

Журнал включен в «Перечень периодических научных и научно-технических изданий РФ, рекомендованных для публикации основных результатов диссертаций на соискание ученой степени доктора наук»

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Известия высших учебных заведений

ПРИКЛАДНАЯ НЕЛИНЕЙНАЯ ДИНАМИКА

научно-технический журнал

издается с 1993 года

Выходит 6 раз в год

Том 26, № 6, 2018, Саратов

СОДЕРЖАНИЕ

*К 100-летию физико-математического образования
в Саратовском университете*

От редактора выпуска. <i>Аникин В.М.</i>	3
НЕЛИНЕЙНАЯ ДИНАМИКА В ЛИЦАХ. ИСТОРИЯ	
<i>Аникин В.М.</i> «Бифуркационная летопись» физико-математического факультета Саратовского университета. 1917–1945	5
ПРИКЛАДНЫЕ ЗАДАЧИ НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ КОЛЕБАНИЙ И ВОЛН	
<i>Кузнецов А.П., Рахманова А.Ж., Савин А.В.</i> О влиянии нарушения симметрии на устройство фазового пространства обратимых систем со смешанной динамикой	20
НЕЛИНЕЙНЫЕ ВОЛНЫ. СОЛИТОНЫ	
<i>Блинков Ю.А., Евдокимова Е.В., Могилевич Л.И.</i> Нелинейные волны в цилиндрической оболочке, содержащей вязкую жидкость, при воздействии окружающей упругой среды и конструкционного демпфирования в продольном направлении	32
НОВОЕ В ПРИКЛАДНОЙ ФИЗИКЕ	
<i>Симаков В.В., Синёв И.В., Вениг С.Б.</i> Неаддитивное влияние паров воды и освещения на проводимость пленки диоксида олова при комнатной температуре	48
<i>Одинцов С.А., Садовников А.В.</i> Нелинейные режимы спин-волновой связи в системе неидентичных магнонных структур	59
<i>Адилова А.Б., Рыскин Н.М.</i> Исследование синхронизации в системе двух гиротронов с запаздыванием в канале связи на основе модифицированной квазилинейной модели	68
МЕТОДИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ ПО НЕЛИНЕЙНОЙ ДИНАМИКЕ	
<i>Учайкин В.В., Литвинов В.А.</i> Нелинейная теория возмущений на основе вариационного принципа: Модельные примеры	82
КНИЖНАЯ ПОЛКА СТУДЕНТА	
Радиофизика и нелинейная динамика: Учебное пособие. В.С. Анищенко, Г.И. Стрелкова	99

C O N T E N T S

*To the 100th Anniversary of physical and mathematical education
in Saratov University*

Editorial. <i>Anikin V.M.</i>	3
HISTORY OF NONLINEAR DYNAMICS	
<i>Anikin V.M.</i> «Bifurcation chronicle» of Saratov University Department of physics and mathematics. 1917–1945	5
APPLIED PROBLEMS OF NONLINEAR OSCILLATION AND WAVE THEORY	
<i>Kuznetsov A.P., Rahmanova A.Zh., Savin A.V.</i> The effect of symmetry breaking on reversible systems with mixed dynamics	20
NONLINEAR WAVES. SOLITONS	
<i>Blinkov Yu.A., Evdokimova E.V., Mogilevich L.I.</i> Nonlinear waves in cylinder shell containing viscous liquid, under the impact of surrounding elastic medium and structural damping in longitudinal direction	32
INNOVATIONS IN APPLIED PHYSICS	
<i>Simakov V.V., Sinev I.V., Venig S.B.</i> Non-additive influence of water vapor and lighting on the conductivity of tin dioxide film at room temperature	48
<i>Odintsov S.A., Sadovnikov A.V.</i> Nonlinear spin-wave propagation in the nonidentical magnonic structures	59
<i>Adilova A.B., Ryskin N.M.</i> Study of synchronization in the system of two delay-coupled gyrotrons using a modified quasilinear model	68
METHODICAL PAPERS IN NONLINEAR DYNAMICS	
<i>Uchaikin V.V., Litvinov V.A.</i> Nonlinear perturbation theory based on the variational principle: Model examples	82
STUDENT'S BOOKSHELF	
Radiophysics and Nonlinear Dynamics: Textbook. V.S. Anishchenko, G.I. Strelkova	99

От редактора выпуска

Настоящий номер журнала «Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика» издается под «грифом» «К 100-летию физико-математического образования в Саратовском национальном исследовательском государственном университете имени Н.Г. Чернышевского». Так отмечается юбилей физико-математического факультета одного из старейших университетов России, «стартом» для которого стал 1917/1918 учебный год. Утверждение факультета, имевшего в составе математический и разнообразные естественно-научные профили, имело исключительное культурное, научное, образовательное и экономическое значение для всего Юго-Востока России. Ведь с 1909 до 1917 года университет функционировал в составе лишь одного медицинского факультета.

Перипетии утверждения и функционирования факультета рассматриваются в открывающей выпуск статье «“Бифуркационная летопись” физико-математического факультета Саратовского университета. 1917–1945». Нелинейно-динамическая терминология призвана образно отразить «ухабы» и разнообразные (порой противоречащие друг другу) «повороты» в истории развития высшего образования в нашей стране.

Важно, что развитие образования и науки на новом факультете Саратовского университета с самого начала шло, как говорится, «рука об руку». Обусловлено это было тем, что первым заведующим кафедрой физики и деканом физико-математического факультета был Владимир Дмитриевич Зёрнов, действующий ученый, ученик Петра Николаевича Лебедева, российского физика мирового уровня, профессора Московского университета. Кстати, вместе с Зёрновым «поднимать» физику в Саратов приехали сразу пять представителей лебедевской «фабрики молодых физиков», в том числе обладатели престижной российской научной премии В.П. Мошнина. Став деканом, В.Д. Зёрнов пригласил в Саратов крупных столичных математиков.

С именем Константина Александровича Леонтьева связано развитие в Саратовском университете радиотехнического и радиофизического направлений, что нашло отражение в доверии Саратовскому университету провести 15 августа 1928 года в Большой физической аудитории «прекрасного (по оценке С.И. Вавилова. – *прим. авт.*) физического института» заключительного заседания передвижного VI съезда русских физиков. Его организатором был академик А.Ф. Иоффе, сторонник «децентрализации физики».

В числе выступлений на этом съезде был и ставший классическим доклад будущего академика А.А. Андропова «Предельные циклы Пуанкаре и теория колебаний». Нелинейно-динамическая парадигма нашла в наши дни мощное научное междисциплинарное развитие. Иллюстрацией этого могут служить статьи, помещенные в этом журнале и отвечающие его профилю.

Авторы *В.В. Учайкин* и *В.А. Литвинов* в статье «Нелинейная теория возмущений на основе вариационного принципа: Модельные примеры» раскрывают основные понятия, особенности применения и достоинства метода «вариационного интерполирования» *В.В. Учайкина* в приложении к нелинейным задачам переноса частиц и излучения.

А.П. Кузнецов, *А.Ж. Рахманова* и *А.В. Савин* в статье «О влиянии нарушения симметрии на устройство фазового пространства обратимых систем со смешанной динамикой» иллюстрируют появление изменений в устройстве фазового пространства систем с симметрией, вызванное нарушением симметрии связи (разрушением консервативной динамики), на примере цепочки связанных фазовых осцилляторов.

Задачу моделирования волновых явлений в нелинейной цилиндрической оболочке (типа Кирхгофа–Лява) решают Ю.А. Блинков, Е.В. Евдокимова и Л.И. Могилевич в статье «Нелинейные волны в оболочке, содержащей вязкую жидкость при воздействии окружающей упругой среды и конструкционного демпфирования в продольном направлении».

В.В. Симаков, И.В. Синёв и С.Б. Вениг в статье «Неаддитивное влияние паров воды и освещения на проводимость пленки диоксида олова при комнатной температуре» излагают и объясняют результаты экспериментальных исследований по одновременному воздействию водяных паров и светодиодного освещения на проводимость тонких пленок определенного состава.

В статье «Исследование синхронизации в системе двух гиротронов с запаздыванием в канале связи на основе модифицированной квазилинейной модели» А.Б. Адилова и Н.М. Рыскин в рамках предложенной физико-математической модели изучают проблему когерентного взаимодействия двух гиротронов с учетом их пространственного разнесения.

С.А. Одинцов и А.В. Садовников в статье «Нелинейные режимы распространения сигнала в латеральных неидентичных магнитных микроволноводах в условиях многомодового распространения спиновых волн» знакомят с результатами своей работы по расчету характеристик спиновых волн и их связи на базе численного интегрирования уравнений Гинзбурга–Ландау и Ландау–Лифшица–Гильберта.

Можно считать, что эта статья одновременно отмечает и 90-летие со дня рождения Всеволода Семёновича Стальмахова (1928–1991), доктора физико-математических наук, профессора, заслуженного деятеля науки РСФСР, заведующего кафедрой общей физики, проректора Саратовского государственного университета имени Н.Г. Чернышевского. Всеволод Семёнович является инициатором научных исследований в Саратовском университете по изучению электродинамических свойств магнитоупорядоченных сред в СВЧ и КВЧ диапазонах. Его книга «Магнито-статические волны в электронике сверхвысоких частот» (в соавторстве с А.В. Вашковским и Ю.П. Шаравским), вышедшая в издательстве СГУ в 1993 году, долгие годы оставалась наиболее востребованной (и признаваемой) специалистами и до сих пор не утратила своей научно-методической актуальности.

* * *

Рассуждая о миссии университета, испанский педагог и философ Хосе Ортега-и-Гассет в свое время писал: «Насыщенная атмосфера научного энтузиазма и труда составляет радикальную предпосылку существования университета. Он нуждается не только в постоянном контакте с наукой, без которого ему грозит закат. Он нуждается также в контакте с общественной жизнью, с исторической реальностью, с настоящим, которое всегда *integrum* (целостное. – *лат.*) и которое нужно воспринимать в целостности, ничего не отбрасывая. Университет должен быть полностью открыт для современности; более того, он должен быть в самой ее гуще, должен быть погружен в нее. И общественная жизнь нуждается в безотлагательном вмешательстве университета» (Ортега-и-Гассет Х. Миссия университета. М.: Издат. дом гос. ун-та – Высшей школы экономики, 2010. С. 116, 117).

В наши дни эти слова можно, пожалуй, «расшифровать» так: и сотрудник университета, и «идеально» подготовленный к реальной жизни выпускник университета должны наряду с усвоением и генерацией фундаментальных результатов обладать и способностью доводить свои знания и умения до создания с их использованием конкурентоспособного и востребованного экономикой продукта. Эту интерпретацию в полной мере подтверждают представленные в журнале статьи.

Профессор СГУ, д.ф.-м.н.

В. М. Аникин



УДК 53(091), 51(091)

<https://doi.org/10.18500/0869-6632-2018-26-6-5-19>

«Бифуркационная летопись» физико-математического факультета Саратовского университета. 1917–1945

В. М. Аникин

Саратовский национальный исследовательский
государственный университет имени Н.Г. Чернышевского
Россия, 410012 Саратов, ул. Астраханская, 83
E-mail: AnikinVM@info.sgu.ru

Поступила в редакцию 6.04.2018, принята к публикации 26.05.2018

Тема. В статье отражены важные вехи истории физико-математического факультета Саратовского университета 1917–1945 гг., сыгравшего роль важнейшего образовательного и научного центра Волжского региона и Востока России. Факультет был образован Постановлением Временного правительства 1 (14) июля 1917 г. и начал свою работу с сентября того же года. В довоенные годы из состава факультета были выделены биологический, химический, географический и геологический факультеты. В 1945 г. на его основе были созданы физический и механико-математический факультеты. В 1945–1990 гг. выпускники физического факультета обеспечили превращение Саратова в «электронную столицу» СССР, составили костяк научно-исследовательских кадров открытых в 1980-х гг. в городе академических институтов и преподавательских кадров университета и других высших учебных заведений Саратова, создали новые университетские научно-образовательные направления. В статье прослеживается изменение структуры факультета в довоенный период в общем контексте развития высшего образования в стране в тот период.

Ключевые слова: Саратовский университет, физико-математический факультет.

Образец цитирования: Аникин В.М. «Бифуркационная летопись» физико-математического факультета Саратовского университета (1917–1945) // Изв. вузов. ПНД. 2018. Т. 26, № 6. С. 5–19.

<https://doi.org/10.18500/0869-6632-2018-26-6-5-19>

<https://doi.org/10.18500/0869-6632-2018-26-6-5-19>

«Bifurcation chronicle» of Saratov University Department of physics and mathematics. 1917–1945

V. M. Anikin

Saratov National Research State University named after N.G. Chernyshevsky
83, Astrakhanskaya str., 410012 Saratov, Russia
E-mail: AnikinVM@info.sgu.ru

Received 6.04.2018, accepted for publication 26.05.2018

Topic. The article reflects important milestones in the history of the physics and mathematics faculty of Saratov University (1917–1945), which played the role of the most important educational and scientific center of the Volga region and the East of Russia. The faculty was established by the Decree of the Provisional Government on July 1 (14), 1917, and

began its work from September of the same year. In the pre-war years, the biological, chemical, geographic and geological departments were separated from the faculty. In 1945, on its basis, the physical faculty and faculty of mechanics and mathematics were created. In 1945-1990 years, graduates of the Faculty of Physics ensured the transformation of Saratov into the «electronic capital» of the USSR, made up the backbone of scientific research personnel discovered in the 1980s. in the city of academic institutes, formed the basis of teaching staff of the university and other higher educational institutions of Saratov, created new university scientific and educational areas. In the article, we attempt to trace the change in the structure of the faculty in the pre-war period in the general context of the development of higher education in the country at that time.

Key words: Saratov University, Department of Physics and Mathematics.

Reference: Anikin V.M. «Bifurcation chronicle» of Saratov University Department of physics and mathematics (1917–1945). *Izvestiya VUZ, Applied Nonlinear Dynamics*, 2018, vol. 26, no. 6, pp. 5–19.
<https://doi.org/10.18500/0869-6632-2018-26-6-5-19>

Введение

В статье описаны основные вехи развития и становления физико-математического образования в Саратовском национальном исследовательской государственном университете имени Н.Г. Чернышевского. Хотя объективно открытие университета в 1909 г. и учреждение в нем физико-математического факультета в 1917 г. было обусловлено потребностями культурного и хозяйственного развития юго-востока европейской части России, реализация университетского проекта в Саратове явилось плодом старания многих людей, занимавших различные ступени социальной лестницы. Перипетии истории физико-математического образования в различные годы являются отражением тех исторических реалий, в которых работал и продолжает развиваться университет. В настоящее время он, будучи одним из пяти старейших университетов России, удерживает авангардные позиции во всех компонентах высшего образования, включая научную составляющую. Существенная роль в реализации миссии университета принадлежит факультетам физико-математического профиля.

Для названия разделов статьи выбрана нелинейно-динамическая терминология, образно отражающая суть происходивших событий.

Выход на «аттрактор». 1911–1916

Деятельность университета и города Саратова (в лице городской думы) по открытию нового факультета началась почти сразу после учреждения университета (1909). В «классическую» структуру университетов Российской Империи, как правило, входило четыре факультета: физико-математический (с физико-математическим и естественным отделениями), историко-филологический (с историческим и словесным отделениями) и юридический. На практике различные факультеты в университетах утверждались постепенно, по мере «созревания» материальных и социальных условий. Скажем, в дореволюционное время в Петербургском университете так и не был открыт медицинский факультет¹ (но в его составе был «экзотический» восточный факультет). Томский университет 30 лет дождался открытия физико-математического и историко-филологического факультетов. Саратовский же университет был учрежден в 1909 г. в составе единственного медицинского факультета.

Начиная с 1911 г. три последовательно сменявшие друг друга ректора Саратовского университета В.И. Разумовский, Н.Г. Стадницкий и П.П. Заболотнов подавали прошения в Министерство народного просвещения об открытии новых факультетов в университете [1]. Одновременно об этом же ходатайствовала и Саратовская Городская Дума. Особую активность проявлял ее гласный, а с 1913 г. – городской голова Михаил Федорович Волков, врач по образованию [2].

¹ Старейшим и наиболее известным научно-образовательным медицинским центром Петербурга была Военно-медицинская (до 1881 г. – Медико-хирургическая) академия (основана в 1798 г.).

Министр народного просвещения Л.А. Кассо аргументировал неизменные отказы тремя причинами – отсутствием в России преподавателей для новых факультетов, недостатком помещений и невнесением 1 миллиона рублей Саратовом на университетские нужды [1].

В отказах усматривали и политическую подоплеку: Николай II, по воспоминаниям министра народного просвещения А.Н. Шварца [3, с. 60], при вручении ему памятной медали в честь открытия Саратовского университета сказал: «...В другой раз Вы ко мне с проектом утверждения нового университета не ходите. Их больше не надо». Царь видел в студенчестве массу, легко «созреваемую» для антиправительственных выступлений².

Надежды на благополучное решение вопроса о новых факультетах в Саратовском университете появились в 1916 г. К 1914 г. было завершено строительство корпуса Физического института (ныне III корпус СГУ), более того, университет смог разместить на своих площадях три факультета временно эвакуированного из Киева университета Св. Владимира. В начале 1916 г., когда министерством народного просвещения (МНП) руководил граф Павел Николаевич Игнатьев, «горячее сочувствие» идее открытия факультета проявил товарищ министра Владимир Тимофеевич Шевяков, член-корреспондент Петербургской АН. В середине мая 1916 г. он посетил университет вместе вице-директором департамента народного просвещения Николаем Осиповичем Палечком³. По результатам этой поездки П.Н. Игнатьев подал в правительство представление



Министр народного просвещения
Н.П. Игнатьев
Minister of Public Education
N.P. Ignatiev



Товарищ министра В.Т. Шевяков
Deputy Minister V.T. Shevyakov



Вице-директор департамента МНП
Н.О. Палечек
Vice Director of the Department of
the Ministry of Public Education
N.O. Palechek

²Так, собственно, и случилось в 1911 г. в Московском университете; студенческие волнения спровоцировали уход из университета 130 преподавателей и сотрудников, в том числе 21 профессора, не согласных с постановлением правительства о возможности привлечения полиции для пресечения в стенах университета любых мероприятий, отличающихся от образовательной и научной деятельности [4, гл. 1].

³Н.О. Палечек (1878–1937) при министре просвещения А.Н. Шварце заведовал вопросами учёных учреждений и высших учебных заведений; при министре просвещения Л.А. Кассо – финансово-хозяйственной деятельностью министерства. Разработал законопроект о Московском городском народном университете имени А.Л. Шанявского в Москве (1908). По поручению министра П.Н. Игнатьева изучал вопросы об образовании новых факультетов в Саратовском и Томском университетах и об открытии Пермского университета как отделения Петербургского (в связи с войной с Германией в 1915 г. планировалось перебазировать в Пермь Юрьевский (Дерптский) университет, но Палечек «хозяевам» из Перми подсказал другой вариант – хлопотать об открытии в Перми *нового* университета). В октябре 1916 г. Шевяков и Палечек присутствовали на открытии Пермского университета. Палечку было поручено разработать план развития Пермского университета на несколько лет; в 1918–1919 гг. он был советником правления университета (см. журнал «Пермский университет». 2016. URL: <http://www.psu.ru/files/flash/flipbook/magazin-pu-2016/index.html#19/z>). В тексте статьи приведен фрагмент групповой фотографии проводов Н.О. Палечека из Перми.

о восполнении отсутствующих факультетов в университетах Саратовском (физико-математический, историко-филологический, юридический факультеты) и в Томском (те же факультеты за исключением юридического). Как отмечено в [5, с. 221], 21 июня 1916 г. Совет министров России одобрил предложение министра народного просвещения П.Н. Игнатъева об открытии в Саратовском университете новых факультетов.

1. Рождение структуры. 1917

В Саратове уже было составили смету по новым факультетам на несколько лет вперед, начиная с 1916/1917 учебного года. Но... официальные лавры радетелей за отечественное высшее образование достались Временному правительству. Именно им 1 (14) июля 1917 г. было наконец-то принято постановление, дававшее жизнь новым факультетам Саратовского и Томского университетов. Этот документ с некоторой задержкой был опубликован в газете «Вестник Временного правительства за 23 июля (5 августа) 1917 г. и предписывал проведение учебных занятий на новых факультетах с сентября 1917 г. с формулировкой: «Ввести в действие настоящее постановление до обнародования его Правительствующим Сенатом».

Постановление было подписано в канун июльского политического кризиса 1917 г. В день утверждения постановления о новых факультетах двух российских университетов у власти находилось коалиционное Временное правительство первого состава, министром-председателем которого был князь Г. Е. Львов, а министром народного просвещения – профессор А. А. Мануйлов, бывший ректор Московского университета. Но уже 2 (15) июля 1917 г. Мануйлов вышел в отставку [6]. Во втором составе Временного правительства, сформированном в конце июля и возглавляемом А.Ф. Керенским, обязанности министра народного просвещения были возложены на академика С.Ф. Ольденбурга. Обращает на себя внимание, что постановление об учреждении физико-математического факультетов в Саратове и Томске подписал товарищ министра народного просвещения Павел Иванович Преображенский (1874–1944), геолог по специальности, талантливый администратор и исследователь, первооткрыватель крупных месторождений калийно-магниевых солей и нефти в Прикамье в конце 1920-х гг.



А.А. Мануйлов
A.A. Manuilov



П.И. Преображенский
P.I. Preobrazhenskii



Г.Е. Львов
G.E. Lvov



Выходные данные газеты «Вестник Временного правительства» с Постановлением об учреждении физико-математического факультета в Саратовском университете

The newspaper «Bulletin of the Provisional Government» with the Decree on the establishment of the Physics and Mathematics Faculty at Saratov University

Министр - председатель А. Керенский.

22-го июля 1917 года.

Постановления Временного Правительства.

I. Учредить с 1-го июля 1917 года в составъ Саратовскаго университета факультеты: физико - математический, историко - филологический и юридический и в составъ Томскаго университета: физико-математический и историко-филологический.

II. Распространить на означенные в отдѣлѣ I факультеты, впредь до изданія новыхъ устава и штата российскихъ университетовъ, дѣйствіе общаго устава и штата университета 23-го августа 1884 года (2404), съ послѣдовавшими къ нимъ дополненіями и измѣненіями, а также съ соблюденіемъ нижеслѣдующихъ правилъ:

1. Положенія нѣтъ для медицинскаго факультета Саратовскаго и Томскаго университетовъ касодры: 1) физики съ физической географіей и метеорологіей, 2) химіи органической и неорганической, 3) минералогіи съ геологіей и палеонтологіей, 4) ботаники и 5) зоологіи съ сравнительной анатоміей—включаются въ составъ учреждаемаго физико-математическаго факультета. Профессорами, занимающимъ означенныя каедры, предоставляется избрать перваго декана, а равно первоначальный составъ профессоровъ по прочимъ положеннымъ для физико-математическаго факультета кафедрамъ.

номъ порядкѣ, въ мѣрѣ дѣйствительной надобности.

V. Предоставить министру народнаго просвѣщенія испрашивать, начиная съ 1918 года, кредиты, потребные на окончаніе работъ по сооруженію и оборудованію зданій медицинскаго факультета, а равно на сооруженіе и оборудованіе зданій для прочихъ факультетовъ Саратовскаго и на сооруженіе и оборудованіе зданій новыхъ факультетовъ Томскаго университета въ смѣтномъ порядкѣ, въ мѣрѣ дѣйствительной надобности.

VI. Ввести въ дѣйствіе настоящее постановленіе до обнародованія его правительствующимъ сенатомъ.

Подписали: Министр - председатель князь Львовъ.

За министра народнаго просвѣщенія **II. Преображенскій.**

1-го июля 1917 года.

Объ измѣненіи некоторыхъ статей узаконенія 8-го февраля 1917 г. о предоставленіи совѣту министровъ особыхъ полномочій въ отношеніи акціонерныхъ обществъ, дѣйствующихъ на основаніи утвержденныхъ въ Имперіи уставовъ.

Временное Правительство журналомъ отъ 7-го июля 1917 г. постановило издать нижеслѣдующее постановленіе:

«Въ измѣненіе статей 5, 6, 7, 8 и 9 узаконенія 8-го февраля 1917 года (Собр. узак., ст. 216) постановить:

Ст. 5. По установленіи окончатель-

Фрагмент постановления об учреждении новых факультетов в Саратовском и Томском университетах

The fragment of the decree on the establishment of new Faculties in Saratov and Tomsk Universities

«Граничные и начальные условия», первые преподаватели и первые студенты. 1917–1921

Открытие физико-математического факультета в Саратовском университете было объективно predetermined необходимостью подготовки собственных преподавательских и исследовательских кадров в большом Поволжском регионе. Первым пунктом постановления Временного правительства о новых факультетах фиксировалась дата их открытия – с 1 (14) июля 1917 г. Вторым пунктом определялся общий регламент работы новых факультетов, включая порядок проведения испытаний на «возведение в степень» магистра или доктора, а также избрания на должности ординарного и экстраординарного профессора. Последующими пунктами постановления (третьим, четвертым и пятым) определились финансовые условия работы новых факультетов.

Для физико-математического факультета в постановлении была одновременно определена и его первоначальная структура – путем включения в него ряда кафедр функционировавшего медицинского факультета. В постановлении указывалось:

«Положенные ныне для медицинского факультета Саратовского и Томского университетов кафедры: 1) физики с физической географией и метеорологией, 2) химии органической и неорганической, 3) минералогии с геологией и палеонтологией, 4) ботаники, 5) зоологии с сравнительной анатомией – включаются в состав учреждаемого физико-математического факультета. Профессорам, занимающим означенные кафедры, предоставляется избрать первого декана, а равно первоначальный состав профессоров по прочим положенным для физико-математическим факультета кафедрам».

В Саратове первым деканом физико-математического факультета был избран Владимир Дмитриевич Зёрнов, один из профессоров-основателей университета в 1909 г. Вот как он вспоминал о времени зарождения физико-математического факультета [7, с. 215, 216]:

«... С осени 1917 года новые факультеты были открыты. Так как кафедры физико-математического факультета уже отчасти были налицо, нам было разрешено выбрать декана и секретаря факультета из своей среды.

В то время имелись следующие кафедры: физики (ею заведовал я), химии (Р.Ф. Холлман), зоологии (Б.И. Бируков), ботаники (Д.Э. Янишевский).

<...> Деканом был выбран я, секретарем факультета – Р.Ф. Холлман. Не хватало пока что профессоров математики, механики, второго физика (на кафедре теоретической физики), метеорологии; имелся только один профессор химии, а надо было ещё и органика. Я начал переписку по поводу приглашения математиков с моим бывшим учителем профессором Московского университета Д.Ф. Егоровым, который в то время являлся самым крупным математиком в Москве. Он порекомендовал нам прекрасных математиков – В.В. Голубева и И.И. Привалова. Они приехали в Саратов к началу второго семестра. Когда новые профессора начали читать, все сразу же по заслугам оценили прекрасных учёных и лекторов. После они сами привлекли на факультет Г.Н. Свешникова, тоже очень талантливого математика».

Нужно помнить, что Зёрнов (после защиты магистерской диссертации) приехал в Саратов в 1909 г. по рекомендации своего учителя Петра Николаевича Лебедева, член-корреспондента Петербургской АН, профессора Московского университета [8], причем в «компании» с другими представителями научной школы великого русского физика – П.Н. Неклепаевым, В.Е. Сребницким, К.А. Леонтьевым, лекционным помощником И.М. Серебряковым и искусным механиком Ф.Ф. Троицким. Позднее, в 1918 г., к ним присоединились еще один ученик П.Н. Лебедева – будущий академик Н.Н. Андреев, а также профессор Московского университета, физик-теоретик С.А. Богуславский.

Изначально один из корпусов университета строился под Физический институт. Пользуясь советами П.Н. Лебедева, Зёрнов курировал строительство здания, приобретал учебное и научное оборудование, составившее Коллекцию физических приборов, привез из Петербурга библиотеку учебной и научной литературы по физике от член-корреспондента Петербургской АН О.Д. Хвольсона, организовал механическую мастерскую. Собственно, и первой-то лекцией, про-

звучавшей в стенах Саратовского университета, была лекция по физике, которую В.Д. Зёрнов прочитал 23 сентября 1909 г.

В 1917 г. на физико-математическое отделение приняли 162 студента и 71 вольнослушателя, на естественное отделение – 123 студента и 11 вольнослушателей. Интересно, что «план приема» в тот год определял сам факультет, и этот план (в 240 человек) был перекрыт [7, с 335]. Среди поступивших на факультет в 1917 г. были два человека, которые затем несколько десятилетий проработали в университете, – Пётр Васильевич Голубков, прошедший путь от ассистента до ректора, и Георгий Петрович Боев, будущий первый декан физико-математического факультета.

2 августа 1918 г. Совет Народных Комиссаров за подписью В.И. Ленина принял декрет «О правилах приема в высшие учебные заведения РСФСР», снимавший все ограничения на пути к получению высшего образования, включая и необходимость . . . предварительной подготовки для обучения в вузе, фиксируемую документом об образовании [9]. Большая физическая аудитория в связи с наплывом разнородной публики была переполнена сверх меры, но когда зимой университет замерз, лекции читались всего 20–30 студентам в кабинете ректора В.Д. Зёрнова, избранного на этот пост 28 сентября 1918 г. Часть этих студентов мы, скорее всего, и видим на выпускной фотографии 1921 г. Вместе со студентами запечатлены преподаватели. Вверху – портрет В.Д. Зёрнова, вынужденного в том же году покинуть университет.

1918–1919 гг. отмечены еще несколькими «революционными» социальными (классовыми) декретами и постановлениями, регулирующими научную и образовательную деятельность в стране [5, с. 91]. По одному из них, от 9 октября 1918 г., в стране отменялись ученые степени и звания. Постановлением Наркомата просвещения от 27 ноября 1918 г. в массовом порядке вводились (в современной формулировке) индивидуальные учебные планы. Постановлением Наркомпроса от 11 сентября 1919 г. в вузах открывались автономные учебно-вспомогательные учреждения – подготовительные курсы, названные рабочими факультетами (рабфаками).

«Переменяемость»: Между «хаосом» и «порядком». 1922–1931

В 1920-е годы происходили многократные изменения университетской структуры [5, с. 110], в том числе противоположной направленности. Своё 15-летие Саратовский университет встретил в составе четырех факультетов – медицинского, педагогического, хозяйства и права, рабочего факультета имени В.И. Ленина [10]. В 1922 г. физико-математический факультет вместе с некоторыми другими подразделениями университета был включен в педагогический факультет. Последний подразделялся на физико-техническое, естественное, общественно-экономическое и лингвистическое (с русской и немецкой секциями) отделения. Факультетом в 1925 г. руководили профессор-археолог П.С. Рыков (декан) и профессор-химик В.П. Голуб (зам. декана). Роль секретаря исполнял студент А.П. Токмачев [10]. В 1925 г. на педагогическом факультете обучались 1126 студентов, работали 24 профессора и 14 преподавателей, то есть отношение числа студентов к числу преподавателей составляло 29.6 [11]⁴.

В 1925 г. физико-техническое отделение педагогического факультета состояло из четырех кафедр: математики (проф. Голубев В.В., проф. Свешников Г.Н., доцент Боев Г.П.); механики (проф. Свешников Г.Н.); астрономии (проф. Поллак И.Ф., препаратор Вьюшков П.В.) и физики (проф. Леонтьев К.А., прозектор Трифионов Н.А., ст. ассистент Тринитатская-Архангельская Н.А., препараторы Герасимов С.Г. и Никифоров В.П., механик Троицкий Ф.Ф.).

Учебная работа велась по планам, составленным на основе примерного плана, разработанного Государственным ученым советом (ГУС) Наркомпроса (с триместровым распределени-

⁴ Аналогичные показатели для «старожила» университета – медицинского факультета – выражались числами: 1799 студентов, 27 профессоров, 74 преподавателя; соотношение между числом студентов и преподавателей – 17.9 [10].



В. Д. Зёрнов со студентами в Большой физической аудитории, 1920 [7]

Vladimir D. Zernov with students in the Large Physical Audience, 1920 [7]



Выпускники первого набора физико-математического факультета (физико-математическое отделение) Саратовского университета с преподавателями, 1921 [7]
 Первый ряд, крайний справа Г.П. Боев; второй ряд, слева направо: ?, С.А. Богуславский, К.И. Котелов, ?, В.В. Голубев, И.И. Привалов, Г.Н. Свешников, ?;
 третий ряд, слева направо: ?, ?, Б.И.Котов, ?, Н.П. Неклепаев, ?, К.А. Леонтьев; четвертый ряд, крайний справа Е.А. Гонсбург. Вверху портрет В.Д. Зёрнова,
 вынужденно покинувшего Саратов

The graduates of the first set of Physics and Mathematics Faculty (Department of Physics and Mathematics) of the Saratov University with teachers, 1921 [7] In the
 first line the extreme right is G.P. Boev; in the second line, from left to right: ?, S.A. Boguslavsky, K.I. Kotelov, ?, V.V. Golubev, I.I. Privalov, G.N. Sveshnikov, ?;
 in the third line, from left to right: ?, ?, B.I. Kotov, ?, N.P. Neklepaev, ?, K.A. Leontiev; in the fourth line the extreme right is E.A. Gyunsburg. There is a portrait of
 V.D. Zernov, who forcibly left Saratov

ем предметов). В 1924/1925 учебном году начался переход на бригадно-лабораторный метод организации учебных занятий, характеризуемый резким сокращением лекционных часов (на физико-техническом отделении они составили 21% от общего объема учебных часов), введением принципа коллективного зачета («один за всех») при оценке итогов учебной деятельности «бригады» студентов, увеличением объема практик. Надкафедральные предметные комиссии, на треть состоящие из студентов, регулировали и методическую работу, и отбор кандидатов для научной деятельности. Среди студентов было большое количество условно (с «хвостами») переведенных на следующий курс (в целом по университету 59.7%!). Слабая успеваемость являлась следствием недостаточной довузовской подготовки поступивших, демонстрировавших слабую грамотность, неумение излагать свои мысли в письменной и устной форме, отсутствие должных знаний в области физико-математических дисциплин [10]. Это затрудняло преподавание на уровне, сопоставимом с уровнем дореволюционного университета⁵. Для «исправления» ситуации вводились «новые методы» организации учебного процесса, в частности, ликвидация зачетов, дипломных работ, введение активных методов преподавания и сокращения учебных планов. В заметке «Классовая борьба в вузах» [1, с. 284], опубликованной в газете «Правда» 10 апреля 1930 г., автор задавался вопросом: «В какой степени реализованы решения о реорганизации учебной работы в саратовских вузах?». Вывод был неутешителен: физики и математики Саратовского университета не признают «новые методы», они стоят горой за знания и способности студентов, «цепко держатся за дипломные работы».

Существенная деталь: уже с первых лет существования факультета на нем велась активная научная работа. Среди научных достижений физиков и математиков в отчете за 1925 г. [10] отмечены исследования и разработки профессоров К.А. Леонтьева [12], П.В. Голубкова [13], И.Ф. Поллака, В.В. Голубева [14] и Г.Н. Свешникова. Как определенную дань успехам саратовских физиков можно рассматривать проведение 15 августа 1928 г. в Большой физической аудитории заключительного заседания Шестого Всесоюзного съезда физиков, в котором приняли участие ведущие ученые СССР и зарубежных стран [15, 16].

Катастрофа «разборки». 1930–1932

В первой половине 1930-х годов университет подвергся серьезным испытаниям, связанным с выделением из него ряда структурных подразделений в качестве самостоятельных высших учебных и исследовательских заведений. Из университета выводились кадры и материально-методическое обеспечение⁶. На базе университета было создано 8 вузов (в том числе педагогический институт) и несколько исследовательских учреждений [5]. В университете наступил поистине кадровый голод. Потери понесли и физики и математики, поскольку часть преподавателей стала работать в педагогическом институте и других вузах. Естественно, наиболее существенной утратой для университета стал вывод из него прекрасного по кадрам, структуре и оснащению медицинского факультета, что привело, в частности, и к местному варианту проблемы «яйцо и курица».

В то же время в 1931 г. коллектив физиков и математиков был восстановлен в факультетском ранге. Наконец, было признано основополагающее значение университетского образования в структуре высшего образования страны. «Естественные» составляющие физико-математического факультета образовали самостоятельные факультеты: химический (1929), биологический (1931), геологический (1931), географический (1938, с 1931 – в составе геолого-почвенно-географического факультета).

⁵В [10, с. 32] приводится такой пример: «При попытке профессора провести лекцию по физике так, как это следовало бы при прежних требованиях, он получил замечание от студентов, что его “никто не понимает”».

⁶Еще летом 1930 г. уехал в Москву, в Центральный аэродинамический институт профессор В.В. Голубев.

Формирование «устойчивых структур». 1935–1945

Занявший в июне 1935 г. пост директора СГУ Г.К. Хворостин решил кадровую проблему единственно доступным тогда путём – посредством приглашения ведущих столичных учёных, оказавшихся в ту пору в сложных жизненных обстоятельствах. Это был очень смелый шаг, который «местные критики» не простили Хворостину [17]. В Саратов, на физико-математический факультет университета, приехали работать, как и в первую волну, выдающиеся специалисты, будущие академики и лауреаты государственных премий. Появились и свои талантливые выпускники.

Так, Д.И. Блохинцев в 1937 г. основал в СГУ кафедру теоретической физики. Ленинградец В.П. Жузе открыл в Саратове направление по физике полупроводников и диэлектриков (кафедра физики твёрдого тела была открыта в 1945 г.) [18]. Е.Ф. Гросс читал лекции по оптике и молекулярной спектроскопии (кафедра оптики открыта в 1946 г.). Работами К.А. Леонтьева, профессора «первого призыва», в Саратове успешно началась история радиофизики (кафедра оформилась в 1951 г., её возглавил выпускник СГУ В.И. Калинин [19]). Ученик Леонтьева, выпускник физико-математического факультета П.В. Голубков с 1932 г. руководил не только кафедрой общей физики, но и факультетом, университетом, а также (временно) вновь открывавшимися в 1952 г. кафедрами физического профиля [13].

На кафедре физики в середине 1930-х гг. работали П.В. Голубков (заведующий кафедрой), В.И. Калинин (доцент), В.П. Жузе (доцент), Г.А. Остроумов (доцент), В.Н. Немов (доцент), П.А. Семенов (ассистент), С.А. Суслов (ассистент), В.Я. Красильников (лаборант), С.В. Соломонов (лаборант), Ф.Ф. Троицкий (старший механик).

С середины 1930-х гг. в университете пополнилось и число кафедр математического профиля. Из Москвы в Саратов приехали А.Я. Хинчин, ставший заведующим кафедрой теории вероятностей и теории чисел, И.Г. Петровский (он заведовал кафедрой математического анализа), В.В. Вагнер (он руководил кафедрой геометрии), А.Г. Курош заведовал кафедрой алгебры. С.Г. Лехницкий проработал в университете 22 года, стал заведующим кафедрой теории упругости и лауреатом Государственной (Сталинской II степени) премии. В 1940 году, после стажировки у академика И.М. Виноградова, в Саратов вернулся Н.Г. Чудаков, который возглавил кафедру алгебры и теории чисел. Периодически в университет из МГУ приезжал член-корреспондент Академии наук СССР Л.С. Понтрягин.

До их приезда на кафедре математики работали Г.П. Боев (профессор), А.Л. Правдолюбов (доцент), Б.К. Ризенкампф (доцент), Н.А. Черемашенцев (доцент), А.К. Павлючук (доцент, бывший аспирант кафедры), С.Е. Белозеров (доцент, бывший аспирант кафедры). Ассистентом работал, будучи одновременно аспирантом, будущий профессор МГУ Б.В. Гнеденко. Наглядное представление о преподавательских и студенческих составах физико-математического факультета дает фотография выпускников факультета 1936 г. [17], среди которых – будущие профессора СГУ З.И. Кирьяшкина и С.В. Фалькович.

Бифуркация удвоения. 1945

В годы Великой Отечественной войны физики и математики, не прерывая учебного процесса, успешно работали по оборонной тематике (В.П. Жузе, П.В. Голубков, З.И. Кирьяшкина, В.В. Игонин, Л.В. Штромбергер, ленинградцы Е.Ф. Гросс, В.М. Чулановский, С.Э. Фриш⁷, А.В. Тиморева и др.).

В 1945 г. физико-математический факультет был разделен на физический и механико-математический факультеты, которые пошли отдельными «дорогами», по необходимости «син-

⁷С.Э. Фриш оставил воспоминания [20].

хронизуясь» в рамках рабочих учебных планов. Учебный 1945/1946 г. физический факультет встретил в составе четырех кафедр – общей (экспериментальной) физики, теоретической физики, физики твердого тела, астрономии. Но уже в 1946 г. была организована кафедра оптики [21], в 1951 г. – кафедра радиофизики [19], в 1952 г. – кафедры электроники [22, 23], электро- и радиотехники, физики вакуума и электровакуумных технологий [24]. Довоенные тесные контакты А.Д. Степуховича с лауреатом Нобелевской премии академиком Николаем Николаевичем Семёновым привели к серьёзным достижениям в области химической физики, ознаменовавшимися, в частности, открытием на физическом факультете в 1958 г. первой в стране кафедры химической физики [25].

Заключение. Нелинейные процессы

Говоря об итогах работы физического факультета, можно отметить, что выпускники-физики в 1950–1980-е гг. обеспечили, в частности, превращение Саратова в «электронную столицу» СССР, сделали крупный вклад в развитие атомной промышленности страны, составили кадровый костяк высших учебных заведений Поволжья и открытых в 1980-х гг. в Саратове академических институтов. Ряд работников радиоэлектронных предприятий Саратова, выпускников физического факультета, отмечены Государственными премиями.

Среди выпускников физического факультета 3 академика РАН: Л.П. Питаевский (теоретическая физика), А.В. Чаплик (физика полупроводников), Ф.М. Митенков (атомное машиностроение); член-корреспондент РАН Д.И. Трубецков (вакуумная электроника, нелинейная динамика); лауреат Государственной премии РФ 2000 г. в области науки и техники Н.И. Синицын, лауреат премии Правительства РФ 2002 г. в области науки и техники В.И. Наянов.

Накопленный научно-образовательный потенциал и современная дифференциация образования сделали возможным создание на базе «классических» факультетов – физического и механико-математического – трёх новых факультетов: факультета нелинейных процессов (1994), компьютерных наук и информационных технологий (2000), нано- и биомедицинских технологий (2005). Лауреатами премии Президента РФ в области образования стали Д.И. Трубецков (2000, факультет нелинейных процессов) и А.Г. Федорова (2003, факультет компьютерных наук и информационных технологий). Таким образом, подготовка бакалавров, магистров и аспирантов в области математики, физики и информационных технологий проходит на 5 факультетах Саратовского государственного университета. Эти факультеты являются центром развития и популяризации математических, физических, компьютерных знаний и технологий их преподавания в масштабах региона и страны. Научная деятельность факультетов часто носит междисциплинарный и межфакультетский характер, осуществляется в рамках многочисленных научных грантов, к которым в последние годы прибавились мегагранты, выполняемые с участием ведущих зарубежных учёных.

Библиографический список

1. Протоколы заседаний Совета за январь–март 1916 года // Изв. Сарат. ун-та, 1917. Т. VIII, вып. 1 и 2. Университетская летопись. С. 1–76.
2. Волков М.Ф. История учреждения Саратовского университета и Саратовская городская дума. 1 декабря 1906 г. – 6 декабря 1909 г.: Воспоминания и заметки / Мин-во культуры Саратовской обл., Саратовский областной музей краеведения; [сост. В. В. Критский].
3. Шварц А.Н. Моя переписка со Столыпиным. Мои воспоминания о Государе. М.: Греко-латинский кабинет, 1994. 361 с.

4. *Аникин В.М., Пойзнер Б.Н., Соснин Э.А., Шувалов А.В.* Феномен научной школы: История, типология получения и передачи знаний, психология коммуникаций / под общ. ред. В.М. Аникина. Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 2015. 232 с.
5. *Аврус А.И., Гапоненков А.А., Данилов В.Н.* История Саратовского университета. 1909–2009: В 2-х т. Т. 1. 1909–1945. Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 2009. 296 с.
6. *Хотеевков В.* «Уравновешенная натура духовного европейца» (министр народного просвещения А.А. Мануйлов) // Высшее образование в России. 2002. № 3. С. 118–132.
7. *Зёрнов В.Д.* Записки русского интеллигента. М.: Изд-во «Индрик», 2005. 400 с.
8. *Аникин В.М.* «Фабрика молодых физиков» П. Н. Лебедева и Саратовский университет // УФН. 2016. Т. 186, № 2. С. 169–173.
9. *Геворкян Е.Н., Правкина И.А., Усанов Д.А.* Прием в вузы России. Как это было и что будет. 3 изд., доп. и перераб. Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 2008. 92 с.
10. Саратовский государственный имени Н. Г. Чернышевского университет в 1925 году (Краткие сведения о состоянии и работе). Приложение к V тому «Ученых записок». Саратов: [б.и.], 1926. 57 с.
11. *Семичастнов М.* Саратовский университет как культурный центр Нижнего Поволжья // Нижнее Поволжье. 1925. № 10. С. 86–92.
12. *Голубков П.В.* Константин Александрович Леонтьев // Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. Физика. 2014. Т. 14, вып. 1. С. 65–68.
13. *Дмитриев Б.С.* Пётр Васильевич Голубков // Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. Физика. 2014. Т. 14, вып. 1. С. 69–75.
14. *Хромов А.П.* Владимир Васильевич Голубев // Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2009. Т. 9, вып. 4, ч. 1. С. 88–89.
15. *Усанов Д.А.* Международные встречи российских физиков в прошлом и настоящем // Изв. вузов. ПНД. 2013. Т. 21, № 3. С. 127–154.
16. *Аникин В.М.* «Приобретать умение делать физические измерения и исследования»: К 100-летию физического образования и физической науки в Саратове // Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. Физика. 2014. Т. 14, вып. 1. С. 53–58.
17. *Трубецкова И.А.* Университетская Вселенная ректора Г.К. Хворостина: Рождение и гибель // Изв. вузов. ПНД. 2017. Т. 25, № 2. С. 89–103.
18. *Усанов Д.А.* К 100-летию профессора Владимира Пантелеймоновича Жузе // Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. Физика. 2005. Т. 5, вып. 1. С. 108–109.
19. *Анищенко В.С.* Профессор В.И. Калинин и университетское образование // Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. Физика. 2007. Т. 7, вып. 1. С. 58–64.
20. *Фриш С.Э.* Сквозь призму времени: 2-е изд., испр. и доп. / Под ред. М.С. Фриш. СПб.: Соло, 2009. 242 с.
21. *Тучин В.В.* Юбилей кафедры оптики и биомедицинской физики и столетие ее основателя профессора Марка Львовича Каца // Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. Физика. 2007. Т. 7, вып. 1. С. 65–74.
22. *Жарков Ю.Д., Короновский А.А., Лёвин Ю.И., Хромов А.Е.* Кафедре электроники, колебаний и волн Саратовского университета – 60 лет // Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. Физика. 2012. Т. 12, вып. 1. С. 77–90.
23. *Семенов В.Н.* Три ректора – одна кафедра // Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2012. Т. 20, № 4. С. 11–46.
24. *Салий И.Н.* К 60-летию физического факультета Саратовского государственного универ-

ситета им. Н.Г. Чернышевского (фрагменты истории) // Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. Физика. 2005. Т. 5, вып. 1. С. 5–38.

25. Аникин В.М. Николай Николаевич Семёнов: Фрагменты научной биографии. Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 2017. 80 с.

References

1. Protocols of the Council Meetings for January–March 1916. University Chronicle. *Izv. Saratov Univ.*, 1917, vol. VIII, iss. 1, 2, pp. 1–76 (in Russian).
2. Volkov M.F. History of the Institution of the Saratov University and the Saratov City Duma. December 1, 1906 – December 6, 1909: Memoirs and Notes. Saratov, Min. of Culture of the Saratov Region, Saratov Regional Museum of Local History; comp. V.V. Kritsky. Saratov: Publishing house «Novy veter», 2015, 232 p.
3. Schwarz A.N. My Correspondence with Stolypin: My Memories of the Emperor. Moscow: Yu.A. Shichalin's Greco-Latin room, 1994, 362 p. (in Russian).
4. Anikin V.M., Poizner B.N., Sosnin E.A., Shuvalov A.V. The Phenomenon of the Scientific School: History, Typology of the Knowledge Receipt and Transmission, Psychology of Communication. Ed. V.M. Anikin. Saratov University Press, 2015, 232 p. (in Russian).
5. Avrus A.I., Gaponenkov A.A., Danilov V.N. The History of Saratov University. Saratov, Saratov University Press, 2009, vol. 1, 296 p. (in Russian).
6. Khoteyenkov V. «The Balanced Nature of a Spiritual European» (Minister of Education A.A. Manuylov). *Higher Education in Russia*, 2002, no. 3, pp. 118–132 (in Russian).
7. Zernov V.D. Notes of the Russian Intelligent. Moscow: Publishing House «Indrik», 2005, 400 p. (in Russian).
8. Anikin V.M. P.N. Levedev's «Factory of Young Physicists» and Saratov University. *Phys. Usp.*, 2016, vol. 59, no. 2, pp. 162–166.
9. Gevorkyan E. N., Pravkina IA, Usanov D. A. Admission to Universities of Russia. As It was and What will Happen. 3rd ed., add. and rev. Saratov University Press, 2008, 92 p.
10. Saratov State University in 1925: Brief information about the state and work. *Scientific Notes*, 1926, vol. V, suppl., Saratov, 57 p. (in Russian).
11. Semichastnov M. Saratov University as a cultural center of the Lower Volga region. *Nizhneye Povolzh'ye [Lower Volga region]*, 1925, no. 10, pp. 86–92 (in Russian).
12. Golubkov P.V. Konstantin A. Leontiev. *Izv. Saratov Univ. (N.S.), Ser. Physics*, 2014, vol. 14, iss. 1, pp. 65–68 (in Russian).
13. Dmitriev B.S. Petr V. Golubkov: Pages of biography in context of Physical Faculty and University history. *Izv. Saratov Univ. (N.S.), Ser. Physics*, 2014, vol. 14, iss. 1, pp. 69–75 (in Russian).
14. Khromov A.P. Vladimir V. Golubev. *Izv. Saratov Univ. (N.S.), Ser. Math., Mech., Inform.*, 2009, vol. 9, iss. 4, part 1, pp. 88–89 (in Russian).
15. Usanov D.A. International meetings of Russian physicists in the past and the present. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*, 2013, vol. 21, no. 3, pp. 127–134 (in Russian).
16. Anikin V.M. «To get the ability to do the physical measurement and research». A Centenary of physical education and science in Saratov. *Izv. Saratov Univ. (N.S.), Ser. Physics*, 2014, vol. 14, iss. 1, pp. 53–58 (in Russian).
17. Trubetskova I.A. University Universe of the principal G.K. Hovorostin: The birth and the death. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*, 2017, vol. 25, no. 2, pp. 89–103 (in Russian).

18. Usanov D.A. On the 100th anniversary of professor Vladimir P. Zhuse. *Izv. Saratov Univ. (N.S.), Ser. Physics*, 2005, vol. 5, iss. 1, pp. 108–109 (in Russian).
19. Anishchenko V.S. Professor V.I. Kalinin and university education. *Izv. Saratov Univ. (N.S.), Ser. Physics*, 2007, vol. 7, iss. 1, pp. 58–64 (in Russian).
20. Frisch S.E. Through the Prism of Time: 2nd ed., rev. and add. Ed. M.S. Frisch, St. Petersburg, Publishing House «Solo», 2009, 242 p. (in Russian).
21. Tuchin V.V. Jubilee of Chair of Optics and Biomedical Physics and 100-Years Anniversary of Its Founder – Professor Mark L. Katz. *Izv. Saratov Univ. (N.S.), Ser. Physics*, 2007, vol. 7, iss. 1, pp. 65–74 (in Russian).
22. Zharkov Yu.D., Koronovskii A.A., Levin Yu.I., Hramov A.E. Department of Electronics, Oscillations and Waves of Saratov State University Celebrates Sixtieth Anniversary. *Izv. Saratov Univ. (N.S.), Ser. Physics*, 2012, vol. 12, iss. 1, pp. 77–90 (in Russian).
23. Semenov V.N. Three Rectors – one Department. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*, 2012, vol. 20, no 4, pp. 11–46 (in Russian).
24. Saliy I.N. The 60th Anniversary of the Department of Physics of the Saratov State University: Fragments of the History. *Saratov Univ. (N. S.), Ser. Physics*, 2005, vol. 5, iss. 1, pp. 5–38 (in Russian).
25. Anikin V.M. Nikolai N. Semenov: Fragments of the Scientific Biography. Saratov, Saratov University Press, 2017, 80 p. (in Russian).



Аникин Валерий Михайлович родился в Аткарске Саратовской области (1947). Окончил физический факультет Саратовского государственного университета (1970). Доктор физико-математических наук, профессор, декан физического факультета СГУ, заведующий кафедрой компьютерной физики и метаматериалов на базе Саратовского филиала Института радиотехники и электроники имени В.А. Котельникова РАН, ученый секретарь диссертационного совета Д 212.243.01 на базе СГУ. Область научных интересов – математическое моделирование хаотических и стохастических процессов, история физики, диссертационное исследование. Почетный работник высшего профессионального образования Российской Федерации (2012).

Россия, 410012 Саратов, ул. Астраханская, 83
 Саратовский университет имени Н.Г. Чернышевского
 E-mail: AnikinVM@info.sgu.ru



УДК 530.182, 517.9

<https://doi.org/10.18500/0869-6632-2018-26-6-20-31>

О влиянии нарушения симметрии на устройство фазового пространства обратимых систем со смешанной динамикой

А. П. Кузнецов^{1,2}, А. Ж. Рахманова¹, А. В. Савин¹

¹Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н.Г. Чернышевского
Россия, 410012 Саратов, Астраханская, 83

²Саратовский филиал Института радиотехники и электроники им. В.А. Котельникова РАН
Россия, 410019 Саратов, Зелёная, 38

E-mail: arkuz@yandex.ru, aliiiia.rakhmanova@mail.ru, AVSavin@rambler.ru

Автор для переписки Савин Алексей Владимирович, AVSavin@rambler.ru

Поступила в редакцию 13.07.2018, принята к публикации 30.10.2018

Тема – рассмотрение влияния нарушения симметрии на устройство фазового пространства обратимых систем. **Цель** – исследование трансформации устройства фазового пространства обратимых систем с симметрией при ее нарушении, в частности, типов возникающих и сосуществующих аттракторов и возможности проявления мультистабильности. Анализ отличия возникающих в этом случае близких к консервативным режимов от аналогичных режимов, возникающих в системах с постоянной слабой диссипацией. **Методы** – численное моделирование системы связанных фазовых уравнений, описывающих динамику четырех осцилляторов со слабым взаимодействием и с различными функциями связи, как удовлетворяющими условию симметрии, так и приводящими к нарушению этого условия. Для анализа динамики системы использованы методы построения фазовых портретов и аттракторов и расчета спектра ляпуновских показателей. Проведены поиск устойчивых и неустойчивых периодических режимов и построение многообразий седловых циклов. **Результаты.** Показано, что при нарушении симметрии в системе связанных фазовых осцилляторов консервативная динамика разрушается, и в фазовом пространстве возникают аттракторы. В отличие от систем с постоянной слабой диссипацией, количество сосуществующих аттракторов невелико, однако возможно возникновение не только периодических, но и хаотических аттракторов, а также гетероклинических структур в фазовом пространстве. **Обсуждение.** Вследствие того, что исследованная система достаточно проста и является модельной для широкого класса систем различной природы – слабо взаимодействующих цепочек связанных колебательных систем, – можно ожидать, что полученные результаты будут обладать достаточно большой степенью общности.

Ключевые слова: смешанная динамика, мультистабильность.

Образец цитирования: Кузнецов А.П., Рахманова А.Ж., Савин А.В. О влиянии нарушения симметрии на устройство фазового пространства обратимых систем со смешанной динамикой // Изв. вузов. ПНД. 2018. Т. 26, № 6. С. 20–31. <https://doi.org/10.18500/0869-6632-2018-26-6-20-31>

The effect of symmetry breaking on reversible systems with mixed dynamics

A. P. Kuznetsov^{1,2}, A. Zh. Rahmanova¹, A. V. Savin¹

¹Saratov State University

83, Astrakhanskaya str., 410012 Saratov, Russia

²Institute of Radio-Engineering and Electronics of RAS, Saratov Branch

38, Zelyonaya str., 410019 Saratov, Russia

E-mail: apkuz@yandex.ru, aliiia.rakhmanova@mail.ru, AVSavin@rambler.ru

Correspondence should be addressed to Savin Alexey V., AVSavin@rambler.ru

Received 13.07.2018, accepted for publication 30.10.2018

Theme – the effect of symmetry violation on the structure of the phase space of invertible systems. **Aim** – to study the changes in the phase space structure of invertible systems caused by the violation of symmetry, in particular, the possibility of multistability and the types of coexisting attractors. The peculiarities in comparison with the similar regimes in the systems with fixed constant dissipation also studied. **Methods** – the numerical simulation of the system of coupled phase equations for four oscillators with weak coupling with different coupling functions both with symmetry and without it. The methods of phase portraits and attractors plotting, the calculation of Lyapunov exponents spectra, the search for stable and unstable cycles and the manifolds of saddle cycles are used. **Results**. It was shown that the violation of symmetry results in the destruction of conservative dynamics and the attractors occur. Unlike the systems with constant weak dissipation the number of coexisting attractors is small but both periodic and chaotic attractors occur. The heteroclinic structures also are revealed. **Discussion** – the results are rather common because of the simple nature of used system which is the model system for the wide class of systems – the chains of oscillating systems with weak coupling.

Key words: mixed dynamics, multistability.

Reference: Kuznetsov A.P., Rahmanova A.Zh., Savin A.V. The effect of symmetry breaking on reversible systems with mixed dynamics. *Izvestiya VUZ, Applied Nonlinear Dynamics*, 2018, vol. 26, no. 6, pp. 20–31.

<https://doi.org/10.18500/0869-6632-2018-26-6-20-31>

1. Традиционно в нелинейной динамике принято различать два класса динамических систем: консервативные и диссипативные. Для консервативных систем характерно сохранение фазового объема в процессе временной эволюции. Фазовый объем диссипативных систем изменяется с течением времени, для таких систем характерно существование притягивающих инвариантных множеств – аттракторов [1, 2].

Сравнительно недавно [3] было указано, что обратимые системы с симметрией [3–10] фактически можно рассматривать как отдельный, третий класс систем со смешанной динамикой. Такие системы обладают определенной симметрией, заключающейся в инвариантности уравнений относительно одновременного применения обращения времени и некоторого преобразования координат. Очевидно, что в таких системах любому притягивающему множеству соответствует симметричное ему (то есть переходящее в него при этом преобразовании координат) отталкивающее множество. Если же некоторое предельное множество системы полностью лежит на многообразии, инвариантном относительно преобразования координат, то оно переходит в себя при обращении времени, что является характерным свойством консервативного режима. Таким образом, обратимые (в смысле [3]) системы допускают существование консервативных режимов на некотором многообразии в фазовом пространстве, в то время как система в целом остается диссипативной.

В связи с этим представляет интерес ситуация, при которой в систему вводится малое возмущение, нарушающее симметрию в фазовом пространстве. При этом вместо консервативных должны возникать в некотором смысле близкие к ним диссипативные режимы.

Следует отметить, что к настоящему времени существует значительное число работ [11–32], посвященных исследованию «обычных» почти консервативных систем, то есть систем с постоянной во всем фазовом пространстве, но весьма малой диссипацией. В ряде работ [11, 14, 16, 29, 32] было показано, что для таких систем типичным является, в частности, сосуществование большого (в некоторых случаях до сотен) числа аттракторов, как правило, схожей структуры. Представляется интересным исследовать, в какой мере возникающие при нарушении симметрии режимы будут схожи с режимами, возникающими в слабо диссипативных системах.

В настоящей работе проведено исследование изменений в устройстве фазового пространства систем с симметрией, вызванное нарушением симметрии связи и, соответственно, разрушением консервативной динамики, на примере предложенной в работе [33] цепочки связанных фазовых осцилляторов.

2. Известно [34], что если связь между осцилляторами мала, то для описания их динамики может быть достаточно фазовых уравнений. В этом случае цепочка четырех связанных осцилляторов может быть описана системой уравнений вида

$$\begin{aligned}\dot{\varphi}_k &= \omega_k + \varepsilon f(\varphi_{k-1} - \varphi_k) + \varepsilon f(\varphi_{k+1} - \varphi_k), \\ k &= 1, \dots, 4,\end{aligned}\tag{1}$$

где φ_k и ω_k – фаза и собственная частота k -го осциллятора; f – функция взаимодействия, которая должна быть 2π -периодична. Переходя к разностям фаз $\phi_k = \varphi_{k+1} - \varphi_k$ и принимая частотные расстройки $\Delta_k = \omega_{k+1} - \omega_k$ соседних осцилляторов одинаковыми, после перенормировок получим систему [34]

$$\begin{aligned}\dot{\psi}_k &= 1 + \varepsilon f(\psi_{k-1}) + \varepsilon f(\psi_{k+1}) - 2\varepsilon f(\psi_k), \\ k &= 1, \dots, 3,\end{aligned}\tag{2}$$

единственным параметром в которой является амплитуда связи ε .

В отсутствие связи фазовые уравнения соответствуют равномерному росту переменной, поэтому динамика переменной полностью определяется функцией связи $f(\phi)$. Если разложение функции связи в ряд Фурье содержит только нечетные гармоники, то в подпространстве $\phi_2 = \pi/2$ система (2) инвариантна относительно обращения времени и замены переменных

$$\phi_1 \rightarrow \pi - \phi_3, \quad \phi_3 \rightarrow \pi - \phi_1,\tag{3}$$

следовательно, в соответствии с [3], эта система является обратимой, при этом инвариантным множеством является прямая $\phi_1 + \phi_3 = \pi$, $\phi_2 = \pi/2$.

В простейшем случае, когда функция связи содержит только одну гармонику, система имеет вид

$$\begin{aligned}\dot{\psi}_1 &= 1 - 2\varepsilon \sin \psi_1 + \varepsilon \sin \psi_2, \\ \dot{\psi}_2 &= 1 - 2\varepsilon \sin \psi_2 + \varepsilon \sin \psi_1 + \varepsilon \sin \psi_3, \\ \dot{\psi}_3 &= 1 - 2\varepsilon \sin \psi_3 + \varepsilon \sin \psi_2.\end{aligned}\tag{4}$$

На рис. 1 представлены фазовые портреты отображения Пуанкаре системы (4), построенного с использованием секущей плоскости $\phi_2 = \pi/2$. Начальные условия для построения траекторий выбирались на симметричном многообразии. Можно видеть, что фазовые портреты

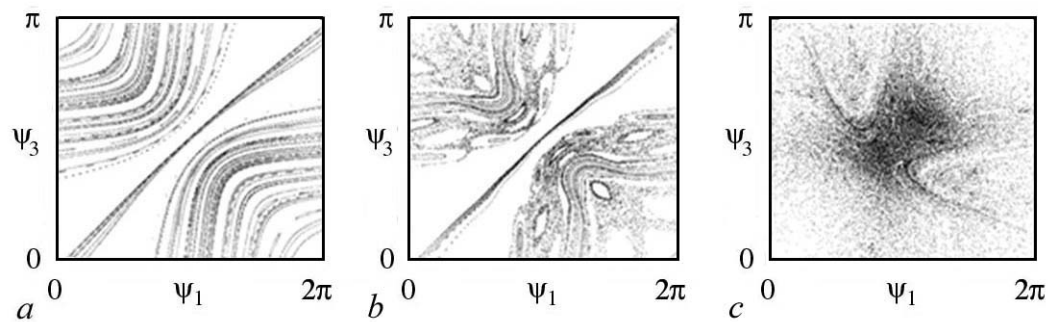


Рис. 1. Фазовые портреты системы (3): *a* – квазипериодическая динамика, $\varepsilon = 0.3$; *b* – сосуществование квазипериодических и хаотических режимов, $\varepsilon = 0.39$; *c* – хаотический режим, $\varepsilon = 0.49$

Fig. 1. Phase portraits of system (3): *a* – quasiperiodic regime, $\varepsilon = 0.3$; *b* – coexistence of quasiperiodic and chaotic regimes, $\varepsilon = 0.39$; *c* – chaotic regime, $\varepsilon = 0.49$

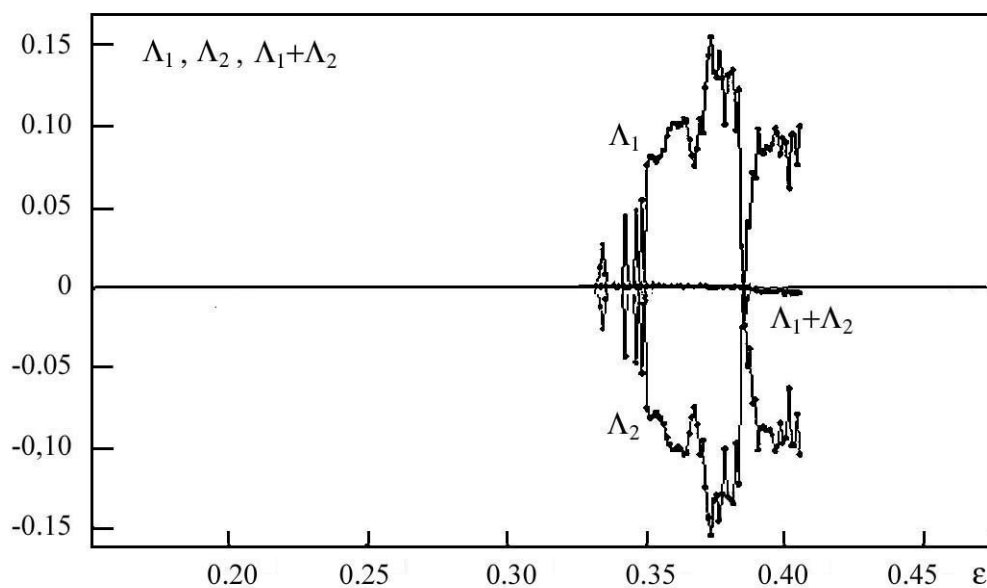


Рис. 2. График зависимости ляпуновских показателей и их суммы от значения амплитуды связи ε

Fig. 2. The plot of Lyapunov exponents and their sum on the coupling parameter ε

имеют типичный для консервативных систем вид. При малом значении управляющего параметра ε траектории регулярны (рис. 1, *a*); при его увеличении появляются области хаотической динамики и островки устойчивости (рис. 1, *b*); при относительно больших значениях ε динамика почти всюду хаотическая (рис. 1, *c*).

На рис. 2 приведен график зависимости от амплитуды связи ε двух показателей Ляпунова¹ и их суммы, рассчитанные для «типичной» траектории (начальные условия $\phi_1 = 4.00$, $\phi_3 = 6.00$). Видно, что значение суммы ляпуновских показателей с хорошей точностью (до 10^{-6}) равно нулю вплоть до достаточно больших значений ε , в том числе соответствующих хаотической динамике. Последнее свидетельствует о сохранении в среднем фазового объема, то есть реализации консервативной динамики.

¹Еще один показатель Ляпунова тождественно равен нулю.

3. В общем случае функция связи может быть представлена в виде суммы гармоник

$$f(\varphi) = \sum_m \sin m\psi. \quad (5)$$

Система вида (2) будет симметричной относительно замены (3), если функция связи содержит только нечетные гармоники. Если же функция связи будет содержать также и четные гармоники, то симметрия будет нарушена. Такими свойствами обладает следующая система:

$$\begin{aligned} \dot{\psi}_1 &= 1 - 2\varepsilon(\sin \psi_1 + (A - d) \sin 3\psi_1 + d \sin 2\psi_1) + \varepsilon(\sin \psi_2 + (A - d) \sin 3\psi_2 + d \sin 2\psi_2), \\ \dot{\psi}_2 &= 1 - 2\varepsilon(\sin \psi_2 + (A - d) \sin 3\psi_2 + d \sin 2\psi_2) + \varepsilon(\sin \psi_1 + (A - d) \sin 3\psi_1 + d \sin 2\psi_1) + \\ &+ \varepsilon(\sin \psi_3 + (A - d) \sin 3\psi_3 + d \sin 2\psi_3), \end{aligned} \quad (6)$$

$$\dot{\psi}_3 = 1 - 2\varepsilon(\sin \psi_3 + (A - d) \sin 3\psi_3 + d \sin 2\psi_3) + \varepsilon(\sin \psi_2 + (A - d) \sin 3\psi_2 + d \sin 2\psi_2).$$

Параметр d в этом случае характеризует степень нарушения симметрии.

На рис. 3 изображены фазовые портреты отображения Пуанкаре системы (6), полученные численно при плоскости сечения $\phi_2 = \pi/2$. Видно, что при отсутствии четной гармоники траек-

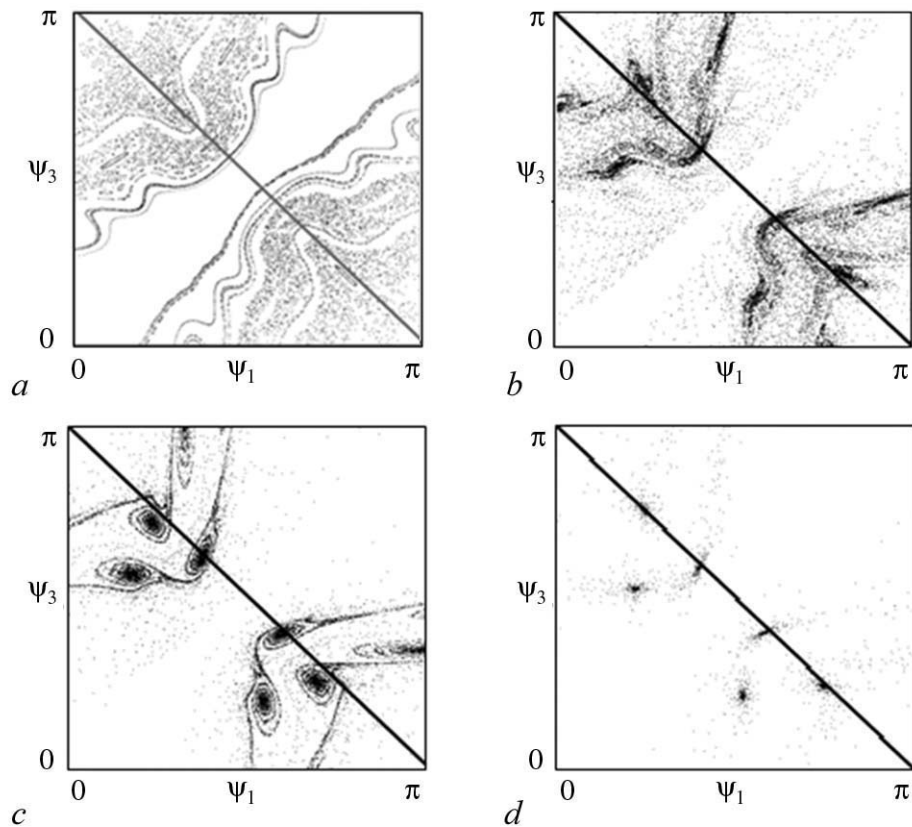


Рис. 3. Фазовые портреты системы (6) при $A=0.2$ и различных значениях параметра d : $a - 0$, $b - 0.05$, $c - 0.17$, $d - 0.2$
 Fig. 3. Phase portraits of (6) for $A = 0.2$ and different values of parameter d : $a - 0$, $b - 0.05$, $c - 0.17$, $d - 0.2$

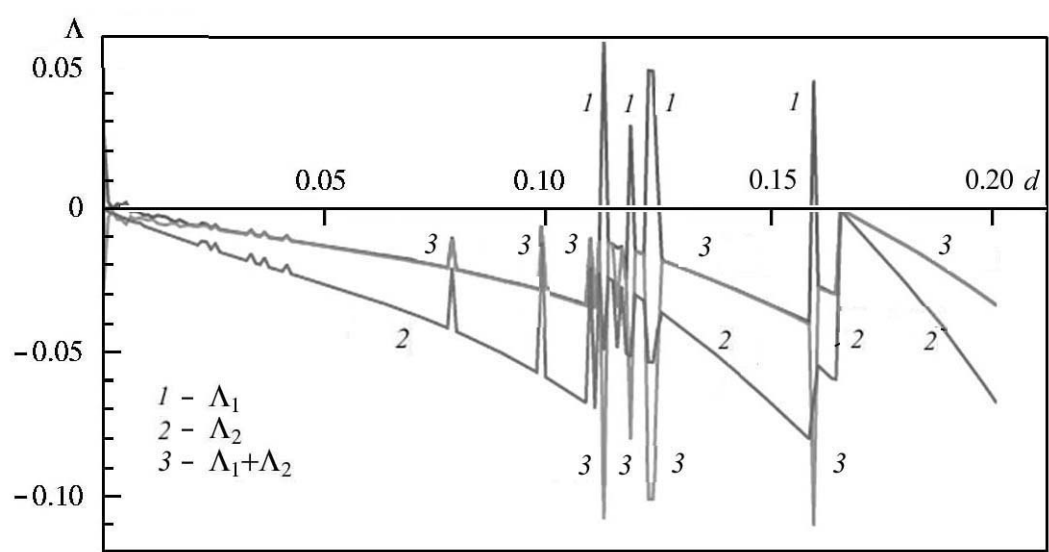


Рис. 4. График зависимости ляпуновских показателей и их суммы от значений параметра d при параметре связи $\varepsilon = 0.348$

Fig. 4. The plot of Lyapunov exponents and their sum on the parameter d for coupling parameter $\varepsilon = 0.348$

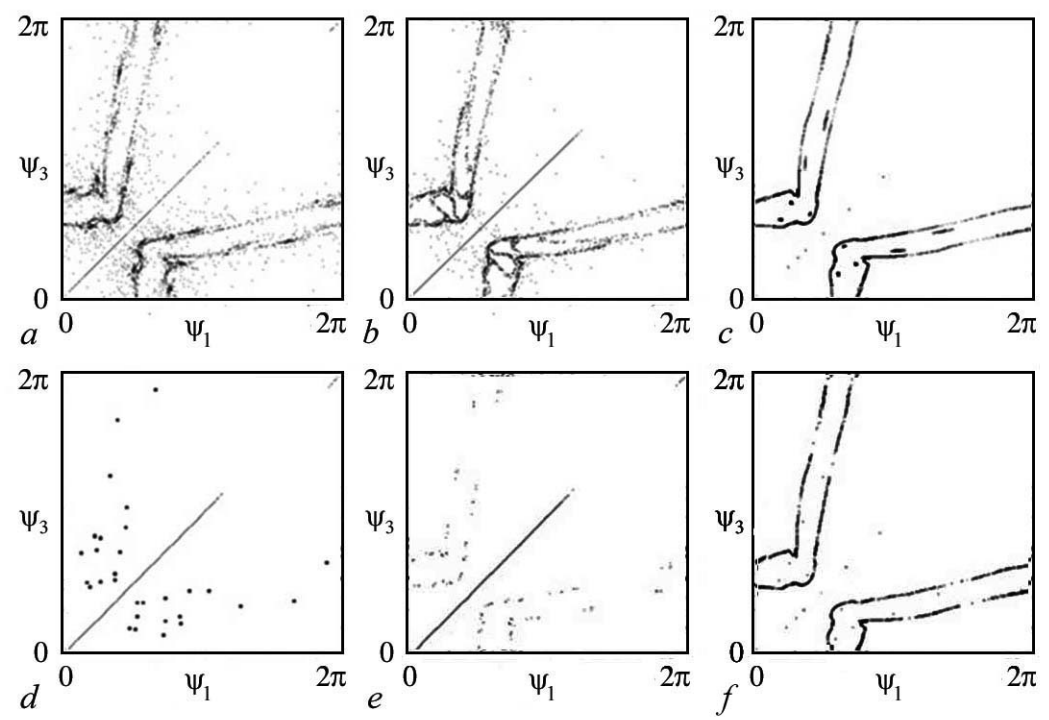


Рис. 5. Фазовые портреты с учетом переходного процесса (a)–(c) и аттракторы (d)–(f) системы (6) для различных d и ε : $d = 0.12$, $\varepsilon = 0.35$ (a), (d); $d = 0.148125$, $\varepsilon = 0.35$ (b), (e); $d = 0.16$, $\varepsilon = 0.348$ (c), (f)

Fig. 5. Phase portraits with transition process (a)–(c) and attractors (d)–(f) of (6) for different parameters d and ε : $d = 0.12$, $\varepsilon = 0.35$ (a), (d); $d = 0.148125$, $\varepsilon = 0.35$ (b), (e); $d = 0.16$, $\varepsilon = 0.348$ (c), (f)

тории на фазовой плоскости симметричны относительно прямой $\phi_1 + \phi_3 = \pi$ и соответствуют консервативной динамике (рис. 3, *a*). При наличии четной гармоники симметрия траекторий на фазовой плоскости нарушается и происходит образование структур, характерных для диссипативной динамики (рис. 3, *b-d*), например, на рис. 3, *c, d* хорошо заметны устойчивые фокусы.

График зависимости ляпуновских показателей от значения амплитуды четной гармоники d при фиксированном значении амплитуды связи $\varepsilon = 0.348$ (рис. 4) показывает, что сумма ляпуновских показателей монотонно убывает с ростом амплитуды четной гармоники, что соответствует увеличению диссипации в системе.

Поскольку в случае систем, близких к консервативным, весьма часто заметную роль играет переходной процесс, на рис. 5 приведены траектории для некоторого набора 25 начальных условий (верхний ряд) и соответствующие аттракторы (нижний ряд). Для построения аттракторов пропускалось 10^6 итераций. Видно, что в системе реализуются как периодические, так и непериодические (рис. 5, *f*) аттракторы, причем число сосуществующих аттракторов невелико.

4. Для дальнейшего исследования сосуществующих аттракторов был проведен поиск циклов различных периодов при помощи численного решения соответствующих алгебраических уравнений методом Ньютона с заданием некоторого достаточно большого набора начальных условий.

Результаты показывают, что, в отличие от ранее исследованных случаев систем со слабой диссипацией, наблюдается существование небольшого количества (как правило, двух симметричных) циклов различных периодов, причем каждый цикл существует в своем диапазоне значений параметра, и области перекрытия этих диапазонов невелики.

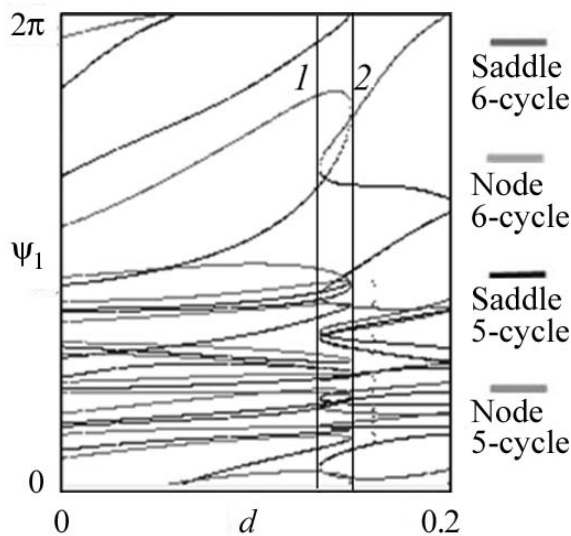


Рис. 6. Бифуркационная диаграмма для 5- и 6-циклов при значении параметра амплитуды связи $\varepsilon = 0.35$. Линией 1 отмечено значение параметра $d = 0.13301435$, линией 2 – $d = 0.14882155$, использованных далее (см. ниже рис. 7)

Fig. 6. The bifurcation diagram for 5- and 6-cycles (coupling parameter $\varepsilon = 0.35$). Lines 1 marks the parameter $d = 0.13301435$, lines 2 – $d = 0.14882155$, values used for Fig. 7

В качестве примера на рис. 6 приведена бифуркационная диаграмма для 5- и 6-циклов, диапазон существования которых наибольший. Видно, что область сосуществования 5-циклов и 6-циклов достаточно мала.

Таким образом, большая часть возникающих при нарушении симметрии аттракторов является циклами сравнительно невысоких периодов, причем интервалы их существования перекрываются незначительно. Вместе с тем, как видно из рис. 5, *f*, в системе возможно существование и непериодического аттрактора.

На рис. 7 показаны устойчивые и неустойчивые многообразия и их увеличенные фрагменты сосуществующих 5- и 6-циклов. При данных значениях параметра обнаружены гетероклинические структуры. Это позволяет предположить, что хаотический аттрактор образуется в результате нелокальной бифуркации с участием этих структур.

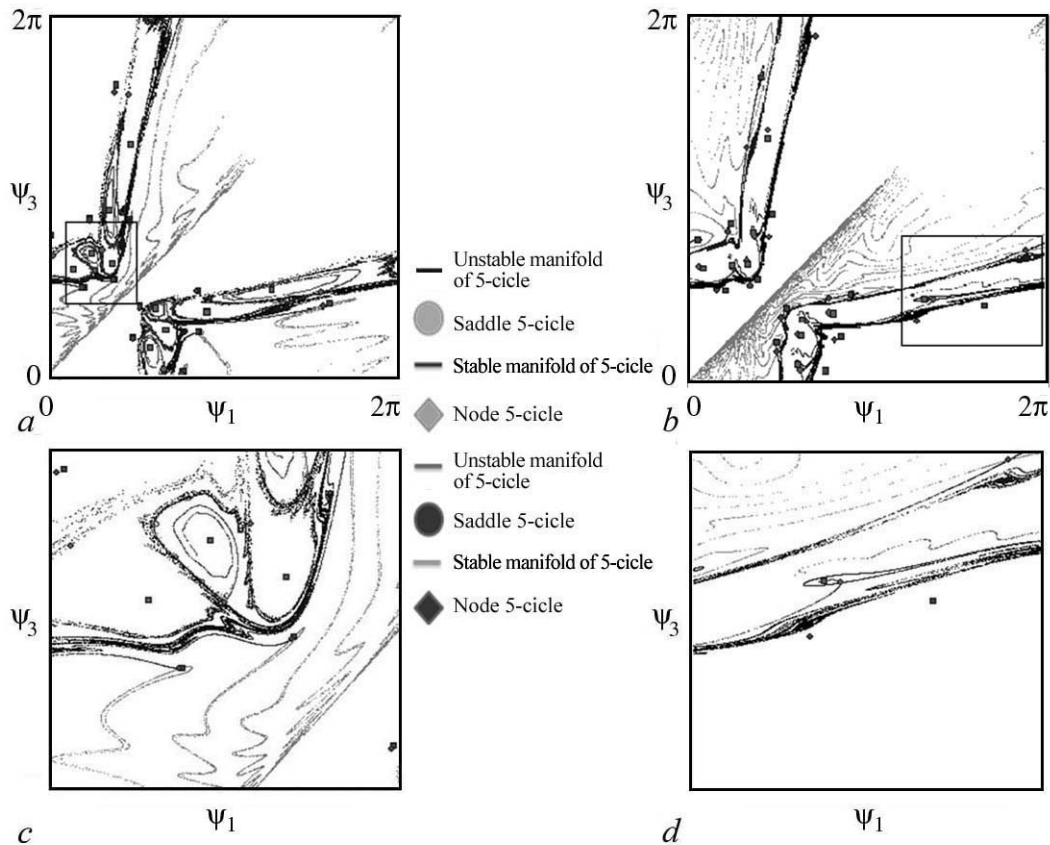


Рис. 7. Многообразия седловых точек и их увеличенные фрагменты для 5- и 6-циклов: $d = 0.13301435$ (a), (c) (линия 1 на рис. 6); $d = 0.14882155$ (b), (d) (линия 2 на рис. 6)

Fig. 7. Stable and unstable manifolds of saddle 5- and 6-cycles and its enlarged fragments for: $d = 0.13301435$ (a), (c) (line 1 of Fig. 6) and $d = 0.14882155$ (b), (d) (line 2 on Fig. 6)

Выводы. Таким образом, при нарушении симметрии в системе связанных фазовых осцилляторов консервативная динамика разрушается, и в фазовом пространстве возникают аттракторы. В отличие от систем с постоянной слабой диссипацией, количество сосуществующих аттракторов невелико. Тем не менее в фазовом пространстве возможно возникновение не только периодических, но и хаотических аттракторов, а также гетероклинических структур.

Вследствие того, что исследованная система достаточно проста и является модельной для широкого класса систем различной природы (слабо взаимодействующих цепочек связанных колебательных систем), можно ожидать, что полученные результаты будут обладать достаточно большой степенью общности.

Библиографический список

1. Лихтенберг А., Либерман М. Регулярная и стохастическая динамика. М.: Мир, 1984.
2. Шустер Г. Детерминированный хаос. М.: Мир, 1988.
3. Гонченко С.В., Тураев Д.В. О трех типах динамики и понятии аттрактора // Тр. МИАН. 2017. Т. 297. С. 133–157.
4. Lamb J.S.W., Roberts J.A.G. Time-reversal symmetry in dynamical systems: A survey // Physica D. 1998. Vol. 112. Pp. 1–39.

5. *Lamb J.S.W., Sten'kin O.V.* Newhouse regions for reversible systems with infinitely many stable, unstable and elliptic periodic orbits // *Nonlinearity*. 2004. Vol. 17. Pp. 1217–1244.
6. *Delshams A., Gonchenko S. V., Gonchenko V. S., Lázaro J. T., Sten'kin O.* Abundance of attracting, repelling and elliptic periodic orbits in two-dimensional reversible maps // *Nonlinearity*. 2013. Vol. 26. Pp. 1–33.
7. *Гонченко С.В., Лэмб Й.С.В., Риос И., Тураев Д.* Аттракторы и репеллеры в окрестности эллиптических точек обратимых систем // *Доклады академии наук*. 2014. Т. 454, № 4. С. 375–378.
8. *Leviatan A., Whelan N.D.* Partial dynamical symmetry and mixed dynamics // *Phys. Rev. Lett.* 1996. Vol. 77, no. 26. Pp. 5202–5205
9. *Gonchenko A.S., Gonchenko S.V., Kazakov A.O., Turaev D.V.* On the phenomenon of mixed dynamics in Pikovsky–Topaj system of coupled rotators // *Physica D*. 2017. Vol. 350. Pp. 45–57.
10. *Kazakov A.O.* Strange attractors and mixed dynamics in the problem of an unbalanced rubber ball rolling on a plane // *Regular and Chaotic Dynamics*. 2013. Vol. 18, no. 5. Pp. 508–520.
11. *Feudel U., Grebog C., Hunt B.R., Yorke J.A.* Map with more than 100 coexisting low-period attractors // *Phys. Rev. E*. 1996. Vol. 71. Pp. 71–81.
12. *Feudel U., Grebogi C.* Why are chaotic attractors rare in multistable systems? // *Phys. Rev. Lett.* 2003. Vol. 91. no. 13. 134102.
13. *Колесов А.Ю., Розов Н.Х.* О природе явления буферности в слабо диссипативных системах // *Теоретическая и математическая физика*. 2006. Т. 146, № 3. С. 447–466.
14. *Martins L.C., Gallas J.A.C.* Multistability, phase diagrams and statistical properties of the kicked rotor: A map with many coexisting attractors // *International Journal of Bifurcation and Chaos*. 2008. Vol. 18, no. 6. Pp. 1705–1717.
15. *Feudel U.* Complex dynamics in multistable systems // *International Journal of Bifurcation and Chaos*. 2008. Vol. 18, no. 6. Pp. 1607–1626.
16. *Blazejczyk-Okolewska B., Kapitaniak T.* Coexisting attractors of impact oscillator // *Chaos, Solitons & Fractals*. 1998. Vol. 9. Pp. 1439–1443.
17. *Feudel U., Grebogi C.* Multistability and the control of complexity // *Chaos*. 1997. Vol. 7, no. 4. Pp. 597–604.
18. *Rech P., Beims M., Gallas J.* Basin size evolution between dissipative and conservative limits // *Physical Review E*. 2005. Vol. 71, no. 1. 017202.
19. *Jousseph C.F., Kruger T.S., Manchein C., Lopes S.R., Beims M.W.* Weak dissipative effects on trajectories from the edge of basins of attraction // *Physica A*. 2016. Vol. 456. Pp. 68–74.
20. *Sabarathinam S., Thamilmaran K.* Transient chaos in a globally coupled system of nearly conservative Hamiltonian–Duffing oscillators // *Chaos, Solitons & Fractals*. 2015. Vol. 73. Pp. 129–140.
21. *Erdogan M.B., Marzuola J.L., Newhall K., Tsirakis N.* The structure of global attractors for dissipative Zakharov systems with forcing on the torus // *SIAM J. Applied Dynamical Systems*. 2015. Vol. 14, no. 4. Pp. 1978–1990.
22. *Shrimali M.D., Prasad A., Ramaswami R., Feudel U.* The nature of attractor basins in multistable systems // *Int. J. Bif. & Chaos*. 2008. Vol. 18. Pp. 1675–1688.
23. *de Oliveira J.A., Leonel E.D.* The effect of weak dissipation in two-dimensional mapping // *Int. J. Bif. & Chaos*. 2012. Vol. 22, no.10. 1250248.
24. *Sendina-Nadal I., Letellier C.* Synchronizability of nonidentical weakly dissipative systems // *Chaos*. 2017. Vol. 27. 103118.

25. Kovaleva A. Energy localization in weakly dissipative resonant chains // *Phys. Rev. E*. 2016. Vol. 94. 022208.
26. Yamagishi T. Effect of weak dissipation on a drift orbit mapping // *J. of Physical Society of Japan*. 2000. Vol. 69, no. 9. Pp. 2889–2894.
27. Celletti A., Froeschle C., Lega E. Dissipative and weakly-dissipative regimes in nearly-integrable mappings // *Discrete and Continuous Dynamical Systems*. 2006. Vol. 16, no. 4 Pp. 757–781.
28. Felk E.V., Savin A.V., Kuznetsov A.P. Transient chaos in multidimensional Hamiltonian system with weak dissipation // *European Physical Journal. Special Topics*. 2017. Vol. 226, no. 9. 1777–1784.
29. Kuznetsov A.P., Savin A.V., Savin D.V. On some properties of nearly conservative dynamics of Ikeda map and its relation with the conservative case // *Physica A*. 2008. Vol. 387, no. 7. Pp. 1464–1474.
30. Felk E.V., Savin A.V., Kuznetsov A.P. Effect of weak dissipation on the dynamics of multidimensional Hamiltonian systems // *Nonlinear Phenomena in Complex Systems*. 2015. Vol. 18, no. 2. Pp. 259–265.
31. Felk E.V., Kuznetsov A.P., Savin A.V. Multistability and transition to chaos in the degenerate Hamiltonian system with weak nonlinear dissipative perturbation // *Physica A*. 2014. Vol. 410. Pp. 561–572.
32. Кузнецов А.П., Савин А.В., Савин Д.В. Особенности динамики почти консервативного отображения Икеды // *Письма в ЖТФ*. 2007. Т. 33, вып. 3. С. 57–63.
33. Pikovsky A., Topaj D. Reversibility vs. synchronization in oscillator lattices // *Physica D*. 2002. Vol. 170. Pp. 118–130.
34. Пиковский А., Розенблюм М., Куртц Ю. Синхронизация: Фундаментальное нелинейное явление. М.: Техносфера, 2003.

References

1. Lichtenberg A., Lieberman M. *Regular and Chaotic Dynamics*. Springer-Verlag, 1983.
2. Schuster H.G. *Deterministic Chaos*. Physik-Verlag, Weinheim, 1984.
3. Gonchenko S.V., Turaev D.V. On three types of dynamics and the notion of attractor. *Proc. of Steklov Inst. of Math.*, 2017, vol. 297, iss. 1, pp. 116–137.
4. Lamb J.S.W., Roberts J.A.G. Time-reversal symmetry in dynamical systems: A survey. *Physica D*, 1998, vol. 112, pp. 1–39.
5. Lamb J.S.W., Sten'kin O.V. Newhouse regions for reversible systems with infinitely many stable, unstable and elliptic periodic orbits. *Nonlinearity*, 2004, vol. 17, pp. 1217–1244.
6. Delshams A., Gonchenko S.V., Gonchenko V. S., Lázaro J. T., Sten'kin O. Abundance of attracting, repelling and elliptic periodic orbits in two-dimensional reversible maps. *Nonlinearity*, 2013, vol. 26, pp. 1–33.
7. Gonchenko S.V., Lamb J.S.W., Rios I., Turaev D. Attractors and repellers near generic elliptic points of reversible systems. *Doklady Mathematics*, 2014, vol. 89, no. 1, p. 65.
8. Leviatan A., Whelan N.D. Partial dynamical symmetry and mixed dynamics. *Phys. Rev. Lett.*, 1996, vol. 77, no. 26, pp. 5202–5205.
9. Gonchenko A.S., Gonchenko S.V., Kazakov A.O., Turaev D.V. On the phenomenon of mixed dynamics in Pikovsky–Topaj system of coupled rotators. *Physica D*, 2017, vol. 350, pp. 45–57.

10. Kazakov A.O. Strange attractors and mixed dynamics in the problem of an unbalanced rubber ball rolling on a plane. *Regular and Chaotic Dynamics*, 2013, vol. 18, no. 5, pp. 508–520.
11. Feudel U., Grebogi C., Hunt B.R., Yorke J.A.. Map with more than 100 coexisting low-period attractors. *Phys. Rev. E*, 1996, vol.71, pp. 71–81.
12. Feudel U., Grebogi C. Why are chaotic attractors rare in multistable systems? *Phys. Rev. Lett.*, 2003, vol. 91, no. 13, 134102.
13. Kolesov A.Yu., Rozov N.Kh. The nature of the bufferness phenomenon in weakly dissipative systems. *Theoretical and Mathematical systems*, 2006, vol. 146, no. 3, pp. 376–392.
14. Martins L.C., Gallas J.A.C. Multistability, phase diagrams and statistical properties of the kicked rotor: A map with many coexisting attractors. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 2008, vol. 18, no. 6, pp. 1705–1717.
15. Feudel U. Complex dynamics in multistable systems. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 2008, vol. 18, no. 6, pp. 1607–1626.
16. Blazejczyk-Okolewska B., Kapitaniak T. Coexisting attractors of impact oscillator. *Chaos, Solitons & Fractals*, 1998, vol. 9, pp. 1439–1443.
17. Feudel U., Grebogi C. Multistability and the control of complexity. *Chaos*, 1997, vol. 7, no. 4, pp. 597–604.
18. Rech P., Beims M., Gallas J. Basin size evolution between dissipative and conservative limits. *Physical Review E*, 2005, vol. 71, no. 1, 017202.
19. Jousseph C.F., Kruger T.S., Manchein C., Lopes S.R., Beims M.W. Weak dissipative effects on trajectories from the edge of basins of attraction. *Physica A*, 2016, vol. 456, pp. 68–74.
20. Sabarathinam S., Thamilmaran K. Transient chaos in a globally coupled system of nearly conservative Hamiltonian–Duffing oscillators. *Chaos, Solitons & Fractals*, 2015, vol. 73, pp. 129–140.
21. Erdogan M.B., Marzuola J.L., Newhall K., Tsirakis N. The structure of global attractors for dissipative zakharov systems with forcing on the torus. *SIAM J. Applied Dynamical Systems*, 2015, vol. 14, no. 4, pp. 1978–1990.
22. Shrimali M.D., Prasad A., Ramaswami R., Feudel U. The nature of attractor basins in multistable systems. *Int. J. of Bif. & Chaos*, 2008, vol. 18, pp. 1675–1688.
23. de Oliveira J.A., Leonel E.D. The effect of weak dissipation in two-dimensional mapping. *Int. J. of Bif. & Chaos*, 2012, vol. 22, no. 10, 1250248.
24. Sendina-Nadal I., Letellier C. Synchronizability of nonidentical weakly dissipative systems. *Chaos*, 2017, vol. 27, 103118.
25. Kovaleva A. Energy localization in weakly dissipative resonant chains. *Phys. Rev. E*, 2016, vol. 94, 022208.
26. Yamagishi T. Effect of weak dissipation on a drift orbit mapping. *J. of Physical Society of Japan*, 2000, vol. 69, no. 9, pp. 2889–2894.
27. Celletti A., Froeschle C., Lega E.. Dissipative and weakly-dissipative regimes in nearly-integrable mappings. *Discrete and Continuous Dynamical Systems*, 2006, vol. 16, no. 4, pp. 757–781.
28. Felk E.V., Savin A.V., Kuznetsov A.P. Transient chaos in multidimensional Hamiltonian system with weak dissipation. *European Physical Journal. Special Topics*, 2017, vol. 226, no. 9, pp. 1777–1784.
29. Kuznetsov A.P., Savin A.V., Savin D.V. On some properties of nearly conservative dynamics of Ikeda map and its relation with the conservative case. *Physica A*, 2008, vol. 387, no. 7, pp. 1464–1474.

30. Felk E.V., Savin A.V., Kuznetsov A.P. Effect of weak dissipation on the dynamics of multidimensional Hamiltonian systems. *Nonlinear Phenomena in Complex Systems*, 2015, vol. 18, no. 2, pp. 259–265.
31. Felk E.V., Kuznetsov A.P., Savin A.V. Multistability and transition to chaos in the degenerate Hamiltonian system with weak nonlinear dissipative perturbation. *Physica A*, 2014, vol. 410, pp. 561–572.
32. Kuznetsov A.P., Savin A.V., Savin D.V. Features in the dynamics of an almost conservative Ikeda map. *Technical Physics Letters*, 2007, vol.33, no. 2, p. 122.
33. Pikovsky A., Topaj D. Reversibility vs. synchronization in oscillator lattices. *Physica D*, 2002, vol. 170, pp. 118–130.
34. Pikovsky A., Rosenblum M., Kurts J. Synchronization: A Universal Concept in Nonlinear Science. Cambridge University Press, 2001.

Кузнецов Александр Петрович родился в 1957 году. Доктор физико-математических наук (1996), ведущий научный сотрудник Саратовского филиала Института радиотехники и электроники им. В.А. Котельникова РАН, заведующий кафедрой динамических систем Саратовского госуниверситета в СФ ИРЭ РАН. Имеет звание профессора (2002). Область научных интересов: динамические системы, теория бифуркаций, синхронизация, квазипериодические колебания и их приложения. Лауреат гранта Президента Российской Федерации, Соросовский профессор (2000, 2001). Опубликовал более 150 статей в российских и международных научных журналах. Под его руководством защищено 8 кандидатских диссертаций. Автор оригинальных учебных курсов для факультета нелинейных процессов СГУ и Лицея прикладных наук. Автор и соавтор 12 монографий, учебников и задачников по нелинейной динамике, теории колебаний и физике. Среди них: «Физика квазипериодических колебаний» «Нелинейность: от колебаний к хаосу», «Нелинейные колебания», «Линейные колебания и волны (сборник задач)», «Задачи физических олимпиад» и др.



Россия, 410019 Саратов, ул. Зеленая, 38
 Саратовский филиал Института радиотехники
 и электроники им. В.А. Котельникова РАН
 Россия, 410012 Саратов, ул. Астраханская, 83
 Саратовский национальный исследовательский государственный университет
 E-mail: apkuz@rambler.ru

Рахманова Алия Жавдятовна родилась в Саратове (1993), окончила Саратовский государственный университет (2018). Защитила магистерскую работу по теме «Исследование трансформаций фазового пространства системы связанных фазовых осцилляторов при нарушении симметрии», аспирант СГУ. Автор публикаций в сборниках тезисов докладов «Наноэлектроника, нанофотоника и нелинейная физика» и «Нелинейные дни в Саратове для молодых–2014».



Россия, 410012 Саратов, ул. Астраханская, 83
 Саратовский национальный исследовательский государственный университет
 E-mail: aliiia.rakhmanova@mail.ru

Савин Алексей Владимирович родился в Саратове (1980). Окончил физический факультет Саратовского государственного университета (2002). Кандидат физико-математических наук (2005), доцент (2010). С 2002 года работает на факультете нелинейных процессов СГУ, доцент кафедры нелинейной физики. Область научных интересов – теоретическая нелинейная динамика, в том числе динамика систем, близких к консервативным.



Россия, 410012 Саратов, ул. Астраханская, 83
 Саратовский национальный исследовательский государственный университет
 E-mail: AVSavin@rambler.ru



**Нелинейные волны в цилиндрической оболочке,
содержащей вязкую жидкость, при воздействии окружающей упругой среды
и конструкционного демпфирования в продольном направлении**

Ю. А. Блинков¹, Е. В. Евдокимова², Л. И. Могилевич²

¹Саратовский национальный исследовательский государственный университет
Россия, 410012 Саратов, Астраханская, 83

²Саратовский государственный технический университет им. Гагарина Ю.А.
Россия, 410054 Саратов, Политехническая, 77

E-mail: blinkovua@info.sgu.ru, eev2106@mail.ru, mogilevich@sgu.ru

Автор для переписки Блинков Юрий Анатольевич, blinkovua@info.sgu.ru

Поступила в редакцию 9.04.2018, принята к публикации 27.06.2018

Тема и цель исследования. В настоящей работе развивается метод возмущений для моделирования нелинейных волн деформаций в упругой цилиндрической оболочке, заполненной вязкой несжимаемой жидкостью, окруженной упругой средой и при конструкционном демпфировании в продольном направлении. Наличие окружающей среды приводит к интегриродифференциальному уравнению, обобщающему уравнение Кортевега–де Вриза, имеющему то же решение в виде уединенной волны – солитона. Оно не содержит произвольного постоянного волнового числа, в отличие от решения уравнения Кортевега–де Вриза. Поведение вязкой несжимаемой жидкости внутри оболочки описывается уравнениями динамики и неразрывности. Они решаются вместе с граничными условиями прилипания жидкости к стенке оболочки. **Методы.** Решение представляется прямым разложением искомых функций по малому параметру задачи гидроупругости и сводится к задаче для уравнения гидродинамической теории смазки. Решение этих уравнений и определяет напряжения со стороны жидкости, действующие на оболочку в продольном направлении и по нормалям. Наличие жидкости в оболочке добавляет в уравнения продольных волн деформаций член уравнения, который не позволяет найти точное решение. Конструкционное демпфирование в продольном направлении добавляет такой же точно член уравнения, что и наличие жидкости. Они имеют разные знаки, когда коэффициент Пуассона меньше 1/2. В противном случае знаки совпадают. Наличие жидкости и конструкционного демпфирования требует численного исследования. Численное исследование проводится с использованием современного подхода, основанного на универсальном алгоритме коммутативной алгебры для интегроинтерполяционного метода. **Результаты.** В результате построения разностного базиса Грёбнера сгенерированы разностные схемы типа Кранка–Николсон, полученные с использованием базовых интегральных разностных соотношений, аппроксимирующих исходную систему уравнений.

Ключевые слова: нелинейные волны, вязкая несжимаемая жидкость, упругие цилиндрические оболочки.

Образец цитирования: Блинков Ю.А., Евдокимова Е.В., Могилевич Л.И. Нелинейные волны в цилиндрической оболочке, содержащей вязкую жидкость, при воздействии окружающей упругой среды и конструкционного демпфирования в продольном направлении // Изв. вузов. ПНД. 2018. Т. 26, № 6. С. 32–47.

<https://doi.org/10.18500/0869-6632-2018-26-6-32-47>

Финансовая поддержка. Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 16-01-00175-а).

Nonlinear waves in cylinder shell containing viscous liquid, under the impact of surrounding elastic medium and structural damping in longitudinal direction

Yu. A. Blinkov¹, E. V. Evdokimova², L. I. Mogilevich²

¹Saratov State University

83, Astrakhanskaya str., 410012 Saratov, Russia

²Yuri Gagarin State Technical University of Saratov

77, Politechnicheskaya str., 410054 Saratov, Russia

E-mail: blinkovua@info.sgu.ru, eev2106@mail.ru, mogilevich@sgu.ru

Correspondence should be addressed to Blinkov Yuri A., blinkovua@info.sgu.ru

Received 9.04.2018, accepted for publication 27.06.2018

Subject of the study. The present article deals with further developing of perturbation method for deformation non-linear waves in an elastic cylinder shell, filled with viscous incompressible liquid, surrounded by an elastic media and under construction damping in longitudinal direction. Surrounding medium presence leads to integro-differential equation, to generalizing Korteweg–de Vries ones and possessing the same soliton in the form of a solitary wave – a soliton. It does not contain an arbitrary constant number unlike Korteweg–de Vries equation solution. The viscous incompressible liquid presence inside the shell behavior is described by means of dynamics and continuity equation, is solved together with boundary conditions liquid adhesion to a shell wall. **Methods.** The solution is presented by direct expansion of unknown function by small parameter of hydroelasticity problem and reduced to the problem for hydrodynamics lubrication theory equations. The equations solution defines the tensions on the part of the liquid, the tensions influence the shell longitudinal and normal directions. The liquid presence in the shell adds to longitudinal deformation waves equations one more equation member, which does not allow to find exact solution. Construction damping in a longitudinal direction adds the same equation member, like liquid presence does. They possess opposite signs in the case of shell Poisson coefficient being smaller than 1/2. In contrary case signs coincide. Liquid presence in the shell and construction damping demand for numerical research. The liquid presence leads to the equation, generalizing Korteweg–de Vries equation, lacking the exact solution and demanding numerical investigation. The numerical investigation is carried out with the use of the modern approach, relying on the universal algorithm of commutative algebra for integro-interpolation method. **Results.** As a result of difference Gröbner basis construction, the difference Crank–Nicolson type schemes are generalized. The schemes were obtained due to the use of basic integral difference correlations, approximating the initial equations system.

Key words: non-linear waves, viscous incompressible liquid, elastic cylinder shell.

Reference: Blinkov Yu.A., Evdokimova E.V., Mogilevich L.I. Nonlinear waves in cylinder shell containing viscous liquid, under the impact of surrounding elastic medium and structural damping in longitudinal direction. *Izvestiya VUZ, Applied Nonlinear Dynamics*, 2018, vol. 26, no. 6, pp. 32–47. <https://doi.org/10.18500/0869-6632-2018-26-6-32-47>

Acknowledgements. This work was supported by the Russian Foundation for Basic Research (project 16-01-00175-a).

Введение

Взаимодействие упругих элементов конструкций с жидкостью рассматривалось в разных аспектах. Взаимодействие упругих оболочек с идеальной несжимаемой и сжимаемой жидкостью (газом) исследовано в работах [1, 2]. В абсолютно жесткой трубе с круговым сечением ламинарное движение вязкой несжимаемой жидкости под действием гармонического поведения по времени перепада давления анализировалось в [3], а при пульсирующем движении вязкой жидкости в соосных упругих оболочках конечной длины – в [4, 5]. В условиях вибрации взаимодействие вязкой несжимаемой жидкости с упругими оболочками исследовалось в [6–9], а с учётом вращения жидкости – в [10–12].

В современной волновой динамике одним из важных направлений является изучение поведения волн деформаций в упругих тонкостенных конструкциях. Проблема распространения волн в газовой динамике и теории упругих оболочек изучается при помощи линеаризованных уравнений. При этом скорость распространения возмущений считается постоянной и равной скорости

распространения звука в невозмущенной среде. Однако ряд явлений, несмотря на малые значения зависимых переменных, целиком определяется зависимостью скорости распространения возмущений от величины зависимых переменных и исследуется на базе нелинейных уравнений. Эти исследования проводятся с помощью методов возмущений, таких как метод сращиваемых асимптотических разложений, метод деформируемых координат, метод многомасштабных разложений.

Впервые уравнения Кортевега–де Вриза для продольных нелинейных волн в стержнях получены в [13], а с учетом диссипативных факторов уравнения Кортевега–де Вриза–Бюргера для стержней и пластин получены в [14]. Обзор работ о распространении нелинейных волн и экспериментальном обнаружении таких волн приведен в [15].

Волны деформаций в упругих цилиндрических оболочках рассматривались в [16–18]. Кроме того, проблемы распространения волн в упругих и вязкоупругих тонкостенных конструкциях, в том числе в бесконечно длинных цилиндрических оболочках без взаимодействия с вязкой несжимаемой жидкостью, с позиции теории солитонов рассматривались в [19–21]. Получение точных решений эволюционных уравнений, включая уравнения распространения уединенных волн, рассмотрено в [22, 23].

Известны математические модели, учитывающие влияние вязкой несжимаемой жидкости на волновые процессы в бесконечно длинных геометрически и физически нелинейных оболочках [24–26]. При этом найдены эффекты влияния вязкой несжимаемой жидкости на поведение волны деформации в оболочке в зависимости от коэффициента Пуассона материала оболочки. В частности, при наличии жидкости в оболочке из неорганических материалов (различные трубопроводы в технологических сооружениях) выявлен экспоненциальный рост амплитуды волны. В случае органического материала (кровеносные сосуды) волна в жидкости быстро затухает. Решение поставленной в работе задачи для геометрически нелинейных оболочек представляется актуальным и сложным и имеет важное значение для акустической диагностики и неразрушающего контроля материалов. Во многом интерес к подобным задачам инициирован необходимостью анализа упругих и динамических свойств нанобъектов, в частности, карбоновых нанотрубок.

В настоящей работе развивается метод возмущений для моделирования нелинейных волн деформаций в упругой цилиндрической оболочке, заполненной вязкой несжимаемой жидкостью, окруженной упругой средой, и при конструкционном демпфировании в продольном направлении. Показано влияние вязкой несжимаемой жидкости, заполняющей оболочку, окружающей упругой среды и конструкционного демпфирования на поведение продольных волн деформации в упругой цилиндрической оболочке.

1. Постановка задачи

Рассмотрим бесконечно длинную упругую цилиндрическую оболочку, внутри которой находится вязкая несжимаемая жидкость. Уравнения движения вязкой несжимаемой жидкости и уравнение неразрывности в цилиндрической системе координат r, Θ, x для случая осесимметричного течения записываются в виде [27]

$$\begin{aligned} \frac{\partial V_r}{\partial t} + V_r \frac{\partial V_r}{\partial r} + V_x \frac{\partial V_r}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} &= \nu \left(\frac{\partial^2 V_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial V_r}{\partial r} + \frac{\partial^2 V_r}{\partial x^2} - \frac{V_r}{r^2} \right), \\ \frac{\partial V_x}{\partial t} + V_r \frac{\partial V_x}{\partial r} + V_x \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} &= \nu \left(\frac{\partial^2 V_x}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial V_x}{\partial r} + \frac{\partial^2 V_x}{\partial x^2} \right), \\ \frac{\partial V_r}{\partial r} + \frac{V_r}{r} + \frac{\partial V_x}{\partial x} &= 0. \end{aligned} \quad (1)$$

На границе с оболочкой выполняются условия прилипания жидкости согласно подходу Лагранжа

$$\frac{\partial U}{\partial t} = V_x + U \frac{\partial V_x}{\partial x} - W \frac{\partial V_x}{\partial r}, \quad -\frac{\partial W}{\partial t} = V_r + U \frac{\partial V_r}{\partial x} - W \frac{\partial V_r}{\partial r}, \quad \text{при } r = R - W. \quad (2)$$

Здесь t – время; V_r, V_x – проекции вектора скорости на оси цилиндрической системы координат; p – давление; ρ – плотность; ν – кинематический коэффициент вязкости; U – продольное упругое перемещение оболочки по оси x ; W – прогиб оболочки, положительный к центру кривизны; R – радиус срединной поверхности оболочки; h_0 – толщина оболочки, $h_0 = 2(R - R_1)$, где R_1 – внутренний радиус оболочки, и $h_0 \ll R$.

Записывая уравнения движения элемента цилиндрической оболочки в перемещениях для модели Кирхгофа–Лява, рассмотрим материал с линейной зависимостью интенсивности напряжений σ_i от интенсивности деформаций e_i

$$\sigma_i = E e_i \quad (3)$$

(E – модуль Юнга).

Кроме того, учтем конструкционное демпфирование в материале оболочки, характеризуемое величиной, пропорциональной $\partial U / \partial t$, добавляемой к даламберовой силе инерции, в продольном направлении [28]

$$\varepsilon_1 \frac{1}{l} \sqrt{\frac{E}{\rho_0 (1 - \mu_0^2)}} \rho_0 h_0 \frac{\partial U}{\partial t}. \quad (4)$$

Здесь ε_1 – коэффициент демпфирования; ρ_0 – плотность материала оболочки; μ_0 – коэффициент Пуассона; $\sqrt{E / [\rho_0 (1 - \mu_0^2)]} = c_0$ – скорость распространения продольных волн в оболочке; l – длина волны.

Уравнения динамики геометрически нелинейной оболочки с учетом (3), (4) записываются в виде

$$\begin{aligned} & \frac{E h_0}{1 - \mu_0^2} \frac{\partial}{\partial x} \left\langle \left\{ \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial U}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial x} \right)^2 \right] + \frac{h_0^2}{24} \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \right)^2 - \mu_0 \frac{W}{R} \right\} \right\rangle - \rho_0 h_0 \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} - \\ & - \varepsilon_1 \frac{1}{l} \sqrt{\frac{E}{\rho_0 (1 - \mu_0^2)}} \rho_0 h_0 \frac{\partial U}{\partial t} - \left[k_3 \frac{R^2 \rho_0 h_0 c_0^2}{l^4} U - k_2 \frac{\rho_0 h_0 c_0^2}{R^2 l^2} U^3 \right] = -q_x - U \frac{\partial q_x}{\partial x} + W \frac{\partial q_x}{\partial r}; \\ & \frac{E h_0}{1 - \mu_0^2} \left\langle \frac{h_0^2}{12} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \left(1 + \frac{\partial U}{\partial x} \right) \right] - \left\{ \frac{\mu_0}{R} \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{1}{2} \frac{\mu_0}{R} \left[\left(\frac{\partial U}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial x} \right)^2 + \frac{h_0^2}{12} \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \right)^2 \right] - \frac{W}{R^2} \right\} - \right. \\ & - \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{\partial W}{\partial x} \left\{ \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial U}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial x} \right)^2 \right] + \frac{h_0^2}{24} \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \right)^2 - \mu_0 \frac{W}{R} \right\} \right\rangle + \rho_0 h_0 \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} + \\ & + \left[k_1 \frac{\rho_0 h_0 c_0^2}{l^2} W - 2t_1 \rho_0 h_0 c_0^2 \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + m_0 \rho_0 h_0 \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} \right] = q_n + U \frac{\partial q_n}{\partial x} - W \frac{\partial q_n}{\partial r}. \quad (5) \end{aligned}$$

Здесь q_x, q_n – напряжения со стороны жидкости, находящейся внутри оболочки. Выражения в

квадратных скобках системы (5)

$$\begin{aligned} & -k_3 \frac{R^2 \rho_0 h_0 c_0^2}{l^4} U + k_2 \frac{\rho_0 h_0 c_0^2}{R^2 l^2} U^3, \\ & k_1 \frac{\rho_0 h_0 c_0^2}{l^2} W - 2t_1 \rho_0 h_0 c_0^2 \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + m_0 \rho_0 h_0 \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} \end{aligned} \quad (6)$$

характеризуют реакцию Власова–Леонтьева [29,30] упругой среды, в которой расположена труба кругового сечения. Выражение $-k_3 \frac{R^2 \rho_0 h_0 c_0^2}{l^4} U + k_2 \frac{\rho_0 h_0 c_0^2}{R^2 l^2} U^3$ – реакция на продольное перемещение, а слагаемые $k_1 \frac{\rho_0 h_0 c_0^2}{l^2} W$ – реакция на сдвиг, $-2t_1 \rho_0 h_0 c_0^2 \frac{\partial^2 W}{\partial x^2}$ – реакция на сдвиг, $m_0 \rho_0 h_0 \frac{\partial^2 W}{\partial t^2}$ – инерционная реакция. Безразмерные коэффициенты порядка единицы k_1, k_2, k_3, t_1, m_0 – введены в [29,30] в размерном виде.

Поверхностные напряжения со стороны жидкости, снесенные на невозмущенную срединную поверхность оболочки ($W \ll R$), определяются формулами

$$q_x = \left[\rho v \left(\frac{\partial V_x}{\partial r} + \frac{\partial V_r}{\partial x} \right) \right]_{r=R}, \quad q_n = \left[-p + 2\rho v \frac{\partial V_r}{\partial r} \right]_{r=R}. \quad (7)$$

2. Вывод уравнения динамики с учетом наличия жидкости в оболочке

Принимая l (длину волны) за характерную длину, перейдем к безразмерным переменным для исследования уравнений (5)

$$W = w_m u_3, \quad U = u_m u_1, \quad x^* = \frac{x}{l}, \quad t^* = \frac{c_0}{l} t, \quad r^* = \frac{r}{R}. \quad (8)$$

Здесь w_m, u_m – характерные значения прогиба W и продольного перемещения U . Положим

$$\frac{h_0}{R} = \varepsilon \ll 1, \quad \frac{R^2}{l^2} = O(\varepsilon), \quad \frac{u_m R}{l h_0} = O(1), \quad \frac{w_m}{h_0} = O(1), \quad (9)$$

$$\varepsilon_1 = O(\varepsilon), \quad k_1 = O(1), \quad k_3 = O(1), \quad k_2 = O(1), \quad t_1 = O(1), \quad m_0 = O(1),$$

где ε – малый параметр задачи (5).

Применим метод асимптотических разложений, вводя независимые переменные в виде

$$\xi = x^* - ct^*, \quad \tau = \varepsilon t^*, \quad (10)$$

где c – безразмерная неизвестная скорость волны, τ – быстрое время, и зависимые переменные в виде разложения по малому параметру ε

$$u_1 = u_{10} + \varepsilon u_{11} + \dots, \quad u_3 = u_{30} + \varepsilon u_{31} + \dots \quad (11)$$

Подставляя (8), (10), (11) в уравнения (5) с учетом оценок (9), получим в нулевом приближении по ε линейную систему уравнений

$$\begin{aligned} & -\mu_0 \frac{\partial u_{10}}{\partial \xi} + \frac{w_m l}{u_m R} u_{30} = 0, \\ & \frac{\partial^2 u_{10}}{\partial \xi^2} - \mu_0 \frac{w_m l}{u_m R} \frac{\partial u_{30}}{\partial \xi} - c^2 \frac{\partial^2 u_{10}}{\partial \xi^2} = 0, \end{aligned}$$

из которой следует связь

$$\frac{w_m l}{u_m R} u_{30} = \mu_0 \frac{\partial u_{10}}{\partial \xi} \quad (12)$$

и определяется безразмерная скорость волны

$$c^2 = 1 - \mu_0^2. \quad (13)$$

Из следующего приближения по ε , учитывая (12) и (13), находится уравнение, являющееся составным, для u_{10}

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u_{10}}{\partial \xi \partial \tau} + \frac{u_m \sqrt{1 - \mu_0^2}}{l \varepsilon} \frac{\partial u_{10}}{2} \frac{\partial^2 u_{10}}{\partial \xi^2} + \left\{ \frac{1}{\varepsilon} \frac{R^2 \mu_0^2 \sqrt{1 - \mu_0^2}}{l^2} [1 + m_0] - \frac{\mu_0^2}{\sqrt{1 - \mu_0^2}} \frac{t_1 R^2}{\varepsilon l^2} \right\} \frac{\partial^4 u_{10}}{\partial \xi^4} + \\ + \frac{\mu_0^2}{2 \sqrt{1 - \mu_0^2}} \frac{k_1 R^2}{\varepsilon l^2} \frac{\partial^2 u_{10}}{\partial \xi^2} - \frac{k_3 R^2}{\varepsilon l^2} u_{10} + \frac{k_2 u_m^2}{\varepsilon R^2} u_{10}^3 + \\ + \frac{1}{2} \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon} \frac{\partial u_{10}}{\partial \xi} = - \frac{1}{2 \sqrt{1 - \mu_0^2}} \frac{l^2}{\varepsilon u_m \rho_0 h_0 c_0^2} \left[q_x - \mu_0 \frac{R}{l} \frac{\partial q_n}{\partial \xi} \right]. \end{aligned} \quad (14)$$

В случае отсутствия жидкости правая часть уравнения (14) равна нулю и получается известное уравнение – модифицированное уравнение Гарднера–Бюргера–Островского для $\frac{\partial u_{10}}{\partial \xi} = \frac{1}{\mu_0} \frac{w_m l}{u_m R} u_{30}$.

3. Определение напряжений, действующих со стороны жидкости

Для определения правой части уравнения (14) введем безразмерные переменные и параметр

$$V_r = w_m \frac{c_0}{l} v_r, \quad V_x = w_m \frac{c_0}{R_1} v_x, \quad r^* = \frac{r}{R}, \quad p = \frac{\rho \nu c_0 l w_m}{R^3} P, \quad \psi = \frac{R}{l} = O\left(\varepsilon^{\frac{1}{2}}\right). \quad (15)$$

Подставляя (15) в уравнение гидродинамики (1) и граничные условия (2), представим безразмерные скорости и давление в виде разложения по малому параметру ε

$$v_x = v_x^0 + \varepsilon v_x^1 + \dots, \quad v_r = v_r^0 + \varepsilon v_r^1 + \dots, \quad P = P^0 + \varepsilon P^1 + \dots \quad (16)$$

В нулевом приближении по ψ ($\psi=0$ – гидродинамическая теория смазки), считая $\psi \frac{R_1 c_0}{\nu} \ll 1$ (ползущие течения [31]), и в нулевом приближении по ε получаем уравнения гидродинамики (классические уравнения гидродинамической теории смазки)

$$\frac{\partial P^0}{\partial r^*} = 0; \quad \frac{\partial P^0}{\partial x^*} = \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} \left(r^* \frac{\partial v_x^0}{\partial r^*} \right); \quad \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} (r^* v_r^0) + \frac{\partial v_x^0}{\partial x^*} = 0 \quad (17)$$

и граничные условия

$$\begin{aligned} r^* \frac{\partial v_r^0}{\partial r^*} = 0, \quad r^* \frac{\partial v_x^0}{\partial r^*} = 0, \quad \text{при } r^* = 0, \\ v_r^0 = - \frac{\partial u_3}{\partial t^*}, \quad v_x^0 = \frac{u_m R}{w_m l} \frac{\partial u_1}{\partial t^*}, \quad \text{при } r^* = 1. \end{aligned} \quad (18)$$

Из решения задачи (17), (18) следует, что

$$P^0 = 16 \int \left[\frac{1}{2} \frac{u_m R}{w_m l} \frac{\partial u_1}{\partial t^*} - \int \frac{\partial u_3}{\partial t^*} dx^* \right] dx^*, \quad (19)$$

$$\left. \frac{\partial v_x^0}{\partial r^*} \right|_{r^*=1} = \frac{r^*}{2} \cdot \left. \frac{\partial p^0}{\partial x^*} \right|_{r^*=1} = 8 \left[\frac{1}{2} \frac{u_m R}{w_m l} \frac{\partial u_1}{\partial t^*} - \int \frac{\partial u_3}{\partial t^*} dx^* \right].$$

Учитывая, что были введены переменные (10), (11), и имея соотношения (12), (13), из (19) получим

$$P^0 = 8 \sqrt{1 - \mu_0^2} \frac{u_m R}{w_m l} [2\mu_0 - 1] u_{10}, \quad (20)$$

$$\left. \frac{\partial v_x^0}{\partial r^*} \right|_{r^*=1} = 4 \sqrt{1 - \mu_0^2} \frac{u_m R}{w_m l} [2\mu_0 - 1] \frac{\partial u_{10}}{\partial \xi}.$$

С принятой точностью по ε , ψ из (7) найдем

$$q_x = \varepsilon \frac{\nu}{R c_0} \rho c_0^2 \left. \frac{\partial v_x}{\partial r^*} \right|_{r^*=1}, \quad q_n = -\frac{\varepsilon}{\psi} \frac{\nu}{R_1 c_0} \rho c_0^2 P^0$$

и, следовательно, выражение в правой части уравнения (14) принимает вид

$$q_x - \mu_0 \frac{R}{l} \frac{\partial q_n}{\partial \xi} = -4 \sqrt{1 - \mu_0^2} \varepsilon \frac{\nu}{R c_0} \rho c_0^2 [1 - 4\mu_0^2] \frac{\partial u_{10}}{\partial \xi}. \quad (21)$$

Подставляя (21) в уравнение (14), окончательно получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u_{10}}{\partial \xi \partial \tau} + \frac{u_m}{l \varepsilon} \frac{\sqrt{1 - \mu_0^2}}{2} \frac{\partial u_{10}}{\partial \xi} \frac{\partial^2 u_{10}}{\partial \xi^2} + \left\{ \frac{1}{\varepsilon} \frac{R^2}{l^2} \frac{\mu_0^2 \sqrt{1 - \mu_0^2}}{2} [1 + m_0] - \frac{\mu_0^2}{\sqrt{1 - \mu_0^2}} \frac{t_1 R^2}{\varepsilon l^2} \right\} \frac{\partial^4 u_{10}}{\partial \xi^4} + \\ + \frac{\mu_0^2}{2 \sqrt{1 - \mu_0^2}} \frac{k_1 R^2}{\varepsilon l^2} \frac{\partial^2 u_{10}}{\partial \xi^2} - \frac{k_3 R^2}{\varepsilon l^2} u_{10} + \frac{k_2 u_m^2}{\varepsilon R^2} u_{10}^3 + \\ + \frac{1}{2} \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon} \frac{\partial u_{10}}{\partial \xi} = 2 \frac{\rho l}{\rho_0 h_0} \frac{1}{\varepsilon} \frac{\nu}{R c_0} [1 - 4\mu_0^2] \frac{\partial u_{10}}{\partial \xi}. \end{aligned} \quad (22)$$

Замена

$$\frac{\partial u_{10}}{\partial \xi} = c_1 \varphi, \quad \eta = c_2 \xi, \quad \tilde{t} = c_3 \tau \quad (23)$$

позволяет записать уравнение (22) в виде

$$\varphi_{\tilde{t}} + 6\varphi\varphi_{\eta} + \varphi_{\eta\eta\eta} + s_2\varphi_{\eta} + (s_3 - s)\varphi - \int \varphi d\eta + s_5 \left(\int \varphi d\eta \right)^3 = 0. \quad (24)$$

Постоянные c_1, c_2, c_3 определяются при подстановке (23) в (22) и имеют вид

$$c_1 = \sigma_0^{-1} \sigma_4^{1/2} \sigma_1^{1/2}, \quad c_2 = \sigma_4^{1/4} \sigma_1^{-1/4}, \quad c_3 = \sigma_4^{3/4} \sigma_1^{1/4},$$

при этом вводятся обозначения

$$s_2 = \sigma_2 c_2 c_3^{-1}, \quad s_3 = \sigma_3 c_3^{-1}, \quad s = \sigma c_3^{-1}, \quad s_5 = \sigma_5 c_1^2 c_2^{-3} c_3^{-1},$$

где

$$\begin{aligned} 6\sigma_0 &= \frac{u_m \sqrt{1-\mu_0^2}}{l\varepsilon} \frac{1}{2}, \quad \sigma_2 = \frac{\mu_0^2}{2\sqrt{1-\mu_0^2}} \frac{k_1 R^2}{\varepsilon l^2}, \quad \sigma_3 = \frac{1}{2} \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon}, \quad \sigma_4 = \frac{k_3 R^2}{\varepsilon l^2}, \quad \sigma_5 = \frac{k_2 u_m^2}{\varepsilon R^2}, \\ \sigma_1 &= \left\{ \frac{1}{\varepsilon} \frac{R^2}{l^2} \frac{\mu_0^2 \sqrt{1-\mu_0^2}}{2} [1+m_0] - \frac{\mu_0^2}{\sqrt{1-\mu_0^2}} \frac{t_1 R^2}{\varepsilon l^2} \right\}, \quad \sigma = 2 \frac{\rho l}{\rho_0 h_0} \frac{1}{\varepsilon} \frac{\nu}{R c_0} [1-4\mu_0^2]. \end{aligned}$$

Отметим, что при отсутствии конструкционного демпфирования имеем $s_3 = 0$, $s > 0$ при $\mu_0 < 1/2$ для неорганических материалов, $s < 0$ при $\mu_0 > 1/2$ для живых организмов и $s = 0$ при $\mu_0 = 1/2$ для несжимаемого материала, такого как резина, или при отсутствии жидкости. Заметим, что случай $s_3 = s$ равносильен отсутствию влияния жидкости внутри оболочки.

При отсутствии конструкционного демпфирования и жидкости или для случая $s_3 = s$ получим из (24) уравнение

$$\varphi_{\tilde{t}} + 6\varphi\varphi_{\eta} + \varphi_{\eta\eta} + s_2\varphi_{\eta} - \int \varphi d\eta + s_5 \left(\int \varphi d\eta \right)^3 = 0, \quad (25)$$

которое имеет точное решение

$$\varphi = \frac{1}{2s_5} \cosh^{-2} \left\{ \frac{1}{2\sqrt{s_5}} \left[\eta - \left(\frac{1}{s_5} + 2s_5 + s_2 \right) \tilde{t} \right] \right\}. \quad (26)$$

В случае отсутствия окружающей упругой среды уравнение (25) превращается в уравнение Кортевега–де Вриза с точным решением

$$\varphi = \frac{1}{2s_5} \cosh^{-2} \left\{ \frac{1}{2\sqrt{s_5}} \left[\eta - \left(\frac{1}{s_5} \right) \tilde{t} \right] \right\} \quad (27)$$

при произвольном значении s_5 .

4. Численное моделирование

В работах [32–34] развит подход к построению разностных схем, основанный на построении переопределенной системы разностных уравнений, получаемой из аппроксимации интегральных законов сохранения и интегральных соотношений, связывающих искомые функции и их производные. В результате, разностная схема определяется как условие совместности для данной системы. Таким образом, получается разностная схема, автоматически обеспечивающая выполнение интегральных законов сохранения по областям, составленным из шаблонов интегрирования построения.

Запишем уравнение (24) в виде системы в интегральной форме

$$\begin{aligned} \oint_{\partial\Omega} (-3\varphi^2 - \varphi_{\eta\eta} - s_2\varphi) dt + \varphi d\eta + \iint_{\Omega} (-s\varphi - \Psi + s_3\Psi^3) dt d\eta &= 0, \\ \int_b^a (\Psi_{\eta\eta} - \varphi_{\eta}) d\eta &= 0, \end{aligned} \quad (28)$$

для любой области Ω и любого интервала $a > b$. Здесь связь $\int \varphi d\eta = \Psi$ записана через ее производную. Это связано с тем, что для устойчивости численного решения разностной схемы

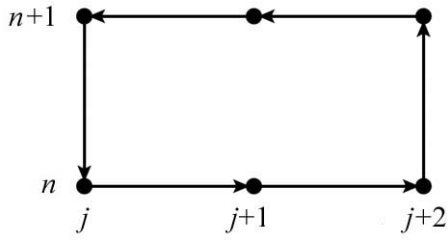


Рис. 1. Базовой контур для уравнения (28)

Fig. 1. Basic contour for the equation (28)

необходимо диагональное преобладание в соответствующей ей матрице. В результате, для Ψ будет получено уравнение второго порядка и нужно будет лишь зафиксировать вторую произвольную константу в решении. Для перехода к дискретной формулировке сопоставим $u_j^n = \phi(t_n, \eta_j)$, $U_j^n = \Psi(t_n, \eta_j)$ и выберем в качестве базового контур, показанный на рис. 1, для значений a, b выберем точки $j+2, j$, соответственно.

Добавим интегральные соотношения

$$\begin{aligned} \int_{\eta_j}^{\eta_{j+1}} u_{\eta} d\eta &= u(t, \eta_{j+1}) - u(t, \eta_j), \\ \int_{\eta_j}^{\eta_{j+2}} u_{\eta\eta} d\eta &= u_{\eta}(t, \eta_{j+2}) - u_{\eta}(t, \eta_j), \\ \int_{\eta_j}^{\eta_{j+1}} U_{\eta} d\eta &= U(t, \eta_{j+1}) - U(t, \eta_j). \end{aligned} \quad (29)$$

Используя для интегрирования по времени и первой производной по η формулу трапеций, а по второй производной по η формулу среднего значения, и полагая $t_{n+1} - t_n = \tau$, $\eta_{j+1} - \eta_j = h$, перепишем соотношения (28), (29) в виде

$$\begin{aligned} & \left(-3 \left(u_j^{2n} + u_j^{2n+1} - u_{j+2}^{2n} - u_{j+2}^{2n+1} \right) - \left(u_{\eta\eta j}^n + u_{\eta\eta j}^{n+1} - u_{\eta\eta j+2}^n - u_{\eta\eta j+2}^{n+1} \right) - \right. \\ & \left. - 2s_2 \left(u_j^n + u_j^{n+1} - u_{j+2}^n - u_{j+2}^{n+1} \right) \right) \cdot \frac{\tau}{2} + \left(u_{j+1}^{n+1} - u_{j+1}^n \right) \cdot 2h - \left(s \left(u_{j+1}^{n+1} + u_{j+1}^n \right) - \right. \\ & \left. - \left(U_{j+1}^{n+1} + U_{j+1}^n \right) + s_3 \left(U_{j+1}^{3n+1} + U_{j+1}^{3n} \right) \right) \cdot h\tau = 0, \\ & \left(U_{\eta_{j+2}}^n - U_{\eta_j}^n \right) - \left(u_{j+2}^n - u_j^n \right) = 0, \end{aligned} \quad (30)$$

$$\left(u_{\eta_{j+1}}^n + u_{\eta_j}^n \right) \cdot \frac{h}{2} = u_{j+1}^n - u_j^n,$$

$$u_{\eta_{j+1}}^n \cdot 2h = u_{\eta_{j+2}}^n - u_{\eta_j}^n,$$

$$\left(U_{\eta_{j+1}}^n + U_{\eta_j}^n \right) \cdot \frac{h}{2} = U_{j+1}^n - U_j^n.$$

Поскольку пакет [32] работает только в случае линейных разностных идеалов, а исходное дифференциальное уравнение (24) нелинейно, заменим нелинейную часть введением дополнительной функции $F = 3u^2$. За счет выбора допустимого упорядочения, так чтобы $u \succ U \succ \dots \succ F$, а затем по переменным n, j , нелинейная часть не будет входить в лидирующие мономы системы при построении базиса Грёбнера и структура базиса позволит проверить принадлежность к искомой разностной схеме.

В результате получим следующую разностную схему для уравнения (24), аналогичную схеме Кранка–Николсон для уравнения теплопроводности

$$\begin{aligned} & \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} + 3 \frac{(u_{j+1}^{2n+1} - u_{j-1}^{2n+1}) + (u_{j+1}^{2n} - u_{j-1}^{2n})}{4h} + ((u_{j+2}^{n+1} - 2u_{j+1}^{n+1} + 2u_{j-1}^{n+1} - u_{j-2}^{n+1}) + \\ & + (u_{j+2}^n - 2u_{j+1}^n + 2u_{j-1}^n - u_{j-2}^n))/4h^3 + s_2 \frac{(u_{j+1}^{n+1} - u_{j-1}^{n+1}) + (u_{j+1}^n - u_{j-1}^n)}{4h} - \\ & - s \frac{u_j^{n+1} + u_j^n}{2} - \frac{U_j^{n+1} + U_j^n}{2} + s_3 \frac{U_j^{3n+1} + U_j^{3n}}{2} = 0, \\ & \frac{U_{j+2}^n - 2U_{j+1}^n + U_j^n}{h^2} - \frac{u_{j+2}^n - u_j^n}{2h} = 0. \end{aligned} \tag{31}$$

Полученные неявные разностные схемы имеют квадратичную и кубическую нелинейность для следующего временного слоя. При построении решения использована следующая линеаризация

$$v_{k+1}^2 = v_{k+1}^2 - v_k^2 + v_k^2 = (v_{k+1} - v_k)(v_{k+1} + v_k) + v_k^2 \approx v_{k+1} \cdot 2v_k - v_k^2.$$

Количество итераций для достижения точности 10^{-12} на следующем временном слое, как правило, не превышало двух-трёх. Шаг по времени t брался равным половине шага по переменной η . Программа расчета была написана на языке Python с использованием пакета SciPy (<http://scipy.org>).

В результате проведенных вычислительных экспериментов на известном точном решении при частном наборе параметров для уравнения (24) получено хорошее согласование численного и аналитического (26) решений при $s_3 = s$ (рис. 2). Этот результат является тестом для представленного программного обеспечения.

Следует отметить, что скорость нелинейной уединенной волны, согласно (26), (27), больше при наличии упругой окружающей среды, чем при ее отсутствии. Численный расчет урав-

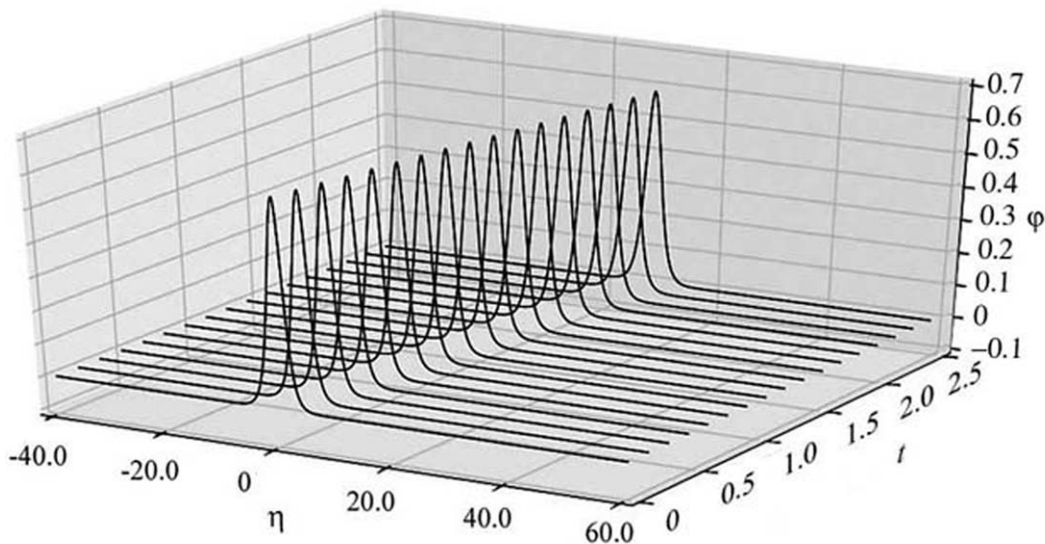


Рис. 2. Графики численного решения уравнений (24) при $s = s_3 = 1.0$, $s_2 = 1.0$ и $s_5 = 0.8$ с начальным условием, взятым из точного решения (26) при $t = 0$

Fig. 2. Equations (24) numerical solution graphs under $s = s_3 = 1.0$, $s_2 = 1.0$ and $s_5 = 0.8$ with the initial condition taken from exact solution (26) under $t = 0$

нения (24) с начальным условием в виде решения (26) при $\tilde{t} = 0$ показал, что имеет место затухание амплитуды волны при $s_3 - s > 0$ (рис. 3) и рост амплитуды при $s_3 - s < 0$ (рис. 4).

При отсутствии жидкости $s = 0$ происходит затухание волны за счет конструкционного демпфирования, а при отсутствии конструкционного демпфирования $s_3 = 0$ происходит затухание волны при $s < 0$ ($\mu_0 > 1/2$) и рост амплитуды волны при $s > 0$ ($\mu_0 < 1/2$).

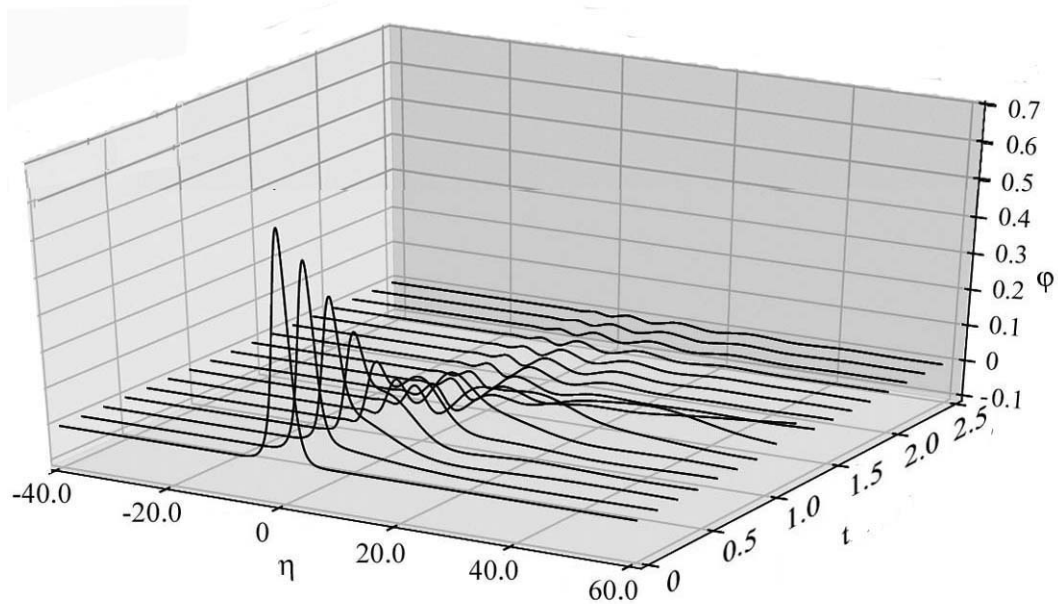


Рис. 3. Графики численного решения уравнений (24) при $s_3 = 1.5, s = 1.0, s_2 = 1.0$ и $s_5 = 0.8$ с начальным условием, взятым из точного решения (26) при $t = 0$

Fig. 3. Equations (24) numerical solution graphs under $s_3 = 1.5, s = 1.0, s_2 = 1.0$ and $s_5 = 0.8$ with the initial condition taken from the exact solution (26) under $t = 0$

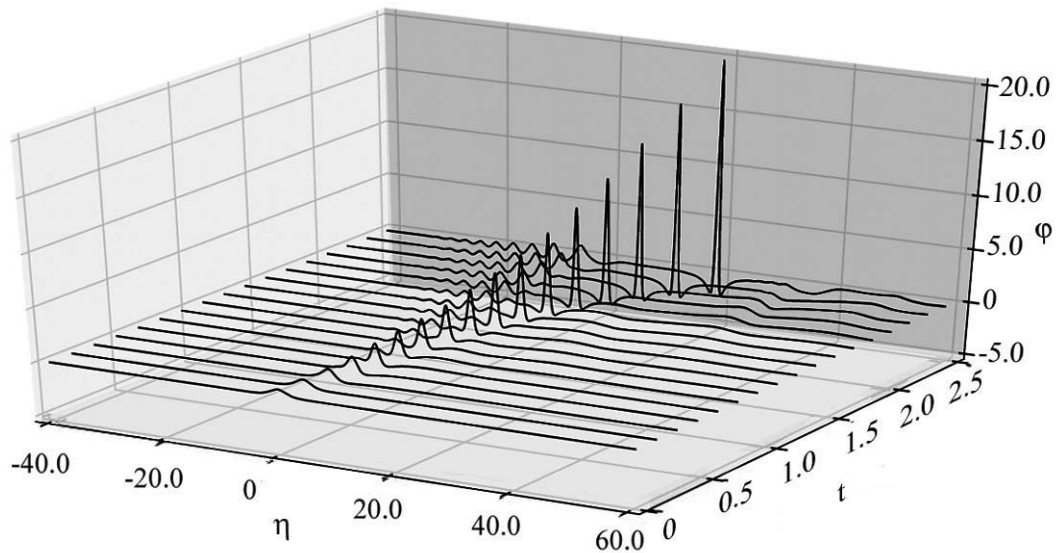


Рис. 4. Графики численного решения уравнений (24) при $s_3 = 0.5, s = 1.0, s_2 = 1.0$ и $s_5 = 0.8$ с начальным условием, взятым из точного решения (26) при $t = 0$

Fig. 4. Equations (24) numerical solution graphs under $s_3 = 0.5, s = 1.0, s_2 = 1.0$ and $s_5 = 0.8$ with the initial condition taken from the exact solution (26) under $t = 0$

Заключение

В представленной работе было проведено исследование модели волновых явлений в нелинейной упругой цилиндрической оболочке типа Кирхгофа–Лява, окруженной упругой средой и содержащей вязкую несжимаемую жидкость. Выполненные вычислительные эксперименты, позволили оценить влияние вязкой несжимаемой жидкости и конструкционного демпфирования на распространение нелинейных волн в упругой оболочке, окруженной упругой средой. Наличие упругой среды приводит к увеличению скорости волны.

Библиографический список

1. Клигман Е.П., Клигман И.Е., Матвеев В.П. Спектральная задача для оболочек с жидкостью // Прикладная механика и техническая физика. 2005. Т. 46, № 6. С. 128–135.
2. Бочкарев С.А., Матвеев В.П. Анализ устойчивости цилиндрических оболочек, содержащих жидкость с осевой и окружной компонентами скорости // Прикладная механика и техническая физика. 2012. Т. 53, № 5. С. 155–165.
3. Громека И.С. К теории движения жидкости в узких цилиндрических трубах / Собр. соч. М.: Изд-во АН СССР, 1952. 296 с. С. 149–171.
4. Кондратов Д.В., Могилевич Л.И. Математическое моделирование процессов взаимодействия двух цилиндрических оболочек со слоем жидкости между ними при отсутствии торцевого истечения в условиях вибрации // Вестник СГТУ. 2007. Т. 3, № 2(27). С. 15–23.
5. Кондратов Д.В., Кондратова Ю.Н., Могилевич Л.И. Исследование амплитудных частотных характеристик колебаний упругих стенок трубы кольцевого профиля при пульсирующем движении вязкой жидкости в условиях жесткого защемления по торцам // Проблемы машиностроения и надежности машин. 2009. № 3. С. 15–21.
6. Païdoussis M.P., Nguyen V.B., Misra A.K. A theoretical study of the stability of cantilevered coaxial cylindrical shells conveying fluid // J. Fluids Struct. 1991. vol. 5, iss. 2. pp. 127–164. DOI:10.1016/0889-9746(91)90454-W
7. Amabili M., Garziera R. Vibrations of circular cylindrical shells with nonuniform constraints, elastic bed and added mass; Part III: Steady viscous effects on shells conveying fluid // J. Fluids Struct. 2002. vol. 16, iss. 6. pp. 795–809. DOI:10.1006/jfls.2002.0446
8. Amabili M. Nonlinear Vibrations and Stability of Shells and Plates. Cambridge University Press, 2008. 374 p. DOI:10.1017/CBO9780511619694
9. Могилевич Л.И., Попов В.С. Динамика взаимодействия упругого цилиндра со слоем вязкой несжимаемой жидкости // МТТ. 2004, № 5. С. 179–190.
10. Бочкарев С.А. Собственные колебания вращающейся круговой цилиндрической оболочки с жидкостью // Вычисл. мех. сплош. сред. 2010. Т. 3, № 2. С. 24–33. DOI:10.7242/1999-6691/2010.3.2.14
11. Лекомцев С.В. Конечно-элементные алгоритмы расчета собственных колебаний трехмерных оболочек // Вычисл. мех. сплош. сред. 2012. Т. 5, № 2. С. 233–243. DOI:10.7242/1999-6691/2012.5.2.28
12. Бочкарев С.А., Матвеев В.П. Устойчивость коаксиальных цилиндрических оболочек, содержащих вращающийся поток жидкости // Вычисл. мех. сплош. сред. 2013. Т. 6, № 1. С. 94–102. DOI:10.7242/1999-6691/2013.6.1.12
13. Nariboli G.A. Nonlinear longitudinal dispersive waves in elastic rods // J. Math. Phys. Sci. 1970. Vol. 4. Pp. 64–73.
14. Nariboli G.A., Sedov A. Burger's–Korteweg–De Vries equation for viscoelastic rods and plates // J. Math. Anal. and Appl. 1970. Vol. 32. Pp. 661–667.

15. *Ерофеев В.И., Кажаяв В.В.* Неупругое взаимодействие и расщепление солитонов деформации, распространяющихся в стержне // *Вычисл. мех. сплош. сред.* 2017. Т. 10, № 2. С. 127–137. DOI:10.7242/1999-6691/2017.10.2.11
16. *Землянухин А.И., Могилевич Л.И.* Нелинейные волны деформаций в цилиндрических оболочках // *Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика.* 1995. Т. 3, № 1. С. 52–58.
17. *Ерофеев В.И., Клюева Н.В.* Солитоны и нелинейные периодические волны деформации в стержнях, пластинах и оболочках: Обзор // *Акустический журнал.* 2002. Т. 48, № 6. С. 725–740.
18. *Ерофеев В.И., Землянухин А.И., Катсон В.М., Шешенин С.Ф.* Формирование солитонов деформации в континууме Коссера со стеснённым вращением // *Вычисл. мех. сплош. сред.* 2009. Т. 2, № 4. С. 67–75. DOI:10.7242/1999-6691/2009.2.4.32
19. *Багдоев А.Г., Ерофеев В.И., Шекоян А.В.* Линейные и нелинейные волны в диспергирующих сплошных средах. М.: Физматлит. 2009. 320 с.
20. *Ерофеев В.И., Кажаяв В.В., Павлов И.С.* Неупругое взаимодействие и расщепление солитонов деформации, распространяющихся в зернистой среде // *Вычисл. мех. сплош. сред.* 2013. Т. 6, № 2. С. 140–150. DOI:10.7242/1999-6691/2013.6.2.17
21. *Землянухин А.И., Бочкарёв А.В.* Метод возмущений и точные решения уравнений нелинейной динамики сред с микроструктурой // *Вычисл. мех. сплош. сред.* 2016. Т. 9, № 2. С. 182–191. DOI:10.7242/1999-6691/2016.9.2.16
22. *Землянухин А.И., Бочкарев А.В.* Непрерывные дробы, метод возмущений и точное решение нелинейных эволюционных уравнений // *Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика,* 2016. Т. 24, № 4. С. 71–85. DOI:10.18500/0869-6632-2016-24-4-71-85
23. *Землянухин А.И., Бочкарев А.В.* Метод Ньютона построения точных решений нелинейных дифференциальных и неинтегрируемых эволюционных уравнений // *Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика.* 2017. Т. 25, № 1. С. 64–83. DOI:10.18500/0869-6632-2017-25-1-64-83
24. *Блинкова А.Ю., Блинков Ю.А., Могилевич Л.И.* Нелинейные волны в соосных цилиндрических оболочках, содержащих вязкую жидкость между ними, с учетом рассеяния энергии // *Вычисл. мех. сплош. сред.* 2013. Т. 6, № 3. С. 336–345. DOI:10.7242/1999-6691/2013.6.3.38
25. *Блинкова А.Ю., Иванов С.В., Ковалев А.Д., Могилевич Л.И.* Математическое и компьютерное моделирование динамики нелинейных волн в физически нелинейных упругих цилиндрических оболочках, содержащих вязкую несжимаемую жидкость // *Известия Саратовского университета. Нов. сер. Сер. Физика.* 2012. Т. 12, № 2. С. 12–18. DOI:10.18500/1816-9791-2016-16-2-184-197
26. *Блинкова А.Ю., Блинков Ю.А., Иванов С.В., Могилевич Л.И.* Нелинейные волны деформаций в геометрически и физически нелинейной вязкоупругой цилиндрической оболочке, содержащей вязкую несжимаемую жидкость и окруженной упругой средой // *Известия Саратовского университета. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика.* 2015. Т. 15, № 2. С. 193–202. DOI:10.18500/1816-9791-2015-15-2-193-202
27. *Лойцянский Л.Г.* *Механика жидкости и газа.* М.: Дрофа, 2003. 840 с.
28. *Вольмир А.С.* *Оболочки в потоке жидкости и газа: Задачи гидроупругости.* М.: Наука, 1979. 320 с.
29. *Власов В.З., Леонтьев Н.Н.* *Балки, плиты и оболочки на упругом основании.* М.: Гос. изд-во физ.-мат. лит., 1960. 490 с.
30. *Михасев Г.И., Шейко А.Н.* О влиянии параметра упругой нелокальности на собственные частоты колебаний углеродной нанотрубки в упругой среде // *Труды БГТУ. Минск: БГТУ.* 2012. № 6 (153). С. 41–44.

31. Попов И.Ю., Родыгина О.А., Чивилихин С.А., Гусаров В.В. Солитон в стенке нанотрубки и Стоксово течение в ней // Письма в ЖТФ. 2010. Т. 36. № 18. С. 48–54.
32. Блинков Ю.А., Гердт В.П. Специализированная система компьютерной алгебры GINV // Программирование. 2008. Т. 34. № 2. С. 67–80.
33. Gerdt V.P., Blinkov Yu.A. Involution and difference schemes for the Navier–Stokes equations // CASC. Lecture Notes in Computer Science. 2009. Vol. 5743. Pp. 94–105. DOI:10.1007/978-3-642-04103-7_10
34. Amodio P., Blinkov Yuri, Gerdt V.P., La Scala R. On consistency of finite difference approximations to the Navier–Stokes equations // CASC. Lecture Notes in Computer Science. 2013. Vol. 8136. Pp. 46–60. DOI:10.1007/978-3-319-02297-0_4

References

1. Kligman E.P., Kligman, I.E., Matvienko V.P. Spectral problem for shells with fluid. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, 2005, vol. 46, iss. 6, pp. 876–882. DOI:10.1007/s10808-005-0147-9
2. Bochkarev S.A., Matveenko V.P. Stability analysis of cylindrical shells containing a fluid with axial and circumferential velocity components. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, 2012, vol. 53, iss. 5, pp. 768–776. DOI:10.1134/S0021894412050161
3. Gromeka I.S. To the Theory of Fluid Flow in Narrow Cylindrical Tubes. Moscow: AS USSR, 1952, pp. 149–171 (in Russian).
4. Kondratov D.V., Mogilevich L.I. Mathematical modeling of the interaction of two cylindrical shells with a fluid layer between them in the absence of an outward flow under vibrations. *Vestnik Saratov State Technical University*, 2007, vol. 3, iss. 2 (27), pp. 15–23 (in Russian).
5. Kondratov D.V., Kondratova N.Yu., Mogilevich L.I. Studies of the amplitude frequency characteristics of oscillations of the tube elastic walls of a circular profile during pulsed motion of a viscous fluid under the conditions of rigid jamming on the butt-ends. *J. Mach. Manuf. Reliab.*, 2009, vol. 38, iss. 3, pp. 229–234. DOI:10.3103/S1052618809030030
6. Paidoussis M.P., Nguyen V.B., Misra A.K. A theoretical study of the stability of cantilevered coaxial cylindrical shells conveying fluid. *J. Fluids Struct.*, 1991, vol. 5, iss. 2, pp. 127–164. DOI:10.1016/0889-9746(91)90454-W
7. Amabili M., Garziera R. Vibrations of circular cylindrical shells with nonuniform constraints, elastic bed and added mass; Part III: Steady viscous effects on shells conveying fluid. *J. Fluids Struct.*, 2002, vol. 16, iss. 6, pp. 795–809. DOI: 10.1006/jfls.2002.0446
8. Amabili M. Nonlinear Vibrations and Stability of Shells and Plates. Cambridge University Press, 2008. 374 p. DOI:10.1017/CBO9780511619694
9. Mogilevich L.I., Popov V.S. Dynamics of the interaction between an elastic cylinder and a viscous incompressible fluid layer. *Mechanics of Solids*, 2004, iss. 5, pp. 179–190.
10. Bochkarev S.A. Natural vibrations of a rotating circular cylindrical shell containing fluid. *Computational Continuum Mechanics*, 2010, vol. 3, iss. 2, pp. 24–33. DOI:10.7242/1999-6691/2010.3.2.14
11. Lekomtsev S.V. Finite-element algorithms for calculation of natural vibrations of three-dimensional shells. *Computational Continuum Mechanics*, 2012, vol. 5, iss. 2, pp. 233–243. DOI:10.7242/1999-6691/2012.5.2.28
12. Bochkarev S.A., Matveenko V.P. Stability of coaxial cylindrical shells containing a rotating fluid. *Computational Continuum Mechanics*, 2013, vol. 6, iss. 1, pp. 94–102. DOI:10.7242/1999-6691/2013.6.1.12

13. Nariboli G.A. Nonlinear longitudinal dispersive waves in elastic rods. *J. Math. Phys. Sci.*, 1970, vol. 4, 64–73.
14. Nariboli G.A., Sedov A. Burger's–Korteweg–De Vries equation for viscoelastic rods and plates. *J. Math. Anal. and Appl.*, 1970, vol. 32, pp. 661–667.
15. Erofeev V.I., Kazhaev V.V. Inelastic interaction and splitting of deformation solitons propagating in the rod. *Computational Continuum Mechanics*, 2017, vol. 10, iss. 2, pp. 127–137. DOI:10.7242/1999-6691/2017.10.2.11
16. Zemlyanukhin A.I., Mogilevich L.I. Nonlinear waves of deformations in cylindrical shells. *Izvestiya VUZ, Applied Nonlinear Dynamics*, 1995, iss. 1, pp. 52–58 (in Russian).
17. Erofeev V.I., Klyueva N.V. Solitons and nonlinear periodic strain waves in rods, plates and shells: Review. *Acoustical Physics*, 2002, vol. 48, iss. 6, pp. 643–655. DOI:1063-7710/02/4806
18. Erofeev V.I., Zemlyanukhin A.I., Katson V.M., Sheshenin S.F. Formation of deformation solitons in the Cosserat continuum with constrained rotation. *Computational Continuum Mechanics*, 2009, iss. 4, pp. 67–75. DOI:10.7242/1999-6691/2009.2.4.32
19. Bagdoev A.G., Erofeev V.I., Shekoyan A.V. Linear and Nonlinear Waves in Dispersive Continuous Media. Moscow: Fizmatlit, 2009. 320 p. (in Russian).
20. Erofeev V.I., Kazhaev V.V., Pavlov I.S. Inelastic interaction and splitting of strain solitons propagating in a granular medium. *Computational Continuum Mechanics*, 2013, vol. 6, iss. 2, pp. 140–150. DOI:10.7242/1999-6691/2013.6.2.17
21. Zemlyanukhin A.I., Bochkarev A.V. The perturbation method and exact solutions of nonlinear dynamics equations for media with microstructure. *Computational Continuum Mechanics*, 2016, vol. 9, iss. 2, pp. 182–191 (in Russian). DOI:10.7242/1999-6691/2016.9.2.16
22. Zemlyanukhin A.I., Bochkarev A.V. Continued fractions, the perturbation method and exact solutions to nonlinear evolution equations. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*. 2016. Vol. 24, iss. 4, pp. 71–85 (in Russian). DOI:10.18500/0869-6632-2016-24-4-71-85
23. Zemlyanukhin A.I., Bochkarev A.V. Newton's method of constructing exact solutions to nonlinear differential equations and non-integrable evolution equations. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*. 2017. Vol. 25, iss. 1, pp. 64–83. DOI:10.18500/0869-6632-2017-25-1-64-83
24. Blinkova A.Y., Blinkov Y.A., Mogilevich L.I. Non-linear waves in coaxial cylinder shells containing viscous liquid inside with consideration for energy dispersion. *Computational Continuum Mechanics*, 2013, vol. 6, iss. 3, pp. 336–345. DOI:10.7242/1999-6691/2013.6.3.38
25. Blinkova A.Yu., Ivanov S.V., Kovalev A.D., Mogilevich L.I. Mathematical and computer modeling of nonlinear waves dynamics in a physically nonlinear elastic cylindrical shells with viscous incompressible liquid inside them. *Proceedings of Saratov University. New Ser. Ser. Physics*, 2012. vol. 12, iss. 2, pp. 12–18 (in Russian). DOI:10.18500/1816-9791-2016-16-2-184-197
26. Blinkova A.Yu., Blinkov Yu.A., Ivanov S.V., Mogilevich L.I. Nonlinear Deformation Waves in a Geometrically and Physically Nonlinear Viscoelastic Cylindrical Shell Containing Viscous Incompressible Fluid and Surrounded by an Elastic Medium. *Antisymmetric Higher Order Edge Waves in Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2015, vol. 15, iss. 2, pp. 193–202. DOI:10.18500/1816-9791-2015-15-2-193-202
27. Loytsiansky L.G. Mechanics of Liquid and Gas. Moscow. Drofa, 2003. 840 p. (in Russian).
28. Volmir A.S. Shells in a Fluid and Gas Flow: Hydroelasticity Problems. Moscow, Science, 1979. 320 p.
29. Vlasov V.Z., Leontiev N.N. Beams, Plates and Shells on an Elastic Base. Moscow. Gos. Izd. Fiz.-Mat. Lit., 1960. 490 p.
30. Mikhasev G.I., Sheiko A.N. On the influence of the elastic nonlocality parameter on the natural

frequencies of vibrations of a carbon nanotube in an elastic medium. *Proceedings of BSTU*. Minsk: BSTU, 2012, iss. 6 (153), pp. 41–44.

31. Popov I.Yu., Rodygina O.A., Chivilikhin S.A., Gusarov V.V. Soliton in a nanotube wall and Stokes current in nanotube. *Technical Physical Letters*, 2010, vol. 36, iss. 9, pp. 852–875, DOI: 10.1134/S1063785010090221.
32. Blinkov Y.A., Gerdt V.P. Specialized computer algebra system GINV. *Programming and Computer Software*, 2008, vol. 34, iss. 2, pp. 112–123. DOI: 10.1134/S0361768808020096
33. Gerdt V.P., Blinkov Yu.A. Involution and difference schemes for the Navier-Stokes equations. *CASC. Lecture Notes in Computer Science*, 2009, vol. 5743, pp. 94–105. DOI: 10.1007/978-3-642-04103-7_10
34. Amodio P., Blinkov Yu.A., Gerdt V.P., La Scala R. On consistency of finite difference approximations to the Navier–Stokes equations. *CASC. Lecture Notes in Computer Science*, 2013, vol. 8136, pp. 46–60. DOI: 10.1007/978-3-319-02297-0_4



Блинов Юрий Анатольевич родился в Волгоградской области (1965), окончил Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского (1987). После окончания срочной службы в армии по настоящие время работает в СГУ. Заведующий кафедрой математического и компьютерного моделирования. Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук (1995, ОИЯИ) и доктора физико-математических наук (2009, РУДН) в области математического моделирования, численных методов и комплексов программ. Опубликовал 80 научных статей по этим направлениям.

Россия, 410013 Саратов, Астраханская, 83
Саратовский национальный исследовательский государственный университет
E-mail: blinkovua@info.sgu.ru



Евдокимова Екатерина Владимировна родилась в Саратове (1972), окончила Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского (1995). В настоящее время работает в Саратовском филиале Самарского государственного университета путей сообщения и является аспирантом кафедры прикладной математики и системного анализа Саратовского государственного технического университета им. Гагарина Ю.А.

Россия, 410054 Саратов, Политехническая, 77
Саратовский государственный технический университет им. Гагарина Ю.А.
E-mail: eev2106@mail.ru



Могилевич Лев Ильич родился в Саратове (1946), окончил с отличием Саратовский государственный университет имени Н.Г. Чернышевского (1969) и аспирантуру СГУ (1972). Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук (1972, СГУ) и доктора технических наук в Киевском политехническом институте (1989). Работает профессором кафедры прикладной математики и системного анализа Саратовского государственного технического университета имени Гагарина Ю.А. Специалист в области математического моделирования нелинейных волн и колебаний в аэродинамике и в упругогидродинамике. Автор более 300 научных работ по этим направлениям.

Россия, 410054 Саратов, Политехническая, 77
Саратовский государственный технический университет им. Гагарина Ю.А.
E-mail: mogilevich@sgu.ru



УДК 53.09

<https://doi.org/10.18500/0869-6632-2018-26-6-48-58>

Неаддитивное влияние паров воды и освещения на проводимость пленки диоксида олова при комнатной температуре

В. В. Симаков, И. В. Синёв, С. Б. Вениг

Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н.Г. Чернышевского
Россия, 410012 Саратов, Астраханская, 83

E-mail: viatcheslav.simakov@gmail.com, SinevIV@info.sgu.ru, sergey.venig@gmail.com

Автор для переписки Симаков Вячеслав Владимирович, viatcheslav.simakov@gmail.com

Поступила в редакцию 25.04.2018; принята к публикации 29.10.2018

Тема и цель исследования. В работе представлены результаты экспериментальных исследований влияния паров воды и интенсивности освещения светодиода на проводимость тонкой пленки диоксида олова при комнатной температуре. Известно, что использование освещения активных слоев сенсоров позволяет снизить их рабочую температуру, что расширяет область применения сенсоров и мультисенсорных систем на их основе. Целью работы является исследование совместного влияния освещения и воздействия паров воды на проводимость пленок диоксида олова. **Методы и материалы.** Изучалась газочувствительность сенсоров на основе тонких пленок диоксида олова, сформированных ВЧ магнетронным методом распыления стехиометрической мишени SnO₂. Сенсор представлял собой прямоугольную пластину поликора, на которой были сформированы параллельные контакты из нержавеющей стали. Длина контактов 10 мм, зазор между контактами 50 мкм. Толщина активного слоя составляла 0.8 мкм. Газовые пробы, содержащие пары воды, составлялись путем барботирования деионизированной воды потоком синтетического воздуха. Содержание паров воды в газовой пробе определялось соотношением потоков паровоздушной смеси и синтетического воздуха. **Результаты.** Впервые показано, что при низких уровнях освещения проводимость тонкой пленки диоксида олова при напуске газовых проб увеличивается, а при высоких уровнях освещения – уменьшается. Выполнен численный расчет концентрационных и люксамперных характеристик газочувствительных структур. **Обсуждение.** Результаты проведенных расчетов по предложенной модели показали, что увеличение или уменьшение проводимости образцов при напуске детектируемого газа определяется положением уровня Ферми в зерне поликристаллического образца до напуска анализируемого газа, которое может контролироваться интенсивностью освещения. **Заключение.** Полученные результаты могут быть использованы при создании мультисенсорных систем на основе полупроводниковых слоев для детектирования и распознавания примесей газов в окружающей атмосфере.

Ключевые слова: диоксид олова, газочувствительность, фоточувствительность, неаддитивность влияния внешних воздействий.

Образец цитирования: Симаков В.В., Синёв И.В., Вениг С.Б. Неаддитивное влияние паров воды и освещения на проводимость пленки диоксида олова при комнатной температуре // Изв. вузов. ПНД. 2018. Т. 26, № 6. С. 48–58. <https://doi.org/10.18500/0869-6632-2018-26-6-48-58>

Финансовая поддержка. Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проект № 16-07-00821.

Non-additive influence of water vapor and lighting on the conductivity of tin dioxide film at room temperature

V. V. Simakov, I. V. Sinev, S. B. Venig

Saratov State University

83, Astrakhanskaya, 410012 Saratov, Russia

E-mail: viatcheslav.simakov@gmail.com, SinevIV@info.sgu.ru, sergey.venig@gmail.com

Correspondence should be addressed to Simakov Viatcheslav V., viatcheslav.simakov@gmail.com

Received 25.04.2018, accepted for publication 29.10.2018

Subject and purpose of the study. The paper presents the results of experimental studies of the effect of water vapor and light intensity on the conductivity of a thin film of tin dioxide at room temperature. It is known that the use of illumination of active layers of sensors allows to reduce their operating temperature, which expands the application field of sensors and multisensor systems based on them. The aim of the paper is to investigate the joint influence of lighting and the effect of water vapor on the conductivity of tin dioxide films. **Methods and materials.** The sensitivity of gas sensors based on thin films of tin dioxide formed by a high-frequency magnetron method of sputtering a stoichiometric target SnO₂ was studied. The sensor was a rectangular alumina plate, on which parallel stainless steel contacts were formed. The length of the contacts is 10 mm, the gap between the contacts is 50 μm. The thickness of the active layer was 0.8 μm. Gas samples containing water vapor were prepared at the bubbler by bubbling of deionized water in stream of synthetic air. Content of water vapor in the gas sample was determined by the ratio in the stream of steam-air mixture and synthetic air. **Results.** It is shown for the first time that, at low illumination levels, the conductivity of a thin film of tin dioxide when gas samples are launched increases, and at high illumination levels, the conductivity decreases. A numerical calculation of the concentration and luxampere characteristics of gas sensitive structures is performed. **Discussion.** Results of calculations on the basis of proposed model showed that the increase or decrease in the conductivity of samples at a presence of test gas is determined by initial position of the Fermi level in the grain of a polycrystalline sample, which can be controlled by intensity of illumination. **Conclusion.** Results obtained can be used to create multisensor systems based on semiconductor layers for detection and recognition of gas impurities in the ambient atmosphere.

Key words: tin dioxide, gas sensitivity, photosensitivity, nonadditivity of external influences.

Reference: Simakov V.V., Sinev I.V., Venig S.B. Non-additive influence of water vapor and lighting on the conductivity of tin dioxide film at room temperature. *Izvestiya VUZ, Applied Nonlinear Dynamics*, 2018, vol. 26, no. 6, pp. 48–58. <https://doi.org/10.18500/0869-6632-2018-26-6-48-58>

Acknowledgements. Reported study was funded by RFBR, research project 16-07-00821.

Введение

На сегодняшний момент достигнуты существенные успехи в создании систем анализа состава окружающей среды, решены вопросы формирования на единой подложке методами микроэлектроники чувствительного слоя и систем управления работой таких устройств [1–3]. Применение полупроводниковых металлооксидных слоев в системах анализа многокомпонентных газовых смесей обеспечивает их низкую стоимость и энергопотребление [4, 5]. Использование в газовых сенсорах широкозонных металлооксидных материалов позволяет детектировать широкий спектр газов органической и неорганической природы. Однако, к недостаткам таких газочувствительных материалов можно отнести необходимость их нагрева до температуры порядка 300°C, что, по-видимому, обеспечивает присутствие на поверхности активного слоя сенсора химически активных форм кислорода [6, 7]. Наряду с увеличением энергопотребления таких приборов, возникают ограничения на их использование во взрывоопасных средах и для детектирования биологических объектов. Кроме того, нагрев активных слоев сенсоров приводит к снижению стабильности их параметров из-за активации диффузионных процессов в материале газочувствительного слоя [8].

Известно, что освещение поверхности сенсора позволяет снизить требуемую для работы температуру, в ряде случаев вплоть до комнатной [9]. Авторами работ [10–13] показано, что для широкозонных газочувствительных материалов в качестве внешнего излучения можно использовать и свет из видимого диапазона.

Согласно ряду опубликованных работ, пары этанола и воды в воздухе оказывают восстанавливающее действие на проводимость слоев диоксида олова, то есть при экспозиции в пробе проводимость увеличивается. Однако авторы работ [14, 15] обнаружили, что проводимость диоксида олова при экспозиции в некоторых газовых пробах может увеличиваться или уменьшаться в зависимости от других физических воздействий, оказываемых на активный слой сенсора (например, рабочая температура или концентрация анализируемого газа). Для объяснения наблюдаемых экспериментальных фактов предложен ряд гипотез, которые в настоящее время являются предметом обсуждения.

В этой работе впервые показано, что проводимость газового сенсора на основе тонкой пленки диоксида олова при напуске паров воды может как увеличиваться, так и уменьшаться в зависимости от интенсивности освещения.

1. Образцы и методика измерений

Слои диоксида олова формировались методом ВЧ-магнетронного распыления стехиометрической мишени SnO_2 в смеси аргона и кислорода [16]. Поверх пленки диоксида олова через маску наносилась система контактов. Для освещения сенсора использовался светодиод марки DFL-5AP4SC-400 с излучением в полосе длин волн 397...409 нм с максимумом на длине волны 402 нм. Интенсивность освещения контролировалась током через светодиод с помощью источника питания PST-3201. В качестве количественной меры интенсивности освещения использовался световой поток I , лм. Исследования электрофизических свойств полученных газочувствительных структур, как в темноте, так и при их освещении, проводились с использованием аппаратно-программного комплекса [17].

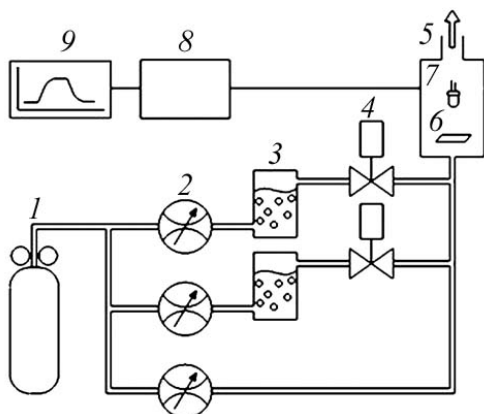


Рис. 1. Схема измерительной установки: 1 – баллон с синтетическим воздухом; 2 – регуляторы расхода газа; 3 – барботер; 4 – электромагнитный клапан; 5 – рабочая камера; 6 – образец SnO_2 ; 7 – светодиод; 8 – мультиметр; 9 – компьютер

Fig. 1. Scheme of measuring setup: 1 – cylinder with synthetic air; 2 – gas flow regulators; 3 – bubbler; 4 – solenoid valve; 5 – working chamber; 6 – sample of SnO_2 ; 7 – LED; 8 – multimeter; 9 – computer

Газовые пробы, содержащие пары воды, составлялись путем барботирования деионизированной воды потоком синтетического воздуха (20.5% кислорода в азоте). Содержание паров воды в газовой пробе определялось соотношением потоков паровоздушной смеси и очищенного воздуха. Для получения газовых проб из баллона 1 (рис. 1) при помощи регуляторов расхода газа EL-Flow (BronkhorstHigh-Tech) 2 подавался осушенный воздух в газопроводную систему и поступал в барботер 3. Через электромагнитный клапан (SMC) 4 паровоздушная смесь поступала в измерительную камеру 5, в которой расположены газочувствительный слой 6 с контактной системой и светодиод 7. Общий поток через измерительную камеру во всех экспериментах поддерживался на уровне 100 норм.мл/мин. Температура сенсоров и газовых проб во всех экспериментах поддержи-

ввалась термостатом ТС-1/80 на уровне 30°C. Напуск газовых проб осуществлялся в течение 10 минут, а затем 60 минут камера продувалась потоком очищенного воздуха. В ходе экспериментов сенсор освещался светодиодом с различной интенсивностью света, причем освещение проводилось непрерывно в течение всего времени экспериментов.

2. Экспериментальные результаты и их обсуждение

В темноте при ступенчатом воздействии газовых проб, содержащих пары воды, проводимость пленки диоксида олова увеличивалась (рис. 2, *a*), что может быть связано с вытеснением с поверхности зерна адсорбированных частиц кислорода в отрицательно заряженной форме молекулами воды. С увеличением содержания паров воды в газовой пробе проводимость образцов увеличивалась, причем на концентрационной зависимости проводимости в парах воды можно выделить три характерных области: область низких концентраций (менее 20 об. %), где проводимость образца изменяется незначительно; промежуточная область концентраций (20...60 об. %), при которых проводимость образца увеличивается наиболее существенно; область высоких концентраций (более 60 об. %), где проводимость образца стремится к насыщению.

Освещение пленки диоксида олова в атмосфере сухого воздуха приводило к обратимому увеличению ее проводимости (рис. 3, *a*), что может быть связано с фотогенерацией электронов с глубоких уровней ловушек в объеме зерна. При увеличении светового потока стационарное значение проводимости образца возрастало (рис. 3, *b*). В области малых интенсивностей (менее 0.05 лм) проводимость линейно увеличивалась с ростом светового потока, а при величинах светового потока свыше 0.1 лм проводимость имела тенденцию к насыщению, что может быть связано с истощением концентрации заполненных электронами ловушек.

В атмосфере паров воды освещение пленки диоксида олова приводило к обратимому увеличению ее проводимости (рис. 4, *a*), после выключения освещения проводимость уменьшалась до своего темнового значения. Обратимое изменение проводимости пленки диоксида олова указывало на отсутствие фотостимулированной перестройки дефектов в материале и могло быть

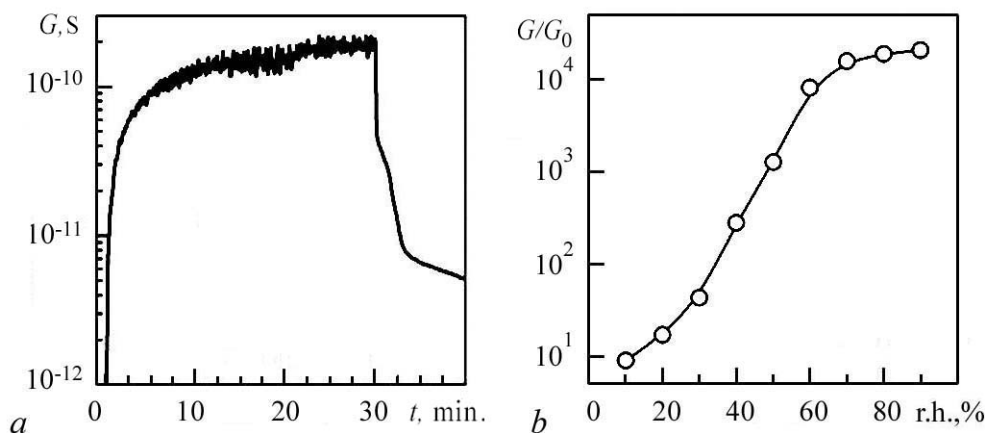


Рис. 2. Влияние паров воды на проводимость пленки диоксида олова в темноте: *a* – динамика изменения проводимости при ступенчатом напуске газовых проб, содержащих 30 об. % паров воды; *b* – концентрационная зависимость проводимости (G – проводимость образца в газовой пробе, содержащей пары воды; G_0 – проводимость образца в синтетическом воздухе)

Fig. 2. Effect of water vapor on the conductivity of a tin dioxide film in the dark: *a* – dynamics of the conductivity with filling gas samples containing 30 vol. % water vapor; *b* – concentration dependence of conductivity (G – sample conductivity in the air containing water vapor; G_0 – sample conductivity in the synthetic air)

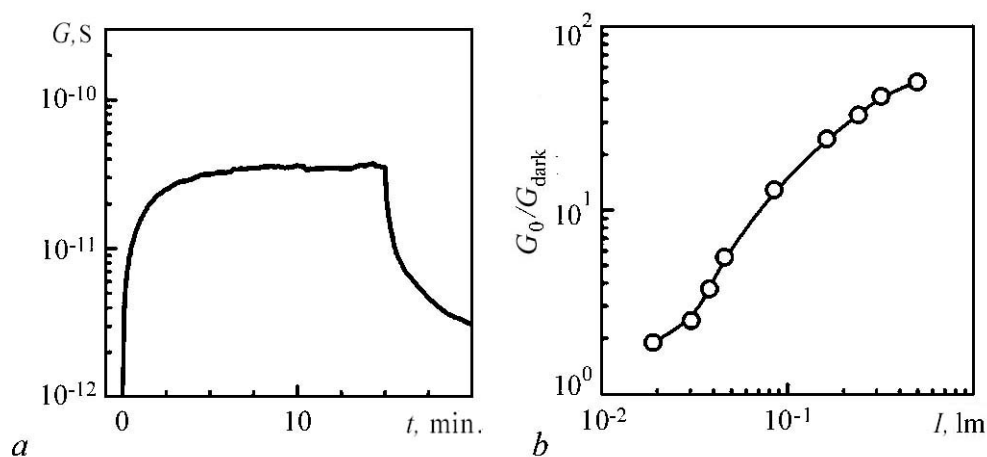


Рис. 3. Влияние освещения на проводимость пленки диоксида олова в атмосфере сухого воздуха: *a* – динамика изменения проводимости при освещении, световой поток $I=0.3$ лм; *b* – зависимость проводимости от величины светового потока (G_{dark} – проводимость образца в темноте)

Fig. 3. Influence of illumination on the conductivity of a film of tin dioxide in an atmosphere of dry air: *a* – the dynamics of the conductivity change by illuminating with a light flux $I=0.3$ lm; *b* – dependence of the conductivity on the magnitude of the light flux (G_{dark} – sample conductivity in the dark)

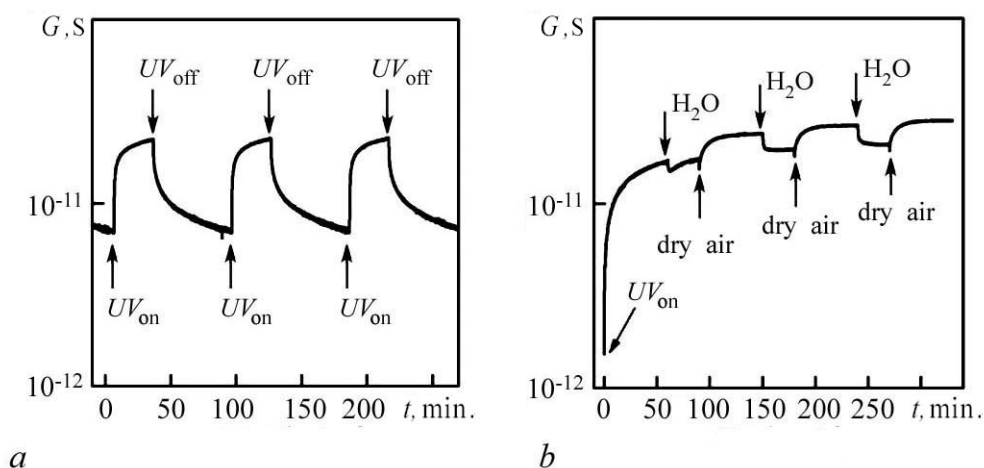


Рис. 4. Динамика изменения проводимости сенсора: *a* – в темноте при напуске паров воды; *b* – при освещении светодионом в атмосфере паров воды (концентрация паров воды в экспериментах составляла 50 об.%, световой поток 0.1 лм)

Fig. 4. Dynamics of the sensor conductivity: *a* – in the dark with the release of water vapor; *b* – under LED illumination in an atmosphere of water vapor (the concentration of water vapor in the experiments was 50 vol.%, luminous flux of 0.1 lm)

связано с процессами выброса электронов с уровней ловушек в объеме материала зерна. Однако при освещении напуск газовых проб, содержащих пары воды, приводил к уменьшению проводимости диоксида олова (рис. 4, *b*).

3. Теоретические расчеты и их обсуждение

При адсорбции частиц из газовой фазы, на поверхности широкозонных полупроводников образуются локализованные поверхностные состояния акцепторного (газ-окислитель), либо донорного типа (газ-восстановитель). Энергетическое положение поверхностных уровней, со-

ответствующих этим состояниям, определяется как электронным сродством адсорбирующихся частиц, свойствами адсорбента, так и природой химической связи, возникающей между адсорбатом и адсорбентом [18–20].

Появление в окружающей среде частиц газа-окислителя и/или газа-восстановителя приводит к заполнению центров адсорбции частицами из газовой фазы. В рамках теории Ленгмюра, адсорбция частиц возможна только на незаполненных центрах адсорбции с поверхностной плотностью N_s , не взаимодействующих между собой, а десорбция частиц поддерживается за счет слабой, незаряженной формы адсорбции

$$\alpha_a P_a (N_s - N_a - N_d) = \nu N_a (1 - f_a) \exp\left(-\frac{Q_a}{kT}\right), \quad (1)$$

$$\alpha_d P_d (N_s - N_a - N_d) = \nu N_d (1 - f_d) \exp\left(-\frac{Q_d}{kT}\right), \quad (2)$$

где $\alpha = \kappa A / \sqrt{2\pi m k T_0}$ – коэффициент изотермы Ленгмюра, κ – коэффициент аккомодации, A – площадь центра адсорбции, m – масса молекулы адсорбированного газа, k – постоянная Больцмана, T_0 – температура газа; ν – характерная частота фонона; P – парциальное давление газа; Q – теплота десорбции частицы газа; N_a, N_d и $f_a = n_s / (n_s + n_a)$, $f_d = n_d / (n_s + n_d)$ – поверхностная плотность частиц и вероятность ионизации поверхностных состояний акцепторного и донорного типов, соответственно; $n_s = n(0)$ – концентрация электронов в зоне проводимости на поверхности зерна; $n_a = g_a N_c \exp(-(E_c - E_a)/(kT))$ и $n_d = g_d N_c \exp(-(E_c - E_d)/(kT))$ – концентрация электронов в зоне проводимости, когда уровень Ферми совпадает с поверхностным примесным уровнем; g – фактор вырождения примесного уровня; N_c – плотность состояний вблизи дна зоны проводимости E_c ; E_a и E_d – положение акцепторных и донорных уровней относительно дна зоны проводимости, соответственно; T – температура зерна.

Заполнение носителями заряда локализованных поверхностных состояний, индуцированных адсорбированными частицами газов, приводит к накоплению электрического заряда Q_s на поверхностях зерен

$$Q_s = -q N_a f_a + q N_d f_d, \quad (3)$$

где $q > 0$ – величина заряда электрона.

Поверхностный заряд Q_s приводит к истощению или обогащению объема зерна основными носителями заряда, вызывая, таким образом, появление электрического поля. В рамках одномерной задачи, распределение электрического поля в объеме зерна невырожденного полупроводника n -типа определялось из решения уравнения Пуассона

$$\varepsilon \varepsilon_0 \frac{dE(x)}{dx} = q(N_D^+ + N_t^+ - n) \quad (4)$$

совместно с уравнением для полного тока в объеме зерна

$$j = q \mu_n n E + q D_n \frac{dn(x)}{dx}, \quad (5)$$

где ε – диэлектрическая проницаемость полупроводника; ε_0 – диэлектрическая постоянная; E – напряженность электрического поля; x – расстояние от поверхности зерна; N_D^+ – концентрация ионизованных доноров; n – концентрация электронов в объеме зерна поликристаллического образца; $N_t^+ = N_t n_t^* / (n + n_t^*)$ – концентрация ионизованных ловушек за счет фотогенерации носителей заряда с глубоких уровней E_t при освещении образца; N_t – концентрация ловушек в объеме зерна; $n_t^* = n_t + \sigma_i I / (\sigma_t v_{th})$ – параметр уровня ловушек, зависящий от светового потока;

$n_t = g_t N_c \exp -(E_c - E_t)/(kT)$ – концентрация электронов в зоне проводимости, когда уровень Ферми совпадает с уровнем ловушек; v_{th} – тепловая скорость электронов; σ_i – сечение фотоионизации электрона; σ_t – сечения захвата электронов на уровнях ловушек; I – световой поток; μ_n – подвижность электронов; $D_n = kT/(q\mu_n)$ – коэффициент диффузии электронов.

Предполагалось, что напряженность приложенного к зерну внешнего электрического поля существенно меньше напряженности поля E , которое индуцируется зарядом на поверхности зерна Q_s , тогда ток через зерно равен нулю $j = 0$ и распределение концентрации носителей заряда в объеме зерна представлялось в виде:

$$n(x) = N_D^+ \exp \left(-\frac{q}{kT} \int_0^x E(r) dr \right). \quad (6)$$

Для решения уравнения Пуассона формулировались граничные условия в интегральном виде – электронейтральность зерна в целом

$$\int_V q(N_D^+ + N_t^+ - n) dV = \int_S Q_s dS, \quad (7)$$

где V и S – объем и площадь поверхности зерна, соответственно. Физический смысл условия электронейтральности – при малых напряженностях внешнего электрического поля инжекция электронов в объем зерна отсутствует, и заряд на поверхности зерна формируется только за счет электронов из его объема.

Решение уравнения Пуассона (4) с учетом выражения (6) и условия (7) позволяет найти распределение напряженности электрического поля вдоль зерна поликристаллического слоя. Следует отметить, что сформулированная задача носила самосогласованный характер, то есть распределение электрического поля (4), а следовательно, и концентрации электронов (6) зависит от заряда на поверхности зерна (3), который, в свою очередь, зависит от концентрации электронов на поверхности зерна (1).

На рис. 5, а представлены результаты расчетов проводимости зерна поликристаллического образца при различных концентрациях детектируемого газа в темноте и при освещении. Концентрационные зависимости носят нелинейный характер: и в темноте, и при освещении, как в

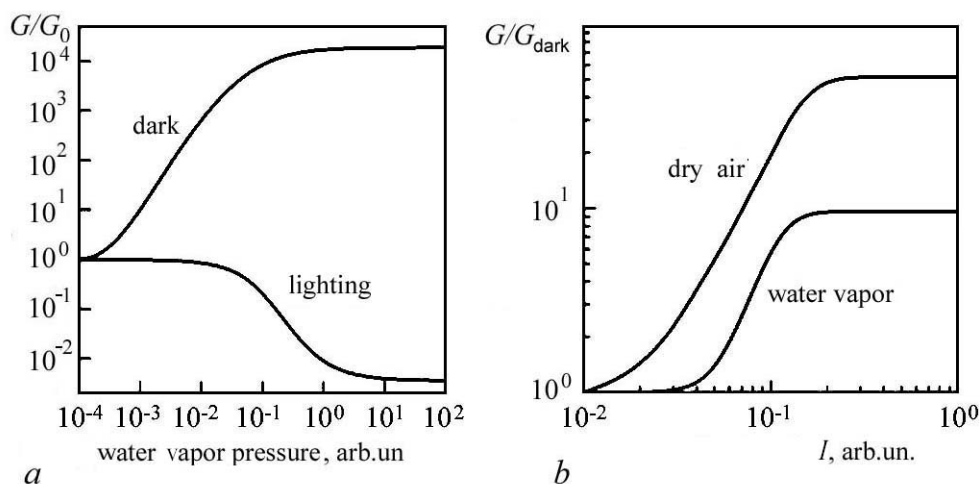


Рис. 5. Влияние паров воды (а) и освещения I (б) на проводимость пленки диоксида олова при температуре 25°C
 Fig. 5. Influence of water vapor (a) and illumination I (b) on the conductivity of a tin dioxide film at a temperature of 25°C

области малых, так и в области больших концентраций проводимость образца слабо зависит от содержания анализируемого газа в пробе; в области промежуточных концентраций проводимость в темноте увеличивается, а при освещении уменьшается.

Двойственное влияние анализируемого газа на проводимость образца можно объяснить в рамках предположения, что адсорбированные частицы анализируемого газа в запрещенной зоне материала зерна индуцируют глубокие поверхностные состояния как донорного, так и акцепторного типа, с энергией меньшей, чем акцепторный уровень кислорода. При адсорбции частиц детектируемого газа происходит вытеснение частиц кислорода с адсорбционных центров и перераспределение заряда между поверхностными состояниями, индуцированными адсорбированным кислородом и частицами анализируемого газа (воды).

Если уровень Ферми в темноте в кислородсодержащей атмосфере (воздухе) лежит ниже примесных уровней кислорода и воды, то вследствие термической ионизации электронов с донорных центров воды происходит частичное заполнение глубоких акцепторных центров воды, и увеличение концентрации электронов в объеме зерна, поэтому проводимость образцов увеличивается (рис. 5, а, кривая «dark»). Напротив, при освещении, когда уровень Ферми лежит выше примесных уровней воды, ионизация донорных состояний частиц воды затруднена, а акцепторные состояния кислорода замещаются более глубокими акцепторными уровнями, связанными с адсорбированными частицами воды, и проводимость образцов уменьшается (кривая «lighting»).

4. Теоретические расчеты и их обсуждение

На рис. 5, б представлены результаты расчетов проводимости поликристаллического образца при различных интенсивностях освещения в атмосфере сухого воздуха (кривая «dry air») и в атмосфере паров воды (кривая «water vapor»). Зависимости носят монотонный нелинейный характер: и в атмосфере сухого воздуха, и в присутствии паров воды, как в области малых, так и в области больших интенсивностей освещения проводимость образца слабо зависит от величины светового потока.

Увеличение проводимости при освещении образца связано с фотогенерацией электронов с глубоких уровней ловушек в объеме зерна поликристаллического слоя, поэтому и в атмосфере сухого воздуха (кислорода), и в присутствии паров воды проводимость увеличивается.

Выводы

На основе полученных экспериментальных и теоретических результатов выявлены основные особенности влияния паров воды и освещения на проводимость пленки диоксида олова при комнатной температуре. Показано неаддитивное влияние паров воды и освещения на проводимость образцов: при раздельном воздействии паров воды и освещения проводимость пленок диоксида олова увеличивается, а при одновременном воздействии проводимость может уменьшаться. Результаты проведенных расчетов по предложенной модели показали, что увеличение или уменьшение проводимости образцов при напуске детектируемого газа определяется положением уровня Ферми в зерне поликристаллического образца до напуска анализируемого газа, которое может контролироваться интенсивностью освещения.

В заключение следует отметить, что возможность оптического управления характером изменения (увеличение или уменьшение) проводимости тонких пленок диоксида олова открывает перспективу разработки нового типа сенсоров газа, работающих при комнатной температуре – фотохеморезисторов.

Библиографический список

1. *Simakov V., Voroshilov A., Grebennikov A., Kucherenko N., Yakusheva O., Kisin V.* Gas identification by quantitative analysis of conductivity-vs-concentration dependence for SnO₂ sensors // *Sens. Actuators B. Chemical*. 2009. Vol. 137. P. 456–461.
2. *Jaaniso R., Tan O.K.* Semiconductor Gas Sensors. Cambridge: Elsevier, 2013. 552 p.
3. *Natale C., Ferrari V., Ponzoni A., Sberveglieri G., Ferrari M.* Sensors and Microsystems. Heidelberg: Springer, 2014. 439 p.
4. *Korotcenkov G.* Handbook of Gas Sensor Materials. New York: Springer, 2014. 454 p.
5. *Patel H.* The Electronic Nose: Artificial Olfaction Technology. New Delhi: Springer, 2013. 247 p.
6. *Ao D., Ichimura M.* UV-irradiation effects on hydrogen sensors based on SnO₂ thin films fabricated by the photochemical deposition // *Solid-State Electronics*. 2012. Vol. 69, no. 3. P. 1–3.
7. *Kohl C.-D., Wagner T.* Gas Sensing Fundamentals. Heidelberg: Springer-Verlag, 2014. 342 p.
8. *Gründler P.* Chemical Sensors. Berlin: Springer-Verlag, 2007. 273 p.
9. *Comini E., Faglia G., Sberveglieri G.* UV light activation of tin oxide thin films for NO₂ sensing at low temperatures // *Sens. Actuators B. Chemical*. 2001. Vol. 78. P. 73–77.
10. *Гуляев А.М., Ван Л.В., Сарач О.Б., Мухина О.Б.* О воздействии оптического излучения на чувствительность газовых сенсоров на основе пленок SnO_{2-x} // *Физика и техника полупроводников*. 2008. Т. 42, № 6. P. 742–746.
11. *Chizhov A.S., Rumyantseva M.N., Vasiliev R.B., Filatova D.G., Drozdov K.A., Krylov I.V., Abakumov A.M., Gaskov A.M.* Visible light activated room temperature gas sensors based on nanocrystalline ZnO sensitized with CdSe quantum dots // *Sens. Actuators B. Chemical*. 2014. Vol. 205. P. 305–312.
12. *Рембеза С.И., Свистова Т.В., Кошелева Н.Н., Овсянников С.В., Аль Тамееми В.М.К.* Влияние оптического излучения на адсорбционные процессы взаимодействия газов-восстановителей с пленкой SnO₂ // *Письма в Журнал технической физики*. 2015. Т. 41, № 23. С. 32–39.
13. *Симаков В.В., Синёв И.В., Смирнов А.В., Осыко И.Д., Гребенников А.И., Сергеев С.А.* Влияние освещения на газочувствительность тонких плёнок диоксида олова к парам этанола при комнатной температуре // *Нано- и микросистемная техника*. 2017. Т. 19, № 1. P. 34–40.
14. *Arulsamy A.D., Eleršič K., Modic M., Cvelbar U., Mozetič M.* Carrier-type transitions in gas-sensing oxides and nanostructures // *ChemPhysChem*. 2010. Vol. 11. P. 3704–3712.
15. *Balouria V., Kumar A., Samanta S., Singh A., Debnath A.K., Mahajan A., Bedi R.K., Aswal D.K., Gupta S.K.* Nano-crystalline Fe₂O₃ thin films for ppm level detection of H₂S // *Sens. Actuators B: Chemical*. 2013. Vol. 181. P. 471–478.
16. *Симаков В.В., Синёв И.В., Смирнов А.В., Сякина С.Д., Гребенников А.И., Кисин В.В.* Формирование пленок диоксида олова с вертикально ориентированными нанопорами // *Нанотехника*. 2011, № 3. С. 45–46.
17. *Симаков В.В., Никитина Л.В., Синёв И.В.* Аппаратно-программный комплекс многопараметрического распознавания многокомпонентных газовых смесей на основе мультисенсорных микросистем // *Башкирский химический журнал*. 2010. Т. 17. С. 125–127.
18. *Kiselev V.F., Krylov O.V.* Adsorption Processes on Semiconductor and Dielectric Surfaces. Berlin: Springer-Verlag, 1985. 287 p.
19. *Silva J.C.M., dos Santos E.C., de Oliveira A., Heine T., de Abreu H.A., Duarte H.A.* Adsorption

of water, sulfates and chloride on arsenopyrite surface // *Applied Surface Science*. Vol. 434, 15 March 2018. P. 389–399.

20. Dey A. Semiconductor metal oxide gas sensors: A review // *Materials Science and Engineering: B*. 2018. Vol. 229. P. 206–217.

References

1. Simakov V., Voroshilov A., Grebennikov A., Kucherenko N., Yakusheva O., Kisin V. Gas identification by quantitative analysis of conductivity-vs-concentration dependence for SnO₂ sensors. *Sens. Actuators B. Chemical*, 2009, vol. 137, pp. 456–461.
2. Jaaniso R., Tan O.K. *Semiconductor Gas Sensors*. Cambridge: Elsevier, 2013. 552 p.
3. Natale C., Ferrari V., Ponzoni A., Sberveglieri G., Ferrari M. *Sensors and Microsystems*. Heidelberg: Springer, 2014. 439 p.
4. Korotcenkov G. *Handbook of Gas Sensor Materials*. New York: Springer, 2014. 454 p.
5. Patel H. *The Electronic Nose: Artificial Olfaction Technology*. New Delhi: Springer, 2013. 247 p.
6. Ao D., Ichimura M. UV-irradiation effects on hydrogen sensors based on SnO₂ thin films fabricated by the photochemical deposition. *Solid-State Electronics*, 2012, vol. 69, no. 3, pp. 1–3.
7. Kohl C.-D., Wagner T. *Gas Sensing Fundamentals*. Heidelberg: Springer-Verlag, 2014. 342 p.
8. Gründler P. *Chemical Sensors*. Berlin: Springer-Verlag, 2007. 273 p.
9. Comini E., Faglia G., Sberveglieri G. UV light activation of tin oxide thin films for NO₂ sensing at low temperatures. *Sens. Actuators B. Chemical*, 2001, vol. 78, pp. 73–77.
10. Gulyaev A.M., Van L.V., Sarach O.B., Mukhina O.B. Light-enhanced sensitivity of SnO_{2-x} gas sensors. *Semiconductors*, 2008, vol. 42, no. 6, pp. 726–730.
11. Chizhov A.S., Rumyantseva M.N., Vasiliev R.B., Filatova D.G., Drozdov K.A., Krylov I.V., Abakumov A.M., Gaskov A.M. Visible light activated room temperature gas sensors based on nanocrystalline ZnO sensitized with CdSe quantum dots. *Sens. Actuators B. Chemical*, 2014, vol. 205, pp. 305–312.
12. Rembeza S.I., Svistova T.V., Kosheleva N.N., Ovsyannikov S.V., Al Tameemi V.M.K. Influence of light on the adsorption processes during interaction between reducer gases and a SnO₂ film. *Technical Physics Letters*, 2015, vol. 41, no. 12, pp. 1128–1131.
13. Simakov V.V., Sinev I.V., Smirnov A.V., Osyko I.D., Grebennikov A.I., Sergeyev S.A. Influence of light on the gas sensitivity of the thin films of tin dioxide to ethanol vapors at room temperature. *Nano- and microsystems technology*, 2017, Vol. 19, no. 1, pp. 34–40 (in Russian).
14. Arulsamy A.D., Eleršič K., Modic M., Cvelbar U., Mozetič M. Carrier-type transitions in gas-sensing oxides and nanostructures. *ChemPhysChem*, 2010, vol. 11, pp. 3704–3712.
15. Balouria V., Kumar A., Samanta S., Singh A., Debnath A.K., Mahajan A., Bedi R.K., Aswal D.K., Gupta S.K. Nano-crystalline Fe₂O₃ thin films for ppm level detection of H₂S. *Sens. Actuators B: Chemical*, 2013, vol. 181, pp. 471–478.
16. Simakov V.V., Sinev I.V., Smirnov A.V., Syakina S.D., Grebennikov A.I., Kisin V.V. Formation of tin dioxide layers with vertically aligned nanopores. *Nanotechnics*, 2011, no. 3, pp. 45–46 (in Russian).
17. Simakov V.V., Nikitina L.V., Sinev I.V. Hardware-in-the-loop complex of polyvalent recognition of multicomponent gas mixtures based on multisensory microsystems. *Bashkir Chemical Journal*, 2010, vol. 17, pp. 125–127 (in Russian).

18. Kiselev V.F., Krylov O.V. Adsorption Processes on Semiconductor and Dielectric Surfaces. Berlin: Springer-Verlag, 1985. 287 p.
19. Silva J.C.M., dos Santos E.C., de Oliveira A., Heine T., de Abreu H.A., Duarte H.A. Adsorption of water, sulfates and chloride on arsenopyrite surface. *Applied Surface Science*, 2018, vol. 434, 15 March 2018, pp. 389–399.
20. Dey A. Semiconductor metal oxide gas sensors: A review. *Materials Science and Engineering: B*, 2018, vol. 229, pp. 206–217.



Симаков Вячеслав Владимирович – родился в Саратове (1973), окончил Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского (1995). После окончания работал в Саратовском государственном техническом университете. В 1999 году защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата технических наук, а в 2006 году – доктора технических наук. Область научных интересов: газовая сенсорика, создание мультисенсорных микросистем Lab on Chip для распознавания многокомпонентных газовых смесей и запахов. Опубликовал более 150 научных трудов по направлениям, указанным выше. В настоящее время – профессор кафедры материаловедения, технологии и управления качеством Саратовского государственного университета им. Н.Г. Чернышевского.

Россия, 410012 Саратов, Астраханская, 83
 Саратовский государственный университет имени Н.Г. Чернышевского
 E-mail: viatcheslav.simakov@gmail.com



Синёв Илья Владимирович – родился в Саратовской области (1987). Получил высшее образование на факультете нано- и биомедицинских технологий Саратовского государственного университета по специальности микроэлектроника и твердотельная электроника. Продолжил образование в аспирантуре, в 2014 г. защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук. В настоящее время работает в должности доцента на кафедре материаловедения, технологии и управления качеством Саратовского государственного университета. Область научных интересов – создание и изучение газочувствительных тонких пленок.

Россия, 410012 Саратов, Астраханская, 83
 Саратовский государственный университет имени Н.Г. Чернышевского
 E-mail: SinevIV@info.sgu.ru



Вениг Сергей Борисович – родился в Саратове (1957), окончил Саратовский государственный университет (1979). После окончания СГУ работал в ОКБ ПО «Тантал». С 1981 года работает в СГУ, в настоящее время декан факультета нано- и биомедицинских технологий. Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук (1988) и доктора физико-математических наук (1999) в области радиофизики, физики полупроводников и диэлектриков, применения нелинейной динамики в этих областях науки. Опубликовал 200 научных работ по направлениям, указанным выше, а также в области материаловедения, нанотехнологий, биофизики, медицинской физики. Почетный работник высшего профессионального образования РФ.

Россия, 410012 Саратов, Астраханская, 83
 Саратовский государственный университет имени Н.Г. Чернышевского
 E-mail: sergey.venig@gmail.com



УДК 537.613; 530.182; 622.4

<https://doi.org/10.18500/0869-6632-2018-26-6-59-67>

Нелинейные режимы спин-волновой связи в системе неидентичных магнанных структур

С. А. Одинцов, А. В. Садовников

Саратовский национальный исследовательский
государственный университет имени Н.Г. Чернышевского
Россия, 410012 Саратов, Астраханская, 83

E-mail: odinoff@gmail.com, sadovnikovav@gmail.com

Автор для переписки Одинцов Сергей Александрович, odinoff@gmail.com

Поступила в редакцию 20.08.2018, принята к публикации 4.09.2018

Тема. Исследование нелинейных режимов распространения спин-волнового сигнала в латеральных неидентичных структурах с учётом многомодовости спиновых волн. **Цель.** Рассмотрение влияния межмодовой связи на распределение интенсивности поверхностных магнитостатических волн, распространяющихся в латеральных волноводах различной ширины. Выявление возможности изменения коэффициента связи с помощью варьирования мощности входного сигнала. **Методы.** Исследование нелинейных режимов распространения спиновых волн осуществлялось путем численного интегрирования системы двух связанных уравнений Гинзбурга–Ландау. Расчет значений коэффициента связи спиновых волн между латеральными волноводами и коэффициента пропорциональности проводился методом конечных элементов. Методом микромагнитного моделирования для получения карт распределения динамической намагниченности спиновых волн решались уравнения Ландау–Лифшица–Гильберта. **Результаты.** Показано, что режим работы нелинейного направленного ответвителя на основе латеральной системы неидентичных микроволноводов определяется геометрическими параметрами структуры, а именно, отношением ширин микроволноводов. Учет неоднородного распределения внутреннего магнитного поля и изменение ширины одного из микроволноводов приводит к изменению пороговой мощности СВЧ сигнала, при которой наблюдаются эффекты изменения длины связи спиновых волн и нелинейного переключения сигнала. **Обсуждение.** Зависимость длины связи спиновых волн от мощности входного сигнала обеспечивает возможность работы направленного ответвителя информационного сигнала в нелинейном режиме. Благодаря возможности перестройки полосы частот путем изменения величины магнитного поля оказывается возможным создание устройств обработки СВЧ сигнала на принципах магноники, таких как нелинейные демультиплексеры, делители мощности и направленные ответвители СВЧ сигнала.

Ключевые слова: латеральные неидентичные волноводы, спиновая волна, устройства обработки СВЧ сигналов, ответвитель.

Образец цитирования: Одинцов С.А., Садовников А.В. Нелинейные режимы спин-волновой связи в системе неидентичных магнанных структур // Изв. вузов. ПНД. 2018. Т. 26, № 6. С. 59–67.

<https://doi.org/10.18500/0869-6632-2018-26-6-59-67>

Финансовая поддержка. Разработка теоретических моделей, описывающих динамику распространения и дипольной связи спиновых волн в структурах с латеральной связью, выполнена при поддержке проекта РФФ № 18-79-00198, расчет спектра собственных мод при поддержке РФФИ № 16-02-00789, стипендии СП-2819.2018.5 и гранта Президента РФ МК-3650.2018.

Nonlinear spin-wave propagation in the nonidentical magnonic structures

S. A. Odintsov, A. V. Sadovnikov

Saratov State University

83, Astrakhanskaya str., 410012 Saratov, Russia

E-mail: odinoff@gmail.com, sadovnikovav@gmail.com

Correspondence should be addressed to Odintsov Sergey A., odinoff@gmail.com

Received 20.08.2018, accepted for publication 4.09.2018

Topic. Investigation of nonlinear propagation modes of a spin-wave signal in lateral non-identical structures, taking into account the multi-mode spin waves. **Aim.** Consideration of the effect of intermode coupling on the intensity distribution of surface magnetostatic waves propagating in lateral waveguides of various widths. Identify the possibility of changing the coupling coefficient by varying the power of the input signal. **Methods.** The study of nonlinear propagation modes of spin waves was carried out by numerical integration of a system of two coupled Ginzburg–Landau equations. The calculation of the values of the coupling coefficient of the spin waves between the lateral waveguides and the proportionality coefficient was carried out using the finite element method. Using micromagnetic simulation, the Landau–Lifshitz–Gilbert equation was solved using the finite difference method to obtain maps of the distribution of the dynamic magnetization of spin waves. **Results.** It is shown that the mode of operation of a nonlinear directional coupler based on the lateral system of non-identical microwave channels is determined by the geometrical parameters of the structure, namely, the ratio of the widths of the microwave channels. Inhomogeneous distribution of the internal magnetic field and a change in the width of one of the microwave lead to a change in the threshold power of the microwave signal, at which the effects of the variation of the coupling length of spin waves and a nonlinear switching signal are observed. **Discussion.** The dependence of the coupling length of the spin waves on the input signal power allows the directional coupler of the information signal to operate in a nonlinear mode. Due to the possibility of tuning the frequency band by changing the magnitude of the magnetic field, it is possible to fabricate magnonic based microwave signal processing devices, such as nonlinear demultiplexers, power splitters and directional microwave signal couplers.

Key words: lateral, irregular waveguides, spin wave, signal processing devices, coupler.

Reference: Odintsov S.A., Sadovnikov A.V. Nonlinear spin-wave propagation in the nonidentical magnonic structures. *Izvestiya VUZ, Applied Nonlinear Dynamics*, 2018, vol. 26, no. 6, pp. 59–67. <https://doi.org/10.18500/0869-6632-2018-26-6-59-67>

Acknowledgements. The development of theoretical models describing the dynamics of the propagation and dipole coupling of spin waves was performed with the support of the project RNF (no. 18-79-00198); the calculation of eigenspectrum was supported by the Russian Foundation for Basic Research no. 16-02-00789 and in part by the grant of the President of the Russian Federation under Grant MK-3650.2018 and Fellowship (Stipendia) SP-2819.2018.5.

Введение

В настоящее время большой интерес представляет исследование микро- и наноразмерных спин-волновых (магнонных) ответвителей и делителей сигнала (magnonic coupler) [1, 2]. Исследования в области магноники направлены на создание микро- и наноразмерных устройств генерации, передачи и обработки информационных сигналов в СВЧ и ТГц диапазонах длин волн [3–6]. Одним из перспективных материалов для создания латеральных массивов магнонных структур является железо-иттриевый гранат (ЖИГ) ввиду рекордно низкого коэффициента затухания спиновых волн. Многомодовый режим распространения спиновых волн является характерным для поперечно ограниченных плёнок ЖИГ [7] и, как показано в работе [2], в случае латеральных топологий магнонных структур допускает использование для увеличения коэффициентов передачи сигнала между выходными портами ответвителя/делителя мощности. Стоит отметить, что в системах генерации когерентных спин-волновых мод [8] учет нелинейных режимов в латеральных топологиях [9] особенно важен. Использование нелинейных эффектов в ЖИГ [10], позволяет создавать перестраиваемые спин-волновые устройства, в том числе на плёнках ЖИГ нанометровой толщины [11]. Создание латеральных топологий магнитных волново-

дов позволяет использовать дипольную связь спиновых волн как дополнительный механизм для управления линейными и нелинейными режимами распространения сигнала. Однако нелинейные режимы в случае многомодового распространения спин-волнового сигнала в латеральных структурах не исследованы.

В настоящей работе проведено рассмотрение влияния межмодовой связи на режимы нелинейного распространения спиновых волн в латеральной системе неидентичных магнитных микроволноводов. Показано, что изменение ширины одного из микроволноводов приводит к изменению пороговой мощности СВЧ сигнала, при которой наблюдаются эффекты изменения длины связи спиновых волн и нелинейного переключения сигнала. Исследовано влияние неоднородного распределения внутреннего магнитного поля на эффективность спин-волновой связи.

1. Модель структуры

Структура, рассматриваемая в данной работе, показана на рис. 1, *a*. Она представляет собой два неидентичных латеральных микроволновода S_1 и S_2 из плёнки ЖИГ ($Y_3Fe_5O_{12}$ (111)), лежащих на подложке из галлий-гадолиниевого граната ($Gd_3Ga_5O_{12}$ (111)). Микроволновод S_1 имеет ширину w_1 , ширина w_2 микроволновода S_2 варьировала от 250 до 500 мкм, расстояние между волноводами $d = 10$ мкм.

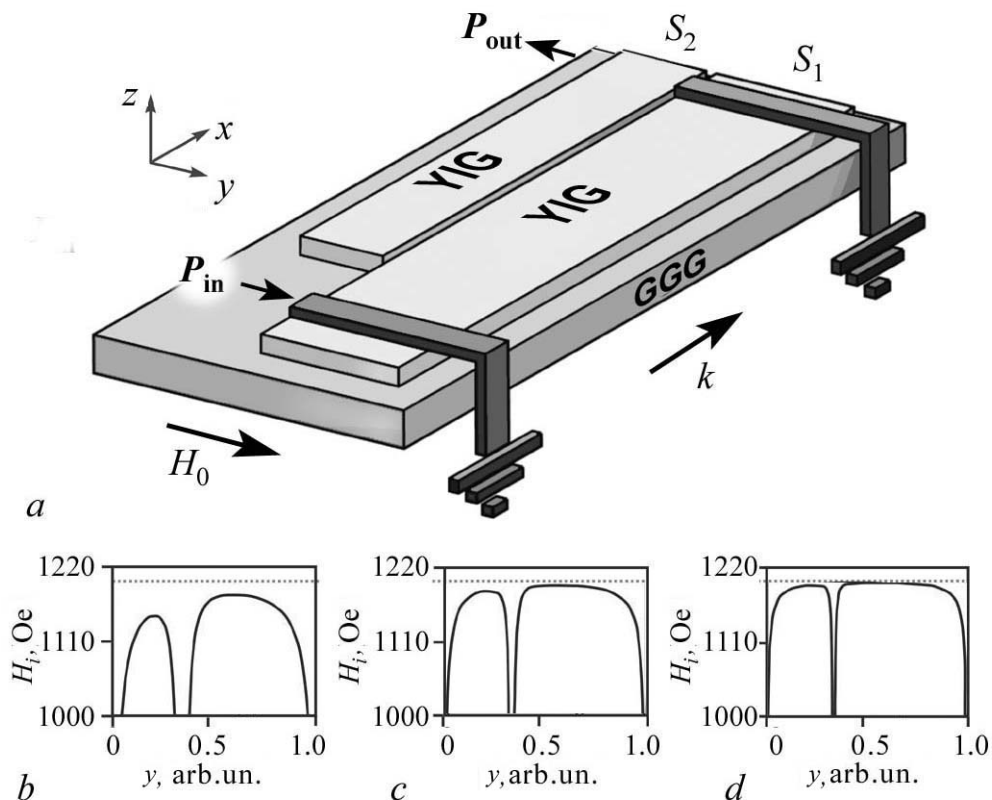


Рис. 1. *a* – схематическое изображение исследуемой структуры; форма внутреннего магнитного поля H , Oe в латеральных волноводах различной ширины w , мкм: *b* – $w_1 = 200$, $w_2 = 100$; *c* – $w_1 = 500$, $w_2 = 250$; *d* – $w_1 = 1000$, $w_2 = 500$

Fig. 1. *a* – scheme of the structure under study; form of internal field distribution in side-coupled waveguides of different width w , μm : *b* – $w_1 = 200$, $w_2 = 100$; *c* – $w_1 = 500$, $w_2 = 250$; *d* – $w_1 = 1000$, $w_2 = 500$

Для численного моделирования распространения поверхностной магнитостатической волны (ПМСВ) использовался метод конечных элементов (МКЭ) для решения полной системы уравнений Максвелла. Исследуемая структура помещена во внешнее магнитное поле H_0 , направленное вдоль оси y .

Граничные условия при моделировании МКЭ выбраны в виде «магнитных стенок» (касательная составляющая вектора напряжённости магнитного поля равна нулю) на левой и правой границах расчётной области и «электрических стенок» (касательная составляющая вектора напряженности электрического поля равна нулю) на верхней и нижней границах. Тензор магнитной проницаемости ЖИГ в этом случае записывается в виде [12–14]

$$\hat{\mu} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \mu & -i\mu_a \\ 0 & i\mu_a & \mu \end{bmatrix}, \quad (1)$$

где $\mu(f) = (f_H(f_H + f_M) - f^2)/(f_H^2 - f^2)$, $\mu_a(f) = (f_M f)/(f_H^2 - f^2)$, $f_H = \gamma H_0$, $f_M = 4\pi\gamma M_0$ и $\gamma = 2.8$ МГц/Э – гиромагнитное отношение для ЖИГ. $M_0 = 139$ Гс – намагниченность насыщения пленки ЖИГ. Диэлектрическая проницаемость ЖИГ в численном моделировании полагалась равной $\varepsilon = 14$.

Распределение статического внутреннего магнитного поля H_i вдоль оси y сильно неоднородно ввиду анизотропии формы ЖИГ микроволноводов. Из рис. 1, $b-d$ видно, как распределения меняются в зависимости от изменения ширины волноводов. При этом чем больше различие в значении ширин микроволноводов, тем больше разница величин внутренних магнитных полей в центрах обеих структур и тем меньше эффективность связи ПМСВ, распространяющихся вдоль оси x . Также отметим, что распределение поля $H_i(y)$ ассиметрично относительно центра каждой из латеральных структур, что приводит к изменению интеграла перекрытия собственных мод отдельно взятых ЖИГ микроволноводов [1, 21] и, как следствие, к изменению связи между распространяющимися ПМСВ. Таким образом, из решения статической задачи становится понятным, что для моделирования МКЭ и вычисления спектров собственных мод волн, распространяющихся в системе латеральных магнитных микроволноводов, необходимым является учет неоднородного распределения статического магнитного поля внутри структур.

2. Результаты численного эксперимента

Спектр собственных мод двух латеральных микроволноводов состоит из набора симметричных и антисимметричных мод [1]. Симметричные моды соответствуют случаю, когда амплитуды магнитных потенциалов обоих магнитных волноводов имеют одну и ту же фазу. В антисимметричной моде сдвиг фазы между магнитными потенциалами составляет π . Но в случае неидентичных волноводов шириной $w_1 = 500$ мкм и $w_2 = 250$ мкм мода k_{++} соответствует первой собственной моде $n = 1$ идентичных волноводов, а моды k_{+-} и k_{-+} соответствуют расщепленной второй моде $n = 2$ идентичных волноводов. На рис. 2, a показана дисперсионная характеристика, описанных выше мод ПМСВ, распространяющихся в данной структуре. Здесь f_{\perp} – частота ферромагнитного резонанса. На рис. 3 показаны карты распределения намагниченности $|m_z|^2$, полученные путем решения уравнение Ландау–Лифшица–Гильберта [15, 16] методом конечных разностей [17].

Видно, что при возбуждении ПМСВ в волноводе S_1 волна распространяется вдоль оси x . В латерально расположенных волноводах наблюдается эффект перераспределения мощности между волноводами вследствие интерференции распространяющихся симметричной и антисимметричной волн. Ввиду различия размеров микроволноводов не удается достичь равенства фа-

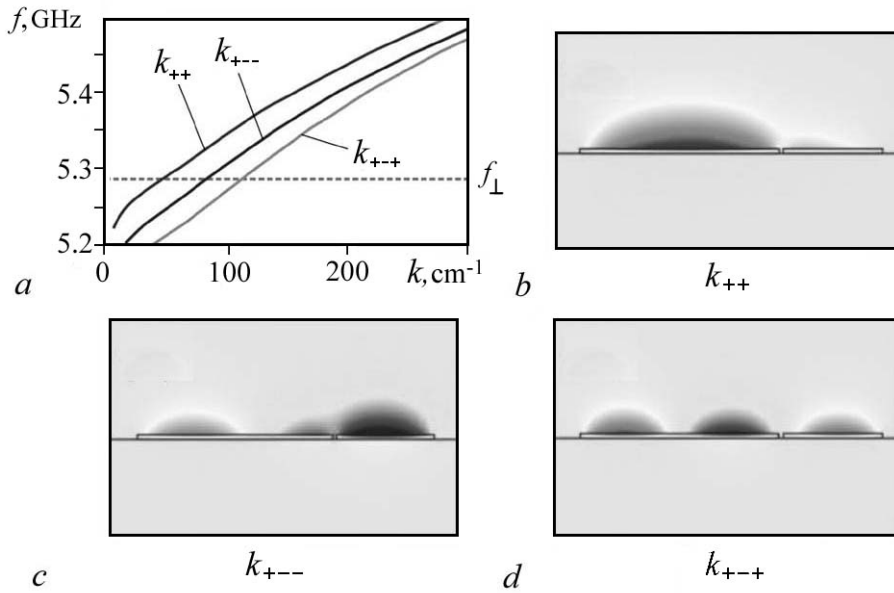


Рис. 2. Дисперсионная характеристика исследуемой структуры при ширине волноводов $w_1 = 500$ мкм и $w_2 = 250$ мкм (a); характерные распределения компоненты E_x (b-d) соответствующих мод волн, дисперсия которых изображена на фрагменте (a)

Fig. 2. The dispersion characteristic of the structure under study with the waveguide width $w_1 = 500$ μm and $w_2 = 250$ μm (a); distributions of the E_x (b-d) component of the modes that correspond to the lines on the dispersion characteristics (a)

зовых скоростей ширинных мод одинаковой четности. Однако в случае, когда, например, ширина волновода S_1 вдвое больше ширины волновода S_2 , оказывается возможным эффективная связь второй ширинной моды [18–20] микроволновода S_1 с первой модой волновода S_2 . Видно, что наиболее эффективная связь спиновых волн наблюдается при частоте входного сигнала $f = 5.15$ ГГц. Причина отсутствия полной перекачки энергии спиновой волны из S_1 в S_2 заключается в данном случае в неравенстве величин внутренних полей в центрах обоих микроволноводов (см. рис. 1, c).

В случае линейно распространяющихся магнитоэлектрических волн в неидентичных магнитных микроволноводах связь их невозможна из-за различных фазовых скоростей, которые зависят от геометрии волноводов. Но при учёте нелинейности существует возможность связи отдельных мод. Из-за влияния нелинейности, проявляющейся в данном случае в уменьшении проекции намагниченности на ось y с ростом амплитуды прецессии вектора намагниченности, можно добиться синхронизма ширинных мод различной четности, то есть равенства фазовых скоростей данных мод, что приведет к их эффективной связи.

В работе [21] представлены расчёты нелинейных эффектов в структуре из латеральных микроволноводов одинаковой ширины и показано, что динамика спиновых волн в латеральных микроволноводах описывается системой связанных нелинейных уравнений Гинзбурга–Ландау [16] в форме

$$i \frac{d\Phi_{1,2}}{dx} = k_{1,2}\Phi_{1,2} + \kappa\Phi_{2,1} + (\zeta - i\nu_2) |\Phi_{1,2}|^2 \Phi_{1,2} - i\nu_1\Phi_{1,2}. \quad (2)$$

Здесь $\Phi_{1,2} = \Phi_{1,2}(x)|_{y=y_{1,2}}$ – амплитуда спиновой волны вдоль оси x , $y_{1,2}$ координаты центральных точек в волноводах S_1 и S_2 , соответственно; $k_{1,2} = k_{1,2}(f)$ – волновое число спиновой волны, распространяющейся в одиночном микроволноводе; $\kappa = \kappa(f) = \beta C(f) \approx |k_s(f) - k_{as}(f)|$ –

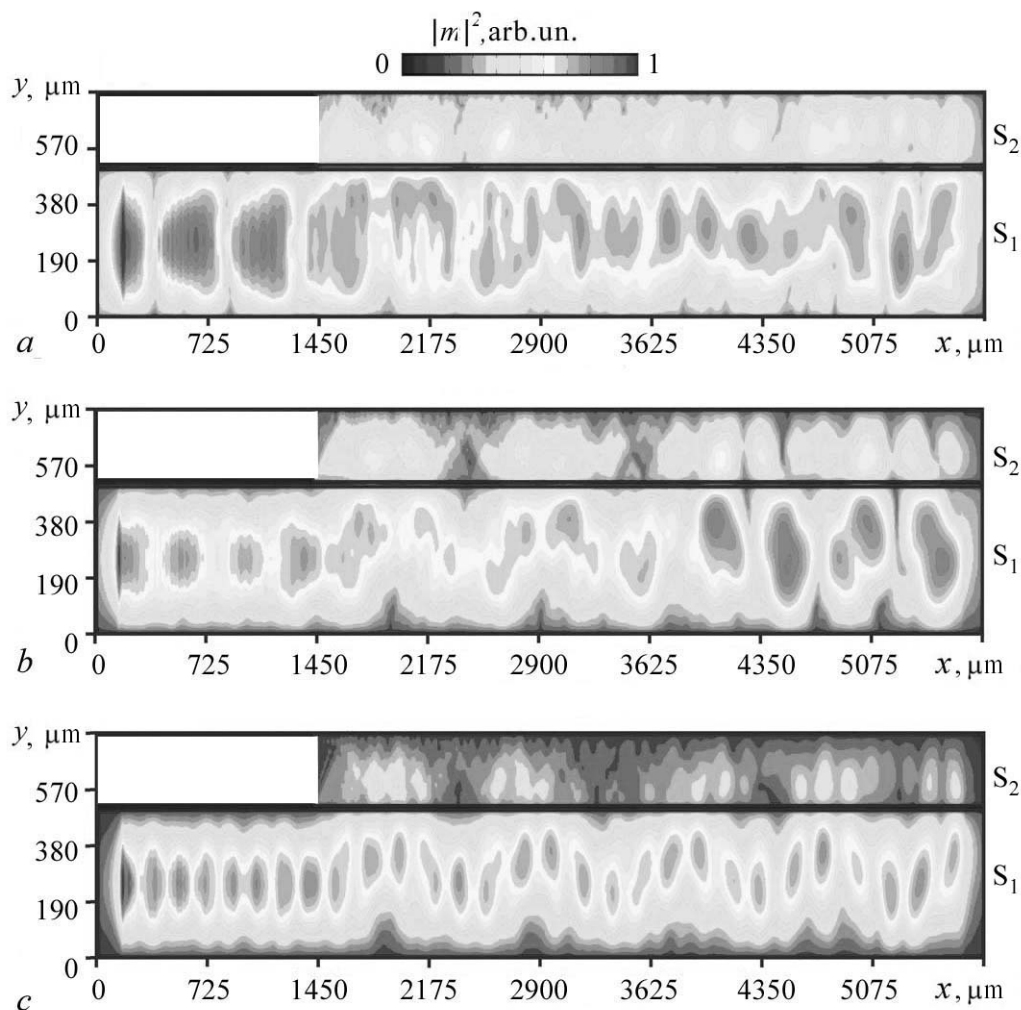


Рис. 3. Карты распределений динамической намагниченности $|m_z^2|$ в латеральных неидентичных волноводах на частотах входного сигнала f , ГГц: $a - 5.15$, $b - 5.25$, $c - 5.35$

Fig. 3. Map of distribution of dynamic magnetization $|m_z^2|$ component in lateral nonidentical waveguides for f , GHz: $a - 5.15$, $b - 5.25$, $c - 5.35$

коэффициент связи спиновых волн между латеральными волноводами; β – коэффициент пропорциональности; $\zeta = \frac{dk}{d\varphi^2}$ – нелинейный коэффициент, который определяется из условия уменьшения намагниченности насыщения при увеличении амплитуды спиновой волны с учетом дисперсионного соотношения [21]; $\nu_1 = \frac{1}{v_g} \left| \frac{\partial \omega}{\partial H_1} \right| \frac{\Delta H}{2}$ и $\nu_2 = \frac{1}{v_g^2} \zeta \frac{\Delta H}{2} \left| \frac{\partial \omega}{\partial H_1} \right| \left| \frac{\partial^2 \omega}{\partial k^2} \right|_{\varphi=0}$ – линейное и нелинейное затухание спиновой волны, соответственно; $\omega = 2\pi f$ – круговая частота. Для расчёта нелинейных режимов распространения спиновых волн использовались следующие значения нелинейного параметра $\zeta = 1.77 \cdot 10^5 \text{ м}^{-1}$ и параметров линейного и нелинейного затухания $\nu_1 = 13.03 \text{ м}^{-1}$ и $\nu_2 = 50.09 \text{ м}^{-1}$, соответственно. В данной модели оказывается возможным учитывать различную ширину микроволноводов, используя дисперсионные зависимости $k_{1,2}(f)$, полученные из расчетов методом конечных элементов.

Результаты расчета порогов нелинейного переключения [22] для системы неидентичных структур представлены на рис. 4. На вставке рис. 4 представлена амплитудная зависимость

коэффициента $T = 20 \log(P_2/P_1)$ на выходе микроволновода S_2 . На графике отмечены точки P_1 и P_2 , соответствующие двум режимам спин-волнового сигнала. Точка P_1 соответствует режиму, при котором мощность сигнала на конце волноводов делится пополам между S_1 и S_2 , а точка P_2 соответствует режиму, при котором максимально возможное значение интенсивности ПМСВ сосредоточено в выходной секции микроволновода S_2 . Зависимость значений мощности P_1 и P_2 от $\Delta w = |w_2 - w_1|$ показана на рис. 4. При расчёте ширина волновода S_1 была фиксирована ($w_1 = 500$ мкм), а ширина w_2 менялась в диапазоне от 250 мкм до 500 мкм. При изменении ширины одного из волноводов оказывается возможным сближать на амплитудной зависимости значения величин P_1 и P_2 (см. рис. 4). В диапазоне $50 < \Delta w < 100$ мкм наблюдается наименьшее расхождение в критических мощностях P_1 и P_2 . Таким образом, режим работы нелинейного направленного ответвителя на основе латеральной системы неидентичных микроволноводов определяется геометрическими параметрами структуры, а именно, отношением ширин микроволноводов. При проектировании устройств обработки информационных сигналов важным оказывается создание функциональных межсоединений в планарных топологиях магنونных сетей. Предложенная система неидентичных магнитных структур может быть использована не только в качестве элемента для соединения функциональных блоков, но также в качестве системы нелинейного демультимплексирования сигнала, в которой реализуется режимы пространственно-частотного деления многочастотного сигнала в зависимости от амплитуды сигнала.

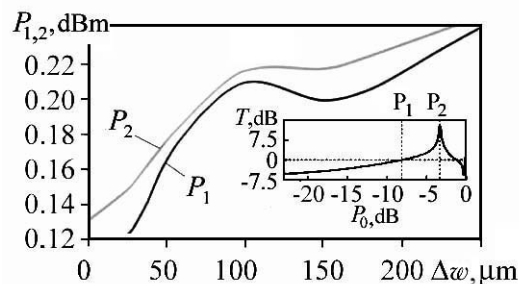


Рис. 4. Зависимость пороговых мощностей P_1 и P_2 от величины разницы ширин Δw латеральных микроволноводов

Fig. 4. Dependence the threshold power P_1 and P_2 versus the value of the parameter Δw

Выводы

Таким образом, в настоящей работе проведено исследование влияния межмодовой связи на режимы нелинейного распространения спиновых волн в латеральной системе неидентичных магнитных ЖИГ микроволноводов. Показана возможность управления пороговыми значениями мощности сигнала при изменении геометрии структуры. Выявлено влияние неоднородного распределения внутреннего магнитного поля в микроволноводах на эффективность дипольной спин-волновой связи в латеральных структурах. Использование нелинейных эффектов в системах неидентичных латеральных магнитных микроволноводов позволяют создавать устройства обработки СВЧ сигнала на принципах магноники с управлением свойствами спиновых волн.

References

1. Sadovnikov A.V., Beginin E.N., Sheshukova S.E, Romanenko D.V., Sharaevskii Yu.P., Nikitov S.A. Directional multimode coupler for planar magnonics: Side-coupled magnetic stripes. *Appl. Phys. Lett.*, 2015, vol. 107, 202405.
2. Sadovnikov A.V., Grachev A.A., Gubanov V.A., Odintsov S.A., Martyshkin A.A., Sheshukova S.E., Sharaevskii Yu.P., Nikitov S.A. Spin-wave intermodal coupling in the interconnection of magnonic units. *Appl. Phys. Lett.*, 2018, vol. 112, 142402.
3. Sander D., Valenzuela S.O., Makarov D., Marrows C.H., Fullerton E.E., Fisher P., McCord J.,

- Vavassori P., Smangin S., Pirro P., Hillebrands B., Kent A.D., Jungwirth T., Gutfleisch O., Kim C.G., Berger A. The 2017 Magnetism Roadmap. *J. Phys. D: Appl. Phys.*, 2017, vol. 50, 363001.
4. Stamps R., Breitzkreutz S., Akerman J., Chumak A.V., Otani Y., Bauer G., Thiele J.U., Bowen M., Majetich S.A., Klaui M., Prejbeanu I.L., Dieny B., Dempsey N., Hillebrands B. The 2014 Magnetism Roadmap. *J. Phys. D: Appl. Phys.*, 2014, vol. 47, 333001.
 5. Demidov V.E., Urazhdin S., Zholud A., Sadovnikov A.V., Slavin A.N., Demokritov S.O. Spin-current nano-oscillator based on nonlocal spin injection. *Sci. Rep.*, 2015, vol. 5, 8578.
 6. ITRS, <http://www.itrs2.net/itrs-reports.html> for «International Technology Roadmap for Semiconductors. 2015 edition» (accessed 1 April 2017).
 7. Demokritov S. O., Hillebrands B., Slavin A. N. Brillouin light scattering studies of confined spin waves: Linear and nonlinear confinement. *Phys. Rep.*, 2001, vol. 348, 441.
 8. Demidov V.E., Urazhdin S., Zholud A., Sadovnikov A.V., Slavin A.N., Demokritov S.O. Spin-current nano-oscillator based on nonlocal spin injection. *Sci. Rep.*, 2015, vol. 5, 8578.
 9. Demidov V.E., Urazhdin S., Zholud A., Sadovnikov A.V., Demokritov S.O. Nanoconstriction-based spin-Hall nano-oscillator. *Appl. Phys. Lett.*, 2014, vol. 105, 172410.
 10. Demidov V.E., Urazhdin S., de Loubens G., Klein O., Cros V., Anane A., Demokritov S.O. Magnetization oscillations and waves driven by pure spin currents. *Phys. Rep.*, 2017, vol. 673, pp. 1–31.
 11. Collet M., Gladii O., Evelt M., Bessonov V., Soumah L., Bortolotti P., Demokritov S.O., Henry Y., Cros V., Bailleul M., Demidov V.E., Anane A. Spin-wave propagation in ultra-thin YIG based waveguide. *Appl. Phys. Lett.*, 2017, vol. 110, 092408.
 12. Gurevich A.G., Melkov G.A. Magnetization Oscillations and Waves. CRC Press, London, 1996.
 13. Stancil D.D., Prabhakar A. Spin Waves: Theory and Applications. Springer, 2009.
 14. Sodha M. S., Srivastava N.C. Microwave Propagation in Ferromagnetics. Springer US, New York, 1981.
 15. Landau L., Lifshitz E. On the theory of the dispersion of magnetic permeability in ferromagnetic bodies. *Phys. Z. Sowjetunion*, 1935, vol. 8, p. 153.
 16. Ginzburg V.L., Landau L.D. On the theory of superconductivity. *Zh. Eksp. Teor. Fiz.*, 1950, vol. 20, pp. 1064–1082.
 17. Vansteenkiste A., Leliaert J., Dvornik M., Helsen M., Garcia-Sanchez F., Van Waeyenberge B. The design and verification of mumax3. *AIP Advances*, 2014, vol. 4, 107133.
 18. O’Keeffe T.W., Patterson R.W. Magnetostatic surface-wave propagation in finite samples. *J. Appl. Phys.*, 1978, vol. 49, 4886.
 19. Bajpai S.N. Excitation of magnetostatic surface waves: Effect of finite sample width. *J. Appl. Phys.*, 1985, vol. 58, 910.
 20. Demidov V. E., Hansen U.-F., Dzyapko O., Koulev N., Demokritov S. O., Slavin A. N. Formation of longitudinal patterns and dimensionality crossover of nonlinear spin waves in ferromagnetic stripes. *Phys. Rev. B*, 2006, vol. 74, 092407.
 21. Sadovnikov A.V., Odintsov S.A., Beginin E.N., Grachev A.A., Gubanov V.A., Sheshukova S.E., Sharaevskii Yu.P., Nikitov S.A. Nonlinear spin wave effects in the system of lateral magnonic structures. *JETP Letters*, 2018, vol. 107:1, pp. 25–29.
 22. Damon R.W., Eshbach J.R. Magnetostatic modes of a ferromagnet slab. *J. Phys. Chem. Solids*, 1961, vol. 19, p. 308.



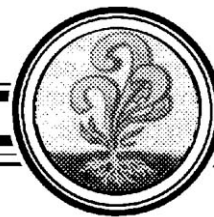
Одинцов Сергей Александрович родился в поселке Новоспасское Ульяновской обл. (1995). Получил степень магистра по специальности «Прикладные математика и физика» на факультете нелинейных процессов Саратовского государственного университета (2017). Аспирант СГУ. Лаборант-исследователь лаборатории «Магнитные явления» СГУ. Постоянный участник научных конференций. Имеет 11 научных статей в реферируемых научных журналах.

Россия, 410012 Саратов, Астраханская, 83
Саратовский национальный исследовательский государственный университет
E-mail: odinoff@gmail.com



Садовников Александр Владимирович родился в Саратове (1987). Окончил с серебряной медалью МОУ СОШ № 73 Саратова (2004) и поступил на факультет нелинейных процессов СГУ. Окончив с красным дипломом ФНП, в 2009 году поступил в аспирантуру по специальностям «Радиофизика», «Оптика». Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук (2012, СГУ). Имеет более 60 статей в реферируемых научных журналах.

Россия, 410012 Саратов, Астраханская, 83
Саратовский национальный исследовательский государственный университет
E-mail: sadovnikovav@gmail.com



Исследование синхронизации в системе двух гиротронов с запаздыванием в канале связи на основе модифицированной квазилинейной модели

А. Б. Адилова¹, Н. М. Рыскин^{1,2}

¹Саратовский национальный исследовательский государственный университет
Россия, 410012 Саратов, Астраханская, 83

²Саратовский филиал Института радиотехники и электроники им. В.А. Котельникова РАН
Россия, 410019 Саратов, Зелёная, 38

E-mail: AdilovaAB@info.sgu.ru, ryskinm@gmail.com

Автор для переписки Адилова Асель Булатовна, AdilovaAB@info.sgu.ru

Поступила в редакцию 8.06.2018, принята к публикации 25.08.2018

Тема. Работа посвящена исследованию взаимной синхронизации двух гиротронов с запаздыванием в канале связи. Как правило, теоретическое исследование процессов синхронизации гиротронов и других микроволновых генераторов проводят путем вычислительного эксперимента на основе тех или иных математических моделей, хорошо зарекомендовавших себя в микроволновой электронике. С помощью такого подхода затруднительно дать достаточно полное описание картины синхронизации, используя методы и представления, выработанные в нелинейной динамике. **Цель.** Целью работы является разработка модифицированной квазилинейной модели, основанной на аппроксимации функции электронной восприимчивости. **Метод.** Исследование проводится на основе бифуркационного анализа системы, который применим к данной модели. Также проводится сопоставление с численным моделированием на основе нестационарной теории гиротрона с фиксированной структурой высокочастотного поля. Результаты. Предложенная в работе модель позволяет построить области синхронизации на плоскости параметров коэффициент связи – частотная расстройка для различных синхронных режимов, число которых увеличивается с увеличением времени задержки. Также модель позволяет определить наиболее важные с практической точки зрения количественные параметры (мощность, КПД, частота генерации), которые хорошо согласуются с результатами численного моделирования на основе уравнений нестационарной теории гиротрона с фиксированной структурой высокочастотного поля. **Обсуждение.** Важным преимуществом предложенной модифицированной квазилинейной модели является возможность использовать для изучения режимов синхронизации современные автоматизированные пакеты бифуркационного анализа.

Ключевые слова: гиротрон, связанные генераторы, синхронизация, запаздывание, численное моделирование.

Образец цитирования: Адилова А.Б., Рыскин Н.М. Исследование синхронизации в системе двух гиротронов с запаздыванием в канале связи на основе модифицированной квазилинейной модели // Изв. вузов. ПНД. 2018. Т. 26, № 6. С. 68–81. <https://doi.org/10.18500/0869-6632-2018-26-6-68-81>

Финансовая поддержка. Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (проект № 18-02-00839).

Study of synchronization in the system of two delay-coupled gyrotrons using a modified quasilinear model

A. B. Adilova¹, N. M. Ryskin²

¹ Saratov State University

83, Astrakhanskaya str., 410012 Saratov, Russia

²Kotelnikov Institute of Radio-Engineering of RAS, Saratov Branch

38, Zelenaya str., 410019 Saratov, Russia

E-mail: AdilovaAB@info.sgu.ru, ryskinm@gmail.com

Correspondence should be addressed to Adilova Assel B., AdilovaAB@info.sgu.ru

Received 8.06.2018, accepted for publication 25.08.2018

Topic. The paper is devoted to the study of mutual synchronization of two gyrotrons coupled with delay. As a rule, a theoretical study of synchronization of gyrotrons and other microwave oscillators is usually carried out by numerical simulations using certain well-established models of microwave electronics. Using this approach, it is difficult to provide a fairly complete synchronization pattern, using methods and ideas of nonlinear dynamics. **Aim.** The aim of the paper is to develop a modified quasilinear model based on the approximation of the electron susceptibility. **Methods.** The study is based on a bifurcation analysis of the system, which is applicable to this model. A comparison is also made with numerical simulation using the non-stationary theory of a gyrotron with a fixed high-frequency field profile. Results The model proposed in this work allowed us to construct synchronization areas on the plane of parameters of the coupling coefficient – the frequency mismatch for various synchronous modes, the number of which increases with increasing delay time. The model also makes it possible to compute the most important practical parameters (power, efficiency, oscillation frequency). **Discussion.** An important advantage of the proposed modified quasilinear model is the ability to use modern automated bifurcation analysis packages for studying synchronization modes.

Key words: gyrotron, coupled oscillators, synchronization, delay, numerical modeling.

Reference: Adilova A.B., Ryskin N.M. Study of synchronization in the system of two delay-coupled gyrotrons using a modified quasilinear model. *Izvestiya VUZ, Applied Nonlinear Dynamics*, 2018, vol. 26, no. 6, pp. 68–81.

<https://doi.org/10.18500/0869-6632-2018-26-6-68-81>

Acknowledgements. This work is supported by the Russian Foundation for Basic Research grant no. 18-02-00839.

Введение

Изучение взаимной синхронизации в ансамблях связанных осцилляторов является фундаментальной проблемой нелинейной динамики и представляет интерес для многих приложений [1–3]. В частности, в радиофизике и электронике для сложения мощностей широко применяются системы связанных микроволновых генераторов (см., например, [4]). В последние годы привлекли внимание задачи о синхронизации мощных гиротронов (мазеров на циклотронном резонансе) [5–10], поскольку они используются для электронно-циклотронного нагрева плазмы в установках управляемого термоядерного синтеза. Например, в проекте ITER планируется использование 26 гиротронов мощностью 1 МВт на частоте 170 ГГц [12].

Поскольку на сверхвысоких частотах расстояние между связанными генераторами может существенно превышать длину волны, необходимо учитывать запаздывание сигнала, распространяющегося между ними. Запаздывание может привести к ряду новых нетривиальных эффектов (см., например, [13]). В частности, в работах [14, 15] исследовалась синхронизация простой модели двух осцилляторов с предельным циклом, связанных с задержкой. Был обнаружен ряд существенных отличий от классической картины синхронизации двух генераторов с одной степенью свободы. Как известно, в подобной системе можно выделить два основных типа связи: диссипативную (диффузионную) и инерционную (реактивную) [16]. Эти случаи отличаются устрой-

ством языков синхронизации, в том числе при инерционной связи возможна синхронизация как на синфазной, так и на противофазной моде: режим синхронизации становится бистабильным. В [14, 15] было обнаружено, что в зависимости от набега фазы сигнала в канале связи доминирует либо диссипативная связь, либо инерционная. Более того, при увеличении времени задержки появляются новые устойчивые синхронные режимы, то есть мультистабильность усиливается.

Обобщение результатов, полученных в [14, 15], на систему гиротронов, связанных с задержкой, представляет очевидный интерес. Как правило, теоретическое исследование процессов синхронизации гиротронов и других микроволновых генераторов проводят путем вычислительного эксперимента на основе тех или иных математических моделей, хорошо зарекомендовавших себя в микроволновой электронике [6–10] (нестационарная теория с фиксированной или нефиксированной структурой высокочастотного (ВЧ) поля, 3-D «полностью электромагнитные» коды и т.д.). С помощью таких подходов затруднительно дать достаточно полное описание картины синхронизации, в частности, выявить структуру областей синхронизации в пространстве управляющих параметров и провести бифуркационный анализ механизмов перехода в режим синхронизации. В особенности ситуация усложняется при увеличении запаздывания, когда априори неизвестно само число мультистабильных состояний.

В данной работе развита упрощенная модель системы связанных гиротронов в виде системы дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом, которая позволяет исследовать режимы синхронизации, используя методы и представления, выработанные в нелинейной динамике, в том числе, провести бифуркационный анализ, используя автоматизированные пакеты, например, XPPAUTO [17] и DDEBifTool [18]. Показано, что с помощью данной модели можно определить значения наиболее важных с практической точки зрения количественных параметров (мощность, КПД, частота генерации), которые достаточно хорошо согласуются с результатами численного моделирования на основе уравнений нестационарной теории гиротрона с фиксированной структурой ВЧ поля.

1. Основные уравнения

Рассмотрим систему двух связанных гиротронов, параметры которых будем полагать одинаковыми за исключением небольшой расстройки собственных частот ($\omega_1 \neq \omega_2$, причем $|\omega_1 - \omega_2| \ll \omega_{1,2}$). Будем исходить из известных уравнений нестационарной теории гиротрона с фиксированной структурой ВЧ поля (см., например, [8, 19, 20]). Запишем уравнения движения электронов

$$\frac{dp_{1,2}}{d\zeta} + i \left(\Delta_H + |p_{1,2}|^2 - 1 \right) p_{1,2} = i A_{1,2} f_s(\zeta). \quad (1)$$

Здесь $p_{1,2}$ – безразмерные поперечные импульсы электронов; $A_{1,2}$ – безразмерные комплексные амплитуды поля рабочей моды (индексы «1» и «2» относятся к первому и второму гиротронам, соответственно); $\zeta = (\beta_{\perp}^2 / 2\beta_{\parallel}) \omega_0 z / c$ – безразмерная продольная координата; ω_0 – опорная частота, которая выбрана равной $\omega_0 = (\omega_1 + \omega_2) / 2$; $\beta_{\parallel} = v_{\parallel 0} / c$; $\beta_{\perp} = v_{\perp 0} / c$; $\Delta_H = 2(\omega_0 - \omega_H) / (\beta_{\perp}^2 \omega_0)$ – расстройка циклотронного резонанса. Функция $f_s(\zeta)$ описывает распределение поля в резонаторе. Далее рассматривается гауссово распределение поля

$$f_s(\zeta) = \exp \left[-3 \left(\frac{2\zeta}{\zeta_k} - 1 \right)^2 \right], \quad (2)$$

которое часто используется для аппроксимации реального распределения поля в резонаторе гиротрона.

Уравнения (1) решаются с граничными условиями

$$p(\zeta = 0) = e^{i\varphi_0}, \quad (3)$$

где начальные фазы φ_0 равномерно распределены по промежутку $[0, 2\pi]$.

Амплитуды $A_{1,2}$ подчиняются уравнениям возбуждения [8, 19, 20], которые в случае двух связанных генераторов имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{dA_1}{d\tau} + i\frac{\Delta}{2}A_1 + A_1 &= I_s\Phi(A_1)A_1 + \rho e^{-i\psi}A_2(\tau - \tau_d), \\ \frac{dA_2}{d\tau} - i\frac{\Delta}{2}A_2 + A_2 &= I_s\Phi(A_2)A_2 + \rho e^{-i\psi}A_1(\tau - \tau_d). \end{aligned} \quad (4)$$

Здесь $\Delta = 2Q(\omega_1 - \omega_2)/\omega_0$ – нормированная расстройка собственных частот; I_s – безразмерный параметр, имеющий смысл нормированного тока (подробнее см., например, [8, 19, 20]); ρ – параметр связи; $\tau = \omega_0 t / (2Q)$ – нормированное время; $\tau_d = \omega_0 t_d / (2Q)$ – нормированное время задержки; $\psi = \omega_0 t_d$ – набег фазы сигнала; $t_d \approx l/c$ – время задержки; l – расстояние между гиротронами; Φ – комплексная электронная восприимчивость [19]

$$\Phi = \Phi' + i\Phi'' = \frac{i}{A} \int_0^{\mu} J(\zeta, \tau) f_s^*(\zeta) d\zeta. \quad (5)$$

В уравнении (5) $J_{1,2}$ – гармоники ВЧ тока, которые вычисляются следующим образом:

$$J_{1,2} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} p_{1,2} d\varphi_0.$$

Подчеркнем, уравнения (1)–(5) записаны для случая взаимодействия на основной циклотронной гармонике.

Существует подход, позволяющий провести приближенное аналитическое исследование автоколебаний в гиротроне с фиксированной структурой ВЧ поля. Он основан на так называемой квазилинейной теории [19], в рамках которой уравнения движения электронов решаются приближенно методом разложения по малому параметру, в роли которого выступает амплитуда поля. В результате можно найти сгруппированный ток и получить выражение комплексной электронной восприимчивости в виде ряда по степеням амплитуды поля $\Phi \approx \alpha - \beta|A|^2 + \dots$. Однако квазилинейная теория справедлива только при небольшом превышении порога самовозбуждения, поэтому ее результаты носят качественный характер.

Предложим следующую модификацию квазилинейной теории, которая позволяет добиться количественного соответствия результатам численного моделирования.

Рассмотрим одиночный гиротрон, для которого уравнение возбуждения запишем в виде

$$\frac{dA}{d\tau} + A = I_s\Phi(A)A. \quad (6)$$

Для режима стационарных колебаний с фиксированной частотой Ω , полагая $A \sim \exp(i\Omega\tau)$, из уравнения (6) получим

$$\begin{aligned} 1 &= I_s\Phi'(A), \\ \Omega &= I_s\Phi''(A), \end{aligned} \quad (7)$$

Проведя серию расчетов установления колебаний при различных значениях параметра I_s , найдем соответствующие значения частоты и амплитуды колебаний $\Omega(I_s)$ и $W(I_s)$, где введено обозначение $W = |A|^2$. Далее из соотношений (7) можно определить вещественную (активную) и мнимую (реактивную) части электронной восприимчивости как функции W . Действительно, нетрудно по зависимости $W(I_s)$ найти

$$\Phi' = 1/I_s(W), \quad (8)$$

а зависимость $\Omega(I_s)$ перестроить в виде $\Omega(W(I_s))$ и получить

$$\Phi'' = \Omega(W)/I_s(W). \quad (9)$$

Будем ориентироваться на параметры гиротрона, предназначенного для электронно-циклотронного нагрева плазмы [11]. Гиротрон с рабочей модой $TE_{25,10}$ имеет следующие параметры: рабочая частота 170 ГГц, мощность порядка 1 МВт, ток электронного пучка 45 А, напряжение 73 кВ, радиус резонатора 17.77 мм, радиус пучка 7.39 мм, длина однородного участка резонатора 11.5 мм, питч-фактор 1.3, магнитное поле 6.7 Тл. При таких значениях параметров имеем $\Delta_H \approx 0.5$, $\mu \approx 10$ [11]. Представляется, что и другие гиротроны подобного класса будут иметь близкие значения безразмерных параметров.

На рис. 1, *a, b* приведен пример зависимостей $W(I_s)$ и $\Omega(I_s)$ при значениях параметров $\Delta_H = 0.4$, $\mu = 10$. Значение Δ_H выбрано меньшим, чем в [11], чтобы генератор находился в режиме мягкого самовозбуждения. На рис. 1, *c, d* построены соответствующие зависимости

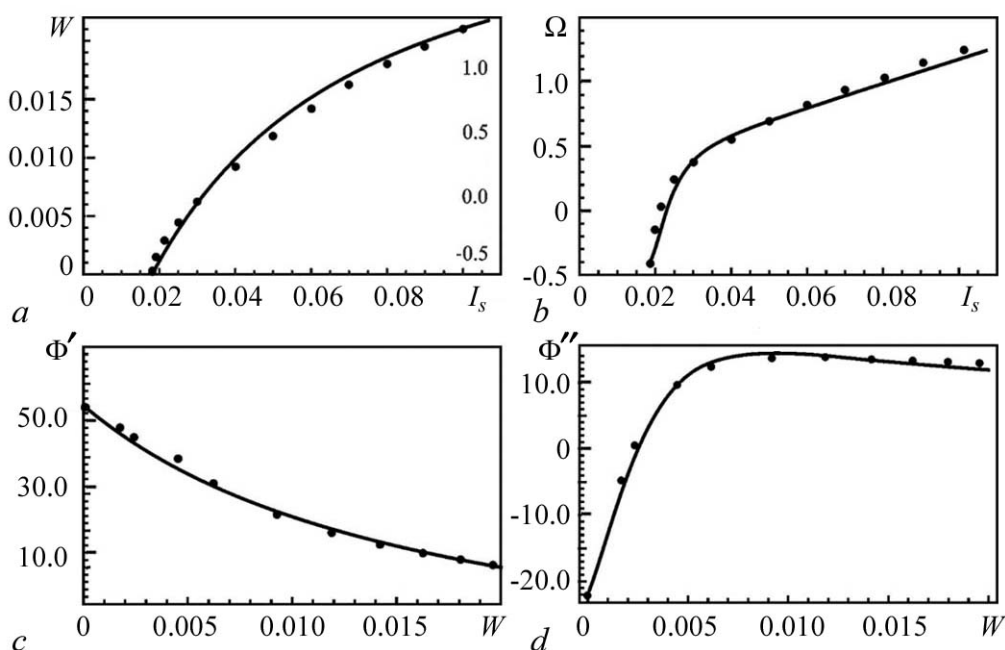


Рис. 1. Зависимости квадрата амплитуды колебаний (*a*) и частоты (*b*) от нормированного параметра тока, а также зависимости активной (*c*) и реактивной (*d*) составляющих электронной восприимчивости от квадрата амплитуды в случае мягкого самовозбуждения ($\Delta_H = 0.4$, $\mu = 10$)

Fig. 1. Amplitude squared (*a*) and oscillation frequency (*b*) as functions of the normalized current parameter; Active (*c*) and reactive (*d*) part of the electronic susceptibility as functions on the amplitude square in the case of soft self-excitation ($\Delta_H = 0.4$, $\mu = 10$)

$\Phi'(W)$ и $\Phi''(W)$, для которых можно подобрать достаточно простые аппроксимации

$$\Phi'(W) = \frac{\alpha' - \beta'W}{1 + \gamma'W}, \quad (10)$$

$$\Phi''(W) = \frac{\alpha'' + \delta''W + \gamma''W^2}{1 + \beta''W^2},$$

где в данном случае $\alpha' \approx 54.05$, $\beta' = 15 \cdot 10^2$, $\gamma' = 60$, $\alpha'' = -22.0$, $\delta'' = 8 \cdot 10^3$, $\gamma'' = 28 \cdot 10^4$, $\beta'' = 5 \cdot 10^4$. На рисунке зависимости, построенные по формулам (10), показаны сплошными линиями.

Отметим, что параметры α' и α'' определяют значения активной и реактивной восприимчивости в линейном пределе, когда $W \rightarrow 0$. Отсюда находим, что $\alpha' = 1/I_{s0}$, $\alpha'' = \Omega_0/I_{s0}$, где I_{s0} – стартовое значение параметра I_s , Ω_0 – частота генерации на пороге самовозбуждения.

На рис. 2 построены аналогичные зависимости для случая жесткого возбуждения ($\Delta_H = 0.53$, $\mu = 10$). Аппроксимации зависимостей $\Phi'(W)$ и $\Phi''(W)$ в данном случае имеют вид

$$\Phi'(W) = \frac{\alpha' - \beta'W - \gamma'W^2}{1 + \delta'W}, \quad \Phi''(W) = \frac{\alpha'' + \beta''W^2}{1 + \gamma''W^2}, \quad (11)$$

где $\alpha' = 15.3864$, $\beta' = -3 \cdot 10^3$, $\gamma' = 45 \cdot 10^3$, $\delta' = 68 \cdot 10^2$, $\alpha'' = -24.0$, $\beta'' = 10^5$, $\gamma'' = 2 \cdot 10^4$. Видно, что в области $0.39 < I_s < 0.65$ одному и тому же значению параметра соответствует два значения амплитуды колебаний, одно из которых неустойчиво. На рис. 2 неустойчивые состояния показаны пунктиром. При численном моделировании они определялись путем интегрирования уравнений в обратном времени.

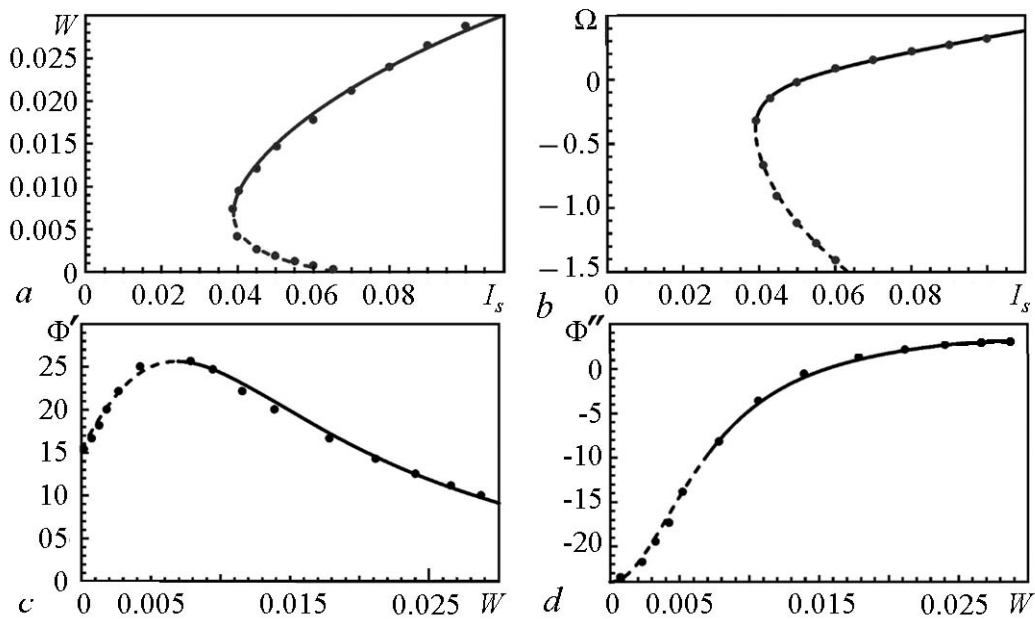


Рис. 2. Зависимости квадрата амплитуды колебаний (a) и частоты (b) от нормированного параметра тока, а также зависимости активной (c) и реактивной (d) составляющих электронной восприимчивости от квадрата амплитуды в случае жесткого возбуждения ($\Delta_H = 0.53$, $\mu = 10$)

Fig. 2. Amplitude squared (a) and oscillation frequency (b) as functions of the normalized current parameter; Active (c) and reactive (d) part of the electronic susceptibility as functions on the amplitude square in the case of hard self-excitation ($\Delta_H = 0.53$, $\mu = 10$)

Что касается состояния равновесия $A = 0$, то оно устойчиво при $I_s < 0.65$. Таким образом, в области $0.39 < I_s < 0.65$ имеет место бистабильность и возбуждение автоколебаний происходит жестким образом.

2. Результаты численного моделирования

Перейдем к рассмотрению системы двух связанных гиротронов (4). Проведем сопоставление результатов моделирования для разработанной модели, в которой функция электронной восприимчивости Φ в обоих гиротронах задается в виде аппроксимации, с расчетами по традиционным уравнениям нестационарной теории гиротрона, когда Φ находится в результате интегрирования уравнений движения (1). Для определенности будем рассматривать случай мягкого самовозбуждения ($\Delta_H = 0.4$, $\mu = 10$). При этом для Φ' и Φ'' имеем соотношения (10) (см. рис. 1, *c, d*). Нормированный параметр тока выберем равным $I_s = 0.05$, поскольку при таком значении I_s в данном случае достигается максимальный КПД (приблизительно 50%). Безразмерное время запаздывания выберем равным $\tau_d = 3.0$. Для гиротрона, рассмотренного в [11], собственная частота $f_0 \approx 170$ ГГц, добротность $Q \approx 1100$, поэтому выбранное значение τ_d соответствует расстоянию между гиротронами около двух метров.

На рис. 3 построены области синхронизации на плоскости параметров «коэффициент связи ρ –частотная расстройка Δ ». Результаты моделирования на основе нестационарной теории гиротрона с фиксированной структурой поля показаны кружками, а границы синхронизации, рассчитанные на основе упрощенной модели, развитой в разделе 1, – сплошными линиями. Видно, что они полностью согласуются друг с другом. Отметим, что при наличии запаздывания появляется, вообще говоря, несколько режимов синхронизации, которые можно разделить на синфазные и противофазные [14, 15] (на рис. 3 они обозначены символами S и A, соответственно).

Рассмотрим для простоты случай нулевой расстройки собственных частот гиротронов, когда уравнения (4) принимают вид

$$\begin{aligned} \frac{dA_1}{d\tau} + A_1 &= I_s \Phi(A_1) A_1 + \rho e^{-i\psi} A_2 (\tau - \tau_d), \\ \frac{dA_2}{d\tau} + A_2 &= I_s \Phi(A_2) A_2 + \rho e^{-i\psi} A_1 (\tau - \tau_d). \end{aligned} \quad (12)$$

Очевидно, что эти уравнения имеют решения $A_1 = A_2$ и $A_1 = -A_2$, которые отвечают синфазной и противофазной моде, соответственно. В режиме синхронизации колебания обоих генераторов происходят с одинаковой частотой Ω , для которой из уравнений (12) можно получить следующее уравнение:

$$\Omega = I_s \Phi''(W) \mp \rho \sin(\Omega \tau_d + \psi). \quad (13)$$

В данном случае знак «–» соответствует синфазному решению, знак «+» – противофазному.

Решая уравнение (13), можно найти значения собственных частот, причем число корней (то есть число собственных мод) увеличивается с ростом

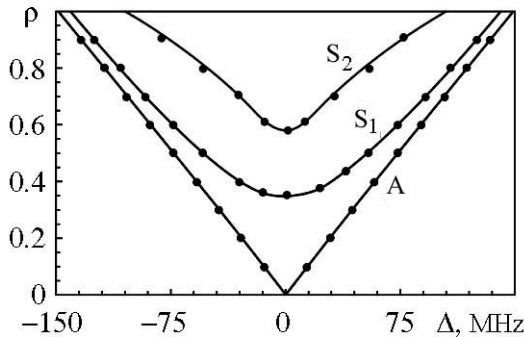


Рис. 3. Области синхронизации на синфазных S_1 , S_2 и противофазной A модах при $I_s=0.05$, $\Delta_H=0.4$, $\mu = 10.0$, $\psi = 0.4\pi$, $\tau_d = 3.0$. Линиями показаны результаты численного моделирования для модифицированной квазилинейной модели, кружками – для уравнений нестационарной теории гиротрона с фиксированной структурой ВЧ поля

Fig. 3. Domains of synchronization of the in-phase S_1 , S_2 and antiphase (A) modes for $I_s = 0.05$, $\Delta_H = 0.4$, $\mu = 10.0$, $\psi = 0.4\pi$, $\tau_d = 3.0$. Simulation results for the modified quasilinear model and for the non-stationary gyrotron theory with a fixed high-frequency field profile are shown with lines and circles respectively

времени задержки. Анализ характеристического уравнения был представлен в работах [14, 21], единственное отличие заключается в том, что в данном случае учитывается реактивная фазовая нелинейность, которую описывает первое слагаемое в (13). Как показано в [14, 21], корни, для которых $\cos(\Omega\tau_d + \psi) > 0$, отвечают устойчивым состояниям, а корни, для которых $\cos(\Omega\tau_d + \psi) < 0$, – неустойчивым.

Отметим, что при построении областей синхронизации, представленных на рис. 3, необходимо задавать начальные условия таким образом, чтобы попасть в бассейн притяжения аттрактора, соответствующего той или иной моде. В случае развитой мультистабильности эта задача является нетривиальной, поэтому использовалась следующая методика.

Первоначально, при решении уравнения (13), определяются собственные частоты различных мод. Затем проводится расчет при нулевой расстройке ($\Delta = 0$) с заданием начальных возмущений (для системы с запаздыванием, очевидно, их нужно задать на интервале длительностью τ_d) в виде гармонических колебаний малой амплитуды и соответствующей частоты. При этом для синфазных/противофазных мод разность фаз выбирается равной 0 либо π , соответственно. Уравнения интегрируются до момента установления режима синхронизации на соответствующей моде. Далее проводятся расчеты при плавном увеличении расстройки с наследованием начальных условий до тех пор, пока не происходит потеря устойчивости данного режима.

Из рис. 3 видно, что при выбранных значениях параметров устойчивыми являются две синфазные и одна противофазная моды, причем наиболее широкую полосу синхронизации имеет противофазная мода. Для синфазных мод имеется порог синхронизации, то есть даже при нулевой расстройке синхронизация наступает при конечных значениях параметра связи.

Как видно из рис. 3, взаимная синхронизация возможна при расстройке собственных частот порядка 150 МГц. Собственная частота резонатора гиротрона близка к частоте отсечки, которая для TE-мод определяется соотношением

$$\omega_c = \frac{v_{mn}c}{R},$$

где R – радиус резонатора, v_{mn} – n -й корень уравнения $J'_m(v) = 0$, где J'_m – производная от функции Бесселя соответствующего порядка. Следовательно, изменение радиуса на малую величину ΔR вызывает изменение собственной частоты

$$\frac{\Delta f}{f_0} \sim -\frac{\Delta R}{R_0}.$$

Поскольку для рассматриваемого гиротрона $R = 17.77$ мм [11], допустимое отклонение составляет примерно 15 мкм, в то время как современные технологии имеют погрешность изготовления около 2 мкм [22].

На рис. 4 приведены примеры зависимостей КПД и мгновенных частот от времени. Видно, что разработанная модель хорошо описывает режим биений с достаточно сложной модуляцией частоты и КПД, который имеет место при выбранных значениях параметров. Мгновенные частоты определяются как производные от мгновенных фаз $\varphi_{1,2} = \arg(A_{1,2})$. Отметим, что для модифицированной квазилинейной модели поперечный КПД

$$\eta = 1 - \int_0^{2\pi} |p(\mu)|^2 d\varphi_0$$

можно выразить через электронную восприимчивость следующим образом:

$$\eta_{1,2} = 2\Phi'(|A_{1,2}|) |A_{1,2}|^2.$$

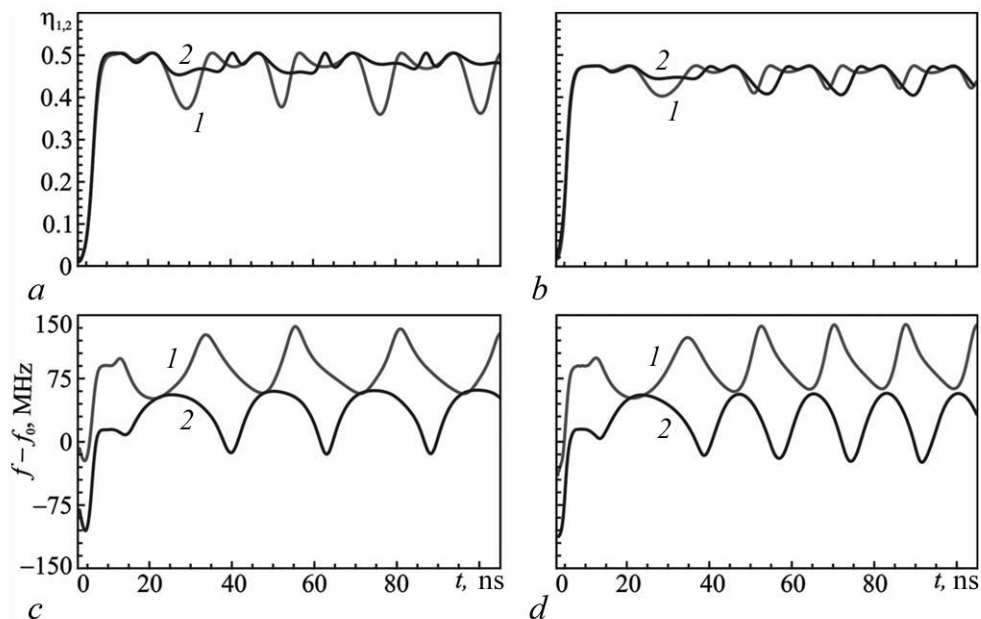


Рис. 4. Зависимости КПД (а), (б) и частот (с), (д) первого (кривые 1) и второго (кривые 2) гиротрона от времени для упрощенной модели (а), (с) и для модели гиротрона с фиксированной структурой ВЧ поля (б), (д). Значения параметров: $\rho = 0.5$, $\Delta = 75$ МГц, остальные параметры те же, что на рис. 3

Fig. 4. Efficiency (a), (b) and frequency (c), (d) of the first (curves 1) and second (curves 2) gyrotron versus time for the modified quasilinear model (a), (c) and for the non-stationary gyrotron theory with a fixed high-frequency field profile (b), (d). $\rho = 0.5$, $\Delta = 50$ MHz, the rest of parameters are the same as in Fig. 3

Приведенные на рис. 4 графики соответствуют случаю, когда параметры близки к границе установления синхронизации на противофазной моде. Зависимости имеют вид релаксационных колебаний со стадиями быстрого и медленного изменения переменных, что характерно для установления синхронизации путем захвата частот, то есть в результате седло-узловой бифуркации [1–3].

Иная картина поведения наблюдается в окрестности границ синхронизации для синфазных мод. Для них переход к синхронизации происходит через подавление колебаний одного генератора другим, то есть в результате бифуркации Андронова–Хопфа. Зависимости КПД и мгновенной частоты от времени для этого случая приведены на рис. 5. Видно, что амплитуда колебаний мала, то есть биения возникают мягко, что типично для синхронизации подавлением [1–3].

Зависимости КПД (а) и частоты (б) первого гиротрона от расстройки частот при синхронизации на синфазных S_1 , S_2 и противофазной А модах ($\rho = 0.8$), остальные параметры те же, что на рис. 3. Линиями показаны результаты, полученные для упрощенной модели, символами – результаты для модели гиротрона с фиксированной структурой ВЧ поля (кружки – противофазная мода, квадраты – первая синфазная, ромбы – вторая синфазная)

На рис. 6 приведены примеры зависимостей КПД и частоты от расстройки собственных частот в режиме синхронизации. Выбрано значение коэффициента связи $\rho = 0.8$, при котором устойчивы две синфазные S_1 , S_2 и одна противофазная А моды (ср. рис. 3). Чтобы не загромождать рисунок, показаны зависимости только для первого генератора. Для второго генератора зависимость КПД симметрична зависимости первого относительно оси $\Delta = 0$, а частоты в режиме синхронизации, очевидно, одинаковы для обеих подсистем. Обратим внимание, что частоты слабо зависят от расстройки.

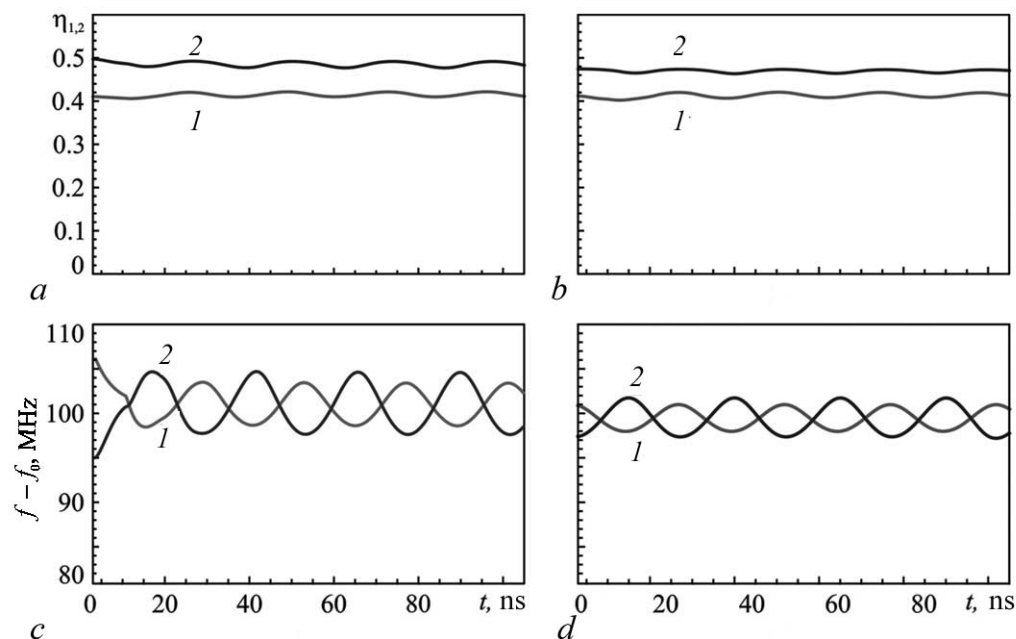


Рис. 5. Зависимости КПД (a), (b) и частот (c), (d) первого (кривые 1) и второго (кривые 2) гиротрона от времени для упрощенной модели (a), (c) и для модели гиротрона с фиксированной структурой ВЧ поля (b), (d). Значения параметров: $\rho = 0.8$, $\Delta = 80$ МГц, остальные параметры те же, что на рис. 3

Fig. 5. Efficiency (a), (b) and frequency (c), (d) of the first (curves 1) and second (curves 2) gyrotron versus time for the modified quasilinear model (a), (c) and for the non-stationary gyrotron theory with a fixed high-frequency field profile (b), (d). $\rho = 0.8$, $\Delta = 80$ MHz, the rest of parameters are the same as in Fig. 3

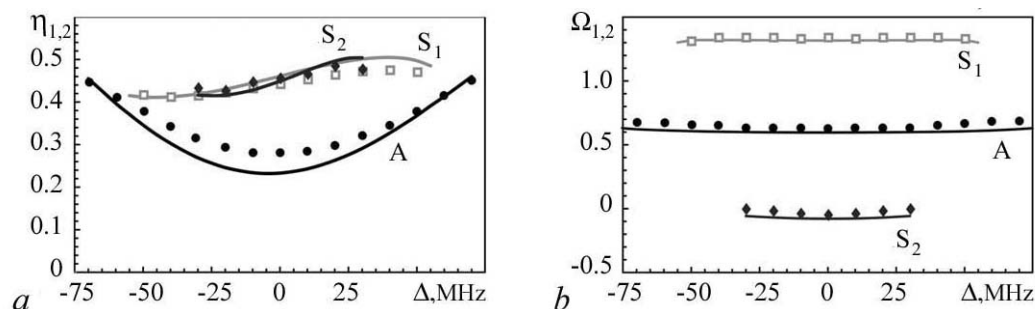


Рис. 6. Зависимости КПД (a) и частоты (b) первого гиротрона от расстройки частот при синхронизации на синфазных S_1 , S_2 и противофазной A модах ($\rho = 0.8$, остальные параметры те же, что на рис. 3). Линиями показаны результаты, полученные для упрощенной модели, символами – результаты для модели гиротрона с фиксированной структурой ВЧ поля (кружки – противофазная мода, квадраты – первая синфазная, ромбы – вторая синфазная)

Fig. 6. Efficiency (a) and frequency (b) of the first and second gyrotron versus the frequency mismatch for synchronization on in-phase S_1 , S_2 and antiphase A modes ($\rho = 0.8$, the rest of parameters same as in Fig. 3). Simulation results for the modified quasilinear model are shown with lines, for the non-stationary gyrotron theory with a fixed high-frequency field profile are shown with symbols (circles – antiphase mode, squares – first in-phase, rhombuses – second in-phase)

Вновь видим, что результаты расчетов для двух рассматриваемых моделей хорошо согласуются друг с другом – расхождение не превышает 5%. Также из рис. 6 видно, что синфазные моды характеризуются более высоким КПД, чем противофазная. Максимальные значения КПД составляют приблизительно 50%, что примерно равно КПД в отсутствие связи. С другой стороны, для противофазной моды КПД также может достигать значений приблизительно 50% в области малых ρ , где эта мода является единственной (см. рис. 3). Также можно заметить, что характер зависимостей КПД от расстройки для синфазных и противофазной мод различен, а именно, для противофазной моды максимальный КПД достигается вблизи границ языка синхронизации.

Заключение

В работе предложена модифицированная квазилинейная модель системы связанных гиротронов, основанная на аппроксимации функции электронной восприимчивости, найденной в результате расчетов с помощью уравнений нестационарной теории гиротрона с фиксированной структурой ВЧ поля. Модель позволяет получить результаты, не только качественно, но и количественно согласующиеся с нестационарной теорией гиротрона с фиксированной структурой поля. Запаздывание сигнала в канале связи играет принципиальную роль, приводя к увеличению наблюдаемых синфазных/противофазных мод синхронизации. Модифицированная квазилинейная модель позволяет определить число устойчивых состояний и их собственные частоты, хорошо описывает структуру областей синхронизации на плоскости параметров «расстройка–коэффициент связи», зависимости КПД и частоты от расстройки в режиме синхронизации, а также сложный характер амплитудной и частотной модуляции в режиме биений. Количественно значения КПД и частоты для двух рассматриваемых моделей различаются не более чем на 5%, тогда как скорость расчета для модифицированной квазилинейной модели примерно на порядок выше. Еще одним важным преимуществом является возможность использовать для изучения режимов синхронизации автоматизированные пакеты бифуркационного анализа, такие как XPPAUTO и DDEBifTool, что является темой дальнейшей работы.

Библиографический список

1. Ланда П.С. Нелинейные колебания и волны. М.: Наука, 1997. 496 с.
2. Пиковский А., Розенблюм М., Куртс Ю. Синхронизация: Фундаментальное нелинейное явление. М.: Техносфера, 2003. 496 с.
3. Кузнецов А.П., Кузнецов С.П., Рыскин Н.М. Нелинейные колебания. М.: Физматлит, 2005. 292 с.
4. York R.A., Compton R.C. Quasi-optical power combining using mutually synchronized oscillator arrays // IEEE Trans. Microwave Theory Tech. 1991. Vol. 39, no. 6. Pp. 1000–1009.
5. Глявин М.Ю., Кулыгин М.Л. Теоретическое и экспериментальное исследование автомодуляционных режимов генерации в гиротронах с запаздывающей обратной связью // Избранные труды конкурса молодых ученых. Н. Новгород: ИПФ РАН, 2001. С. 16–24.
6. Rozental R.M., Ginzburg N.S., Glyavin M.Yu., Sergeev A.S., Zotova I.V. Mutual synchronization of weakly coupled gyrotrons // Phys. Plasmas. 2015. Vol. 22, no. 9. 093118.
7. Zotova I.V., Ginzburg N.S., Denisov G.G., Rozental R.M., Sergeev A.S. Режимы захвата и стабилизации частоты генерации в мощных гиротронах с низкодобротными резонаторами // Изв. вузов. Радиофизика. 2015. Т. 58, № 9. С. 759–769.

8. Бакунин В.Л., Денисов Г.Г., Новожилова Ю.В. Зоны захвата частоты многомодового гиротрона мегаваттного уровня мощности внешним сигналом // Изв. вузов. Радиофизика. 2015. Т. 58, № 9. С. 747–758.
9. Yakunina K.A., Kuznetsov A.P., Ryskin N.M. Injection locking of an electronic maser in the hard excitation mode // Phys. Plasmas. 2015. Vol. 22, no. 11. 113107.
10. Новожилова Ю.В., Денисов Г.Г., Глявин М.Ю., Рыскин Н.М., Бакунин В.Л., Богдашов А.А., Мельникова М.М., Фокин А.П. Стабилизация частоты гиротрона под влиянием внешнего монохроматического сигнала или отраженной от нагрузки волны: Обзор // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2017. Т. 25, № 1. С. 4–34.
11. Глявин М.Ю., Денисов Г.Г., Кулыгин М.Л., Мельникова М.М., Новожилова Ю.В., Рыскин Н.М. Стабилизация частоты гиротрона слабой отражённой волной // Изв. вузов. Радиофизика. 2015. Т. 58, № 9. С. 747–758.
12. Sakamoto K. Progress of high-power-gyrotron development for fusion research // Fusion Sci. Tech. 2007. Vol. 52. Pp. 145–153.
13. Клиньшов В.В., Некоркин В.И. Синхронизация автоколебательных сетей с запаздывающими связями // УФН. 2013. Т. 183, № 12. С. 1323–1336.
14. Usacheva S.A., Ryskin N.M. Phase locking of two limit cycle oscillators with delay coupling // Chaos. 2014. Vol. 24, no. 2. 023123.
15. Адилова А.Б., Герасимова С.А., Рыскин Н.М. Бифуркационный анализ взаимной синхронизации двух генераторов с запаздыванием в цепи связи // Нелинейная динамика. 2017. Т. 13, № 1. С. 3–12.
16. Kuznetsov A.P., Stankevich N.V., Turukina L.V. Coupled van der Pol–Duffing oscillators: Phase dynamics and structure of synchronization tongues // Physica D. 2009. Vol. 238, no. 14. Pp. 1203–1215.
17. <http://www.math.pitt.edu/bard/xpp/xpp.html>
18. Engelborghs K., Luzyanina T., Roose D. Numerical bifurcation analysis of delay differential equations using DDE-BIFTOOL // ACM Trans. Math. Software. 2002. Vol. 28, no. 1. Pp. 1–21.
19. Nusinovich G.S. Introduction to the Physics of Gyrotrons. Baltimore, London: The Johns Hopkins University Press, 2004.
20. Бакунин В.Л., Денисов Г.Г., Завольский Н.А., Мусеев М.А. Зоны устойчивой одномодовой генерации в гиротроне со сверхразмерным резонатором // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2012. Т. 20, № 6. С. 67–81.
21. Новожилова Ю.В., Рыскин Н.М., Усачева С.А. Нестационарные процессы в генераторе с запаздывающим отражением от нагрузки // ЖТФ. 2011. Т. 81, № 9. С. 16–22.
22. Lewis S.M., Nanni E.A., Temkin R.J. Direct machining of low-loss THz waveguide components with an RF choke // IEEE Microw. Wireless Comp. Lett. 2014. Vol. 24, no. 12. Pp. 842–844.

References

1. Landa P.S. Nonlinear Oscillations and Waves in Dynamic Systems, Kluwer, Dordrecht, 1996.
2. Pikovsky A., Rosenblum M., Kurths J. Synchronization: A Universal Concept in Nonlinear Science. Cambridge University Press, Cambridge, 2001.
3. Kuznetsov A.P., Kuznetsov S.P., Ryskin N.M. Nonlinear Oscillations. Moscow, Fizmatlit, 2005. 292 p. (in Russian).
4. York R.A., Compton R.C. Quasi-optical power combining using mutually synchronized oscillator arrays. *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, 1991, vol. 39, no. 6, pp. 1000–1009.

5. Glyavin M.Yu., Kulygin M.L. Theoretical and Experimental Investigation of Auto-Modulation Lasing Regimes in Gyrotrons with Delayed Feedback. Selected Papers of the Contest of Young Scientists. Nizhny Novgorod: IAP RAS, 2001, pp. 16–24 (in Russian).
6. Rozental R.M., Ginzburg N.S., Glyavin M.Yu., Sergeev A.S., Zotova I.V. Mutual synchronization of weakly coupled gyrotrons. *Phys. Plasmas*, 2015, vol. 22, no. 9, 093118.
7. Zotova I.V., Ginzburg N.S., Denisov G.G., Rozental R.M., Sergeev A.S. Frequency locking and stabilization regimes in high-power gyrotrons with low-Q resonators. *Radiophysics and Quantum Electronics*, 2015, vol. 58, no. 9, pp. 759–769.
8. Bakunin V.L., Denisov G.G., Novozhilova Yu.V. Zones of frequency locking by an external signal in a multimode gyrotron of a megawatt power level. *Radiophysics and Quantum Electronics*, 2016, vol. 58, no. 12, pp. 999–1011.
9. Yakunina K.A., Kuznetsov A.P., Ryskin N.M. Injection locking of an electronic maser in the hard excitation mode. *Phys. Plasmas*, 2015, vol. 22, no. 11, 113107.
10. Novozhilova Yu.V., Denisov G.G., Glyavin M.Yu., Ryskin N.M., Bakunin V.L., Bogdashov A.A., Melnikova M.M., Fokin A.P. Gyrotron frequency stabilization under the influence of external monochromatic signal or wave reflected from the load: Review. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*, 2017, vol. 25, no. 1, pp. 4–34 (in Russian).
11. Glyavin M.Yu., Denisov G.G., Kulygin M.L., Melnikova M.M., Novozhilova Yu.V., Ryskin N.M. Gyrotron frequency stabilization by a weak reflected wave. *Radiophysics and Quantum Electronics*, 2016, vol. 59, no. 9, pp. 673–683.
12. Sakamoto K. Progress of high-power-gyrotron development for fusion research. *Fusion Sci. Tech.*, 2007, vol. 52, pp. 145–153.
13. Klinshov V.V., Nekorkin V.I. Synchronization of delay-coupled oscillator networks. *Physics–Uspekhi*, 2013, vol. 56, no. 12, pp. 1217–1229.
14. Usacheva S.A., Ryskin N.M. Phase locking of two limit cycle oscillators with delay coupling. *Chaos*, 2014, vol. 24, no. 2, 023123.
15. Adilova A.B., Gerasimova S.A., Ryskin N.M. Bifurcation analyses of mutual synchronization of two oscillators coupled with delay. *Nonlinear Dynamics*, 2017, vol. 13, no. 1, pp. 3–12 (in Russian).
16. Kuznetsov A.P., Stankevich N.V., Turukina L.V. Coupled van der Pol–Duffing oscillators: Phase dynamics and structure of synchronization tongues. *Physica D*, 2009, vol. 238, no. 14, pp. 1203–1215.
17. <http://www.math.pitt.edu/~bard/xpp/xpp.html>
18. Engelborghs K., Luzyanina T., Roose D. Numerical bifurcation analysis of delay differential equations using DDE-BIFTOOL. *ACM Trans. Math. Software*, 2002, vol. 28, no. 1, pp. 1–21.
19. Nusinovich G.S. Introduction to the Physics of Gyrotrons. Baltimore, London, The Johns Hopkins University Press, 2004.
20. Bakunin V.L., Denisov G.G., Zaval'skij N.A., Moiseev M.A. Zones of stable single-mode generation in overmoded gyrotrons. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*, 2012, vol. 20, no. 6, pp. 67–81 (in Russian).
21. Novozhilova Yu.V., Ryskin N.M., Usacheva S.A. Nonstationary processes in an oscillator with delayed reflection from the load. *Technical Physics*, 2011, vol. 56, no. 9, pp. 1235–1242.
22. Lewis S.M., Nanni E.A., Temkin R.J. Direct machining of low-loss THz waveguide components with an RF choke. *IEEE Microw. Wireless Comp. Lett.*, 2014, vol. 24, no. 12, pp. 842–844.



Адилова Асель Булатовна родилась в Новоузенске Саратовской области (1992). Окончила Лицей-интернат естественных наук с золотой медалью (2009) и поступила на факультет нелинейных процессов. Окончила с отличием магистратуру Саратовского государственного университета (2015) и поступила в аспирантуру факультета нелинейных процессов СГУ. Ассистент кафедры нелинейной физики. Автор 6 статей в журналах, входящих в перечень ВАК и Web of Science, участник международных и всероссийских конференций. Лауреат конкурса среди молодых физиков Фонда Зимины «Династия». Стипендиат Правительства РФ.

Россия, 410012 Саратов, Астраханская, 83
Саратовский национальный исследовательский государственный университет
E-mail: AdilovaAB@info.sgu.ru



Рыскин Никита Михайлович окончил физический факультет Саратовского государственного университета (1991). Защитил диссертации на соискание ученой степени кандидата (1996) и доктора физико-математических наук (2005). С 1997 года работает на факультете нелинейных процессов СГУ, профессор, с 2014 года заведующий кафедрой нелинейной физики. С 2013 года работает старшим научным сотрудником Саратовского филиала ИРЭ РАН. Область научных интересов: нелинейная теория колебаний и волн, приборы вакуумной электроники ТГц-диапазона, вакуумная микроэлектроника. Имеет более 200 научных публикаций по указанным выше направлениям.

Россия, 410012 Саратов, Астраханская, 83
Саратовский национальный исследовательский государственный университет
Россия, 410019 Саратов, Зелёная, 38
Саратовский филиал Института радиотехники и электроники им. В.А. Котельникова РАН
E-mail: ryskinm@gmail.com



Нелинейная теория возмущений на основе вариационного принципа: Модельные примеры

В. В. Учайкин¹, В. А. Литвинов²

¹Ульяновский государственный университет,
Россия, 432017 Ульяновск, ул. Л. Толстого, 42

²Барнаульский юридический институт МВД России
Россия, 656038 Барнаул, ул. Чкалова, 49

E-mail: vuchaikin@gmail.com, lva201011@yandex.ru

Автор для переписки Учайкин Владимир Васильевич, vuchaikin@gmail.com

Поступила в редакцию 6.07.2018, принята к публикации 12.09.2018

Тема. Известно, что двойственное представление задач (через основную и сопряженную в смысле Лагранжа функции) позволяет сформулировать эффективную версию теории малых возмущений, однако расширение её области применения путём включения следующих членов ряда теории возмущений резко усложняют процедуру решения. В связи с этим, в ряде работ были предприняты поиски альтернативных подходов. К их числу относится и предложенный В.В.Учайкиным метод вариационного интерполирования (ВИ-метод), использующий не одну, как это имеет место в теории возмущений, а несколько опорных задач с известными решениями. **Цель** – демонстрация особенностей применения ВИ-метода на конкретных примерах и исследование его погрешностей. **Исследуемые модели.** Исследования проводятся на примерах решения нескольких модельных задач теории переноса, в упрощённых постановках представляющих задачи диффузии, переноса нейтронов, заряженных частиц и волн. **Результаты.** Решение параболического уравнения для амплитуды волны рассматривалось в области, где первое приближение теории возмущений неприменимо, тогда как ВИ-метод дал результаты, практически совпадающие с результатами прямого применения разностного метода, хотя для выбранных глубин опорные решения отличались от искомого более чем на порядок, а сложность вычислений ВИ-методом не превысила сложности первого приближения теории возмущений. Аналогичная ситуация обнаружилась и в случае прямого применения ВИ-метода к задаче о прохождении излучения в нерассеивающей среде и в стационарной задаче о диффузии в однородном слое с заданными коэффициентами поглощения σ и диффузии λ . **Обсуждение.** Последняя задача наиболее интересна и наглядна в плане обсуждения, поскольку ведёт к построению топограммы погрешности на плоскости (σ, λ) . При данной постановке задачи искомый функционал есть просто функция двух указанных переменных, однако в более общем (и интересном) случае он может оказаться функционалом от функций, характеризующих зависимость свойств среды от координат.

Ключевые слова: теория возмущений, сопряжённые функции, стационарный функционал.

Образец цитирования: Учайкин В.В., Литвинов В.А. Нелинейная теория возмущений на основе вариационного принципа: Модельные примеры // Изв. вузов. ПНД. 2018. Т. 26, № 6. С. 82–98.
<https://doi.org/10.18500/0869-6632-2018-26-6-82-98>.

Финансовая поддержка. Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 16-01-00556.

Nonlinear perturbation theory based on the variational principle: Model examples

V. V. Uchaikin¹, V. A. Litvinov²

¹Ulyanovsk State University,

42, L. Tolstoy str., 432017 Ulyanovsk, Russia

²Barnaul Law Institute of the Ministry of the Interior of Russia

49, Chkalova str., 656038 Barnaul, Russia

E-mail: vuchaikin@gmail.com, lva201011@yandex.ru

Correspondence should be addressed to Uchaikin Vladimir V., vuchaikin@gmail.com

Received 6.07.2018, accepted for publication 12.09.2018

Topic and aim. It is known that the dual representation of problems (via the basic and conjugate functions in the Lagrange sense) allows us to formulate an effective version of the theory of small perturbations, but expanding its scope by including the next terms in the perturbation theory series sharply complicates the solution procedure. In this regard, a number of works have been undertaken to find alternative approaches. Among them is the method of variational interpolation (VI-method), proposed by V.V. Uchaikin, which uses not one, as it is in the perturbation theory, but several reference problems with known solutions. The purpose of the article is to demonstrate some peculiarities of the method in applications to specific model problems. **Models investigated.** The investigations are carried out on the examples of solving several model problems in the transport theory, in simplified formulations representing diffusion problems, neutron transport, charged particles, and waves. **Results.** The solution of the parabolic equation for the wave amplitude was considered in the region where the first-order approximation of perturbation theory is inapplicable, whereas the VI-method showed results that practically coincide with the results given by the finite-difference method, although for the chosen depths the reference («unperturbed») the desired solution differs by an order of magnitude from the reference ones, and the computation didn't exceed in complexity of the first-order approximation of perturbation theory. A similar situation is observed in the case of the application of the VI-method to the problem of the passage of radiation in a non-scattering medium and in the stationary problem of diffusion in a homogeneous layer with given absorption coefficients σ and diffusion λ . **Discussion.** The latter case is more most interesting and visible for discussion, since it leads to the error topogram on the plane (σ, λ) . In this formulation of the problem, the desired functional is simply a function of the two material variables, but in a more general (and interesting) case it can turn out to be a functional of functions characterizing the space-time dependence of local material properties of the medium.

Key words: perturbation theory, adjoint function, stationary functional.

Reference: Uchaikin V.V., Litvinov V.A. Nonlinear perturbation theory based on the variational principle: Model examples. *Izvestiya VUZ, Applied Nonlinear Dynamics*, 2018, vol. 26, no. 6, pp. 82–98.

<https://doi.org/10.18500/0869-6632-2018-26-6-82-98>

Acknowledgements. The investigation is financially supported by the Russian Foundation for Basic Research № 16-01-00556.

Введение

Важнейшей особенностью применения теории переноса излучений в геофизических задачах является неопределенность (многовариантность) состояния исследуемой области среды (атмосферы, океана, земной коры), в которой распространяется излучение [1]. Особенно это важно в задачах зондирования, решение которых сопровождается проведением большого количества расчетов поля излучения для различных возможных состояний среды. Поскольку каждый из таких расчетов требует обычно больших затрат машинного времени, актуальной является задача извлечения максимума информации при минимальном количестве расчетов. Одним из методов, позволяющих сократить объем проводимых расчетов, является широко известный в теории переноса метод возмущений, пригодный для аппроксимации решения близких задач по результатам решения одной невозмущённой задачи. Иными словами, метод возмущений позволяет получить

информацию о решении задач, «лежащих» в окрестности *одной* точки, представляющей собой невозмущённую задачу в пространстве некоторого класса одностипных задач. В отличие от него, метод вариационного интерполирования (ВИ-метод), предложенный одним из авторов данной статьи (В.В.У.), использует несколько таких точек, называемых *опорными задачами*. Задание уровня приемлемой точности (ПТ) решения поставленной («возмущённой») задачи определяет размеры областей ПТ вокруг каждой из них. По мере сближения этих опорных точек их области ПТ сближаются и с какого-то момента сливаются в одну, обладающую значительно большими размерами, чем в случае отдельных опорных точек. Важно отметить, что алгоритм вычислений при этом не превосходит по сложности соответствующий алгоритм теории малых возмущений.

Цель настоящей работы – разъяснить на конкретных примерах смысл основных понятий и положений ВИ-метода, изложить методику его применения и продемонстрировать достигаемую им точность путём сопоставления с известными аналитическими решениями и данными классических численных методов.

1. Принцип двойственности в линейной теории измерений

Поясним терминологию, используемую в данной работе. Она тесно связана с проблемой измерений, сформулированной в [2], встроенной позднее в аппарат вычислительной математики [3] и ставшей эффективным средством анализа сложных систем [4].

Исследуемый процесс (например, тепло- или массоперенос) характеризуется функцией $f(x)$ (температура, концентрация), где под x понимается совокупность всех переменных (время, координаты и пр.). Функция эта удовлетворяет уравнению

$$Lf(x) = s(x), \quad (1)$$

в котором L – некоторый линейный оператор, а $s(x)$ – плотность источников. Как правило, нас интересует не само решение, зависящее от многих переменных и содержащее часто избыточную информацию, а *то, что измеряется в эксперименте*. Результат измерения определяется свойствами самого поля $f(x)$ и погружённого в него детектора, формализуемого путём введения *локальной функции отклика* $w(x)$. Ограничение классом *аддитивных детекторов* [5] позволяет рассматривать показание детектора J как линейный функционал от решения уравнения (1). В гильбертовом пространстве функций такой функционал записывается в виде скалярного произведения

$$J = (w, f) := \int f(x)w(x)dx, \quad (2)$$

где интегрирование ведётся по всей области определения функций f и w . Принцип двойности, на котором построена теория возмущений в представлении Марчука, гласит, что идентичный результат может быть записан с использованием решения $f^+(x)$ сопряжённого (по Лагранжу) уравнения

$$L^+ f^+(x) = w(x), \quad (3)$$

$$J = (f^+, s). \quad (4)$$

Отметим, что по определению сопряжённых операторов имеет место соотношение

$$(g, Lf) = (L^+ g, f) \quad (5)$$

для любой пары функций $f(x)$ и $g(x)$, а из (4) следует, что значение $f^+(x_0)$ сопряженной функции (называемой также *ценностью*) $f^+(x)$ в точке x_0 равно показанию детектора в поле, созданном единичным дельта-источником $s(x) = \delta(x - x_0)$.

Вся информация о среде, существенная для рассматриваемого процесса, заключена в операторах L, L^+ . В сложных системах решение уравнений (1) и (3) является трудоёмкой задачей. Обратная задача формулируется как определение оператора L по набору известных функционалов J . Собственно говоря, это и есть *задача об измерении*: по экспериментально найденным значениям функционалов J_i определить оператор L . Определение оператора в этом случае означает выбор конкретного оператора из некоторого, определяемого физикой процесса, семейства операторов. В простейшем случае, рассмотренном ещё Марчуком, предполагается параметрическое задание операторов, $L = L(\sigma_1, \dots, \sigma_n)$, когда форма оператора известна и необходимо определить лишь численные значения входящих в неё параметров. В этом случае определить оператор – значит, найти значения параметров σ_i .

Предположим теперь, что из каких-то соображений нам известно, что искомый оператор L близок в некотором смысле к известному оператору L_1 , для которого известны решения основного (f) и сопряжённого (f^+) уравнений (при тех же правых частях), а стало быть, и значение функционала J . Пометим эти характеристики нижним индексом «1» и введём обозначения

$$V_1 = L - L_1, \quad (6)$$

и

$$(V_1)_{11} = (f_1^+, V_1 f_1), \quad (7)$$

тогда формула теории малых возмущений (формула (4.20) книги [3]) запишется в виде

$$J \approx J_1 - (V_1)_{11}. \quad (8)$$

Она выражает (приближённо) значение J через решения f_1 и f_1^+ уравнений (1)–(3) с пробным (опорным) оператором L_1 , что позволяет избежать отдельного решения задачи, оператор которой L близок к L_1 , а воспользоваться готовыми решениями, подставив их в эту формулу. Таково стандартное применение теории возмущений к решению *прямой задачи*. В результате мы получаем континуум решений, соответствующих континууму операторов в окрестности *опорного* (или *невозмущённого*) оператора L_1 . При $L = L_1$ решение получается точным, при $L \neq L_1$ оно получается с ошибкой: чем ближе L к L_1 , тем меньше ошибка $|J - J_1|$. Вокруг опорного оператора (точки в операторном пространстве) образуется некоторая *область приемлемой точности*.

Пусть теперь J – результат измерения, отвечающий оператору L , а J_1 и другие величины с индексом 1 связаны с пробным оператором L_1 , имеющим ту же форму, что и «истинный оператор» L , но другие ($\sigma'_1, \sigma'_2, \dots, \sigma'_n$) значения параметров. Формула (8) связывает истинные параметры σ_i с пробными σ'_i . Представим её в виде

$$J - J_1 \approx -(f_1^+, L f_1) + (f_1^+, L_1 f_1). \quad (9)$$

Истинные параметры входят в J и L , пробные – только в величины с индексом 1. При наличии достаточного количества измеряемых функционалов (отвечающих, например, разным функциям отклика $w_1(x), w_2(x), \dots, w_m(x)$), эта формула позволяет, в принципе, ставить вопрос о вычислении набора параметров σ_i оператора L , то есть, по существу о решении *обратной задачи*. Проблема, однако, заключается в том, что формула (9), будучи лишь первым (линейным) приближением теории возмущений, имеет весьма ограниченную область применимости, а применение высших порядков теории возмущений резко увеличивает вычислительные затраты.

2. Стационарные функционалы

Эффективный метод преодоления этой трудности, названный *вариационным методом интерполирования* (ВИ-методом), был предложен в работе [6] и заключается в использовании стационарной формы представления показаний детектора и не одного, а нескольких опорных операторов. Остановимся на этом подробнее.

С помощью двух линейных функционалов (2) и (4) от решений основного и сопряжённого уравнений можно построить и нелинейные, имеющее то же численное значение, например, билинейный функционал

$$\mathcal{J}(f^+, f) = (w, f) + (f^+, s) - (f^+, Lf). \quad (10)$$

Поскольку f и f^+ суть точные решения основного и сопряжённого уравнений, то, в согласии с записанными выше формулами, функционал (10) численно совпадает со значением J :

$$\mathcal{J}(f^+, f) = J + J - J = J.$$

Заменим теперь f и f^+ в функционале (10) близкими к ним функциями ϕ и ϕ^+ тех же переменных,

$$\mathcal{J}(\phi^+, \phi) = (w, \phi) + (\phi^+, s) - (\phi^+, L\phi), \quad (11)$$

и возьмём первую вариацию функционала (11) по ϕ^+ и ϕ при фиксированных s и w :

$$\delta\mathcal{J}(\phi^+, \phi) = (w, \delta\phi) + (\delta\phi^+, s) - (\delta\phi^+, L\phi) - (\phi^+, L\delta\phi). \quad (12)$$

Воспользуемся в двух последних слагаемых свойством (5) сопряжённых операторов и коммутативностью скалярного произведения в гильбертовом пространстве функций. Заменив после этого ϕ на f , получаем $\delta\mathcal{J} = 0$. Таким образом, на точных решениях уравнений (1) и (3) функционал \mathcal{J} не просто совпадает с искомым показанием детектора J , но он ещё и *стационарен*:

$$\mathcal{J}(f^+, f) \equiv \mathcal{J}(\phi^+, \phi)|_{\phi^+=f^+; \phi=f} = J,$$

и

$$\delta\mathcal{J}(f^+, f) \equiv \delta\mathcal{J}(\phi^+, \phi)|_{\phi^+=f^+; \phi=f} = 0.$$

Вот это представление показания детектора и используется в ВИ-методе.

Отметив опорные операторы и соответствующие им функции индексами, принимающими значения от 1 до n (число опорных операторов), представим входящие в (4) функции в виде линейных суперпозиций решений опорных задач с теми же самыми правыми частями $s(x)$ и $w(x)$,

$$f^+(x) = \sum_{i=1}^n c_i^+ f_i^+(x), \quad f(x) = \sum_{i=1}^n c_i f_i(x), \quad (13)$$

а условия стационарности представим в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial c_i} \mathcal{J} \left(\sum c_i^+ f_i^+, \sum c_i f_i \right) &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial c_i^+} \mathcal{J} \left(\sum c_i^+ f_i^+, \sum c_i f_i \right) &= 0. \end{aligned}$$

Подстановкой (13) приводим их к системе уравнений

$$\sum_{i=1}^n L_{ik} c_i^+ = J_k, \quad \sum_{i=1}^n L_{ki} c_i = J_k, \quad k = 1, 2, \dots, n, \quad (14)$$

где $L_{ij} = L_{ij}(L) = (f_i^+, Lf_j)$. Решая систему (14), подставляя результат в аппроксимации (13) и заменяя ими точные функции f^+ и f в вариационном функционале (4), получаем приближённое (интерполяционное) значение искомого функционала

$$\tilde{J} = \mathcal{J} \left(\sum_{i=1}^n c_i^+ f_i^+(\cdot), \sum_{i=1}^n c_i f_i(\cdot) \right).$$

Билинейная форма – не единственная форма представления стационарного функционала. В ряде случаев предпочтительней оказывается дробно-линейная форма [7]

$$J = (f^+, s)(w, f) / (f^+, Lf),$$

которой мы и будем пользоваться в дальнейшем. Представляя входящие в нее f и f^+ в виде линейных комбинаций опорных решений

$$f = \sum_i c_i f_i, \quad f^+ = \sum_i c_i^+ f_i^+.$$

В результате получим

$$J = \sum_{ij} c_i^+ c_j J_i J_j / \sum_{kl} c_k^+ c_l L_{kl}, \quad (15)$$

где $J_i = (f_i^+, s) = (w, f_i)$, $L_{kl} = (f_k^+, Lf_l)$.

Из условия стационарности, принимающего в этом случае вид

$$\partial J / \partial c_n^+ = \partial J / \partial c_n = 0,$$

вытекают уравнения для постоянных коэффициентов c_i^+ и c_j :

$$\sum_{ij} c_i^+ c_j [J_n L_{ij} - J_j L_{in}] = 0,$$

$$\sum_{ij} c_i^+ c_j [J_n L_{ij} - J_i L_{nj}] = 0.$$

3. Случай двух опорных операторов

Рассмотрим подробнее простейший случай, когда число опорных задач n равно двум. В этом случае

$$c_1^+ / c_2^+ = -(J_1 L_{22} - J_2 L_{21}) / (J_1 L_{12} - J_2 L_{11}),$$

$$c_1 / c_2 = -(J_1 L_{22} - J_2 L_{12}) / (J_1 L_{21} - J_2 L_{11}).$$

Для вычисления входящих сюда матричных элементов оператора L удобно ввести обозначение $V_i = L - L_i$ и воспользоваться билинейностью скалярных произведений, свойством сопряжённости операторов (5) и уравнениями (1)–(4). В частности,

$$L_{11} = (f_1^+, Lf_1) = (f_1^+, (L_i + V_i)f_1) = (f_1^+, L_i f_1) + (f_1^+, V_i f_1) = (f_1^+, L_i f_1) + (f_1^+, V_i f_1),$$

где i мы вольны выбрать по своему усмотрению. Очевидно, выбор $i = 1$ упрощает первое слагаемое $(L_i)_{11} \equiv (f_1^+, L_i f_1)$, превращая его в $(f_1^+, L_1 f_1) = (f_1^+, s) = J_1$.

Следуя этим путём, приходим к общей формуле

$$(L_i)_{kl} = \begin{cases} J_k, & \text{если } i = l, \\ J_l, & \text{если } i = k, \end{cases}$$

приводящей к следующим выражениям для матричных элементов:

$$L_{11} = J_1 + (V_1)_{11},$$

$$L_{12} = J_1 + (V_2)_{12},$$

$$L_{21} = J_2 + (V_1)_{21},$$

$$L_{22} = J_2 + (V_2)_{22}.$$

В итоге, для отношений коэффициентов (от которых только и зависит результат) получаем выражения

$$\begin{aligned} c_1^+/c_2^+ &= -\frac{(J_1(V_2)_{22} - J_2(V_2)_{21})}{(J_1(V_1)_{12} - J_2(V_1)_{11})}, \\ c_1/c_2 &= -\frac{(J_1(V_2)_{22} - J_2(V_2)_{12})}{(J_1(V_1)_{21} - J_2(V_1)_{11})}. \end{aligned} \tag{16}$$

Подставив эти выражения в вытекающую из (15) формулу

$$J = \frac{c_1^+ c_1 J_1 J_1 + c_1^+ c_2 J_1 J_2 + c_2^+ c_1 J_2 J_1 + c_1^+ c_2 J_2 J_2}{c_1^+ c_1 L_{11} + c_1^+ c_2 L_{12} + c_2^+ c_1 L_{21} + c_1^+ c_2 L_{22}}.$$

и обозначив $c_2/c_1 = \varepsilon$ и $c_2^+/c_1^+ = \varepsilon^+$, приходим к окончательному результату в виде

$$J = \frac{J_1^2 + J_2^2 + (\varepsilon + \varepsilon^+) J_1 J_2}{J_1 + (V_1)_{11} + J_2 + (V_2)_{22} + [\varepsilon(J_1 + (V_2)_{12} + \varepsilon^+(J_2 + (V_1)_{21}))]}.$$

Отметим, что для совпадения коэффициентов c_i^+ и c_i достаточно, чтобы матричные элементы (V_1) и (V_2) были симметричными ($(V_i)_{kl} = (V_i)_{lk}$).

Подчеркнем три важные особенности предложенного алгоритма. Во-первых, он реализует в определенном смысле идею интерполяции решения по двум (в общем случае нескольким) известным решениям в области \mathcal{L} , тогда как обычная теория возмущений носит скорее характер экстраполяции (зная решение в одной «точке» L_0 , мы пытаемся распространить его на область \mathcal{L}). Во-вторых, найденное нами решение не только совпадает с $J_1(J_2)$ при $L = L_1(L_2)$, но в окрестностях этих операторов совпадает с результатами теории малых возмущений, построенной около $L_1(L_2)$. Действительно, устремляя V_1 к нулю, получим $\varepsilon^+ \rightarrow 0$ и $\varepsilon \rightarrow 0$, в результате чего приходим к формуле малых возмущений

$$J \approx \frac{J_1^2 + (\varepsilon^+ + \varepsilon) J_1 J_2}{J_1 + (V_1)_{11} + (\varepsilon^+ + \varepsilon) J_2} \approx J_1 - (V_1)_{11}.$$

В-третьих, вычисление входящих в окончательный результат матричных элементов $(V_i)_{kl}$ по сложности расчетов эквивалентно вычислениям в теории малых возмущений, значительно более простым, чем во втором приближении этой теории.

Рассмотрим применение предлагаемого метода к решению простейших задач в четырёх процессах – оптическом, волновом, диффузионном и кинетическом, управляемых соответственно ОДУ первого порядка, параболическим уравнением в частных производных, ОДУ второго порядка и интегральными уравнениями.

4. Дифференциальное уравнение первого порядка (оптическая модель)

Простейшей задачей в этом классе является задача о прохождении частиц (фотонов, нейтронов) через однородный слой толщиной t без рассеяния. Частицы движутся в положительном направлении оси z , падая на левую границу слоя $z = 0$ и выходя через правую $z = t$, на которой расположен детектор, измеряющий число (поток) выходящих частиц J . Число это зависит от произведения толщины слоя на коэффициент ослабления σ , называемого оптической толщиной слоя (если речь идёт о фотонах). Если толщину, принять, например, равной 1, то останется только зависимость от коэффициента ослабления σ , которая имеет известный вид

$$J(\sigma) = e^{-\sigma}.$$

Предположим теперь, что функция $J(\sigma)$ нам не известна, а точнее, её значения известны, скажем, в двух точках σ_1, σ_2 и равны, соответственно, J_1 и J_2 . Определение по этим данным значений функции $J(\sigma)$ в этом промежутке является простейшей задачей интерполяции и в отсутствие иной информации решается линейным алгоритмом

$$\tilde{J}(\sigma) = J_1 + \frac{\sigma - \sigma_1}{\sigma_2 - \sigma_1}(J_2 - J_1), \quad \sigma_1 < \sigma < \sigma_2.$$

Разумеется, вовлечение в процесс новой информации о функции $J(\sigma)$ (например, её значений или значений её производных в других точках) позволяет уточнить алгоритм. Мы здесь тоже привлечём дополнительную информацию, но в несколько иной форме: *будем считать, что J есть линейный функционал от решения $f(z)$ уравнения*

$$L(\sigma)f(z) \equiv \frac{df}{dz} + \sigma f = s(z),$$

имеющий вид

$$J = (w, f) = \int_0^1 w(z)f(z)dz.$$

В соответствии с рассматриваемым процессом

$$s(z) = \delta(z), \quad w(z) = \delta(z - 1).$$

Назовем задачу аппроксимации функционала J как функции параметра σ на отрезке $[\sigma_1, \sigma_2]$ по значениям на его концах *при поставленных условиях задачей А* и продемонстрируем применение ВИ-метода для её решения. Основная и сопряженная функции в этой задаче имеют вид

$$f(z) = e^{-\sigma z}, \quad f^+(z) = e^{-\sigma(1-z)}, \quad 0 \leq z \leq 1.$$

Зависящие от параметра σ опорные операторы удобно выбрать соответствующими граничным точкам рассматриваемого отрезка, длину которого $\sigma_2 - \sigma_1$ обозначим через $2a$, а центральную

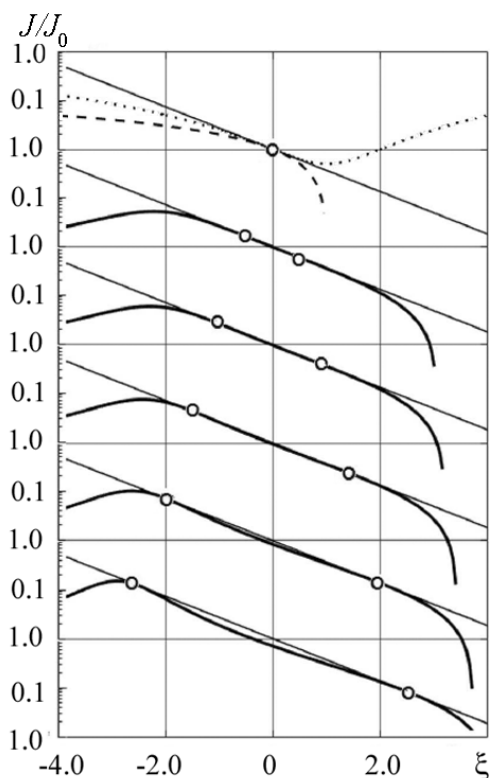


Рис. 1. К задаче А. Тонкие сплошные линии – точное решение; штриховые – первое приближение теории возмущений, точки – второе приближение; жирные линии – результаты ВИ-метода, соответствующие значениям $a=0.5, 1.0, 1.5, 2.0, 2.5$ (сверху вниз); кружочки – значения в опорных точках

Fig. 1. To problem A. Thin solid lines show exact solution, bold solid curves – VI-solutions, dashed line shows the first approximation of the perturbation theory, dotted line relates to second one, open circles are reference cases

точку – через σ_0 . Введя переменную $\xi = \sigma - \sigma_0 \in (-a, +a)$, выразим через неё матричные элементы ВИ-метода:

$$(V_1)_{11} = (\xi + a)J_1, \quad (V_2)_{22} = (\xi - a)J_2,$$

$$(V_1)_{21} = \frac{(\xi + a)}{2a}(J_1 - J_2),$$

$$(V_2)_{12} = \frac{(\xi - a)}{2a}(J_1 - J_2), \quad J_1 = e^a J_0,$$

$$J_2 = e^{-a} J_0, \quad J_0 = e^{-\sigma_0}.$$

Отсюда

$$c_1^+ = c_1 = (\xi - a)[2a - 1 + e^{-2a}],$$

$$c_2^+ = c_2 = (\xi + a)[2a + 1 - e^{2a}].$$

Результаты расчета для $0.5 \leq a \leq 2.5$ приведены на рис. 1. Видно, что вариационный метод позволяет существенно расширить область воспроизведения результата (по сравнению с теорией возмущений): при $a = 1.5$ хорошо вычисляются вариации функционала на порядок в обе стороны, тогда как теория малых возмущений удовлетворительно описывает лишь 10–20-процентные изменения функционала. При больших a ВИ-представление начинает заметно «провисать» в центральной области, фактически приводя к разрыву области приемлемой точности описания решения.

5. Уравнение в частных производных параболического типа (волновая модель)

Рассмотрим применение рассматриваемого метода на модельной задаче, описываемой параболическим уравнением для амплитуды волны электромагнитного излучения [8]. Речь идёт о распространении волн в случайно-неоднородной среде с размерами неоднородностей диэлектрической проницаемости l_ϵ , многократно превышающими длины волн λ . Рассеянные волны в этом случае концентрируются в узком тесном угле с раствором порядка $\lambda/l_\epsilon \ll 1$, то есть практически в том же направлении, что и первичная волна. Пусть такая среда занимает полупространство $z > 0$ и на него падает плоская волна $u = u_0 \exp(ikz)$. В указанных условиях отражённая волна слаба по сравнению с нерассеянной, идущей в начальном направлении. Последнюю представляю в виде

$$u(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}, z) \exp(ikz), \quad \mathbf{x} = (x_1, x_2).$$

Здесь $f(\mathbf{x}, z)$ – амплитуда волны (вообще говоря, комплексная). Подстановка (при указанных условиях) этого выражения в скалярное уравнение Гельмгольца приводит к уравнению

$$2ik \frac{\partial f}{\partial z} + \Delta_\perp f(\mathbf{x}, z) + k^2 \tilde{\epsilon}(\mathbf{x}, z) f = 0, \quad (17)$$

где $k^2 = (\omega/c)^2 \bar{\epsilon}$ – квадрат среднего волнового числа (предполагаем, что $\bar{\epsilon} = \text{const}$), $\tilde{\epsilon} = [\epsilon(\mathbf{r}) - \bar{\epsilon}] / \bar{\epsilon}$ – относительная величина флуктуаций диэлектрической проницаемости, так что $\langle \tilde{\epsilon} \rangle = 0$.

Практически представляет интерес ситуация, когда нельзя пренебречь и дифракционными процессами и поглощением. Для удобства представления дальнейших результатов введем обозначение $2ik\beta(\mathbf{x}, z) \equiv k^2 \tilde{\epsilon}$.

В том случае, когда $\tilde{\epsilon}(\mathbf{x}, z)$ не зависит от поперечной координаты, модуль которой обозначим как ρ , уравнение (17) при граничном условии

$$f(0, \rho) = [2\pi\sigma^2]^{-1} \exp(-\rho^2/2\sigma^2)$$

имеет аналитическое решение

$$f(z, \rho) = [2\pi(\sigma^2 + iz/k)]^{-1} \exp\{-\rho^2/2(\sigma^2 + iz/k)\} \exp\left\{\int_0^z \beta(z') dz'\right\}. \quad (18)$$

Задача В. Пусть нам требуется определить амплитуду поля излучения на плоскости $z = t$. В этом случае $w(z) = \delta(z-t)\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)$ и $J = f(t, \rho_0)$. Введенный выше коэффициент β положим равным

$$\beta(\rho, z) = (5 - 4 \exp(-\rho^2/2\sigma^2))k^{-1}.$$

В том случае, когда $\sigma|d\beta/d\rho|z \ll 1$, можно воспользоваться теорией малых возмущений. В качестве опорного решения выберем решение уравнения (17) при $\beta = \beta_1 = \text{const}$. Сопряженная функция опорного решения имеет вид

$$f^+(z, \rho) = [2\pi i(t-z)/k]^{-1} \exp\{-k(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)^2/2i(t-z)\} \exp\left\{-\int_z^t \beta(z') dz'\right\}. \quad (19)$$

При $\Delta\beta t \geq 1$ теория малых возмущений неприменима. Обратимся к методу вариационного интерполирования. Выберем два опорных решения с $\beta_2 = 1/k$ и $\beta_1 = 5/k$. В этом случае $\beta_1 \leq \beta \leq \beta_2$. Для вычисления амплитуды волны f с заданным β воспользуемся полученными ранее соотношениями (15), (16) и опорными решениями (18) и (19). При вычислении матричных элементов $(V_i)_{kl}$ возникает необходимость численного интегрирования по переменной z . На рис. 2 приведены результаты расчетов ВИ-методом в сравнении с решением уравне-

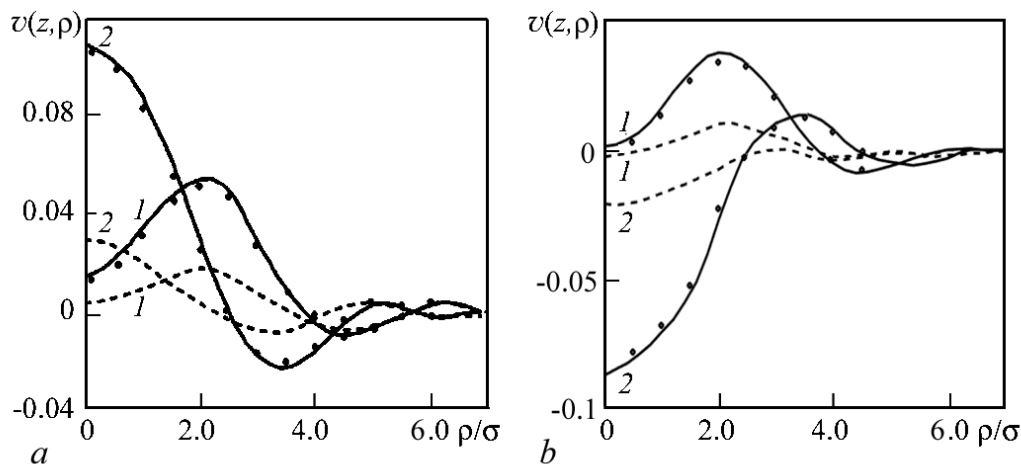


Рис. 2. К задаче В. 1 – $\text{Re } f$, 2 – $\text{Im } f$; сплошные кривые – точные решения разностным методом, точки – результаты ВИ-метода, штриховые – первое приближение теории возмущений; а – $\Delta\beta t = 2.8$; б – $\Delta\beta t = 3.2$

Fig. 2. To problem B. Indices correspond to $\text{Re } f$ 1 and $\text{Im } f$ 2, solid lines correspond to exact solutions, dots – VI-results, dashed lines – to first-order PT results; а – relates to case $\Delta\beta t = 2.8$, б – to case $\Delta\beta t = 3.2$

ния (17) разностным методом с относительной погрешностью менее 0.003. Отметим, что для выбранных глубин опорные решения отличаются более чем на порядок, и, как и предполагалось ранее, теория малых возмущений не описывает выбранное изменение функции $f(z, \rho)$. Данные же вариационного метода интерполирования практически совпадают с решением уравнения (17) разностным методом.

6. Обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка (диффузионная модель)

Обратимся теперь к процессу одномерной стационарной диффузии (назовем её **задачей С**), описываемой обыкновенным дифференциальным уравнением второго порядка.

В слое $(-1, 1)$ бесконечной однородной среды с коэффициентом поглощения диффундирующих частиц σ и коэффициентом диффузии λ равномерно распределён стационарный источник с плотностью $s = 1/2$ (рис. 3). Требуется найти усреднённую по области источника концентрацию диффундирующих частиц. Процесс описывается уравнением диффузии

$$-\lambda f''(x) + \sigma f(x) = s(x), \quad s(x) = \begin{cases} 1/2, & |x| < 1; \\ 0, & |x| > 1, \end{cases}$$

функция Грина которого имеет вид

$$g(x, x') = \frac{1}{2\sqrt{\sigma\lambda}} e^{-\sqrt{\sigma/\lambda}|x-x'|}, \quad -\infty < x < \infty,$$

позволяющий представить основную и сопряжённую функции задачи в аналитическом виде

$$f(x) = f^+(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\sigma} [1 - e^{-\sqrt{\sigma/\lambda} \operatorname{ch}(\sqrt{\sigma/\lambda} x)}], & |x| < 1; \\ \frac{1}{2\sigma} e^{-\sqrt{\sigma/\lambda} |x|} \operatorname{sh}(\sqrt{\sigma/\lambda}), & |x| > 1. \end{cases} \quad (20)$$

Искомый функционал

$$J = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 f(x) dx = \frac{1}{4\sigma} [2 - \sqrt{\lambda/\sigma} (1 - e^{-2\sqrt{\sigma/\lambda}})]. \quad (21)$$

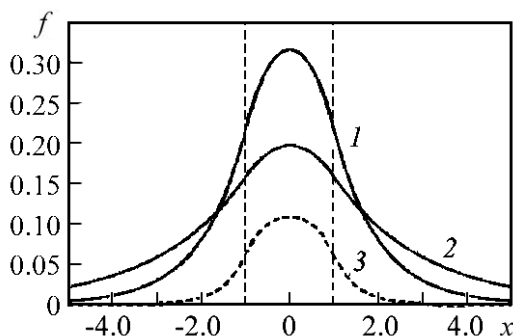


Рис. 3. К задаче С. Основная и сопряжённая (здесь они совпадают) функции (20): 1 – ($\sigma = 1, \lambda = 1$), 2 – ($\sigma = 1, \lambda = 2$), 3 – ($\sigma = 2, \lambda = 1$). Точные значения искомого функционала $J = J(\sigma, \lambda)$ определяются формулой (21)

Fig. 3. To problem C. Curves show the basic and adjoint functions (20) (here its coincide): 1 – ($\sigma = 1, \lambda = 1$), 2 – ($\sigma = 1, \lambda = 2$), 3 – ($\sigma = 2, \lambda = 1$). Exact values $J = J(\sigma, \lambda)$ are defined by the formula (21)

Чтобы установить погрешность вариационной интерполяции в данной задаче, представим $f(x)$ в экспоненциальной форме

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{4\sigma} \left(e^{(|x|+1)\sqrt{\sigma/\lambda}} - e^{(|x|-1)\sqrt{\sigma/\lambda}} \right), & |x| \geq 1, \\ \frac{1}{4\sigma} \left(2 - e^{-(|x|+1)\sqrt{\sigma/\lambda}} - e^{(|x|-1)\sqrt{\sigma/\lambda}} \right), & |x| < 1, \end{cases}$$

найдем отношение f'' к f

$$\frac{f''}{f} = \begin{cases} \frac{\sigma}{\lambda}, & |x| \geq 1, \\ \frac{\sigma}{\lambda} - \frac{2\sigma}{f\lambda}, & |x| < 1, \end{cases}$$

и воспользуемся им для вычисления матричного элемента

$$\begin{aligned} L_{ij} &= (f_i, L f_j) = \int_{-\infty}^{\infty} f_i L f_j dx = \int_{-\infty}^{\infty} f_i \left(-\lambda \frac{d^2}{dx^2} + \sigma \right) f_j dx = \\ &= \left(\sigma - \lambda \frac{\sigma_j}{\lambda_j} \right) \int_{-\infty}^{\infty} f_i f_j dx + \frac{\lambda}{\lambda_j} \int_{-1}^1 f_i dx = \left(\sigma - \lambda \frac{\sigma_j}{\lambda_j} \right) J_{ij} + \frac{\lambda}{\lambda_j} J_i, \end{aligned}$$

где

$$J_{ij} = \begin{cases} \frac{\lambda_i J_i - \lambda_j J_j}{\lambda_i \sigma_j - \lambda_j \sigma_i}, & i \neq j, \\ \frac{3 J_i}{2 \sigma_i} - \frac{1 - e^{-2\sqrt{\sigma_i/\lambda_i}}}{4 \sigma_i}, & i = j. \end{cases}$$

Таким образом, матричный элемент L_{ij} принимает вид

$$\begin{aligned} L_{ij} &= (\sigma_i J_{ij} + J_i) \lambda / \lambda_j + \sigma J_{ij}, \\ J_{ij} &= \begin{cases} \frac{\lambda_i J_i - \lambda_j J_j}{\lambda_i \sigma_j - \lambda_j \sigma_i}, & i \neq j, \\ \frac{3 J_i}{2 \sigma_i} - \frac{1 - e^{-2\sqrt{\sigma_i/\lambda_i}}}{4 \sigma_i}, & i = j. \end{cases} \end{aligned}$$

Линейная зависимость матричных элементов L_{ij} от σ и λ приводит к дробно-полиномиальной форме представления зависимости искомого функционала от σ и λ , что обычно позволяет получить лучшую точность, чем аппроксимация степенным рядом. Например, в рассматриваемом случае вдоль линии $\sigma/\lambda = \text{const}$ достаточно одной опорной точки, чтобы выражение J_i^2/L_{11} точно соответствовало искомому функционалу.

На рис. 4 представлена топограмма интерполяционной погрешности $\varepsilon = \tilde{J} - J$ в случае применения двух опорных операторов с несовпадающими параметрами ($\sigma = 5, \lambda = 1$) и ($\sigma = 1, \lambda = 5$). В некоторой окрестности

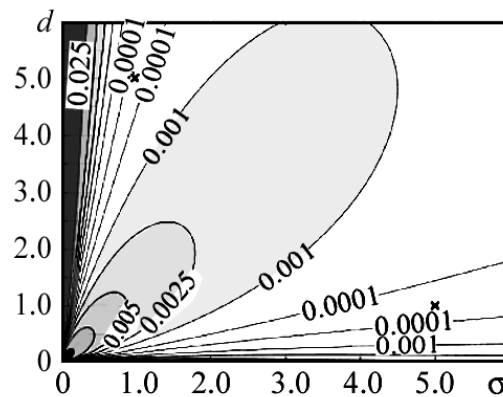


Рис. 4. Линии одинаковой погрешности $\varepsilon = \tilde{J} - J$ в случае двух опорных точек $\sigma = 5, \lambda = 1$ и $\sigma = 1, \lambda = 5$ (отмечены крестиками)

Fig. 4. Iso-error curves in case of two reference points $\sigma = 5, \lambda = 1$ and $\sigma = 1, \lambda = 5$ (marked with small crosses)

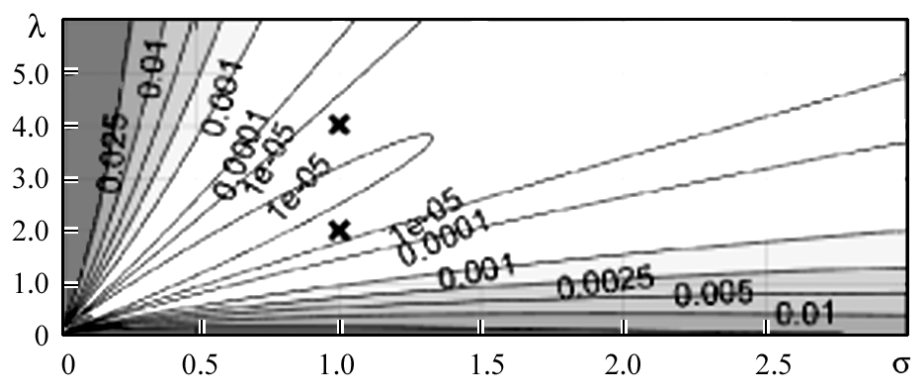


Рис. 5. Линии одинаковой погрешности $\varepsilon = \tilde{J} - J$ в случае двух опорных точек $\sigma = 1, \lambda = 2$ и $\sigma = 1, \lambda = 4$ (отмечены крестиками)

Fig. 5. Iso-error curves in the case of two reference points $\sigma = 1, \lambda = 2$ and $\sigma = 1, \lambda = 4$ (marked with crosses)

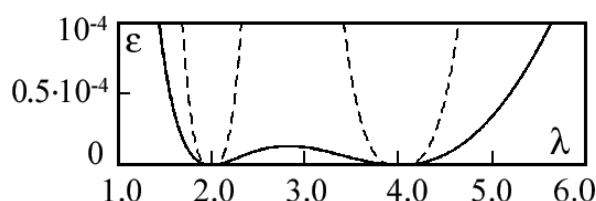


Рис. 6. Погрешность интерполяции $\varepsilon = \tilde{J} - J$ для опорных точек $(\sigma = 1, \lambda = 2)$ и $(\sigma = 1, \lambda = 4)$ вдоль оси λ при $\sigma = 1$. Штриховой линией показана погрешность второго приближения теории возмущений

Fig. 6. Same for reference points $(\sigma = 1, \lambda = 2)$ and $(\sigma = 1, \lambda = 4)$. Dashed curve represent the error of 2nd approximation of perturbation theory

прямых, проходящих через начало координат и опорные точки, аппроксимация оказывается очень точной. Наибольшая погрешность наблюдается, когда хотя бы одна из координат стремится к 0, а также в области между опорными точками. На двух следующих рисунках (рис. 5 и 6) приведены результаты расчёта погрешности в случае однопараметрической интерполяции, когда один из параметров двухпараметрической модели совпадает.

7. Интегральное уравнение Вольтерры (кинетическая модель)

В основе кинетической модели физических процессов переноса лежит концепция столкновений, в рамках которой влияние сближающихся друг с другом микрочастиц (атомов, ионов, фотонов и электронов) проявляется в мгновенном скачкообразном изменении их импульсов, описываемом интегральным членом кинетических уравнений. Простейшим примером такого типа является стационарная задача о *равновесном энергетическом спектре* частиц¹ с заданной индикатрисой рассеяния в однородной безграничной среде [10]. Единственной характеристикой частицы является здесь её энергия E , а дифференциальный энергетический спектр их $f(E)$ определяется спектром источника $s(E)$ с максимальной энергией E_0 , сечением взаимодействия $\sigma(E)$ и индикатрисой рассеяния $K(E, E')$. Последняя равна плотности вероятности иметь рассеянной частице энергию E при условии, что до рассеяния она имела энергию E' ($E < E'$). Три этих функции связаны уравнением баланса, имеющего в данном случае вид интегрального

¹Не очень точный, хотя и популярный термин. Правильнее звучит *задача о деградации энергии*, потому что в строгом (термодинамическом) смысле никакого равновесия здесь нет.

уравнения Вольтерры второго рода:

$$Lf(E) \equiv \sigma(E)f(E) - \int_E^{E_0} \sigma(E')K(E', E)f(E')dE' = s(E). \quad (22)$$

Если при этом искомая величина представляется в виде

$$J = \int_0^{E_0} w(E)f(E)dE = (w, f),$$

то её можно выразить через сопряжённую функцию $f^+(E)$,

$$J = \int_0^{E_0} f^+(E)s(E)dE = (f^+, s),$$

удовлетворяющую уравнению

$$L^+f(E) \equiv \sigma(E)f^+(E) - \sigma(E) \int_{E_1}^E K(E, E')f^+(E')dE',$$

где E_1 пороговая энергия детектора, то-есть, энергия частиц, ниже которой он на них уже не реагирует. При $\sigma(E) = 1$, $K(E', E) = \alpha(E/E')^{\alpha-2}/E'$ и $s(E) = \delta(E - E_0)$ уравнения для $f(E)$ и $f^+(E)$ имеют простые аналитические решения, получаемые при помощи преобразования Меллина:

$$f(E) = \alpha E_0/E^2 + \delta(E - E_0). \quad (23)$$

Пусть детектор выполняет спектральные измерения, то-есть, измеряет поток частиц с энергией, скажем, E_1 . При такой постановке задачи функция отклика детектора $w(E) = \delta(E - E_1)$, функционал $J = f(E_1)$, а сопряженная функция $f^+(E)$ удовлетворяет уравнению

$$f^+(E) - \int_{E_1}^E K(E, E')f^+(E')dE' = \delta(E - E_1),$$

решение которого

$$f^+(E) = \alpha E/E_1^2 + \delta(E - E_1), \quad E \geq E_1. \quad (24)$$

Соответственно, выражение для функционала (при $E_0 \neq E_1$) имеет вид:

$$J = (f, w) = (f^+, s) = \alpha E_0/E_1^2. \quad (25)$$

Полагая в выражениях (23)–(25) $\alpha = \alpha_i$, получим набор опорных решений. Для возмущенной задачи в уравнении (22) полагаем $\sigma(E)$ и $\alpha \neq \alpha_j$:

$$\sigma(E)f(E) - \int_E^{E_0} \sigma(E')K(E', E)f(E')dE' = s(E). \quad (26)$$

Если положить $\sigma(E) = \sigma_0(E/E_0)^\beta$, то решение данного уравнения получается из (23) простым делением на $\sigma(E)$:

$$f(E) = \frac{1}{\sigma_0} \left[\frac{\alpha}{E} \left(\frac{E_0}{E} \right)^{\beta+1} + \delta(E - E_0) \right],$$

которой соответствует значение функционала при $E_1 < E_0$

$$J = \frac{\alpha}{\sigma_0} \left(\frac{E_0}{E_1} \right)^{1+\beta} \frac{1}{E_1}. \quad (27)$$

Вычислим матричные элементы L_{ij} для оператора L , соответствующего уравнению (26).

$$L_{ij} = \sigma_0(E_0/E_1)^{1-\beta} \left[\alpha_j(\alpha_i - \beta) - (E_0/E_1)^{\beta-\alpha} ((\alpha - \alpha_j)(\alpha - \alpha_i) - \beta(\alpha - \alpha_i)) \right] / ((\alpha - \beta)E_1). \quad (28)$$

Полагая в (25) $\alpha = \alpha_1$ и $\alpha = \alpha_2$ и решая систему двух линейных уравнений для для коэффициентов c_j с использованием приведённых выше матричных элементов, получим:

$$c_1 = ((\alpha - \alpha_2 - \beta)(E_0/E_1)^\beta + \beta\alpha_2(E_0/E_1)^\alpha) / (\sigma_0 E_1 (\alpha_1 - \alpha_2)(\alpha - \beta))$$

$$c_2 = -((\alpha - \alpha_1 - \beta)(E_0/E_1)^\beta + \alpha_1\beta(E_0/E_1)^\alpha) / (\sigma_0 E_1 (\alpha_1 - \alpha_2)(\alpha - \beta)).$$

Используя данные выражения для коэффициентов c_1 и c_2 совместно с опорными значениями функционала (25), получим ВИ-представление возмущенной задачи:

$$\tilde{J} = c_1 J_1 + c_2 J_2 = \frac{\alpha}{\sigma_0} \frac{E_0}{E_1^2} (E_0/E_1)^\beta.$$

ВИ-представление, приближённое по своему характеру и лежащим в его основе положениям, полностью совпадает с точным решением (27)! Впрочем, полученный результат ожидаем. Несмотря на то, что варьируемые параметры α , β и σ_0 нелинейно входят в оператор L , зависимость искомого функционала от α и $\sigma(E)$ представима в виде дроби. Такие зависимости при помощи ВИ-представления описываются точно, что и подтверждает рассмотренный пример.

Заключение

В работе продемонстрировано применение метода вариационного интерполирования к нескольким задачам переноса частиц и излучений. Несмотря на существенно различающиеся виды функционального поведения решений, применение метода вариационного интерполирования позволило описать с приемлемой точностью область значений функционалов, соответствующую его изменениям на порядки. Это однозначно показывает его преимущество перед первым приближением классической теории возмущений при сравнимых вычислительных затратах.

В том случае, когда оператор «возмущенной» задачи отличается от опорных операторов лишь численными значениями некоторого набора параметров, вариационное представление является функцией этих параметров. Такое представление сводит задачу определения значений этих параметров к решению системы алгебраических уравнений.

Точная оценка погрешностей рассматриваемого метода требует дополнительных исследований, особенно когда «возмущенный» оператор отличается от опорных функциональным видом. В том случае, когда оператор L допускает параметризацию, вопрос оценки погрешности

ВИ-представления сводится к оценке точности дробно-полиномиальной аппроксимации многомерных функций [9]. Дробно-полиномиальная аппроксимация широко применяется в вычислительной технике, как средство, позволяющее получить большую точность при малых временных затратах.

В то же время относительная простота метода вариационного интерполирования и полученные в работе результаты позволяют надеяться получать достаточную точность в широкой области изменения варьируемого параметра, соответствующего изменению изучаемого функционала в несколько раз. Данное заключение основывается на возможности при помощи вариационного интерполирования точно представлять и нелинейные зависимости, о чем свидетельствует два последних рассмотренных примера.

На данном этапе исследований авторы не могут предложить универсального способа оптимального выбора опорных задач как и прогнозирования оценки точности метода вариационного интерполирования. Целью этой статьи было обратить внимание на позитивные стороны предлагаемого метода, его оригинальность и тесную неформальную связь с динамикой процесса, обусловленную использованием описывающих процесс уравнений.

Библиографический список

1. Snider R., Trampert J. Inverse problems in geophysics // In Wavefield Inversion (ed. A. Wirgin), Springer-Verlag Wien, 1999.
2. Марчук Г.И., Дробышев Ю.П. Некоторые вопросы линейной теории измерений. Автометрия. 1977, № 3. С. 24–30.
3. Марчук Г.И. Методы вычислительной математики. М.: Наука, 1977.
4. Марчук Г.И. Сопряженные уравнения и анализ сложных систем. М.: Наука, 1992. 335 с.
5. Учайкин В.В., Лагутин А.А. Стохастическая ценность. М.: Энергоатомиздат, 1993.
6. Учайкин В.В. Метод вариационного интерполирования в ядерно-технических расчётах // Атомная энергия. 1989. Т. 61, № 1. С. 54–55.
7. Марчук Г.И., Орлов В.В. К теории сопряжённых функций, Сб. Нейтронная физика. М.: Госатомиздат, 1961. 30–45.
8. Рытов С.М., Кравцов Ю.А., Татарский В.И. Введение в статистическую радиофизику. Часть 2. М.: Наука, 1978.
9. Петрак Л.В. Дробно-рациональная аппроксимация функций и приложения: Дисс. канд. физ.-мат. наук. Екатеринбург, 2004. 123 с.
10. Кольчужкин А.М., Учайкин В.В. Введение в теорию прохождения частиц через вещество. Moscow, Атомиздат, 1978. 256 с.

References

1. Snider R., Trampert J. Inverse Problems in Geophysics. In Wavefield Inversion (ed. A. Wirgin), Springer-Verlag Wien, 1999.
2. Marchuk G.I., Drobishev I.P. Some issues of the linear measurement theory. Moscow, Avtometrija, 1977, no. 3, pp. 24–30 (in Russian).
3. Marchuk G.I. Methods of Computational Mathematics. Moscow, Fizmatlit, Nauka, 1977 (in Russian).
4. Marchuk G.I. Adjoint Equations and Analysis of Complex Systems. Moscow, Nauka, 1992 (in Russian).

5. Uchaikin V.V., Lagutin A.A. Stochastic Importance. Moscow, Energoatomizdat, 1993 (in Russian).
6. Uchaikin V.V. Method of variational interpolation in nuclear technical calculations. *Atomic Energy*, 1989, vol. 61, no. 1, pp. 54–55 (in Russian).
7. Marchuk G.I., Orlov V.V. On the theory of conjugate functions. Sb. Neutron physics. Moscow, Gosatomizdat, 1961, 30–45 (in Russian).
8. Rytov S.M., Kravtsov Yu.A., Tatarsky V.I. Introduction into Statistical Radiophysics. Part 2. Moscow, Nauka, 1978 (in Russian).
9. Petrak L.V. Fractional-rational Approximation of Functions and Applications. Ekaterinburg, 2004. 123 p. (in Russian).
10. Kolchuzhkin A.M., Uchaikin V.V., Introduction into Theory of Particle Propagation through the Matter. Moscow, Atomizdat, 1978 (in Russian).



Учайкин Владимир Васильевич – родился в Барнауле (1941), окончил Томский политехнический институт (1964). Защитил кандидатскую диссертацию (НИИ АР, Мелекес, 1969) и докторскую диссертацию (Новосибирск, Институт вычислительной математики и математической геофизики СО АН СССР, 1989). Автор (соавтор) более 400 научных работ, в числе которых 7 монографий, опубликованных крупнейшими зарубежными научными издательствами (Springer, World Scientific и др.), учебного пособия с грифом Минвуза и уникального учебника по механике с грифом УМО России, статей по проблемам науки и образования, научно-популярных статей. Заслуженный работник высшей школы (2002). Заслуженный деятель науки и техники Ульяновской области (2013). Ветеран труда. Почетный гражданин Ульяновской области.

Россия, 432017 Ульяновск, ул. Л. Толстого, 42
 Ульяновский государственный университет
 E-mail: vuchaikin@gmail.com



Литвинов Владимир Андреевич – родился в Павловске Алтайского края (1957). Окончил физический факультет Алтайского государственного университета (1979), аспирантуру в Томском политехническом институте и защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук (1984). Преподавал в Алтайском государственном университете, заведовал кафедрой в Барнаульском юридическом институте. Автор (соавтор) более 80 научных работ и такого же количества учебно-методических изданий, среди которых две монографии, два учебных пособия, имеющих гриф Минобрнауки. Среди научных статей работы в области физики космических лучей, геофизики, информационных технологий, педагогики. Ветеран труда, награжден медалью ордена «За заслуги перед Отечеством II степени» и рядом ведомственных наград.

Россия, 656038 Барнаул, ул. Чкалова, 49
 Барнаульский юридический институт МВД России
 E-mail: lva201011@yandex.ru



УДК 621.38.01:53(075)
+517.2/.3(075)+53:51(075)

<https://doi.org/10.18500/0869-6632-2018-26-6-99-101>

Радиофизика и нелинейная динамика

Учебное пособие

В. С. Анищенко, Г. И. Стрелкова

© В.С. Анищенко, Г.И. Стрелкова, 2017

© НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», Москва & Ижевск, 2017

ISBN 978-5-4344-0467-9

В учебном пособии изложены основные вопросы и проблемы, которые изучаются студентами физических факультетов в рамках направления подготовки по специальности «Радиофизика». Пособие включает две части: радиофизика и нелинейная динамика. Материал пособия излагается по возможности наиболее просто и понятно и не требует знаний физики и математики, выходящих за рамки программ средней школы.

Пособие ориентировано на выпускников средних школ и студентов первого курса физических факультетов и преследует цель в доступной форме ознакомить их с содержанием радиофизики.

Рецензент: доктор физико-математических наук, профессор Т.Е. Вадивасова, Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н.Г. Чернышевского

Рекомендует к печати: кафедра радиофизики и нелинейной динамики физического факультета Саратовского национального исследовательского государственного университета имени Н.Г. Чернышевского

Оглавление

Предисловие

ГЛАВА 1. Радиофизика

- 1.1. Введение
- 1.2. Классические научные проблемы радиофизики
- 1.3. Нелинейность
- 1.4. Спектральное представление колебательных процессов
- 1.5. Генерация колебаний
- 1.6. Модуляция высокочастотных колебаний
- 1.7. Детектирование модулированных колебаний
- 1.8. Резонанс в линейном контуре
- 1.9. Резонанс в нелинейном контуре

- 1.10. Параметрический резонанс
- 1.11. Радиоп физика в нашей жизни

ГЛАВА 2. Нелинейная динамика

- 2.1. Динамические системы
- 2.2. Устойчивость, бифуркации и катастрофы
- 2.3. Динамический хаос
- 2.4. Фракталы
 - 2.4.1. Понятие фрактала.
 - 2.4.2. Применение теории фракталов.
 - 2.4.3. Примеры фрактальных множеств
- 2.5. Синхронизация периодических автоколебаний

Заключение

Предисловие

Настоящее учебное пособие имеет целью знакомство с основными понятиями и проблемами, составляющими предмет изучения по направлению «Радиоп физика» при подготовке бакалавров на физических факультетах университетов. Книга ориентирована на выпускников средних школ, перед которыми стоит задача выбора специальности при поступлении в высшее учебное заведение. Авторы выражают надежду, что настоящая книга поможет абитуриентам более осознанно остановить свой выбор на направлении «Радиоп физика» и более конкретно подойти к выбору соответствующего профиля подготовки в рамках этого направления. Если раньше, до введения в вузах страны бакалавриата, у студентов специальности «Радиоп физика» после 2-го курса имелась возможность выбора специализации подготовки, то у бакалавров такой возможности нет. При поступлении абитуриент должен выбрать конкретный профиль подготовки по направлению «Радиоп физика» и обучаться по учебному плану этого профиля. В связи с этим выбор направления и профиля подготовки является чрезвычайно важным и ответственным решением, которое должен принять абитуриент. Вашему вниманию предлагается учебное пособие «Радиоп физика и нелинейная динамика», в котором в наиболее доступной форме излагаются основные вопросы и проблемы, изучаемые студентами университетов в рамках подготовки бакалавров по направлению «Радиоп физика». Излагаются ключевые проблемы радиоп физики, которые являются общими для ряда профилей подготовки по направлению «Радиоп физика».

Книга включает две части: радиоп физика и нелинейная динамика.

В первой части на примере классической системы радиосвязи иллюстрируются практически все фундаментально-научные и технические аспекты радиоп физической науки. Рассматриваются проблемы генерации и модуляции электромагнитных колебаний, усиления, излучения радиосигналов и их детектирования с целью выделения сигналов, несущих информацию. Описываются примеры практического использования радиоп физики в науке и технике. При изложении материала авторы не используют знаний физики и математики, выходящих за рамки школьной программы.

Вторая часть пособия посвящена описанию задач и методов, которые относятся к достаточно новому научному направлению – нелинейной динамике. Современная наука имеет дело в основном с анализом нелинейных процессов и систем. Исследования нелинейных явлений требуют широкого спектра знаний, которые позволяют решать и анализировать нелинейные задачи. Классические методы нелинейной динамики традиционно входили в круг проблем радиоп физики и изучались в рамках теории нелинейных колебаний. Однако в связи с внедрением современной

вычислительной техники и разработкой новых алгоритмов и программ нелинейная динамика в настоящее время сформировалась как самостоятельное научное направление. В этой части пособия даются понятие и определение динамической системы, описывается и иллюстрируется фундаментальное свойство нелинейности, дается представление об устойчивости колебательных и стационарных режимов и их бифуркаций. Описывается явление детерминированного хаоса и приводятся сведения из теории фракталов. В последнем разделе второй главы обсуждается одна из классических задач нелинейной динамики – задача о внешней синхронизации автоколебаний в генераторе ван дер Поля. Несмотря на усилия авторов изложить материал второй части пособия наиболее просто и понятно, чтение ряда ее разделов потребует более углубленных знаний по математике, которые излагаются в школах с физико-математической направленностью.

Несколько слов о создании этой книги. Пособие написано на основе курса лекций по введению в специальность «Радиофизика», который на протяжении трех десятков лет читается на кафедре радиофизики и нелинейной динамики в Саратовском национальном исследовательском государственном университете имени Н.Г. Чернышевского. Отметим, что несмотря на то, что подготовка студентов по радиофизике в нашей стране успешно ведется уже более шестидесяти лет, учебной литературы подобного типа практически нет. Есть огромное количество научных статей, научных монографий и диссертаций. Но научно-популярного изложения основ содержания радиофизической науки практически не проводилось. Этот пробел отчасти восполнялся трудами сотрудников кафедры радиофизики и нелинейной динамики Саратовского университета. Отметим учебное пособие Г.И. Герштейна «Введение в специальность. Радиофизика» (Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 1983), а также книгу В.С. Анищенко «Знакомство с нелинейной динамикой» (Москва–Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2002). К сожалению, указанные книги являются практически недоступными, так как представляют собой библиографическую редкость.

При подготовке настоящей книги были использованы как вышеуказанные издания, так и учебное пособие доцента кафедры радиофизики и нелинейной динамики СГУ Г.И. Стрелковой «Практикум по динамике дискретных систем» (Саратов: ООО Изд. центр «Наука», 2012).

В заключение авторы хотели бы выразить глубокую благодарность коллективу кафедры за обсуждение и замечания. Мы благодарны также аспиранту кафедры А.В. Буху за помощь при подготовке иллюстраций к книге.

Саратов, октябрь 2017

*профессор В.С. Анищенко,
доцент Г.И. Стрелкова*

Научное издание

Зав. редакцией *Н.Н. Левина*
Редакторы *Н.Н. Левина, Л.А. Сидорова*
Оформление художника *Д.В. Соколова*
Оригинал-макет подготовлен
И.А. Пономаревой, О.Н. Строгановой
в пакете $L^A T_E X$

Подписка на 2019 год
осуществляется по Объединенному Каталогу «Пресса России»
Раздел: 30. «Научно-технические издания.
Известия РАН. Известия ВУЗов»
и по Интернет-Каталогу Агентства «Книга-Сервис»,
а также по Договору между Подписчиком
(юридическим или физическим лицом)
и Издателем (Саратовским государственным университетом)

Цена годовой подписки (6 номеров) договорная
Заявки на заключение Договора принимаются
Редакционно-издательским отделом журнала:
по почте, по телефону, по эл. почте

Адрес РИО журнала «Известия вузов. ПНД»:
Россия, 410012 Саратов, Астраханская, 83
Тел./факс: (845-2) 52-38-64
E-mail: and@nonlin.sgu.ru

Сайт журнала <http://andjournal.sgu.ru>

Распространение журнала осуществляется
РИО журнала по адресной системе

**Условия подписки на электронную версию журнала на сайте
Научной электронной библиотеки <http://elibrary.ru>**

Сдано в набор 10.12.2018. Подписано к печати 28.12.2018
Формат 70x108/16. Бумага офсетная. Печать офсетная
Усл. печ. л. 8,90 (6,4). Уч.-изд. л. 8,0. Заказ № 1–Т.

Отпечатано в Типографии ФГБОУ ВО СНИГУ
Россия, 410012 Саратов, Б.Казачья, 112А, тел. (845-2) 27-33-85