

Журнал включен в «Перечень периодических научных и научно-технических изданий РФ, рекомендованных для публикации основных результатов диссертаций на соискание ученой степени доктора наук»

**МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ**

Известия высших учебных заведений

**ПРИКЛАДНАЯ НЕЛИНЕЙНАЯ ДИНАМИКА**

*научно-технический журнал*

издается с 1993 года

Выходит 6 раз в год

Том 27, № 1, 2019, Саратов

---

**СО Д Е Р Ж А Н И Е**

От редактора выпуска. <i>Трубецков Д.И.</i> .....	3
<b>ОБЗОРЫ АКТУАЛЬНЫХ ПРОБЛЕМ НЕЛИНЕЙНОЙ ДИНАМИКИ</b>	
<i>Учайкин В.В.</i> Дробно-дифференциальные модели в гидромеханике .....	5
<b>НЕЛИНЕЙНАЯ ДИНАМИКА И НЕЙРОНАУКА</b>	
<i>Навроцкая Е.В., Смирнов Д.А., Безручко Б.П.</i> Восстановление структуры связей в ансамбле осцилляторов по записям колебаний через моделирование фазовой динамики .....	41
<b>ПРИКЛАДНЫЕ ЗАДАЧИ НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ КОЛЕБАНИЙ И ВОЛН</b>	
<i>Гладков С.О., Богданова С.Б.</i> К вопросу учета силы сопротивления в шарнирной точке крепления физического маятника и ее влияние на динамику движения .....	53
<i>Плышевская С.П.</i> Асимптотическое исследование локальной динамики семейств уравнений Кана–Хилларда .....	63
<b>НОВОЕ В ПРИКЛАДНОЙ ФИЗИКЕ</b>	
<i>Кузнецов С.П., Седова Ю.В.</i> Гиперболический хаос в осцилляторе Бонхоффера–ван дер Поля с дополнительной запаздывающей обратной связью и периодически модулируемым параметром возбуждения .....	77
<b>НЕЛИНЕЙНАЯ ДИНАМИКА В ЛИЦАХ. ИСТОРИЯ</b>	
<i>Богатов Е.М.</i> О развитии качественных методов решения нелинейных уравнений и некоторых последствиях .....	96
<b>НЕЛИНЕЙНАЯ ДИНАМИКА И ГУМАНИТАРНЫЕ НАУКИ</b>	
<i>Рабинович М.И.</i> Из ранних стихотворений .....	115
<i>Москаленко Э.Ф.</i> Избранные стихи .....	117
<i>Кильдякова О.А.</i> Популяризация науки на примере журнала «Кот Шрёдингера»: Опыт аналитической рецензии .....	119

C O N T E N T S

Editorial. <i>Trubetskov D.I.</i> .....	3
REVIEWS OF ACTUAL PROBLEMS OF NONLINEAR DYNAMICS	
<i>Uchaikin V.V.</i> Fractional models in hydromechanics .....	5
NONLINEAR DYNAMICS AND NEUROSCIENCE	
<i>Navrotskaya E.V., Smirnov D.A., Bezruchko B.P.</i> The reconstruction of the couplings structure in the ensemble of oscillators according to the time series via phase dynamics modeling .....	41
APPLIED PROBLEMS OF NONLINEAR OSCILLATION AND WAVE THEORY	
<i>Gladkov S.O., Bogdanova S.B.</i> On the question accounting of the resistance force at the hinge point of setting physical pendulum and its influence on the dynamics of movement .....	53
<i>Plyshevskaya S.P.</i> Asymptotic research of local dynamics families of Cahn–Hilliard equations .....	63
INNOVATIONS IN APPLIED PHYSICS	
<i>Kuznetsov S.P., Sedova Yu.V.</i> Hyperbolic chaos in the Bonhoeffer–van der Pol oscillator with additional delayed feedback and periodically modulated excitation parameter .....	77
HISTORY OF NONLINEAR DYNAMICS	
<i>Bogatov E.M.</i> On the development of qualitative methods for solving nonlinear equations and some consequences .....	96
NONLINEAR DYNAMICS AND HUMANITIES	
<i>Rabinovich M.I.</i> Of his early poems .....	115
<i>Moskalenko E.F.</i> Selected poems .....	117
<i>Kildyakova O.A.</i> Popularization of science by example of journal «Schrödinger’s Cat»: Analytical reviewing experience .....	119

## От редактора

*Дорогие авторы и читатели нашего журнал! Поздравляем вас с Новым две тысячи девятнадцатым годом, желаем вам всяческих успехов, учёных и неучёных, побольше радостных и удачных дней в Новом году. Пишите нам, пишите!*

Ушел в историю две тысячи восемнадцатый год, но мы решили продлить расставание со Старым годом, отметив одну из его значимых дат – выход на русском языке сокращённого перевода с английского книги известного английского писателя и учёного Чарльза Перси Сноу «Две культуры и научная революция» [1]. Впервые эта тема была изложена им в лекции, прочитанной в мае 1959 года в Кембриджском университете. Можно считать, что дата двойная – и Старого, и Нового годов: 45 лет с момента перевода и 60 лет со дня прочтения лекции.

Эссе Сноу вызвало широкую дискуссию, в нашей стране она известна как дискуссия о «физиках и лириках». У всех на слуху знаменитые строчки Бориса Слуцкого [2]:

Что-то физики в почёте.	Это самоочевидно.	Наблюдать, как словно пена,
Что-то лирики в загоне.	Спорить просто бесполезно.	Опадают наши рифмы
Дело не в сухом расчете,	Так что даже не обидно,	И величие степенно
Дело в мировом законе.	А скорее интересно	Отступает в логарифмы.

Времена изменились: гуманитарии хотят понимать окружающий мир и объяснять его. Они хотят понимать и описывать самые новые физические феномены. Так, в сборнике стихов Александра Кушнера [3, с. 10] появляется подборка стихотворений под общим названием «Тёмная материя». В стихотворении под таким же названием звучат строки:

Скоро тёмная найдена будет материя –	Ведь не чёрный же бархат из старого ящика
И понятнее станет Вселенная нам:	Вынимают, не женский чулок и трепьё, –
Все же знание больше мне, чем суеверие,	Тёмной тайны является мощь настоящая,
Говорит, привлекая к научным статьям.	Теневого механизм расширения её!

Не стоит же на месте она, разбегается,  
Расползается вширь, неизвестно куда!  
Что толкает её? – и во мне откликается  
Это бегство, смятенье, быть может, беда.

А что физики? Академик Г.С. Голицын замечательно анализирует русскую классическую поэзию о природных явлениях [4]. Вот где сливаются и физика, и лирика! На русском и английском языке пишет и издает стихи академик В.Е. Захаров. Семь поэтических сборников опубликовал чл.-корр. АН СССР М.И. Рабинович. Упомянутых авторов как ученых представлять не нужно – их имена известны в мировой науке. Список можно продолжить.

Еще одно явление научной культуры – сочетание имитационного моделирования и гуманитарного анализа. Прекрасным примером этому является книга «Сложность. Математическое моделирование. Гуманитарный анализ» [5]. В Предисловии к книге профессор Г.Г. Малинецкий ссылается на третьего директора Института прикладной математики имени М.В. Келдыша РАН чл.-корр. РАН Сергея Павловича Курдюмова, который часто говорил о важности научной культуры: «Таких организаций, как ВЦ\* и ИПМ, в мире единицы. Приложение математики, пусть

\*Имеется в виду Вычислительный центр АН СССР

даже со всеми компьютерами в придачу, к стратегически важным задачам, к большим значимым делам – это и наука, и искусство, и школа, и судьба. Такие организации надо беречь и развивать. Именно в них создается Будущее, а не там, где доказываются теоремы, которые могут подождать сотню-другую лет». Постепенно реализуется завет из последней статьи И.Р. Пригожина «Кость еще не брошена» [6]: «...Обращение к наукам, изучающим сложность мира, вовсе не означает, что мы предлагаем свести гуманитарные науки к физике. Наша задача заключается не в редукции, а в достижении согласия». Чтобы участвовать в достижении согласия, Редакционная коллегия решила в разделе НЕЛИНЕЙНАЯ ДИНАМИКА И ГУМАНИТАРНЫЕ НАУКИ ввести подзаголовок «Две культуры», в котором предполагает публикацию литературных произведений наших авторов, аннотации книг и рецензий на тему двух культур. Пока материал в этом подзаголовке будет появляться один раз в год в первом номере журнала. Пишите. Еще раз с Новым годом!

### **Библиографический список**

1. *Сноу Ч.П.* Две культуры. Сборник публицистических работ. М.: Изд-во «Прогресс», 1973.
2. *Слуцкий Б.* Собрание сочинений. Т. 1. М.: «Художественная литература». 1991, с. 351.
3. *Александр Кушнер.* Мелом и углём. М.: Мир энциклопедий Аванта+, Астрель: Полиграфиздат, 2010, с. 112.
4. *Голицын Г.С.* Макро- и микромиры и гармония. М.: Бюро Квантум, 2008. Гл. 10. С. 211–227.
5. *Белотелов Н.В., Бродский Ю.И., Павловский Ю.Н.* Сложность. Математическое моделирование. Гуманитарный анализ: Исследование исторических, военных, социально-экономических и политических процессов. М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2013. 320 с.
6. *Prigogine I.* The Die is Not Cast // Futures. Bulletin of the World Futures Studies Federation. 2000, vol. 25, № 4, pp. 17–19. *Пригожин И.* Кость еще не брошена // Наука и жизнь. 2002. № 11.

Зам. гл. редактора,  
чл.-корр. РАН

*Д. И. Трубецков*



УДК 517.524

<https://doi.org/10.18500/0869-6632-2019-27-1-5-40>

## Дробно-дифференциальные модели в гидромеханике

*В. В. Учайкин*

Ульяновский государственный университет  
Россия, 432017 Ульяновск, ул. Л. Толстого, 42  
E-mail: vuchaikin@gmail.com

*Поступила в редакцию 25.06.2018, принята к публикации 20.09.2018*

**Тема и цель обзора.** Два последних десятилетия отмечены широким распространением в теоретическом описании естественных процессов дробно-дифференциального аппарата. Замена целочисленного порядка производной вещественным (а то и комплексным) числом открывает непрерывное поле новых дифференциальных уравнений, в котором стандартный набор уравнений теоретической физики (волновое, диффузионное, и пр.) представлен отдельными колосками в точках с целочисленными координатами. Но что физически значат производные дробных порядков? Каковы общие причины появления дробных производных в уравнениях? Можно ли заранее предсказать появление дробных операторов в той или иной задаче? Вопросы эти пока не сняты с повестки дня и остаются в центре внимания каждой из конференций, посвящённых теории и применению этого аппарата. Эта тема развивается и в настоящей статье. Её целью является демонстрация дробно-дифференциального аппарата в наиболее, если можно так выразиться, классической области теоретической физики – гидродинамике. **Исследуемые модели.** В обзоре рассматриваются гидромеханические задачи, в которых естественным образом возникает потребность в производных дробного порядка: движение тел в вязкой жидкости, гидромеханика турбулентности, турбулентная диффузия. Никаких экзотических структур, фракталов, квантово-механических парадоксов. **Результаты.** В обзоре показано, как дробно-дифференциальное исчисление рождается на классическом поле гидродинамических задач под пером Гейзенберга, Вайцзекера, Колмогорова, Обухова, Монина – теоретиков, которых невозможно заподозрить в не критическом отношении к математическому аппарату. **Обсуждение.** Собственно, весь обзор является непрерывным обсуждением «неизбежности странного мира» дробного исчисления (см. Учайкин В.В. Метод дробных производных. Ульяновск: «Артишок», 2008), и то, что это обнаруживается уже «в стенах» классической гидромеханики, только усиливает убедительность выводов.

**Ключевые слова:** дробный лапласиан, нелокальность, турбулентная диффузия, проекционные операторы, открытые системы.

**Образец цитирования:** Учайкин В.В. Дробно-дифференциальные модели в гидромеханике // Изв. вузов. ПНД. 2019. Т. 27, № 1. С. 5–40. <https://doi.org/10.18500/0869-6632-2019-27-1-5-40>

**Финансовая поддержка.** Исследования поддержаны РФФИ (гранты № 16-01-00556, 18-51-53018). Автор благодарен Е.В. Кожемякиной и О.П. Харловой за помощь в подготовке рукописи к опубликованию.

## Fractional models in hydromechanics

V. V. Uchaikin

Ulyanovsk State University  
42, L. Tolstoj-street, 432017 Ulyanovsk, Russia  
E-mail: vuchaikin@gmail.com

Received 25.06.2018, accepted for publication 20.09.2018

**Topic and purpose.** The last two decades are marked by wide spreading fractional calculus in theoretical description of the natural processes. Replacement of the integer-order operators by their fractional (and even complex) counterparts opens up a continuous field of new differential equations in which the standard set of equations of theoretical physics (wave, diffusion, etc.) is represented by separate spikelets at points with integer coordinates. But what do the fractional-order derivatives mean physically? What are the common reasons for the appearance of fractional derivatives in the equations? Is it possible to predict in advance the appearance of fractional operators in a particular problem? These questions are not yet removed from the agenda and remain the focus of attention of each of the conferences devoted to the theory and application of fractional calculus. This topic is developing in this review. **Models investigated.** The fractional calculus is demonstrated in application to various problem of the most, if one may say so, classical field of theoretical physics-hydrodynamic including turbulent diffusion. **Results.** The review shows how fractional operators appear on the classical field of hydrodynamic problems under the pen of Heisenberg, Weizsacker, Kolmogorov, Obukhov, Monin – theoreticians who can not be suspected of being uncritical of the mathematical tools. **Discussion.** Actually, the whole review is a continuous discussion of the «inevitability of the strange world» of fractional calculus (Uchaikin V.V. The method of fractional. Ulyanovsk: «Artishok», 2008), and the fact that this is done within the framework of classical hydromechanics only strengthens the convincing conclusions.

*Key words:* fractional Laplacian, nonlocality, turbulent diffusion, projection operators, open systems.

*Reference:* Uchaikin V.V. Fractional models in hydromechanics. *Izvestiya VUZ, Applied Nonlinear Dynamics*, 2019, vol. 27, no. 1, pp. 5–40. <https://doi.org/10.18500/0869-6632-2019-27-1-5-40>

*Acknowledgements.* The investigation is financially supported by the Russian Foundation for Basic Research (projects number 16-01-00556, 18-51-53018). The author thanks E.V. Kozhemyakina and O.P. Kharlova for help at paper preparing to publication.

### Введение

Дробно-дифференциальные уравнения математической физики можно разбить на три класса: уравнения с дробными производными по координатам, с дробными производными по времени и, разумеется, уравнения смешанного типа, содержащие и те и другие операторы. Многие «пользователи» (простите за жаргон!) считают дробные производные по координатам следствием фрактальности (самоподобной неоднородности) среды. Первичную роль здесь сыграли обстоятельства лингвистического рода: созвучие англоязычных слов *fractal* и *fractional*, первое из которых относится к геометрическим структурам, второе – к дифференциальным уравнениям. Дискуссии о правомерности отождествления этих свойств, открытой в 1995 Рутманом [1], посвящён ряд работ разных авторов (см. мои обзоры [2–4], книги [5, 6]). Проблема в том, что все фракталы являются неоднородными структурами, тогда как ядро, входящее в дробно-дифференциальные операторы Рисса, трансляционно инвариантно, что предполагает однородность среды, по крайней мере в малых масштабах. Однако среды, однородные в малых масштабах, и процессы в них хорошо описываются и уравнениями в производных целых порядков с переменными коэффициентами. Иными словами, разбивая простую неоднородную среду на элементарные объёмы, мы переходим к однородным элементам, отклонения свойств реальных элементов от которых имеют меньший порядок малости, и в пределе мы получаем уравнения с производными целого порядка. В случае неоднородной самоподобной среды разбиение на элементы представляет собой просто

размножение исходной среды на ей подобные: в новом масштабе мы видим то же самое. Ничто не упрощается, часть фрактала подобна целому. Но дробные операторы основаны на концепции непрерывности, тогда как фрактальные структуры разрывны на всех масштабах (нельзя перейти к асимптотике, в которой фрактал виделся бы непрерывным). Только усреднением по ансамблю фракталов можно вернуть непрерывность, следовательно, рассматриваемые системы и процессы должны быть случайными (стохастическими). Фрактальность реализаций отражается «длинными» корреляциями степенного типа, в свою очередь порождающими интегральные операторы дробного типа, действующие на пространственные переменные. Учёт конечной скорости распространения возмущений переносит эти свойства на временные операторы: появляются дробные производные по времени. В определённом смысле, такое усреднение по ансамблю можно считать легализацией известных попыток представить дробные интегралы как интегралы по фракталам, но что представляет собой такой ансамбль, и насколько далеки усреднённые характеристики от индивидуальных, остаётся неясным. Не менее смутен вопрос и о смысле дробной производной по времени. Некоторые из авторов рискуют говорить даже о фрактальных свойствах самого времени, хотя каких-либо физических оснований для этого не установлено.

Альтернативная интерпретация дробного интегрирования может быть осуществлена на основе представления об открытой системе (ОС) как части замкнутой системы. Записав уравнение Лиувилля для движения замкнутой системы и воспользовавшись техникой проекционных операторов для выделения из него части, описывающей движение ОС, мы придём к уравнению Линдблада, содержащему интегральный член с запаздыванием. В статистической механике концепция запаздывания была введена ещё Л. Больцманом и сопровождалась далее прилагательными – интегральная (Больцман, [7]), эрдитарная (Вольтерра, [8, 9]), наследственная (Работнов, [10]), эндохронная (Valanis and Lee, [11]). В последнем варианте, развиваемом в теории пластичности, эффект запаздывания связан с интерпретацией самого времени. Понятие «время» используется в механике сплошных сред как «обычное» физическое (лабораторное) время и как некоторое функциональное, характеризующее интенсивность процесса, эндохронное (собственное, внутреннее «время», удобное при описании нетривиальных нелинейных процессов деформирования (ползучести и релаксации) и предельных состояний. В механике динамического разрушения используется понятие «структурного» («инкубационного») времени, предполагающее существование структурного (масштабного) уровня разрушения, зависящего от вида среды и нагружения, и, следовательно, – некоторого характерного времени разрушения на данном уровне. Дополнительное требование самоподобия, рассматриваемого на уровне общего принципа статистической термодинамики, превращает эрдитарность в степенную, а эрдитарные интегралы вольтеррова типа в дробные интегралы, обращение которых и приводит к дифференциальным операторам дробного порядка. Наиболее популярными в приложениях являются производные Римана–Лиувилля

$${}_a D_t^\nu f(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\nu)} \frac{d}{dt} \int_a^t (t-\tau)^{-\nu} f(\tau) d\tau$$

и Герасимова–Капуто

$${}_a^\nu D_t f(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\nu)} \int_a^t (t-\tau)^{-\nu} f'(\tau) d\tau.$$

В этих формулах  $t > a$ ,  $\nu \in (0, 1)$ , а переход к высшим дробным порядкам осуществляется дополнительным дифференцированием целого порядка.

## 1. Скрытые переменные

Описывая динамику механической системы как сплошной среды, мы в первом приближении игнорируем наличие внутренней структуры и её участие в рассматриваемом процессе. При этом исходные уравнения динамики записываются для макроскопических характеристик системы, не содержащих информации о её структуре. Однако в ряде случаев (например, в задачах термомеханики или динамики полимерных растворов) внутренняя структура может играть существенную роль и её учёт осуществляется включением в рассмотрение (а точнее, *удержанием* в процессе перехода от микро- к макромасштабам) соответствующего набора переменных, называемых *внутренними переменными*, которые можно также трактовать (по отношению к обычному набору внешних переменных) как *скрытые переменные*. Современные представления об эволюции скрытых переменных в динамических задачах можно найти в обзорных работах [13–15].

Существуют два подхода к учёту внутренних переменных: термодинамический, базирующийся на традиционных понятиях термодинамики (термодинамические силы, энтропия и др.), и механический, характеризующийся дополнительным набором внутренних степеней свободы и учитывающий, в отличие от термодинамического, механическую инерцию.

Впервые дробная производная по времени в механических задачах появляется при аппроксимации экспериментальных данных о поведении вязкоупругих тел под нагрузкой [16, 17]. Р. Нигматуллин связал дробный характер производной по времени с диффузией в средах с фрактальной геометрией [18].

Уравнение Лиувилля с дробной производной по времени впервые было записано Хильфером [19] при анализе динамики фазовых переходов с использованием укрупнённых (блоковых) переменных

$$X_{iN} = \sum_{j=1}^M X_{iN}(j),$$

где  $X_{iN}(j)$  обозначает скалярную наблюдаемую  $X$  в узле  $j$  ( $j \in \{1, \dots, M\}$ ), принадлежащем блоку  $i$  ( $i \in \{1, \dots, N\}$ ). Введя центрированную и нормированную случайную переменную

$$X_N = \left( \sum_{i=1}^N X_{iN} - C_N \right) / D_N \quad (1)$$

и предположив трансляционную инвариантность, независимость и идентичность распределений этих переменных, Хильфер пользуется обобщённой предельной теоремой Леви, утверждающей, что при подходящем выборе последовательностей  $C_N$  и  $D_N$  случайная величина (1) при  $N \rightarrow \infty$  имеет предельное распределение, принадлежащее к классу устойчивых распределений Леви. В свою очередь, эти распределения тесно связаны с производными дробных порядков (см. [2]). Расходимость математического ожидания укрупнённых энергий при фазовом переходе и приводит к дробно-дифференциальной модификации уравнения Лиувилля для макроскопической переменной  $X(t)$ .

На основе этого анализа Хильфером был сделан вывод о существовании и некоторых свойствах фазовых переходов порядка меньше 1, названных им неравновесными переходами. Важнейшим признаком таких систем является неэкспоненциальный распад стационарных состояний, происходящий по степенному закону  $X(t) \propto t^{\nu-1}$ .

Позднее исследования Хильфера в этом направлении привели его к следующему постулату: *временная эволюция всех физических систем необратима* [20]. Полагая, что этот *закон необратимости* является не более и не менее как эмпирическим законом природы того же уровня, что и закон сохранения энергии, Хильфер пишет, что обратимое поведение системы является



идеализацией, что свойство обратимости проявляется лишь в той мере, в которой рассматриваемая система отделена (изолирована) от своего прошлого и от своего окружения.

Опираясь на многочисленные факты недебаевской релаксации зарядов в диэлектриках, авторы этой работы выписывают уравнения диффузии

$${}_0D_t^\nu \rho = \Theta_\nu \Delta \rho,$$

непрерывности

$${}_0D_t^\nu \rho + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}_\nu) = 0,$$

и, наконец, Лиувилля

$${}_0D_t^\nu \rho = \mathcal{L} \rho,$$

в примечании к которому, в частности, говорится, что частным случаем его является уравнение «дробного равновесного состояния» [20, с. 75–77]

$${}_0D_t^\nu \rho = 0.$$

Несмотря на кавычки, в общем-то предупреждающие читателя о неполной адекватности этого термина, пробел очевиден: в приведённых выше уравнениях не выдерживается нормировка плотности  $\rho$ : с течением времени интеграл по фазовым переменным от неё убывает.

В работе [21] выполнено формальное преобразование классического стационарного (с не зависящим от времени Лиувиллианом) уравнения Лиувилля

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -i\mathcal{L}\rho \quad (2)$$

в уравнение с дробной производной по времени и дробной степенью оператора Лиувилля в правой части, после отбрасывания члена  $O(t^{-1-\nu})$  принимающее вид

$${}_0D_t^\nu \rho = (-i\mathcal{L})^\nu \rho + O(t^{-1-\nu}). \quad (3)$$

Сконструированное (без особых, впрочем, физических оснований) уравнение (3) не эквивалентно уравнению (2) (из-за отброшенного члена), по этой причине его решение зависит от  $\nu$ . При  $\nu = 1$  оно совпадает с решением классического уравнения, при  $\nu = 0$  совпадает с равновесным решением стационарного уравнения

$$\mathcal{L}\rho = 0.$$

Позже мы вернёмся к обсуждению дробно-дифференциальной версии уравнения Лиувилля, но несколько в ином ключе.

## 2. Обобщение уравнений Ньютона

В работе [22] на основе дробно-дифференциального аналога уравнения Ньютона решается задача о падении тел в атмосфере. Не затрудняя себя обоснованием постановки такой задачи, автор ссылается на использование дробных производных для описания процессов с диссипацией и далее просто сопоставляет получаемые решения с классическими. Начав с простейшего случая – падения тела при отсутствии силы сопротивления

$$m_\nu {}_0^v D_t V = mg, \quad (4)$$

он приходит к решению

$$V(t) = V_0 + \frac{mgt^\nu}{m_\nu \Gamma(1 + \nu)},$$

из которого следует

$$x(t) = \int_0^t V(\tau) d\tau = x_0 + V_0 t + \frac{mgt^{\nu+1}}{m_\nu \Gamma(2 + \nu)}$$

(здесь и выше  $V_0$  – начальная скорость,  $x_0$  – начальная координата вдоль оси, направленной вниз). Заметим, что при малых временах наблюдается бóльшая скорость, чем в случае обычного падения ( $t^\nu > t$  при  $\nu < 1$ ), тогда как при больших временах ситуация обратная, и этот факт как-то трудно согласуется с влиянием диссипации. Очевидна также проблема размерности коэффициента  $m_\nu$ : она не совпадает с размерностью массы, что заставляет искать новые формулы для импульса, кинетической энергии и связанных с ними динамических переменных. Чтобы обеспечить согласие с размерностью энергии, в [23, 24] было предложено выражать импульс в виде

$$p_\nu = m_\nu {}_0^{\alpha}D_t x(t), \quad \alpha = (1 + \nu)/2.$$

В результате выражение для полной энергии принимает вид

$$E = \frac{p_\nu^2}{2m_\nu} + U(x) = \frac{m_\nu}{2} [{}_0^{\alpha}D_t x(t)]^2 - mgx.$$

Каких-либо дополнительных аргументов в оправдание этих конструкций в работе не приводится, сказано только, что при  $\nu \rightarrow 1$  все эти формулы принимают обычный для классической механики вид. Кроме того, приведено решение этой задачи с учётом сопротивления среды,

$$m_\nu {}_0^{\nu}D_t V + bV = mg, \quad (5)$$

и дана даже (не очень, впрочем, внятная) ссылка на эксперимент: свободное падение шести тел (в оригинале «ten») в атмосфере со средним весом одного тела 261.2 фунта с высоты от 31400 до 2100 футов удовлетворительно описывается дробно-дифференциальным решением с  $\nu = 0.998$  и  $m/m_\nu = 1.457$ . Беда лишь в том, что и классическое решение хорошо описывает этот процесс.

Приведённая выше формулировка дробной динамики не единственна. Так, Балеану с соавторами [25] построил иную версию такого обобщения, введя *дробную скорость* и *дробный импульс* на интервале  $[a, b]$  соотношениями

$$V(t) = (1/2)(A {}_a^{\alpha}D_t + B {}_t^{\beta}D_b)x(t)$$

и

$$p(t) = (m/2)(A {}_a^{\alpha}D_t + B {}_t^{\beta}D_b)x(t) = p_\alpha + p_\beta,$$

соответственно, где  $0 < \alpha, \beta \leq 1$ , а  $A$  и  $B$  – постоянные с размерностями  $T^{\alpha-1}$  и  $T^{\beta-1}$ . В результате дробный аналог второго закона Ньютона получился в виде уравнения

$$(1/2)(\kappa_\alpha {}_tD_b^{\alpha} p_\alpha + \kappa_\beta {}_aD_b^{\beta} p_\beta) = F, \quad (6)$$

дополненного *трансверсальным условием*

$$\left[ {}_tD_b^{\alpha-1} p_\alpha - {}_aD_t^{\beta-1} p_\beta \right]_a^b = 0. \quad (7)$$

Авторы отмечают, что при  $\alpha = 1, \beta = 1$

$${}_aD_t^{\alpha} = {}_a^{\alpha}D_t = {}_tD_b^{\alpha} = {}_t^{\alpha}D_b = \frac{d}{dt}$$

и уравнения (6)–(7) сводятся к стандартному ньютонову уравнению. Это действительно так. Но последующее замечание: «Если обобщённая сила в уравнении (6) равна нулю, то обобщённый закон Ньютона запишется в виде:  $\kappa_\alpha {}_t D_b^\alpha p_\alpha + \kappa_\beta {}_a D_t^\beta p_\beta = 0$ » вызывает некоторое недоумение. Первый закон Ньютона не является просто следствием второго (иначе он не входил бы в систему ньютоновых аксиом). Первый закон выделяет из всех возможных систем отсчёта семейство инерциальных систем, в которых и «работает» второй закон. Используемые в предыдущих формулировках *нелокальные во времени* определения импульсов не могут удовлетворить галилеевым преобразованиям и могли бы иметь смысл для частиц, находящихся в некоторой среде, обеспечивающей нарушения трансляционных свойств лагранжиана системы во времени и пространстве.

### 3. Тело в вязкой жидкости

Поучительно в этом смысле напомнить задачу о движении тела по поверхности несжимаемой вязкой жидкости. На горизонтальной поверхности  $z = 0$  (ось  $z$  направлена вверх) бесконечно глубокого слоя ( $-\infty < z < 0$ ) такой жидкости находится больших размеров тонкая пластина, к которой приложена горизонтальная же сила  $F(t)$ , увлекающая её вместе с прилегающими слоями жидкости в движение вдоль оси  $x$ . Движение пластины описывается уравнением Ньютона

$$m \frac{dV}{dt} = F(t) + Q(t), \quad (8)$$

где  $Q(t) = -S\eta \partial v(z, t) / \partial z|_{z=0}$  – сила сопротивления, действующая на пластину со стороны жидкости,  $v(z, t)$  –  $x$ -компонента скорости жидкости на глубине  $z$  (остальные компоненты её равны нулю). По условию прилипания  $V(t) = v(0, t)$ , а поле скоростей  $v(z, t)$  удовлетворяет уравнению Навье–Стокса

$$\rho \frac{\partial v}{\partial t} = \eta \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}. \quad (9)$$

В системе уравнений (8)–(9), описывающей механическую систему тело+жидкость, все производные целого порядка и все операторы дифференциальные. Инфинитезимальная эволюция в любой момент времени  $t$  зависит только от состояния  $(V(t), v(z, t))$  в этот же момент, и по этой причине дальнейшая эволюция системы при заданном состоянии не зависит от предыстории (по вероятностной терминологии процесс марковский).

Но вот, выполняя известные процедуры [26], мы исключаем из этой системы переменную  $v(z, t)$  и получаем уравнение для оставшейся переменной – скорости пластины. Если при  $t < 0$  жидкость вместе с пластиной находилась в покое, а приложенная затем сила ограничена по величине, остающееся уравнение имеет вид

$$m \frac{dV}{dt} = F - S\sqrt{\eta\rho} \left[ \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{1}{\sqrt{t-\tau}} \frac{dV(\tau)}{d\tau} d\tau \right].$$

Теперь это – интегродифференциальное уравнение вольтерровского типа с запаздывающим аргументом неизвестной функции под интегралом. Более того, заключённый в квадратные скобки член представляет собой дробную производную порядка  $\nu = 1/2$  (при указанных условиях различие между двумя типами производных исчезает).

Перепишем это уравнение в виде

$$m \frac{dV}{dt} + S\sqrt{\eta\rho} {}_0^{\nu} D_t V = F(t). \quad (10)$$

Физическая интерпретация этого результата заключается в том, что наблюдаемое в момент времени  $t$  в точке  $(x, z)$  напряжение определяется распределением скоростей жидких частиц, приходящих из окрестности другой точки этого слоя  $(x', z)$ , где они находились, скажем, в момент  $t' < t$ . В силу трансляционной инвариантности решения относительно  $x$ , такое же распределение скоростей в этот момент ( $t'$ ) имело место и в точке наблюдения  $(x, z)$ . Это и есть простейший механизм эредитарности – «механическая» память.

Аналогичное уравнение для движения шара массой  $m$  и радиусом  $a$  в вязкой среде имеет вид

$$m \frac{dV}{dt} = F(t) + Q(t),$$

где сила сопротивления  $Q(t)$  дается формулой

$$Q(t) = -6\pi\eta a V(t) - \frac{2}{3}\pi\rho a^3 \frac{dV(t)}{dt} - 6\pi\eta a^2 \sqrt{\frac{\rho}{\pi\eta}} \int_{t_0}^t \frac{1}{\sqrt{t-\tau}} \frac{dV(\tau)}{d\tau} d\tau,$$

выведенной в работах Буссинеска [27] и Бассэ [28]. Первый член здесь представляет силу Стокса, второй – инерционную составляющую сопротивления, соответствующую наличию присоединенной массы шара, третий пропорционален дробной производной порядка  $\nu = 1/2$  [29]. Если до начального момента  $t = 0$  тело покоилось, нижний предел в последнем интеграле заменяется нулем:

$$\left(m + \frac{2}{3}\pi\rho a^3\right) \frac{dV(t)}{dt} + 6\pi\eta a^2 \sqrt{\rho\eta} {}^{\nu}D_t V + 6\pi\eta a V(t) = F(t). \quad (11)$$

Как следует из Тауберовой теоремы, главная асимптотическая (при  $t \rightarrow \infty$ ) часть  $V^{\text{as}}(t)$  решений уравнений (10) и (11) удовлетворяет укороченным уравнениям дробного порядка  $\nu = 1/2$

$$S\sqrt{\eta\rho} {}^{\nu}D_t V^{\text{as}}(t) = F(t) \quad (12)$$

и

$$6\pi\eta a^2 \sqrt{\rho\eta} {}^{\nu}D_t V^{\text{as}}(t) + 6\pi\eta a V^{\text{as}}(t) = F(t), \quad (13)$$

соответственно. И теперь заметно заблуждение авторов цитированных выше работ относительно интерпретации дробных производных в уравнениях (4)–(5): это не аналоги ускорительных членов уравнения Ньютона, это влияние внешней среды, определяющей асимптотическое при  $t \rightarrow \infty$  поведение тела, когда действие инерциальной силы истощилось и начальные условия уже значения не имеют (тело «забыло» о них).

#### 4. Система демпфер–пружина

Рассмотрим ещё один пример. В горизонтально расположенной открытой с обеих сторон трубке находятся поршень массой  $m_1$  с коэффициентом трения о её стенки  $\eta$ , соединённый пружиной длиной  $l$  и жесткостью  $k > (\eta/2)^2$  с шариком массой  $m_2$ , движущимся в трубке без трения. К шарiku с момента  $t = 0$  приложена ограниченная по абсолютной величине сила  $F(t)$ . Мы имеем дело с динамической системой с двумя степенями свободы, описываемой дифференциальными уравнениями

$$m_1 \ddot{x}_1 = -\eta \dot{x}_1 + k(x_2 - x_1 - l),$$

$$m_2 \ddot{x}_2 = F(t) - k(x_2 - x_1 - l).$$

Дополним эту систему уравнений условиями

$$x_1(0) = 0, \quad \dot{x}_1(0) = 0, \quad x_2(0) = l, \quad \dot{x}_2(0) = 0,$$

предполагающими, что в начальный момент времени система неподвижна и поршень находится в начале координат.

Решение первого уравнения относительно  $x_1$  (в предположении, что  $x_2(t)$  известно) при заданных условиях выражается через его функцию Грина

$$G(t) = \frac{1}{m_1 \omega_1} \exp\left(-\frac{\eta t}{2m_1}\right) \sin(\omega_1 t), \quad \omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m_1} - \left(\frac{\eta}{2m_1}\right)^2}$$

соотношением

$$x_1(t) = \int_0^t G(t - \tau) k [x_2(\tau) - l] d\tau.$$

Подставив это решение во второе уравнение системы, получаем замкнутое уравнение для части 1 рассматриваемой системы, имеющее теперь интегродифференциальный вид

$$m_2 \ddot{x}_2 + k x_2 = k^2 \int_0^t G(t - \tau) x_2(\tau) d\tau + F_2(t), \quad (14)$$

со свободным членом

$$F_2(t) = F(t) + kl \left[ 1 - k \int_0^t G(\tau) d\tau \right].$$

Заметим, что мы опять получили тот же результат: исключая из рассмотрения одну из взаимодействующих между собой частей системы, описываемой уравнениями Ньютона (иными словами, марковской системы), мы обнаруживаем, что оставшаяся часть управляется интегродифференциальным уравнением. Теперь это – немарковский процесс, процесс с памятью.

Представим для наглядности, что мы прикрыли экраном часть трубки, содержащей поршень с пружинкой и видим лишь шарик, движение которого подчиняется уравнению (14). Влияние предыстории  $x_2(t - \tau)$  движения шарика на его поведение в момент времени  $t$  осуществляется через невидимую (скрытую) переменную  $x_1(t)$ . Не наталкивает ли это на мысль, что наличие таких интегралов с запаздыванием может свидетельствовать о наличии скрытых переменных? Естественно, наталкивает. Еще Зенер, комментируя интегральный (эредитарный, по Вольтерровой терминологии) член в конститутивном уравнении вязкоупругости, высказывал предположение о том, что эредитарность эта может служить признаком существования скрытых параметров, к числу которых, как пример, он отнес температуру [29]. А между тем, эредитарность – это явный шаг в сторону дробно-интегрального оператора. Достаточно найти аргумент в пользу специфического вида ядра интегрального оператора  $K(t, t')$ : предположить, скажем, его инвариантность относительно сдвига во времени

$$K(t, t') = K_0(t - t')$$

(что в двух приведённых выше примерах получалось как бы само собой), а затем потребовать и однородности в эйлеровом смысле:

$$K_0(a\tau) = a^\alpha K_0(\tau).$$

Последнее требование, конечно, ни из каких «первых принципов» не проистекает и может быть введено лишь под давлением каких-нибудь очевидных, например, экспериментальных фактов. Такой подход был использован нами в обосновании дробно-дифференциальной кинетики дисперсионного переноса [30] (см. также развёрнутое изложение этого подхода в книге [31]). В принципе, эйлерова однородность связана с самоподобием системы [32]. Самоподобные системы составляют особый класс открытых систем, не являющихся подсистемами замкнутых систем (назовём его классом  $A$ ). Рассмотренные выше примеры относились к другому классу открытых систем, которые являются подсистемами замкнутых систем (обозначим этот класс символом  $B$ ). Обсуждение систем этого класса отложим до конца обзора.

## 5. Обобщённая газодинамика

Традиции и принципы теоретической физики побудили искать корни эрeditarности в молекулярно-кинетической природе вещества. Наиболее подходящим объектом для этой цели оказались разрежённые газы. В основе газодинамики лежит уравнение Больцмана, в пространственно-однородном случае имеет вид

$$\frac{\partial \varphi(\mathbf{v}, t)}{\partial t} = B_0[\mathbf{v}, \varphi(\cdot, t)]. \quad (15)$$

Здесь  $B_0$  – больцмановский билинейный оператор столкновений, действующий на  $\varphi(\mathbf{v}, t)$  – одночастичную плотность распределения молекул в пространстве скоростей:

$$B_0[\mathbf{v}, \varphi(\cdot, t)] \equiv \int d\mathbf{u} \int \sigma(\Theta; g) [\varphi(\mathbf{v}', t)\varphi(\mathbf{u}', t) - \varphi(\mathbf{v}, t)\varphi(\mathbf{u}, t)] d\Omega.$$

В этом выражении  $\mathbf{v}$  и  $\mathbf{u}$  – скорости сталкивающихся молекул до или после (со штрихом) столкновения,  $g = |\mathbf{v} - \mathbf{u}|$  – их относительная скорость,  $\Theta$  – угол рассеяния,  $\sigma(\Theta; g)d\Omega$  – дифференциальное сечение рассеяния в телесный угол  $d\Omega$  (законы сохранения энергии и импульса однозначно связывают  $\mathbf{v}'$  и  $\mathbf{u}'$  с  $\mathbf{v}$ ,  $\mathbf{u}$  и  $\Theta$ ).

Предположения, лежащие в основе вывода этого уравнения, существенно упрощают решение газодинамических задач, но до сих пор не считаются достаточно обоснованными для плотных газов и жидкостей. Для них получены обобщенные кинетические уравнения, связанные с именами Л. ван Хова, И. Пригожина, Р. Браута, П. Резибуа, Р. Цванцига, Э. Монтролла (см. [33–38]). Выведенные при более слабых ограничениях, эти уравнения сохраняют важнейшее свойство больцмановского уравнения – описывают необратимый процесс релаксации к равновесию. Главным же математическим отличием обобщенных уравнений является учет запаздывания в интеграле столкновения путем дополнительного интегрирования по сдвинутому временному аргументу одночастичной функции распределения в нелинейном операторе столкновений  $B_\tau$ , действующем на неё по фазовым переменным

$$\frac{\partial \varphi(\mathbf{v}, t)}{\partial t} = \int_0^t B_\tau[\mathbf{v}, \varphi(\cdot, t - \tau)] d\tau + f(\mathbf{v}, t). \quad (16)$$

В случае равновесного состояния решение уравнения Больцмана не зависит от времени,  $\varphi(\mathbf{v}, t) = \varphi_{\text{eq}}(\mathbf{v})$  и влияние запаздывания исчезает.

Последовательность получаемых в процессе этого вывода уравнений и образует новую иерархию. Напомним основные этапы вывода.

1. Из канонических уравнений Гамильтона для замкнутой системы  $N$  взаимодействующих молекул без всяких дополнительных предположений выводится *уравнение Лиувилля* для фазовой плотности  $\rho^N \equiv \rho^N(\{\mathbf{r}, \mathbf{v}\}; t)$ :

$$\frac{\partial \rho^N}{\partial t} = \mathcal{L}^N \rho^N,$$

где  $\mathcal{L}^N$  – *оператор Лиувилля*. Из-за «астрономически» большого числа переменных  $N$  оно непригодно для непосредственного описания движения макроскопических систем, а предположение о замкнутости ограничивает его практическое применение со стороны мезоскопических и наносистем.

2. Введением проекционного оператора  $P$ , выполняющего усреднение фазовой плотности по пространству конфигураций,

$$P\rho^N = \frac{1}{V^N} \int_V \dots \int_V \rho^N(\{\mathbf{r}, \mathbf{v}\}; t) \prod_{j=1}^N d\mathbf{r}_j \equiv \varphi^N(\{\mathbf{v}\}; t),$$

уравнение Лиувилля преобразуется в эквивалентное ему *формальное кинетическое уравнение*

$$\frac{\partial \varphi^N}{\partial t} = \int_0^t C_\tau^N[\varphi^N(\{\mathbf{v}\}|t - \tau)] d\tau + f^N(\{\mathbf{v}\}, t),$$

где  $C_\tau^N$  – оператор взаимодействия молекул между собой. Интеграл по времени появился в результате разложения решения  $\rho^N$  на две компоненты – «существенную»  $\varphi^N = P\rho^N$  и «несущественную»  $(1 - P)\rho^N$  – и исключения последней из образовавшейся в результате этого разделения системы двух уравнений. Никаких новых процессов, ни ограничений на старые здесь не введено. Таким свойством обладает любой марковский процесс: усреднение по части переменных порождает интегрирование по времени, свидетельствующее о немарковском характере *редуцированного* процесса (справедливо и обратное: подходящим расширением фазового пространства немарковский процесс может быть преобразован в марковский). Свободный член уравнения  $f^N$  зависит от начального значения только «несущественной» части. Число независимых переменных, хоть и уменьшилось в два раза, все еще чрезвычайно велико, а само уравнение теперь стало незамкнутым.

3. Чтобы сократить  $N$ -частичный набор переменных до одночастичного и вместе с тем замкнуть уравнение, вводится **гипотеза молекулярного хаоса**: *случайные скорости вступающих во взаимодействие молекул взаимно независимы*:

$$\varphi^N(\{\mathbf{v}\}; t - \tau) = \prod_{j=1}^N \varphi(\mathbf{v}_j; t - \tau),$$

где  $\varphi(\mathbf{v}_j; t - \tau)$  – одночастичные плотности в пространстве скоростей. В результате приходим к *обобщенному кинетическому уравнению*

$$\frac{\partial \varphi(\mathbf{v}, t)}{\partial t} = \int_0^t B_\tau[\mathbf{v}, \varphi(\cdot, t - \tau)] d\tau + f(\mathbf{v}, t),$$

где

$$B_\tau[\mathbf{v}, \varphi(\cdot | t - \tau)] \equiv \text{TL} \int \dots \int C_\tau^N \left[ \prod_{j=1}^N \varphi(\mathbf{v}_j | t - \tau) \right] \prod_{j=2}^N d\mathbf{v}_j,$$

интегрирование предполагается по всем пронумерованным скоростям (индекс 1 опущен), а TL означает термодинамический предел.

4. Газ достаточно разрежен, чтобы взаимодействие молекул можно было рассматривать в модели бинарных мгновенных столкновений. В этом случае

$$B_{\tau}[\mathbf{v}, \varphi(\cdot, t - \tau)] = B_0[\mathbf{v}, \varphi(\cdot, t - \tau)]\delta(\tau)$$

и мы приходим к уравнению Больцмана.

Отказавшись от последнего ограничения, аппроксимируем зависимость оператора столкновения от времени запаздывания множителем  $b(\tau)$ , нормированным на 1:

$$B_{\tau}[\mathbf{v}, \varphi(\cdot, t - \tau)] = B_0[\mathbf{v}, \varphi(\cdot, t - \tau)]b(\tau), \quad \int_0^{\infty} b(\tau)d\tau = 1.$$

Запаздывание это и есть эффект памяти, или немарковский эффект, отражающий реальные процессы, происходящие в среде. Полученное при этом уравнение

$$\frac{\partial \varphi(\mathbf{v}, t)}{\partial t} = \int_0^t B_0[\mathbf{v}, \varphi(\cdot, t - \tau)]d\tau + f(\mathbf{v}, t)$$

и образует математическую основу эредитарной, или, как ее называют еще, *обобщенной гидродинамики* [39].

## 6. Обобщенная гидродинамика

Долгое время считалось, что гидродинамика применима на временах, на много порядков больших «кинетических» времен: времени столкновения ( $\sim 10^{-15}$  с) и времени между последовательными столкновениями (для типичных жидкостей, например, воды  $\sim 10^{-14}$ ). Численное моделирование показало, однако, что в ряде случаев обычная гидродинамика применима и на гораздо меньших временных масштабах – примерно до 30 столкновений, то есть до времен порядка  $10^{-13}$ с. Заметим, что в приложениях математической статистики число 30 также играет приметную роль: считается, что для типичных выборок такого объема уже применима центральная предельная теорема, эквивалентная диффузионному приближению в гидродинамике.

Обобщенная гидродинамика явилась следствием распространения гидродинамического подхода с макроскопических на микроскопические масштабы. Уравнения Навье–Стокса сохранили при этом свою форму, но коэффициенты переноса стали зависеть от радиуса действия градиентов и от длительности их приложения. Тем самым включились масштабные факторы длины и времени, что позволило выйти за пределы модели непрерывной среды и учесть ее молекулярную структуру. Жидкость, характеризуемая обобщенной вязкостью  $\eta(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t - t')$ , обладает двумя свойствами – *нелокальностью* и *памятью*: сигнал, рожденный в момент времени  $t'$  в точке  $\mathbf{r}'$ , придет в точку  $\mathbf{r}$  в более поздний момент  $t$ . Это запаздывание обусловлено не столько инерционными свойствами жидкости, сколько диффузионным характером распространения флуктуаций. В любом случае, для перестройки расположения молекул требуется некоторое время.

Кроме того, выяснилась также необходимость учёта корреляций с партнерами по предшествующим столкновениям. Ранее распад корреляций предполагался экспоненциальным и в гидродинамических масштабах корреляции представлялись несущественными (гипотеза молекулярного хаоса). Численное моделирование показало наличие долговременного хвоста автокорреляционной функции для скорости жидкости при промежуточных плотностях [40]: скорость



частицы даже после нескольких сотен столкновений обнаруживает корреляцию со своим начальным значением, спадающую по степенному закону. В макроскопической гидродинамике этот факт известен со времен Стокса, установившего его при рассмотрении движения шарика в сплошной среде. Никто, однако, не предполагал, что этот вывод останется справедливым и для шариков атомных размеров.

Важную роль в интерпретации эффекта памяти играет и тот факт, что в определенных условиях мы уже не можем считать столкновения мгновенными и должны учитывать их продолжительность. Характерное время столкновения  $\tau_{\text{col}}$  становится теперь соизмеримым со временем релаксации  $\tau_{\text{rel}}$ , что необходимо учитывать при высоких плотностях.

Это легко понять из следующих соображений. Характерное время бинарных столкновений при низких плотностях оценивается отношением радиуса взаимодействий  $r_0$  к средней скорости движения молекул  $\bar{v}$ :

$$\tau_{\text{col}} \approx r_0/\bar{v}.$$

Время же релаксации оценивается сведением кинетического уравнения к релаксационному типу

$$\frac{\partial(\varphi - \varphi_{\text{eq}})}{\partial t} \approx -nr_0^2\bar{v}(\varphi - \varphi_{\text{eq}})$$

и имеет вид

$$\tau_{\text{rel}} \approx 1/(nr_0^2\bar{v}).$$

Таким образом, мы видим, что

$$\tau_{\text{col}}/\tau_{\text{rel}} \approx nr_0^3,$$

и при низких плотностях  $n$  время столкновений  $\tau_{\text{col}}$  пренебрежимо мало по сравнению со временем релаксации.

К аналогичному выводу приходят и авторы книги [36] на основе известного разложения обратного времени релаксации по степеням плотности молекул газа (концентрации)  $n$ :

$$\tau_{\text{rel}}^{-1} = r_0^2 n \bar{v} [1 + r_0^3 n + (r_0^3 n)^2 + \dots].$$

Отношение рассматриваемых времен

$$\tau_{\text{col}}/\tau_{\text{rel}} = r_0^3 n + (r_0^3 n)^2 + \dots,$$

так что, если мы хотим сохранить поправку  $(r_0^3 n)^2$ , мы не имеем права считать столкновения мгновенными.

Второй член в правой части обобщенного кинетического уравнения (16) описывает распад пространственных корреляций, могущих существовать в начальный момент времени. Можно показать, что, если в начальный момент времени пространственные корреляции отсутствуют, то  $f(\mathbf{v}; t) = 0$  при всех  $t > 0$ . Допустим теперь, что в начальный момент времени корреляции простираются на расстояния порядка радиуса взаимодействия  $r_0$ . Хаотически направленные скорости входящих в корреляционный кластер частиц ведут к их взаимному разбеганию, расплыванию кластера, и через время  $\tau_{\text{col}} = r_0/\bar{v}$  частицы перестают взаимодействовать друг с другом. Следует ожидать поэтому, что

$$f(\mathbf{v}; t) \approx 0, \quad t \gg \tau_{\text{col}}.$$

Расчеты подтверждают это в случае слабо взаимодействующего газа с экспоненциальным отталиванием молекул, однако строгое доказательство этого свойства в общем случае не найдено.

Аналогичная ситуация имеет место и с операторным членом. Принято считать, что

$$B_\tau[\varphi] \simeq 0, \quad t \gg \tau_{\text{col}}.$$

Выше уже подчеркивалась важная роль диффузионной модели в гидродинамических задачах. Наличие долговременных корреляций существенным образом видоизменяет эту модель: входящий в диффузионное уравнение

$$\frac{\partial f}{\partial t} = K \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$$

коэффициент диффузии  $K$  пропорционален интегралу от автокорреляционной функции  $\int_0^\infty \rho(t) dt$  и поэтому расходится, если корреляции спадают по степенному закону. В модифицированном уравнении диффузии, приближенно учитывающем нелокальность процесса с помощью дополнительного члена с 4-й производной (поправка Бернета),

$$\frac{\partial f}{\partial t} = K \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + B \frac{\partial^4 f}{\partial x^4},$$

расходятся оба коэффициента. «Простейший возможный путь, приводящий к переопределению коэффициентов», – говорится в статье Б. Олдера и У. Алли [40], – «обобщение закона Фика путем введения нелокальной (по времени) «функции памяти»:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = K_0 \int_0^t \rho(t-t') \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} dt' + B_0 \int_0^t \rho(t-t') \frac{\partial^4 f}{\partial x^4} dt'.$$

Это уравнение не только дает хорошо определенный коэффициент Бернета, но и предсказывает количественно синглетную функцию распределения при больших временах».

## 7. Турбулентная диффузия

Турбулентный характер придаёт этой нестационарной и неоднородной среде дополнительное качество случайности. Сразу возникает целый «букет» задач: определение средних характеристик потока, его флуктуаций, корреляций, вероятностей выбросов (больших отклонений) и др. Важнейшей задачей при этом становится установление (выбор) статистического ансамбля, по которому будет выполняться усреднение. Следующей по важности задачей является выбор процедуры расщепления корреляций, то есть преобразование, скажем, усреднённого по ансамблю уравнения

$$\frac{\partial \langle G \rangle}{\partial t} = \nabla \langle [D(\mathbf{x}, t) \nabla G(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}_0, t_0)] \rangle,$$

к уравнению для среднего пропагатора трассеров

$$\langle G(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}_0, t_0) \rangle = g(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0, t - t_0)$$

$$\frac{\partial g}{\partial t} = \hat{T}g(\mathbf{x}, t),$$

содержащему оператор турбулентной диффузии  $\hat{T}$  (для простоты предполагаем турбулентность однородной и стационарной). Он и оказывается нелокальным.

Специфика турбулентной диффузии обусловлена действием на частицу вихрей разных размеров, существующих в турбулентной среде. Расстояние между двумя пробными частицами может существенно измениться за короткое время только под действием вихря, размеры которого

сравнимы с этим расстоянием. Чем дальше друг от друга эти частицы, тем больше размеры вихрей, разносящих их друг от друга, тем с большей скоростью растёт расстояние  $l$  между ними. В рамках классической теории диффузии такой эффект может быть достигнут введением зависимости коэффициента диффузии  $D$  от относительных координат, то есть от расстояния  $D = D(r)$ . Этот подход был использован в пионерской работе Ричардсона [41], записавшего уравнение для плотности распределения  $p(r, t)$  случайного расстояния между парой частиц примеси, находившихся в момент  $t = 0$  в одной точке, в виде

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial r} \left[ D(r) \frac{\partial p}{\partial r} \right]$$

с коэффициентом диффузии  $D(r) \propto r^{4/3}$ , соответствующим увеличению ширины диффузионного пакета  $\Delta(t)$  по закону

$$\Delta(t) \propto t^{3/2},$$

существенно отличающемся от нормального диффузионного закона  $\Delta(t) \propto t^{1/2}$ . Теоретически такое поведение нашло обоснование в известных работах А.Н. Колмогорова и А.М. Обухова как следствие гипотезы о самоподобии локально изотропной турбулентности, определяемой единственным размерным параметром – скоростью диссипации турбулентной энергии  $\varepsilon$  [42, 43].

Основная трудность этого подхода в обосновании пространственной зависимости коэффициента диффузии. Рост этого коэффициента с расстоянием  $r$  Ричардсон связывал с действием вихрей: с увеличением  $r$  в процесс относительного движения вовлекаются вихри всё больших размеров, и перемещения частиц возрастают. В рамках колмогоровской концепции турбулентности,  $4/3$  является прямым следствием размерности: достаточно предположить, что как начальное, так и конечное расстояния много меньше типичного размера наибольших вихрей  $L$  и много больше колмогоровской длины  $\eta = \nu^3/\varepsilon)^{1/4}$ , где  $\nu$  – вязкость, а  $\varepsilon$  – средняя скорость диссипации турбулентной составляющей кинетической энергии [44].

Возникновение нелокального характера уравнения турбулентной диффузии можно проследить по давней работе Тчена [45], опирающейся на результаты Гейзенберга и Колмогорова. В этой работе известными преобразованиями гидродинамической турбулентной системы он привёл уравнение для фурье-трансформанты среднего пропегатора трассеров (помеченных молекул) к виду

$$\frac{\partial^2 \tilde{g}(\mathbf{k}, t)}{\partial t^2} = [k^2 \nu(k)]^2 \tilde{g}(\mathbf{k}, t),$$

где турбулентная вязкость  $\nu(k)$  связана со спектральной плотностью турбулентной диссипации в единицу времени  $F(k)$  формулой Гейзенберга [46]

$$\nu(k) = \kappa \int_k^\infty \sqrt{F(q)/q^3} dq, \quad (17)$$

в которой  $\kappa$  – отвлечённое число. Семейство решений уравнения (17) содержит также решения уравнения стандартной релаксации

$$\frac{\partial \tilde{g}(\mathbf{k}, t)}{\partial t} = -R(k) \tilde{g}(\mathbf{k}, t)$$

с обратным временем релаксации

$$R(k) = k^2 \nu(k).$$

Обратное время релаксации с отрицательным знаком и есть фурье-образ оператора турбулентной диффузии,  $T(\mathbf{x}) = \mathcal{F}^{-1}[-k^2\nu(k)]$ :

$$\frac{\partial g(\mathbf{x}, t)}{\partial t} = Tg(\mathbf{x}, t).$$

Если проигнорировать зависимость  $\nu$  от  $k$ , положив  $\nu(k) = \nu_0$  во всём интервале волновых чисел, это уравнение превращается в обычное уравнение диффузии

$$\frac{\partial g(\mathbf{x}, t)}{\partial t} = \nu_0 \Delta g(\mathbf{x}, t).$$

В действительности,  $\nu$  не является постоянной, её зависимость от  $k$  определяется формой спектральной функции (17). Согласно *закону 5/3 Колмогорова–Обухова*, последняя представляется в степенном виде

$$F(k) = k^{-5/3}\psi(\lambda k), \quad (18)$$

где  $\psi(\lambda k)$  – функция «окна» («фильтра»), обращающаяся в нуль за пределами инерционной области. Получаемое в результате этой подстановки выражение

$$R(k) = C(k^2)^\gamma \psi(k\lambda), \quad \gamma = 1/3,$$

есть (с точностью до постоянного множителя) фурье-образ некоторого нелокального оператора, действующего по пространственной переменной. Если вновь проигнорировать фильтр, приняв функцию  $\psi(z)$  тождественно равной единице во всём диапазоне волновых чисел, как это сделано в книге Мони́на–Яглома [47], то придём к уравнению

$$\frac{\partial \tilde{g}(\mathbf{k}, t)}{\partial t} = -(k^2)^\gamma \tilde{g}(\mathbf{k}, t),$$

которое в естественных пространственно-временных переменных принимает вид уравнения с дробной степенью  $\gamma$  оператора Лапласа

$$\frac{\partial g(\mathbf{x}, t)}{\partial t} = -C(-\Delta)^\gamma g(\mathbf{x}, t),$$

вновь превращающееся в диффузионное уравнение при  $\gamma = 1$ . Следует подчеркнуть, что пренебрежение ограниченностью степенного представления в области волновых чисел несколько дискредитирует это уравнение, побуждая искать более адекватное представление нелокальной версии.

Соответствующий пропагатор, то есть решение уравнения для точечного мгновенного источника

$$\frac{\partial f(\mathbf{x}, t)}{\partial t} = -B(-\Delta)^{\alpha/2} f(\mathbf{x}, t) + \delta(\mathbf{x})\delta(t) \quad (19)$$

выражается через 3-мерную плотность изотропного устойчивого распределения (распределения Леви–Фельдгейма)  $g_3(\mathbf{x}; \alpha)$  соотношением

$$f(\mathbf{x}, t) = (Bt)^{-3/\alpha} g_3((Bt)^{-1/\alpha} \mathbf{x}; \alpha), \quad \alpha \in (0, 2].$$

Дисперсия этого распределения бесконечна,

$$\langle \mathbf{X}^2 \rangle = \infty,$$

и для характеристики расплывания диффузионного пакета со временем следует выбрать другую меру его ширины, например, ширину на высоте  $h$   $\Delta_h$ , или радиус сферы  $R_p$ , содержащей заданную вероятность  $p$ . Будучи пропорциональными друг другу, меры эти растут со временем пропорционально  $t^{1/\alpha}$ , что согласуется с законом Ричардсона при  $\alpha = 2/3$ .<sup>1</sup>

## 8. От броуновского движения к полётам Леви

Броуновское движение – это математическая модель молекулярной диффузии, предполагающая непрерывное перемещение диффундирующей частицы, находящейся под действием непрерывно поступающих некоррелированных дельта-импульсов из окружающего пространства. Результатом этих предположений является недифференцируемость броуновской траектории, исключающая понятие мгновенной скорости и по этой причине отменяющая наличие фронта (поверхности, разделяющей доступную к данному моменту времени область пространства от недоступной в случае точечного мгновенного источника). Отсутствие такой поверхности приводит к противоречащему физике выводу о мгновенном расширении первоначально компактного пакета частиц на всё пространство, хотя, если характеризовать этот процесс одним параметром – средним квадратом распределения  $\langle R^2(t) \rangle$ , то получим

$$\langle R^2(t) \rangle \propto t \rightarrow \infty. \quad (20)$$

Этот закон легче проверяем в эксперименте, чем эволюция самого пространственного распределения в пакете диффундирующих частиц и может считаться первым признаком молекулярного характера диффузионного процесса, называемого также гауссовым процессом по причине гауссова распределения частиц в пакете. Если положить, что вектор  $\mathbf{R}(t)$ , соединяющий начальное положение частицы с её положением в момент наблюдения  $t$ , состоит из большого числа одинаково распределённых и статистически независимых малых векторных слагаемых, и воспользоваться центральной предельной теоремой, мы сразу придём и к гауссову распределению вероятности в пакете и линейному закону возрастания дисперсии (20). Сама же плотность вероятности  $f(\mathbf{x}, t)$  подчиняется уравнению диффузии

$$\frac{\partial f}{\partial t} = D\Delta f(\mathbf{x}, t),$$

выведенному ещё Эйнштейном в предположении о независимости приращений координат блуждающей частицы в последовательные интервалы времени. Эйнштейн получил его как предел интегрального уравнения Колмогорова–Чепмена

$$f(\mathbf{x}, t + \tau) = \int d\mathbf{x}' f(\mathbf{x} - \mathbf{x}', t) f(\mathbf{x}', \tau), \quad t, \tau > 0, \quad (21)$$

в физическом отношении как раз и представляющего результат последовательных столкновений молекул, скажем, идеального газа с относительно тяжёлой броуновской частицей. Оба эти уравнения ограничиваются условием однородности среды, в противном случае функции  $f$  в уравнении (21) перестают быть трансляционно инвариантными, коэффициент диффузии становится зависящим от координат, а диффузионное уравнение принимает вид

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \nabla[D(\mathbf{x})\nabla f(\mathbf{x}, t)]. \quad (22)$$

<sup>1</sup>В силу этого при классификации типов диффузии по скорости расплывания диффузионного пакета следует пользоваться не дисперсией, которая не всегда существует, а одной из приведенных выше мер, которые существуют всегда и могут быть выбраны таким образом, чтобы в пределе  $\alpha \rightarrow 2$  совпадать с дисперсией. Это касается  $\langle r^2 \rangle$ ,  $\langle (\Delta \mathbf{u})^2 \rangle$  и других характеристик.

В 1909 году Жан Батист Перрен экспериментально подтвердил закон (20), доказав тем самым и существование атомов. Описание этого опыта можно найти в любом учебнике по молекулярной физике. Заметим, однако, что Эйнштейн выводил своё уравнение для частиц, взвешенных в *газе* (передача импульсов происходила в столкновениях, разделённых временными промежутками, пусть и довольно малыми), тогда как Перрен имел дело с суспензией гуммигута (жевательной смолы) в *жидкости* (воде). Разница, между прочим, не является принципиальной: уравнение диффузии выводится как в газодинамике, так и в гидродинамике (даже в динамике нейтронных потоков в ядерно-технических установках).

Почти два десятилетия спустя (в 1926) Ричардсон проводил подобные эксперименты, но уже в других масштабах: не в пробирке или в чашках Петри, а в воздухе, точнее, в турбулентной атмосфере, и объектами наблюдений были не пылинки или частички суспензии, а клубы дыма из заводской трубы и специально посылаемые в атмосферу воздушные шары. Выполнив множество измерений, он нашёл, что средний квадрат расстояния между двумя частицами изменяется по закону

$$\langle R^2(t) \rangle \propto t^3, \quad (23)$$

носящему теперь его имя. Конечно, образ броуновского движения сразу возникает в воображении, как только разговор заходит о случайном процессе. На самом деле, это лишь весьма специфический случай. Соринки, брошенные нами в турбулентный поток, ведут себя иначе, чем броуновская частица, их траектории гладкие, и будучи снятыми на видеокамеру, позволяют установить скорости движения частиц в интересующие нас моменты времени. Мы видим, что движение автокоррелировано: скорость движения в следующем интервале времени мало отличается от скорости в предыдущем, инерция сохраняет об этом память. Но как физически объяснить ускоренный характер (22) расплывания диффузионного пакета в турбулентной среде по сравнению с броуновским законом (21)? Главная причина в том, что процесс перестал быть процессом с независимыми приращениями, каковым являлось броуновское движение, тем самым нарушились условия центральной предельной теоремы, следствием которой является закон (20), частицы теперь находятся не под действием независимых толчков разных молекул газа, а переносятся газом-жидкостью как непрерывно (хотя и нерегулярно) перемещающейся субстанцией. Движения разных пробных частиц перестали быть независимыми, поэтому-то речь и идёт теперь о расширении облака как целого, а не плотности вероятности отдельной пробной частицы, хотя в принципе и можно поставить задачу о таком распределении, например, относительно центра масс такого облака, фактически говоря об относительном распределении двух частиц, или, эквивалентно, о распределении расстояния  $R$  между двумя произвольно выбранными частицами диффузионного облака. Аргументируя тем, что турбулентная диффузия осуществляется совместным действием совокупности вихрей разных размеров, Ричардсон, можно сказать, искусственно применил к описанию его эволюции диффузионное уравнение

$$\frac{\partial p(R, t)}{\partial t} = \frac{\partial [D(R) \partial p(R, t) / \partial R]}{\partial R}$$

с зависящим от коэффициентом диффузии  $D(R) \propto |R|^{4/3}$ . Автомодельное решение такого уравнения при  $D(R) = R^{4/3}$  действительно имеет вид

$$p(R, t) = \frac{9}{4} \frac{1}{\sqrt{\pi} t^{3/2}} \exp \left\{ -\frac{9}{4} \frac{R^{2/3}}{t} \right\}, \quad 0 < R < \infty,$$

средний квадрат которого

$$\langle R^2 \rangle = (280/243)t^3$$

по размерности согласуется с эмпирическим законом (23). Однако диффузионный характер эволюции этой величины, предписываемый ей этим уравнением, оставляет ощущение неадекватности вихревой картине турбулентности: подхватываемая крупным вихрем частица быстро уносится от своей соседки, остающейся в зоне действия мелкого вихря, и лишь через некоторое время покидающая свой вихрь, будучи унесённой на большое расстояние новым вихрем. Если нарисовать график такого движения, мы увидим длинные скачки, перемежаемые относительно короткими интервалами броуновского типа.

Примерно такие соображения могли послужить мотивацией авторам работы [48] для введения в модель полётов Леви (распределённых по степенному закону скачков) с зависящей от длины скачка, но не зависящей от времени скоростью  $V(t)$ . Распределение времени такого полёта дано формулой (9) цитируемой работы, имеющей вид

$$\psi(t|R) = \delta(R - V(R)t),$$

где  $V(R)$  скорость, с которой частица проходит расстояние  $R$ , так что совместное распределение вектора перемещения  $\mathbf{R}$ , заменившего в их модели вектор относительного положения, и затраченного на это перемещение времени характеризуется произведением

$$\Psi(\mathbf{R}, t) = \psi(t|\mathbf{R})p(\mathbf{R}),$$

второй сомножитель которого  $p(\mathbf{R})$  определён через характеристическую функцию  $\exp\{-C|\mathbf{k}|^\alpha\}$ ,  $0 < \alpha < 2$  устойчивой плотности Леви–Фельдгейма. Условную же плотность, представляемую первым сомножителем, авторы записали в виде

$$\psi(t|\mathbf{R}) = \delta(R - V(R)t),$$

хотя логичней было бы записать её в виде  $\psi(t|\mathbf{R}) = \delta(t - R/V(R))$ , что, впрочем, в математическом отношении ничего не меняет. Траектории таких частиц аппроксимируются независимыми ломаными кривыми, составленными из независимых случайных векторов, подчиняющихся изотропному устойчивому распределению Леви–Фельдгейма с показателем  $\alpha \in (0, 2)$ . Скорость  $V(|\mathbf{R}|)$  оценивается на основе колмогоровской гипотезы скейлинга для инерционной области турбулентной диссипации. Средняя кинетическая энергия вихрей, характеризуемых масштабом  $R$ ,  $E_R \sim V_R^2$ . Если скорость её передачи через этот масштаб  $\varepsilon_R \sim E_R/t_R$  постоянна, то  $\varepsilon \sim V_R^3/R$  и  $V(R) \sim R^{1/3}$ . В иерархической модели турбулентности с фрактальной размерностью  $d_f$   $E_R \sim V_R^2 q_R$ , где  $q_R = (R/R_0)^\mu$ ,  $R_0$  – внешний масштаб длины,  $E$  – евклидова размерность,  $\mu = E - d_f$ .

Из этих формул выводятся асимптотические выражения для скорости

$$V(R) \sim R^{1/3+\mu/6}$$

и среднего квадрата смещения

$$\langle R^2(t) \rangle \sim \begin{cases} t^3 + 3\mu/(4 - \mu), & \alpha \leq (1 - \mu)/3; \\ t^2 + 6(1 - \alpha)/(4 - \mu), & (1 - \mu)/3 \leq \alpha \leq (10 - \mu)/6; \\ t, & \alpha \geq (10 - \mu)/6. \end{cases}$$

Хотя авторы и отмечают, что при  $\mu = 0$  первый из приведённых случаев согласуется с законом Ричардсона, остаётся ощущение неадекватности как в определении скорости через расстояние, так и в представлении о характере самих траекторий. Большей наглядностью в этом отношении обладает, по моему мнению, картина, рассмотренная Шёнфельдом [49].

## 9. Вихревая модель Шёнфельда

Аргументируя свою точку зрения, Шёнфельд рассмотрел плоский вихрь с характерным размером  $\varrho$  с центром в точке  $x, y$  координатной плоскости, порождающий в начале координат скорость  $w$ , направленную под углом  $\varphi$  к оси  $x$ . Вклад этого вихря в изменение концентрации примеси

$$n(x, y) \mapsto n(x - \varrho \cos \varphi, y - \varrho \sin \varphi).$$

он оценил через  $x$ -компоненту диффузионного потока

$$\delta j_x = n(x - \varrho \cos \varphi, y - \varrho \sin \varphi) w \cos \varphi$$

и просуммировал его по всем расстояниям  $\varrho$  от осей вихрей, характеризующихся осесимметричным (не зависящим от угла  $\varphi$ ) распределением  $W d\varrho/\varrho$ :

$$j_x = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} d\chi \int_0^{\infty} \frac{d\varrho}{\varrho} W(\varrho) n(x - \varrho \cos \chi, y - \varrho \sin \chi) \cos \chi.$$

Преобразование Фурье по обоим пространственным переменным с последующей подстановкой в фурье-образ уравнения непрерывности

$$\frac{\partial \tilde{n}}{\partial t} = ik_x \tilde{j}_x + ik_y \tilde{j}_y$$

даёт

$$\frac{\partial \tilde{n}}{\partial t} + k^2 \tilde{K}(k) \tilde{n}(\mathbf{k}, t) = 0,$$

где

$$\tilde{K}(k) = \frac{1}{2\pi k} \int_0^{\infty} \frac{d\varrho}{\varrho} W(\varrho) J_1(2\pi k \varrho)$$

В случае межмолекулярных масштабов, отмечает автор, резонно предположить, что плотность  $W(\varrho)$  существенно отлична от нуля лишь при малых значениях аргумента, при значениях же, скажем, в несколько раз превышающих средних пробег молекул, её можно считать равной нулю ( превратив, тем самым, в дельта-функцию). Полагая в области малых значений аргумента  $J_1(2\pi k \varrho) \approx \pi k \varrho$ , приходим к фурье-образу уравнения молекулярной диффузии:

$$\frac{\partial \tilde{n}}{\partial t} + k^2 \tilde{n}(\mathbf{k}, t) = 0,$$

В конце своей статьи Шёнфельд пытался вернуться к уравнению турбулентной диффузии, пробуя разные модельные образы для  $\tilde{K}(k)$ , но ни на чём подходящем не остановился.

## 10. Статистическая теория Чена

Наиболее характерной чертой явления турбулентности является непрерывный перенос кинетической энергии по шкале масштабов: рождённая первоначально в форме крупно-масштабных образований типа вихрей, она распределяется между возрастающим числом последовательно распадающихся дочерних вихрей, что увеличивает локальный градиент турбулентного поля и темп диссипации энергии. В целом, этот процесс характеризуется спектральной функцией  $F(k)$ ,



такой что  $F(k)dk$  есть кинетическая энергия, передаваемая в интервале волновых чисел  $(k, k+dk)$ . Из-за трудностей аналитического описания взаимодействий вихрей между собой спектральная функция оценивается из соображений размерности. Руководствуясь этими соображениями, Гейзенберг записал передаточную функцию  $W_k$  (равную энергии, передаваемой гармониками с волновыми числами, меньшими  $k$ , гармоникам с волновыми числами, большими  $k$ ) в виде [46]

$$W_k = 2\nu_k \int_0^k F(q)q^2 dq, \quad (24)$$

где  $\nu_k = \kappa \int_k^\infty \sqrt{F(q)q^{-3}} dq$  – турбулентная вязкость, а  $\kappa$  – числовая постоянная. В этой форме передача энергии представлена подобно вязкой диссипации произведением турбулентной вязкости на квадрат завихренности. Не изменяя принципу размерности, Обухов записал передаточную функцию в виде [43].

$$W_k = \kappa \int_k^\infty \left[ 2 \int_0^k F(q)q^2 dq \right]^{1/2} F(q') dq'. \quad (25)$$

Эта форма представляет передачу энергии как произведение сдвиговых рейнольдсовых напряжений (первый интеграл) на завихренность (второй интеграл). Формы (24) и (25) соответствуют двум разным подходам к описанию турбулентности, основанные соответственно на рассмотрении турбулентной диссипации и сдвиговых напряжений в турбулентной жидкости. В инерционной области представления Гейзенберга и Обухова согласуются с колмогоровской теорией (в частности, с законом  $F(k) \propto k^{-5/3}$ ), но за её пределами дают разные результаты.

Последовательная теория турбулентной диффузии, основанная на идеях Гейзенберга, Вайцеккера, Колмогорова и Обухова, реализованных в рамках математического аппарата статистической механики в сочетании с рейнольдсовым разделением статистических флуктуаций и турбулентных пульсаций, построена в серии работ Чена [45, 50]. Напомнив, что Ричардсон рассматривал пару частиц, Чен извлёк из уравнения Лиувилля для системы  $M$  частиц (молекул) в объёме  $V$  уравнения для одночастичной  $F_a(t, \mathbf{x}_a, \mathbf{p}_a)$  и двухчастичной  $F_{ab}(t, \mathbf{x}_a - \mathbf{x}_b, \mathbf{p}_a, \mathbf{p}_b)$  плотностей распределения в фазовом пространстве динамической системы с заданным потенциалом взаимодействия  $\phi_{ab} = \phi(\mathbf{x}_a - \mathbf{x}_b, \mathbf{p}_a, \mathbf{p}_b)$ :

$$\frac{\partial F_a}{\partial t} + \frac{\mathbf{p}_a}{m_a} \frac{\partial F_a}{\partial \mathbf{x}_a} = \sum_b \frac{M_b}{V} \iint \left( \frac{\partial \phi_{ab}}{\partial \mathbf{x}_a} \frac{\partial F_{ab}}{\partial \mathbf{p}_a} - \frac{\partial \phi_{ab}}{\partial \mathbf{p}_a} \frac{\partial F_{ab}}{\partial \mathbf{x}_a} \right) d\mathbf{x}_b d\mathbf{p}_b$$

и

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_{ab}}{\partial t} + \frac{\mathbf{p}_a}{m_a} \frac{\partial F_{ab}}{\partial \mathbf{x}_a} + \frac{\mathbf{p}_b}{m_b} \frac{\partial F_{ab}}{\partial \mathbf{x}_b} &= \frac{\partial \phi_{ab}}{\partial \mathbf{x}_a} \frac{\partial F_{ab}}{\partial \mathbf{p}_a} + \frac{\partial \phi_{ab}}{\partial \mathbf{x}_b} \frac{\partial F_{ab}}{\partial \mathbf{p}_b} + \\ &+ \sum_b \frac{M_c}{V} \iint \left( \frac{\partial \phi_{ac}}{\partial \mathbf{x}_a} \frac{\partial F_{abc}}{\partial \mathbf{p}_a} + \frac{\partial \phi_{bc}}{\partial \mathbf{x}_b} \frac{\partial F_{ab}}{\partial \mathbf{p}_b} - \frac{\partial \phi_{ac}}{\partial \mathbf{p}_a} \frac{\partial F_{abc}}{\partial \mathbf{x}_a} - \frac{\partial \phi_{bc}}{\partial \mathbf{p}_b} \frac{\partial F_{abc}}{\partial \mathbf{x}_b} \right) d\mathbf{x}_b d\mathbf{p}_b. \end{aligned}$$

Отмечая, что для систем слабо взаимодействующих частиц можно доказать равенство

$$F_{abc} = F_a F_b F_c + F_a F'_{bc} + F_b F'_{ac} + F_c F'_{ab},$$

где

$$F'_{ab} = F_{ab} - F_a F_b \quad (26)$$

и т.д., Чен использовал его в качестве приближённого инструмента замыкания системы, или, если угодно – гипотезы. Перейдя далее от плотностей вероятностей к плотностям первого и второго факториальных моментов (соответствующих среднему числу частиц и среднему числу пар частиц),

$$N_a(t, x_a) = \int F_a(t, \mathbf{x}_a, \mathbf{p}_a) d\mathbf{p}_a$$

и

$$G_{ab}(t, \mathbf{x}_a - \mathbf{x}_b) = \iint F_{ab}(t, \mathbf{x}_a - \mathbf{x}_b, \mathbf{p}_a, \mathbf{p}_b) d\mathbf{p}_a d\mathbf{p}_b,$$

он пришёл к уравнению

$$\frac{\partial N_a}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x_{ai}} \left( K_{ij} \frac{\partial N_a}{\partial x_{aj}} \right),$$

где

$$K_{ij} = \int_0^t d\tau \sum_{bc} \iint \left( \frac{M_b}{V} \frac{\partial \Phi_{ab}}{\partial p_{ai}} \right) \left( \frac{M_c}{V} \frac{\partial \Phi_{ab}}{\partial p_{aj}} \right) G'_{bc}(t - \tau, \mathbf{x}_b - \mathbf{x}_c) d\mathbf{x}_b d\mathbf{x}_c,$$

а штрих играет ту же роль, что и в формуле (26). Парная функция  $G'_{bc}$  отражает пространственно-временные корреляции, косвенным образом указывая на размеры турбулентных вихрей и продолжительность пребывания в них.

Следуя Рейнольдсу, Чен разбил наблюдаемую концентрацию диффундирующих частиц  $c$  на статистическое среднее  $N = \langle c \rangle$  и флуктуации  $n$ :  $c = N + n$ . Аналогичным образом он представил и скорость  $\mathbf{v} = \mathbf{V} + \mathbf{u}$ , положив  $\langle \mathbf{u} \rangle = 0$ , и подставив эти разбиения в уравнения непрерывности и Навье–Стокса, усреднил их по статистическому ансамблю. В экономных тензорных обозначениях полученные им уравнения примут вид:

$$N_{,t} + \langle u_k n_{,k} \rangle = 0,$$

$$n_{,t} + u_k n_{,k} - \langle u_k n_{,k} \rangle + u_k N_{,k} = 0,$$

$$u_{i,t} + u_j u_{i,j} - \langle u_j u_{i,j} \rangle = -p_{,i}/\rho + \nu u_{i,jj}.$$

Следующий этап – преобразование Фурье (трансформанты отмечаются тильдой над символами). С учётом условия несжимаемости, в рамках которого действовал Чен,

$$ik_j \tilde{u}_j(\mathbf{k}) = 0,$$

$$\tilde{N}_{,t} = -i \int q_j \langle \tilde{u}_j(\mathbf{k} - \mathbf{q}) \tilde{n}(\mathbf{q}) \rangle d\mathbf{q},$$

$$\tilde{N}_{,tt} = i \int k_j \langle \tilde{u}_j(\mathbf{k} - \mathbf{q}) \tilde{n}(\mathbf{q}) \rangle_{,t} d\mathbf{q}, \quad (27)$$

$$\tilde{n}_{,t} = -iq_j \int [\tilde{u}_j(\mathbf{k} - \mathbf{q}) \tilde{n}(\mathbf{q}) - \langle \tilde{u}_j(\mathbf{k} - \mathbf{q}) \tilde{n}(\mathbf{q}) \rangle] d\mathbf{q} - iq_j \int \tilde{u}_j(\mathbf{k} - \mathbf{q}) \tilde{N}(\mathbf{q}) d\mathbf{q}, \quad (28)$$

$$\tilde{u}_{i,t} = -iq_j \int [\tilde{u}_j(\mathbf{k} - \mathbf{q}) \tilde{u}_s(\mathbf{q}) - \langle \tilde{u}_j(\mathbf{k} - \mathbf{q}) \tilde{u}_s(\mathbf{q}) \rangle] (\delta_{is} - k_i k_s / k^2) d\mathbf{q}. \quad (29)$$

Из (28)–(29) следует

$$[\tilde{u}_j(\mathbf{k} - \mathbf{q}) \tilde{n}(\mathbf{q})]_{,t} = iq_l \tilde{u}_j(\mathbf{k} - \mathbf{q}) \int \tilde{u}_l(\mathbf{q} - \mathbf{q}') \tilde{N}(\mathbf{q}') d\mathbf{q}'. \quad (30)$$

С учётом формулы обмена фаз [50]

$$\int \tilde{u}_l(\mathbf{k} - \mathbf{q}) \tilde{N}(\mathbf{q}) d\mathbf{q} = -ik_l N(\mathbf{k}) v_k$$

и спектрального представления коэффициента диффузии [46]

$$v_q = \chi \int_q^\infty \sqrt{F(k)/k^3} dk,$$

формула (30) представляется в виде

$$[\tilde{u}_j(\mathbf{k} - \mathbf{q}) \tilde{n}(\mathbf{q})]_{,t} = q^2 \tilde{N} v_q \tilde{u}_j(\mathbf{k} - \mathbf{q}). \quad (31)$$

Подстановкой (31) в (27) получаем

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \tilde{N}}{\partial t^2} &= (v_k k^2)^2 \tilde{N}, \\ \frac{\partial \tilde{N}}{\partial t} &= -R(k) \tilde{N}(\mathbf{k}) \end{aligned} \quad (32)$$

с обратным временем релаксации

$$R(k) = v_k k^2 = \kappa k^2 \int_k^\infty \sqrt{F(q)/q^3} dq.$$

Наконец, используя спектральную функцию  $F$ , получим для  $R(k)$  выражение

$$R(k) = (3\kappa/4) \sqrt{K_0} (\epsilon k^2)^{1/3}, \quad \Lambda^{-1} \ll k \ll \lambda^{-1}.$$

Если бы не последнее ограничение, то коэффициент  $(k^2)^{1/3}$  соответствовал бы одной третьей степени оператора Лапласа:  $\Delta^{1/3}$ .

Решение уравнения (32) имеет вид

$$\tilde{N}(\mathbf{k}, t) = e^{-t/R(k)} \tilde{N}(\mathbf{k}, 0),$$

где

$$R(k) = R(1) \cdot k^\alpha,$$

если взять  $\psi$  равным 1. Чен [45] обратил трансформанту Фурье при начальном условии  $\tilde{N}(\mathbf{k}, 0) = 1$ , соответствующем точечному мгновенному источнику для одно-, двух- и трехмерных диффузионных процессов. В наших обозначениях оно выглядит следующим образом:

$$\frac{\partial \tilde{G}(\mathbf{x}, t)}{\partial t} = -R(1) (-\Delta)^{\alpha/2} \tilde{G}(\mathbf{x}, t).$$

Напомним, что его решение принимает автомодельную форму с со скейлинговой переменной  $\xi = rt^{-1/\alpha}$  ( $\alpha \in (0, 2]$ ).

Такова, в конспективном изложении, «арифметика» теории Чена.

## 11. Альтернативный путь: модель открытой системы

В процессе размышлений над причинами нелокальности «диффузионного» оператора в теории турбулентной диффузии вновь обращаемся к тому, что в случае молекулярной диффузии в *разреженном* газе трассер (например, молекула другого газа) испытывает столкновения с отдельными молекулами, никак не связанными с остальными, и по этой причине процесс описывается локальным уравнением. Однако в случае турбулентной диффузии молекулы, окружающие трассер, связаны в единое (правда, не жёсткое, но, говоря вероятностным языком, *коррелированное*) целое, и обмен импульсом при столкновении с таким образованием (например, вихрем) сам по себе уже является нелокальным процессом, уравнение которого можно записать, в частности, в виде

$$\frac{\partial n(\mathbf{x}, t)}{\partial t} = \Delta \int d\mathbf{x}' K(\mathbf{x} - \mathbf{x}') n(\mathbf{x}', t).$$

Само же разделение (хотя и не вполне определённое) локальных характеристик среды (плотности, скорости), находящейся в турбулентном состоянии, на две составляющие, называемые *статистическими флуктуациями* и *турбулентными пульсациями*, открывает возможность представления такой среды в виде сосуществования двух сред, обменивающихся между собой энергией, импульсом, моментом импульса... Посмотрим на эту ситуацию с позиции современной теории открытых систем [51, 52].

**11.1. Открытые системы.** Возможно, самая простая и общая интерпретация феномена эредитарности кроется в концепции открытых систем, которую можно рассматривать как некоторую легализацию скрытых переменных. Говоря о замкнутой (консервативной) системе, мы обычно имеем в виду механическую систему, полностью изолированную от окружающего мира, не обменивающуюся с ним ни массой, ни энергией, ни импульсом, ни другими аддитивными характеристиками, части которой взаимодействуют друг с другом посредством недиссипативных сил, и потому указанные величины в процессе движения системы сохраняются. Потенциальный характер сил позволяет ввести в действие стандартный аппарат аналитической динамики, в частности, уравнение Лиувилля. Открытыми же системами естественно назвать системы, не удовлетворяющие хотя бы одному из указанных условий<sup>2</sup>.

Удобные в чисто механическом отношении, эти понятия недостаточно ёмки в отношении термодинамическом. Так, обмен небольшими некоррелированными порциями энергии, образующий *канонический ансамбль*, практически не влияет на термодинамические свойства системы, не отличая её от замкнутой в узком смысле, характеризующейся микроканоническим ансамблем. По этой причине, наряду с данной классификацией (будем называть такие системы замкнутыми или открытыми *в узком смысле* системами) используются их аналоги *в широком смысле*. Мы ограничимся здесь рассмотрением открытой лишь в узком смысле модели. Подробности динамики открытых в широком смысле систем читатель найдёт в книгах [53, 54].

**11.2. Открытая система как подсистема замкнутой.** Рассмотрим замкнутую гамильтонову систему, характеризующуюся набором фазовых переменных  $\{q_1, p_1; \dots; q_n, p_n\}$ . Разобьём её на две части: подсистему 1 с координатами  $\mathbf{x} \equiv \{q_1, p_1; \dots; q_{n_1}, p_{n_1}\}$  и подсистему 2 с остальными координатами, совокупность которых обозначим через  $\mathbf{y}$ . Гамильтониан исходной системы предстанет в виде суммы

$$\mathcal{H}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathcal{H}_1(\mathbf{x}) + \mathcal{H}_2(\mathbf{y}) + \mathcal{H}_{12}(\mathbf{x}, \mathbf{y}), \quad (33)$$

<sup>2</sup>Существуют, впрочем, и другие определения открытых систем.

первое слагаемое в которой представляет гамильтониан подсистемы 1 в отсутствие подсистемы 2, второе – гамильтониан подсистемы 2 в отсутствие подсистемы 1, а третье – гамильтониан взаимодействия этих подсистем. Если  $(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0)$  – детерминированное начальное состояние системы, а  $\mathbf{X}(t; \mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0)$  и  $\mathbf{Y}(t; \mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0)$  – фазовые траектории каждой из подсистем, параметризованные общим физическим временем  $t$ , тогда фазовая плотность вероятности

$$f_{n_1+n_2}(q_1, p_1; \dots; q_{n_1+n_2}, p_{n_1+n_2}; t) \equiv f(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t)$$

запишется в виде

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) = \delta[\mathbf{x} - \mathbf{X}(t; \mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0)]\delta[\mathbf{y} - \mathbf{Y}(t; \mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0)].$$

Более естественно, однако, иметь в виду некий ансамбль случайных начальных состояний  $\{\mathbf{X}_0, \mathbf{Y}_0\}$ , характеризуемый плотностью

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t_0) = \langle \delta(\mathbf{x} - \mathbf{X}_0)\delta(\mathbf{y} - \mathbf{Y}_0) \rangle. \quad (34)$$

Эта функция удовлетворяет уравнению Лиувилля, которое мы запишем в виде

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \mathcal{L}f(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t), \quad (35)$$

а начальное условие полагаем распределённым согласно (34).

Оператор Лиувилля, определяемый формулой

$$\mathcal{L}f = -\{\mathcal{H}, f\},$$

тоже распадается на три слагаемых

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2 + \mathcal{L}_{12}, \quad (36)$$

содержащих, соответственно,  $\mathcal{H}_1$ ,  $\mathcal{H}_2$  и  $\mathcal{H}_{12}$ . В отсутствие взаимодействия между подсистемами оператор  $\mathcal{H}_{12}$  исчезает, и корреляции между ними определяются только начальным состоянием. Если таковые отсутствуют,

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t_0) = f_1(\mathbf{x}, t_0)f_2(\mathbf{y}, t_0),$$

то решение уравнения (35), отмеченное для данного случая верхним индексом 0, имеет вид произведения функций

$$f^0(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) = f_1(\mathbf{x}, t)f_2(\mathbf{y}, t), \quad (37)$$

каждая из которых удовлетворяет своему уравнению,

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_1}{\partial t} &= \mathcal{L}_1 f_1(\mathbf{x}, t), \\ \frac{\partial f_2}{\partial t} &= \mathcal{L}_2 f_2(\mathbf{y}, t), \end{aligned}$$

со своим начальным условием:

$$\begin{aligned} f_1(\mathbf{x}, t_0) &= \langle \delta(\mathbf{x} - \mathbf{X}_0) \rangle, \\ f_2(\mathbf{y}, t_0) &= \langle \delta(\mathbf{y} - \mathbf{Y}_0) \rangle. \end{aligned}$$

Заметим, что

$$\int f_1(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x} = \int f_2(\mathbf{y}, t) d\mathbf{y} = \iint f(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) d\mathbf{x} d\mathbf{y} = 1$$

при всех  $t \geq t_0$ .

**11.3. Проекционные операторы Цванцига–Мори.** При наличии взаимодействия подсистем процедура преобразования в систему двух уравнений производится с помощью  $P$  – проекционного оператора Цванцига–Мори. Определим действие оператора  $P$  на функцию  $f(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t)$  формулой

$$Pf(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) = \int d\mathbf{y}' f(\mathbf{x}, \mathbf{y}', t) \cdot f_2(\mathbf{y}, t_0) = f_1(\mathbf{x}, t) f_2(\mathbf{y}, t_0) \equiv \phi_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t). \quad (38)$$

Поддействуем на обе части этого равенства оператором  $P$  ещё раз:

$$\begin{aligned} P^2 f(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) &= P \left( \int d\mathbf{y}' f(\mathbf{x}, \mathbf{y}', t) \cdot f_2(\mathbf{y}, t_0) \right) = \int d\mathbf{y}' \left( \int d\mathbf{y}'' f(\mathbf{x}, \mathbf{y}'', t) f_2(\mathbf{y}', t_0) \right) \cdot f_2(\mathbf{y}, t_0) = \\ &= \int d\mathbf{y}'' f(\mathbf{x}, \mathbf{y}'', t) \left( \int f_2(\mathbf{y}', t_0) d\mathbf{y}' \right) \cdot f_2(\mathbf{y}, t_0) = \int d\mathbf{y}'' f(\mathbf{x}, \mathbf{y}'', t) \cdot f_2(\mathbf{y}, t_0) = \phi_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t). \end{aligned}$$

Повторное применение оператора  $P$  не изменило результат. По этой причине оператор  $P$  и называется проекционным. Определим дополнительный к  $P$  оператор  $P'$  формулой

$$P' = \mathbf{1} - P \quad (39)$$

(здесь  $\mathbf{1}$  – тождественный оператор). Легко проверить, что  $P'$  тоже является проекционным оператором и ортогонален оператору  $P$ :

$$PP' = P'P = 0 \quad (40)$$

Кроме того, можно показать, что  $P$  и  $P'$  коммутируют с  $\mathcal{L}_1$  и  $\mathcal{L}_2$ ,

$$P\mathcal{L}_1 - \mathcal{L}_1P = P'\mathcal{L}_1 - \mathcal{L}_1P' = 0, \quad P\mathcal{L}_2 - \mathcal{L}_2P = P'\mathcal{L}_2 - \mathcal{L}_2P' = 0, \quad (41)$$

операторы  $P$  и  $\mathcal{L}_2$  взаимно ортогональны,

$$P\mathcal{L}_2 = \mathcal{L}_2P = 0, \quad (42)$$

и справедливо тождество

$$P\mathcal{L}_{12}P = 0 \quad (43)$$

(см. книгу Максимилиана Ди Вентры [55]).

**11.4. Расщепление уравнения Лиувилля.** Согласно (38), фазовую плотность совокупной системы можно представить в виде суммы двух слагаемых

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) = Pf(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) + P'f(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) \equiv \phi_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) + \phi_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t), \quad (44)$$

обладающих вытекающими из (39) свойствами:

$$P\phi_1 = \phi_1, \quad P\phi_2 = 0, \quad P'\phi_1 = 0, \quad P'\phi_2 = \phi_2. \quad (45)$$

Подставив разложения (36) и (44) в уравнение Лиувилля (35), получим

$$\frac{\partial}{\partial t}(\phi_1 + \phi_2) = (\mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2 + \mathcal{L}_{12})(\phi_1 + \phi_2). \quad (46)$$

Раскрыв скобки, поддействуем на обе части этого уравнения оператором  $P$ :

$$\frac{\partial}{\partial t}P\phi_1 + \frac{\partial}{\partial t}P\phi_2 = P\mathcal{L}_1\phi_1 + P\mathcal{L}_1\phi_2 + P\mathcal{L}_2\phi_1 + P\mathcal{L}_2\phi_2 + P\mathcal{L}_{12}\phi_1 + P\mathcal{L}_{12}\phi_2.$$

Учёт соотношений (41)–(43) и (45) позволяет существенно сократить это уравнение без каких-либо потерь:

$$\frac{\partial \phi_1}{\partial t} = \mathcal{L}_1 \phi_1 + P \mathcal{L}_{12} \phi_2. \quad (47)$$

Вернёмся теперь к уравнению (46) и подействуем на обе его части дополнительным оператором  $P'$ :

$$\frac{\partial}{\partial t} P' \phi_1 + \frac{\partial}{\partial t} P' \phi_2 = P' \mathcal{L}_1 \phi_1 + P' \mathcal{L}_2 \phi_1 + P' \mathcal{L}_{12} \phi_1 + P' (\mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2 + \mathcal{L}_{12}) \phi_2.$$

Первое слагаемое в левой части исчезает из-за третьего свойства в списке (45), первый и второй члены справа преобразуются с использованием соотношений (40) и (41):

$$\begin{aligned} P' \mathcal{L}_1 \phi_1 &= P' \mathcal{L}_1 P f = P' P \mathcal{L}_1 f = 0, \\ P' \mathcal{L}_2 \phi_1 &= P' \mathcal{L}_2 P f = P' P \mathcal{L}_2 f = 0. \end{aligned}$$

Учитывая, что

$$P' \frac{\partial \phi_2}{\partial t} = \frac{\partial (P' \phi_2)}{\partial t} \equiv \frac{\partial \phi_2}{\partial t},$$

и возвращаясь к символу полного лиувиллиана (36), представим второе уравнение системы в виде

$$\frac{\partial \phi_2}{\partial t} = P' L \phi_2 + P' \mathcal{L}_{12} \phi_1.$$

**11.5. Уравнение Линдблада.** Напомнив, что в общем случае начальное условие предполагается заданным при  $t_0$ , запишем формальное решение второго уравнения системы в виде

$$\phi_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) = \int_{t_0}^t d\tau \exp[(t - \tau) P' L] \mathcal{L}_{12} \phi_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \tau) + \exp[(t - t_0) P' L] \phi_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t_0). \quad (48)$$

По свойству (43), множитель  $P' \mathcal{L}_{12} \phi_1$ , появившийся под интегралом, слегка упрощён:

$$P' \mathcal{L}_{12} \phi_1 = (1 - P) \mathcal{L}_{12} P f = \mathcal{L}_{12} \phi_1.$$

Подставим решение (48) второго уравнения в правую часть первого уравнения (47) системы

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \phi_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) &= P L \phi_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) + P L \int_{t_0}^t d\tau \exp[(t - \tau) P' L] \mathcal{L}_{12} \phi_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \tau) + \\ &+ P L \exp[(t - t_0) P' L] \phi_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t_0). \end{aligned}$$

Переходя, согласно (38), к фазовой плотности подсистемы  $I$ , приведём последнее уравнение к виду

$$\frac{\partial}{\partial t} f_1(\mathbf{x}, t) = L_1 f_1(\mathbf{x}, t) + \int_{t_0}^t d\tau Q_1(t - \tau) f_1(\mathbf{x}, \tau) + M_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t_0).$$

где

$$\begin{aligned} L_1 f_1(\mathbf{x}, t) &= [f_2(\mathbf{y}, t_0)]^{-1} P L f_2(\mathbf{y}, t_0) f_1(\mathbf{x}, t), \\ Q_1(t - \tau) f_1(\mathbf{x}, \tau) &= [f_2(\mathbf{y}, t_0)]^{-1} P \mathcal{L} \exp[(t - \tau) P' L] \mathcal{L}_{12} f_2(\mathbf{y}, t_0) f_1(\mathbf{x}, \tau), \end{aligned}$$

$$M_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t_0) = [f_2(\mathbf{y}, t_0)]^{-1} \text{PL exp}[(t - t_0)\mathcal{L}] \text{P}' f_2(\mathbf{y}, t_0) f_1(\mathbf{y}, t_0).$$

Последний член отражает влияние начальных условий совокупной системы на последующее движение подсистемы  $l$ . В момент  $t = t_0$  интегральный член, отражающий влияние предыстории процесса на  $\partial f_1/\partial t$ , исчезает. Это означает просто, что до этого момента системы не существовало, другими словами, в момент  $t_0$  произошло рождение системы. Но такие процессы в классической механике исключены, логично поэтому принять  $t_0 = -\infty$  и положить

$$\lim_{t_0 \rightarrow -\infty} M_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t_0) = 0.$$

Производя аналогичную замену и в нижнем пределе интеграла памяти, получим аналог квантового уравнения Линдблада

$$\frac{\partial}{\partial t} f_1(\mathbf{x}, t) = L_1 f_1(\mathbf{x}, t) + \int_{-\infty}^t d\tau Q_1(t - \tau) f_1(\mathbf{x}, \tau), \quad (49)$$

за которым оставим то же название.

Несмотря на отсутствие явных выражений для операторов, входящих в уравнение (49), его физический смысл довольно прозрачен. Изменение состояния наблюдаемой замкнутой системы  $l+2$  в промежутке времени  $(t, t + dt)$  полностью определяется её состоянием в момент  $t$ , поэтому для предсказания её поведения в будущем ( $t > t_0$ ) достаточно знать состояние в какой-нибудь один (любой) момент времени  $t_0$ , предыстория ( $t \in (-\infty < t < t_0)$ ) роли не играет. Если же наблюдению доступна только часть этой системы – открытая система  $l$ , то состояния только системы  $l$  недостаточно для предсказания её движения. Подсистема эта находится (и находилась ранее) во взаимодействии с подсистемой  $2$ , характеризуемой скрытыми переменными. В какие-то интервалы времени она передавала ей импульс, момент импульса, энергию, которые участвовали в эволюции подсистемы  $2$  и спустя некоторое время возвращались в подсистему  $l$ . Вот этот-то обмен динамическими характеристиками и отражается эредитарным интегралом. Иными словами, информация о предыстории открытой системы некоторое время хранится в её окружении и затем возвращается в неё саму. Этот процесс и обозначается термином «память», который не стоит полностью ассоциировать с его биологическим аналогом, подразумевающим хранение информации в самом биологическом объекте.

В классической равновесной термодинамике подсистема  $l$  предполагается достаточно большой, чтобы влияние этого обмена (происходящего через поверхность и потому пропорционального отношению поверхность/объём) можно было считать малым. При этом лишь небольшая доля этих и без того малых потоков содержит информацию, вынесенную ранее из подсистемы  $l$  и теперь возвращаемую в неё, так что в итоге мы имеем дело с малой величиной второго порядка, что и оправдывает обычное пренебрежение эредитарностью в макроскопических (хотя и далеко не во всех) процессах. При переходе к малым (мезо- и нано-) размерам отношение поверхность/объём меняется и учёт эредитарных эффектов может оказаться необходимым [55].

Таким образом, имеется два способа предсказания эволюции открытой системы, являющейся частью замкнутой. Первый способ: решить дифференциальное уравнение эволюции замкнутой системы при заданных начальных условиях и извлечь из полученного решения всю информацию, касающуюся данной подсистемы. Второй способ: решить интегродифференциальное уравнение для самой открытой подсистемы, не вовлекая в процесс решения её окружение. Последнее не означает, что мы игнорируем окружение: интегральный член как раз и описывает



передачу информации от открытой системы в ранние времена через её окружение в неё же в более поздние времена. Сюда же «вплетается» информация о начальном состоянии окружения.

Если речь идёт о пространственно разделённых подсистемах, а не о совмещённых в пространстве, как, например, электронная и ионная компоненты в кристалле, передача этой динамической информации осуществляется через поверхность подсистемы  $S$ . Результат зависит от отношения поверхность/объём. Для макроскопических образцов это отношение мало и таким обменом можно пренебречь (микрoканонический ансамбль, представляющий открытую подсистему  $S$  как замкнутую) или ограничиться обменом некоррелированными малыми порциями (канонический и большой канонический ансамбли). В обоих этих случаях интеграл исчезает, и мы получаем традиционную механическую основу термодинамики. С уменьшением размеров образца мы вступаем в область мезо- и далее – наномеханики. Число «действующих лиц» здесь резко сокращается (с  $10^{23}$  атомов до сотен тысяч или даже вообще просто до сотен атомов). Роль поверхностных эффектов при этом во многом становится определяющей, и связанный с ними интеграл в уравнении (49) превращается в равноправного партнёра среди остальных членов уравнения.

**11.6. Дробная динамика открытых систем.** Вернувшись к уравнению Линдблада – основному уравнению динамики открытых систем (49) – опустим, для краткости, индексы 1 у всех членов и фазовую переменную  $x$  в аргументах плотности:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = Lf + \int_{-\infty}^t Q(t - \tau)f(\tau)d\tau. \quad (50)$$

Выразив операторную функцию  $Q(t)$  через её трансформанту Меллина

$$Q(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} t^{-s} \bar{Q}(s) ds, \quad \sigma = \text{Re } s,$$

подставим это выражение в интегральный член уравнения (50):

$$\int_{-\infty}^t Q(t - t')f(t')dt' = \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} W(s) I_t^{1-s} f(t) ds.$$

Здесь

$$W(s) = \frac{\Gamma(1 - s)}{2\pi i} \bar{Q}(s),$$

а

$$I_t^{1-s} f(t) = \frac{1}{\Gamma(1 - s)} \int_{-\infty}^t \frac{f(\tau)d\tau}{(t - \tau)^s}$$

– интеграл комплексного порядка  $\mu = 1 - s$ . В результате приходим к уравнению

$$\frac{\partial f(t)}{\partial t} = Lf(t) + \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} W(s) I_t^{1-s} f(t) ds,$$

содержащему оператор, который можно интерпретировать как интегральный оператор с *операторно-распределённым* комплексным порядком. Переход от интеграла к дробной производной можно осуществить, скажем, регуляризацией по Адамару (выделением конечной части при  $\mu < 0$ ).

На основании вышеизложенного можно сделать следующий вывод: в отличие от замкнутой гамильтоновой системы, управляемой дифференциальным уравнением целого порядка, её подсистема управляется интегродифференциальным уравнением дробного (распределённого по контуру в комплексной плоскости) порядка. Именно спектральная оператор-функция и определяет специфику кинетики открытой системы этого класса, и важное, на наш взгляд, направление динамики открытых систем заключается в развитии математического аппарата, необходимого для вычисления и аппроксимации спектральной функции [56].

### Заключение

В заключение приведем пример физического обоснования дробно-дифференциальной модели высокоэластичных полимерных тел, данной в работе Г.Л. Слонимского [57], в котором чётко прослеживается неразложимость рассматриваемого процесса на сумму упругого и вязкого компонентов. Отмечая, что важнейшей особенностью, отличающей высокоэластичную деформацию от деформаций обычных упругих тел, «является настолько ярко выраженный комплекс релаксационных явлений, что применение законов Гука или любой другой зависимости между напряжениями и деформациями, не учитывающей временных режимов механических взаимодействий, оказывается невозможным даже в грубом приближении». Во многих работах запаздывание деформации связывалось с наличием внутреннего трения и строились модели упругих тел с внутренним трением и вязких тел, обладающих упругостью. Однако для количественного или хотя бы полуколичественного описания деформации высокоэластичных тел потребовалось бы построение весьма сложных механических моделей, состоящих из большого числа различных пружин и различных демпферов. Учёт молекулярной динамики аморфных полимеров, согласно которой релаксационные процессы в них связаны с медленными процессами перегруппировок длинных и гибких молекул и клубков (кластеров) таких молекул, проявляющихся в отставании изменения деформаций от изменения напряжений. Вследствие исключительно большой длины цепной молекулы одновременное передвижение всех её отдельных частей (сегментов) при деформации невозможно, так как необходимая для преодоления межмолекулярных взаимодействий энергия намного превышает энергии химических связей. Движение такой молекулы осуществляется последовательным движением её сегментов, возможным вследствие гибкости высокоэластичной молекулы. Изучив закономерности движения сегментов, можно понять законы перемещения цепных молекул, изменения их формы и, в конечном итоге, законы деформации высокоэластичных тел. Согласно Г.Л. Слонимскому, новый путь определения законов деформации высокоэластичных тел заключается в отказе от представления о высокоэластичности как результате суммирования упругости и внутреннего трения. Основание такого отказа видится в редком отличии высокоэластичности от упругости обычных тел низкими (на 2–3 порядка ниже обычных) значениями модулей упругости, громадными величинами (до 1000 % и выше) обратимых деформаций, обратными знаками тепловых эффектов деформации и температурного модуля упругости. Отличие это Г.Л. Слонимский объясняет тем, что высокоэластичная деформация обусловлена лишь изменением формы гибких длинных цепных молекул полимерных веществ без изменения энергии их (или их подвижных частей-сегментов) взаимодействия. При изотермической высокоэластичности внутренняя энергия полимерного тела не изменяется, и вся работа деформации превращается в тепло, поэтому сопротивление тела деформации обусловлено только уменьшением энтропии. Таким образом, высокоэластичную деформацию следует рассматривать как самостоятельный тип обратимой деформации и не пытаться разлагать её на упругую и вязкую составляющие. Математическим символом такой самостоятельности и пред-

ставляется Г.Л. Слонимскому как дробная производная, «которая сочетает многие черты упругой и пластической деформации, но не является их комбинацией».

Вернёмся, в заключение, к проблеме турбулентной диффузии, от которой, на первый взгляд, мы отвлеклись, рассуждая об открытых системах, о том, каким образом открытость системы (точнее, её связь с окружением) вызывает на сцену дробно-дифференциальные «духи». Для этого нам достаточно понять причину запаздывания. Физически она связана с замедленным (диффузионного типа) возвращением из окружающей среды аддитивных характеристик (кинетической энергии, импульса) ОС, переданных туда в начальный период движения. В случае же описания турбулентной диффузии, расщепление фазовых координат на молекулярную и турбулентную составляющие вполне можно интерпретировать как разделение системы на две подсистемы со всеми вытекающими последствиями. Но это – тема уже другой работы.

*Автор благодарен профессору А.Ю. Захарову (Великий Новгород) за прочтение рукописи и существенные замечания, предотвратившие погрешности в списке литературы.*

### **Библиографический список**

1. Рутман Р.С. О физических интерпретациях фрактального интегрирования и дифференцирования // ТМФ. 1995. Т. 105, № 3. С. 393–404.
2. Учайкин В.В. Автомодельная аномальная диффузия и устойчивые законы // УФН. 2003. Т. 173. С. 847–876.
3. Сибатов Р.Т., Учайкин В.В. Дробно-дифференциальный подход к описанию дисперсионного переноса в полупроводниках // УФН. 2009. Т. 179. С. 1079–1104.
4. Учайкин В.В. Дробно-дифференциальная феноменология аномальной диффузии космических лучей // УФН. 2013. Т. 183. С. 1175–1223.
5. Учайкин В.В. Метод дробных производных. Ульяновск: Изд-во «Артишок», 2008.
6. Uchaikin V.V. Fractional Derivatives for Physicists and Engineers, Vol's I–II, Springer Berlin, НЕР Beijing, 2013.
7. Boltzmann L. Zur Theorie der elastischen Nachwirkungen // Akad. Wiss. Wien, Math. Naturwiss. 1874. Vol. 70, no. 2. P. 275–306.
8. Вольтерра В. Математическая теория борьбы за существование. М.: Наука, 1976.
9. Вольтерра В. Теория функционалов, интегральных и интегро-дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1982.
10. Работнов Ю.Н. Элементы наследственной механики твердых тел. М.: Наука, 1977.
11. Valanis K.C. and Lee C.F. Endochronic theory of cyclic plasticity with application. *J. Appl. Mech.*, 1984, vol. 51, pp. 367–374.
12. Blatt J.M. An alternative approach to the ergodic problem // Progress in Theoretical Physics. 1959. Vol. 22. P. 745–756.
13. Maugin G.A. and Muschik W. Thermodynamics with internal variables. Part I. General concepts // Journal of Non-Equilibrium Thermodynamics. 1994. Vol. 19. P. 217–249.
14. Maugin G.A. and Muschik W. Thermodynamics with internal variables. Part II. Applications // Journal of Non-Equilibrium Thermodynamics. 1994. Vol. 19. P. 250–289.
15. Maugin G. The Thermomechanics of Nonlinear Irreversible Behaviors (An Introduction). World Scientific, Singapore–New Jersey–London–Hong Kong, 1999.
16. Gemant A. A method of analyzing experimental results obtained from elastoviscous bodies // Physics. 1936. Vol. 7. P. 311–317.

17. Герасимов А.Н. Обобщение линейных законов деформирования и его применение к задачам внутреннего трения // Прикладная математика и механика. 1948. т. XII. С. 251–260.
18. Нигматуллин Р.Р. Дробный интеграл и его физическая интерпретация // ТМФ. 1992. Vol. 90. no. 3. P. 354–368.
19. Hilfer R. Classification theory for anequilibrium phase transitions // Phys Rev E. 1993. Vol. 48. P. 2466–2475.
20. Hilfer R. Fractional time evolution // In Applications of Fractional Calculus in Physics / Ed.R. Hilfer. World Scientific, Singapore, 2000. P. 87–131.
21. Lukashchuk S.Yu. Time-fractional extensions of the Liouville and Zwanzig equation // Cent. Eur. J. Phys. 2013. Vol. 11, no. 6. P. 740.
22. Kwok Sau Fa. A falling body problem through the air in view of the fractional derivative approach // Physica A. 2005. Vol. 350. P. 199–206.
23. Narahari Achar B.N., Hanneken J.W., Enck T., Clarke T. Dynamics of the fractional oscillator // Physica A. 2001. Vol. 297. P. 361–367.
24. Ryabov Ya.E. and Puzenko A. Damped oscillations in view of the fractional oscillator equation // Phys. Rev. B. 2002. Vol. 66. 184201.
25. Baleanu D., Golmankhaneh A.K., Nigmatullin R., Golmankhaneh Ali K. Fractional Newtonian mechanics // Cent. Eur. J. Phys. 2010. Vol. 8, no. 1. P. 120–125.
26. Слэзкин Н.А. Динамика вязкой несжимаемой жидкости. М.: ГИТТЛ, 1955.
27. Boussinesq V.J. Sur la resistance quoppose un fluide indefini au repose... // Compt. Rend. de l'Academ. des Sci. 1885. Vol. 100. P. 935–937.
28. Basset A.B. Treatise on Hydrodynamics 2., Deighton, Bell and Co., Cambridge, UK, 1988.
29. Zener C.M. Anelasticity of metals // Suppl. Nuovo Cimento. 1958. Vol. 7. P. 544–568.
30. Учайкин В.В., Сибатов Р.Т. Дробно-дифференциальная кинетика дисперсионного переноса как следствие его автомодельности // Письма в ЖЭТФ. 2007. Т. 86. P. 584–588.
31. Uchaikin V.V., Sibatov R.T. Fractional Kinetics in Solids, World Scientific, 2013.
32. Ландау Л.Д., Lifshits E.M. Механика. М.: Наука, 1965.
33. van Hove L. The approach to equilibrium in quantum statistics: A perturbation treatment to general order // Physica. 1957. Vol. 23. P. 441–480.
34. Prigogine I., Resibois P. On the kinetics of the approach to equilibrium // Physica. 1961. Vol. 27. P. 629–646.
35. Brout R., Prigogine I. Statistical mechanics of irreversible processes // Physica. 1956. Vol. 22. P. 35–47, 263–272, 621–636.
36. Резибуа П., Де Ленер М. Классическая кинетическая теория жидкостей и газов. М.: Мир, 1980.
37. Zwanzig R. Nonequilibrium Statistical Mechanics. New York: Oxford University Press, 2001.
38. Монтролл Э.В. В сб.: Термодинамика необратимых процессов. М., 1962.
39. Честер Дж. В сб.: Термодинамика необратимых процессов. М., 1962.
40. Олдер Б. Дж., Алли У.Е. В сб.: Физика за рубежом 86. М.: Мир, 1986. С. 52.
41. Richardson L.F. Atmospheric diffusion on a distance-neighbor graph // Proc. Roy Soc. London, Ser A. 1926. Vol. 110. P.709–737.
42. Колмогоров А.Н. Рассеяние энергии при локально изотропной турбулентности // ДАН СССР. 1941. Т. 32. С. 16–18.

43. *Обухов А.М.* О распределении энергии в спектре турбулентного потока // ДАН СССР. 1941. Vol. 32. С. 22–24.
44. *Jullien M.C., Paret J., Tabeling P.* Richardson pair dispersion in two-dimensional turbulence // Phys. Rev. Lett. 1999. Vol. 82. P. 2872–2875.
45. *Tchen C.M.* Diffusion of particles in turbulent flow // Advances in Geophysics. 1959. Vol. 9. P. 165–174.
46. *Heisenberg W.* Zur Statistischen Theorie der Turbulenz // Zeitschrift fuer Physik. 1948. Vol.124. P. 628–657.
47. *Монин А.С., Яглом А.М.* Статистическая гидромеханика. Часть I. М.: Наука, 1965; Часть II. М.: Наука, 1967.
48. *Shlesinger M., Klafter J., West B.* Levy walks with applications to turbulence and chaos // Physica. 1986. Vol. 140A. P. 212–218.
49. *Schönfeld J.C.* Integral diffusivity // Journal of Geophysical Research. 1962. Vol. 67, no. 8. P. 3187–3199.
50. *Tchen C.M.* Transport processes as foundations of the Heisenberg and Obukhoff theories of turbulence // Phys Rev. 1954. Vol. 93, no. 1. P. 4–14.
51. *Учайкин В.В.* Механика. Основы механики сплошных сред. СПб: Лань, 2016.
52. *Uchaikin V.V.* On time-fractional representation of an open system response // Fractional Calculus and Applied Analysis. 2016. Vol. 19, no. 5. P. 1306–1315.
53. *Климонтович Ю.Л.* Введение в физику открытых систем. М.: Янус-К, 2002.
54. *Lindenberg K., West B.J.* The Nonequilibrium Statistical Mechanics of Open and Closed Systems, Wiley, VCH Publishers, New York, 1990.
55. *Di-Ventra M.* Electrical Transport in Nanoscale Systems. Cambridge University Press, 2008.
56. *Учайкин В.В.* О дробно-дифференциальном уравнении Лиувилля как уравнении динамики открытой системы // Научные ведомости Белгородского университета. Серия: Математика. Физика. 2014. Т. 25(196), вып. 37. С. 58–67.
57. *Слонимский Г.Л.* О законе деформации высокоэластичных полимерных тел // Докл. АН СССР. 1961. Т. 140, № 2. С. 343–346.

## References

1. Rutman R.S. On physical interpretations of fractional integration and differentiation. *Theoretical and Mathematical Physics*, 1995, vol. 105, no. 3, pp. 1509–1519.
2. Uchaikin V.V. Self-similar anomalous diffusion and Levy-stable laws. *Physics–Uspekhi*, 2003, vol. 46, no. 8, pp. 821.
3. Sibatov R.T., Uchaikin V.V. Fractional differential approach to dispersive transport in semiconductors. *Physics–Uspekhi*, 2009, vol. 52, no. 10, pp. 1019–1043.
4. Uchaikin V.V. Fractional phenomenology of cosmic ray anomalous diffusion. *Physics–Uspekhi*. 2013. vol. 56, no. 11, pp. 1074–1119.
5. Uchaikin V.V. The Method of Fractional Derivatives. Ulyanovsk: «Artishok», 2008 (in Russian).
6. Uchaikin V.V. Fractional Derivatives for Physicists and Engineers. Vol's I–II, Springer Berlin, НЕР Beijing, 2013.
7. Boltzmann L. Zur Theorie der Elastischen Nachwirkungen. *Akad. Wiss. Wien, Math. Naturwiss.* 1874, vol.70, no. 2, pp. 275–306.

8. Volterra V. Lectures in the Mathematical Theory of the Struggle for Existence. Gauthier-Villars, Paris, 1931.
9. Volterra V. Theory of Functionals of Integral and Integro-Differential Equations, Dover, New York, 1959.
10. Rabotnov Y.N. Elementy nasledstvennoy mekhaniki tverdykh tel. Moscow, Nauka, 1977 (in Russian).
11. Valanis K.C. and Lee C.F. Endochronic theory of cyclic plasticity with application. *J. Appl. Mech.*, 1984, vol. 51, pp. 367–374.
12. Blatt J.M. An alternative approach to the ergodic problem. *Progress in Theoretical Physics*, 1959, vol. 22, pp. 745–756.
13. Maugin G.A. and Muschik W. Thermodynamics with internal variables. Part I. General concepts. *Journal of Non-Equilibrium Thermodynamics*, 1994, vol. 19, pp. 217–249.
14. Maugin G.A. and Muschik W. Thermodynamics with internal variables. Part II. Applications. *Journal of Non-Equilibrium Thermodynamics*, 1994, vol. 19, pp. 250–289.
15. Maugin G. The Thermomechanics of Nonlinear Irreversible Behaviors (An Introduction). World Scientific, Singapore–New Jersey–London–Hong Kong, 1999.
16. Gemant A. A method of analyzing experimental results obtained from elastoviscous bodies. *Physics*, 1936, vol. 7, pp. 311–317.
17. Gerasimov A.N. A generalization of linear laws of deformation and its application to internal friction problem. *Prikl. Mat. Mekh.*, 1948, vol. 12, no. 3. pp. 251–260 (in Russian).
18. Nigmatullin R.R. Fractional integral and its physical interpretation. *Theoretical and Mathematical Physics*, 1992, vol. 90, no. 3, pp. 242–251.
19. Hilfer R. Classification theory for anequilibrium phase transitions. *Phys Rev E.*, 1993, vol. 48, pp. 2466–2475.
20. Hilfer R. Fractional time evolution, In Applications of Fractional Calculus in Physics. R. Hilfer (ed.), World Scientific, Singapore, 2000, pp. 87–131.
21. Lukashchuk S.Yu. Time-fractional extensions of the Liouville and Zwanzig equation. *Cent. Eur. J. Phys.*, 2013, vol. 11, no. 6, p. 740 .
22. Kwok Sau Fa. A falling body problem through the air in view of the fractional derivative approach. *Physica A*, 2005, vol. 350, pp. 199–206.
23. Narahari Achar B.N., Hanneken J.W., Enck T., Clarke T. Dynamics of the fractional oscillator. *Physica A*, 2001, vol. 297, pp. 361–367.
24. Ryabov Ya.E. and Puzenko A. Damped oscillations in view of the fractional oscillator equation. *Phys. Rev. B*, 2002, vol. 66, 184201.
25. Baleanu D., Golmankhaneh A.K., Nigmatullin R., Golmankhaneh Ali K. Fractional Newtonian mechanics *Cent. Eur. J. Phys.*, 2010, vol. 8, no. 1, pp. 120–125.
26. Slezkin N.A. Dynamics of Viscous Incompressible Fluid, Moscow, Gostekhizdat, 1955 (in Russian).
27. Boussinesq V.J. Sur la resistance quoppose un fluide indefini au repose...*Compt.Rend.de l'Academ. des Sci.* 1885, vol. 100, pp. 935–937.
28. Basset A.B. Treatise on Hydrodynamics 2.,Deighton, Bell and Co., Cambridge. UK, 1888.
29. Zener C.M. Anelasticity of metals. *Suppl. Nuovo Cimento*, 1958, vol. 7, p. 544.

30. Uchaikin V.V., Sibatov R.T. Fractional differential kinetics of dispersive transport as the consequence of its self-similarity. *JETP Letters*, 2007, vol. 86, no. 8, pp. 512–516.
31. Uchaikin V.V., Sibatov R.T. *Fractional Kinetics in Solids*, World Scientific, 2013.
32. Landau L.D., Lifschitz E.M. *Fluid Mechanics*. New York: Pergamon Press, 1987.
33. van Hove L. The approach to equilibrium in quantum statistics: A perturbation treatment to general order. *Physica*, 1957, vol. 23, pp. 441–480.
34. Prigogine I., Resibois P. On the kinetics of the approach to equilibrium. *Physica*, 1961, vol. 27, pp. 629–646.
35. Brout R., Prigogine I. Statistical mechanics of irreversible processes, *Physica*, 1956, vol. 22, pp. 35–47, 263–272, 621–636.
36. Resibua P., De Lener M. *Classical Kinetic Theory of Liquids and Gases*. Moscow, Mir, 1980 (in Russian).
37. Zwanzig R. *Nonequilibrium Statistical Mechanics*. New York: Oxford University Press, 2001.
38. Montroll E. W. In *Fundamental Problems in Statistical Mechanics*, ed. E. Cohen, North-Holland, Amsterdam, 1962.
39. Chester G.V. The theory of irreversible processes, *Rep. on Progress in Physics*, 1963, vol. 26, p. 411.
40. Alder B.J., Alley W.E. Generalized Hydrodynamics, *Physics Today*, 1984, vol. 37, pp. 56–83.
41. Richardson L.F. Atmospheric diffusion on a distance-neighbor graph. *Proc. Roy Soc. London, Ser A*, 1926, vol. 110, pp. 709–737.
42. Kolmogorov A.N. Scattering of energy for locally isotropic turbulence. *Dokl. Acad. Sci. USSR*, 1941, vol. 32, pp. 16–18 (in Russian).
43. Obukhov A.M. Energy distribution in the spectrum of a turbulent flow. *Dokl. Acad. Sci. USSR*, 1941, vol. 32, pp. 22–24 (in Russian).
44. Jullien M.C., Paret J., Tabeling P. Richardson pair dispersion in two-dimensional turbulence. *Phys. Rev. Lett.*, 1999, vol. 82, p. 2872.
45. Tchen C.M. Diffusion of Particles in Turbulent Flow. *Advances in Geophysics*, 1959, vol. 9, pp. 165–174.
46. Heisenberg W. Zur Statistischen Theorie der Turbulenz. *Zeitschrift fuer Physik* 1948, vol. 124, pp. 628–657.
47. Monin A.S. Yaglom A.M. *Statistical Hydromechanics*. Part I. M.: Nauka, 1965; Part II. Moscow: Nauka, 1967 (in Russian).
48. Shlesinger M., Klafter J., West B. Levy walks with applications to turbulence and chaos. *Physica*, 1986, vol. 140A, pp. 212–218.
49. Schönfeld J.C. Integral diffusivity. *Journal of Geophysical Research*, 1962, vol. 67, no. 8, pp. 3187–3199.
50. Tchen C.M. Transport processes as foundations of the Heisenberg and Obukhoff theories of turbulence. *Phys Rev.*, 1954, vol. 93, no. 1, pp. 4–14.
51. Uchaikin V.V. *Mechanics. Fundamentals of Continuum Mechanics*. SPb, Lan, 2016 (in Russian).
52. Uchaikin V.V. On time-fractional representation of an open system response. *Fractional Calculus and Applied Analysis*, 2016, vol. 19, no. 5, pp. 1306–1315.
53. Klimontovich Yu.L. *Introduction to the Physics of Open Systems*. M., Janus-K, 2002 (in Russian).

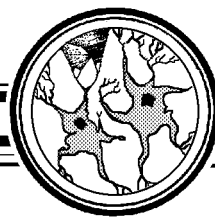
54. Lindenberg K., West B.J. The Nonequilibrium Statistical Mechanics of Open and Closed Systems, Wiley, VCH Publishers, New York, 1990.
55. Di-Ventra M. Electrical Transport in Nanoscale Systems. Cambridge University Press, 2008.
56. Uchaikin V.V. On the fractional-differential Liouville equation as an equation of dynamics of an open system. *Scientific bulletins of the Belgorod University, series: Mathematics. Physics*, 2014, vol. 25(196), no. 37, pp. 58–67 (in Russian).
57. Slonimsky G.L. On the law of deformation of highly elastic polymer bodies. *Dokl. AN SSSR*, 1961, vol. 140, no. 2, pp. 343–346 (in Russian).



*Учайкин Владимир Васильевич* – родился в Барнауле (1941), окончил Томский политехнический институт (1964). Защитил кандидатскую диссертацию (НИИ АР, Мелекес, 1969) и докторскую диссертацию (Новосибирск, Институт вычислительной математики и математической геофизики СО АН СССР, 1989). Автор (соавтор) более 400 научных работ, в числе которых 7 монографий, опубликованных крупнейшими зарубежными научными издательствами (Springer, World Scientific и др.), учебного пособия с грифом Минвуза и уникального учебника по механике с грифом УМО России, статей по проблемам науки и образования, научно-популярных статей. Заслуженный работник высшей школы (2002). Заслуженный деятель науки и техники Ульяновской области (2013). Ветеран труда. Почетный гражданин Ульяновской области.

Россия, 432017 Ульяновск, ул. Л. Толстого, 42  
 Ульяновский государственный университет  
 E-mail: vuchaikin@gmail.com





УДК 530.18

<https://doi.org/10.18500/0869-6632-2019-27-1-41-52>

## Восстановление структуры связей в ансамбле осцилляторов по записям колебаний через моделирование фазовой динамики

*Е. В. Навроцкая, Д. А. Смирнов, Б. П. Безручко*

Саратовский филиал Института радиотехники и электроники им. В.А. Котельникова РАН  
Россия, 410019 Саратов, ул. Зелёная, 38

E-mail: [sidakev@gmail.com](mailto:sidakev@gmail.com), [smirnovda@yandex.ru](mailto:smirnovda@yandex.ru), [bezruchkobp@gmail.com](mailto:bezruchkobp@gmail.com)

Автор для переписки Навроцкая Елена Владимировна, [sidakev@gmail.com](mailto:sidakev@gmail.com)

*Поступила в редакцию 4.08.2018, принята к публикации 15.10.18*

**Тема.** В работе исследуется применимость известного метода выявления связи между двумя осцилляторами, основанного на экспериментальном моделировании фазовой динамики по временным рядам фаз в случаях, когда имеется несколько пиков в спектре мощности сигнала. Задача выявления структуры связей в ансамблях (наличия, направлений и интенсивности взаимодействий между элементами) по экспериментальным записям их колебаний актуальна для систем различной природы и приложений. При ее решении применительно к системе двух осцилляторов метод реконструкции моделей фазовой динамики по временным рядам доказал свою эффективность при условии, что в спектре мощности сигнала имеется единственный пик. **Цель.** Исследование условий применимости указанного метода в менее благоприятных случаях, когда имеется несколько пиков в спектре мощности и ширина этих пиков значительна. **Методы.** В качестве тестовой системы в численном эксперименте рассмотрен ансамбль из трех осцилляторов ван дер Поля: два взаимодействующих осциллятора, подвергались одновременному воздействию со стороны третьего. С помощью исследуемого метода по временным реализациям фаз осцилляторов оценивалось наличие связи между ними. Численный эксперимент проводился при различных значениях параметров осцилляторов. **Результаты.** Продемонстрирована возможность ложных выводов о структуре связей в рассматриваемой системе и предложен диагностический критерий возможных ошибок, основанный на оценке автокорреляционной функции остатков модели фазовой динамики. Для получения надежных оценок связи в проблемных ситуациях апробирована предварительная фильтрация сигналов.

*Ключевые слова:* фазовая динамика, выявление связей, ансамбль осцилляторов.

*Образец цитирования:* Навроцкая Е.В., Смирнов Д.А., Безручко Б.П. Восстановление структуры связей в ансамбле осцилляторов по записям колебаний через моделирование фазовой динамики // Изв. вузов. ПНД. 2019. Т. 27, № 1. С. 41–52. <https://doi.org/10.18500/0869-6632-2019-27-1-41-52>

*Финансовая поддержка.* Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (грант № 14-12-00291).

## The reconstruction of the couplings structure in the ensemble of oscillators according to the time series via phase dynamics modeling

*E. V. Navrotskaya, D. A. Smirnov, B. P. Bezruchko*

Saratov Branch of the Institute of Radio Engineering & Electronics of Russian Academy of Sciences  
38, Green str., 410019 Saratov, Russia

E-mail: [sidakev@gmail.com](mailto:sidakev@gmail.com), [smirnovda@yandex.ru](mailto:smirnovda@yandex.ru), [bezruchkobp@gmail.com](mailto:bezruchkobp@gmail.com)  
Correspondence should be addressed to Navrotskaya Elena V., [sidakev@gmail.com](mailto:sidakev@gmail.com)  
*Received 4.08.2018, accepted for publication 15.10.18*

**Topic.** In this paper, we investigate the applicability of the known method for detecting the couplings between two oscillators, based on experimental phase dynamics modeling by phases time series in cases where there are several peaks in the signal power spectrum. The problem of revealing the structure of couplings in ensembles (presence, directions and intensity of interactions between elements) by experimental recordings of their oscillations is relevant for systems of different nature and applications. In its solution for the system of two oscillators, the method of reconstruction of phase dynamics models by time series has shown its efficiency provided that there is a single peak in the signal power spectrum. **Aim.** The investigation of the conditions for the applicability of this method in less favorable cases when there are several peaks in the power spectrum and the width of these peaks is significant. **Methods.** An ensemble of three Van der Pol oscillators is considered as a test system in the numerical experiment: two coupled oscillators were exposed to the simultaneous influence from the third one. Using the investigated method, the presence of a couplings between the oscillators was estimated from the time series of the oscillator phases. The numerical experiment was carried out at different values of oscillator parameters. **Results.** The possibility of false conclusions about the structure of couplings in such system is demonstrated. The diagnostic criterion of possible errors based on the estimation of the autocorrelation function of the phase dynamics model residues is proposed. To obtain reliable estimates of interactions in problem situations, pre-filtering of signals was tested.

*Key words:* phase dynamics, identification of couplings, ensemble of oscillators.

*Reference:* Navrotskaya E.V., Smirnov D.A., Bezruchko B.P. The reconstruction of the couplings structure in the ensemble of oscillators according to the time series via phase dynamics modeling. *Izvestiya VUZ, Applied Nonlinear Dynamics*, 2019, vol. 27, no. 1, pp. 41–52. <https://doi.org/10.18500/0869-6632-2019-27-1-41-52>

*Acknowledgements.* Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (грант № 14-12-00291).

### Введение

Задача обнаружения связи между колебательными системами по временным рядам их колебаний актуальна во многих областях науки и техники: в радиофизике [1], биомедицине [2–9], климатологии [10–13] и других областях. Существует множество методов анализа динамики колебательных систем по временным рядам. Для выявления связей между системами востребованными оказались методы, основанные на анализе фаз колебаний, поскольку фаза – переменная, характеризующая мгновенное состояние системы, весьма чувствительная к внешним воздействиям и изменениям параметров.

В работах [14–16] предложен метод выявления связей в малых ансамблях связанных осцилляторов по временным рядам, на основе моделирования их фазовой динамики. Метод оказывается эффективным для оценки взаимодействия между двумя осцилляторами в случаях, когда в спектре мощности сигналов имеется единственный узкий пик. Однако на практике при анализе реальных данных такая постановка не всегда выполняется, в частности, востребованной является задача анализа подсистем со сложным спектральным составом наблюдаемых сигналов. В этих условиях могут возникать трудности с введением фазы колебаний, эффективность и надёжность метода при этом могут снижаться.

В данной работе на эталонных системах исследованы условия применимости данного метода в случаях, когда имеется несколько пиков в спектре мощности сигналов и ширина этих

пиков значительна. С помощью численных экспериментов выделены условия, при которых метод дает большое количество ошибок, и разработан подход, позволяющий снизить их процент. Кроме того, предложен диагностический критерий ошибочности результата в проблемных ситуациях, основанный на оценке автокорреляционной функции остаточных ошибок построенной модели фазовой динамики. Эффективность предложенного подхода и диагностического критерия показана в численных экспериментах на системе связанных осцилляторов ван дер Поля.

## 1. Метод оценки связей между двумя осцилляторами

Известный метод выявления направленных связей и оценки времени ее запаздывания основан на построении эмпирической модели фазовой динамики наблюдаемых процессов  $x_1(t)$  и  $x_2(t)$ . Для этого по имеющимся временным рядам  $\{x_1(t_1), \dots, x_1(t_N)\}$  и  $\{x_2(t_1), \dots, x_2(t_N)\}$ , например, с помощью введения аналитического сигнала [17–20] рассчитываются временные ряды фаз колебаний  $\{\phi_1(t_1), \dots, \phi_1(t_N)\}$  и  $\{\phi_2(t_1), \dots, \phi_2(t_N)\}$ , где  $t_i = i\Delta t$ ,  $\Delta t$  – интервал выборки,  $N$  – длина ряда. Далее по временным рядам фаз строится модель фазовой динамики. Форма модели выбирается из предположений, что фазовая динамика корректно описывается стохастическими дифференциальными уравнениями первого порядка

$$\begin{aligned} d\phi_1(t)/dt &= \omega_1 + G_1(\phi_1(t), \phi_2(t)) + \xi_1(t), \\ d\phi_2(t)/dt &= \omega_2 + G_2(\phi_2(t), \phi_1(t)) + \xi_2(t), \end{aligned} \quad (1)$$

где параметр  $\omega_k$  определяет угловую частоту колебаний,  $\xi_k(t)$  – белый шум с нулевым средним и автоковариационной функцией  $\langle \xi_k(t)\xi_k(t') \rangle = \sigma_{\xi_k}^2 \delta(t - t')$ . Функции  $G_k$   $2\pi$ -периодичны по обоим аргументам и определяют взаимодействие осцилляторов и собственную нелинейность их фазовой динамики. При анализе дискретных временных рядов строится модель в разностной форме, которую можно получить путем интегрирования уравнений (1) на интервале конечной ширины  $\tau$

$$\phi_k(t + \tau) - \phi_k(t) = F_k(\phi_k(t), \phi_j(t), \mathbf{a}_k) + \varepsilon_k(t), \quad k, j = 1, 2, \quad j \neq k, \quad (2)$$

где  $F_k(\phi_k, \phi_j, \mathbf{a}_k) = w_k + \sum_{m,n \in \Omega_k} \alpha_{k,m,n} \cos(m\phi_k - n\phi_j) + \beta_{k,m,n} \sin(m\phi_k - n\phi_j)$  – тригонометрический многочлен невысокого порядка с коэффициентами  $\mathbf{a}_k = \{\alpha_k, \beta_k\}$ ;  $\varepsilon_k(t) \approx \int_t^{t+\tau} \xi_k(t') dt'$  – гауссов шум с нулевым средним и дисперсией  $\sigma_{\varepsilon_k}^2 \approx \sigma_{\xi_k}^2 \tau$ , автокорреляционная функция которого  $C_k(t') = \langle \varepsilon_k(t)\varepsilon_k(t - t') \rangle / \sigma_{\varepsilon_k}^2$  (угловые скобки означают математическое ожидание) спадает до нуля на интервале от нуля до  $\tau$ . По временным рядам  $\{\phi_k(t_i)\}_{i=1}^N$  и  $\{\phi_j(t_i)\}_{i=1}^N$  оценивают коэффициенты  $\mathbf{a}_k$  многочлена  $F_k(\phi_k, \phi_j, \mathbf{a}_k)$  путем минимизации среднего квадрата ошибки модели:  $S_k^2(\Delta_{j \rightarrow k}) = \frac{1}{N-\tau/\Delta t} \sum_{i=1}^{N-\tau/\Delta t} [\phi_k(t_i + \tau) - \phi_k(t_i) - F_k(\phi_k(t_i), \phi_j(t_i), \mathbf{a}_k)]^2 \rightarrow \min$ .

Интенсивность  $\gamma_1$  воздействия второй системы на первую можно определить как крутизну зависимости  $F_1$  от  $\phi_2$ , и интенсивность  $\gamma_2$  воздействия первой системы на вторую – аналогично:

$$\gamma_k^2 \approx \frac{1}{2\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} (\partial F_k(\phi_k, \phi_j, \mathbf{a}_k) / \partial \phi_j)^2 d\phi_k d\phi_j. \quad (3)$$

Через оценки коэффициентов  $\hat{\mathbf{a}}_k$  можно получить оценки интенсивности воздействия  $j$ -й системы на  $k$ -ю

$$\gamma_k^2 = \sum_{(m,n) \in \Omega_k} n^2 (\alpha_{k,m,n}^2 + \beta_{k,m,n}^2). \quad (4)$$

В работе [16] были получены формулы для их 95 %-х доверительных интервалов вида  $\hat{\gamma}_k - 1.6\hat{\sigma}_{\hat{\gamma}_k}$ ,  $\hat{\gamma}_k + 1.8\hat{\sigma}_{\hat{\gamma}_k}$ , где  $\hat{\sigma}_{\hat{\gamma}_k}$  рассчитываются по тому же короткому ряду и определяет дисперсию величины  $\gamma_k$ . Если оценка  $\hat{\gamma}_k$  вместе со своим доверительным интервалом превышает ноль, то делается вывод о наличии воздействия  $j$ -й системы на  $k$ -ю с вероятностью ошибки не более 0.05, поскольку доверительный интервал 95 %-й.

Обратим внимание, что даже в случае хорошей определенности фаз подход не применим для режимов фазовой синхронизации, потому что тогда фазы двух осцилляторов не могут выступать в роли «независимых» переменных при построении модели. Эта проблема диагностируется, если оценка коэффициента фазовой когерентности  $\hat{\rho} = \left| \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \exp(i(\phi_1(t_i) - \phi_2(t_i))) \right|$  близка к единице. Реализация подхода затрудняется при  $\hat{\rho} > 0.6$  [16].

## 2. Методика исследования

Для изучения объявленных во Введении проблем с определением фазы в численном эксперименте в качестве эталонной колебательной системы были взяты три стохастических (возмущенных внешними источниками белого шума) автоколебательных осциллятора ван дер Поля

$$\begin{aligned} \frac{d^2 x_1}{dt^2} &= \mu_1(1 - x_1^2(t)) \frac{dx_1}{dt} - \omega_1^2 x_1(t) + \xi_1(t), \\ \frac{d^2 x_2}{dt^2} &= \mu_2(1 - x_2^2(t)) \frac{dx_2}{dt} - \omega_2^2 x_2(t) + k_{1 \rightarrow 2}(x_1(t) - x_2(t)) + \xi_2(t), \\ \frac{d^2 x_3}{dt^2} &= \mu_3(1 - x_3^2(t)) \frac{dx_3}{dt} - \omega_3^2 x_3(t) + k_{1 \rightarrow 3}(x_1(t) - x_3(t)) + k_{2 \rightarrow 3}(x_2(t) - x_3(t)) + \xi_3(t). \end{aligned} \quad (5)$$

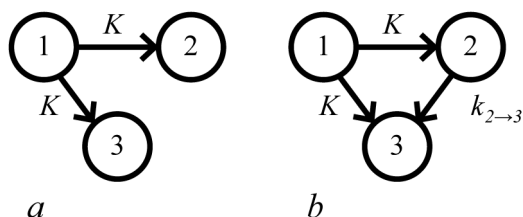


Рис. 1. Схема структуры связей, рассматриваемых в данной работе

Fig. 1. Diagram of the couplings structure considered in this paper

Здесь параметры  $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = 0.2$ ,  $\omega_1$ ,  $\omega_2$ ,  $\omega_3$  – круговые частоты,  $\xi_k(t)$  – белый шум с нулевым средним и автоковариационной функцией (АКФ)  $\langle \xi_k(t) \xi_k(t') \rangle = D_{\xi_k} \delta(t-t')$ , где  $D_{\xi_1}$ ,  $D_{\xi_2}$ ,  $D_{\xi_3}$  определяют интенсивности шумов. Осциллятор  $x_1$  влияет на два других  $x_2$  и  $x_3$  с одинаковой силой  $k_{1 \rightarrow 3} = k_{1 \rightarrow 2} = K$ , значение которого менялось в широком диапазоне, осцилляторы  $x_2$  и  $x_3$  либо взаимодействовали, либо нет, в зависимости от рассматриваемого случая (рис. 1).

Рассматривались различные соотношения частот всех трех осцилляторов: как близкие друг к другу частоты, так и сильно различающиеся. Это соотношение определяло расстояние между пиками в спектрах мощности сигналов. Путем изменения уровня шумов в уравнениях ван дер Поля регулировалась ширина этих пиков. Достаточно интенсивное воздействие первого осциллятора на два других приводит к наличию дополнительного пика в спектре мощности сигналов  $x_2$  и  $x_3$  (рис. 2).

### Численный эксперимент проводился по двум схемам.

- **Традиционный метод** [6, 7] – непосредственно по временным рядам решений системы (5). При различных фиксированных значениях параметров осцилляторов (5) генерировался ансамбль из 100 временных рядов  $x_1(t)$ ,  $x_2(t)$  и  $x_3(t)$ , которые получались путем интегрирования уравнений методом Эйлера–Маруямы с шагом 0.01. Интервал выборки составлял 0.3 (20 точек на характерном периоде), длина ряда – 2000 точек (около 100 характерных периодов). С помощью преобразования Гильберта [8] для каждого временного ряда вводилась

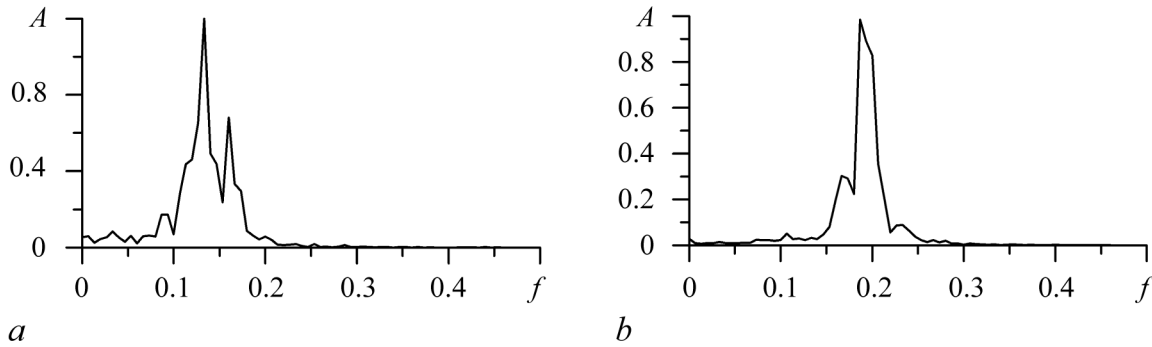


Рис. 2. Амплитудные спектры сигналов осцилляторов  $x_2(t)$  и  $x_3(t)$  при  $K = 0.2$ ,  $k_{2 \rightarrow 3} = 0$ ,  $D_{\xi_1} = D_{\xi_2} = D_{\xi_3} = 0.9$ ,  $\omega_1 = 1$ ,  $\omega_2 = 0.7$ ,  $\omega_3 = 1.1$  (на оси  $f$  им соответствуют  $f_1 \approx 0.16$ ,  $f_2 \approx 0.11$ ,  $f_3 \approx 0.17$ ). В каждом видна сложная структура, вызванная наличием третьего осциллятора

Fig. 2. The amplitude spectra of the  $x_2(t)$  and  $x_3(t)$  at  $K = 0.2$ ,  $k_{2 \rightarrow 3} = 0$ ,  $D_{\xi_1} = D_{\xi_2} = D_{\xi_3} = 0.9$ ,  $\omega_1 = 1$ ,  $\omega_2 = 0.7$ ,  $\omega_3 = 1.1$ , (on the  $f$  axis  $f_1 \approx 0.16$ ,  $f_2 \approx 0.11$ ,  $f_3 \approx 0.17$  correspond to them). Each shows a complex structure caused by the presence of the third oscillator

фаза и по каждой паре временных рядов фаз получались оценки  $\hat{\gamma}_{j \rightarrow k}$  вместе с доверительным интервалом. Далее подсчитывалась доля (оценка вероятности) положительных выводов  $n$ , то есть доля временных рядов, для которых сделан вывод о наличии связи (при этом оценка  $\hat{\gamma}_{j \rightarrow k}$  вместе со своим доверительным интервалом превышает ноль). Чтобы метод гарантировал надежность результатов, вводилось обязательное условие: доля положительных оценок о наличии связи при реальном ее отсутствии (ложные выводы) не должна превосходить уровень 0.05. При наличии реальной связи доля положительных выводов определяет чувствительность метода, и чем она больше, тем метод эффективнее выявляет взаимодействие.

- **Модернизированный подход**, который состоит в том, что для снижения ошибок перед введением фазы рассматривалась возможность предварительной фильтрации сигналов  $x_2(t)$  и  $x_3(t)$ . Возможности улучшения результатов оценки связей при любой фильтрации не очевидны, так как сигнал скрытого осциллятора не подмешивается аддитивно к наблюдаемым сигналам, а влияет на их динамику. Последующий расчет фазы методом аналитического сигнала является нелинейным преобразованием временного ряда, частично искаженного фильтрацией. В данной работе использовалось три варианта фильтрации: 1) удаление высокочастотным или низкочастотным фильтром широкой области частот (от нуля до собственной частоты или от собственной частоты и выше), в которой содержался спектральный пик воздействующего первого осциллятора, но не содержался собственный спектральный пик наблюдаемого сигнала; 2) удаление режекторным фильтром только относительно узкой полосы частот, в которой представлен спектральный пик воздействующего осциллятора, но не собственные пики обоих наблюдаемых  $x_2(t)$  и  $x_3(t)$ ; 3) выделение полосовым фильтром области частот, содержащей собственные пики обоих осцилляторов  $x_2(t)$  и  $x_3(t)$ . Полезными оказались второй и третий варианты фильтрации, результаты которых в сопоставлении с исходным вариантом (без фильтрации) представлены ниже.

### 3. Результаты

Были получены зависимости доли положительных выводов  $n$  от коэффициента воздействия первого осциллятора  $K$  (рис. 3, 4). Данные расчетов позволяют сделать следующие выводы.

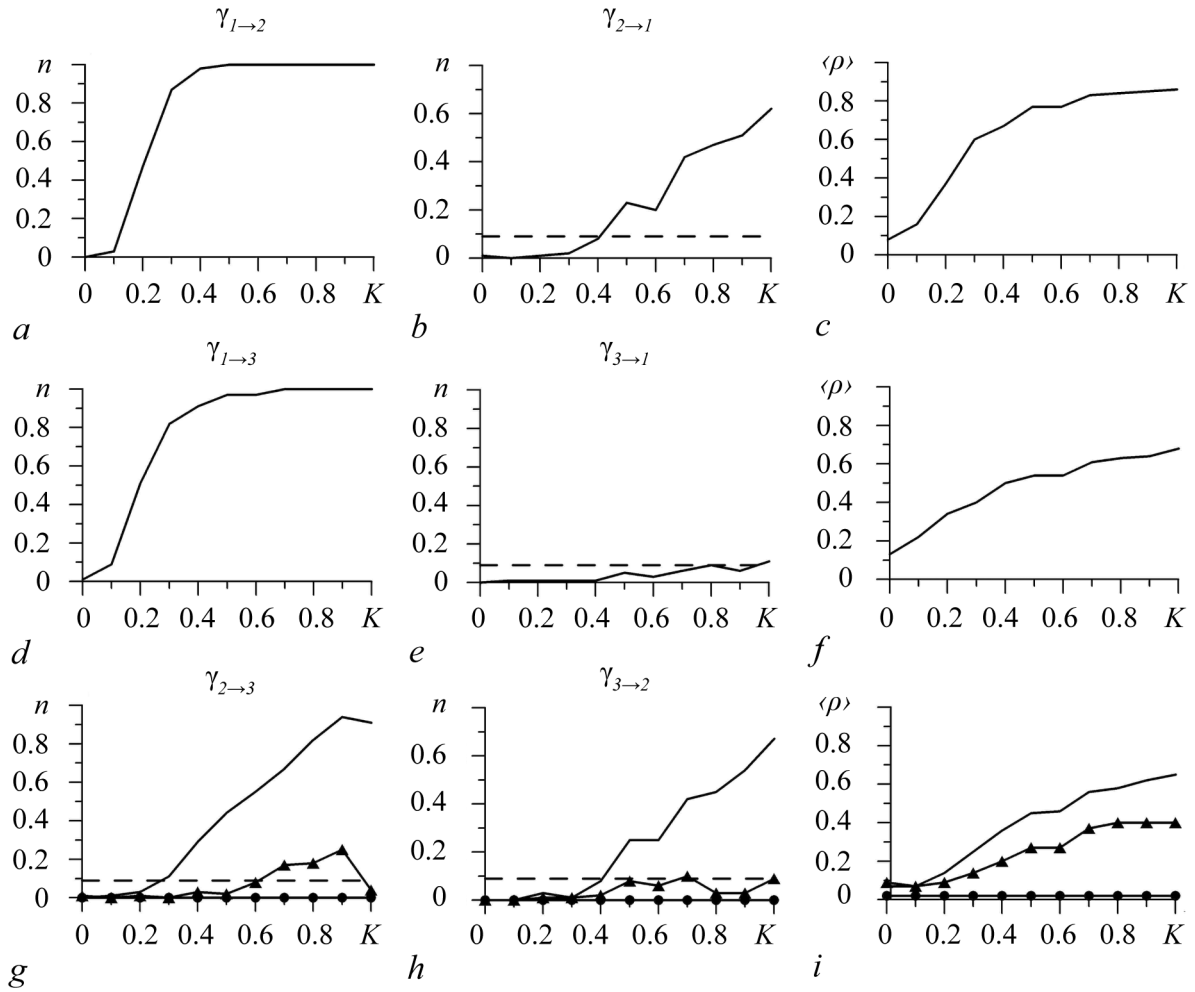


Рис. 3. Результаты для системы (5) при  $k_{2 \rightarrow 3} = 0$ ,  $\omega_1 = 1$ ,  $\omega_2 = 0.7$ ,  $\omega_3 = 1.1$ ,  $D_{\xi_1} = D_{\xi_2} = D_{\xi_3} = 1$ : верхний ряд соответствует результатам выявления связи между  $x_1(t)$  и  $x_2(t)$ , средний ряд – между  $x_1(t)$  и  $x_3(t)$ , нижний ряд между  $x_2(t)$  и  $x_3(t)$ ;  $a, b$  – зависимость частоты положительных выводов  $n$  от коэффициента связи  $K$  для  $\hat{\gamma}_{1 \rightarrow 2}$  и  $\hat{\gamma}_{2 \rightarrow 1}$ ;  $c$  – усреднённое по ансамблю значение коэффициента фазовой когерентности  $\langle \rho \rangle$  для  $x_1(t)$  и  $x_2(t)$ ;  $d, e$  –  $n(K)$  для  $\hat{\gamma}_{1 \rightarrow 3}$  и  $\hat{\gamma}_{3 \rightarrow 1}$ ;  $f$  –  $\langle \rho \rangle$  для  $x_1(t)$  и  $x_3(t)$ ;  $g, h$  –  $n(K)$  для  $\hat{\gamma}_{2 \rightarrow 3}$  и  $\hat{\gamma}_{3 \rightarrow 2}$ ;  $i$  –  $\langle \rho \rangle$  для  $x_2(t)$  и  $x_3(t)$ . Жирная линия – результаты получены без предварительной фильтрации сигналов; линия с треугольниками – временные ряды предварительно фильтровались с помощью *режекторного* фильтра, при этом подавлялись частоты, соответствующие первому (воздействующему) осциллятору; линия с кружками – временные ряды предварительно фильтровались с помощью *полосового* фильтра, при этом выделялись частоты, соответствующие второму и третьему осцилляторам; горизонтальная штриховая линия – допустимый уровень частоты ошибок

Fig. 3. Results for the system (5) at  $k_{2 \rightarrow 3} = 0$ ,  $\omega_1 = 1$ ,  $\omega_2 = 0.7$ ,  $\omega_3 = 1.1$ ,  $D_{\xi_1} = D_{\xi_2} = D_{\xi_3} = 1$ : the top row corresponds to the results of identifying the relationship between  $x_1(t)$  and  $x_2(t)$ , middle row – between  $x_1(t)$  and  $x_3(t)$ , bottom row between  $x_2(t)$  and  $x_3(t)$ ;  $a, b$  – the dependence of the frequency of positive conclusions  $n$  on the coupling coefficient  $K$  for  $\hat{\gamma}_{1 \rightarrow 2}$  and  $\hat{\gamma}_{2 \rightarrow 1}$ ;  $c$  – the ensemble-averaged value of the mean phase coherence  $\langle \rho \rangle$  for  $x_1(t)$  and  $x_2(t)$ ;  $d, e$  –  $n(K)$  for  $\hat{\gamma}_{1 \rightarrow 3}$  and  $\hat{\gamma}_{3 \rightarrow 1}$ ;  $f$  –  $\langle \rho \rangle$  for  $x_1(t)$  and  $x_3(t)$ ;  $g, h$  –  $n(K)$  for  $\hat{\gamma}_{2 \rightarrow 3}$  and  $\hat{\gamma}_{3 \rightarrow 2}$ ;  $i$  –  $\langle \rho \rangle$  for  $x_2(t)$  and  $x_3(t)$ . Bold line – results obtained without pre-filtering signals; line with triangles – time series were pre-filtered using a *rejection* filter, the frequencies corresponding to the first (acting) oscillator were suppressed; line with circles – time series were pre-filtered using a *bandpass* filter, the frequencies corresponding to the second and third oscillators were distinguished; dashed horizontal line acceptable level of frequency error

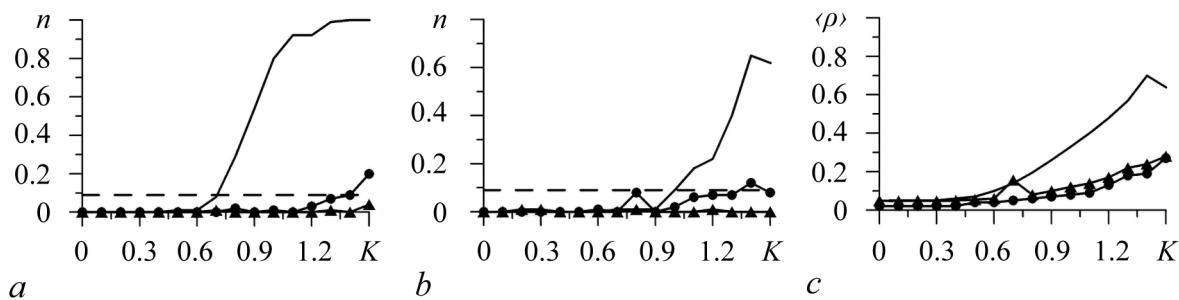


Рис. 4. Результаты выявления связи между  $x_2$  и  $x_3$  в системе (5) при  $k_{2 \rightarrow 3} = 0$ ,  $\omega_1 = 2$ ,  $\omega_2 = 1.5$ ,  $\omega_3 = 1$ ,  $D_{\xi_1} = D_{\xi_2} = D_{\xi_3} = 1$ :  $a, b$  – зависимость частоты положительных выводов  $n(K)$  от коэффициента связи  $K$  для  $\hat{\gamma}_{2 \rightarrow 3}$  и  $\hat{\gamma}_{3 \rightarrow 2}$ ;  $c$  – усреднённое по ансамблю значение коэффициента фазовой когерентности  $\langle \rho \rangle$  для  $x_2(t)$  и  $x_3(t)$ . Жирная линия результаты получены без предварительной фильтрации сигналов; линия с треугольниками – временные ряды предварительно фильтровались с помощью *режекторного* фильтра, подавлялись частоты, соответствующие первому (воздействующему) осциллятору; линия с кружками – временные ряды предварительно фильтровались с помощью *полосового* фильтра, выделялись частоты, соответствующие второму и третьему осцилляторам; горизонтальная штриховая линия – допустимый уровень частоты ошибок

Fig.4 The results of identifying the relationship between  $x_1(t)$  and  $x_2(t)$  in system (5) at  $k_{2 \rightarrow 3} = 0$ ,  $\omega_1 = 2$ ,  $\omega_2 = 1.5$ ,  $\omega_3 = 1$ ,  $D_{\xi_1} = D_{\xi_2} = D_{\xi_3} = 1$ :  $a, b$  – the dependence of the frequency of positive conclusions  $n(K)$  on the coupling coefficient  $K$  for  $\hat{\gamma}_{2 \rightarrow 3}$  and  $\hat{\gamma}_{3 \rightarrow 2}$ ;  $c$  – the ensemble-averaged value of the mean phase coherence  $\langle \rho \rangle$  for  $x_2(t)$  and  $x_3(t)$ . Bold line – results obtained without pre-filtering signals; line with triangles – time series were pre-filtered using a *rejection* filter, the frequencies corresponding to the first (acting) oscillator were suppressed; line with circles – time series were pre-filtered using a *bandpass* filter, the frequencies corresponding to the second and third oscillators were distinguished; dashed horizontal line – acceptable level of frequency error

- Традиционный метод демонстрирует высокую чувствительность при выявлении реально существующих связей, но наличие общего источника воздействия осциллятора  $x_1$  на несвязанные осцилляторы  $x_2$  и  $x_3$  может приводить к ложно-положительным выводам (о наличии связи, когда реально она отсутствует). Как показано на рис. 3,  $a, d$ , метод имеет высокую чувствительность к выявлению связи между первым и вторым осцилляторами (см. рис. 3,  $a$ ) и между первым и третьим осцилляторами (см. рис. 3,  $d$ ) – величина  $n$  быстро возрастает до единичного значения. При этом, как видно на рис. 3,  $g, h$ , метод дает большое количество положительных выводов о наличии связи для несвязанных осцилляторов: на рис. 3,  $g, h$  при  $K > 0.3$  доля положительных выводов (доля ошибок) превышает допустимый уровень, показанный пунктирной линией.
- Аналогичная ситуация наблюдается и при большей расстройке частот (см. рис. 4) при  $\omega_1 = 2$ ,  $\omega_2 = 1.5$ ,  $\omega_3 = 1$ .
- Кроме того, из рис. 3,  $b$  видно, метод может давать ложные выводы о направлении воздействия: на рисунке величина  $n$  для  $\hat{\gamma}_{2 \rightarrow 1}$  превышает допустимый уровень 0.05 (в тестовом модельном уравнении (5) имеется только однонаправленное воздействие от осциллятора  $x_1(t)$  на  $x_2(t)$ , но нет воздействия в обратную сторону).
- Применение модифицированного метода, предусматривающего предварительную фильтрацию сигналов  $x_2(t)$  и  $x_3(t)$ , позволяет снизить процент ошибок до требуемого малого уровня: на рис. 3,  $g, h$  и рис. 4,  $a, b$  доля положительных выводов  $n$  как после полосового (линия, помеченная кружками), так и после режекторного (линия, помеченная треугольниками) фильтров практически не превышает уровень 0.05, показанный пунктирной горизонтальной линией.

**Диагностический критерий (оценка вероятной ошибки в определении структуры связей).** Для поиска критериев проблемных ситуаций проводился анализ остаточных ошибок («фазовых» шумов) построенных моделей фазовой динамики и рассчитывались их АКФ.

На рис. 5, *a* показана АКФ остатков модели (2) для  $x_2(t)$  в (5) при  $k_{2 \rightarrow 3} = 0$ ,  $K = 1$ ,  $\omega_1 = 2$ ,  $\omega_2 = 1.5$ ,  $\omega_3 = 1$ ,  $D_{\xi_1} = D_{\xi_2} = 0.1$ ,  $D_{\xi_3} = 0.3$ . Наличие огибающей в АКФ может выступать в качестве диагностического критерия наличия скрытого источника воздействия, не учтенного при построении модели фазовой динамики. Применение режекторного фильтра к обоим сигналам  $x_2$  и  $x_3$  (подавлялись частоты в области основного пика частоты воздействующего скрытого осциллятора) приводит к тому, что огибающая в АКФ остатков модели пропадает (рис. 5, *b*).

Также были получены графики зависимости величины  $n$  от коэффициента воздействия осциллятора  $x_2$  на  $x_3$  при сохранении воздействия на них со стороны первого осциллятора (соответствующая структура связи показана на рис. 1, *b*). На рис. 6 приведены графики для случая слабого воздействия со стороны  $x_1$  (при  $K = 0.6$ , рис. 6, верхний ряд) и более сильного (при  $K = 1$ , рис. 6, нижний ряд). При слабом воздействии (при  $K = 0.6$ ) первого осциллятора на  $x_2$  и  $x_3$  традиционный и модифицированный методы выявления связи эффективны уже при малых значениях  $k_{2 \rightarrow 3}$ : доля положительных выводов велика как без предварительной фильтрации сигналов (рис. 6, *a*, жирная линия), так и в случае применения полосового и режекторного фильтров (на рис. 6, *a*, линии с треугольниками и кружками, соответственно). Однако при оценке воздействия в обратную сторону, то есть осциллятора  $x_3$  на  $x_2$  (рис. 6, *b*), доля ошибочных выводов превышает требуемый уровень. Применение полосовой фильтрации даже увеличивает долю ошибок. Такую ситуацию можно диагностировать как с помощью предложенного критерия, основанного на оценке автокорреляционной функции остатков модели для сигнала  $x_2(t)$ , так и по большому значению оценки коэффициента фазовой когерентности  $\hat{\rho}$  (рис. 6, *c*), которое, как отмечалось ранее в п. 1, для работоспособности метода не должно превышать значение 0.6.

Самая сложная ситуация наблюдается при сильном воздействии осциллятора  $x_1$  на  $x_2$  и  $x_3$  (при  $K = 1$ ). При  $k_{2 \rightarrow 3} = 0$  доля ошибок принимает большое значение (рис. 6, *d*),

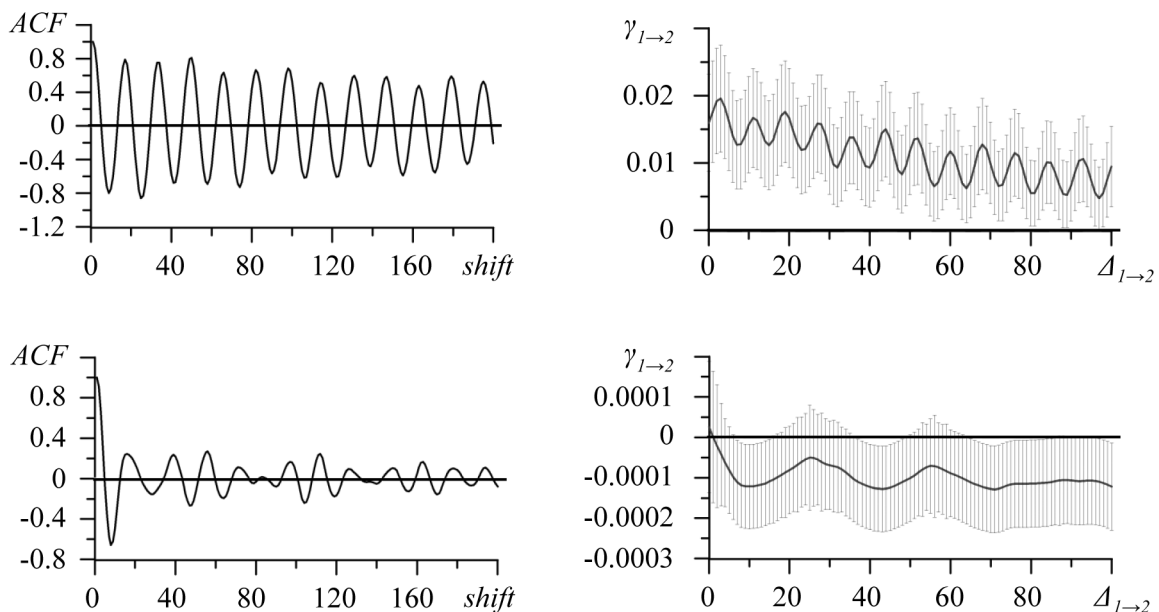


Рис. 5. Автокорреляционная функция остатков модели (2) для  $x_2(t)$  в (5) при  $k_{2 \rightarrow 3} = 0$ ,  $K = 1$ ,  $\omega_1 = 2$ ,  $\omega_2 = 1.5$ ,  $\omega_3 = 1$ ,  $D_{\xi_1} = D_{\xi_2} = 0.1$ ,  $D_{\xi_3} = 0.3$ : *a* –  $x_2(t)$  не фильтровался; *b* – перед введением фазы к  $x_2(t)$  был применен режекторный фильтр

Fig. 5. Autocorrelation function of residuals of the model (2) for  $x_2(t)$  in (5) at  $k_{2 \rightarrow 3} = 0$ ,  $K = 1$ ,  $\omega_1 = 2$ ,  $\omega_2 = 1.5$ ,  $\omega_3 = 1$ ,  $D_{\xi_1} = D_{\xi_2} = 0.1$ ,  $D_{\xi_3} = 0.3$ : *a* –  $x_2(t)$  is not filtered; *b* – a rejection filter was applied to the  $x_2(t)$  before the phase extraction



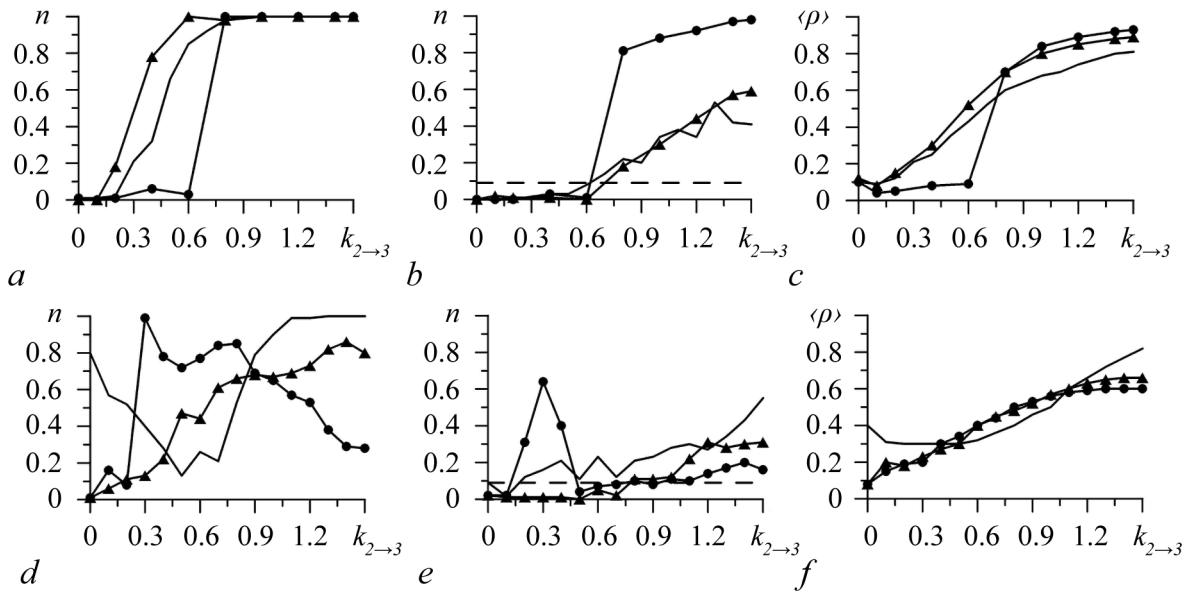


Рис. 6. Результаты выявления связи между  $x_2$  и  $x_3$  в системе (5) при  $\omega_1 = 2, \omega_2 = 1.5, \omega_3 = 1, D_{\xi_1} = D_{\xi_2} = D_{\xi_3} = 1$ : верхний ряд для  $K = 0.6$ , нижний ряд для  $K = 1$ ;  $a, b, d, e$  – зависимость частоты положительных выводов  $n(k_{2 \rightarrow 3})$  от коэффициента связи между осцилляторами  $x_2$  и  $x_3$  для  $\hat{\gamma}_{2 \rightarrow 3}$  ( $a, b$ ) и  $\hat{\gamma}_{3 \rightarrow 2}$  ( $d, e$ );  $c, f$  – усреднённое по ансамблю значение коэффициента фазовой когерентности  $\langle \rho \rangle$  для  $x_2(t)$  и  $x_3(t)$ . Жирная линия – результаты получены без предварительной фильтрации сигналов; линия с треугольниками – временные ряды предварительно фильтровались с помощью *режекторного* фильтра, при этом подавлялись частоты, соответствующие первому (воздействующему) осциллятору; линия с кружками – временные ряды предварительно фильтровались с помощью *полосового* фильтра, при этом выделялись частоты, соответствующие второму и третьему осцилляторам; горизонтальная штриховая линия – допустимый уровень частоты ошибок

Fig. 6. The results of identifying the relationship between  $x_2$  and  $x_3$  in (5) at  $\omega_1 = 2, \omega_2 = 1.5, \omega_3 = 1, D_{\xi_1} = D_{\xi_2} = D_{\xi_3} = 1$ : the top row corresponds to  $K = 0.6$ , bottom row for  $K = 1$ ;  $a, b, d, e$  – the dependence of the frequency of positive conclusions  $n(k_{2 \rightarrow 3})$  on the coefficient of coupling between oscillators  $x_2$  and  $x_3$  for  $\hat{\gamma}_{2 \rightarrow 3}$  ( $a, b$ ) and  $\hat{\gamma}_{3 \rightarrow 2}$  ( $d, e$ );  $c, f$  – the ensemble-averaged value of the mean phase coherence  $\langle \rho \rangle$  for  $x_2(t)$  and  $x_3(t)$ . Bold line – results obtained without pre-filtering signals; line with triangles – time series were pre-filtered using a *rejection* filter, the frequencies corresponding to the first (acting) oscillator were suppressed; line with circles – time series were pre-filtered using a *bandpass* filter, the frequencies corresponding to the second and third oscillators were distinguished; dashed horizontal line – acceptable level of frequency error

а при  $k_{2 \rightarrow 3} > 0$  вплоть до 0.8 чувствительность метода к связи принимает малые значения. Таким образом, наличие общего источника воздействия может снизить эффективность метода при выявлении существующей связи.

Применение режекторного фильтра в этом случае оказывается более эффективным по сравнению с полосовым фильтром, так как при  $k_{2 \rightarrow 3} > 0.9$  чувствительность модифицированного метода с применением полосового фильтра снижается сильнее, чем при использовании режекторного фильтра. При этом оба фильтра снижают долю ошибок при  $k_{2 \rightarrow 3} = 0$ .

### Заключение

Метод выявления связи, основанный на моделировании фазовой динамики может давать ложные выводы о наличии/отсутствии связи в случаях, когда имеется несколько пиков в спектре мощности сигналов и ширина этих пиков значительна (порядка 10% и более от частоты максимума). Для решения этой проблемы можно предложить (как наиболее эффективные из проверенных нами) два подхода к фильтрации сигналов в окрестности одного из наблюдаемых пиков: 1) удаление режекторным фильтром полосы частот общего источника воздействия, пик которого

наблюдается в спектрах обоих исследуемых сигналов; 2) выделение полосовым фильтром области частот, содержащей собственные пики обоих исследуемых осцилляторов. При выявлении реально существующей связи более эффективным оказывается подход с применением режекторного фильтра.

Диагностическим критерием возможных проблемных ситуаций может служить оценка автокорреляционной функции остаточных ошибок построенной модели фазовой динамики: автокорреляционная функция остатков модели медленно спадает до нулевого значения в случае наличия общего (не учтенного при построении модели) источника воздействия на наблюдаемые осцилляторы.

Эффективность предложенных подходов и диагностического критерия продемонстрирована численными экспериментами на системе связанных осцилляторов ван дер Поля.

### Библиографический список

1. *Hung Y.C., Hu C.K.* Chaotic communication via temporal transfer entropy // *Physical Review Letters*. 2008. Vol. 101. P. 244102.
2. *Smirnov D.A., Barnikol U.B., Barnikol T.T., Bezruchko B.P., Hauptmann C., Buhrle C., Maarouf M., Sturm V., Freund H.-J., Tass P.A.* The generation of parkinsonian tremor as revealed by directional coupling analysis // *Europhysics Letters*. 2008. Vol. 83. P. 20003.
3. *Mosekilde E., Maistrenko Yu., Postnov D.* Chaotic Synchronization. Applications to Living Systems. Singapore: World Scientific, 2002.
4. *Tass P.A.* Phase Resetting in Medicine and Biology: Stochastic Modeling and Data Analysis. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 1999. 329 p.
5. *Pereda E., Quian Quiroga R., Bhattacharya J.* Nonlinear multivariate analysis of neurophysiological signals // *Progr. Neurobiol.* 2005. Vol. 77. P. 1–37.
6. *Tass P., Smirnov D., Karavaev A., Barnikol U., Barnikol T., Adamchic I., Hauptmann C., Pawelczyk N., Maarouf M., Sturm V., Freund H.-J., Bezruchko B.* The causal relationship between subcortical local field potential oscillations and parkinsonian resting tremor // *J. Neural Engineering*. 2010. Vol. 7. P. 016009.
7. *Karavaev A.S., Prokhorov M.D., Ponomarenko V.I., Kiselev A.R., Gridnev V.I., Ruban E.I., Bezruchko B.P.* Synchronization of low-frequency oscillations in the human cardiovascular system // *Chaos*. 2009. Vol. 19. P. 033112.
8. *Kazantsev V.B., Nekorkin V.I., Makarenko V.I., Llinas R.R.* Olivo-cerebellar clusterbased universal control system // *Proc. Natl. Acad. Sci. USA*. 2003. Vol. 100, № 22. Pp. 13064.
9. *Lacaux J.-P., Rodriguez E., Le Van Quyen M., Lutz A.* Studying single-trials of phase synchronous activity in the brain // *Int. J. Bif. Chaos*. 2000. Vol. 10. Pp. 2429–2455.
10. *Мохов И.И., Смирнов Д.А.* Диагностика причинно-следственной связи солнечной активности и глобальной приповерхностной температуры Земли // *Известия РАН. Физика атмосферы и океана*. 2008. Т. 44. С. 283–293.
11. *Barnston A.G., Livezey R.E.* Classification, seasonality and persistence of low frequency atmospheric circulation patterns // *Mon. Wea. Rev.* 1987. Vol. 115. P. 1083.
12. *Mokhov I.I., Smirnov D.A.* El Nino Southern Oscillation drives North Atlantic Oscillation as revealed with nonlinear techniques from climatic indices // *Geophys. Res. Lett.* 2006. Vol. 33. L03708.
13. *Мохов И.И.* Диагностика структуры климатической системы. Спб.: Гидрометеиздат, 1993. 271 с.
14. *Rosenblum M.G., Pikovsky A.S.* Detecting direction of coupling in interacting oscillators // *Phys. Rev. E*. 2001. Vol. 64. P. 045202(R).

15. Smirnov D.A., Bezruchko B.P. Detection of coupling in ensembles of stochastic oscillators // *Physical Review E*. 2009. Vol. 79. P. 046204.
16. Smirnov D.A., Bezruchko B.P. Estimation of interaction strength and direction from short and noisy time series // *Phys. Rev. E*. 2003. Vol. 68. P. 046209.
17. Вайнштейн Л.А., Вакман Д.Е. Разделение частот в теории колебаний и волн. М.: Наука, 1983. 288 с.
18. Torrence C., Compo G.P. A practical guide to wavelet analysis // *Bull. Am. Meteorol. Soc.* 1998. Vol. 79. Pp. 61–78.
19. Короновский А.А., Храмов А.Е. Непрерывный вейвлетный анализ и его приложения. Москва: Физматлит, 2003. 176 с.
20. Rosenblum M.G., Pikovsky A., Kurths J., Schafer C. Phase synchronization: From theory to data analysis // *Neuro-informatics. Handbook of Biological Physics*. 2000. Vol. 4. P. 279.

## References

1. Hung Y.C., Hu C.K. Chaotic communication via temporal transfer entropy. *Physical Review Letters*, 2008, vol. 101, p. 244102.
2. Smirnov D.A., Barnikol U.B., Barnikol T.T., Bezruchko B.P., Hauptmann C., Buhrlé C., Maarouf M., Sturm V., Freund H.-J., Tass P.A. The generation of parkinsonian tremor as revealed by directional coupling analysis. *Europhysics Letters*, 2008, vol. 83, p. 20003.
3. Mosekilde E., Maistrenko Yu., Postnov D. Chaotic Synchronization. Applications to Living Systems. Singapore: World Scientific, 2002.
4. Tass P.A. Phase Resetting in Medicine and Biology: Stochastic Modeling and Data Analysis. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 1999. 329 p.
5. Pereda E., Quiroga R., Bhattacharya J. Nonlinear multivariate analysis of neurophysiological signals. *Progr. Neurobiol.*, 2005, vol. 77, pp. 1–37.
6. Tass P., Smirnov D., Karavaev A., Barnikol U., Barnikol T., Adamchik I., Hauptmann C., Pawelczyk N., Maarouf M., Sturm V., Freund H.-J., Bezruchko B. The causal relationship between subcortical local field potential oscillations and parkinsonian resting tremor. *J. Neural Engineering*, 2010, vol. 7, p. 016009.
7. Karavaev A.S., Prokhorov M.D., Ponomarenko V.I., Kiselev A.R., Gridnev V.I., Ruban E.I., Bezruchko B.P. Synchronization of low-frequency oscillations in the human cardiovascular system. *Chaos*, 2009, vol. 19, p. 033112.
8. Kazantsev V.B., Nekorkin V.I., Makarenko V.I., Llinas R.R. Olivo-cerebellar clusterbased universal control system. *Proc. Natl. Acad. Sci. USA*, 2003, vol. 100, iss. 22, p. 13064.
9. Lacaux J.-P., Rodriguez E., Le Van Quyen M., Lutz A. Studying single-trials of phase synchronous activity in the brain. *Int. J. Bif. Chaos*, 2000, vol. 10, pp. 2429–2455.
10. Mokhov I.I., Smirnov D.A. *News of RAS. Atmospheric and ocean physics*, 2008, no. 44, pp. 283–293.
11. Barnston A.G., Livezey R.E. Classification, seasonality and persistence of low frequency atmospheric circulation patterns. *Mon. Wea. Rev.*, 1987, vol. 115, p. 1083.
12. Mokhov I.I., Smirnov D.A. El Nino Southern Oscillation drives North Atlantic Oscillation as revealed with nonlinear techniques from climatic indices. *Geophys. Res. Lett.*, 2006, vol. 33, L03708.
13. Mokhov I.I. SpB: Hydrometeoizdat, 1993. 271 p. (in Russian).
14. Rosenblum M.G., Pikovsky A.S. Detecting direction of coupling in interacting oscillators. *Phys. Rev. E.*, 2001, vol. 64, p. 045202(R).

15. Smirnov D.A., Bezruchko B.P. Detection of coupling in ensembles of stochastic oscillators. *Physical Review E.*, 2009, vol. 79, p. 046204.
16. Smirnov D.A., Bezruchko B.P. Estimation of interaction strength and direction from short and noisy time series. *Phys. Rev. E.*, 2003, vol. 68, p. 046209.
17. Weinstein L.A., Vakman D.E. *Razdelenie chastot v teorii kolebanij i voln.* M.: Nauka, 1983, 288 p. (in Russian).
18. Torrence C., Compo G.P. A practical guide to wavelet analysis. *Bull. Am. Meteorol. Soc.*, 1998, vol. 79, pp. 61–78.
19. Koronovskij A.A., Hramov A.E. *Nepreryvnyj Vevvletnyj Analiz i Ego Prilozheniya.* M.: Fizmatlit, 2003, 176 p. (in Russian).
20. Rosenblum M.G., Pikovsky A., Kurths J. Phase synchronization: From theory to data analysis. *Neuro-informatics. Handbook of Biological Physics*, 2000, vol. 4, p. 279.



*Навроцкая Елена Владимировна* родилась (1987) в Алма-Ата, республика Казахстан. Окончила Саратовский государственный университет имени Н.Г. Чернышевского (2011) по направлению «Биомедицинская инженерия». Защитила диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.04.03 «Радиофизика» (2016, СГУ). Работает в Саратовском университете с 2008 года, в настоящее время – в должности доцента кафедры динамического моделирования и биомедицинской инженерии. Автор более 15 статей в рецензируемых журналах.

Россия, 410019 Саратов, ул. Зелёная, 38  
 Саратовский филиал Института радиотехники и электроники РАН  
 E-mail: sidakev@gmail.com



*Смирнов Дмитрий Алексеевич* родился (1977) в Саратовской области. Окончил Саратовский университет (1999). Защитил кандидатскую (2001, СГУ) и докторскую (2010, СГУ) диссертации по специальности «Радиофизика» на темы, связанные с анализом временных рядов, реконструкцией уравнений динамики и оценкой направленных связей по временным рядам. С 2002 года работает в СФИРЭ им. В.А. Котельникова РАН, в настоящее время – ведущий научный сотрудник. Автор и соавтор двух монографий и 74 статей в рецензируемых научных журналах, профессор РАН, имеет звание «Выдающийся рецензент Американского физического общества» (APS Outstanding referee).

Россия, 410019 Саратов, ул. Зелёная, 38  
 Саратовский филиал Института радиотехники и электроники РАН  
 E-mail: smirnovda@yandex.ru



*Безручко Борис Петрович* родился (1946) в посёлке Шиханы Саратовской обл. Окончил Саратовский государственный университет (1969) по направлению «Радиофизика и электроника». Работает в СГУ на должности профессора кафедры динамического моделирования и биомедицинской инженерии и в Саратовском филиале Института радиотехники и электроники РАН ведущим научным сотрудником лаборатории моделирования в нелинейной динамике. Доктор физико-математических наук по специальности 01.04.03 «Радиофизика», профессор. Автор более 100 статей в рецензируемых журналах.

Россия, 410019 Саратов, ул. Зелёная, 38  
 Саратовский филиал Института радиотехники и электроники РАН  
 E-mail: bezruchkobp@gmail.com



## К вопросу учета силы сопротивления в шарнирной точке крепления физического маятника и ее влияние на динамику движения

*С. О. Гладков, С. Б. Богданова*

Московский авиационный институт (Национальный исследовательский университет)

Россия, 125993 Москва, Волоколамское шоссе, 4

E-mail: [sglad51@mail.ru](mailto:sglad51@mail.ru), [sonjaf@list.ru](mailto:sonjaf@list.ru)

Автор для переписки Богданова Софья Борисовна, [sonjaf@list.ru](mailto:sonjaf@list.ru)

Поступила в редакцию 14.03.2018, принята к публикации 19.09.2018

**Тема.** Работа посвящена анализу динамики сложной системы: шарнирный механизм плюс физический маятник, в которой найдено дифференциальное уравнение, описывающее ее нелинейное поведение. **Цель.** Анализ нелинейных колебаний сложной динамической системы, представляющей из себя шарнир, стержень и шар, скрепленный единым образом. Предполагается получить дифференциальное уравнение движения маятника с учетом трения в шарнире и при учете сопротивления континуума. **Метод.** Метод решения задачи основан на законе сохранения энергии с учетом диссипации энергии как в шарнире, так и при движении скрепленных стержня и шара в вязкой среде. Предполагается использование определения диссипативных функций в вязкой среде, которые учитывают неоднородное распределение скорости вблизи поверхности стержня и шара. **Результаты.** Строго аналитически показано, что на динамику рассматриваемой системы (шарнир плюс стержень плюс шар) очень существенно влияют потери энергии в шарнире, приводящие к сильному уменьшению времени затухания при колебательном движении, которое носит существенно нелинейный характер, подробно описанный в статье. Численное решение найденного нелинейного динамического уравнения, проиллюстрированное на рисунках, указывает на сильно неоднородные осцилляции обобщенной координаты, в качестве которой был выбран угол отклонения маятника от вертикальной оси. **Обсуждение.** Благодаря предложенному в работе методу вывода дифференциальных уравнений движения сложных динамических систем, который заключается в суммировании выражений для диссипативной функции и производной по времени от полной энергии системы, получено исследуемое в статье уравнение. Подобный подход позволяет выводить любые дифференциальные уравнения (системы уравнений) с учетом диссипации. На примере исследуемой нами динамической системы продемонстрировано, как «работает» этот метод. Подобный алгоритм упрощает анализ вывода уравнений и сводит к минимуму возможность аналитических ошибок.

*Ключевые слова:* сухое трение, вязкое трение, диссипативная функция, закон сохранения энергии.

*Образец цитирования:* Гладков С.О., Богданова С.Б. К вопросу учета силы сопротивления в шарнирной точке крепления физического маятника и ее влияние на динамику движения // Изв. вузов. ПНД. 2019. Т. 27, № 1. С. 53–62. <https://doi.org/10.18500/0869-6632-2019-27-1-53-62>

## On the question accounting of the resistance force at the hinge point of setting physical pendulum and its influence on the dynamics of movement

*S. O. Gladkov, S. B. Bogdanova*

Moscow Aviation Institute (National Research University)

4, Volokolamskoe shosse, 125993 Moscow, Russia

E-mail: [sgrad51@mail.ru](mailto:sgrad51@mail.ru), [sonjaf@list.ru](mailto:sonjaf@list.ru)

Correspondence should be addressed to Bogdanova Sofiya B., [sonjaf@list.ru](mailto:sonjaf@list.ru)

*Received 14.03.2018, accepted for publication 19.09.2018*

**Topic.** The paper is devoted to the analysis of the dynamics of a complex system, i.e. a hinge mechanism plus a compound pendulum, in which where a differential equation is found, describing its nonlinear behavior. **Aim.** The paper is in the analysis of nonlinear oscillations of a complex dynamical system, which is a hinge, a rod and a ball, setting together in the one way. It is assumed to obtain differential equation of motion of the pendulum with regard to the gimbal friction and the resistance of the continuum. **Method.** Problem-solving procedure is based on the law of conservation of energy, accounting energy dissipation both in the hinge and in when the setting rod and ball move in a viscous medium. In this case, it is assumed to use the definition of dissipative functions in a viscous medium, which making allowance for inhomogeneous distribution of the velocity near the surface of the rod and ball. **Results.** In this paper, it is strictly analytically shown that energy losses in the hinge have impacts on the dynamics of the studied system (i.e. a hinge plus a rod plus a ball). These energy losses lead to a strong reduce amount of damping time at fluctuating motion, which has a highly nonlinear character that is described in the paper in details. The numerical solution of the nonlinear dynamic equation found, illustrated in the figures, points to strongly inhomogeneous oscillations of generalized coordinate, for which the angle of deviation of a pendulum from y-axis has chosen. **Discussion.** Thanks to the proposed method of differential equations of the movement of complex dynamical systems in the paper, which is the summation the expressions for the dissipative function and for derivative with time of a total energy of system, it is obtained the studied equation. Such an approach allows us to derive any differential equations (systems of equations) with regard to damping. Using the example of our studied dynamical system, it is shown how this method «works». Such an algorithm simplifies the analysis of the derivation of equations and keeps to a minimum making analytical errors.

*Key words:* dry friction, viscous frequency, dissipation function, the law of conservation of energy.

*Reference:* Gladkov S.O., Bogdanova S.B. On the question accounting of the resistance force at the hinge point of setting physical pendulum and its influence on the dynamics of movement. *Izvestiya VUZ, Applied Nonlinear Dynamics*, 2019, vol. 27, no. 1, pp. 53–62. <https://doi.org/10.18500/0869-6632-2019-27-1-53-62>

1. В настоящей статье рассмотрена задача, относящаяся к общим вопросам динамики криволинейного движения, и характерным для нее является общий подход к решению подобного рода физических задач, намеченный нами ранее в работах [1–3]. По своей постановке суть задачи довольно проста, но она имеет прямое отношение к решению проблемы синхронизации физических маятников, которая до сих пор не нашла своего отражения ни в одной из известных нам публикациях, несмотря на их большое количество по этой тематике (см., к примеру, работы [4–12]). Однако было бы необъективным, с нашей стороны, не отметить, что некоторые предпосылки к решению этой проблемы были намечены и подробно изложены в работе [13].

В данном случае речь будет идти о физическом маятнике, шарнирно прикрепленном к балке, и находящемся на некотором небольшом расстоянии от стены. Последнее обстоятельство может играть довольно важную роль в плане учета влияния на движение системы диссипативных сил, возникающих из-за непосредственной близости маятника к стене. Физически похожая задача была решена в работе [14], в которой вычислялось время вовлечения в движение неподвижного коаксиального цилиндра вращающимся внутренним цилиндром, пространство между которыми заполнено вязким континуумом (рис. 1).

2. Суть задачи заключается в следующем. Предположим, что у нас имеется некоторый однородный жесткий стержень длиной  $l$  и массой  $m$ , на конце которого закреплен однородный шар радиуса  $R$  с массой  $M$ . Стержень шарнирно закреплен в точке подвеса с радиусом шарнира  $r_2$ . Расстояние от стены до центра шара равно  $a$ . Шар отклоняется от положения равновесия на некоторый угол  $\varphi_0$ , возможные значения которого диктуются лишь технической конструкцией шарнирного крепления, а затем отпускается с нулевой начальной скоростью в направлении, параллельном стене. Поскольку начальный вектор скорости движения считается параллельным плоскости стены, то колебания системы все время будут происходить в плоскости параллельной стене, что в рамках решаемой задачи физически связано с отсутствием сил, действующих в направлениях перпендикулярных стене. Именно поэтому рассматриваемая нами динамика движения будет носить не вращательно-поступательный трехмерный характер, а одномерный с одной колебательной степенью свободы, роль формальной характеристики которой будет играть угол отклонения  $\varphi$  от вертикальной оси, как для обычного маятника.

Движение происходит в диссипативной среде, и задача заключается в описании динамики шара при учете всех озвученных воздействий, которые оказывают существенное влияние на характер колебаний при соответствующих начальных условиях.

3. Для решения этой несложной в общем-то задачи удобно перейти к описанию динамики движения в системе центра масс. Если вести отсчет от центра шарнирного крепления, то совершенно очевидно, что центр масс будет находиться на расстоянии

$$l_c = \frac{m(l + r_0) + 2M(l + r_0 + R)}{2(m + M)} \quad (1)$$

от центра шарнира. Обозначив суммарную массу через  $M_0 = m + M$ , можно записать такое выражение для функции Лагранжа

$$L = T - U = \frac{M_0 l_c^2 \dot{\varphi}^2}{2} - M_0 g (h - l_c \cos \varphi), \quad (2)$$

а потому первый интеграл уравнения Эйлера–Лагранжа, по определению, есть полная энергия системы (см., к примеру, [15]), то есть  $E = T + U$  или, согласно (2),

$$E = \frac{M_0 l_c^2 \dot{\varphi}^2}{2} + M_0 g (h - l_c \cos \varphi). \quad (3)$$

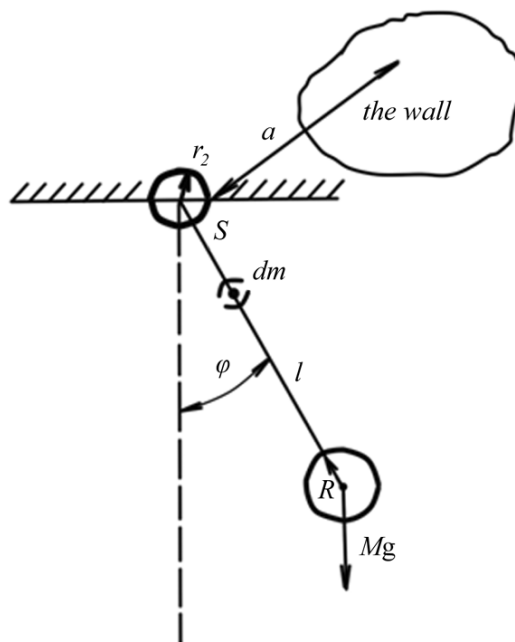


Рис. 1. Схематическое изображение геометрии задачи. Здесь  $dm$  – элемент массы стержня

Fig. 1. Diagrammatic representation of the geometry of the problem. Here  $dm$  is a mass element of the rod

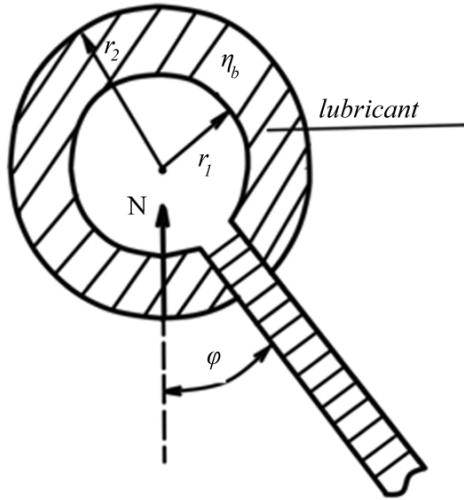


Рис. 2. Схематическая иллюстрация сечения разреза шарового крепления

Fig. 2. Diagrammatical illustration of the section of the ball setting

Силу реакции на шарнире определим в виде вектора (ср. с [1])

$$\mathbf{N} = M_0 (\mathbf{n} l_c \dot{\varphi}^2 + \mathbf{g} \cos \varphi). \quad (4)$$

где  $\mathbf{n}$  – единичный вектор нормали, проведенный к внешней поверхности шарнира;  $\mathbf{g}$  – ускорение силы тяжести.

4. В отличие от всех остальных задач, связанных с изучением движения тел по плоским неидеальным поверхностям, учет сил сопротивления на шарнире должен быть осуществлен с учетом распределения нормальных сил по поверхности шарнира в соответствии с формулой (4). Действительно, в этом случае нам необходимо представить силу сопротивления при вращении шарнира в аддитивном виде, как

$$\mathbf{F}_{fr} = \mathbf{F}_{1fr} + \mathbf{F}_{2fr}, \quad (5)$$

где  $\mathbf{F}_{1fr} = \hat{\mu} \mathbf{N}$  – сила сухого трения,  $\hat{\mu}$  – тензорный коэффициент трения. Латинская аббревиатура  $fr$  в виде нижнего индекса означает сокращение от английского слова *friction*. В компонентах эту формулу следует записать как  $F_{i1fr} = \mu_{ik} N_k$ , где  $i$ -я компонента вектора  $\mathbf{F}_{1fr}$  направлена против скорости движения. Схематический разрез шарнира показан на рис. 2, на котором указана и сила реакции  $\mathbf{N}$ .

Нельзя в этой в этой связи не отметить и известную в нашей стране монографию [16], в которой приводится довольно большое количество примеров расчета динамических систем в условиях действия сил как сухого трения, так и вязкого. При этом отмечается, что в условиях колебательного движения сила сухого трения должна менять знак после остановки. Поэтому силу сухого трения записывают обычно в виде  $F_{fr} = \mu N \operatorname{sgn} \dot{\varphi}$ , где знаковая функция учитывает изменение направления силы на противоположное после остановки движения. Хотя такой подход и вполне логичен, однако с нашей стороны, он вызывает следующее возражение. При записи любого уравнения колебательной динамики в момент остановки направление движения тела автоматически меняется на обратное, что говорит и об автоматической инверсии угловой переменной  $\varphi$ . Формально это означает замену  $\varphi \rightarrow -\varphi$ . Отмеченный факт приводит в уравнениях движения к тому же самому эффекту, касающемуся силы трения, что и в условиях положительного направления движения. Именно поэтому, когда записывается уравнение движения, под угловой переменной (в нашем случае) понимается ее модуль, который везде далее мы будем опускать.

5. Вторая составляющая силы трения в (5) определяется чисто гидродинамическим сопротивлением, обусловленным смазкой, обладающей некоторой вязкостью  $\eta_b$ . Для ее оценки следует записать диссипативную функцию в соответствии с [17], как

$$\dot{Q}_1 = \frac{\eta_b}{2} \int_V \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right)^2 dV, \quad (6)$$



где  $\mathbf{v}$  характеризует распределение скоростей между коаксиальными сферами. Малость расстояния между ними позволяет воспользоваться лишь одной составляющей скорости, направленной по касательной к поверхностям сфер и записать ее в виде  $v_\varphi = (r - r_1) \dot{\varphi}$ , где  $r \in [r_1, r_2]$ , а  $r_{1,2}$  – соответственно радиусы внутренней и внешней сфер. В результате из общего выражения (6) получаем

$$\dot{Q}_1 = \frac{\eta_b}{2} \dot{\varphi}^2 \int_V dV = \frac{2\pi}{3} \eta_b \dot{\varphi}^2 (r_2^3 - r_1^3). \quad (7)$$

В соответствии с определением (4) следует найти диссипативную функцию, происхождение которой обязано лишь силам сухого трения. Введем определение момента сил трения, обусловленного контактом внешней сферы с неподвижной внутренней сферой. Имеем для него

$$\mathbf{M}_{fr} = \sum [\mathbf{r}, \mathbf{F}_{fr}] = r_2 [\mathbf{n}, \mathbf{F}_{fr}]. \quad (8)$$

Согласно (8) можно теперь ввести и определение диссипативной функции для сухого трения. Дифференцируя (8) по времени, находим

$$\dot{Q}_2 = \left| \dot{\mathbf{M}}_{fr} \right| = r_2 \left| [\dot{\mathbf{n}}, \mathbf{F}_{fr}] + [\mathbf{n}, \dot{\mathbf{F}}_{fr}] \right|.$$

Здесь  $\dot{\mathbf{n}} = -v(\vec{\tau}/r_2)$ , где  $\vec{\tau}$  – единичный вектор касательной, а  $\mathbf{F}_{fr} = \hat{\mu} \mathbf{N}$ . Используя формулу (4) и учитывая, что в данном случае

$$\mathbf{N} = M_0 (l_c \dot{\varphi}^2 + g \cos \varphi) \mathbf{n},$$

получаем

$$\begin{aligned} \dot{Q}_2 &= \left| \dot{\mathbf{M}}_{fr} \right| = \\ &= r_2 M_0 \left| \frac{v}{r_2} (l_c \dot{\varphi}^2 + g \cos \varphi) [\vec{\tau}, \hat{\mu} \mathbf{n}] + \left( \frac{v}{r_2} (l_c \dot{\varphi}^2 + g \cos \varphi) [\mathbf{n}, \hat{\mu} \vec{\tau}] - \left( 2 \frac{v\dot{v}}{r_2} + g\dot{\varphi} \sin \varphi \right) [\mathbf{n}, \hat{\mu} \mathbf{n}] \right) \right|. \end{aligned}$$

В подвижном базисе  $\vec{\tau}$ ,  $\mathbf{n}$  первое и второе слагаемое исчезают, поскольку  $\hat{\mu} \mathbf{n} \sim \vec{\tau}$ ,  $\hat{\mu} \vec{\tau} \sim \mathbf{n}$  и, следовательно,  $[\vec{\tau}, \hat{\mu} \mathbf{n}] = [\mathbf{n}, \hat{\mu} \vec{\tau}] = 0$ . Отсюда получаем

$$\dot{Q}_2 = r_2 M_0 \left( 2 \frac{v\dot{v}}{r_2} + g\dot{\varphi} \sin \varphi \right) |[\mathbf{n}, \hat{\mu} \mathbf{n}]| = \mu r_2 M_0 \left( 2 \frac{v\dot{v}}{r_2} + g\dot{\varphi} \sin \varphi \right), \quad (9)$$

где  $\mu$  – коэффициент трения между шарнирами, вводимый как  $\mu = \mu_{12} = \mu_{21} = \mu_{\tau n} = \mu_{n\tau}$ . В силу того, что скорость на поверхности шарнира есть  $v = r_2 \dot{\varphi}$ , находим интересующую нас часть диссипативной функции, происхождение которой обязано лишь сухому трению,

$$\dot{Q}_2 = \mu \dot{\varphi} r_2 M_0 (2r_2 \ddot{\varphi} + g \sin \varphi). \quad (10)$$

Сопротивление, испытываемое шаром в континууме, описывается законом Стокса [14]

$$F_S = 6\pi\eta Rv = 6\pi\eta R (r_0 + l + R) \dot{\varphi}, \quad (11)$$

где  $R$  – радиус шара,  $\eta$  – динамическая вязкость среды, поэтому диссипативная функция для шара принимает вид

$$\dot{Q}_3 = 6\pi\eta R (r_0 + l + R)^2 \dot{\varphi}^2. \quad (12)$$

Стержень как цилиндрическое тело также испытывает сопротивление, которое на единицу его длины можно описать формулой, приведенной, например, в [17], а именно:

$$f_R = \pi\eta v, \quad (13)$$

где скорость  $v$  стержня определяется в каждой текущей точке, как

$$v = s\dot{\varphi}, \quad (14)$$

здесь расстояние  $s$  отсчитывается от центра шарнира. Таким образом, диссипативная функция, характеризующая сопротивление стержня в континууме, должна определяться выражением

$$\dot{Q}_4 = \int_{r_2}^l f_R v ds = \pi\eta\dot{\varphi}^2 \int_{r_2}^l s^2 ds = \frac{1}{3}\pi\eta\dot{\varphi}^2 (l^3 - r_2^3). \quad (15)$$

6. С учетом приведенных выше выражений (7), (10), (12) и (15) уравнение движения можно представить в виде следующей суммы:

$$\dot{E} + \dot{Q}_1 + \dot{Q}_2 + \dot{Q}_3 + \dot{Q}_4 = 0. \quad (16)$$

Дифференцируя (3) по времени, находим

$$\dot{E} = M_0 l_c^2 \dot{\varphi} \ddot{\varphi} + M_0 g l_c \sin \varphi \dot{\varphi}.$$

В соответствии с явными выражениями для всех  $\dot{Q}_{1,2,3,4}$  из (7), (10), (12) и (15) после вынесения  $\dot{\varphi}$  за скобку и в соответствии с условием  $\dot{\varphi} \neq 0$  из соотношения (16) получаем искомое уравнение

$$M_0 l_c^2 \ddot{\varphi} + M_0 g l_c \sin \varphi + 6\pi\eta R (r_2 + l + R)^2 \dot{\varphi} + \frac{1}{3}\pi\eta\dot{\varphi} (l^3 - r_2^3) + \frac{2\pi}{3}\eta_b \dot{\varphi} (r_2^3 - r_1^3) + \mu r_2 M_0 (2r_2 \ddot{\varphi} + g \sin \varphi) = 0. \quad (17)$$

Разделив его на  $M_0 l_c^2$ , окончательно найдем

$$\ddot{\varphi} + \frac{\dot{\varphi}}{a\tau} + \omega_0^2 b \sin \varphi = 0. \quad (18)$$

где  $\omega_0 = \sqrt{g/l_c}$  – частота,  $b = (1 + \gamma)/\sqrt{1 + 2\gamma^2}$  – параметр,  $\gamma = \mu r_2/l_c$  и  $a = 1 + 2\gamma^2$  – коэффициенты. Полученное уравнение (18) говорит нам о том, что частота колебаний с учетом сухого трения в шарнире перенормируется и становится равной

$$\Omega = \sqrt{\frac{g}{l_c} \frac{1 + \gamma}{\sqrt{1 + 2\gamma^2}}}. \quad (19)$$

Затухание, фигурирующее во втором слагаемом уравнения (18) и обязанное линейному сопротивлению, определяется как

$$\frac{1}{\tau} = \frac{6\pi\eta R (r_2 + l + R)^2}{M_0 l_c^2} \left( 1 + \frac{l^3 - r_2^3}{6R (r_2 + l + R)^2} \right) + \frac{2\pi}{3} \frac{\eta_b}{M_0 l_c^2} (r_2^3 - r_1^3). \quad (20)$$

Как видно из (18), в стационарном случае получается обычное условие равновесия в виде  $\sin \varphi = 0$ , то есть это решение означает просто, что  $\varphi = 0$ .

Для численного решения уравнения (18) его удобно переписать в безразмерном виде

$$\varphi'' + \lambda \varphi' + b \sin \varphi = 0, \quad (21)$$

где параметр  $\lambda = 1/a\omega_0\tau$ , а дифференцирование здесь ведется по безразмерному аргументу  $x = \omega_0 t$ . На рис. 3–5 проиллюстрирована зависимость функции  $\varphi(x)$  для разных значений параметров  $\lambda$  и  $b$ .

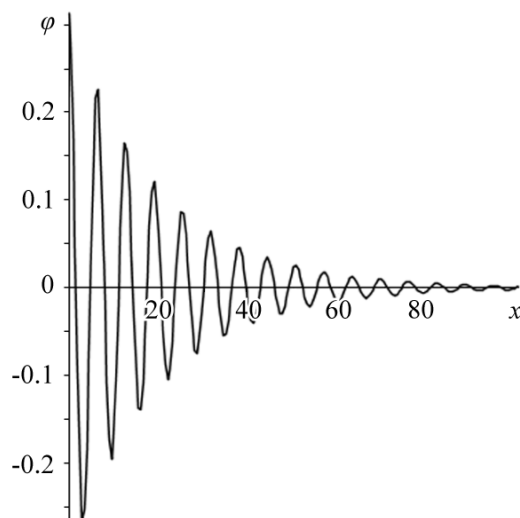


Рис. 3. Графическая иллюстрация зависимости  $\varphi(x)$ , полученная при значениях параметров  $\lambda = 0.1$  и  $b = 1$   
 Fig. 3. Graphic illustration of the dependence  $\varphi(x)$ , obtained at the meanings of the parameters  $\lambda = 0.1$  and  $b = 1$

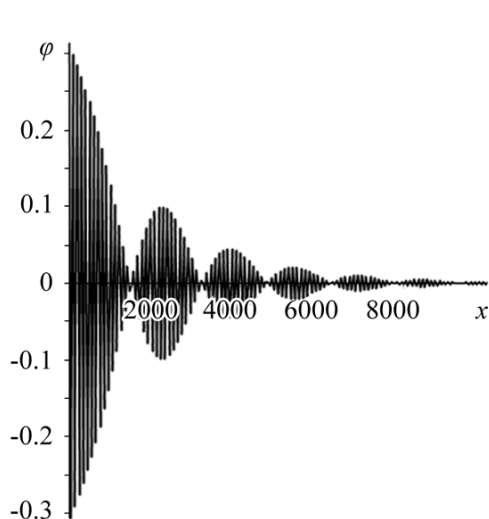


Рис. 4. Зависимость  $\varphi(x)$  при  $\lambda = 0.001$  и  $b = 0.1$   
 Fig. 4. The dependence of  $\varphi(x)$  at  $\lambda = 0.001$  and  $b = 0.1$

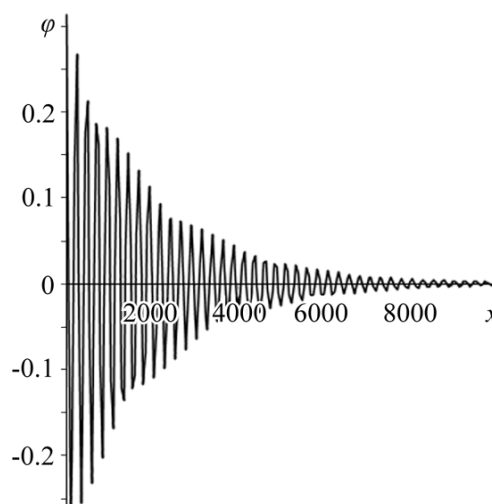


Рис. 5. Зависимость  $\varphi(x)$  при  $\lambda = 0.001$  и  $b = 0.01$   
 Fig. 5. The dependence of  $\varphi(x)$  at  $\lambda = 0.001$  and  $b = 0.01$

7. Кратко сформулируем полученные результаты.

- Из диссипативного закона сохранения полной мощности исследуемой замкнутой системы получено простое нелинейное дифференциальное уравнение, описывающее движение физического маятника с учетом сил вязкого и сухого сопротивления в точке шарнирного крепления.
- Найдена поправка к собственной частоте колебаний, обязанная учету силы сухого трения в шарнире, и строго аналитически показано, что в этом случае коэффициент затухания растет.
- С помощью метода численного интегрирования полученного уравнения дана графическая иллюстрация зависимости угловой координаты  $\varphi$  от времени для нескольких значений параметров  $\lambda$  и  $b$ .

### Библиографический список

1. *Гладков С.О., Богданова С.Б.* Геометрический фазовый переход в задаче о брахистохроне // Ученые записки физического факультета МГУ. 2016. № 1. 161101-1-5.
2. *Гладков С.О., Богданова С.Б.* Обобщенные динамические уравнения плоского криволинейного движения материального тела по жёлобу с учетом сил трения, и их анализ в некоторых частных случаях // Ученые записки физического факультета МГУ. 2017. № 1. 171101-1-5.
3. *Гладков С.О.* О траектории движения тела, входящего в жидкость под произвольным углом // Ученые записки физического факультета МГУ. 2016. № 4. 164002-1-5.
4. *Канунников А.Ю., Лампер Р.Е.* Синхронизация хода маятниковых часов, подвешенных на упругой балке // ПМТФ. 2003. Т. 44, вып. 5. С. 177–181.
5. *Oliveira H.M., Melo L.V.* Huygens synchronization of two clocks // Scientific Reports. July 2015. DOI: 10.1038/srep11548.
6. *Смирнов Л.А., Крюков А.К., Осипов Г.В.* Вращательная динамика в системе двух связанных маятников // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2015. Т. 23, № 5. С. 41–61.
7. *Андронов А.А., Витт А.А., Хайкин С.Э.* Теория колебаний. М.: Физматлит, 1959. 916 с.
8. *Блехман И.И.* Синхронизация в природе и технике. М.: Наука, 1981. 320 с.
9. *Fradkov A.L., Andrievsky B.* Synchronization and phase relations in the motion of two-pendulum system // International Journal of Non-Linear Mechanics. 2007. Vol. 42. Pp. 895–901. doi:10.1016/j.ijnonlinmec.2007.03.016.
10. *Kapitaniak M., Czolczynski K., Perlikowski P., Stefanski A., Kapitaniak T.* Synchronization of clocks // Physics Reports. 2012. Vol. 517. Pp. 1–69. doi:10.1016/j.physrep.2012.03.002.
11. *Il Gu Yi, Hyun Keun Lee, Sung Hyun Jun, Beom Jun Kim.* Antiphase synchronization of two nonidentical pendulums // International Journal of Bifurcation and chaos. 2010. Vol. 20, № 7. Pp. 2179–2184. Doi: 10.1142/s0218127410027003.
12. *Гузев М.А., Дмитриев А.А.* Стабильность связанных маятников // Дальневост. матем. журн. 2015. Vol. 15, № 2. С. 166–191.
13. *Гладков С.О., Богданова С.Б.* Хаотическая динамика взаимодействующих маятников: Решение проблемы синхронизации. Инженерная физика. 2019, № 1. С. 49–62.
14. *Гладков С.О.* К вопросу о вычислении времени остановки вращающегося в вязком континууме цилиндрического тела и времени увлечения соосного с ним внешнего цилиндра // ЖТФ. 2018. Т. 88, вып. 3. С. 337–341.

15. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Курс теоретической физики: т. 1. Механика. М.: Наука, 2004. 220 с.
16. Бидерман В.Л. Теория механических колебаний. М.: Высшая школа, 1980. 408 с.
17. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Курс теоретической физики: т. 6. Гидродинамика. М.: Наука, 1988. 720 с.

## References

1. Gladkov S.O., Bogdanova S.B. Geometric phase transition in the problem of brachistochrone. *Memoirs of the Faculty of Physics, Lomonosov Moscow State University*, 2016, № 1, 161101-1-5 (in Russian).
2. Gladkov S.O., Bogdanova S.B. Generalized dynamical equations of plane curvilinear motion of a material body on a trench with account of a friction forces (their numerical analysis in some special cases). *Memoirs of the Faculty of Physics, Lomonosov Moscow State University*, 2017, № 1, 171101-1-5 (in Russian).
3. Gladkov S.O. On trajectory of moving body coming into liquid at arbitrary angle. *Memoirs of the Faculty of Physics, Lomonosov Moscow State University*, 2016, № 4, 164002-1-5 (in Russian).
4. Kanunnikov A.Yu., Lamper R.E. Synchronization of the pendulum clock, suspended on an elastic beam. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, 2003, vol. 44, № 5, pp. 177–181 (in Russian).
5. Oliveira H.M., Melo L.V. Huygens synchronization of two clocks. *Scientific Reports*, 2015 (5), 11548; doi: 10.1038/srep11548.
6. Smirnov L.A., Kryukov A.K., Osipov G.V. Rotational dynamics in the system of two coupled pendulums. *Izvestija VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*, 2015, vol. 23, № 5, pp. 41–61 (in Russian).
7. Andronov A.A., Witt A.A., Khaikin S.E. Theory of Oscillations. Moscow, Fizmatlit, 1959 (in Russian).
8. Blechman I.I. Synchronization in Science and Technology. Moscow, Science, 1981 (in Russian).
9. Fradkov A.L., Andrievsky B. Synchronization and phase relations in the motion of two-pendulum system. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 2007, vol. 42, pp. 895–901; doi:10.1016/j.ijnonlinmec.2007.03.016.
10. Kapitaniak M., Czolczynski K., Perlikowski P., Stefanski A., Kapitaniak T. Synchronization of clocks. *Physics Reports*, 2012, vol. 517, pp. 1–69. doi:10.1016/j.physrep.2012.03.002.
11. Il Gu Yi, Hyun Keun Lee, Sung Hyun Jun, Beom Jun Kim. Antiphase synchronization of two nonidentical pendulums. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 2010, vol. 20, iss. 7, pp. 2179–2184; doi: 10.1142/s0218127410027003.
12. Guzev M.A., Dmitriev A.A. Stability of coupled oscillators. *Far Eastern Mathematical Journal*, 2015, vol. 15, iss. 2, pp. 166–191 (in Russian).
13. Gladkov S.O., Bogdanova S.B. Chaotic dynamics of interacting pendulums: Decision of synchronization problem. *Engineering Physics*, 2019, iss. 1. pp. 49–62 (in Russian).
14. Gladkov S.O. On calculating the stopping time of a cylindrical body rotating in a viscous continuum and the time of entrainment of a coaxial external cylinder. *Technical Physics. The Russian Journal of Applied Physics*, 2018, vol. 63, iss. 3, pp. 325–330; doi:10.1134/S1063784218030088.

15. Landau L.D., Lifshitz E.M. Course of Theoretical Physics: vol. 1. Mechanics (2 nd ed.). Butterworth-Heinemann, 1976.
16. Biederman W.L. The Theory of Mechanical Vibrations. Higher School, Moscow, 1980 (in Russian).
17. Landau L.D., Lifshitz E.M. Course of Theoretical Physics: vol. 6. Fluid Mechanics (2nd ed.). Butterworth-Heinemann, 1987.



*Гладков Сергей Октабринович* родился (1951) в Куйбышеве. Окончил Московский институт народного хозяйства им. Г.В. Плеханова (1973). Работал стажером-исследователем в Институте физических проблем АН СССР им. С.И. Вавилова (1974–1976), затем аспирант ИФП АН СССР им. С.И. Вавилова (1976–1981). Защитил диссертации на звания ученой степени кандидата физико-математических наук (1981, ИФП АН СССР) и доктора физико-математических наук (1995, МГУ) в области физики твердого тела. Автор более 200 научных статей в рецензируемых зарубежных и отечественных журналах, 4 монографий и сборника задач по теоретической физике. Член редколлегии журнала «Сложные системы», <http://slozhnye-sistemy.ru>

Россия, 125993 Москва, Волоколамское шоссе, 4  
 Московский авиационный институт (Национальный исследовательский университет)  
 E-mail: [sglad51@mail.ru](mailto:sglad51@mail.ru)



*Богданова Софья Борисовна* родилась (1969) в городе Павловский Посад Московской области. Окончила Орехово-Зуевский педагогический институт (1990). Училась в аспирантуре (1990–1993) кафедры высшей алгебры Московского государственного педагогического института им. В.И. Ленина. Защитила диссертацию на звание ученой степени кандидата физико-математических наук (2013, МГУ) в области физики магнитных явлений. Автор более 50 научных статей в рецензируемых зарубежных и отечественных журналах.

Россия, 125993 Москва, Волоколамское шоссе, 4  
 Московский авиационный институт (Национальный исследовательский университет)  
 E-mail: [sonjaf@list.ru](mailto:sonjaf@list.ru)



УДК 517.9

<https://doi.org/10.18500/0869-6632-2019-27-1-63-76>

## Асимптотическое исследование локальной динамики семейств уравнений Кана–Хилларда

*С. П. Плышевская*

Крымский федеральный университет им. В.И. Вернадского  
Россия, Республика Крым, 295007 Симферополь, проспект Академика Вернадского, 4  
E-mail: [splyshevskaya@mail.ru](mailto:splyshevskaya@mail.ru)

Поступила в редакцию 4.12.18, принята к публикации 20.12.2018

**Тема исследования.** Исследована динамика известного нелинейного уравнения Кана–Хилларда. Выделены критические случаи в задаче об устойчивости состояния равновесия и исследованы бифуркационные явления. **Цель.** Построение конечномерных и специальных бесконечномерных уравнений, которые играют роль нормальных форм. **Методы исследования.** Используются как стандартные методы изучения локальной динамики, основанные на построении нормальных форм на центральных многообразиях, так и специальные методы бесконечномерной нормализации. Предложен алгоритм сведения исходной краевой задачи к уравнениям для медленно меняющихся амплитуд. **Результаты.** Построены конечномерные и специальные бесконечномерные уравнения, которые играют роль нормальных форм. Их нелокальная динамика определяет поведение решений из малой окрестности исходной краевой задачи. Приведены асимптотические на промежутке  $[t_0, \infty)$  формулы для решений. **Обсуждение.** Исследование кинетики расслоения в бинарных смесях с заданной концентрацией компонентов является одной из актуальных задач физики конденсированного состояния. Уравнение Кана–Хилларда – это одна из моделей, которая используется при изучении спонтанного разделения фаз (бинарного) вещества (сплава), где неизвестная функция является относительной концентрацией компонента вещества.

*Ключевые слова:* динамика, устойчивость, нормальные формы, уравнение Кана–Хилларда.

*Образец цитирования:* Плышевская С.П. Асимптотическое исследование локальной динамики семейств уравнений Кана–Хилларда // Изв. вузов. ПНД. 2019. Т. 27, № 1. С. 63–76. <https://doi.org/10.18500/0869-6632-2019-27-1-63-76>

## Asymptotic research of local dynamics families of Cahn–Hilliard equations

*S. P. Plyshevskaya*

V.I. Vernadsky Crimean Federal University  
4, prospekt Vernadskogo, 295007 Simferopol, Republic of Crimea, Russia  
E-mail: [splyshevskaya@mail.ru](mailto:splyshevskaya@mail.ru)

Received 4.12.18, accepted for publication 20.12.2018

**Topic.** Dynamics of well-known Cahn–Hilliard nonlinear equation is researched. In a state of balance stability task, critical cases were highlighted and bifurcation phenomena were researched. **Aim.** To formulate finite-dimensional and special infinite-dimensional equations, which can be represented as normal forms. **Method.** You can use as standard local dynamics research methods, based on constructing of normal forms on central manifolds, and special infinite-dimensional normalization ones. There is an algorithm of reducing an assumed boundary value task to equations for slowly varying amplitudes. **Results.** There are formulated finite-dimensional and special infinite-dimensional equations, which can be represented as normal forms. Their non-local dynamics defines the behavior of solutions that come from an assumed boundary value task minor adjacency. Asymptotic in between formulas to solve are quoted as well. **Discussion.** An offered problem is divided into a continual family, which depends on a certain parameter of more specialized boundary value tasks. As a rule, considered critical cases possess 1 and 2 dimensions. You’ve got a situation that is inherent to advection index major values, when a critical case possesses an infinite advection: infinitely many roots of a characteristic equation of a linearized boundary value problem aim for an imaginary axis with this index increase.

*Key words:* dynamics, stability, normal forms, Cahn–Hilliard equation.

*Reference:* Plyshevskaya S.P. Asymptotic research of local dynamics families of Cahn–Hilliard equations. *Izvestiya VUZ, Applied Nonlinear Dynamics*, 2019, vol. 27, no. 1, pp. 63–76. <https://doi.org/10.18500/0869-6632-2019-27-1-63-76>

### Введение

Исследование кинетики расслоения в бинарных смесях с заданной концентрацией компонентов является одной из актуальных задач физики конденсированного состояния [1].

Уравнение Кана–Хилларда [2] – это одна из моделей, которая используется при изучении спонтанного разделения фаз (бинарного) вещества (сплава), где неизвестная функция является относительной концентрацией компонента вещества.

В первом разделе рассматривается уравнение, которое является модификацией (расширением) широко известной модели Кана–Хилларда

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[ a_1 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + a_2 u + a_3 u^2 + a_4 u^3 \right]. \quad (1)$$

Как правило, вместе с (1) рассматривают либо краевые условия типа Неймана

$$\frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=0}^{x=1} = \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \Big|_{x=0}^{x=1} = 0, \quad (2)$$

либо периодические краевые условия

$$u(t, x + 1) \equiv u(t, x). \quad (3)$$

Для коэффициентов  $a_j$  выполнены неравенства

$$a_1 < 0, \quad a_2 < 0, \quad a_4 > 0. \quad (4)$$



Такого вида краевые задачи изучались в [3].

Особо отметим то обстоятельство, что для произвольного значения вещественной постоянной  $c$  решение  $u_0(t, x) \equiv c$  является однородным состоянием равновесия рассматриваемых краевых задач.

Во втором разделе рассматривается более общее по сравнению с (1) уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[ a_1 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \lambda \frac{\partial u}{\partial x} + a_2 u + a_3 u^2 + a_4 u^3 \right],$$

которое отличается от (1) только наличием в правой части еще одного слагаемого  $\lambda \partial^3 u / \partial x^3$ .

### 1. Динамика краевых задач (1), (2) и (1), (3)

В настоящем разделе исследуется вопрос о поведении всех решений краевых задач (1), (2) и (1), (3) с начальными условиями из некоторой достаточно малой окрестности каждого состояния равновесия  $u_0(t, x) \equiv c$ .

Отметим, что количество параметров в (1) можно уменьшить, произведя нормировку «времени»  $t \rightarrow (-a_2)t$  и нормировку функции  $u \rightarrow (a_4 a_2^{-1})^{\frac{1}{2}} u$ . В результате приходим к уравнению

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[ -\alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - u + bu^2 + u^3 \right], \quad (5)$$

где  $\alpha = -a_1 a_2^{-2}$  ( $\alpha > 0$ ),  $b = a_3 a_2^{-\frac{3}{2}} a_4^{\frac{1}{2}}$ .

Для изучения решений из малой окрестности состояния равновесия  $u_0(t, x) \equiv c$  в (5) произведём замену

$$u = c + v. \quad (6)$$

В итоге получим уравнение

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[ -\alpha \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \beta v + \gamma v^2 + v^3 \right] \quad (7)$$

с краевыми условиями либо

$$\frac{\partial v}{\partial x} \Big|_{x=0, x=1} = \frac{\partial^3 v}{\partial x^3} \Big|_{x=0, x=1} = 0, \quad (8)$$

либо

$$v(t, x+1) \equiv v(t, x). \quad (9)$$

В (7) приняты обозначения

$$\beta = 1 - 2b - 3c^2, \quad \gamma = b + 3c.$$

Ниже обозначаем через  $M(\varphi)$  среднее на отрезке  $x \in [0, 1]$  значение функции  $\varphi(x)$

$$M(\varphi) = \int_0^1 \varphi(x) dx.$$

Через  $\overset{0}{W}$  обозначим множество всех функций  $\varphi(x)$  ( $x \in [0, 1]$ ), для которых  $\varphi(x) \in W_4^2([0, 1])$ , и для  $\varphi(x)$  выполнены краевые условия (8) или (9) и  $M(\varphi) = 0$ .

Важную роль играет следующее простое утверждение.

**Теорема 1.** Для каждого  $c \in (-\infty, \infty)$  множество всех таких решений  $u(t, x)$  краевой задачи (5), (2) и краевой задачи (5), (3), определённых при  $t > t_0$ , для которых выполнены условия  $u(t, x) = c + v(t, x)$ , и

$$M(v) = 0 \quad (10)$$

является инвариантным интегральным многообразием.

Это означает, что из условий  $v(t, x) \in \overset{0}{W}$  и  $M(v(t_0, x)) = 0$  следует равенство  $M(v(t, x)) \equiv 0$  для  $t > t_0$ .

Отсюда естественным образом возникает задача исследования локальной – в окрестности нулевого состояния равновесия – динамики краевых задач (7), (8) и (7), (9), зависящих от континуального параметра  $c \in (-\infty, \infty)$ .

Характеристическое уравнение для линеаризованных в нуле соответствующих краевых задач (7), (8), (10) и (7), (9), (10) имеет вид

$$\lambda = \pi^2 k^2 [-\alpha \pi^2 k^2 + 1 - 2bc - 3c^2], \quad (11)$$

где  $k = 1, 2, \dots$  в случае условий (8), (10) и  $k = \pm 2, \pm 4, \dots$  в случае условий (9), (10).

Базовыми являются следующие хорошо известные утверждения.

**Утверждение 1.** Пусть выполнено неравенство

$$\pi^2 \alpha > 1 - 2bc - 3c^2. \quad (12)$$

Тогда нулевое решение краевой задачи (7), (8), (10) асимптотически устойчиво. Если выполнено неравенство

$$4\pi^2 \alpha > 1 - 2bc - 3c^2, \quad (13)$$

то нулевое решение краевой задачи (7), (9), (10) тоже асимптотически устойчиво.

В этих случаях все решения из некоторой достаточно малой окрестности нулевого состояния равновесия рассматриваемых краевых задач соответственно стремятся к нулю при  $t \rightarrow \infty$ . Тем самым решения  $u(t, x)$  краевых задач (5), (2) и (5), (3) с близкими к постоянной  $c$  и удовлетворяющими условию  $M(u(t_0, x)) = c$ , стремятся к постоянной  $c$  при  $t \rightarrow \infty$ .

**Утверждение 2.** Пусть при  $\alpha > 0$  выполнено неравенство

$$\pi^2 \alpha < 1 - 2bc - 3c^2. \quad (14)$$

Тогда нулевое решение краевой задачи (7), (8), (10) неустойчиво. Если же выполнено неравенство

$$4\pi^2 \alpha < 1 - 2bc - 3c^2, \quad (15)$$

то нулевое решение краевой задачи (7), (9), (10) тоже неустойчиво.

При условии (14) или (15) в достаточно малой окрестности нуля не может быть аттрактора у рассматриваемых задач, соответственно. Тем самым задача о динамике этих краевых задач становится нелокальной. Поэтому динамика краевых задач (5), (2) и (5), (3) в окрестности состояния равновесия  $u_0(t, x) \equiv c$  тоже является нелокальной.

При условии, когда для некоторого  $c_0$  в (12), (14) вместо неравенства стоит строгое равенство

$$3c_0^2 + 2bc_0 - 1 + \pi^2 \alpha = 0, \quad (16)$$

в задаче об устойчивости краевой задачи (7), (8), (10) возникает критический случай. Этот критический случай имеет единичную размерность. Для краевой задачи (7), (9), (10) критический случай выделяется равенством

$$3c_0^2 + 2bc_0 - 1 + 4\pi^2\alpha = 0. \quad (17)$$

Размерность этого критического случая равна двум (с двумя группами решений).

Эти два случая соответственно рассматриваются в разделах 2 и 3. В разделе 4 изучается вопрос о существовании неоднородных состояний равновесия в краевых задачах (5), (2) и (5), (3).

**1.1. Критический случай в краевой задаче (7), (8), (10).** Рассмотрим вопрос о локальной динамике краевой задачи (7), (8), (10) при условии

$$c = c_0 + \varepsilon c_1, \quad (18)$$

где  $c_0$  является корнем уравнения (16),  $c_1 \neq 0$  – как-то фиксировано, а  $\varepsilon$  – малый положительный параметр,

$$0 < \varepsilon \ll 1. \quad (19)$$

Из условий (16), (18), (19) вытекает [4], что в некоторой достаточно малой и независимой от  $\varepsilon$  окрестности нулевого состояния равновесия рассматриваемой краевой задачи существует одномерное устойчивое локальное инвариантное интегральное многообразие, на котором эту краевую задачу можно записать в виде нормальной формы, то есть в виде скалярного нелинейного уравнения первого порядка [5]. Для определения элементов этого уравнения воспользуемся стандартной процедурой (см., например, [6]). Введём в рассмотрение формальный ряд

$$v(t, x, \varepsilon) = \varepsilon^{\frac{1}{2}} \xi(\tau) \cos(\pi x) + \varepsilon v_2(\tau, x) + \varepsilon^{\frac{3}{2}} v_3(\tau, x) + \dots, \quad \tau = \varepsilon t. \quad (20)$$

Подставим (20) в (7), (8), (10) и будем собирать коэффициенты при одинаковых степенях  $\varepsilon$ . На первом шаге, собирая коэффициенты при  $\varepsilon^{1/2}$ , получаем верное тождество, а на втором – для определения  $v_2(\tau, x)$  приходим к краевой задаче

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[ -\alpha \frac{\partial^2 v_2}{\partial x^2} - \beta v_2 \right] &= -\xi^2 \gamma \frac{\partial^2}{\partial x^2} (\cos^2 \pi x), \\ \frac{\partial v_2}{\partial x} \Big|_{x=0, x=1} &= \frac{\partial^3 v_2}{\partial x^3} \Big|_{x=0, x=1} = 0, \quad M(v_2) = 0. \end{aligned}$$

Отсюда получаем, что

$$v_2(\tau, x) = A \xi^2 \cos 2\pi x, \quad A = \gamma(2\beta - 8\alpha\pi^2)^{-1}.$$

На следующем шаге для нахождения  $v_3(\tau, x)$  получаем краевую задачу

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[ -\alpha \frac{\partial^2 v_3}{\partial x^2} - \beta v_3 \right] &= \dot{\xi} \cos(\pi x) - \pi^2(2b + 6c_0)c_1 \cos(\pi x) + \\ &+ \xi^3 \frac{d^2}{dx^2} (\cos^3 \pi x) - 2\gamma \xi^3 A \frac{d^2}{dx^2} (\cos(2\pi x) \cos(\pi x)), \\ \frac{\partial v_3}{\partial x} \Big|_{x=0, x=1} &= \frac{\partial^3 v_3}{\partial x^3} \Big|_{x=0, x=1} = 0, \quad M(v_3) = 0. \end{aligned}$$

Условие разрешимости этой краевой задачи состоит в вычислении равенства

$$\dot{\xi} = \delta\xi + \sigma\xi^3, \quad (21)$$

где

$$\delta = 2\pi^2(b + 3c_0)c_1, \quad \sigma = -\frac{3}{4}\pi^2 - \gamma\pi^2 A.$$

Таким образом, уравнение (21) с точностью до слагаемых порядка  $O(\varepsilon^{1/2})$  является нормальной формой для краевой задачи (7), (8), (10). Оно описывает, в главном, поведение всех решений (7), (8), (10) с начальными условиями из некоторой достаточно малой окрестности нулевого состояния равновесия. Уравнение (21) интегрируется в явном виде. При  $\delta\sigma < 0$  у (21) имеется два ненулевых состояния равновесия  $\xi_{\pm} = (-\delta/\sigma)^{1/2}$ . Согласно асимптотической формуле (20), им отвечают два ненулевых неоднородных состояния равновесия  $v_{\pm}(x, \varepsilon) = \varepsilon^{1/2}\xi_{\pm} \cos(\pi x) + O(\varepsilon)$ .

Сформулируем итоговое утверждение.

**Теорема 2.** При условиях  $\delta \neq 0$ ,  $\sigma \neq 0$  и при всех достаточно малых  $\varepsilon$  поведение решений (7), (8), (10) из некоторой достаточно малой и независимой от  $\varepsilon$  окрестности нулевого состояния равновесия определяется уравнением (21):

1<sup>0</sup>. При  $\delta > 0$ ,  $\sigma > 0$  в этой окрестности не существует аттрактора;

2<sup>0</sup>. При  $\delta > 0$ ,  $\sigma < 0$  нулевое решение неустойчиво и существует два устойчивых состояния равновесия  $u_{\pm}(x, \varepsilon)$ ;

3<sup>0</sup>. При  $\delta < 0$ ,  $\sigma > 0$  нулевое решение устойчиво, а  $u_{\pm}(x, \varepsilon)$  – неустойчивы;

4<sup>0</sup>. При  $\delta < 0$ ,  $\sigma < 0$  все решения из рассматриваемой окрестности стремятся к нулю при  $t \rightarrow \infty$ .

**1.2. Критический случай в краевой задаче (7), (9), (10).** Здесь предполагаем, что выполнено условие (17). При этом два корня характеристического уравнения (11) при  $k = \pm 2$  являются нулевыми, а все остальные отрицательные. Положим, как и выше,

$$c = c_0 + \varepsilon c_1, \quad \text{где } 0 < \varepsilon \ll 1.$$

Тогда при всех достаточно малых  $\varepsilon$  в некоторой достаточно малой и не зависящей от  $\varepsilon$  окрестности нулевого состояния равновесия краевой задачи (7), (9), (10) имеется устойчивое двумерное локальное инвариантное интегральное многообразие [4]. На нём исходную краевую задачу можно записать в виде специального скалярного нелинейного комплексного обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка. Именно это уравнение и определяет (при выполнении некоторых условий типа общности положения) локальное поведение решений задачи (7), (9), (10) в указанной малой окрестности. Для построения нужного уравнения воспользуемся стандартным алгоритмом (см., например, [6]).

Введём в рассмотрение формальный ряд

$$v(t, x, \varepsilon) = \varepsilon^{1/2}(\xi(\tau) \exp(2\pi i x) + \bar{\xi}(\tau) \exp(-2\pi i x)) + \varepsilon v_2(\tau, x) + \varepsilon^{3/2} v_3(\tau, x) + \dots, \quad (22)$$

где  $\tau = \varepsilon t$ , а  $v_j(\varepsilon, x)$  –  $2\pi$ -периодичны по  $x$ . Подставим (22) в (7), (9), (10) и будем приравнивать коэффициенты при одинаковых степенях  $\varepsilon$ . На первом шаге приходим к верному тождеству, а на втором – получаем уравнение для  $v_2(\tau, x)$ . Интегрируя его, находим, что

$$v_2(\tau, x) = -\gamma_0(12\pi^2\alpha)^{-1}\xi^2 \exp(4\pi i x) - \gamma_0(12\pi^2\alpha)^{-1}\bar{\xi}^2 \exp(-4\pi i x).$$

На третьем шаге, собирая коэффициенты при  $\varepsilon^{\frac{3}{2}}$ , получим уравнение для  $v_3(\tau, x)$ . Из условия его разрешимости в указанном классе функций получаем равенство

$$(2\pi)^{-2} \frac{d\xi}{d\tau} = \beta_1 \xi + d \xi |\xi|^2, \quad (23)$$

в котором  $\beta_1 = 2(b + 3c_0)c_1$ ,  $d = -3 + \gamma^2(6\pi^2\alpha)^{-1}$ . Отметим, что при  $\beta_1 d < 0$  уравнение (23) имеет множество состояний равновесия вида  $\xi_0 \exp(i\varphi)$  ( $\varphi \in [0, 2\pi)$ ), где  $\xi_0 = (-\beta_1/d)^{1/2}$ .

**Теорема 3.** При условиях  $\beta_1 \neq 0$ ,  $d \neq 0$  и при всех достаточно малых  $\varepsilon$  динамика уравнения (23) определяет поведение решений краевой задачи (7), (9), (10) в малой окрестности нулевого состояния равновесия.

Более подробно: при  $\beta_1 d < 0$  краевая задача (7), (9), (10) имеет неоднородное состояние равновесия  $u_0(x, \varepsilon) = \varepsilon^{1/2} \xi_0 \exp(2\pi i x) + O(\varepsilon)$ . Оно устойчиво при  $\beta_1 > 0$  и неустойчиво при  $\beta_1 < 0$ . При  $\beta_1 < 0$ ,  $d < 0$  все решения из малой окрестности нуля стремятся к нулю при  $t \rightarrow \infty$ . Если же  $\beta_1 > 0$ ,  $d > 0$ , то задача о динамике становится нелокальной.

**1.3. О неоднородных состояниях равновесия краевой задачи (5), (3).** Сначала отметим, что эти состояния равновесия являются  $2\pi$ -периодическими решениями уравнения

$$\alpha \frac{d^2 \omega}{dx^2} + f(\omega) = h, \quad (24)$$

где  $h \in (-\infty, \infty)$ , а  $f(\omega) = \omega + b\omega^2 - \omega^3$ . Функция  $f(\omega)$  имеет локальный минимум  $f_-$  и локальный максимум  $f_+$ , причём

$$f_{\pm} = f(\omega_{\pm}), \quad \omega_{\pm} = \frac{1}{3}b \pm \sqrt{\frac{b^2}{9} + 3}.$$

При  $h < f_-$  и  $h > f_+$  уравнение (24) не может иметь неоднородных периодических решений. Ниже предполагаем, что

$$f_- < h < f_+.$$

При этих условиях через  $\omega_1 < \omega_2 < \omega_3$  обозначим корни уравнения

$$f(\omega) = h.$$

Через  $\omega_c(x)$  обозначим решение (24) с начальными условиями

$$\omega_c(0) = c, \quad \omega'_c(0) = 0.$$

Это решение заведомо периодическое либо при  $c \in (\omega_1, \omega_2)$ , либо при  $c \in (\omega_2, \omega_3)$ . Его период обозначим через  $T_h(c)$ . Заметим, что

$$\lim_{c \rightarrow \omega_2} T_h(c) = 2\pi(\alpha f'(\omega_2))^{-\frac{1}{2}}. \quad (25)$$

Если  $T_h(c)$  определено при  $c \in (\omega_1, \omega_2)$ , то  $\lim_{c \rightarrow \omega_1+0} T_h(c) = \infty$ .

Если  $T_h(c)$  определено при  $c \in (\omega_2, \omega_3)$ , то  $\lim_{c \rightarrow \omega_3-0} T_h(c) = \infty$ .

Отметим ещё, что  $\lim_{h \rightarrow f_1+0} T_h(c) = \infty$ ,  $\lim_{h \rightarrow f_2-0} T_h(c) = \infty$ .

Из приведённых соотношений уже легко сделать вывод о существовании  $2\pi$ -периодического решения (24). Этот вывод связан с разрешимостью уравнения

$$T_h(c) = 2\pi n^{-1} \quad (n = 1, 2, \dots). \quad (26)$$

Учитывая (25), заключаем, что уравнение (26) разрешимо при

$$\alpha f'(\omega_2) < h^2.$$

Осталось заметить, что соответствующее состояние равновесия устойчиво при условии  $n = 1$  в (26), а при  $n > 1$  – неустойчиво.

Асимптотика при  $\alpha \rightarrow 0$  периодических решений исследована в [7, 8].

## 2. Бифуркации в обобщенном уравнении Кана–Хилларда

**2.1. Постановка задачи.** Исследуется обобщенное уравнение Кана–Хилларда, которое отличается от (1) наличием ещё одного слагаемого  $\lambda \partial u / \partial x$ , стоящего в скобках:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[ \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \lambda \frac{\partial u}{\partial x} + u + bu^2 - u^3 \right]. \quad (27)$$

Вместе с (27) будем рассматривать периодические краевые условия

$$u(t, x + 2\pi) \equiv u(t, x). \quad (28)$$

В отличие от (1), (2) у краевой задачи (27), (28) могут быть только однородные состояния равновесия  $u(t, x) \equiv c$  ( $c \in (-\infty, \infty)$ ).

В (27) произведем замену

$$u(t, x) = v(t, x) + c.$$

В результате получим краевую задачу

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[ \alpha \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \lambda \frac{\partial v}{\partial x} + \beta v + \gamma v^2 - v^3 \right], \quad (29)$$

$$v(t, x + 2\pi) \equiv v(t, x), \quad (30)$$

где  $\beta = 1 + 2b - 3c^2$ ,  $\gamma = b - 3c$ . Важно отметить, что из условия

$$M(v(t_0, x)) \equiv \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} v(t_0, x) dx = 0$$

следует выполнение при всех  $t > t_0$  условия

$$M(v(t, x)) = 0. \quad (31)$$

Таким образом, множество всех решений (27), (28), для которых  $M(u(t, x)) = c$ , является инвариантным интегральным многообразием. Отсюда вытекает корректность постановки следующей задачи: исследование локальной – в окрестности нулевого состояния равновесия – динамики всего семейства, зависящего от параметра  $c$ , краевых задач (29), (30) при дополнительном условии (31). Отметим, что краевые задачи (27) и (28) изучались в [3].

Вначале рассмотрена бифуркация Андронова–Хопфа. В разделе 3 исследован критический случай бесконечной размерности, который выделяется условием  $|\lambda| \gg 1$ .

**2.2. Бифуркация Андронова–Хопфа.** При исследовании локальной динамики краевой задачи (29)–(31) важную роль играет расположение корней  $\lambda_k$  характеристического уравнения для линеаризованной в нуле краевой задачи:

$$\lambda_k = -\alpha k^4 + ik^3\lambda + \beta k^2, \quad k = \pm 1, \pm 2, \dots \quad (32)$$

В случае, когда  $\alpha > -\beta$ , все корни (32) имеют отрицательные вещественные части. Отсюда следует, что все решения (29)–(31) из некоторой достаточно малой окрестности нуля стремятся к нулю при  $t \rightarrow \infty$ . Если же  $\alpha < -\beta$ , то среди корней (32) есть корни с положительной вещественной частью, а значит, поставленная задача о динамике становится нелокальной.

Ниже предполагаем, что имеет место критический случай. Пусть значение  $c = c_0$  такое, что

$$\alpha = \beta = 1 - 2bc_0 - 3c_0^2. \quad (33)$$

При этом, конечно, выполнено неравенство  $\alpha > 0$ , то есть

$$1 - 2bc_0 - 3c_0^2 > 0.$$

Фиксируем произвольно значение  $c_1$  и положим в (29)

$$c = c_0 + \varepsilon c_1, \quad (34)$$

где  $\varepsilon$  – малый положительный параметр, то есть

$$0 < \varepsilon \ll 1. \quad (35)$$

Исследуем поведение всех решений краевой задачи (29)–(31) из некоторой достаточно малой и независимой от  $\varepsilon$  окрестности нулевого состояния равновесия при условиях (33)–(35).

В этом случае характеристическое уравнение имеет пару чисто мнимых корней  $\lambda_{\pm 1} = \pm i\lambda + O(\varepsilon)$ , а все остальные его корни имеют отрицательные (и отделенные от мнимой оси) вещественные части. Тем самым выполнены условия бифуркации Андронова–Хопфа.

Воспользуемся известными результатами (см., например, [4, 5]). В малой окрестности нулевого состояния равновесия (29)–(31) существует локальное устойчивое двумерное инвариантное интегральное многообразие, на котором эта краевая задача может быть записана в виде скалярного специального комплексного нелинейного обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка. Для того чтобы выписать это уравнение – его называют нормальной формой – применим следующий формализм.

Введём в рассмотрение формальный ряд

$$v = \varepsilon^{\frac{1}{2}} [\xi(\tau) \exp(ix + i\lambda t) + \bar{\xi}(\tau) \exp(-ix - i\lambda t)] + \varepsilon v_2(t, \tau, x) + \varepsilon^{\frac{3}{2}} v_3(t, \tau, x) + \dots \quad (36)$$

Здесь  $\tau = \varepsilon t$  – медленное «время»; функции  $v_j(t, \tau, x)$  –  $2\pi/\lambda$ -периодичны по  $t$  и  $2\pi$ -периодичны по  $x$ .

Подставим (36) в (29)–(31) и будем приравнивать коэффициенты при одинаковых степенях  $\varepsilon$ . На первом шаге, собирая коэффициенты при  $\varepsilon^{\frac{1}{2}}$ , получим верное тождество, а на втором – уравнение для определения  $v_2(t, \tau, x)$ :

$$\frac{\partial v_2}{\partial t} = -\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( \alpha \frac{\partial^2 v_2}{\partial x^2} + \lambda \frac{\partial v_2}{\partial x} + \beta_0 v_2 \right) = -4\gamma [\xi^2 \exp(2ix + 2i\lambda t) + \bar{\xi}^2 \exp(-2ix - 2i\lambda t)],$$

где  $\beta_0 = 1 + 2bc_0 - 3c_0^2$ .

Отсюда приходим к выводу, что

$$v_2 = A\xi^2 \exp(2ix + 2i\lambda t) + \bar{A}\bar{\xi}^2 \exp(-2ix - 2i\lambda t),$$

где  $A = 2\gamma[8\alpha - 2\beta_0 + 3i\lambda]^{-1}$ .

На третьем шаге для нахождения  $v_3(t, \tau, x)$  приходим к краевой задаче

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_3}{\partial t} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( \alpha \frac{\partial^2 v_3}{\partial x^2} + \lambda \frac{\partial v_3}{\partial x} + \beta_0 v_3 \right) = \\ = \left( -\frac{d\xi}{d\tau} + \beta(2b+6c_0)c_1\xi + (2A\gamma+3)\xi|\xi|^2 \right) \exp(ix+i\lambda t) + \\ + \left( -\frac{d\bar{\xi}}{d\tau} + \beta(2b+6c_0)c_1\bar{\xi} + (2\bar{A}\gamma+3)\bar{\xi}|\bar{\xi}|^2 \right) \exp(-ix-i\lambda t) + \\ + 9(2A\gamma+1)\xi^3 \exp(3ix+3it) + 9(2\bar{A}\gamma+1)\bar{\xi}^3 \exp(-3ix-3it), \end{aligned} \quad (37)$$

$$v_3(t, \tau, x + 2\pi) \equiv v(t, \tau, x), \quad M(v_3) = 0. \quad (38)$$

Условие разрешимости краевой задачи (37), (38) в указанном классе функций состоит в выполнении равенства

$$\frac{d\xi}{d\tau} = \delta\xi + \sigma\xi|\xi|^2, \quad (39)$$

в котором

$$\delta = 2\gamma c_1, \quad \sigma = 2A\gamma - 3.$$

Отсюда и из общих утверждений (см., например, [4]) вытекает следующий результат.

**Теорема 4.** Пусть  $\delta \neq 0$  и  $\operatorname{Re} \sigma \neq 0$ . Тогда при всех достаточно малых  $\varepsilon$  динамика уравнения (39) определяет локальную динамику краевой задачи (29)–(31).

Поясним это утверждение. Пусть  $\delta > 0$  и  $\operatorname{Re} \sigma > 0$ . Тогда в окрестности нулевого состояния равновесия краевой задачи (29)–(31) не может существовать аттрактора, то есть задача о динамике становится локальной.

Пусть  $\delta > 0$  и  $\operatorname{Re} \sigma < 0$ . Тогда уравнение (39) имеет устойчивый цикл  $\xi_0(\tau) = \xi_0 \exp(i\omega_0\tau)$ , где  $\xi_0 = (-\delta(\operatorname{Re} \sigma)^{-1})^{1/2}$ ,  $\omega_0 = (\operatorname{Im} \sigma)\xi_0^2$ , а краевая задача (29)–(31) тоже имеет устойчивый цикл

$$v_0(t, \tau, x) = \varepsilon^{1/2} [\xi_0 \exp(ix + i(\lambda + \varepsilon\omega_0 + o(\varepsilon))t) + \bar{\xi}_0 \exp(-ix - i(\lambda + \varepsilon\omega_0 + o(\varepsilon))t)] + O(\varepsilon). \quad (40)$$

При условии  $\delta < 0$  и  $\operatorname{Re} \sigma > 0$  уравнение (39) имеет устойчивое состояние равновесия и неустойчивый цикл. Краевая задача (29)–(31) тоже имеет при малых  $\varepsilon$  устойчивое нулевое состояние равновесия и неустойчивый цикл (40).

При условии  $\delta < 0$  и  $\operatorname{Re} \sigma < 0$  в (39) все решения стремятся к нулю при  $t \rightarrow \infty$ , и в краевой задаче (29)–(31) тоже все решения из малой (не зависящей от  $\varepsilon$ ) окрестности нуля при всех достаточно малых  $\varepsilon$  стремятся к нулю при  $t \rightarrow \infty$ .

**2.3. Исследование решений краевой задачи (29)–(31) при достаточно больших значениях параметра  $|\lambda|$ .** Без потери общности можно считать, что параметр  $\lambda$  отрицателен. В противном случае, это достигается заменой  $x \rightarrow -x$ .

Основное предположение этого раздела состоит в том, что выполнено неравенство

$$-\lambda \gg 1.$$



В (29) поделим левую и правую части на  $(-\lambda)$ . Произведём замену  $t \rightarrow (-\lambda)^{-1}t$  и положим  $\varepsilon = (-\lambda)^{-1}$ , то есть  $0 < \varepsilon \ll 1$ . В результате приходим к краевой задаче

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial^3 v}{\partial x^3} - \varepsilon \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( \alpha \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \beta v + \gamma v^2 - v^3 \right), \quad (41)$$

$$v(t, x + 2\pi) \equiv v(t, x), \quad M(v) = 0. \quad (42)$$

Исследуем поведение решений этой краевой задачи при малых  $\varepsilon$  и при  $t \rightarrow \infty$ .

В случае  $\varepsilon = 0$  получаем краевую задачу

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial^3 v}{\partial x^3}, \quad v(t, x + 2\pi) \equiv v(t, x), \quad M(v) = 0. \quad (43)$$

Все корни  $\lambda_k$  характеристического уравнения для (43) являются чисто мнимыми:  $\lambda_k = -ik^3$  ( $k = \pm 1, \pm 2, \dots$ ). Тем самым в (41), (42) реализуется критический в задаче об устойчивости случай бесконечной размерности. Методика изучения такого типа критических случаев разработана в [3, 6–8]. Применим её для рассматриваемой задачи.

Положим в (41), (42)

$$v = v_0(t, \tau, x) + \varepsilon v_1(t, \tau, x) + \dots, \quad \tau = \varepsilon t, \quad (44)$$

$$v_0(t, \tau, x) = \sum_{k=-\infty, k \neq 0}^{\infty} \xi_k(\tau) \exp(ikx - ik^3 t). \quad (45)$$

Зависимость от  $t$  и  $x$  в (44) предполагается  $2\pi$ -периодической и  $M(v_0(t, \tau, x)) = 0$ . Подставим (44) в (41). Тогда для определения  $v_1(t, \tau, x)$  получаем краевую задачу

$$\frac{\partial v_1}{\partial t} = \frac{\partial^3 v_1}{\partial x^3} - \frac{\partial v_0}{\partial \tau} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( \alpha \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} + \beta v_0 + \gamma v_0^2 - v_0^3 \right). \quad (46)$$

Из условия разрешимости (46) в указанном классе функций для определения элементов  $\xi_k(\tau)$  формального ряда (45) приходим к бесконечной системе обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{d\xi_k}{d\tau} = -\alpha k^4 \xi_k + k^2 \beta \xi_k - 3k^2 \xi_k \left( 2 \sum_{j=-\infty, j \neq 0}^{\infty} |\xi_j|^2 - |\xi_k|^2 \right), \quad k = \pm 1, \pm 2, \dots \quad (47)$$

Система (47) играет роль нормальной формы. Её нелокальная динамика определяет, на основе соотношения (45), поведение решений исходной краевой задачи (30), (31) в малой окрестности нулевого состояния равновесия.

Систему (47) можно записать в компактной форме. Для этого введём несколько обозначений. Во-первых, отметим, что

$$\sum_{j=-\infty, j \neq 0}^{\infty} |\xi_j|^2 = M(v_0^2(t, \tau, x)). \quad (48)$$

Через  $\omega(\tau, x)$  обозначим функцию

$$\omega(\tau, x) = \sum_{k=-\infty, k \neq 0}^{\infty} \xi_k(\tau) \exp(ikx), \quad (49)$$

где коэффициенты Фурье  $\xi_k$  те же, что и в формуле (45). Поэтому

$$\sum_{j=-\infty, j \neq 0}^{\infty} |\xi_j|^2 = M([\omega(\tau, x)]^2). \quad (50)$$

Обозначим через  $N(\omega)$  бесконечномерный вектор

$$N(\omega) = (\dots, \xi_{-2} \exp(-2ikx), \xi_{-1} \exp(-ikx), \xi_1 \exp(ikx), \xi_2 \exp(2ikx), \dots).$$

Тогда

$$\bar{N}(\omega) = (\dots, \xi_2 \exp(2ikx), \xi_1 \exp(ikx), \xi_{-1} \exp(-ikx), \xi_{-2} \exp(-2ikx), \dots).$$

Умножение векторов далее считаем покомпонентным. Поэтому

$$N(\omega)\bar{N}(\omega) = (\dots, |\xi_2|^2, |\xi_1|^2, |\xi_1|^2, |\xi_2|^2, \dots).$$

Для скалярного произведения  $(N(\omega)\bar{N}(\omega), N(\omega))$  в итоге приходим к формуле

$$(N(\omega)\bar{N}(\omega), N(\omega)) = \sum_{k=-\infty, k \neq 0}^{\infty} \xi_k |\xi_k|^2 \exp(ikx).$$

После этого систему (46) можно представить в виде

$$\frac{\partial \omega}{\partial \tau} = -\alpha \frac{\partial^4 \omega}{\partial x^4} - \beta \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + 3 \left( 2M(\omega^2) - 3(N(\omega)\bar{N}(\omega), N(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2})) \right). \quad (51)$$

Это уравнение следует дополнить периодическими краевыми условиями

$$\omega(\tau, x + 2\pi) \equiv \omega(\tau, x). \quad (52)$$

В том случае, если найдено какое-то решение краевой задачи (51), (52), то найдены для него, соответственно, и коэффициенты Фурье  $\xi_k(\tau)$  согласно (49). Затем с помощью соотношения (45) определяем функцию  $v_0(t, \tau, x)$ . Построенную так функцию  $v_0(t, \tau, x)$  будем называть соответствующей решению  $\omega(\tau, x)$ . Тем самым находим главную часть аналитического представления для  $v(t, x, \varepsilon)$  согласно (44).

Таким образом, приходим к обоснованию следующего утверждения.

**Теорема 5.** Пусть краевая задача (51), (52) имеет решение  $\omega(\tau, x)$ , которое ограничено при  $\tau \rightarrow \infty$ ,  $x \in [0, 2\pi]$  вместе с  $\partial^2 \omega(\tau, x)/\partial x^2$ . Тогда краевая задача (30), (31) при всех достаточно малых  $\varepsilon$  имеет асимптотическое по невязке с точностью до  $O(\varepsilon)$  решение  $u(t, x, \varepsilon) = v_0(t, \tau, x) + O(\varepsilon)$ , где  $v_0(t, \tau, x)$  является соответствующей для  $\omega(\tau, x)$ .

**Замечание 1.** При  $t = 2\pi m$  ( $m = 1, 2, \dots$ ) значения функции  $\omega(\tau, x)$  и соответствующей для нее функции  $v_0(t, \tau, x)$  совпадают. Состояниям равновесия в (51), (52) соответствуют торы в (30), (31).

**Замечание 2.** Асимптотическое представление для  $u(t, x, \varepsilon)$  можно уточнять.

## Выводы

Исследовано поведение решений уравнения Кана–Хилларда в окрестностях всего континуального множества его состояний равновесия. Выделены критические случаи, приведён бифуркационный анализ. Построены асимптотики неоднородных состояний равновесия и изучена их устойчивость.

Для обобщенного уравнения Кана–Хилларда показано, что в некоторой области фазового пространства его локальная динамика описывается с помощью бифуркации Андронова–Хопфа. Приведена соответствующая нормальная форма, которая определяет поведение решений в этой области фазового пространства. Рассмотрена задача с большим коэффициентом адвекции, который приводит к бесконечномерному критическому случаю в задаче об устойчивости стационара. Показано, что локальная динамика исходной краевой задачи определяется нелокальным поведением решений специально построенной более простой нелинейной краевой задачи.

Исследование кинетики расслоения в бинарных смесях с заданной концентрацией компонентов является одной из актуальных задач физики конденсированного состояния. Уравнение Кана–Хилларда – это одна из моделей, которая используется при изучении спонтанного разделения фаз (бинарного) вещества (сплава), где неизвестная функция является относительной концентрацией компоненты вещества.

## Библиографический список

1. Краснюк И.Б., Стефанович Л.И., Юрченко В.М. Колебания концентрации в ограниченных бинарных смесях с учётом поверхностных эффектов // Журнал технической физики. 2007. Т. 77, № 11. С. 55–62.
2. Cahn J.W., Hilliard J.E. Free energy of a nonuniform system. I. Interfacial free energy // J. Chem. Phys. 1958. Vol. 28. С. 258–267.
3. Кащенко С.А. Бифуркации в уравнении Курамото–Сивашинского // Теоретическая и математическая физика. 2017. Т. 192, № 1. С. 23–40. ISSN 0564-6162. DOI: 10.4213/tmf9195. URL: <http://mi.mathnet.ru/tmf9195> (дата обр. 26.06.2017).
4. Марсден Д., Мак-Кракен М. Бифуркация рождения цикла и ее приложения / Пер. с англ. Л.М. Лермана. М.: Мир, 1980. 368 с. URL: <http://www.ams.org/mathscinet-getitem?mr=0611154> (дата обр. 15.03.2017).
5. Брюно А.Д. Локальный метод нелинейного анализа дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1979. 252 с. URL: <http://www.ams.org/mathscinet-getitem?mr=0542758> (дата обр. 14.03.2017).
6. Кащенко С.А., Преображенская М.М. Бифуркации в обобщенном уравнении Кортевега–де Фриза // Известия высших учебных заведений. Математика. 2018. № 2. С. 54–68. ISSN 0021-3446. URL: <http://mi.mathnet.ru/ivm9330> (дата обр. 20.12.2017).
7. Бутузов В.Ф., Васильева А.Б., Нефедов Н.Н. Асимптотическая теория контрастных структур (обзор) // Автоматика и телемеханика. 1997. № 7. С. 4–32. ISSN 0005-2310. URL: <http://mi.mathnet.ru/at2615> (дата обр. 24.04.2017).
8. Бутузов В.Ф., Леваишова Н.Т. О системе типа реакция–диффузия–перенос в случае малой диффузии и быстрых реакций // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2003. Т. 43, № 7. С. 1005–1017. ISSN 0044-4669. URL: <http://mi.mathnet.ru/zvmmf991> (дата обр. 24.04.2017).
9. Кащенко С.А. Нормальная форма для уравнения Кортевега–де Фриза–Бюргерса // Доклады Академии наук. 2016. Т. 468, № 4. С. 383–386. ISSN 0869-5652. DOI: 10.7868/S0869565216160052. URL: <http://www.ams.org/mathscinet-getitem?mr=3559770> (дата обр. 09.06.2017).

## References

1. Krasnyuk I.B., Stefanovic L.I., Yurchenko V.M. Analysis of oscillations of concentration in bounded binary mixtures taking into account surface effects. *Technical Physics*, 2007, vol. 52, no. 11, pp. 1445–1452.
2. Cahn J.W., Hilliard J.E. Free energy of a nonuniform system. I. Interfacial free energy. *J. Chem. Phys.*, 1958, vol. 28, pp. 258–267.
3. Kashchenko S.A. Bifurcations in Kuramoto–Sivashinsky equations. *Theoretical and Mathematical Physics*, 2017, vol. 192, no. 1, pp. 958–973.
4. Marsden J.E., McCracken M. *The Hopf Bifurcation and its Applications*. Berlin: Springer, Applied Math. Series, no. 19, 1976, 408 p.
5. Bruno A.D. *Local Method of Nonlinear Analysis of Differential Equations*. Moscow: Nauka, 1979 (in Russian).
6. Kashchenko S.A., Preobrazhenskaya M.M. Bifurcations in the generalized Korteweg–de Vries equation. *Russian Mathematics*, 2018, vol. 62, no. 2, pp. 49–61.
7. Butuzov V.F., Vasil'yeva A.B., Nefodov N.N. Asymptotic theory of contrasting structures. A survey. *Automation and Remote Control*, 1997, vol. 58, no. 7, 1068–1091.
8. Butuzov V.F., Levashova N.T. On a system of reaction–diffusion–transfer type in the case of small diffusion and fast reactions. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2003, vol. 43, no. 7, pp. 962–974.
9. Kashchenko S.A. Normal form for the Korteweg–de Vries–Burgers equation. *Doklady Akademii Nauk*, 2016, vol. 468, no. 4, pp. 383–386.



Плышевская Светлана Петровна – родилась в Кокчетаве (1974), окончила Симферопольский государственный университет (1996). С 1996 года по 2010 год работала на кафедре геометрии математического факультета Таврического национального университета, с 2010 года – на кафедре дифференциальных уравнений и геометрии факультета математики и информатики (с 2015 года – факультета Таврической академии Крымского федерального университета им. В.И. Вернадского). Опубликовала более 20 научных статей, связанных с теорией бифуркаций.

Россия, Республика Крым, 295007 Симферополь, проспект Академика Вернадского, 4  
Крымский федеральный университет им. В.И. Вернадского  
E-mail: splyshevskaya@mail.ru



## Гиперболический хаос в осцилляторе Бонхоффера–ван дер Поля с дополнительной запаздывающей обратной связью и периодически модулируемым параметром возбуждения

С. П. Кузнецов, Ю. В. Седова

Саратовский филиал Института радиотехники и электроники им. В.А. Котельникова РАН  
Россия, 410019 Саратов, ул. Зеленая, д. 38  
E-mail: spkuz@yandex.ru, sedovayv@yandex.ru

Автор для переписки Седова Юлия Викторовна, sedovayv@yandex.ru  
Поступила в редакцию 13.10.2018, принята к публикации 3.12.2018

**Тема и цель исследования.** Цель работы состоит в рассмотрении простой в реализации системы, демонстрирующей гиперболический аттрактор Смейла–Вильямса, на основе осциллятора Бонхоффера–ван дер Поля, поочередно пребывающего в состоянии возбуждения или подавления благодаря периодической модуляции параметра внешнего управляющего сигналом и дополненного цепью запаздывающей обратной связи. **Исследуемые модели.** Сформулирована математическая модель, описываемая неавтономным уравнением второго порядка с запаздывающим аргументом. Указана схема электронного устройства, реализующего данный тип хаотического поведения. **Результаты.** Представлены результаты численного моделирования динамики системы, включая реализации, спектры колебаний, графики показателей Ляпунова, карту режимов на плоскости параметров. Проведено схемотехническое моделирование электронного устройства с помощью программного продукта Multisim. **Обсуждение.** Присутствие аттрактора Смейла–Вильямса обусловлено тем, что преобразование фаз заполнения для генерируемой системой последовательности радиоимпульсов отвечает растягивающему в целом число раз отображению окружности. Особенность системы в том, что передача возбуждения от одной к следующей стадии активности с удвоением (или утроением) фазы осуществляется резонансным образом, на гармонике релаксационных колебаний, имеющих вдвое (или втрое) больший период, чем у малых колебаний. В силу гиперболической природы аттрактора генерируемый хаос грубый, то есть характеризуется малой чувствительностью к вариации параметров устройства и его компонентов. Приведенная схема отвечает низкочастотному устройству, но может быть адаптирована для генераторов хаоса также на высоких и сверхвысоких частотах.

**Ключевые слова:** динамическая система, запаздывание, генератор хаоса, аттрактор, показатель Ляпунова, схемотехническое моделирование.

**Образец цитирования:** Кузнецов С.П., Седова Ю.В. Гиперболический хаос в осцилляторе Бонхоффера–ван дер Поля с дополнительной запаздывающей обратной связью и периодически модулируемым параметром возбуждения // Изв. вузов. ПНД. 2019. Т. 27, № 1. С. 77–95. <https://doi.org/10.18500/0869-6632-2019-27-1-77-95>

**Финансовая поддержка.** Разработка принципа действия системы, построение математической модели, численные расчеты и обработка результатов выполнены при поддержке гранта РФФИ 17-12-01008 (разделы 1, 2). Разработка электронного устройства и схемотехническое моделирование в среде Multisim выполнены при поддержке гранта РФФИ 16-02-00135 (раздел 3).

## Hyperbolic chaos in the Bonhoeffer–van der Pol oscillator with additional delayed feedback and periodically modulated excitation parameter

S. P. Kuznetsov, Yu. V. Sedova

Kotel'nikov's Institute of Radio-Engineering and Electronics of RAS, Saratov Branch  
38, Zelenaya str., 410019 Saratov, Russia

E-mail: spkuz@yandex.ru, sedovayv@yandex.ru

Correspondence should be addressed to Sedova Yuliya V., sedovayv@yandex.ru

Received 13.10.2018, accepted for publication 3.12.2018

**Topic and aim.** The aim of the work is to consider an easy-to-implement system demonstrating the Smale–Williams hyperbolic attractor based on the Bonhoeffer–van der Pol oscillator, alternately manifesting a state of activity or suppression due to periodic modulation of the parameter by an external control signal, and supplemented with a delayed feedback circuit. **Investigated models.** A mathematical model is formulated as a non-autonomous second-order equation with delay. The scheme of the electronic device that implements this type of chaotic behavior is proposed. **Results.** The results of numerical simulating of the system dynamics, including waveforms, oscillation spectra, plots of Lyapunov exponents, a chart of regimes on the parameters plane are presented. The circuit simulation of the electronic device using the software Multisim is carried out. **Discussion.** The Smale–Williams attractor in the system appears due to the fact that the transformation of the phases of the carrier for the sequence of radio-pulses generated by the system corresponds to a circle map expanding by an integer factor. The important feature of the system is that the transfer of excitation from one to the next stage of activity with doubling (or tripling) of the phase occurs due to the resonance mechanism involving a harmonic of the developed oscillations that have twice (or triple) longer period than that of small oscillations. Due to the hyperbolic nature of the attractor, the generated chaos is rough, that is, it is characterized by low sensitivity to variations in the parameters of the device and its components. Our scheme corresponds to a low-frequency device, but it can be adapted for chaos generators also at high and ultrahigh frequencies.

*Key words:* dynamical system, time-delay, chaos generator, attractor, Lyapunov exponent, circuit simulation.

*Reference:* Kuznetsov S.P., Sedova Yu.V. Hyperbolic chaos in the Bonhoeffer–van der Pol oscillator with additional delayed feedback and periodically modulated excitation parameter. *Izvestiya VUZ, Applied Nonlinear Dynamics*, 2019, vol. 27, no. 1, pp. 77–95. <https://doi.org/10.18500/0869-6632-2019-27-1-77-95>

*Acknowledgements.* Development of the operating principle of the system, construction of a mathematical model, numerical calculations and processing of the results are supported by the grant of Russian Science Foundation № 17-12-01008 (sections 1, 2). The development of electronic devices and circuit simulation environment Multisim is executed with support of Russian Foundation for Basic Research grant № 16-02-00135 (section 3).

### Введение

Построение различных вариантов составных систем на основе автоколебательных элементов, описываемых уравнениями Бонхоффера–ван дер Поля, в том числе систем с запаздывающими обратными связями, представляет интерес по многим причинам. Во-первых, осциллятор Бонхоффера–ван дер Поля легко реализуем в виде электронной схемы и в вариантах комбинированных схем, демонстрирующих сложную динамику, может служить основой для построения генераторов сигналов с широкими функциональными возможностями. Во-вторых, поскольку уравнение Бонхоффера–ван дер Поля с точностью до замены переменных соответствует известной модели нейрона ФитцХью–Нагумо [1–5], можно говорить о применении такого рода систем для модельного описания феноменов, имеющих место в нейросистемах, и об аналоговом моделировании этих феноменов с помощью электронных схем. В-третьих, предлагаемое исследование способствует выработке примеров динамического поведения, которые на уровне абстрактных математических представлений известны в современной теории динамических систем, но еще ожидают обнаружения и применения в системах реального мира. Данное направление исследований может открыть возможности построения технических устройств, воспроизводящих свойства

естественных нейросистем, а также генераторов грубого хаоса, нечувствительного к вариации параметров устройства и его компонентов.

Равномерно гиперболические аттракторы, введенные в рассмотрение в рамках развитой в 1960–1970-х годах математической теории, выступают как строго обоснованный пример детерминированного хаоса в динамических системах [6–13]. Это аттракторы, составленные исключительно из фазовых траекторий седлового типа, характерным для которых является то, что у каждой траектории на аттракторе имеется множество соседних траекторий, приближающихся к ней, и множество траекторий, удаляющихся от нее (устойчивое и неустойчивое многообразие).

Фундаментальный математический факт состоит в том, что гиперболический хаос обладает свойством грубости, или структурной устойчивости. В теории колебаний принято постулировать, что реальный интерес с теоретической и практической точки зрения должны представлять именно грубые системы, которые демонстрируют движения, качественно не меняющиеся при малой вариации («шевелении») параметров [14–16]. Это свойство представляется исключительно важным для естественных систем и технических приложений, поскольку обеспечивает нечувствительность характеристик хаоса в системах с гиперболическими аттракторами к неточности задания параметров, погрешностям изготовления, различным помехам и возмущениям.

Один из примеров гиперболического аттрактора – соленоид Смейла–Вильямса [6–9]. Рассмотрим область в виде тора в трехмерном пространстве и отображение, которое за один шаг дискретного времени осуществляет растяжение этого тора вдвое с достаточно сильным поперечным сжатием и складывание двойной петлей, помещаемой внутрь исходного тора. На каждом следующем шаге преобразования полный объем объекта уменьшается (это означает, что отображение диссипативное), а число витков удваивается. В пределе бесконечного числа шагов оно стремится к бесконечности, и возникает образование, называемое *соленоидом*, который и выступает как гиперболический аттрактор. В поперечном направлении соленоид имеет структуру типа канторова множества. Аналогичное построение можно провести, используя продольное растяжение не в два, а в большее число раз  $M = 3, 4, \dots$  и складывание петлей из соответствующего числа витков  $M$ , что отвечает гиперболическим аттракторам в виде соленоидов иного топологического типа.

По мере развития теории динамических систем и ее приложений выяснилось, что многочисленные примеры хаотической динамики, известные в разных областях естествознания и техники, не удовлетворяют условиям гиперболической теории. Только в последнее время были предложены и реализованы физические примеры систем со структурно устойчивым гиперболическим хаосом [17]. Несколько таких примеров построено на основе систем, использующих запаздывающую обратную связь [18–22].

В настоящей статье рассматривается простая в реализации система, демонстрирующая гиперболический аттрактор Смейла–Вильямса, где в качестве основного элемента фигурирует осциллятор Бонхоффера–ван дер Поля, поочередно пребывающий в состоянии возбуждения или подавления благодаря периодической модуляции параметра внешним управляющим сигналом, и дополненный цепью запаздывающей обратной связи. Гиперболическость аттрактора обусловлена тем, что преобразование фаз заполнения для генерируемой последовательности радиоимпульсов отвечает растягивающему в целое число раз отображению окружности. Особенность данной системы в том, что передача возбуждения от одной стадии активности к следующей с удвоением фазы осуществляется резонансным образом на гармонике релаксационных колебаний, имеющих вдвое или втрое больший период, чем у малых колебаний. Сформулирована математическая модель, описываемая неавтономным уравнением второго порядка с запаздывающим аргументом, и представлены результаты численного моделирования динамики системы, включая реализации, спектры колебаний, графики показателей Ляпунова, карту режимов на плоскости параметров. Указана схема электронного устройства, реализующего данный тип хаотического поведения, и проведено моделирование ее динамики с помощью программного продукта Multisim.

# 1. Осциллятор Бонхоффера–ван дер Поля. Слабо нелинейные и релаксационные автоколебания

Осциллятор Бонхоффера–ван дер Поля – автоколебательная система, описываемая уравнением

$$\ddot{x} - (A - x^2)\dot{x} + x = K. \quad (1)$$

При малых положительных значениях параметра  $A$  в системе возникают приблизительно синусоидальные автоколебания с частотой близкой к  $\omega = 1$ . С увеличением  $A$  происходит переход к релаксационным колебаниям, форма которых существенно отличается от синусоиды, а основная частота при этом уменьшается. Если параметр  $K$  отличен от нуля, то в спектре колебаний представлены как нечетные, так и четные гармоники, тогда как для классического осциллятора ван дер Поля, которому отвечает случай  $K = 0$ , присутствуют только нечетные гармоники. На рис. 1 представлены портреты аттракторов на фазовой плоскости уравнения (1) в режимах малых, квазигармонических колебаний и больших, релаксационных колебаний для случая  $K = 0.5$ . Если параметр  $A$  мал, то безразмерная круговая частота колебаний близка к 1. При  $A = 5.5$  основная частота составляет примерно  $1/2$ , а частота второй гармоники, соответственно, близка к частоте малых колебаний. При  $A = 9.66$  основная частота примерно  $1/3$ , и к частоте малых колебаний близка частота третьей гармоники.

На рис. 2, *a* иллюстрируется резонансная раскачка колебаний линейного осциллятора  $\ddot{y} + y = \varepsilon x$  под действием второй гармоники автоколебательной системы (1) по результатам численного решения задачи с параметрами  $A = 5.5$ ,  $K = 0.5$ ,  $\varepsilon = 0.1$ . Визуально период колебаний линейного осциллятора вдвое больше периода автоколебаний системы (1), так что частота второй гармоники автоколебаний совпадает с собственной частотой линейного осциллятора. Аналогичная диаграмма на рис. 2, *b* демонстрирует резонансную раскачку колебаний под действием третьей гармоники при  $A = 9.66$ .

В работе [23] предложена идея использовать ситуации целочисленного отношения частот малых и больших колебаний с резонансным возбуждением колебаний посредством гармоник для построения системы с аттракторами типа Смейла–Вильямса на основе двух подсистем – слабо связанных осцилляторов Бонхоффера–ван дер Поля, пребывающих поочередно в режиме активности или подавления благодаря модуляции управляющего возбуждением параметра в

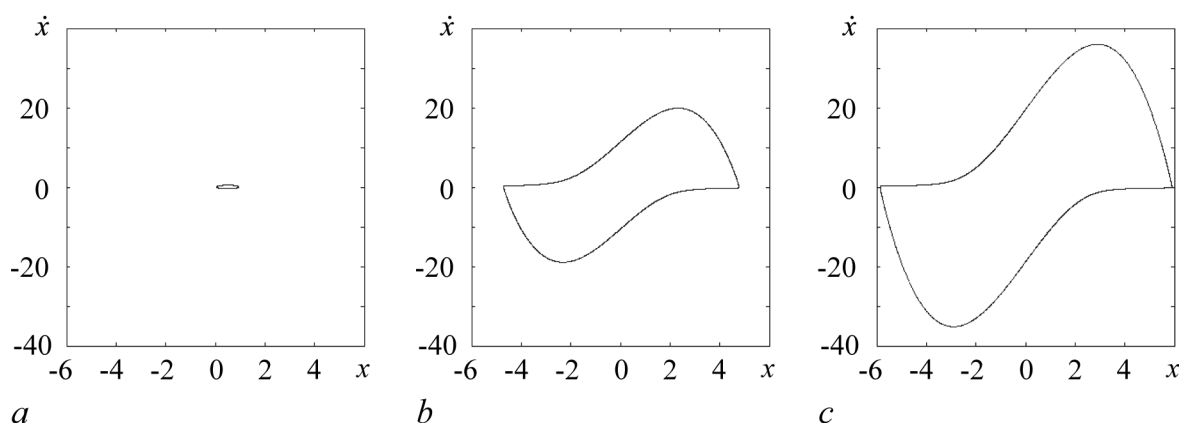


Рис. 1. Эволюция фазовых портретов модели (1) в случае  $K = 0.5$  для различных значений параметров: *a* –  $A = 0.3$ , частота колебаний  $\omega \approx 1$ ; *b* –  $A = 5.5$ , частота колебаний  $\omega \approx 1/2$ ; *c* –  $A = 8.5$ , частота колебаний  $\omega \approx 1/3$

Fig. 1. Evolution of phase portraits for the model (1) in the case  $K = 0.5$  for different values of the parameters: *a* –  $A = 0.3$ , oscillation frequency  $\omega \approx 1$ ; *b* –  $A = 5.5$ , oscillation frequency  $\omega \approx 1/2$ ; *c* –  $A = 8.5$ , oscillation frequency  $\omega \approx 1/3$



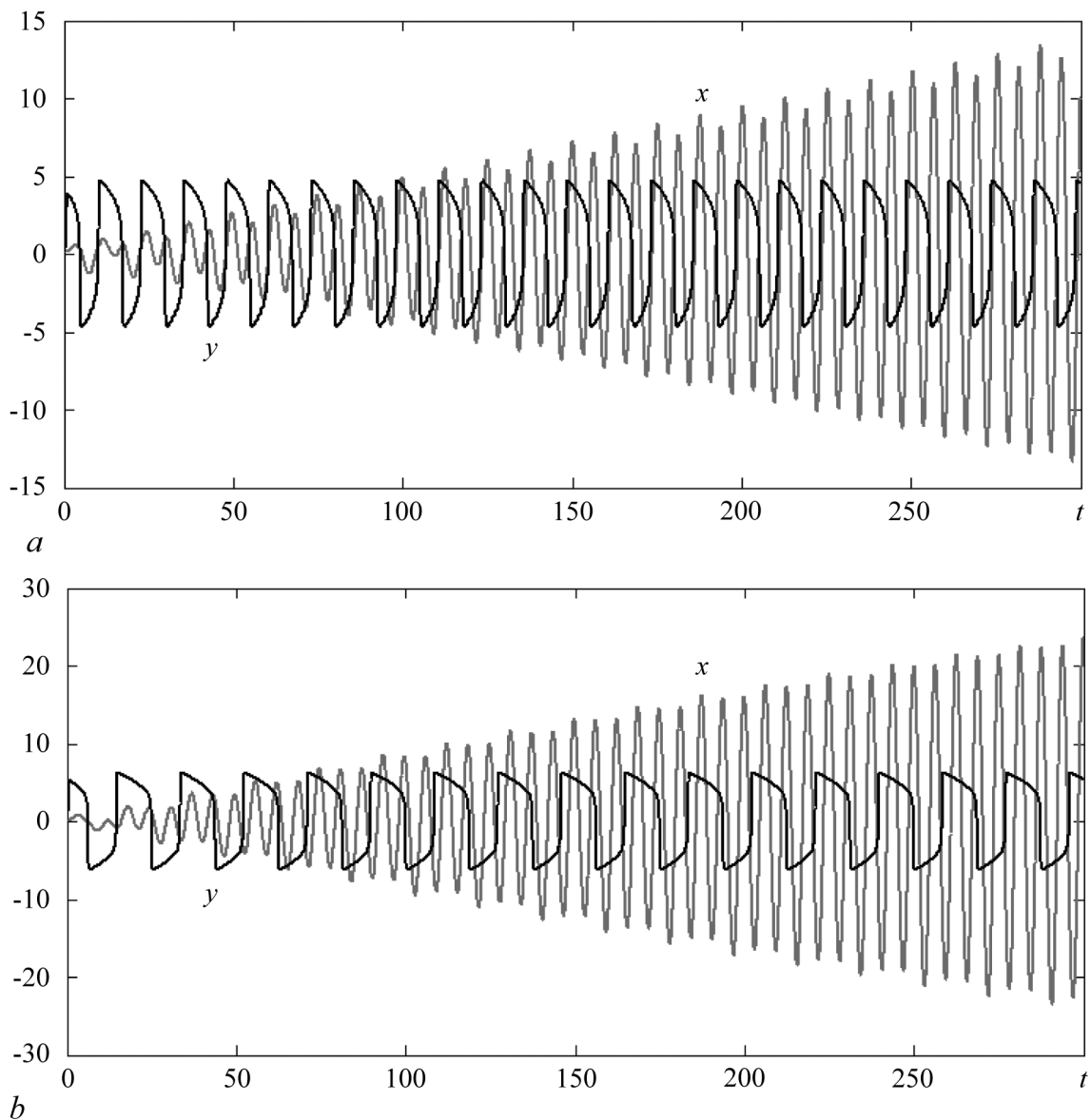


Рис. 2. Резонансная раскачка колебаний линейного осциллятора под действием второй (а) и третьей (б) гармоники автоколебательной системы. Графики построены по результатам численного решения системы уравнений  $\ddot{x} - (A - x^2)\dot{x} + x = K$ ,  $\ddot{y} + y = \varepsilon x$  при  $K = 0.5$ ,  $\varepsilon = 0.1$  и различных значениях параметра  $A$ : а - 5.5, б - 9.66

Fig. 2. Resonant excitation of a linear oscillator by the second (a) and the third (b) harmonics of the self-oscillating system as obtained from numerical solution of the set of equations  $\ddot{x} - (A - x^2)\dot{x} + x = K$ ,  $\ddot{y} + y = \varepsilon x$  at  $K = 0.5$ ,  $\varepsilon = 0.1$ ,  $A = 5.5$  (a) and  $A = 9.66$  (b)

противофазе для одной и другой подсистемы. При этом параметры подбираются так, чтобы на стадии активности релаксационные колебания имели период в целое число раз больший, нежели период малых колебаний. Благодаря передаче возбуждения попеременно от одного осциллятора к другому, в фазовом пространстве отображения, описывающего изменение состояния системы за период модуляции, могут реализоваться аттракторы Смейла–Вильямса с различными значениями фактора растяжения угловой переменной, в качестве которой выступает фаза колебаний. Аналогичный принцип был использован в работе [24] для построения механической системы с гиперболическим аттрактором на основе маятников Фруда с попеременным торможением.

В настоящей работе мы покажем, что при введении дополнительной цепи запаздывающей обратной связи оказывается возможным реализовать аттрактор Смейла–Вильямса в системе на основе всего лишь одного осциллятора Бонхоффера–ван дер Поля с модуляцией параметра. Соответствующее электронное устройство оказывается проще и содержит меньше компонентов, чем система на основе двух осцилляторов. С точки зрения математического описания и теории динамических систем, она сложнее, поскольку из-за наличия запаздывания фазовое пространство оказывается бесконечномерным.

## 2. Осциллятор с дополнительной запаздывающей обратной связью и модуляцией параметра возбуждения

Рассмотрим осциллятор Бонхоффера–ван дер Поля, у которого управляющий параметр медленно изменяется во времени по периодическому закону, обеспечивая попеременное возбуждение и затухание колебаний, и введена дополнительная запаздывающая обратная связь. Пусть на стадии возбуждения в течение некоторого времени параметр остается постоянным и равным максимальному значению  $a$ , далее он убывает до отрицательной величины ( $-c$ ), и затем вновь нарастает, достигая максимального значения. Уравнения динамики запишем в следующем виде:

$$\ddot{x} - (f(t/T + 1/4) - x^2)\dot{x} + x = K + \varepsilon(x(t - \tau) - x), \quad (2)$$

где  $x$  – динамическая переменная,  $K$  – параметр,  $\varepsilon$  – коэффициент, характеризующий величину запаздывающей обратной связи,  $\tau$  – время запаздывания. Функция  $f$  определяет зависимость от времени управляющего параметра  $A$ , и на периоде своего аргумента, заданном равным единице, дается соотношениями

$$f(\xi) = \begin{cases} a, & 0 < \xi \leq \tau_1, \\ \frac{(a - c)\xi + c\tau_1 - a\tau_2}{\tau_1 - \tau_2}, & \tau_1 < \xi \leq \tau_2, \\ \frac{(c - a)\xi + a\tau_2 - c}{\tau_2 - 1}, & \tau_2 < \xi \leq 1. \end{cases} \quad (3)$$

Важно подчеркнуть, что система с запаздыванием характеризуется бесконечной размерностью фазового пространства [25–28]. В самом деле, чтобы указать состояние, позволяющее однозначно определить последующую динамику, нужно задать не только значения  $x$  и  $\dot{x}$  в начальный момент времени, но еще и функцию  $x(t - \tau)$  на предшествующем интервале времени длительности  $\tau$ .

Можно определить стробоскопическое отображение системы (2) (отображение Пуанкаре) за период модуляции  $T$ , записав его формально как

$$\mathbf{X}_{n+1} = \mathbf{F}_T(\mathbf{X}_n), \quad (4)$$

однако вектор  $\mathbf{X}_n$ , задающий состояние системы в момент  $t_n = nT$ , в рассматриваемом случае должен интерпретироваться как элемент бесконечномерного пространства.

Поясним принцип функционирования системы в режиме с гиперболическим аттрактором. На стадии активности осциллятор совершает автоколебания релаксационного типа. При соответствующем подборе параметра  $a$  основная частота автоколебания в целое число раз  $M$  меньше, чем частота малых колебаний (конкретно мы будем рассматривать случаи  $M = 2$  и  $3$ ). В течение стадии затухания колебания практически исчезают, но, когда приходит время для новой стадии активности, возникновение колебаний стимулируется резонансным образом  $M$ -й гармоникой

сигнала, который пришел по цепи запаздывающей обратной связи, будучи испущен на стадии присутствия развитых релаксационных колебаний осциллятора. Поэтому фаза этих колебаний отвечает фазе основной составляющей колебаний, умноженной на фактор  $M$ . В результате, когда вновь возникшие колебания осциллятора приблизятся к установившемуся режиму релаксационных автоколебаний, их фаза будет отвечать умноженной на  $M$  фазе колебаний на предыдущей стадии активности. Далее процесс раз за разом повторяется. Поэтому для фаз колебательного процесса на последовательных стадиях активности реализуется растягивающее отображение окружности. При сжатии по остальным направлениям в фазовом пространстве это соответствует формированию соленоида Смейла–Вильямса в пространстве состояний для отображения Пуанкаре (4). В рассматриваемой задаче этот соленоид представляет собой объект, вложенный в бесконечномерное фазовое пространство отображения (4).

Обратимся к иллюстрациям функционирования системы, опираясь на результаты численного моделирования. Решение уравнений осуществлялось методом Рунге–Кутты 4 порядка, адаптированным для системы с запаздыванием. Для этого текущие значения переменных и функций на каждом шаге разностной схемы сохраняются в виде массива, содержащего данные на предыдущем интервале времени  $\tau$ , с тем, чтобы быть использованными в нужный момент выполнения вычислений, когда требуется подставить запаздывающие значения этих величин.

На рис. 3 и 4 показаны графики зависимости от времени для переменной  $x$  и ее производной на протяжении нескольких периодов модуляции, когда передача возбуждения от предыдущей стадии активности к следующей осуществляется на второй и третьей гармонике, соответственно, для  $a = 5.5$  и  $9.66$ . Остальные параметры

$$K = 0.5, \quad c = -2, \quad \tau_1 = 0.4, \quad \tau_2 = 0.5, \quad \varepsilon = 0.01, \quad T = 200, \quad \tau = T/2. \quad (5)$$

Чтобы на количественном уровне убедиться в наличии соответствия между динамикой системы за период модуляции и процедурой, определяющей формирование соленоидов Смейла–Вильямса, обратимся к построению диаграмм в виде зависимости фазы на очередной стадии активности от фазы на предыдущей стадии активности. Следует отметить, что в области развитых автоколебаний форма колебаний существенно отличается от синусоидальной, поэтому вычисление фазы через арктангенс отношения переменной и ее производной приводит к неудовлетворительным результатам. Альтернативой является использование величины, определяющей временной сдвиг относительно заданного начала отсчета, нормированный на характерный период колебаний. Пусть  $t$  – момент начала торможения осциллятора,  $t_1$  и  $t_2$  – предшествующие моменты прохода осциллятора через сечение  $x = 0$ , где  $t_2 > t_1$ . Тогда можно определить угловую (фазовую) переменную, принадлежащую интервалу  $[0, 1]$  согласно соотношению  $\varphi = (t - t_2)/(t_2 - t_1)$ . Вычисление этой величины легко программируется и выполняется в процессе численного моделирования динамики системы.

Диаграммы на рис. 5, построенные по результатам численного решения уравнений (2) на большом количестве периодов модуляции, иллюстрируют трансформацию фаз колебаний на последовательных стадиях активности в соответствии с двукратно растягивающим отображением окружности при  $a = 5.5$  (a) и трехкратно растягивающим отображением при  $a = 9.66$  (b).

На рис. 6 показаны портреты аттракторов стробоскопического отображения. Это двумерные проекции соленоидов Смейла–Вильямса для отображения Пуанкаре нашей системы с бесконечномерным фазовым пространством. Имеющая место фрактальная поперечная структура волокон неразличима из-за высокой степени поперечного сжатия на каждом шаге отображения.

Для системы с запаздыванием полное количество показателей Ляпунова бесконечно. Тем не менее, мы можем найти несколько первых показателей в порядке убывания их величин в рамках методики Бенеттина, адаптированной для системы с запаздыванием [27–30]. Для этого

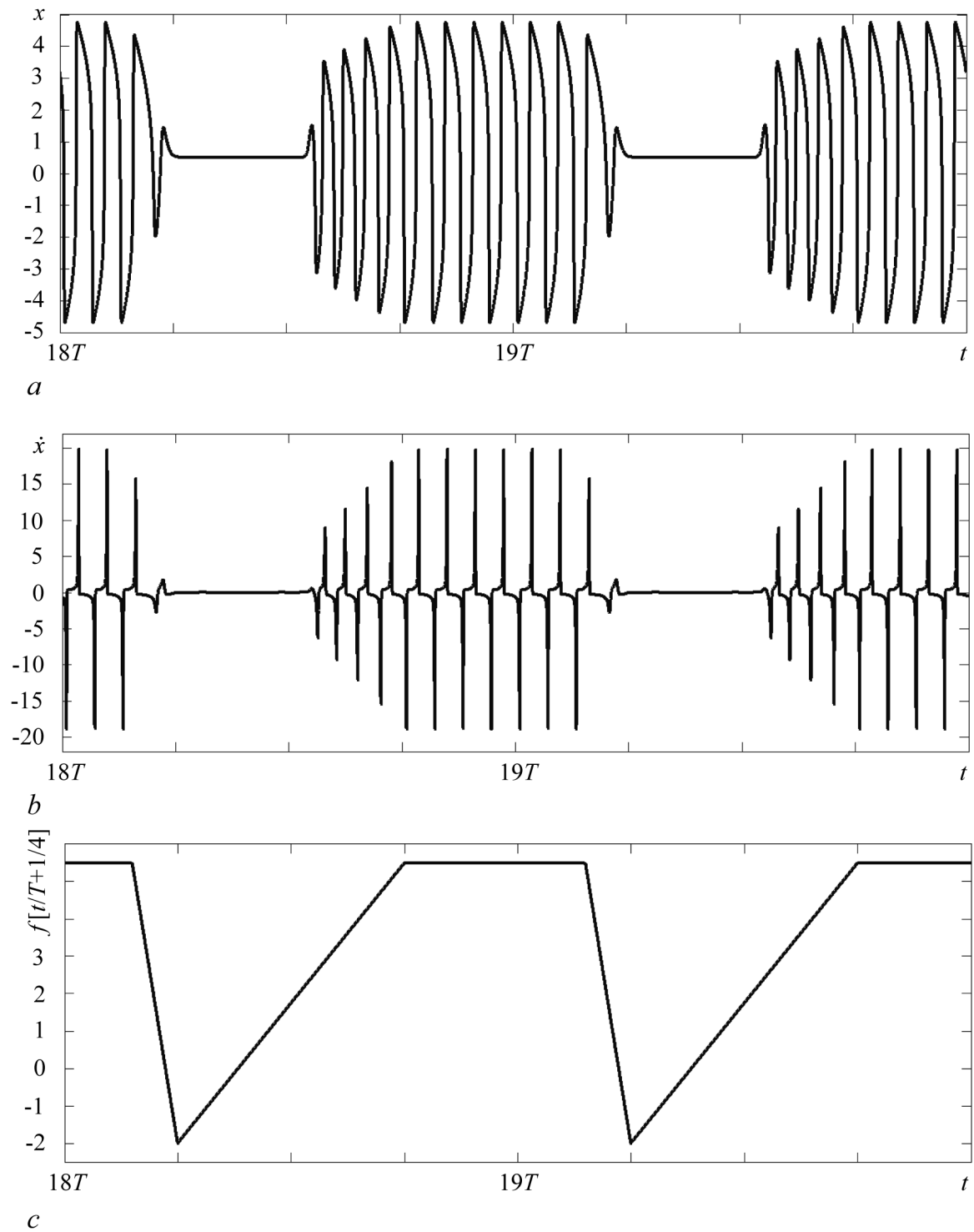


Рис. 3. *a, b* – реализации  $x(t)$  и  $\dot{x}(t)$  системы (2),  $a = 5.5$ ,  $K = 0.5$ ,  $c = -2$ ,  $\varepsilon = 0.01$ ,  $T = 200$ ,  $\tau = T/2$ ,  $\tau_1 = 0.4$ ,  $\tau_2 = 0.5$ ; *c* – вид функции  $f$ , отвечающей за модуляцию управляющего параметра

Fig. 3. *a, b* – waveforms  $x(t)$  and  $\dot{x}(t)$  of the system (2),  $a = 5.5$ ,  $K = 0.5$ ,  $c = -2$ ,  $\varepsilon = 0.01$ ,  $T = 200$ ,  $\tau = T/2$ ,  $\tau_1 = 0.4$ ,  $\tau_2 = 0.5$ ; *c* – the function  $f$  governing the modulation of the control parameter

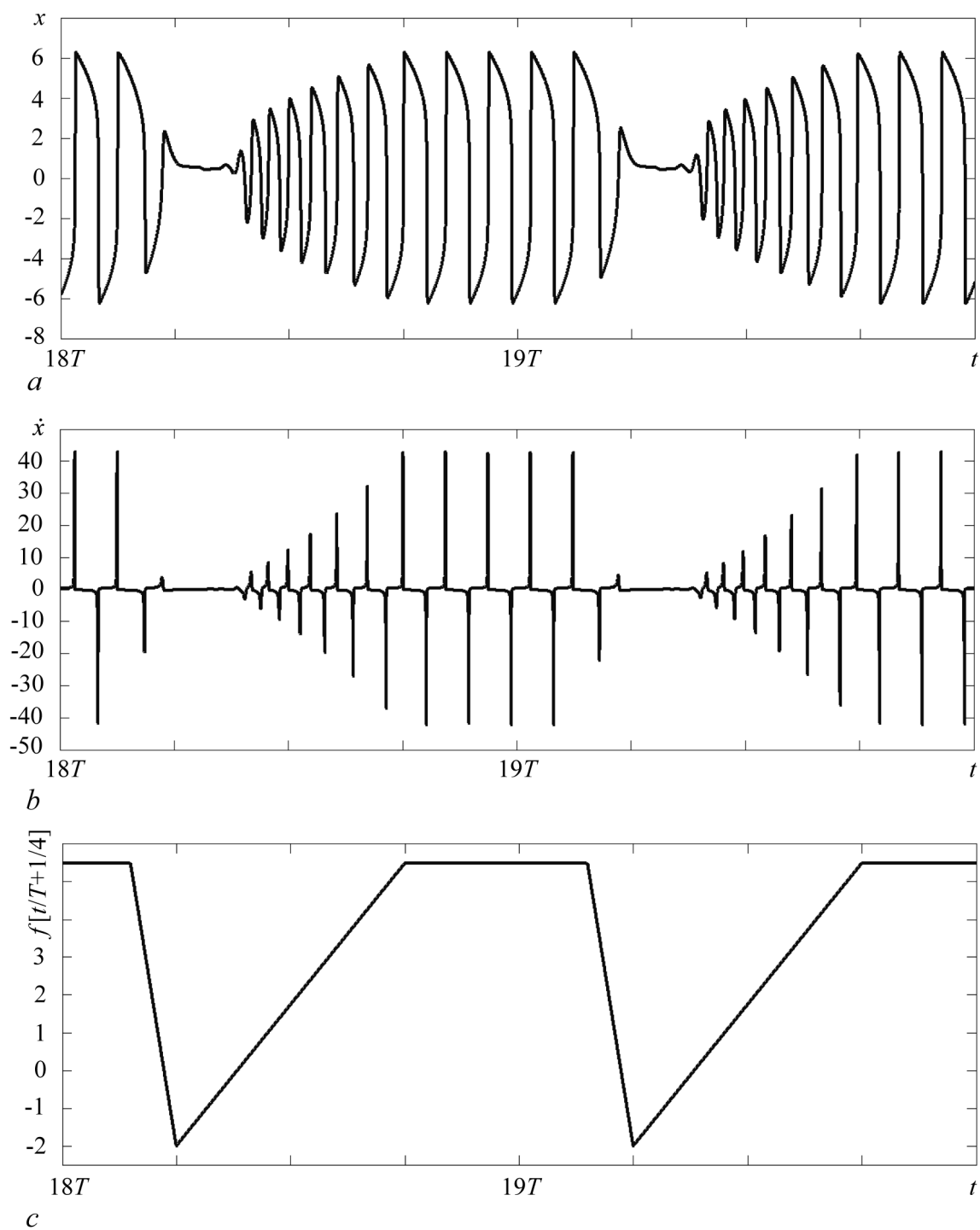


Рис. 4. *a, b* – реализации  $x(t)$  и  $\dot{x}(t)$  системы (2),  $a = 9.66$ ,  $K = 0.5$ ,  $c = -2$ ,  $\varepsilon = 0.01$ ,  $T = 200$ ,  $\tau = T/2$ ,  $\tau_1 = 0.4$ ,  $\tau_2 = 0.5$ ; *c* – вид функции  $f$ , отвечающей за модуляцию управляющего параметра

Fig. 4. *a, b* – waveforms  $x(t)$  and  $\dot{x}(t)$  of the system (2),  $a = 9.66$ ,  $K = 0.5$ ,  $c = -2$ ,  $\varepsilon = 0.01$ ,  $T = 200$ ,  $\tau = T/2$ ,  $\tau_1 = 0.4$ ,  $\tau_2 = 0.5$ ; *c* – the function  $f$  governing the modulation of the control parameter

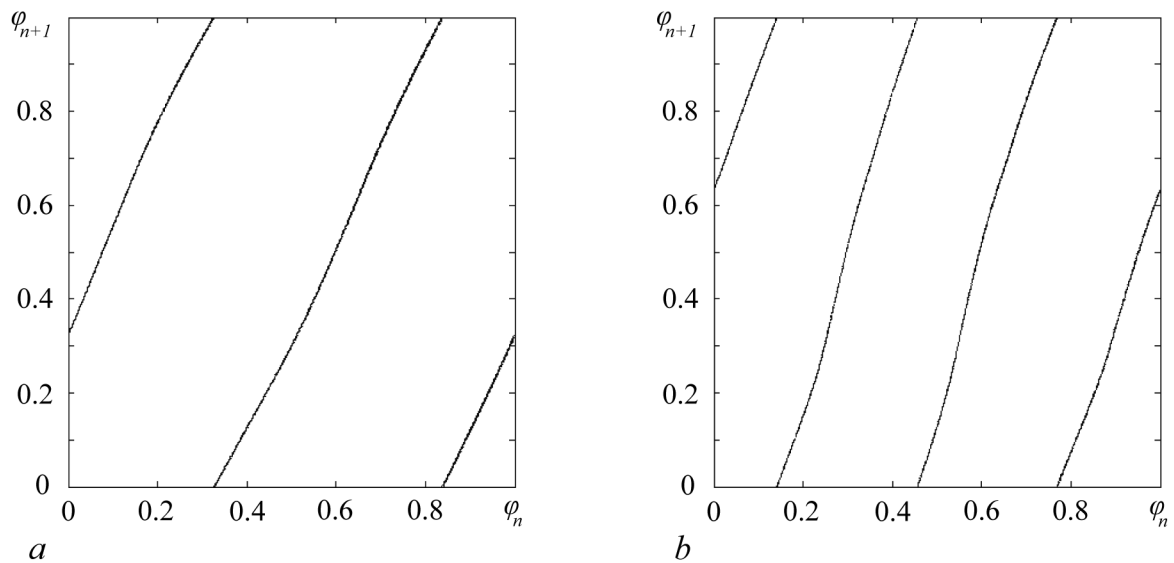


Рис. 5. Фазовые диаграммы системы (2), параметры  $a = 5.5$  (а) и  $a = 9.66$  (б). Остальные параметры:  $K = 0.5$ ,  $c = -2$ ,  $\varepsilon = 0.01$ ,  $T = 200$ ,  $\tau = T/2$ ,  $\tau_1 = 0.4$ ,  $\tau_2 = 0.5$

Fig. 5. Iteration diagrams for the oscillation phases of the system (2) at parameters  $a = 5.5$  (a) and  $a = 9.66$  (b). Other parameters are  $K = 0.5$ ,  $c = -2$ ,  $\varepsilon = 0.01$ ,  $T = 200$ ,  $\tau = T/2$ ,  $\tau_1 = 0.4$ ,  $\tau_2 = 0.5$

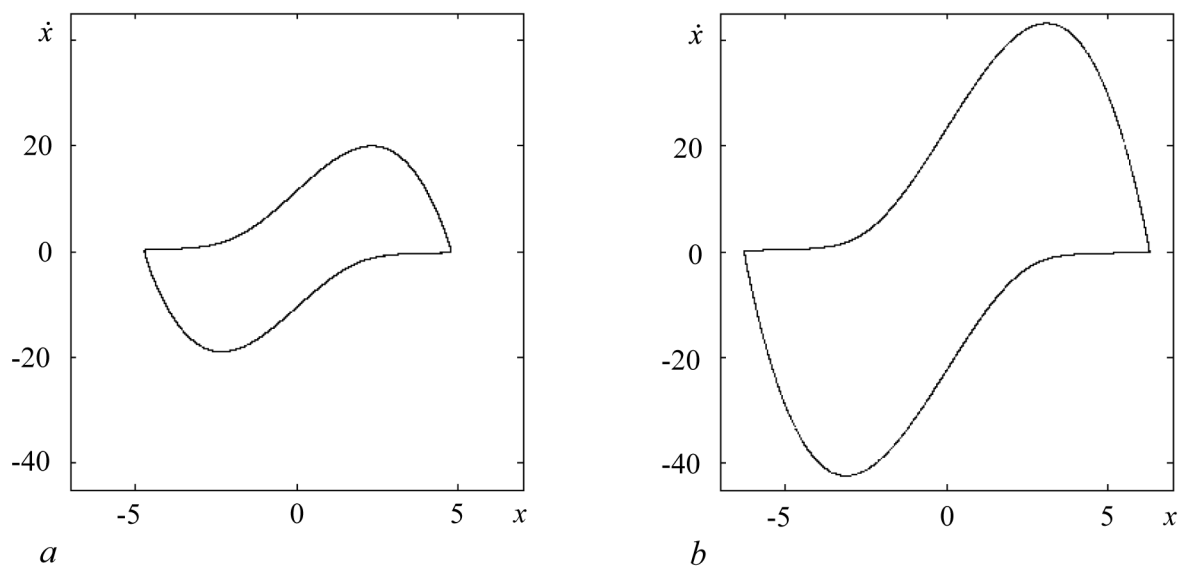


Рис. 6. Портрет аттрактора отображения Пуанкаре за период модуляции в проекции на плоскость переменных  $(x, \dot{x})$  при  $a = 5.5$  (а) и  $a = 9.66$  (б). Остальные параметры:  $K = 0.5$ ,  $c = -2$ ,  $\varepsilon = 0.01$ ,  $T = 200$ ,  $\tau = T/2$ ,  $\tau_1 = 0.4$ ,  $\tau_2 = 0.5$

Fig. 6. Portraits of attractors of the Poincaré map over the modulation period in the projection onto a plane of variables  $(x, \dot{x})$  at  $a = 5.5$  (a) and  $a = 9.66$  (b). Other parameters are  $K = 0.5$ ,  $c = -2$ ,  $\varepsilon = 0.01$ ,  $T = 200$ ,  $\tau = T/2$ ,  $\tau_1 = 0.4$ ,  $\tau_2 = 0.5$

выполняется одновременно численное решение уравнения (2) совместно с соответствующим числом уравнений в вариациях

$$\ddot{\tilde{x}} - (f(t/T + 1/4) - x^2)\dot{\tilde{x}} + 2x\dot{\tilde{x}} + \tilde{x} = \varepsilon(\tilde{x}(t - \tau) - \tilde{x}) \quad (6)$$

и с ортогонализацией векторов возмущения по Граму–Шмидту на каждом шаге интегрирования уравнений. (Заметим, что вектор возмущения задается функцией  $\tilde{x}(t)$  на конечном интервале, равном времени запаздывания.) Показатели Ляпунова аттрактора, показанного на рис. 6, а, для отображения за период составляют

$$\Lambda = \{0.690, -7.950, -8.750, \dots\}, \quad (7)$$

а размерность аттрактора в стробоскопическом сечении по Каплану–Йорке  $D_{KY} = 1 + \Lambda_1/|\Lambda_2| \approx 1.09$ . Для аттрактора, показанного на рис. 6, б, показатели Ляпунова

$$\Lambda = \{1.081, -8.642, -9.270, \dots\}, \quad (8)$$

а размерность по Каплану–Йорке  $D_{KY} = 1 + \Lambda_1/|\Lambda_2| \approx 1.13$ .

Обратим внимание, что положительный показатель Ляпунова в спектре показателей (7) близок к  $\ln 2$ , а в спектре (8) – к  $\ln 3$ . Это отвечает растягивающему отображению окружности для фаз на последовательных стадиях активности, соответственно, в два и три раза, что согласуется с описанным выше механизмом функционирования системы.

На рис. 7 представлена зависимость трех показателей Ляпунова от параметра  $a$  при фиксированных остальных параметрах. Видно, что в определенных интервалах по параметру наибольший показатель Ляпунова принимает значения, соответствующие растяжению угловой переменной в 2 и 3 раза. Это отвечает реализации в системе аттракторов в виде соленоидов типа Смейла–Вильямса с двойным или тройным складыванием петли на одном шаге построения с достаточно сильным поперечным сжатием, о чем говорит наличие отрицательных показателей достаточно больших по абсолютной величине. Эти интервалы отвечают структурно устойчивому гиперболическому хаосу, о чем свидетельствует плавный характер зависимости показателя Ляпунова от параметра. В областях переходов между плато на графике можно видеть характерные для негиперболического хаоса провалы, отвечающие окнам периодичности.

На рис. 8 показана карта режимов системы (2) на плоскости параметров  $(K, a)$ . Для ее построения проводилось сканирование выбранной области по двум координатным осям на сетке с малым шагом. Каждый пиксель отмечается цветом в соответствии с диагностированным в данной точке режимом, возникающим при численном интегрировании уравнений. Если все показатели отрицательные, то это отвечает регулярному периодическому режиму, а именно, притягивающей неподвижной точке или циклу отображения Пуанкаре. Близость наибольшего показателя к нулю свидетельствует о квазипериодической динамике, чему в фазовом пространстве отображения Пуанкаре отвечает притягивающая замкнутая инвариантная кривая. Наличие положительного показателя говорит о присутствии хаотического аттрактора отображения Пуанкаре, который может быть гиперболическим или негиперболическим.

При построении карты за признак гиперболического аттрактора Смейла–Вильямса принималась близость положительного показателя Ляпунова отображения за полпериода модуляции к величине  $\ln 2$  или  $\ln 3$ , отвечающей двукратно или трехкратно растягивающему отображению окружности. Контрольные расчеты подтверждают, что область гиперболичности определяется этим методом достаточно аккуратно: вид отображения, если его строить в точках найденной области, качественно соответствует рис. 5 (графики в виде, соответственно, двух или трех ветвей, близких к прямым линиям с угловым коэффициентом 2 или 3). Гиперболический хаос, в соответствии с присущим ему свойством структурной устойчивости, занимает на плоскости параметров сплошные области, обозначенные как  $SW_2$  и  $SW_3$ .

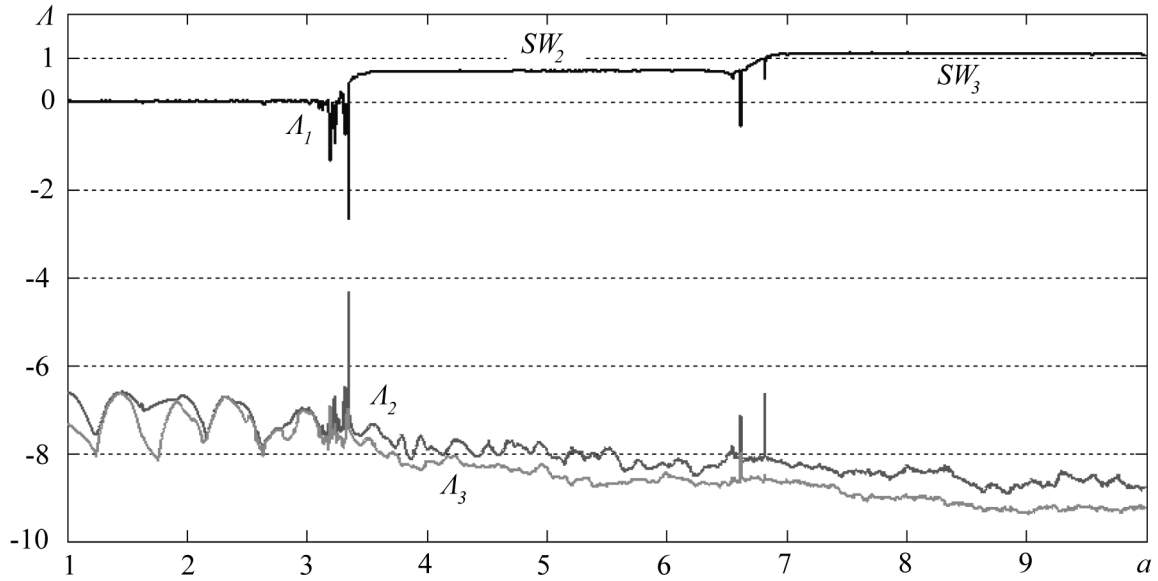


Рис. 7. Зависимость трех наибольших показателей Ляпунова системы (2) от параметра  $a$ . Остальные параметры:  $K = 0.5$ ,  $c = -2$ ,  $\varepsilon = 0.01$ ,  $T = 200$ ,  $\tau = T/2$ ,  $\tau_1 = 0.4$ ,  $\tau_2 = 0.5$ . Участки, отвечающие аттракторам Смейла–Вильямса с двукратным и трехкратным растяжением фазовой переменной, обозначены, соответственно, метками  $SW_2$  и  $SW_3$

Fig. The dependence of the largest three Lyapunov exponents of the system (2) on the parameter  $a$ . Other parameters:  $K = 0.5$ ,  $c = -2$ ,  $\varepsilon = 0.01$ ,  $T = 200$ ,  $\tau = T/2$ ,  $\tau_1 = 0.4$ ,  $\tau_2 = 0.5$ . The intervals corresponding to Smale–Williams attractors with double and triple expanding of the phase variable are indicated respectively by the labels  $SW_2$  and  $SW_3$

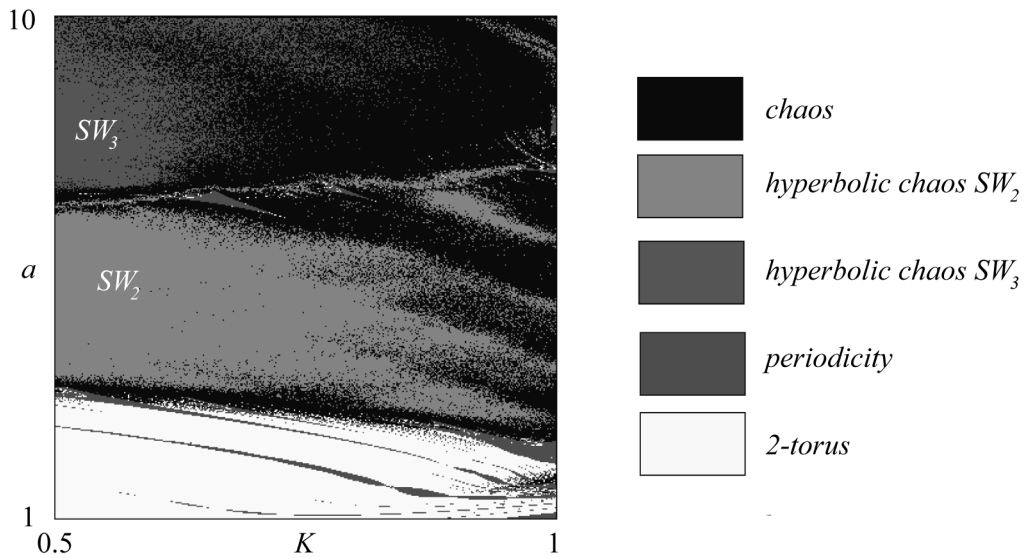


Рис. 8. Карта плоскости параметров  $(K, a)$  системы (2), где области режимов, обозначенные определенным цветом и соответствующими надписями, диагностированы по величинам показателей Ляпунова. Остальные параметры:  $c = -2$ ,  $\varepsilon = 0.01$ ,  $T = 200$ ,  $\tau = T/2$ ,  $\tau_1 = 0.4$ ,  $\tau_2 = 0.5$

Fig. 2. Chart of regimes for the parameter plane  $(K, a)$  of the system (2), where areas of regimes, which are indicated by definite color and the corresponding inscriptions, are diagnosed by the values of Lyapunov exponents. The remaining parameters are  $c = -2$ ,  $\varepsilon = 0.01$ ,  $T = 200$ ,  $\tau = T/2$ ,  $\tau_1 = 0.4$ ,  $\tau_2 = 0.5$



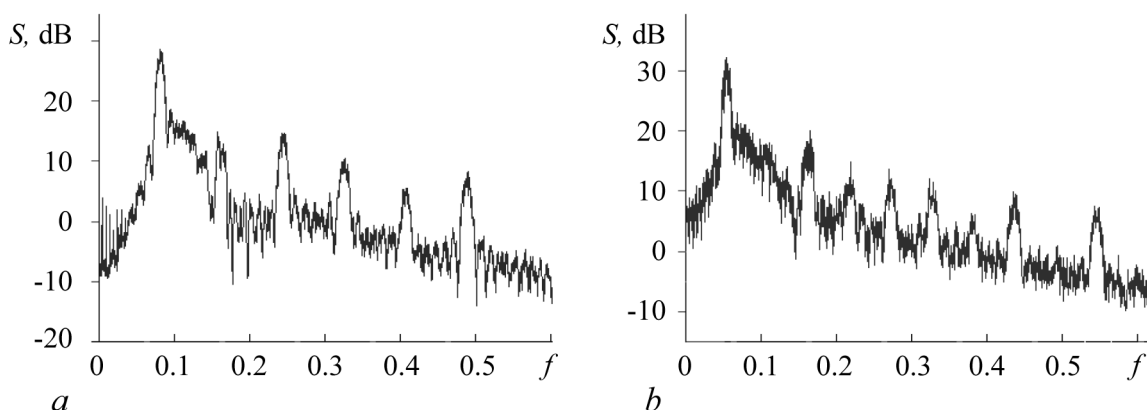


Рис. 9. Спектры колебаний сигнала  $x(t)$  в логарифмическом масштабе при  $a = 5.5$  (а) и  $a = 9.66$  (б). Остальные параметры:  $K = 0.5$ ,  $c = -2$ ,  $\varepsilon = 0.01$ ,  $T = 200$ ,  $\tau = T/2$ ,  $\tau_1 = 0.4$ ,  $\tau_2 = 0.5$

Fig. 9. The power density spectra of the signal  $x(t)$  in logarithmic scale at  $a = 5.5$  (a) and  $a = 9.66$  (b). Other parameters:  $K = 0.5$ ,  $c = -2$ ,  $\varepsilon = 0.01$ ,  $T = 200$ ,  $\tau = T/2$ ,  $\tau_1 = 0.4$ ,  $\tau_2 = 0.5$

На рис. 9 показаны спектры мощности сигнала, генерируемого системой для обоих типов аттрактора Смейла–Вильямса  $SW_2$  и  $SW_3$  (с удвоением и утроением числа петель на шаге построения). Спектры построены обработкой временных рядов для динамической переменной  $x$ , полученных при численном интегрировании уравнений, с применением методики статистической оценки спектральной плотности случайных процессов [31, 32].<sup>1</sup> Из рисунка видно, что в каждом из рассмотренных случаев спектр является сплошным, как у случайного процесса, хотя характеризуется заметной изрезанностью – наличием размытых пиков в силу наличия корреляций между формами сигнала на интервалах, разнесенных на интервал времени запаздывания.

### 3. Электронный генератор грубого хаоса и его схемотехническое моделирование

Обратимся к схемотехнической реализации описанной выше идеи получения гиперболического хаоса в системе, где автоколебательный элемент с попеременным возбуждением и затуханием дополнен цепью запаздывающей обратной связи для передачи возбуждения с удвоением фазы на очередной стадии активности благодаря использованию второй гармоники возникающих релаксационных колебаний.

На рис. 10 показана схема, основным элементом которой служит автогенератор на основе колебательного контура L1C1. Внесение отрицательного сопротивления в контур обеспечивается операционным усилителем ОА1. Величина вносимого сопротивления в каждый момент времени зависит от мгновенного сопротивления сток – исток полевого транзистора Q1. Подаваемое на затвор управляющее напряжение от источника V1 остается нулевым на протяжении определенной части периода модуляции (при этом осциллятор активен), а на остальной части периода напряжение меньше нуля, и его временная зависимость имеет вид треугольной функции (колебания подавляются). Параметры элементов отрицательного сопротивления подобраны так, что нулевое напряжение затвора отвечает установлению релаксационных колебаний с частотой вдвое

<sup>1</sup>Для получения спектра временной ряд разбивается на участки некоторой длительности, существенно превышающей характерный временной масштаб сигнала, с последующим умножением отрезка временного ряда на функцию «окна» (для улучшения качества спектрального анализа вследствие купирования эффекта несовпадения сигнала на краях интервалов разбиения). Далее выполняется преобразование Фурье на каждом участке, и квадраты амплитуд спектральных компонент усредняются по множеству участков разбиения.

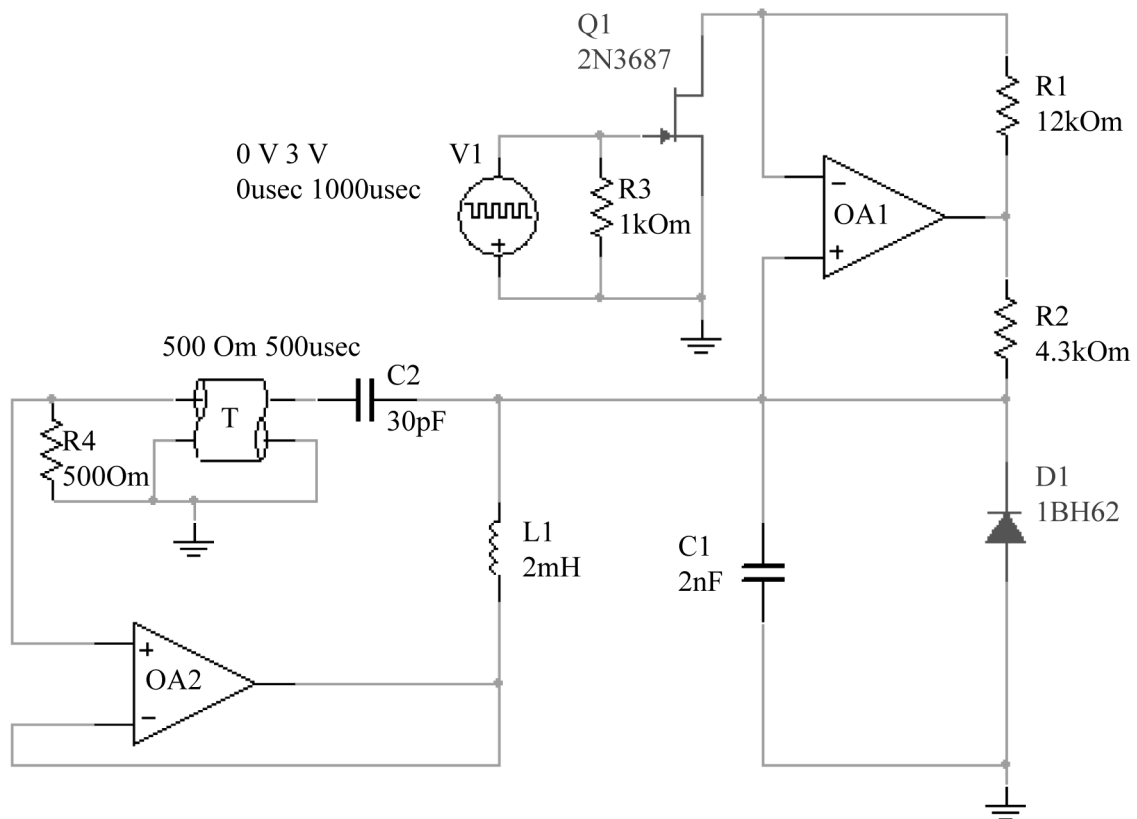


Рис. 10. Схема генератора с периодическим возбуждением и запаздывающей обратной связью, реализующая гиперболический хаос

Fig. 10. Generator circuit with periodic excitation and delayed feedback, realizing hyperbolic chaos

меньшей частоты линейных колебаний осциллятора. В колебательный контур включен диод D1, что обеспечивает ограничение уровня колебаний и наличие интенсивной второй гармоники при большой амплитуде колебаний. Когда наступает очередная стадия активности осциллятора, развитие колебаний в нем, начиная от малой амплитуды, эффективно стимулируется резонансным образом благодаря связи через конденсатор C2 за счет второй гармоники колебаний, поступивших через линию задержки T от предыдущей стадии развитых релаксационных колебаний. Поскольку передача возбуждения осуществляется через посредство второй гармоники, это должно сопровождаться удвоением фазы, что при наличии сжатия по остальным направлениям в пространстве состояний будет отвечать аттрактору типа Смейла–Вильямса в стробоскопическом отображении, определяющем эволюцию системы за период.

На рис. 11 представлены осциллограммы, полученные при моделировании в среде Multisim, которые демонстрируют функционирование схемы в соответствии с описанным механизмом.

Для подтверждения гиперболической природы хаоса надо убедиться, что последовательные стадии активности отвечают преобразованию фазы, согласно растягивающему отображению. В качестве фазы, как в предыдущем разделе, определим величину временного сдвига относительно заданного начала отсчета, нормированного на характерный период релаксационных колебаний.

Чтобы построить график для величин, относящихся к последовательным стадиям активности  $\varphi_n$  и  $\varphi_{n+1}$ , можно использовать записанные в файл данные моделирования в среде Multisim на достаточно большом времени с малым шагом выборки (на порядок меньше периода малых колебаний). Полученный обработкой этих данных график показан на рис. 12 а. Поскольку за

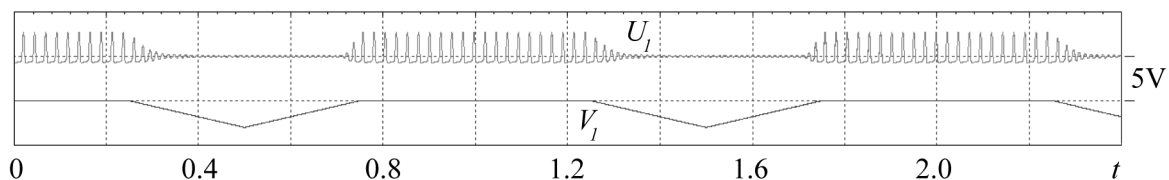


Рис. 11. Осциллограммы напряжения  $U_1$  на конденсаторе C1 и управляющего напряжения  $V_1$  на затворе полевого транзистора V1, полученные с помощью виртуального осциллографа при моделировании в среде Multisim. Номиналы элементов схемы отвечают рис. 10

Fig. 11. Waveforms of voltages  $U_1$  on capacitor C1 and control voltage  $V_1$  on the gate of field effect transistor V1 obtained with the help of a virtual oscilloscope in the Multisim simulation. The nominal values of the circuit elements correspond to Fig. 10

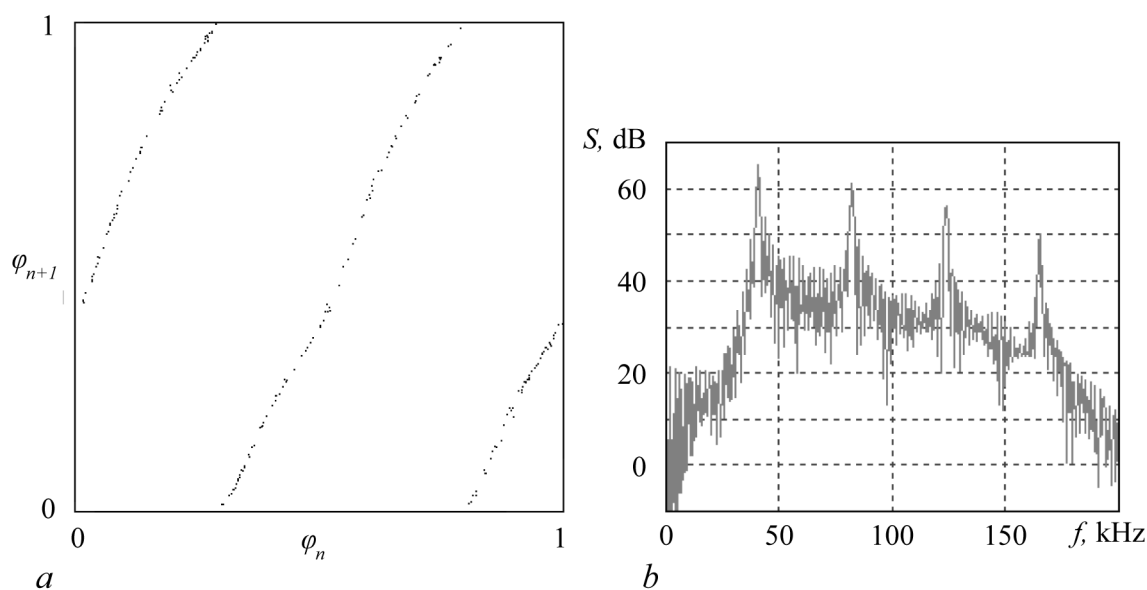


Рис. 12. Диаграмма, иллюстрирующая преобразование фаз на последовательных стадиях активности (a) и спектр колебаний в логарифмической шкале (b) для осциллятора, полученный при схемотехническом моделировании схемы рис. 10 в среде Multisim

Fig. 12. Diagram illustrating the phase transformation in successive stages of activity (a) and the oscillation spectrum in logarithmic scale (b) for the oscillator as obtained in the Multisim simulation of the circuit in Fig. 10

период модуляции имеет место удвоение фазовой переменной, то график состоит из ветвей, имеющих коэффициент наклона близкий к 2. На рис. 12, b показан спектр сигнала, порождаемого одним из осцилляторов, в логарифмическом масштабе. Спектр демонстрирует очевидное сходство с рис. 9, a, который построен для математической модели в виде уравнения с запаздыванием (2).

### Заключение

Продемонстрирована численными расчетами возможность грубого гиперболического хаоса, ассоциирующегося с аттрактором Смейла–Вильямса, в системе на основе осциллятора Бонхоффера–Ван дер Поля с запаздывающей обратной связью при попеременном возбуждении и подавлении активности за счет периодической модуляции параметра. Разработана схема электронного устройства, реализующего рассматриваемый тип динамики, и представлены подтверждающие этот факт результаты схемотехнического моделирования в программной среде Multisim.

Полученные результаты интересны в плане построения электронных генераторов шума, нечувствительных к вариации параметров и помехам, а также с точки зрения возможности реализации аналогичных явлений в системах различной природы, например, в контексте нейродинамики – для нейронов с запаздывающим взаимодействием и для аналогового моделирования такого рода систем.

Рассмотренный подход может служить примером для построения объектов различной природы с гиперболическими аттракторами на основе систем, в которых передача колебательного возбуждения между последовательными стадиями активности, разделенными стадиями затухания, осуществляется резонансным образом благодаря различию частот малых и больших колебаний в целое число раз. Схема получается структурно более простой, нежели предложенные ранее варианты систем с запаздыванием, демонстрирующих гиперболический хаос [18, 19], благодаря отсутствию вспомогательного источника сигнала на частоте, близкой к частоте используемого осциллятора.

### Библиографический список

1. *FitzHugh R.* Impulses and physiological states in theoretical models of nerve membrane // *Biophysical journal*. 1961. Vol. 1, no. 6. P. 445–466.
2. *Nagumo J., Arimoto S., Yoshizawa S.* An active pulse transmission line simulating nerve axon // *Proceedings of the IRE*. 1962. Vol. 50, no. 10. P. 2061–2070.
3. *Izhikevich E.M., FitzHugh R.* FitzHugh–Nagumo model // *Scholarpedia*. 2006. Vol. 1, no. 9. 1349.
4. *Izhikevich E.M.* *Dynamical Systems in Neuroscience: The Geometry of Excitability and Bursting*. The MIT Press, Cambridge, MA. 2010.
5. *Дмитричев А.С., Касаткин Д.В., Клиньшов В.В., Кириллов С.Ю., Масленников О.В., Щапин Д.С., Некоркин В.И.* Нелинейные динамические модели нейронов: Обзор // *Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика*. 2018. Т. 26, вып. 4. С. 5–58.
6. *Смейл С.* Дифференцируемые динамические системы // *Успехи математических наук*. 1970. Т. 25, № 1. С. 113–185.
7. *Аносов Д.В., Арансон С.Х., Гринес В.З., Плыкин Р.В., Сатаев Е.А., Сафронов А.В., Солодов В.В., Старков А.Н., Степин А.М., Шлячков С.В.* Динамические системы с гиперболическим поведением // *Итоги науки и техники. Серия «Современные проблемы математики. Фундаментальные направления»*. 1991. Т. 66. С. 5–242.
8. *Shilnikov L.* Mathematical problems of nonlinear dynamics: A tutorial // *International Journal of Bifurcation and Chaos*. 1997. Vol. 7, no. 9. Pp. 1953–2001.
9. *Синай Я.Г.* Стохастичность динамических систем // *Нелинейные волны*. М.: Наука, 1979. С. 192–212.
10. *Каток А.Б., Хасселблат Б.* Введение в современную теорию динамических систем. М.: Факториал, 1999. 768 с.
11. *Afraimovich V. and Hsu S.-B.* Lectures on chaotic dynamical systems // *AMS/IP Stud. Adv. Math*. 2003. Vol. 28.
12. *Bonatti C., Díaz L.J., Viana M.* Dynamics beyond uniform hyperbolicity: A global geometric and probabilistic perspective // *Encyclopaedia Math. Sci.* Vol. 102. Berlin: Springer. 2005.
13. *Ruelle D.* Strange attractors // *The Mathematical Intelligencer*. 1980. Vol. 2, no. 3. P. 126–137.
14. *Андронов А.А., Витт А.А., Хайкин С.Э.* Теория колебаний. М.: Физматгиз. 1959.
15. *Pugh C. and Peixoto M.M.* Structural stability // *Scholarpedia*. 2008. Vol. 3, no. 9. 4008.
16. *Рабинович М.И., Трубецков Д.И.* Введение в теорию колебаний и волн. М.: Наука, 1984.

17. Кузнецов С.П. Динамический хаос и однородно гиперболические аттракторы: От математики к физике // Успехи физических наук. 2011. Т. 181, № 2. С. 121–149.
18. Кузнецов С.П., Пономаренко В.И. О возможности реализации странного аттрактора типа Смейла–Вильямса в радиотехническом генераторе с запаздыванием // Письма в ЖТФ. 2008. Т. 34, вып. 18. С. 1–8.
19. Аржанухина Д.С., Кузнецов С.П. Грубый хаос в автономной системе с запаздыванием // Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2014. Т. 22, № 2. С. 36–49.
20. Kuptsov P.V., Kuznetsov S.P. Numerical test for hyperbolicity of chaotic dynamics in time-delay systems // Phys. Rev. E. 2016. Vol. 94, no. 1. P. 010201.
21. Kuptsov P.V., Kuznetsov S.P. Numerical test for hyperbolicity in chaotic systems with multiple time delays // Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation. 2018. Vol. 56. P. 227–239.
22. Kuznetsov S.P., Sedova Yu.V. Hyperbolic chaos in systems based on FitzHugh–Nagumo model neurons // Regular and Chaotic Dynamics. 2018. Vol. 23, no. 4. P. 329–341.
23. Doroshenko V.M., Kruglov V.P., Kuznetsov S.P. Smale–Williams solenoids in a system of coupled Bonhoeffer–van der Pol oscillators // Russian Journal of Nonlinear Dynamics, 2018. Vol. 14, no. 4. P. 435–451.
24. Kruglov V.P., Kuznetsov S.P. Hyperbolic chaos in a system of two Froude pendulums with alternating periodic braking // Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation. 2019. Vol. 67. P. 152–161.
25. Беллман Р., Кук К. Дифференциально-разностные уравнения. М.: Мир, 1967.
26. Эльсгольц Л.Э., Норкин С.Б. Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. М.: Наука, 1971.
27. Farmer J.D. Chaotic attractors of an infinite-dimensional dynamical system // Physica D: Nonlinear Phenomena. 1982. Vol. 4, no. 3. P. 366–393.
28. Yanchuk S., Giacomelli G. Spatio-temporal phenomena in complex systems with time delays // Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical. 2017. Vol. 50, no. 10. P. 103001.
29. Балякин А. А., Рыскин Н. М. Особенности расчета спектров показателей Ляпунова в распределенных автоколебательных системах с запаздывающей обратной связью // Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика. 2007. Т. 15, № 6. С. 3–21.
30. Колоскова А.Д., Москаленко О.И., Короновский А.А. Метод расчета спектра показателей Ляпунова для систем с запаздыванием // Письма в журнал технической физики. 2018. Выпуск 9. С. 19–25.
31. Свешников А.А. Прикладные методы теории случайных функций. М.: Наука, 1968.
32. Дженкинс Г., Ваттс Д. Спектральный анализ и его приложения. Т. 2. М.: Мир, 1972.

## References

1. FitzHugh R. Impulses and physiological states in theoretical models of nerve membrane. *Biophysical Journal*, 1961, vol. 1, no. 6, pp. 445–466.
2. Nagumo J., Arimoto S., Yoshizawa S. An active pulse transmission line simulating nerve axon. *Proceedings of the IRE*, 1962, vol. 50, no. 10, pp. 2061–2070.
3. Izhikevich E.M., FitzHugh R. FitzHugh–Nagumo model. *Scholarpedia*, 2006, vol. 1, no. 9, p. 1349.
4. Izhikevich E.M. *Dynamical Systems in Neuroscience: The Geometry of Excitability and Bursting*. The MIT Press, Cambridge, MA. 2010.

5. Dmitrichev A.S., Klinshov V.V., Kirillov S.Y., Maslennikov O.V., Shapin D.S., Nekorkin V.I. Nonlinear dynamical models of neurons: Review. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*, 2018, vol. 26, iss. 4, pp. 5–58 (in Russian).
6. Smale S. Differentiable dynamical systems. *Bulletin of the American mathematical Society*, 1967, vol. 73, no. 6, pp. 747–817.
7. Dynamical Systems with Hyperbolic Behaviour, D.V.Anosov (Ed.). *Encyclopaedia Math. Sci., Dynamical Systems*, vol. 9, Berlin, Springer, 1995.
8. Shilnikov L. Mathematical problems of nonlinear dynamics: A tutorial. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 1997, vol. 7, no. 09, pp. 1953–2001.
9. Sinai Ya.G. The Stochasticity of Dynamical Systems. *Selected Translations. Selecta Math. Soviet.*, 1981, vol. 1, no. 1, pp. 100–119.
10. Katok A. and Hasselblatt B. Introduction to the Modern Theory of Dynamical Systems. *Encyclopedia Math. Appl.*, vol. 54, Cambridge, Cambridge Univ. Press, 1995.
11. Afraimovich V. and Hsu S.-B. Lectures on chaotic dynamical systems. *AMS/IP Stud. Adv. Math.*, 2003, vol. 28.
12. Bonatti C., Díaz L.J., Viana M. Dynamics beyond uniform hyperbolicity: A global geometric and probabilistic perspective. *Encyclopaedia of Mathematical Sciences*, 2005, vol. 102, Mathematical Physics, III, Springer-Verlag, Berlin, p. 2.
13. Ruelle D. Strange attractors. *The Mathematical Intelligencer*, 1980, vol. 2, no. 3, p. 126–137.
14. Andronov A.A., Vitt A.A., Khaikin S.E. Theory of oscillators. Pergamon Press, Oxford, 1966.
15. Pugh C., Peixoto M.M. Structural stability. *Scholarpedia*, 2008, vol. 3, no. 9. 4008.
16. Rabinovich M.I., Trubetskov D.I. Oscillations and Waves in Linear and Nonlinear Systems. Kluwer Academic Publisher, 1989.
17. Kuznetsov S.P. Dynamical chaos and uniformly hyperbolic attractors: From mathematics to physics. *Physics-Uspekhi*, 2011, vol. 54, no. 2, pp. 119–144.
18. Kuznetsov S.P., Ponomarenko V.I. Realization of a strange attractor of the Smale–Williams type in a radiotechnical delay-feedback oscillator. *Technical Physics Letters*, 2008, vol. 34, no. 9, pp. 771–773.
19. Arzhanukhina D.S., Kuznetsov S.P. Robust chaos in autonomous time-delay system. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*, 2014, vol. 22, no. 2, pp. 36–49 (in Russian).
20. Kuptsov P.V., Kuznetsov S.P. Numerical test for hyperbolicity of chaotic dynamics in time-delay systems. *Phys. Rev. E*, 2016, vol. 94, no. 1, 010201.
21. Kuptsov P.V., Kuznetsov S.P. Numerical test for hyperbolicity in chaotic systems with multiple time delays. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 2018, vol. 56, pp. 227–239.
22. Kuznetsov S.P., Sedova Yu.V. Hyperbolic chaos in systems based on FitzHugh–Nagumo model neurons. *Regular and Chaotic Dynamics*, 2018, vol. 23, no. 4, pp. 329–341.
23. Doroshenko V.M., Kruglov V.P., Kuznetsov S.P. Smale–Williams solenoids in a system of coupled Bonhoeffer–van der Pol oscillators. *Russian Journal of Nonlinear Dynamics*, 2018, vol. 14, no. 4, p. 435–451.
24. Kruglov V.P., Kuznetsov S.P. Hyperbolic chaos in a system of two Froude pendulums with alternating periodic braking. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 2019, vol. 67, pp. 152–161.
25. Bellman R.E., Cooke K.L. Differential-difference equations. Academic Press, 2012.
26. El'sgol'ts L.E., Norkin S.B. Introduction to the Theory and Application of Differential Equations with Deviating Arguments. Academic Press, 1973.

27. Farmer J. D. Chaotic attractors of an infinite-dimensional dynamical system. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 1982, vol. 4, no. 3, pp. 366–393.
28. Yanchuk S., Giacomelli G. Spatio-temporal phenomena in complex systems with time delays. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, 2017, vol. 50, no. 10, p. 103001.
29. Balyakin A.A., Ryskin N.M. Peculiarities of calculation of the Lyapunov exponents set in distributed self-oscillated systems with delayed feedback. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*, 2007, vol. 15, no. 6, pp. 3–21 (in Russian).
30. Koloskova A.D., Moskalenko O.I., Koronovskii A.A. A method for calculating the spectrum of Lyapunov exponents for delay systems. *Technical Physics Letters*, 2018, vol. 44, no. 5, pp. 374–377.
31. Sveshnikov A.A. Applied methods of the theory of random functions. Elsevier, 2014.
32. Jenkins G.M., Watts D.G. Spectral analysis and its applications. Holden-Day, 1969.

*Кузнецов Сергей Петрович* родился в Москве (1951). Окончил Саратовский государственный университет (1973). Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук в СГУ (1977) и доктора наук (1987) по специальности радиопизика. Сотрудник Саратовского филиала Института радиотехники и электроники им. В.А. Котельникова РАН (с 1988), где в настоящее время руководит лабораторией теоретической нелинейной динамики. Главный научный сотрудник лаборатории нелинейного анализа и конструирования новых средств передвижения Удмуртского государственного университета. Профессор базовой кафедры факультета нелинейных процессов Саратовского государственного университета. Автор монографий «Strange Nonchaotic Attractors» (совместно с А. Пиковским и У. Фойдель), «Динамический хаос и гиперболические аттракторы: От математики к физике» и «Hyperbolic Chaos: a Physicist's View». Автор учебно-научных монографий «Динамический хаос» и «Нелинейные колебания» (в соавторстве с А.П. Кузнецовым и Н.М. Рыскиным). Опубликовал свыше 200 научных статей по нелинейной динамике, радиопизике и электронике. Под руководством С.П. Кузнецова защищены двенадцать кандидатских диссертаций. Лауреат государственной научной стипендии для ученых России (1994–1996). Член редакционной коллегии журналов «Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика», «Regular and Chaotic Dynamics», «Нелинейная динамика», «Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия «Физика».

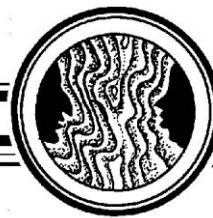


Россия, 410019 Саратов, ул. Зеленая, 38  
 Саратовский филиал ИРЭ имени В.А. Котельникова РАН  
 E-mail: spkuz@yandex.ru



*Седова Юлия Викторовна* родилась в Саратове (1979), окончила Саратовский госуниверситет (2001), защитила диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук в СГУ (2004) по специальности «Радиопизика». Работает в СФИРЭ им. В.А. Котельникова РАН старшим научным сотрудником. Опубликовала 40 научных статей по направлению нелинейная динамика.

Россия, 410019 Саратов, ул. Зеленая, 38  
 Саратовский филиал ИРЭ имени В.А. Котельникова РАН  
 E-mail: sedovayv@yandex.ru



## О развитии качественных методов решения нелинейных уравнений и некоторых последствиях\*

*Е. М. Богатов*

Старооскольский технологический институт им. А.А. Угарова,  
филиал Национального исследовательского технологического университета «МИСиС»  
Россия, 309516 Старый Оскол Белгородской обл., мкр. Макаренко, 42  
E-mail: e.bogolyubsky@yandex.ru

Поступила в редакцию 28.04.2018, принята к публикации 29.10.2018

**Цель.** Целью работы является исследование развития метода неподвижной точки и теории степени отображения, связанных с именами П. Боля, Л. Брауэра, К. Борсука, С. Улама и др. и его применения к изучению поведения траекторий динамических систем и устойчивых состояний упорядоченных сред. **Метод.** Исследование основано на анализе фундаментальных работ перечисленных математиков 1900–1930 гг., а также более поздних результатов Н. Левинсона, Т. Воловика, В. Минеева, Дж. Толанда и Х. Хофера прикладного характера. **Результаты.** Работы Брауэра внесли существенный вклад в теорию разрешимости нелинейных уравнений вида  $f(x) = x$  в конечномерной постановке. Этому предшествовало изучение сингулярных точек векторных полей, предпринятое А. Пуанкаре, а также доказательство теоремы Боля о невозможности отображения круга на свою границу. Первым математиком, использовавшим метод неподвижной точки в изучении систем дифференциальных уравнений, был Боль. Эта тема получила своё продолжение через 40 лет в работах Левинсона, который показал наличие в детерминированных диссипативных динамических системах хотя бы одного периодического решения. Введённое Брауэром фундаментальное понятие степени отображения ( $\deg f$ ) «заиграло» в самых неожиданных ситуациях. Исследования Воловика и Минеева выявили прямую зависимость дефектов упорядоченных сред от топологического инварианта  $\deg f$ , характеризующего отображение  $f$  окрестности особой точки на сферу. Другое нестандартное применение степени отображения обнаружили Толанд и Хофер при изучении некоторых гамильтоновых систем. Вычисление  $\deg f$  для отображений специального вида помогли им доказать существование периодических, гомоклинических и гетероклинических траекторий указанных систем. **Обсуждение.** Метод неподвижной точки и степень отображения – основные инструменты качественных методов решения нелинейных уравнений. Они оказались востребованными не только в рамках математики, но и в приложениях, причём эта тенденция, по-видимому, будет сохраняться и при переходе к бесконечномерному случаю.

**Ключевые слова:** история нелинейного функционального анализа, индекс Кронекера–Пуанкаре, качественные методы, топологические методы анализа, степень отображения, теорема о неподвижной точке, теорема об антиподальном отображении, устойчивые неоднородные состояния в упорядоченных средах, динамические системы, хаотическая динамика.

**Образец цитирования:** Богатов Е.М. О развитии качественных методов решения нелинейных уравнений и некоторых последствиях // Изв. вузов. ПНД. 2019. Т. 27, № 1. С. 96–114. <https://doi.org/10.18500/0869-6632-2019-27-1-96-114>

**Благодарности:** Автор выражает благодарность профессору Р.Р. Мухину (СТИ НИТУ МИСиС, Старый Оскол) за постановку задачи и полезные обсуждения, профессору Ю.Е. Гликлиху (ВГУ, Воронеж) за консультации по топологическим методам анализа и знакомство с рукописью, а также В.П. Богатовой за помощь в доступе к первоисточникам и перевод с немецкого.

\*Часть результатов данной работы докладывалась на XXXVII годичной научной конференции СПбФ ИИЕТ РАН, секция история математики и механики [1]. (XXXVII годичная международная научная конференция Санкт-Петербургского отделения Национального комитета по истории и философии науки и техники Российской академии наук: Коммеморативные (юбилейные) практики в истории российской науки).



## On the development of qualitative methods for solving nonlinear equations and some consequences

*E. M. Bogatov*

Stary Oskol Technological Institute  
of National Research University of Science and Technology «MISIS»  
42, mkr. Makarenko, 309516 Stary Oskol, Belgorod region, Russia  
E-mail: e.bogolyubsky@yandex.ru

*Received 28.04.2018, accepted for publication 29.10.2018*

**Aim.** The aim of the paper is investigation of the development of the fixed-point method and mapping degree theory associated with the names of P. Bohl, L. Brouwer, K. Borsuk, S. Ulam and others and its application to study of the trajectories of dynamical systems behavior and stable states of ordered media. **Method.** The study is based on an analysis of the fundamental works of the mentioned mathematicians 1900–1930's, as well as later results of N. Levinson, G. Volovik, V. Mineev, J. Toland and H. Hofer of an applied nature. **Results.** Brouwer made an essential contribution to the solvability theory of nonlinear equations of the form  $f(x) = x$  in a finite-dimensional statement. This was preceded by the study of singular points of vector fields undertaken by H. Poincaré, as well as the proof of Bohl theorem on the impossibility of mapping a disk onto its boundary. The first mathematician who used the fixed point method in the study of systems of differential equations was Bohl. This theme was continued 40 years later in the works of Levinson, who showed the existence at least one periodic solution in deterministic dissipative dynamical systems. The fundamental concept of the mapping degree ( $\deg f$ ) introduced by Brouwer «began to play» in the most unexpected situations. Investigations of Volovik and Mineev revealed a direct dependence of ordered media defects on the topological invariant  $\deg f$ , characterizing the transformation  $f$  of a neighborhood of a singular point onto the sphere. Another non-standard application of the mapping degree was discovered by Toland and Hofer in the study of some Hamiltonian systems. Calculating  $\deg f$  for mappings of a special kind helped them to prove the existence of periodic, homoclinic, and heteroclinic trajectories of these systems. **Discussion.** The fixed point method and mapping degree are the basic tools of qualitative methods for solving nonlinear equations. They proved to be in demand not only within the framework of mathematics, but also in applications, and this trend, apparently, will persist even in the transition to the infinite-dimensional case.

*Key words:* history of nonlinear functional analysis, Kronecker–Poincaré index, qualitative methods, topological methods of analysis, the degree of mapping, fixed point theorem, antipodal theorem, stable inhomogeneous states in ordered media, dynamical systems, chaotic dynamics.

*Reference:* Bogatov E.M. On the development of qualitative methods for solving nonlinear equations and some consequences. *Izvestiya VUZ, Applied Nonlinear Dynamics*, 2019, vol. 27, no. 1, pp. 96–114. <https://doi.org/10.18500/0869-6632-2019-27-1-96-114>

*Acknowledgements.* The author thanks Professor R. R. Mukhin (Stary Oskol Technological Institute of «MISIS») for posing the problem and useful discussions, Professor Yu. E. Gliklikh ( Voronezh State University) for advice on topological methods of analysis and familiarity with the manuscript, as well as V.P. Bogatova for help with access to primary sources and translation from German.

### Введение

Качественные методы, общая постановка которых была дана в работах А. Пуанкаре (см. ниже), получили свое естественное продолжение в теории динамических систем. Росту интереса к этой теории предшествовали, во-первых, мемуар самого Пуанкаре 1912 г., содержащий его последнюю геометрическую теорему, и, во-вторых – работа Дж. Биркгофа 1927 г., посвящённая самим динамическим системам. Указанные исследования Биркгофа и Пуанкаре достаточно полно проанализированы в историко-математической литературе, чего нельзя сказать про работы их предшественников и про результаты их последователей.

Известно, что Анри Пуанкаре является родоначальником топологии (*Analysis Situs*), с точки зрения которой любое тело (область в трёхмерном пространстве) можно считать эквивалентным, «качественно не отличимым» от шара<sup>1</sup>, если его можно превратить в шар путём непрерывной деформации [2, с. 635; 3, с. 100]. Данная идея была развита голландским учёным Л. Брауэром

<sup>1</sup>На эту же, «топологическую» точку зрения стали, по существу, и художники-кубисты по инициативе соотечест-

в 1911 г., который пришёл к определению топологически (точнее говоря, *гомотопически* – см. ниже) эквивалентных функций и, как следствие, уравнений<sup>2</sup> с областью определения в конечномерном пространстве.

Вокруг этих соображений и будет строиться изложение материала данной статьи. Точнее говоря, основной своей задачей автор считает поиск ответа на следующие вопросы:

- что предшествовало вышеуказанным научным достижениям;
- какая между ними причинно-следственная связь;
- чем были мотивированы данные исследования;
- какое они нашли продолжение в работах отечественных и зарубежных учёных;
- какое они нашли применение в изучении устойчивых состояний упорядоченных сред и динамических систем.

Относительно последнего вопроса отметим, что существование дефектов в некоторых средах есть следствие их внутренней симметрии (например, наличие дислокаций является следствием периодичности кристаллической решётки). Однако прямая зависимость между структурой вещества и типами персистентных дефектов в нём была установлена лишь в 1976 г. (советскими физиками Г. Воловиком и В. Минеевым [5]) с помощью степени отображения, на которой и будет, по существу, сосредоточено внимание.

Автор не претендует на охват эволюции всего спектра качественных методов, а только наиболее известной и значимой его части, разработанной в первой трети XX в., относящейся к нелинейному функциональному анализу, имеющему выход на физические приложения.

Настоящая статья является продолжением работы, начатой в [6–7].

## 1. Краткая предыстория. Характеристика Кронекера. Индекс Пуанкаре

В своём мемуаре «О кривых, определяемых дифференциальными уравнениями» [8; 9, с. 12–13] А. Пуанкаре определяет качественные методы решения дифференциальных уравнений, как *такие методы, которые позволяют исследовать свойства решений (существование, поведение на бесконечности, число нулей и т.п.), не имея в наличии самого решения, точного или приближённого*. Этот же подход, безусловно, можно применить и к интегральным уравнениям, в том числе нелинейным.

Одним из первых учёных, которые занимались изучением нелинейных интегральных уравнений, был русский математик А.М. Ляпунов. Его интерес к данному вопросу проявился уже в конце 1880-х гг.; он был обусловлен исследованиями по теории фигур равновесия вращающихся жидкостей (подробности см. в [7, с. 87–89]).

В ряду родоначальников качественных методов выделяется немецкий математик Леопольд Кронекер, который, в частности, осуществил развитие принципа замкнутого подхода в теории характеристик [10].

Поясним данный принцип на простом примере, следуя, в основном, изложению Н.Г. Четаева [11, с. 280–286]. Пусть имеется участок суши, изрезанный водными преградами (реками, озёрами и т.п.). Если по такому участку проделать какой-нибудь замкнутый путь, то, очевидно, столько раз придётся выходить из воды на сушу, сколько раз входить с суши в воду. Аналогично и в пространстве: если в нём имеются как-то расположенные тела  $R_\alpha$  и некоторая замкнутая линия  $L$ , то при обходе линии  $L$  в каком-либо направлении мы будем столько раз выходить из тел  $R_\alpha$ , сколько раз в них входили.

Этот принцип можно формализовать в  $n$ -мерном пространстве следующим образом. Пусть уравнение  $\Phi(x_1, \dots, x_n) = 0$  задаёт поверхность, а система  $x_i = x_i(t)$ ,  $i = 1, \dots, n$  задаёт

---

ственника и современника Пуанкаре Поля Сезанна, когда они стали рассматривать натуру как совокупность простых форм – сфер, конусов, цилиндров [4, с. 424].

<sup>2</sup>Это привело Брауэра к теореме о неподвижной точке, см. ниже.

замкнутую кривую:  $x_i(0) = x_i(2\pi)$ . Тогда функция  $\Phi$  при изменении  $t$  от 0 до  $2\pi$ , обращаясь в нуль, может столько раз переходить от отрицательных значений к положительным, сколько раз она переходила от положительных значений к отрицательным.

Следующим этапом обобщения явилось рассмотрение системы дифференцируемых функций  $F = \{F_0, F_1, \dots, F_n\}$  в  $\mathbb{R}^n$ . Кронекер показал, что полуразность числа точек входа и выхода линии  $(hk)$ , образуемой системой уравнений  $F_j = 0$ , ( $j \neq h, j \neq k$ ), через поверхность  $F_h = 0$  есть величина постоянная (обозначаемая  $\chi$ ) [10, с. 161]. Он получил также интегральное представление для  $\chi = \chi^{(F)}$ , которое для случая трёхмерного пространства имеет вид [10, с. 170]:

$$\chi^{(F)} = \frac{1}{4\pi} \int_S (F_0^2 + F_1^2 + F_2^2)^{\frac{3}{2}} [F_0 dF_1 dF_2 - F_1 dF_0 dF_2 + F_2 dF_0 dF_1], \quad (1)$$

где  $S$  – поверхность  $F_3 = 0$ , а интегрирование ведётся в смысле поверхностного интеграла 2-го рода<sup>3</sup>. Из интегрального представления  $\chi$  для  $n$ -мерной системы  $F$  Кронекер вывел следующее утверждение [10, с. 184; 12, с. 133].

**Теорема Кронекера.** Если характеристика  $\chi^{(F)}$  не равна нулю, то отображение  $(F_0, F_1, \dots, F_j, \dots, F_n) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  обращается в нуль в полупространствах  $\{x \in \mathbb{R}^n; F_j(x) < 0\}$  и  $\{x \in \mathbb{R}^n; F_j(x) > 0\}$ .

Идеи Кронекера были развиты Пуанкаре<sup>4</sup> в работах [8; 14]. В первой из указанных работ основное внимание было уделено изучению характеристик дифференциального уравнения

$$\frac{dx}{X} = \frac{dy}{Y}, \quad (2)$$

где  $X$  и  $Y$  – полиномы. Для исследования сингулярных точек ( $X = 0, Y = 0$ ) интегральных кривых уравнения (2) Пуанкаре проектировал их на сферу  $S^2$  и отслеживал поведение величины  $Y/X$  при движении вектора  $\bar{a}(X, Y)$  по замкнутой траектории (так называемому *циклу*) в положительном направлении. Обозначая через  $h$  число скачков, совершённых отношением  $Y/X$  от  $-\infty$  до  $+\infty$  и через  $k$  – число таких же скачков от  $+\infty$  до  $-\infty$ , Пуанкаре определил *индекс цикла* равным величине  $(h - k)/2$ , на основе значений которого делался вывод о существовании сингулярной точки<sup>5</sup> векторного поля  $\bar{a}$  (если бесконечно малый цикл содержит внутри себя особую точку, то его индекс равен  $\pm 1$ , а если не содержит, то индекс равен нулю) [9, с. 39–40]. Как сам Пуанкаре впоследствии напишет [3, с. 101], изучение кривых, определяемых дифференциальными уравнениями, явилось одной из причин для появления «*Analysis Situs*» – науки, в которой главная роль уделяется не *количественным* атрибутам фигур (формам, объёмам, числом граней или рёбер), но их *качественным* свойствам (взаимному расположению, размерности, связности и т.п.).

Продвигаясь в этом направлении [14], Пуанкаре переходит к системам дифференциальных уравнений вида

$$\frac{dx}{X} = \frac{dy}{Y} = \frac{dz}{Z}, \quad (3)$$

где  $Z$  также является многочленом переменной  $z$  и определяет *индекс поверхности*  $F(x, y, z) = 0$  решений (3) через интеграл Кронекера (1) [9, с. 221]. Данный индекс оказался равным разности между числом положительных и числом отрицательных особых точек, принадлежащих этой поверхности [9, с. 227].

<sup>3</sup>Более полную информацию о развитии понятия характеристика Кронекера и его предистории см. в [12].

<sup>4</sup>Об этом достаточно подробно написано Ж. Мавэном, см. [13].

<sup>5</sup>Соответствующая теорема (существования) доказана для дифференцируемого векторного поля [8, с. 405].

## 2. Исследования П. Боля. Теорема о неподвижной точке. Применение к динамическим системам

Одним из первых математиков, на практике реализовавших подходы качественного характера к решению задач механики и теории дифференциальных уравнений, был латвийский учёный Пирс Боль. Он закончил магистратуру физико-математического факультета Дерптского университета в 1890 г., а в 1900-м защитил диссертацию «О некоторых дифференциальных уравнениях общего характера, применимых к механике»<sup>6</sup> (она была выполнена под руководством ученика Вейерштрасса А. Кнезера) [16, с. 21–22]. Рассматривая в диссертации систему двух нелинейных дифференциальных уравнений 1-го порядка на предмет существования ограниченных в некотором круге решений, Боль доказывает следующую геометрическую теорему о неподвижной точке [17, с. 98; 18, с. 9]:

*Если дано непрерывное преобразование  $\mathbf{u}$  круга с центром  $O$  в плоскость этого круга, причём для каждой точки  $M$  окружности угол между  $\overrightarrow{OM}$  и  $\overrightarrow{M\mathbf{u}(M)}$  всегда острый (или тупой), то по крайней мере одна точка круга отображается в себя.*

Из этого утверждения, как следствие, у Боля получилась теорема о невозможности непрерывного отображения круга  $B (x^2 + y^2 \leq r^2)$  на свою границу (теорема о «неретрагируемости»<sup>7</sup> круга на свою границу): *не могут существовать две функции  $\xi$  и  $\eta$  от  $x$  и  $y$ , непрерывные в круге, удовлетворяющие на границе этого круга условию  $\xi = x, \eta = y$  [17, с. 99].*

Последняя теорема применяется для доказательства существования по крайней мере одного решения динамической системы

$$\frac{dx}{dt} = f(x, y, t), \quad \frac{dy}{dt} = h(x, y, t), \quad 0 \leq t < \infty, \quad (4)$$

если известно, что граница круга  $B$  пересекается траекториями (4) изнутри наружу [17, с. 100–101].

Глава I диссертации Боля заканчивается следующими замечаниями.

«... Мы могли бы очень просто доказать эту теорему<sup>8</sup> для трёх переменных, если бы допускали соображения геометрического характера. В таком случае для нашей цели было бы достаточно, например, следующего замечания. Представим себе шар, покрытый сетью, лежащей на шаре без складок. Петли пусть будут переменными, причём их можно предполагать сколь угодно малыми. Тогда нельзя удалить шар из сети только сдвигами и складыванием сети на шаре. Но доказательство, действительно полное, строгое и чисто аналитическое, может быть, не имеет простого вида».

В качестве примера приложения полученных результатов Боль приводит анализ движения механической системы вблизи положения равновесия под воздействием возмущающих сил при условии, что потенциал сил имеет там грубый минимум (то есть около положения полной неустойчивости) [17, гл. IV, § 25–27]. Применение теоремы о разрешимости системы вида (4) позволило ему прийти к выводу о том, что для малых возмущений существует движение, которое во все моменты времени происходит вблизи рассматриваемого положения равновесия. Для заданного начального положения существует такая начальная скорость, при которой движение продолжает оставаться вблизи положения равновесия с возрастанием времени.

Дальнейшее развитие метод неподвижной точки получил в исследовании Боля «О движении механической системы вблизи положения равновесия», опубликованном в 1904 г. в известном европейском *Журнале Крелле* [20]. В этой работе он впервые доказал ряд важных топологиче-

<sup>6</sup>Работа была переведена на французский язык и издана в 1910 г. в Известиях французского математического общества [15].

<sup>7</sup>Данное понятие в более общем виде было введено и использовано в конце 1930-х гг. К. Борсуком (см. [19]).

<sup>8</sup>Имеется в виду теорема о неретрагируемости, см. выше.

ских теорем о непрерывных отображениях и применил их к исследованию динамических систем специального вида.

Самостоятельно доказав аналог теоремы Кронекера<sup>9</sup> для системы функций, заданных в параллелепипеде, Боля вывел на её основе следующую теорему<sup>10</sup> [17, с. 205]:

*Пусть задана область  $G$ , определённая неравенствами  $-a_i \leq x_i \leq a_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ . В этой области определены непрерывные функции  $f_1, f_2, \dots, f_n$  от  $x$ , не исчезающие одновременно. Тогда на границе  $G$  имеется точка  $(u_1, u_2, \dots, u_n)$  такого рода, что  $f_i(u_1, u_2, \dots, u_n) = Nu_i$ ,  $N < 0$ ,  $i = 1, \dots, n$ .*

Из последнего утверждения вытекает теорема о наличии неподвижной точки при непрерывном отображении  $f$  куба в себя: достаточно рассмотреть отображение  $f(x) = x - \varphi(x)$ , где  $\varphi(x)$  – отображение куба в себя (см. комментарий Л.Э. Рейзиня и И.А. Хенинь в [17, с. 504]).

Считаем уместным привести здесь ещё одно высказывание Боля.

«...Эта теорема<sup>11</sup> может быть легко перенесена и на случай других поверхностей; возможно также распространение её на случай многообразий нечётной размерности. Как последняя теорема, так и предыдущая могут быть использованы для отыскания периодических решений дифференциальных уравнений. В частности, с помощью последней из указанных теорем можно доказать существование периодических движений (в широком смысле) тяжёлого твёрдого тела...» [17, с. 205].

Обратим внимание на то, что Боля не только сформулировал теорему о неподвижной точке для  $n$ -мерных поверхностей, но и использовал её для исследования динамических систем. В частности, он исследовал движения механической системы вблизи положения равновесия, описываемые неавтономной системой дифференциальных уравнений, если коэффициенты в выражении для кинетической энергии и силовая функция являются достаточно гладкими. После замены переменных уравнения Лагранжа этой системы приобрели у Боля следующий вид [17, с. 220–221; 16, с. 52]

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 + p_i^2 x_i = X_i(x, \dot{x}, y, \dot{y}), & i = 1, \dots, m, \\ \ddot{y}_j - q_j^2 y_j = Y_j(x, \dot{x}, y, \dot{y}), & j = 1, \dots, n, \end{cases} \quad (5)$$

$$x = (x_1, \dots, x_m), \quad y = (y_1, \dots, y_n),$$

где  $X_i$  и  $Y_j$  – непрерывно дифференцируемые функции своих переменных, определённые вблизи  $x = y = 0$  для всех  $\dot{x}$  и  $\dot{y}$  и при  $x = y = \dot{x} = \dot{y}$  равные нулю вместе со своими первыми производными.

Целью данного его исследования явилось изучение многообразия тех видов движения, которые остаются вблизи начала координат при неограниченном возрастании  $t$ . Результаты, полученные Болям при использовании теоремы о неподвижной точке, можно описать следующим образом [17, с. 276; 16, с. 15].

Пусть  $x, y, \dot{x}, \dot{y}$  – достаточно малые величины. Если задать при  $t = 0$  величины  $x, \dot{x}, \dot{y}$  произвольно, то для этих заданных значений существует одно и только одно движение (рассматриваемое в фазовом пространстве  $x, y, \dot{x}, \dot{y}$ ), проходящее через фиксированную точку  $y_0 = y(0)$  и остающееся при всех  $t \in [0, +\infty)$  в заданной фиксированной достаточно малой окрестности  $\mathfrak{W}$  начала координат. Если же задавать  $x_0$  и  $\dot{x}_0$ , то существует один и только один набор значений  $y_0$  и  $\dot{y}_0$ , для которых движение остаётся в  $\mathfrak{W}$  при  $-\infty < t < \infty$ .

<sup>9</sup>По-видимому, Боля не был знаком с работой Кронекера [10], поскольку при использовании интеграла вида (1) он не даёт никаких ссылок и комментариев (см. [17, с. 209–213]).

<sup>10</sup>Это утверждение является аналогом теоремы Борсука–Улама, доказанной почти на 30 лет позже (см. ниже).

<sup>11</sup>Имеется в виду теорема, эквивалентная теореме о неподвижной точке. После Боля теорему о неподвижной точке для исследования разрешимости дифференциальных уравнений первыми, по-видимому, применили Дж. Биркгоф и О. Келлог [21].

### 3. Результаты Брауэра. Степень отображения

Ещё одним учёным, создававшим качественные методы решения дифференциальных уравнений (в данном случае вида  $dy/dx = f(x, y)$ ) был голландский математик Лейтен Брауэр. Мотивированный своим философским интересом в области оснований геометрии, он начал работу над пятой проблемой Гильберта после окончания университета, что привело его к изучению топологии [22, с. 951; 23, с. 127–128]. Как и Пуанкаре, Брауэр изначально задался целью доказать существование сингулярной точки  $\bar{a}$  векторного поля, определяемого непрерывной функцией  $f(x, y)$  на сфере  $S^2$ .

Брауэр был в какой-то степени «самородком», поскольку не принадлежал к ведущим европейским математическим школам того времени – немецкой, французской или итальянской. Как отмечают биографы Брауэра, первоначальный его замысел развивался на протяжении нескольких работ. Так, особые точки векторных полей исследовались им в работах [24–26] в 1909–1910 гг.<sup>12</sup>, итогом которых явилось доказательство теоремы о том, что любое непрерывное векторное поле на сфере имеет хотя бы одну точку сингулярности [24, с. 858]. Как следствие, появились теоремы о том, что непрерывное отображение сферы  $S^2$  в себя имеет неподвижную точку [26, с. 184].

Отметим, ссылаясь на Г. Фрейдентала [27, с. 302], что в работе [25, с. 733] Брауэр выделяет класс непрерывных векторных полей с конечным числом сингулярных точек, которые (поля) могут быть трансформированы друг в друга непрерывным образом. Данное действие привело его позднее к идее *гомотопных* преобразований непрерывных функций, аналогичных гомеоморфным (непрерывным в обе стороны и однозначным) преобразованиям областей, фигурирующих в топологии. Эта идея сыграла положительную роль, в частности, в обобщении теоремы о неподвижной точке на  $n$ -мерный случай.

Дальнейшие продвижения Брауэра можно отследить, изучая его неопубликованный учебник по векторному анализу [28], как это сделал Д.М. Джонсон [23, с. 143–145]. Логика построения и подачи материала в *Potentialtheorie en Vectoranalyse* позволяет выделить два уровня обобщения. Вначале Брауэр определяет индекс поверхности для векторных полей, заданных на  $n$ -мерной гиперсфере, в терминах ( $n$ -мерного) телесного угла, «пробегаемого» вектором поля по малому элементу поверхности. В дальнейшем он осознал, что результат перемещения вектора вдоль поверхности есть не что иное, как алгебраическое число «окутываний» или, (по выражению П.С. Александрова [29, с. 154]), *кратность покрытия* поверхности  $S$  её образом  $f(S)$  с учётом ориентации.

Поясним сказанное на примере для  $n = 2$ . Пусть на окружности  $S^1$  задано положительное направление. Тогда её отображение в себя можно считать выполненным в два этапа (см., например, [30, с. 136]). Сначала окружность отображается в некоторую кривую, которая затем стягивается в  $S^1$  (рис. 1). Кратность покрытия, соответствующая рис. 1 (с учётом ориентации), равна 2.

Во избежание трудностей, связанных с разглаживанием возможных складок  $f(S) = S'$  и определением границ образа, Брауэр разбивает сферу на конечное число малых областей  $S_i$ , которые переходят при отображении  $f$  в малые области  $S'_i$ . Тогда суммарная кратность  $p$  покрытия  $S_i$  с положительной ориентацией минус кратность  $q$  покрытия с отрицательной ориентацией (см. иллюстрацию<sup>13</sup> на рис. 2) не зависит, как оказалось, от разбиения  $S$  и  $S'$  и от номера  $i$ .

<sup>12</sup>Для лучшего понимания роли указанных работ весьма полезными представляются комментарии Г. Фрейдентала в [27].

<sup>13</sup>На рис. 2 изображены фрагменты симплициального разбиения сферы  $S^2$  – симплексы  $S_1, S_2, S_3$ , имеющие определённую ориентацию – «закрученность» вихря в положительную или отрицательную сторону. При отображении  $f$  они покрывают ориентированный симплекс  $S^*$ .

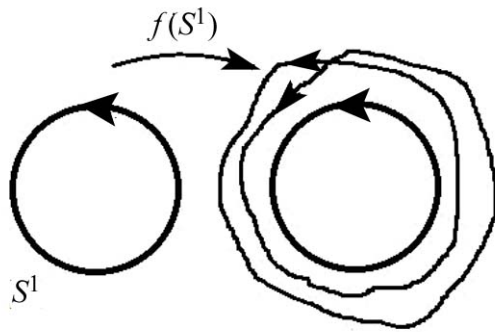


Рис. 1. Отображение окружности в себя  
Fig. 1. Transformation of a circle to itself

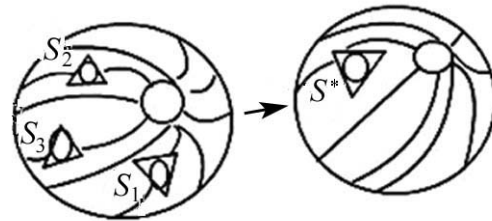


Рис. 2. Отображение сферы в себя [30, с. 135]  
Fig. 2. Transformation of a sphere to itself

Полученное число  $\gamma = p - q$  Брауэр назвал сначала, в учебнике [28, с. 15] *индексом* (очевидно, под влиянием работ Пуанкаре [8, 14]), а затем, в письме к Гильберту, – *степенью отображения* (*Der Grad Abbildung*)  $f$  [27, с. 421–422].

Строгое изложение результатов, относящихся к степени отображения ( $\deg f$ ), было дано Брауэром в его фундаментальной работе *Über Abbildung von Mannigfaltigkeiten*, опубликованной в 1912 году в журнале *Mathematische Annalen* [31]. В этой статье Брауэр определяет  $\deg f$  для непрерывного отображения  $f$ , как степень приближающих его симплициальных отображений, опираясь на тот (доказываемый им) факт, что непрерывно «деформируемые» друг в друга (то есть гомотопные) отображения имеют одинаковую степень.

В качестве одного из важнейших приложений степени, принесших Брауэру мировую известность, была теорема о неподвижной точке [31, с. 115]:

Если  $\deg f \neq (-1)^{n+1}$ , то непрерывное отображение сферы  $S^n$  в себя имеет хотя бы одну неподвижную точку.

Следствием явилась *теорема о существовании неподвижной точки* при непрерывном преобразовании произвольного  $n$ -мерного элемента в себя [31, с. 115]. Кроме того, понятие степени отображения было использовано Брауэром при решении проблемы инвариантности размерности, поставленной ещё Пуанкаре [23, с. 146–152; 32].

Один из конечномерных вариантов обобщения теоремы Брауэра принадлежит представителям польской математической школы Каролю Борсуку и Станиславу Уламу. В упрощённом варианте теорема Борсука–Улама выглядит так (см., например, [33, с. 21]):

**Теорема В-У.** Если функция  $f$  непрерывна на  $n$ -мерной сфере  $S^n$  и обладает свойством антисимметрии (то есть  $f(P') = -f(P)$ , где  $P$  и  $P'$  – концы одного и того же диаметра сферы), то на этой сфере найдётся точка  $P_0$ , в которой функция  $f$  обращается в нуль.

Данная теорема была сформулирована Уламом и доказана Борсуком в 1933 г. [34, с. 178]. Из неё сразу следует существование неподвижной точки у нечётного отображения  $F$  на сфере  $S^n$ , а также более наглядная «теорема о погоде» [35, с. 20].

*В каждый момент времени на Земном шаре имеется пара диаметрально противоположных точек, в которых одинаковы как температура, так и давление.*

Развивая указанное направление, Борсук доказал ещё два утверждения, равносильных теореме В–У.

1. Теорема об антиподальном отображении. Любое сферически симметричное  $f(P') = f(P)$  отображение сферы  $S^n$  в себя является существенным (не гомотопно постоянному отображению).
2. В любом замкнутом покрытии сферы  $S^n$ , состоящем из множеств  $M_1, \dots, M_{n+1}$ , по крайней мере одно из этих множеств содержит пару антиподальных точек.

При этом вторая теорема была сформулирована и доказана советскими математиками Лазарем Люстерником и Львом Шнирельманом в 1930 г. как лемма (это произошло в контексте доказательства гипотезы Пуанкаре о трёх геодезических [36, с. 30]).

#### 4. Применение теории степени отображения в изучении устойчивых состояний упорядоченных сред

Рассмотрим области вырождения изотропных ферромагнетиков (веществ, обладающих спонтанным магнитным моментом  $M$ ), следуя Григорию Воловику и Владимиру Минееву [37]. Равновесное значение  $M$  обеспечивает минимум магнитной энергии при данной температуре. Если пренебрегать энергией магнитной анизотропии, то все состояния ферромагнетика, отличающиеся направлением момента  $M$ , обладают одинаковой энергией (они являются вырожденными). Откладывая все возможные векторы намагниченности из одной и той же точки  $O$ , мы получим сферическую область вырождения  $S^2$ .

Если направление намагниченности совпадает с направлением радиуса-вектора  $r$  в каждой точке изотропного ферромагнетика, то в начале координат имеется особая точка «ёж». Поле  $M$  в «еже» сопоставляет каждой точке сферы  $\Sigma$  произвольного радиуса, окружающей особую точку, одну точку сферы  $S^2$ , на которой меняется  $M$ . Образ сферы  $\Sigma$  на сфере  $S^2$  можно представить в виде эластичной плёнки, один раз обтягивающей эту сферу. Таким образом поле  $M(r)$  задаёт отображение  $f: \Sigma \rightarrow S^2$  степени  $\gamma = 1$ . При этом, если «иголки ежа» направлены внутрь, то  $\deg f = -1$ . В изотропном ферромагнетике классы особых точек находятся в однозначном соответствии с классами отображений  $f: \Sigma \rightarrow S^2$ . Каждый класс отображений характеризуется индексом  $\gamma = \deg f$ , играющем роль *топологического заряда* (при слиянии особых точек степени отображений складываются). Указанные классы образуют группу, называемую *гомотопической группой размерности 2*.

Воловик и Минеев также установили, что при рассмотрении дефектов одноосных нематических жидких кристаллов [38, с. 156–157] и особых точек А-фазы  $^3\text{He}$  [39, с. 87] возникает похожая ситуация. Ими было замечено, что сами сверхтекучие свойства фаз легкого изотопа гелия в значительной мере диктуются топологией<sup>14</sup> [37, § 15].

#### 5. Применение метода неподвижной точки к исследованию диссипативных систем

Теория преобразований поверхностей, как метод исследования дифференциальных уравнений также восходит к Пуанкаре. В работе «Об одной геометрической теореме» (1912) [40], [41, с. 775–807] он рассматривает траектории движения точек динамической системы, как кривые на трёхмерном многообразии  $M$ . Пуанкаре представлял, что данные кривые отсекаются некоторой поверхностью  $S$ , лежащей в многообразии  $M$ . С течением времени движущаяся точка  $P \in M$

<sup>14</sup>В 2014 году российские физики Г. Воловик и В. Минеев были награждены премией им. Ларса Онзагера (Lars Onsager Prize) Американского физического общества «за вклад во всестороннюю классификацию топологических дефектов конденсированных фаз вещества с нарушенной симметрией, что привело к предсказанию половинных квантовых вихрей в сверхтекучем  $^3\text{He}$  и связанных с ним системах».



описывает некоторую дугу и встречается поверхность  $S$  в последующих точках  $P_1, P_2, \dots, P_n$ . Тем самым осуществляется отображение поверхности  $S$  в себя (которое переводит точку  $P$  в единственную точку  $P_1$ ) [41, с. 781].

В 1944 г. американский математик, ученик Норберта Винера, Норман Левинсон ввёл понятие детерминированных диссипативных систем (систем класса D) [42, с. 724]. Динамическая система

$$\begin{cases} \dot{x} = F(x, y, t), \\ \dot{y} = G(x, y, t) \end{cases} \quad (6)$$

с периодическими с периодом  $L$  по  $t$  правыми частями была названа им *системой класса D*, если существует такое положительное число  $R$ , что любое решение  $(x(t), y(t))$  этой системы остаётся в круге  $B_R$  радиуса  $R$  с центром в начале координат.

К системе вида (6) сводится, например, уравнение колебания маятника с вибрирующим подвесом, рассмотренное Н.Н. Боголюбовым

$$\ddot{y} + \lambda \dot{y} + f(t, y) = 0$$

(подробности см., например, в [43, с. 75]).

Соответствующая динамическая система имеет вид

$$\begin{cases} \dot{x} = -\lambda x - f(t, y), \\ \dot{y} = x. \end{cases}$$

Левинсон представил решение системы (6) в виде

$$\begin{cases} x_n = x(x_0, y_0, t_0 + nL), \\ y_n = y(x_0, y_0, t_0 + nL), \quad \forall n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Тогда в силу периодичности  $F$  и  $G$  получается

$$\begin{cases} x_{n+m} = x(x_m, y_m, t_0 + nL), \\ y_{n+m} = y(x_m, y_m, t_0 + nL). \end{cases} \quad (7)$$

Обозначив  $(x_n, y_n)$  через  $P_n$  и следуя Пуанкаре, Левинсон определяет преобразование плоскости  $(x, y)$  в себя вида  $TP_0 = P_1$ . При этом  $T^n$  переводит точку  $P_0$  в  $P_n$  и система (7) равносильна

$$T^{n+m}P_0 = T^n P_m = T^n T^m P_0.$$

Поскольку решения (6) непрерывны по отношению к изменению начальных условий, отображение  $T$  непрерывно. Таким образом, изучение поведения решений (6) заменяется исследованием непрерывных преобразований  $T$  плоскости  $(x, y)$  в себя. Левинсон показал, что при многократном применении оператора  $T$  к шару  $B_R$  существует инвариантное множество  $I$ , определяемое (при подходящем  $k$ ) следующим образом [42, с. 725]:

$$I = \bigcap_{n=1}^{\infty} T^{nk}(B_R).$$

Тогда мы оказываемся в рамках применимости теоремы Брауэра о неподвижной точке, что дало Левинсону возможность доказать следующую теорему:

**Теорема.** Каждая система класса  $D$  имеет по крайней мере одну неподвижную точку преобразования  $T$ .

Из данной теоремы следует, что система (6) имеет хотя бы одно периодическое решение.

Отметим, что Левинсон был хорошо знаком с работами Боля и включил некоторые его результаты в учебник по дифференциальным уравнениям [44, с. 454].

## 6. Применение теории степени отображения к исследованию хаотической динамики

Интенсивное развитие теории динамических систем в 1960–70 гг. опиралось на математический аппарат функционального анализа и топологии. Одно из ярких применений теории степени отображения к доказательству существования периодических, гомоклинических и гетероклинических траекторий гамильтоновой динамической системы было получено Хельмутом Хофером<sup>15</sup> и Джоном Толандом<sup>16</sup> в 1984 г. В работе [45] они рассмотрели гамильтонову систему

$$\begin{cases} \dot{q} = Sp(t), \\ -\dot{p} = V'(q(t)), \quad t \in \mathbb{R}, \end{cases} \quad (8)$$

для которой функционал энергии имеет вид

$$H(q, p) = \frac{1}{2}(Sp, p) + V(q), \quad (q, p) \in E \times E.$$

Здесь  $E$  – евклидово пространство со скалярным произведением,  $V(q)$  – потенциал системы, а квадратичная форма  $(Sp, p)$  – индефинитна, но не вырождается<sup>17</sup>.

Точнее говоря, Хофер и Толанд предполагали, что выполняется условие

$$\begin{cases} S : E, \\ \lambda_1 < 0 < \lambda_2 \leq \lambda_3 \dots \leq \lambda_n, \end{cases} \quad (9)$$

где  $E$  – симметричный линейный оператор,  $\lambda_i$  – собственные значения оператора  $S$ .

Условия на нелинейную часть  $H$  потребовали введения дополнительных обозначений.

Пусть  $\mathbf{e}$  – фиксированный единичный собственный вектор  $S$ , соответствующий отрицательному собственному значению  $\lambda_1$  и пусть  $F = \{\mathbf{e}\}^\perp$ . Если обозначить через  $T$  сужение  $S$  на  $F$ , то оператор  $T: F \rightarrow F$  положительно определен<sup>18</sup>. Используя это, можно показать, что множество

$$\Sigma = \{q \in E : (S^{-1}q, q) < 0\}$$

является дизъюнктивным объединением двух открытых конусов  $\Sigma^+$  и  $\Sigma^-$ , где

$$\Sigma^\pm = \{q \in \Sigma : \pm(q, \mathbf{e}) > 0\}.$$

Обозначая через  $P$  замыкание конуса  $\Sigma^+$  авторы [45] вводят в  $E$  частичную упорядоченность следующим образом:

$$q_1 \leq q_2 \Leftrightarrow q_2 - q_1 \in P.$$

<sup>15</sup>Немецко-американский математик. Член Национальной академии наук США.

<sup>16</sup>Английский математик. Член Лондонского королевского общества по развитию знаний о природе.

<sup>17</sup>Гамильтонианы подобного вида возникают в нелинейной механике, например, при моделировании распространения солитоноподобных волн в каналах с водой [46].

<sup>18</sup>В соответствующей индефинитной метрике подпространство, натянутое на собственные векторы  $S$ , будет представлять собой световой конус.

Ключевым моментом является то, что, если решение (8) – траектория  $(p, q)$  гамильтоновой системы – принадлежит энергетической поверхности  $H = 0$  и если потенциал  $V(q)$  положителен, то  $Sq \in \Sigma$ . Таким образом, вектор скорости  $\dot{q} = Sp$  связан ограничением принадлежности поверхностям  $\Sigma^+$  или  $\Sigma^-$  и может проходить от одной этой поверхности к другой (или вообще вне  $\Sigma$ ) только, если  $V(q) = 0$ . Следовательно, если  $C$  – ограниченная область  $q$ -пространства, где  $V > 0$  и  $q(t_0) \in C$ , то величина  $q$  должна стремиться к границе  $C$  при  $t \rightarrow \pm\infty$ . Изучение данной монотонности и привело Толанда с Хофером к главному результату<sup>19</sup> (см. ниже).

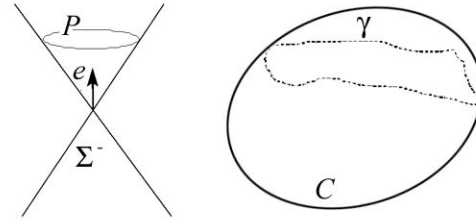


Рис. 3. Существование замкнутой траектории, лежащей в области  $C$  и проходящей через точку некоторого множества  $\gamma$  [45, с. 398]

Fig. 3. The existence of a closed trajectory lying in the domain  $C$  and passing through a point of certain set  $\gamma$

Предположим для простоты, что граница  $C$  строго выпукла (за исключением, возможно, мест, где  $V' = 0$ ) и  $V > 0$  во внутренней области  $C$  (см. пример на рис. 3).

Тогда справедлива

**Теорема.** Если  $V'(q) \neq 0$  при  $q \in \partial C$ , то у системы (8) существует периодическая орбита  $\{(p(t), q(t)), t \in \mathbb{R}\}$  с периодом  $T^*$ , такая, что и  $(p(T^*), q(T^*)) \in \partial C \times \{0\}$ .

Для доказательства было введено отображение  $\tau = \tau(q, p)$  времени выхода траектории из области  $C$  и с его использованием сконструировано множество  $\Gamma^+ = \{q \in \partial C : \tau(q, 0) > 0; (SV'(q), e) > 0\}$ . Авторы [45] также определили несколько специальных вспомогательных непрерывных функций:

- $h$  – гомеоморфизм:  $S^{n-1} \setminus \{-e\} \rightarrow \mathbb{R}^{n-1}$ ;
- $\theta : \partial C \rightarrow S^{n-1} \setminus \{-e\}$  ( $h(\theta) : \partial C \rightarrow \mathbb{R}^{n-1}$ );
- $k$  – ретракция  $S^{n-1} \rightarrow \partial C$ .

Функция  $\theta = \theta(q)$  была составлена из двух частей, содержащих нормированные выражения  $-SV'(q)$  и  $Sp(\tau(q, 0))$  [45, с. 394].

Оставшаяся часть доказательства была проведена в 2 этапа:

- 1) к суперпозиции  $h \circ \theta \circ k$  была применена теорема Борсука об антиподальном отображении: существует такая точка  $x$  на сфере  $S^{n-1}$ , для которой  $h(\theta(k(x))) = h(\theta(k(-x)))$ ;
- 2) из определения и свойств функции  $\theta$ , а также из выпуклости  $\partial C$  было выведено, что  $k(x)$  и  $k(-x)$  принадлежат  $\Gamma^+$ . Таким образом, траектория  $T(t) = (p(t), q(t))$  остаётся в  $C$ .

Специальная структура Гамильтониана позволила доказать периодичность  $T(t)$  на основе стандартных аргументов, используемых в небесной механике.

Существование гомоклинических орбит  $\{T(t), t \in \mathbb{R}\}$  системы (8), таких, что

$$\lim_{|t| \rightarrow \infty} (q(t), p(t)) = (a, 0)$$

доказывается в предположении о наличии единственной точки  $a \in \partial C$  для которой  $V'(a) = 0$ , и что  $C \subset a + P$  (см. рис. 4).

Множество  $\Gamma$ , изображённое на рис. 4, имеет вид  $\Gamma = \{q \in \partial C : \tau(q, 0) > 0\}$ . Орбита остаётся в  $C$  при любом  $t \geq 0$ , для неё выполняется условие  $q(0) \in \Gamma$ .

Наличие указанной орбиты выводится на основе соображений, использующих свойства функции  $\tau$  и вычисление степени отображения  $\Phi_h = h \circ \Phi \circ h^{-1}$  в области  $h(\Gamma)$ , где

<sup>19</sup>Он будет приводиться в упрощённой форме и состоять из нескольких утверждений.

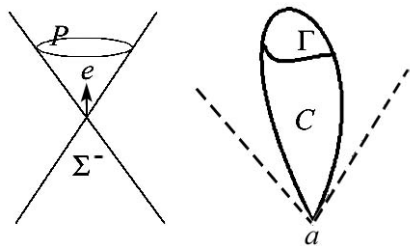


Рис. 4. Существование гомоклинической орбиты, чья траектория лежит в  $C$  и проходит через точку множества  $\Gamma$  [45, с. 399]

Fig. 4. The existence of a homoclinic orbit which trajectory lies in  $C$  and passes through the point of the set  $\Gamma$

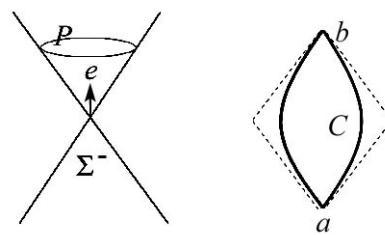


Рис. 5. Существование гетероклинической орбиты, чья траектория лежит в  $C$  и соединяет точки  $a$  и  $b$  [45, с. 401]

Fig. 5. The existence of a heteroclinic orbit which trajectory lies in  $C$  and connected  $a$  and  $b$  points

$h : \partial C \setminus \{a\} \rightarrow \mathbb{R}^{n-1}$  – гомеоморфизм, а  $\Phi$  – непрерывная функция, равная скорости  $q_0$  во время выхода траектории из области  $\Gamma$  при  $p = 0$  [45, с. 401].

Сходная ситуация возникает и при доказательстве существования гетероклинических орбит  $\{T(t), t \in \mathbb{R}\}$  системы (8), соединяющих точки  $a$  и  $b$  (рис. 5)

$$\begin{cases} \lim_{t \rightarrow -\infty} q(t) = a, \\ \lim_{t \rightarrow +\infty} q(t) \text{ и } \lim_{|t| \rightarrow 0} p(t) = 0. \end{cases}$$

Соответствующий алгоритм состоит из двух шагов.

1. Определение семейства траекторий  $T^\lambda \subset C \subset a + P_\varepsilon$ , где  $P_\varepsilon$  – конус  $\{q \in P : (S^{-1}q, q) + \varepsilon \|q\|^2 \leq 0\}$ , проходящих через точку  $b$  и стремящихся к ней при  $t \rightarrow +\infty$  по аналогии с гомоклиническим случаем.
2. Выделение из семейства  $T^\lambda$  траектории, проходящей через точку  $a$  и стремящейся к ней при  $t \rightarrow -\infty$ , если  $C \subset (a + P_\varepsilon) \cap (b - P_\varepsilon)$ .

Цитируемые результаты Хофера и Толанда стали классическими и вошли во многие учебники (см., например, [47]).

### Заключение

Качественные методы, берущие своё начало от работ Пуанкаре, Боля и Брауэра – метод неподвижной точки, теория степени отображения и др. нашли своё применение через многие десятилетия как в области математики, так и вне её. Указанными выше примерами, конечно, весь набор возможных применений этих методов не исчерпывается (см., например, [48]). Так, в этот набор не вошли довольно интересные приложения топологических методов анализа к теоретической химии [49], обнаруженные в 1980-х гг. и кристаллографии [50], полученные совсем недавно.

«Математическим» продолжением развития качественных методов после 1930-х гг. явилось распространение метода неподвижной точки и теории степени отображения на нелинейные операторные уравнения вида  $Ax = 0$  в бесконечномерном пространстве<sup>20</sup>. Это было осуществлено силами Дж. Биркгофа, О. Келлога, Ю. Шаудера, Ж. Лере, А.Н. Тихонова, М.А. Красносельского и др. (подробности см. в [51, часть 2, гл. VII, § 2; 52–55]). Данные результаты также

<sup>20</sup>Указанным уравнениям, как правило, соответствуют уравнения в частных производных.

нашли своё применение в теории динамических систем [56, гл. V, § 39], гидродинамике [57, 58], моделировании электрических цепей [59], нелинейной механике [60], теории радиационного переноса [61, гл. 13, § 4] и других областях [62] (детальное рассмотрение данного вопроса требует отдельного пристального внимания).

### Библиографический список

1. *Богатов Е.М.* Об истории применения качественных методов решения нелинейных интегральных уравнений // Наука и техника: Вопросы истории и теории. Материалы XXXVII межд. годич. конф. СПб отд. Росс. нац. комит. по ист. и филос. науки и техники РАН (21–25 ноября 2016). Вып. XXXII. СПб, 2016. С. 102–104.
2. *Poincaré H.* Sur l'Analysis Situs // C.R. 1892. 115. P. 633–636.
3. *Poincaré H.* Analyse des travaux scientifiques de Henri Poincaré faite par lui-même // Acta math. 1921. Vol. 38. P. 1–135.
4. *Гомбрих Э.* История искусства. М.: АСТ, 1998. 688 с.
5. *Воловик Г.Е., Минеев В.П.* Исследование особенностей в сверхтекучем  $^3\text{He}$  в жидких кристаллах методом гомотопической топологии // ЖЭТФ. 1977. 72:6. С. 2256–2274.
6. *Богатов Е.М., Мухин Р.Р.* О связи между нелинейным анализом, бифуркациями и нелинейной динамикой: На примере воронежской школы нелинейного функционального анализа // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2015. Т. 23, № 6. С. 74–88.
7. *Богатов Е.М., Мухин Р.Р.* Из истории нелинейных интегральных уравнений // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2016. Т. 24, № 2. С. 77–114.
8. *Poincaré H.* Mémoire sur les courbes définies par une équation différentielle I // J. de Math. 1881. 7. P. 375–422.
9. *Пуанкаре А.* О кривых, определяемых дифференциальными уравнениями. М.; Л.: ОГИЗ, 1947. 392 с.
10. *Kronecker L.* Über Systeme von Funktionen mehrerer Variablen I. Monatsber. Berlin Akad. 1869. P. 159–193.
11. *Четаев Н.Г.* Устойчивость движения. Работы по аналитической механике. М.: Изд-во АН СССР, 1962. 536 с.
12. *Siegborg H.* Some historical remarks concerning degree theory // Amer. Math. Monthly. 1981. Vol. 88, № 2. P. 125–139.
13. *Mawhin J.* Poincaré's early use of Analysis situs in nonlinear differential equations: Variations around the theme of Kronecker's integral // Philosophia Scientiae. 2000. 4. P. 103–143.
14. *Poincaré H.* Mémoire sur les courbes définies par une équation différentielle IV // J. Math. Pure Appl. 1885. 1. P. 167–244.
15. *Bohl P.* Sur certaines equations différentielles d'un type general utilisables en mécanique // Bulletin de la Société mathématique de France. 1910. T. 38. P. 1–134.
16. *Мышкис А.Д., Рабинович И.М.* Математик Пирс Боль из Риги. С приложением комментария гроссмейстера М.М. Ботвинника о шахматной игре П. Боля. Рига: Зинатне, 1965.
17. *Боль П.* Собрание трудов / Пер. с нем. И.М. Рабиновича; под ред. Л.Э. Рейзиня; вступит. статья и коммент. Л.Э. Рейзиня и И.А. Хенинь. АН Латв. ССР, Ин-т физики, Латв. отд-ние Всесоюз. астрон.-геодез. об-ва. Рига: Зинатне, 1974.
18. *Боль П.Г.* 1865–1921. Избранные труды. Вступительная статья А.Д. Мышкиса и И.М. Рабиновича. АН Латвийской ССР, Астрофиз. лаб. 1961.
19. *Borsuk K.* Sur les rétractes // Fund. Math. 1931. 17.1. S. 152–170.
20. *Bohl P.* Über die Bewegung eines mechanischen Systems in der Nähe einer Gleichgewichtslage // Journal für die reine und angewandte Mathematik. 1904. 127. S. 179–276.

21. *Birkhoff G.D., Kellogg O.D.* Invariant points in function space // Trans. Amer. Math. Soc. 1922. vol. 23. P. 95–115.
22. *van Dalen D.* Luitzen Egbertus Jan Brouwer // History of Topology / I.M. James ed., North Holland. 1999. P. 947–964.
23. *Johnson Dale M.* The Problem of the Invariance of Dimension in the Growth of Modern Topology, Part II. // Arch. Hist. Ex. Sci, 1981. P. 85–267.
24. *Brouwer L.E.J.* On continuous vector distributions on surfaces // KNAW Proc. 1909. vol. 11. P. 850–858.
25. *Brouwer L.E.J.* On continuous vector distributions on surfaces, II // KNAW Proc. 1910. vol. 12. P. 716–734.
26. *Brouwer L.E.J.* On continuous vector distributions on surfaces, III // KNAW Proc. 1910. vol. 12. P. 171–186.
27. *Freudenthal H.* (ed.), L.E.J. Brouwer Collected Works, Vol. 2, Geometry, Analysis, Topology and Mechanics. North–Holland, Amsterdam, 1976.
28. *Brouwer L.E.J.* Potentiaaltheorie en Vectoranalyse. Exercise book (unpublished manuscript) 1910.
29. *Александров П.С.* Пуанкаре и топология // УМН. 1972. Т. 27, № 1 (163). С. 147–158.
30. *Босс В.* Лекции по математике. Том 13. Топология. Изд. 3-е, испр. М.: ЛЕНАНД, 2014. 216 с.
31. *Brouwer L.E.J.* Über Abbildung von Mannigfaltigkeiten // Math. Annal. 1912. 71. S. 97–115.
32. *Brouwer L.E.J.* Beweis der Invarianz der Dimensionenzahl // Math. Annal. 1911. 70. S. 161–165.
33. *Matoušek J.* Using the Borsuk–Ulam Theorem: Lectures on Topological Methods in Combinatorics and Geometry. Springer Science & Business Media, 2008.
34. *Borsuk K.* Drei Sätze über die  $n$ -dimensionale euklidische Sphäre // Fund. Math. 1933. 20.1. S. 177–190.
35. *Крейн М. Г., Нудельман А.А.* Теорема Борсука–Улама // Квант. 1983, №8. С. 20–25.
36. *Люстерник Л.А., Шнирельман Л.Г.* Топологические методы в вариационных задачах. М.: Иссл. ин-т матем. и мех. при 1 МГУ, 1930.
37. *Воловик Г.Е., Минеев В.П.* Физика и топология. М.: Знание, 1980.
38. *Минеев В.П.* Топологические объекты в нематических жидких кристаллах // В кн. Болтянский В.Г., Ефремович В.А. Наглядная топология. М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1982. С. 148–158.
39. *Воловик Г.Е.* Сверхтекучие свойства А-фазы  $He^3$  // УФН. 1984. Т. 143, вып. 1. С. 73–109.
40. *Poincaré H.* Sur un théorème en géométrie // Rendiconti del Circolo matematico di Palermo. 1912. vol. 33. P. 375–407. <http://henripoincarepapers.univ-lorraine.fr/biblio/hp/ajax.php?bibkey=hp1912tp>
41. *Пуанкаре А.* Избранные труды. Том 2. Новые методы небесной механики. Топология. Теория чисел / Под ред. Н.Н. Боголюбова, В.И. Арнольда, И.Б. Погребысского. М.: Наука, 1972.
42. *Levinson N.* Transformation theory of non-linear differential equations of the second order // Annals Math. Second Series. 1944. Vol. 45, no. 4. P. 723–737.
43. *Богатов Е.М., Мухин Р.Р.* Метод усреднения, маятник с вибрирующим подвесом: Н.Н. Боголюбов, Э. Стефенсон, П.Л. Капица и другие // Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2017. Т. 25, № 5. С. 69–87.
44. *Коддингтон Э.А., Левинсон Н.* Теория обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: ИЛ, 1958.

45. *Hofer H., Toland J.* Homoclinic, heteroclinic, and periodic orbits for a class of indefinite Hamiltonian systems // *Math. Annalen.* 1984. Vol. 268, no. 3. P. 387–403.
46. *Toland J.F.* Solitary wave solutions for a model of the two-way propagation of water waves in a channel // *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.* 1981. 90. P. 343–360.
47. *Peletier L.A., and Troy W.C.* Spatial patterns: higher order models in physics and mechanics. Vol. 45. Springer Science & Business Media, 2012.
48. *Nash C.* Topology and physics – a historical essay // *History of Topology* / Ed. I.M. James. North Holland. 1999. P. 359–416.
49. *Ugi I., Dugundij J., Kopp R., Marquarding D.* Perspectives in theoretical stereochemistry. Lecture note series, Vol. 36, Springer, Heidelberg, 1984.
50. *Долбиллин Н.П.* Критерий кристалла и локально антиподальные множества Делоне // *Вестник ЧелГУ.* 2015, № 17. С. 6–17.
51. *Dieudonné J.* A History of Algebraic and Differential Topology, 1900–1960. Modern Birkhäuser, Boston, 1989.
52. *Park S.* Ninety years of the Brouwer fixed point theorem // *Vietnam J. Math.* 1999. Vol. 27, no. 3. P. 187–222.
53. *Mawhin J.* IN MEMORIAM JEAN LERAY (1906–1998) // *Topol. Meth. Nonlin. Anal.* 1998. Vol. 12. 14. P. 199–206.
54. *Mawhin J.* Juliusz Schauder, topology of functional spaces and partial differential equations // *Wiadomości matematyczne.* 2012. Vol. 48, no. 2. P. 173–183.
55. *Bogatov E.M.* Key moments of the mutual influence of the Polish and Soviet schools of nonlinear functional analysis in the 1920's–1950's // *Antiq. Math.* 2017. Vol. 11. P. 131–156.
56. *Красносельский М.А., Забрейко П.П.* Геометрические методы нелинейного анализа. М.: Наука, 1975.
57. *Ладыженская О.А.* Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости. М: ФИЗМАТЛИТ, 1961.
58. *Beckert H.* Existenzbeweis für permanente Kapillarwellen einer schweren Flüssigkeit // *Arch. Rat. Mech. Anal.* 1963. 13. P. 15–45.
59. *Красносельский М.А., Бурд В.Ш., Колесов Ю.С.* Нелинейные почти периодические колебания. М.: Наука, 1970.
60. *Ворович И.И.* О существовании решений в нелинейной теории оболочек // *Изв. АН СССР. Сер. матем.* 1955. 19:4. С. 173–186.
61. *Хатсон В., Пим Дж.С.* Приложения функционального анализа и теории операторов. М.: Мир, 1983.
62. *Nonlinear functional analysis and its applications, Part 2.* // *Proceedings of Symposia in Pure Mathematics.* 1986. Vol. 45/ Ed. F.E. Browder. AMS, Providence. Rhode Island, 1986.

## References

1. *Bogatov E.M.* On the history of the application of qualitative methods for solving nonlinear integral equations. Science and technology: Questions of history and theory. Materials of the XXXVII intern. annual conf. St. Petersburg Dep. Rus. Nat. Comm. Hist. Philos. Science and Techn. RAS, 2016, November, 21–25., Issue XXXII, SPb, 2016, pp. 102–104 (in Russian).
2. *Poincaré, H.* Sur l'Analysis Situs. C.R., 1892, 11, pp. 633–636.
3. *Poincaré, H.* Analyse des travaux scientifiques de Henri Poincaré faite par lui-même. *Acta math.*, 1921, vol. 38, pp. 1–135.
4. *Gombrich E.H.* The Story of Art (14th ed.). Englewood Cliffs, New Jersey: Prentice-Hall, Inc. 1984.

5. Volovik G.E. and Mineev V.P. Investigation of singularities in superfluid He<sup>3</sup> and liquid crystals by homotopic topology methods. *Soviet Phys. JETP*, 1977, vol. 45, pp. 1186–1196.
6. Bogatov E.M., Mukhin R.R. The relation between the nonlinear analysis, bifurcations and nonlinear dynamics: On example of Voronezh school of nonlinear functional analysis. *Izv. VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*, 2015, vol. 23, iss. 6, pp. 74–88 (in Russian).
7. Bogatov E.M., Mukhin R.R. About the history of nonlinear integral equations. *Izv. VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*, 2016, vol. 24, iss. 2, pp. 77–114 (in Russian).
8. Poincaré, H. Mémoire sur les courbes définies par une équation différentielle I. *J. de Math.*, 1881, 7, pp. 375–422.
9. Poincaré, H. On curves defined by differential equations. Moscow; Leningrad, OGIZ, 1947 (in Russian).
10. Kronecker L., Über Systeme von Funktionen mehrerer Variabeln I. *Monatsber. Berlin Akad.*, 1869, pp. 159–193.
11. Chetaev N. G. Stability of Motion. Works on Analytical Mechanics. USSR Acad. Sci. Publishing, Moscow, 1962 (in Russian).
12. Siegborg, H. Some historical remarks concerning degree theory. *Amer. Math. Monthly*, 1981, vol. 88, iss. 2, pp. 125–139.
13. Mawhin J. Poincaré's early use of Analysis situs in nonlinear differential equations: Variations around the theme of Kronecker's integral. *Philosophia Scientiae*. 2000, vol. 4, pp. 103–143.
14. Poincaré, H. Mémoire sur les courbes définies par une équation différentielle IV. *J. Math. Pure Appl.*, 1885, vol. 1, pp. 167–244.
15. Bohl P. Sur certains équations différentielles d'un type general utilisables en mécanique. *Bulletin de la Société mathématique de France*, 1910, vol. 38, pp. 5–138.
16. Myshkis A.D., Rabinovich I.M. Mathematician Piers Bohl from Riga. Riga, Zinatne, 1965 (in Russian).
17. Bohl Piers. Collection of sci. works. Transl. I.M. Rabinovich; ed. L.E. Reizihn; Introd. article and comments L.E. Reizihn and I.A. Khenihn; Acad. Sci. Latvian SSR, Institute of Physics, Riga: Zinatne, 1974.
18. Bohl Piers Georgievich, 1865–1921. Selected works; introductory article by A.D. Myshkis and I.M. Rabinovich. Acad. Sci. Latv. SU, Astrophysics lab. 1961 (in Russian).
19. Borsuk K. Sur les rétractes. *Fund. Math.* 1931, vol. 17, no. 1, s. 152–170.
20. Bohl P. Über die Bewegung eines mechanischen Systems in der Nähe einer Gleichgewichtslage. *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 1904, vol. 127, s. 179–276.
21. Birkhoff G.D. & Kellogg O.D. Invariant points in function space. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 1922, vol. 23, pp. 95–115.
22. van Dalen D. Luitzen Egbertus Jan Brouwer. History of Topology, ed. I.M. James, North Holland, 1999, pp. 947–964.
23. Johnson Dale M. The Problem of the Invariance of Dimension in the Growth of Modern Topology, Part II. *Arch. Hist. Ex. Sci*, 1981. pp. 85–267.
24. Brouwer L.E.J. On continuous vector distributions on surfaces. *KNAW Proc.*, 1909, vol. 11, pp. 850–858.
25. Brouwer L.E.J. On continuous vector distributions on surfaces, II. *KNAW Proc.*, 1910, vol. 12, pp. 716–734.
26. Brouwer L.E.J. On continuous vector distributions on surfaces, III. *KNAW Proc.*, 1910, vol. 12, pp. 171–186.
27. Freudenthal H. (ed.) L.E.J. Brouwer Collected Works, Vol. 2, Geometry, Analysis, Topology and Mechanics. North-Holland, Amsterdam, 1976.



28. Brouwer L.E.J. Potentiaaltheorie en Vectoranalyse. Exercise book (unpublished manuscript), 1910.
29. Aleksandrov P.S. Poincaré and topology. *Russian Math. Surveys*, 1972, vol. 27, no. 1, pp. 157–168.
30. Boss V. Lekcii po matematike: Topologiya. T. 13, Izd. 3-e, LENAND, Moscow, 2014 (in Russian).
31. Brouwer L.E.J. Über Abbildung von Mannigfaltigkeiten. *Math. Annal*, 1912, vol. 71, s. 97–115.
32. Brouwer L.E.J. Beweis der Invarianz der Dimensionenzahl. *Math. Annal*, 1911, vol. 70, s. 161–165.
33. Matoušek J. Using the Borsuk–Ulam theorem: Lectures on topological methods in combinatorics and geometry. Springer Science & Business Media, 2008.
34. Borsuk K. Drei Sätze über die  $n$ -dimensionale euklidische Sphäre. *Fund. Math.* 1933, vol. 20, no. 1, s. 177–190.
35. Krein M.G., Nudelman A.A. *Kvant*, 1983, no. 8, pp. 20–25 (in Russian).
36. Lyusternik L.A., Shnirelman L.G. Topological methods in variational problems. Mathematics and Mechanics Research Institute at 1st MSU, Moscow, 1930 (in Russian).
37. Volovik G.E., Mineev V.P. Physics and topology. Moscow: Znanie, 1980 (in Russian).
38. Mineev V.P. Topological objects in nematic liquid crystals, In: V.G. Boltyansky, V.A. Efremovich, Visual topology, pp. 148–158 (Bibliotekha Kvant, issue 21. Moscow, Nauka, 1982) (in Russian).
39. Volovik G.E. Superfluid properties of  $^3\text{He-A}$ . *Sov. Phys. Usp.*, 1984, vol. 27, pp. 363–384.
40. Poincaré, H. Sur un théorème en géométrie. *Rendiconti del Circolo matematico di Palermo*, 1912, vol. 33, pp. 375–407. <http://henripoincarepapers.univ-lorraine.fr/bibliohp/ajax.php?bibkey=hp1912rp>
41. Poincaré H. Selected Works. Vol. 2. New methods of celestial mechanics. Topology. Theory of numbers, Ed. N.N. Bogolyubov, V.I. Arnold, I.B. Pogrebyskii. Moscow: Nauka, 1972 (in Russian).
42. Levinson N. Transformation theory of non-linear differential equations of the second order. *Annals Math., Second Series*, 1944, vol. 45, no. 4, pp. 723–737.
43. Bogatov E.M., Mukhin R.R. The averaging method, a pendulum with a vibrating suspension: N.N. Bogolyubov, A. Stephenson, P.L. Kapitza and others. *Izv. VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*, 2017, vol. 25, no. 5, pp. 69–87 (in Russian).
44. Coddington E.A., Levinson N. Theory of ordinary differential equations. Tata McGraw-Hill Education, 1955.
45. Hofer H., Toland J. Homoclinic, heteroclinic, and periodic orbits for a class of indefinite Hamiltonian systems. *Math. Annalen*, 1984, vol. 268, no. 3, pp. 387–403.
46. Toland J.F. Solitary wave solutions for a model of the two-way propagation of water waves in a channel. *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.*, 1981, vol. 90, pp. 343–360.
47. Peletier L.A., and Troy W.C. Spatial patterns: higher order models in physics and mechanics. Vol. 45. Springer Science & Business Media, 2012.
48. Nash C. Topology and physics – a historical essay. History of Topology, I.M. James ed., North Holland, 1999, pp. 359–416.
49. Ugi I., Dugundij J., Kopp R., & Marquarding D. Perspectives in theoretical stereochemistry. Lecture note series, Vol. 36. Springer, Heidelberg, 1984.
50. Dolbilin N.P. Criterion of a crystal and locally antipodal sets of Delaunay. *Vestnik of the ChelSU*, 2015, no. 17, pp. 6–17 (in Russian).
51. Dieudonné J. A History of Algebraic and Differential Topology, 1900–1960. Modern Birkhäuser, Boston, 1989.

52. Park S. Ninety years of the Brouwer fixed point theorem. *Vietnam J. Math.*, 1999, vol. 27, no. 3, pp. 187–222.
53. Mawhin J. In Memoriam Jean Leray (1906–1998). *Topol. Meth. Nonlin. Anal.*, 1998, vol. 12, no. 14, pp. 199–206.
54. Mawhin J. Juliusz Schauder, topology of functional spaces and partial differential equations. *Wiadomości matematyczne*, 2012, vol. 48, no. 2, pp. 173–183.
55. Bogatov E.M. Key moments of the mutual influence of the Polish and Soviet schools of nonlinear functional analysis in the 1920's–1950's. *Antiq. Math.*, 2017, vol. 11, pp. 131–156.
56. Krasnoselskii M.A., Zabreiko P.P. Geometrical Methods of Nonlinear Analysis. Berlin–Heidelberg–New York–Tokyo, Springer-Verlag, 1984.
57. Ladyzhenskaya O.A. Mathematical problems in the dynamics of a viscous incompressible flow. Gordon & Breach, New York, 1963.
58. Beckert, H. Existenzbeweis für permanente Kapillarwellen einer schweren Flüssigkeit. *Arch. Rat. Mech. Anal.*, 1963, vol. 13, pp. 15–45.
59. Krasnoselskii M.A., Burd V.Sh., Kolesov Yu.S. Nonlinear Almost Periodic Oscillations. Wiley, New York, 1973.
60. Vorovich I.I. On the existence of solutions in the nonlinear theory of shells. *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.*, 1955, vol. 19, no. 4, pp. 173–186 (in Russian).
61. Hutson V.C.L., Pym J.S. Applications of Functional Analysis and Operator Theory. Academic Press, 1980.
62. Nonlinear functional analysis and its applications, Part 2. (Proceedings of Symposia in Pure Mathematics, Vol. 45.) F.E. Browder ed. AMS, Providence. Rhode Island, 1986.

*Богатов Егор Михайлович* – родился в Волгограде (1974), окончил Воронежский государственный университет (ВГУ, 1997). После окончания ВГУ работал преподавателем в вузах Воронежа, в том числе в ВГУ. Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук в ВГУ (2000) по специальности «Дифференциальные уравнения». После защиты диссертации стал работать преподавателем на кафедре высшей математики Старооскольского технологического института им. А.А. Угарова (филиала) Национального исследовательского технологического университета «МИСиС». В настоящее время работает на кафедре высшей математики и информатики указанного института в должности доцента, а также на кафедре горного дела в Губкинском филиале НИТУ «МИСиС». Руководитель научного проекта РФФИ по теме «Математическое моделирование процессов теплопереноса в нелинейных периодических двухфазных средах вида газ–металл» (2006–2008). Автор учебника «Организация эксперимента» (в соавторстве с В.П. Соловьёвым, 2012). Опубликовал более 40 научных статей по дифференциальным уравнениям и их приложениям, и истории математики. Имеет сертификат инструктора *Wolfram Research Mathematica* по обучению пакетам компьютерной математики в странах Восточной Европы. Область научных интересов: история функционального анализа, математическое моделирование физических процессов в неоднородных средах.



Россия, 309516 Старый Оскол Белгородской обл, мкр. Макаренко, 42  
 СТИ НИТУ «МИСиС», кафедры высшей математики и информатики  
 E-mail: e.bogolyubsky@yandex.ru



## «ДВЕ КУЛЬТУРЫ»

УДК 929 Рабинович Михаил Израилевич

### Из ранних стихотворений

*М. И. Рабинович*

US, UCSD, 9500 Gilman Drive, La Jolla, CA 92093-0328, BioCircuits Institute  
E-mail: mrabinovich@gmail.com

*Рабинович Михаил Израилевич* – родился в Горьком (1941). Окончил Горьковский госуниверситет (1962), ассистент (1962–1967), а затем доцент ГГУ (1967–1977). С 1977 года – заведующий лабораторией, а затем – заведующий отделом нелинейной динамики в Институте прикладной физики АН. Доктор физ.-мат. наук (1974), профессор (1980), чл.-корр. АН СССР (1991). Основатель и Президент Международного центра Перспективных Исследований (1994–2002, Нижний Новгород). В 1990 работал в качестве приглашенного профессора в Чикагском университете, с 1991 – профессор Калифорнийского университета в Сан-Диего. С 2004 года живет в США. Область научных интересов – прикладная математика, динамический хаос и теория турбулентности, нелинейная динамика классических полей, нейродинамика и динамика когнитивных процессов. Автор пяти монографий, более двухсот научных работ, а также семи стихотворных сборников.



### Коллеге

Уже давно растет по экспоненте  
Число научных званий и чинов,  
Но зубчики неровные на ленте  
Тебя лишают легких снов.

Остановись, отпыхни, ну напейся,  
Влюбись слегка на крайний случай,  
И над собой чуть-чуть посмейся,  
Так жизнь, наверно, станет лучше.

Но ты все пашешь, глубже, шире,  
Хоть щеки заливают пот,  
Себе диктуешь – три-четыре  
И бодро тащишься вперед.

1983

### Жуть

Не замечая запертых дверей,  
Сквозь лабиринты, отраженья  
Идет толпа полузверей  
Без сострадания и сомненья.

Хочу проснуться, не могу,  
На это нужно разрешенье.  
И руку укусить врагу  
Не позволяет отвращенье.

Проходят, замечая след,  
Все оставляя больно рваным.  
Попутно выключая свет.  
Кругом темно, и ноют раны.

Свисают гидры с потолка,  
Хохочет кто-то под ногами.  
И я дремлю, пока  
Все дни наполнены ночами.

2015

### Леонардо

Двумерный лист, трехмерная рука,  
И можно прочитать стихотворение  
Во времени, чья бурная река  
В четвертое уходит измерение,  
Стекающая в память – неподвластно глазу.

В потемках мчась вдоль временной оси,  
Мы замечаем далеко не сразу –  
В средневековые дождик моросит,  
Там Леонардо одержимый разум  
И в тех, и в этих временах творит.

В античном – греков древних продолжая,  
В своем, изобразив Мадонны лик,  
И в нашем, турбулентность постигая, –  
Он многомерность времени постиг.

1977

\*\*\*

Кроме вопросов вечных –  
«Что делать?» и «Кто виноват?»  
Есть еще много встречных –  
Зачем с багрянцем закат?

Как понять это: смерть красна?  
Кому красна, а кому и нет.  
Почему всегда зелена сосна?  
Зачем радуге синий цвет?

Зачем смысл жизни искать?  
То на время выданный дар.  
Выйдет срок, и тогда опять  
Ухнет сердце – гонга удар.

Снова скажет кто-то другой:  
Зачем радуге красный цвет?  
Твоя тень на подушке другой,  
И ты знаешь – ответа нет:

2010



## «ДВЕ КУЛЬТУРЫ»

УДК 929 Москаленко Эдуард Федорович

### Избранные стихотворения

*Э. Ф. Москаленко*

Национальный исследовательский Саратовский государственный университет  
Россия, 410012 Саратов, Астраханская, 83  
E-mail:moskalenkoef@rumbler.ru



*Москаленко Эдуард Федорович* родился (1938) в Смоленской области. Окончил физический факультет Саратовского государственного университета (1961). Разработчик бортовых систем автоматического управления для беспилотных летательных аппаратов. Работал в конструкторском бюро Миавиапрома СССР. Награжден орденом «Знак почёта». Пишет стихи.

\*\*\*

Мир постигаем все быстрее,  
процесс познания не кончая;  
но сколь ни открывай дверей,  
за ней окажется другая.

2012

\*\*\*

Отличу поэта сразу,  
и проще критерия нет:  
автор затронет лишь разум,  
а душу взволнует – поэт.

\*\*\*

Однажды, исписав листок стихами,  
рожденными в ночной тиши,  
оставите, не сознавая сами,  
свой отпечаток мыслей и души.  
Так, древний предок, выйдя на тропу,  
оставил след – застывшую стопу.

\*\*\*

Поэт не просто создатель стихов,  
разродиться способный сонетом,  
а кто способен на несколько строф,  
дающих право назваться поэтом.

### Сонет о стихах

Сначала слова долетят до ушей,  
и первое слово будет в начале;  
стихи – это то, что осталось в душе  
после того, как слова прозвучали.

Книжное слово доступно для глаз,  
в книге слова долговечнее стали;  
стихи – это то, что останется в вас  
после того, как их прочитали.

Слово любви сердце пронзит,  
обжигая его, как пчелиное жало;  
стихи о любви наша память хранит  
после того, как любимых не стало.

### О поэзии

#### Англосонет

Одни и те же буквы знают,  
говорят одними словами,  
но поэты стихи слагают,  
а гении *мыслят* стихами.

А пик «Поэзия поэзии»? –  
нам так же не доступен он,  
как папуасам Полинезии  
какой-то хиггсовый бозон.

Только поэзия чувства  
через поэзию мысли  
возводит вершины искусства,  
мы ж у подножья прокисли.

Плоды поэзии красивы,  
но все читают детективы.  
2013

### Дебаты о поэзии

#### Сонет

Поэзия – музыка слова,  
поэтами созданный плод;  
звучит она снова и снова,  
в ней только слова вместо нот.

Поэзия – пик всякой речи,  
в душе залегающий пласт;  
душевнобольных не излечит,  
здоровым «свихнуться» не даст.

Но скажет художник сурово:  
«Поэт – мой по кисти собрат.  
Поэзия – живопись слова,  
прекрасней моей во стократ».

Сильнее слова силы нету,  
за исключением слов поэта.  
Но силы нет такой в сонете,  
чтоб лишь от слов рождались дети.

\*\*\*

\*\*\*

Сонет, всего лишь, тот сосуд,  
что ценен тем, что в него льют;  
но не для всякого вина  
эта форма создана.

Я в психологии не дюж  
и в поэзии не кесарь,  
не «инженер человеческих душ»,  
а их всего-навсего слесарь.



## «ДВЕ КУЛЬТУРЫ»

### Популяризация науки на примере журнала «Кот Шрёдингера»: Опыт аналитической рецензии

*О. А. Кильдякова*

Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского  
Россия, 10012 Саратов, Астраханская, 83  
E-mail: oksanakildyakova@yandex.ru

*Поступила в редакцию 29.01.2019, принята к публикации 12.02.2019*

**Тема.** В статье рассматривается научно-популярная журналистика в России на примере научно-популярного журнала «Кот Шрёдингера». В настоящее время формируются благоприятные условия для развития нового витка отношений между наукой и обществом. Общественность и молодежь проявляют интерес к науке, растёт потребность в научной популяризации и новых научно-популярных изданиях. В статье отражаются характерные особенности журнала, способствующие популяризации науки.

*Ключевые слова:* научно-популярная журналистика, журнал «Кот Шрёдингера».

*Образец цитирования:* Кильдякова О.А. Популяризация науки на примере журнала «Кот Шрёдингера»: Опыт аналитической рецензии // Изв. вузов. ПНД. 2019. Т. 27, № 1. С. 119–125.  
<https://doi.org/10.18500/0869-6632-2019-27-1-119-125>

### Popularization of science by example of journal «Schrödinger's Cat»: Analytical reviewing experience

*O. A. Kildyakova*

Saratov National Research State University named after N.G. Chernyshevsky  
83, Astrakhanskaya str., 410012 Saratov, Russia  
E-mail: oksanakildyakova@yandex.ru

*Received 29.01.2019, accepted for publication 12.02.2019*

**Topic.** The article discusses popular science journalism in Russia using a popular science journal called «Schrödinger's Cat» as the example. Favourable conditions are now being created for the development of a new round of relations between science and society. In recent years, the state and the public have shown interest in science, therefore, there is a growing need for scientific popularization and new popular science publications. The article reflects the characteristic features of «Schrödinger's Cat» which contribute to the popularization of science.

*Key words:* popular science journalism, journal «Schrödinger's Cat».

*Reference:* Kildyakova O.A. Popularization of science by example of journal «Schrödinger's Cat»: Analytical reviewing experience. *Izvestiya VUZ, Applied Nonlinear Dynamics*, 2019, vol. 27, no. 1, pp. 119–125. <https://doi.org/10.18500/0869-6632-2019-27-1-119-125>

1. В современной российской журналистике популяризацией науки активно занимаются сотрудники журнала «Кот Шрёдингера» (далее – «КШ») – ежемесячного политематического научно-популярного журнала о науке и научных открытиях. Первый номер журнала вышел в октябре 2014 года. Тираж издания составляет 50000 экземпляров. В 2016 году «КШ» стал лауреатом Премии «За верность науке» в номинации «Лучшее периодическое печатное издание о науке». На официальном сайте четко обозначена цель создания «КШ»: «Задача наша – приспособить знания к жизни», то есть журнал выступает в роли просветителя и популяризатора науки.

Какими именно способами научные журналисты «КШ» воспользовались для выполнения такой задачи? Изучение характерных особенностей журнала позволит дать ответ на этот вопрос.

2. В издании раскрывается *много разнообразных увлекательных тем*. «Мы пишем о Вселенной, об атомах, о материках, об организмах, об обществе. Мы пишем о нас с вами. Мы пишем сами», – так на официальном сайте говорят сами создатели издания о тематике журнала. Один из курсов, которые решили взять сотрудники «КШ», – это ориентация на будущее. Именно поэтому в журнале публикуется много материалов о роботах и искусственном интеллекте, о нейросетях и исследованиях мозга, о дальнем космосе. Большое количество материалов «КШ» посвящено естественно-научным темам. Однако о читателях, испытывающих потребность в познании чего-то нового из области гуманитарных, технических и точных наук, сотрудники «КШ» также не забывают. При этом редакторы журнала придерживаются *патриотичной политики* – читателя знакомят, в основном, с достижениями *российской науки* и рассказывают о *российских ученых*. Главный редактор «КШ» Григорий Тарасевич поясняет, почему журнал придерживается этой позиции: «Мы, естественно, отдаём предпочтение российской науке и не только потому, что мы такие патриоты, а ещё и потому, что мы пишем о людях, а живых людей в России нам легче понять: они вокруг нас... Когда я общаюсь с российскими учёными, я понимаю нюансы каждого слова. Для меня важно, сказал человек – это сложная задача, это неподъёмная задача или это каверзная задача. Три разных слова. Я их чувствую. В английском я их точно не почувствую. К тому же с российскими учёными проще связаться».

Широкий спектр знаний, который пытаются охватить сотрудники журнала, позволяет аудитории всесторонне развиваться. Читатели не только *своевременно узнают* о научных открытиях и изобретениях, сделанных в России и по всему миру, о последних сенсациях в разных областях науки и жизни, но и *получают больше информации* об окружающем мире и самих себе. Тематическое разнообразие, безусловно, важно для «КШ» как для научно-популярного журнала, так как это позволяет занять досуг широкого круга людей с разными интересами, что способствует его популярности среди массовой аудитории. Это, в свою очередь, помогает популяризации.

3. Для привлечения внимания к журналу важную роль играет его визуальная составляющая. Первое, что видит читатель, – обложка издания. По всей видимости, научные журналисты «КШ» не допускают того, чтобы читатели привыкли к однообразному оформлению обложек. Они постоянно меняют цветовое решение, а также местоположения логотипа и анонсов (рис. 1).

Сотрудники журнала дали интересный эпитет своему журналу – «шершавый». В данном случае понятие «шершавый» можно трактовать как антоним к слову «глянцевый». «Шершавость», скорее всего, не только чисто физическая характеристика (бумага, на которой печатается «КШ», действительно шершавая), но ещё и определение качества и репутации издания. Именно «шершавость» выделяет «КШ» на фоне других научно-популярных изданий.

Оригинальная концепция издания «Кот Шрёдингера» включает в себя яркое иллюстративное сопровождение. Порой именно иллюстрации, а не заголовок материала, привлекают внимание читателя и побуждают прочитать текст. Иногда картинки носят весёлый характер. Например, на страницах издания можно увидеть изображение вируса, похожего на злобно улыбающийся смайлик, спящую статую свободы (рис. 2).





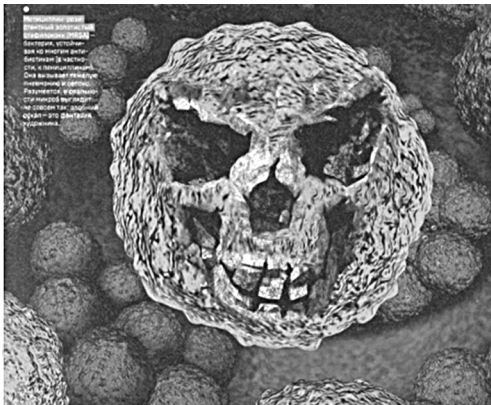
*a*



*b*

Рис. 1. Обложка журнала «Кот Шрёдингера»: *a* – Кот – жив! [1]; *b* – Квантовая механика в комиксах?! [2]

Fig. 1. The cover of «Schrodinger's Cat» magazine: *a* – the Cat is alive! [1]; *b* – quantum mechanics in comics?! [2]



*a*



*b*

Рис. 2. Изображения в журнале «Кот Шрёдингера»: *a* – злобно улыбающийся смайлик [3, с. 14]; *b* – спящая «Статуя свободы» [4, с. 61]

Fig. 2. Images in «Schrodinger's Cat» magazine: *a* – evilly grinning smiley [3, p. 14]; *b* – sleeping «Statue of Liberty» [4, p. 61]



a



b

Рис. 3. Дизайн полей в журнале «Кот Шрёдингера»: a – изображение линейки на полях [5, с. 38–41]; b – изображения людей на полях [6, с. 2–3]

Fig. 3. Design of margins in «Schrodinger's Cat» magazine: a – image of a ruler in the margins [5, pp. 38–41]; b – images of people in the margins [6, pp. 2–3]

Это говорит о том, что журнал не только просвещает, но и развлекает, что особенно заманчиво для широкой аудитории.

Научные журналисты «КШ» также обращаются к массовой культуре. Таких персонажей, как магистр Йода (персонаж из цикла фильмов «Звёздные войны»), Дейенерис Таргариен (персонаж из сериала «Игра престолов»), можно встретить на страницах издания. Как показывает практика, использование узнаваемых персонажей добавляет читательского успеха материалу.

Разнообразны в журнале не только изображения, но и шрифты, и цвета. Это положительно влияет на восприятие текста. Именно поэтому, находящиеся по соседству текстовые материалы не похожи друг на друга, а внимание читателя концентрируется точно на основных моментах. Сотрудники «КШ» смело экспериментируют с полями, периодически придумывая собственные дизайны (рис. 3). В этих случаях традиционный белый фон страниц заменяется на красочные рисунки. Возможно, научные журналисты учитывают тот факт, что оформление интернет-страниц периодически меняется, поэтому решили идти в ногу со временем и следовать такой тенденции в своём издании.

Подобного рода изменения пробуждают интерес к журналу у читателей, которых в наше время сложно чем-то удивить, ведь становится любопытно, что сотрудники «КШ» придумают в следующий раз.

4. Самое важное – в «КШ» язык изложения понятен для широкой аудитории, что и является главной задачей научных журналистов «КШ», ведь без этого популяризация науки невозможна. Они переводят научный язык на доступный для понимания массовой аудиторией с помощью метафор (вакцина – «двойной агент», устойчивые к антибиотикам бактерии – «бронированная пехота» [3, с. 21]), аналогий и сравнений с явлениями, которые известны широкой аудитории. К примеру, в статье «Земля в объятиях Солнца» [7, с. 66–73] научные журналисты, описывая поток заряженных частиц, разлетающихся с поверхности светила, употребляют сравнительный оборот «частицы разлетаются примерно так же, как разносились бы брызги воды из шланга, если бы вы вращались вместе с ним».

Сотрудники журнала уверены: «Скучна научная статья без примеси фантастики», поэтому иногда заголовки в журнале «КШ» неожиданны и провокативны («О пользе падения головой в болото» [8, с. 72], «Чем крокодилы лучше мужчин» [9]). И действительно, они оправдывают ожидания читателей, отвечая не только принципу эффектности, но и принципу эффективности.

Как известно, один из простых способов заинтересовать кого-то – рассмешить, поэтому материалы в «КШ» разбавлены шутками: «Будь у белки наша память, она бы умерла с голода, прежде чем вспомнила, куда спрятала орешки» [10, с. 34].

Сквозным персонажем всех номеров журнала является Кот, от лица которого ведётся диалог с читателем. Кота можно и видеть, и «слышать» на страницах издания. Он постоянно напоминает о себе на полях и в иллюстрациях к материалам, а также периодически комментирует написанное журналистами. Постоянное присутствие Кота выделяет журнал среди других научно-популярных изданий.

Журнал «КШ» отличается и необычными для научно-популярного журнала способами подачи научной информации – используется сайнстэйнмент<sup>1</sup>. На первый план теперь выходит не только что сообщается, но и как сообщается. Тем не менее преобладание в журнале рекреативной функции (то есть функции развлечения и отдыха) [11] не приводит к появлению вульгарных статей (сенсационных и неинформативных). Научным журналистам удаётся создавать яркие, привлекательные материалы, но они носят сугубо научный характер. Такое сочетание качественного содержания и, в некотором роде, «бульварной формы» превращает журнал в квалоид<sup>2</sup>. Но это интерактивный квалоид, уподобленный интернет-сайтам: информация до аудитории доносится

<sup>1</sup>Sciencetainment (от англ. science и entertainment) – наука-развлечение.

<sup>2</sup>Квалоид – качественный таблоид.

кратко, ёмко, красочно. Например, при чтении некоторых рубрик создается ощущение, что пролистываешь новостную ленту какой-нибудь социальной сети – все новости небольшого объёма, сопровождаются изображениями, аналогами хэштегов. Такой способ подачи информации связан с «клиповым» мышлением, свойственным современному поколению. При переходе из виртуального пространства в реальное пользователи Интернета не ощущают разницы между материалами в электронном и печатном виде.

5. Редакторы «КШ» прибегают к использованию игровых элементов при создании материалов на научную тему, выступая в роли новаторов. Игровые формы подачи информации предполагают отказ от штампов, что приводит к заинтересовывающей читателей оригинальности. На страницах журнала публикуются комиксы, посвященные проблеме старения, настольные игры, научные анекдоты. Наиболее интересна рубрика «Простые вещи». Например, в статье «Лист бумаги» [8, с. 2–3] материал подан в форме полилога студентов разных факультетов. Его авторы погружают читателя в атмосферу университета в напряжённое сессионное время. Как известно, в момент сдачи экзамена просто необходима бумага, иначе студент не сможет дать письменный ответ на вопросы в билете, а преподавателю некуда будет поставить оценку. Однако научные журналисты «КШ» пишут, что никто из толпящихся возле аудитории студентов, за исключением студента из Китая, не взял с собой листы бумаги. Между учащимися возникает полилог, в ходе которого

- студент-историк вспоминает время и место изобретения бумаги: «Не зря наш китаец – единственный, кто не забыл про листы. Бумагу начали изготавливать в Древнем Китае во II веке до нашей эры.»
- студент-филолог рассказывает об истории происхождения слова «бумага»: «Есть версия, что это слово произошло от тюркского “памбук” или “памук”.»
- студент-эколог не унимается, тараторя о загубленных для изготовления бумаги деревьях: «Чтобы сделать тонну бумаги, нужно загубить примерно 17 деревьев и 3.5 кубометра...»

Между делом свое слово пытаются вставить студент-химик, студент-технолог, студент-математик, студент-физик, студент-планетолог, студент-астроном, студент-медик и студент-юрист. А завершается история новостью о переносе экзамена и напоминанием профессора о необходимости иметь при себе чистые листы бумаги.

В школе разные предметы изучаются отдельно друг от друга. Рубрика «Простые вещи» – попытка отойти от этой консервативной схемы. Подобные творческие рубрики в журнале «КШ» удовлетворяют одному из важных мотивов чтения в молодёжной среде – это получение эмоциональных переживаний [12]. Важно, что создатели «КШ» постоянно придумывают новые рубрики, чтобы удивить своего читателя. Это отражает общую концепцию журнала – постоянное движение, постоянное развитие.

\*\*\*

Итак, журнал «Кот Шрёдингера» отлично подходит на роль популяризатора науки. Издание сочетает в себе всё необходимое, чтобы способствовать популяризации науки среди массовой аудитории: актуальные темы, качественный и конкурентноспособный контент, доступный для понимания язык изложения. Применение сотрудниками «КШ» такого способа подачи информации, как сайнстэймент, – отличный способ, чтобы выделить журнал среди других научно-популярных изданий и заинтересовать самую широкую аудиторию научной информацией. В связи с этим журнал обладает высоким стимулирующим и образовательным потенциалом. Несомненным достоинством журнала является его непрерывное развитие – модель журнала не статична, она всё время меняется.

В общем, можно видеть, что научно-популярные издания сегодня – это не «вещь в себе», это динамично развивающийся сегмент печатной журналистики.

## Библиографический список

1. Журнал «Кот Шрёдингера», вып.1, октябрь 2014.
2. «КШ», вып. 5–8, лето 2016.
3. «КШ», вып. 1–2, январь–февраль 2017.
4. «КШ», вып. 11, ноябрь 2016.
5. «КШ», вып. 3, март 2017.
6. «КШ», вып. 9–10, сентябрь–октябрь 2017.
7. «КШ», вып. 1–2, январь–февраль 2018.
8. «КШ», вып. 12, декабрь 2016.
9. «КШ», вып. 11, ноябрь 2015. <https://kot.sh/statya/1141/lyudi-i-krokodily>.
10. «КШ», вып. 11–12, ноябрь–декабрь 2017.
11. Федотова Н.А. Рекреативные функции СМИ: содержание и стратегии реализации: Автореф. дисс. канд. филол. наук / Н.А. Федотова. М., 2010. С. 8.
12. ЩербакOVA Н.А. Мотивы чтения современной молодежи // Вестник Московского государственного университета культуры и искусств. 2009. № 5. С. 195.

## References

1. «*Schrödinger's Cat*», iss. 1, October 2014 (in Russian).
2. «*Sch. Cat*», iss. 5–8, summer 2016 (in Russian).
3. «*Sch. Cat*», iss. 1–2, January–February 2017 (in Russian).
4. «*Sch. Cat*», iss. 11, November 2016 (in Russian).
5. «*Sch. Cat*», iss. 3, March 2017 (in Russian).
6. «*Sch. Cat*», iss. 9–10, September–October 2017 (in Russian).
7. «*Sch. Cat*», iss. 1–2, January–February 2018 (in Russian).
8. «*Sch. Cat*», iss. 12, December 2016 (in Russian).
9. «*Sch. Cat*», iss. 11, November 2015. <https://kot.sh/statya/1141/lyudi-i-krokodily> (in Russian).
10. «*Sch. Cat*», iss. 11–12, November–December 2017 (in Russian).
11. Fedotova N.A. Recreative media functions: Content and implementation strategies. Author. diss. Cand. filol. Sciences, M., 2010. 8 p. (in Russian).
12. Shcherbakova N.A. Motives for reading modern youth. *Bulletin of Moscow State University of Culture and Arts*, 2009, no. 5, 195 p. (in Russian).



Кильдякова Оксана Александровна – родилась (1993) в Хвалынске Саратовской обл. Окончила Саратовский государственный научно-исследовательский университет им. Н.Г. Чернышевского по специальностям «Физик» (2015) и «Журналист» (2018). Область научных интересов – научно-популярная журналистика.

Россия, 10012 Саратов, Астраханская, 83  
Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского  
E-mail: oksanakilydyakova@yandex.ru

Научное издание

Зав. редакцией *Н.Н. Левина*  
Редакторы *Н.Н. Левина, Л.А. Сидорова*  
Оформление художника *Д.В. Соколова*  
Оригинал-макет подготовлен  
*И.А. Пономаревой, О.Н. Строгановой*  
в пакете  $L^A T_E X$

Подписка на 2019 год  
осуществляется по Объединенному Каталогу «Пресса России»  
Раздел: 30. «Научно-технические издания.  
Известия РАН. Известия ВУЗов»  
и по Интернет-Каталогу Агентства «Книга-Сервис»,  
а также по Договору между Подписчиком  
(юридическим или физическим лицом)  
и Издателем (Саратовским государственным университетом)

Цена годовой подписки (6 номеров) договорная  
Заявки на заключение Договора принимаются  
Редакционно-издательским отделом журнала:  
по почте, по телефону, по эл. почте

Адрес РИО журнала «Известия вузов. ПНД»:  
Россия, 410012 Саратов, Астраханская, 83  
Тел./факс: (845-2) 52-38-64  
E-mail: and@nonlin.sgu.ru  
**Сайт журнала <http://andjournal.sgu.ru>**

Распространение журнала осуществляется  
РИО журнала по адресной системе

**Условия подписки на электронную версию журнала на сайте  
Научной электронной библиотеки <http://elibrary.ru>**

Сдано в набор 20.01.2019. Подписано к печати 28.02.2019  
Формат 70x108/16. Бумага офсетная. Печать офсетная  
Усл. печ. л. 11,0 (7,9). Уч.-изд. л. 10,0. Заказ №39–Т .

Отпечатано в Типографии ФГБОУ ВО СНИГУ  
Россия, 410012 Саратов, Б.Казачья, 112А, тел. (845-2) 27-33-85