. В.А. Котельникова РАН. Руководит лабораторией теоретической нелинейной динамики. Главный научный сотрудник лаборатории нелинейного анализа и конструирования новых средств передвижения Удмуртского государственного университета. Автор монографий «Динамический хаос и гиперболические аттракторы: От математики к физике», «Hyperbolic Chaos. A Physicist's View», «Strange Nonchaotic Attractors» (совместно с А. Пиковским и У. Фойдель), а также учебно-научных монографий «Динамический хаос» и «Нелинейные колебания» (в соавторстве с А.П. Кузнецовым и Н.М. Рыскиным). Опубликовал свыше 200 научных статей по нелинейной динамике, радиофизике и электронике. Под его руководством защищены двенадцать кандидатских диссертаций. Лауреат Государственной научной стипендии для ученых России (1994–1996), Соросовский доцент (1998), Соросовский профессор (2000, 2001). Член редакционной коллегии журналов «Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика», «Regular and Chaotic Dynamics», «Нелинейная динамика», «Известия Саратовского университета – Новая серия. Серия Физика».



410019 Саратов, ул. Зеленая, 38
Саратовский филиал ИРЭ имени В.А. Котельникова РАН
410012, Саратов, Астраханская, 83
Саратовский государственный университет
E-mail: spkuz@yandex.ru

Тюрюкина Людмила Владимировна родилась в Саратове (1977). Окончила Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского (2000). Обучалась в очной аспирантуре Саратовского государственного университета (2000–2003), по окончании которой защитила диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности «Радиофизика», имеет звание доцента по специальности «Радиофизика» (2009). В настоящее время работает в Саратовском филиале Института радиотехники и электроники им. В.А. Котельникова РАН. По совместительству работает доцентом на кафедре динамических систем ФНП на базе СФ ИРЭ им. В.А. Котельникова РАН. Опубликовала более 50 статей по направлениям, указанным выше.



410019 Саратов, ул. Зеленая, 38
Саратовский филиал ИРЭ имени В.А. Котельникова РАН
410012, Саратов, Астраханская, 83
Саратовский государственный университет
E-mail: spkuz@yandex.ru



УДК 517.9, 621.372

МУЛЬТИСТАБИЛЬНОСТЬ БЕГУЩИХ ВОЛН В АНСАМБЛЕ ГАРМОНИЧЕСКИХ ГЕНЕРАТОРОВ С ДАЛЬНОДЕЙСТВУЮЩИМИ СВЯЗЯМИ

А. В. Шабунин

Саратовский национальный исследовательский государственный университет
Россия, 410012 Саратов, ул. Астраханская, 83
E-mail: shabuninav@info.sgu.ru

Поступила в редакцию 27.09.2017, после доработки 14.11.2017

Работа посвящена исследованию мультистабильности бегущих волн в кольце гармонических осцилляторов с линейными нелокальными связями. В ней проводится анализ влияния величины и дальности действия связей на устойчивость пространственно-периодических режимов с разными значениями длин волн. В качестве модели выбрана система идентичных генераторов ван дер Поля, которые рассматриваются в приближении квази-гармонических колебаний. Выбранная модель, с одной стороны, является максимально простой, что открывает возможности для аналитического исследования, с другой стороны, позволяет изучать на своем примере динамику произвольных автоколебательных систем с почти гармоническим поведением. Анализ мультистабильности проводится посредством построения приближенного аналитического решения по методу медленно меняющихся амплитуд, устойчивость которого определяется по стандартной методике расчета собственных значений матрицы линеаризации и в ряде случаев дополняется численными расчетами.

Исследования показали, что число одновременно существующих мод ограничивается величиной фазового сдвига между колебаниями подсистем на длине связи. В отличие от локально связанных осцилляторов максимально допустимая величина фазового сдвига может превышать 0.5 π и при большом дальности действия достигать величины 0.7 π . Каждая из сосуществующих мод рождается из единственного состояния равновесия в начале координат в виде седлового предельного цикла (за исключением синфазного режима) и затем, при увеличении параметра возбуждения, становится устойчивой. Области устойчивости пространственно-периодических режимов представляют собой вложенный набор конусов, когда области более коротковолновых режимов располагаются внутри областей более длинных волн.

Ключевые слова: нелинейные колебания, ансамбли осцилляторов, синхронизация, мультистабильность, бегущие волны.

DOI: 10.18500/0869-6632-2018-26-1-48-63

Образец цитирования: Шабунин А.В. Мультистабильность бегущих волн в ансамбле гармонических генераторов с дальнедействующими связями // Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2018. Т. 26, № 1. С. 48–63. DOI: 10.18500/0869-6632-2018-26-1-48-63

MULTISTABILITY OF TRAVELING WAVES IN AN ENSEMBLE OF HARMONIC OSCILLATORS WITH LONG-RANGE COUPLINGS

A. V. Shabunin

Saratov State University
83, Astrakhanskaya, 410012 Saratov, Russia
E-mail: shabuninav@info.sgu.ru

Received 27.09.2017, revised 14.11.2017

The work is devoted to study of multistability of traveling waves in a ring of harmonic oscillators with a linear non-local couplings. It analyses the influence of the strength and radius of the couplings on stability of spatially periodic regimes with different values of their wavelengths. The system under study is an array of identical van der Pol generators in the approximation of quasi-harmonic oscillations. On the one hand, the chosen model is a very simple one, that allows analytical studies; on the other hand, it applicable to a wide range of oscillatory systems with almost harmonic behavior. The research of the multistability is carried out in the way of the constructing analytical solutions by means of the method of slowly-changing amplitudes and then, by the standard methods of the stability analysis of the linearization matrix eigenvalues. In some cases the analytical solution are supported by numerical calculations.

The study has shown that the number of simultaneously coexisting regimes is bounded by the value of the phase shift between oscillations of the subsystems on the length of the links. In the contrary of the locally coupled oscillators, here the maximum value of the phase shift may exceed the value of 0.5π and can reach a value of 0.7π . The every coexisting wave is born from the equilibrium in the origin as a saddle limit cycle (excluding the in-phase oscillating mode), which then becomes stable further on the parameter. Regions of stability of spatially periodic regimes represent a set of cones, where regions of shorter wave locate inside of the regions with much longer ones.

Key words: nonlinear oscillations, ensembles of oscillators, synchronization, multistability, traveling waves.

DOI: 10.18500/0869-6632-2018-26-1-48-63

References: Shabunin A.V. Multistability of traveling waves in an ensemble of harmonic oscillators with long-range couplings. *Izvestiya VUZ, Applied Nonlinear Dynamics*, 2018, vol. 26, iss. 1, pp. 48–63. DOI: 10.18500/0869-6632-2018-26-1-48-63

Введение

Колебательные и волновые процессы, наблюдаемые в системах, состоящих из большого числа взаимодействующих осцилляторов, интересуют специалистов в различных областях математики, физики, химии, биологии и других наук, поскольку позволяют проследить, как объединение простых систем приводит к новым эффектам, не наблюдающимся в подсистемах, взятых по-отдельности. Одним из наиболее фундаментальных явлений в таких системах является синхронизация колебаний [1–3]. Синхронизация в ансамблях осцилляторов – одна из традиционных областей исследований для нелинейной динамики. Первые работы по изучению синхронизации в ансамблях рассматривали задачу частотной синхронизации в цепочке осцилляторов с гармоническим поведением [4–7]. В работе [6] было обращено внимание, что в подобных системах возможны режимы с разными фазовыми сдвигами между осцилляторами – то есть сосуществуют разные пространственные моды, названные позднее режимами *бегущих волн*. В дальнейшем режимы бегущих волн

наблюдались и были исследованы как для ансамблей с периодическими колебаниями [8, 9], так и для ансамблей с хаотической динамикой [10–12]. Детальное описание динамики пространственно однородных и неоднородных волн, возникновение пространственно разупорядоченных колебательных режимов и особенности переходов между режимами с разными длинами волн для ансамбля автогенераторов с жестким возбуждением можно найти в работе [13].

Общие закономерности режимов бегущих волн удобно исследовать на самых простых моделях, например, в ансамбле фазовых осцилляторов [14] или в осцилляторах ван дер Поля. Устойчивость различных сосуществующих режимов в цепочках фазовых осцилляторов с локальными связями исследовалась в работах [15, 16]. Динамике ансамблей осцилляторов с глобальными связями посвящены статьи [17, 18] и множество последующих работ. В настоящем исследовании рассматривается промежуточный случай – кольцо осцилляторов с нелокальными связями. В работе [19] получены аналитические выражения собственных чисел матрицы линеаризации в окрестности стационарного решения для таких систем. В работе [20] определены достаточные условия устойчивости режимов бегущих волн в ансамбле фазовых осцилляторов в зависимости от величины дальнего действия связей в том случае, когда их интенсивности являются монотонно невозрастающими с расстоянием (то есть либо остаются постоянными, либо монотонно убывают). Однако детальный анализ зависимости числа сосуществующих режимов от параметров, последовательность их появления и закономерности расположения их зон устойчивости на плоскости управляющих параметров проведен не был. Данные вопросы и оказались в центре внимания настоящего исследования.

1. Бегущие волны в ансамблях с дальнедействующими связями

Рассмотрим ансамбль из N одинаковых автогенераторов в виде замкнутой в кольцо цепочки, где между отдельными осцилляторами существуют взаимные линейные связи, действующие на интервале в L позиций (см. структуру связей ансамбля на рис. 1):

$$\dot{\mathbf{x}}_i = \mathbf{f}(\mathbf{x}_i) + \frac{\gamma}{L} \hat{c} \sum_{l=1}^L [(\mathbf{x}_{i+l} - \mathbf{x}_i) + (\mathbf{x}_{i-l} - \mathbf{x}_i)], \quad (1)$$

$$i = 1 \div N.$$

Здесь \mathbf{x} – M -вектор динамических переменных; \mathbf{f} – M -мерная вектор-функция, определяющая уравнения одиночного генератора; \hat{c} – матрица связности $M \times M$, определяющая, по каким переменным осуществляется связь между осцилляторами; $\gamma \geq 0$ – параметр силы связей; нижний индекс задает положение (номер) осциллятора в ансамбле. В силу периодических граничных условий все математические операции с индексами осцилляторов осуществляются по модулю N , и дальность связей L не может превышать $N/2$. В частном случае, при $L=1$ получаем кольцо из локально связанных автогенераторов, при $L=N/2$ – полностью связанную сеть. В настоящем исследовании будем рассматривать, как меняются свойства системы при переходе между этими граничными случаями.

Предположим, что колебания в системе (1) являются периодическими, то есть $\mathbf{x}_i(t + T) = \mathbf{x}_i(t)$ для всех i . В силу трансляционной симметрии уравнений системы (1), в ней существуют решения в виде бегущих вдоль кольца волн: $\mathbf{x}_i^{(k)}(t) = \mathbf{x}_1^{(k)}(t - (i - 1)\Delta t^{(k)})$. Здесь $\Delta t^{(k)}$ – интервал задержки между колебаниями в соседних элементах ансамбля, который в силу периодических граничных условий может принимать лишь конечное число эквидистантных значений

$$\Delta t^{(k)} = \frac{kT}{N}, \quad (2)$$

где $k = 0, \pm 1, \dots, \pm N/2$ – целочисленный индекс волны. Нормировав $\Delta t^{(k)}$ на период колебаний, перейдем к фазовому сдвигу между колебаниями подсистем

$$\Delta \varphi^{(k)} = 2\pi \frac{\Delta t^{(k)}}{T} = 2\pi \frac{k}{N}. \quad (3)$$

Мода с нулевым индексом ($k = 0$) – режим синфазных колебаний. Волны с положительными индексами распространяются в сторону возрастания порядковых номеров осцилляторов, волны с отрицательными индексами – в противоположном направлении. Поскольку по всем остальным характеристикам «правые» и «левые» волны совершенно одинаковы, в дальнейшем будем рассматривать только неотрицательные значения k . В случае гармонических колебаний получим гармонические автоволны, вращающиеся вдоль кольца с фазовой скоростью $v = -2\pi k/N$ и характеризующиеся пространственным периодом (длиной волны) $\Lambda^{(k)} = N/k$:

$$x_i^{(k)}(t) = \rho^{(k)} \cos \left(t + (i - 1)\Delta \varphi^{(k)} \right).$$

Мгновенные снимки k -волн, взятые в моменты времени, отстоящие на целое число периодов, называют также *пространственными профилями* бегущих волн. Эти профили для $k = 0, 1, 2, 3$ показаны на рис. 2.

2. Ансамбль осцилляторов ван дер Поля

Выберем в качестве парциального элемента ансамбля генератор ван дер Поля

$$\ddot{x} - (\varepsilon - x^2)\dot{x} + x = 0,$$

который представляет собой классическую автоколебательную систему, демонстри-

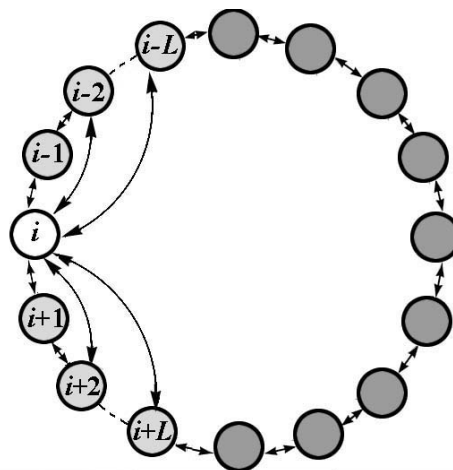


Рис. 1. Структура связей системы (1)

Fig. 1. The structure of network (1)

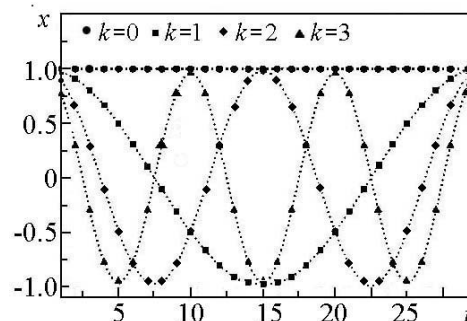


Рис. 2. Пространственные профили бегущих волн с разным k в кольце из тридцати гармонических осцилляторов

Fig. 2. Spatial profiles of traveling waves with different k in a ring of 30 harmonic oscillators

рующую при $\varepsilon = 0$ бифуркацию Андронова–Хопфа. Ансамбль из N генераторов с линейными нелокальными (дальнодействующими) связями описывается системой уравнений

$$\ddot{x}_i - (\varepsilon - x_i^2) \dot{x}_i + x_i = \frac{\gamma}{L} \sum_{l=-L}^L (\dot{x}_{i+l} - \dot{x}_i), \quad (4)$$

$$i = 1, 2, 3, \dots, N.$$

Она соответствует уравнениям (1) при $\mathbf{x} = [x, \dot{x}]$, $\mathbf{f} = [1, (\varepsilon - x^2) \dot{x} - x]$ и $\hat{c} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Систему уравнений (4) можно решить аналитически при квазигармоническом приближении.

Стационарные решения для комплексных амплитуд. Предположим, что колебания в каждом генераторе близки к гармоническим, и определим для этого случая приближительный вид решения в виде гармонического колебания с «медленной» амплитудой

$$x_i = \frac{1}{2} [a_i(t) \exp(jt) + a_i^*(t) \exp(-jt)],$$

где $a_i(t)$ – медленная по сравнению с $\exp(jt)$ комплекснозначная функция времени. Посредством стандартных преобразований получим уравнения для комплексных амплитуд a_i

$$\dot{a}_i = \frac{a_i}{2} \left(\varepsilon - \frac{|a_i|^2}{4} \right) + \frac{\gamma}{2L} \sum_{l=-L}^L (a_{i+l} - a_i). \quad (5)$$

Будем искать стационарные решения системы (5) в виде бегущих волн $a_i^{(k)} = \rho^{(k)} \exp(j(i-1)\Delta\varphi^{(k)})$. Подставив $a_i^{(k)}$ в (5) и приравняв нулю правые части, найдем значения стационарных вещественных амплитуд

$$\rho^{(k)} = 2\sqrt{\varepsilon - 2\gamma(1 - \chi^{(k)})}, \quad (6)$$

где $\chi^{(k)} = (1/L) \sum_{l=1}^L \cos(2\pi kl/N)$. Нетрудно заметить, что $\gamma \sum_{l=1}^L \cos(2\pi kl/N)$ совпадает по форме с дискретным преобразованием Фурье от N -вектора связей с компонентами

$$\gamma_l = \begin{cases} \gamma, & 0 < l \leq L, \\ 0, & l > L. \end{cases}$$

Используя известное выражение для спектра прямоугольного сигнала, получаем

$$\chi^{(k)} = \frac{1}{2L} \left((2L+1) \operatorname{sinc} \left(\pi \frac{k(2L+1)}{N} \right) - 1 \right). \quad (7)$$

Для длинных цепочек ($N \gg 1$) выражение (7) упрощается: $\chi^{(k)} \simeq \operatorname{sinc}(2\pi kL/N) = \operatorname{sinc}(\Psi^{(k)})$, где $\Psi^{(k)} = L\Delta\varphi^{(k)}$ – суммарный набег фазы на длине связей. Последнее тем лучше оценивает точное значение (6), чем длиннее ансамбль. Например, для

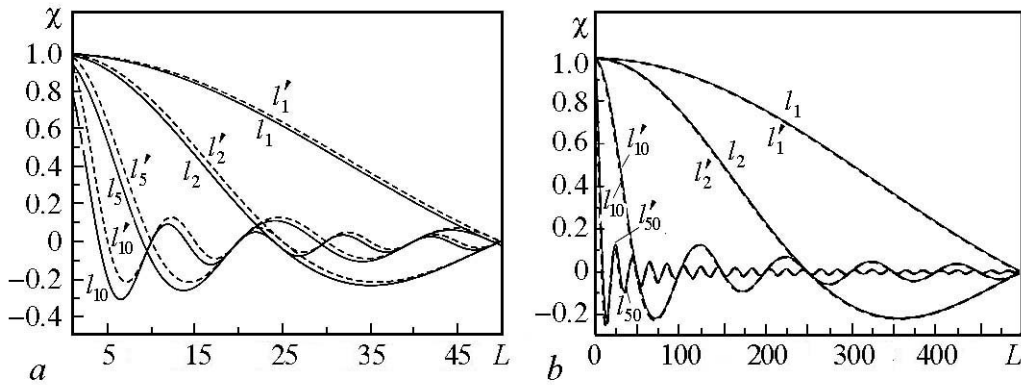


Рис. 3. Графики функций $\chi^{(k)}(L)$ для ансамблей из ста (а) и тысячи (б) осцилляторов: точные значения (7) отмечены сплошными линиями l_k , аппроксимированные – штриховыми l'_k (k соответствует индексу кривой)

Fig. 3. Function graphs $\chi^{(k)}(L)$ for ensembles of 100 (a) and 1000 (b) oscillators: exact values (7) are marked by solid lines l_k , the approximated values are plotted by dashed lines l'_k (k corresponds to the index of the curve)

$N = 100$ наблюдается совпадение с точностью до нескольких процентов вплоть до $k = 10$ (рис. 3, а), а для $N = 1000$ они практически перестают различаться (рис. 3, б).

Таким образом, для практического анализа упрощенное выражение может служить оценкой для расчета амплитуды k -волны. Подставляя эту аппроксимацию в формулу (6), получаем приближенное значение амплитуды k -волны:

$$\rho^{(k)} \simeq 2\sqrt{\varepsilon - 2\gamma(1 - \text{sinc}(\Psi^{(k)}))}. \quad (8)$$

3. Бифуркации рождения бегущих волн

Рассмотрим процесс «рождения» режимов бегущих волн в ансамбле (4) при увеличении параметра ε и фиксированном $\gamma > 0$. Появление новой k -моды происходит при значениях параметров, соответствующих прохождению амплитуды $\rho^{(k)}$ через ноль. Введя эффективный параметр возбуждения для k -й волны $\varepsilon^{(k)} = \varepsilon - 2\gamma(1 - \text{sinc}(\Psi^{(k)}))$, можно привести (6) к виду

$$\rho^{(k)} = 2\sqrt{\varepsilon^{(k)}}, \quad (9)$$

совпадающему по форме с зависимостью амплитуды от параметра возбуждения в отдельно взятом генераторе ван дер Поля. Соответственно, подобно отдельному генератору, условие $\varepsilon^{(k)} = 0$ задает линию «рождения» предельного цикла:

$$\varepsilon \simeq 2\gamma(1 - \text{sinc}(\Psi^{(k)})). \quad (10)$$

При этом, в силу монотонной зависимости функции $\text{sinc}(\alpha)$ от угла α при $0 < \alpha < \pi$, последовательность появления новых волн вплоть до $0.5(L/N)$ совпадает с последовательностью их индексов: $0, 1, 2, \dots$. Сначала, при $\varepsilon = 0$ из состояния равновесия $(0, 0)$ рождается режим синфазных колебаний с $k = 0$. При этом состоянии

равновесия теряет устойчивость и «передает устойчивость» вновь родившемуся синфазному циклу¹. Затем, по мере увеличения ε , при $\varepsilon = \varepsilon^{(k)}$ происходят аналогичные бифуркации, сопровождающиеся появлением циклов с индексами $k = 1, 2, \dots$. Поскольку состояние равновесия в начале координат к моменту бифуркации стало седлом, несинфазные режимы при рождении являются седловыми. Таким образом, из всех бифуркационных линий, задаваемых условием (10), лишь самая нижняя ($\varepsilon = 0$) соответствует наблюдаемому в эксперименте «мягкому» возбуждению колебаний посредством бифуркации Андронова–Хопфа. Все остальные бифуркационные линии рождения k -волн «невидимы» в эксперименте. Тем не менее, рожденные на них несинфазные колебательные режимы в дальнейшем могут приобрести устойчивость и при соответствующем выборе начальных условий стать наблюдаемыми. Отметим, что порядок появления режимов полностью повторяет таковой для локально связанных осцилляторов (см. например [9]).

4. Условия устойчивости бегущих волн

Для определения условий устойчивости найденных решений сделаем в (5) замену $a_i = \rho_i \exp(j\varphi_i)$ и перейдем к вещественным амплитудам и фазам

$$\dot{\rho}_i = \frac{\varepsilon}{2}\rho_i - \frac{\rho_i^3}{8} + \frac{\gamma}{2L} \sum_{l=-L}^L (\rho_{i+l} \cos(\varphi_{i+l} - \varphi_i) - \rho_i), \quad (11)$$

$$\dot{\varphi}_i = \frac{\gamma}{2L} \sum_{l=-L}^L \frac{\rho_{i+l}}{\rho_i} \sin(\varphi_{i+l} - \varphi_i). \quad (12)$$

Фазовая устойчивость. Рассмотрим сначала устойчивость второго (фазового) уравнения, считая все вещественные амплитуды одинаковыми:

$$\dot{\varphi}_i = \frac{\gamma}{2L} \sum_{l=-L}^L \sin(\varphi_{i+l} - \varphi_i). \quad (13)$$

Отметим, что в него не входит параметр возбуждения ε , а коэффициент связи определяет общий масштабный множитель, влияя на устойчивость решения лишь своим знаком. Якобиан системы (13) $\hat{J}^{(\varphi)}$ в окрестности решения $\varphi_i = (i-1)\Delta\varphi^{(k)}$ представляет собой $N \times N$ *правоциркулярную* матрицу, первая строка которой

$$J_1^{(\varphi)} = \frac{\gamma}{2L} \left[-\sum_{l=-L}^L \cos(l\Delta\varphi^{(k)}), \cos(\Delta\varphi^{(k)}), \dots, \cos(L\Delta\varphi^{(k)}), 0, \dots \right]$$

повторяется в последующих строках, циклически смещаясь на одну позицию вправо. Для правоциркулярных матриц собственные значения получаются как дискретное

¹Очевидно, что о цикле можно говорить лишь применительно к исходной «полномасштабной» системе, в укороченной системе происходит рождение нового состояния равновесия.

преобразование Фурье от вектора-строки коэффициентов матрицы:

$$\lambda_n^{(k)} = \frac{\gamma}{L} \sum_{l=1}^L \cos(l\Delta\varphi^{(k)}) \left(\cos\left(2\pi\frac{nl}{N}\right) - 1 \right), \quad (14)$$

$$n = 0, \dots, N - 1.$$

Проанализируем полученные собственные числа. Очевидно, что $\lambda_0 = 0$, что отражает инвариантность решения системы (12) относительно выбора общей начальной фазы для всех осцилляторов и характеризует, таким образом, нейтральную устойчивость к одновременному сдвигу всех фаз на одну и ту же константу. Для устойчивости по другим направлениям необходимо, чтобы все остальные $\lambda_n^{(k)}$ были отрицательными. Это условие гарантированно выполняется, если $\cos(l\Delta\varphi^{(k)}) > 0$ для всех $l \in 1 \div L$, то есть когда суммарный набег фазы на длине связей $\Psi^{(k)} = L\Delta\varphi^{(k)}$ не превосходит $\pi/2$:

$$\Psi^{(k)} < \frac{\pi}{2}. \quad (15)$$

Данное условие было получено в работах Г. Эрментроута с соавторами [20] как достаточное условие устойчивости бегущих волн в линейной цепочке фазовых осцилляторов. Для ансамбля с локальными связями оно, как видно из формулы (14), является также и необходимым условием, то есть определяет границу между устойчивыми и неустойчивыми модами. Будет ли условие Эрментроута также необходимым условием и для ансамбля (4) с нелокальными связями (при $L > 1$)?

Чтобы ответить на данный вопрос, рассчитаем собственные значения (14) и найдем наибольшее из них. На рис. 4, *a* построено семейство кривых $\lambda_{\max}(\Delta\varphi^{(k)})$ в ансамбле из ста осцилляторов для разных L (значению L соответствует нижний индекс в обозначении кривой). При малых углах ($\Delta\varphi \simeq 0$) максимальное собственное число λ_{\max} всегда отрицательно; затем, при достижении некоторого порогового значения $\Delta\varphi = \varphi_t$ максимальное собственное число становится положительным

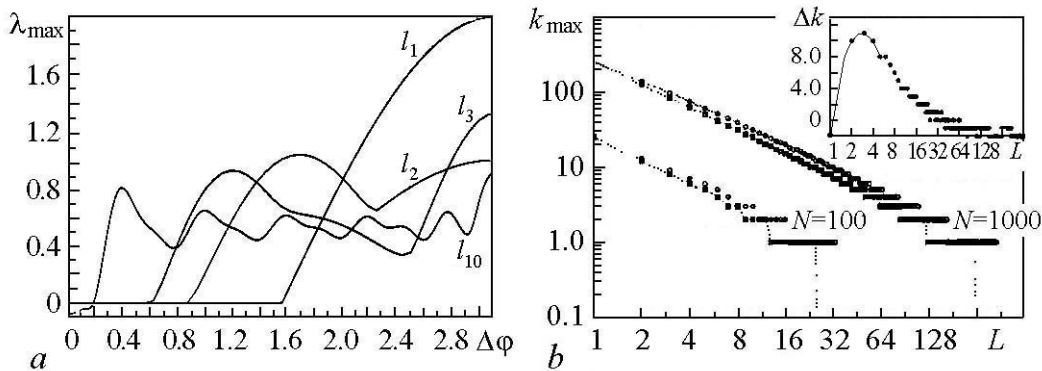


Рис. 4. (а) Графики $\lambda_{\max}(\Delta\varphi)$ для разных L (кривые l_L) в ансамбле из ста осцилляторов; (б) зависимость $k_{\max}(L)$ и $k_{\max}^{(E)}(L)$ для ансамблей из $N = 100$, $N = 1000$ осцилляторов; на вкладке построена разность между ними

Fig. 4. (a) Graphics $\lambda_{\max}(\Delta\varphi)$ for different L (curves l_L) in the ensemble of 100 oscillators; (b) the dependence of $k_{\max}(L)$ and $k_{\max}^{(E)}(L)$ for ensembles of $N = 100$, $N = 1000$ oscillators; the sub-figure depicts the difference between them

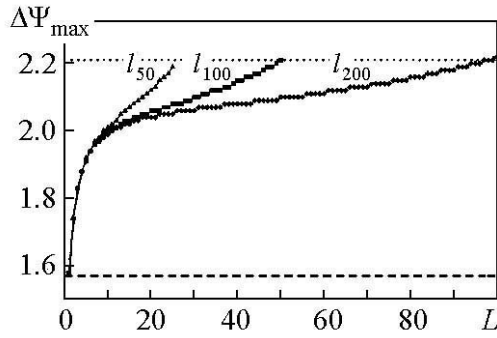


Рис. 5. График зависимости максимального набега фазы на длине связей от параметра дальнего действия; нижний индекс обозначает число осцилляторов в ансамбле N

Fig. 5. Graph of maximum phase-shift on the couplings length from the couplings radius; the lower index corresponds to the ensemble size N

и остается таковым вплоть до $\Delta\varphi = \pi$. Таким образом, весь диапазон $\Delta\varphi$ распадается на две зоны: зона устойчивости ($0 \leq \Delta\varphi < \varphi_t$) и зона неустойчивости ($\Delta\varphi > \varphi_t$). Пороговое значение φ_t определяет максимально допустимый индекс волны:

$$k_{\max} = \left\lfloor \frac{\varphi_t N}{2\pi} \right\rfloor, \quad (16)$$

а значит – и максимальное число сосуществующих режимов ($2k_{\max} + 1$). В соответствии с критерием Эрментрута:

$$k_{\max}^{(E)} = \left\lfloor \frac{N}{4L} \right\rfloor. \quad (17)$$

Результаты сопоставления (16) и (17) показаны на рис. 4, b в двойном логарифмическом масштабе. Как видно из графиков, расчетные значения превышают теоретическую оценку при $L > 1$. Для большей наглядности разность $\Delta k = k_{\max} - k_{\max}^{(E)}$ построена на рис. 4, b на вкладке. Как видно из графика, максимальное расхождение достигается при небольшом дальнем действии при $L \simeq 4$, в то время как для крайних значений дальнего действия $\Delta k \simeq 0$.

Рассчитаем максимальное значение суммарного фазового сдвига на длине связей Ψ_{\max} в зависимости от L и сравним его с полученной в [20] оценкой $\pi/2$. Графики $\Psi_{\max}(L)$ для $N = 50, 100, 200$ приведены на рис. 5, где штриховая линия соответствует значению $\pi/2$. Как видно из рисунка, условие (15) определяет границу между устойчивыми и неустойчивыми волнами лишь в случае локальной связи. При $L > 1$ фазовые условия устойчивости «смягчаются» и при больших L граница устойчивости плавно и монотонно смещается от значения $\pi/2$ к значению близкому к 0.7π (показано пунктирной линией). Кроме этого, детальный анализ графиков на рис. 5 показывает, что:

- все кривые $\Psi_{\max}(L)$ монотонно возрастают с ростом L от $\Psi_{\max}(1) = \pi/2$ до $\Psi_{\max}(N/2) \simeq 0.7\pi$;
- при малых L ($L \lesssim 7$) графики $\Psi_{\max}(L)$, для ансамблей разной длины практически совпадают; на этом участке каждая из функций $\Psi_{\max}(x)$ хорошо аппроксимируется общей зависимостью $\pi/\sqrt{2} (1 - (\sqrt{2} - 1)/\sqrt{2x})$;
- при больших L каждая из зависимостей становится почти линейной, угол наклона которой уменьшается с размером ансамбля (N)

$$\Psi_{\max}(L) \simeq 0.14\pi \frac{L - 7}{N - 14} + 0.63\pi.$$

Полные условия устойчивости. Вернемся теперь к полной системе уравнений (11, 12). Собственные числа для ансамбля гармонических осцилляторов, аналогич-

ного данному, были получены в работе [19]. Для рассматриваемой системы (11, 12) они имеют вид:

$$\begin{aligned}\lambda_{0,1}^{(k)} &= 0, \\ \lambda_{0,2}^{(k)} &= -\varepsilon^{(k)}, \\ \lambda_{n,1}^{(k)} &= \frac{-\left(\varepsilon^{(k)} + 2\gamma C_n(\Delta\varphi^{(k)})\right) + \sqrt{\left(\varepsilon^{(k)}\right)^2 + 4\gamma^2 \left(S_n(\Delta\varphi^{(k)})\right)^2}}{2}, \\ \lambda_{n,2}^{(k)} &= \frac{-\left(\varepsilon^{(k)} + 2\gamma C_n(\Delta\varphi^{(k)})\right) - \sqrt{\left(\varepsilon^{(k)}\right)^2 + 4\gamma^2 \left(S_n(\Delta\varphi^{(k)})\right)^2}}{2},\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}C_n &= \frac{1}{L} \sum_{l=1}^L \cos\left(l\Delta\varphi^{(k)}\right) \left(1 - \cos\left(2\pi \frac{nl}{N}\right)\right), \\ S_n &= \frac{1}{L} \sum_{l=1}^L \sin\left(l\Delta\varphi^{(k)}\right) \sin\left(2\pi \frac{nl}{N}\right), \\ n &= 1 \dots N - 1.\end{aligned}$$

Проанализируем эти значения. Собственные числа $\lambda_{0,1}^{(k)}$ и $\lambda_{0,2}^{(k)}$ отвечают устойчивости к симметричным возмущениям фазы и амплитуды, соответственно. Значение $\lambda_{0,1}^{(k)}$ совпадает с полученным ранее собственным числом λ_0 для фазовых уравнений (см. (14)) и характеризует нейтральную устойчивость к одновременному смещению начальной фазы всех осцилляторов. Собственное число $\lambda_{0,2}^{(k)}$ противоположно эффективному параметру возбуждения k -волны и его переход через ноль соответствует бифуркации рождения данного режима (см. условие (9)). Знак оставшихся $(2N - 2)$ собственных чисел определяет устойчивость режима $x^{(k)}(t)$ по отношению к несимметричным возмущениям.² Так как, очевидно, что $\lambda_{n,1} > \lambda_{n,2}$, для этого достаточно выполнения $(N - 1)$ неравенств:

$$-\left(\varepsilon^{(k)} + 2\gamma C_n(\Delta\varphi^{(k)})\right) + \sqrt{\left(\varepsilon^{(k)}\right)^2 + 4\gamma^2 \left(S_n(\Delta\varphi^{(k)})\right)^2} < 0. \quad (18)$$

Обратим внимание, что при положительном $\varepsilon^{(k)}$ неравенство (18) может быть выполнено лишь при условии $\gamma C_n(\Delta\varphi^{(k)}) > 0$, то есть при выполнении полученных ранее фазовых условий устойчивости (см. (14)). Однако, теперь в дополнение к ним полные условия (18) накладывают ограничение и на значения параметров подсистем:

$$\varepsilon^{(k)} > \gamma \max_n \left\{ \frac{S_n^2 - C_n^2}{C_n} \right\}.$$

²На самом деле имеет значение знак первых $N/2$ собственных чисел в силу симметрии: $\lambda_{N-n,i} = \lambda_{n,i}$

Расчеты показывают, что максимальное значение величин $(S_n^2 - C_n^2)/C_n$ достигается для $n = 1$. Тогда, получаем условие устойчивости

$$\varepsilon^{(k)} > \gamma \Theta^{(k)}, \quad (19)$$

где

$$\Theta^{(k)} = \frac{1}{L} \frac{\left(\sum_{l=1}^L \sin(2\pi lk/N) \sin(2\pi l/N) \right)^2 - \left(\sum_{l=1}^L \cos(2\pi lk/N) (1 - \cos(2\pi l/N)) \right)^2}{\sum_{l=1}^L \cos(2\pi lk/N) (1 - \cos(2\pi l/N))}, \quad (20)$$

Неравенство (19) – общее условие устойчивости k -волны, полученное при учете уравнений как для фаз, так и для амплитуд. Отметим, что зависимость между коэффициентом возбуждения и параметром связи линейная. Соответственно, на плоскости $(\varepsilon - \gamma)$ область устойчивости для каждой из k -волн представляет собой конус, ограниченный слева прямой $\gamma = 0$, а справа прямой $\varepsilon = (\Theta^{(k)} + 2(1 - \text{sinc}(\Psi^{(k)})))\gamma$. Для ансамбля из тридцати элементов эти области построены на рис. 6, где значение k выделено цветом: более темные области соответствуют более коротким волнам. Рис. 6, *a* повторяет полученные в работе [9] зоны устойчивости для локально связанных осцилляторов; рис. 6, *b-d* отображают их для случаев нелокальных связей:

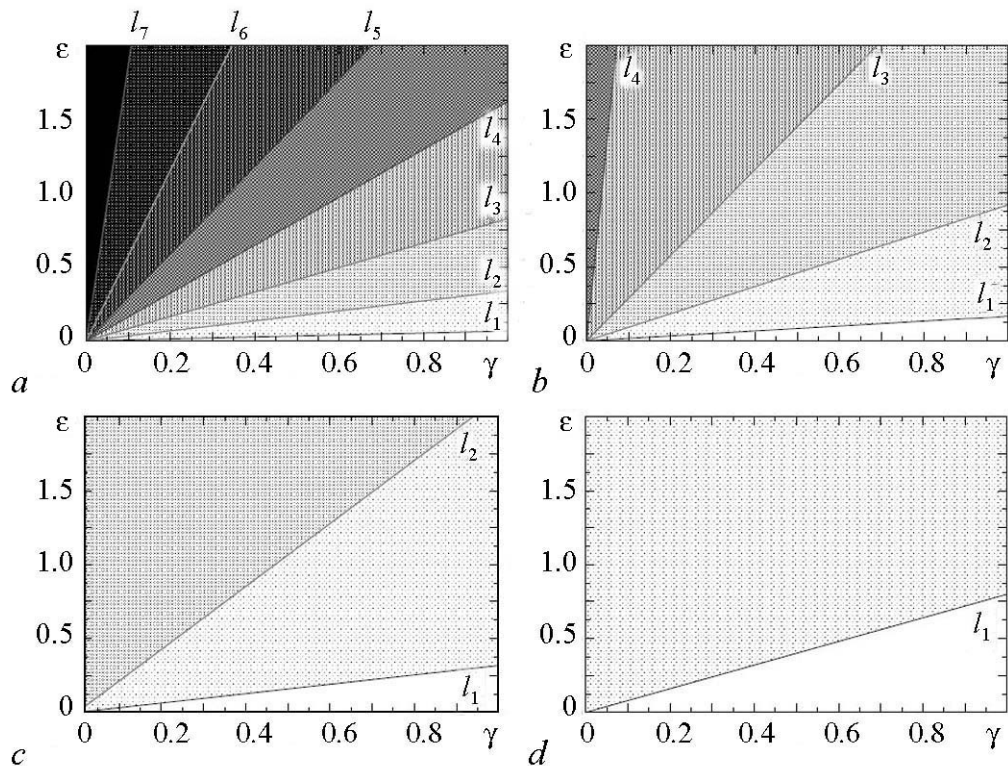


Рис. 6. Области устойчивости бегущих волн на плоскости γ - ε для $L = 1$ (a), 2 (b), 3 (c) и 5 (d); $N = 30$

Fig. 6. Regions of stability of traveling waves in the plane γ - ε for $L = 1$ (a), 2 (b), 3 (c) and 5 (d); $N = 30$

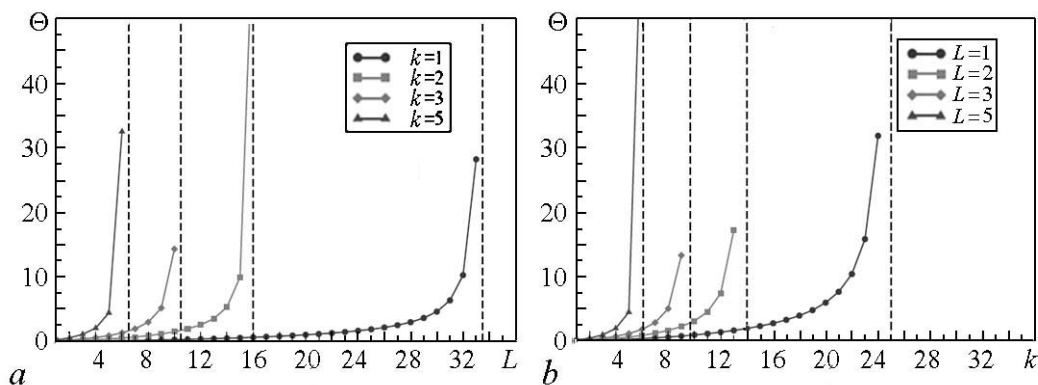


Рис. 7. Зависимость Θ от L (a) и от k (b) для ансамбля из ста осцилляторов; штриховые вертикальные линии соответствуют критическим значениям k и L , полученным из фазовых условий устойчивости

Fig. 7. Dependence Θ from L (a) and k (b) for the ensemble of 100 oscillators; dashed vertical lines correspond to critical values of k and L obtained from phase conditions of stability

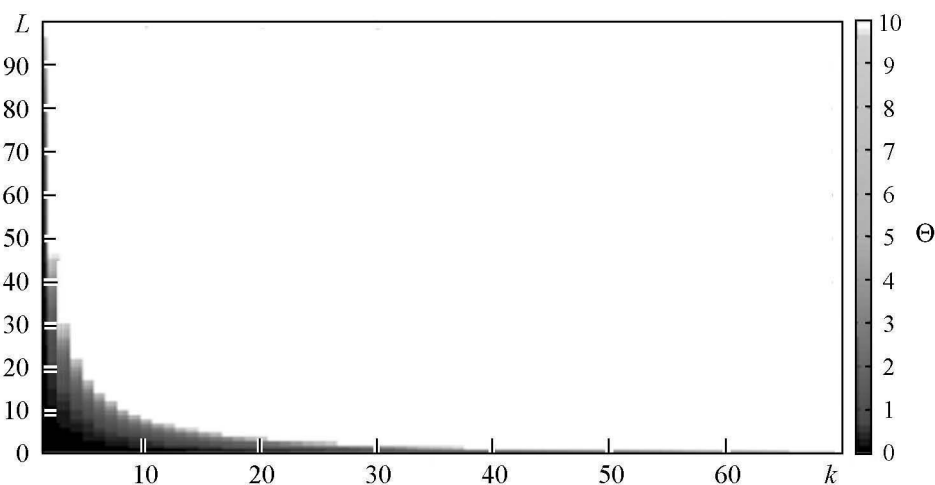


Рис. 8. Совместная зависимость Θ от k и L для ансамбля из $N = 300$ осцилляторов

Fig. 8. The joint dependence of Θ from k and L for the ensemble of $N = 300$ oscillators

$L = 2$, $L = 3$ и $L = 5$, соответственно. Как мы видим, переход от локальной связи к нелокальной не меняет качественно картину расположения зон устойчивости, но изменяет расположение границ областей, стягивая более коротковолновые режимы к оси $\gamma = 0$, а также уменьшая число сосуществующих мод. В итоге, при $L \geq L_{\max}$ все пространственно неоднородные режимы исчезают и в ансамбле остается только режим синфазных колебаний.

Границы зон устойчивости определяются величинами констант Θ из формулы (20). Произведем их расчет в зависимости от параметра дальнего действия L и индекса волны k в ансамбле из $N = 100$ осцилляторов и построим графики функций $\Theta(L)$ (рис. 7, a) и $\Theta(k)$ (рис. 7, b). Как видно из рисунков, в обоих случаях поведение Θ качественно схоже: ее величина монотонно возрастает при увеличении

набега фазы на длине связей, вызванного либо увеличением дальности действия L , либо вследствие перехода к более коротковолновой моде. Рост Θ резко усиливается при подходе к границе, обусловленной фазовыми условиями устойчивости. На рис. 7 эти значения отмечены вертикальными штриховыми линиями. Зависимость коэффициента наклона Θ от обоих параметров k и L построена на рис. 8 (оттенкам серого соответствует величина порогового значения Θ , ниже которого колебания рассматриваемого типа неустойчивы). Несмотря на качественную схожесть $\Theta(k)$ и $\Theta(L)$, между ними наблюдаются количественные различия. Соответственно, в отличие от бифуркации рождения k -волн, для которых бифуркационные значения определяются суммарным набегом фазы на цепочке связей, по отношению к бифуркациям, приводящим к устойчивости этих режимов, симметрия по k и L не наблюдается.

Выводы

В ходе исследований ансамбля гармонических осцилляторов ван дер Поля с дальнедействующими связями проведен анализ последовательности возникновения мультистабильных состояний и зависимости их устойчивости от управляющих параметров. Методами медленно меняющихся амплитуд, теории устойчивости, а также посредством численных расчетов построены зоны устойчивости для сосуществующих гармонических мод на плоскости параметров «связь – возбуждение». Проанализировано влияние дальности действия связей на расположение областей устойчивости и число сосуществующих мод.

В кольце связанных автогенераторов сосуществуют режимы бегущих вдоль кольца волн, пространственный период которых целое число раз укладывается вдоль цепочки. Качественные закономерности появления и стабилизации этих режимов совпадают с полученными ранее для ансамбля с локальными связями. Переход к дальнедействующим связям лишь «замедляет» рождение новых волн, уменьшает их амплитуду и сужает их зоны устойчивости, приближая их к оси $\gamma = 0$. При этом рост дальности действия связей оказывается качественно эквивалентным переходу с более длинноволнового режима на более коротковолновый.

В работе проведено сопоставление фазовых ограничений на устойчивость мультистабильных состояний с известным из литературы пороговым значением, составляющим набег фазы в $\pi/2$ на длине связей. Исследование показало, что данное условие действует только для ансамблей с локальными связями. При дальнедействующих связях оно смягчается: чем больше дальность действия, тем большее значение порога оказывается допустимым.

Результаты получены для ансамблей гармонических осцилляторов, что соответствует поведению реальных автоколебательных систем вблизи точки бифуркации Андронова–Хопфа. Применимость выявленных закономерностей для систем с иным типом поведения в работе не изучалась. Можно предположить, что наличие таких явлений, как неизохронность колебаний, появляющихся при отходе от точки бифуркации, приведет к ограничению областей устойчивости мод «сверху» по параметру возбуждения, а также изменит форму границ по параметру связи. Данные вопросы требуют дальнейшего изучения.

Библиографический список

1. *Blekhman I.I., Landa P.S., Rosenblum M.G.* Synchronization and chaotization in interacting dynamical systems // *Appl. Mech. Rev.* 1995. Vol. 11, N1. Pp. 733–752.
2. *Анищенко В.С., Вадивасова Т.Е.* Синхронизация автоколебаний и колебаний, индуцированных шумом // *Радиотехника и электроника.* 2002. Т. 47, № 2. С. 133–165.
3. *Пиковский А., Розенблюм М., Куртс Ю.* Синхронизация. Фундаментальное нелинейное явление. Москва: Техносфера, 2003.
4. *Малафеев В.М., Полякова М.С., Романовский Ю.М.* О процессе синхронизации автогенераторов, связанных через проводимость // *Известия вузов: Радиофизика.* 1970. Т. 13, № 6. С. 936–940.
5. *Мынбаев Д.К., Шиленков М.И.* Взаимная фазовая синхронизация генераторов, соединенных по кольцевой схеме // *Радиотехника и электроника.* 1981. Т. 26, № 2. С. 361–370.
6. *Мальцев А.А., Силаев А.М.* Режимы работы цепочки автогенераторов с «жесткими» предельными циклами, связанных с помощью реактивных элементов // *Известия вузов. Радиофизика.* 1979. Т. 22, № 7. С. 826–833.
7. *Дворников А.А., Уткин Г.М., Чуков А.М.* О взаимной синхронизации цепочки резистивно связанных автогенераторов // *Известия вузов. Радиофизика.* 1984. Т. 27, № 11. С. 1388–1393.
8. *Ermentrout G.B.* The behaviour of rings of coupled oscillators // *J. of Math. Biol.* 1985. Vol. 23, № 1. Pp. 55–74.
9. *Шабунин А.В., Акопов А.А., Астахов В.В., Вадивасова Т.Е.* Бегущие волны в дискретной ангармонической автоколебательной среде // *Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика.* 2005. Т. 13, № 4. С. 37–54.
10. *Matias M.A., Guemez J., Perez-Munuzuri V., Marino I.P., Lorenzo M.N., Perez-Villar V.* Observation of a fast rotating wave in rings of coupled chaotic oscillators // *Phys. Rev. Lett.* 1997. Vol. 78, № 2. Pp. 219–222.
11. *Marino I.P., Perez-Munuzuri V., Perez-Villar V., Sanchez E., Matias M.A.* Interaction of chaotic rotating waves in coupled rings of chaotic cells // *Physica D.* 2000. Vol. 128. Pp. 224–235.
12. *Shabunin A., Astakhov V., Anishchenko V.* Developing Chaos on Base of Traveling Waves in a Chain of Coupled Oscillators with Period-Doubling. Synchronization and Hierarchy of Multistability Formation // *Int. J. of Bifurcation and Chaos.* 2002. Vol. 12, № 8. Pp. 1895–1908.
13. *Nekorkin V.I., Makarov V.A., Velarde M.G.* Spatial disorder and waves in a ring chain of bistable oscillators // *Int. J. Bifurcation and Chaos.* 1996. Vol. 6. Pp. 1845–1858.
14. *Kuramoto Y.* Chemical Oscillations Waves and Turbulence. Berlin: Springer, 1984.
15. *Ermentrout G.B., Kopell N.* Symmetry and phase locking in chains of weakly coupled oscillators // *Comm. Pure Appl. Math.* 1986. Vol. 49. Pp. 623–660.

16. *Ermentrout G.B., Kopell N.* Phase transitions and other phenomena in chains of coupled oscillators // *SIAM J. of Appl. Math.* 1990. Vol. 50. Pp. 1014–1052.
17. *Ermentrout G.B.* Synchronization in a pool of mutually coupled oscillators with random frequencies // *J. of Math. Biol.* 1985. Vol. 22. Pp. 1–9.
18. *Crawford J.D., Davies K.T.R.* Synchronization of globally coupled phase oscillators: singularities and scaling for general couplings // *Physica D.* 1990. Vol. 125. Pp. 1–46.
19. *Гуртовник А.С., Неймарк Ю.И.* Синхронизмы в системе циклически слабосвязанных осцилляторов // *Динамические системы: Межвузовский сборник научных трудов.* Изд-во Нижегородского университета, 1991. С. 84–97.
20. *Ren L., Ermentrout G.B.* Phase locking in chains of multiple-coupled oscillators // *Physica D.* 2000. Vol. 143. Pp. 56–73.
21. *Astakhov V., Shabunin A., Uhm W., Kim S.* Multistability formation and synchronization loss in coupled Hennon maps: Two sides of the single bifurcational mechanism // *Phys. Rev. E.* 2001. Vol. 63. P. 056212.
22. *Bezruchko B.P., Prokhorov M.D., Seleznev E.P.* Oscillation types, multistability, and basins of attractors in symmetrically coupled period-doubling systems // *Chaos, Solitons and Fractals.* 2003. Vol. 15. Pp. 695–711.

References

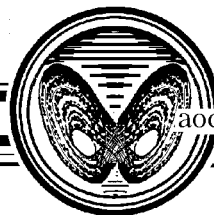
1. Blekhman I.I., Landa P.S., Rosenblum M.G. Synchronization and chaotization in interacting dynamical systems. *Appl. Mech. Rev.* 1995, Vol. 11, part 1, pp. 733–752.
2. Anishchenko V.S., Vadivasova T.E. Synchronization of self-oscillations and noise-induced oscillations. *Journal of Communications Technology and Electronics*, 2002, vol. 47, no.2, pp. 117–148.
3. Pikovsky A., Rosenblum M., Kurths J. Synchronization: A Universal Concept in Nonlinear Sciences. Cambridge University Press, 2003.
4. Malafeev V.M., Polyakova M.S., Romanovsky Yu.M. *Izvestiya VUZ. Radiofizika*, 1970, vol. 13, no.6, pp. 936–940 (in Russian).
5. Mynbaev D.K., Shilenkov M.I. *Radiotekhnika i elektronika*, 1981, vol. 26, no. 2, pp. 361–370 (in Russian).
6. Maltzev A.A., Silaev A.M. *Izvestiya VUZ, Radiofizika*, 1979, vol. 22, no.7, pp. 826–833 (in Russian).
7. Dvornikov A.A., Utkin G.M., Chukov A.M. *Izvestiya VUZ, Radiofizika*, 1984, vol. 27, no.11, pp. 1388–1393 (in Russian).
8. Ermentrout G.B. The behaviour of rings of coupled oscillators. *J. of Math. Biol.* 1985, vol. 23, pp. 55–74.
9. Shabunin A.V., Akopov A.A., Astakhov V.V., Vadivasova T.E. *Izvestiya VUZ, Applied Nonlinear Dynamics*, 2005, vol. 13, iss. 4, pp. 37–54 (in Russian).
10. Matias M.A., Guemez J., Perez-Munuzuri V., Marino I.P., Lorenzo M.N., Perez-Villar V. Observation of a fast rotating wave in rings of coupled chaotic oscillators. *Phys. Rev. Lett.*, 1997, vol. 78, no. 2, pp. 219–222.

11. Marino I.P., Perez-Munuzuri V., Perez-Villar V., Sanchez E., Matias M.A. Interaction of chaotic rotating waves in coupled rings of chaotic cells. *Physica D*, 2000, vol. 128, pp. 224–235.
12. Shabunin A., Astakhov V., Anishchenko V. Developing chaos on base of traveling waves in a chain of coupled oscillators with period-doubling: Synchronization and hierarchy of multistability formation. *Int. J. of Bifurcation and Chaos*, 2002, vol. 12, no. 8. pp. 1895–1908.
13. Nekorkin V.I., Makarov V.A., Velarde M.G. Spatial disorder and waves in a ring chain of bistable oscillators. *Int. J. Bifurcation and Chaos*, 1996, vol. 6, pp. 1845–1858.
14. Kuramoto Y. *Chemical Oscillations Waves and Turbulence*. Berlin: Springer, 1984.
15. Ermentrout G.B., Kopell N. Symmetry and phase locking in chains of weakly coupled oscillators. *Comm. Pure Appl. Math.*, 1986, vol. 49, pp. 623–660.
16. Ermentrout G.B., Kopell N. Phase transitions and other phenomena in chains of coupled oscillators. *SIAM J. of Appl. Math.*, 1990, vol. 50, pp. 1014–1052.
17. Ermentrout G.B. Synchronization in a pool of mutually coupled oscillators with random frequencies. *J. of Math. Biol.*, 1985, vol. 22, pp. 1–9.
18. Crawford J.D., Davies K.T.R. Synchronization of globally coupled phase oscillators: singularities and scaling for general couplings. *Physica D*, 1990, vol. 125, pp. 1–46.
19. Gurtovnik A.S., Neimark Yu.I. *Dinamicheskie Sistemy: Mezhvuzovskii sbornik nauchnykh trudov*, 1991, pp. 84–97 (in Russian).
20. Ren L., Ermentrout G.B. Phase locking in chains of multiple-coupled oscillators. *Physica D*, 2000, vol. 143, pp. 56–73.
21. Astakhov V., Shabunin A., Uhm W., Kim S. Multistability formation and synchronization loss in coupled Henon maps: Two sides of the single bifurcational mechanism. *Phys. Rev. E.*, 2001, vol. 63, 056212.
22. Bezruchko B.P., Prokhorov M.D., Seleznev E.P. Oscillation types, multistability, and basins of attractors in symmetrically coupled period-doubling systems. *Chaos, Solitons and Fractals*, 2003, vol. 15, pp. 695–711.



Шабунин Алексей Владимирович – окончил Саратовский государственный университет (1990). Доктор физико-математических наук (2008), профессор кафедры радиофизики и нелинейной динамики СГУ. Научные интересы – нелинейная динамика, теория колебаний, синхронизация и управление хаосом. Автор более 75 научных публикаций.

410012 Саратов, ул. Астраханская, 83
 Саратовский государственный университет
 E-mail: shabuninav@info.sgu.ru



УДК 517.9

АТТРАКТОР БЕЛЫХ В ОТОБРАЖЕНИИ ЗАСЛАВСКОГО И ЕГО ТРАНСФОРМАЦИЯ ПРИ СГЛАЖИВАНИИ

С. П. Кузнецов

Саратовский филиал Института радиотехники и электроники им. В.А. Котельникова РАН
Россия, 410019 Саратов, ул. Зеленая, 38

Саратовский национальный исследовательский государственный университет
Россия, 410012 Саратов, Астраханская, 83

Удмуртский государственный университет
Россия, 426034 Ижевск, Университетская, 1

E-mail: spkuz@yandex.ru

Поступила в редакцию 3.10.2017, после доработки 3.11.2017

Если при задании оператора эволюции динамических систем допустить использование негладких или разрывных функций, то ситуации квазигиперболической хаотической динамики реализуются достаточно просто. Это имеет место, например, на аттракторах в модельном отображении Лози и в отображении Белых. В настоящей статье рассматривается квазигиперболический аттрактор Белых в отображении, описывающем динамику ротатора с диссипацией в присутствии периодических толчков, у которых интенсивность зависит по пилообразному закону от мгновенной угловой координаты ротатора, а также исследуется трансформация аттрактора при сглаживании пилообразной функции. Представлены преобразования, сводящие задачу к отображению Белых стандартной формы. Приводятся результаты численных расчетов, иллюстрирующих динамику системы с непрерывным временем на аттракторе Белых. Представлены и обсуждаются также результаты для модели со сглаженной пилообразной функцией в зависимости от параметра, характеризующего масштаб сглаживания. На графиках зависимости показателей Ляпунова при сглаживании пилообразной функции можно видеть появление окон периодической динамики, что говорит о нарушении квазигиперболической природы аттрактора. Приведены также карты динамических режимов на плоскости параметров системы, где присутствуют области периодических движений («языки Арнольда»), уменьшающиеся по мере уменьшения характерного масштаба сглаживания и исчезающие в предельном случае разрывной пилообразной функции. Поскольку изначально аттрактор Белых введен в контексте радиофизических задач (фазовая автоподстройка частоты), предпринятый здесь анализ представляет интерес с точки зрения возможного использования хаотической динамики на этом аттракторе в электронных устройствах.

Ключевые слова: динамическая система, аттрактор, хаос, отображение, ротатор, показатель Ляпунова.

DOI: 10.18500/0869-6632-2018-26-1-64-79

Образец цитирования: Кузнецов С.П. Аттрактор Белых в отображении Заславского и его трансформация при сглаживании // Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2018. Т. 26, № 1. С. 64–79. DOI: 10.18500/0869-6632-2018-26-1-64-79

BELYKH ATTRACTOR IN ZASLAVSKY MAP AND ITS TRANSFORMATION UNDER SMOOTHING

S. P. Kuznetsov

Kotelnikov Institute of Radio-Engineering and Electronics of RAS, Saratov Branch
38, Zelenaya, 410019 Saratov, Russia

Saratov State University
83, Astrakhanskaya, 410012 Saratov, Russia

Udmurt State University
1, Universitetskaya, 426034 Izhevsk, Russia

E-mail: spkuz@yandex.ru

Received 3.10.2017, revised 3.11.2017

If we allow non-smooth or discontinuous functions in definition of an evolution operator for dynamical systems, then situations of quasi-hyperbolic chaotic dynamics often occur like, for example, on attractors in model Lozi map and in Belykh map. The present article deals with the quasi-hyperbolic attractor of Belykh in a map describing a rotator with dissipation driven by periodic kicks, the intensity of which depends on the instantaneous angular coordinate of the rotator as a sawtooth-like function, and also the transformation of the attractor under smoothing of that function is considered. Reduction of the equations to the standard form of the Belykh map is provided. Results of computations illustrating the dynamics of the system with continuous time on the Belykh attractor are presented. Also, results for the model with the smoothed sawtooth function are considered depending on the parameter characterizing the smoothing scale. On graphs of Lyapunov exponents versus a parameter, the smoothing of the sawtooth implies appearance of periodicity windows, which indicates violation of the quasi-hyperbolic nature of the attractor. Charts of dynamic regimes on the parameter plane of the system are also plotted, where regions of periodic motions («Arnold's tongues») are present, which decrease in size with the decrease in the characteristic scale of the smoothing, and disappear in the limit case of the sawtooth function with a break. Since the Belykh attractor was originally introduced in the radiophysical context (phase-locked loops), the analysis undertaken here is of interest from the point of view of possible exploiting of chaotic dynamics on this attractor in electronic devices.

Key words: dynamical system, attractor, chaos, map, rotator, Lyapunov exponent.

DOI: 10.18500/0869-6632-2018-26-1-64-79

References: Kuznetsov S.P. Belykh attractor in Zaslavsky map and its transformation under smoothing. *Izvestiya VUZ, Applied Nonlinear Dynamics*, 2018, vol. 26, iss. 1, pp. 64–79. DOI: 10.18500/0869-6632-2018-26-1-64-79

Введение

С точки зрения возможных приложений хаоса, важно, чтобы при малом возмущении параметров системы порождаемый ею хаос был робастным, то есть не разрушался и не трансформировался в режимы регулярной, например, периодической динамики [1]. В системах, где оператор эволюции задан гладкими функциями переменных состояния, такого рода «настоящий» хаос реализуется для странных аттракторов гиперболического типа (аттрактор Смейла–Вильямса, аттрактор Плыкина), обладающих математически обоснованным свойством грубости или структурной устойчивости [2–4], и псевдогиперболических аттракторов (аттрактор Лоренца, «дикие» аттракторы) [5–7].

Если говорить о гиперболических аттракторах, то они составлены исключительно из седловых траекторий в пространстве состояний. Это траектории, у которых в пространстве векторов бесконечно малых возмущений (касательном пространстве) можно выделить сжимающее и растягивающее инвариантные подпространства. Первое образовано векторами, нормы которых экспоненциально убывают при эволюции в прямом времени, а второе – векторами, нормы которых экспоненциально убывают в обратном времени. (В системах с непрерывным временем добавляется еще нейтральное подпространство возмущений, норма которых в среднем не убывает и не возрастает.) При этом произвольный вектор малого возмущения представляется линейной комбинацией векторов, принадлежащих названным подпространствам. Множества изображающих точек, приближающихся к данной траектории в прямом или обратном времени, отвечают, соответственно, ее устойчивому и неустойчивому многообразию. Для гиперболического аттрактора эти многообразия могут пересекаться, но не должны иметь касаний.

Для псевдогиперболических аттракторов имеет место ослабленное условие, когда одно инвариантное подпространство сжимающее, а другое характеризуется тем, что элемент объема, ассоциирующегося с этим подпространством, претерпевает при эволюции во времени экспоненциальное растяжение. (Последнее, подчеркнем, совсем не подразумевает увеличения норм всех принадлежащих этому подпространству векторов.)

В системах с операторами эволюции, заданными гладкими функциями состояния, гораздо чаще приходится сталкиваться с феноменом квазиаттрактора (отображение Эно, модель Рёсслера, многие примеры в электронике и других дисциплинах) [8–13]. В случае квазиаттрактора динамика, наблюдаемая при расчетах или в эксперименте, хотя и выглядит хаотической, но характеризуется присутствием в той же области фазового пространства (наряду с хаотическими траекториями) также регулярных притягивающих множеств – «стоков» с узкими бассейнами притяжения, или же их возникновением при сколь угодно малой вариации параметров системы. Эту ситуацию связывают с наличием в области с квазиаттрактором касаний устойчивых и неустойчивых многообразий траекторий, неустраняемых малым «шевелением» параметров.

С другой стороны, если при задании оператора эволюции динамических систем допустить использование негладких или разрывных функций, то робастный хаос часто оказывается легко достижимым [12–16]. Примерами служат аттрактор Лози в модельном двумерном отображении, заданном кусочно-линейной функцией [17, 18], и аттрактор Белых, который был в свое время введен в рассмотрение в контексте систем фазовой автоподстройки [19] в предположении пилообразной формы зависимости функции передачи от начальной фазы [20–22]. Этим аттракторам отвечает хаотическая динамика, во многом аналогичная гиперболической (включая устройство устойчивых и неустойчивых многообразий хаотических траекторий, за исключением сингулярных траекторий, затрагивающих точки разрыва, которые естественно игнорировать как атипичные). В литературе об аттракторах Лози и Белых говорят как о *квазигиперболических*. Однако, следует подчеркнуть, они не могут претендовать на место в обсуждавшейся выше классификационной схеме, применимой в полной степени лишь к гладким системам.

Квазигиперболическая природа хаоса, о которой идет речь, может нарушаться при сглаживании функций, фигурирующих в определении оператора эволюции, и это ведет к появлению особенностей динамического поведения, характерных для квазиаттрактора (см., например, [23, 24]).

В работе [23], взяв за отправную точку кусочно-линейное отображение Лози $(x, y) \rightarrow (1 - a|x| - by, bx)$, авторы исследуют, что происходит при сглаживании излома функции в его определении. Если сглаживание производится на достаточно малом масштабе, то условия существования и устойчивости периодических точек отображения Лози и сглаженного отображения оказываются одинаковыми. В то же время сглаживание ведет к появлению классического бифуркационного каскада удвоений периода при вариации одного из параметров (сценарий Фейгенбаума), что не наблюдается в отображении Лози. В динамике сглаженного отображения после перехода к хаосу в соответствующей области параметра наблюдаются «окна регулярности», которые можно видеть на графике показателя Ляпунова как «провалы» из положительной области в область отрицательных значений. Авторы [23] полагают, что в перспективе данное направление исследований должно привести к прогрессу в аналитическом и численном исследовании трудных проблем, препятствующих аккуратному математическому рассмотрению динамики гладких отображений.

В работе [24], используя в качестве основной модели одномерное отображение с изломом, демонстрирующее робастный хаос, авторы обсуждают вопрос об изменении характера динамики при введении сглаживания. Основным результатом состоит в заключении о возникновении «окон периодичности», наблюдаемых при изменении управляющего параметра даже в том случае, когда сглаживание выполнено на очень малом масштабе. Рассмотрение конкретизируется применительно к экспериментальному устройству в виде электронной схемы, демонстрирующей исследуемые феномены.

Настоящая статья посвящена рассмотрению аттрактора Белых и обсуждению его трансформации при сглаживании используемой в модели пилообразной функции. Поскольку аттрактор Белых изначально появился в контексте радиофизических задач, предпринятый анализ представляет интерес с точки зрения возможного использования хаотической динамики на этом аттракторе в электронных устройствах. В разделе 1 рассматривается конкретный пример диссипативной системы, где реализуется данный тип динамики, а именно, задача о ротаторе под действием периодических толчков. Описание изменения состояния за период толчков приводит к отображению Заславского [25, 26], в котором при выборе пилообразной формы функции с разрывом, задающей зависимость интенсивности толчков от угла поворота $g(\theta)$, реализуется аттрактор Белых. В разделе 2 представлены соответствующие преобразования, сводящие задачу к стандартному виду отображения Белых [22]. В разделе 3 приводятся иллюстрации динамики системы с непрерывным временем на аттракторе Белых. В разделе 4 рассматривается динамика модели со сглаженной функцией $g(\theta)$ в зависимости от параметра, характеризующего масштаб сглаживания. В частности, представлены графики показателей Ляпунова, на которых по мере сглаживания функции $g(\theta)$ возникают все более и более выраженные окна периодической динамики, а также карты режимов, иллюстрирующие трансформацию языков синхронизации.

1. Отображение Заславского и подталкиваемый ротатор

Отображение Заславского описывает динамику многих диссипативных систем, характеризующихся периодичностью пространства состояний по одной из переменных. К ним относятся ротатор под действием периодических толчков [25, 26], импульсные

системы фазовой автоподстройки [19], задача о движении вблизи предельного цикла с периодическими толчками [4].

Следуя [25, 26], рассмотрим движение ротатора, характеризуемого угловой координатой θ и угловой скоростью ω , под действием периодических импульсных толчков, интенсивность которых зависит от мгновенной угловой координаты посредством функции $g(\theta)$, имеющей период 2π по своему аргументу. Полагая, что приложен также еще постоянный вращающий момент M , уравнения можно записать в виде

$$\dot{\theta} = \omega, \quad J\dot{\omega} = -\gamma\omega + kg(\theta) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) + M, \quad (1)$$

где J – момент инерции; γ – коэффициент трения; k – параметр, характеризующий интенсивность толчков. Введем безразмерное время $\tau = t/T$ и безразмерную угловую относительную скорость $w = (\omega - M\gamma^{-1})T$, тогда получим

$$\frac{d\theta}{d\tau} = w + \Delta, \quad \frac{dw}{d\tau} = -\Gamma w + Kg(\theta) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\tau - n), \quad (2)$$

где $\Gamma = \gamma T J^{-1}$, $K = k T J^{-1}$, $\Delta = M T J^{-1}$.

Пусть в момент перед n -м толчком состояние ротатора задано переменными (θ_n, w_n) . Сразу после толчка значения переменных будут $(\theta_n, w_n + Kg(\theta_n))$. Решая с этими начальными условиями уравнения, описывающие движение в интервале между толчками, $\dot{\theta} = w + \Delta$, $\dot{w} = -\Gamma w$, получим

$$\begin{aligned} w_{n+1} &= [w_n + Kg(\theta_n)] e^{-\Gamma}, \\ \theta_{n+1} &= \theta_n + [w_n + Kg(\theta_n)](1 - e^{-\Gamma})/\Gamma + \Delta. \end{aligned} \quad (3)$$

Вводя обозначения $x_n = \theta_n$, $y_n = \omega_n(1 - e^{-\Gamma})/\Gamma$, $a = K(1 - e^{-\Gamma})/\Gamma$, $\lambda = e^{-\Gamma}$, приходим к следующей компактной форме записи отображения Заславского:

$$x_{n+1} = x_n + y_n + ag(x_n) + \Delta \pmod{2\pi}, \quad y_{n+1} = \lambda[y_n + ag(x_n)]. \quad (4)$$

Вычисление определителя Якоби

$$\begin{vmatrix} \partial x_{n+1}/\partial x_n & \partial x_{n+1}/\partial y_n \\ \partial y_{n+1}/\partial x_n & \partial y_{n+1}/\partial y_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 + ag'(x_n) & 1 \\ \lambda g'(x_n) & \lambda \end{vmatrix} = \lambda \quad (5)$$

показывает, что в области параметра $0 < \lambda < 1$ отображение сжимает фазовый объем, так что должны присутствовать аттракторы.

2. Аттрактор Белых

Если фигурирующая в уравнениях (1)–(4) зависимость $g(x)$ задана как показанная на рис. 1 разрывная функция

$$g(x) = \begin{cases} x/\pi + 1, & -\pi < x < 0, \\ x/\pi - 1, & 0 < x < \pi, \end{cases} \quad g(x + 2\pi) = g(x), \quad (6)$$

то отображение (4) имеет в определенной области параметров квазигиперболический аттрактор. Этот аттрактор изначально был введен в рассмотрение и изучен В.Н.Белых в контексте систем фазовой синхронизации [20–22].

На рис. 2, а показан аттрактор отображения (4) с функцией (6) при значениях параметров

$$a = 1.2, \quad \Delta = 0, \quad \lambda = 0.48. \quad (7)$$

Чтобы воспроизвести построение Белых, замечаем, что отображению (4) с функцией (6) отвечает матрица Якоби

$$\begin{pmatrix} 1 + a/\pi & 1 \\ \lambda a/\pi & \lambda \end{pmatrix}, \quad (8)$$

а ее собственные числа и собственные векторы выражаются следующим образом:

$$\lambda_1 = [a + \pi + \pi\lambda - \sqrt{(a + \pi + \pi\lambda)^2 - 4\pi^2\lambda}] / (2\pi), \quad (9)$$

$$\lambda_2 = [a + \pi + \pi\lambda + \sqrt{(a + \pi + \pi\lambda)^2 - 4\pi^2\lambda}] / (2\pi),$$

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \end{pmatrix} = \frac{\pi}{\sqrt{(a + \pi + \pi\lambda)^2 - 4\pi^2\lambda}} \begin{pmatrix} -a - \pi + \pi\lambda + \sqrt{(a + \pi + \pi\lambda)^2 - 4\pi^2\lambda} \\ -2\lambda a \end{pmatrix}, \quad (10)$$

$$\begin{pmatrix} u_2 \\ v_2 \end{pmatrix} = \frac{\pi}{\sqrt{(a + \pi + \pi\lambda)^2 - 4\pi^2\lambda}} \begin{pmatrix} a + \pi - \pi\lambda + \sqrt{(a + \pi + \pi\lambda)^2 - 4\pi^2\lambda} \\ 2\lambda a \end{pmatrix}. \quad (11)$$

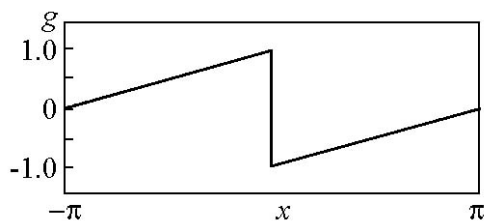


Рис. 1. График разрывной пилообразной функции $g(x)$, используемой при определении оператора эволюции системы с аттрактором Белых

Fig. 1. Plot of the discontinuous sawtooth function $g(x)$ used in the definition of the evolution operator for the system with Belykh attractor

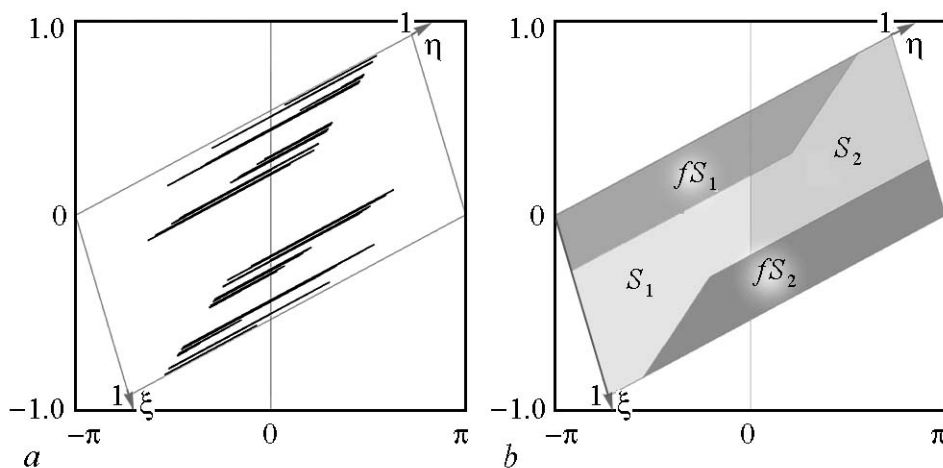


Рис. 2. Аттрактор отображения (4) с функцией (6) при $a = 1.2, \Delta = 0, \lambda = 0.48$ (а) и конфигурация областей, возникающих при применении отображения (б)

Fig. 2. Attractor of the map (4) with the function (6) for $a = 1.2, \Delta = 0, \lambda = 0.48$ (a) and configuration of the areas arising when the map is applied (b)

Нормировка собственных векторов выбрана здесь так, чтобы выполнялись соотношения

$$u_1 + u_2 = 2\pi, \quad v_1 + v_2 = 0.$$

Отображение (4) имеет неподвижную точку $x_0 = -\pi - \pi(1 - \lambda)\Delta/a$, $y_0 = -\lambda\Delta$, которую примем за начало отсчета новой системы координат (ξ, η) , определив ее оси как направления собственных векторов. На рис. 2 оси новой системы координат обозначены линиями серого цвета. Связь с исходными координатами дается соотношениями

$$x = -\pi - \pi(1 - \lambda)\Delta/a + \xi u_1 + \eta u_2, \quad y = -\lambda\Delta + \xi v_1 + \eta v_2 \quad (12)$$

или обратной заменой

$$\begin{aligned} \xi &= \frac{[x + \pi + \pi(1 - \lambda)\Delta/a]v_2 - (y + \lambda\Delta)u_2}{u_1v_2 - u_2v_1}, \\ \eta &= \frac{-[x + \pi + \pi(1 - \lambda)\Delta/a]v_1 + (y + \lambda\Delta)u_1}{u_1v_2 - u_2v_1}. \end{aligned} \quad (13)$$

Рассмотрим область в виде четырехугольника, две вершины которого $(-\pi, 0)$ и $(\pi, 0)$ отвечают неподвижным точкам отображения, а стороны параллельны осям ξ и η . Эта область разделена на две части S_1 и S_2 вертикальной линией $x = 0$, на которой отображение имеет разрыв. Подобласти S_1 и S_2 отображаются в области в виде двух трапеций fS_1 и fS_2 , вытянутых вдоль неустойчивого собственного направления и сжатых вдоль устойчивого направления (рис. 2, b).

На рис. 3 представлены аналогичные изображения, но в собственных координатах (ξ, η) , которые соответствуют картинкам для отображения Белых в стандартной форме, приведенным в работе [22].

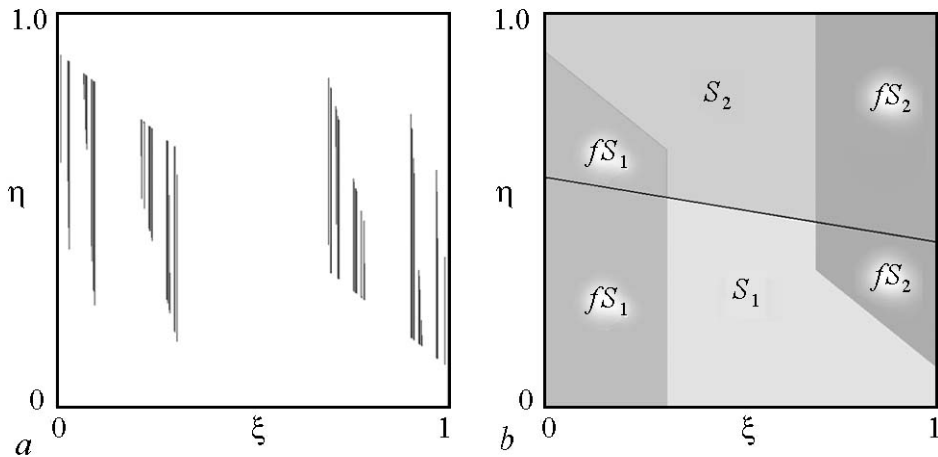


Рис. 3. Аттрактор отображения (4) с функцией (6) при $a = 1.2$, $\Delta = 0$, $\lambda = 0.48$ (a) и конфигурация областей, возникающих при применении отображения, (b), в координатах, определенных через собственные векторы. Наклонная черная линия показывает расположение разрыва и дается уравнением $(\xi - 1/2)u_1 + (\eta - 1/2)u_2 = 0$

Fig. 3. Attractor of the map (4) with the function (6) for $a = 1.2$, $\Delta = 0$, $\lambda = 0.48$ (a) and configuration of the regions arising when applying the map (b) in coordinates defined through the eigenvectors. The inclined black line shows disposition of the discontinuity and is given by the equation $(\xi - 1/2)u_1 + (\eta - 1/2)u_2 = 0$

Показатели Ляпунова, вычисленные для этого аттрактора с использованием стандартного алгоритма [27, 28, 14], составляют

$$\Lambda_1 = 0.440, \quad \Lambda_2 = -1.174.$$

Заметим, что при логарифмировании эти величины дают в точности собственные числа (9) матрицы (8), как это и должно быть в силу кусочно-линейной природы отображения. Размерность аттрактора по формуле Каплана–Йорке [29, 4] $D_{KI} = 1 + \Lambda_1/|\Lambda_2| = 1.375$, то есть дробная; действительно, данный аттрактор представляет собой фрактальный объект (см. изображения на рис. 2, а и 3, а).

3. Аттрактор системы с непрерывным временем

Вернемся к уравнениям движения ротатора с диссипацией под действием импульсных толчков – к системе с непрерывным временем (2).

На рис. 4 показаны графики зависимости от времени угловой координаты и безразмерной угловой скорости ротатора при динамике на аттракторе Бelykh, реализующимся при задании параметров согласно параметрам отображения (6). На рис. 5 показано изображение аттрактора системы с непрерывным временем (2) в расширенном фазовом пространстве при тех же параметрах. В силу периодичности расширенного фазового пространства по временной координате, картинку следует представлять повторяющейся с периодом 1.0 по вертикальной оси.

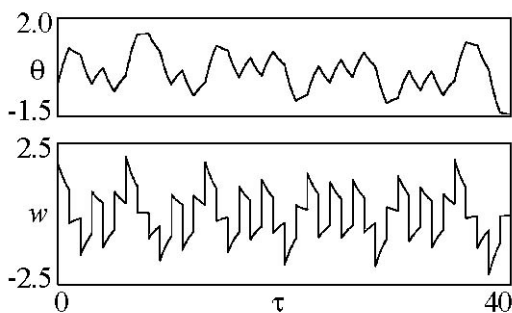


Рис. 4. Зависимости от времени угловой координаты и безразмерной угловой скорости при динамике на аттракторе Бelykh системы с непрерывным временем (2). Значения параметров $\Gamma = 0.7340$, $K = 1.6938$, $\Delta = 0$ соответствуют параметрам отображения (6) $a = 1.2$, $\lambda = 0.48$

Fig. 4. Time dependencies of the angular coordinate and the dimensionless angular velocity for dynamics on the Belykh attractor of the continuous time system (2); the parameter values $\Gamma = 0.7340$, $K = 1.6938$, $\Delta = 0$ correspond to the parameters of the map (6) $a = 1.2$, $\lambda = 0.48$

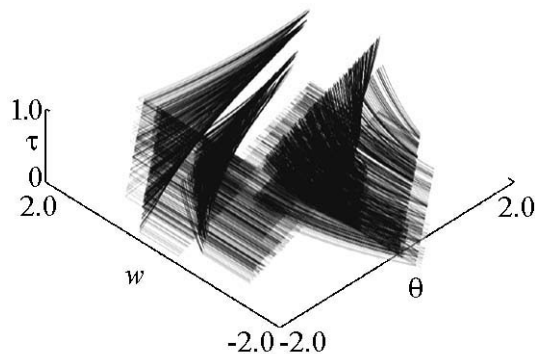


Рис. 5. Изображение аттрактора Бelykh системы с непрерывным временем (2) в расширенном фазовом пространстве, которое следует представлять повторяющимся с периодом 1.0 по вертикальной оси. Значения параметров $\Gamma = 0.7340$, $K = 1.6938$, $\Delta = 0$ соответствуют параметрам отображения (6) $a = 1.2$, $\lambda = 0.48$

Fig. 5. Belykh attractor of the continuous time system (2) in the extended phase space; the image should be regarded as periodically repetitive with period 1.0 along the vertical axis. The parameter values $\Gamma = 0.7340$, $K = 1.6938$, $\Delta = 0$ correspond to the parameters of the map (6) $a = 1.2$, $\lambda = 0.48$

4. Модель со сглаживанием разрыва: Разрушение аттрактора Белых

Перейдем к обсуждению вопроса о том, как меняется динамика системы с данным типом аттрактора при сглаживании присутствующей в определении оператора эволюции пилообразной функции. Для этого введем следующее семейство функций, зависящее от параметра (рис. 6):

$$g_{\mu}(x) = \begin{cases} (1/2)\alpha^3 x^3 - (3/2)\alpha x, & |\alpha x| \leq \mu + 1, \\ (1 + \mu)^3 (x/\pi - \operatorname{sgn} x), & |\alpha x| > \mu + 1, \end{cases} \quad (14)$$

$$\alpha = \frac{2(1 + \mu)^3}{3\pi\mu(2 + \mu)}, \quad g(x + 2\pi) = g(x).$$

Предел $\mu \rightarrow 0$ отвечает разрывной функции, показанной на рис. 1.

На рис. 7 показан аттрактор в расширенном фазовом пространстве для системы с непрерывным временем (2) со сглаженной пилообразной функцией, где параметр сглаживания задан равным 0.03. Его можно сравнить с изображением аттрактора Белых на рис. 5 (чтобы увидеть различия, обратите внимание на центральную часть рисунка).

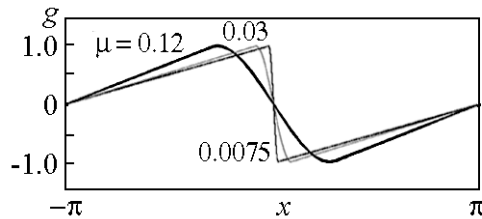


Рис. 6. Графики функций семейства $g_{\mu}(x)$ при различных величинах параметра сглаживания

Fig. 6. Functions of the family $g_{\mu}(x)$ for different values of the smoothing parameter

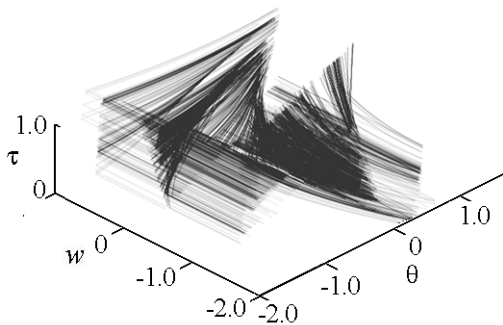


Рис. 7. Изображение аттрактора системы (2) со сглаженной функцией $g_{\mu}(\theta)$ в расширенном фазовом пространстве при $\mu = 0.03$. Остальные параметры такие же, как на рис. 5.

Fig. 7. Attractor of the system (2) in the extended phase space with the smoothed function $g_{\mu}(\theta)$ for $\mu = 0.03$. The remaining parameters are the same as in Fig. 5

В силу периодичности по временной координате, картинку следует представлять повторяющейся с периодом 1.0 по вертикальной оси.

На рис. 8 показаны аттракторы системы с дискретным временем – отображения (4) с функцией (14) в виде двумерных портретов при различных величинах параметра сглаживания μ .

Как можно видеть на диаграммах a , b , c , при сглаживании пилообразной функции характерное устройство аттрактора Белых видоизменяется: структура дополняется появлением «нитей», соединяющих наискосок ранее разделенные «верхнюю» и «нижнюю» часть аттрактора.

На рис. 9 показан график показателей Ляпунова, рассчитанных численно с использованием стандартного алгоритма [27, 28, 14], в зависимости от параметра сглаживания μ . Появление на графике провалов старшего показателя в отрицательную область, ассоциирующихся с «окнами» периодической динамики, связано с возможностью посещения траекторией на аттракторе области

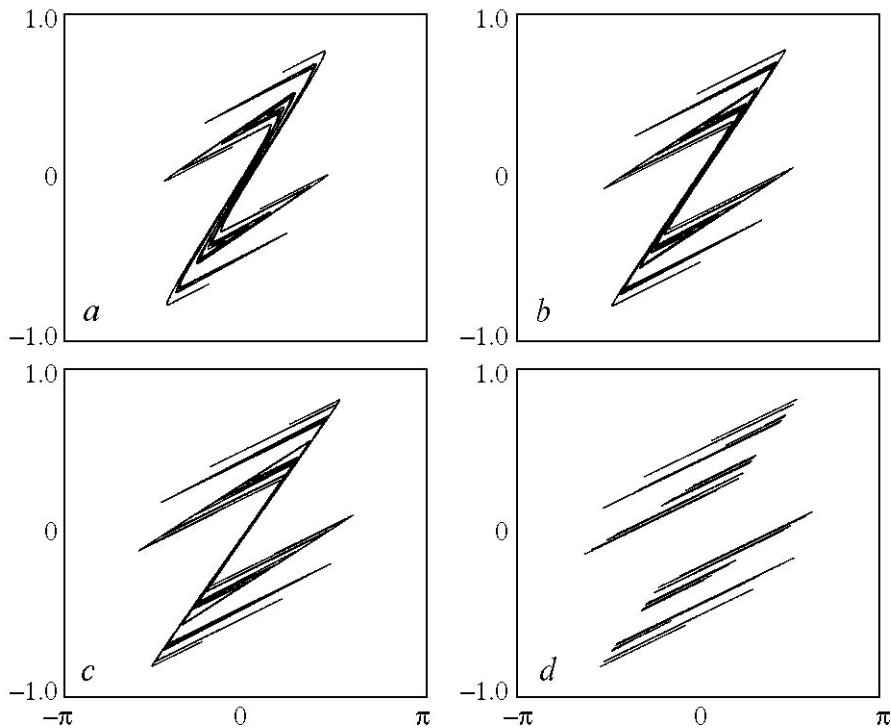


Рис. 8. Аттрактор отображения со сглаженной функцией, даваемой формулой (14) при $\mu = 0.03$ (a), 0.015 (b) и 0.0075 (c), и аттрактор Бelykh (d). Параметры: $\lambda = 0.48$, $a = 1.2$, $\Delta = 0$

Fig. 8. Attractor of the map with smoothed function given by (14) with $\mu = 0.03$ (a), 0.015 (b) and 0.0075 (c), and the Belykh attractor (d). Parameters $\lambda = 0.48$, $a = 1.2$, $\Delta = 0$

сглаживания пилообразной функции. Это свидетельствует о нарушении квазигиперболической природы аттрактора. При вычислениях с лучшим разрешением по параметру и увеличенным временным интервалом для оценки показателей Ляпунова количество различимых «окон» увеличивается.

Завершая изложение, уместно напомнить, что одно из характерных свойств отображения Заславского с гладкой функцией $g(x)$ состоит в присутствии областей периодических режимов динамики на плоскости параметров – языков Арнольда [14]. Представляется интересным обсудить это в контексте описанной выше картины.

На рис. 10 показаны карты режимов отображения Заславского (4) с функцией (14) при различных величинах

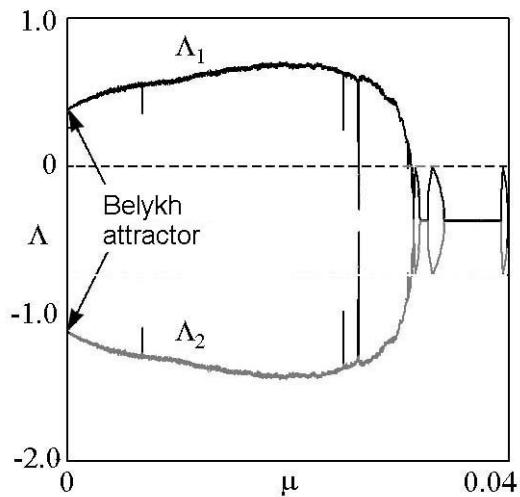


Рис. 9. Показатели Ляпунова в зависимости от параметра сглаживания μ для отображения с функцией (14). Остальные параметры $\lambda = 0.48$, $a = 1$, $\Delta = 0$

Fig. 9. Lyapunov exponents depending on the smoothing parameter μ for the map with function (14); the remaining parameters are $\lambda = 0.48$, $a = 1$, $\Delta = 0$

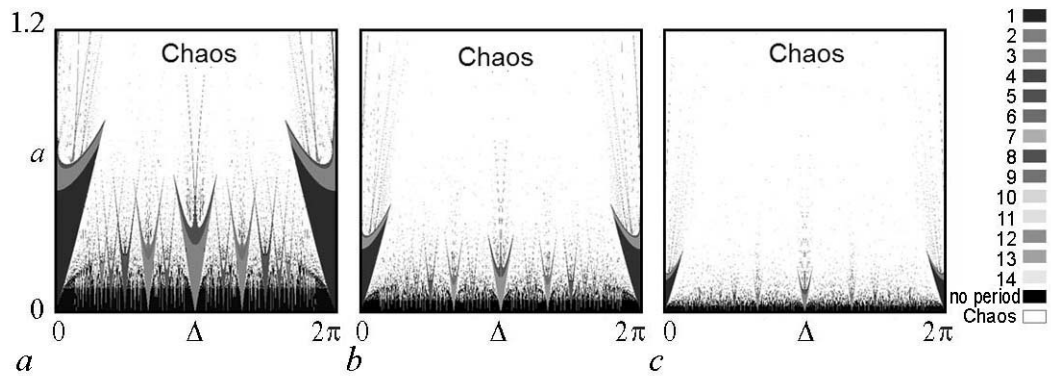


Рис. 10. Картина языков Арнольда на плоскости параметров отображения с функцией (14) в зависимости от параметра сглаживания: $\mu = 0.03$ (a), 0.015 (b) и 0.0075 (c). Параметр $\lambda = 0.48$. Белый цвет отвечает хаосу (положительный показатель Ляпунова), а черный – квазипериодической динамике

Fig. 10. A picture of Arnold's tongues on the parameter plane of the map with the function (14) depending on the smoothing parameter at $\mu = 0.03$ (a), 0.015 (b) and 0.0075 (c). The parameter λ equals 0.48. White color corresponds to chaos (positive Lyapunov exponent), and black to quasi-periodic dynamics

нах параметра сглаживания на плоскости параметров расстройки Δ и интенсивности толчков a . Процедура состояла в сканировании путем перебора узлов сетки с некоторым шагом по двум параметрам. В каждой точке выполняется порядка 10^3 итераций отображения совместно с линеаризованным отображением для оценки показателя Ляпунова. По результатам последних шагов итераций проводится анализ присутствия или отсутствия периода повторения состояний (в смысле совпадения угловой координаты по модулю 2π) с некоторым заданным изначально уровнем допустимой погрешности. При обнаружении периодичности соответствующий пиксель на диаграмме обозначается тем или иным тоном серого цвета, определяемым периодом повторения состояний, и производится переход к анализу следующей точки на плоскости параметров. В качестве начальных условий в новой точке задается состояние, полученное в итоге итераций в предыдущей точке («сканирование с наследованием»), что способствует ускорению сходимости к установившемуся режиму динамики. Черный цвет на карте отвечает непериодической динамике. Белым цветом отмечены области хаоса, диагностируемого по положительной величине показателя Ляпунова.

Периодическое поведение реализуется в областях в виде характерных языков (языки Арнольда). Периодические режимы внутри языков Арнольда, интерпретируются как синхронизация системы периодическим воздействием. Наличие большого числа языков говорит о том, что синхронизация может реализоваться на различных гармониках и субгармониках внешней силы. На самом деле, на рисунке видны только самые широкие языки. Пока параметр a невелик, между языками остается место для квазипериодических режимов. В области больших значений параметра a внутри языков Арнольда можно видеть сложную картину, включающую точки сборки, линии складок и удвоений периода. При движении внутри языка Арнольда в общем направлении увеличения a можно наблюдать возникновение хаоса через каскад удвоений периода. Вычисления показывают, что языки Арнольда, присутствующие для сглаженной функции $g_\mu(x)$, уменьшаются в размерах и сходят «на нет» в предельном случае разрывной пилообразной функции $\mu \rightarrow 0$.

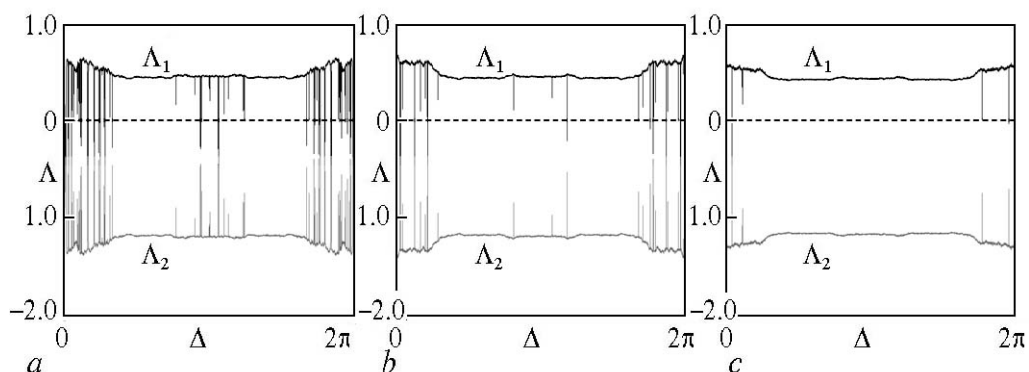


Рис. 11. Показатели Ляпунова в зависимости от параметра расстройки Δ для отображения с функцией (14) при разных величинах параметра сглаживания: $\mu = 0.03$ (a), 0.015 (b) и 0.0075 (c). Остальные параметры: $\lambda = 0.48$, $a = 1.0$

Fig. 11. Lyapunov exponents, depending on the detuning parameter Δ for the map with the function (14) for different values of the smoothing parameter at $\mu = 0.03$ (a), 0.015 (b) and 0.0075 (c). The remaining parameters are $\lambda = 0.48$, $a = 1.0$

На рис. 11 показаны графики зависимости двух показателей Ляпунова отображения Заславского от параметра расстройки при постоянном параметре амплитуды толчков a для трех различных величин параметра сглаживания. Эти графики соответствуют проходу на картах плоскости параметров на рис. 10 по горизонтальной линии $a = 1$. На них также можно наблюдать «провалы» – окна периодичности, отвечающие на картах режимов узким полосам регулярной динамики, вытянутым в область хаоса. В областях, где отсутствуют различимые на графиках «провалы», значения показателей Ляпунова близки к величинам, отвечающим аттрактору Белых (12). При уменьшении параметра сглаживания количество различимых «окон» при принятой в вычислениях степени разрешения становится меньше, и в пределе $\mu \rightarrow 0$ они, очевидно, исчезают.

Заключение

Аттрактор Белых – квазигиперболический аттрактор системы с оператором эволюции, заданным с использованием разрывной функции.

Аттрактор этого типа встречается в радиофизическом контексте. Здесь он рассмотрен для конкретности применительно к отображению Заславского, описывающему диссипативный ротатор с периодическими толчками при пилообразной форме зависимости интенсивности толчков от угловой координаты. Подробно представлены выкладки, приводящие уравнения к стандартной форме отображения Белых. Представлены иллюстрации динамического поведения системы. Показано, что сглаживание пилообразной функции ведет к разрушению квазигиперболической природы аттрактора и появлению феноменов, характерных для квазиаттрактора – окон регулярности и провалов на графике зависимости показателя Ляпунова от параметра. Тем не менее при малом масштабе сглаживания имеются области по параметру, где эти окна неразличимы и в конкретных реализациях системы будут эффектив-

но маскироваться шумами. В этих областях радиофизические устройства с данным типом аттрактора можно использовать как генераторы практически грубого хаоса, игнорируя отличие от квазигиперболической ситуации.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ № 17-12-01008.

Библиографический список

1. *Дмитриев А.С., Ефремова Е.В., Максимов Н.А., Панас А.И.* Генерация хаоса. М.: Техносфера, 2012. 432 с.
2. *Смейл С.* Дифференцируемые динамические системы // УМН. 1970. Т. 25:1 (151). С. 113–185.
3. *Каток А.Б., Хасселблат Б.* Введение в современную теорию динамических систем. М.: Факториал, 1999. 768 с.
4. *Кузнецов С.П.* Динамический хаос и однородно гиперболические аттракторы: От математики к физике // УФН. 2011. Т. 181. № 2. С. 121–149.
5. *Bonatti C., Diaz L.J., Viana M.* Dynamics beyond Uniform Hyperbolicity. A Global Geometric and Probabilistic Perspective. Berlin, Heidelberg, New-York: Springer, 2005. 384 p.
6. *Тураев Д.В., Шильников Л.П.* Пример дикого странного аттрактора // Математический сборник. 1998. Т. 189, № 2. С. 137–160.
7. *Гонченко А.С., Гонченко С.В., Казаков А.О., Козлов А.Д.* Математическая теория динамического хаоса и её приложения: Обзор. Часть 1. Псевдогиперболические аттракторы // Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2017. Т. 25, № 2. С. 4–36.
8. *Afraimovich V.S.* Strange attractors and quasiattractors // Nonlinear and Turbulent Processes in Physics. 1984. Vol. 1. Pp. 1133–1138.
9. *Shilnikov L.* Mathematical problems of nonlinear dynamics: A tutorial // International Journal of Bifurcation and Chaos. 1997. Vol. 7, No. 9. Pp. 1953–2001.
10. *Hénon M.* A two-dimensional mapping with a strange attractor // The Theory of Chaotic Attractors. New-York: Springer, 1976. Pp. 94–102.
11. *Rössler O.E.* An equation for continuous chaos // Physics Letters A. 1976. Vol. 57, No. 5. Pp. 397–398.
12. *Анищенко В.С.* Сложные колебания в простых системах: Механизмы возникновения, структура и свойства динамического хаоса в радиофизических системах. М.: Наука, 1990. 312 с.
13. *Лоскутов А.Ю.* Очарование хаоса // Успехи физических наук. 2010. Т. 180, № 12. С. 1305–1329.
14. *Кузнецов С.П.* Динамический хаос. Москва: Физматлит, 2001. 296 с.
15. *Banerjee S., Yorke J.A., Grebogi C.* Robust chaos // Physical Review Letters. 1998. Vol. 80, No. 14. Pp. 3049–3052.
16. *Elhadj Z., Sprott J.C.* Robust Chaos and Its Applications. Singapore: World Scientific, 2011. 472 p.

17. *Lozi R.* Un attracteur étrange du type attracteur de Hénon // *Le Journal de Physique Colloques.* 1978. Vol. 39, No. C5. P. C5-9–C5-10.
18. *Botella–Soler V., Castelo J.M., Oteo J.A., Ros J.* Bifurcations in the Lozi map // *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical.* 2011. Vol. 44, No. 30. P. 305101.
19. Системы фазовой синхронизации / Ред. В.В. Шахгильдян и Л.Н. Белюстина. М.: Радио и связь, 1982. 288 с.
20. *Белых В.Н.* О моделях систем фазовой синхронизации и их исследовании // *Динамика систем. Межвузовский сборник.* 1976. № 11. С. 23–32.
21. *Белых В.Н.* Хаотические и странные аттракторы двумерного отображения // *Математический сборник.* 1995. Т. 186, № 3. С. 3–18.
22. *Belykh V.N., Belykh I.* Belykh map // *Scholarpedia.* 2011. Vol. 6, No. 10. P. 5545.
23. *Deshpande A., Chen Q., Wang Y., Lai Y.C., Do Y.* Effect of smoothing on robust chaos // *Physical Review E.* 2010. Vol. 82, No. 2. 026209.
24. *Aziz-Alaoui M.A., Robert C., Grebogi C.* Dynamics of a Hénon–Lozi-type map // *Chaos, Solitons & Fractals.* 2001. Vol. 12, No. 12. Pp. 2323–2341.
25. *Zaslavsky G.M.* The simplest case of a strange attractor // *Physics Letters A.* 1978. Vol. 63, No. 3. Pp. 145–147.
26. *Мун Ф.* Хаотические колебания. Вводный курс для научных работников и инженеров. Москва: Мир, 1990. 311 с.
27. *Benettin G., Galgani L., Giorgilli A., Strelcyn J.M.* Lyapunov characteristic exponents for smooth dynamical systems and for Hamiltonian systems: A method for computing all of them. Part 1: Theory // *Meccanica.* 1980. Vol. 15, No. 1. Pp. 9–20.
28. *Shimada I., Nagashima T.* A numerical approach to ergodic problem of dissipative dynamical systems // *Progr. Theor. Phys.* 1979. Vol. 61, No. 6. Pp. 1605–1616.
29. *Kaplan J.L., Yorke J.A.* A chaotic behavior of multi-dimensional differential equations. In: *Functional Differential Equations and Approximations of Fixed Points // Lecture Notes in Mathematics.* Vol. 730 // Ed. by Peitgen H.O. and Walther H.O. Berlin, N.-Y.: Springer, 1979. Pp. 204–227.

References

1. Dmitriev A.S., Efremova E.V., Maksimov N.A., Panas A.I. *Generation of Chaos.* Moscow: Technosfera, 2012. 432 p. (in Russian).
2. Smale S. Differentiable dynamical systems. *Bull. Amer. Math. Soc. (NS)*, 1967, vol. 73, pp. 747–817.
3. Katok A. and Hasselblatt B. *Introduction to the Modern Theory of Dynamical Systems.* Cambridge: Cambridge University Press, 1995. 824 p.
4. Kuznetsov S.P. Dynamical chaos and uniformly hyperbolic attractors: From mathematics to physics. *Physics–Uspekhi*, 2011, vol. 54, no. 2, pp. 119–144.
5. Bonatti C., Diaz L.J., Viana M. *Dynamics Beyond Uniform Hyperbolicity. A Global Geometric and Probabilistic Perspective.* Berlin, Heidelberg, New-York: Springer, 2005. 384 p.

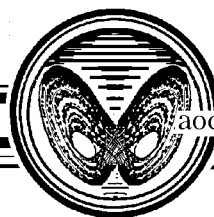
6. Turaev D.V., Shil'nikov L.P. An example of a wild strange attractor. *Sbornik: Mathematics*, 1998, vol. 189, no. 2, pPp. 291–314.
7. Gonchenko A.S., Gonchenko S.V., Kazakov A.O., Kozlov A.D. Mathematical theory of dynamical chaos and its applications : Review. Part 1. Pseudohyperbolic attractors. *Izvestiya VUZ, Applied Nonlinear Dynamics*, 2017, vol. 25, iss. 2, pp. 4–36 (in Russian).
8. Afraimovich V.S. Strange attractors and quasiattractors. *Nonlinear and turbulent processes in physics*, 1984, vol. 1, pp. 1133–1138.
9. Shilnikov L. Mathematical problems of nonlinear dynamics : A tutorial. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 1997, vol. 7, no. 9, pp. 1953–2001.
10. Hénon M. A Two-dimensional Mapping with a Strange Attractor. The Theory of Chaotic Attractors. New York: Springer, 1976. Pp. 94–102.
11. Rössler O. E. An equation for continuous chaos. *Physics Letters A*, 1976, vol. 57, no. 5, pp. 397–398.
12. Anishchenko V.S. Dynamical Chaos. Models and Experiments : Appearance Routes and Structure of Chaos in Simple Dynamical Systems. Singapore: World Scientific, 1995. 383 p.
13. Loskutov A. Fascination of chaos. *Physics–Uspekhi*, 2010, vol. 53, no. 12. pp. 1257–1280.
14. Kuznetsov S.P. Dynamical Chaos. Moscow: Fizmatlit, 2001. 296 p. (in Russian).
15. Banerjee S., Yorke J.A., Grebogi C. Robust chaos. *Physical Review Letters*, 1998, vol. 80, no. 14, pp. 3049–3052.
16. Elhadj Z., Sprott J.C. Robust Chaos and Its Applications. Singapore: World Scientific, 2011. 472 p.
17. Lozi R. Un attracteur strange du type attracteur de Hénon. *Le Journal de Physique Colloques*, 1978, vol. 39, no. C5, pp. C5-9–C5-10.
18. Botella-Soler V., Castelo J. M., Oteo J. A., Ros J. Bifurcations in the Lozi map. *Journal of Physics A : Mathematical and Theoretical*, 2011, vol. 44, no. 30, 305101.
19. Shakhildyan V. V., Belyustina L. N., (Eds). Systems of Phase Synchronization. Moscow: Radio i Svyaz, 1982. 288 p. (in Russian).
20. Belykh V.N. On models of phase synchronization systems and their study. Gorky: State University Press. *Dinamika System*, 1976, no. 11, pp. 23–32 (In Russian).
21. Belykh V.N. Chaotic and strange attractors of a two-dimensional map. *Sb. Math. USSR*, 1995, vol. 186, pp. 311–326.
22. Belykh V. N., Belykh I. Belykh map. *Scholarpedia*, 2011, vol. 6, no. 10, p. 5545.
23. Aziz-Alaoui M. A., Robert C., Grebogi C. Dynamics of a Henon–Lozi-type map. *Chaos, Solitons & Fractals*, 2001, vol. 12, no. 12, pp. 2323–2341.
24. Deshpande A., Chen Q., Wang Y., Lai Y.C., Do Y. Effect of smoothing on robust chaos. *Physical Review E*, 2010, vol. 82, no. 2, 026209.
25. Zaslavsky G.M. The simplest case of a strange attractor. *Physics Letters A*, vol. 63, no. 3, pp. 145–147.
26. Moon F.C. Chaotic Vibrations: An Introduction for Applied Scientists and Engineers. New-York: Wiley, 1987. 219 p.

27. Benettin G., Galgani L., Giorgilli A., Strelcyn J. M. Lyapunov characteristic exponents for smooth dynamical systems and for Hamiltonian systems; A method for computing all of them. Part 1: Theory. *Meccanica*, 1980, vol. 15, no. 1, pp. 9–20.
28. Shimada I., Nagashima T. A numerical approach to ergodic problem of dissipative dynamical systems. *Progr. Theor. Phys.*, 1979, vol. 61, no. 6, pp. 1605–1616.
29. Kaplan J.L., Yorke J.A. A chaotic behavior of multi-dimensional differential equations. In: *Functional Differential Equations and Approximations of Fixed Points. Lecture Notes in Mathematics*, vol. 730. Eds by Peitgen H.O. and Walther H.O. Berlin, N.-Y.: Springer, 1979. pp. 204–227.

Кузнецов Сергей Петрович – родился в Москве (1951). Окончил Саратовский государственный университет (1973). Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук (СГУ, 1977) и доктора наук (СГУ, 1987) по специальности радиофизика. Профессор базовой кафедры динамических систем СГУ. Главный научный сотрудник Саратовского филиала Института радиотехники и электроники им. В.А. Котельникова РАН. Руководит лабораторией теоретической нелинейной динамики. Главный научный сотрудник лаборатории нелинейного анализа и конструирования новых средств передвижения Удмуртского государственного университета. Автор монографий «Динамический хаос и гиперболические аттракторы: От математики к физике», «Hyperbolic Chaos. A Physicist's View», «Strange Nonchaotic Attractors» (совместно с А. Пиковским и У. Фойдель), а также учебно-научных монографий «Динамический хаос» и «Нелинейные колебания» (в соавторстве с А.П. Кузнецовым и Н.М. Рыскиным). Опубликовал свыше 200 научных статей по нелинейной динамике, радиофизике и электронике. Под его руководством защищены двенадцать кандидатских диссертаций. Лауреат Государственной научной стипендии для ученых России (1994–1996), Соросовский доцент (1998), Соросовский профессор (2000, 2001). Член редакционной коллегии журналов «Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика», «Regular and Chaotic Dynamics», «Нелинейная динамика», «Известия Саратовского университета – Новая серия. Серия Физика».



410019 Саратов, ул. Зеленая, 38
 Саратовский филиал ИРЭ имени В.А. Котельникова РАН
 410012, Саратов, Астраханская, 83
 Саратовский государственный университет
 426034 Ижевск, ул. Университетская, 1
 Удмуртский государственный университет
 E-mail: spkuz@yandex.ru



УДК 530.182

СТАТИСТИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ИНДУЦИРОВАННОЙ ШУМОМ ПЕРЕМЕЖАЕМОСТИ В МУЛЬТИСТАБИЛЬНЫХ СИСТЕМАХ

М. О. Журавлев¹, А. А. Короновский¹, О. И. Москаленко¹, А. Е. Храмов^{1,2}

¹Саратовский национальный исследовательский государственный университет
Россия, 410012 Саратов, Астраханская, 83

²Саратовский государственный технический университет имени Гагарина Ю.А.
Россия, 410017 Саратов, Политехническая, 77

E-mail: zhuravlevmo@gmail.com, alexey.koronovskii@gmail.com,
o.i.moskalenko@gmail.com, hramovae@gmail.com

Поступила в редакцию 25.10.2017, после доработки 28.12.2017

Работа посвящена изучению индуцированного шумом перемежающегося поведения в мультистабильных системах. Данная задача является достаточно важной, так как, несмотря на значительный интерес со стороны исследователей к изучению мультистабильности и перемежаемости, в настоящий момент времени до сих пор остается нерешенным вопрос, связанный с детальным пониманием процессов, происходящих в мультистабильных системах при воздействии на них шумов, и теоретическим описанием возникающего при этом перемежающегося поведения. Проведено исследование индуцированной шумом перемежаемости в мультистабильных системах на примере: модельной бистабильной системы, находящейся под внешним шумовым воздействием, и системы двух диссипативно связанных между собой логистических отображений, находящихся под внешним шумовым воздействием. В рамках работы установлено, что при воздействии шума на мультистабильную систему и при определенных значениях управляющих параметров можно наблюдать индуцированное шумом перемежающееся поведение. При этом для данного типа поведения были получены аналитические закономерности для распределения длительностей участков, соответствующих каждому из сосуществующих типов поведения, а также найдена теоретическая зависимость для средней длительности пребывания исследуемой системы вблизи устойчивого положения равновесия от параметра надкритичности. В ходе проведенных численных исследований были получены статистические характеристики данного типа поведения для обеих систем, а именно: распределение длительностей пребывания исследуемой системы вблизи каждого из сосуществующих устойчивых состояний, а также зависимость средней длительности пребывания исследуемой системы вблизи каждого из сосуществующих устойчивых состояний от параметра надкритичности. Результаты численного исследования перемежающегося

поведения для данных систем были сопоставлены с полученными аналитическими закономерностями для индуцированной шумом перемежаемости в мультистабильных системах. Показано, что численные результаты и теоретические зависимости находятся в хорошем соответствии друг с другом.

Ключевые слова: перемежаемость, мультистабильность, шум.

DOI: 10.18500/0869-6632-2018-26-1-80-89

Образец цитирования: Журавлев М.О., Короновский А.А., Москаленко О.И., Храмов А.Е. Статистические характеристики индуцированной шумом перемежаемости в мультистабильных системах // Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2018. Т. 26, № 1. С. 80–89. DOI: 10.18500/0869-6632-2018-26-1-80-89

STATISTICAL CHARACTERISTICS OF NOISE-INDUCED INTERMITTENCY IN MULTISTABLE SYSTEMS

M. O. Zhuravlev¹, A. A. Koronovskii¹, O. I. Moskalenko¹, A. E. Hramov^{1,2}

¹Saratov State University

83, Astrakhanskaya, 410012 Saratov, Russia

²Yuri Gagarin State Technical University of Saratov

77, Politekhnikeskaya, 410008 Saratov, Russia

E-mail: zhuravlevmo@gmail.com, alexey.koronovskii@gmail.com,

o.i.moskalenko@gmail.com, hramovae@gmail.com

Received 25.10.2017, revised 28.12.2017

The paper is devoted to the study of noise-induced intermittent behavior in multistable systems. Such task is an important enough because despite of a great interest of investigators to the study of multistability and intermittency, the problem connected with the detailed understanding of the processes taking place in the multistable dynamical systems in the presence of noise and theoretical description of arising at that intermittent behavior is still remain unsolved. In present paper we analyze the noise-induced intermittency in multistable systems using the examples of model bistable system being under influence of external noise and two dissipatively coupled logistic maps subjected to additional noise. We have shown that the influence of noise on multistable system for certain values of the control parameters results in the appearance of noise-induced intermittent behavior. At that, for the found type of intermittent behavior the analytical relations for residence time distributions and dependence of the mean length of the residence times on the criticality parameter have been obtained. During the numerical simulations carried out we have found statistical characteristics for such type of intermittency for both systems, i.e. the distributions of the residence times for both coexisting stable states as well as the dependence of the mean length of the residence times for both regimes on the criticality parameter. The results of numerical simulation of intermittent behavior for systems under study have been compared with the obtained analytical regularities for noise-induced intermittency in multistable systems. At that, we have shown that numerical results and theoretical regularities are in a good agreement with each other.

Key words: intermittency, multistability, noise.

DOI: 10.18500/0869-6632-2018-26-1-80-89

References: Zhuravlev M.O., Koronovskii A.A., Moskalenko O.I., Hramov A.E. Statistical characteristics of noise-induced intermittency in multistable systems. *Izvestiya VUZ, Applied Nonlinear Dynamics*, 2018, vol. 26, iss. 1, pp. 80–89. DOI: 10.18500/0869-6632-2018-26-1-80-89

1. Переमेжаемость как непрерывный переход от регулярного движения к хаотическому широко распространена в природе и технике [1]. Она наблюдается в гидродинамике, химической кинетике, в физике частиц высоких энергий [2], космологии [3] и др. областях науки. Имеют место различные типы переमेжающегося поведения среди которых выделим три типа переमेжаемости (*перемежаемости типов I–III* [1]), возникающие при переходе от периодических колебаний к хаотическим: *on-off перемежаемость* [4, 5], *перемежаемость игольного ушка* [6], *перемежаемость кольца* [7].

Отдельно следует отметить, что шум (внешний или внутренний) может также приводить к перемежающемуся поведению [8, 9], в особенности, в мультистабильных системах [9, 10], когда шумовое воздействие вызывает переход системы с одного сосуществующего аттрактора на другой (данный тип перемежающегося поведения в литературе известен также как *индуцированное шумом переключение между аттракторами* [11, 12] или *индуцированная шумом мультистабильная перемежаемость* [9, 10, 13]). Несмотря на значительный интерес со стороны исследователей к изучению данного типа поведения, в настоящий момент времени по-прежнему остается много вопросов, обусловленных во многом сложностью изучаемых систем, что сильно затрудняет (а в ряде случаев делает невозможным) теоретическое описание происходящих процессов, оставляя исследователям возможность численного и экспериментального изучения.

2. Широкий классом объектов, в которых возможен данный тип поведения (и которые оставались в данном вопросе практически вне поля зрения исследователей), являются системы взаимодействующих осцилляторов. Подобные системы при увеличении силы связи переходят в синхронный режим, который может характеризоваться мультистабильностью в виде сосуществующих синфазных и несинфазных режимов [14, 15]. Воздействие шума может приводить к переключениям между сосуществующими режимами и, соответственно, к индуцированной шумом перемежаемости.

Для изучения этого явления в работе рассматриваются два диссипативно связанных логистических отображения [15]

$$\begin{aligned}x_{n+1} &= \lambda - x_n^2 + \varepsilon(x_n^2 - y_n^2) + D\xi_1, \\y_{n+1} &= \lambda - y_n^2 + \varepsilon(y_n^2 - x_n^2) + D\xi_2,\end{aligned}\tag{1}$$

где ξ_1 и ξ_2 – случайные гауссовы процессы с нулевым средним и единичной дисперсией, D – интенсивность шумового воздействия, λ – управляющий параметр, ε – параметр связи. В работе [15] было показано, что при $D = 0$ (без шума) данные логистические отображения при определенных значениях управляющих параметров ($0.75 < \lambda < 1.25$) могут находиться как в синфазном, так и в противофазном состояниях, что определяется выбором начальных условий в исследуемой системе. В том случае, если на данную систему оказывается внешнее шумовое воздействие, в системе будет происходить переключение между синфазным и противофазным состояниями отображений, которое можно охарактеризовать с помощью параметра

$$z_n = x_{2n}, \quad \text{при условии } y_{2n} < y_{th},\tag{2}$$

где $y_{th} = 0.6$ – соответствует некоторому пороговому значению. В этом случае параметр z_n будет представлять собой фактически возмущенный шумом элемент син-

фазного z_k^s или асинфазного z_k^a цикла периода два ($z_k^s < z_i^a$), и распределение параметра z_n будет иметь два максимума, соответствующих элементам синфазного и асинфазного цикла периода два. Переключение между двумя сосуществующими состояниями (синфазным и асинфазным), происходящее за счет влияния шума, свидетельствует о том, что система находится вблизи катастрофы сборки [16]. Это позволяет описать ее поведение с помощью безразмерной потенциальной функции с двумя минимумами, которая при выборе соответствующих нормировок [16] может быть представлена в виде

$$U(z) = \frac{z^4}{4} - \frac{z^2}{2} + bz, \quad (3)$$

где b – параметр асимметрии. При $|b| < 2/(3\sqrt{3})$ потенциальная функция $U(z)$ содержит два локальных минимума $z_{1,2}^0$, разделенных критической точкой z^* , соответствующей максимуму.

Поскольку переменная z_n , представляющая собой возмущенный элемент цикла периода два, мало меняется за одну итерацию, в данном случае, как и при рассмотрении классической перемежаемости типа I [1, 17], можно перейти от дискретного рассмотрения к непрерывному

$$\dot{z} + \frac{dU(z)}{dz} + D\xi(t) = 0, \quad (4)$$

где $\xi(t)$ – случайный гауссов процесс с нулевым средним и единичной дисперсией, D – интенсивность шумового воздействия. А затем можно перейти к стохастическому дифференциальному уравнению (см., например, [8, 18])

$$dZ = \frac{dU(z)}{dz} dt + dW, \quad (5)$$

где $Z(t)$ – случайный процесс, $W(t)$ – одномерный винеровский процесс. В свою очередь, уравнение (5) эквивалентно уравнению Фоккера–Планка

$$\frac{\partial \rho_Z(z, t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{dU(z)}{dz} \rho_Z(z, t) \right] + \frac{D}{2} \frac{\partial^2 \rho_Z(z, t)}{\partial z^2}, \quad (6)$$

где $\rho_Z(z, t)$ – плотность вероятности случайного процесса $Z(t)$. Для получения статистических характеристик поведения системы таких, как распределения длительностей сосуществующих режимов и зависимости средних длительностей сосуществующих режимов от управляющих параметров, необходимо проанализировать эволюцию плотностей вероятности $\rho_{1,2}(z, t)$ для двух сосуществующих режимов отдельно, а именно, $\rho_1(z, t)$ в области $I_1 = -\infty < z < z^*$ и $\rho_2(z, t)$ в области $I_2 = z^* < z < +\infty$. Обе плотности вероятности $\rho_{1,2}(z, t)$ должны подчиняться уравнению Фоккера–Планка (6) в областях своего определения $I_{1,2}$.

Так как в режиме перемежаемости изображающая точка системы находится в течение длительного времени в окрестности одного из локальных минимумов, можно предположить, что решения для плотностей вероятности $\rho_{1,2}(z, t)$ нужно искать

в форме метастабильных распределений, медленно убывающих с течением времени (см. также [18]), то есть

$$\rho_{1,2}(z, t) = A_{1,2}(t) r(z), \quad (7)$$

где

$$r(z) = \frac{g(z)}{\int_{-\infty}^{\infty} g(\xi) d\xi}, \quad g(\xi) = \exp\left(-\frac{2U(\xi)}{D}\right). \quad (8)$$

Здесь $g(\xi)$ – стационарная плотность вероятности, полученная из решения уравнения (4) для стационарного случая [19]; $A_{1,2}(t)$ – медленно убывающие с увеличением времени коэффициенты. Явный вид функций $A_{1,2}(t)$ можно получить путем решения дифференциального уравнения

$$\frac{dA_{1,2}}{dt} = -\frac{k}{P_{1,2}} A_{1,2}(t) r(x^*), \quad (9)$$

где k – коэффициент пропорциональности, $P_1 = \int_{-\infty}^{x^*} r(\xi) d\xi$, $P_2 = \int_{x^*}^{+\infty} r(\xi) d\xi$ – вероятности нахождения изображающей точки вблизи первого и второго локального минимума, соответственно. Понятно, что убывание $A_{1,2}(t)$ с течением времени описывается экспоненциальным законом

$$A_{1,2}(t) = A_{1,2}(0) \exp\left(-\frac{kr(x^*)}{P_{1,2}} t\right), \quad (10)$$

причем показатели экспоненты оказываются различными для двух локальных минимумов. Распределения длительностей сосуществующих режимов [18] могут быть найдены из выражений

$$p_1(t) = -\int_{-\infty}^{x^*} \frac{\partial \rho_1(x, t)}{\partial t} dx, \quad p_2(t) = -\int_{x^*}^{\infty} \frac{\partial \rho_2(x, t)}{\partial t} dx, \quad (11)$$

которые с учетом условий нормировки $\int_{-\infty}^{x^*} \rho_1(\xi, 0) d\xi = 1$, $\int_{x^*}^{+\infty} \rho_2(\xi, 0) d\xi = 1$ запишутся в виде

$$p_{1,2}(t) = \frac{1}{T_{1,2}} \exp\left(-\frac{t}{T_{1,2}}\right). \quad (12)$$

Здесь $T_{1,2} = \int_0^{+\infty} t p_{1,2}(t) dt$ – средние длительности сосуществующих режимов, определяемые как

$$T_{1,2} = \frac{P_{1,2}}{kr(x^*)} = K \exp(\pm \alpha b) \left[\frac{2}{D} \left(\frac{b^4}{4} + \frac{b^2}{2} \right) \right], \quad (13)$$

K и α – некоторые константы. Следует отметить, что нахождение распределения длительностей сосуществующих режимов тесно связано с задачей о достижении границы, рассмотренной впервые в [20].

3. В рамках верификации полученных теоретических оценок (5)–(13) первоначально были проведены численные исследования индуцированной шумом перемежаемости в модельной бистабильной системе (3)–(4) и получены статистические

характеристики для данного типа поведения. На рис. 1, *a* представлены распределения длительностей пребывания исследуемой модельной системы (4) вблизи одного устойчивого состояния равновесия при фиксированных значениях управляющих параметров. Кроме того, для исследуемой модельной системы была получена зависимость средней длительности пребывания вблизи того же состояния равновесия от значения параметра *b*, которая представлена на рис. 1, *b*. Из рис. 1 хорошо видно, что теория, описывающая индуцированную шумом перемежаемость в мультистабильной системе, и численные результаты хорошо согласуются друг с другом.

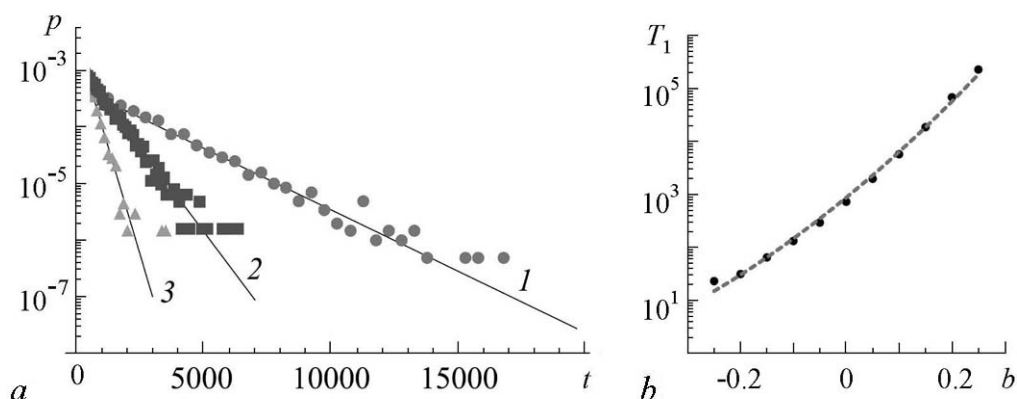


Рис. 1. *a* – распределения длительностей пребывания исследуемой системы (4) (маркеры) вблизи первого устойчивого положения равновесия и аналитическая зависимость (12) (сплошные линии), соответствующая этому распределению: 1 – $b = 0.05$, $D = 0.1$; 2 – $b = 0$, $D = 0.1$; 3 – $b = -0.05$, $D = 0.1$. *b* – зависимость от параметра *b* средней длительности пребывания исследуемой системы (4) (маркеры) вблизи первого устойчивого положения равновесия и аналитическая зависимость (13) (штриховая линия), соответствующая этой зависимости, при $D = 0.1$. Параметры аппроксимации: $K = 867$, $\alpha = 18.85$. На графиках ось ординат в логарифмическом масштабе

Fig. 1. *a* – distributions of the residence times for the system (4) in the vicinity of the first stable state and analytical regularity (12) corresponding to such distribution. Theoretical curves are shown by solid lines, numerically obtained data are indicated by points. Ordinate axis is shown in logarithmic scale: 1 – $b = 0.05$, $D = 0.1$; 2 – $b = 0$, $D = 0.1$; 3 – $b = -0.05$, $D = 0.1$. *b* – dependence of the mean length of the residence times for the system (4) in the vicinity of the first stable state on the control parameter *b* and analytical regularity (13), corresponding to such dependence for $D = 0.1$. Theoretical curve is shown by solid line, numerically obtained data are indicated by points. Parameters of approximation are the following: $K = 867$, $\alpha = 18.85$. Ordinate axis is shown in logarithmic scale

4. Следующим этапом в рамках настоящей работы стало рассмотрение перемежающегося поведения в исходной системе двух диссипативно связанных логистических отображений (1). Полученные распределения длительностей пребывания исследуемой системы в синфазном и противофазном (асинфазном) состояниях при фиксированных значениях управляющих параметров представлены на рис. 2, *a*. Также для исследуемой системы (1) численно получена зависимость средней длительности пребывания системы в синфазном и асинфазном состояниях от значения параметра связи ε , позволяющего варьировать вероятность пребывания исследуемой системы в синфазном и противофазном состояниях и играющего, соответственно, роль параметра асимметрии. Данная зависимость приведена на рис. 2, *b*, видно хорошее соответствие численных результатов теоретическим.

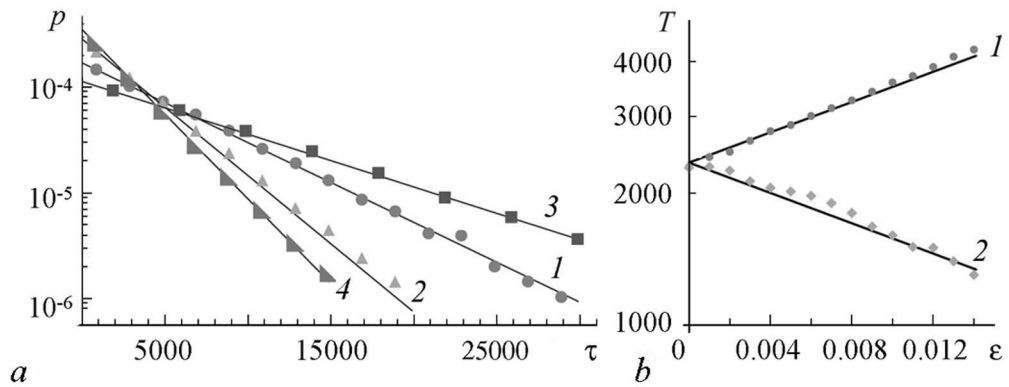


Рис. 2. *a* – распределения длительностей пребывания исследуемой системы (1) (маркеры) в синфазном и противофазном состоянии при фиксированных значениях управляющих параметров, $\lambda_2 = 1.05$, $D = 0.06$ и аналитическая зависимость (12) (сплошные линии), соответствующая этому распределению: 1 – синфазный случай при $\varepsilon = 0.002$, 2 – противофазный случай при $\varepsilon = 0.002$, 3 – синфазный случай при $\varepsilon = 0.012$, 4 – противофазный случай при $\varepsilon = 0.012$; *b* – зависимость средней длительности пребывания исследуемой системы (1) (маркеры) в синфазном и противофазном состояниях от параметра ε и аналитическая зависимость (13) (сплошная линия), соответствующая этой зависимости, при $\lambda_1 = 1.05$, $\lambda_2 = 1.05$, $D = 0.06$: 1 – синфазный случай; 2 – противофазный случай. Параметры аппроксимации: $K = 2350.0$, $\alpha = \pm 40.0$. Ось ординат в логарифмическом масштабе

Fig. 2. *a* – distributions of the residence times for the system (1) in in-phase and antiphase states for fixed values of the control parameters $\lambda_1 = 1.05$, $\lambda_2 = 1.05$, $D = 0.06$ and analytical regularity (12), corresponding to such distributions. Theoretical curves are shown by solid lines, numerically obtained data are indicated by points. Ordinate axis is shown in logarithmic scale: 1 – in-phase case for $\varepsilon = 0.002$; 2 – antiphase case for $\varepsilon = 0.002$; 3 – in-phase case for $\varepsilon = 0.012$; 4 – antiphase case for $\varepsilon = 0.012$. *b* – dependencies of the mean length of the residence times for the system (1) in in-phase and antiphase states on the parameter ε and analytical regularity (13), corresponding to such dependence for $\lambda_1 = 1.05$, $\lambda_2 = 1.05$, $D = 0.06$. Theoretical curve is shown by solid line, numerically obtained data are indicated by points. Ordinate axis is shown in logarithmic scale: 1 – in-phase case; 2 – antiphase case. Parameters of approximation are the following: $K = 2350.0$, $\alpha = \pm 40.0$

Выводы. В работе проведено исследование индуцированной шумом перемежаемости в мультистабильных системах на примере (4) модельной бистабильной системы, находящейся под внешним шумовым воздействием, и системы двух диссипативно связанных между собой логистических отображений (1). Следует отметить, что проведенное рассмотрение для системы (1) оказывается справедливым в определенном диапазоне значений управляющих параметров, при которых в рассматриваемой системе в отсутствие шума сосуществуют два, синхронный и асинхронный, цикла периода два. При изменении значений управляющих параметров, приводящем к увеличению периода сосуществующих режимов, модельная система (4) оказывается неприменимой для анализа данной системы и требует дальнейшего уточнения.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект № 16-32-60078).

Библиографический список

1. Берже П., Помо И., Видаль К. Порядок в хаосе. Москва: Мир, 1991.
2. Дремин И.М. Перемежаемость и фрактальность в процессах множественного рождения частиц // УФН. 1987. Т. 152. С. 531–539.

3. Шандарин С.Ф., Дорошкевич А.Г., Зельдович Я.Б. Крупномасштабная структура Вселенной // УФН. 1983. Т. 139. С. 83–134.
4. Hammer P.W., Platt N., Hammel S.M., Heagy J.F., Lee B.D. Experimental observation of on–off intermittency // Phys. Rev. Lett. 1994. Vol. 73. Pp. 1095.
5. Heagy J.F., Platt N., Hammel S.M. Characterization of on–off intermittency // Phys. Rev. E. 1994. Vol. 49. Pp. 1140.
6. Pikovsky A.S., Osipov G.V., Rosenblum M.G., Zaks M., Kurths J. Attractor–repeller collision and eyelet intermittency at the transition to phase synchronization // Phys. Rev. Lett. 1997. Vol. 79. Pp. 47.
7. Hramov A.E., Koronovskii A.A., Kurovskaya M.K., Boccaletti S. Ring intermittency in coupled chaotic oscillators at the boundary of phase synchronization // Phys. Rev. Lett. 2006. Vol. 97. 114101.
8. Kye W.-H., Kim C.-M. Characteristic relations of type-I intermittency in the presence of noise // Phys. Rev. E. 2000. Vol. 62. Pp. 6304.
9. Huerta-Cuellar G., Pisarchik A.N., Barmenkov Y.O. Experimental characterization of hopping dynamics in a multistable fiber laser // Phys. Rev. E. 2008. Vol. 78. Pp. 35202.
10. Kraut S., Feudel U. Multistability, noise, and attractor hopping: The crucial role of chaotic saddles // Phys. Rev. E. 2002. Vol. 66. Pp. 15207.
11. Arecchi F.T., Badii R., Politi A. Generalized multistability and noise-induced jumps in a nonlinear dynamical system // Phys. Rev. A. 1985. Vol. 32. Pp. 402.
12. Wiesenfeld K., Hadley P. Attractor crowding in oscillator arrays // Phys. Rev. Lett. 1989. Vol. 62. Pp. 1335.
13. Pisarchik A.N., Jaimés-Reategui R., Sevilla-Escoboza R., Huerta-Cuellar G., Taki M. Rogue waves in a multistable system // Phys. Rev. Lett. 2011. Vol. 107. Pp. 274101.
14. Pikovsky A.S., Zaks M., Rosenblum M.G., Osipov G.V., Kurths J. Phase synchronization of chaotic oscillators in terms of periodic orbits // Chaos. 1997. Vol. 7. Pp. 680.
15. Астахов В.В., Безручко Б.П., Гуляев Ю.В., Селезнев Е.П. Мультистабильные состояния диссипативно связанных фейгенбаумовских систем // Письма в ЖТФ. 1989. Т. 15. С. 60.
16. Poston T., Stewart I. Catastrophe Theory and its Applications. Pitman, 1978.
17. Кузнецов С.П. Динамический хаос. Москва: Физматлит, 2001.
18. Koronovskii A.A., Hramov A.E. Type-II intermittency characteristics in the presence of noise // Eur. Phys. J. B. 2008. Vol. 62. Pp. 447.
19. Runnova A.E., Hramov A.E., Grubov V.V., Koronovsky A.A., Kurovskaya M.K., Pisarchik A.N. Theoretical background and experimental measurements of human brain noise intensity in perception of ambiguous images // Chaos, Solitons & Fractals. 2016. Vol. 93. Pp. 201.
20. Kramers H.A. Brownian motion in a field of force and the diffusion model of chemical reactions // Physica. 1940. Vol. 7. Pp. 284.

References

1. Berge P., Pomeau Y., Vidal C. Order within Chaos. New York: John Wiley and Sons, 1984.
2. Dremin I.M. Intermittence and fractal dimensionality in multiple particle creation processes. *Physics–Uspekhi*, 1987. vol. 30, pp. 649–653.
3. Shandarin S.F., Doroshkevich A.G., Zel’dovich Ya.B. The large-scale structure of the universe. *Physics–Uspekhi*, 1983, vol. 26, pp. 46–76.
4. Hammer P.W., Platt N., Hammel S.M., Heagy J.F., Lee B.D. Experimental observation of on–off intermittency. *Phys. Rev. Lett.*, 1994, vol. 73, p. 1095.
5. Heagy J.F., Platt N., Hammel S.M. Characterization of on–off intermittency. *Phys. Rev. E*, 1994, vol. 49, p. 1140.
6. Pikovsky A.S., Osipov G.V., Rosenblum M.G., Zaks M., Kurths J. Attractor–repeller collision and eyelet intermittency at the transition to phase synchronization. *Phys. Rev. Lett.*, 1997, vol. 79, p. 47.
7. Hramov A.E., Koronovskii A.A., Kurovskaya M.K., Boccaletti S. Ring intermittency in coupled chaotic oscillators at the boundary of phase synchronization. *Phys. Rev. Lett.*, 2006, vol. 97, p. 114101.
8. Kye W.-H., Kim C.-M. Characteristic relations of type-I intermittency in the presence of noise. *Phys. Rev. E*, 2000, vol. 62, p. 6304.
9. Huerta-Cuellar G., Pisarchik A.N., Barmenkov Y.O. Experimental characterization of hopping dynamics in a multistable fiber laser. *Phys. Rev. E*, 2008, vol. 78, p. 35202.
10. Kraut S., Feudel U. Multistability, noise, and attractor hopping: The crucial role of chaotic saddles. *Phys. Rev. E*, 2002, vol. 66, p. 15207.
11. Arecchi F.T., Badii R., Politi A. Generalized multistability and noise-induced jumps in a nonlinear dynamical system. *Phys. Rev. A*, 1985, vol. 32, p. 402.
12. Wiesenfeld K., Hadley P. Attractor crowding in oscillator arrays. *Phys. Rev. Lett.*, 1989, vol. 62, p. 1335.
13. Pisarchik A.N., Jaimes-Reategui R., Sevilla-Escoboza R., Huerta-Cuellar G., Taki M. Rogue waves in a multistable system. *Phys. Rev. Lett.*, 2011, vol. 107, p. 274101.
14. Pikovsky A.S., Zaks M., Rosenblum M.G., Osipov G.V., Kurths J. Phase synchronization of chaotic oscillators in terms of periodic orbits. *Chaos*, 1997, vol. 7, p. 680.
15. Astakhov V.V., Bezruchko B.P., Gulyaev Yu.V., Seleznev E.P. *Technical Physics Letters*, 1989, vol. 15, p. 60.
16. Poston T., Stewart I. Catastrophe Theory and its Applications. Pitman, 1978.
17. Kuznetsov S.P. Dynamical Chaos. Moscow: Fizmatlit, 2001 (in Russian).
18. Koronovskii A.A., Hramov A.E. Type-II intermittency characteristics in the presence of noise. *Eur. Phys. J. B.*, 2008, vol. 62, p. 447.
19. Runnova A.E., Hramov A.E., Grubov V.V., Koronovsky A.A., Kurovskaya M.K., Pisarchik A.N. Theoretical background and experimental measurements of human brain noise intensity in perception of ambiguous images. *Chaos, Solitons & Fractals*, 2016, vol. 93, p. 201.
20. Kramers H.A. Brownian motion in a field of force and the diffusion model of chemical reactions. *Physica*, 1940, vol. 7, p. 284.



Журавлев Максим Олегович – родился в Бресте (1988), окончил факультет нелинейных процессов СГУ (2011), кандидат физико-математических наук (2014). Доцент кафедры физики открытых систем СГУ, старший научный сотрудник лаборатории физики нелинейных явлений отделения физики нелинейных систем НИИ естественных наук СГУ. Область научных интересов – исследование классической и хаотической синхронизации в нелинейных системах; применение непрерывного вейвлет-анализа к проблеме хаотической синхронизации; изучение перемежающегося поведения. Автор более 40 статей в центральных реферируемых отечественных и зарубежных научных журналах.

Россия, 410012 Саратов, ул. Астраханская, 83
Саратовский государственный университет имени Н.Г. Чернышевского
E-mail: zhuravlevmo@gmail.com



Короновский Алексей Александрович – родился в Саратове (1972). Окончил физический факультет Саратовского государственного университета (1995), доктор физико-математических наук (2007), заведующий кафедрой физики открытых систем ФГБОУ ВО «Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н.Г. Чернышевского». Область научных интересов – динамический хаос, нелинейная динамика и ее проявления в различных сферах человеческой деятельности. Автор научных монографий и статей в отечественных и зарубежных рецензируемых журналах.

Россия, 410012 Саратов, ул. Астраханская, 83
Саратовский государственный университет имени Н.Г. Чернышевского
E-mail: alexey.koronovskii@gmail.com



Москаленко Ольга Игоревна – родилась в Саратове (1984), окончила факультет нелинейных процессов СГУ (2006), кандидат физико-математических наук (2008), доцент (2012). В 2017 году защитила диссертацию на соискание ученой степени доктора физико-математических наук по специальности «01.04.03 – радиофизика». Доцент кафедры физики открытых систем СГУ, начальник управления научной деятельности СГУ. Область научных интересов – исследование классической и хаотической синхронизации в нелинейных системах; применение непрерывного вейвлет- и фурье-анализа к проблеме хаотической синхронизации; изучение обобщенной синхронизации в системах с однонаправленной и взаимной связью и ее возможных приложений; влияние шума на установление синхронных режимов; применение хаотической синхронизации для скрытой передачи информации; анализ хаотической синхронизации в сложных сетях. Автор более 130 статей в центральных реферируемых отечественных и зарубежных научных журналах.

Россия, 410012 Саратов, ул. Астраханская, 83
Саратовский государственный университет имени Н.Г. Чернышевского
E-mail: o.i.moskalenko@gmail.com



Храмов Александр Евгеньевич окончил кафедру электронных и волновых процессов физического факультета Саратовского университета (1996). Кандидат физико-математических наук (1999), доктор физико-математических наук (2005). С 2012 года главный научный сотрудник и научный руководитель Научно-образовательного центра «Системы искусственного интеллекта и нейротехнологии» (до 2018 года – «Нелинейная динамика сложных систем») Саратовского технического университета, с 2015 года заведующий кафедрой «Автоматизация, управление, мехатроника». Главный редактор журнала «Инфокоммуникационные и радиоэлектронные технологии» (с 2016), член редакционной коллегии журнала «Chaos, Solitons and Fractals». Автор и соавтор более 200 научных публикаций, в том числе монографий, учебников, патентов.

Россия, 410054 Саратов, ул. Политехническая, 77
Саратовский государственный технический университет
E-mail: hramovae@gmail.com



УДК 519.6

СОХРАНЯЮЩИЕ МЕРУ ХАОТИЧЕСКИЕ ОТОБРАЖЕНИЯ ОБЛАСТЕЙ В ФОРМЕ ТЕЛ ВРАЩЕНИЯ

В. М. Аникин, М. Г. Инкин, О. С. Плеханов

Саратовский национальный исследовательский
государственный университет имени Н.Г. Чернышевского
Россия, 410012 Саратов, ул. Астраханская, 83
E-mail: AnikinVM@info.sgu.ru; sunbeam18.95@mail.ru; evid-sar@ya.ru
Поступила в редакцию 17.07.2017, после доработки 10.01.2018

Цель работы – демонстрация алгоритма построения сохраняющих меру трехмерных хаотических отображений, определенных в областях, образованных телами вращения. С одной стороны, появляется возможность формально расширить класс многомерных хаотических отображений, а с другой стороны, приводит к формулам моделирования псевдослучайных величин, востребованных при решении задач методом Монте-Карло. Аналитический алгоритм построения многомерных отображений складывается из следующих шагов: 1) представление инвариантной плотности в виде произведения безусловного распределения одной из координат точки орбиты отображения и условных плотностей распределения других координат (при условии, что значения некоторых координат приняли фиксированное значение); 2) нахождение соответствующих интегральных законов распределения для координат точки орбиты отображения; 3) представление координат точки орбиты через псевдослучайные величины посредством использования метода обратных функций моделирования случайных величин; 4) сведение полученных зависимостей к форме хаотических отображений для конкретного выбора хаотического одномерного отображения, обладающего равномерным инвариантным распределением. Последний шаг позволяет представить датчики псевдослучайных величин как итерационные детерминированные процедуры, определенные на областях сложной формы. Статистические свойства соотносятся с массивом сгенерированных чисел, имеющих смысл координат псевдослучайной точки в пространстве, ограниченном фигурой вращения. Рассмотрены примеры синтеза трехмерных хаотических отображений (генераторов псевдослучайных точек) как для общего случая (задания образующей тела вращения произвольной непрерывной функцией), так и для конкретных видов трехмерных областей в виде шара и конуса. Обсуждаются приемы, позволяющие при моделировании псевдослучайных величин сгладить свойство рациональности машинных чисел.

Ключевые слова: трехмерные хаотические отображения, метод Монте-Карло, фигуры вращения.

DOI: 10.18500/0869-6632-2018-26-1-90-103

Образец цитирования: Аникин В.М., Инкин М.Г., Плеханов О.С. Сохраняющие меру хаотические отображения областей в форме тел вращения // Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2018. Т. 26, № 1. С. 90–103. DOI: 10.18500/0869-6632-2018-26-1-90-103

PRESERVING MEASURE CHAOTIC MAPS OF DOMAINS IN THE FORM OF ROTATION FIGURES

V. M. Anikin, M. G. Inkin, O. S. Plekhanov

Saratov State University
83, Astrakhanskaya, 410012 Saratov, Russia
E-mail: AnikinVM@info.sgu.ru; sunbeam18.95@mail.ru; evid-sar@ya.ru
Received 17.07.2017, revised 10.01.2018

The aim of the article is to demonstrate an algorithm for constructing measure-preserving three-dimensional chaotic maps defined in domains formed by rotation bodies. On the one hand, the class of multidimensional chaotic mappings is expanded, and on the other hand, we obtain formulas for simulating pseudo-random quantities that are in demand in problems solving by the Monte Carlo method. The analytical algorithm for constructing multidimensional maps consists of the following steps: 1) the presentation of the invariant density as the product of the unconditional distribution of a point coordinates of the map's orbit and the conditional densities of the distribution of other coordinates (provided that the values of some coordinates take a fixed value); 2) finding the corresponding integral distribution laws for the coordinates of the point of the mapping; 3) presentation of the coordinates of the point of the orbit through pseudo-random variables by using the inverse function modeling method; 4) reduction of the obtained dependences to the form of chaotic mappings for a particular choice of a chaotic one-dimensional map possessing a uniform invariant distribution. The last step allows us to present pseudorandom values as iterative deterministic procedures defined on areas of complex shape. Statistical properties correlate with an array of generated numbers that have the sense of the coordinates of a pseudo-random point in a space bounded by a rotation figure. Examples of the synthesis of three-dimensional chaotic mappings (generators of pseudo-random points) are considered both for the general case (defining the generator of the body of revolution by an arbitrary continuous function) and for specific types of three-dimensional regions in the form of a sphere and a cone. Methods are discussed that allow one to smooth out the property of rationality set of computer numbers by modeling pseudo-random variables.

Key words: three-dimensional chaotic mappings, Monte Carlo method, rotation figures.

DOI: 10.18500/0869-6632-2018-26-1-90-103

References: Anikin V.M., Inkin M.G., Plekhanov O.S. Preserving measure chaotic maps of domains in the form of rotation figures. *Izvestiya VUZ, Applied Nonlinear Dynamics*, 2018, vol. 26, iss. 1, pp. 90–103. DOI: 10.18500/0869-6632-2018-26-1-90-103

Введение

Решение вычислительных задач в рамках метода Монте-Карло предполагает моделирование псевдослучайных величин и векторов, в частности, псевдослучайных¹ точек в заданных областях пространства – на прямых линиях, кривых, в плоских фигурах разной формы и на их границах, в объемах различной формы и на ограничивающих их поверхностях. Алгоритмы генерации псевдослучайных векторов востребованы в разнообразных вычислительных схемах: при вычислении многократных интегралов; определении максимума функции многих переменных; реше-

¹Термин отражает тот факт, что машинные датчики так называемых «псевдослучайных» (характеризуемых равномерным распределением на единичном интервале) величин представляют собой детерминированные процедуры. Вероятностные свойства можно приписать лишь совокупности таких величин.

нии интегральных уравнений; исследовании сложных систем; имитационном моделировании задач из различных разделов физики, астрофизики, стохастической геометрии, механики, газо- и гидродинамики, физико-химической кинетики, биологии; распознавания образов, компьютерной графики, производственных технологий и т.д. (подробнее об истории метода, классах решаемых задач и библиографию см., например, в [1–4]²).

Со схожими модельными объектами могут быть соотнесены задачи, существенные для различных научных дисциплин. Так, моделирование случайных точек на поверхности (в частности, на сфере) рассматривается:

- в математике – как задача М. Fekete (1923), входящая в составленный С. Смейлом³ список из 18 фундаментальных математических задач, требующих своего решения в XXI столетии (задача возникла из «потребностей» физики твердого тела и биологии, занимает седьмую позицию в списке и содержит требование относительно величины произведения расстояний между парами случайных точек на сфере) [5];
- в моделировании технологического процесса производства волокнистых композиционных материалов – как основа для оптимизации структуры армированных оболочек [6];
- в вирусологии – как решение задачи об оценке ожидаемой непокрытой части поверхности шарообразной вирусной частицы, атакованной случайным образом цилиндрическими антителами (постановка задачи содержится в [7], а вариант решения – в [8]).

В данной статье, в контексте пополнения алгоритмов метода Монте-Карло и направлений использования свойств динамических систем, обладающих хаотическим поведением, предлагаются алгоритмы моделирования равномерно распределенных точек в областях, образованных телами вращения. Отличительной особенностью этих алгоритмов является то, что они строятся на базе одномерных кусочно-линейных хаотических отображений, сохраняющих меру Лебега, и представляют собой итерационные процедуры, не содержащие обращения к машинным датчикам псевдослучайных величин. Тем самым иллюстрируется возможность построения сохраняющих меру многомерных отображений посредством их топологического сопряжения [9, 10] с одномерными кусочно-линейными хаотическими отображениями. Запись явных аналитических выражений для новых отображений и их инвариантных плотностей возможна в случае применимости метода обратных функций [11], то есть в случае точной обратимости инвариантного интегрального закона распределения. Ранее подобная схема синтеза отображений была апробирована для плоских областей сложной формы [12]. Ниже реализуется алгоритм построения трехмерных не диссипативных отображений (в себя) областей в форме фигур вращения.

²См. также: Список рекомендуемой литературы к курсу «Методы Монте-Карло в теории и практике». URL: http://www.apmath.spbu.ru/ru/staff/antonov/files/mc_bib_20171115.pdf (дата обращения 29.12.2017).

³С. Смейл (S. Smale) является «изобретателем» робастной динамической системы с хаотической динамикой («подковы Смейла»), ставшей исходной точкой для развития теории гиперболического хаоса.

1. Общий алгоритм построения хаотических отображений фигур вращения

При переходе к многомерной задаче задаваемая (требуемая) инвариантная плотность многомерного хаотического отображения, по правилам вероятностной теории, представляется произведением безусловной и условных плотностей вероятностей распределения координат (рассматриваемых как случайные величины) точки на траектории отображения. Эта «факторизация» проводится с учетом вида области, на которой строится отображения. Далее находятся безусловный и условные интегральные законы распределения координат, обращение которых дает формулы моделирования координат точек, образующих траекторию отображения, через псевдослучайные величины. Завершающая задача – представить эти формулы моделирования в форме хаотических отображений, введя явным образом правило итерационного получения псевдослучайных величин. Кусочно-линейные отображения с полными ветвями (переводящими область своего определения на весь интервал), в принципе, теоретически обеспечивают такую возможность.

Рассмотрим некоторую положительно определенную функцию $F(x) \geq 0$, заданную на интервале (a, b) . Определим двумерную фигуру А уравнением

$$A : 0 \leq y \leq F(x), \quad a \leq x \leq b. \quad (1)$$

Трехмерная фигура В образована вращением фигуры (1) вокруг оси x (рис. 1).

Поскольку объем фигуры В есть

$$V_B = \pi \int_a^b F^2(x) dx, \quad a \leq x \leq b, \quad (2)$$

то плотность равномерного распределения точек (X, Y, Z) в фигуре В определяется обратной величиной (2):

$$f(x, y, z) = \frac{1}{\pi \int_a^b F^2(x) dx}. \quad (3)$$

Равномерность распределения случайных точек в фигуре вращения требует равномерного распределения точек в любом ее сечении, то есть в круге радиуса $F(x)$, но число точек в сечении будет зависеть от величины радиуса $F(x)$. Это означает, что в формуле (3) совместного вероятностного распределения трех случайных величин (X, Y, Z) , представляемой произведением безусловной $f_1(x)$ и условной плотности $f_2(y, z|x)$ вероятностей,

$$\begin{aligned} f(x, y, z) &= \frac{1}{\pi \int_a^b F^2(x) dx} \equiv \\ &\equiv f_1(x) f_2(y, z|x), \end{aligned} \quad (4)$$

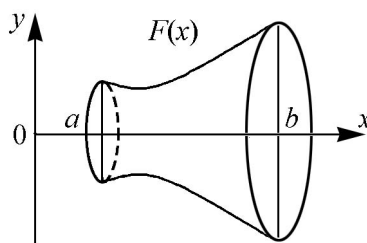


Рис. 1. Фигура вращения с образующей $F(x)$

Fig. 1. The figure of rotation with the generator $F(x)$

условное распределение $f_2(y, z|x)$ точки (Y, Z) в круговом сечении радиуса $F(x)$ должно выражаться как

$$f_2(y, z|x) = \frac{1}{\pi F^2(x)}. \quad (5)$$

Здесь x конкретное значение случайной величины X . Тогда из (4) в соответствии с (5) следует безусловное распределение $f_1(x)$ для координаты X

$$f_1(x) = \frac{F^2(x)}{\int_a^b F^2(x) dx}. \quad (6)$$

Остается выразить условные распределения для каждой из координат Y и Z . Проинтегрировав (5) по z в пределах изменения этой переменной в плоскости (Y, Z) , найдем условное распределение случайной величины Y при условии, что случайная величина X приняла конкретное значение x ,

$$f_{y,x}(y|x) = \int_{-\sqrt{F^2(x)-y^2}}^{\sqrt{F^2(x)-y^2}} \frac{1}{\pi F^2(x)} dz = \frac{2\sqrt{F^2(x)-y^2}}{\pi F^2(x)}. \quad (7)$$

Соответственно, условная плотность распределения случайной величины Z (при условии, что случайные величины X, Y приняли конкретные значения x, y) выражается как

$$f_{z|x,y}(x|y, z) = \frac{1}{\sqrt{F^2(x)-y^2}}. \quad (8)$$

Законы распределения, отвечающие плотностям распределения (6)–(8), определяются интегрированием этих выражений. Использование в дальнейшем метода обратных функций (в простейшем случае) или метода исключений [11] позволяет записать формулы моделирования координат (X, Y, Z) , обеспечивающие равномерность распределения точки в области рассматриваемой фигуры.

2. Формирование равномерного распределения в круговом сечении фигуры вращения

Далее рассмотрим два примера синтеза трехмерных отображений – в области шара и в области конуса. Одним из этапов такого построения является построение двумерного случайного вектора в области круга, то есть в нашей терминологии – двумерного хаотического отображения круга.

Общее условие равномерности распределения случайной величины в плоской области площадью $S = \pi R_0^2$

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{S} = \frac{1}{\pi R_0^2}, & (x, y) \in S, \\ 0, & (x, y) \notin S. \end{cases} \quad (9)$$

Элемент вероятности, соответственно, запишется как

$$f(x, y)dx dy = f(r \cos \varphi, r \sin \varphi)r dr d\varphi = \frac{r}{\pi R_0^2} dr d\varphi,$$

где $rdrd\varphi = dxdy$ – элемент площади.

Рассматривая полярные координаты (r, φ) как случайные величины (переобозначим их через R и Φ), найдем распределение R , проинтегрировав по угловой переменной выражение для двумерной плотности вероятности (9),

$$f_R(r) = \frac{2r}{R_0^2}, \quad 0 \leq r \leq R_0. \quad (10)$$

Интегральный закон распределения R , определяемый интегрированием (10), принимает вид

$$F_R(r) = \int_0^r f_R(r)dr = \frac{r^2}{R_0^2}, \quad 0 \leq r \leq R_0, \quad (11)$$

при этом $F(0) = 0$, $F(R) = 1$. Явное представление (11) для закона распределения случайной величины R и его обратимость позволяет получить формулу моделирования R через равномерный закон распределения некоторой случайной величины α , определенной на единичном интервале $(0, 1)$. Согласно методу обратных функций [11] полагаем $R^2/R_0^2 = \alpha$, откуда следует формула моделирования R

$$R = R_0\sqrt{\alpha}. \quad (12)$$

Аналогичным способом (интегрированием двумерного распределения (9)) найдем теперь плотность распределения координаты Φ случайной точки в круге

$$f_\Phi(\varphi) = \frac{1}{2\pi}, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi. \quad (13)$$

Таким образом, как следует из (13), угловая координата имеет равномерное распределение на интервале $(0, 2\pi)$ с функцией распределения

$$F_\Phi(\varphi) = \frac{\varphi}{2\pi}, \quad \varphi \in (0, 2\pi). \quad (14)$$

Соответственно, согласно (14), формула моделирования случайной координаты φ по методу обратных функций есть

$$\varphi = 2\pi\beta, \quad (15)$$

где β – случайная величина, имеющая равномерное распределение на единичном интервале.

Следовательно, с учетом (12) и (15), генерация случайных точек в области круга посредством итерационного процесса обеспечивается следующими преобразованиями:

$$r_n = R_0\sqrt{\alpha_n}, \quad \varphi_n = 2\pi\beta_n. \quad (16)$$

Чтобы записать конкретный алгоритм генерации координат случайной точки в круге в форме двумерного хаотического отображения необходимо задать правило генерации случайных величин α_n, β_n . Если выбрать для этих целей диадический сдвиг Бернулли (простейшее хаотическое отображение), $\alpha_{n+1} = \{2\alpha_n\}, \beta_{n+1} = \{2\beta_n\}$ (фигурные скобки обозначают операцию выделения дробной части числа), для угловой координаты из (16) получим отображение

$$\varphi_{n+1} = 2\pi\beta_{n+1} = \begin{cases} 2\varphi_n, & 0 \leq \varphi_n \leq \pi, \\ 2\varphi_n - 2\pi, & \pi \leq \varphi_n \leq 2\pi, \end{cases} \quad (17)$$

а для радиальной координаты – отображение

$$r_{n+1} = \begin{cases} r_n\sqrt{2}, & 0 \leq r_n \leq \frac{R}{\sqrt{2}} \\ \sqrt{2r_n^2 - R^2}, & \frac{R}{\sqrt{2}} \leq r_n \leq R \end{cases} = \sqrt{2r_n^2}\Theta_{0, \frac{R}{\sqrt{2}}}(r_n) + \sqrt{2r_n^2 - R^2}\Theta_{\frac{R}{\sqrt{2}}, R}(r_n), \quad (18)$$

где введена характеристическая функция интервала

$$\Theta_{a,b}(t) = \begin{cases} 1, & t \in (a, b), \\ 0, & t \notin (a, b). \end{cases}$$

Если вернуться к декартовым координатам x и y , $x_{n+1} = r_n \cos \varphi_n$, $y_{n+1} = r_n \sin \varphi_n$, то из (17) и (18) получится двумерное хаотическое отображение, генерирующее равномерное распределение точек в области круга, следующего вида:

$$\begin{cases} x_{n+1} = \Psi(x_n, y_n) \frac{x_n^2 - y_n^2}{x_n^2 + y_n^2}, & 0 \leq \sqrt{x_n^2 + y_n^2} \leq R, \\ y_{n+1} = \Psi(x_n, y_n) \frac{2x_n y_n}{x_n^2 + y_n^2}, & 0 \leq \sqrt{x_n^2 + y_n^2} \leq R. \end{cases} \quad (19)$$

Здесь введена функция

$$\Psi(x_n, y_n) = \sqrt{2(x_n^2 + y_n^2)}\Theta_{0, \frac{R}{\sqrt{2}}}(\sqrt{x_n^2 + y_n^2}) + \sqrt{2(x_n^2 + y_n^2) - R^2}\Theta_{\frac{R}{\sqrt{2}}, R}(\sqrt{x_n^2 + y_n^2}).$$

3. Хаотическое отображение области шара

Для решения задачи моделирования случайных точек в шаре удобно использовать сферическую систему координат (r, θ, φ) , координатами которой являются: полярный радиус (расстояние от центра координатной системы до точки шара радиуса R_0) $R_0 \geq r \geq 0$, угол-широта $0 \leq \theta \leq 2\pi$ и угол-долгота $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ точки, при этом декартовы координаты $x = r \sin \theta \cos \varphi$, $y = r \sin \theta \sin \varphi$, $z = r \cos \theta$. Элемент объема в сферической системе координат

$$dV = r^2 dr d\theta d\varphi. \quad (20)$$

Требование равномерности распределения случайной точки в шаре с учетом (20) определяет выполнение следующего условия:

$$P\{r < R < r + dr, \theta < \Theta < \theta + d\theta, \varphi \leq \Phi \leq \varphi + d\varphi\} = Cr^2 dr d\theta d\varphi, \quad (21)$$

где C – константа, формула которой находится интегрированием вероятностного соотношения (21) по области определения переменных и имеет вид $= 3/(2\pi^2 R_0^3)$.

Рассматривая координаты точки внутри шара как случайный вектор (R, Θ, Φ) , запишем представление для совместной плотности его координат через произведение безусловной вероятности $f_1(r)$ по r и условными вероятностями $f_2(\theta|r)$ и $f_3(\varphi|r, \theta)$ по угловым координатам, а именно:

$$\begin{aligned} P\{r < R < r + dr, \theta < \Theta < \theta + d\theta, \varphi < \Phi < \varphi + d\varphi\} = \\ = \frac{3}{2\pi^2 R_0^3} r^2 dr d\theta d\varphi \equiv f_1(r) f_2(\theta|r) f_3(\varphi|r, \theta). \end{aligned}$$

Интегрирование этого соотношения по θ и φ дает плотность вероятности распределения случайной величины полярного радиуса R

$$f_1(r) = \frac{3r^2}{R_0^3}. \quad (22)$$

Тогда

$$f_2(\theta|r) f_3(\varphi|r, \theta) = \frac{3r^2}{2\pi^2 R_0^3} : \frac{3r^2}{R_0^3} = \frac{1}{2\pi^2}. \quad (23)$$

Интегрирование (23) по φ дает выражение для условной плотности распределения случайной величины Θ

$$f_2(\theta|r) = \frac{1}{\pi}. \quad (24)$$

А тогда условная плотность распределения случайной величины Φ есть

$$f_3(\varphi|r, \theta) = \frac{1}{2\pi}. \quad (25)$$

Из (22)–(25) получаем интегральные законы распределения для случайных величин R, Θ, Φ

$$F_1(r) = P\{R < r\} = \frac{3}{R_0^3} \int_0^r t^2 dt = \frac{r^3}{R_0^3}, \quad (26)$$

$$F_2(\theta|r) = P\{\Theta < \theta|r\} = \frac{1}{\pi} \int_0^\theta du = \frac{\theta}{\pi}, \quad (27)$$

$$F_3(\varphi|r, \theta) = P\{\Phi < \varphi|r, \theta\} = \frac{1}{2\pi} \int_0^\varphi w dw = \frac{\varphi}{2\pi}. \quad (28)$$

Условные распределения угловых координат случайной точки в шаре являются равномерными: $\Theta \in (0, \pi)$, $\Phi \in (0, 2\pi)$.

Методом обратных функций из (26)–(28) можно получить алгоритмы моделирования сферических, а затем и прямоугольных координат случайной точки в шаре. А именно, если α, β, γ – псевдослучайные величины, заданные на единичном интервале, то получаем:

а) сферические координаты точки, имеющей равномерное распределение в шаре,

$$r = R_0 \sqrt[3]{\alpha}, \quad \theta = \pi\beta, \quad \varphi = 2\pi\lambda; \quad (29)$$

б) декартовы координаты этой точки

$$x = R_0 \sqrt[3]{\alpha} \sin \pi\beta \cos 2\pi\gamma, \quad (30)$$

$$y = R_0 \sqrt[3]{\alpha} \sin \pi\beta \sin 2\pi\gamma, \quad (31)$$

$$z = R_0 \sqrt[3]{\alpha} \cos \pi\beta. \quad (32)$$

С другой стороны, шар можно рассматривать как тело вращения (образующая – полуокружность). Следует обратить внимание: равномерное распределение случайных точек в шаре единичного радиуса не достигается использованием формулы $R = \alpha$.

На основании полученных результатов запишем теперь хаотические отображения, обладающие равномерным инвариантным распределением внутри шара. Полагаем, что хаотическим датчиком псевдослучайных чисел α, β, γ на единичном интервале служит сдвиг Бернулли: $\alpha_{n+1} = \{2\alpha_n\}$, $\beta_{n+1} = \{2\beta_n\}$, $\gamma_{n+1} = \{2\gamma_n\}$. Хаотические отображения для угловых координат точки, согласно (30)–(32), запишутся следующим образом:

$$\theta_{n+1} = \pi\beta_{n+1} = \begin{cases} 2\theta_n, & 0 \leq \theta_n \leq \pi/2, \\ 2\theta_n - \pi, & \pi/2 \leq \theta_n \leq \pi, \end{cases} \quad (33)$$

$$\varphi_{n+1} = 2\pi\gamma_{n+1} = \begin{cases} 2\varphi_n, & 0 \leq \varphi_n \leq \pi, \\ 2\varphi_n - 2\pi, & \pi \leq \varphi_n \leq 2\pi. \end{cases} \quad (34)$$

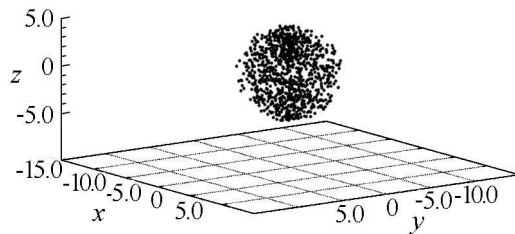


Рис. 2. Заполнение области шара точками по хаотическому алгоритму (33)–(35), $R_0 = 5$

Fig. 2. Filling the domain of ball with dots according to the chaotic algorithm (33)–(35), $R_0 = 5$

Итерационная же процедура изменения полярного радиуса получит представление

$$r_{n+1} = \begin{cases} r_n \sqrt[3]{2}, & 0 \leq r_n \leq R_0 / \sqrt[3]{2}, \\ \sqrt[3]{2r_n^3 - R_0^3}, & R_0 / \sqrt[3]{2} \leq r_n \leq R_0. \end{cases} \quad (35)$$

Результат моделирования равномерно распределенных точек в шаре согласно (33)–(35) показан на рис. 2.

4. Хаотическое отображение области конуса

Рассмотрим второй тестовый пример – моделирование случайных точек, заполняющих конус. Уравнение линейной образующей имеет вид

$$F(x) = C_1 x, \quad 0 \leq y \leq F(x), \quad 0 \leq x \leq a, \quad (36)$$

Здесь C_1 – константа.

Согласно формулам (4)–(8), получим выражения для вероятностных законов распределения координат точки внутри конуса

$$f(x, y, z) = f_1(x)f_2(y, z|x) = \frac{1}{b \int_a^x F^2(x) dx} = \frac{3}{\pi C_1^2 a^3}, \quad (37)$$

$$f_1(x) = \frac{F^2(x)}{\int_a^x F^2(x) dx} = \frac{3x^2}{a^3}, \quad (38)$$

$$F_1(x) = \int_0^x f_1(t) dt = \frac{3x^3}{a^3}, \quad (39)$$

$$f_2(y, z|x) = \frac{f(x, y, z)}{f_1(x)} = \frac{1}{\pi C_1^2 x^2}. \quad (40)$$

Это означает, что точка со случайными координатами (X, Y, Z) распределена равномерно в области конуса (36). Координата X имеет распределение по законам (38) и (39), то есть может быть выражена по методу обратных функций через псевдослучайную величину α , как

$$X = a \sqrt[3]{\alpha}. \quad (41)$$

При заданном значении координаты $X=x$ точка с координатами (Y, Z) , задаваемая в круге радиуса $C_1 x$ (в сечении конуса $x = \text{const}$), распределена равномерно в этом круге. Поэтому для записи алгоритма равномерного заполнения случайными точками области конуса можно использовать алгоритмы раздела 2. Результат действия хаотического отображения представлен на рис. 3.

«Неравномерность» заполнения рассматриваемых областей шара и конуса на

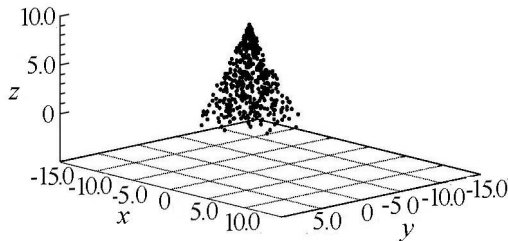


Рис. 3. Заполнение области конуса точками по хаотическому алгоритму

Fig. 3. Filling the domain of a cone with points according to the chaotic algorithm

рис. 2 и 3 (при конкретных реализациях алгоритма) может быть обусловлена рядом факторов: конечностью числа точек (в нашем случае – 1000); их взаимной «экранировкой» (объемный объект отображается на плоскости); особенностями итерационной процедуры, носящей детерминированный характер, а именно, случайной последовательностью может являться теоретически неограниченный ряд генерируемых значений, а «короткая» последовательность может и не покрывать весь интервал значений. Но, как представляется, самая существенная погрешность в траекториях, которая может возникнуть при практических реализациях любых алгоритмов на основе хаотических отображений, связана с *фундаментальным свойством* множества машинных чисел, образующих специфическое множество рациональных чисел, зависящей системы (двоичной, в частности) счисления. В силу этого, при итерациях может возникнуть траектория, приводящая к неподвижной точке отображения (например, для сдвигов Бернулли на единичном отрезке такой точкой является начало координат). Более «устойчивым» в этом плане (при наличии той же неподвижной точки) является пирамидальное отображение tent map. Выходом из этой ситуации является, как всегда, проведение вычислений с максимальным числом разрядов в мантиссе машинных чисел, а также использование дополнительных «хитростей» в данном случае: «перезапуск» алгоритма с произвольным начальным условием, формируемым машинным датчиком случайных чисел (это было использовано в алгоритме); периодическая смена базовых алгоритмов и т.п.

Заключение

В заметке предложен алгоритм синтеза отображений трехмерных областей в форме тел вращения с равномерным инвариантным распределением. Приведены примеры хаотических отображений шара в шар и конуса в конус. В качестве базовых отображений, используемых при нахождении вида маргинальных составляющих трехмерных отображений, выступают кусочно-линейные отображения (сдвиги Бернулли).

Характерной особенностью построенных отображений является то, что они могут быть записаны в «замкнутой» форме (без обращения к внешним генераторам псевдослучайных чисел) и непосредственно могут использоваться как итерационные датчики равномерного распределения в трехмерных областях. При этом вид отображений, обладающих одной и той же инвариантной плотностью, может быть, в принципе, различен и выявляться согласно дополнительным критериям – например, обеспечивать определенный вид автокорреляционной функции траекторий этих отображений на основе решения спектральной задачи для оператора Перрона–Фробениуса, ассоциированного с базовыми отображениями [13–17].

Построенные отображения дополняют «коллекцию» неоднородных дискретных систем, демонстрирующих хаотическое поведение с инвариантной мерой. Они могут быть полезны как инструмент при имитационном моделировании и решении вычислительных задач методом Монте-Карло, а также в качестве алгоритма кодирования информации частной и корпоративной значимости (см. обзор в [18, 19]).

Библиографический список

1. Михайлов Г.А., Войтишек А.В. Численное статистическое моделирование. Методы Монте-Карло: Учеб. пособие для студ. вузов. М.: Издательский центр «Академия», 2006. 368 с.
2. Robert C., Casella G. Monte Carlo Statistical Methods. New York: Springer, 2004. 683 p.
3. Шаракшанэ А.С., Железнов И.Г., Ивницкий В.А. Сложные системы. М.: Высшая школа, 1977. 247 с.
4. Соболев Н.М. Точки, равномерно заполняющие многомерный куб. М.: Знание, 1985. 32 с.
5. Smale S. Mathematical problems for the next century // Math. Intelligencer. 1998. Vol. 20, Iss. 2. Pp. 7–15.
6. Копытов Н.П., Митюшов Е.А. Математическая модель армирования оболочек из волокнистых композиционных материалов и проблема равномерного распределения точек на поверхностях // Вестник ПГТУ. Механика. 2010. № 4. С. 55–66.
7. Кендал М., Моран П. Геометрические вероятности. М.: Наука, 192 с.
8. Копытов Н.П. Метод Монте-Карло для оценивания ожидаемой нейтрализованной площади поверхности шарообразной вирусной частицы, случайным образом атакованной антителами // Российский журнал биомеханики. 2012. Т. 16, № 3 (57). С. 65–74.
9. Биллингсли П. Эргодическая теория и информация. М.: Мир, 1969. 239 с.
10. Аникин В.М., Голубенцев А.Ф. Аналитические модели детерминированного хаоса. М.: Физматлит, 2007. 328 с.
11. Ермаков С.М., Михайлов Г.А. Статистическое моделирование. 2 изд., доп. М.: Физматлит, 1982. 296 с.
12. Аникин В.М., Ноянова С.А. Двумерные хаотические отображения // Радиотехника. 2005. № 4. С. 63–70.
13. Аникин В.М., Аркадакский С.С., Ремизов А.С. Несамоспряженные линейные операторы в хаотической динамике. Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 2015. 96 с.
14. Аникин В.М., Аркадакский С.С., Купцов С.Н., Ремизов А.С. Полиномиальные собственные функции оператора Перрона–Фробениуса // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2016. Т. 24, № 4. С. 6–16.
15. Аникин В.М. Спектральные задачи для оператора Перрона–Фробениуса // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2009. Т. 17, № 4. С. 35–48.
16. Аникин В.М., Ремизов А.С., Аркадакский С.С. Собственные функции и числа оператора Перрона–Фробениуса кусочно-линейных хаотических отображений // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2007. Т. 15, № 2. С. 62–75.
17. Голубенцев А.Ф., Аникин В.М. Инвариантные функциональные подпространства линейных эволюционных операторов хаотических отображений // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2005. Т. 13, № 1–2. С. 3–17.
18. Baptista M.S. Cryptography with chaos // Phys. Lett. 1998. Vol. A240. P. 50–54.

19. Аникин В.М., Чебаненко С.В. Хаотические отображения и кодирование информации: Модификации исторически первого алгоритма // Гетеромагнитная микроэлектроника. 2011. Вып. 9. С. 81–95.

References

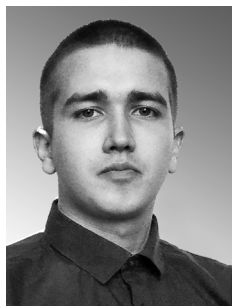
1. Mikhailov G.A., Voitishok A.V. Numerical Statistical Modeling. Monte Carlo Methods: Textbook. Allowance for students of universities. Moscow: Publishing Center «Academy», 2006, 368 p. (in Russian).
2. Robert C., Casella G. Monte Carlo Statistical Methods. New York: Springer, 2004. 683 p.
3. Sharakshane A.S., Zheleznov I.G., Ivnitky V.A. Complex Systems. M.: High School, 1977. 247 p. (in Russian).
4. Sobol I.M. Points Uniformly Filling a Multidimensional Cube. M.: Knowledge, 1985. 32 p. (in Russian).
5. Smale S. Mathematical problems for the next century. *The Mathematical Intelligencer*, 1998, vol. 20, iss. 2, pp. 7–15.
6. Kopytov N.P., Mityushov E.A. Mathematical model of reinforcing shells from fibrous composite materials and the problem of uniform distribution of points on surfaces. *Bulletin of PSTU. Mechanics*, 2010, iss 4, pp. 55–66 (in Russian).
7. Kendall M.G., Moran P.A.P. Geometrical probability. London: Ch. Griffin & Company Ltd, 1963, 125 p.
8. Kopytov N.P. The Monte Carlo method for estimating the expected neutralized surface area of a spherical viral particle randomly attacked by antibodies. *Russian Journal of Biomechanics*, 2012, vol. 16, iss. 3 (57), pp. 65–74 (in Russian).
9. Billingsley P. Ergodic Theory and Information. New York: John Wiley and Sons, Inc., 1965, XIII+193 p.
10. Anikin V.M., Goloubentsev A.F. Analytical Models of Deterministic Chaos. M.: Fizmatlit, 2007, 328 p. (in Russian).
11. Ermakov S.M., Mikhailov G.A. Statistical Modeling. 2 ed., ext. M.: Fizmatlit, 1982, 296 p. (in Russian).
12. Anikin V.M., Noyanova S.A. Two-dimensional chaotic mappings. *Radio Engineering*, 2005, iss. 4, pp. 63–70 (in Russian).
13. Anikin V.M., Arkadaksky S.S., Remizov A.S. Non-Selfadjointed Linear Operators in Chaotic Dynamics. Saratov: Saratov University Publishing House, 2015. 96 p.
14. Anikin V.M., Arkadaksky S.S., Kuptsov S.N., Remizov A.S. Polynomial eigenfunctions of the Perron–Frobenius operator. *Izvestiya VUZ, Applied Nonlinear Dynamics*, 2016, vol. 24, iss. 4, pp. 6–16 (in Russian).
15. Anikin V.M. Spectral problems for the Perron–Frobenius operator. *Izvestiya VUZ, Applied Nonlinear Dynamics*, 2009, vol. 17, iss. 4, pp. 35–48 (in Russian).
16. Anikin V.M., Remizov A.S., Arkadaksky S.S. The eigenfunctions and eigenvalues of the Perron–Frobenius operator of piecewise-linear chaotic mappings. *Izvestiya VUZ, Applied Nonlinear Dynamics*, 2007, vol. 15, iss. 2, pp. 62–75 (in Russian).

17. Golubentsev A.F., Anikin V.M. Invariant functional subspaces of linear evolution operators of chaotic mappings. *Izvestiya VUZ, Applied Nonlinear Dynamics*, 2005, vol. 13, iss. 1–2, pp. 3–17 (in Russian).
18. Baptista M.S. Cryptography with chaos. *Phys. Lett.*, 1998, vol. A240, pp. 50–54.
19. Anikin V.M., Chebanenko S.V. Chaotic mappings and coding of information: Modifications of the historically first algorithm. *Heteromagnetic microelectronics*, 2011, iss. 9, pp. 81–95 (in Russian).



Аникин Валерий Михайлович родился в Аткарске Саратовской области (1947). Окончил физический факультет Саратовского государственного университета (1970). Доктор физико-математических наук, профессор, декан физического факультета СГУ, заведующий кафедрой компьютерной физики и метаматериалов на базе Саратовского филиала Института радиотехники и электроники имени В.А. Котельникова РАН, ученый секретарь диссертационного совета Д 212.243.01 на базе СГУ. Область научных интересов – математическое моделирование хаотических и стохастических процессов, диссертационное исследование. Почетный работник высшего профессионального образования Российской Федерации (2012).

Россия, 410012 Саратов, ул. Астраханская, 83
Саратовский университет имени Н.Г. Чернышевского
E-mail: AnikinVM@info.sgu.ru



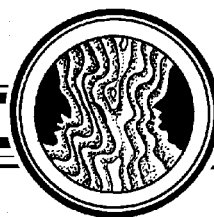
Инкин Максим Глебович родился в Саратове (1995). Окончил бакалавриат физического факультета Саратовского университета по направлению «Физика» (2016). Магистрант физического факультета СГУ. Имеет публикации в области статистической электроники.

Россия, 410012 Саратов, ул. Астраханская, 83
Саратовский университет имени Н.Г. Чернышевского
E-mail: sunbeam18.95@mail.ru



Плекханов Олег Сергеевич родился в Саратове (1966). Окончил физический факультет Саратовского университета (1988). Ведущий инженер кафедры компьютерной физики и метаматериалов физического факультета СГУ. Научные интересы – автоматизация физического эксперимента.

Россия, 410012 Саратов, ул. Астраханская, 83
Саратовский университет имени Н.Г. Чернышевского
E-mail: evid-sar@ya.ru



УДК 929 Афраймович



Вале Афраймовичу, 21 февраля 2018 года

УХОД

Расставанье всегда – это грусть и дорога.
Иногда в никуда, ну а чаще в метель.
Мы живем, как хотим, не советуясь с богом,
Засыпая в тревоге, забыв про постель.

Сколько длится наш путь, никому не известно.
Воля есть, нужно дальше и дальше идти.
Там, куда мы придем, совершенно не тесно,
И не тронет никто нас на этом пути.

Без акцента тут гром: ты дыши, когда пишешь.
Понимаю, что это вещает судьба,
Она музу мне шлет, я надеюсь, ты слышишь,
От нее выступает здесь строчек гурьба.

М. Рабинович

Не стало Валентина Сендеровича Афраймовича – умного, доброго, удивительно талантливого человека, математика и физика от рождения. Он прилетел из далёкой Мексики на Нижегородскую научную школу «Нелинейные волны» прочитать

в день её открытия лекцию «Гетероклиническая динамика в моделях когнитивной активности» и участвовать в её работе, но судьбе было угодно, чтобы его жизнь окончилась на родной нижегородской земле.

Его все называли Валя, и это выглядело естественно. Он был близок Саратову и нашему журналу: защищал докторскую диссертацию в Учёном Совете нашего университета по специальности «радиофизика», входил в редакционную коллегию нашего журнала. В этом номере в списке членов редколлегии в последний раз появится фамилия V.S. Afraimovich, Dr. Science, Physics and Mathematics, Professor of San Luis Potosi University, Mexico, но, увы, в траурной рамке. Валя участвовал и в наших саратовских школах-семинарах по электронике и радиофизике. На VI зимней школе он прочёл блестящие лекции под названием «Краткий очерк качественной теории динамических систем», которые используются в лекционных курсах для студентов. В последние годы он вместе с профессором М.И. Рабиновичем работал над книгой «Математика сознания». Он много сделал в нелинейной науке, получив результаты, которые останутся навсегда. Будем помнить его улыбку, его дружелюбие, его умение донести понятно до слушателей сложные математические построения, его готовность помочь. Думаем, что кто-нибудь ещё напишет о его жизни и его творчестве.

*Редколлегия журнала и саратовские коллеги
СГУ, 27.02.2018*

Научное издание

Зав. редакцией *Н.Н. Левина*
Редакторы *Н.Н. Левина, Л.А. Сидорова*
Оформление художника *Д.В. Соколова*
Оригинал-макет подготовлен
И.А. Пономаревой, О.Н. Строгановой
в пакете *L^AT_EX*

Подписка на 2018 год
осуществляется по Объединенному Каталогу «Пресса России»
Раздел: 30. «Научно-технические издания.
Известия РАН. Известия ВУЗов»
и по Интернет-Каталогу Агентства «Книга-Сервис»
а также по Договору между Подписчиком
(юридическим или физическим лицом)
и Издателем (Саратовским государственным университетом)

Цена годовой подписки (6 номеров) договорная
Заявки на заключение Договора принимаются
по почте, по телефону редакции, по эл. почте редакции

Адрес редакции: 410012 Саратов, Астраханская, 83
Тел./факс: (845-2) 52-38-64
E-mail: and@nonlin.sgu.ru

Сайт журнала <http://andjournal.sgu.ru>

Распространение журнала осуществляется
редакцией журнала по адресной системе

**Условия подписки на электронную версию журнала на сайте
Научной электронной библиотеки <http://elibrary.ru>**

Сдано в набор 1.02.2018. Подписано к печати 28.02.2018
Формат 70x108/16. Бумага офсетная. Печать офсетная
Усл. печ. л. 9,1 (6,5). Уч.-изд. л. 8,1. Заказ №27–Т.

Отпечатано в Типографии ФГБОУ ВО СНИГУ
410012 Саратов, Б.Казачья, 112А, тел. (845-2) 27-33-85

© Редакция журнала
«Известия вузов. ПНД», 2018
© Оформление художника
Д.В. Соколова, 2018