

Журнал включен в «Перечень периодических научных и научно-технических изданий РФ,  
рекомендованных для публикации основных результатов диссертаций  
на соискание ученой степени доктора наук»

**МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ**

Известия высших учебных заведений  
**ПРИКЛАДНАЯ НЕЛИНЕЙНАЯ ДИНАМИКА**  
*научно-технический журнал*

издается с 1993 года

Выходит 6 раз в год

Том 26, № 2, 2018, Саратов

**СО Д Е Р Ж А Н И Е**

От главного редактора. <i>Гуляев Ю. В., Трубецков Д.И.</i> .....	3
<b>ПРИКЛАДНЫЕ ЗАДАЧИ НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ КОЛЕБАНИЙ И ВОЛН</b>	
<i>Шабунин А. В.</i> Мультистабильность периодических орбит в ансамбле отображений с дальнедействующими связями .....	5
<i>Корнеев И. А., Шабалина О. Г., Семенов В. В., Вадивасова Т. Е.</i> Синхронизация автогенераторов, взаимодействующих через мемристор .....	24
<i>Кузнецов А. П., Станкевич Н. В.</i> Динамика связанных генераторов квазипериодических колебаний с состоянием равновесия .....	41
<b>НОВОЕ В ПРИКЛАДНОЙ ФИЗИКЕ</b>	
<i>Фунтов А. А.</i> Шумы в резистивном усилителе М-типа с «толстым» пучком ...	59
<b>ИСТОРИЯ. PERSONALIA</b>	
<i>Кравченко Н. П.</i> О научном творчестве Виктора Анатольевича Солнцева .....	69
<b>КОНФЕРЕНЦИИ. СЕМИНАРЫ. СИМПОЗИУМЫ. ШКОЛЫ</b>	
XVII Международная зимняя школа-семинар по радиофизике и электронике СВЧ. Россия, Саратов, 3–10 февраля 2018 .....	87
<b>PERSONALIA</b>	
К 80-летию Е. А. Мясина. <i>Дмитриев А. С.</i> .....	97

C O N T E N T S

Editorial. <i>Gulyaev Yu. V., Trubetskov D. I.</i> .....	3
APPLIED PROBLEMS OF NONLINEAR OSCILLATION AND WAVE THEORY	
<i>Shabunin A. V.</i> Multistability of periodic orbits in ensembles of maps with long-range coupling .....	5
<i>Korneev I. A., Shabalina O. G., Semenov V. V., Vadivasova T. E.</i> Synchronization self-sustained oscillators interacting through the memristor .....	24
<i>Kuznetsov A. P., Stankevich N. V.</i> Dynamics of coupled generators of quasi-periodic oscillations with equilibrium state .....	41
INNOVATIONS IN APPLIED PHYSICS	
<i>Funtov A. A.</i> Noise in resistive-wall amplifier of M-type with «thick» beam .....	59
HISTORY. PERSONALIA	
<i>Kravchenko N. P.</i> About scientific creativity of Victor A. Solntsev .....	69
CONFERENCES. MEETINGS. SYMPOSIA. SCIENTIFIC SCHOOLS	
XVII International Winter School on Radiophysics and Microwave Electronics. Russia, Saratov, 3–10 February 2018 .....	87
PERSONALIA	
To the 80th Anniversary of Evgenee A. Myasin. <i>Dmitriev A. S.</i> .....	97

## От главного редактора

Недавно моему заместителю по редколлегии пришло письмо от Юлия Менделеевича Брука, кандидата физико-математических наук, старшего научного сотрудника отделения теоретической физики им. И.Е. Тамма Физического института имени П.Н. Лебедева РАН. Он известен своими научными работами по теории внутреннего строения сверхплотных звезд и фазовых превращений в веществе в экстремальных условиях.

Юлий Менделеевич был ответственным секретарем Центрального Оргкомитета Всероссийских и Всесоюзных олимпиад, он член редколлегии научно-популярного физико-математического журнала «Квант».

К письму была приписка: «Эта заметка была написана 30 лет назад к юбилею М.Б. Зельдовича». Заметка показалась редколлегии интересной не только ее членам, но удивительно современной и полезной всем читателям журнала. Приводим ее целиком, хотя 30 лет назад она была напечатана в журнале «Квант».

### О системах единиц и государственных стандартах:

#### Маленькое дополнение\*

Идея о том, что все учебники физики для школ и вузов надо писать, используя Международную систему единиц, то есть СИ, в середине 1980-х годов стала чуть ли не государственным стандартом. Разумеется, всякие учебные пособия можно писать, используя разные системы единиц. Важно лишь, чтобы студент, школьник или уже взрослый специалист умел переводить единицы СИ, скажем, в единицы системы СГС или наоборот.

Однако стремление облегчить жизнь изучающим физику и пользоваться одной-единственной системой единиц может довести и до абсурда. Так, для учебников физики, по которым учатся в технических вузах, единицы СИ действительно удобны, особенно если иметь в виду технические приложения (скажем, измерять ток в амперах, электрическое напряжение в вольтах, а длину в метрах). Но это, в известном смысле, дело привычки. Студенты же физических вузов (факультетов) должны ясно понимать, что в теоретической физике Международная система единиц неудобна хотя бы потому, что размерности векторов, входящих в уравнения Максвелла – основные уравнения электродинамики, в этой системе разные. Можно, конечно, и уравнения Максвелла записывать в единицах СИ, но удобнее писать их в системе СГС.

Вот почему попытка «узаконить» одну систему единиц и изгнать из печатных изданий другие, например, систему СГС, вызывала у преподающих и изучающих физику ощущение неправильности. С другой стороны, отказ от этого приводил к конфликтам с издателями, редакторами и не очень грамотными читателями.

Исаак Константинович Кикоин не был, конечно, «железным сторонником» единиц СИ, но он был еще и одним из руководителей комиссии по школьным учебникам в Министерстве просвещения СССР. А учебники полагалось, как уже говорилось, писать, используя именно эту систему единиц. Конечно, и журнал «Квант» в физических статьях перешел на единицы СИ.

---

\*Исаак Константинович Кикоин в жизни и в «Кванте»: К 100-летию со дня рождения / Сост. Брук Ю.М. и др.// Библиотечка «Квант». Вып. 106. Приложение к журналу «Квант», № 2/2008. М.: Бюро Квантум, 2008. 240 с.

Случилось так, что к 70-летию академика Я.Б. Зельдовича было решено напечатать его популярную статью о космологии. Называлась статья «Вселенная». Яков Борисович был идеальным автором для популярного журнала. Он тщательнейшим образом сам отредактировал свою статью, она не требовала никакой дополнительной правки. Исаак Константинович же был идеальным главным редактором – все статьи по физике, готовящиеся для публикации в «Кванте», он читал самым внимательнейшим образом. Я выступал в формальной роли редактора статьи Зельдовича. Никаких проблем со статьей вроде бы не было, но показать ее И.К. полагалось.

Договорившись о визите, я приехал в назначенное время к И.К. домой и молча сидел на диване в его кабинете, пока он читал статью. И.К. читал медленно и был как будто доволен. Но неожиданно его густые брови поползли навстречу друг другу, и на лице обозначилось состояние, которое я определил как ожидаемую бурю. Кончив читать, И.К. отодвинул текст, помолчал и сказал мне:

– Не пойдет.

– Исаак Константинович, – возразил я, – что же Вам не нравится? Статья-то очень хорошая.

– Да, – сказал И.К., – статья хорошая, но не пойдет. Яков Борисович написал ее, используя единицы СГС, а должны быть единицы СИ.

Надо сказать, что в этом конкретном случае проблемы не было. Достаточно было заменить граммы на килограммы, а сантиметры на метры. Третья единица, используемая в статье, была секунда, но она – секунда и в СИ, и в СГС. Тем не менее, я осмелился сказать, что такая замена может не понравиться автору, потому что в космологии не принято использовать в научных текстах метры, более привычно использовать сантиметры или уж парсеки.

– Я сейчас позвоню Зельдовичу, – произнес И.К. и набрал его номер.

– Яша, – сказал И.К. в трубку, – ты написал замечательную статью, и мы ее к твоему дню рождения в «Кванте» напечатаем. Но надо единицы СГС (см, г, с) заменить на единицы СИ (м, кг, с).

Что ответил Зельдович, я не знаю, но на лице И.К. опять обозначилась буря. Положив телефонную трубку, он сидел некоторое время молча, а потом сказал мне:

– Яша говорит, что если он будет писать в единицах СИ, то над ним все смеяться будут.

– И что же будем делать? – спросил я.

– Ничего, – сказал И.К., – оставим в статье единицы СГС. Но в скобках напишем еще и единицы СИ.

После этого он, наконец, улыбнулся, и я понял, что бури не будет.

Может быть, этот эпизод и не заслуживает столь длинного изложения. Но мне кажется важным еще раз подчеркнуть, что И.К. абсолютно все понимал. Он вовсе не был упрямым, но был дисциплинированным. То, что полагалось требовать от других, он старался выполнять и сам. И еще. Я.Б. Зельдович и И.К. Кикоин были людьми очень ответственными, они не могли отдать в печать статью, которая в каком-либо смысле выглядела бы «сырой».

Такая вот история.

Научный руководитель ИРЭ РАН,  
академик РАН

*Ю.В. Гуляев*

Зам. главного редактора,  
член-корр. РАН

*Д.И. Трубецков*





УДК 517.9, 621.372

## МУЛЬТИСТАБИЛЬНОСТЬ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ОРБИТ В АНСАМБЛЕ ОТОБРАЖЕНИЙ С ДАЛЬНОДЕЙСТВУЮЩИМИ СВЯЗЯМИ

*А. В. Шабунин*

Саратовский национальный исследовательский  
государственный университет имени Н.Г. Чернышевского  
Россия, 410012 Саратов, ул. Астраханская, 83  
E-mail: shabuninav@info.sgu.ru

*Поступила в редакцию 31.10.2017, после доработки 24.02.2018*

**Цель.** Целью работы является исследование закономерностей фазовой мультистабильности в ансамбле колебательных систем с нелокальными связями при изменении силы и дальности действия связей между элементами ансамбля, а также описание этих закономерностей с точки зрения пространственных спектров. **Метод.** Исследование проводилось посредством численного моделирования ансамбля логистических отображений, расчета разностей фаз между колебаниями подсистем, определения пространственных фазовых кластеров и их спектрального анализа. При этом система связей ансамбля рассматривалась как цифровой фильтр, с частотной характеристикой, зависящей от параметров связей. **Результаты.** Проведенные исследования показывают, что при слабых дальнедействующих связях ансамбль отображений с бифуркациями удвоения периода демонстрирует развитую фазовую мультистабильность. С ростом силы связей и радиуса их действия число режимов монотонно уменьшается до тех пор, пока при небольших размерах ансамбля мультистабильность не исчезает полностью. При этом ансамбль переходит к глобальному режиму синфазной синхронизации. Обнаружено, что зависимость числа мод от силы связей носит выраженный ступенчатый характер. Вблизи нуля существует конечный диапазон значений параметра связи, где наблюдается максимально возможное число устойчивых мод. Этот диапазон одинаков для ансамблей с разным дальнедействием. Затем, с ростом силы связей наблюдается скачкообразное уменьшение числа орбит, причем порядок их исчезновения определяется характерной длиной пространственных кластеров. Показано, что порядок «исчезновения» режимов с различными характерными пространственными масштабами кластеров можно рассматривать как результат пространственной фильтрации, при которой система связей работает как цифровой фильтр. При этом порядок исчезновения кластеров определяется формой характеристики пространственного фильтра связей. **Обсуждение.** Из всех полученных результатов наиболее интересным представляется обнаруженный эффект скачкообразного изменения числа аттракторов, происходящий при очень малом изменении силы связей. Его можно объяснить, если рассматривать систему связей ансамбля как пространственный фильтр, полоса пропускания которого зависит от величины и дальности действия связей. Использование спектральных методов для анализа динамики систем со сложной топологией связи представляется перспективным направлением, в том числе и для исследования синхронизации и мультистабильности в хаотических осцилляторах и отображениях.

Обнаруженные закономерности обобщают результаты, известные для ансамблей осцилляторов с локальными связями. Они в значительной части могут быть применены

к ансамблям автоколебательных систем с непрерывным временем, а также к явлению мультистабильности в системах с хаотической динамикой, наблюдающихся в связанных системах с удвоениями периода.

*Ключевые слова:* нелинейные колебания, ансамбли нелинейных осцилляторов, мультистабильность, спектры.

DOI: 10.18500/0869-6632-2018-26-2-5-23

*Образец цитирования:* Шабунин А.В. Мультистабильность периодических орбит в ансамбле отображений с дальнедействующими связями // Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2018. Т. 26, № 2. С. 5–23. DOI: 10.18500/0869-6632-2018-26-2-5-23

## MULTISTABILITY OF PERIODIC ORBITS IN ENSEMBLES OF MAPS WITH LONG-RANGE COUPLINGS

*A. V. Shabunin*

Saratov State University  
83, Astrakhanskaya, 410012 Saratov, Russia  
E-mail: shabuninav@info.sgu.ru  
*Received 31.10.2017, revised 24.02.2018*

**Aim.** The aim of the investigation is to study the regularities of phase multistability in an ensemble of oscillatory systems with non-local couplings in dependence of strength and radius of the couplings, as well as to describe them from the point of view of the spatial spectrum. **Method.** Study has been carried out by means of numerical simulation of ensemble of logistic maps, by calculation of the phase differences between the oscillations in the subsystems, which define spatial phase clusters and analyze their spectra. The structure of the couplings has been considered as a digital filter whose frequency characteristic depends on the couplings parameters. **Results.** The research has revealed that the ensemble of maps with period-doubling bifurcations demonstrates developed phase multistability at weak couplings. While the couplings strength and radius grow, the number of coexisting regimes decrease monotonically. Then, if the ensemble is not too large, the multistability is changed by the globally stable regime of in-phase synchronization. The plot of the number of attractors in depending of the coupling strength has the form of steps. At small coupling there is a finite range where the number of the regimes reaches its maximal value and this range practically not depends on the radius of the couplings. Then, while the couplings strength increases, the number of attractors decreases abruptly from step to step. The order of the attractors disappearance is determined by their spatial cluster structure. It can be explained by considering this process as a result of spatial filtering, when the system of the ensemble couplings operates as a digital filter. The wavelength characteristic of the last defines the order of disappearance of clusters. **Discussion.** The most interesting result is the discovered effect of a jump-like change of the quantity of the attractors with the strength of the couplings. It can be explained if we consider the system of couplings as a spatial filter, the bandwidth of which depends on the couplings parameters. The use of methods of spatial spectra seems to give promising perspectives for the analysis of dynamics of networks with complex topology, including the study of synchronization and multistability in chaotic oscillators and maps. The discovered regularities generalize the results known for ensembles oscillators with local couplings. They are also applicable to ensembles of self-oscillating systems with continuous time, as well as to the phenomenon of multistability in systems with chaotic dynamics and period-doubling bifurcations.

*Keywords:* nonlinear oscillations, ensembles of oscillators, multistability, spectra.

DOI: 10.18500/0869-6632-2018-26-2-5-23

*References:* Shabunin A.V. Multistability of periodic orbits in ensembles of maps with long-range couplings. *Izvestiya VUZ, Applied Nonlinear Dynamics*, 2018, vol. 26, iss. 2, pp. 5–23. DOI: 10.18500/0869-6632-2018-26-2-5-23

## Введение

В последние годы, наряду с изучением ансамблей колебательных систем с локальными связями, значительный интерес привлекают к себе сети с более сложной топологией. Одним из примеров таких сетей можно считать системы с *дальнодействующими связями*, когда взаимодействуют не только ближайшие соседи, но и удаленные друг от друга элементы ансамбля. Интерес к ансамблям с дальнодействующими связями подогревается развитием современных инфокоммуникационных технологий, а также исследованиями в области биологии, нейрофизиологии и социологии. В подобных системах может наблюдаться тот же круг явлений, что и в локально связанных сетях, например: синхронизация периодических и хаотических колебаний [1, 2], бегущие волны [3], образование диссипативных пространственных структур [4–6]. В последние годы большой интерес к динамике ансамблей с дальнодействующими связями проявляется в связи с обнаружением в них особого вида кластерных структур, получивших название *химер* [7–11].

Подобно локально связанным системам ансамбли с дальнодействующими связями демонстрируют развитую мультистабильность [12–15]. Мультистабильность – одно из ключевых свойств нелинейных динамических систем, означающее сосуществование в фазовом пространстве нескольких аттракторов, выбор между которыми осуществляется посредством выбора начальных условий. Учет мультистабильности, а также возможность управлять ею, важны как при фундаментальных исследованиях систем высокой размерности, так и при их практическом использовании.

В настоящей работе рассматривается специальный вид мультистабильности, характерный для цепочек слабо связанных осцилляторов – *фазовая мультистабильность* [16]. Она проявляется как сосуществование множества аттракторов, колебания которых одинаковы по форме, но отличаются временными (фазовыми) сдвигами между осцилляциями в соседних точках ансамбля

$$x_{i+1}(t) = x_i(t - \tau) \quad (1)$$

(здесь  $i$  – номер осциллятора в ансамбле,  $\tau$  – величина задержки по времени). Решения (1) представляют собой либо синфазные колебания всего ансамбля (при  $\tau = 0$ ), либо бегущие с постоянной фазовой скоростью вдоль цепочки осцилляторов волны [16–18]. При простой форме колебаний набор бегущих волн в конечномерном ансамбле ограничен [18]. Сложная временная динамика, например, каскад бифуркаций удвоения периода, может приводить к *развитой фазовой мультистабильности* [19, 20], при которой число сосуществующих аттракторов многократно увеличивается после каждой бифуркации удвоения периода и становится бесконечно большим на пороге перехода к хаосу. Явление развитой фазовой мультистабильности было изучено для ансамблей осцилляторов и отображений с локальными связями: определены его бифуркационные механизмы [21, 22], закономерности эволюции амплитудных и фазовых спектров [23], закономерности расположения бассейнов притяжения [24]. Существует ли развитая фазовая мультистабильность при дальнодействующих связях? Как радиус действия связей и их величина влияют на это явление? Данные вопросы исследуются в настоящей работе.

## 1. Исследуемая система

В качестве модели выберем наиболее простую систему, демонстрирующую каскад бифуркаций удвоения периода – кольцо из  $N$  логистических отображений

$$x_i(n+1) = f(x_i(n)) + \frac{\gamma}{2L} \sum_{j=-L}^L [f(x_{i+j}(n)) - f(x_i(n))]. \quad (2)$$

Здесь  $x_i(n)$  – динамическая переменная, зависящая от дискретного времени  $n \in Z$  и пространственной координаты  $i \in Z$ , заданной на отрезке  $[1 : N]$ ;  $f(x) = \alpha x(1-x)$  – функция, задающая динамику одиночного логистического отображения, зависящая от параметра  $\alpha$ ;  $\gamma$  – сила связей между элементами ансамбля,  $L = 1, 2, \dots, N/2$  – их максимальное дальное действие (радиус связей). Структура связей ансамбля изображена на рис. 1.

Динамика одиночного логистического отображения хорошо известна: с ростом параметра  $\alpha$  оно демонстрирует каскад бифуркаций удвоения периодических орбит, завершающийся переходом к хаосу; в закритической области наблюдается развитие хаотической динамики через бифуркации объединения лент хаотических аттракторов. При объединении отображений в ансамбль их временная динамика не претерпевает существенных изменений, однако, в отличие от одиночного отображения,

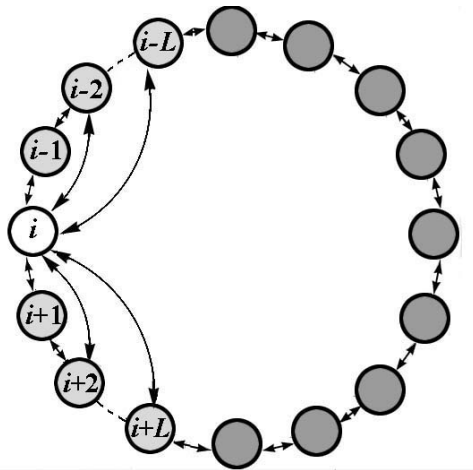


Рис. 1. Структура связей системы (2)

Fig. 1. Structure of couplings of system (2)

ансамбль демонстрирует мультистабильность – сосуществование множества сходных друг с другом колебательных режимов, различающихся *пространственными профилями* (или *пространственными снимками*) – распределениями значений  $x$  по пространственной координате  $i$ , получаемыми в некоторый фиксированный момент времени. Число мультистабильных состояний, а также форма соответствующих профилей определяются как типом колебаний в каждом из осцилляторов, так и параметрами связей ансамбля  $L$  и  $\gamma$ . Рассмотрим эти вопросы для регулярных режимов, то есть для периодических орбит.

## 2. Фазовая мультистабильность периодических орбит

Рассмотрим отдельный несвязанный элемент ансамбля в режиме  $M$ -периодической орбиты  $X$ , которая представляет собой упорядоченный набор из  $M$  точек  $\{x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(M)}\}$ , циклически сменяющих друг друга под действием отображения:

$$x^{(k+1)} = f(x^{(k)}), \quad k = 1, \dots, M-1, \quad (3)$$

$$x^{(1)} = f(x^{(M)}).$$

Орбите  $X$  соответствует  $M$  разных траекторий  $\{X^{(k)}\}_{k=1}^M$ , отличающихся выбором стартовой точки  $x(0) \in X$ . В частотном представлении каждой из этих траекторий соответствует функция спектральной плотности  $F(f)$ , представляющая собой эквидистантный набор гармоник с базовой частотой  $f_0 = 1/M$ :

$$F(f) = \sum_{i=0}^{M/2} C_i \delta(f - i f_0), \quad (4)$$

где  $\delta(f)$  – дельта-функция,  $C_i$  – комплексная амплитуда  $i$  гармоники ( $i = 1, 2, \dots$ ). По аналогии с периодическими колебаниями осцилляторов введем для каждой траектории орбиты  $X^{(k)}$  понятие *начальной фазы*  $\varphi^{(k)}$ . Определим ее как фазу базовой (первой) гармоники дискретного фурье-спектра:  $\varphi = \arctan(\text{Im}(C_1)/\text{Re}(C_1))$ . В силу свойства (3) начальные фазы всех траекторий орбиты связаны простым соотношением:

$$\varphi^{(k)} = \varphi^{(m)} + 2\pi(k - m)f_0, \quad (5)$$

где  $\varphi^{(k)}$  – начальная фаза траектории, стартующей из точки  $x^{(k)}$ .

Перейдем теперь от отдельного элемента к ансамблю в целом. При  $\gamma = 0$  колебания в  $i$  элементе ансамбля могут характеризоваться любой из  $M$  начальных фаз  $\varphi^{(k)}$ , так что в кольце из  $N$  отображений возможны  $M^N$  различных инвариантных  $M$ -периодических траекторий, соответствующих  $M^{N-1}$  орбитам. Каждая из этих орбит характеризуется своим набором начальных фаз  $\{\varphi_i\}_{i=1}^N$ . Для удобства анализа вместо значений фаз будем рассматривать их разности по отношению к фазе опорного (первого) элемента:

$$\Delta\varphi_i = \varphi_i - \varphi_1.$$

В силу выражения (5) каждое из  $\Delta\varphi_i$  кратно  $2\pi f_0$ :  $\Delta\varphi_i = 2\pi f_0 s_i$ , где  $s_i = 0, 1, \dots, M-1$  – целочисленный множитель ( $s_1 \equiv 0$ ). Таким образом, полный набор множителей  $\{s_1, \dots, s_N\}$ , называемый далее *сигнатурой*, однозначно идентифицирует пространственную структуру выбранного аттрактора и может быть использован для его маркировки. В дальнейшем будем обозначать  $M$ -периодическую орбиту с сигнатурой  $s_1, \dots, s_N$  как  $MC^{s_1, s_2, \dots, s_N}$  ( $C$  обозначает Cycle)<sup>1</sup>. На рис. 2 показаны моментальные снимки некоторых аттракторов в ансамбле из десяти отображений с разными сигнатурами: (a)  $2C^{0000000000}$ , (b)  $2C^{0101010101}$ , (c)  $2C^{0111010111}$  и (d)  $4C^{0130210321}$ , где состояния в момент времени  $n = 0$ , отображены сплошными, а в последующие  $(M - 1)$  моментов – штриховыми линиями.

Легко заметить, что сигнатура аттрактора есть не что иное, как  $M$ -ичная кодовая последовательность, построенная по пространственному профилю аттрактора. Использование сигнатур позволяет опустить малосущественные особенности динамики, оставив для анализа пространственную структуру рассматриваемого колебательного режима.

<sup>1</sup>Подобная система обозначения мультистабильных состояний была использована в работах [19,20]. Здесь используется ее модифицированный аналог.

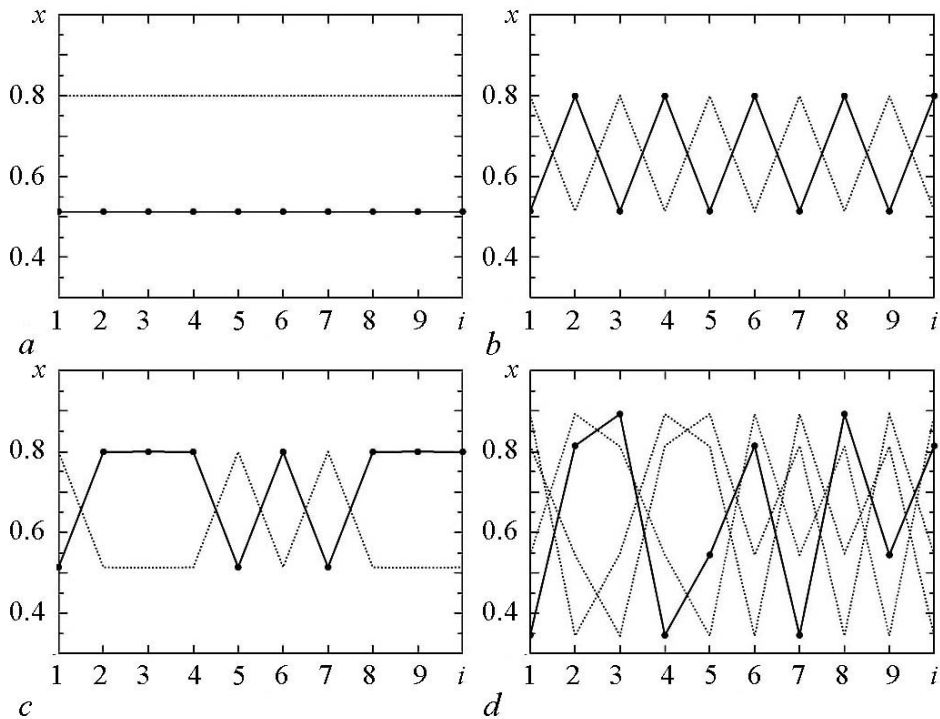


Рис. 2. Пространственные профили (мгновенные снимки) для периодических орбит периода два (*a*, *b*, *c*) и четыре (*d*)

Fig. 2. Spatial snapshots of orbits with periods two (*a*, *b*, *c*) and four (*d*)

### 3. Эволюция фазовой мультистабильности орбит периода два

Как было отмечено выше, при слабой связи число сосуществующих периодических аттракторов ( $QA$ ) будет определяться как количеством точек орбиты  $M$ , так и размером ансамбля  $N$ . В случае орбиты периода один фазовая мультистабильность отсутствует, и в ансамбле реализуется единственный глобально устойчивый аттрактор. Таким образом, простейшим режимом, для которого наблюдается фазовая мультистабильность, является орбита периода два. Выберем значение параметра  $\alpha = 3.2$ , соответствующее данному типу колебаний, и исследуем для него эволюцию мультистабильности в ансамбле (2).

При нулевой связи число аттракторов составляет  $2^{N-1}$ . Рассмотрим, как изменится это значение при наличии взаимодействия и как оно зависит от величины и радиуса связей в ансамбле. Для расчета  $QA$  используем следующую методику.

- Создадим набор из  $P$  случайных начальных условий  $\{\mathbf{x}_l(0)\}_{l=1}^P$ , каждое из которых представляет собой  $N$ -вектор, с компонентами, равномерно распределенными в интервале  $]0 : 1[$ .
- Для каждого начального вектора  $\mathbf{x}_l(0)$  получим соответствующий аттрактор, из которого выделим  $M$  конечных точек:  
 $\mathbf{X}_l = \{\mathbf{x}_l(n_0 + 1), \dots, \mathbf{x}_l(n_0 + M)\}$  ( $n_0$  – длительность переходного процесса).
- Определим, сколько из полученных орбит  $\mathbf{X}_l$  соответствуют разным аттракторам: отнесем  $\mathbf{X}_l$  и  $\mathbf{X}_m$  к разным аттракторам, если расстояние между ними  $d(\mathbf{X}_l, \mathbf{X}_m)$  больше некоторого порогового значения  $\varepsilon$ .

В ходе компьютерных экспериментов были проведены исследования зависимости  $QA$  от  $L$  и  $\gamma$  в ансамбле из десяти отображений при  $P = 2000$  и  $n_0 = 5000$ . Результаты расчетов представлены на рис. 3 в виде трехмерного графика  $QA(L, \gamma)$ .

Из анализа полученных результатов можно заключить следующее.

- Максимальное число аттракторов в ансамбле достигается при нулевой связи и сохраняется вплоть до порогового значения  $\gamma_m$ , величина которого практически не зависит от радиуса связей ( $\gamma_m \simeq 0.05$  для всех  $L$ ).
- При превышении порога рост  $\gamma$  сопровождается уменьшением числа аттракторов; данный процесс завершается, когда в фазовом пространстве остается единственный глобально устойчивый аттрактор, соответствующий режиму синфазных колебаний.
- Уменьшение числа аттракторов с ростом  $\gamma$  происходит тем быстрее, чем больше радиус связей  $L$ .

Исследуем зависимости  $QA(\gamma)$  при разных  $L$  более подробно. Введем в рассмотрение индекс мультистабильности  $\eta$  как отношение текущего числа аттракторов к максимальному:

$$\eta = \frac{QA}{M^{N-1}}.$$

На рис. 4 приведены графики  $\eta(\gamma)$  для разных значений параметра дальности действия  $L$ . Сопоставление графиков позволяет заключить, что увеличение дальности действия ведет к более плавному, но в то же время, в среднем – к более быстрому спадаению индекса мультистабильности с ростом связи. В локально связанном ансамбле процесс разрушения мультистабильности происходит «скачками», а сама зависимость имеет выраженный ступенчатый характер (см. кривую  $l_1$ ). При увеличении дальности действия ступенчатый характер сохраняется, однако ширина ступенек (за исключением первой) с ростом  $L$  сужается (линии  $l_{2,3}$ ). Уменьшение числа аттракторов во всех рассмотренных случаях завершается появлением глобально устойчивого синфазного режима; при этом в ансамблях с большим дальностью действия переход к этому состоянию наблюдается при меньших значениях  $\gamma$ .

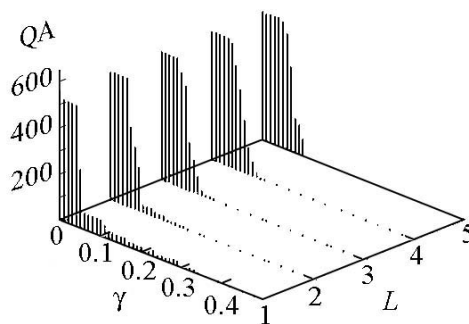


Рис. 3. Число сосуществующих устойчивых орбит периода два в ансамбле из десяти отображений в зависимости от силы и радиуса связей

Fig. 3. The number of stable orbits of period-two in the ten-maps ensemble in dependence of strength and radius of the couplings

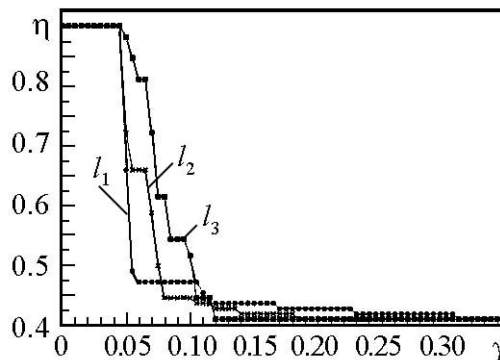


Рис. 4. Зависимость индекса мультистабильности  $\eta$  от параметра связи  $\gamma$  при  $L = 1$  ( $l_1$ ), 2 ( $l_2$ ), 4 ( $l_3$ ) в ансамбле из десяти отображений

Fig. 4. Dependence of multistability index  $\eta$  from coupling parameter  $\gamma$  at  $L = 1$  ( $l_1$ ), 2 ( $l_2$ ), 4 ( $l_3$ ) in the ten-maps ensemble

Проанализируем последовательность исчезновения аттракторов из фазового пространства системы (2) с точки зрения их пространственной структуры. Эту структуру удобно описывать в виде набора *фазовых кластеров*, под которыми мы будем понимать подмножества соседних элементов ансамбля  $\{x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+m}\}$  с одинаковыми значениями фаз. В сигнатуре аттрактора  $MC^{s_1 \dots s_N}$  такому кластеру соответствует набор из  $m$  одинаковых идущих подряд индексов:  $s_i = s_{i+1} = \dots = s_{i+m}$ . Попробуем определить, как связана кластерная структура аттрактора с его устойчивостью, для чего исследуем, как меняется набор «разрешенных» длин фазовых кластеров с ростом связи.

Рассмотрим сначала изменения в кластерной структуре аттракторов при локальных связях ( $L = 1$ ). В интервале  $0 \leq \gamma < \gamma_m$  в пространственных профилях орбит наблюдаются кластеры любой допустимой длины от  $CL = 1$  до  $CL = N/2$  (рис. 5, *a*). При  $\gamma \simeq \gamma_m$  мы видим резкое падение индекса мультистабильности с  $\eta = 1$  до  $\eta \simeq 0.14$  (см. рис. 4), что сопровождается, как следует из рис. 5, *a*, исчезновением режимов, пространственная структура которых содержит кластеры единичной длины. Дальнейший рост связей при  $\gamma \simeq 0.11, 0.167, 0.22$  приводит к последовательному исчезновению режимов с фазовыми кластерами длиной два, три и четыре. Наконец, при  $\gamma \geq 0.31$  становятся неустойчивыми орбиты с длиной кластеров  $N/2$ , и в фазовом пространстве остается единственный глобально устойчивый режим синфазных колебаний.

В случае дальнедействующих связей ( $L > 1$ ) общая тенденция к «разрушению» коротких кластеров сохраняется, но при этом изменяется порядок их исчезновения. При  $L = 2$  сначала исчезают моды с кластерами длиной два ( $\gamma \simeq 0.077$ ), затем –

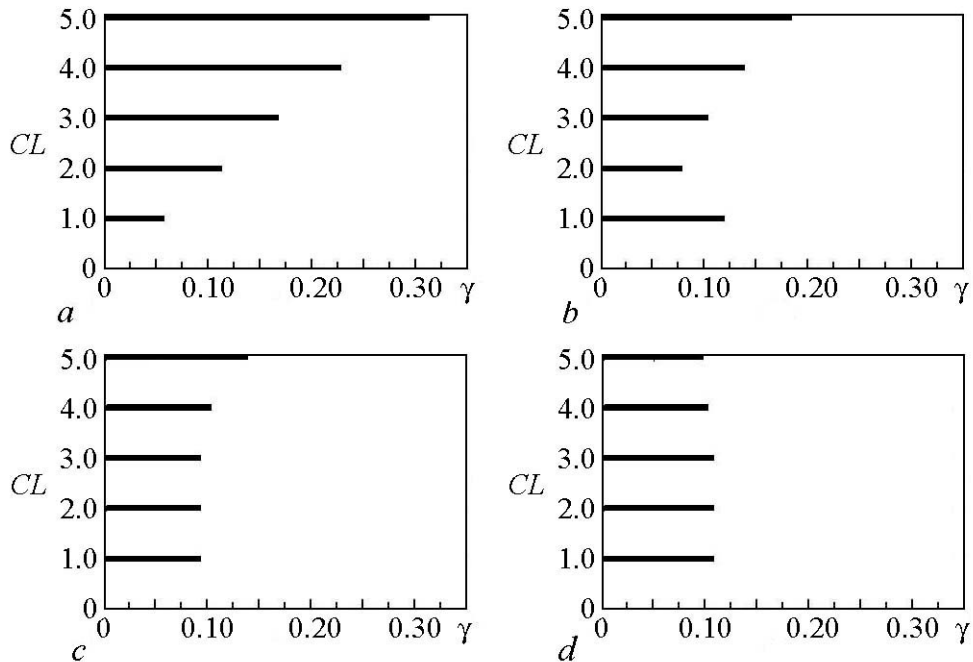


Рис. 5. Длины пространственно однородных кластеров ( $CL$ ), наблюдаемых в ансамбле, в зависимости от  $\gamma$  при  $L = 1$ (*a*), 2 (*b*), 3 (*c*) и 5 (*d*)

Fig. 5. Lengths of spatially homogeneous clusters ( $CL$ ) in dependence of  $\gamma$  at  $L = 1$ (*a*), 2 (*b*), 3 (*c*) and 5 (*d*)



три ( $\gamma \simeq 0.1$ ), а уже потом – один, четыре и пять элементов ( $\gamma \simeq 0.117, 0.138, 0.182$ ), соответственно (рис. 5, *b*). При  $L = 3$  исчезновение кластеров длинами один, два и три происходит почти одновременно ( $\gamma \simeq 0.092$ ), а затем, с небольшой задержкой при  $\gamma \simeq 0.102$  исчезают кластеры длиной четыре и при  $\gamma \simeq 0.138$  – длиной пять элементов (рис. 5, *c*). Аналогичные закономерности наблюдаются в полностью связанной сети ( $L = 5$ ), где исчезновение кластеров любых длин, меньших  $N/2$ , происходит практически одновременно (рис. 5, *d*).

Таким образом, для каждого  $L$  существует свой набор пороговых значений  $\gamma_q$ , при переходе через которые наблюдается исчезновение аттракторов с фазовыми кластерами длиной  $q$ . Соответственно, система (2) работает как пространственный фильтр, позволяющий существовать структурам с определенными характерными пространственными масштабами и подавляющий структуры с другими характерными масштабами.

#### 4. Фильтрующие свойства структуры связей

Рассмотрим систему (2) с точки зрения пространственной фильтрации. Для большей наглядности перепишем ее в форме

$$x_i(n+1) = \sum_{j=-L}^L h_j f(x_{i+j}(n)), \quad (6)$$

где  $h_0 = 1 - \gamma$ ,  $h_j = \gamma/(2L)$  ( $j = \pm 1, \dots, \pm L$ ) – положительные константы. В формуле (6) каждый временной шаг можно разбить на два: нелинейное преобразование

$$x_i(n + \frac{1}{2}) = f(x_i(n))$$

и линейная свертка по пространственной координате

$$x_i(n+1) = \sum_{j=-L}^L h_j x_{i+j}(n + \frac{1}{2}).$$

Последнее уравнение можно интерпретировать как результат воздействия линейного цифрового фильтра порядка  $2L + 1$  с импульсной характеристикой  $h_j$  на пространственную траекторию  $x_i$ . Частотная (волновая) характеристика такого фильтра представляет собой преобразование Фурье от импульсной характеристики  $h_j$ ; для указанных выше значений коэффициентов  $h_j$  она имеет следующий вид:

$$R(\bar{f}) = 1 - \gamma + \frac{\gamma}{L} \sum_{k=1}^L \cos(2\pi k \bar{f}). \quad (7)$$

Здесь  $\bar{f} \in [0 : 0.5]$  – нормированная пространственная частота. Характерный вид функции (7), построенной для  $\gamma = 0.3$  и  $L = 10$ , приведен на рис. 6. Амплитудно-частотная характеристика (АЧХ) пространственного фильтра имеет *лепестковую* структуру, подобную хорошо известной в радиофизике функции  $\text{sinc}(x)$  с выраженным максимумом  $R(0) = 1$  и осциллирующими «хвостами», спадающими по амплитуде и «приподнятыми» над осью абсцисс на некоторую постоянную величину  $\Delta R$ ,

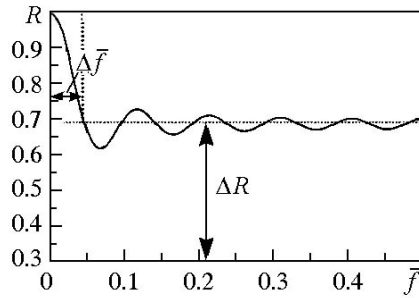


Рис. 6. Амплитудно-частотная характеристика пространственного фильтра, образуемого системой связей, при  $L = 10$  и  $\gamma = 0.3$

Fig. 6. Amplitude-frequency characteristic of spatial filter formed by the system of couplings at  $L = 10$  and  $\gamma = 0.3$

и, с другой стороны, изменение пространственных профилей оставшихся режимов вследствие частотных искажений.

которая близка к  $(1 - \gamma)$  при  $L \gg 1$ . Ширина основного лепестка  $\Delta \bar{f}$ , определяется параметром дальнего действия:  $\Delta \bar{f} \simeq 1/(2L)$ . Таким образом, связи между отображениями (2) действуют как пространственный фильтр нижних частот, ширина полосы пропускания которого определяется радиусом  $L$ , а возвышение «полосы пропускания» над «полосой заграждения» – силой связей  $\gamma$ . Результатом действия этого фильтра является, с одной стороны, подавление тех режимов, пространственные спектры которых выходят за пределы полосы пропускания фильтра,

## 5. Пространственная фильтрация орбит периода два

Рассмотрим изменения в кластерной структуре с точки зрения пространственной фильтрации. Для этого перейдем от пространственных профилей орбит к их пространственным спектрам мощности:

$$P_k = \frac{1}{M} \sum_{n=0}^{M-1} X_k(n) X_k^*(n), \quad (8)$$

где

$$X_k(n) = \sum_{i=0}^{N-1} x_i(n) \exp\left(-j \frac{2\pi i k}{N}\right)$$

– дискретное преобразование Фурье от точек орбиты, взятых как функция пространственной координаты<sup>2</sup>. Для орбиты с пространственным периодом  $N$  спектр (8) – есть совокупность  $N$  гармоник на нормированных частотах  $f_k = k/N$  ( $k=0, 1, \dots, N-1$ ). В силу свойства симметрии дискретного преобразования Фурье относительно центральной частоты, значимыми из них является половина: от  $\bar{f}_0$  до  $\bar{f}_{N/2}$ .

Амплитуды гармоник пространственного спектра определяются формой его профиля, а значит, и кластерной структурой орбиты. Наличие кластеров длиной  $q$  в профиле орбиты будет означать рост спектра в окрестности частоты  $\bar{f}^{(q)} = 1/(2q)$ . Например, профиль орбиты  $2C^{0101000101}$  (рис. 7, *a*) содержит три фазовых кластера единичной длины. Соответственно, в пространственном спектре данной орбиты гармоника на частоте  $\bar{f}^{(1)} = 0.5$  имеет максимальную амплитуду (рис. 7, *b*). Профиль орбиты  $2C^{0011001101}$  (рис. 7, *c*) состоит из нескольких кластеров длиной два. В спектре орбиты это проявляется увеличением амплитуд второй и третьей гармоник, располагающихся слева и справа от характерной частоты  $\bar{f}^{(2)} = 0.25$  (рис. 7, *d*).

<sup>2</sup>При расчете спектра используются центрированные сигналы, из которых удалена постоянная составляющая

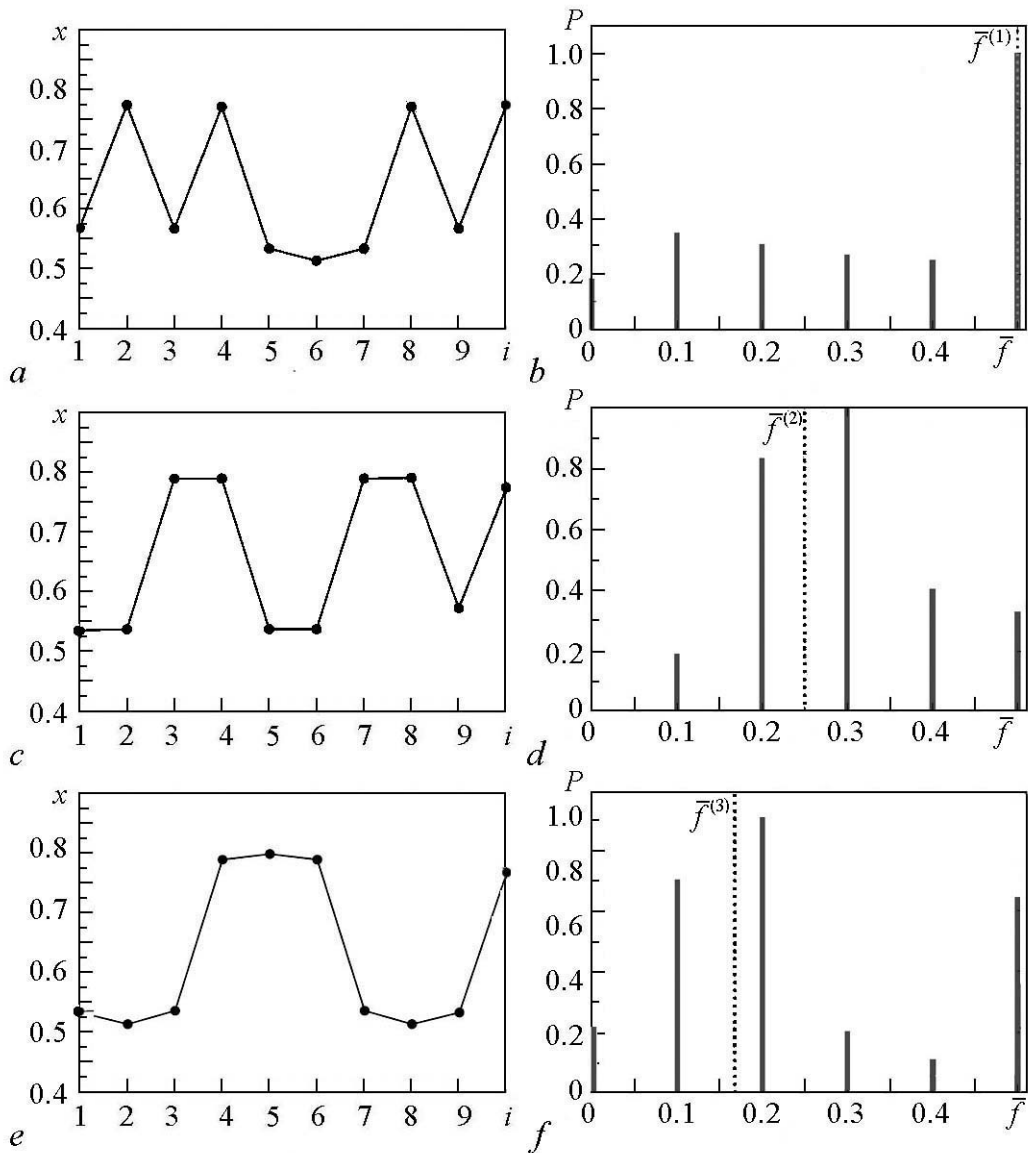


Рис. 7. Пространственные профили (слева) и спектры (справа) некоторых режимов:  $2C^{0101000101}$  (a, b),  $2C^{0011001101}$  (c, d) и  $2C^{0001110001}$  (e, f);  $L = 1, \gamma = 0.04$

Fig. 7. Spatial snapshots (left column) and spectra (right column) of some regimes:  $2C^{0101000101}$ (a, b),  $2C^{0011001101}$  (c, d) and  $2C^{0001110001}$  (e, f);  $L = 1, \gamma = 0.04$

Аналогично, наблюдается рост амплитуд гармоник вблизи частоты  $\bar{f}^{(3)} = 0.167$  для орбиты  $2C^{0001110001}$ , профиль которой содержит кластеры длиной три (рис. 7, e, f) и т.д.

Рассмотрим, как соотносятся критические частоты кластеров с АЧХ пространственного фильтра. Для этого построим графики  $R_\gamma(f)$  при критических значениях  $\gamma = \gamma_q$  (см. рис. 5, a-d), на которых пунктирными линиями отобразим значения указанных характерных частот кластеров  $\bar{f}^{(q)} = 1/(2q)$  ( $q = 1, 2, \dots, 5$ ).

Начнем рассмотрение с локально связанного ансамбля ( $L = 1$ ). В этом случае при любом  $\gamma$  АЧХ представляет собой монотонно затухающую функцию (рис. 8, a):

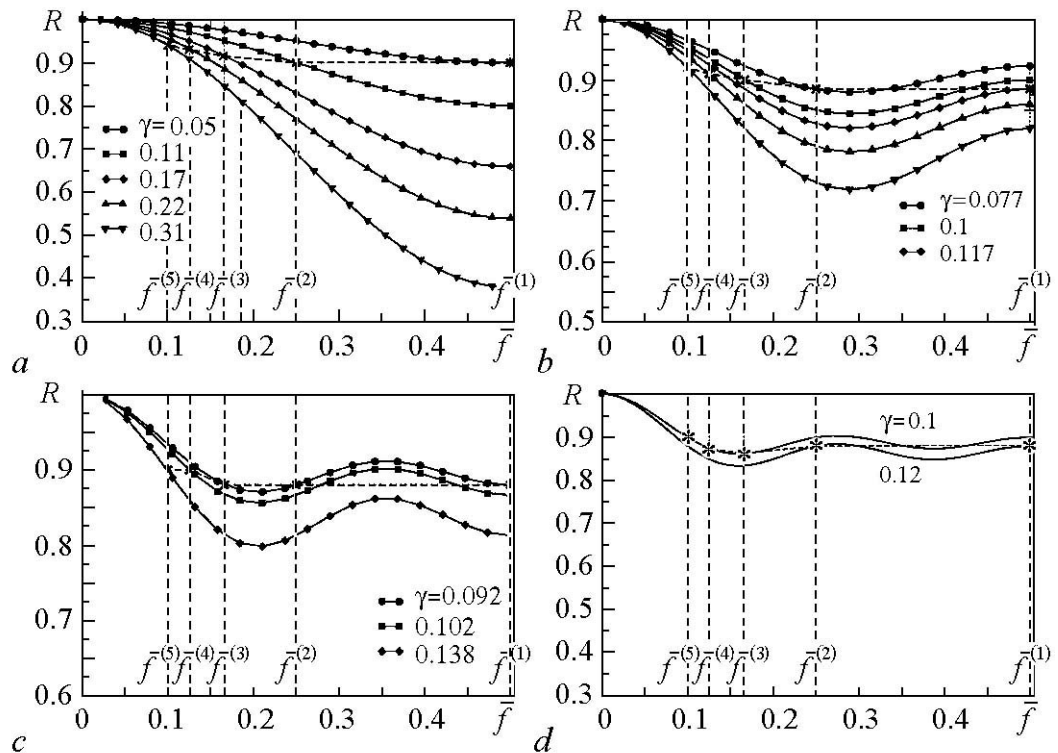


Рис. 8. АЧХ фильтра связей, построенные для пороговых значений  $\gamma$ , при которых происходит скачкообразное изменение числа сосуществующих орбит:  $L = 1$  (a), 2 (b), 3 (c), 5 (d); вертикальные пунктирные линии отмечают характерные частоты  $\bar{f}_q$  кластеров длиной  $q$

Fig. 8. Amplitude-frequency characteristic of the coupling filter for the threshold couplings  $\gamma$ , at which there are abrupt changes of the number of orbits:  $L = 1$  (a), 2 (b), 3 (c), 5 (d); vertical dot lines mark the basic frequencies  $\bar{f}_q$  of  $q$ -clusters

коэффициент передачи фильтра достигает максимального значения на нулевой частоте и минимального значения для  $\bar{f} = 0.5$ . Соответственно, точки пересечения графика АЧХ с линиями характерных частот  $\bar{f}^{(q)}$  будут упорядочены по возрастанию длин кластеров:  $R_\gamma(\bar{f}^{(1)}) < R_\gamma(\bar{f}^{(2)}) < \dots < R_\gamma(\bar{f}^{(5)})$ , то есть в том же порядке, что наблюдался при численном исследовании изменения кластерной структуры режимов (см. рис. 5, a). Более того, как видно из рис. 8, a, точки пересечения графиков  $R_{\gamma_q}(\bar{f})$  с линиями базовых частот  $\bar{f}^{(q)}$  (отмечены знаками  $\times$ ) находятся почти на одном уровне; для наглядности эти точки соединены штриховой линией. Таким образом, значения коэффициента передачи в этих точках  $R^{(q)} = R_{\gamma_q}(\bar{f}^{(q)})$  для локально связанного ансамбля являются пороговыми: при значениях связи, для которых  $R_\gamma(\bar{f}^{(q)}) > R^{(q)}$ , кластеры длиной  $q$  наблюдаются, а при  $R_\gamma(\bar{f}^{(q)}) < R^{(q)}$  – уже нет.

Перейдем теперь к ансамблям с нелокальными связями. При  $L = 2$  (рис. 8, b) АЧХ фильтра теряет монотонный характер, в результате чего ее глобальный минимум находится не на частоте  $\bar{f} = 0.5$ , а на частоте  $\bar{f} \simeq 0.3$ . Соответственно меняется и порядок следования значений  $R_\gamma(\bar{f}^{(q)})$ :  $R_\gamma(\bar{f}^{(2)}) < R_\gamma(\bar{f}^{(3)}) < R_\gamma(\bar{f}^{(1)}) < R_\gamma(\bar{f}^{(4)}) < R_\gamma(\bar{f}^{(5)})$ , что, как мы видим из сопоставления с рис. 5, b, соответствует наблюдаемому порядку исчезновения кластеров, рассмотренному ранее. Пороговые значения коэффициента передачи, так же, как и в случае ( $L = 1$ ), принимают

близкие значения и равны, соответственно:  $\{0.89, 0.9, 0.89, 0.91, 0.92\}$ . Аналогичные закономерности наблюдаются и при других значениях  $L$ , например, в полностью связанной сети при  $L = 5$ . В этом случае, вследствие сильно осциллирующей формы АЧХ, пороговые значения для всех характерных частот оказываются близки друг к другу и переход от развитой мультистабильности к единственному синфазному режиму происходит почти мгновенно при  $\gamma \simeq 0.1$ .

Таким образом, последовательность разрушения мультистабильных состояний, наблюдаемая при увеличении величины связей, определяется АЧХ пространственного фильтра, который составляет система связей между осцилляторами ансамбля. Данный фильтр, подавляя одни пространственные моды и сохраняя другие, формирует тем самым набор сосуществующих режимов.

## 6. Режим глобальной синфазной синхронизации

Кроме рассмотренных выше пространственно неоднородных мод, в системе (2) всегда существует режим синфазной синхронизации, который остается устойчивым при любых значениях  $L$  и  $\gamma \geq 0$ . Поскольку несинфазные моды с ростом связи теряют устойчивость, то при превышении параметром  $\gamma$  некоторого порогового значения  $\gamma_t$  мультистабильность исчезает, и аттрактор, соответствующий синфазным колебаниям, становится глобальным. Величина порога  $\gamma_t$  зависит от радиуса связей  $L$  и размера ансамбля  $N$ . Определим эту зависимость в ходе численных исследований.

Поскольку число сосуществующих режимов чрезвычайно быстро растет с увеличением  $N$ , проверить устойчивость всех сосуществующих предельных множеств методом прямого перебора начальных условий не представляется возможным. Однако, как следует из результатов исследований в предыдущем разделе, переходу к режиму глобальной синхронизации предшествует потеря устойчивости пространственно неоднородной модой с фазовыми кластерами длиной  $N/2$ , поэтому значение параметра связи  $\gamma_{N/2}$ , при котором происходит данная бифуркация, может быть выбрано в качестве оценки для величины  $\gamma_t$ :  $\gamma_t \simeq \gamma_{N/2}$ .

В ходе численных исследований было определено пороговое значение  $\gamma_t$  в зависимости от  $N$  и  $L$ . График  $\gamma_t(N, L)$  показан на рис. 9 в виде карты, на которой значение  $\gamma_t$  в данной точке отображается оттенком серого цвета: чем больше значение  $\gamma_t$ , тем темнее цвет точки. Измерения проводились внутри области, ограниченной сверху линией  $L=N/2$ , которая задает верхнюю допустимую границу для радиуса связей. Ниже этой линии распо-

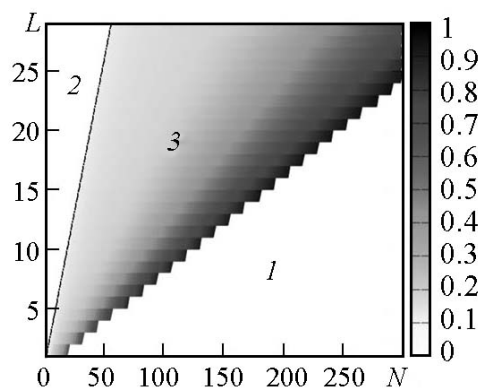


Рис. 9. Зависимость критического значения  $\gamma$  от  $N$  и  $L$ : область 1 соответствует отсутствию режима глобальной синхронизации, 3 – наличию данного режима, в области 2 радиус связей превышает допустимое значение

Fig. 9. Dependence of critical value  $\gamma$  from  $N$  and  $L$ : area 1 refers to the absence of global synchronization, 3 – to its presence, 2 – the area where the radius of coupling is greater than the allowed values

ложена конусообразная область, в которой наблюдается мультистабильность. Здесь с ростом размера ансамбля  $N$  наблюдается рост порогового значения  $\gamma_t$ , которое при определенном  $N = N_t$  достигает значения  $\gamma_t = 1$ . Зависимость  $N_t$  от  $L$  приблизительно соответствует прямой  $N_t \simeq 14L$ . Соответственно, при  $N > N_t$  глобальная синхронизация не реализуется ни при каких значениях  $\gamma < 1$ , и мультистабильность сохраняется при любых  $L$  (область  $I$  на рисунке). Таким образом, мы видим, что при любом  $L$  существует диапазон значений  $N$ , когда мультистабильность сменяется моностабильным режимом синфазных колебаний. В то же время, существует верхняя граница длины ансамбля  $N = N_t$  за которой пространственно неоднородные состояния реализуются при сколь угодно сильной связи из диапазона  $[0 : 1[$ .

Попробуем оценить полученные зависимости с точки зрения рассмотренного ранее пространственного фильтра. Как известно, спектр пространственно однородного режима содержит единственную гармонику на частоте  $\bar{f} = 0$ , в то время как пространственные спектры других мод содержат также гармоники на частотах  $\bar{f}_i = i/N$ . С ростом  $\gamma$  АЧХ фильтра связей понижается на всех частотах, кроме нулевой частоты, в окрестности которой она всегда близка к единице (см. рис. 6). Предположим, что существует некоторое пороговое значение коэффициента передачи фильтра  $\xi$ , разграничивающее «полосу пропускания» ( $\Delta\bar{f}_+ : R(\bar{f}) > \xi$  при  $\bar{f} \in \Delta\bar{f}_+$ ) и «полосу подавления» ( $\Delta\bar{f}_- : R(\bar{f}) < \xi$  при  $\bar{f} \in \Delta\bar{f}_-$ ), так что моды становятся неустойчивыми, если их пространственные спектры в своей основной части попадают в полосу подавления. Значение нормированной частоты, отделяющее полосу пропускания от полосы подавления есть «граничная частота» пространственного фильтра связей:  $\bar{f}_{\text{гр}} = R^{-1}(\xi)$ . При сделанных предположениях пороговое значения  $\gamma_t$  можно найти из условия:  $f_1 \leq \bar{f}_{\text{гр}}$ , где  $f_1 = 1/N$  – частота первой гармоники в спектре. Отсюда, используя выражение (7), получим оценку критической силы связей

$$\gamma_t = \frac{1 - \xi}{1 - \frac{1}{L} \sum_{k=1}^L \cos(2\pi k/N)}. \quad (9)$$

При  $L/N \ll 1$ , используя аппроксимацию  $\cos(x) \simeq 1 - x^2/2$ , формулу (9) можно упростить:

$$\gamma_t \simeq \frac{3(1 - \xi)N^2}{\pi^2(L + 1)(2L + 1)}. \quad (10)$$

Здесь использовано известное математическое соотношение:  $\sum_{k=1}^L k^2 = L(L+1)(2L+1)/6$ . При  $L \gg 1$  формула (10) упрощается до обратной квадратичной зависимости:

$$\gamma_t \simeq \frac{3(1 - \xi)}{2\pi^2\mu^2}, \quad (11)$$

где  $\mu = L/N$  – нормированный радиус связей, меняющийся в пределах от  $\mu = 0$  (для несвязанного ансамбля) до  $\mu = 0.5$  (для полносвязной сети).

Рассмотрим, насколько точна полученная оценка (11). Для этого, исходя из экспериментальных результатов, построим семейства характеристик  $\gamma_t(N)$  для разных значений  $L$  (рис. 10, а). Графики представляют собой монотонно возрастающие к значению  $\gamma_t = 1$  функции, скорость возрастания которых убывает с ростом радиуса связей  $L$ . Качественное сходство разных графиков на рис. 10, а позволяет

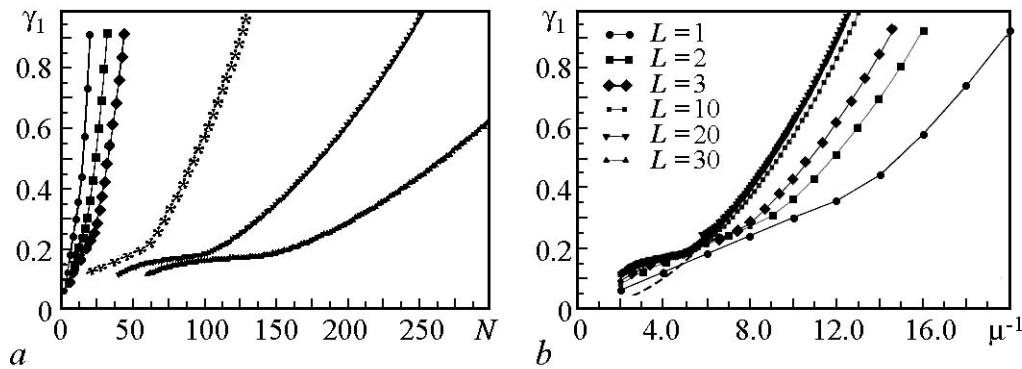


Рис. 10. График зависимости порогового значения коэффициента связи  $\gamma_t$  от размера ансамбля  $N$  (a); тот же рисунок в нормированной системе координат  $\mu^{-1}$  (b)

Fig. 10. Plot of threshold value of coupling  $\gamma_t$  with the ensemble size  $N$  (a); the same – for normalized values of coordinate  $\mu^{-1}$  (b)

предположить наличие масштабной симметрии. Действительно, нормировав размер ансамбля  $N$  на радиус связей  $L$  (то есть перейдя к зависимости от обратного параметра дальности действия  $\mu^{-1}$ ), при  $L \gg 1$  мы получим в новых координатах общую кривую  $\gamma_t(\mu^{-1})$ . Подтверждением этому является рис. 10, b, на котором изображены те же экспериментальные графики, что и на рис. 10, a, но в новой системе координат. Из рисунка видно, что с ростом  $L$  графики сближаются друг к другу и при  $L \geq 10$ , практически сливаются. Полученная зависимость хорошо аппроксимируется выражением (11), если  $\mu^{-1} \geq 5$ , то есть при  $L/N \leq 0.2$ . Таким образом оценочная формула (11) может быть использована для определения границы существования режима глобальной синхронизации при  $10 \lesssim L \lesssim N/5$ .

Формула (11) дает возможность также оценить верхнюю границу размера ансамбля, для которого еще наблюдается мультистабильность. Для этого нужно подставить в нее  $\gamma_t = 1$  и решить относительно  $N$ :

$$N_t \simeq \frac{\pi}{\sqrt{1.5(1-\xi)}} L. \quad (12)$$

Обратим внимание, что выражение (12) линейное, что совпадает с качественной зависимостью, полученной ранее на основании анализа рис. 9. Количественное сопоставление при значении  $\xi \simeq 0.955$ , для которого построена аппроксимирующая кривая на рис. 10, b, дает оценку:  $N_t \simeq 12L$ , что близко к определенной ранее экспериментально  $N_t = 14L$ .

## 7. Мультистабильность орбит бóльших периодов

Для орбит бóльших периодов ( $M > 2$ ) число одновременно сосуществующих мультистабильных состояний существенно возрастает. При малой связи ( $\gamma \simeq 0$ ) даже для ансамблей средних размеров число орбит периода четыре становится настолько большим, что делает их подсчет и идентификацию чрезвычайно трудной. Тем не менее попробуем качественно сопоставить полученные ранее закономерности

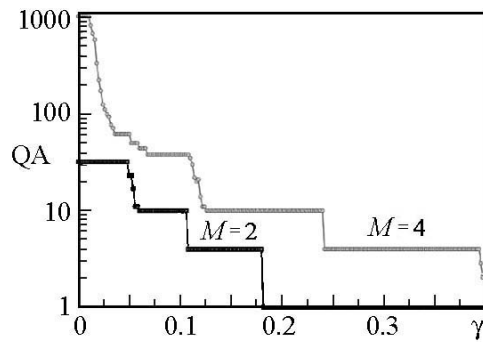


Рис. 11. Зависимость числа аттракторов от параметра связи в цепочке из шести отображений для орбит периода четыре и два; радиус связей равен двум

Fig. 11. Dependence of the number of attractors on the coupling parameter in a chain of 6 maps for the orbits of the period 4 and 2; the coupling radius equal 2

Для режимов периода четыре. Выберем число элементов ансамбля равным шести. В этом случае максимальное число сосуществующих аттракторов периода четыре равно 1024, а орбит периода два – 32. Пользуясь методикой, описанной выше, построим для данного случая зависимость числа аттракторов, одновременно существующих в ансамбле, от величины связи  $\gamma$ , сравнив эту зависимость с аналогичной, построенной для орбит с  $M = 2$ . Результаты расчетов приведены на рис. 11. Для удобства сопоставления графики построены в логарифмическом масштабе по оси ординат. Как видно из графиков, между двумя зависимостями существует очевидное качественное сходство. Для орбит периода четыре в области малой связи ( $\gamma \lesssim 0.01$ ) наблюдается «ступенька», на которой сохраняется максимальное число аттракторов. Затем, в интервале  $0.01 \lesssim \gamma \lesssim 0.07$  происходит быстрый спад мультистабильности, после которого зависимость  $QA(\gamma)$  практически совпадает с соответствующей зависимостью для  $M = 2$ , будучи сдвинутой относительно последней в сторону больших значений параметра связей. Качественное сходство в процессах разрушения мультистабильности для орбит периода два и четыре следует из сходства их пространственных спектров. Действительно, форма пространственных снимков орбит больших периодов отличается от соответствующего снимка орбиты периода два, на базе которой эти орбиты образованы, лишь наличием на их фоне мелкомасштабных флуктуаций; последние не могут оказать существенного влияния на форму пространственного спектра.

## Выводы

Ансамбль отображений с бифуркациями удвоения периода при слабых дальнедействующих связях демонстрирует развитую фазовую мультистабильность. С ростом силы связей, а также радиуса их действия, число сосуществующих состояний монотонно уменьшается и, если размер ансамбля не слишком большой, мультистабильность исчезает. В этом случае система демонстрирует режим глобальной синфазной синхронизации.

Зависимость числа сосуществующих режимов от силы связей носит ступенчатый характер. В области слабых связей существует конечный интервал по связи, где наблюдается максимально возможное число устойчивых мод. Этот интервал одинаков для ансамблей с разным дальнедействием связей. С ростом связей происходит скачкообразное уменьшение числа орбит в соответствии с их пространственной кластерной структурой. Порядок «разрушения» кластеров разной длины зависит от радиуса дальнедействия связей.



Для оценки закономерностей уменьшения мультистабильности с ростом связей удобно использовать спектральный подход, рассматривая систему связей ансамбля в качестве цифрового фильтра. При таком рассмотрении изменение формы АЧХ фильтра с изменением числа и силы связей позволяет определить порядок исчезновения режимов с характерными пространственными кластерами, а также оценить границу между мультистабильностью и режимом глобальной синхронизации. В этом случае, если сразу множество орбит с одинаковыми характерными пространственными масштабами выходят за пределы полосы пропускания фильтра, то они одновременно теряют устойчивость, в результате чего мультистабильность существенно уменьшается.

### Библиографический список

1. *Ermentrout G.B.* Synchronization in a pool of mutually coupled oscillators with random frequencies // *J. of Math. Biol.* 1985. Vol. 22. Pp. 1–9.
2. *Crawford J.D., Davies K.T.R.* Synchronization of globally coupled phase oscillators: Singularities and scaling for general couplings//*Physica D.* 1990. Vol. 125. Pp. 1–46.
3. *Ren L., Ermentrout G.B.* Phase locking in chains of multiple-coupled oscillators // *Physica D.* 2000. Vol. 143. P. 56.
4. *Kuramoto Y.* *Chemical Oscillations, Waves and Turbulence.* Berlin: Springer. 1984.
5. *Cross M.G., Hohenberg P.C.* Pattern formation outside of equilibrium // *Rev. Mod. Phys.* 1993. Vol. 65, no. 3. Pp. 851–1112.
6. *Mosekilde E., Maistrenko Yu., Postnov D.* *Chaotic Synchronization. Applications to Living Systems.* Singapore: World Scientific. 2002.
7. *Abrams D.M., Strogatz S.H.* Chimera states for coupled oscillators // *Phys. Rev. Lett.* 2004. Vol. 93. P. 174102.
8. *Omelchenko I., Maistrenko Y., Hovel P., Scholl E.* Loss of Coherence in Dynamical Networks: Spatial Chaos and Chimera States // *Phys. Rev. Lett.* 2011. Vol. 106. P. 234102.
9. *Hagerstrom A.M., Murphy T.E., Roy R., Hoevel P., Omelchenko I., Scholl E.* Experimental observation of chimeras in coupled-map lattices // *Nature Physics.* 2012. Vol. 8. Pp. 658–661.
10. *Богомолов С.А., Стрелкова Г.И., Scholl E., Анищенко В.С.* Амплитудные и фазовые химеры в ансамбле хаотических осцилляторов // *Письма в ЖТФ.* 2016. Т. 42, № 14. С. 103–110.
11. *Gopal R., Chandrasekar V.K., Venkatesan A., Lakshmanan M.* Observation and characterization of chimera states in coupled dynamical systems with nonlocal coupling // *Phys. Rev. E.* 2014. Vol. 89. P. 052914.
12. *Areccchi F.T., Meucci R., Puccioni G., Tredicce J.* Experimental evidence of subharmonic bifurcations, multistability, and turbulence in a Q-switched gas laser // *Phys. Rev. Lett.* 1982. Vol. 49. Pp. 1217–1220.
13. *Prengel F., Wacker A. Scholl E.* Simple model for multistability and domain formation in semiconductor superlattices // *Phys. Rev. B.* 1994. Vol. 50. Pp. 1705–1712.
14. *Sun N.G., Tsironis G.P.* Multistability of conductance in doped semiconductor superlattices // *Phys. Rev. B.* 1995. Vol. 51. Pp. 11221–11224.

15. Foss J., Longtin A., Mensour B., Milton J. Multistability and delayed recurrent loops // *Phys. Rev. Lett.* 1996. Vol. 76. Pp. 708–711.
16. Ermentrout G.B. The behaviour of rings of coupled oscillators // *J. of Math. Biol.* 1985. Vol. 23, no. 1. Pp. 55–74.
17. Ermentrout G.B. Stable periodic solutions to discrete and continuum arrays of weakly coupled nonlinear oscillators // *SIAM J. of Appl. Math.* 1992. Vol. 52, no. 6. Pp. 1664–1687.
18. Шабунин А.В., Акопов А.А., Астахов В.В., Вадивасова Т.Е. Бегущие волны в дискретной ангармонической автоколебательной среде // *Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика.* 2005. Т. 13, № 4. С. 37–54.
19. Астахов В.В., Безручко Б.П., Гуляев Ю.П., Селезнев Е.П. Мультистабильные состояния в диссипативно связанных Фейгенбаумовских системах // *Письма в ЖТФ.* 1989. Т. 15, № 3. С. 60–65.
20. Астахов В.В., Безручко Б.П., Пудовочкин О.Б., Селезнев Е.П. Фазовая мультистабильность и установление колебаний в нелинейных системах с удвоением периода // *Радиотехника и электроника.* 1993. Т. 38, № 2. С. 291–295.
21. Astakhov V., Shabunin A., Kapitaniak T., Anishchenko V. Loss of chaos synchronization through the sequence of bifurcations of saddle periodic orbits // *Phys. Rev. Lett.* 1997. Vol. 79, no. 6. P. 1014.
22. Astakhov V., Shabunin A., Uhm W., Kim S. Multistability formation and synchronization loss in coupled Henon maps: Two sides of the single bifurcational mechanism // *Phys. Rev. E.* 2001. Vol. 63, no. 5. P. 056212.
23. Астахов В.В., Шабунин А.В., Анищенко В.С. Спектральные закономерности при формировании мультистабильности в связанных генераторах с удвоением периода // *Радиотехника и Электроника.* 1997. Т. 42, № 8. С. 974–981.
24. Bezruchko B.P., Prokhorov M.D., Seleznev E.P. Oscillation types, multistability, and basins of attractors in symmetrically coupled period-doubling systems // *Chaos, Solitons and Fractals.* 2003. Vol. 15. P. 695–711.

## References

1. Ermentrout G.B. *J. of Math. Biol.*, 1985, vol. 22, pp. 1–9.
2. Crawford J.D., Davies K.T.R. *Physica D.*, 1990, vol. 125, pp. 1–46.
3. Ren L., Ermentrout G.B. *Physica D.*, 2000, vol. 143, p. 56.
4. Kuramoto Y. *Chemical oscillations, waves and turbulence.* Berlin: Springer. 1984.
5. Cross M.G., Hohenberg P.C. *Rev. Mod. Phys.*, 1993, vol. 65, no. 3, pp. 851–1112.
6. Mosekilde E., Maistrenko Yu., Postnov D. *Chaotic Synchronization. Applications to Living Systems.* Singapore: World Scientific, 2002.
7. Abrams D.M., Strogatz S.H. *Phys. Rev. Lett.*, 2004, vol. 93, p. 174102.
8. Omelchenko I., Maistrenko Y., Hovel P., Scholl E. *Phys. Rev. Lett.*, 2011, vol. 106, p. 234102.
9. Hagerstrom A.M., Murphy T.E., Roy R., Hoevel P., Omelchenko I., Scholl E. *Nature Physics*, 2012, vol. 8, pp. 658–661.
10. Bogomolov S.A., Strelkova G.I., Anishchenko V.S., Scholl E. *Technical Physics Letters*, 2016, vol. 42, no. 7, pp. 765–768.

11. Gopal R., Chandrasekar V.K., Venkatesan A., Lakshmanan M. *Phys. Rev. E.*, 2014, vol. 89, p. 052914.
12. Arecchi F.T., Meucci R., Puccioni G., Tredicce J. *Phys. Rev. Lett.*, 1982, vol. 49, pp. 1217–1220.
13. Prengel F., Wacker A., Scholl E. *Phys. Rev. B.*, 1994, vol. 50, pp. 1705–1712.
14. Sun N.G., Tsironis G.P. *Phys. Rev. B.*, 1995, vol. 51, pp. 11221–11224.
15. Foss J., Longtin A., Mensour B., Milton J. *Phys. Rev. Lett.*, 1996, vol. 76, pp. 708–711.
16. Ermentrout G.B. *J. of Math. Biol.*, 1985, vol. 23, no. 1, pp. 55–74.
17. Ermentrout G.B. *SIAM J. of Appl. Math.*, 1992, vol. 52, no. 6, pp. 1664–1687.
18. Shabunin A.V., Akopov A.A., Astakhov V.V., Vadivasova T.E. *Izvestija VUZ, Applied Nonlinear Dynamics*, 2005, vol. 13, no. 4, pp. 37–54 (in Russian).
19. Astakhov V.V., Bezruchko B.P., Gulyaev Y.P., Seleznev E.P. *Technical Physics Letters*, 1989, vol. 15, no. 3, pp. 60–65 (in Russian).
20. Astakhov V.V., Bezruchko B.P., Pudovochkin O.B., Seleznev E.P. *Radiotekhnika i elektronika*, 1993, vol. 38, no. 2, pp. 291–295 (in Russian).
21. Astakhov V., Shabunin A., Kapitaniak T., Anishchenko V. *Phys. Rev. Lett.*, 1997, vol. 79, p. 1014.
22. Astakhov V., Shabunin A., Uhm W., Kim S. *Phys. Rev. E.*, 2001, vol. 63, p. 056212.
23. Astakhov V.V., Shabunin A.V., Anishchenko V.S. *Journal of Communications Technology and Electronics*, 1997, vol. 42, p. 907.
24. Bezruchko B.P., Prokhorov M.D., Seleznev E.P. *Chaos, Solitons and Fractals*, 2003, vol. 15, p. 695–711.



*Шабунин Алексей Владимирович* – окончил Саратовский государственный университет (1990). Доктор физико-математических наук (2008), профессор кафедры радиофизики и нелинейной динамики СГУ. Научные интересы – нелинейная динамика, теория колебаний, синхронизация и управление хаосом. Автор более 75 научных публикаций.

410012 Саратов, ул. Астраханская, 83  
 Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского  
 E-mail: shabuninav@info.sgu.ru



УДК 517.9

## СИНХРОНИЗАЦИЯ АВТОГЕНЕРАТОРОВ, ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩИХ ЧЕРЕЗ МЕМРИСТОР

*И. А. Корнеев, О. Г. Шабалина, В. В. Семенов, Т. Е. Вадивасова*

Саратовский национальный исследовательский государственный университет

Россия, 410012 Саратов, ул. Астраханская, 83

E-mail: ivankorneew@yandex.ru, shabalinaog96@gmail.com,

semenov\_v\_v@list.ru, vadivasovate@yandex.ru

*Поступила в редакцию 13.02.2018*

**Цель.** Целью работы является исследование взаимной синхронизации двух периодических автогенераторов с расстройкой частот, взаимодействующих через мемристор. Предполагается дать ответ на вопрос о возможности синхронизации в этом случае и об ее предполагаемых особенностях. **Метод.** Исследование проводится методами теоретического анализа и компьютерного моделирования колебаний в системе двух генераторов ван дер Поля, взаимодействующих через мемристивную проводимость. В качестве последнего используется идеализированный мемристор Чуа. **Результаты.** Показано, что в системе имеется линия, состоящая из точек равновесия. Это приводит к особенностям синхронизации. Эффект фазового захвата и границы области синхронизации при вариации параметров зависят от начальных условий. Малое возмущение уравнения, описывающего динамику переменной, управляющей мемристором, приводит к исчезновению линии равновесий и устраняет зависимость синхронизации от начальных условий. **Обсуждение.** В математической модели автогенераторов с мемристивной связью синхронизация обладает существенными особенностями. Однако модель не является грубой и в реальной системе указанные особенности должны исчезнуть. В этом случае следствием мемристивной связи могут быть длительные переходные процессы, зависящие от начального состояния системы.

*Ключевые слова:* мемристор, автогенератор, синхронизация, захват фазы, линия равновесий.

DOI: 10.18500/0869-6632-2018-26-2-24-40

*Образец цитирования:* Корнеев И.А., Шабалина О.Г., Семенов В.В., Вадивасова Т.Е. Синхронизация автогенераторов, взаимодействующих через мемристор // Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2018. Т. 26, № 2. С. 24–40. DOI: 10.18500/0869-6632-2018-26-2-24-40

# SYNCHRONIZATION SELF-SUSTAINED OSCILLATORS INTERACTING THROUGH THE MEMRISTOR

I. A. Korneev, O. G. Shabalina, V. V. Semenov, T. E. Vadivasova

Saratov State University  
83, Astrakhanskaya, 410012 Saratov, Russia  
E-mail: ivankorneew@yandex.ru, shabalinaog96@gmail.com,  
semenov\_v\_v@list.ru, vadivasovate@yandex.ru  
Received 13.02.2018

**Aim.** The aim of the paper is to study the mutual synchronization of two periodic self-sustained oscillators with a detuning of frequencies interacting through a memristor. It is supposed to give an answer to the question of the possibility of synchronization in this case and of its probable features. **Method.** The study is carried out by methods of theoretical analysis and computer simulation of oscillations in a system of two van der Pol oscillators interacting through a memristive conductivity. As the latter, an idealized Chua memristor is used. **Results.** It is shown that there is a line in the system phase space consisting of equilibrium points. This leads to specific properties of a synchronization. The phase-locking effect and the boundaries of the synchronization region with variation of the parameters depend on the initial conditions. A small perturbation of the equation describing the dynamics of the variable controlling the memristor leads to the disappearance of the equilibrium line and eliminates the dependence of the synchronization on the initial conditions. **Discussion.** In the mathematical model of self-sustained oscillators with a memristive connection, synchronization has essential features. However, the mathematical model is not rough, and in the real system these features should disappear. In this case, the consequence of the memristive connection can be long transient processes, depending on the initial state of the system.

*Key words:* memristor, self-sustained oscillator, synchronization, phase-locking, line of equilibria.

DOI: 10.18500/0869-6632-2018-26-2-24-40

*References:* Korneev I.A., Shabalina O.G., Semenov V.V., Vadivasova T.E. Synchronization self-sustained oscillators interacting through the memristor. *Izvestiya VUZ, Applied Nonlinear Dynamics*, 2018, vol. 26, iss. 2, pp. 24–40. DOI: 10.18500/0869-6632-2018-26-2-24-40

## Введение

Последние годы все больший интерес привлекает радиотехнический элемент «мемристор». Впервые концепция мемристора была предложена Леоном Чуа в 1971 году [1]. Согласно идее Чуа, мемристор представляет собой пассивный двухполюсник, в котором реализуется взаимосвязь магнитного потока  $\Phi$  и электрического заряда  $q$ . Используя соотношения  $d\Phi = udt$  и  $dq = idt$ , можно получить вольт-амперную характеристику двухполюсника в виде  $u = R_M(q)i$ , где  $R_M(q) = d\Phi/dq = \Phi'$  – сопротивление мемристора (мемристанс), которое определяется значением заряда. Учитывая, что  $q(t) = \int_{-\infty}^t i(t)dt$ , получаем

$$R_M(q) = \Phi' \left( \int_{-\infty}^t i(t)dt \right). \quad (1)$$

Аналогично можно записать:  $i = G_M(\Phi)u$ , где  $G_M(\Phi) = dq/d\Phi = q'(\Phi)$  – проводи-

мость мемристора, управляемая магнитным потоком и зависящая от предшествующих значений,

$$G_M(\Phi) = q' \left( \int_{-\infty}^t u(t) dt \right). \quad (2)$$

Из (1) и (2) следует фундаментальное свойство мемристора: *зависимость характеристик от предыстории функционирования*. В дальнейшем Чуа расширил идею мемристора до концепции мемристивных систем [2], в которой объединил системы различной физической природы, демонстрирующие зависимость свойств от состояний в предыдущие моменты времени. Важно отметить, что первоначальная идея мемристора предполагала взаимозависимость электрического заряда и магнитного потока. С течением времени мемристором стали называть двухполюсник, который относится к классу мемристивных систем, и сопротивление (проводимость) которого зависит от предшествующих состояний. Данное определение не содержит в себе гипотезу о взаимосвязи электрического заряда и магнитного потока, которая представляется спорной и вызвала серьезную критику в научном сообществе.

Всплеск интереса к тематике мемристора произошел в 2008 году, когда было объявлено, что первое реальное устройство, обладающее свойствами мемристора, создано [3]. На сегодняшний день имеется уже много публикаций, посвященных экспериментальным исследованиям и численному моделированию свойств полупроводниковых мемристоров (см., например, [4–8]), а также мемристоров иной природы [9–14]. Интерес к мемристорам связан с перспективой использования в электронике и вычислительной технике, в частности для создания элементов памяти [15–21]. В связи с этим важной оказывается проблема исследования поведения различных радиотехнических цепей и систем, содержащих мемристоры. Можно отметить ряд исследований в этом направлении (например, работы [22–30]), однако в целом данная проблема еще слабо изучена. Не всегда ясно, к какому типу динамики, и каким новым эффектам может привести замена обычного резистора с постоянным сопротивлением на мемристор.

Особенностью математических моделей систем, содержащих мемристор, является возможность существования так называемых линий равновесий, то есть некоторых линий в фазовом пространстве системы, все точки которых являются точками равновесия. Содержащие мемристор колебательные системы с линией равновесий исследовались в [23, 24, 28–30]. Динамика таких систем носит особый характер. При определенном выборе параметров в зависимости от начальных условий, можно наблюдать как множество устойчивых точек равновесия, так и множество неизолированных замкнутых кривых различного размера. Всё множество этих траекторий образует аттрактор системы, который состоит из некоторой двумерной поверхности и притягивающих участков линии равновесий. Траектории на аттракторах подобного типа не обладают свойством эргодичности и, в некотором смысле, можно говорить о скрытом аттракторе. Действительно, при заданных начальных условиях можно наблюдать только одну траекторию, не несущую информации обо всем аттракторе, так что аттрактор в целом остается скрытым.

Перспективы использования мемристоров в качестве элементов памяти предполагает создание сложных многокомпонентных систем, содержащих мемристивные элементы. Кроме того, ансамбли мемристивных элементов вызывают большой интерес в области нейродинамики, поскольку могут служить моделями нейронных

систем. Имеется ряд работ, в которых мемристивные системы применяются для моделирования нейронов и нейронных ансамблей, рассматривается синхронизация и формирование сложных пространственных структур в ансамблях таких элементов [31–36].

В отдельную задачу можно выделить исследование особенностей взаимодействия автоколебательных систем через мемристивный элемент. При этом, предполагается, что сами взаимодействующие системы не содержат мемристоров. В связи с данной задачей можно отметить лишь несколько работ. Так в [37, 38] исследовался эффект полной синхронизации двух идентичных хаотических генераторов Чуа, связанных через мемристор или адаптивное устройство на основе двух антипараллельных мемристоров и был установлен факт синхронизации хаоса. В [38] отмечается эффект зависимости достижения полной хаотической синхронизации от начальных условий и параметров мемристора. В работе [39] экспериментально исследовалась частотная синхронизация двух генераторов ван дер Поля, взаимодействующих через мемристивное устройство. На основании представленных данных можно говорить о наличии эффекта частотного захвата, но невозможно сделать выводов об особенностях данного эффекта по сравнению с классическим случаем взаимной синхронизации при связи через обычное сопротивление. Кроме того, не вполне ясна математическая модель мемристивного устройства, примененного в экспериментах. Таким образом, проблема исследования взаимной синхронизации автогенераторов, взаимодействующих через мемристор, пока еще далека от полного решения.

Целью нашей работы является исследование взаимной синхронизации периодических автоколебаний двух автогенераторов ван дер Поля с частотной расстройкой, взаимодействующих через мемристор. Предполагается дать ответ на следующие вопросы:

- 1) возможна ли частотная синхронизация автоколебаний в случае связи через простейшую модель мемристора – мемристор Чуа;
- 2) если синхронизация при связи через мемристор возможна, то каковы ее отличительные особенности по сравнению со случаем простой резистивной связи парциальных систем.

## 1. Математическая модель исследуемой системы

Рассмотрим систему двух автогенераторов ван дер Поля, связанных через мемристивную проводимость. Эквивалентная схема исследуемой радиотехнической цепи приведена на рис. 1. Каждый парциальный автогенератор состоит из параллельно соединенных емкости  $C_j$ , индуктивности  $L_j$ , постоянной проводимости  $g_j$  и нелинейной отрицательной проводимости  $N_j$ , где  $j=1, 2$  – номер парциального генератора.  $G_M(\Phi)$  – характеристика мемристивного элемента, представляющая собой зависимость проводимости двухполюсника от магнитного

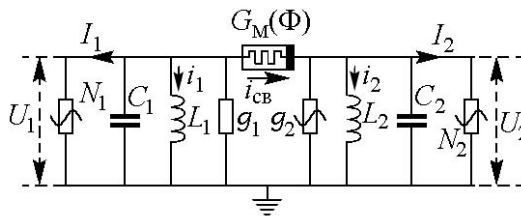


Рис. 1. Эквивалентная схема двух автогенераторов, связанных через мемристор

Fig. 1. Schematic circuit diagram of two self-sustained oscillators coupled through the memristor

потока  $\Phi$ . Обозначения размерных динамических переменных (токов и напряжений) приведены на схеме (см. рис. 1).

Вольт-амперные характеристики отрицательных проводимостей  $N_j$  зададим в виде кубических функций

$$I_j = -\alpha_j U_j + \beta_j U_j^3, \quad j = 1, 2, \quad (3)$$

где  $I_j$  – токи, протекающие через нелинейные элементы;  $U_j$  – напряжения на них;  $\alpha_j$  и  $\beta_j$  – размерные коэффициенты, которые будем полагать положительными. В качестве мемристивной проводимости рассмотрим идеализированный мемристор Чуа [1] с кусочно-линейной характеристикой

$$G_M(\Phi) = \begin{cases} A, & |\Phi| < \Phi_0, \\ B, & |\Phi| \geq \Phi_0. \end{cases} \quad (4)$$

Используя правила Кирхгофа, получим следующую систему уравнений относительно физических переменных  $U_j, i_j, \Phi$ :

$$\begin{aligned} \frac{dU_1}{dt_\Phi} + \frac{1}{C_1} i_1 + \frac{g_1}{C_1} U_1 + \frac{G_M(\Phi)}{C_1} (U_1 - U_2) - \frac{\alpha_1}{C_1} U_1 + \frac{\beta_1}{C_1} U_1^3 &= 0, \\ \frac{1}{C_1} \frac{di_1}{dt_\Phi} &= \frac{1}{C_1 L_1} U_1, \\ \frac{dU_2}{dt_\Phi} + \frac{1}{C_2} i_2 + \frac{g_2}{C_2} U_2 + \frac{G_M(\Phi)}{C_2} (U_2 - U_1) - \frac{\alpha_2}{C_2} U_2 + \frac{\beta_2}{C_2} U_2^3 &= 0, \\ \frac{1}{C_2} \frac{di_2}{dt_\Phi} &= \frac{1}{L_2 C_2} U_2, \\ \frac{d\Phi}{dt_\Phi} &= U_1 - U_2. \end{aligned} \quad (5)$$

Здесь  $i_{1,2}$  – токи через катушки индуктивности,  $t_\Phi$  – физическое время. Обозначим  $1/(L_1 C_1) = \omega_1^2$  и  $1/(L_2 C_2) = \omega_2^2$ ,  $p = \omega_1^2/\omega_2^2$  и введем безразмерные переменные

$$\begin{aligned} t &= \omega_1 t_\Phi, \\ x_1 &= \sqrt{\frac{\beta_1}{\omega_1 C_1}} U_1, & x_2 &= \sqrt{\frac{\beta_2}{\omega_1 C_2}} U_2, \\ y_1 &= \frac{1}{\omega_1 C_1} \sqrt{\frac{\beta_1}{\omega_1 C_1}} i_1, & y_2 &= \frac{1}{p \omega_1 C_2} \sqrt{\frac{\beta_2}{\omega_1 C_2}} i_2, \\ z_1 &= \omega_1 \sqrt{\frac{\beta_1}{\omega_1 C_1}} \Phi. \end{aligned} \quad (6)$$



Тогда система уравнений (5) принимает вид

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 + y_1 - (\gamma_1 - x_1^2)x_1 + kM(z)(x_1 - m_0x_2) &= 0, \\ \dot{y}_1 &= x_1, \\ \dot{x}_2 + py_2 - (\gamma_2 - x_2^2)x_2 + km_1M(z)(m_0x_2 - x_1) &= 0, \\ \dot{y}_2 &= x_2, \\ \dot{z} &= x_1 - m_0x_2. \end{aligned} \quad (7)$$

В уравнениях (7) точками обозначены производные по безразмерному времени  $t$  и введена безразмерная характеристика мемристора Чуа

$$M(z) = \begin{cases} a, & |z| < 1, \\ b, & |z| \geq 1, \end{cases} \quad (8)$$

где  $a$  и  $b$  – некоторые параметры. Безразмерные параметры модели (7) связаны с физическими параметрами исходной системы следующим образом:

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= \frac{\alpha_1 - g_1}{\omega_1 C_1}, \quad \gamma_2 = \frac{\alpha_2 - g_2}{\omega_1 C_2}, \\ m_0 &= \sqrt{\frac{C_2 \beta_1}{C_1 \beta_2}}, \quad m_1 = \frac{1}{m_0} \frac{C_1}{C_2}, \quad k = \frac{1}{\omega_1 C_1} \frac{G_M(\Phi)}{M(z)}. \end{aligned} \quad (9)$$

Легко получить точки равновесия системы (7):  $x_{1,2} = 0$ ,  $y_{1,2} = 0$ . При этом координата  $z$  принимает любые значения. Таким образом, в системе (7) имеется линия равновесий, совпадающая с осью  $OZ$ . Исключим из рассмотрения текущее значение переменной  $z$ . Для этого представим последнее уравнение системы (7) в виде

$$\dot{z} = \dot{y}_1 - m_0 \dot{y}_2. \quad (10)$$

Откуда имеем

$$z(t) = z(0) + y_1(t) - m_0 y_2(t) - y_1(0) - m_0 y_2(0). \quad (11)$$

Проводимость мемристора в текущий момент времени будет определяться мгновенными значениями переменных  $y_1$ ,  $y_2$ , а также начальными значениями  $y_1(0)$ ,  $y_2(0)$  и  $z(0)$ . При этом уравнения системы представляют собой уравнения двух диссипативно-связанных генераторов, для которых сила связи зависит от текущих и начальных значений переменных, в том числе от начального значения исключенной из уравнений переменной  $z$ ,

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 + y_1 - (\gamma_1 - x_1^2)x_1 + kM(z(0) + y_1 - m_0 y_2 - y_1(0) - m_0 y_2(0))(x_1 - m_0 x_2) &= 0, \\ \dot{y}_1 &= x_1, \\ \dot{x}_2 + py_2 - (\gamma_2 - x_2^2)x_2 + km_1M(z(0) + y_1 - m_0 y_2 - y_1(0) - m_0 y_2(0))(m_0 x_2 - x_1) &= 0, \\ \dot{y}_2 &= x_2. \end{aligned} \quad (12)$$

Таким образом, меняя начальные условия можно получать более слабую или более сильную связь и, следовательно, наблюдать или не наблюдать эффект частотно-фазового захвата.

Предположим, для простоты, что парциальные системы отличаются только индуктивностями  $L_1 \neq L_2$ , а все остальные параметры одинаковы, тогда получаем:  $p = L_1/L_2$ ,  $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma$ ,  $m_0 = m_1 = 1$ . В этом случае система уравнений (7) принимает вид

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 + y_1 - (\gamma - x_1^2)x_1 + kM(z)(x_1 - x_2) &= 0, \\ \dot{y}_1 &= x_1, \\ \dot{x}_2 + py_2 - (\gamma - x_2^2)x_2 + kM(z)(x_2 - x_1) &= 0, \\ \dot{y}_2 &= x_2, \\ \dot{z} &= x_1 - x_2. \end{aligned} \quad (13)$$

Рассмотрим систему связанных через мемристор генераторов ван дер Поля (13), считаем параметры мемристора  $a$  и  $b$  постоянными:  $a=0.02$  и  $b=2.0$ . Параметр генерации  $\gamma$  также считаем неизменным:  $\gamma=0.1$ . В качестве управляющих параметров будем рассматривать расстройку частот  $p$  и коэффициент связи  $k$ . Исследуем особенности взаимодействия через мемристор двух идентичных генераторов ван дер Поля и двух генераторов, имеющих небольшую расстройку частот автоколебаний.

При проведении расчетов уравнения (13) интегрировались по методу Рунге–Кутты 4-го порядка. Шаг интегрирования фиксировался постоянным и достаточно малым  $h = 0.001$ . Время интегрирования варьировалось, но, как правило, составляло несколько тысяч периодов колебаний. По полученным результатам строились проекции фазовых портретов колебаний и определялись полные мгновенные фазы колебаний парциальных генераторов.

Полные фазы генераторов  $\Psi_1(t)$  и  $\Psi_2(t)$  рассчитывались по формуле

$$\Psi_i(t) = \arctg \frac{y_i(t)}{x_i(t)} \pm \pi n(t), \quad i = 1, 2, \quad (14)$$

где  $n(t)$  – целочисленная переменная, определяемая из условия непрерывности зависимости фазы от времени.

Зная мгновенные фазы генераторов и их разность  $\Delta\Psi(t) = \Psi_2(t) - \Psi_1(t)$  легко определить среднюю разностную частоту (частоту биений)

$$\Omega = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\Delta\Psi(t+T) - \Delta\Psi(t)}{T}, \quad (15)$$

В численных экспериментах время наблюдения  $T$  полагалось конечным, но достаточно большим. Очевидно, в области синхронизации в пределах точности вычислений должно выполняться равенство:  $\Omega = 0$ . При больших значениях параметра связи синхронизация может происходить через подавление автоколебаний одного из генераторов. В этом случае расчет частоты биений по формуле (15) не дает корректных результатов.

При проведении исследований строились зависимости разности фаз генераторов и частоты биений от начального значения  $z_0$  и от расстройки в системе при различных начальных условиях и различных значениях параметров.

## 2. Синфазный режим в системе двух идентичных автогенераторов

При отсутствии расстройки ( $p = 1$ ) уравнения парциальных генераторов в модели (13) становятся совершенно идентичными. Если связь идентичных генераторов была диссипативной (осуществлялась через обычную проводимость), то в системе при любом значении параметра связи  $k$  наблюдался бы режим синфазной (полной) синхронизации, соответствующий устойчивости решений, принадлежащих инвариантному многообразию  $x_1 = x_2, y_1 = y_2$  в фазовом пространстве. Рассмотрим, будет ли синфазный режим устойчив, если парциальные генераторы взаимодействуют через мемристор, то есть рассмотрим устойчивость решения  $x_1(t) = x_2(t) = x(t), y_1(t) = y_2(t) = y(t)$ . Введем малые отклонения:  $u = x_2 - x_1, v = y_2 - y_1$ . Линеаризованная система для малых отклонений от синфазного решения имеет вид

$$\begin{aligned} \dot{u} &= (\gamma - 3x^2)u - 2kM(z(0))u - v, \\ \dot{v} &= u, \end{aligned} \quad (16)$$

где  $x(t)$  – синфазные колебания, являющиеся решением уравнений парциального генератора ван дер Поля без связи

$$\ddot{x} - (\gamma - 3x^2)\dot{x} + x = 0. \quad (17)$$

Уравнения системы (16) описывают линейный осциллятор

$$\ddot{u} - [\gamma - 3x^2 - 2kM(z(0))]u + u = 0. \quad (18)$$

Диссипация осциллятора  $\sigma(t) = -[\gamma - 3x^2 - 2kM(z(0))]$  является переменной во времени, так как зависит от значения переменной  $x(t)$ . В квазигармоническом

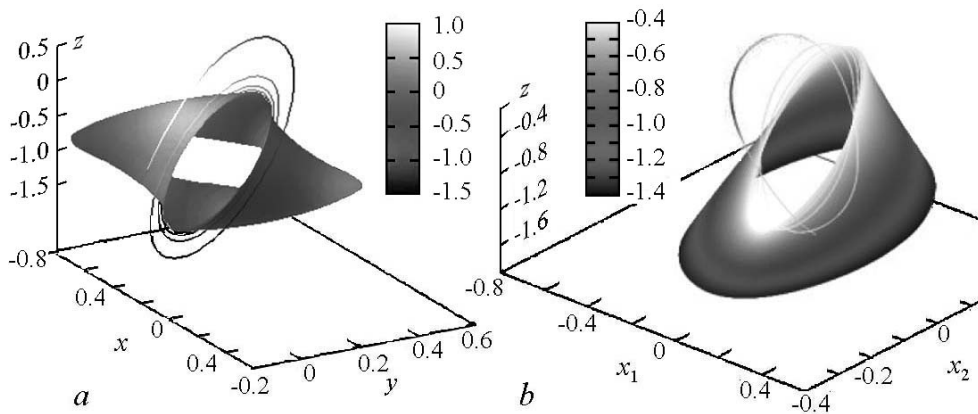


Рис. 2. Трехмерные проекции фазового портрета, иллюстрирующие переходный процесс в системе идентичных генераторов (13) при  $p = 1, \gamma = 0.1, k = 0.1$ , начальных значениях переменных  $x_1(0) = 0.5, y_1(0) = 0.5, x_2(0) = -0.3, y_2(0) = -0.1$  и разных начальных значениях  $z(0)$ :  $a - 0.5; b - 0.1$ . Разные оттенки тона соответствуют разным уровням значений переменной  $z$ . Время интегрирования – 5000 единиц времени системы. Период установления не отбрасывался

Fig. 2. Three-dimensional phase portrait projections which show the transient process in the system of identical self-sustained oscillators (13) at  $p = 1, \gamma = 0.1, k = 0.1$ , initial conditions are  $x_1(0) = 0.5, y_1(0) = 0.5, x_2(0) = -0.3, y_2(0) = -0.1$ , and different  $z(0)$  initial conditions:  $a - 0.5; b - 0.1$ . Colours show different levels of the variable  $z$ . The integration time is 5000 units of system time. The transient process is not discarded

приближении установившиеся колебания в системе (17) можно считать гармоническими колебаниями с амплитудой  $X_0 = 2\sqrt{\gamma/3}$  (в чем легко убедиться, применив метод ван дер Поля). В этом случае для среднего за период квадрата переменной получаем  $\langle x^2 \rangle = 2\gamma/3$ . С учетом этого, среднее значение диссипации осциллятора (18) есть  $\langle \sigma \rangle = \gamma + 2kM(z(0))$ . Это значение всегда положительно и колебания (18) затухают при любых значениях параметров и любых начальных условиях. Это означает, что система связанных идентичных генераторов (13) независимо от начальных условий всегда приходит в режим синфазных колебаний. При этом в случае слабой связи в системе может наблюдаться длительный переходный процесс колебательного характера, зависящий от выбора начальных условий. Его длительность может составлять тысячи единиц безразмерного времени при периоде колебаний, близком к  $2\pi$  единиц. На рис. 2 приведены примеры такого переходного процесса.

### 3. Исследование взаимодействия осцилляторов с частотной расстройкой

Рассмотрим систему (13) при наличии малой частотной расстройки ( $p \neq 1$ ). Для диагностики взаимного захвата частот и фаз генераторов в численных экспериментах по формуле (14) рассчитывались мгновенные фазы колебаний парциальных генераторов и определялась частота биений  $\Omega$  (15). Численные оценки показали, что время установления стационарных колебаний при наличии частотной расстройки значительно меньше, чем в случае  $p = 1$  и составляет не более 10000 единиц. При расчетах частоты биений было зафиксировано время установления  $t_{уст} = 10000$  единиц, а интервал времени, на котором производились вычисления составлял не менее

$T_{max} = 10000$  единиц. Такие параметры расчетов обеспечили достаточно точную оценку частоты биений в установившемся режиме.

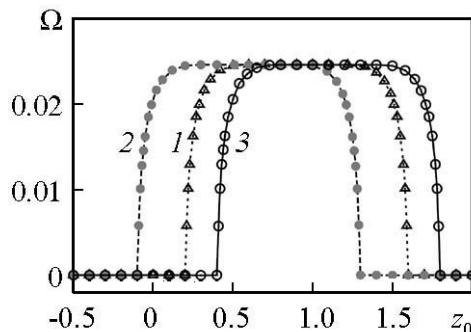


Рис. 3. Зависимости частоты биений от начального значения  $z_0$  при различном выборе начальных значений других динамических переменных: кривая 1 -  $x_1(0) = 0.5, y_1(0) = 0.5, x_2(0) = -0.5, y_2(0) = -0.4$ ; кривая 2 -  $x_1(0) = 0.5, y_1(0) = 0.5, x_2(0) = -0.3, y_2(0) = -0.1$ ; кривая 3 -  $x_1(0) = 0.5, y_1(0) = 0.5, x_2(0) = -0.2, y_2(0) = -0.6$ . Значения параметров:  $p = 1.05, k = 0.1$

Fig. 3. Dependencies of beat frequency on initial values  $z_0$  at different initial values of other dynamic variables: curve 1 -  $x_1(0) = 0.5, y_1(0) = 0.5, x_2(0) = -0.5, y_2(0) = -0.4$ ; curve 2 -  $x_1(0) = 0.5, y_1(0) = 0.5, x_2(0) = -0.3, y_2(0) = -0.1$ ; curve 3 -  $x_1(0) = 0.5, y_1(0) = 0.5, x_2(0) = -0.2, y_2(0) = -0.6$ . Parameters values:  $p = 1.05, k = 0.1$

Зависимость  $\Omega$  от параметра расстройки  $p$  позволяет обнаружить эффект захвата и определить интервал синхронизации. Как показали численные эксперименты связь через мемристорную проводимость также как и связь через обычную проводимость обеспечивает взаимный захват частот и фаз генераторов, так что в определенной области значений расстройки частота биений  $\Omega$  обращается в ноль, что наблюдалось ранее в натуральных экспериментах [39]. Однако эффект синхронизации генераторов через мемристор имеет существенную особенность: ширина области захвата зависит от начальных условий. На рис. 3 приведены зависимости частоты биений от начального значения пе-

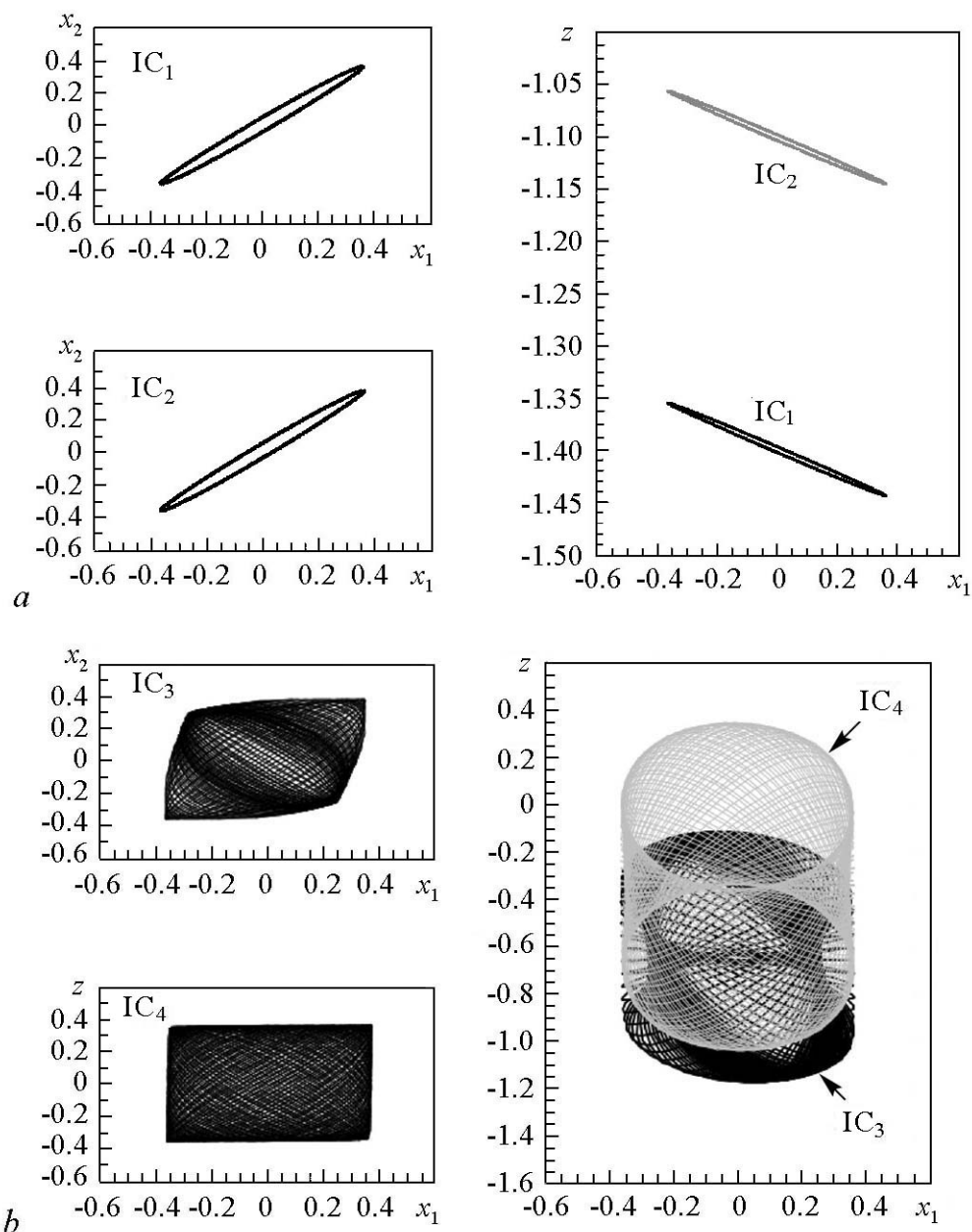


Рис. 4. Фазовые проекции установившихся колебаний в системе (13) при фиксированном значениях параметров  $p = 1.05$ ,  $k = 0.1$  и старте с различных начальных условий (НУ<sub>1,2,3,4</sub>): *a* – синхронные колебания, устанавливающиеся с НУ<sub>1</sub> ( $x_1(0)=0.5$ ,  $y_1(0)=0.5$ ,  $x_2(0)=-0.5$ ,  $y_2(0)=-0.4$ ,  $z_0(0)=-0.5$ ) и НУ<sub>2</sub> ( $x_1(0) = 0.5$ ,  $y_1(0) = 0.5$ ,  $x_2(0) = -0.3$ ,  $y_2(0) = -0.1$ ,  $z_0(0) = -0.5$ ); *b* – несинхронные колебания, устанавливающиеся с НУ<sub>3</sub> ( $x_1(0)=0.5$ ,  $y_1(0)=0.5$ ,  $x_2(0)=-0.5$ ,  $y_2(0)=-0.4$ ,  $z_0(0)=0.25$ ) и НУ<sub>4</sub> ( $x_1(0) = 0.5$ ,  $y_1(0) = 0.5$ ,  $x_2(0) = -0.3$ ,  $y_2(0) = -0.1$ ,  $z_0(0) = 0.25$ ). Время установления  $t_{уст} = 10000$

Fig. 4. Phase portrait projections of stationary oscillations in system (13) at fixed values of parameters  $p = 1.05$ ,  $k = 0.1$ , and at different initial conditions (IC<sub>1,2,3,4</sub>): *a* – synchronized oscillations which are started at IC<sub>1</sub> ( $x_1(0) = 0.5$ ,  $y_1(0) = 0.5$ ,  $x_2(0) = -0.5$ ,  $y_2(0) = -0.4$ ,  $z_0(0) = -0.5$ ) and IC<sub>2</sub> ( $x_1(0) = 0.5$ ,  $y_1(0) = 0.5$ ,  $x_2(0) = -0.3$ ,  $y_2(0) = -0.1$ ,  $z_0(0) = -0.5$ ); *b* – desynchronized oscillations which are started at IC<sub>3</sub> ( $x_1(0) = 0.5$ ,  $y_1(0) = 0.5$ ,  $x_2(0) = -0.5$ ,  $y_2(0) = -0.4$ ,  $z_0(0) = 0.25$ ) and IC<sub>4</sub> ( $x_1(0) = 0.5$ ,  $y_1(0) = 0.5$ ,  $x_2(0) = -0.3$ ,  $y_2(0) = -0.1$ ,  $z_0(0) = 0.25$ ). Transient time  $t_{trans} = 10000$

ременной  $z(0) = z_0$  при фиксированной расстройке  $p = 1.05$  и различном выборе начальных значений других переменных системы. На всех представленных графиках можно выделить интервал значений  $z_0$ , для которого синхронизация не наблюдается. Границы этого интервала зависят от начальных значений других переменных. При этом сам характер зависимости для всех случаев полностью идентичен и графики отличаются только смещением на некоторую величину  $z_0 = \text{const}$ .

Для иллюстрации поведения системы при наличии и отсутствии синхронизации в случае фиксированной расстройки и различных начальных условий на рис. 4 приведены фазовые проекции установившихся колебаний. На рис. 4, *a* слева представлены проекции  $x_1, x_2$  синхронных колебаний, полученных для двух различных начальных точек. Они полностью совпадают, как и другие проекции колебаний в пространстве переменных  $x_1, x_2, y_1, y_2$ . Однако в полном фазовом пространстве у этих колебаний будет наблюдаться сдвиг на постоянную величину вдоль оси  $OZ$ . На правом фрагменте рис. 4, *a* приведены  $x_1, z$  проекции, соответствующие разным начальным условиям. Можно заметить, что сдвиг колебаний совпадает с разницей начальных значений переменной  $\Delta y_2(0) = 0.3$ . На рис. 4, *b* приведены соответствующие фазовые проекции для двух начальных точек, когда установившиеся колебания генераторов несинхронны. Перекрестные проекции  $x_1, x_2$  (слева) отражают квазипериодический характер колебаний. Совместное изображение  $x_1, z$  проекций на одном графике показывает наличие смещения вдоль оси  $OZ$  (справа). Кроме того приведенные проекции показывают, что квазипериодические колебания, для разных начальных условий отличаются также формой поверхности, топологически эквивалентной двумерному тору, на которой лежат фазовые траектории.

В связи с полученными данными возникает вопрос, будут ли зависеть характеристики колебаний от начальных условий непрерывным образом? Результаты, приведенные на рис. 3 свидетельствуют в пользу такого предположения. Кроме того, отмеченная особенность динамики типична для систем с линией равновесий, в том числе она обнаружена в автогенераторах, содержащих мемристор [23, 24, 28–30]. Таким образом, можно предположить, что границы области синхронизации непрерывно меняются при изменении начальных условий в некоторой области значений параметров  $p, k$ .

На рис. 5 изображены зависимости частоты биений от частотной расстройки, полученные для разных начальных значений переменной  $z$  при фиксированном коэффициенте связи  $k=0.02$ . Легко видеть, что границы области синхронизации существенно различны для различных значений  $z_0$ . С ростом абсолютной

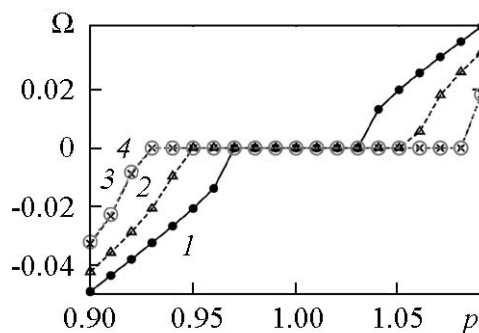


Рис. 5. Зависимости частоты биений от частотной расстройки для разных значений  $z_0$ : кривая 1 – 0; кривая 2 – (-0.5); кривая 3 – (-0.25); кривая 4 – (-0.75). Начальные значения других переменных:  $x_1(0) = 0.5, y_1(0) = 0.5, x_2(0) = -0.5, y_2(0) = -0.4$ . Коэффициент связи  $k=0.02$

Fig. 5. Dependencies of the beat frequency on the frequency detuning at different values of  $z_0$ : curve 1 – 0; curve 2 – (-0.25); curve 3 – (-0.5); curve 4 – (-0.75). The initial values of other variables:  $x_1(0) = 0.5, y_1(0) = 0.5, x_2(0) = -0.5, y_2(0) = -0.4$ . The coupling coefficient is  $k = 0.02$

величины  $|z_0|$  ширина области синхронизации увеличивается. Однако существует некоторое критическое значение  $|z_0^{cr}|$ , при превышении которого область синхронизации перестает увеличиваться. Такой эффект наблюдается при различных наборах начальных условий и может быть связан с переходом к синхронизации через подавление автоколебаний одного из генераторов. В этом случае метод диагностики синхронизации с помощью расчета мгновенных фаз (14) и частоты биений (15) не дает корректного результата.

На основании анализа зависимости частоты биений от частотной расстройки для разных значений коэффициента связи  $k$  были построены границы областей синхронизации для разных значений начальных условий (рис. 6). На рисунке можно видеть семейство вложенных областей, ширина которых существенным образом различается. Для одних начальных условий область синхронизации оказывается узкой, для других – широкой. Для наиболее узкой области не удается обнаружить интервал синхронизации при слабой связи. В этой связи можно предположить существование порога синхронизации по связи, по крайней мере, при некоторых начальных условиях.

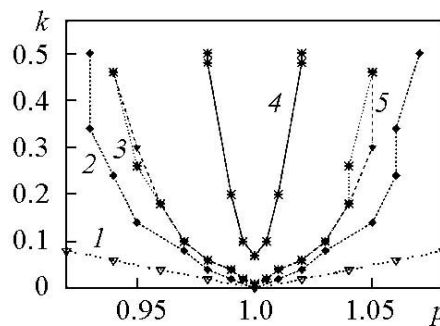


Рис. 6. Границы областей синхронизации на плоскости параметров «расстройка – коэффициент связи» для различных наборов начальных условий: кривая 1 –  $x_1 = 0.5, y_1 = 0.5, x_2 = -0.3, y_2 = -0.1, z_0 = -0.25$ ; кривая 2 –  $x_1 = 0.5, y_1 = 0.5, x_2 = -0.5, y_2 = -0.4, z_0 = 0.25$ ; кривая 3 –  $x_1 = 0.5, y_1 = 0.5, x_2 = -0.3, y_2 = -0.1, z_0 = 0$ ; кривая 4 –  $x_1 = 0.5, y_1 = 0.5, x_2 = -0.5, y_2 = -0.4, z_0 = 0.5$ ; кривая 5 –  $x_1 = 0.5, y_1 = 0.5, x_2 = -0.2, y_2 = -0.6, z_0 = 0.5$

Fig. 6. Boundaries of synchronization regions on the «frequency detuning–coupling coefficient» plane at different sets of initial conditions: curve 1 –  $x_1 = 0.5, y_1 = 0.5, x_2 = -0.3, y_2 = -0.1, z_0 = -0.25$ ; curve 2 –  $x_1 = 0.5, y_1 = 0.5, x_2 = -0.5, y_2 = -0.4, z_0 = 0.25$ ; curve 3 –  $x_1 = 0.5, y_1 = 0.5, x_2 = -0.3, y_2 = -0.1, z_0 = 0$ ; curve 4 –  $x_1 = 0.5, y_1 = 0.5, x_2 = -0.5, y_2 = -0.4, z_0 = 0.5$ ; curve 5 –  $x_1 = 0.5, y_1 = 0.5, x_2 = -0.2, y_2 = -0.6, z_0 = 0.5$

#### 4. Синхронизация генераторов при изменении модели мемристора, приводящем к исчезновению оси равновесий

Наличие оси равновесий в системе (7) или (13) является следствием предположения о том, что проводимость мемристора управляется магнитным потоком (в безразмерной модели переменной  $z$ ), который, в соответствии с законом электромагнитной индукции Фарадея, связан с падением напряжения на мемристоре через производную. Существование линии равновесий является негрубой ситуацией, которую трудно представить в физически реализуемой системе [28]. Очевидно, невозможно создать двухполюсник, в полной мере обладающий описанными свойствами мемристивной проводимости. Рассмотрим, как повлияет на динамику взаимодействующих генераторов изменение модели мимристивного элемента незначительное по величине, но приводящее к исчезновению оси равновесия. Для этого перепишем последнее уравнение системы (13) в виде

$$\dot{z} = x_1 - x_2 - \delta z, \quad (19)$$

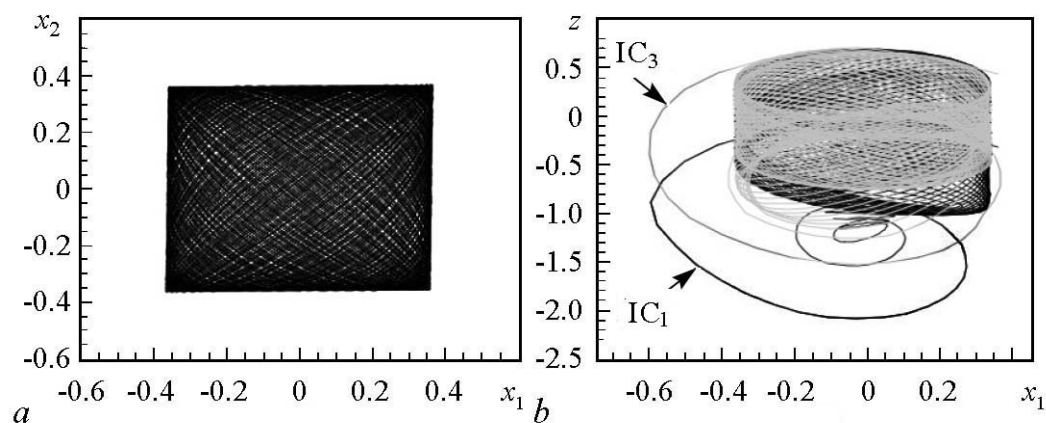


Рис. 7. Фазовые проекции колебаний при замене последнего уравнения системы (13) на уравнение (19): *a* – вид  $(x_1, x_2)$  проекции установившихся колебаний, не зависящий от начальных условий; *b* – вид  $(x_1, z)$  проекции двух траекторий, стартующих из разных начальных точек. Параметры системы  $p = 1.05$ ,  $k = 0.1$  и начальные условия  $НУ_1$ ,  $НУ_3$  соответствуют рис. 4. Время интегрирования  $T = 5000$

Fig. 7. Phase portrait projections of oscillations for the system (13) with the last equation replaced on equation (19): *a* – the projection  $(x_1, x_2)$  of stationary oscillations which is not depend on initial conditions; *b* – projections  $(x_1, z)$  of two trajectories which are started at different initial points. Parameters  $p = 1.05$ ,  $k = 0.1$  and initial conditions  $IC_1$ ,  $IC_3$  of the system corresponds to the Fig. 4. Integration time  $T = 5000$

где  $\delta$  – некоторый параметр. Данная замена последнего уравнения системы даже при сколь угодно малом значении параметра  $\delta$  приводит к исчезновению линии равновесий  $0Z$  и существованию единственной точки равновесия в начале координат. Рассмотрим, как это повлияет на поведение системы связанных генераторов.

На рис. 7 приведены фазовые проекции  $x_1, x_2$  (рис. 7, *a*) и проекции  $x_1, z$  (рис. 7, *b*) колебаний в системе (13) с измененным последним уравнением при фиксированных значениях параметров  $p = 1.05$ ,  $k = 0.1$ . Параметр, введенный в последнее уравнение, полагался равным  $\delta = 0.01$ . В качестве начальных условий были выбраны условия, которые ранее приводили к различному результату: при  $НУ_1$  (см. рис. 4, *a*) наблюдались синхронные колебания, а при  $НУ_3$  (см. рис. 4, *b*) колебания были квазипериодическими. Теперь обе траектории после времени установления выходят на один и тот же режим колебаний, представляющий собой квазипериодический аттрактор. Выбор других начальных условий приводит к тому же результату. Однако, если выбрать параметр  $\delta$  очень малым, то можно наблюдать достаточно длительный переходный процесс, характер которого будет зависеть от начальных условий.

### Заключение

Проведенные исследования математической модели системы двух автогенераторов ван дер Поля, связанных через мемристор Чуа позволили выявить особенности частотно-фазовой синхронизации автоколебаний, связанные с мемристивным характером связи и наличием в математической модели системы линии равновесий, совпадающей с осью  $0Z$ . В случае взаимодействия полностью идентичных генераторов установившийся режим соответствует синфазным колебаниям в парциальных



системах, однако мемристивный характер взаимодействия приводит к длительному процессу установления разности фаз, зависящему от начальных условий.

При введении частотной расстройки генераторов была обнаружена зависимость границ области синхронизации от начальных условий. В зависимости от начальных значений динамических переменных ширина области частотно-фазового захвата меняется в широких пределах. Для частотно-фазовой синхронизации данный эффект не описан в научной литературе. В то же время подобное поведение отмечалось в случае полной синхронизации хаоса в системах, связанных через мемристор, где также имеется ось равновесий [38]. Таким образом, связь автогенераторов через мемристор приводит к особому типу поведения взаимодействующих систем. При этом синхронизацией парциальных систем можно управлять, изменяя начальные условия. В то же время, нами было показано, что малое возмущение уравнений модели, приводящее к исчезновению линии равновесий, устраняет зависимость эффекта синхронизации от начального состояния системы.

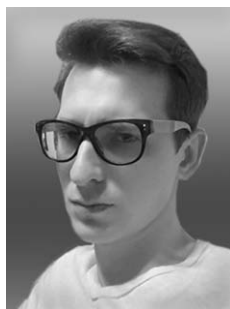
*Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки РФ в рамках государственного задания (код проекта 3.8616.2017/БЧ).*

## References

1. Chua L.O. Memristor – the missing circuit element. *IEEE Trans. Circuit Theory*, 1971, vol. 1, pp. 507–519.
2. Chua L.O., Kang S.M. Memristive devices and systems. *Proceedings of the IEEE*, 1976, vol. 64, pp. 209–223.
3. Strukov D.B., Snider G.S., Stewart D.R., Williams R.S. The missing memristor found. *Nature*, 2008, vol. 453, pp. 80–83.
4. Yogesh Y.N., Wolf S.J. The elusive memristor: properties of basic electrical circuits. *European Journal of Physics*, 2009, vol. 30, pp. 661–675.
5. Yang Y., Sheridan P., Lu W. Complementary resistive switching in tantalum oxide-based resistive memory devices. *Appl. Phys. Lett.*, 2012, vol. 100(20), p. 203112.
6. Patterson G.A., Fierens P.I., García A.A., Grosz D.F. Numerical and experimental study of stochastic resistive switching. *Physical Review E*, 2013, vol. 87, p. 012128.
7. Strachan J.P., Torrezan A.C., Miao F., Pickett M.D., Yang J.J., Yi W., Medeiros-Ribeiro G., Williams R.S. State dynamics and modeling of tantalum oxide memristors. *IEEE Trans. on Electron Devices*, 2013, vol. 60, pp. 2194–2202.
8. Kim S., Choi S., Lu W. Comprehensive physical model of dynamic resistive switching in an oxide memristor. *ACS Nano*, 2014, vol. 8, pp. 2369–2376.
9. Berzina T., Smerieri A., Bernabò M., Pucci A., Ruggeri G., Erokhin V.V., Fontana M.P. Optimization of an organic memristor as an adaptive memory element. *J. Appl. Phys.*, 2009, vol. 105, p. 124515.
10. Liu G., Chen Y., Wang C., Zhang W., Li R.W., Wang L. Polymer memristor for information storage and neuromorphic applications. *Materials Horizons*, 2014, vol. 1, pp. 489–506.
11. Demin V.A., Erokhin V.V., Emelyanov A.V., Battistoni S., Baldi G., Iannotta S.,

- Kashkarov P.K., Kovalchuk M.V. Hardware elementary perceptron based on polyaniline memristive devices. *Organic Electronics*, 2015, vol. 25, pp. 16–20.
12. Wang X., Chen Y., Xi H., Li H., Dimitrov D. Spintronic memristor through spin-torque-induced magnetization motion. *IEEE Electron Devices Letters*, 2009, vol. 30, pp. 294–297.
  13. Chanthbouala A., Matsumoto R., Grollier J., Cros V., Anane A., Fert A., Khvalkovskiy A.V., Zvezdin K.A., Nishimura K., Nagamine Y., Maehara H., Tsunekawa K., Fukushima A., Yuasa S. Vertical-current-induced domain-wall motion in MgO-based magnetic tunnel junctions with low current densities. *Nature Physics*, 2011, vol. 7, pp. 626–630.
  14. Buscarino A., Fortuna L., Frasca M., Gambuzza L.V. A gallery of chaotic oscillators based on HP memristor. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 2013, vol. 23, p. 1330015.
  15. Pershin Y.V., Di Ventra M. Practical approach to programmable analog circuits with memristors. *IEEE Trans. on Circuits and Systems*, 2010, vol. 57, pp. 1857–1864.
  16. Pershin Y.V., Di Ventra M. Memory effects in complex materials and nanoscale systems. *Advances in Physics*, 2011, vol. 60, pp. 145–227.
  17. Chew Z.J., Li L. Printed circuit board based memristor in adaptive lowpass filter. *Electronics Letters*, 2012, vol. 48, pp. 1610–1611.
  18. Di Ventra M., Pershin Y.V. The parallel approach. *Nature Physics*, 2013, vol. 9, pp. 200–202.
  19. Yang J.J., Strukov D.B., Stewart D.R. Memristive devices for computing. *Nature Nanotechnology*, 2013, vol. 8, pp. 13–24.
  20. Tetzlaff R. Memristor and Memristive Systems. New York, Springer-Verlag, 2014.
  21. Vourkas I., Sirakoulis G. Memristor-Based Nanoelectronic Computing Circuit and Architectures. *Emergence, Complexity and Computation. Springer International Publishing*, 2016, vol. 19.
  22. Itoh M., Chua L.O. Memristor oscillators. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 2008, vol. 18, pp. 3183–3206.
  23. Messias M., Nespoli C., Botta V.A. Hopf bifurcation from lines of equilibria without parameters in memristor oscillators. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 2010, vol. 20, pp. 437–450.
  24. Botta V.A., Nespoli C., Messias M. Mathematical analysis of a third-order memristor-based Chua's oscillator. *TEMA Tend. Mat. Apl. Comput.*, 2011, vol. 12, pp. 91–99.
  25. Rianza R. Manifolds of equilibria and bifurcations without parameters in memristive circuits. *SIAM J. Appl. Math.*, 2012, vol. 72, pp. 877–896.
  26. Buscarino A., Fortuna L., Frasca M., Gambuzza L.V. A chaotic circuit based on Hewlett-Packard memristor. *Chaos*, 2012, vol. 22, p. 023136.
  27. Gambuzza L.V., Fortuna L., Frasca M., Gale E. Experimental evidence of chaos from memristors. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 2015, vol. 25, p. 1550101.
  28. Semenov V.V., Korneev I.A., Arinushkin P.A., Strelkova G.I., Vadivasova T.E., Anishchenko V.S. Numerical and experimental studies of attractors in memristor-

- based Chua's oscillator with a line of equilibria noise-induced effects. *Eur. Phys. J. Special Topics*, 2015, vol. 224, pp. 1553–1561.
29. Korneev I.A., Vadivasova T.E., Semenov V.V. Hard and soft excitation of oscillations in memristor-based oscillators with a line of equilibria. *Nonlinear Dynamics*, 2017, vol. 89, pp. 2829–2843.
  30. Korneev I.A., Semenov V.V. Andronov–Hopf bifurcation with and without parameter in a cubic memristor oscillator with a line of equilibria. *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, 2017, vol. 27, p. 081104.
  31. Pham V.T., Buscarino A., Fortuna L., Frasca M. Autowaves in memristive cellular neural networks. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 2012, vol. 22, p. 1230027.
  32. Zhao H., Li L., Peng H., Kurths J., Xiao J., Yang Y. Anti-synchronization for stochastic memristor-based neural networks with non-modeled dynamics via adaptive control approach. *Eur. Phys. J. B.*, 2015, vol. 88, pp. 1–10.
  33. Zhao H., Li L., Peng H., Xiao J., Yang Y. Finite-time boundedness analysis of memristive neural network with time-varying delay. *Neural Processing Letters*, 2016, vol. 44, pp. 665–679.
  34. Buscarino A., Corradino C., Fortuna L., Frasca M., Chua L.O. Turing patterns in memristive cellular nonlinear networks. *IEEE Trans. on Circuits and Systems*, 2016, vol. 99, pp. 1–9.
  35. Wang C., Lv M., Alsaedi A., Ma J. Synchronization stability and pattern selection in a memristive neuronal network. *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, 2017, Vol. 27, p. 113108.
  36. Zhang L., Yang Y., Wang F. Lag synchronization for fractional-order memristive neural networks via period intermittent control. *Nonlinear Dynamics*, 2017, pp. 367–381.
  37. Frasca M., Gambuzza L.V., Buscarino A., Fortuna L., Implementation of adaptive coupling through memristor. *Physica Status Solidi (C)*, 2014, vol. 12, pp. 206–210.
  38. Volos Ch.K., Pham V.T., Vaidyanathan S., Kyprianidis I.M., Stouboulos I.N. Advances and applications in nonlinear control systems. Berlin, Germany. *Springer International Publishing*, 2016, vol. 635, pp. 317–350.
  39. Ignatov M., Hansen M., Ziegler M., Kohlstedt H. Synchronization of two memristively coupled van der Pol oscillators. *Appl. Phys. Lett.*, 2016, vol. 108, p. 084105.



*Корнеев Иван Александрович* – родился (1992) в селе Еруслан Саратовской области, окончил Саратовский государственный университет имени Н.Г. Чернышевского (2017). Имеет диплом бакалавра по направлению 03.03.03 «Радиофизика» и диплом магистра по направлению 03.04.03 «Радиофизика». В настоящее время – аспирант кафедры радиофизики и нелинейной динамики СГУ. Область научных интересов: математическое моделирование, численный и физический эксперимент, синхронизация, мемристивные системы.

Россия, 410012 Саратов, ул. Астраханская, 83  
 Саратовский государственный университет  
 E-mail: korneew@yandex.ru



*Шабалина Ольга Геннадьевна* – родилась в Туапсе Краснодарского края (1996). Окончила Саратовский государственный университет имени Н.Г. Чернышевского (2017), имеет диплом бакалавра по направлению 03.03.03 «Радиофизика». В настоящее время обучается в магистратуре СГУ по направлению 03.04.03 «Радиофизика». Область научных интересов: теория нелинейных колебаний.

Россия, 410012 Саратов, ул. Астраханская, 83  
Саратовский государственный университет  
E-mail: shabalinaog96@gmail.com



*Семенов Владимир Викторович* – родился в Саратове (1990). Окончил физический факультет Саратовского государственного университета (2012). Кандидат физико-математических наук. Ассистент кафедры радиофизики и нелинейной динамики физического факультета СГУ. Область научных интересов – влияние шумов в нелинейных системах, системы с запаздыванием, химерные состояния, исследование нелинейных явлений в натурном радиофизическом эксперименте. Автор более 20 научных публикаций.

Россия, 410012 Саратов, ул. Астраханская, 83  
Саратовский государственный университет  
E-mail: semenov\_v\_v@list.ru



*Вадивасова Татьяна Евгеньевна* – родилась в Саратове (1958). Окончила физический факультет Саратовского государственного университета (1981), доктор физико-математических наук. В настоящее время – профессор кафедры радиофизики и нелинейной динамики физического факультета СГУ. Научные интересы сосредоточены в области нелинейной динамики и статистической радиофизики: эффекты синхронизации в ансамблях хаотических и стохастических осцилляторов, волновые структуры в активных средах, свойства различных типов нерегулярных аттракторов, влияние шума и стохастические эффекты в нелинейных системах и др. Автор более 130 публикаций в рецензируемых отечественных и зарубежных изданиях.

Россия, 410012 Саратов, ул. Астраханская, 83  
Саратовский государственный университет  
E-mail: vadivasovate@yandex.ru



УДК 517.9

## ДИНАМИКА СВЯЗАННЫХ ГЕНЕРАТОРОВ КВАЗИПЕРИОДИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЙ С СОСТОЯНИЕМ РАВНОВЕСИЯ

*А. П. Кузнецов<sup>1,3</sup>, Н. В. Станкевич<sup>1,2</sup>*

<sup>1</sup>Саратовский филиал Института радиотехники и электроники им. В.А. Котельникова РАН  
Россия, 410019 Саратов, ул. Зеленая, д. 38

<sup>2</sup>Саратовский государственный технический университет им. Гагарина Ю.А.  
Россия, 410054 Саратов, ул. Политехническая, 77

<sup>3</sup>Саратовский национальный исследовательский государственный  
университет имени Н.Г. Чернышевского  
Россия, 410012 Саратов, ул. Астраханская, 83  
E-mail: apkuz@rambler.ru, stankevichnv@mail.ru

*Поступила в редакцию 10.03.2018, после доработки 10.04.2018*

**Предмет исследования.** В последнее время интерес вызывают задачи о синхронизации систем, способных демонстрировать квазипериодические колебания. В частности, это могут быть генераторы квазипериодических колебаний, допускающие радиофизическую реализацию. В настоящей работе рассматривается динамика двух связанных генераторов квазипериодических колебаний с одним состоянием равновесия. **Новизна.** Отличие от уже изученного случая связанных модифицированных генераторов Анищенко–Астахова состоит в привлечении двухпараметрического анализа и анализа в существенно более широком диапазоне изменения параметров, а также более низкой размерности уравнений отдельного генератора. **Методы исследования.** Используется метод карт Ляпуновских показателей, который выявляет области различного типа динамики, вплоть до четырехчастотных колебаний. Исследованы бифуркационные механизмы возникновения полной синхронизации. **Полученные результаты.** Продемонстрирована возможность синхронной квазипериодичности, когда фазы генераторов захвачены, но динамика системы является в целом квазипериодической. Выявлена возможность эффекта «гибели колебаний», возникающего за счет диссипативного характера связи. Продемонстрирована возможность эффекта широкополосной квазипериодичности. Его особенность состоит в том, что возникают двухчастотные колебания в определенном диапазоне изменения параметра связи и широком диапазоне частотной расстройки. Представлены бифуркационные механизмы данного эффекта. Показано, что для него характерно определенное вырождение, которое снимается при введении неидентичности по управляющим параметрам отдельных генераторов. Представлен бифуркационный анализ для этого случая. Двухпараметрический анализ позволил выявить на плоскости параметров точки квазипериодических бифуркаций коразмерности два QSNF (Quasi-periodic saddle-node fan), ассоциирующиеся с синхронизацией многочастотных торов. Эти точки являются острями языков двухчастотных режимов, имеющие порог по величине коэффициента связи. В их окрестности наблюдаются также трех- и четырехчастотные квазипериодические режимы. **Выводы.** Синхронизация квазипериодических генераторов обладает

рядом новых моментов, которые устанавливаются при двухпараметрическом анализе в широком диапазоне изменения параметров.

*Ключевые слова:* квазипериодические колебания, связанные генераторы, синхронизация.

DOI: 10.18500/0869-6632-2018-26-2-41-58

*Образец цитирования:* Кузнецов А.П., Станкевич Н.В. Динамика связанных генераторов квазипериодических колебаний с состоянием равновесия // Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2018. Т. 26, № 2. С.41–58. DOI: 10.18500/0869-6632-2018-26-2-41-58

## DYNAMICS OF COUPLED GENERATORS OF QUASI-PERIODIC OSCILLATIONS WITH EQUILIBRIUM STATE

*A. P. Kuznetsov<sup>1,3</sup>, N. V. Stankevich<sup>1,2</sup>*

<sup>1</sup>Kotelnikov Institute of Radio-Engineering and Electronics of RAS, Saratov Branch  
38, Zelenaya, 410019 Saratov, Russia

<sup>2</sup>Yuri Gagarin State Technical University of Saratov  
77, Politechnicheskaya, 410054 Saratov, Russia

<sup>3</sup>Saratov State University  
83, Astrakhanskaya, 410012 Saratov, Russia  
E-mail: apkuz@rambler.ru, stankevichnv@mail.ru  
*Received 10.03.2018, revised 10.04.2018*

**Subject of the study.** Recently, the problems of synchronization of systems demonstrating quasi-periodic oscillations arouse interest. In particular, it can be generators of quasi-periodic oscillations that allow a radiophysical realization. In this paper we consider the dynamics of two coupled oscillators of quasi-periodic oscillations with a single equilibrium state. **Novelty.** The difference from the already studied case of coupled modified Anishchenko–Astakhov generators consists in engaging of two-parameter analysis and analysis in a much wider range of parameter changes, as well as a more dimensionless equation for an individual generator. **Methods.** The method of charts of Lyapunov exponents is used, which reveals areas of various types of dynamics, up to four-frequency oscillations. The bifurcation mechanisms of complete synchronization are investigated. **Results.** The possibility of synchronous quasi-periodicity is demonstrated, when the phases of the generators are locked, but the dynamics of the system is generally quasi-periodic. The possibility of the effect of «death of oscillations» arising due to the dissipative character of coupling is revealed. The possibility of the effect of broadband quasi-periodicity is demonstrated. Its peculiarity consists in the fact that two-frequency oscillations arise in a certain range of variation of the coupling parameter and a wide range of frequency mismatch. The bifurcation mechanisms of this effect are presented. It is shown that a certain degeneracy is characteristic for it, which is removed when nonidentity is introduced along the control parameters of individual generators. A bifurcation analysis is presented for this case. Two-parameter analysis allowed us to identify points of quasi-periodic bifurcations of codimension two QSNF (Quasi-periodic saddle-node fan) on the parameter plane, associated with the synchronization of multi-frequency tori. These points are the tips of the tongues of the two-frequency regimes, which have a threshold for the coupling coefficient. In their vicinity, three- and four-frequency quasi-periodic regimes are also observed. **Discussion.** Synchronization of quasi-periodic generators has a number of new moments that are established in two-parameter analysis in a wide range of parametric changes.

*Keywords:* quasi-periodic oscillations, coupled generators, synchronization.

DOI: 10.18500/0869-6632-2018-26-2-41-58

*References:* Kuznetsov A.P., Stankevich N.V. Dynamics of coupled generators of quasi-periodic oscillations with equilibrium state. *Izvestiya VUZ, Applied Nonlinear Dynamics*, 2018, vol. 26, iss. 2, pp. 41–58. DOI: 10.18500/0869-6632-2018-26-2-41-58

## Введение

Квазипериодические колебания являются одним из хорошо известных классов колебаний [1–4]. Они занимают своего рода промежуточное положение между периодическими и хаотическими колебаниями. Квазипериодические колебания могут характеризоваться разным числом несоизмеримых частот, так что возникают представления о двух-, трех-, четырехчастотной и т.д. квазипериодичности, чему в фазовом пространстве отвечают инвариантные торы разной размерности. В последнее время квазипериодические колебания привлекают к себе внимание исследователей, поскольку существенно обогащают фундаментальные представления о динамике автоколебательных систем [3–29]. Базовыми объектами исследования являлись как неавтономные системы в виде различных связанных осцилляторов с предельными циклами, так и новые примеры автономных моделей с квазипериодическим поведением. Можно выделить такие феномены, как квазипериодические бифуркации (бифуркации инвариантных торов) [13, 14], резонансная паутина Арнольда [15], самоорганизующаяся квазипериодичность [17–19], возможность сценария Ландау–Хопфа [21], эффект «широкополосной синхронизации» [4, 20] и др. Интересно, что квазипериодичность с разным числом несоизмеримых частот и квазипериодические бифуркации возможны не только для связанных осцилляторов с предельными циклами, но и для подсистем с хаотической динамикой [22]. В работах [23–26] представлены исследования малоразмерных ансамблей отображений, где также возникают многочастотные квазипериодические колебания и квазипериодические бифуркации.

Когда квазипериодичность возникает в автономных системах, можно говорить о генераторах квазипериодических колебаний. В рамках подходов теории колебаний естественной является задача о взаимодействии квазипериодических генераторов. Соответствующие исследования проводились в [11, 12, 27]. Одним из первых вопросов в контексте такой задачи является выбор базовой модели. В работах [11, 12] использовался четырехмерный модифицированный генератор Анищенко–Астахова [10–12] и получены важные и существенные результаты, однако была изучена только область малых частотных расстройек и малой силы связи, и отсутствовал двухпараметрический анализ. В качестве базовой модели в [27] использовался более низкоразмерный (трехмерный) генератор квазипериодических колебаний, предложенный в [28]. К недостаткам этой базовой модели можно отнести то, что она не имеет состояния равновесия, что говорит о ее редуцированности и ограничении области физического применения. Эти ограничения повлияли и на особенности синхронизации связанных систем, в частности, не удалось пронаблюдать характерный для диссипативно связанных систем эффект гибели колебаний [1]. В рамках данной работы мы обратимся к исследованию динамики связанных генераторов квазипериодических колебаний, при этом в качестве базовой модели выберем другую модификацию генератора, которая была предложена в [29] и имеет состояние равновесия. Динамика такой системы оказывается существенно более богатой, в частности, мы покажем, что возникает эффект гибели колебаний, а при уменьшении связи наблюдается режим двухчастотной квазипериодичности в очень широком диапазоне частотной расстройки. Двухпараметрический анализ также выявляет резонансную паутину Арнольда и новые квазипериодические бифуркации коразмерности два.

Работа построена следующим образом. В части 1 представлен краткий обзор динамики автономного генератора, обсуждается устройство плоскости управляющих параметров, которая будет интересна с точки зрения динамики системы связанных генераторов. В части 2 представлено исследование системы связанных генераторов. В разделе 2.1 обсуждается устройство плоскости параметров и возможные типы режимов. В разделе 2.2 обсуждаются режимы гибели колебаний и широкополосной квазипериодичности. В разделе 2.3 – точки квазипериодических бифуркаций коразмерности два. Раздел 2.4 посвящен исследованию хаотической динамики в системе связанных генераторов.

## 1. Динамика модели генератора квазипериодических колебаний с одним состоянием равновесия

В [28] был предложен генератор автономных квазипериодических колебаний, описываемый уравнениями

$$\begin{aligned} \ddot{x} - (\lambda + z + x^2 - \beta x^4)\dot{x} + \omega_0^2 x &= 0, \\ \dot{z} &= \mu - x^2. \end{aligned} \quad (1)$$

Различные аспекты динамики такого генератора описаны в [28, 16, 27], в частности, синхронизация внешним сигналом [16] и динамика связанных генераторов [27]. Однако модель (1), как упоминалось ранее, не имеет устойчивого положения равновесия. Более широкая картина возможна в предложенной в [29] модели

$$\begin{aligned} \ddot{x} - (\lambda + z + x^2 - \beta x^4)\dot{x} + \omega_0^2 x &= 0, \\ \dot{z} &= b(\varepsilon - z) - k\dot{x}^2. \end{aligned} \quad (2)$$

Модель (2) можно интерпретировать как автогенератор с жестким возбуждением, у которого цепь подачи питания инерционная. Как и модель (1) она представляет собой трехмерную динамическую систему,  $x$ ,  $y = \dot{x}$ ,  $z$  – динамические переменные системы. Параметр  $\varepsilon$  характеризует поступление энергии от источника питания, параметр  $b$  отвечает за инерционные свойства цепи питания. Член, содержащий коэффициент  $k$ , отвечает за отбор энергии в автогенератор. Модель (2) имеет одно положение равновесия:

$$x_0 = y_0 = 0, \quad z_0 = \varepsilon. \quad (3)$$

Состояние равновесия может испытывать бифуркацию Андронова–Хопфа рождения предельного цикла. Чтобы ее найти, записываем систему (2) в виде системы трех дифференциальных уравнений первого порядка

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= (\lambda + z + x^2 - \beta x^4)y - \omega_0^2 x, \\ \dot{z} &= b(\varepsilon - z) - ky^2. \end{aligned} \quad (4)$$

Матрица линеаризации в точке равновесия имеет вид

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\omega_0^2 & -(\lambda + \varepsilon) & 0 \\ 0 & 0 & -b \end{pmatrix}. \quad (5)$$



Характеристическое уравнение для определения собственных чисел  $L$  матрицы имеет следующий вид:

$$L^3 - L^2(\lambda + \varepsilon + b) + L(b(\lambda + \varepsilon) + \omega_0^2) - b\omega_0^2 = 0. \quad (6)$$

Инварианты этой матрицы

$$S = \lambda + \varepsilon + b, \quad H = b(\lambda + \varepsilon) + \omega_0^2, \quad J = b\omega_0^2. \quad (7)$$

Условие бифуркации Андронова–Хопфа в трехмерной системе имеет вид  $J = SH$ ,  $H > 0$  [30]. Тогда из (7) получаем

$$\lambda = -\varepsilon. \quad (8)$$

На рис. 1 представлена карта показателей Ляпунова системы (2) на плоскости собственная частота – управляющий параметр  $(\omega_0, \lambda)$  для фиксированных остальных параметров:  $\varepsilon = 4$ ,  $b = 1$ ,  $k = 0.02$ ,  $\beta = 1/18$ . Карты показателей Ляпунова были построены следующим образом: для каждой точки плоскости параметров рассчитывался полный спектр показателей Ляпунова; в соответствии с сигнатурой спектра точка на плоскости параметров окрашивалась в тот или иной оттенок:

Е – устойчивое состояние равновесия,  $\Lambda_1 < 0$ ,  $\Lambda_2 < 0$ ,  $\Lambda_3 < 0$ ;

Р – периодические колебания (цикл),  $\Lambda_1 = 0$ ,  $\Lambda_2 < 0$ ,  $\Lambda_3 < 0$ ;

Т – двухчастотные квазипериодические колебания,  $\Lambda_1 = 0$ ,  $\Lambda_2 = 0$ ,  $\Lambda_3 < 0$ .

Справа на рисунке представлено соответствие оттенка и буквенного обозначения. На всех картах можно видеть линию бифуркации Андронова–Хопфа (8), которой для выбранных значений параметров соответствует линия  $\lambda = -4$ . Ниже нее располагается область устойчивого состояния равновесия, а выше лежит область существования устойчивого предельного цикла. В последнюю встроен достаточно широкий язык автономных квазипериодических колебаний (см. рис. 1), который и будет использован для выбора квазипериодической динамики отдельного генератора. Отметим, что внутри этого языка, в свою очередь, наблюдаются очень узкие области периодических режимов.

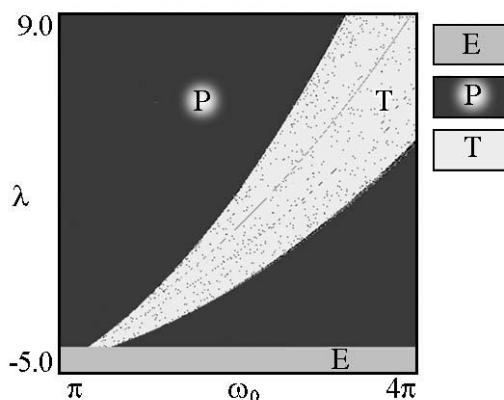


Рис. 1. Карта показателей Ляпунова для модели генератора квазипериодических колебаний (2),  $\varepsilon = 4$ ,  $b = 1$ ,  $k = 0.02$ ,  $\beta = 1/18$ . Е – устойчивое состояние равновесия, Р – периодические колебания, Т – двухчастотные квазипериодические колебания

Fig. 1. Chart of the Lyapunov exponents for model of generator of quasi-periodic oscillations (2),  $\varepsilon = 4$ ,  $b = 1$ ,  $k = 0.02$ ,  $\beta = 1/18$ . E – denotes stable equilibrium point, P – denotes periodic oscillations, T – denotes two-frequency quasi-periodic oscillations

## 2. Динамика связанных генераторов

**2.1. Структура плоскости параметров.** Рассмотрим теперь динамику связанных генераторов квазипериодических колебаний (2). Два диссипативно связанных генератора такого типа описываются следующими уравнениями:

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1 - (\lambda + z_1 + x_1^2 - \beta x_1^4)\dot{x}_1 + \omega_0^2 x_1 + M_c(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) &= 0, \\ \dot{z}_1 = b(\varepsilon - z_1) - k\dot{x}_1^2, \\ \ddot{x}_2 - (\lambda + z_2 + x_2^2 - \beta x_2^4)\dot{x}_2 + (\omega_0 + \Delta)^2 x_2 + M_c(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) &= 0, \\ \dot{z}_2 = b(\varepsilon - z_2) - k\dot{x}_2^2, \end{aligned} \quad (9)$$

где  $x_1, z_1$  – переменные, характеризующие первый генератор,  $x_2, z_2$  – переменные второго генератора,  $\Delta$  – частотная расстройка генераторов,  $M_c$  – коэффициент диссипативной связи. Система (9) характеризуется четырьмя независимыми частотами, которые определяются управляющими параметрами. В качестве управляющих параметров мы рассматриваем собственную частоту  $\omega_0$  и параметр  $\lambda$ , ответственный за возбуждение автоколебаний каждого генератора. Для нас важно рассмотреть ситуацию, когда подсистемы демонстрируют квазипериодические колебания. Как видно из рис. 1, область квазипериодических колебаний ограничена в пространстве параметров линиями бифуркации Неймарка–Сакера; при  $\lambda = -1$  двухчастотная квазипериодическая динамика наблюдается в интервале параметра  $\omega_0$  (6.201...8.45). Если основную частоту  $\omega_0$  зафиксировать внутри области двухчастотной квазипериодичности  $\omega_0 = 2\pi$ , то в этом случае первый генератор в автономном режиме всегда демонстрирует квазипериодические колебания. Изменение частотной расстройки  $\Delta$  в положительную область оставляет преимущественно автономный квазипериодический режим и во второй подсистеме. При достижении второй границы языка квазипериодических режимов во второй системе будет рождаться предельный цикл.

В качестве основного инструмента исследования, так же как и для автономного генератора, воспользуемся методом карт показателей Ляпунова, только в данном случае система является шестимерной, и анализ динамики будет производиться по анализу шести показателей Ляпунова:

- Е – устойчивое состояние равновесия,  $\Lambda_1 < 0, \Lambda_2 < 0, \Lambda_3 < 0, \Lambda_4 < 0, \Lambda_5 < 0, \Lambda_6 < 0$ ;
- Р – периодические колебания (цикл),  $\Lambda_1 = 0, \Lambda_2 < 0, \Lambda_3 < 0, \Lambda_4 < 0, \Lambda_5 < 0, \Lambda_6 < 0$ ;
- Т<sub>2</sub> – двухчастотные квазипериодические колебания,  $\Lambda_1 = 0, \Lambda_2 = 0, \Lambda_3 < 0, \Lambda_4 < 0, \Lambda_5 < 0, \Lambda_6 < 0$ ;
- Т<sub>3</sub> – трехчастотные квазипериодические колебания,  $\Lambda_1 = 0, \Lambda_2 = 0, \Lambda_3 = 0, \Lambda_4 < 0, \Lambda_5 < 0, \Lambda_6 < 0$ ;
- Т<sub>4</sub> – четырехчастотные квазипериодические колебания,  $\Lambda_1 = 0, \Lambda_2 = 0, \Lambda_3 = 0, \Lambda_4 = 0, \Lambda_5 < 0, \Lambda_6 < 0$ ;
- С – хаос,  $\Lambda_1 > 0, \Lambda_2 = 0, \Lambda_3 < 0, \Lambda_4 < 0, \Lambda_5 < 0, \Lambda_6 < 0$ ;
- НС – гиперхаос,  $\Lambda_1 > 0, \Lambda_2 > 0, \Lambda_3 = 0, \Lambda_4 < 0, \Lambda_5 < 0, \Lambda_6 < 0$ .

На рис. 2 представлено устройство плоскости параметров частотная расстройка – величина связи ( $\Delta, M_c$ ) для системы связанных генераторов (9) при  $\lambda = -1$ .

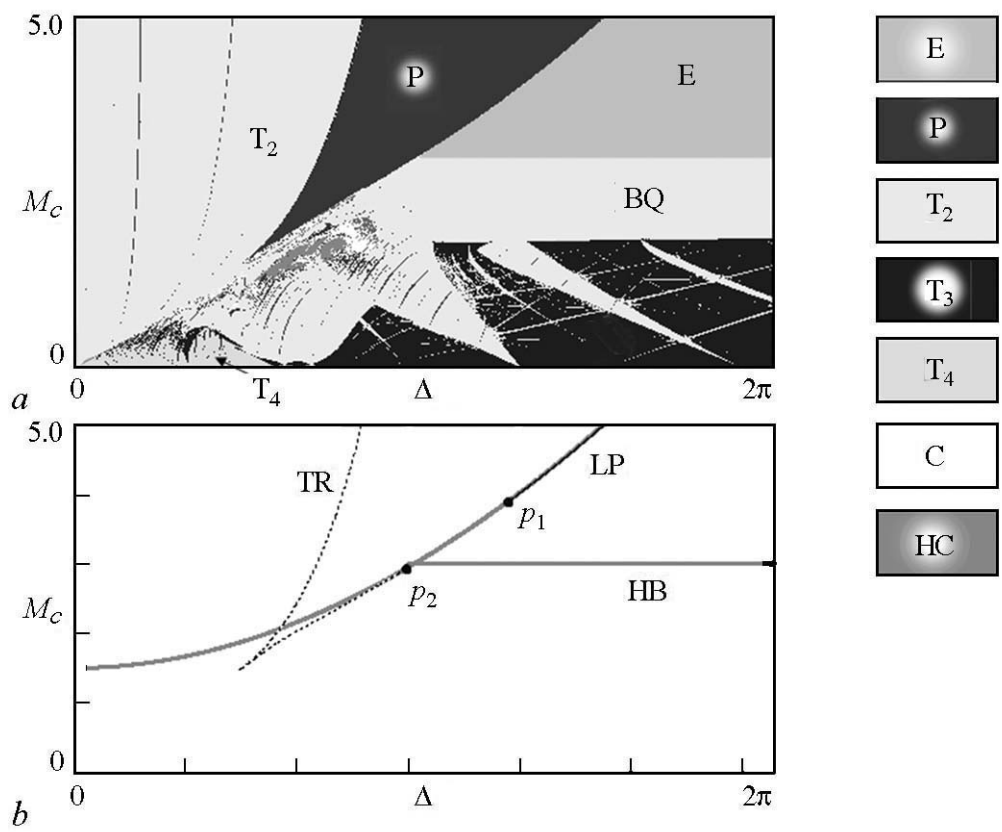


Рис. 2. Карта показателей Ляпунова (a) и бифуркационная диаграмма (b) на плоскости параметров  $(\Delta, M_c)$  для модели связанных квазипериодических генераторов (9) при  $b = 1, \epsilon = 4, k = 0.02, \lambda = -1, \beta = 1/18, \omega_0 = 2\pi$

Fig. 2. Chart of Lyapunov exponents (a), bifurcation lines (b) in the parameter plane  $(\Delta, M_c)$  for model of coupled quasi-periodic generators for  $b = 1, \epsilon = 4, k = 0.02, \lambda = -1, \beta = 1/18, \omega_0 = 2\pi$

Рис. 2, a представляет собой карту показателей Ляпунова. Соответствие оттенка на карте и буквенного обозначения дано справа. На рис. 2, b изображены основные бифуркационные линии, полученные с помощью пакета численного бифуркационного анализа XPP AUTO.

При малой величине связи и частотной расстройке наблюдается режим четырехчастотной квазипериодичности  $T_4$ . При увеличении силы связи при малых частотных расстройках наблюдается достаточно большая область двухчастотных квазипериодических колебаний (область  $T_2$  на рис. 2). Данная область соответствует фазовой синхронизации двухчастотных квазипериодических колебаний.

На рис. 3, a представлен график числа вращения при вариации частотной расстройки. Число вращения определялось как отношение фаз в каждом из осцилляторов. Фазы рассчитывались для двумерных проекций на плоскость  $(x, y)$ . Отметим, что график обрывается при некотором значении числа вращения, поскольку проекция фазовой траектории первого осциллятора на плоскость  $(x, y)$  начинает посещать окрестность начала координат, и фаза перестает быть определенной. Как видно из рисунка, при малых частотных расстройках число вращения равно единице, при этом на графике показателей Ляпунова (рис. 3, b) мы видим, что реализуются двух-

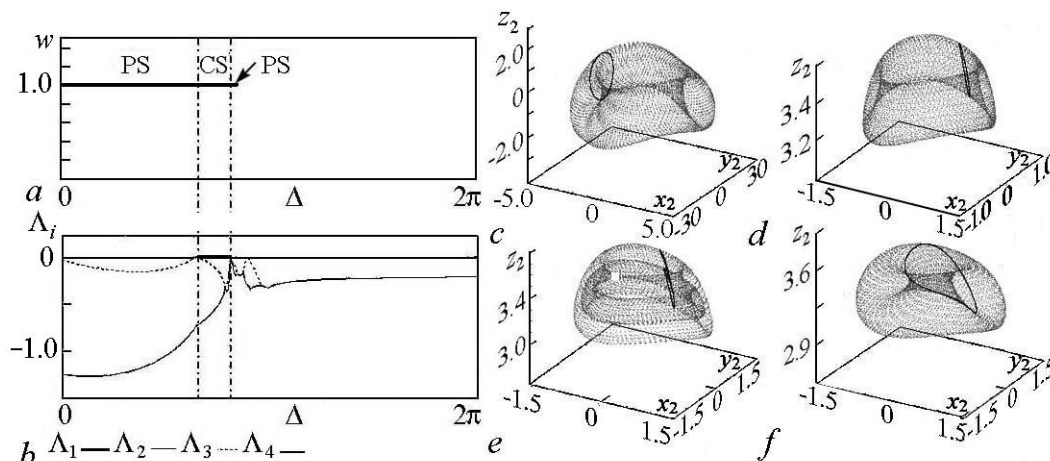


Рис. 3. Зависимость числа вращения (a) и четырех старших показателей Ляпунова (b) от частотной расстройки для связанных генераторов (9),  $b = 1$ ,  $\varepsilon = 4$ ,  $k = 0.02$ ,  $\lambda = -1$ ,  $\beta = 1/18$ ,  $\omega_0 = 2\pi$ ,  $M_c = 2.5$ . Фазовые портреты (серый цвет) и сечения Пуанкаре плоскостью  $y_1 = 0$  (черный цвет) для  $\Delta = 0.5$  (c), 2.56 (d), 2.58 (e),  $\Delta = \pi$  (f). PS – фазовая синхронизация, CS – полная синхронизация

Fig. 3. Dependence of the winding number (a) and the largest four Lyapunov exponents (b) on the frequency mismatch for coupled oscillators (9),  $b = 1$ ,  $\varepsilon = 4$ ,  $k = 0.02$ ,  $\lambda = -1$ ,  $\beta = 1/18$ ,  $\omega_0 = 2\pi$ ,  $M_c = 2.5$ . Phase portraits (grey color) and Poincaré section by plane  $y_1 = 0$  (black color) for  $\Delta = 0.5$  (c), 2.56 (d), 2.58 (e),  $\Delta = \pi$  (f). PS denotes phase synchronized quasi-periodicity, CS is complete synchronization

частотные квазипериодические колебания, то есть генераторы взаимно захвачены, но их аттрактором является двумерный тор. Таким образом, можно говорить о режиме синхронной квазипериодичности. На рис. 3, a данные области отмечены символами PS. На рис. 3, c представлен пример фазового портрета (серый цвет) и его сечение Пуанкаре (черный цвет) в области синхронной квазипериодичности PS, где хорошо просматривается гладкая инвариантная кривая.

В область захвата фаз входит не только язык синхронной квазипериодичности, но и язык полной синхронизации (CS на графике числа вращения на рис. 3, a и P на карте показателей Ляпунова на рис. 2, a). Отметим, что на графиках показателей Ляпунова мы можем видеть бифуркацию удвоения тора при переходе частотной расстройки через значение  $\Delta = 2.57$  (переход от рис. 3, d к рис. 3, e). Рис. 3, f отвечает еще большему значению расстройки  $\Delta = \pi$ ; мы обсудим свойства этого режима несколько позднее.

С увеличением расстройки при большой связи на плоскости параметров ( $\Delta$ ,  $M_c$ ) (см. рис. 2, a) наблюдается область полной синхронизации P, которая образует язык, но при этом имеет свои особенности. Во-первых, наблюдается порог по величине связи и, во-вторых, эта область имеет порог по величине частотной расстройки. Границы данной области формируют бифуркации различного типа. На рис. 2, b пунктирной линией изображена линия бифуркации Неймарка–Сакера (TR), черная сплошная – это линия седло-узловой бифуркации (LP) и серым цветом – линия бифуркации Андронова–Хопфа (HB). Левая граница языка полностью соответствует бифуркации Неймарка–Сакера, в результате которой предельный цикл становится неустойчивым и рождается двумерный тор. Справа граница языка при малой связи также является линией бифуркации Неймарка–Сакера. Линия бифуркации Неймарка–Сакера заканчивается в точке  $p_2$  (3.034, 2.978), упираясь в линию бифуркации Андронова–Хопфа при  $M_c = 3$ . При больших значениях коэффициента связи граница языка полной

синхронизации представляет собой бифуркацию Андронова–Хопфа, в результате которой состояние равновесия теряет устойчивость, и одновременно с ней происходит седло-узловая бифуркация, в результате которой рождается устойчивый предельный цикл. Заметим, что эти бифуркации происходят одновременно только на небольшом участке и заканчивается линия седло-узловой бифуркации в точке  $p_1$  (4.303, 4.397) на плоскости параметров.

## 2.2. Область гибели колебаний и широкополосной квазипериодичности.

Одна из существенных особенностей картины, наблюдаемой при большой частотной расстройке и большой силе связи, – это область гибели колебаний, которая соответствует режиму устойчивого состояния равновесия и обозначена буквой Е. Граница области гибели колебаний имеет порог по силе связи, в соответствии с соотношением  $M_c = \lambda + \varepsilon$ , которое соответствует стабилизации равновесия в результате бифуркации Андронова–Хопфа; для нашего случая  $M_c = 3$ . На рис. 2, *b* показаны бифуркационные линии, которые ограничивают область гибели колебаний. Нижняя граница представляет собой линию бифуркации Андронова–Хопфа. А вот левая граница имеет особенности: как уже упоминалось выше, при  $M_c > 4.397$  предельный цикл рождается в результате бифуркации седло-узел, которая происходит одновременно с бифуркацией Хопфа. Также к специфической особенности можно отнести то, что линия бифуркации Андронова–Хопфа имеет продолжение для  $M_c < 3$ .

Следующий существенный момент – наличие области двухчастотных колебаний, образующей характерную полосу между областью трехчастотных квазипериодических колебаний и областью гибели колебаний. Аналогичный режим, возникающий ниже области гибели колебаний, наблюдался в [20, 21]<sup>1</sup> и получил название частичной широкополосной синхронизации (partial broadband synchronization). В нашем случае можно говорить о широкополосной квазипериодичности (broadband quasi-periodicity). Соответствующая область обозначена ВQ на рис. 2, *a*. Особенность данного режима состоит в том, что возникают двухчастотные колебания в определенном диапазоне изменения параметра связи и широком диапазоне частотной расстройки. На рис. 3, *f* представлен пример трехмерного фазового портрета и двумерного сечения Пуанкаре двумерного тора, соответствующего широкополосной квазипериодичности ВQ.

Область ВQ представлена двухчастотными квазипериодическими колебаниями, поэтому при уменьшении силы связи между осцилляторами на рис. 2, *a* наблюдается переход от устойчивого состояния равновесия сразу к двумерному тору. Данная особенность связана с тем, что связанные подсистемы идентичны по параметру возбуждения автоколебаний. Так как параметры  $\lambda$  – одинаковые, то происходит вырожденная бифуркация Андронова–Хопфа, в результате которой точка становится неустойчивой и рождается двумерный тор. Такая ситуация соответствует тому, что сразу два показателя Ляпунова становятся нулевыми. На рис. 4, *a* представлены четыре старших показателя Ляпунова при вариации параметра связи  $M_c$  для  $\Delta = 2\pi$ . Как видно из рисунка, при большой силе связи все четыре показателя – отрицательные, при этом первый и второй равны по абсолютной величине. С уменьшением связи абсолютная величина первых четырех показателей увеличивается, и при

<sup>1</sup>см. рис. 7 в [20].

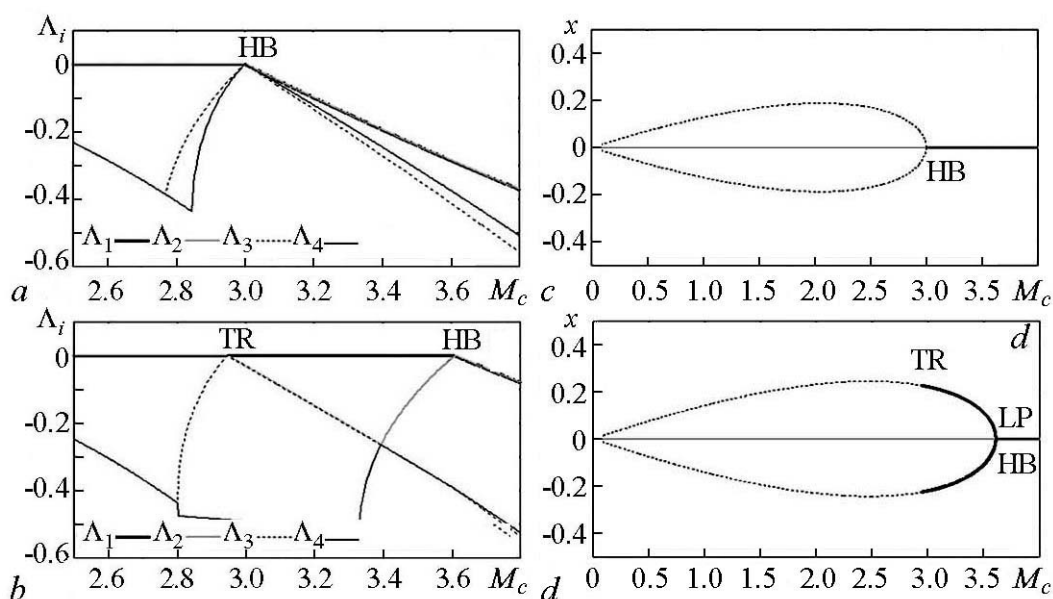


Рис. 4. *a, b* – зависимость четырех старших показателей Ляпунова от силы связи,  $b = 1$ ,  $\varepsilon = 4$ ,  $k = 0.02$ ,  $\beta = 1/18$ ,  $\omega_0 = 2\pi$ ,  $\lambda = -1$  и  $\lambda_1 = -1$ ,  $\lambda_2 = -0.5$ ; *c, d* – бифуркационные диаграммы для тех же параметров

Fig. 4. *a, b* – dependence of the largest four Lyapunov exponents on the coupling strength,  $b = 1$ ,  $\varepsilon = 4$ ,  $k = 0.02$ ,  $\beta = 1/18$ ,  $\omega_0 = 2\pi$ ,  $\lambda = -1$  и  $\lambda_1 = -1$ ,  $\lambda_2 = -0.5$ ; *c, d* – bifurcation diagrams for the same parameters

$M_c = 3$  все четыре показателя становятся нулевыми. При дальнейшем уменьшении связи два старших показателя равны нулю, а третий и четвертый становятся опять отрицательными.

Данное вырождение снимается при введении неидентичности по параметру  $\lambda$  между связанными осцилляторами; пример приведен на рис. 4, *b* для  $\lambda_1 = -1$  и  $\lambda_2 = -0.5$ . Как и для предыдущего случая, при большой связи все показатели отрицательны, что соответствует затуханию колебаний. При  $M_c = 3.61$  происходит суперкритическая бифуркация Хопфа (НВ), после которой старший показатель становится нулевым, а второй – вновь отрицательным, что соответствует автоколебаниям. Затем, при  $M_c = 2.946$  происходит бифуркация Неймарка–Сакера (ТР), в результате которой рождается двумерный тор и два показателя Ляпунова становятся нулевыми.

На рис. 4, *c* и 4, *d* представлены бифуркационные диаграммы при вариации параметра  $M_c$ , на которых жирной и тонкой серыми линиями изображены устойчивое и неустойчивое состояния равновесия, соответственно, сплошной и пунктирной черными линиями обозначены устойчивый и неустойчивый циклы. Бифуркационный анализ показывает, что в первом случае в результате бифуркации Андронова–Хопфа (НВ) рождается неустойчивый цикл, который затем стягивается к нулю по параметру связи. Для второго случая бифуркация Андронова–Хопфа (НВ) происходит одновременно с седло-узловой бифуркацией (LP), таким образом, состояние равновесия теряет устойчивость и одновременно в результате седло-узловой бифуркации рождается предельный цикл, который при меньшей связи претерпевает бифуркацию Неймарка–Сакера (ТР).

Отметим, что на рис. 2, а в правой части карты ниже области ВQ можно наблюдать резонансную паутину Арнольда [15] на базе области трехчастотных колебаний.

**2.3. Квазипериодическая бифуркация коразмерности два.** Теперь обратимся к особенностям динамики системы при малой силе связи. На рис. 5 представлен увеличенный фрагмент карты показателей Ляпунова. На рисунке можно видеть области четырехчастотных квазипериодических колебаний  $T_4$ , в которые встроены два языка трехчастотной квазипериодичности  $T_3$ . Основания этих языков отмечены значениями  $\Delta_1$  и  $\Delta_2$  и лежат на оси абсцисс, отвечающей нулевому значению параметра связи  $M_c$ . Эти языки ограничены линиями седло-узловых бифуркаций четырехмерных торов [13], обозначенных SNT на рисунке. Две такие линии SNT<sub>1</sub> и SNT<sub>2</sub> начинаются в точке коразмерности два  $\Delta_1$  на оси абсцисс<sup>2</sup>. Отметим, что эта картина аналогична классической для языка Арнольда, только вместо области  $T_3$  имеет место периодический режим, а вместо  $T_4$  – двумерный тор.

В свою очередь, две такие линии SNT<sub>2</sub> и SNT<sub>3</sub>, относящиеся к двум разным языкам, пересекаются и заканчиваются в точке QSNF, которая, таким образом, возникает при регуляции двух параметров и также имеет коразмерность два. Выше этой точки в области перекрытия языков трехчастотных колебаний наблюдаются двухчастотные квазипериодические колебания  $T_2$ , причем данная область также имеет форму языка. Похожая структура является типичной для систем с многочастотными квазипериодическими колебаниями [4]. Такие точки в [4] названы Quasi-periodic saddle-node fan QSNF (квазипериодическая точка «седло-узловой веер»).

Аналогичная структура была описана в [4] для четырех связанных осцилляторов ван дер Поля, а также системы уравнений в фазовом приближении.

На рис. 5 можно видеть две точки QSNF<sub>1</sub> и QSNF<sub>2</sub>. Порог по амплитуде связи для каждой из них приблизительно одинаков.

Также на рис. 5 отмечена точка с координатами  $(\Delta_3, 0)$ . Справа от нее трехчастотная квазипериодичность возникает при сколь угодно малой связи. Причина состоит в том, что данное значение расстройки соответствует переходу второго индивидуального генератора от квазипериодических колебаний к периодическим в соответствии с рис. 1. (Правая граница области двухчастотной квазипериодичности на рис. 1.)

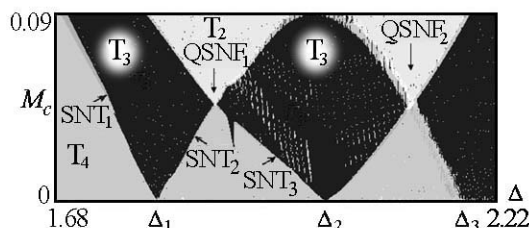


Рис. 5. Увеличенный фрагмент в окрестности особых точек QSNF карты показателей Ляпунова модели связанных квазипериодических генераторов (9)  $b = 1, \epsilon = 4, k = 0.02, \lambda = -1, \beta = 1/18, \omega_0 = 2\pi$

Fig. 5. Zoomed fragment of the chart of Lyapunov exponents of coupled oscillators (9) near special points QSNF.  $b = 1, \epsilon = 4, k = 0.02, \lambda = -1, \beta = 1/18, \omega_0 = 2\pi$

**2.4. Хаотическая динамика.** К еще одной особенности модели (9) можно отнести формирование хаотической динамики. Области хаотической динамики  $S$  локализованы под языком полной синхронизации, в области перекрытия маленьких

<sup>2</sup>Похожая картина наблюдалась в [31], только размерность торов была на единицу меньше.

языков синхронизации высших порядков. При больших частотных расстройках и большой силе связи хаотические колебания не наблюдаются. Несмотря на то, что области хаоса малы в пространстве параметров, наблюдается не только хаос, но и гиперхаос с двумя положительными ляпуновскими экспонентами НС.

На рис. 6, *a* представлен увеличенный фрагмент карты показателей Ляпунова

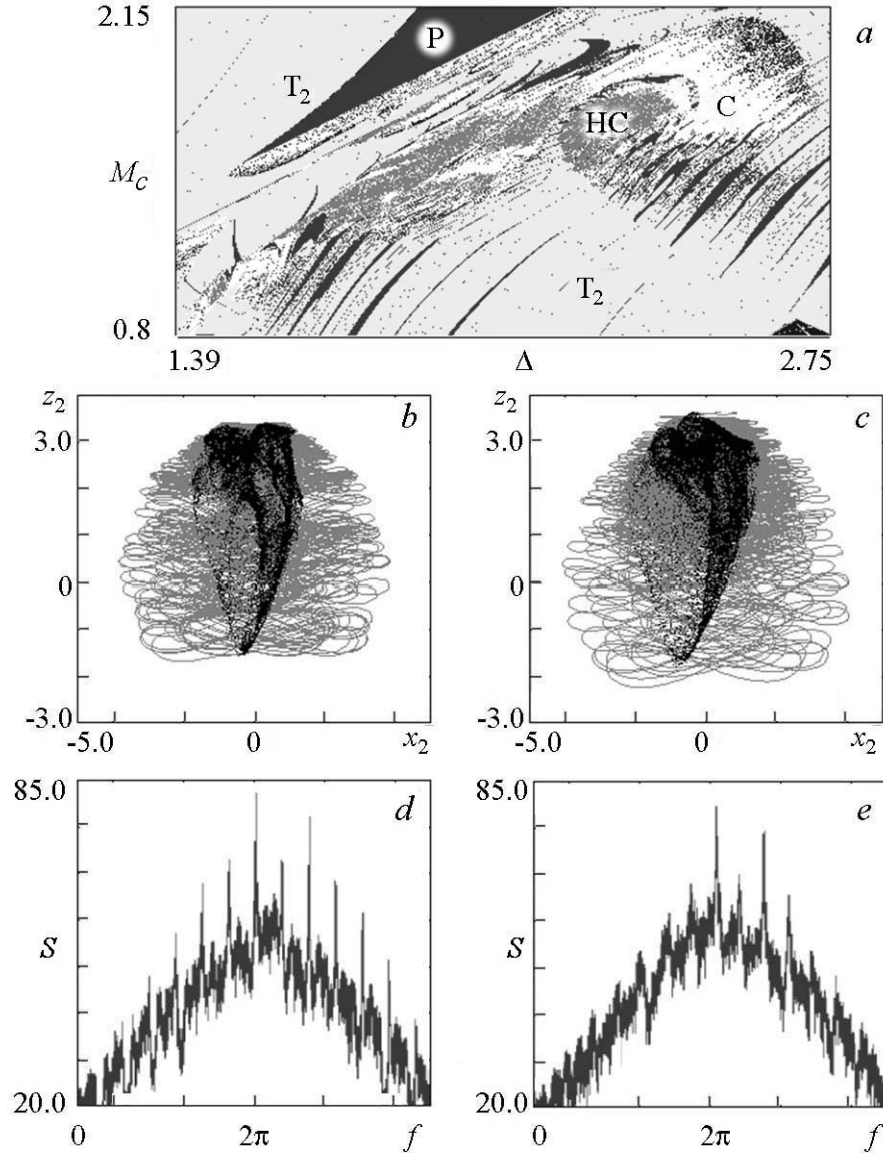


Рис. 6. *a* – увеличенный фрагменты карты показателей Ляпунова модели связанных генераторов (9) в окрестности хаотической динамики при  $b = 1$ ,  $\varepsilon = 4$ ,  $k = 0.02$ ,  $\lambda = -1$ ,  $\beta = 1/18$ ,  $\omega_0 = 2\pi$ ; фазовые портреты, сечения Пуанкаре плоскостью  $y = 0$  и спектры Фурье для хаотического режима (*b*, *d*):  $\Delta = 2.5$ ,  $M_c = 1.7$ ; и гиперхаотического режима (*c*, *e*):  $\Delta = 2.34$ ,  $M_c = 1.69$

Fig. 6. *a* – zoomed fragment of the chart of Lyapunov exponents of coupled oscillators (9) near area of chaotic dynamics for  $b = 1$ ,  $\varepsilon = 4$ ,  $k = 0.02$ ,  $\lambda = -1$ ,  $\beta = 1/18$ ,  $\omega_0 = 2\pi$ ; phase portraits, Poincaré sections and Fourier spectrums for chaotic regime (*b*, *d*):  $\Delta = 2.5$ ,  $M_c = 1.7$ ; and hyperchaotic regime (*c*, *e*):  $\Delta = 2.34$ ,  $M_c = 1.69$



в окрестности основного «острова» хаотической динамики. Как видно из рисунка, большую часть хаотических режимов представляет хаос с одной положительной ляпуновской экспонентой, однако внутри острова можно различить области гиперхаоса. На рис. 6, *b*, *d* и 6, *c*, *e* представлены иллюстрации устройства фазового пространства и спектров Фурье для хаоса и гиперхаоса, соответственно. Для рис. 6, *b*, *d* были зафиксированы параметры  $\Delta = 2.5$ ,  $M_c = 1.7$ , для которых старшие показатели Ляпунова имеют значения  $\Lambda_1 = 0.088$ ,  $\Lambda_2 = 0$ ,  $\Lambda_3 = -0.025$ . Для рис. 6, *c*, *e* были выбраны параметры  $\Delta = 2.34$ ,  $M_c = 1.69$ , для которых три старших показателя Ляпунова имеют значения  $\Lambda_1 = 0.106$ ,  $\Lambda_2 = 0.018$ ,  $\Lambda_3 = 0$ .

Как видно из рисунка, структура аттракторов в фазовом пространстве достаточно сложная как для хаоса, так и для гиперхаоса. Спектры Фурье имеют основной пик на частоте  $\omega_0 = 2\pi$ , и также имеется пик на частотах  $\omega_0 = 2\pi + \Delta$ . При этом в случае хаоса в спектре Фурье наблюдаются также пики на комбинационных частотах, что характерно для квазипериодических колебаний. Таким образом, можно сказать, что хаос возник в результате разрушения тора. Для гиперхаоса комбинационные частоты гораздо менее выражены, спектр становится более гладким и равномерным, можно отметить его небольшое расширение.

### Заключение

Таким образом, в работе представлено исследование особенностей взаимной синхронизации квазипериодических колебаний на примере модели двух связанных генераторов квазипериодических колебаний с состоянием равновесия. Подробно описана картина синхронизации генераторов на плоскости (частотная расстройка – сила связи). Показано, что в такого рода системе возможны как полная синхронизация, отвечающая периодическому режиму, так и режим синхронной квазипериодичности, когда колебания являются квазипериодическими, а фазы генераторов точно захвачены. Наблюдался также режим гибели колебаний. Особенность данной системы состоит также в возможности режима широкополосной квазипериодичности, которая состоит в том, что возникают двухчастотные колебания в определенном диапазоне изменения параметра связи и широком диапазоне частотной расстройки. Эта область наблюдается при уменьшении величины связи ниже области гибели колебаний. Другие режимы двухчастотной квазипериодичности имеют вид языков, встроенных в область трехчастотных колебаний, и образующих резонансную паутину Арнольда.

Подробно исследован переход от фазовой к полной синхронизации и к режиму широкополосной квазипериодичности. При таком переходе обнаружены бифуркации удвоения двумерного тора. Изучен переход от четырехчастотной к трехчастотной квазипериодичности при малой связи. Данный переход ассоциируется с точками квазипериодических бифуркаций коразмерности два QSNF (quasiperiodic saddle-node fan). Эти точки являются остриями языков двухчастотных режимов, имеющие порог по величине коэффициента связи. В их окрестности наблюдаются также трех- и четырехчастотные квазипериодические режимы. В модели обнаружена возможность реализации хаотической динамики как с одним, так и с двумя положительными показателями Ляпунова.

*Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФ № 17-12-01008 (постановка задачи, аналитическое исследование, численное моделирование, обобщение результатов, разделы 1, 2.1, 2.2, 2.3) и гранта Президента РФ для поддержки молодых российских ученых МК-661.2017.8 (исследование хаотической динамики, раздел 2.4).*

#### **Библиографический список**

1. Пиковский А., Розенблюм М., Куртс Ю. Синхронизация. Фундаментальное нелинейное явление. М.: Техносфера, 2003. 508 с.
2. Рабинович М. И., Трубецков Д. И. Введение в теорию колебаний и волн. М.; Ижевск: Регулярная и хаотическая динамика, 1999. 560 с.
3. Анищенко В.С., Астахов В.В., Вадивасова Т.Е., Стрелкова Г.И. Синхронизация регулярных, хаотических и стохастических колебаний. М.; Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2008. 144 с.
4. Кузнецов А.П., Сатаев И.Р., Станкевич Н.В., Тюрюкина Л.В. Физика квазипериодических колебаний. Саратов: Издательский центр Наука, 2013. 252с.
5. Anishchenko V., Astakhov S., Vadivasova T. Phase dynamics of two coupled oscillators under external periodic force // Europhysics Letters. 2009. Vol. 86. P. 30003.
6. Анищенко В.С., Астахов С.В., Вадивасова Т.Е., Феоктистов А.В. Численное и экспериментальное исследование внешней синхронизации двухчастотных колебаний // Нелинейная динамика. 2009. Т. 5, № 2. С. 237.
7. Анищенко В.С., Николаев С.М. Механизмы синхронизации резонансного предельного цикла на двумерном торе // Нелинейная динамика. 2008. Т. 4, № 1. С. 39.
8. Anishchenko V., Nikolaev S., Kurths J. Bifurcational mechanisms of synchronization of a resonant limit cycle on a two-dimensional torus // CHAOS. 2008. Vol. 18. P. 037123.
9. Anishchenko V.S., Nikolaev S.M., Kurths J. Peculiarities of synchronization of a resonant limit cycle on a two-dimensional torus // Phys. Rev. E. 2007. Vol.76, №4. P. 046216.
10. Анищенко В.С., Николаев С.М. Генератор квазипериодических колебаний. Бифуркация удвоения двумерного тора // Письма ЖТФ. 2005. Т. 31, вып. 19. С. 88.
11. Анищенко В.С., Николаев С.М. Устойчивость, синхронизация и разрушение квазипериодических колебаний // Нелинейная динамика. 2006. Т. 2, № 3. С. 267.
12. Anishchenko V., Nikolaev S., Kurths J. Winding number locking on a two-dimensional torus: Synchronization of quasiperiodic motions // Phys. Rev. E, 2006. Vol.73, № 5. P. 056202.
13. Broer H, Simó C., Vitolo R. Quasi-periodic bifurcations of invariant circles in low-dimensional dissipative dynamical systems // Regular and Chaotic Dynamics. 2011. Vol. 16, № 1-2. P. 154.
14. Komuro M., Kamiyama K., Endo T., Aihara K. Quasi-periodic bifurcations of higher-

- dimensional tori // *Int. J. of Bifurcation and Chaos*. 2016. Vol. 26, № 7. P. 1630016.
15. *Broer H., Simó C., Vitolo R.* The Hopf-saddle-node bifurcation for fixed points of 3D-diffeomorphisms: the Arnol'd resonance web // Reprint from the Belgian Mathematical Society. 2008. P. 769.
  16. *Stankevich N.V., Kurths J., Kuznetsov A.P.* Forced synchronization of quasiperiodic oscillations // *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*. 2015. Vol. 20, №. 1. P. 316.
  17. *Rosenblum M., Pikovsky A.* Self-organized quasiperiodicity in oscillator ensembles with global nonlinear coupling // *Physical review letters*. 2007. Vol. 98, №. 6. P. 064101.
  18. *Pikovsky A., Rosenblum M.* Self-organized partially synchronous dynamics in populations of nonlinearly coupled oscillators // *Physica D*. 2009. Vol. 238, №. 1. P. 27.
  19. *Rosenblum M., Pikovsky A.* Two types of quasiperiodic partial synchrony in oscillator ensembles // *Phys. Rev. E*. 2015. Vol. 92, №. 1. P. 012919.
  20. *Emelianova Yu. P., Kuznetsov A.P., Sataev I.R., Turukina L.V.* Synchronization and multi-frequency oscillations in the low-dimensional chain of the self-oscillators // *Physica D: Nonlinear Phenomena*. 2013. Vol. 244, № 1. P. 36.
  21. *Kuznetsov A.P., Kuznetsov S.P., Sataev I.R., Turukina L.V.* About Landau–Hopf scenario in a system of coupled self-oscillators // *Physics Letters A*. 2013. Vol. 377. P. 3291.
  22. *Kuznetsov A.P., Migunova N.A., Sataev I.R., Sedova Yu.V., Turukina L.V.* From chaos to quasi-periodicity // *Regular and Chaotic Dynamics*. 2015. Vol. 20, № 2. P. 189.
  23. *Itoh K., Inaba N., Sekikawa M.* Three-torus-causing mechanism in a third-order forced oscillator // *Progress of Theoretical and Experimental Physics*. 2013, № 9. P. 093A02.
  24. *Kamiyama K., Inaba N., Sekikawa M., Endo T.* Bifurcation boundaries of three-frequency quasi-periodic oscillations in discrete-time dynamical system // *Physica D*. 2014. Vol. 289. P. 12.
  25. *Sekikawa M., Inaba N., Kamiyama K., Aihara K.* Three-dimensional tori and Arnold tongues // *Chaos*. 2014. Vol. 24, № 1. P. 013137.
  26. *Hidaka S., Inaba N., Sekikawa M., Endo T.* Bifurcation analysis of four-frequency quasi-periodic oscillations in a three-coupled delayed logistic map // *Physics Letters A*. 2015. Vol. 379, № 7. P. 664.
  27. *Кузнецов А.П., Станкевич Н.В.* Синхронизация генераторов квазипериодических колебаний // *Нелинейная динамика*. 2013. Т. 9, №. 3. С. 409.
  28. *Kuznetsov A.P., Kuznetsov S.P., Stankevich N.V.* A simple autonomous quasiperiodic self-oscillator // *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*. 2010. Т. 15, №. 6. P. 1676.
  29. *Kuznetsov A.P., Kuznetsov S.P., Mosekilde E., Stankevich N.V.* Generators of quasiperiodic oscillations with three-dimensional phase space // *The European Physical Journal Special Topics*. 2013, № 10. P. 2391.

30. Кузнецов А.П. Динамические системы и бифуркации. Саратов: Издательский центр «Наука», 2015. 168с.
31. Anishchenko V. S., Safonova M.A., Feudel U., Kurths J. Bifurcations and transition to chaos through three-dimensional tori // Int. J. of Bifurcation and Chaos. 1994. Vol. 4, №. 03. P. 595.

## References

1. Pikovsky A., Rosenblum M., Kurths J. Synchronization: a universal concept in nonlinear sciences. Cambridge, England: Cambridge university press, 2003. 423 p.
2. Rabinovich M.I. Trubetskov D.I. Introduction to the theory of oscillations and waves. M.-Ijevsk: Regul'yarnaya i haoticheskaya dinamika, 1999. 560 p. (in Russian).
3. Anishchenko V.S., Astakhov V.V., Vadivasova T.E., Strelkova G.I. Synchronization of regular, chaotic and stochastic oscillations. M.; Izhevsk: Institute for Computer Research, 2008. 144 p. (in Russian).
4. Kuznetsov A.P., Sataev I.R., Stankevich N.V. Tyuryukina L.V. Physics of quasiperiodic oscillations. Saratov: Publishing Center «Nauka», 2013. 252 p. (in Russian).
5. Anishchenko V., Astakhov S., Vadivasova T. Phase dynamics of two coupled oscillators under external periodic force. *Europhysics Letters*, 2009, vol. 86, p. 30003.
6. Anishchenko V.S., Astakhov S.V., Vadivasova T.E., Feoktistov A.V. Numerical and experimental investigation of external synchronization of two-frequency oscillations. *Nelineinaya dinamika*, 2009, vol. 5, no. 2, p. 237 (in Russian).
7. Anishchenko V.S., Nikolaev S.M. Mechanisms of synchronization of a resonance limit cycle on a two-dimensional torus. *Nelineinaya dinamika*, 2008, vol. 4, no. 1, p. 39 (in Russian).
8. Anishchenko V., Nikolaev S., Kurths J. Bifurcational mechanisms of synchronization of a resonant limit cycle on a two-dimensional torus. *CHAOS*, 2008, vol. 18, p. 037123.
9. Anishchenko V.S., Nikolaev S.M., Kurths J. Peculiarities of synchronization of a resonant limit cycle on a two-dimensional torus. *Phys. Rev. E*, 2007, vol.76, no. 4, p. 046216.
10. Anishchenko V., Nikolaev S. Generator of quasi-periodic oscillations featuring two-dimensional torus doubling bifurcations. *Technical Physics Letters*, 2005, vol. 31, no. 10, p. 853.
11. Anishchenko V.S., Nikolaev S.M. Stability, synchronization and destruction of quasi-periodic motions. *Nelineinaya dinamika*, 2006, vol. 2, no. 3, p. 267 (in Russian).
12. Anishchenko V., Nikolaev S., Kurths J. Winding number locking on a two-dimensional torus: Synchronization of quasiperiodic motions. *Phys. Rev. E*, 2006, vol. 73, no. 5, p. 056202.
13. Broer H, Simó C., Vitolo R. Quasi-periodic bifurcations of invariant circles in low-dimensional dissipative dynamical systems. *Regular and Chaotic Dynamics*, 2011, vol. 16, no. 1-2, p. 154.

14. Komuro M., Kamiyama K., Endo T., Aihara K. Quasi-periodic bifurcations of higher-dimensional tori. *Int. J. of Bifurcation and Chaos*, 2016, vol. 26, no. 7, p. 1630016,
15. Broer H, Simó C., Vitolo R. The Hopf-saddle-node bifurcation for fixed points of 3D-diffeomorphisms: the Arnold's resonance web. *Reprint from the Belgian Mathematical Society*, 2008, p. 769.
16. Stankevich N. V., Kurths J., Kuznetsov A. P. Forced synchronization of quasiperiodic oscillations. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 2015, vol. 20, no. 1, p. 316.
17. Rosenblum M., Pikovsky A. Self-organized quasiperiodicity in oscillator ensembles with global nonlinear coupling. *Physical review letters*, 2007, vol. 98, no. 6, p. 064101.
18. Pikovsky A., Rosenblum M. Self-organized partially synchronous dynamics in populations of nonlinearly coupled oscillators. *Physica D*, 2009, vol. 238, no. 1, p. 27.
19. Rosenblum M., Pikovsky A. Two types of quasiperiodic partial synchrony in oscillator ensembles. *Phys. Rev. E*, 2015, vol. 92, no. 1, p. 012919.
20. Emelianova Yu. P., Kuznetsov A.P., Sataev I.R., Turukina L.V. Synchronization and multi-frequency oscillations in the low-dimensional chain of the self-oscillators. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 2013, vol. 244, no. 1, p. 36.
21. Kuznetsov A.P., Kuznetsov S.P., Sataev I.R., Turukina L.V. About Landau–Hopf scenario in a system of coupled self-oscillators. *Physics Letters A*, 2013, vol. 377, p. 3291.
22. Kuznetsov A.P. Migunova N.A., Sataev I.R., Sedova Yu.V., Turukina L.V. From chaos to quasi-periodicity. *Regular and Chaotic Dynamics*, 2015, vol. 20, no. 2, p. 189.
23. Itoh K., Inaba N., Sekikawa M. Three-torus-causing mechanism in a third-order forced oscillator. *Progress of Theoretical and Experimental Physics*, 2013, no. 9, p. 093A02.
24. Kamiyama K., Inaba N., Sekikawa M., Endo T. Bifurcation boundaries of three-frequency quasi-periodic oscillations in discrete-time dynamical system. *Physica D*, 2014, vol. 289, p. 12.
25. Sekikawa M., Inaba N., Kamiyama K., Aihara K. Three-dimensional tori and Arnold tongues. *Chaos*, 2014, vol. 24, no. 1, p. 013137.
26. Hidaka S., Inaba N., Sekikawa M., Endo T. Bifurcation analysis of four-frequency quasi-periodic oscillations in a three-coupled delayed logistic map. *Physics Letters A*, 2015, vol. 379, no. 7, p. 664.
27. Kuznetsov A.P., Stankevich N.V. Synchronization of generators of quasiperiodic oscillations. *Nelineinaya dinamika*, 2013, vol. 9, no. 3, p. 409 (in Russian).
28. Kuznetsov A.P., Kuznetsov S.P., Stankevich N. V. A simple autonomous quasiperiodic self-oscillator. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 2010, vol. 15, no. 6, p. 1676.

29. Kuznetsov A.P., Kuznetsov S.P., Mosekilde E., Stankevich N.V. Generators of quasi-periodic oscillations with three-dimensional phase space. *The European Physical Journal Special Topics*, 2013, no.10, p. 2391.
30. Kuznetsov A.P. Dynamic systems and bifurcations. Saratov: Publishing Center «Nauka», 2015. 168 p.
31. Anishchenko V. S., Safonova M.A., Feudel U., Kurths J. Bifurcations and transition to chaos through three-dimensional tori. *Int. J. of Bifurcation and Chaos*, 1994, vol. 4, no. 03. P. 595.

*Кузнецов Александр Петрович* – родился в 1957 году. Доктор физико-математических наук (1996), ведущий научный сотрудник Саратовского филиала Института радиотехники и электроники им. В.А. Котельникова РАН, заведующий кафедрой динамических систем Саратовского госуниверситета в СФ ИРЭ РАН. Имеет звание профессора (2002). Область научных интересов: динамические системы, теория бифуркаций, синхронизация, квазипериодические колебания и их приложения. Лауреат гранта Президента Российской Федерации, Соросовский профессор (2000, 2001). Опубликовал более 150 статей в российских и международных научных журналах. Под его руководством защищено 8 кандидатских диссертаций. Автор оригинальных учебных курсов для факультета нелинейных процессов СГУ и Лицея прикладных наук. Автор и соавтор 12 монографий, учебников и задачников по нелинейной динамике, теории колебаний и физике. Среди них: «Физика квазипериодических колебаний» «Нелинейность: от колебаний к хаосу», «Нелинейные колебания», «Линейные колебания и волны (сборник задач)», «Задачи физических олимпиад» и др.

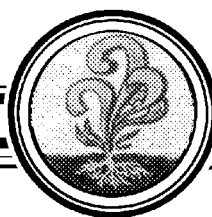


Россия, 410019 Саратов, ул. Зеленая, д. 38  
 Саратовский филиал Института радиотехники  
 и электроники им. В.А. Котельникова РАН  
 Россия, 410012 Саратов, ул. Астраханская, 83  
 Саратовский государственный университет  
 E-mail: apkuz@rambler.ru

*Станкевич Наталья Владимировна* – родилась в 1985 году в Саратове, окончила Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского в 2007 году. Защитила диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук в СГУ (2011) по специальности 01.04.03 – «Радиофизика». С 2011 года работает доцентом Саратовского государственного технического университета имени Гагарина Ю.А. на кафедре «Радиоэлектроника и телекоммуникации». Опубликовала 30 научных статей в области теории колебаний и волн, радиофизика и электроника, применение нелинейной динамики в различных областях науки. Член редакционной коллегии журнала «Universal Journal of Electrical and Electronic Engineering».



Россия, 410054 Саратов, ул. Политехническая, 77  
 Саратовский государственный технический университет им. Гагарина Ю.А.  
 E-mail: stankevichnv@mail.ru



УДК 621.385.6

## ШУМЫ В РЕЗИСТИВНОМ УСИЛИТЕЛЕ М-ТИПА С «ТОЛСТЫМ» ПУЧКОМ

*А. А. Фунтов*

Саратовский национальный исследовательский  
государственный университет имени Н.Г. Чернышевского  
Россия, 410012 Саратов, ул. Астраханская, 83  
E-mail: aafuntov@mail.ru

*Поступила в редакцию 23.01.2018, после доработки 29.01.2018*

**Цель** нашего исследования – изучение шумов в резистивном усилителе со скрещенными электрическим и магнитным полями с пучком конечной толщины. Если теория резистивного усилителя О-типа достаточно известна, хотя бы как классический пример прибора, использующего волны с отрицательной энергией, то резистивный усилитель М-типа, в котором тоже используются волны с отрицательной энергией, до недавнего времени почти не исследовался. Представляется интересным изучить шумы в приборе со скрещенными полями, тем более, что в ранних работах упоминалось о возможном малом уровне шума. **Метод.** Шумы изучаются на основе ранее построенной двумерной линейной адиабатической теории устройства с электронным потоком конечной толщины, который движется в скрещенных статических электрическом и магнитном полях (поток магнетронного типа) между двумя плоскими поверхностями с комплексной проводимостью. В такой системе шумы изучаются впервые. Рассмотрены случаи, когда обе поверхности металлические, и когда одна из поверхностей металлическая, а другая имеет активную, емкостную или индуктивную проводимость. **Результаты и обсуждение.** Показано, что наличие одной поверхности с комплексной проводимостью при второй металлической, не дает заметного преимущества ни в увеличении коэффициента усиления, ни в снижении коэффициента шума по сравнению со случаем обеих металлических поверхностей. Показано, что для получения наибольшего коэффициента усиления и наименьшего коэффициента шума нужен близкий к единице фактор заполнения.

*Ключевые слова:* резистивный усилитель, М-тип, линейная теория, толстый пучок, шумы в электронных потоках.

DOI: 10.18500/0869-6632-2018-26-2-59-68

*Образец цитирования:* Фунтов А.А. Шумы в резистивном усилителе М-типа с «толстым» пучком // Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2018. Т. 26, № 2. С. 59–68. DOI: 10.18500/0869-6632-2018-26-2-59-68

# NOISE IN RESISTIVE-WALL AMPLIFIER OF M-TYPE WITH «THICK» BEAM

A. A. Funtov

Saratov State University  
83, Astrakhanskaya str., 410012 Saratov, Russia  
E-mail: aafuntov@mail.ru  
Received 23.01.2018, revised 29.01.2018

The **aim** of our research is to study the noise in the resistive-wall amplifier with crossed electric and magnetic fields with a beam of finite thickness. The theory of the O-type resistive-wall amplifier is well known, at least as a classical example of using of waves with negative energy. Theory of resistive-wall amplifier M-type, in which negative energy waves are also used, has not been studied until recently. It seems interesting to study noise in a device with crossed fields, especially since early work mentioned a possible low noise level. **Method.** Study of noise based of the previously constructed two-dimensional linear adiabatic theory of a device with an electron flux of finite thickness that moves in crossed static electric and magnetic fields (magnetron-type flux) between two flat surfaces with complex conductivity. The noise coefficient in such a device is first studied. The cases when both surfaces are metallic, or when one of the surfaces is metallic, and the other has active, capacitive or inductive conductivity are considered. **Results and discussion.** It is shown that the complex conductivity of one of the surfaces, when the other is metallic, does not give a noticeable advantage either in increasing the gain factor or in reducing the noise factor in comparison with the case of both metal surfaces. It is shown that obtaining larger gain and lowest noise figure correspond to the fill factor of the order of one.

*Key words:* resistive-wall amplifier, linear theory, M-type, thick beam, noise.

DOI: 10.18500/0869-6632-2018-26-3-59-68

*References:* Funtov A.A. Noise in resistive-wall amplifier of M-type with «thick» beam. *Izvestiya VUZ, Applied Nonlinear Dynamics*, 2018, vol. 26, iss. 2, pp. 59–68. DOI: 10.18500/0869-6632-2018-26-2-59-68

## Введение

Благодаря метаматериалам усилитель на поглощении, также называемый резистивным усилителем, вновь привлек исследователей. Однако до сих пор не исследован вопрос о шумах в резистивном усилителе М-типа, поднятый ещё в 1950-х годах в обзоре [1], где указано, что в нём возможен малый уровень шума. Цель настоящей работы – проверка указанной возможности.

Оценивать уровень шума в приборе будем с помощью коэффициента шума, то есть отношения сигнал/шум на входе усилителя к отношению сигнал/шум на выходе, который можно представить в виде [2]:

$$F = 10 \lg \left| 1 + \frac{P_f}{P_T} \right|, \quad (1)$$

где  $P_f = |E|^2 / (2\beta_e^2 K)$  – выходная мощность, вызванная флуктуациями тока,  $K$  – сопротивление связи выходной секции (рис. 1),  $E$  – напряженность электрического поля в начале выходной секции,  $\beta_e = \omega / v_0$ ,  $\omega$  – рабочая частота,  $v_0$  – средняя скорость пучка,  $P_T = kT_0 \Delta f G$  – выходная мощность, являющаяся следствием тем-



пературного шума на входе,  $k$  – постоянная Больцмана,  $\Delta f$  – ширина полосы частот,  $T_0 = 290$  К – температура источника теплового сигнала, согласованного с секцией с комплексной проводимостью,  $G$  – коэффициент усиления.

Рассмотрим двумерную плоскую модель усилителя на поглощении М-типа в приближении слабого сигнала. Поток конечной толщины движется в положительном направлении оси  $x$  между двумя плоскими поверхностями, имеющими в общем случае комплексные проводимости

$$jY_{1,2} = \frac{E_y}{E_x} \Big|_{y=0,d},$$

где индексы « $x$ », « $y$ » означают соответствующую компоненту поля,  $j$  – мнимая единица. Поток движется между поверхностями в вакууме; внешнее ВЧ-поле отсутствует (рис. 2).

Считаем, что  $\omega_p^2 \ll \omega_c^2$ , где  $\omega_p^2 = e\rho_0/(m\varepsilon_0)$  – квадрат плазменной частоты,  $e/m$  – удельный заряд электрона,  $\rho_0$  – средняя плотность электронного потока,  $\omega_c = Be/m$  – циклотронная частота. Воспользуемся адиабатическим приближением.

На границах пучка  $x$ -компоненты поля непрерывны, то есть

$$E_{x2}^- = E_{x2}^+ = E_{x2}, \quad E_{x1}^- = E_{x1}^+ = E_{x1},$$

где верхние индексы «+», «-» означают, что поле берется над и под границей пучка, соответственно; нижние индексы «1», «2» означают, что поле берется на нижней или верхней границе, соответственно.

Условия разрыва нормальной составляющей напряженности поля пространственного заряда имеют вид

$$E_y^+(y_2) - E_y^-(y_2) = \frac{\rho_0}{\varepsilon_0} \tilde{y}_2,$$

$$E_y^+(y_1) - E_y^-(y_1) = -\frac{\rho_0}{\varepsilon_0} \tilde{y}_1,$$

где  $y_1 = y_0 - \Delta + \tilde{y}_1$  – координата нижней границы пучка,  $y_2 = y_0 + \Delta + \tilde{y}_2$  координата верхней границы пучка;  $y_0 \gg \tilde{y}_{1,2}$ ,  $\tilde{y}_{1,2}$  – смещения соответствующих границ.

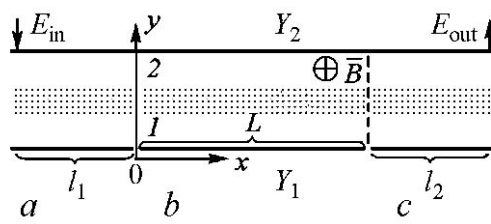


Рис. 1. Модель резистивного усилителя для расчета коэффициентов усиления и шума.  $a$  – входная секция,  $b$  – секция с комплексной проводимостью,  $c$  – выходная секция

Fig. 1. Model of a resistive amplifier for calculating of so gain and noise factor.  $a$  – input section,  $b$  – section with complex conductivity,  $c$  – output section

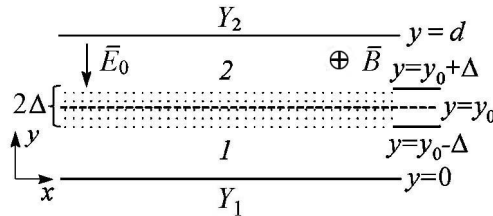


Рис. 2. Двумерная плоская модель усилителя на поглощении М-типа:  $y_0$  – координата оси пучка;  $2\Delta$  – толщина пучка;  $d$  – расстояние между поверхностями;  $\bar{B}$  – индукция статического магнитного поля;  $\bar{E}_0$  – напряженность статического электрического поля

Fig. 2. Two-dimensional flat model of amplifier on M-type absorption:  $y_0$  is the beam-axis coordinate;  $2\Delta$  – thickness of the beam;  $d$  – distance between the surfaces;  $\bar{B}$  – static magnetic field induction;  $\bar{E}_0$  – static electric field strength

На входе в пространство между поверхностями (см. рис. 2) пучок имеет толщину  $2\Delta$ . В результате действия наведенных на поверхностях зарядов возникают продольное  $\tilde{x}$  и поперечное  $\tilde{y}$  смещения границ пучка.

Волны, которые могут распространяться ниже и выше пучка (области 1 и 2 на рис. 2, соответственно), а также в пучке, будем искать в виде  $E = E_x(y) e^{j(\omega t - \beta x)}$ , где  $E_x(y) = a \operatorname{sh} \beta y + b \operatorname{ch} \beta y$ ,  $\beta$  – искомая постоянная распространения (в адиабатическом приближении  $\beta \approx \beta_e$ ).

Опуская вывод уравнений полей на границах пучка и дисперсионного уравнения, подробно изложенный в работе [3], приведем их с необходимыми пояснениями. Уравнения напряженности электрических полей на границах пучка в адиабатическом приближении:

$$\begin{cases} E_{x1} = \frac{\rho_0}{j\varepsilon_0} \operatorname{sh} 2\beta_e \Delta \frac{\tilde{y}_2 - \tilde{y}_1 S_2 \operatorname{ch} 2\beta_e \Delta}{1 - S_1 S_2 \operatorname{ch}^2 2\beta_e \Delta}, \\ E_{x2} = \frac{\rho_0}{j\varepsilon_0} \operatorname{sh} 2\beta_e \Delta \frac{\tilde{y}_2 S_1 \operatorname{ch} 2\beta_e \Delta - \tilde{y}_1}{1 - S_1 S_2 \operatorname{ch}^2 2\beta_e \Delta}, \end{cases} \quad (2)$$

где  $S_1 = 1 + \operatorname{th} 2\beta_e \Delta \frac{Y_1 + \operatorname{th} \beta_e (y_0 - \Delta)}{Y_1 \operatorname{th} \beta_e (y_0 - \Delta) + 1}$ ,  $S_2 = 1 + \operatorname{th} 2\beta_e \Delta \frac{Y_2 - \operatorname{th} \beta_e (d - y_0 - \Delta)}{Y_2 \operatorname{th} \beta_e (d - y_0 - \Delta) - 1}$ ,  $E_{x1}$  и  $E_{x2}$  – продольные компоненты напряженности электрического поля на нижней и верхней границе пучка, соответственно,  $\tilde{y}_1, \tilde{y}_2$  – возмущение координат соответствующих границ. Корни дисперсионного уравнения в указанных приближениях записываются в виде

$$\beta = \beta_e \left( 1 - \frac{\Omega}{2} (X \pm jM) \right), \quad (3)$$

где

$$jM = \sqrt{(S_1 - S_2)^2 \chi^2 \operatorname{ch}^2 2\beta_e \Delta - 4\chi (\operatorname{sh} 2\beta_e \Delta - (S_1 + S_2) \beta_e \Delta \operatorname{ch} 2\beta_e \Delta) + 4\beta_e^2 \Delta^2},$$

$$X = (S_1 - S_2) \chi \operatorname{ch} 2\beta_e \Delta, \quad \chi = \frac{\operatorname{sh} 2\beta_e \Delta}{1 - S_1 S_2 \operatorname{ch}^2 2\beta_e \Delta}, \quad \Omega = \frac{\omega_p^2}{\omega_c \omega}.$$

### Расчёт коэффициента усиления

Для расчета коэффициента усиления рассмотрим следующую модель усилителя с пространством дрейфа с комплексной проводимостью стенок (см. рис. 1). Электронный пучок конечной толщины модулируется полями отрезка линии передачи во входной секции, проходит через секцию с комплексной проводимостью и наводит поле в отрезке линии передачи в выходной секции.

Во входную секцию длиной  $l_1$  и сопротивлением связи  $K$  поступает возмущенный электронный поток с полным током  $I_0$  при ускоряющем напряжении  $V_0$ . Во входную секцию подается входной сигнал  $E_{in}$ . Для расчета возмущений границ электронного потока во входной секции используем теорию, изложенную в статье [4].

В приближении заданного поля с учетом использованных выше допущений уравнение для возмущений примет вид

$$\frac{\partial^2 \tilde{y}_{1,2}^0}{\partial x^2} + j\beta_e \left( 2 - \frac{\Omega Q}{\text{sh } \beta_e d} \right) \frac{\partial \tilde{y}_{1,2}^0}{\partial x} + \beta_e^2 \left( -1 + \frac{\Omega Q}{\text{sh } \beta_e d} + \frac{\Omega^2 W}{\text{sh}^2 \beta_e d} \right) \tilde{y}_{1,2}^0 = \frac{g_{1,2}}{v_0^2} E_{\text{in}} e^{-j\beta_0 l_1},$$

где  $\beta_0$  – постоянная распространения в отрезке линии передачи без пучка,

$$Q = \text{sh } \beta_e (d - y_0 - \Delta) \text{sh } \beta_e (y_0 + \Delta) - \text{sh } \beta_e (d - y_0 + \Delta) \text{sh } \beta_e (y_0 - \Delta),$$

$$W = \text{sh } \beta_e (d - y_0 - \Delta) \text{sh } \beta_e (y_0 + \Delta) \text{sh } \beta_e (d - y_0 + \Delta) \text{sh } \beta_e (y_0 - \Delta),$$

$$g_1 = -j \frac{e(\omega - \beta_0 v_0)}{m\omega_c} + j \frac{e\omega_p^2}{m\omega_c^2} \frac{\text{sh } \beta_e (d - y_0 - \Delta)}{\text{sh } \beta_e d} (\text{sh } \beta_e (y_0 + \Delta) - \text{sh } \beta_e (y_0 - \Delta)),$$

$$g_2 = -j \frac{e(\omega - \beta_0 v_0)}{m\omega_c} + j \frac{e\omega_p^2}{m\omega_c^2} \frac{\text{sh } \beta_e (y_0 - \Delta)}{\text{sh } \beta_e d} (\text{sh } \beta_e (d - y_0 - \Delta) - \text{sh } \beta_e (d - y_0 + \Delta)).$$

При начальных условиях

$$\begin{cases} \tilde{y}_{1,2}^0(x = -l_1) = 0, \\ \frac{\partial \tilde{y}_{1,2}^0}{\partial x}(x = -l_1) = 0, \end{cases}$$

с помощью простых, но громоздких вычислений находим искомые возмущения

$$\tilde{y}_{1,2}^0(x = 0) = \frac{g_{1,2} E_{\text{in}}}{v_0^2 H} \left( \frac{-k_2 - j\beta_0}{k_2 - k_1} e^{k_1 l_1} + \frac{k_1 + j\beta_0}{k_2 - k_1} e^{k_2 l_1} + e^{-j\beta_0 l_1} \right), \quad (4)$$

где  $H = -(\beta_0 - \beta_e)^2 + \beta_e \frac{\Omega Q}{\text{sh } \beta_e d} (\beta_e - \beta_0) + \frac{\Omega^2 W \beta_e^2}{\text{sh}^2 \beta_e d}$ ,  $k_{1,2} = j\beta_e \left( -1 + \frac{\Omega(Q \pm Q')}{2 \text{sh } \beta_e d} \right)$ ,

$$Q' = \text{sh } \beta_e (d - y_0 - \Delta) \text{sh } \beta_e (y_0 + \Delta) + \text{sh } \beta_e (d - y_0 + \Delta) \text{sh } \beta_e (y_0 - \Delta).$$

Так как дисперсионное уравнение имеет два корня, то выражения для возмущений границ в секции с комплексной проводимостью можно записать как

$$\tilde{y}_{1,2} = A_{1,2} e^{-j\beta_1 x} + C_{1,2} e^{-j\beta_2 x}. \quad (5)$$

Используя в качестве начальных условий (4), соотношение (5) перепишем в виде

$$\begin{aligned} \tilde{y}_{1,2} = \frac{1}{jM\Omega} & \left( \left[ \left( 1 - \frac{\Omega}{2} (X - jM) \right) \tilde{y}_{1,2}^0 - \frac{j}{\beta_e} \frac{\partial \tilde{y}_{1,2}^0}{\partial x} \right] e^{-j\beta_e x \left( 1 - \frac{\Omega}{2} (X + jM) \right)} + \right. \\ & \left. + \left[ \frac{j}{\beta_e} \frac{\partial \tilde{y}_{1,2}^0}{\partial x} - \left( 1 - \frac{\Omega}{2} (X + jM) \right) \tilde{y}_{1,2}^0 \right] e^{-j\beta_e x \left( 1 - \frac{\Omega}{2} (X - jM) \right)} \right). \end{aligned}$$

Наведенное пучком поле в выходной секции находим, используя уравнение (8) из работы [4], в виде

$$E_{\text{out}} = -\frac{\beta_0^2 \beta_e K I_0}{4\beta_0 \Delta \text{sh } \beta_e d} \int_0^{l_2} [\tilde{y}_2(L) \text{sh } \beta_e (y_0 + \Delta) - \tilde{y}_1(L) \text{sh } \beta_e (y_0 - \Delta)] e^{-j\beta_0 (l_2 - \zeta)} d\zeta,$$

где  $L$  – длина секции с комплексной проводимостью,  $l_2$  – длина выходной секции. Это выражение в уже сделанных допущениях и в приближении заданных возмущений (считаем, что возмущения границ пучка не меняются в выходной секции, то есть множитель в квадратных скобках можно вынести из-под интеграла) примет вид

$$\frac{E_{\text{out}}}{E_{\text{in}}} = \frac{j(1 - e^{-j\beta_0 l_2}) D^2 \beta_0}{4\beta_e \Delta} \frac{\beta_0}{\beta_e} [\tilde{y}'_2(L) \text{sh } \beta_e (y_0 + \Delta) - \tilde{y}'_1(L) \text{sh } \beta_e (y_0 - \Delta)],$$

где  $\tilde{y}_{1,2} = e\omega/(mv_0^2 \omega_c \beta_e^2) E_{\text{in}} \tilde{y}'_{1,2}$ ,  $D^2 = KI_0/(2V_0 \text{sh } \beta_e d)(\omega/\omega_c)$  – квадрат параметра усиления в отрезке линии передачи.

Коэффициент усиления в дальнейшем будем искать по формуле

$$G = 20 \lg \left| \frac{E_{\text{out}}}{E_{\text{in}}} \right|.$$

### Расчет коэффициента шума

Считаем, что поворот пучка в области пушки (рис. 3) и перенос возмущений от катода к началу секции с комплексной проводимостью проходят без искажений. Рассмотрим последовательность зарядов, влетающих в область пушки с интервалом времени  $T$  с катода шириной  $w$ . Создаваемый ими ток как функцию координаты и времени можно представить в виде двойного ряда

$$i(t, x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} i_{nm} e^{2\pi j(n\frac{t}{T} - m\frac{x}{w})},$$

где

$$i_{nm} = \frac{1}{Tw} \int_0^T \int_0^w i(t, x) e^{-2\pi j(n\frac{t}{T} - m\frac{x}{w})} dx dt,$$

$n$  и  $m$  – номера гармоник по времени и координате, соответственно.

Рассмотрим для простоты плоский диод. Пусть за время  $\Delta t$  на анод приходит  $N_{\Delta t}$  электронов, а за всё время  $T$  –  $N$ . Вероятность достижения электроном из первой группы анода  $p = \Delta t/T$ , а вероятность недостижения  $q = 1 - \Delta t/T$ . Тогда, если считаем распределение электронов нормальным, среднее отклонение  $\sigma = \sqrt{Npq} \approx \sqrt{N\Delta t/T}$ .

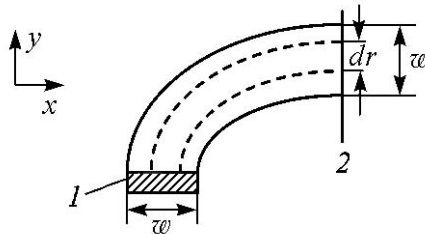


Рис. 3. Схематическое изображение катода и области пушки. 1 – катод, 2 – конец области пушки

Fig. 3. Schematic representation so of cathode and region of gun. 1 – cathode, 2 – gun area end

Ток, создаваемый одним электроном, равен  $i_{1nm} = e/\Delta t$ . Если имеется  $N = I_0 T/e$  некоррелированных последовательностей, то квадраты амплитуд складываются как

$$i_{nm}^2 = (e/\Delta t)^2 \sigma^2 = eI_0 \Delta f, \quad (6)$$

где  $\Delta f = 1/\Delta t$ ,  $I_0 = e/T$ .

Пусть катод эмитирует пучок конечной толщины. Разобьём его на тонкие полоски толщиной  $dr$  (см. рис. 3).

Этому потоку можно поставить в соответствие бесконечно тонкий поток, с поперечной координатой  $y_e$  – случайной функцией (её среднее значение –  $y_m$ ). Флуктуации  $y_e$  определяются выражением

$$\delta y_e = \frac{(y - y_m) \delta i(t, x)}{i_0} = \frac{r \delta i(t, x)}{i_0}, \quad (7)$$

где  $\delta i$  – флуктуация тока в полоске шириной  $r$ . Разложим (7) в ряды Фурье

$$\delta (y_e)_{nm} = \frac{r}{i_0} (\delta i)_{nm},$$

и подставив (6), получим

$$\delta (y_e)_{nm}^2 = \left( \frac{r}{i_0} \right)^2 e I_0 \Delta f \frac{dr}{w},$$

где  $(\delta i)_{nm}^2 = i_{nm}^2 dr/w$ . Так как считаем флуктуации тока в разных полосках независимыми, можно взять от последнего выражения интеграл

$$\Delta (y_e)_{nm}^2 = \frac{e \Delta f}{I_0 w} \int_{-w/2}^{w/2} r^2 dr = \frac{e \Delta f w^2}{12 I_0}. \quad (8)$$

Для расчета среднеквадратичных флуктуаций скорости воспользуемся формулой Рэка

$$|\tilde{v}(0)|^2 = (4 - \pi) \eta k T_k \Delta f / I_0,$$

тогда  $d\tilde{y}(0)/dt = \sqrt{|\tilde{v}(0)|^2} = \partial\tilde{y}(0)/\partial t + v_0(\partial\tilde{y}(0)/\partial x)$ . Так как исследуем стационарную модель, то  $\partial\tilde{y}(0)/\partial t = 0$ . Тогда, с учетом формулы Рэка и (8), получим следующие начальные условия

$$\tilde{y}_1(0) = \tilde{y}_2(0) = \sqrt{\frac{e w^2 \Delta f}{12 I_0}}, \quad \frac{\partial\tilde{y}_1(0)}{\partial x} = \frac{\partial\tilde{y}_2(0)}{\partial x} = \frac{1}{v_0} \sqrt{(4 - \pi) \frac{e k T_k \Delta f}{m I_0}},$$

где  $T_k$  – температура катода. Для удобства введем следующие величины  $\beta'_i = \beta_i/\beta_e$ ,  $w' = \beta_e w \sqrt{1/12}$ ,  $a_1 = \sqrt{(4 - \pi) (k T_k) / (m v_0^2)}$ . Подставив эти начальные условия в соотношение (5), уравнения для возмущений можно записать в виде

$$\tilde{y}_{1,2}(x) = \frac{1}{\beta_e} \sqrt{\frac{e \Delta f}{I_0}} \frac{1}{\beta'_1 - \beta'_2} \left[ (j a_1 - \beta'_2 w') e^{-j \beta_1 x} + (-j a_1 + \beta'_1 w') e^{-j \beta_2 x} \right]. \quad (9)$$

Квадрат модуля полного поля найдем из (2), подставив в него (9), тогда выражение (1) окончательно примет вид

$$F = 10 \lg |1 + a_2 |E'_x|^2 + E'_y|^2 / G|,$$

$$\text{где } E_{x,y} = \frac{\rho_0}{\beta_e \varepsilon_0} \sqrt{\frac{e \Delta f}{I_0}} E'_{x,y}, \quad a_2 = \frac{\rho_0^2 e}{2 \varepsilon_0^2 \beta_e^4 K_0 I_0 k T_0}.$$

В этой работе не будем подробно останавливаться на исследовании коэффициента усиления, выполненного в [3], и исследуем коэффициент шума. Будем в дальнейшем для удобства фактором заполнения называть отношение  $2\Delta/d$ .

Из рис. 4, *a* видно, что до  $\beta_e L \approx 4$  при  $Y_1 = 0.1j$  коэффициент усиления преобладает над коэффициентом шума. На рис. 4, *b* и *c* изображена зависимость  $G$  и  $F$  от различных компонент проводимости нижней поверхности при металлической верхней поверхности, видно, что проводимость незначительно влияет на  $F$  при рассмотренных параметрах. Из рис. 4, *a* и *d* видно, что коэффициент шума в случае обеих металлических поверхностей ниже, чем в случае, когда одна из поверхностей обладает емкостной проводимостью. Все графики на рис.4 построены при следующих значениях параметров:  $\Omega = 10^{-6}$ ,  $\beta_e d = 2\beta_e y_0 = 20$ ,  $a_1 = 0.01$ ,  $a_2 = 0.5 \cdot 10^6$ ,  $\beta_e w = \sqrt{3}$ ,  $\beta_e l_1 = \beta_e l_2 = 16$ ,  $Y_2 \rightarrow \infty$ ,  $D = 0.63$ ,  $2\Delta/d = 0.9$ .

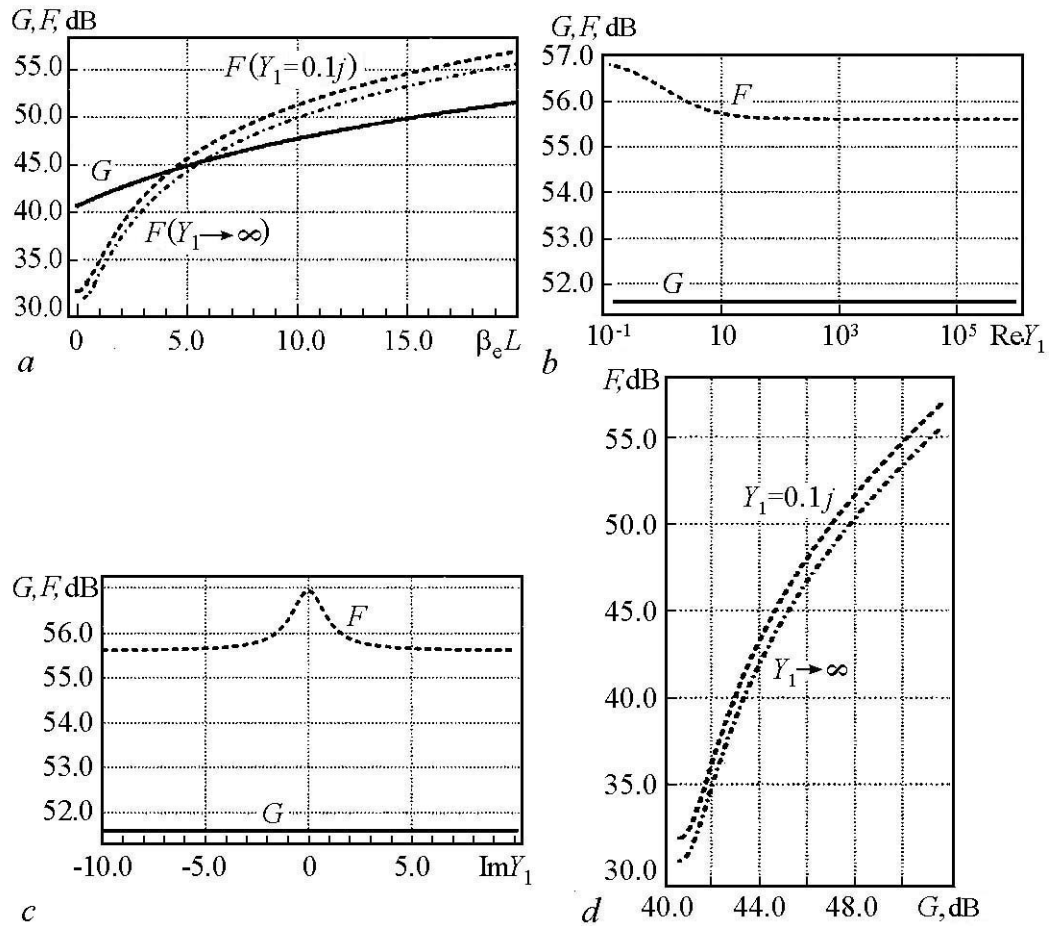


Рис. 4. Зависимость коэффициента усиления  $G$  и коэффициента шума  $F$  от длины секции с комплексной проводимостью  $\beta_e L$  (*a*); зависимость  $G$  и  $F$  от  $\text{Re} Y_1$  (*b*) при  $\text{Im} Y_1 = 0$ ,  $\beta_e L = 20$ ; зависимость  $G$  и  $F$  от  $\text{Im} Y_1$  (*c*) при  $\text{Re} Y_1 = 0$ ,  $\beta_e L = 20$ ; зависимость  $F$  от  $G$  (*d*)

Fig. 4. Dependence of the gain  $G$  and the noise coefficient  $F$  on the length of the section with complex conductivity  $\beta_e L$  (*a*); dependence of  $G$  and  $F$  on  $\text{Re} Y_1$  (*b*) for  $\text{Im} Y_1 = 0$ ,  $\beta_e L = 20$ ; dependence of  $G$  and  $F$  on  $\text{Im} Y_1$  (*c*) at  $\text{Re} Y_1 = 0$ ,  $\beta_e L = 20$ ; dependence of  $F$  on  $G$  (*d*)

Исследуем зависимость  $G$  и  $F$  от фактора заполнения (рис. 5) при обеих металлических поверхностях. Видно, что, если  $G$  имеет минимум при  $2\Delta/d \approx 0.1$  и максимум при  $2\Delta/d \approx 0.9$ , то  $F$  при  $2\Delta/d \approx 0.1$  имеет максимум и достигает наибольшего значения при выбранных параметрах, а при  $2\Delta/d \approx 0.9$  начинает заметно уменьшаться.

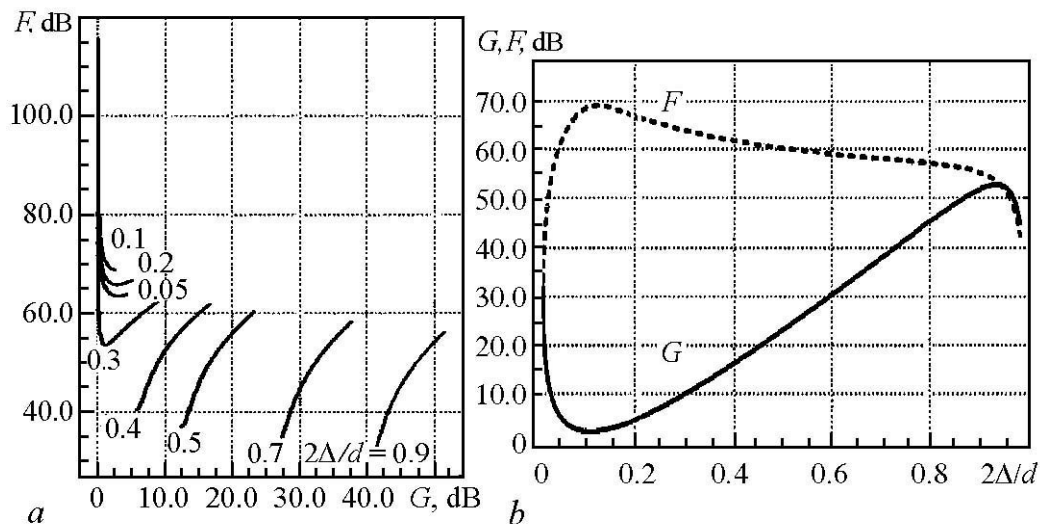


Рис. 5. Зависимость коэффициента шума  $F$  от коэффициента усиления  $G$  при разных факторах заполнения (а) и зависимость коэффициента шума и коэффициента усиления от фактора заполнения при  $\Omega = 10^{-6}$ ,  $\beta_e d = 2\beta_e y_0 = 20$ ,  $a_1 = 0.01$ ,  $a_2 = 0.5 \cdot 10^6$ ,  $\beta_e w = \sqrt{3}$ ,  $\beta_e l_1 = \beta_e l_2 = 16$ ,  $Y_1, Y_2 \rightarrow \infty$ ,  $D = 0.63$ ,  $2\Delta/d = 0.9$  (b);  $\beta_e L = 20$

Fig. 5. Dependence of the noise figure  $F$  on the gain factor  $G$  for different filling factors (a) and dependencies so of the noise figure and the gain on the filling factor at  $\Omega = 10^{-6}$ ,  $\beta_e d = 2\beta_e y_0 = 20$ ,  $a_1 = 0.01$ ,  $a_2 = 0.5 \cdot 10^6$ ,  $\beta_e w = \sqrt{3}$ ,  $\beta_e l_1 = \beta_e l_2 = 16$ ,  $Y_1, Y_2 \rightarrow \infty$ ,  $D = 0.63$ ,  $2\Delta/d = 0.9$  (b);  $\beta_e L = 20$

### Заключение

В данной работе изложена теория расчета коэффициента шума в резистивном усилителе М-типа с комплексной проводимостью области дрейфа и пучком конечной толщины. Из рассмотренной модели следует, что применение в резистивном усилителе М-типа поверхностей с комплексной проводимостью не дает заметного преимущества ни в увеличении коэффициента усиления, ни в снижении коэффициента шума по сравнению с металлическими. Показано, что для наибольшего коэффициента усиления и наименьшего коэффициента шума нужен фактор заполнения, близкий к значению 0.9.

*Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ № 18-02-00666 «Линейные, нелинейные и нестационарные явления в нетрадиционных вакуумных и гибридных устройствах терагерцового диапазона (теория и модельные натурные эксперименты)».*

## Библиографический список

1. Варнеке Р. Эволюция принципов действия современных электровакуумных приборов для СВЧ // Сб. Миллиметровые и субмиллиметровые волны / Под ред. Р.Г. Мириманова. М.: Издательство иностранной литературы, 1959.
2. Трубецков Д.И., Шараевский Ю.П., Шевчик В.Н. Шумовые явления в лучевых усилителях магнетронного типа // Обзоры по электронной технике. Сер. Электроника СВЧ, вып. № 10 (204), октябрь 1970. М., Институт «Электроника».
3. Фунтов А.А. Волновые процессы в электронном потоке в скрещенных статических электрических и магнитных полях при его движении в среде с комплексной проводимостью // Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2017. Т. 25, № 3.
4. Соколов Д.В., Сокольская Т.М. О применении метода последовательных приближений к анализу лучевых приборов магнетронного типа с пучком конечной толщины // Вопросы электроники сверхвысоких частот. 1967. Вып. 3. Саратов: Изд-во Саратовского университета, 1967. С. 39–54. 8.

## References

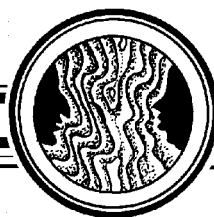
1. Warnecke R. Convegno di Electronica Etelevisione. Milano, 2, 706, 1954.
2. Trubetskov D.I., Sharaevsky Y.P., Shevchik V.N. Noise phenomena in beam amplifiers of magnetron type. *Reviews of electronic engineering. Ser. Microwave Electronics*, no. 10 (204), October 1970. Moscow: Institute «Electronika» (in Russian).
3. Funtov A.A. Wave processes in the electron beam in crossed static electric and magnetic fields as it moves in a medium with a complex conductivity. *Izvestiya VUZ, Applied Nonlinear Dynamics*, 2017, vol. 25, iss. 3 (in Russian).
4. Sokolov D.V., Sokolskaya T.M. Application of the method of successive approximations to the analysis beam devices magnetron type with a beam of finite thickness. *Proc. «Questions of Microwave Electronics»*, vol. 3, Saratov: Izd-vo SGU, 1967, pp. 39–54 (in Russian).



Фунтов Александр Андреевич – родился в Балакове Саратовской области (1992). Окончил СГУ (2014). В настоящее время – аспирант кафедры электроники, колебаний и волн. Автор шести научных публикаций. Область научных интересов – вакуумная СВЧ-электроника.

Россия, 410012 Саратов, ул. Астраханская, 83  
Саратовский государственный университет  
E-mail: aafuntov@mail.ru





УДК 621.385.632+929 Солнцев

## О НАУЧНОМ ТВОРЧЕСТВЕ ВИКТОРА АНАТОЛЬЕВИЧА СОЛНЦЕВА

*Н. П. Кравченко*

Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»  
Россия, 123458 Москва, Таллинская, 34  
E-mail: natkrav@inbox.ru  
Поступила в редакцию 12.03.2018

**Цель.** Исследование основных этапов научной деятельности В.А. Солнцева от студенческой скамьи до лидера научной школы по радиофизике и электронике СВЧ. **Метод.** На основании базовых публикаций проанализированы главные направления творческого пути ученого, определявшего электронную эпоху. **Результаты.** Показано, насколько своевременно В.А. Солнцев находил замену методам исследования и расчета, перестававшим удовлетворять запросам науки и производства, и решительно переходил к разработке новых принципов усиления и генерации, точно определяя, что время предыдущих методов и принципов истекает, уступая место лишь рутинному аппарату. **Обсуждение.** Помимо чрезвычайно важного научно-практического вклада в развитие радиофизики и электроники СВЧ отмечена огромная просветительская работа и научно-организационная роль выдающегося ученого.

*Ключевые слова:* волновой метод, микроволновая электроника, электродинамика, замедляющие системы, электродинамическая теория возбуждения.

DOI: 10.18500/0869-6632-2018-26-2-69-86

*Образец цитирования:* Кравченко Н.П. О научном творчестве Виктора Анатольевича Солнцева // Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2018. Т. 26, № 2. С. 69–86. DOI: 10.18500/0869-6632-2018-26-2-69-86

## ABOUT SCIENTIFIC CREATIVITY OF VICTOR A. SOLNTSEV

*N. P. Kravchenko*

National Research University «Higher School of Economics»  
34, Tallinskaya ul., 123458 Moscow, Russian Federation  
E-mail: natkrav@inbox.ru  
Received 12.03.2018

**Aim.** The main stages of scientific activity of V.A. Solntsev from the student's bench to the leader of the scientific school on radiophysics and microwave electronics are investigated. **Method.** Based on the primary publications, the main directions of the creative path of

the scientist, whom determined the electronic age of the time, are analyzed. **Results.** It is shown how timely V.A. Solntsev found a substitute for research and calculation methods that ceased to satisfy the demands of science and production, and resolutely went on to develop new principles of amplification and generation, accurately determining the expiration time of previous methods and principles and giving way only to the routine apparatus. **Discussion.** Great educational work and scientific and organizational role of the outstanding scientist were noted.

*Keywords:* wave method, microwave electronics, electrodynamics, slow-wave structures, electrodynamic theory of excitation.

DOI: 10.18500/0869-6632-2018-26-2-69-86

*References:* Kravchenko N.P. About scientific creativity of Victor A. Solntsev. *Izvestiya VUZ, Applied Nonlinear Dynamics*, 2018, vol. 26, iss. 2, pp. 69–86. DOI: 10.18500/0869-6632-2018-26-2-69-86

## Введение

В июле 2016 года на 86-м году жизни скончался выдающийся ученый в области радиоэлектроники сверхвысоких частот, заслуженный деятель науки Российской Федерации, лидер научной школы по методам СВЧ электроники, доктор физико-математических наук, профессор Московского института электроники и математики (МИЭМ) Национального исследовательского университета «Высшая школа экономики» имени А.Н. Тихонова (НИУ «ВШЭ») Виктор Анатольевич Солнцев.

Несколько лет назад В.А. Солнцев сформулировал основные направления своей научной деятельности, которые приведены здесь дословно.

- Теория и моделирование нелинейного взаимодействия электронных потоков с электромагнитным полем.
- Методы проектирования электронных приборов СВЧ.
- Исследование физических принципов генерирования и усиления СВЧ колебаний средней и большой мощности в нерелятивистских открытых и псевдопериодических электронно-волновых системах.
- Методы СВЧ вакуумной микроэлектроники.

Имея в виду этот ориентир, пройдемся, однако, хронологически по основным этапам его научной жизнедеятельности.

## Учеба в МГУ. Начало работы

Родом из Кстово на Волге Нижегородской области, Виктор Анатольевич по окончании школы поступил на физический факультет МГУ имени М.В. Ломоносова и в 1953 году защитил диплом на кафедре физики СВЧ, а затем поступил в аспирантуру физфака МГУ.

Вместе с ним в группе учились Роберт Андреевич Силин и Генрих Григорьевич Моносов, с которыми на долгие годы их объединила тематика СВЧ и совместная работа в подмосковном городе Фрязино в НИИ Министерства радиотехнической промышленности (ныне АО НПП «Исток»). Однокурсником Виктора Солнцева был

и другой Виктор – Маслов, с которым они 20 лет спустя встретились в МИЭМ в качестве заведующих кафедрами: Виктор Анатольевич Солнцев – радиоэлектроники, Виктор Павлович Маслов – прикладной математики (ныне он является ординарным профессором МИЭМ НИУ «ВШЭ»). А во времена студенчества оба Виктора на несколько лет прославились тем, что лишь им двоим удалось решить задачи из считавшихся неразрешимыми и которые традиционно любили задавать университетские профессора. Это лишь один из примеров того, что Виктор Анатольевич мог бы преуспеть в любой области физики и математики. Но он выбрал радиофизику и СВЧ электронику.

Дипломная работа, посвященная теоретическому и экспериментальному исследованию спиральной замедляющей системы с диэлектрическими опорами для широкополосных ламп бегущей волны (ЛБВ), как и первые научные статьи, выполнялись под руководством А.С. Тагера в упомянутом выше НИИ Министерства радиотехнической промышленности [1–3].

В 1950-е годы В.А. Солнцевым с коллективом исследователей была разработана лампа для генерации колебаний 4 мм диапазона длин волн, на которую в 1956 году было получено Авторское свидетельство (АС СССР SU1840644A1 от 04.09.1956) <sup>1</sup>, опубликованное в Бюллетене Изобретений № 22 лишь спустя более полувека 10.08.2007. Отстраняясь от этих формальных моментов истории, отметим лишь, что разработка и производство модификаций ламп обратной волны (ЛОВ) с замедляющими системами типа многорядных встречных штырей в НПП «Исток» проводились с той поры и проводятся до настоящего времени, включая экспорт в ряд стран.

### 1960-е годы

В 1960–1973 годах В.А. Солнцев работал в Центральном научно-исследовательском радиотехническом институте Министерства радиотехнической промышленности (ЦНИРТИ), где подготовил к защите диссертацию [4] на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук (1960, ГГУ имени Н.И. Лобачевского, Горький). С конца 1950-х годов В.А. Солнцев совместно с В.Т. Овчаровым занимался разработкой нелинейной теории ЛБВ [5]. Исследуя процессы в ЛБВ, они смогли найти оригинальный метод упрощения нелинейных уравнений, позднее названный волновым [6]. Вот как об этом сказал чл.-корр. РАН Д.И. Трубецков на III Всероссийской конференции «Проблемы СВЧ электроники» имени В.А. Солнцева в своем докладе [7]: «С уходом от нас В.А. Солнцева ушла и часть эпохи теоретической СВЧ электроники... Он сделал очень многое, но не каждый оставляет в науке метод, названный его именем».

В работах этого периода для решения задач мощной электроники СВЧ В.А. Солнцевым, кроме волнового метода, который мог применяться наряду или вместо метода крупных частиц, развит целый ряд новых теоретических методов и выполнены исследования на их основе, включая следующие:

<sup>1</sup>Основные идеи и конструктивно-технологические особенности изобретения представлены в лекционном материале: Негирев А.А. Солнцев В.А. Изобретение и развитие мм и субмм ЛОВ с многорядными замедляющими системами. // Материалы XIV международной зимней школы-семинара по СВЧ электронике и радиофизике. Саратов, 3–8 февраля 2009. Саратов: Издательский центр «РАТА», 2009. С. 79.

- теория возбуждения волноводов, позволяющая разделить нерезонансное поле пространственного заряда электронов и резонансно излучаемые электромагнитные волны [8, 9];
- исследования нелинейных явлений в электронных потоках, на базе которых им предложены различные методы как аналитического расчета, так и быстрого численного анализа нелинейных характеристик приборов [10];
- обнаруженный Солнцевым эффект нелинейного захвата электронов волной лег в основу разработок в мощных «прозрачных» ЛБВ для передатчиков СВЧ с высоким КПД.

### Памятный 1973 год

В 1973 году В.А. Солнцев защитил диссертацию на тему «Нелинейные явления и пространственный заряд в электронных приборах СВЧ типа О» на соискание ученой степени доктора физико-математических наук [11].

С конца 1960-х годов В.А. Солнцев начинает сотрудничать с чл.-корр. АН СССР Л.А. Вайнштейном, работавшем в Институте физических проблем АН СССР. В результате в 1973 году появилась книга [12], ставшая настольным учебным пособием не одного поколения радиофизиков в области СВЧ. В ней впервые электроника СВЧ представлена как отдельный раздел физики, охватывающий процессы излучения и группирования электронов, возбуждения ими электромагнитных полей и генерации колебаний и волн. Книга широко используется не только физиками, но и разработчиками приборов, аспирантами, и входит в число наиболее цитируемых книг. По мнению чл.-корр. РАН Д.И. Трубецкова и д.ф.-м.н. А.Е. Храмова, эта книга уникальна и останется на все времена, пока существует СВЧ электроника [13].

В 1973 году В.А. Солнцев перешел работать в МИЭМ, где был профессором кафедры «Электронные приборы», а в 1978–1998 годах заведующим кафедрой «Радиоэлектроника». Последние годы Виктор Анатольевич являлся профессором департамента электронной инженерии МИЭМ НИУ «ВШЭ».

С ноября 1973 года до конца жизни В.А. Солнцев руководил созданным им в МИЭМ постоянно действующим Всесоюзным (затем Всероссийским) семинаром «Проблемы СВЧ электроники», с 2013 года ставшим конференцией.

На этом факте остановлюсь подробнее, поскольку принимала непосредственное участие в организации семинара и была его первым Ученым секретарем. Идея создания семинара навеяна Саратовскими школами-семинарами. И неудивительно: благодаря Дмитрию Ивановичу Трубецкову и его команде под Саратовом в пансионате «Волжские Дали» была создана уникальная атмосфера насыщенной научно-просветительской работы на самом высоком уровне и боевого задора с настроением «двигаться только вперед и дальше». В значительной мере это объяснялось подбором лекторов. Невозможно забыть яркие лекции представителей нижегородской «гапоновской школы», четко структурированные с обширными аналитическими обзорами лекции самих саратовцев, а с чем можно сравнить образность выступлений Дмитрия Михайловича Петрова из «Титана» (теперь «Торий») и многих других. Не стану перечислять всех лучших, дабы никого не обидеть или пропустить, сегодня другая тема. За почти полвека Саратовских школ научных звезд было не счесть. Среди этих людей, определявших электронную эпоху, неизменными лидерами тех давних школ

были Лев Альбертович Вайнштейн и Виктор Анатольевич Солнцев. Кстати, толчком к написанию книги Л.А. Вайнштейн, В.А. Солнцев «Лекции по СВЧ электронике» были их лекции на первых Саратовских школах, отсюда возникло и название книги.

Итак, у В.А. Солнцева появилось твердое намерение создать в Москве ежегодный семинар с подробным обсуждением одного–двух сообщений. Вскоре к нам потянулись аспиранты, диссертанты, начинающие и маститые ученые из вузов, академических институтов, предприятий промышленности. Неизменно благожелательная обстановка не исключала бурных обсуждений и жарких дискуссий, при этом для каждого находилась точная «солнцевская оценка», и она дорогого стоила. Однако он без колебаний мог сказать и «НЕТ», и никакие авторитеты не могли изменить его решения. На заседаниях семинара, число которых давно перевалило за двести, с самого начала были и приглашенные доклады, в основном, из промышленности. Об одном рассказу подробнее.

Предыстория кратко такова: находясь в 1976–1977 годах на научной стажировке в Финляндии, я оказалась на проходившей в Хельсинки Международной Радио конференции URSI, где докладчик из США рассказал, что, мол, в подвалах Кремля советским ученым Тагером создан новый СВЧ прибор – лавинно-пролетный диод. Там он назван был по-другому, но я поняла, о чем речь, так как слышала раньше от Виктора Анатольевича об этой работе А.С. Тагера, с которым он поддерживал связь со времен написания университетского диплома. По приезде в Москву пересказываю эту историю и предлагаю пригласить на наш семинар Александра Семеновича Тагера с сотрудниками, раз уже всему миру известно о его изобретении и только у нас это до сих пор остается в строжайшем секрете. Виктор Анатольевич не просто живо откликнулся на призыв, но, как часто бывало и раньше, сумел и эту идею довести до блеска и логического совершенства. Итак, приглашаем, заслуживаем доклад при большом скоплении ученого народа, а в качестве решения по докладу Солнцевым предлагается выдвинуть авторов на ЛЕНИНСКУЮ ПРЕМИЮ. Оказавшийся на семинаре почти случайно Дмитрий Михайлович Петров поддержал выдвижение от имени НТОРЭС имени А.С. Попова и Научного Совета по физической электронике АН СССР, где он был председателем. В результате А.С. Тагер с сотрудниками получили в 1978 году самую престижную в стране Ленинскую премию.

### 1970–1980-е годы

Годы-то какие! Уровень образования высокий, а массовая утечка мозгов еще не наступила. Самое время создавать научные школы, что Солнцевым и было сделано в обстановке, когда наука и промышленность вполне отвечали запросам друг друга.

Таким образом, после перехода в МИЭМ сложилась научная школа В.А. Солнцева, где под его руководством получили дальнейшее развитие работы по теоретической и прикладной электронике СВЧ [14–24], применяемые к широкому классу этих приборов: ЛБВ, клистроном, лучевым приборам М-типа, мазерам на циклотронном резонансе и другим. Они стали основой многочисленных программных комплексов для проектирования электронных приборов СВЧ на ЭВМ и обязательным элементом разработок современных приборов как в России (из крупных это предприятия «Исток», «Торий», «Алмаз»), так и в других странах (Китай, Израиль, США).



Советов Н.М., Солнцев В.А., Петров Д.М. на II зимней школе-семинаре инженеров.  
Саратов, Волжские Дали, январь-февраль 1972



На лыжной прогулке в перерыве между лекциями.  
Кравченко Н.П., Солнцев В.А., Канавец В.И., Вайнштейн Л.А.  
II зимняя школа-семинар инженеров. Саратов, Волжские Дали, январь-февраль 1972



Кафедра «Электронные приборы». МИЭМ, 1974

Слева направо: доц. Свиридов В.Т., зав.кафедрой проф.Пчельников Ю.Н., доц.Калинин Б.В., д.ф.-м.н. Солнцев, доц. Поляков А.М., доц.Спиридонов О.П. Сидит к.т.н. Назарова М.В.



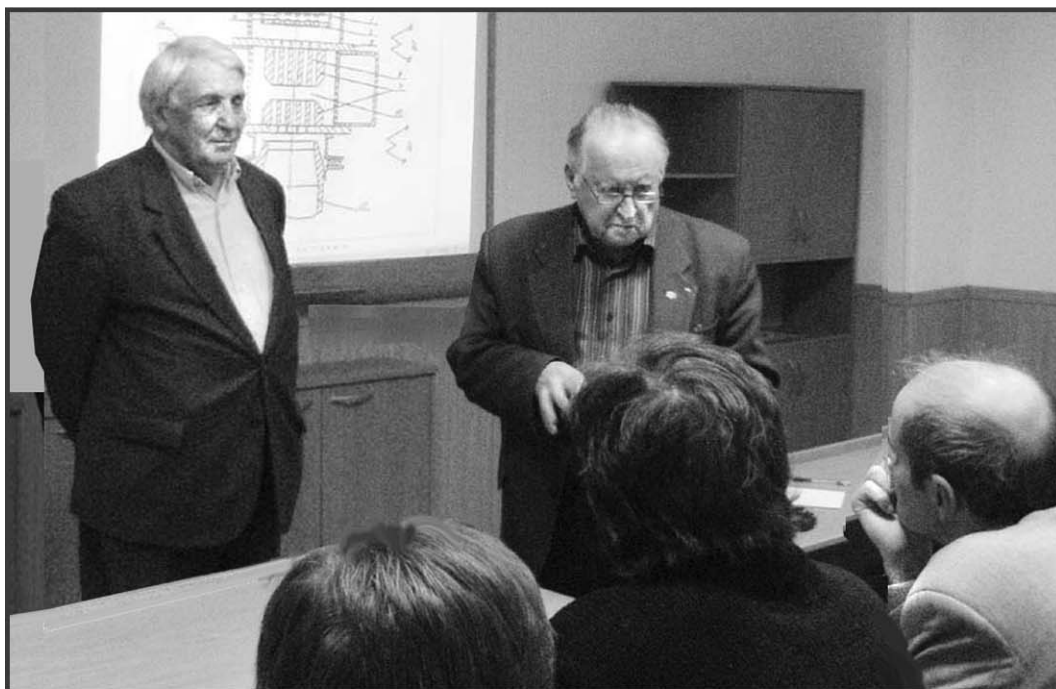
Кафедра «Электронные приборы». МИЭМ, 1974-75

Доц. Калинин Б.В., д.т.н. проф. Лошаков Л.Н., секретарь Лебедева Н.И., д.ф.-м.н. Солнцев В.А., выступает зав. кафедрой д.т.н. проф. Пчельников Ю.Н.



**Семинар «Проблемы электроники», заседание №175. МИЭМ, 28 февраля 2008**

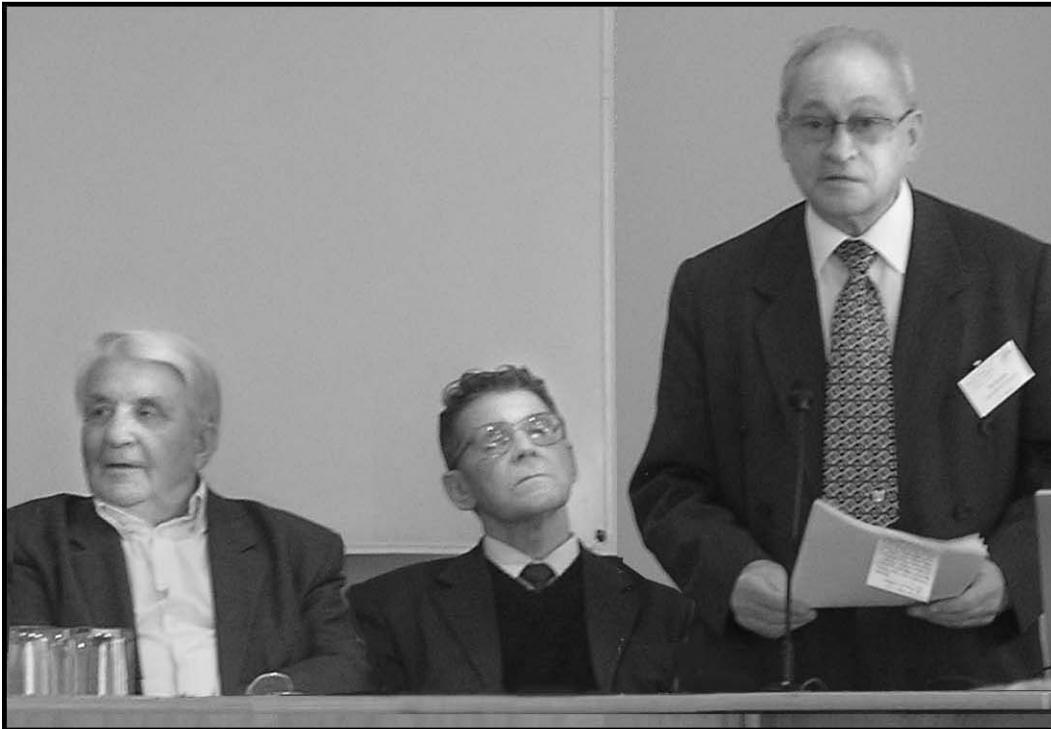
Слева направо в первом ряду: Солнцев В.А. и Соловьев А.Н.;  
во втором ряду: Евдокимов Ю.В., Галдецкий А.В., Белявский Б.А.;  
в третьем ряду: аспирант Стахмич Н.В., Уваров И.А., Мухин С.В., Петров В.С.



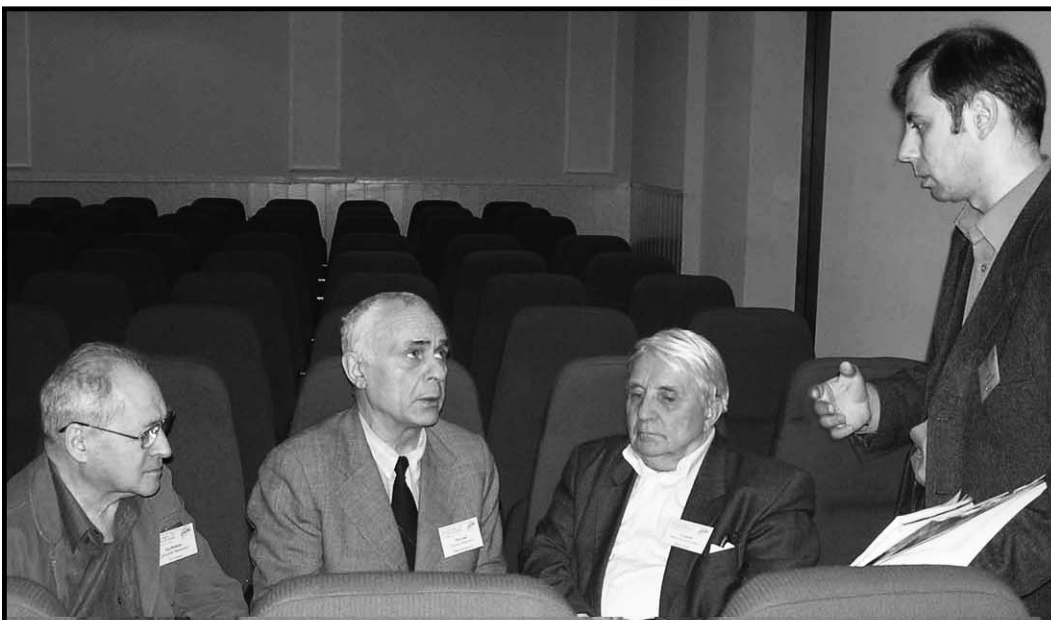
**Семинар «Проблемы электроники», заседание №175. МИЭМ, 28 февраля 2008**

Стоят Солнцев В.А. и Петров Д.М.





**Солнцев В.А., Сеницын Н.И., Трубецков Д.И.**  
XIV зимняя школа-семинар по электронике СВЧ и радиофизике  
Саратов, пансионат «Сокол», 3–8 февраля 2009



**Трубецков Д.И., Петелин М.И., Солнцев В.А., Рыскин Н.М.**  
XIV зимняя школа-семинар по электронике СВЧ и радиофизике  
Саратов, пансионат «Сокол», 3–8 февраля 2009



**В.Солнцев, П.Уфимцев, Ю.Пчельников. США, декабрь 2010**



**Галдецкий А.В., Солнцев В.А., Пчельников Ю.Н., Мозговой Ю.Д.  
Конференция IVES. Париж 23 мая 2013г.**



III Всероссийская научно-техническая конференция  
 «Проблемы СВЧ электроники» им. В.А. Солнцева. МИЭМ НИУ ВШЭ, 8 ноября 2017  
 Доклад заместителя председателя, к.т.н. доц. Кравченко Н.П.  
 «Основные этапы и направления научной деятельности В.А. Солнцева»



Члены Программного комитета конференции.  
 1-й ряд: к.ф.-м.н. Галдейский А.В., АО НПП «Исток», Фрязино; проф. Петелин М.И., ИПФ РАН;  
 2-й ряд: проф. Григорьев А.Д., СПбГЭТУ «ЛЭТИ»; чл.-корр. РАН, проф. Трубецков Д.И., СГУ

Фотографии из архива автора. – Прим. ред.

Эти работы продолжились в рамках Всесоюзной комплексной целевой программы «Функционально-ориентированная электроника СВЧ», объединившей 10 вузов, ряд институтов АН и предприятий промышленности. В итоге получены важные результаты по усилению и генерации сложных сигналов, в частности, хаотических сигналов в электронных приборах СВЧ.

Солнцевым дано обобщение рядов Вольтерра на аналитический сигнал, в результате разработаны новые типы корректоров частотных и нелинейных характеристик электронных приборов. На эти исследования, помимо прочего, навел Д.Е. Вакман, красочно поведавший об аналитическом сигнале на одной из Саратовских школ накануне своего отъезда из страны.

### 1990-е годы

В.А. Солнцев почти всегда параллельно вел несколько направлений, не оставляя без внимания проблемы, связанные, к примеру, с теорией возбуждения волноводов [25]. Из других работ этого периода отметим исследование излучения релятивистских электронов, взаимодействующих с волнами «шепчущей галереи», где показана возможность использования этого эффекта для получения миллиметровых и субмиллиметровых волн [26].

В последнее десятилетие XX века научные интересы В.А. Солнцева были обращены к исследованиям в области вакуумной микроэлектроники. Это направление основано на использовании матриц автоэмиссионных катодов (МАЭК), состоящих из эмиттирующих острий микронного размера, которые создаются с помощью технологий, присущих полупроводниковым приборам. Им была разработана теория ряда новых эффектов, доказана возможность существенного увеличения эффективности взаимодействия электронного потока с электромагнитной волной при автомодуляции эмиссии электронов полем обратной волны. Более того, на этой основе им предложен новый прибор – КАРСИНОТРОД с КПД до 80% при электронной перестройке частоты до октавы.

### 2000-е годы

Не оставляя без внимания дальнейшую разработку теоретических вопросов СВЧ электроники [27]<sup>2</sup>, В.А. Солнцев включает в новое направление – изучение свойств псевдопериодических электродинамических систем, позволяющих ставить новые цели и решать принципиально новые задачи в области электроники СВЧ, антенн, исследований слоистых метасред с необычными законами отражения и преломления. В.А. Солнцев вносит и тут значительную лепту. Им показана возможность существования большого класса псевдопериодических волноводов и сред с так называемым согласованным изменением шага расположения и свойств входящих в них

---

<sup>2</sup>Статья написана на основе лекций по материалам работ [4, 8, 19, 28–29], обобщенных в лекциях на Саратовских школах-семинарах (см., например, Солнцев В.А. Теория возбуждения волноводов // Материалы XIV международной зимней школы-семинара по СВЧ электронике и радиофизике. Саратов, 3–8 февраля 2009. Саратов: Издательский центр «РАТА», 2009. С. 89.)

элементов, а именно – диафрагм, штырей, различных параметров слоев среды и т.д., что позволило получать пространственно-частотную селекцию волн, в том числе подавление или выделение обратных волн [28]. Исследования характеристик псевдопериодических замедляющих систем показали, что по полосе усиливаемых частот и мощности они превышали известные отечественные и зарубежные разработки. К слову, за работы в этой области, а также за лучшую публикацию в журналах Российской АН В.А. Солнцев с соавторами был удостоен премии Международной академической издательской компании «Наука/Интерпериодика» [29].

Из других работ этого периода отметим теоретические исследования, к которым В.А. Солнцев периодически возвращался, связанные с электронно-волновым взаимодействием внутри и за пределами полосы пропускания замедляющих систем [30].

### **Публикационная активность**

Под редакцией В.А. Солнцева вышел перевод на русский язык одной из первых книг по электронике СВЧ – В. Клеен, К. Пёшль «Введение в электронику СВЧ» (М.: Сов. радио, 1963).

Он являлся научным консультантом и автором нескольких статей в энциклопедическом словаре «Электроника» (М.: Сов. Энциклопедия, 1991) и в пятитомной «Физической энциклопедии» (М.: Большая Российская энциклопедия, 1988–1998). Упоминаю об этом, бегло перечисляя энциклопедическую работу. На самом деле это отнюдь не легкий, а порой мучительный труд дать определение тому, что прежде определялось кому как вздумается, затем сформулировать лаконичные пояснения к термину, а в завершение все загнать в прокрустово ложе жестких требований редакции по числу символов. Он говорил, что ему легче было придумать новый прибор.

На протяжении многих лет В.А. Солнцев состоял членом редколлегий журналов «Радиотехника и электроника» и «Зарубежная электроника», являлся членом Научных Советов РАН по проблемам «Физическая электроника» и «Релятивистская сильноточная электроника и пучки заряженных частиц», диссертационных Советов МИЭМ, ИРЭ РАН, НПП «Исток» и др.

Виктор Анатольевич Солнцев – автор более 250 научных трудов и изобретений. Он неоднократно выступал с приглашенными докладами, носившими зачастую пионерский характер. Последняя Международная конференция с его участием – IVEC'2015 в Париже. В том же году вышла последняя статья Виктора Анатольевича под его единоличным авторством в американском журнале, оказавшаяся итоговой и одновременно программной для нас [31].

Спасибо Виктору Анатольевичу за научный вклад и консолидацию научного сообщества России в области радиоп физики и электроники СВЧ.

*Статья подготовлена в ходе проведения работы (№ 17-05-0009) в рамках Программы «Научный фонд Национального исследовательского университета “Высшая школа экономики”» в 2017–2018 годах и в рамках государственной поддержки ведущих университетов Российской Федерации «5-100».*

## Библиографический список

1. Солнцев В.А. Теория взаимодействия двух электронных пучков, движущихся в периодическом электростатическом поле // Изв. вузов. Радиофизика. 1958. Т. 1, № 5–6. С. 127–138.
2. Солнцев В.А., Тагер А.С. Электронные волны и их взаимодействие с полем волноведущих систем. Радиотехника и электроника (РЭ) // 1959. Т. 4, № 10. С. 1652–1659.
3. Солнцев В.А., Тагер А.С. Возбуждение волноведущих систем электронным потоком с заданной модуляцией // РЭ. 1960. Т. 5, № 7. С. 1100–1111.
4. Солнцев В.А. Распространение волн в периодических электронных потоках и их взаимодействие с электромагнитным полем волноведущих систем. Диссертация на соискание ученой степени кандидата физ.-мат. наук. Горьковский гос. университет им. Лобачевского, 1960. 190 С.
5. Овчаров В.Т., Солнцев В.А. Применение упрощенных нелинейных уравнений лампы бегущей волны для расчета ламп типа О // РЭ. 1962. Т. 7, № 12. С. 2013–2023.
6. Солнцев В.А., Мchedлидзе Г.Г. Волновой метод решения нелинейных уравнений ЛБВ // РЭ. 1972. Т. 17, № 10. С. 2227–2230.
7. Трубецков Д.И. Волновой метод Овчарова–Солнцева в теории нетрадиционных СВЧ приборов. Сб. трудов III Всероссийской конференции «Проблемы СВЧ электроники» им.В.А. Солнцева, 2017, Москва, С. 5–6.
8. Солнцев В.А. Возбуждение однородных и периодических волноводов сторонними токами // ЖТФ. 1968. Т. 38, № 1. С. 100–108.
9. Солнцев В.А. О силах, действующих на электронный пучок в ЛБВ // ЖТФ. 1968. Т. 38, № 1. С. 109–117.
10. Солнцев В.А., Малышенко В.И. Нелинейный анализ многочастотных режимов работы ЛБВ при близких частотах. Электронная техника, сер. 1, Электроника СВЧ, 1972, № 10, С. 16–26.
11. Солнцев В.А. Нелинейные явления и пространственный заряд в электронных приборах типа О. Диссертация на соискание ученой степени д.ф.-м.н. ЦНИР-ТИ, М., 1973, 390 С.
12. Вайнштейн Л.А., Солнцев В.А. Лекции по сверхвысокочастотной электронике. М.: Сов. Радио, 1973.
13. Трубецков Д.И., Храмов А.Е. Лекции по СВЧ электронике для физиков. М.: Физматлит, 2003, Т. 1.
14. Солнцев В.А., Кравченко Н.П. Волновая линейная теория ЛБВ вблизи границы полосы прозрачности // РЭ. 1978. Т. 23, № 5.
15. Солнцев В.А., Осин А.В. Метод быстрого анализа приборов типа О с дискретным взаимодействием // РЭ. 1979. Т. 24, № 7.
16. Солнцев В.А., Ромашин Н.Л. Об учете собственного магнитного поля пучка в нелинейной теории ЛБВ // Изв. вузов. Радиофизика. 1980. Т. 23, № 2.
17. Солнцев В.А., Кравченко Н.П. Нахождение комбинационных сопротивлений

- связи периодических замедляющих систем с использованием экспериментальных данных // РЭ. 1980. Т. 25, № 3.
18. *Кравченко Н.П., Малыхин А.В., Петров Д.М., Солнцев В.А.* Теоретическое исследование предельных режимов приборов типа О. Труды 10-й Европейской конференции по микроволнам, 1980, Варшава.
  19. *Ромашин Н.Л., Солнцев В.А.* К построению разных форм теории возбуждения периодических волноводов // РЭ. 1983. т. 28, № 9.
  20. *Кравченко Н.П., Ромашин Н.Л., Солнцев В.А.* Обобщенная теория возбуждения периодических структур, получение и классификация частных теорий, пространственный заряд. Лекции по электронике СВЧ (5-я зимняя школа-семинар инженеров), кн.1, Саратовский гос. университет, 1983.
  21. *Ромашин Н.Л., Солнцев В.А.* Законы подобия релятивистских электронно-волновых систем О типа // РЭ. 1986. Т. 31, № 2.
  22. *Кравченко Н.П., Ромашин Н.Л., Солнцев В.А.* Исследование условий самовозбуждения электронно-волновых систем при взаимодействии электронов с двумя синхронными волнами // РЭ. 1987. Т. 32, № 6.
  23. *Мухин С.В., Солнцев В.А.* Описание взаимодействия в ЛБВ с цепочкой связанных резонаторов на основе волноводно-резонаторной модели// РЭ. 1988. Т. 33, № 6.
  24. *Romashin N.L., Solntsev V.A.* Space Charge Fields in Devices with Electron Beam of High Density. 2<sup>nd</sup> International Conference on Vacuum Microelectronics, 24–26 July, 1989, Bath, UK.
  25. *Romashin N.L., Solntsev V.A.* Contribution to the Problem of Constructing Different Forms of the Theory of Excitation of Periodic Waveguides. 4<sup>th</sup> International School for Space Simulation (ISSS-4), 2–6 April, 1991, Nara 630, Japan.
  26. *Вайнштейн Л.А., Клеев А.И., Солнцев В.А.* Спонтанное и индуцированное излучение электронов, взаимодействующих с волной шепчущей галереи// РЭ. 1991. Т. 36, № 2.
  27. *Солнцев В.А.* Теория возбуждения волноводов // Изв. вузов. ПНД. 2009. Т. 17, № 3. С. 55–89.
  28. *Колтунов Р.П., Солнцев В.А.* Анализ уравнений дискретного электронно-волнового взаимодействия и группировки электронных потоков в периодических и псевдопериодических замедляющих системах // РЭ. 2008. Т. 53, № 6. С. 738–751.
  29. *Мухин С.В., Никонов Д.Ю., Солнцев В.А.* Исследование полосовых свойств локального импеданса связи замедляющих систем // РЭ. 2008. Т.5 3, № 10. С. 1324–1332.
  30. *Солнцев В.А., Назарова М.В., Колтунов Р.П., Шабанов Д.С.* Исследование дискретного электронно-волнового взаимодействия в полосах пропускания и запираания замедляющих систем // Изв. вузов. ПНД. 2012. Т. 20, № 3. С. 118–131.
  31. *Solntsev Victor A.* Beam-Wave Interaction in the Passband and Stopbands of Periodic Slow-Wave Systems // IEEE Transactions on Plasma Science. Vol. 43, No 7, July 2015, Pp. 2114–2122.

## References

1. Solntsev V.A. Theory of the interaction of two electron beams moving in a periodic electrostatic field. *Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedenii. Radiofizika*, 1958, vol. 1, iss. 5–6, pp.127–138 (in Russian).
2. Solntsev V.A., Tager A.S. Electronic waves and their interaction with the field of waveguide systems. *Radiotekhnika i Elektronika*, 1959, vol. 4, iss. 10, pp. 1652–1659 (in Russian).
3. Solntsev V.A., Tager A.S. Excitation of waveguide systems by an electron beam with a given modulation. *Radiotekhnika i Elektronika*, 1960, vol. 5, iss. 7, pp. 1100–1111 (in Russian).
4. Solntsev V.A. Propagation of Waves in Periodic Electron Flows and Their Interaction with the Electromagnetic Field of Waveguide Systems. Thesis for the degree of Candidate of Sciences. Lobachevsky State University of Gorky, 1960. 190 p. (in Russian).
5. Ovcharov V.T., Solntsev V.A. Application of the simplified nonlinear equations of a traveling wave tube for calculating lamps of O-type. *Radiotekhnika i Elektronika*, 1962, vol. 7, iss. 12, pp. 2013–2023 (in Russian).
6. Mchedlidze G.G., Solntsev V.A. Wave method for solving nonlinear TWT equations. *Radiotekhnika i Elektronika*, 1972, vol. 17, iss. 10, pp. 2227–2230 (in Russian).
7. Trubetskov D.I. Ovcharov–Solntsev method in the theory of non-traditional microwave devices. Proceedings of the V.A. Solntsev All-Russian Conference «Problems of Microwave Electronics», 2017, Moscow, pp. 5–6.
8. Solntsev V.A. Excitation of homogeneous and periodic waveguides by external currents. *Zhurnal Tekhnicheskoi Fiziki*, 1968, vol. 38, iss. 1, pp. 100–108 (in Russian).
9. Solntsev V.A. On the forces acting on an electron beam in a TWT. *Zhurnal Tekhnicheskoi Fiziki*, 1968, vol. 38, iss. 1, pp. 109–117 (in Russian).
10. Malysenko V.I., Solntsev V.A. Nonlinear analysis of multifrequency TWT operation modes at similar frequencies. *Elektronnaya Tekhnika, ser. 1, Elektronika SVCh*, 1972, iss. 10, pp. 16–26 (in Russian).
11. Solntsev V.A. Nonlinear phenomena and space charge in electronic devices of O-type. Thesis for the degree of Doctor of Sciences. TsNIRTI, Moscow, 1973, 390 p. (in Russian).
12. Vainshtein L.A., Solntsev V.A. Lectures on Microwave Electronics. Sov. Radio, Moscow, 1973 (in Russian).
13. Trubetskov D.I., Khramov A.E. Lectures on Microwave Electronics for Physicists. Vol.1, Fizmatlit, Moscow, 2003 (in Russian).
14. Solntsev V.A., Kravchenko N.P. Wave linear theory of TWT near the boundary of the passband. *Radiotekhnika i Elektronika*, 1978, vol. 23, iss. 5.
15. Solntsev V.A., Osin A.V. Method of fast analysis of devices of O-type with discrete interaction. *Radiotekhnika i Elektronika*, 1979, vol. 24, iss. 7 (in Russian).
16. Solntsev V.A., Romashin N.L. On the account of the intrinsic magnetic field of



- the beam in the nonlinear theory of TWT. *Radiophysics and Quantum Electronics*, 1980, vol. 23, iss. 2 (in Russian).
17. Kravchenko N.P., Solntsev V.A. Determination of combinational coupling impedances of periodic slow-wave structures using experimental data. *Radiotekhnika i Elektronika*, 1980, vol. 25, iss. 3, pp. 601–605 (in Russian).
  18. Kravchenko N.P., Malykhin A.V., Petrov D.M., Solntsev V.A. Theoretical study of the limiting modes of devices of the O-type. Proceedings of the 10th European Conference on Microwaves, 1980, Warsaw.
  19. Solntsev V.A., Romashin N.L. About the construction of various forms of the theory of excitation of periodic waveguides. *Radiotekhnika i Elektronika*, 1983, vol. 28, iss. 9 (in Russian).
  20. Solntsev V.A., Romashin N.L., Kravchenko N.P. Generalized theory of excitation of periodic structures, obtaining and classification of particular theories. Spatial charge. Lectures on Microwave Electronics and Radiophysics, 5th Winter Engineering Workshop, book 1, Saratov State University, Saratov, 1983 (in Russian).
  21. Romashin N.L., Solntsev V.A. The laws of similarity of relativistic electron-wave O-systems. *Radiotekhnika i Elektronika*, 1986, vol. 31, iss. 2 (in Russian).
  22. Kravchenko N.P., Romashin N.L., Solntsev V.A. Investigation of the conditions for self-excitation of electron-wave systems during the interaction of electrons with two synchronous waves. *Radiotekhnika i Elektronika*, 1987, vol. 32, iss. 6 (in Russian).
  23. Mukhin S.V., Solntsev V.A. Description of the interaction in the TWT with a chain of coupled resonators based on the waveguide-resonator model. *Radiotekhnika i Elektronika*, 1988, vol. 33, iss. 6 (in Russian).
  24. Romashin N.L., Solntsev V.A. Space Charge Fields in Devices with Electron Beam of High Density. 2<sup>nd</sup> International Conference on Vacuum Microelectronics, 24–26 July, 1989, Bath, UK.
  25. Romashin N.L., Solntsev V.A. Contribution to the Problem of Constructing Different Forms of the Theory of Excitation of Periodic Waveguides. 4<sup>th</sup> International School for Space Simulation (ISSS-4), 2–6 April, 1991, Nara 630, Japan.
  26. Vainshtein L.A., Kleev A.I., Solntsev V.A. Spontaneous and induced emission of electrons interacting with the whispering gallery wave. *Radiotekhnika i Elektronika*, 1991, vol. 36, iss. 2, pp. 377–386 (in Russian).
  27. Solntsev V.A. Theory of waveguides excitation. *Izvestiya VUZ, Applied Nonlinear Dynamics*, 2009, vol. 17, iss. 3, pp. 55–89 (in Russian).
  28. Solntsev V.A., Koltunov R.P. Analysis of the equations of discrete electron-wave interaction and electron-beam bunching in periodic and pseudoperiodic slow-wave structures. *Journal of Communications Technology and Electronics*, 2008, vol. 53, pp. 700–713.
  29. Mukhin S.V., Nikonov D.Y., Solntsev V.A. Investigation of the bandpass properties of the local impedance of slow-wave structures. *Journal of Communications Technology and Electronics*, 2008, vol. 53, pp. 1250–1258.
  30. Nazarova M.V., Solntsev V.A., Koltunov R.P., Shabanov D.S. Study of discrete

- electronwave interaction in the passband and stopband of slowwave systems. *Izvestiya VUZ, Applied Nonlinear Dynamics*, 2012, vol. 20, iss. 3, pp. 118–131 (in Russian).
31. Solntsev Victor A. Beam-wave interaction in the passband and stopbands of periodic slow-wave systems. *IEEE Transactions on Plasma Science*, July 2015, vol. 43, No. 7, pp. 2114–2122.



*Кравченко Н.П.* родилась в поселке Анадырь Чукотского национального округа, школу окончила в Москве. Выпускница физического факультета Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова (1968). С 1968 по 1969 год по распределению работала инженером в ИРЭ АН СССР в лаборатории СВЧ электроники (руководитель д.т.н. профессор З.С. Чернов), где выполняла дипломную работу. С ноября 1969 года начала работать в МИ-ЭМ и поступила в аспирантуру. Защитила кандидатскую диссертацию (1974) по теме «Исследование азимутально неоднородных спиральных замедляющих систем» под руководством д.т.н. профессора Ю.Н. Пчельникова. Имеет звание доцента (1991), доцент департамента электронной инженерии НИУ «ВШЭ» (с 2014). Опубликовала более 80 научных и учебно-методических работ, имеет авторские свидетельства на изобретения и свидетельства на государственную регистрацию программ для ЭВМ. За внедренные изобретения в промышленности имеет знак «Изобретатель СССР». В настоящее время является заместителем председателя Оргкомитета Всероссийской научно-технической конференции «Проблемы СВЧ электроники» имени В.А. Солнцева.

Россия, 123458 Москва, Таллинская, 34  
Национальный исследовательский университет  
«Высшая школа экономики»  
E-mail: natkrav@inbox.ru



**XVII МЕЖДУНАРОДНАЯ  
ЗИМНЯЯ ШКОЛА-СЕМИНАР  
ПО РАДИОФИЗИКЕ И ЭЛЕКТРОНИКЕ СВЧ**

Россия, Саратов, пансионат «Волжские Дали»,  
5–10 февраля 2018

**Организаторы**

- Саратовский государственный университет имени Н.Г. Чернышевского
- Саратовский филиал Института радиотехники и электроники имени В.А. Котельникова РАН

**При финансовой поддержке**

- АО «НПП «Торий»»
- Саратовское отделение IEEE

**Организационный комитет**

*Председатель:* Д.И. Трубецков, чл.-корр. РАН, проф., д.ф.-м.н.

*Зам. председателя:* Ю.И. Левин, проф., к.ф.-м.н., декан факультета нелинейных процессов; Н.М. Рыскин, проф., д.ф.-м.н.

*Ученый секретарь:* Е.Н. Егоров, доцент, к.ф.-м.н.

*Члены оргкомитета:* проф. Ю.П. Шараевский, проф. А.А. Короновский, доцент И.С. Ремпен, доцент С.А. Куркин, ассистент Г.М. Вдовина, ассистент А.В. Титов

**ПРОГРАММА ШКОЛЫ-СЕМИНАРА**

**5 февраля 2018, понедельник**

**Регистрация участников**

**Открытие школы**

**Пленарное заседание: Общие вопросы теории и разработки классических вакуумных приборов СВЧ**

*Кравченко Н.П.* (НИУ ВШЭ, Москва). О научном творчестве Виктора Анатольевича Солнцева

*Бушуев Н.А.* (АО «НПП «Алмаз»», Саратов). Проблемы разработки широкополосных ЛБВ миллиметрового и субмиллиметрового диапазонов

6 февраля 2018, вторник

**Пленарное заседание: Теория и разработка вакуумных приборов СВЧ**

*Соминский Г.Г., Тумарева Т.А., Тарадаев Е.П., Сезонов В.Е.* (СПбГПУ, Санкт-Петербург). Разработка и исследование в СПбПУ полевых эмиттеров для коротковолновых СВЧ приборов. Последние достижения

*Григорьев А.Д.* (СПбГЭТУ «ЛЭТИ», Санкт-Петербург). Проблемы проектирования усилительных клистронов миллиметрового диапазона длин волн

*Царев В.А., Мучкаев В.Ю., Манжосин М.А.* (СГТУ, Саратов). Математическое моделирование низковольтного многолучевого клистрона миллиметрового диапазона  
*Байков А.Ю., Байкова О.А.* (НИУ МФЮА, Москва). О возможностях достижения предельных значений КПД в клистродах и в резонаторах

**Устные доклады. Перспективы продвижения микроволновых приборов и устройств в суб-ТГц и ТГц диапазоны. Гиротроны, гиро-усилители**

*Мясин Е.А., Евдокимов В.В., Ильин А.Ю.* Способы уменьшения пускового тока в субтерагерцовых оротронах

*Мясин Е.А., Евдокимов В.В., Ильин А.Ю.* Оротрон субмиллиметрового диапазона с двумя электронными потоками

*Мясин Е.А., Соловьёв А.Н.* Анализ электродинамических характеристик открытых резонаторов с фокусирующими многофокусными сферическими зеркалами и тремя типами периодических структур на плоском зеркале при длине волны 1 мм

*Мельникова М.М.* Моделирование влияния отраженного сигнала на стабилизацию и перестройку частоты гиротрона

*Лукиа О.И., Трофимов П.А.* Моделирование неоднородных электронных потоков в электронно-оптической системе гиротрона

*Исаева О.Б., Розенталь Р.М., Гинзбург Н.С., Зотова И.В., Сергеев А.С., Рожнев А.Г.* Динамика распределенной модели гироклистрона с запаздывающей обратной связью

*Розенталь Р.М., Гинзбург Н.С., Зотова И.В., Сергеев А.С.* Хаотическая генерация со «сплошным» спектром на основе двух связанных винтовых гиро-ЛБВ

*Абубакиров Э.Б., Денисенко А.Н., Конюшков А.П., Леонтьев А.Н., Ошарин И.В., Розенталь Р.М., Тараканов В.П., Федотов А.Э.* Разработка сильноточного гиротрона диапазона 30 ГГц

*Денисов Г.Г., Глявин М.Ю., Седов А.С., Фокин А.П., Цветков А.И., Солуянова Е.А., Соколов Е.В., Куфтин А.Н., Морозкин М.М., Малыгин В.И., Тай Е.М., Морозкин М.В., Проявин М.Д.* Экспериментальное исследование 250 ГГц/300 кВт гиротрона для нагрева плазмы в перспективных установках УТС (DEMO)

*Глявин М.Ю., Запелов В.Е., Зувев А.С., Зотова И.В., Мануилов В.Н., Малкин А.М., Седов А.С., Сергеев А.С., Фокин А.П.* Теоретическое и экспериментальное исследование многолучевых гиротронов

*Соболев Д.И., Денисов Г.Г., Еремеев А.Г., Холопцев В.В., Цветков А.И.* Волноводный преобразователь с возможностью переключения выходной моды между TE<sub>11</sub> и TE<sub>01</sub> для гиротронного комплекса 45 ГГц/20 кВт

*Рожнев А.Г., Мельникова М.М., Рыскин Н.М.* Моделирование колебаний в гиротроне со связанными резонаторами и преобразованием мод, работающем на частоте 390 ГГц

**Пленарное заседание: Из истории науки**

*Кузнецов С.П.* (СФ ИРЭ РАН) Сани Чаплыгина

7 февраля 2018, среда

**Пленарное заседание: Теория СВЧ усилителей и генераторов. Из истории науки**

*Трубецков Д.И., Вдовина Г.М.* (НИЯУ МИФИ; СГУ, Саратов). Кто же всё-таки изобрёл и создал ЛБВ (Гамов, Линденблад, Компфнер, Пирс)?

*Елизаров А.А.* (НИУ ВШЭ, Москва). Современное исследование микроволновых устройств на основе периодических замедляющих систем и метаматериалов

*Фунтов А.А.* (СГУ, Саратов). Лампы на поглощении и классические приборы с использованием метаматериалов

*Титов А.В.* (СГУ, Саратов). Двухлучевые лампы (усиление в области неустойчивости, интерференционное усиление, периодическое взаимодействие, оротрон, электронно-волновая лампа ЛБВЭВ)

**Пленарное заседание: Теория СВЧ усилителей и генераторов. Из истории науки**

*Гинзбург Н.С.* (ИПФ РАН, Н. Новгород). Солитоны в электронных системах

*Комаров Д.А.* (Торий, Москва). Боде, КПД, ... и немного о клистроне

*Морев С.П.* (Торий, Москва). Электронно-оптические системы с автоэмиссионными катодами: токи, Лиувиль, ... и далее со всеми остановками

**Стендовые доклады**

8 февраля 2018, четверг

**Пленарное заседание: Гиротроны, giro-усилители**

*Запелалов В.Е.* (ИПФ РАН, Н. Новгород). Неканонические гиротроны

*Новожилова Ю.В.* (ИПФ РАН, Н. Новгород). Исследование режимов работы гиротрона под воздействием внешнего квазимонохроматического сигнала или отражения от удаленной нагрузки

*Tarakanov V.P.* (МФТИ, Москва). KARAT simulations of power microwave sources, EM-propagation in bio tissues, etc.

**Пленарное заседание: Из истории науки**

*Петелин М.И.* (ИПФ РАН, Н. Новгород). Саратов – родина сверхизлучения

**Устные доклады. Теория и разработка приборов СВЧ**

*Григорьев А.Д.* Волноводный метод измерения параметров диэлектриков в микроволновом диапазоне

*Давидович М.В., Яфаров Р.К.* Размерные эффекты при туннелировании через пленки из углеродных нанокластеров

*Давидович М.В., Яфаров Р.К.* Шахматные структуры на основе оксида кремния на кремнии и алмазо-графитовых кластеров на графите и Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub> для автоэмиссионных катодов

*Давидович М.В., Бушуев Н.А., Яфаров Р.К.* Автоэмиссионная структура для формирования ленточного пучка с двусторонней поверхностью эмиссии и поворотом электронов

*Шестеркин В.И.* Автоэмиссионные катоды для электровакуумных приборов: миниатюрные или крупноразмерные?

*Ефремова М.В., Морев С.П.* Приближенное аналитическое решение задачи о структуре магнитного поля в совмещенной МПФС ЛБВО миллиметрового диапазона на ЦСР

*Саблин В.М., Дармаев А.Н., Комаров Д.А., Морев С.П.* Многолучевая электронно-оптическая система с криволинейной осью, и экранированной от магнитного поля реверсной фокусирующей системы электронной пушкой  
*Муравьев Э.К., Дармаев А.Н., Морев С.П.* Приближенное аналитическое решение задачи о структуре магнитного поля в концевых ячейках реверсной магнитной фокусирующей системы с магнитопроводящими экранами  
*Корепин Г.Ф., Вашин С.А., Климова Н.Н.* О запаздывании зажигания разряда миниатюрного электроразрядного насоса  
*Герасимов М.Ю., Дмитриев А.С., Рыжов А.И., Уваров А.В.* Персональный дозиметр электромагнитного излучения  
*Дмитриев А.С., Ефремова Е.В., Ицков В.В., Петросян М.М.* Радиосвет: концепция и научно технические решения  
*Макаркин С.А., Стародубов А.В., Калинин А.Ю.* Анализ выходных СВЧ-сигналов при помощи оценки перестановочной энтропии

#### **Устные доклады. Теория и разработка приборов СВЧ**

*Галдецкий А.В., Голованов Н.А.* Методика проектирования и настройки двухзвонного 3-х ствольного резонатора клистрона с фильтровой системой  
*Востров М.С., Макаров А.П., Кулиш К.И.* Малогабаритные многолучевые клистроны Ku и Ka диапазона с выходной импульсной мощностью 100–1000В  
*Астахов С.Г., Пугнин В.И., Мельников С.А., Арефьев А.С., Юнаков А.Н.* Разработка конструкции выходной системы мощного многолучевого клистрона  
*Корниенко В.Н., Черепенин В.А.* Влияние электрического поля заряженной нити на динамику короткого электронного пучка, движущегося в однородном магнитном поле  
*Богомолова Е.А., Галдецкий А.В., Натура И.П.* Возможности повышения токопрохождения в динамическом режиме в многолучевой ЛБВ Ku диапазона  
*Иванов А.А., Мануилов В.Н.* ЛБВ Ka диапазона с замедляющей системой типа «петляющий волновод»  
*Медведков И.П., Роговин В.И., Семенов С.О.* Расчет шумовых характеристик ЛБВ методом крупных частиц  
*Жарихин С.В., Паницков В.И., Полянская Т.И., Стройков Е.А.* Особенности разработки мощных широкополосных ЛБВ на секционированных встречно-штыревых замедляющих структурах и цепочке связанных резонаторов с магнитной периодической фокусирующей системой  
*Терентюк А.Г., Рожнев А.Г., Рыскин Н.М.* Моделирование ЛБВ с замедляющей системой типа «петляющий волновод» на основе нестационарной дискретной теории  
*Рыскин Н.М., Рожнев А.Г., Стародубов А.В., Торгашов Р.А., Торгашов Г.В., Синицын Н.И.* Исследование характеристик ламп бегущей и обратной волны с планарными замедляющими системами на диэлектрических подложках  
*Стародубов А.В., Сердобинцев А.А., Павлов А.М., Галушка В.В., Рябухо П.В., Рыскин Н.М.* Новый подход к изготовлению планарных замедляющих структур для ЛБВ миллиметрового диапазона длин волн

#### **Пленарное заседание: Специальные вопросы СВЧ электроники**

*Запелов В.Е.* (ИПФ РАН, Н. Новгород). Микроволны высокой мощности против саранчи и других вредных животных

9 февраля 2018, пятница

**Пленарное заседание: Магнитоэлектроника**

*Высоцкий С.Л., Хивинцев Ю.В., Сахаров В.К., Дудко Г.М., Филимонов Ю.А., Стогний А.И., Mruzckievich M., Krawczyuk M., Grundler D., Никитов С.А.* (СФ ИРЭ РАН, Саратов). Спиновые волны в метаструктурах на основе пленок ЖИГ

*Гришин С.В., Дмитриев Б.С., Скороходов В.Н., Шараевский Ю.П.* (СГУ, Саратов). Гибридные генераторы импульсов гигантской амплитуды на основе спин-волновых и вакуумных СВЧ-подавителей

*Садовников А.В., Бегинин Е.Н., Шараевский Ю.П., Никитов С.А.* (СГУ, СФ ИРЭ, Саратов). Планарные функциональные элементы магноники микроволнового диапазона

**Пленарное заседание: Гиротроны, гидро-усилители**

*Глявин М.Ю.* (ИПФ РАН, нижний Новгород). Субтерагерцовые гиротроны и их приложения

**Устные доклады. Нелинейная динамика и задачи СВЧ электроники и радиофизики**

*Харчевский А.А., Малахов Д.В., Скворцова Н.Н.* Система доплеровской рефлектометрии для стелларатора в условиях высокой мощности электронно-циклотронного нагрева

*Андреев С.Е., Богданкевич И.Л., Гусейн-заде Н.Г.* Нелинейная динамика плазменно-пучковой неустойчивости в плазменном релятивистском СВЧ-генераторе

*Гинзбург Н.С., Вилков М.Н., Кочаровская Е.Р., Сергеев А.С.* Квазилинейная теория комптоновских ЛСЭ с частично когерентной накачкой

*Мясин Е.А., Котов В.Д.* ЛПД – генератор миллиметрового диапазона волн под воздействием низкочастотного гармонического колебания

*Мясин Е.А., Котов В.Д.* ЛПД – генератор одночастотных колебаний миллиметрового диапазона волн под воздействием низкочастотного шумового сигнала

*Мясин Е.А., Котов В.Д.* ЛПД – генератор хаотических колебаний миллиметрового диапазона волн под воздействием низкочастотного шумового сигнала

*Мясин Е.А., Максимов Н.А., Котов В.Д.* Транзисторный генератор СВЧ диапазона при автономной генерации и при внешнем воздействии

*Ростунцова А.А., Рыскин Н.М.* Об автомодельном характере генерации коротких импульсов в лампе обратной волны

*Кузнецов А.П., Селезнев Е.П., Станкевич Н.В.* Хаос, гиперхаос и квазипериодика в ансамбле связанных осцилляторов и многоконтурном автогенераторе

*Санин А.Л., Смирновский А.А.* Квантовая бусинка с кубической силой, трением и шумом

*Кузнецов А.П., Кузнецов С.П., Тюрюкина Л.В.* Сложная динамика и хаос в электронном автогенераторе с насыщением, обеспечиваемым параметрическим распадом

*Балакин М.И., Рыскин Н.М.* Особенности формирования мультистабильности в генераторе с запаздывающим отражением от нагрузки

*Куркин С.А., Бадарин А.А., Короновский А.А., Храмов А.Е.* Особенности и механизмы развития неустойчивостей в системе с интенсивным релятивистским электронным потоком

*Максимов Н.А.* Низкочастотное периодическое воздействие на СВЧ генератор с варактором

**Пленарное заседание: Invited talk**

*Ogrin F.Y., Bukin N., Burgos-Parra E., McKeever C., Beutier G., Jaouen N., Popescu H., Yakhou F., and van der Laan G.* (University of Exeter, Exeter, Devon, United Kingdom). Time-resolved X-ray imaging with HERALDO

**Устные доклады. Магнитоэлектроника**

*Хивинцев Ю.В., Кожевников А.В., Сахаров В.К., Дудко Г.М., Филимонов Ю.А.* Спиновые волны в магнонных сетях на основе системы ортогональных микроволноводов

*Шараевская А.Ю., Бегинин Е.Н.* Дефектные моды в связанных магнонных кристаллах

*Грачев А.А., Садовников А.В., Сердобинцев А.А., Митин Д.М., Шараевский Ю.П., Никитов С.А.* Элементы магнонной логики на основе управляемых деформацией магнитных микроструктур

*Одинцов С.А., Садовников А.В., Бегинин Е.Н., Шараевский Ю.П., Никитов С.А.* Трёхмерные магнонные сети для систем демультимплексирования СВЧ сигналов

*Романенко Д.В., Гришин С.В., Шараевский Ю.П.* Генерация импульсных сигналов в автоколебательной системе на основе ферромагнитной структуры под импульсным и шумовым воздействиями

*Гришин С.В., Худоложкин Д.О.* Об одном механизме формирования гигантских импульсов – аналогов волн-убийц – в активных кольцевых резонаторах с ферромагнитными пленками

*Манасарян А.Г., Бабичев Р.К., Тахтамышьян В.В.* Моделирование датчика магнитного поля

*Матвеев О.В., Морозова М.А., Романенко Д.В., Шараевский Ю.П.* Исследование слоистой структуры на базе магнонных кристаллов: Теория и эксперимент

*Матвеев О.В., Морозова М.А., Романенко Д.В.* Экспериментальное исследование мультиферроидной слоистой структуры магнонный кристалл – сегнетоэлектрик

**10 февраля 2018, суббота**

**Пленарное заседание: Нелинейная динамика и задачи СВЧ электроники и радиофизики**

*Простакова С.П.* (ИПФ РАН, Н. Новгород). Власов и Ландау – оба они правы  
*Галдецкий А.В.* (НПП Исток, Фрязино). Резонаторная система радиального клистрона

*Синицын Н.И., Ёлкин В.А., Гуляев Ю.В., Бецкий О.В.* (ИРЭ РАН, Москва, Саратовский филиал, Фрязинский филиал). Развитие лечебно-диагностических методов и приборов на основе исследования взаимодействия низкоинтенсивного КВЧ, ТГЧ и ИК излучения с водосодержащими и биологическими средами

**Закрытие школы**



## Школа-2018 в «Волжских Далиях»

XVII зимняя школа-семинар по радиофизике и электронике СВЧ 2018 года посвящена памяти выдающегося ученого в области сверхвысокочастотной вакуумной электроники и микроэлектроники Виктора Анатольевича Солнцева. Он был одной из самых значащих фигур в истории школ, на которых, начиная с 1972 года (II зимняя школа-семинар инженеров, Саратов, пансионат «Волжские Дали»), читал лекции, участвовал в жарких дискуссиях, просто жил жизнью школы. Во времена, когда материалы лекционных курсов издавались до начала школы, в каждой серии этой «электронной энциклопедии» (определение Виктора Анатольевича) были его лекции. По этим лекциям можно было представить не только эволюцию теоретической электроники СВЧ, но и следить за ходом ее истории. В этом году Заслуженному деятелю науки Российской Федерации, лидеру научной школы по методам СВЧ электроники, доктору физико-математических наук, профессору МИЭМ НИУ ВШЭ Виктору Анатольевичу Солнцеву исполнилось бы 87 лет. Наука потеряла талантливого Ученого, Учителя-руководителя научной школы, доброго и умного Человека. В первый день работы школы Наталья Павловна Кравченко (доцент департамента электронной инженерии НИУ ВШЭ, Москва) прочитала лекцию «О научном творчестве Виктора Анатольевича Солнцева».

XVII школа продолжает традицию Саратовских зимних школ, которые проводятся раз в три года, начиная с 1970-го, и уже вписали самостоятельную страницу в историю отечественной сверхвысокочастотной вакуумной электроники. Инициаторами проведения и главными организаторами этих школ как всегда выступают сотрудники ведущей научной школы под руководством члена-корреспондента РАН Д.И. Трубецкова.

Исследования и разработки в этой области активно ведутся во многих научных организациях России, и их результаты были широко представлены на XVII зимней школе. Состав участников школы включал представителей вузовской (Московский, Саратовский, Нижегородский университеты, Уральский федеральный университет, Московский финансово-юридический университет, Саратовский технический университет, С.-Петербургский политехнический университет, НИЯУ «МИФИ»), академической (Институт радиотехники и электроники РАН и его Фрязинский и Саратовский филиалы, Институт прикладной физики РАН, Институт общей физики РАН) и отраслевой науки (АО «НПП «Торий»», (Москва); АО «НПП «Алмаз»», (Саратов), АО «НПП «Исток»» (Фрязино), РФЯЦ ВНИИЭФ (Саров)). Этот список дает представление о том, насколько широко ведутся подобные исследования в России.

Всего на школе были представлены 24 пленарные лекции с обзорами современного состояния исследований в различных актуальных областях СВЧ электроники и радиофизики, а также лекции с результатами оригинальных исследований; 58 устных и 31 стендовый доклад с результатами новых исследований. В них нашли отражение, по сути, все основные направления исследований по тематике конференции, которые выполняются в России и других странах.

Одной из ключевых тенденций развития современной СВЧ электроники является освоение терагерцового (субмиллиметрового) диапазона. Это научное направление было представлено обзорными лекциями В.А. Царева (СГТУ, Саратов), Н.А. Бушуев (АО «НПП «Алмаз»», Саратов), О.И. Лукши (СПбГПУ, С.-Петербург). В указанных лекциях была затронута проблема проектирования миниатюрных аналогов классических вакуумных приборов (работающих в ТГц диапазоне) и их компонентов (в частности, полевых эмиттеров). Приборам ТГц диапазона был посвящен также целый ряд устных и стендовых докладов. По данной тематике следует выделить

доклады Е.А. Мясина (ФирЭ РАН, Фрязино), которые были посвящены современному состоянию разработок субтерагерцовых оротронов. Наиболее активная работа в этом направлении в настоящее время ведется в ФирЭ РАН и ИПФ РАН. Следует отметить, что многие лекции и доклады, формально относящиеся к другим тематическим разделам, в той или иной мере затрагивали вопросы продвижения различных приборов СВЧ в миллиметровый диапазон длин волн.

Важное место в программе школы занимали лекции и доклады, посвященные гиротронам и другим приборам на циклотронном резонансе. Современные тенденции развития гиротронов, а также возможности их применения обсуждались в лекциях В.Е. Запелова, Ю.В. Новожиловой, М.Ю. Глявина (ИПФ РАН, Н. Новгород). Лекция М.Ю. Глявина была посвящена разработке гиротронов терагерцового диапазона. На сегодняшний день в ИПФ РАН созданы гиротроны, реализующие достаточно мощную генерацию в терагерцовом диапазоне. Пожалуй, это одно из наиболее впечатляющих достижений в области гироприборов за последние годы. Коллективами из СГУ, СПбГПУ, ИПФ РАН были представлены доклады, посвященные исследованию различных аспектов работы гироприборов, в частности, гиротронов, гироклистронов, гиро-ЛБВ и т.д. Ряд докладов содержал результаты по различным конкретным вопросам нелинейной теории и разработки гиротронов.

Значительное количество лекций и докладов было посвящено «классическим» приборам нерелятивистской СВЧ электроники, методам анализа их работы. Лекции Г.Г. Соминского (СПбГПУ, С.-Петербург) и С.П. Морева (АО «НПП «Торий»», Москва) были о проблемах разработки катодов для вакуумных СВЧ приборов. В лекции Г.Г. Соминского приведены результаты разработки катодов для вакуумных электронно-лучевых СВЧ устройств коротковолнового миллиметрового и субмиллиметрового диапазонов длин волн, а также портативных и мобильных источников рентгеновского излучения, работающих при ускоряющих электронах напряжениях в единицы–десятки киловольт. В частности, исследования показали, что оптимизированные по структуре многоострийные кремниевые эмиттеры площадью 0.2–0.3 см<sup>2</sup> с покрытиями, включающими слой молибдена толщиной 5–10 нм и нанесенные на него 2–3 монослоя молекул фуллерена C<sub>60</sub>, позволяют получать в условиях технического вакуума стабильную полевую эмиссию (ориентировочно до 100–110 мА), достаточную для обеспечения работы диагностических гиротронов миллиметрового и/или субмиллиметрового диапазона. В лекции С.П. Морева «Электронно-оптические системы с автоэмиссионными катодами: токи, Лиувилль, ...и далее со всеми остановками» были приведены примеры расчета различных ячеек с вертикально ориентированными полевыми эмиттерами с большим аспектным отношением. Показано значительное влияние фазового объема на транспортировку электронного потока в протяженных каналах приборов миллиметрового диапазона и ограничения на создание ЭОС коротковолновой части миллиметрового и терагерцового диапазонов, а также некоторые пути уменьшения его влияния. Ряд докладов был посвящен улучшению характеристик различных приборов СВЧ, в частности, исследованиям в области электронной оптики и электродинамики классических приборов СВЧ при продвижении их в мм-диапазон длин волн.

Значительное место в программе Саратовских зимних школ в последние годы занимают магнитоэлектроника и спинтроника. В лекции Ю.А. Филимонова (СФирЭ РАН, Саратов) были представлены результаты по исследованию спиновых волн в метаструктурах на основе пленок ЖИГ. В частности, в лекции обсуждался вопрос об основном состоянии магнитных пленок с метаповерхностью и возможность использования поверхностей микроструктуры для намагничивания образца в от-

сутствие внешних полей подмагничивания и создания датчиков магнитного поля. Лекция С.В. Гришина (СГУ, Саратов) была посвящена оригинальным результатам исследований гибридных генераторов импульсов гигантской амплитуды на основе спин-волновых и вакуумных СВЧ-подавителей. В лекции были представлены экспериментальные результаты, демонстрирующие возможность формирования импульсов гигантской амплитуды как в одномодовом кольцевом генераторе с «медленным» насыщающимся поглотителем в виде усилителя отношения сигнал/шум на МСВ, так и в многомодовом кольцевом генераторе с «быстрым» насыщающимся поглотителем в виде ЛБВ-подавителя. Было показано, что в одной из предложенных генераторных схем формируются хаотические последовательности гигантских импульсов за счет пассивной модуляции добротности резонатора, в то время как в другой предложенной схеме, за счет реализации двух режимов – пассивной модуляции добротности и пассивной синхронизации мод – генерируются хаотические многосолитонные комплексы, состоящие из более длинных трехволновых солитонов и «вложенных» в них более коротких четырехволновых солитонов. В лекции А.В. Садовникова с соавторами (СГУ, СФ ИРЭ РАН, Саратов) приведены результаты исследований возможности создания планарных функциональных элементов магноники микроволнового диапазона. Обсуждаются примеры использования магنونных структур и их интеграции с полупроводниковыми элементами для систем обработки информационных сигналов.

Традиционно для Саратовских зимних школ, в программе были представлены доклады, посвященные вопросам нелинейной динамики, теории колебаний и волн с акцентом на приложения к задачам электроники СВЧ. Лекция А.В. Титова (СГУ, Саратов) представляла собой обзор современных исследований двухпоточковой неустойчивости в теории двухлучевых ламп. В частности, обсуждались вопросы усиления в области неустойчивости, интерференционное усиление СВЧ излучения, периодическое взаимодействие двух потоков и поля, теория двухпоточкового оротрона. Лекции А.А. Елизарова (НИУ ВШЭ, Москва) и А.В. Фунтова (СГУ, Саратов) были посвящены вопросам применения метаматериалов (с отрицательной диэлектрической и магнитной проницаемостью) в СВЧ электронике. Так, в первой из двух лекций говорилось о том, что интерес к исследованию полосно-заграждающих структур на основе грибовидных метаматериалов обусловлен перспективностью их использования для создания микроволновых частотно-селективных устройств с улучшенными характеристиками: в частности, разработки пространственных фильтров для развязки элементов в антенных решетках, проектирования специализированных экранов прецизионных антенн спутниковых систем навигации, антенн Фабри–Перо, конструирования облучателей и элементов поверхностей зеркальных антенн. В лекции А.А. Фунтова приводился обзор по теоретическим и экспериментальным работам, посвящённым исследованию возможности применения метаматериалов в СВЧ электронике. Отмечалось, что интерес к использованию в СВЧ электронике метаматериалов не является случайным, поскольку в некотором диапазоне частот предварительные результаты показывают уникальную возможность снизить или исключить электрический пробой и зарядку диэлектрика, присущие диэлектрически нагруженным структурам. Кроме того, в лекции изложена как известная классическая теория резистивного усилителя, так и её развитие; включен ряд результатов, полученных автором. Целый ряд устных и стендовых докладов был посвящён вопросам применения методов и средств нелинейной динамики к анализу работы СВЧ устройств.

Как обычно, в программе зимней школы присутствовала «историческая» составляющая. Следует упомянуть лекцию Д.И. Трубецкова (СГУ, Саратов) «Кто же всё-таки изобрёл и создал ЛБВ (Гамов, Линденблад, Компфнер, Пирс)?». Оригиналь-

ную лекцию с историческим экскурсом в СВЧ электронику представил М.И. Петелин (ИПФ РАН, Н. Новгород), рассказавший о развитии нестационарной нелинейной теоретической и натурной модели ЛОВ, предложенной и исследованной в 1975 году в Саратовском университете. К историко-научному циклу можно отнести лекцию «Власов и Ландау – оба они правы» С.П. Простаковой, also known as Михаил Иванович Петелин (ИПФ РАН, Н. Новгород). В первый день работы школы Наталья Павловна Кравченко (НИУ ВШЭ, Москва) прочитала лекцию «О научном творчестве Виктора Анатольевича Солнцева». В этом году выдающемуся российскому и советскому ученому в области радиофизики и электроники сверхвысоких частот, Заслуженному деятелю науки Российской Федерации, лидеру научной школы по методам СВЧ электроники, доктору физико-математических наук, профессору МИЭМ НИУ ВШЭ Виктору Анатольевичу Солнцеву исполнилось бы 87 лет. Школа была посвящена его памяти.

Примерно половину участников Школы составили молодые ученые, аспиранты и студенты. Они представляли в основном СГУ, СФ ИРЭ РАН, СГТУ, ННГУ, ИПФ РАН, ИОФ РАН. Молодых участников делегировали также УФУ, АО «НПП “Торий”», АО «НПП “Алмаз”», РФЯЦ ВНИИЭФ. Вообще, представители отраслевой науки составляли значительное число участников школы. Можно заключить, что наметившаяся в последние несколько лет тенденция притока молодежи в науку, в том числе, отраслевую, в целом сохраняется. Сопоставляя составы участников этой и нескольких предыдущих школ, можно заключить, что костяк участников остается прежним, однако многие из тех, кто 5–10 лет назад были студентами и аспирантами, теперь являются сложившимися учеными, кандидатами наук. По-прежнему продолжает активную работу ряд представителей старшего поколения, среди них – выдающиеся ученые и инженеры, традиционно составляющие основу коллектива лекторов на Саратовских зимних школах.

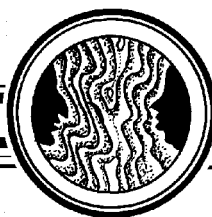
Тематика лекций и докладов в целом соответствует наиболее актуальным проблемам вакуумной СВЧ электроники с точки зрения мировой науки, в чем можно убедиться, сопоставив программу Школы с программами ведущих международных конференций, например, ежегодных Международных конференций по вакуумной электронике (IVEC). По основным направлениям исследования, выполняемые российскими учеными, находятся на мировом уровне.

Анализ опубликованных материалов школы-семинара показывает, что большинство исследований, выполняемых в вузах и институтах РАН, по-прежнему проводится при финансовой поддержке РФФИ (инициативные проекты, гранты поддержки молодых учёных и ориентированные фундаментальные исследования).

По сравнению с предыдущими школами общее число ссылок на поддержку грантами РФФИ остается примерно постоянным. Значительную долю грантов составляют гранты РНФ, а также различные проекты, выполняемые в вузах в рамках государственных заданий. Встречаются ссылки на поддержку другими источниками финансирования (гранты Президента РФ для молодых кандидатов и докторов наук, стипендии Президента РФ).

От лица Оргкомитета хочу выразить признательность АО «НПП “Торий”» за финансовую поддержку и помощь в организации Саратовской XVII зимней школы-семинара.

*Е.Н. Егоров*  
Ученый секретарь  
доцент, к.ф.-м.н.



УДК 621.373.12:519.216+929 Мясин



*Евгений Анатольевич  
Мясин*

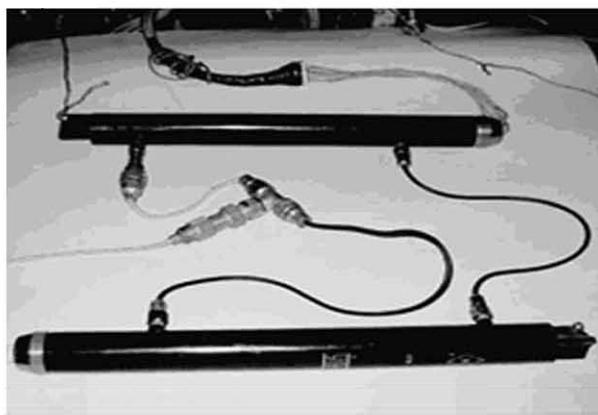
**К 80-летию со дня  
рождения**

Евгений Анатольевич Мясин – кандидат технических наук, лауреат Государственной премии СССР, член Учёного совета ИРЭ РАН, мастер спорта СССР. Евгений Анатольевич родился в Новосибирске в 1938 году. С 1955 по 1961 годы – студент МИФИ. В 1962 году молодой и амбициозный человек становится сотрудником лаборатории Института радиотехники и электроники АН СССР (ИРЭ РАН), которой руководил также довольно молодой учёный, но уже кандидат физико-математических наук В.Я. Кислов\*. Сама лаборатория входила в состав отдела, который курировал академик Николай Дмитриевич Девятков. Первые годы работы в ИРЭ АН СССР совпали у Евгения Анатольевича с активным занятием спортом. Спортивная карье-

\*См., например, статью Мясина Е.А. «Исследование генерации СВЧ-шума в ИРЭ АН СССР 1962–1967 годов – начало нового научного направления» (Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2014. Т. 32, № 1. С. 104–122).

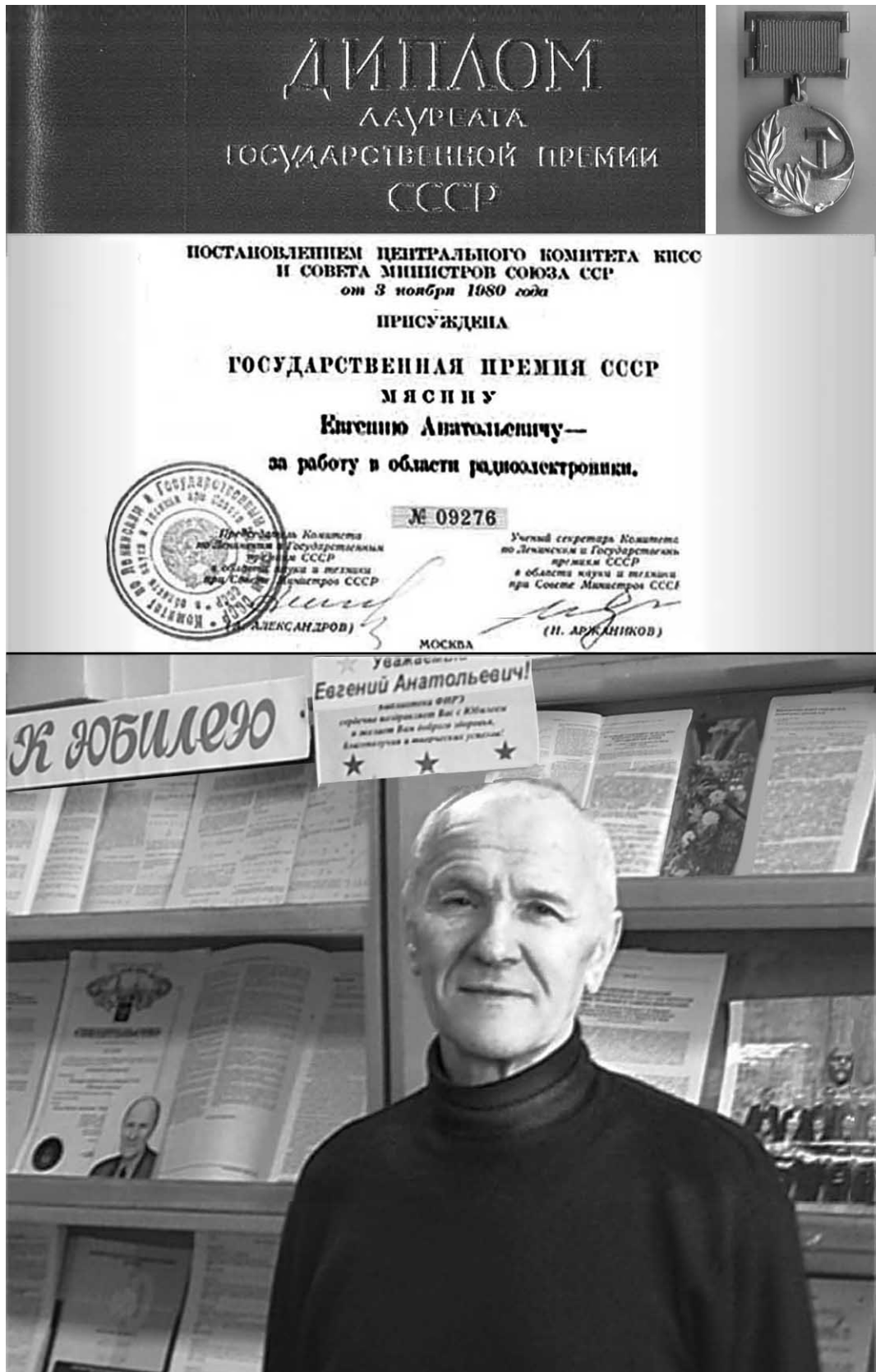
ра его связана со спортивным клубом «Кунцево», который выступал в высшей лиге СССР по гандболу. Будучи лидером по натуре, он в этом виде спорта быстро достиг высоких результатов, стал мастером спорта СССР и получил приглашение выступать за сборную СССР. Перед Евгением Анатольевичем открывалась прекрасная спортивная перспектива – вместе с командой поехать по миру и даже, возможно, участвовать в Олимпийских играх. Но параллельно появились его первые интересные научные результаты в лаборатории В.Я. Кислова. Совмещать научную работу с активным и профессиональным занятием спортом становилось всё труднее. Надо было делать непростой выбор. После долгих сомнений Евгений Анатольевич сделал его в пользу научной деятельности. Сейчас уже трудно сказать, что потерял при этом Советский спорт, но наука приобрела в его лице яркого, талантливого и самобытного учёного, подарившего стране открытие, значение которого в научном мире до сих пор в полной мере не осознано. Так, в 1966 году, спустя всего четыре года после прихода в ИРЭ АН, Евгений Анатольевич с коллегами, Кисловым В.Я. и Богдановым Е.В., обнаружил возможность генерации широкополосных шумов в СВЧ-диапазоне в генераторе на основе двух ламп бегущей волны, соединённых последовательно в кольцо (Кислов В.Я., Мясин Е.А., Богданов Е.В. АС1125735 с приоритетом от 31.07.67). Этот генератор получил название шумотрон (см. фотографию). «Проснувшись знаменитым», Е.А. Мясин продолжает работы, направленные на изучение причин возникновения данного явления и его возможного применения на практике. Именно последнее и сыграло злую шутку с исследователями. Те применения, которые оказались востребованными на тот момент, на целых пятнадцать лет приостановили возможные публикации авторов в этой области в открытой печати. И только в начале 1980-х годов появилась возможность опубликовать полученные за этот период результаты. Сегодня можно сказать, что обнаруженное явление дало мощный толчок исследованиям в различных областях науки и техники, вылившееся в новое направление, известное в наши дни, как динамический хаос.

В феврале 1981 года происходит новый поворот в жизни Е.А. Мясина. К этому времени он уже получил признание в научном мире, защитил кандидатскую диссертацию и стал лауреатом Государственной премии. Перед ним открывалась хорошая перспектива в случае продолжения исследований в выбранной и принесший ему успех тематике. Однако «спортивный дух» Евгения Анатольевича, нежелание пасовать перед трудностями и с успехом преодолевать их, заставил его резко поменять направление научной деятельности. Он возглавил лабораторию технологии СВЧ-приборов во Фрязинском филиале ИРЭ АН СССР, которой руководит до сих пор. И здесь успех не заставил себя долго ждать. Сегодня Мясин Е.А. является признанным специалистом в области создания мощных оротронов. Это вакуумные приборы, которые генерируют мощное электромагнитное излучение в миллиметровом и субмиллиметровом диапазонах длин волн и находят применение в спектроскопии, а также при проведении физических и биологических исследований, изучении радиофизических свойств атмосферы. Продвижение во всё более высокочастотную часть СВЧ диапазона даётся с большим трудом, встречая на своём пути многочисленные технологические и организационные проблемы. Однако это только «подзадоривает» Евгения Анатольевича, который, шаг за шагом, покоряет новые высоты, поднимая планку рекордных характеристик генерируемых колебаний.



Е.А.Мясин и В.Я.Кислов, середина 1960-х гг.







Сегодня Евгений Анатольевич Мясин не только остаётся в строю, но и полон научных и творческих планов. Творческие планы не являются оговоркой. Он профессионально и блистательно читает стихи русских и советских поэтов, выступая порой перед многочисленной аудиторией. Его энергии и активной жизненной позиции завидуют более молодые сотрудники. И нет сомнений в том, что его новые успехи не за горами.

*А.С. Дмитриев,*  
главный научный  
сотрудник ИРЭ РАН

*Дорогой Евгений Анатольевич!*

*Саратовские коллеги по научному цеху и члены редколлегии журнала поздравляют Вас с замечательной датой, желают здоровья и успехов, научных и ненаучных. Всегда рады видеть Вас на страницах нашего журнала и на наших конференциях.*