

Журнал включен в «Перечень периодических научных и научно-технических изданий РФ, рекомендованных для публикации основных результатов диссертаций на соискание ученой степени доктора наук»

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Известия высших учебных заведений

ПРИКЛАДНАЯ НЕЛИНЕЙНАЯ ДИНАМИКА

научно-технический журнал

издается с 1993 года

Выходит 6 раз в год

Том 25, № 5, 2017, Саратов

СО Д Е Р Ж А Н И Е

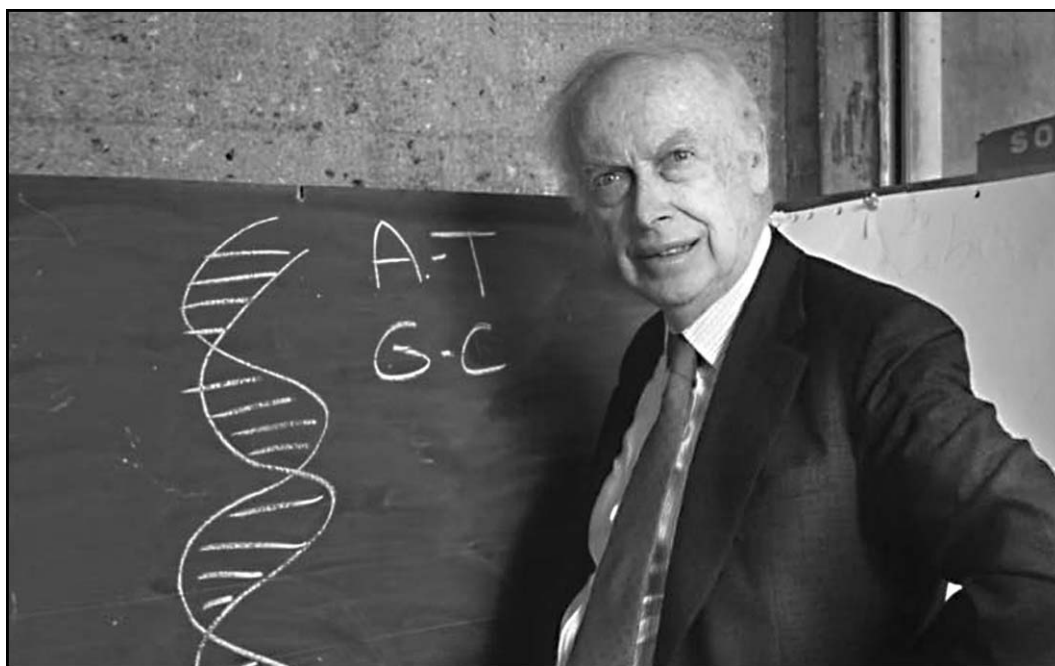
От редактора. <i>Гуляев Ю.В.</i>	3
ПРИКЛАДНЫЕ ЗАДАЧИ НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ КОЛЕБАНИЙ И ВОЛН	
<i>Серых И.В., Сонечкин Д.М.</i> Хаос и порядок в атмосферной динамике: Часть 2. Междугодовые ритмы Эль-Ниньо–Южного колебания	5
<i>Колоскова А. Д.</i> Определение степени синхронности перемежающейся фазовой синхронизации по данным электроэнцефалограмм лабораторных животных	26
НОВОЕ В ПРИКЛАДНОЙ ФИЗИКЕ	
<i>Торгашов Р. А., Бенедик А. И., Рыскин Н. М.</i> Исследование миниатюрного низко- вольтного генератора обратной волны миллиметрового диапазона с пла- нарной замедляющей системой	35
<i>Грачев А. А., Садовников А. В.</i> Управление спектром электромагнитных спино- вых волн в гетероструктуре на основе латеральной системы магнитных микроволноводов	47
<i>Одинцов С. А., Садовников А. В.</i> Нелинейная динамика спиновых волн в лате- ральных магнитных микроволноводах	56
НЕЛИНЕЙНАЯ ДИНАМИКА В ЛИЦАХ. ИСТОРИЯ. PERSONALIA	
<i>Богатов Е.М., Мухин Р.Р.</i> Метод усреднения, маятник с вибрирующим под- весом: Н.Н. Боголюбов, А. Стефенсон, П.Л. Капица и другие.	69

C O N T E N T S

Editorial. <i>Gulyaev Yu.V.</i>	3
APPLIED PROBLEMS OF NONLINEAR OSCILLATION AND WAVE THEORY	
<i>Serykh I.V., Sonechkin D.M.</i> Chaos and order in atmospheric dynamics: Part 2. Interannual rhythms of the El Niño–Southern oscillation	5
<i>Koloskova A.D.</i> Determining of the intermittent phase synchronization degree from neurophysiological data of laboratory animals	26
INNOVATIONS IN APPLIED PHYSICS	
<i>Torgashov R. A., Benedik A. I., Ryskin N. M.</i> Study of miniaturized low-voltage back- ward-wave oscillator with a planar slow-wave structure	35
<i>Grachev A. A., Sadovnikov A. V.</i> Control of the electromagnetic spin waves spectrum in a heterostructure based on the lateral system of magnetic microwaveguides	47
<i>Odintsov S. A., Sadovnikov A. V.</i> Nonlinear dynamics of spin waves in lateral magnetic microwaveguides	56
HISTORY OF NONLINEAR DYNAMICS. PERSONALIA	
<i>Bogatov E.M., Mukhin R.R.</i> The averaging method, a pendulum with a vibrating suspension: N.N. Bogolyubov, A. Stephenson, P.L. Kapitza and others.	69

От редактора

Недавно прочитал книгу «Избегайте занудства. Уроки жизни, прожитой в науке», автор которой знаменитый биолог Джеймс Уотсон. Он прославился тем, что в 1953 году открыл (вместе с физиком Френсисом Криком) структуру ДНК. За это Джеймс Уотсон, Френсис Крик и Морис Уилкинс в 1962 году получили Нобелевскую премию. Они установили, что ДНК имеет структуру двойной спирали. Именно такое строение позволяет делиться нашим клеткам, сохранять и передавать генетическую информацию. Следует заметить, что первую рентгенограмму ДНК, ставшую основой для построения знаменитой двойной спирали, получила Розалинд Франклин, которая погибла от рака в 1958 году до вручения Нобелевской премии. Крик и Уилкинс скончались в 2004 году.



Джеймс Уотсон на лекции «70 нескучных лет в науке» в Институте биоорганической химии РАН. 14 июля 2008, Москва

Уотсон, несмотря на преклонный возраст (ему 89 лет), продолжает заниматься научной работой, ездит по миру с лекциями. В 2008 году он выступал в Москве в Институте биоорганической химии РАН с лекцией «70 нескучных лет в науке». Следуя своей книге, он дал советы, которые могут пригодиться каждому из нас. Вот некоторые из них.

1. «Избегайте драк с теми, кто выше ростом, и с собаками. Иными словами, не ввязывайтесь в те дела, в которых заведомо не победить, то есть не стоит тратить время, силы и нервы, чтобы в итоге заработать разочарование».

2. «Следуйте лишь тем советам, которые продиктованы опытом, а не откровением». Уотсон в своей лекции отметил: «Меня всегда окружали люди, которых я считал умнее себя. И я был счастлив: им можно задать вопрос, и они ответят».

3. «Не стесняйтесь обращаться за помощью».

4. «Читайте книги, как можно больше». И еще одна цитата из его московской лекции. «Я много читал, как и мои родители. Любил Достоевского, Толстого, Тургенева. В школе мы читали такие книги больше, чем учебники. Это был особый тип образования. А потом я убедился: великие книги порождают новые идеи. Когда я попытался проанализировать причину своего успеха, то понял, что это – знания. Конечно, для прорывов нужны идеи, но их базис, фундамент – именно знания. А для того, чтобы получить знания, нужно читать как можно больше. Сейчас я провожу за книгами не меньше трех-четырёх часов в день».

«Кстати, нейробиологи поясняют, чтение художественной, исторической, научно-документальной и другой литературы, которая заставляет нас размышлять, анализировать, напрягать воображение, по сути, служит тренировкой, помогающей держать мозг в тонусе и замедлять его старение».

5. «Знать *почему* (идея) важнее, чем выучить *что* (факт)».

«Думать, анализировать, работать с фактами, а не запоминать или описывать – это главное и в учебе, и в работе. Помните, что идея всегда важнее факта».

Уотсон был первым директором Национального центра исследований человеческого генома (США) и возглавил знаменитый проект «Геном человека».

Читателям нашего журнала стоит следовать советам этого замечательного человека.

Научный руководитель ИРЭ РАН,
академик РАН

Ю.В. Гуляев



ХАОС И ПОРЯДОК В АТМОСФЕРНОЙ ДИНАМИКЕ

Часть 2. Междугодовые ритмы Эль-Ниньо – Южного колебания

И. В. Серых¹, Д. М. Сонечкин^{1,2}

¹Институт океанологии им. П.П. Ширшова РАН
117997 Москва, Нахимовский проспект д. 36

²Гидрометеорологический научно-исследовательский центр России
123242 Москва, Большой Предтеченский пер., 11-13
E-mail: iserykh@ocean.ru, dsonech@ocean.ru

Поступила в редакцию 19.05.2017

Основываясь на математической теории о так называемом странном нехаотическом аттракторе в квазипериодически форсированных динамических системах, по данным о температуре поверхности океана и атмосферном давлении на уровне моря за 1870–2014 годы исследованы процессы Эль-Ниньо – Южного колебания (ЭНЮК). Обнаружено, что на ЭНЮК влияет не только годовой ход притока тепла от Солнца к климатической системе, но еще три другие внешние силы, периоды которых несоизмеримы с годовым периодом. Эти силы связаны с лунно-солнечной нутацией оси вращения Земли (приблизительный период 18.6 года), 11-летним циклом солнечной активности и чандлеровским колебанием полюсов Земли (период около 1.2 года). Из-за взаимной несоизмеримости периодов этих сил, все они воздействуют на климатическую систему в «неподходящие» моменты времени. В результате временные индексы, представляющие процессы ЭНЮК, выглядят очень сложными («странными» в математических терминах), но не хаотичными. Показано, что энергетические спектры индексов ЭНЮК имеют полосы повышенной спектральной плотности, расположенные на суб- и супергармониках вышеперечисленных периодов. На основе специальных рассмотрений структуры энергетических спектров индексов ЭНЮК получено свидетельство их дискретности, то есть нехаотичности. Этого ранее никто не предполагал. Несмотря на сложность процессов ЭНЮК, динамика временных индексов этих процессов обнаруживает определенную внутреннюю согласованность, похожую на ту, что присуща странным нехаотическим аттракторам. Эта согласованность проявляется в существовании пиков в энергетических спектрах и соответствующих этим пикам ритмов в динамике индексов ЭНЮК. Принятие модели странного нехаотического аттрактора для ЭНЮК означает, что нет никаких пределов предсказуемости ЭНЮК в принципе. На практике это открывает возможность прогнозировать ЭНЮК на несколько лет вперед.

Ключевые слова: Энергетические спектры Эль-Ниньо – Южного Колебания, квазипериодичность внешних воздействий на климатическую систему, чандлеровское колебание, лунно-солнечная нутация, солнечная активность, странный нехаотический аттрактор.

DOI: 10.18500/0869-6632-2017-25-5-5-25

Образец цитирования: Серых И.В., Сонечкин Д.М. Хаос и порядок в атмосферной динамике. Часть 2. Междугодовые ритмы Эль-Ниньо – Южного колебания // Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2017. Т. 25, № 5. С. 5–25. DOI: 10.18500/0869-6632-2017-25-5-5-25

CHAOS AND ORDER IN ATMOSPHERIC DYNAMICS

Part 2. Interannual rhythms of the El Niño – Southern oscillation

I. V. Serykh¹, D. M. Sonechkin^{1,2}

¹ Shirshov Institute of Oceanology, Russian Academy of Sciences
36, Nahimovskiy prospekt, 117997 Moscow, Russia

²Hydrometeorological Research Centre of the Russian Federation
11–13, Bol'shoi Predtechenskii per., 123242 Moscow, Russia
E-mail: iserykh@ocean.ru, dsonech@ocean.ru

Received 19.05.2017

Processes of the El Niño – Southern Oscillation (ENSO) are investigated based on the mathematical theory of the so-called the strange nonchaotic attractor (SNA) in the quasi-periodically forced dynamic systems, and using the sea surface temperature and the atmospheric sea-level pressure data for the 1870–2014 year period. It is found that ENSO is influenced not only by the annual Sun-induced periodic heating of the climate system, but also by the three more other external forces which periods are incommensurable to the annual period. These forces are induced by the 18.6-year Luni-Solar nutation of the Earth's rotation axis, the 11-year cycle of the solar activity and the Chandler wobble in the Earth's pole motion (the period 1.2 years). Because of the reciprocal incommensurability of the periods of these forces, all of them affect the climatic system in «improper» time moments. As a result, the dynamics of the indices representing the ENSO processes look to be very complex (strange in mathematical terms), but not chaotic. It is shown that power spectra of the ENSO indices have some bands of the increased spectral density located on sub- and superharmonics of above-mentioned periods. On the basis of some special considerations of structure of the power spectra of the ENSO indices the evidence of the discreteness of these spectra, i.e. the spectra being nonchaoticity, is received. Nobody assumed this circumstance earlier. Despite complexity of the ENSO processes, the dynamics of the temporal variations of these process indices reveals an internal ordering similar to that internal order which is known to be inherent to the SNA dynamics. This ordering reveals itself in the existence of spectral density peaks in the ENSO power spectra, and some rhythms corresponding to these peaks in the temporal variations of the ENSO indices. Acceptance of the SNA model for ENSO means that there are no predictability limits for ENSO in principle. In practice, it opens an opportunity to predict ENSO for several years ahead.

Keywords: Power spectra of the El Niño – Southern Oscillation, quasi-periodicity of the external climate system drivers, the Chandler wobble, the Luni-Solar nutation, the Solar activity, strange nonchaotic attractor.

DOI: 10.18500/0869-6632-2017-25-5-5-25

References: Serykh I.V., Sonechkin D.M. Chaos and order in atmospheric dynamics. Part 2. Interannual rhythms of the El Niño – Southern oscillation. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*. 2017. Vol. 25. Issue 5. P. 5–25. DOI: 10.18500/0869-6632-2017-25-5-5-25

Введение

Оценки энергетических спектров колебаний климата в широком диапазоне временных масштабов – от года до тысяч и даже сотен тысяч лет – публиковались неоднократно. Как, вероятно, самую первую из них, можно упомянуть оценку Дж.Е. Курцбаха и Р.А. Брайсона [1, 2], которую отечественный читатель легко найдет в книге А.С. Мони́на и Ю.А. Шишкова [3]. Конечно, сейчас эта оценка выглядит очень наивной. Тем не менее, для целей настоящей работы она важна, ибо в ней климатический спектр показан непрерывным, что принималось практически во всех

последующих оценках, публиковавшихся вплоть до недавнего времени. Относительно низкочастотная часть (периоды более тысячи лет) в спектре Курцбаха – Брайсона была определена как «красный шум», а относительно высокочастотная (периоды от года до ста лет) – как «белый шум», то есть все локальные увеличения и уменьшения спектральной плотности (за исключением только дельта-пики на годовом периоде) трактовались как несущественные.

За годы после публикации Курцбаха и Брайсона было накоплено много новых инструментальных метеорологических наблюдений и появились многочисленные палеоклиматические реконструкции. Это позволило существенно уточнить форму и количественные характеристики климатического энергетического спектра (см., например, [4]). Одна из недавних, считающаяся сейчас наиболее точной, оценка климатического энергетического спектра приведена в [5]. При ее интерпретации также была подчеркнута непрерывность спектра, и все колебания климата были определены как хаотические. В относительно высокочастотной части (периоды от года примерно до ста лет) средний наклон спектра (в двойных логарифмических координатах) был оценен авторами работы [5] как равный 0.37 и 0.58, а в относительно низкочастотной части (периоды более ста лет) – как равный 1.64 и 1.29, исходя из данных по континентам в высоких широтах и океанам в низких широтах, соответственно. Это подтверждает вывод Курцбаха и Брайсона о «белом» и «красном» характере высоко- и низкочастотных климатических «шумов». Вместе с тем, в [5] признается наличие в спектре статистически значимых пиков спектральной плотности, связанных с откликами глобальной климатической системы на изменения и перераспределения по поверхности Земли приходящей солнечной радиации. О возможном наличии откликов на другие периодически меняющиеся внешние силы не упоминается.

В данной работе предметом рассмотрения является только часть климатического спектра, соответствующая междугодовым изменениям в процессах Эль-Ниньо – Южного колебания (ЭНЮК). Заметим, что методически сходное рассмотрение для части климатического спектра, соответствующей геологическому масштабу времени в десятки и сотни тысяч лет, было сделано в работах [6–11] с основным выводом об отсутствии хаотичности.

Важная роль сезонности в динамике ЭНЮК и, соответственно, в формировании спектров ЭНЮК распознана давно. Однако количественное рассмотрение этой роли было сделано сравнительно недавно двумя группами западных специалистов по физике атмосферы и океана. Одну группу неформально возглавлял М. Гил, а другую – Э. Циперман. В 1994 году эти группы опубликовали свои работы в одном и том же номере журнала Science [12]. Одновременность публикаций свидетельствует о том, что редакция Science поняла крайнюю важность той постановки задачи о природе ЭНЮК, которая была дана в этих статьях. Фактически впервые в них были использованы выводы математиков о бифуркациях инвариантного тора как аттрактора периодически форсированной нелинейной динамической системы. В последующие годы были опубликованы еще несколько статей, развивающих эту идею [13–17]. В них известная из наблюдений ритмичность ЭНЮК объяснялась как сезонный «захват фазы» – феномен, доказанный математиками как типичное свойство периодически форсированных систем с тор-аттракторами.

Любопытно, что ссылок на все эти публикации в последующих работах по проблеме ЭНЮК очень мало. Это говорит о том, что международное сообщество метеорологов еще не оценило должным образом идею, высказанную Гилом и Циперманом с коллегами. В отечественной метеорологической литературе бифуркации инвариантных торов использовались для объяснения механизмов возбуждения двухлетних и еще более долгопериодных колебаний в атмосферных моделях гораздо раньше (см. книгу [18] и статьи [19, 20]), но особой реакции широкого круга отечественных исследователей на эти работы тоже не было.

Важно подчеркнуть, что смоделированная вышеупомянутыми группами американских ученых ритмичность ЭНЮК воспроизводила реальную ритмичность ЭНЮК только качественно. Пики в энергетическом спектре ЭНЮК получились на кратных году периодах типа 2:1 (двухлетний цикл), 3:1 (трехлетний цикл), 5:2 (два цикла за пять лет) и т. п. Главный же пик в реальных спектрах ЭНЮК обычно оценивается как равный 3.6 года (см., например, [21]). Причина этого в том, что на ЭНЮК явно влияет не только годовой ход притока тепла от солнца, но и другие периодические внешние силы, периоды которых отличны от годового периода и, вероятно, несоизмеримы с ним. По-видимому, впервые это было предположено в [22]. Конкретно в качестве еще одной внешней силы, существенной для ЭНЮК, было указано чандлеровское колебание полюсов Земли с периодом около 1.2 года. Много внимания чандлеровскому колебанию как движителю ЭНЮК уделял также Н.С. Сидоренков (см. [23] и его последующие публикации).

Учет многих периодических внешних сил, вероятно, важен не только для описания и предсказания ЭНЮК, но также для многих других долгопериодных процессов в атмосфере, поскольку в такой нелинейной системе, как климатическая, все процессы, в принципе, взаимодействуют друг с другом. Пропагандистами этой идеи еще с 1990-х годов выступают американские исследователи Р.Дж. Карри и С. Хамид [24, 25].

1. Исходные данные и методика их обработки

Для вычисления энергетических спектров ЭНЮК и установления по ним периодичностей, влияющих на ЭНЮК, в настоящем исследовании использованы английские глобальные базы ежемесячных данных о температуре поверхности океана (ТПО) с разрешением $1^\circ \times 1^\circ$ (HadISST) и атмосферном давлении на уровне моря (ДУМ) с разрешением $5^\circ \times 5^\circ$ (HadSLP2). Эти базы находятся в открытом доступе за весь период инструментальных наблюдений: 1870–2014 для температуры и 1850–2014 для давления [26, 27]. Для вычисления энергетических спектров различных индексов ЭНЮК был выбран, как основной, период 1870–2014. Этот период представляется оптимальным, поскольку, с одной стороны, он имеет длительность, уже достаточную для выявления ритмов ЭНЮК в диапазоне от года до десяти лет, и, с другой стороны, относящиеся к этому периоду данные наблюдений полнее и надежнее, чем за период более ранних инструментальных метеорологических наблюдений. Для проверки результатов были использованы данные ТПО COBE2 (1850–2014) и ERSSTV4 (1854–2015), данные ДУМ NOAA-CIRES 20th Century Reanalysis v2c (1851–2011) [28] и ERA-20C (1900–2010). Рассчитанные по этим дан-

ным спектры имеют пики на тех же периодах, что и рассчитанные по английским данным, что подтверждает полученные результаты.

Индексы ЭНЮК рассчитывались, как средние аномалии ТПО в регионах Nino1+2, Nino3, Nino3.4 и Nino4, затем по ним были подсчитаны спектры (табл. 1). Исходя из полноты данных, имеющихся в базе HadISST, регионы Nino2, Nino3 и Nino3.4 были скомбинированы в виде суммы, то есть рассматривались аномалии ТПО в среднем для региона (5° с.ш.– 5° ю.ш., 170° – 80° з.д.). По этим аномалиям был вычислен временной ряд индекса, названного Расширенным океаническим индексом Эль-Ниньо (РОИ) – Extended Oceanic Nino Index (EONI). В отличие от часто используемого индекса ONI, базирующегося на довольно скудной базе судовых наблюдений в центре экваториальной зоны Тихого океана (район Nino3.4), при расчете РОИ учитывались многочисленные наблюдения судов, выходящих из Панамского канала в сторону Азии и Австралии.

Для исследования атмосферной компоненты процессов ЭНЮК был выбран Экваториальный Индекс Южного Колебания (ЭИЮК) – Equatorial Southern Oscillation Index (ESOI). Он рассчитывается как разность средних аномалий ДУМ между регионом Индонезии (5° с.ш.– 5° ю.ш., 90° – 140° в.д.) и восточной частью экваториального Тихого океана (5° с.ш.– 5° ю.ш., 130° – 80° з.д.). На наш взгляд этот индекс репрезентативнее стандартного SOI (разность ДУМ между г. Дарвин и о. Таити), поскольку охватывает большие территории, находящиеся на экваторе.

Энергетические спектры указанных индексов рассчитывались двумя методами: быстрым преобразованием Фурье (БПФ) самих рядов и преобразованием Фурье предварительно рассчитанной временной корреляционной функции (ПФК). Метод БПФ обладает более высоким разрешением по частоте, а метод ПФК позволяет надежнее оценить амплитуды пиков. Для увеличения надежности спектральных оценок, спектры вычислялись многократно путем последовательного укорачивания рассматриваемых рядов вплоть до их сокращения до $1/3$ от первоначальной длины. Причем окна, по которым определялись укороченные ряды, пробегали исходные ряды от их начала и до их конца. Затем все полученные спектры усреднялись и, в некоторых случаях, производилось их сглаживание. После вычисления всех спектров определенного типа рассчитывалось их среднее.

Спектры рассчитывались как по полному ряду среднемесячных значений РОИ и ЭИЮК, так и отдельно для каждого месяца года: только январей, только февралей и т. д. Расчет спектров по полным рядам (месяц за месяцем и год за годом) общепринят в климатологии. Расчет же по рядам отдельных месяцев соответствует принятому в математической теории периодически форсированных динамических систем рассмотрению динамики исследуемой системы на периоде одной из внешних сил (дискретному «отображению»). Такое отображение исключает из явного рассмотрения более высокочастотную, по сравнению с периодом выбранной внешней силы, динамику. Сезонность динамики при этом исследовалась путем сравнения отображений, присущих разным месяцам года. Этот метод позволил исследовать энергетические спектры ЭНЮК отдельно для фазы наиболее сильного развития событий Эль-Ниньо и Ла-Нинья (месяцы с октября по февраль).

Была исследована чувствительность полученных результатов к изменению длины ряда данных. Для этого спектры индексов считались отдельно для периодов: 1850–2014, 1870–2014, 1900–2014 и 1920–2014 (Табл. 2 и 3).

Таблица 1. Периоды (в годах) спектральных пиков индексов Nino1+2, Nino3, Nino3.4 и Nino4 для баз данных HadISST, ERSSTV4 и COBE2, упорядоченные по убыванию мощности

Table 1. Periods (in years) of the spectral peaks of the indices Nino1+2, Nino3, Nino3.4 and Nino4 for the HadISST, ERSSTV4 and COBE2 databases arranged in descending order of the spectral density

№	HadISST 1870–2014 Nino				ERSSTV4 1870–2015 Nino				COBE2 1870–2014 Nino			
	1+2	3	3.4	4	1+2	3	3.4	4	1+2	3	3.4	4
1	3.62	5.70	5.69	5.66	3.56	5.70	5.68	5.65	3.60	5.70	5.69	9.03
2	3.60	3.54	3.53	12.95	13.55	3.54	2.88	12.92	3.59	3.54	3.54	5.67
3	3.61	3.63	2.88	3.54	3.60	3.63	13.16	20.88	3.56	3.60	8.98	12.98
4	3.56	3.60	3.79	20.63	6.60	3.60	3.54	6.42	5.72	3.62	13.10	3.63
5	5.71	5.17	3.64	5.08	5.72	5.19	5.16	2.88	5.20	3.78	3.62	3.55
6	3.79	3.79	5.13	3.64	52.67	2.88	3.79	3.64	3.79	5.17	3.60	3.56
7	6.56	2.88	3.60	2.88	5.19	3.79	3.64	3.55	6.56	2.87	2.87	3.57
8	5.19	4.28	13.09	4.77	2.88	13.36	6.39	3.56	6.53	4.28	3.79	3.58
9	6.52	4.27	4.79	3.79	4.33	6.41	3.60	3.57	2.88	4.27	5.13	28.94
10	2.88	4.80	4.26	3.60	3.40	2.32	4.24	3.58	4.33	13.37	4.78	2.88

Таблица 2. Периоды (в годах) спектральных пиков индекса POI (EONI) для баз данных HadISST, ERSSTV4 и COBE2, упорядоченные по убыванию мощности

Table 2. Periods (in years) of the spectral peaks of the EONI for the HadISST, ERSSTV4 and COBE2 databases arranged in descending order of the spectral density

№	HadISST EONI			ERSSTV4 EONI				COBE2 EONI			
	1870–2014	1900–2014	1920–2014	1854–2015	1870–2015	1900–2015	1920–2015	1850–2014	1870–2014	1900–2014	1920–2014
1	5.70	3.58	3.57	5.71	5.70	3.59	3.59	5.72	5.70	3.58	3.58
2	3.54	5.64	5.09	2.87	3.54	5.66	5.13	3.79	3.54	5.64	5.09
3	3.63	5.15	5.65	3.79	3.63	5.18	5.70	3.53	3.60	5.15	5.66
4	5.16	6.51	4.84	3.54	3.60	6.48	4.74	2.87	3.62	6.51	4.78
5	3.79	4.84	4.79	5.20	2.88	4.21	6.41	3.63	3.62	4.21	4.84
6	2.88	4.21	2.87	3.64	5.18	13.04	2.87	3.64	3.78	4.84	4.76
7	4.28	4.23	4.19	13.02	3.79	2.88	4.16	8.92	2.87	4.86	2.87
8	4.27	4.88	2.45	6.35	13.29	4.78	2.45	3.60	5.16	4.88	4.15
9	4.80	2.87	6.44	3.59	6.40	4.80	12.93	5.20	8.93	4.91	2.12
10	13.22	3.78	2.12	3.39	2.32	3.78	2.12	3.39	13.29	3.77	6.44

Таблица 3. Периоды (в годах) спектральных пиков индекса ЭИЮК (ESOI) для баз данных HadSLP2, NOAA-CIRES 20CRv2c и ERA-20C, упорядоченные по убыванию мощности

Table 3. Periods (in years) of spectral peaks of the ESOI for the HadSLP2, NOAA-CIRES 20CRv2c and ERA-20C databases in descending order of the spectral density

№	HadSLP2 ESOI				NOAA-CIRES 20CRv2c ESOI				ERA-20C ESOI	
	1850–2014	1870–2014	1900–2014	1920–2014	1851–2011	1870–2011	1900–2011	1920–2011	1900–2010	1920–2010
1	5.70	5.68	5.65	5.09	5.73	5.72	5.66	3.59	3.58	3.58
2	61.00	59.38	53.50	66.00	5.71	3.54	3.58	5.07	5.66	5.09
3	2.88	3.54	3.59	3.60	3.53	2.88	5.10	5.67	5.16	5.67
4	3.53	2.88	5.18	5.68	2.88	3.63	5.03	2.44	6.53	4.83
5	5.19	5.18	6.49	4.84	3.64	3.79	2.57	53.42	13.16	13.04
6	3.80	3.79	4.86	4.80	3.79	51.50	6.52	2.57	4.20	6.40
7	3.39	3.63	4.85	2.45	3.40	13.02	2.45	6.40	4.20	2.57
8	3.64	3.60	2.87	6.38	9.01	8.95	4.20	2.86	4.89	2.45
9	4.81	6.47	3.77	2.87	8.99	41.04	4.20	2.17	3.79	2.86
10	3.60	6.46	2.45	31.50	2.78	2.32	12.85	2.15	9.12	2.12

2. Результаты

На рис. 1 показаны энергетические спектры РОИ (вверху) и ЭИЮК (внизу), полученные методом быстрого преобразования Фурье по полному ряду среднемесячных значений этих индексов за 1870–2014 гг. Предварительно из данных был удален годовой ход. Показаны также 95-процентные и 5-процентные доверительные интервалы для соответствующих спектров «красного шума». В междугодовом диапазоне у самих спектров видны многочисленные пики, точнее более или менее узкие полосы повышенной спектральной плотности. Одна из причин уширения оснований этих пиков вполне очевидна. Она состоит в конечной и сравнительно небольшой длине рассматриваемого ряда. Другая, далеко не очевидная, причина состоит в том, что на самом деле каждый видимый на рис. 1 широкий пик может слагаться из многих близко расположенных дельта-пигов.

Положение на оси временных периодов и соотношения амплитуд всех полос повышенной спектральной плотности вполне соответствуют статистически значимым пикам во многих ранее публиковавшихся спектрах индексов ЭИЮК в диапазоне двух-десяти лет [29]. Наиболее мощными на обоих спектрах являются статистически значимые полосы повышенной спектральной плотности, приходящиеся на периоды около 5.1, 3.8, 3.6 и 2.9 года. На спектре РОИ также присутствуют полосы значимостью 95% на периодах около 2.4, 2.1, 1.8, 1.5 и 1.2 года, а на спектре ЭИЮК – на периоде около 5.6 года.

Чтобы быть уверенными в периодах пиков, которые подразумеваются под этими полосами, можно использовать указание теории квазипериодически форсирован-

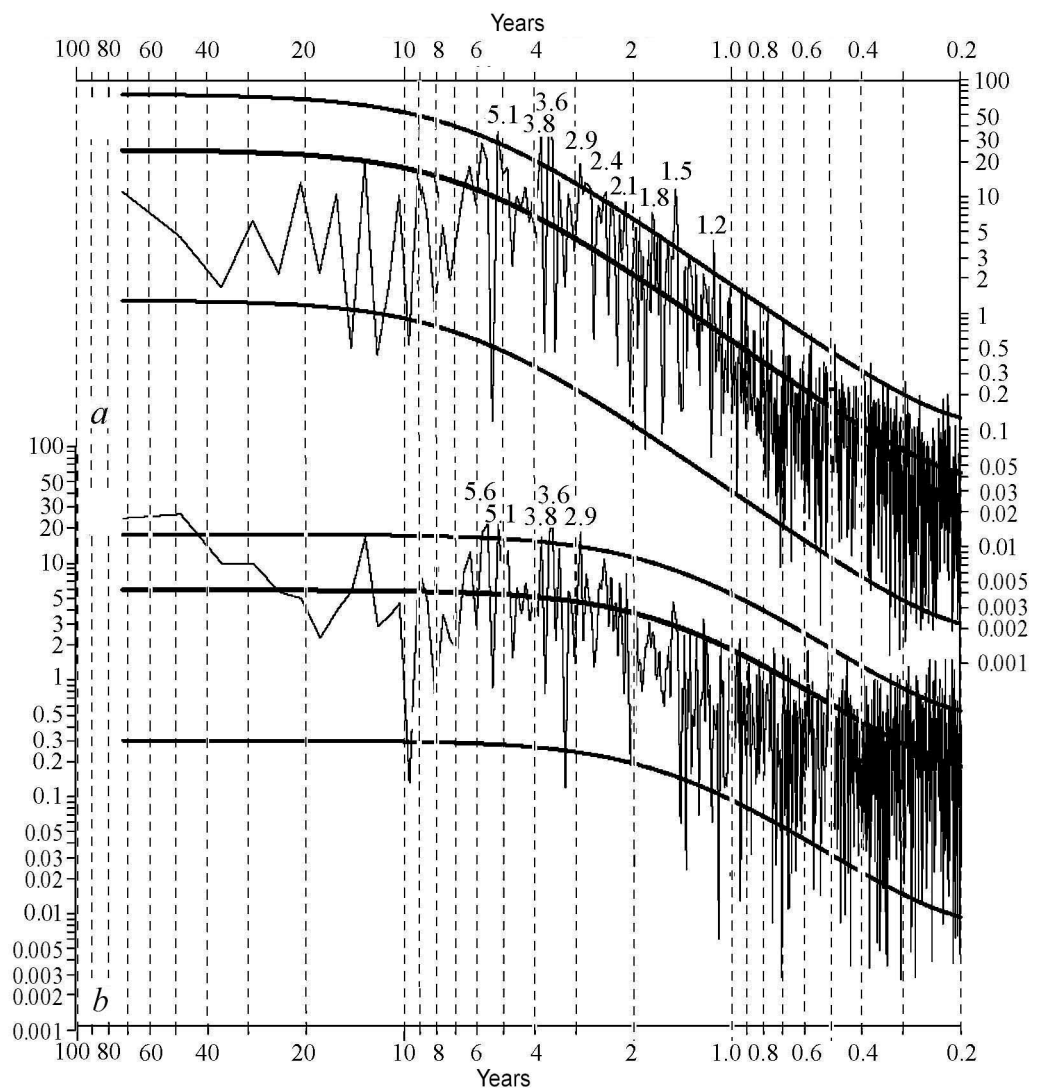


Рис. 1. Энергетические спектры рядов средних значений индексов РОИ (а) и ЭИЮК (б) за 1870–2014 после удаления сезонного хода. Отмечен доверительный интервал от 5% (гладкая линия внизу) до 95% (гладкая линия сверху) и спектр красного шума (гладкая линия между ними)

Fig. 1. Power spectra of the time series of the monthly mean values (detrended) of the EONI (a) and ESOI (b) estimated over the 1870–2014 year period. The significance limits of 5% (a smooth line below) and of 95% (a smooth line upper) as well as the respective red-noise spectrum (a smooth line in between) also are shown

ных динамических систем с так называемыми странными нехаотическими аттракторами (СНА) о самоподобии энергетических спектров СНА. Самоподобие означает, что соотношения периодов и амплитуд пиков в спектрах СНА одинаковы для разных частей СНА-спектров после соответствующего их перемасштабирования.

Так, обычно отношение мощности годовой полосы к полугодовой и отношение полугодовой полосы к четвертьгодовой примерно одинаковы. То же самое имеет место для отношений мощностей полосы 3.6 года к полосе 2.9 года, и полосы 2.9 года к полосе 2.4 года. Соответственно, период полосы 3.6 года относится к периоду полосы 2.9 года как примерно 1.2. Таково же отношение периода полосы 2.9 года к периоду полосы 2.4 года. Можно идти дальше и сравнивать мощности полос и их

периоды для супергармоник с таковыми у субгармоник. Все эти отношения близки по величине. Поэтому самоподобие спектров РОИ и ЭИЮК допустимо считать существующим. Это подтверждает реальность рассматриваемых полос повышенной спектральной плотности, независимо от формальной 95-процентной статистической оценки их значимости.

Обратимся теперь к рис. 2, на котором представлены энергетические спектры рядов среднемесячных значений РОИ и ЭИЮК в диапазоне периодов от года до десяти лет, подсчитанные путем многократного пересчета, как это описано в разделе 2. Эти спектры являются существенно более детальными, чем на рис. 1, что позволяет обсудить природу видимых в них полос повышенной спектральной плотности. Еще раз отметим, что формально-статистическая значимость пиков в спектрах индексов Эль-Ниньо уже обсуждалась во многих ранее опубликованных работах. Например, в спектре индекса Nino3, показанном в статье [21], имеется девять пиков, уровень

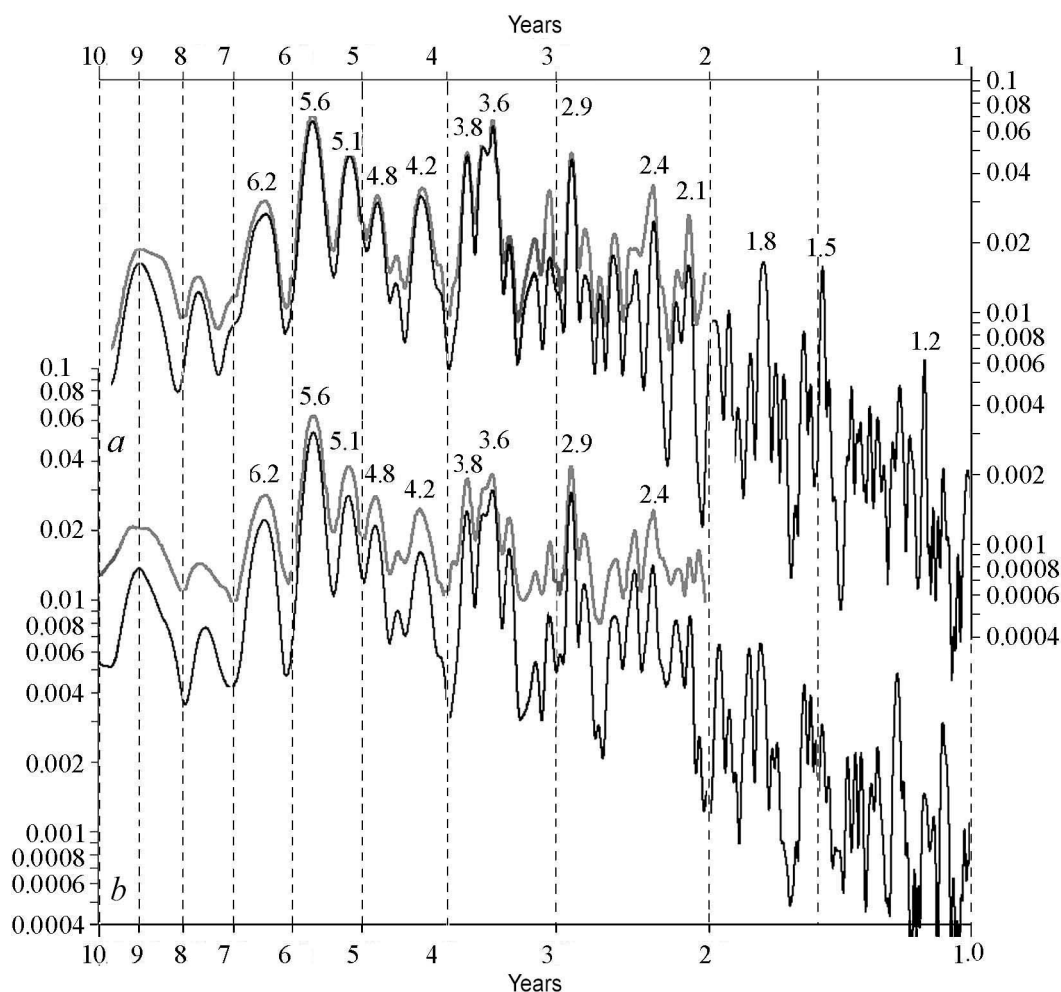


Рис. 2. Энергетические спектры рядов среднемесячных значений индексов РОИ (а) и ЭИЮК (b) за 1870–2014, рассчитанные на годовом периоде (светлая линия) и с максимальным разрешением (темная линия)

Fig. 2. Power spectra of the time series of the monthly mean values of EONI (a) and ESOI (b) represented as mappings on the annual period (grey line) as well as represented with maximal spectral resolution (dark line), and calculated over the 1870–2014 year period

значимости которых более 95 %. Из них значимость наиболее велика у пиков на периодах 3.5, 5.6, 2.8 и 1.4 года. Эти же пики являются главными на подробных спектрах РОИ и ЭИЮК (см. рис. 2). Только к ним добавился пик на периоде в 5.1 года, который в спектре [21] лишь немного не дотянул до уровня 95 %.

Для установления происхождения всех перечисленных полос и пиков повышенной спектральной плотности полезно учесть указание теории динамических систем о том, что сама по себе динамика автономных (с постоянными внешними силами) систем не в состоянии продуцировать пики спектральной плотности. Этот вопрос является принципиально важным для целей настоящего исследования. Поэтому поясним его чуть более подробно.

Дело в том, что энергетический спектр переменной z в знаменитой трехмодовой модели Е.Н. Лоренца со странным аттрактором [30] кажется содержащим дельта-пик. Это известно также относительно спектра другой известной модели со странным аттрактором (модели О.Е. Ресслера [31]). Однако эти два исключения вызваны тем, что обе модели имеют группу симметрии: их решения определены с точностью до смены знаков модельных переменных. При этом, как показал сам Лоренц [32], пик в спектре переменной z является на самом деле очень узкой полосой повышенной спектральной плотности. Лоренц заключил, что это невероятно для автономной динамической системы – иметь пики в спектре после наступления хаоса. Иначе говоря, если группа симметрии отсутствует, каждый видимый в спектре пик должен быть связан с какой-то внешней периодической силой или являться комбинационной гармоникой нескольких таких сил.

В случае РОИ главную, значимую на 95-процентном уровне полосу повышенной спектральной плотности на периоде около 3.6 года, видимую в спектрах на рис. 1, легко связать с утроением периода известного чандлеровского колебания полюсов Земли, период которого примерно равен 1.2 года (435 дням). В работе [22] было отмечено, что в приэкваториальной зоне Земли доминирует полугодовой ход притока тепла от Солнца, и общий период воздействия на Эль-Ниньо трех чандлеровских колебаний примерно совпадает с общим периодом семи солнечных полугодовых воздействий. Это может привести к резонансу этих воздействий. Статистически значимые полосы повышенной спектральной плотности на периодах около 4.8 и 2.4 года соответствуют четырем периодам и двум периодам чандлеровского колебания. Описание физического механизма воздействия чандлеровского колебания на ритмичность Эль-Ниньо приведено в работе [33].

Заметим, что отношение годового периода к чандлеровскому периоду чрезвычайно близко к «очень» иррациональному числу 0.839... [34], поэтому в спектре РОИ должны существовать полосы повышенной спектральной плотности на комбинационных гармониках этих периодичностей между собой и с преобладающим собственным колебанием процессов ЭИЮК. Теория динамических систем указывает, что видимые в спектре полосы будут тем более многочисленны, чем несоизмеримее будет период наиболее неустойчивой собственной «моды» рассматриваемой динамической системы с обеими внешними периодичностями (отношения их периодов равны $1/1.839...$ и $0.839...$).

Относительно возможного периода собственной «моды» ЭИЮК имеется работа [35], в которой, как вероятный, указан период 20 месяцев (около 1.7 года). Обращаясь к рис. 2, можно видеть, что вблизи этого периода действительно есть некоторое увеличение спектральной плотности (помечено как 1.8 года). Однако на

спектрах ЭИЮК рядом имеется не меньшее увеличение на периоде около 1.9 года. Сходные статистически значимые (уровень 95%) увеличения видны также в спектре работы [21]. Еще одна мощная полоса видна в спектрах, показанных на рис. 2 (и в спектре [21]) на периоде около 1.5 года. Какой из этих трех пиков надо считать главной собственной «модой» процессов ЭИЮК сказать трудно. Может быть, все они имеют право рассматриваться в этом качестве, ибо сейчас активно обсуждается вопрос о существовании нескольких разновидностей Эль-Ниньо. Не исключено, что каждой из них свойственна своя мода колебаний. Например, давно известно, что в конце 19 и начале 20 века, когда наблюдалось больше событий Эль-Ниньо восточного типа, преобладали более долгопериодные колебания, а во второй половине 20 века, когда стало появляться больше Эль-Ниньо центрального типа (названные «Модоки»), периоды колебаний несколько сократились.

Считая все эти собственные «моды» реальными, четвертая по мощности полоса на периоде 5.1 года, из числа видимых на рис. 2, может быть объяснена как комбинационная гармоника колебаний собственного периода 1.5 года и чандлеровского периода 1.2 года: $1/1.2 - 1/1.5 \approx 1/5.1$ в обратных годах.

Согласно Н.С. Сидоренкову [23], самые долгопериодные ритмы ЭИЮК определяются супергармониками лунно-солнечной нутации земных полюсов, период которой равен 18.6 лет. И спектры на рис. 2 это подтверждают, поскольку на них присутствуют пики на периодах, близких к 9.1 и 6.2 года, что соответствует 1:2 и 1:3 супергармоникам лунно-солнечной нутации. Однако эти пики не дотягивают до 95-процентного уровня статистической значимости. Возможным объяснением этого является недостаточная длина имеющихся рядов метеорологических данных.

Первый, третий и пятый по амплитуде пики на рис. 2, периоды которых примерно равны 5.6, 2.9 и 3.8 года, можно объяснить супергармониками 1:2, 1:4 и 1:3 11-летнего цикла солнечной активности. Заметим, что на возможную синхронизацию ритмичности ЭИЮК с солнечной активностью уже указывал ряд исследователей (см., в частности, [24, 25, 36]).

Здесь также можно обратить внимание на то, что вышеупомянутый в качестве одной из собственных «мод» период 1.5 года тоже может являться супергармоникой солнечного цикла 1:8. Это же можно сказать о других близких по периодам слабых полосах повышенной спектральной плотности. Например, пик на периоде 1.8 года есть супергармоника 1:2 самой главной из показанных на рис. 2 полос на периоде 3.6 года. Часто упоминаемая в литературе полоса на периоде 2.1 года может быть супергармоникой 1:2 уже упоминавшейся полосы на периоде 4.2 года. Полоса же на периоде 4.8 года, которая в [21] показана сильно недотягивающей до уровня значимости 95%, может быть субгармоникой 2:1 полосы на периоде 2.4 года, которая в [21] превосходит уровень значимости 95% и соответствует удвоенному чандлеровскому колебанию.

В работах [24, 25] было предположено, что частоты пиков второго порядка в атмосферных энергетических спектрах в диапазоне междугодовых временных масштабов можно вычислить по простому правилу: $\omega_{i\pm j} = 1/P_i \pm (j + 1)/12$. Второе слагаемое в правой части этой формулы описывает вклады супергармоник годового хода притока тепла от солнца ($j = 0, 1, 2, 3, 4, 5$), существующих на всех широтах, а первое слагаемое описывает вклады чандлеровского колебания полюсов, его удвоения и утроения (все периоды здесь задаются в месяцах). Все вышесказанное позволяет добавить к этому перечню частот те, которые возникают как супергармо-

ники 11-летнего цикла солнечной активности и лунно-солнечной нутации оси вращения Земли с периодом около 18.6 года. Наконец, хотя это и невозможно углядеть в реальных оценках спектров, должны существовать пики третьего и четвертого порядка, когда алгебраически складываются частоты всех четырех воздействующих внешних сил (годового хода притока тепла от солнца, 14-месячного чандлеровского колебания полюсов Земли, 11-летнего цикла солнечной активности и 18.6-летней лунно-солнечной нутации) и их суб- и супергармоник. В итоге, можно ожидать, что существует бесконечное, но счетное (могущее быть перенумерованным) множество пиков. Из-за ограниченности длин наблюдательных рядов и зашумленности их данных эти пики сливаются, образуя при реальных оценках энергетических спектров более или менее широкие полосы повышенной спектральной плотности.

Имеется ли непрерывное основание у рассматриваемого спектра РОИ, или существуют лакуны, разделяющие соседние полосы, внутри которых спектральная плотность является нулевой? Ответ на этот вопрос важен с точки зрения предсказуемости ЭНЮК: непрерывность спектра говорит о хаотичности и, следовательно, о непредсказуемости ЭНЮК на более или менее долгие сроки вперед. Современная практика прогнозирования ЭНЮК, как кажется, подтверждает такой пессимистический вывод. Но, может быть, все дело в неверной методологии сегодняшних прогнозистических моделей?

Для ответа на этот вопрос можно расширить использование общеизвестного теста статистической значимости оценок энергетического спектра против нулевой гипотезы «шума», спектр которого имеет вид $\omega = (1 - \alpha^2)/(1 + \alpha^2 - 2\alpha \cos(2\pi\omega/N))$, $\omega = 0, 1, \dots, N/2$. Форма спектра существенно определяется величиной α , равной значению временной корреляции этого шума при единичном сдвиге. Если α равно нулю, то шум – «белый». Он тем больше «красный», чем больше α .

Временная корреляционная функция ряда среднемесячных значений РОИ показана на рис. 3. При временном сдвиге в один месяц ее значение равно 0.92, так что «шум» ЭНЮК можно было бы считать «красным», как это, в частности, было принято при проверке гипотезы о шумовой природе ЭНЮК в упоминавшейся выше работе [21]. Однако на рис. 3 видно, что при временных сдвигах более года корреляции резко затухают к нулю и остаются таковыми при дальнейшем увеличении сдвига. Так что, в целом для диапазона междугодовых временных масштабов «шум» ЭНЮК более правильно считать «белым». Принимая это, были рассчитаны спектры отображения РОИ и ЭИЮК на годовом периоде, осредненные для всех месяцев (см. рис. 2, светлые линии). Все эти спектры обнаруживают пики на периодах, которые были перечислены ранее при рассмотрении спектров среднемесячных значений РОИ и ЭИЮК, показанных на рис. 2 (темные линии). На рис. 4 приведены спектры отдельно для месяцев с октября по февраль, во время которых события Эль-Ниньо обычно достигают максимальной фазы своего развития, вместе со средним спектром для этих месяцев. Спектры «белого» шума, рассчитанные по выше приведенной формуле при $\alpha = 0$, представлены на рис. 5.

Для проверки нулевой гипотезы о шумовой природе энергетических спектров по таблице распределения χ^2 находится значение 95-процентного квантиля при соответствующем числе степеней свободы. Однако с равным основанием такая проверка может быть применена к лакунам спектральной плотности. Для этого необходимо найти 5-процентный квантиль. Это было сделано, и на рис. 1 показаны оба квантиля. Они показывают, что не только наиболее мощные пики в спектрах рассматриваемых

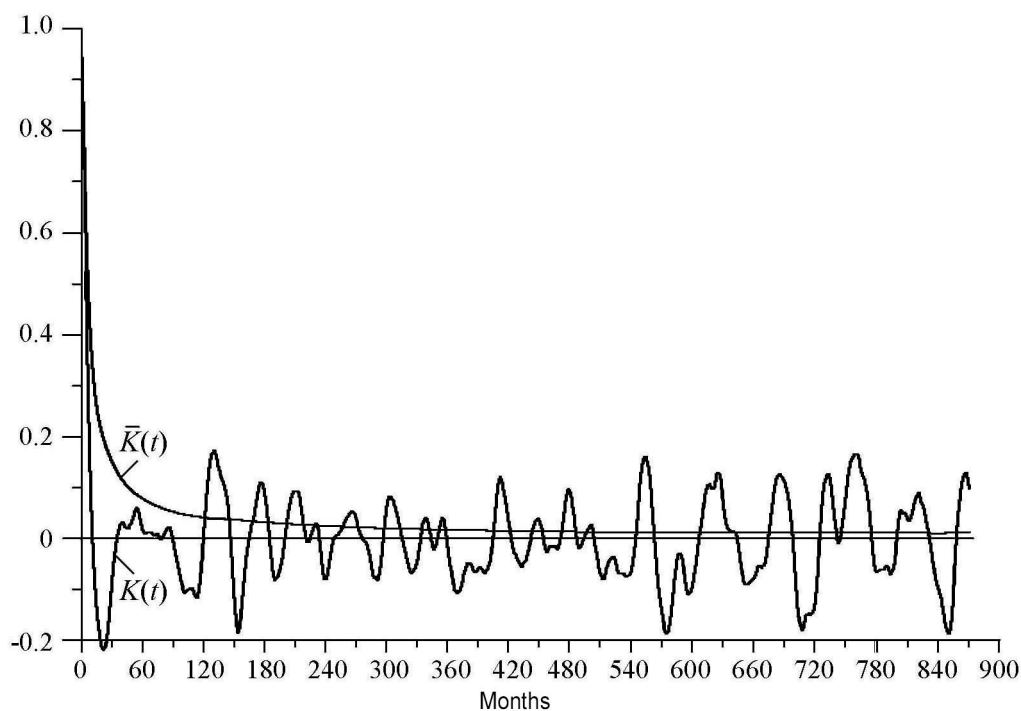


Рис. 3. Временная корреляционная функция среднемесячных значений РОИ за 1870–2014 гг. ($K(t)$) и ее накопленная сумма квадратов ($\bar{K}(t)$)

Fig. 3. Temporal correlation function of the monthly mean values of EONI calculated over the 1870–2014 year period ($K(t)$), and the squared accumulated sum of this function ($\bar{K}(t)$)

индексов превосходят уровень 95-процентного квантиля, но и некоторые лакуны в этих спектрах опускаются ниже 5-процентного квантиля. Оба эти факта позволяют отвергнуть гипотезу о шумовой природе рассматриваемых спектров.

Чтобы окончательно отвергнуть эту гипотезу и признать рассматриваемый спектр состоящим из дискретного множества пиков спектральной плотности, был вычислен средний спектр отображения РОИ на годовом периоде для всех месяцев года. Он показан на рис. 5 вместе со спектрами, вычисленными по двенадцати случайным реализациям «белых» шумов, соответствующих всем месяцам года. Еще более наглядно, чем в случае использования χ^2 -аппроксимаций распределений выборочных оценок спектральной плотности, видно, что многие пики и многие лакуны в рассматриваемом спектре РОИ выходят за пределы, ограничивающие оценки спектральных плотностей для «белого» шума.

Возвращаясь к временной корреляционной функции, показанной на рис. 3, укажем на ее свойство осциллировать при больших временных сдвигах вокруг нуля с неубывающим размахом (в пределах примерно $+0.2$). Незатухающие осцилляции временных корреляций присущи периодическим и квазипериодическим временным рядам. Однако, в работе [37] было указано, что это может быть свойственно также так называемой странной нехаотической динамике. Чтобы различать эти случаи, в этой же работе было рекомендовано строить график накопленных сумм квадратов временных корреляций. Если динамика периодична или квазипериодична, то эта накопленная сумма не убывает с ростом временного сдвига, если же динамика более сложна, то она убывает, приближаясь к нулю. На рис. 3 видно, что именно этот последний случай имеет место для временных корреляций ЭНЮК.

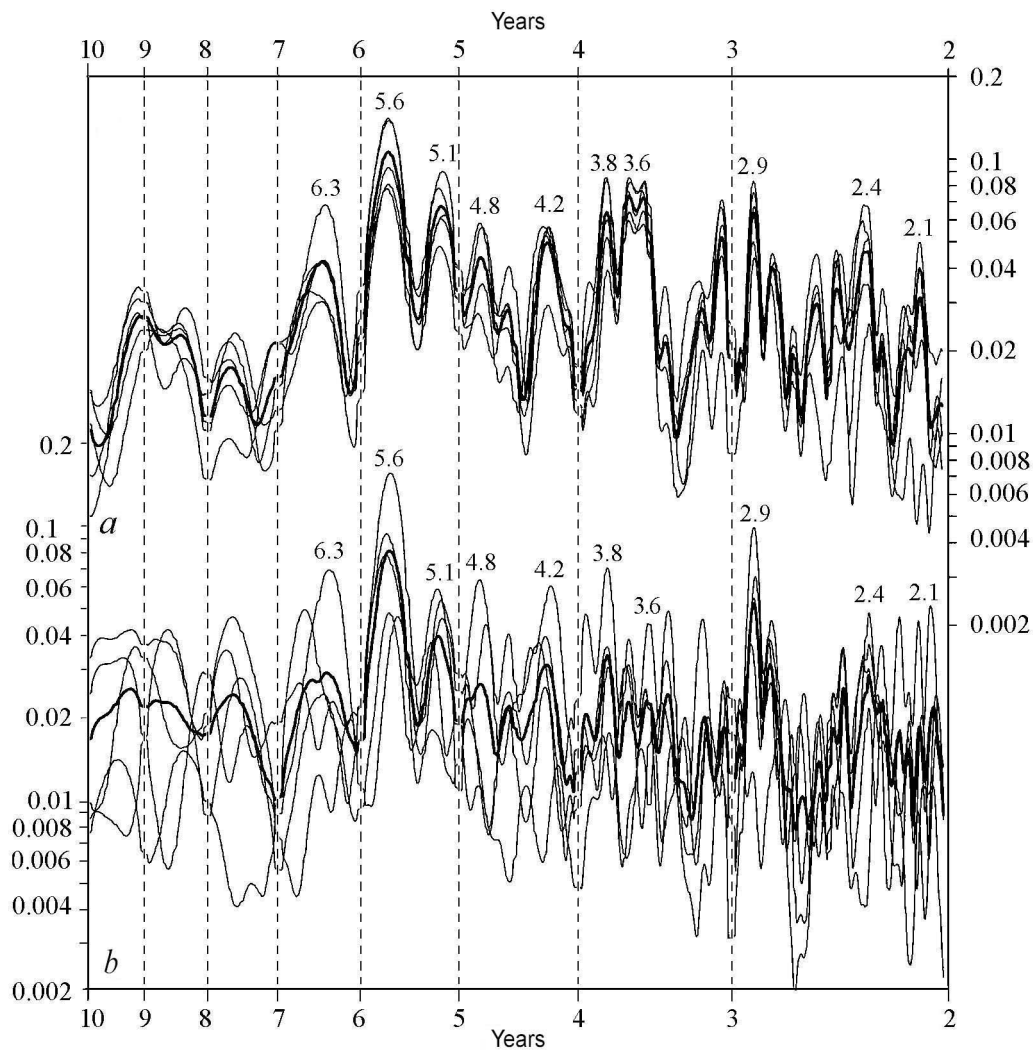


Рис. 4. Энергетические спектры отображения на годовом периоде значений индексов РОИ (а) и ЭИЮК (б) для месяцев с октября по февраль (тонкие линии) и их средние значения (толстые линии)

Fig. 4. Power spectra of the mappings on the annual period of EONI (a) and ESOI (b) for separate months from October to February (thin lines), and their mean values (fat lines)

Другой путь получения ответа на поставленный вопрос о непрерывности или дискретности энергетических спектров квазипериодически форсированных нелинейных динамических систем указан в работах [38, 39]. Он состоит в рассмотрении соотношения между мощностями пиков спектральной плотности и их порядковыми номерами (пики должны быть упорядочены по убыванию их мощности). Рис. 6 показывает, как выглядит это соотношение для среднего из пяти спектров отображений РОИ, соответствующих холодному периоду года северного полушария, когда изменчивость РОИ наиболее велика (октябрь–февраль). Среднее соотношение было вычислено методом наименьших квадратов и описывается полиномом третьего порядка. Вообще говоря, это должно указывать на квазипериодичность динамики ЭНЮК, ибо в случаях странной нехаотичности и детерминированного хаоса это среднее должно быть прямой линией в двойном логарифмическом масштабе. Однако, какой именно является динамика ЭНЮК, сказать трудно, ибо наибольшее откло-

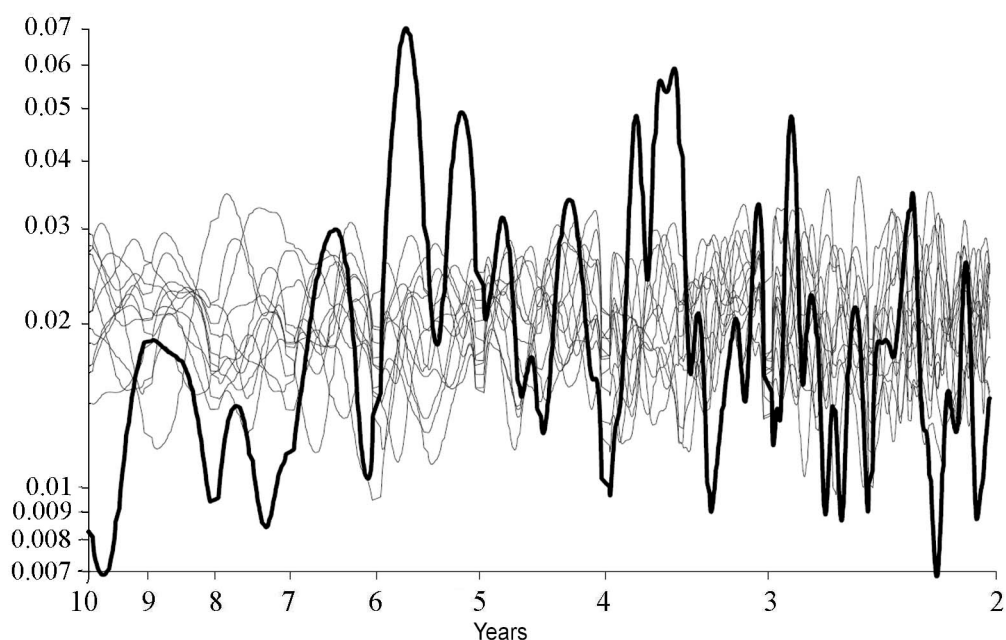


Рис. 5. Средний энергетический спектр отображения на годовом периоде РОИ для всех месяцев года, рассчитанный методом быстрого преобразования Фурье (толстая линия), и рассчитанные тем же методом спектры 12 реализаций отображения «белого» шума (тонкие линии)

Fig. 5. The mean power spectrum of the mappings on the annual period for EONI for all months calculated by means of the FFT-method (fat line) and power spectra of the twenty realizations of the respective mapping of the white noise (thin lines)

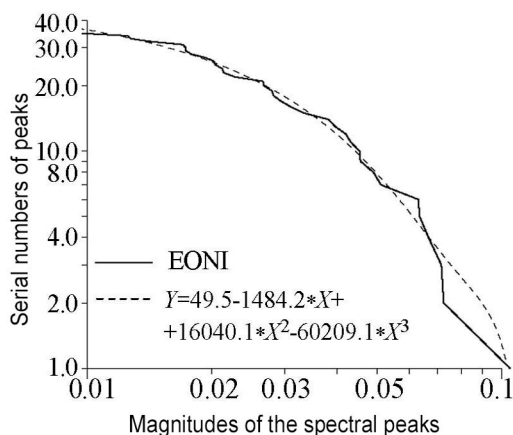


Рис. 6. Соотношение между логарифмами мощности (ось абсцисс) и порядкового номера пиков (ось ординат) в энергетических спектрах отображений РОИ на годовом периоде в среднем для октября–февраля (жирная линия). Аппроксимация этого соотношения описывается полиномом третьего порядка (пунктирная линия)

Fig. 6. The mean relationship between logarithms of the spectral peak magnitudes (abscissa) and serial numbers of these peaks (ordinate) in the power spectra of the EONI-mappings for October – February (fat line). An approximation of this relationship also is shown as it represented by a cubic polynomial (dotted line)

нение среднего графика от прямой линии имеет место в его левой верхней части, а не в правой нижней части, которую определяют самые мощные пики спектральной плотности, и что требуется согласно существующей теории странной нехаотичности [38, 39].

В любом случае – «простой» квазипериодичности или странной нехаотичности – полученный результат указывает на принципиальную возможность долгосрочных (на годы вперед) прогнозов ЭНЮК.

Заключение

Результаты настоящего исследования состоят в следующем.

- Опираясь на методологию математической теории нелинейных динамических систем с квазипериодическим внешним форсированием, детально исследованы энергетические спектры процессов ЭНЮК. При этом найдено, что все основные пики, точнее – полосы повышенной спектральной плотности, могут быть истолкованы как результаты откликов глобальной климатической системы на совокупное воздействие годового хода притока тепла от Солнца и еще трех внешних сил, периоды которых существенно несоизмеримы с годовым периодом.
- Одна часть полос повышенной спектральной плотности отнесена к субгармоникам чандлеровского колебания полюсов Земли. Вторая часть – к супергармоникам лунно-солнечной нутации, а третья часть – к супергармоникам 11-летнего цикла солнечной активности. Подтверждена статистическая значимость этих полос, уже предполагавшаяся многими исследователями.
- На основе специальных рассмотрений структуры энергетических спектров ЭНЮК получено свидетельство дискретности энергетических спектров ЭНЮК, то есть их нехаотичности, никем ранее не предполагавшейся.
- Из дискретности энергетических спектров ЭНЮК следует принципиальная возможность долгосрочных (на годы вперед) предсказаний ЭНЮК.

Исследование выполнено частично при финансовой поддержке по гранту Российского научного фонда (проект №14-50-00095).

Библиографический список

1. *Kurzbaach J.E., Bryson R.A.* Variance spectrum of Holocene climatic fluctuations in the North Atlantic sector // *J. Atmos. Sci.* 1974. Vol. 183. No.4126. P. 709–714.
2. *Mitchell J.M.* Note on solar variability and volcanic activity as potential sources of climatic variability // In: *The Physical Basis of Climate and Climate modeling.* GARP Bull. Series. 1975. No.16. P. 127–131.
3. *Монин А.С., Шишков Ю.А.* История климата. Л.: Гидрометеиздат, 1979. 407 с.
4. *Pelletier J.* The power-spectral density of atmospheric temperature from time scales of 10^{-2} to 10^6 yr // *Earth Planetary Sci. Lett.* 1998. Vol. 158. P. 157–164.
5. *Huybers P., Curry W.* Links between annual, Milankovitch and continuum temperature variability // *Nature.* 2006. Vol. 441. P. 329–332.
6. *Вакуленко Н.В., Иващенко Н.Н., Котляков В.М. и др.* О бифуркации умножения периода ледниковых циклов в начале плейстоцена // *Доклады АН.* 2011. Т. 436. № 4. С. 541–544.
7. *Вакуленко Н.В., Сонечкин Д.М.* Свидетельство скорого окончания современного межледниковья // *Доклады АН.* 2013. Т. 452. № 1. С. 92–95.
8. *Вакуленко Н.В., Котляков В.М., Сонечкин Д.М.* Об увеличении изменчивости глобального климата примерно за 400 тыс. лет до настоящего времени // *Доклады АН.* 2014. Т. 456, № 5. С. 600–603.

9. Вакуленко Н.В., Иващенко Н.Н., Котляков В.М. и др. О бифуркациях умножения периода ледниковых циклов в плиоцене – плейстоцене // Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2013. Т. 21, № 2. С. 88–112.
10. Вакуленко Н.В., Котляков В.М., Сонечкин Д.М. Предсказуем ли климат в геологическом масштабе времени? // Доклады АН. 2015. Т. 460, № 1. С. 215–219.
11. Ivashchenko N.N., Kotlyakov V.M., Sonechkin D.M. et al. On bifurcations inducing glacial cycle lengthening during Pliocene/Pleistocene epoch // Intern. J. Bifurcation and Chaos. 2014. Vol. 24, No. 8. 1440018 (8 pages).
12. Jin F.F., Neelin J.D., Ghil M. El Nino on the devil's: annual subharmonic steps to chaos // Science. 1994. Vol. 264. P. 70–72.
13. Jin F.F., Neelin J.D., Ghil M. El Nino/Southern Oscillation and the annual cycle: Subharmonic frequency locking and aperiodicity // Physica D. 1996. Vol. 98. P. 442–465.
14. Tziperman E., Stone L., Cane M.A. et al. El Nino chaos: overlapping of resonances between the seasonal cycle and the Pacific ocean – atmosphere oscillator // Science. 1994. Vol. 264. P. 72–74.
15. Tziperman E., Zebiak S.E., Cane M.A. Mechanisms of seasonal – ENSO interaction // J. Atmos. Sci. 1997. Vol. 54. P. 61–71.
16. Tziperman E., Cane M.A., Zebiak S.E. et al. Locking of El Nino's peak time to the end of the calendar year in the delayed oscillator picture of ENSO // J. Climate. 1998. Vol. 9. P. 2191–2199.
17. Eccles F., Tziperman E. Nonlinear effects on ENSO's period // J. Atmos. Sci. 2004. Vol. 61. P. 474–482.
18. Сонечкин Д.М. Стохастичность в моделях общей циркуляции атмосферы. Л.: Гидрометеиздат, 1984. 280 с.
19. Даценко Н.М., Зимин Н.Е. Динамические проявления резонансного возбуждения долгопериодных колебаний в модели с сезонным термическим форсированием // Труды Гидрометцентра СССР. 1987. Вып. 290. С. 111–127.
20. Виноградская А.А., Власова И.Л., Даценко Н.М., Сонечкин Д.М. Теория годового хода зональной циркуляции атмосферы, II. Четырнадцатимодовая модель суб- и супергармонических резонансов // Труды Гидрометцентра СССР. 1988. Вып. 297. С. 166–174.
21. Torrence C., Compo G.P. A practical guide to wavelet analysis // Bull. Amer. Meteorol. Soc. 1997. Vol. 79, No.1. P. 61–78.
22. Sonechkin D.M., Ivashchenko N.N. On the role of a quasiperiodic forcing in the interannual and interdecadal climate variations // CLIVAR Exchanges. 2001. Vol. 6, No.1. P. 5–6.
23. Сидоренков Н.С. Атмосферные процессы и вращение Земли. 2002. СПб.: Гидрометеиздат, 200 с.
24. Currie R.G., Hameed S. Evidence of quasi-biennial oscillations in a general circulation model // Geophys. Res. Lett. 1988. Vol. 15. P. 649–652.
25. Hameed S., Currie R.G., LaGrone H. Signals in atmospheric pressure variations

- from 2 to ~ 70 months: Part 1. Simulations by two coupled ocean-atmosphere GCMs // *Intern. J. Climatol.* 2007. Vol. 15. No. 8. P. 853–871.
26. *Allan R.J., Ansell, T.J.* A new globally-complete monthly historical gridded mean sea level pressure data set (HadSLP2): 1850–2004 // *J. Climate.* 2006. Vol. 19. P. 5816–5846.
 27. *Rayner N.A., Parker D.E., Horton E.B., Folland C.K., Alexander L.V., Rowell D.P., Kent E.C., Kaplan A.* Global analyses of sea surface temperature, sea ice, and night marine air temperature since the late nineteenth century // *J. Geophys. Res.* 2003. Vol. 108, No. D14, 4407 10.1029/2002JD002670.
 28. *Compo G.P., Whitaker J.S., Sardeshmukh P.D. et al.* The Twentieth Century Reanalysis Project // *Quarterly J. Roy. Meteorol. Soc.* 2011. 137. P. 1–28.
 29. *Braganza, K., Gergis J.L., Power S.B., Risbey J.S., Fowler A.M.* A multiproxy index of the El Niño–Southern Oscillation, A.D. 1525–1982 // *J. Geophys. Res.* 2009. 114. D05106.
 30. *Lorenz E.N.* Deterministic nonperiodic flow // *J. Atmos. Sci.* 1963. Vol. 20. P. 130–141.
 31. *Roessler O.E.* Continuous chaos // In: *Synergetics, Proceedings Intern. Workshop, Schloss Elmar, Bavaria, 1977: Berlin, 1977.* P. 184–197.
 32. *Lorenz E.N.* A very narrow spectral band // *J. Statist. Phys.* 1984. Vol. 36, No.1–2. P. 1–14.
 33. *Серых И.В., Сонечкин Д.М.* О влиянии полюсного прилива на Эль-Ниньо // *Современные проблемы дистанционного зондирования Земли из космоса.* 2016. Т. 13. № 2. С. 44–52.
 34. *Kim S.-H., Ostlund S.* Renormalization of mappings of the two-torus // *Physical Review Letters.* 1985. Vol. 55. No.1. P. 1165–1168.
 35. *Tsonis A.A., Roebber P.J., Elsner J.B.* A characteristic time scale in the global temperature record // *Geophys. Res. Lett.* 1998. Vol. 25. No.15. P. 2821–2823.
 36. *Вакуленко Н.В., Сонечкин Д.М.* Свидетельство влияния солнечной активности на Эль-Ниньо – Южное колебание // *Океанология.* 2011. Т. 51. № 6. С. 994–999.
 37. *Feudel U., Kuznetsov S., Pikovsky A.* Strange nonchaotic attractors. Singapore: World Scientific Series on Nonlinear Science, Series A. 2006. Vol. 56.
 38. *Bondeson A., Ott E., Antonsen T.M.* Quasiperiodic forced damped pendula and Schroedinger equations with quasiperiodic potentials: implications of their equivalence // *Phys. Rev. Lett.* 1985. Vol. 55. No. 20. P. 2103–2106.
 39. *Ditto W.L., Spano M.L., Savege H.T. et al.* Experimental observation of a strange nonchaotic attractor // *Phys. Rev. Lett.* 1990. Vol. 65. No.5. P. 533–536.

References

1. *Kurzbach J.E., Bryson R.A.* Variance spectrum of Holocene climatic fluctuations in the North Atlantic sector. *J. Atmos. Sci.* 1974. Vol. 183. No.4126. P. 709–714.
2. *Mitchell J.M.* Note on solar variability and volcanic activity as potential sources of climatic variability. *The Physical Basis of Climate and Climate modeling. GARP Bull. Series.* 1975. No. 16. P. 127–131.

3. Monin A.S., Shishkov Yu.A. Istoriya klimata. L.: Gidrometeoizdat, 1979. 407 s. (in Russian).
4. Pelletier J. The power-spectral density of atmospheric temperature from time scales of 10^{-2} to 10^6 yr. *Earth Planetary Sci. Lett.* 1998. Vol. 158. P. 157–164.
5. Huybers P., Curry W. Links between annual, Milankovitch and continuum temperature variability. *Nature.* 2006. Vol. 441. P. 329–332.
6. Vakulenko N.V., Sonechkin D.M., Ivashchenko N.N., Kotlyakov V.M. On periods of multiplying bifurcation of early Pleistocene glacial cycles. *Doklady Earth Sciences.* 2011. Vol. 436. No.2. P. 245–248.
7. Vakulenko N.V., Sonechkin D.M. Evidence of the upcoming end of the contemporary interglacial. *Doklady Earth Sciences.* 2013. Vol. 452. No. 1. P. 926–929.
8. Vakulenko N.V., Sonechkin D.M., Kotlyakov V.M. Increase in the global climate variability from about 400 ka bp until present. *Doklady Earth Sciences.* 2014. Vol. 456. No.2. P. 745–748.
9. Vakulenko N.V., Ivashchenko N.N., Kotlyakov V.M., Sonechkin D.M. On the period-multiplying bifurcation of glacial cycles in the Pliocene – Pleistocene. *Izvestiya VUZ. Applied nonlinear dynamics.* 2013. Vol. 21. No. 2. S. 88–112 (in Russian).
10. Vakulenko N.V., Sonechkin D.M., Kotlyakov V.M. Is climate predictable on a geological time scale? *Doklady Earth Sciences.* 2015. Vol. 460. No.1. P. 68–72.
11. Ivashchenko N.N., Kotlyakov V.M., Sonechkin D.M. et al. On bifurcations inducing glacial cycle lengthening during Pliocene/Pleistocene epoch. *Intern. J. Bifurcation and Chaos.* 2014. Vol. 24. No.8. 1440018 (8 pages).
12. Jin F.F., Neelin J.D., Ghil M. El Nino on the devil's: annual subharmonic steps to chaos. *Science.* 1994. Vol. 264. P. 70–72.
13. Jin F.F., Neelin J.D., Ghil M. El Nino/Southern Oscillation and the annual cycle: Subharmonic frequency locking and aperiodicity. *Physica D.* 1996. Vol. 98. P. 442–465.
14. Tziperman E., Stone L., Cane M.A. et al. El Nino chaos: overlapping of resonances between the seasonal cycle and the Pacific ocean – atmosphere oscillator. *Science.* 1994. Vol. 264. P. 72–74.
15. Tziperman E., Zebiak S.E., Cane M.A. Mechanisms of seasonal – ENSO interaction. *J. Atmos. Sci.* 1997. Vol. 54. P. 61–71.
16. Tziperman E., Cane M.A., Zebiak S.E. et al. Locking of El Nino's peak time to the end of the calendar year in the delayed oscillator picture of ENSO. *J. Climate.* 1998. Vol. 9. P. 2191–2199.
17. Eccles F., Tziperman E. Nonlinear effects on ENSO's period. *J. Atmos. Sci.* 2004. Vol. 61. P. 474–482.
18. Sonechkin D.M. Stokhastichnost' v modelyakh obshchey tsirkulyatsii atmosfery. L.: Gidrometeoizdat, 1984. 280 s. (in Russian).
19. Datsenko N.M., Zimin N.E. *Proceedings of the USSR Hydrometeorological Center.* 1987. Issue. 290. S. 111–127 (in Russian).
20. Vinogradskaya A.A., Vlasova, Datsenko N.M., Sonechkin D.M. *Proceedings of the USSR Hydrometeorological Center.* 1988. Issue. 297. S. 166–174 (in Russian).

21. Torrence C., Compo G.P. A practical guide to wavelet analysis. *Bull. Amer. Meteorol. Soc.* 1997. Vol. 79, No.1. P. 61–78.
22. Sonechkin D.M., Ivashchenko N.N. On the role of a quasiperiodic forcing in the interannual and interdecadal climate variations. *CLIVAR Exchanges*. 2001. Vol. 6, No.1. P. 5–6.
23. Sidorenkov N.S. The interaction between Earth's rotation and geophysical processes. 2009. Wiley-VCH & Co. KCaA, Weinheim, 305 p.
24. Currie R.G., Hameed S. Evidence of quasi-biennial oscillations in a general circulation model. *Geophys. Res. Lett.* 1988. Vol. 15. P. 649–652.
25. Hameed S., Currie R.G., LaGrone H. Signals in atmospheric pressure variations from 2 to ~ 70 months: Part 1. Simulations by two coupled ocean-atmosphere GCMs. *Intern. J. Climatol.* 2007. Vol. 15. No.8. P. 853–871.
26. Allan R.J., Ansell T.J. A new globally-complete monthly historical gridded mean sea level pressure data set (HadSLP2): 1850–2004. *J. Climate*. 2006. Vol. 19. P. 5816–05846.
27. Rayner N.A., Parker D.E., Horton E.B., Folland C.K., Alexander L.V., Rowell D.P., Kent E.C., Kaplan A. Global analyses of sea surface temperature, sea ice, and night marine air temperature since the late nineteenth century. *J. Geophys. Res.* 2003. Vol. 108, No. D14, 4407 10.1029/2002JD002670.
28. Compo G.P., Whitaker J.S., Sardeshmukh P.D. et al. The Twentieth Century Reanalysis Project. *Quarterly J. Roy. Meteorol. Soc.* 2011. 137. P. 1–28.
29. Braganza, K., Gergis J.L., Power S.B., Risbey J.S., Fowler A.M. A multiproxy index of the El Niño–Southern Oscillation, A.D. 1525–1982. *J. Geophys. Res.* 2009. 114. D05106.
30. Lorenz E.N. Deterministic nonperiodic flow. *J. Atmos. Sci.* 1963. Vol. 20. P. 130–141.
31. Roessler O.E. Continuous Chaos. In: Synergetics, Proceedings Intern. Workshop, Schloss Elmar, Bavaria, 1977: Berlin, 1977. P. 184–197.
32. Lorenz E.N. A very narrow spectral band. *J. Statist. Phys.* 1984. Vol. 36. No. 1–2. P. 1–14.
33. Serykh I.V., Sonechkin D.M. Confirmation of the oceanic pole tide influence on El Niño. *Sovremennye problemy distantsionnogo zondirovaniya Zemli iz Kosmosa*. 2016. Vol. 13, No.2. S. 44–52 (in Russian).
34. Kim S.-H., Ostlund S. Renormalization of mappings of the two-torus. *Physical Review Letters*. 1985. Vol. 55, No.1. P. 1165–1168.
35. Tsonis A.A., Roebber P.J., Elsner J.B. A characteristic time scale in the global temperature record // *Geophys. Res. Lett.* 1998. Vol. 25, No.15. P. 2821–2823.
36. Vakulenko N.V., Sonechkin D.M. Evidence of the solar activity's effect on El Niño – Southern oscillation // *Oceanology*. 2011. Vol. 51, No. 6. P. 935–939.
37. Feudel U., Kuznetsov S., Pikovsky A. Strange nonchaotic attractors. Singapore: *World Scientific Series on Nonlinear Science, Series A*. 2006. Vol. 56.

38. Bondeson A., Ott E., Antonsen T.M. Quasiperiodic forced damped pendula and Schroedinger equations with quasiperiodic potentials: implications of their equivalence // *Phys. Rev. Lett.* 1985. Vol. 55. No. 20. P. 2103–2106.
39. Ditto W.L., Spano M.L., Savege H.T. et al. Experimental observation of a strange nonchaotic attractor // *Phys. Rev. Lett.* 1990. Vol. 65. No 5. P. 533–536.



Серых Илья Викторович – родился в Москве (1983), окончил факультет ВМК Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова (2006). После окончания МГУ работает в Институте океанологии им. П.П. Ширшова Российской академии наук. Защитил в ИО РАН диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук (2009) в области теории колебаний климата, изменчивости гидрофизического режима Мирового океана, применения нелинейной динамики в исследовании климатических изменений. Опубликовал 20 научных статей по направлениям, указанным выше.

117997 Москва, Нахимовский проспект д. 36
Институт океанологии им. П.П. Ширшова РАН
E-mail: iserykh@ocean.ru

Сонечкин Дмитрий Михайлович – родился в Москве (1937), окончил географический факультет МГУ по кафедре метеорологии и климатологии, после чего работал как синоптик-прогнозист в Центральном институте прогнозов Гидрометеорологической службы СССР, а с начала 1960-х годов участвовал в работах по созданию метеорологической космической системы «Метеор». В 1970-х годах организовал в Гидрометеорологическом научно-исследовательском центре СССР лабораторию динамико-стохастических методов для применения идей и методов современной теории нелинейных динамических систем к задачам численного долгосрочного прогноза погоды и динамики климата. В начале 2000-х годов перешел на работу в Институт океанологии им. П.П. Ширшова РАН, продолжая участвовать в работах лаборатории динамико-стохастических методов в Гидрометцентре России. В настоящее время является также приглашенным профессором в Институте исследований окружающей среды холодных и засушливых регионов Китайской академии наук. Доктор физико-математических наук, профессор, академик РАН. Научные интересы: теоретические проблемы долгопериодных колебаний в климатической системе; численный долгосрочный прогноз погоды; современное изменение климата; реконструкции и исследования динамики климатов прошлого. Автор монографий: Метеорологическое дешифрирование космических снимков Земли (количественные методы). Л.: Гидрометеиздат, 1979; Стохастичность в моделях общей циркуляции атмосферы. Л.: Гидрометеиздат, 1984; Колебания климата по данным наблюдений. Тройной солнечный и другие циклы. М.: Наука, 2005 (в соавторстве с А.С. Мониным); Хаос и порядок в динамике погоды и климата. Водный и тепловой балансы тропосферы. С.-Пб.: Гидрометеиздат, 2005 (в соавторстве с Р.Ф. Бурлуцким). Общее количество публикаций – более 200.



117997 Москва, Нахимовский проспект, 36
Институт океанологии им. П.П. Ширшова РАН
123242 Москва, Большой Предтеченский пер., 11-13
Гидрометеорологический научно-исследовательский центр России
E-mail: dsonech@ocean.ru



**ОПРЕДЕЛЕНИЕ СТЕПЕНИ СИНХРОННОСТИ
ПЕРЕМЕЖАЮЩЕЙСЯ ФАЗОВОЙ СИНХРОНИЗАЦИИ
ПО ДАННЫМ ЭЛЕКТРОЭНЦЕФАЛОГРАММ
ЛАБОРАТОРНЫХ ЖИВОТНЫХ**

А. Д. Колоскова

Саратовский национальный исследовательский
государственный университет имени Н.Г. Чернышевского
Россия, 410012 Саратов, Астраханская, 83
Email: kolosk-nastyu@yandex.ru
Поступила в редакцию 4.07.2017

Явление перемежаемости встречается вблизи границ различных типов хаотической синхронизации. В данной работе представлены результаты исследования перемежающейся фазовой синхронизации в реальной нейрофизиологической системе. В случае электроэнцефалограмм головного мозга как исследуемой системы именно перемежающаяся фазовая синхронизация может указать на существование и развитие патологий, например, наличие эпилептических припадков. Создание и введение новейших методов для анализа различных типов динамики головного мозга являются одной из наиболее востребованных и активно развивающихся сфер в нейрофизиологии. В качестве исследуемых объектов были выбраны экспериментальные данные нейрофизиологической природы – сигналы электроэнцефалограмм, снятые с головного мозга специальной лабораторной крысы линии WAG/Rij, генетически предрасположенной к приступам эпилепсии. Исследуемая крыса рассматривалась в двух состояниях: под влиянием лекарственного препарата клонидин (способствует усилению эпилептических приступов в течение первых 6–12 часов, но не оказывает влияния на продолжительность пик-волновых разрядов) и без него. Для оценки степени перемежающегося поведения был выбран метод, основанный на расчете условного нулевого показателя Ляпунова. Найдено отношение условных показателей Ляпунова для разности фаз двух различных каналов головного мозга животного в случае воздействия лекарственных препаратов и в их отсутствие. Построены графики зависимости исследуемой величины от номера пик-волнового разряда. Обнаружено, что пик-волновые разряды лучше синхронизированы при действии лекарства. Результаты данной работы могут найти непосредственное применение в медицине для диагностики и выявления заболеваний, связанных с патологической активностью головного мозга.

Ключевые слова: Перемежающаяся фазовая синхронизация, условный нулевой показатель Ляпунова, сигналы электроэнцефалограмм, эпилепсия, медицинские препараты.

DOI: 10.18500/0869-6632-2017-5-26-34

Образец цитирования: Колоскова А.Д. Определение степени синхронности перемежающейся фазовой синхронизации по данным электроэнцефалограмм лабораторных животных // Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2017. Т. 25, № 5. С. 26–34.
DOI: 10.18500/0869-6632-2017-5-26-34

DETERMINING OF THE INTERMITTENT PHASE SYNCHRONIZATION DEGREE FROM NEUROPHYSIOLOGICAL DATA OF LABORATORY ANIMALS

A. D. Koloskova

Saratov State University
83, Astrakhanskaya, 410012 Saratov, Russia
E-mail: kolosk-nastya@yandex.ru

Received 4.07.2017

Intermittent behavior occurs near the boundaries of different types of chaotic synchronization. In this paper we present the results of investigation of intermittent phase synchronization in a real neurophysiological system. In the case of electroencephalogram (EEG) of the brain, chosen as a system under study, just the intermittent phase synchronization can indicate the existence and development of pathologies, for example, the presence of epileptic seizures. Creation and introduction of the newest methods for the analysis of various types of brain dynamics are one of the most popular and actively developing spheres in neurophysiology. EEG signals taken from the brain of a special laboratory WAG/Rij rat, which genetically predisposed to epileptic seizures, were observed. The rat is studied in two states: under the influence of the drug clonidine (results in the intensification of epileptic seizures during the first 6-12 hours, but does not affect the duration of spike-wave discharges) and without it. To estimate the degree of intermittent behavior the method based on the calculation of zero conditional Lyapunov exponent was chosen. The relation of conditional Lyapunov exponents for the phase difference of two different channels of the animal's brain in the case of the drug influence and in their absence is found. Plots of the dependence of the investigated quantity on the number of the spike-wave discharge are constructed. It was found that the spike-wave discharges are better synchronized under the influence of the drug. The results of this work can find direct application in medicine for diagnostics and detection of diseases associated with pathological activity of the brain.

Keywords: Intermittent phase synchronization, zero conditional Lyapunov exponent, electroencephalogram signals, epilepsy, medical drags.

DOI: 10.18500/0869-6632-2017-5-26-34

References: Koloskova A.D. Determining of the intermittent phase synchronization degree from neurophysiological data of laboratory animals. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*. 2017. Vol. 25, Issue 5. Pp. 26–34. DOI: 10.18500/0869-6632-2017-5-26-34

Введение

Наиболее распространенным режимом синхронизации в реальных системах является фазовая хаотическая синхронизация [1, 2]. Это обобщение классической синхронизации на случай неавтономных периодических или же связанных хаотических осцилляторов и означает захват фаз между взаимодействующими системами в отсутствие связи между их амплитудами [3, 4]. На границе фазовой синхронизации существует перемежающееся поведение, когда ламинарные участки (где существует захват фазы) прерываются турбулентными всплесками (со скачком фазы на 2π) [5, 6].

Возможно несколько вариантов для определения степени перемежающейся фазовой синхронизации. Во-первых, возможно рассчитать среднюю длительность

ламинарных фаз, то есть зависимость длины ламинарной фазы при фиксированном значении управляющего параметра от величины этого управляющего параметра [7, 8]. Существует и другой подход, основанный на вычислении условного нулевого показателя Ляпунова [9]. На границе фазовой синхронизации в режиме перемежаемости «игольное ушко», характеризующимся сверхдлинными ламинарными фазами, он оказывается уже отрицательным (то есть переходит в отрицательную область за некоторое время до достижения критического значения, соответствующего порогу установления фазовой синхронизации). Следовательно, величина условного нулевого показателя Ляпунова может быть рассмотрена как мера синхронизма перемежающейся фазовой синхронизации, имеющей место на границе возникновения синхронного режима [9, 10].

В данной работе проведена оценка степени синхронности режима перемежающейся фазовой синхронизации в реальной нейрофизиологической системе при помощи второго подхода. Для оценки величины нулевого условного показателя Ляпунова использовался ранее разработанный метод [10–12].

1. Описание метода

Идея метода [10–12] основывается на рассмотрении квадратичного отображения с управляющими параметрами Ω , ε и гауссовым шумом ξ_n

$$x_{n+1} = x_n + \Omega x_n^2 - \varepsilon + \xi_n, \quad (1)$$

где переменная x является аналогом разности фаз между системами. Расчетная формула для нулевого показателя Ляпунова в данном случае выглядит следующим образом:

$$\Lambda = \int_{x_1}^{x_2} \rho(x) \ln |1 + 2\Omega x| dx, \quad (2)$$

где $\rho(x)$ – плотность вероятности, определяемая выражением

$$\rho(x) = A \exp \left[-\frac{2}{D} \left(\varepsilon x - \frac{\Omega x^3}{3} \right) \right], \quad (3)$$

A – коэффициент нормировки, D – интенсивность шумового воздействия.

Алгоритм вычисления нулевого показателя Ляпунова состоит из нескольких шагов: аппроксимация аналитической закономерностью (3) распределения разности фаз взаимодействующих систем, полученного численно; поиск параметров аппроксимации (Ω , D , ε , A); вычисление показателя Ляпунова по формуле (2).

В работах [13, 14] описана модификация метода применительно к случаю реальных систем. Эта модификация заключается:

во-первых, в сравнении разложений аналитических выражений (3) в ряд Тейлора до второго порядка малости и выражения

$$\rho_G(x) = A_G \exp[-2B(x - K)^2], \quad (4)$$

определяющего нормальное распределение плотности вероятности (здесь K и B – аналоги математического ожидания и дисперсии, A_G – нормировочный множитель); во-вторых, в установлении с помощью указанных разложений взаимосвязи между параметром D и остальными управляющими параметрами системы в виде

$$D = \frac{\sqrt{\varepsilon\Omega}}{B}. \quad (5)$$

Остальные шаги метода оценки величины условного показателя Ляпунова в данном случае оказываются такими же, как описано выше.

2. Применение метода к нейрофизиологической системе

Применим метод, описанный в предыдущем разделе, для оценки степени синхронности перемежающейся фазовой синхронизации в реальной нейрофизиологической системе. В качестве объекта исследования удобно выбрать данные электроэнцефалограмм (ЭЭГ), снятых с различных областей головного мозга пациентов, страдающих эпилепсией. Известно, что эпилептические ЭЭГ представляют собой перемежающиеся временные реализации, содержащие в себе пик-волновые разряды (ламинарные участки) и чередующиеся с ними области фоновой активности головного мозга (турбулентные участки). Для изучения данного феномена существуют также специально выведенные в лабораториях крысы линии WAG/Rij, которые являются генетической моделью абсанс-эпилепсии. Электроэнцефалографические и клинические признаки абсанс-эпилепсии наблюдаются у 90% крыс этой линии [15], а болезнь прогрессирует с течением жизни животных.

В рамках настоящей работы были изучены ЭЭГ крысы линии WAG/Rij в двух ее состояниях: под влиянием лекарственного препарата клонидин (который способствует усилению эпилептических приступов в течение первых 6–12 часов действия препарата) и без него. Экспериментальные данные были получены специалистами-нейрофизиологами в Радбаут университете Наймегена (Нидерланды) в лаборатории профессора Ж. ван Люжетаалара и в Институте высшей нервной деятельности и нейрофизиологии РАН под руководством д.б.н. Е.Ю. Ситниковой [16–18].

В качестве взаимодействующих систем принимались сигналы с двух разных областей головного мозга крысы (каналы FC и R, рис. 1). Фазы для них вводились в рассмотрение при помощи непрерывного вейвлетного преобразования [19]

$$W(s, t) = \frac{1}{\sqrt{S}} \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \psi^* \left(\frac{t - t_0}{s} \right) dt, \quad (6)$$

с материнским вейвлетом Морле ($\Omega_0 = 2\pi$)

$$\psi^*(v) = \left(\frac{1}{\sqrt[4]{\pi}} \right) \exp(j\Omega_0 v) \exp \left(-\frac{v^2}{2} \right). \quad (7)$$

Таким образом, фаза и разность фаз определяются по формулам

$$\varphi(s, t) = \arg W(s, t), \quad (8)$$

$$\Delta\varphi(t) = \varphi_1(s_{\max}, t) - \varphi_2(s_{\max}, t), \quad (9)$$

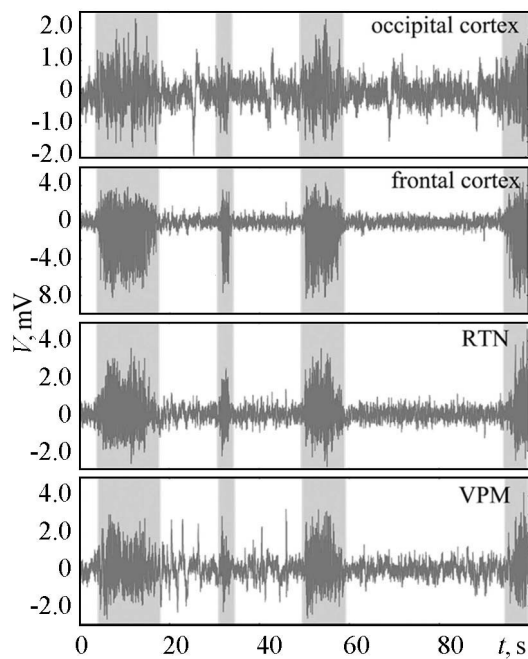


Рис. 1. ЭЭГ 4-х каналов (сверху вниз): затылочная кора, лобная кора, R и V – ядра таламуса

Fig.1. EEG 4 channels (from top to bottom): occipital cortex, frontal cortex, R and V – thalamus nuclei

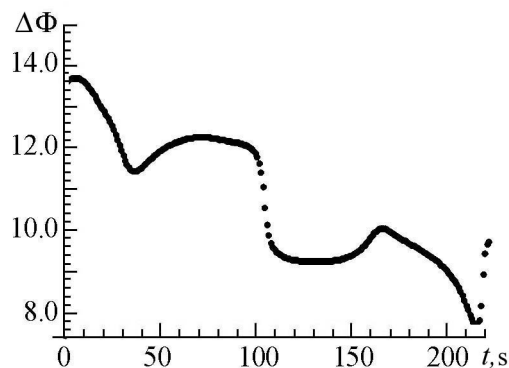


Рис. 2. Временная зависимость разности фаз между сигналами, снятыми с каналов FC и R головного мозга крысы в течение пик-волновых разрядов действия без лекарства

Fig. 2. The time dependence of the phase difference between signals taken from FC and R channels of the rat brain during peak-wave discharges without a drug clonidine

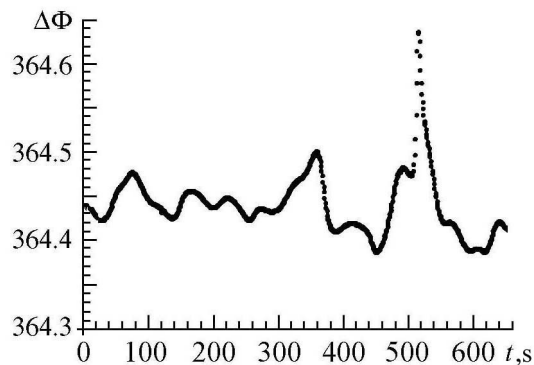


Рис. 3. Временная зависимость разности фаз между сигналами, снятыми с каналов FC и R головного мозга крысы, в течение пик-волновых разрядов под действием лекарства клонидин

Fig. 3. The time dependence of the phase difference between signals taken from the FC and R channels of the rat brain during the peak-wave discharges under the action of the drug clonidine

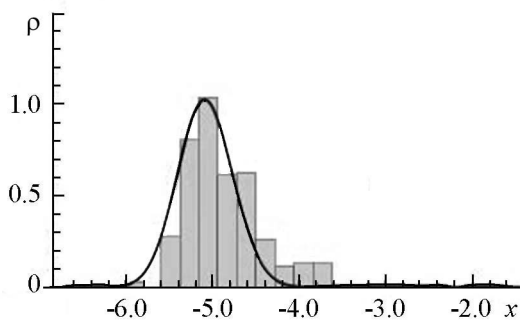


Рис. 4. Распределение плотности вероятности $\rho(x)$, полученное для пик-волновых разрядов (гистограмма), и его аппроксимация закономерностью (3) без лекарств

Fig. 4. The probability density distribution $\rho(x)$, obtained for peak-wave discharges (histogram), and its approximation by the law (3) without drugs

где s_{\max} – временной масштаб, соответствующий максимуму интегральной плотности распределения энергии $|W(s, t)|^2$.

Расчет условного нулевого показателя Ляпунова производился в течение пик-волновых разрядов, то есть во время эпилептических приступов.

В ходе проведенных исследований обнаружено, что степень синхронизма пик-волновых разрядов более высокая у крыс под действием лекарства. Оба показателя оказались отрицательными, а их отношения оказалось равным $\Lambda_1/\Lambda_2 = 0.64495$. Рис. 2 и 3 иллюстрируют зависимости разности фаз сигналов, снятых с двух разных каналов головного мозга во время пик-волновых разрядов. Полученные распределения плотности вероятности разности фаз и их аппроксимация закономерностью (3) приведены на рис. 4 и 5.

На рис. 6 представлены графики зависимости нулевого показателя Ляпунова от номера пик-волнового разряда. Из верхнего графика следует, что искомая величина остается постоянной независимо от номера N пик-волнового разряда до момента введения препарата клонидин. Известно, что одно из его фармакологических действий заключается в увеличении продолжительности эпилептических приступов, а следовательно, увеличивается длина пик-волновых разрядов (ламинарных участков). Таким образом показатель Ляпунова должен становиться более отрицательным и оставаться постоянным в течение действия препарата, что и наблюдается на нижнем графике рис. 6.

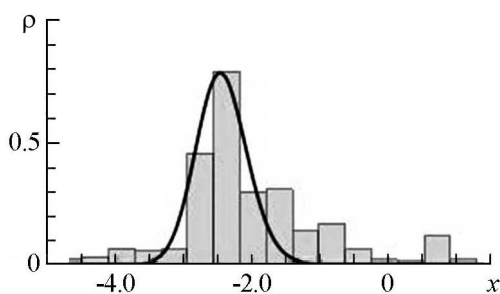


Рис. 5. Распределение плотности вероятности $\rho(x)$, полученное для пик-волновых разрядов (гистограмма), и его аппроксимация закономерностью (3) под действием лекарства клонидин

Fig. 5. The probability density distribution $\rho(x)$ obtained for the peak-wave discharges (histogram), and its approximation by the law (3) under the action of the drug clonidine

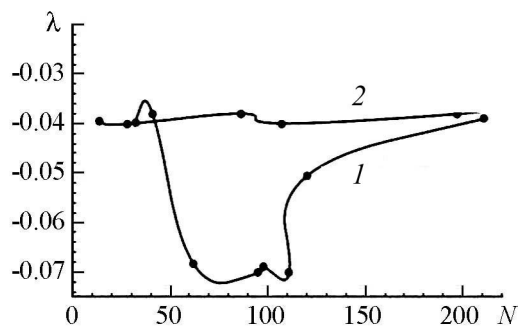


Рис. 6. Зависимости нулевого условного показателя Ляпунова от номера пик-волнового разряда на ЭЭГ крысы линии WAG/Rij в случае воздействия лекарственных препаратов (1) и в их отсутствие (2)

Fig. 6. Dependences of the zero conditional Lyapunov exponent on the number of the peak-wave discharge on the EEG of the WAG / Rij rat in the case of drugs (1) and in their absence (2)

Заключение

Таким образом, в настоящей работе представлены результаты применения метода оценки степени синхронности режима перемежающейся фазовой синхронизации по временному ряду к реальным сигналам. В качестве исследуемых объектов выбраны экспериментальные данные нейрофизиологической природы – сигналы электроэнцефалограмм, снятые с различных областей головного мозга крысы линии WAG/Rij. Выявлена степень перемежающейся фазовой синхронизации крысы линии WAG/Rij без лекарств и под действием препарата клонидин. Продемонстрированы

законы изменения показателя Ляпунова в обоих рассматриваемых случаях. Обнаружено, что пик-волновые разряды лучше синхронизированы под действием лекарства.

Автор выражает благодарность профессорам А.А. Короновскому и А.Е. Храмову за профессиональные замечания и полезные обсуждения; доктору биологических наук Е.Ю. Ситниковой за предоставленные экспериментальные данные ЭЭГ, а доценту М.О. Журавлеву за помощь в их обработке. Отдельную благодарность автор выражает своему научному руководителю О.И. Москаленко за ценные советы и рекомендации по подготовке и оформлению статьи.

Работа выполнена при поддержке Совета по грантам Президента РФ для государственной поддержки молодых российских ученых – кандидатов наук (МК-4574.2016.2).

Библиографический список

1. Janson N.B., Balanov A.G., Anishchenko V.S., McClintock P.V.E. Phase synchronization between several interacting processes from univariate data // *Phys. Rev. Lett.* 2001. Vol. 86 (9). Pp. 1749–1752.
2. Bob P., Palus M., Susta M., Glaslova K. EEG phase synchronization in patients with paranoid schizophrenia // *Neuroscience Letters.* 2008. Vol. 447. Pp. 73–77.
3. Анищенко В.С., Постнов Д.Э. Эффект захвата базовой частоты хаотических автоколебаний. Синхронизация странных аттракторов // *Письма в ЖТФ.* 1988. Vol. 14 (6). Pp. 569–573.
4. Rosenblum M.G., Pikovsky A.S., Kurths J. Phase synchronization of chaotic oscillators // *Phys. Rev. Lett.* 1996. Vol. 76 (11). Pp. 1804–1807.
5. Pikovsky A.S., Osipov G.V., Rosenblum M.G., Zaks M., Kurths J. Attractor-repeller collision and Eyelet intermittency at the transition to phase synchronization // *Phys. Rev. Lett.* 1997. Vol. 79 (1). Pp. 47–50.
6. Hramov A.E., Koronovskii A.A., Kurovskaya M.K., Boccaletti S. Ring intermittency in coupled chaotic oscillators at the boundary of phase synchronization // *Phys. Rev. Lett.* 2006. Vol. 97. 114101.
7. Hramov A.E., Koronovskii A.A., Kurovskaya M.K., Ovchinnikov A.A., Boccaletti S. Length distribution of laminar phases for type-I intermittency in the presence of noise // *Phys.Rev.* 2007. Vol. E76. 026206.
8. Куровская М.К. Распределение длительностей ламинарных фаз при перемежаемости «игольное ушко» // *Письма в ЖТФ.* 2008. Т. 34 (24). С. 48–54.
9. Hramov A.E., Koronovskii A.A., Kurovskaya M.K. Zero Lyapunov exponent in the vicinity of the saddle-node bifurcation point in the presence of noise // *Phys. Rev. E.* 2008. Vol. 78. 036212.
10. Moskalenko O.I., Koronovskii A.A., Hramov A.E. Lyapunov exponent corresponding to enslaved phase dynamics: Estimation from time series // *Phys. Rev. E.* 2015. Vol. 92. 012913.
11. Москаленко О.И., Короновский А.А., Храмов А.Е., Журавлев М.О. Оценка степени синхронности режима перемежающейся фазовой синхронизации по временному ряду: Модельные системы и нейрофизиологические данные // *Письма в ЖЭТФ.* 2016. Т. 103 (8). С. 606–610.
12. Москаленко О.И., Павлов А.С. Способ оценки нулевого условного показателя

- Ляпунова по временному ряду // Письма в ЖТФ. 2014. Т. 40 (12). С. 66–72.
13. Колоскова А.Д., Москаленко О.И. Определение степени синхронности перемежающейся фазовой синхронизации по данным электроэнцефалограмм человека // Письма в ЖТФ. 2017. Т. 43 (10). С. 102–110.
 14. Moskalenko O.I., Koloskova A.D., Zhuravlev M.O., Koronovskii A.A., Hramov A.E. Intermittent phase synchronization in human epileptic brain // Proc. SPIE. 2017. Vol. 10063. 1006316
 15. Coenen A.M., van Luijtelaar G.L. The Wag/Rij rat model for absence epilepsy: Age and sex factors // Epilepsy Res. 1987. Vol. 1 (5). Pp. 297–301.
 16. Hramov A.E., Koronovskii A.A., Makarov V.A., Pavlov A.N., Sitnikova E.Yu. Wavelets in Neuroscience. Springer: Heidelberg New York, Dordrecht London, 2015.
 17. Sitnikova E.Yu., Hramov A.E., Koronovskii A.A., van Luijtelaar G. Sleep spindles and spike-wave discharges in EEG: Their generic features, similarities and distinctions disclosed with Fourier transform and continuous wavelet analysis // Journal of Neuroscience Methods. 2009. Vol. 180. Pp. 304–316.
 18. van Luijtelaar G., Hramov A.E., Sitnikova E.Yu., Koronovskii A.A. Spike-wave discharges in WAG/Rij rats are preceded by delta and theta precursor activity in cortex and thalamus // Clinical Neurophysiology. 2011. Vol. 122. Pp. 687–695.
 19. Hramov A.E., Koronovskii A.A. An approach to chaotic synchronization // Chaos. 2004. Vol. 14 (3). Pp. 603–610.

References

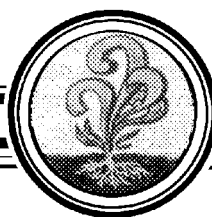
1. Janson N.B., Balanov A.G., Anishchenko V.S., McClintock P.V.E. Phase synchronization between several interacting processes from univariate data. *Phys. Rev. Lett.* 2001. Vol. 86 (9). Pp. 1749–1752.
2. Bob P., Palus M., Susta M., Glaslova K. EEG phase synchronization in patients with paranoid schizophrenia. *Neuroscience Letters.* 2008. Vol. 447. Pp. 73–77.
3. Anisichenko V.S., Postnov D.E. Effect of locking of the base frequency of chaotic oscillations. Synchronization of strange attractors. *Soviet Technical Physics Letters.* 1988. Vol. 14 (6). Pp. 569–573 (in Russian).
4. Rosenblum M.G., Pikovsky A.S., Kurths J. Phase synchronization of chaotic oscillators. *Phys. Rev. Lett.* 1996. Vol. 76 (11). Pp. 1804–1807.
5. Pikovsky A.S., Osipov G.V., Rosenblum M.G., Zaks M., Kurths J. Attractor-repeller collision and Eyelet intermittency at the transition to phase synchronization. *Phys. Rev. Lett.* 1997. Vol. 79 (1). Pp. 47–50.
6. Hramov A.E., Koronovskii A.A., Kurovskaya M.K., Boccaletti S. Ring intermittency in coupled chaotic oscillators at the boundary of phase synchronization. *Phys. Rev. Lett.* 2006. Vol. 97. 114101.
7. Hramov A.E., Koronovskii A.A., Kurovskaya M.K., Ovchinnikov A.A., Boccaletti S. Length distribution of laminar phases for type-I intermittency in the presence of noise. *Phys. Rev.* 2007. Vol. E76. 026206.
8. Kurovskaya M.K. Distribution of laminar phases at Eyelet-type intermittency. *Technical Physics Letters.* 2008. Vol. 34 (12). Pp. 1063–1065.
9. Hramov A.E., Koronovskii A.A., Kurovskaya M.K. Zero Lyapunov exponent in the vicinity of the saddle-node bifurcation point in the presence of noise. *Phys. Rev. E.* 2008. Vol. 78. 036212.

10. Moskalenko O.I., Koronovskii A.A., Hramov A.E. Lyapunov exponent corresponding to enslaved phase dynamics: Estimation from time series. *Phys. Rev. E*. 2015. Vol. 92. P. 012913.
11. Moskalenko O.I., Koronovskii A.A., Hramov A.E., Zhuravlev M.O. Estimate of the degree of synchronization in the intermittent phase synchronization regime from a time series: Model systems and neurophysiological data. *JETP Letters*. 2016. Vol. 103 (8). Pp. 539–543.
12. Moskalenko O.I., Pavlov A.S. A method of evaluating a zero conditional Lyapunov exponent from time series. *Technical Physics Letters*. 2014. Vol. 40 (6). Pp. 546–548.
13. Koloskova A.D., Moskalenko O.I. Determining the degree of synchronism for intermittent phase synchronization in human electroencephalography data. *Technical Physics Letters*. 2017. Vol. 43 (5). Pp. 499–502.
14. Moskalenko O.I., Koloskova A.D., Zhuravlev M.O., Koronovskii A.A., Hramov A.E. Intermittent phase synchronization in human epileptic brain. *Proc. SPIE*. 2017. Vol. 10063. 1006316.
15. Coenen A.M., van Luijelaar E.L. The Wag/Rij rat model for absence epilepsy: Age and sex factors. *Epilepsy Res.* 1987. Vol. 1 (5). Pp. 297–301.
16. Hramov A.E., Koronovskii A.A., Makarov V.A., Pavlov A.N., Sitnikova E.Yu. *Wavelets in Neuroscience*. Springer: Heidelberg New York, Dordrecht London, 2015.
17. Sitnikova E.Yu., Hramov A.E., Koronovskii A.A., van Luijelaar G. Sleep spindles and spike-wave discharges in EEG: Their generic features, similarities and distinctions disclosed with Fourier transform and continuous wavelet analysis. *Journal of Neuroscience Methods*. 2009. Vol. 180. Pp. 304–316.
18. van Luijelaar G., Hramov A.E., Sitnikova E.Yu., Koronovskii A.A. Spike-wave discharges in WAG/Rij rats are preceded by delta and theta precursor activity in cortex and thalamus. *Clinical Neurophysiology*. 2011. Vol. 122. Pp. 687–695.
19. Hramov A.E., Koronovskii A.A. An approach to chaotic synchronization. *Chaos*. 2004. Vol. 14 (3). Pp. 603–610.



Колоскова Анастасия Дмитриевна – родилась в Саратове (1995). Окончила с отличием бакалавриат факультета нелинейных процессов Саратовского государственного университета по направлению «Прикладная математика и физика» (2017). Продолжает обучение в магистратуре кафедры нелинейной физики ФНП СГУ. Научный руководитель – к.ф.-м.н., доцент О.И. Москаленко. Занимается научной работой в области хаотической синхронизации и перемежающегося поведения, имеющего место на границе области, принимает участие в НИР, поддержанных грантами Министерства образования и науки РФ. Автор и соавтор статей в центральных реферируемых научных журналах (Письма в ЖТФ, Proceedings of SPIE), входящих в международные системы научного цитирования Web of Science и Scopus. Результаты трудов докладывались на научных конференциях и семинарах различного уровня, от студенческих конференций факультета нелинейных процессов (первое место) до Международных конференций.

Россия, 410012 Саратов, Астраханская, 83
 Саратовский государственный университет имени Н.Г. Чернышевского
 Email: kolosk-nastya@yandex.ru



ИССЛЕДОВАНИЕ МИНИАТЮРНОГО НИЗКОВОЛЬТНОГО ГЕНЕРАТОРА ОБРАТНОЙ ВОЛНЫ МИЛЛИМЕТРОВОГО ДИАПАЗОНА С ПЛАНАРНОЙ ЗАМЕДЛЯЮЩЕЙ СИСТЕМОЙ

Р. А. Торгашов^{1,2}, А. И. Бенедик¹, Н. М. Рыскин^{1,2}

¹Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского
Россия, 410012 Саратов, Астраханская, 83

²Саратовский филиал Института радиотехники
и электроники им. В.А. Котельникова РАН
Россия, 410019 Саратов, Зелёная, 38

E-mail: torgashovra@gmail.com; andrej-benedik@yandex.ru; RyskinNM@info.sgu.ru

Поступила в редакцию 14.07.2017

Освоение терагерцевого диапазона частот является одной из приоритетных проблем современной вакуумной СВЧ-электроники. При создании подобных СВЧ-устройств для повышения мощности и КПД целесообразно использовать пространственно-развитые замедляющие системы (ЗС) и электронные пучки с большим поперечным сечением. Также при миниатюризации приборов принципиальным становится вопрос снижения ускоряющего напряжения. Перспективными в этом случае являются планарные ЗС на диэлектрических подложках.

В данной работе проведены исследования низковольтного генератора миллиметрового диапазона на основе лампы обратной волны (ЛОВ) с ленточным электронным пучком и планарной встречно-штыревой ЗС на подложке из кварца.

Расчеты электродинамических характеристик ЗС показали, что она обладает большим замедлением и достаточной широкой полосой частот: при относительно небольших значениях напряжения 1.0–3.5 kV обеспечивается перестройка частоты в диапазоне 60–75 GHz. Сопротивление связи, усредненное по сечению пучка $500 \times 50 \mu\text{m}^2$, который располагается на расстоянии 50 μm от металлизированной поверхности ЗС, увеличивается с ростом частоты от 2 Ω до 40 Ω в рабочем диапазоне частот.

Исходя из этих результатов, были получены необходимые для компьютерного моделирования параметры ЛОВ-генератора. Для компьютерного моделирования использовались известные уравнения одномерной нестационарной теории ЛОВ с учетом сил пространственного заряда и потерь в замедляющей системе. Были проведены расчеты самовозбуждения генератора, ЗС которого состояла из 50 периодов. Для данной ЗС стартовый ток составляет 10–30 mA, что соответствует плотности 50–100 A/cm². При разумных значениях тока, не превышающих 50 mA, выходная мощность составляет 1–2 W.

Исследованная в данной работе ЛОВ может быть использована в качестве генератора входного сигнала для усилителя на основе лампы бегущей волны с планарной ЗС.

Ключевые слова: Вакуумная микроэлектроника, миллиметровый диапазон, лампа обратной волны, встречно-штыревая замедляющая система, ленточный электронный пучок.

DOI: 10.18500/0869-6632-2017-25-5-35-46

Образец цитирования: Торгашов Р.А., Бенедик А.И., Рыскин Н.М. Исследование миниатюрного низковольтного генератора обратной волны миллиметрового диапазона с планарной замедляющей системой // Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2017. Т. 25, № 5. С. 35-46. DOI: 10.18500/0869-6632-2017-25-5-35-46

STUDY OF MINIATURIZED LOW-VOLTAGE BACKWARD-WAVE OSCILLATOR WITH A PLANAR SLOW-WAVE STRUCTURE

R. A. Torgashov^{1,2}, A. I. Benedik¹, N. M. Ryskin^{1,2}

¹Saratov State University

83 Astrakhanskaya Street, 410012 Saratov, Russia

²Saratov Branch, Institute of Radio Engineering and Electronics

38 Zelenaya Street, 410019 Saratov, Russia

E-mail: torgashovra@gmail.com; andrej-benedik@yandex.ru; RyskinNM@info.sgu.ru

Received 14.07.2017

The development of the terahertz frequency range is one of the priority problems of modern vacuum microwave electronics. For increasing power and efficiency of such devices, it is favorable to use spatially developed slow-wave structures (SWSs) and electron beams with a large cross section. For miniaturization of vacuum-tube devices, reducing of the accelerating voltage becomes a problem of principal importance. In this respect, planar SWSs on dielectric substrates are very promising. In this paper, the results of study of a miniaturized low-voltage millimeter-band backward-wave oscillator (BWO) with a sheet electron beam and planar interdigital SWS on silica substrate are presented. Calculations of the electromagnetic characteristics of the SWS showed that it has large slow-down factor and relatively wide passband. Frequency tuning in the 60–75 GHz range is provided at relatively low operation voltage 1.0–3.5 kV. The coupling impedance averaged over the $500 \times 50 \mu\text{m}^2$ beam cross section, increases with frequency from 2 to 40 Ω in the operating frequency range. The beam is placed at 50 μm distance from the metallized surface of the SWS. Based on these results, the parameters required for computer simulation were calculated. The well-known equations of the 1D nonstationary BWO theory considering the space charge forces and cold losses are used for the computer simulation. Self-excitation current for the BWO with SWS consisting of 50 periods was calculated. The starting current is about 10–30 mA, which corresponds to 50–100 A/cm² current density. The output power attains of 1–2 W for the current values not exceeding 50 mA. The BWO studied in this work can be used as a driver oscillator for a traveling-wave tube amplifier with planar SWS.

Keywords: Vacuum microelectronics, millimeter band, backward-wave oscillator, interdigital slow wave structure, sheet electron beam.

DOI: 10.18500/0869-6632-2017-25-5-35-46

References: Torgashov R.A., Benedik A.I., Ryskin N.M. Study of miniaturized low-voltage backward-wave oscillator with a planar slow-wave structure. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*. 2017. Vol. 25. Issue 5. P. 35-46. DOI: 10.18500/0869-6632-2017-25-5-35-46

Введение

На данный момент освоение терагерцевого диапазона частот (0.1–3.0 THz) является одной из приоритетных проблем современной вакуумной сверхвысокочастотной (СВЧ) электроники. Исследованием миниатюрных аналогов классических генераторов и усилителей вакуумной электроники занимаются многие научные коллективы разных стран [1–4]. При создании электровакуумных СВЧ усилителей и генераторов О-типа в коротковолновых диапазонах для повышения мощности и КПД представляется целесообразным использование пространственно-развитых замедляющих систем (ЗС) и электронных пучков с большим поперечным сечением. Также при миниатюризации приборов принципиальным становится вопрос снижения ускоряющего напряжения. В этом отношении наиболее перспективными представляются планарные ЗС на диэлектрических подложках, предложенные в работе [5]. Предполагалось, что приборы с такими ЗС будут использованы для создания логических и запоминающих элементов СВЧ диапазона [6]. В работах [7, 8] представлены результаты разработки меандровой и встречно-штыревой ЗС на диэлектрических подложках из кварца и поликора для низковольтных приборов О-типа. ЗС были изготовлены с использованием технологии фотолитографии. В последние годы над созданием аналогичных ЗС работает ряд авторов [9–14].

В настоящей работе представлены результаты моделирования выходных характеристик низковольтного ЛОВ-генератора с ЗС типа «встречные штыри» средней части миллиметрового диапазона (60–75 GHz) на подложке из кварца.

1. Электродинамические характеристики ЗС типа «встречные штыри» на диэлектрической подложке

На рис. 1 представлено схематическое изображение и фотография ЗС типа «встречные штыри» на диэлектрической подложке из кварца. Геометрические размеры ЗС средней части миллиметрового диапазона представлены в Таблице.

Электродинамические характеристики данной ЗС исследовались в работах [7, 8]. При моделировании предполагалось, что ЗС помещена в прямоугольный волновод

Таблица. Геометрические размеры ЗС
Table. Dimensions of the Interdigital SWS

Период ЗС SWS period, d	100 μm
Высота штыря Pin length, l	825 μm
Ширина штыря Pin width, s	25 μm
Ширина вытравленного полоска Etched strip width, w	25 μm
Толщина металлического слоя Metallic strip thickness, t	1 μm
Толщина подложки Substrate thickness, h	500 μm
Количество периодов Number of periods	50

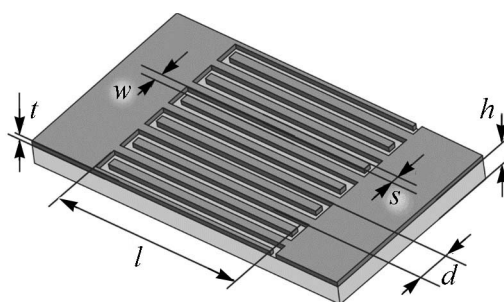


Рис. 1. Схематическое изображение планарной ЗС типа «встречные штыри» на диэлектрической подложке

Fig. 1. Schematic diagram of interdigital planar SWS on dielectric substrate

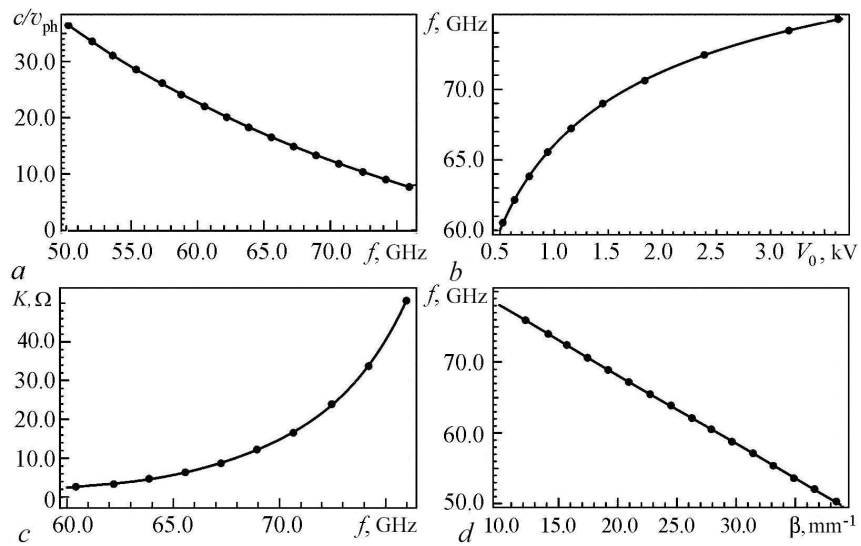


Рис. 2. Электродинамические характеристики ЗС типа «встречные штыри» на диэлектрической подложке: *a* – зависимость замедления от частоты; *b* – зависимость частоты синхронизма от напряжения пучка; *c* – зависимость сопротивления связи, усредненного по сечению пучка, от частоты; *d* – дисперсионная характеристика в рабочем диапазоне частот

Fig. 2. *a* – slow-wave factor vs frequency; *b* – the frequency of synchronism vs beam voltage; *c* – coupling impedance vs frequency; *d* – dispersion diagram in the operating frequency range

сечением $3.6 \times 1.8 \text{ mm}$, при этом размеры волновода не оказывали существенного влияния на результаты расчетов. На рис. 2, *a* представлена зависимость замедления c/v_{ph} от частоты, а на рис. 2, *b* – зависимость частоты синхронизма от напряжения пучка V_0 . Из этих рисунков видно, что ЗС обладает большим замедлением и достаточно широкой полосой частот. Соответственно, при относительно небольших рабочих значениях напряжения 1.0–3.5 kV обеспечивается перестройка частоты в пределах 60–75 GHz.

Рис. 2, *c* иллюстрирует зависимость сопротивления связи K от частоты. Сопротивление связи усреднено по сечению пучка $500 \times 50 \text{ }\mu\text{m}^2$, который располагается на расстоянии $50 \text{ }\mu\text{m}$ от металлизированной поверхности ЗС. Видно, что сопротивление связи растет с ростом частоты и составляет порядка 2–40 Ω в рабочем диапазоне частот. На рис. 2, *d* приведена дисперсионная характеристика ЗС. Из рисунка видно, что взаимодействие электромагнитной волны с пучком происходит на обратной пространственной гармонике.

2. Основные уравнения нестационарной теории ЛОВ и расчет параметров модели

Для компьютерного моделирования ЛОВ-генератора использовались известные уравнения одномерной нестационарной теории ЛОВ с учетом сил пространственного заряда (ПЗ) и потерь в ЗС (см., например, [15–17])

$$\frac{\partial F}{\partial \tau} - \frac{\partial F}{\partial \xi} + dF = -LI_1, \quad (1)$$

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial \xi^2} = -L^2 \left(1 + \frac{1}{2\pi N} \frac{\partial \theta}{\partial \xi} \right)^3 \text{Re} \left[F e^{i\theta} + iq \sum_m \frac{I_m e^{im\theta}}{m} \right]. \quad (2)$$

Уравнение (1) есть уравнение возбуждения волны током с медленно меняющейся амплитудой, а (2) представляет собой уравнение движения электронов в поле электромагнитной волны. Последний член в квадратных скобках в уравнении (2) отвечает за действие поля ПЗ, которое учитывается методом гармоник.

В уравнениях (1), (2) введены следующие обозначения: $\theta = (\omega_0 t - \beta_e z)$ – фаза электрона; ω_0 – частота синхронизма, на которой фазовая скорость $v_{ph}(\omega_0)$ равна скорости электронов v_0 ; $\beta_e = \omega_0/v_0$ – электронная постоянная распространения; $I_m = 1/\pi \int_0^{2\pi} e^{-im\theta} d\theta_0$ – m -я гармоника сгруппированного тока; $F(\xi, \tau) = E_z/(2\beta_e V_0 C^2)$ – безразмерная амплитуда синхронной гармоники поля E_z . Безразмерные координата ξ и время τ введены следующим образом:

$$\xi = z/l, \quad \tau = \frac{t - z/v_0}{l/v_0 + l/v_g},$$

где v_g – групповая скорость, l – длина пространства взаимодействия. Как видно из рис. 2, d , групповую скорость в рабочем диапазоне частот можно считать постоянной, $v_g \approx 6.175 \times 10^6$ m/s.

Система (1), (2) содержит четыре безразмерных параметра: L , N , q и d . Здесь $L = 2\pi CN$ – безразмерный параметр, имеющий смысл нормированной длины пространства взаимодействия; $N = \beta_e l/2\pi$ – электрическая длина; $C = (I_0 K/4V_0)^{1/3}$ – параметр усиления Пирса; I_0 и V_0 – постоянный ток пучка и напряжение пучка, соответственно; K – сопротивление связи; $q = (\omega_p R/\omega_0 C)^2$ – параметр ПЗ (ω_p – плазменная частота, R – коэффициент редукиции, который в расчетах принят равным 0.5); d – параметр холодного затухания.

Уравнения (1), (2) следует дополнить граничными условиями для электронного пучка

$$\theta|_{\xi=0} = \theta_0, \quad \frac{\partial \theta}{\partial \xi} \Big|_{\xi=0} = 0, \quad (3)$$

которые отражают отсутствие модуляции пучка на входе в ЗС, а также граничным условием для ВЧ-поля, которое в случае ЛОВ-генератора имеет вид

$$F(\xi = 1) = 0. \quad (4)$$

Если рассматривать установившийся режим колебаний с постоянной амплитудой и частотой, из уравнений (1), (2) следует закон сохранения (интеграл энергии), который с учетом омических потерь имеет вид

$$\eta = \frac{C |F(\xi = 0)|^2}{2} + dC \int_0^1 |F(\xi)|^2 d\xi, \quad (5)$$

где η – электронный КПД

$$\eta = 1 - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1}{(1 + \theta_\xi/2\pi N)} d\theta_0. \quad (6)$$

Очевидно, что мощность, отдаваемая в нагрузку, есть

$$P_{out} = I_0 V_0 \frac{C |F(\xi = 0)|^2}{2}. \quad (7)$$

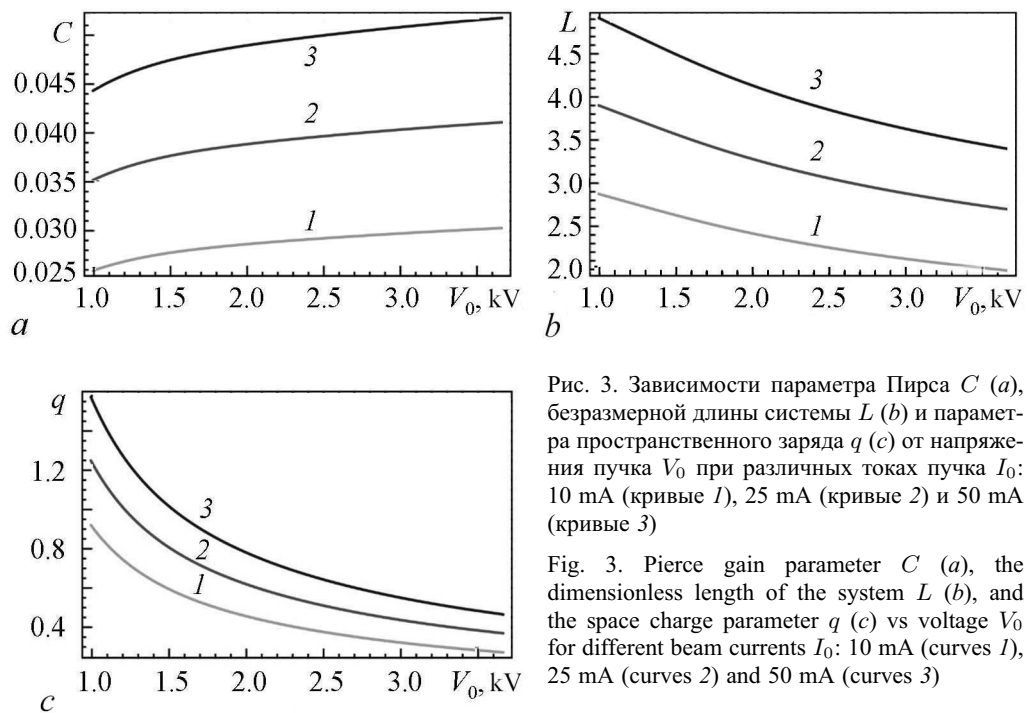


Рис. 3. Зависимости параметра Пирса C (а), безразмерной длины системы L (б) и параметра пространственного заряда q (с) от напряжения пучка V_0 при различных токах пучка I_0 : 10 мА (кривые 1), 25 мА (кривые 2) и 50 мА (кривые 3)

Fig. 3. Pierce gain parameter C (a), the dimensionless length of the system L (b), and the space charge parameter q (c) vs voltage V_0 for different beam currents I_0 : 10 mA (curves 1), 25 mA (curves 2) and 50 mA (curves 3)

Корректность проводимых расчетов контролировалась выполнением закона сохранения (5).

На основании результатов, полученных при электродинамическом моделировании планарной ЗС (см. раздел 1), были рассчитаны необходимые для компьютерного моделирования параметры: параметр Пирса C , нормированная длина пространства взаимодействия L и параметр пространственного заряда q при различных токах пучка. Результаты расчётов представлены на рис. 3.

Параметр холодного затухания был выбран равным $d = 1.75$, что соответствует затуханию порядка -15 dB/cm. Такое значение согласуется с данными холодных измерений [8].

3. Результаты компьютерного моделирования ЛОВ-генератора

Перейдем к результатам компьютерного моделирования режимов колебаний ЛОВ. Прежде всего, были проведены расчеты самовозбуждения генератора. Изготовленные ранее образцы ЗС имели длину 2 mm, то есть 20 периодов [7, 8]. Однако, как показывает моделирование, в этом случае требуется ленточный пучок с ультравысокой плотностью, превышающей 500 A/cm². Хотя такой пучок в принципе может быть реализован [18], его формирование и транспортировка представляет чрезвычайно сложную задачу. Поэтому в данной работе рассматривается удлиненная ЗС, состоящая из 50 периодов. Для такой ЗС стартовый ток составляет 10–30 мА. Соответствующая зависимость стартового тока от напряжения показана на рис. 4. С учетом поперечных размеров пучка 500×500 μm^2 можно найти, что плотность тока в данном случае должна быть равна 50–100 A/cm². Ленточные пучки с аналогичными характеристиками были недавно реализованы экспериментально [19, 20].

С ростом напряжения стартовый ток нарастает примерно по линейному закону (действительно, параметр усиления Пирса зависит от отношения этих двух величин). В области низких напряжений $V_0 < 1$ kV ток, наоборот, начинает нарастать с уменьшением напряжения, что объясняется резким увеличением параметра ПЗ (см. рис. 3, *c*). Частота генерации оказывается примерно на 0.5 GHz ниже частоты синхронизма (см. рис. 2, *b*).

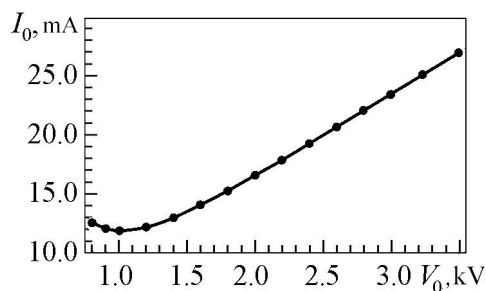


Рис. 4. Зависимость стартового тока от напряжения пучка

Fig. 4. Start-oscillation current vs beam voltage

На рис. 5, *a* приведены зависимости выходной мощности от времени, иллюстрирующие процессы установления колебаний при различных токах пучка и напряжении $V_0 = 2.5$ kV. При токе $I_0 = 25$ mA, что незначительно превышает порог генерации, время установления колебаний составляет около 25 ns. С ростом тока время установления колебаний уменьшается, а мощность увеличивается. Переходный процесс начинает носить осциллирующий характер. Как известно, при большом превышении порога генерации в ЛОВ реализуются автомодуляционные и хаотические режимы генерации [15, 16, 21, 22]. Однако в ходе проведенных расчетов даже при увеличении тока свыше 100 mA подобные режимы не наблюдались, то есть имеет место подавление автомодуляции пространственным зарядом [15, 16].

Частота генерации при данном значении напряжения примерно равна 72 GHz. С ростом тока она постепенно уменьшается (эффект электронного смещения частоты), однако это уменьшение незначительно.

На рис. 5, *b* построены графики зависимости мощности от тока пучка при трех различных значениях напряжения. Видно, что с ростом тока мощность растет примерно по линейному закону, причем бóльшим напряжениям соответствует бóльшая максимальная мощность. Это, очевидно, обусловлено тем, что с ростом напряжения увеличивается параметр Пирса C , а параметр ПЗ уменьшается (см. рис. 3). В целом, при разумных значениях тока, не превышающих 50 mA, выходная мощность составляет 1–2 W.

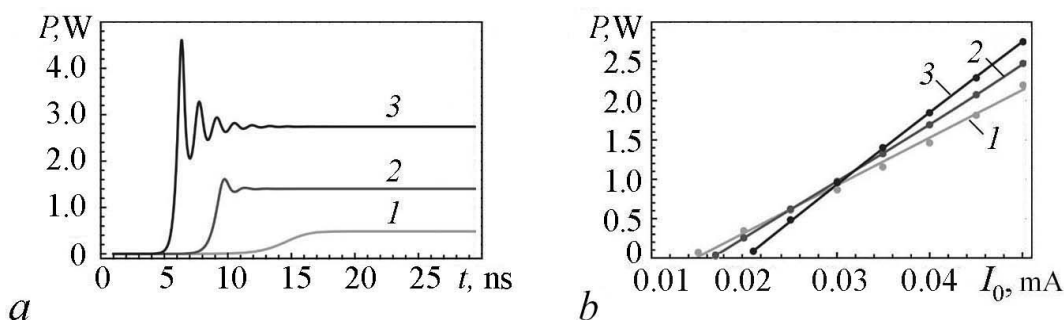


Рис. 5. *a* – пример установления колебаний в ЛОВ-генераторе при ускоряющем напряжении $V_0 = 2.5$ kV и токах I_0 : 25 mA (кривая 1), 35 mA (кривая 2), 50 mA (кривая 3). *b* – зависимости выходной мощности от тока при различных напряжениях V_0 : 1.5 kV (кривая 1), 2.0 kV (кривая 2), 2.5 kV (кривая 3)

Fig. 5. *a* – time histories of the BWO output power at voltage $V_0 = 2.5$ kV and beam current I_0 : 25 mA (curve 1), 35 mA (curve 2), 50 mA (curve 3). *b* – output power vs beam current at voltage V_0 : 1.5 kV (curve 1), 2.0 kV (curve 2), 2.5 kV (curve 3)

Заключение

В настоящей работе представлены результаты компьютерного моделирования ЛОВ-генератора средней части миллиметрового диапазона (60–75 GHz) с ленточным электронным пучком и планарной ЗС типа «встречные штыри» на диэлектрической подложке. Поскольку ЗС обладает большим замедлением, генератор является относительно низковольтным: рабочий диапазон напряжений составляет 1–3 kV. Проведенные расчеты показывают, что для ЗС из 50 периодов самовозбуждение происходит при значениях плотности тока 50–100 A/cm², что достижимо для существующих термоэмиссионных катодов. При токах, не превышающих 50 mA, выходная мощность достигает 1–2 W. Исследованная в данной работе ЛОВ может быть использована в качестве генератора входного сигнала для усилителя на основе лампы бегущей волны с планарной ЗС [7].

Авторы благодарны А.Г. Рожнёву, Г.В. Торгашову и Н.И. Сеницыну за полезные советы и обсуждение результатов.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 17-12-01160).

Библиографический список

1. *Rozhnev A.G., Ryskin N.M., Sokolov D.V., Trubetskov D.I., Han S.T., Kim J.I., Park G.S.* Novel concepts of vacuum microelectronic microwave devices with field emitter cathode arrays // *Physics of Plasmas*. 2002. Vol. 9, No. 9. P. 4020–4027.
2. *Ives R.L.* Microfabrication of high-frequency vacuum electron devices // *IEEE Trans. Plasma Sci.* 2004. Vol. 32, No.3. P. 1277–1291.
3. *Srivastava V.* THz vacuum microelectronic devices // *J. Physics: Conf. Series*. 2008. Vol. 114, No.1. 012015.
4. *Booske J.H., Dobbs R.J., Joye C.D., Kory C.L., Neil G.R., Park G.S., Park J.H., Temkin R.J.* Vacuum electronic high power terahertz sources // *IEEE Trans. Terahertz Sci. Technol.* 2011. Vol. 1, No.1. P. 54–75.
5. *Гуляев Ю.В., Жбанов А.И., Захарченко Ю.Ф., Нефедов И.С., Сеницын Н.И., Торгашов Г.В.* Планарные замедляющие системы миниатюрных электровакуумных СВЧ приборов // *Радиотехника и электроника*. 1994. Т. 39, № 12. С. 2049–2058.
6. *Сеницын Н.И., Гуляев Ю.В., Девятков Н.Д., Голант М.Б., Алексеенко А.М., Захарченко Ю.Ф., Торгашов Г.В.* Возможности вакуумной микроэлектроники на пути к построению СВЧ вакуумных интегральных схем // *Радиотехника*. 1999. № 4. С. 8–17.
7. *Бенедик А.И., Рожнёв А.Г., Рыскин Н.М., Сеницын Н.И., Торгашов Г.В., Шалаев П.Д.* Разработка планарных замедляющих систем на диэлектрических подложках для приборов вакуумной микроэлектроники миллиметрового и субмиллиметрового диапазона // *Радиотехника*. 2016. № 7. С. 47–52.
8. *Benedik A.I., Rozhnev A.G., Ryskin N.M., Sinitsyn N.I., Torgashov G.V., Torga-*

- shov R.A.* Planar V-band slow-wave structures for low-voltage tubes with sheet electron beam // Abstracts of the 18th IEEE International Vacuum Electronics Conference (IVEC 2017), London, United Kingdom 24–26 April 2017.
9. *Shen F., Wei Y.-Y., Xu X., Liu Y., Yin H.-R., Gong Y.-B., Wang W.-X.* 140-GHz V-shaped microstrip meander-line traveling wave tube // *J. Electromagnetic Waves and Applications*. 2012. Vol. 26, No.1. P. 89–98.
 10. *Sumathy M, Augustin D, Datta S.K., Christie L., Kumar L.* Design and RF characterization of W-band meander-line and folded-waveguide slow-wave structures for TWTs // *IEEE Trans. Electron Devices*. 2013. Vol. 60, No.5. P. 1769–1775.
 11. *Bai N., Shen M., Sun X.* Investigation of microstrip meander-line traveling-wave tube using EBG ground plane // *IEEE Trans. Electron Devices*. 2015. Vol. 62, No.5. P. 1622–1627.
 12. *Ulisse G., Krozer V.* Investigation of a planar metamaterial slow wave structure for traveling wave tube applications // Abstracts of the 18th IEEE International Vacuum Electronics Conference (IVEC 2017), London, United Kingdom 24–26 April 2017.
 13. *Shaomeng W., Aditya S.* A microfabricated V-shaped microstrip meander-line slow-wave structure // Abstracts of the 18th IEEE International Vacuum Electronics Conference (IVEC 2017), London, United Kingdom 24–26 April 2017.
 14. *Galdetskiy A., Rakova E.* New slow wave structure for W-band TWT // Abstracts of the 18th IEEE International Vacuum Electronics Conference (IVEC 2017), London, United Kingdom 24–26 April 2017.
 15. *Безручко Б.П., Булгакова Л.В., Кузнецов С.П., Трубецков Д.И.* Экспериментальное и теоретическое исследование стохастических автоколебаний в лампе обратной волны // *Лекции по электронике СВЧ и радиофизике (5-я зимняя школа-семинар инженеров)*. Кн. 5. Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 1980. С. 25–77.
 16. *Кузнецов С.П.* Нелинейная динамика лампы обратной волны: Автомодаляция, мультистабильность, контроль // *Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика*. 2006. Т. 14, № 4. С. 3–35.
 17. *Han S.T., Jang K.H., So J.K., Park G.S., Ryskin N.M.* Enhancement of backward-wave interaction by external feedback // *Phys. Plasmas*. 2005. Vol. 12, No.8. 083103.
 18. *Baig A., Gamzina D., Kimura T., Atkinson J., et al.* Performance of a nano-CNC machined 220-GHz traveling wave tube amplifier // *IEEE Trans. Electron Devices*. 2017. Vol. 64, No.5. P. 2390–2397.
 19. *Каретникова Т.А., Рожнёв А.Г., Рыскин Н.М., Торгашов Г.В., Сеницын Н.И., Григорьев Ю.А., Бурцев А.А., Шалаев П.Д.* Моделирование лампы бегущей волны субтерагерцевого диапазона с замедляющей системой типа сдвоенной гребенки и ленточным электронным пучком // *Радиотехника и электроника*. 2016. Т. 61, № 1. С. 54–60.
 20. *Бурцев А.А., Григорьев Ю.А., Журавлев С.Д., Навроцкий И.А., Сахаджи Г.В., Шумихин К.В.* Исследование электронной пушки с компрессией ленточного потока для вакуумных усилителей терагерцевого диапазона // *Радиотехника*. 2016. № 7. С. 97–100.
 21. *Рыскин Н.М., Титов В.Н.* О сценарии перехода к хаосу в однопараметрической

модели лампы обратной волны // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 1998. Т. 6, № 1. С. 75–92.

22. Рыскин Н.М., Тутов В.Н. Исследование автомодуляционных режимов колебаний в релятивистской лампе обратной волны // Изв. вузов. Радиофизика. 1999. Т. 42, № 6. С. 566–572.

References

1. Rozhnev A.G., Ryskin N.M., Sokolov D.V., Trubetskov D.I., Han S.T., Kim J.I., Park G.S. Novel concepts of vacuum microelectronic microwave devices with field emitter cathode arrays. *Physics of Plasmas*. 2002. Vol. 9, No.9. P. 4020–4027.
2. Ives R.L. Microfabrication of high-frequency vacuum electron devices. *IEEE Trans. Plasma Sci.* 2004. Vol. 32, No.3. P. 1277–1291.
3. Srivastava V. THz vacuum microelectronic devices. *J. Physics: Conf. Series*. 2008. Vol. 114, No.1. 012015.
4. Booske J.H., Dobbs R.J., Joye C.D., Kory C.L., Neil G.R., Park G.S., Park J.H., Temkin R.J. Vacuum electronic high power terahertz sources. *IEEE Trans. Terahertz Sci. Technol.* 2011. Vol. 1, No.1. P. 54–75.
5. Gulyaev Yu.V., Zhbanov A.I., Zakharchenko Yu.F., Nefedov I.S., Sinitsyn N.I., Torgashov G.V. Planar slow-wave systems for miniature electrovacuum microwave devices. *Radiotekhnika i Elektronika*. 1994. Vol. 39, No.12. P. 2049–2058 (In Russian).
6. Sinitsyn N.I., Gulyaev Yu.V., Devjatkov N.D., Golant M.B., Alekseyenko A.M., Zakharchenko Yu.F., Torgashov G.V. Potentials of vacuum microelectronics on the way to constructing microwave vacuum integrated circuits. *Radiotekhnika*. 1999. No.4. P. 8–17 (In Russian).
7. Benedik A.I., Rozhnev A.G., Ryskin N.M., Sinitsyn N.I., Torgashov G.V., Shalaev P.D. Development of planar slow-wave structures on dielectric substrates for millimeter and submillimeter wave vacuum microelectronic devices. *Radiotekhnika*. 2016. № 7. С. 47–52 (In Russian).
8. Benedik A.I., Rozhnev A.G., Ryskin N.M., Sinitsyn N.I., Torgashov G.V., Torgashov R.A. Planar V-band slow-wave structures for low-voltage tubes with sheet electron beam. *Abstracts of the 18th IEEE International Vacuum Electronics Conference (IVEC 2017)*, London, United Kingdom 24–26 April 2017.
9. Shen F., Wei Y.-Y., Xu X., Liu Y., Yin H.-R., Gong Y.-B., Wang W.-X. 140-GHz V-shaped microstrip meander-line traveling wave tube. *J. Electromagnetic Waves and Applications*. 2012. Vol. 26, No.1. P. 89–98.
10. Sumathy M., Augustin D., Datta S.K., Christie L., Kumar L. Design and RF characterization of W-band meander-line and folded-waveguide slow-wave structures for TWTs. *IEEE Trans. Electron Devices*. 2013. Vol. 60, No.5. P. 1769–1775.
11. Bai N., Shen M., Sun X. Investigation of microstrip meander-line traveling-wave tube using EBG ground plane. *IEEE Trans. Electron Devices*. 2015. Vol. 62, No.5. P. 1622–1627.
12. Ulisse G., Krozer V. Investigation of a planar metamaterial slow wave structure for

- traveling wave tube applications. *Abstracts of the 18th IEEE International Vacuum Electronics Conference (IVEC 2017)*, London, United Kingdom 24–26 April 2017.
13. Shaomeng W., Aditya S. A microfabricated V-shaped microstrip meander-line slow-wave structure. *Abstracts of the 18th IEEE International Vacuum Electronics Conference (IVEC 2017)*, London, United Kingdom 24–26 April 2017.
 14. Galdetskiy A., Rakova E. New slow wave structure for W-band TWT. *Abstracts of the 18th IEEE International Vacuum Electronics Conference (IVEC 2017)*, London, United Kingdom 24–26 April 2017.
 15. Bezruchko B.P., Bulgakova L.V., Kuznetsov S.P., Trubetskov D.I. Experimental and theoretical study of stochastic self-oscillations in a backward-wave oscillator. *Lectures on Microwave Electronics and Radiophysics (Proc. of 5th Winter School-Seminar)*. Saratov: Saratov University Press, 1980. Vol. 5. P. 25–77 (In Russian).
 16. Kuznetsov S.P. Nonlinear dynamics of backward-wave tube: Self-modulation, multi-stability, control. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*. 2006. Vol. 14, No.4. P. 3–35 (In Russian).
 17. Han S.T., Jang K.H., So J.K., Park G.S., Ryskin N.M. Enhancement of backward-wave interaction by external feedback. *Phys. Plasmas*. 2005. Vol. 12, No.8. 083103.
 18. Baig A., Gamzina D., Kimura T., Atkinson J., et al. Performance of a nano-CNC machined 220-GHz traveling wave tube amplifier. *IEEE Trans. Electron Devices*. 2017. Vol. 64, No.5. P. 2390–2397.
 19. Karetnikova T.A., Rozhnev A.G., Ryskin N.M., Torgashov G.V., Sinitsyn N.I., Grigoriev Yu.A., Burtsev A.A., Shalaev P.D. Modeling a subterahertz traveling wave tube with a slow-wave structure of the double grating type and a sheet electron beam. *J. Comm. Technol. Electronics*. 2016. Vol. 61, № 1. С. 50–55.
 20. Burtsev A.A., Grigoriev Yu.A., Zhuravlev S.D., Navrotsky I.A., Sakhadzhi G.V., Shumikhin K.V. Study of electron gun with converging sheet beam for vacuum amplifiers at terahertz frequencies. *Radiotekhnika*. 2016. No 7. P. 97–100 (In Russian).
 21. Ryskin N.M., Titov V.N. On the transition to chaos scenario in one parameter model of backward wave oscillator. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*. 1998. Vol. 6, No. 1. P. 75–92 (In Russian).
 22. Ryskin N.M., Titov V.N. Self-modulation oscillatory modes in a relativistic backward-wave oscillator. *Radiophysics and Quantum Electronics*. 1999. Vol. 42, No. 6. P. 500–505.



Торгашов Роман Антонович – родился в Саратове (1997). Окончил МОУ «Лицей прикладных наук» Саратова (2014) и поступил на факультет нелинейных процессов Саратовского госуниверситета. С 2016 года работает в Саратовском филиале Института радиотехники и электроники РАН. Области научных интересов: приборы вакуумной электроники терагерцевого диапазона, вакуумная микроэлектроника. Имеет две публикации тезисов докладов на научных конференциях.

Россия, 410012 Саратов, Астраханская, 83
 Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского
 Россия, 410019 Саратов, Зелёная, 38
 Саратовский филиал Института радиотехники
 и электроники им. В.А. Котельникова РАН
 E-mail: torgashovra@gmail.com



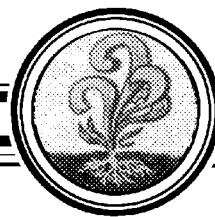
Бенедик Андрей Иванович – родился в Мукачево Закарпатской области Украины (1990). Окончил МОУ «Лицей прикладных наук» Саратова (2008) и поступил на факультет нелинейных процессов Саратовского государственного университета им. Н.Г. Чернышевского. В 2013 году с отличием защитил диплом по специальности «Физика открытых нелинейных систем». Аспирант 4-го года обучения кафедры нелинейной физики СГУ. С 2013 года также работает инженером АО «НПП «Алмаз» Саратова. Область научных интересов: исследование приборов вакуумной микроэлектроники О-типа с пространственно-развитыми замедляющими системами, численное моделирование нелинейных явлений в приборах вакуумной СВЧ-электроники. Автор ряда публикаций по данным направлениям.

Россия, 410012 Саратов, Астраханская, 83
Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского
andrej-benedik@yandex.ru



Рыскин Никита Михайлович окончил физический факультет Саратовского государственного университета (1991). Защитил диссертации на соискание ученой степени кандидата (1996) и доктора физико-математических наук (2005). С 1997 года работает на факультете нелинейных процессов СГУ, профессор, с 2014 года заведующий кафедрой нелинейной физики. С 2013 года работает старшим научным сотрудником Саратовского филиала ИРЭ РАН. Область научных интересов: нелинейная теория колебаний и волн, приборы вакуумной электроники ТГц-диапазона, вакуумная микроэлектроника. Имеет более 200 научных публикаций по указанным выше направлениям.

Россия, 410012 Саратов, Астраханская, 83
Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского
Россия, 410019 Саратов, Зелёная, 38
Саратовский филиал Института радиотехники
и электроники им. В.А. Котельникова РАН
E-mail: RyskinNM@info.sgu.ru



УПРАВЛЕНИЕ СПЕКТРОМ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ СПИНОВЫХ ВОЛН В ГЕТЕРОСТРУКТУРЕ НА ОСНОВЕ ЛАТЕРАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ МАГНИТНЫХ МИКРОВОЛНОВОДОВ

А. А. Грачев, А. В. Садовников

Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского
Россия, 410012 Саратов, Астраханская, 83
E-mail: andrew.a.grachev@gmail.com, sadovnikovav@gmail.com

Поступила в редакцию 1.07.2017

Проведено исследование гетероструктур, характеристиками которых можно управлять путём изменения статических магнитных и электрических полей. Тонкие плёнки железо-иттриевого граната демонстрируют существенно меньшие значения затухания спиновых волн по сравнению с металлическими магнитными плёнками, например, из пермаллоя. Длина распространения спиновых волн в магнитных микроволноводах и магнонных кристаллах составляет при комнатной температуре величину порядка единиц миллиметров. Использование латеральных магнитных микроструктур представляется важным для разработки элементов межсоединений в планарных топологиях магнонных сетей. Управление перестройкой частоты с помощью магнитного поля для устройств магноники происходит медленно и требует большого расхода энергии. В отличие от этого, электрическая настройка гораздо быстрее. В настоящей работе с помощью численного моделирования, основанного на методе конечных элементов, проведено исследование пространственной динамики гибридных электромагнитных спиновых волн в мультиферроидной гетероструктуре, образованной из параллельно ориентированных ферромагнитных микроволноводов с сегнетоэлектрическим слоем. Показана возможность гибридизации поперечных мод волн, распространяющихся в сегнетоэлектрическом слое, с симметричными и антисимметричными модами латеральной структуры, что обуславливает возможность трансформации дисперсионных характеристик мультиферроидной структуры с помощью изменения электрического поля, приложенного к слою сегнетоэлектрика. Проведено исследование влияния изменения толщины сегнетоэлектрического слоя на электродинамические характеристики волн в гетероструктуре. На основе предложенной в настоящей работе латеральной мультиферроидной структуры представляется возможным создание ответвителей и делителей мощности спин-волновых сигналов с двойным управлением.

Ключевые слова: Латеральные волноводы, гетероструктура, электромагнитная спиновая волна, устройства с двойным управлением.

DOI: 10.18500/0869-6632-2017-25-5-47-55

Образец цитирования: Грачев А.А., Садовников А.В. Управление спектром электромагнитных спиновых волн в гетероструктуре на основе латеральной системы магнитных микроволноводов // Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2017. Т. 25, № 5. С. 47–55. DOI: 10.18500/0869-6632-2017-25-5-47-55

CONTROL OF THE ELECTROMAGNETIC SPIN WAVES SPECTRUM IN A HETEROSTRUCTURE BASED ON THE LATERAL SYSTEM OF MAGNETIC MICROWAVEGUIDES

A. A. Grachev, A. V. Sadovnikov

Saratov State University
83, Astrakhanskaya, 410012 Saratov, Russia
E-mail: andrew.a.grachev@gmail.com, sadovnikovav@gmail.com

Received 1.07.2017

At present, the actual task is to study magnetic microstructures, the characteristics of which can be controlled by changing static magnetic and electric fields. Thin films of yttrium-iron garnet show much lower damping of spin waves in comparison with metallic magnetic films. The propagation length of spin waves in magnetic microwaveguides and magnonic crystals is of the order of a few millimeters at room temperature. The use of lateral magnetic microstructures is important for the development of interconnection elements in planar topologies of magnonic networks. The control of frequency tuning by means of a magnetic field for magnonic devices is slow and requires a large expenditure of energy. In contrast, electrical adjustment is much faster. In the present work, a numerical simulation of finite element based modeling has been performed to study the spatial dynamics of hybrid electromagnetic spin waves in a multiferroic heterostructure formed from parallel oriented ferromagnetic microwaves with a ferroelectric layer. The possibility of hybridization of the transverse modes of waves propagating in the ferroelectric layer with symmetric and antisymmetric modes of the lateral structure is shown, which makes it possible to transform the dispersion characteristics of a multiferroic structure with a change in the electric field applied to the ferroelectric layer. The effect of changing geometric parameters, such as the thickness of the ferroelectric layer, on the electrodynamic characteristics of waves in a heterostructure was studied. On the basis of the proposed lateral multiferroic structure, it is possible to create couplers and power dividers of spin-wave signals with a double control.

Keywords: Lateral waveguides, heterostructure, spin wave, signal processing devices, coupler.

DOI: 10.18500/0869-6632-2017-25-5-47-55

References: Grachev A.A., Sadovnikov A.V. Control of the electromagnetic spin waves spectrum in a heterostructure based on the lateral system of magnetic microwaveguides. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*. 2017. Vol. 25. Issue 5. P. 47–55. DOI: 10.18500/0869-6632-2017-25-5-47-55

Введение

В настоящее время актуальной задачей является исследование магнитных микроструктур, характеристиками которых можно управлять путём изменения статических магнитных и электрических полей [1–7]. Магнитные волноведущие структуры на основе тонких плёнок железо-иттриевого граната (ЖИГ) представляют большой интерес [8, 9], так как в них возможно распространение спиновых волн, обладающих низким значением коэффициента затухания. В слоистых микроструктурах, на основе ЖИГ-микроволновода и нагруженного на него сегнетоэлектрического (СЭ) слоя, оказывается возможным управлять спектром магнитостатических спиновых волн (МСВ) с помощью изменения величины как магнитного, так и электрического полей [6, 7, 10]. Управление перестройкой частоты с помощью магнитного поля для

устройств магноники [2] происходит значительно медленнее и требует большего расхода энергии, в отличие от электрической перестройки. Используемые латеральные магнитные микроструктуры являются ключевыми элементами «магنونных сетей», которые находят широкое применение в планарных устройствах для обработки сигналов [8, 9, 11]. Использование сегнетоэлектрических слоев позволяет существенно расширить функциональность латеральных микроволноводов за счет дополнительной возможности двойного управления их характеристиками.

В настоящей работе представлены результаты исследования пространственной динамики гибридных электромагнитных спиновых волн (ЭМСВ) в системе латеральных мультиферроиков, образованных из параллельно ориентированных ферромагнитных микроволноводов с СЭ-слоем. Показана возможность гибридизации поперечных мод волн, распространяющихся в сегнетоэлектрическом слое, с симметричными и антисимметричными модами латеральной структуры, что обуславливает возможность трансформации дисперсионных характеристик мультиферроидной структуры при изменении электрического поля, приложенного к слою сегнетоэлектрика. На основе разработанной модели показана возможность эффективного управления длиной связи ЭМСВ при изменении напряженности постоянного электрического поля. Также показано, что изменение толщины СЭ-слоя приводит к изменению длины связи, что также необходимо учитывать при создании ответвителей и делителей мощности спин-волновых сигналов с двойным управлением на основе предложенной латеральной мультиферроидной структуры.

Рассматриваемая структура схематически показана на рис. 1: на подложке из галлий-гадолиниевого граната (GGG) толщиной 500 μm , шириной 440 μm и длиной 6 mm на расстоянии 40 μm друг от друга расположены два ЖИГ-микроволновода толщиной $t_{\text{YIG}} = 10 \mu\text{m}$, шириной $w_{\text{YIG}} = 200 \mu\text{m}$ и длиной 5 mm. На микроволноводах расположен СЭ-слой из керамического материала на основе титаната барий-стронция (BST), имеющий толщину $t_{\text{BST}} = 200 \mu\text{m}$, ширину $w_{\text{BST}} = 440 \mu\text{m}$ и длину 3 mm. Диэлектрическая проницаемость СЭ-слоя $\epsilon = 2800$. Структура помещается в однородное статическое магнитное поле величиной $H_0 = 1200 \text{ Oe}$ (ориентированное вдоль оси x) для эффективного возбуждения в ЖИГ-микроволноводе поверхностной магнитостатической волны (ПМСВ), также называемой спиновой волной Дэймона-Эшбаха [12–14]. При распространении волн Дэймона-Эшбаха вдоль полосы ЖИГ происходит гибридизация их с модами электромагнитных волн СЭ-слоя. Таким образом, в области СЭ вдоль латеральных ЖИГ-микроволноводов распространяется ЭМСВ. Конечная ширина обоих магнитных микроволноводов приводит к уменьшению внутреннего магнитного поля для случая касательного намагничивания (см. рис. 1), при этом величина внутреннего магнитного поля в центре каждого микроволновода составляет $H_i = 1148 \text{ Oe}$.

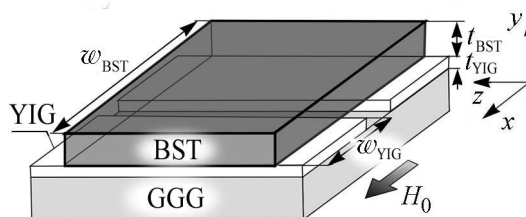


Рис. 1. Схема рассматриваемой структуры. YIG – железо-иттриевый гранат, GGG – галлий-гадолиниевый гранат, BST – сегнетоэлектрический слой

Fig. 1. Schematic view of the structure. YIG – yttrium-iron garnet, GGG – gadolinium gallium garnet, BST – ferroelectric layer

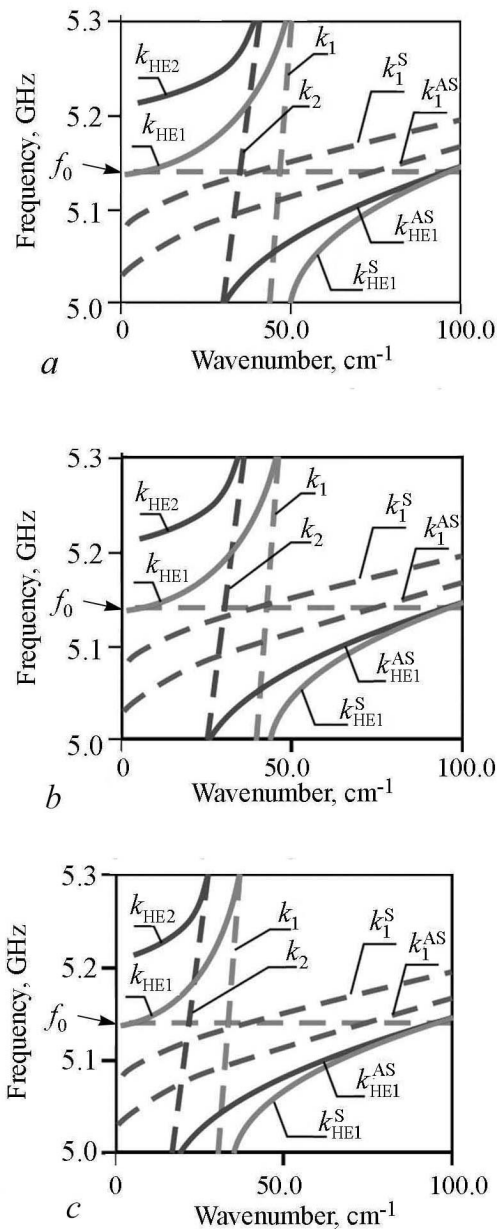


Рис. 2. Трансформация спектра ЭМСВ при изменении значения диэлектрической проницаемости и увеличении величины внешнего электрического поля: *a* – $E = 0$ kV/cm, $\epsilon = 2800$; *b* – $E = 10$ kV/cm, $\epsilon = 2300$; *c* – $E = 20$ kV/cm, $\epsilon = 1600$

Fig. 2. The transformation of the HSEW spectrum with change the relative permittivity and the increase of the electric field: *a* – $E = 0$ kV/cm, $\epsilon = 2800$; *b* – $E = 10$ kV/cm, $\epsilon = 2300$; *c* – $E = 20$ kV/cm, $\epsilon = 1600$

Для расчёта электродинамических характеристик спиновых волн в рассматриваемой структуре было произведено численное моделирование с помощью метода конечных элементов (МКЭ) [15, 16]. В микроволновом диапазоне длин волн при отсутствии приложенного напряжения эффективные значения диэлектрической проницаемости СЭ-слоя, GGG-слоя и ЖИГ-полосок полагали равными $\epsilon = 2800$, $\epsilon_{GGG} = 9$ и $\epsilon_{YIG} = 14$, соответственно. Тензор $\hat{\mu}$ магнитной проницаемости ЖИГ-микроволноводов задавали в виде [14, 17]

$$\hat{\mu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \mu(f) & -i\mu_a(f) \\ 0 & i\mu_a(f) & \mu(f) \end{pmatrix},$$

$$\mu(f) = \frac{f_H(f_H + f_M) - f^2}{f_H^2 - f^2},$$

$$\mu_a(f) = \frac{f_M f}{f_H^2 - f^2},$$

где $f_M = \gamma 4\pi M_0 = 4.9$ GHz, $f_H = \gamma H_0 = 3.21$ GHz, $\gamma = 2.8$ MHz/Oe – гиромагнитное отношение в ЖИГ, $M_0 = 139$ G – намагниченность насыщения пленки ЖИГ [14, 17].

На рис. 2 показана дисперсия ПМСВ в латеральных микроволноводах без СЭ-слоя. Спектр собственных мод двух идентичных латеральных микроволноводов состоит из симметричной и антисимметричной поперечных мод. Для симметричной моды в направлении x амплитуды магнитных потенциалов в двух плёнках ЖИГ имеют одну и ту же фазу, а для антисимметричной они находятся в противофазе [9]. Штриховые кривые показывают рассчитанную дисперсию для симметричных k_1^S и антисимметричных k_1^{AS} поперечных мод ПМСВ в латеральных микроволноводах без СЭ-слоя. В латеральной мульти-

ферроидной структуре симметричная мода k_1^S и антисимметричная мода k_1^{AS} связаны с первой k_1 и второй k_2 собственными модами ТЕ электромагнитной волны в СЭ-слое, соответственно.

Подчеркнем, что для описания динамики распространения ЭМСВ в латеральных мультиферроиках рассматриваются только первые поперечные моды магнитных микроволноводов [18, 19] и две низшие моды СЭ-слоя [20]. Гибридизация волн в магнитных микроволноводах и СЭ-слое приводит к пересечению дисперсионных кривых как симметричной, так и антисимметричной мод (на рис. 2 показано сплошными линиями). Поэтому в латеральной мультиферроидной структуре могут распространяться как медленные волны k_{HE1} и k_{HE2} с поперечно-электрической поляризацией в СЭ-слое, так и симметричная k_{HE1}^S и антисимметричная k_{HE1}^{AS} моды ЭМСВ.

На рис. 2 приведены расчеты дисперсионных характеристик гибридных мод ЭМСВ при увеличении электрического поля от 0 до 20 кВ/см. Видно, что происходит трансформация спектра ЭМСВ с увеличением электрического поля и, соответственно, с уменьшением величины диэлектрической проницаемости СЭ-слоя. На рисунке видно, что при увеличении электрического поля диапазон волновых чисел, в котором происходит эффективная гибридизация, смещается в длинноволновую область спектра ЭМСВ, при этом уменьшается и величина длины связи, численно равная расстоянию вдоль оси z , на котором энергия волны перекачивается из одного микроволновода в другой.

При создании устройств с двойным управлением необходимо учитывать, что изменение толщины СЭ-слоя приводит к изменению длины связи. На рис. 3 приведены дисперсионные характеристики электромагнитных волн СЭ-слоя при изменении его толщины (штриховые кри-

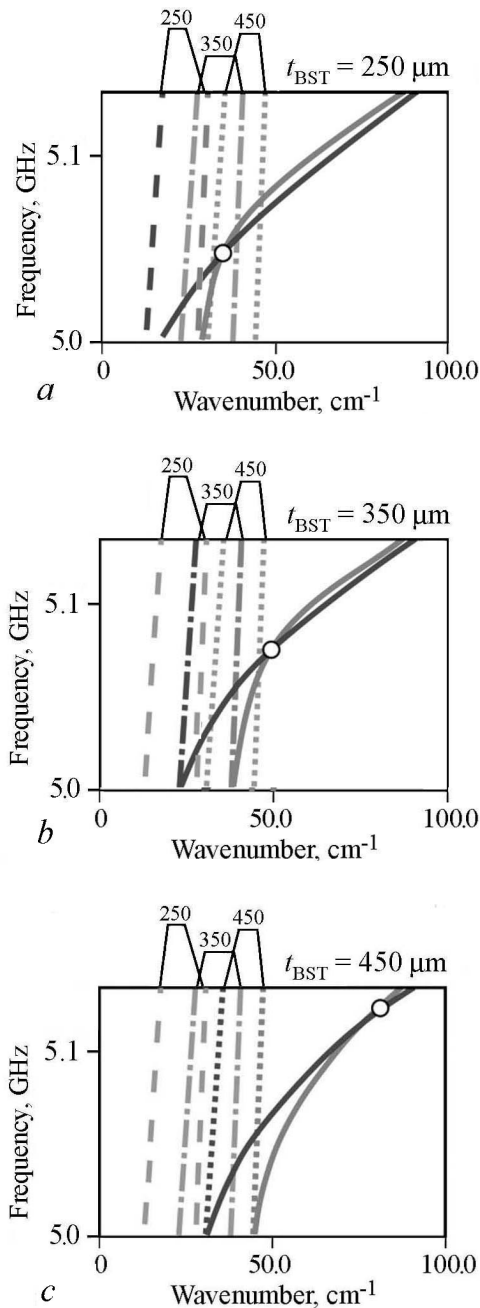


Рис. 3. Дисперсионные характеристики ТЕ мод для различных толщин СЭ-слоя и дисперсий гибридных мод латеральной мультиферроидной структуры. Цифрами указаны толщины СЭ-слоя t_{BST} в микрометрах

Fig. 3 The dispersion curves of the TE modes of the FE slab of different thicknesses and the result of hybridization modes of lateral multiferroic structure. The numbers indicate the thickness of the ferroelectric layer t_{BST} in μm

вые для толщины 250 μm , штрих-пунктирные кривые для – 350 μm , пунктирные кривые для – 450 μm) и дисперсии симметричных и антисимметричных гибридных мод латеральной мультиферроидной структуры. Видно, что при уменьшении толщины СЭ-слоя происходит уменьшение значения волновых чисел, при которых спиновая волна эффективно гибридизируется с электромагнитной волной в СЭ. На рис. 3 показано, что точка пересечения симметричной и антисимметричной гибридной мод (обозначенная кружком) смещается в диапазон меньших волновых чисел, соответствующих области в окрестности частоты ферромагнитного резонанса в магнитной пленке. Таким образом, при $t_{\text{BST}} = 450 \mu\text{m}$ положение точки пересечения смещается по оси волновых чисел на величину 75 cm^{-1} (ср. рис. 3, а и рис. 3, с). В этой связи стоит подчеркнуть важность значительного превалирования толщины СЭ-слоя над толщиной магнитного микроволновода.

Выводы

Таким образом, в работе проведено исследование пространственной динамики гибридных электромагнитных спиновых волн в мультиферроидной гетероструктуре. Выявлены особенности гибридизации поперечных мод волн, распространяющихся в сегнетоэлектрическом слое, с симметричными и антисимметричными модами латеральной системы магнитных микроволнопроводов. Показана возможность управления характеристиками волн, распространяющихся в гетероструктуре, с помощью варьирования величиной приложенного к слою сегнетоэлектрика электрического поля. Проведены оценки влияния толщины сегнетоэлектрического слоя на дисперсионные характеристики электромагнитных спиновых волн. В частности, показано, что уменьшение толщины сегнетоэлектрического слоя приводит к смещению в длинноволновую часть спектра области эффективной гибридизации волн, распространяющихся в латеральных магнитных микроволноводах и в диэлектрической пластине.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ (16-29-03120, 16-37-00217), Стипендии (СП-313.2015.5) и Гранта Президента РФ (МК-5837.2016.9).

Библиографический список

1. Anfinogenov V.B., Verbitskaya T.N., Zil'berman P.E., Kazakov G.T., Meriakri S.V., and Tikhonov V.V. Resonant interaction of magnetostatic backward volume waves with slow electromagnetic waves in ferrite/ferroelectric structures // Sov. Phys.–Tech. Phys. 1990. Vol. 35. 1068.
2. Nikitov S.A., Kalyabin D.V., Lisenkov I.V., Slavin A.N., Barabanenkov Y.N., Osokin S.A., Sadovnikov A.V., Beginin E.N., Morozova M.A., Sharaevsky Y.P., Filimonov Y.A., Khivintsev Y.V., Vysotsky S.L., Sakharov V.K., and Pavlov E.S. Magnonics: A new research area in spintronics and spin wave electronics // Phys. Usp. 2015. Vol. 185. 1099.
3. Fetisov Y.K., Srinivasan G. Electric field tuning characteristics of a ferrite-piezoelectric microwave resonator // Applied Physics Letters. 2006. Vol. 88. 143503.

4. *Srinivasan G., Fetisov Y.K.* Ferrite-piezoelectric layered structures: Microwave magnetoelectric effects and electric field tunable devices // *Ferroelectrics*. 2006. Vol. 342. Pp. 65–71.
5. *Sadovnikov A.V., Grachev A.A., Beginin E.N., Sheshukova S.E., Sharaevskii Yu.P., Nikitov S.A.* Voltage-controlled spin-wave coupling in adjacent ferromagnetic–ferroelectric heterostructures // *Phys. Rev. Applied*. 2017. Vol. 7. 014013.
6. *Sadovnikov A.V., Beginin E.N., Bublikov K.V., Grishin S.V., Sheshukova S.E., Sharaevskii Y.P., Nikitov S.A.* Brillouin light scattering study of transverse mode coupling in confined yttrium iron garnet/barium strontium titanate multiferroic // *J. Appl. Phys.* 2015. Vol. 118. 203906.
7. *Demidov V.E., Kalinikos B.A., Karmanenko S., Semenov A., Edenhofer P.* Electrical tuning of dispersion characteristics of surface electromagnetic-spin waves propagating in ferrite-ferroelectric layered structures // *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.* 2003. Vol. 51. 2090.
8. *Chumak A.V., Vasyuchka V.I., Serga A.A., Hillebrands B.* Magnon spintronics // *Nat. Phys.* 2015. Vol. 11. 453.
9. *Sadovnikov A.V., Beginin E.N., Sheshukova S.E., Romanenko D.V., Sharaevskii Y.P., Nikitov S.A.* Directional multimode coupler for planar magnonics: Side coupled magnetic stripes // *Appl. Phys. Lett.* 2015. Vol. 107. 202405.
10. *Ustinov A.B., Srinivasan G., Kalinikos B.A.* Ferrite-ferroelectric hybrid wave phase shifters // *Appl. Phys. Lett.* 2007. Vol. 90. 031913.
11. *Khitun A., Bao M., Wang K.L.* Magnonic logic circuits // *J. Phys. D.* 2010. Vol. 43. 264005.
12. *Damon R.W., Eschbach J.* Magnetostatic modes of a ferromagnet slab // *J. Phys. Chem. Solids*. 1961. Vol. 19. 308.
13. *Bajpai S.N.* Excitation of magnetostatic surface waves: Effect of finite sample width // *J. Appl. Phys.* 1985. Vol. 58. 910.
14. *Gurevich A.G., Melkov G.A.* Magnetization Oscillations and Waves. London: CRC Press, 1996.
15. *Садовников А.В., Рожнев А.Г.* Моделирование распространения магнитостатических волн в одномерных магнетонных кристаллах // *Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика*. 2012. Т. 20, №1. С. 143–159.
16. *Silvester P.P., Ferrari R.L.* Finite Elements for Electrical Engineers. Cambridge University Press, 1996.
17. *Ваишковский А.В., Стальмахов В.С., Шараевский Ю.П.* Магнитостатические волны в электронике сверхвысоких частот. Саратов: СГУ, 1993.
18. *O'Keefe T.W., Patterson R.W.* Magnetostatic surfacewave propagation in finite samples // *J. Appl. Phys.* 1978. Vol. 49. 4886.
19. *Camley R.E.* Nonreciprocal surface waves // *Surface Science Reports*. 1987. Vol. 7. 103.
20. *Haus H.* Waves and Fields in Optoelectronics. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1984.

References

1. Anfinogenov V.B., Verbitskaya T.N., Zil'berman P.E., Kazakov G.T., Meriakri S.V., Tikhonov V.V. Resonant interaction of magnetostatic backward volume waves with slow electromagnetic waves in ferrite/ferroelectric structures. *Sov. Phys. Tech. Phys.* 1990. Vol. 35. 1068.
2. Nikitov S.A., Kalyabin D.V., Lisenkov I.V., Slavin A.N., Barabanenkov Y.N., Osokin S.A., Sadovnikov A.V., Beginin E.N., Morozova M.A., Sharaevsky Y.P., Filimonov Y.A., Khivintsev Y.V., Vysotsky S.L., Sakharov V.K., Pavlov E.S. Magnonics: A new research area in spintronics and spin wave electronics. *Phys. Usp.* 2015. Vol. 185. 1099.
3. Fetisov Y.K., Srinivasan G. Electric field tuning characteristics of a ferrite-piezoelectric microwave resonator. *Applied Physics Letters*. 2006. Vol. 88. 143503.
4. Srinivasan G., Fetisov Y.K. Ferrite-piezoelectric layered structures: Microwave magnetoelectric effects and electric field tunable devices. *Ferroelectrics*. 2006. Vol. 342. Pp. 65–71.
5. Sadovnikov A.V., Grachev A.A., Beginin E.N., Sheshukova S.E., Sharaevskii Yu.P., Nikitov S.A. Voltage-controlled spin-wave coupling in adjacent ferromagnetic-ferroelectric heterostructures. *Phys. Rev. Applied*. 2017. Vol. 7. 014013.
6. Sadovnikov A.V., Beginin E.N., Bublikov K.V., Grishin S.V., Sheshukova S.E., Sharaevskii Y.P., Nikitov S.A. Brillouin light scattering study of transverse mode coupling in confined yttrium iron garnet/barium strontium titanate multiferroic. *J. Appl. Phys.* 2015. Vol. 118. 203906.
7. Demidov V.E., Kalinikos B.A., Karmanenko S., Semenov A., Edenhofer P. Electrical tuning of dispersion characteristics of surface electromagnetic-spin waves propagating in ferrite-ferroelectric layered structures. *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.* 2003. Vol. 51. 2090.
8. Chumak A.V., Vasyuchka V.I., Serga A.A., Hillebrands B. Magnon spintronics. *Nat. Phys.* 2015. Vol. 11. 453.
9. Sadovnikov A.V., Beginin E.N., Sheshukova S.E., Romanenko D.V., Sharaevskii Y.P., Nikitov S.A. Directional multimode coupler for planar magnonics: Side coupled magnetic stripes. *Appl. Phys. Lett.* 2015. Vol. 107. 202405.
10. Ustinov A.B., Srinivasan G., Kalinikos B.A. Ferrite-ferroelectric hybrid wave phase shifters. *Appl. Phys. Lett.* 2007. Vol. 90. 031913.
11. Chumak A.V., Vasyuchka V.I., Serga A.A., Hillebrands B. Magnon spintronics. *Nat. Phys.* 2015. Vol. 11. 453.
12. Damon R.W., Eschbach J. Magnetostatic modes of a ferromagnet slab. *J. Phys. Chem. Solids*. 1961. Vol. 19. 308.
13. Bajpai S.N. Excitation of magnetostatic surface waves: Effect of finite sample width. *J. Appl. Phys.* 1985. Vol. 58. 910.
14. Gurevich A.G., Melkov G.A. Magnetization Oscillations and Waves. London: CRC Press, 1996.
15. Sadovnikov A.V., Rozhnev A.G. Electrodynamical characteristics of periodic ferro-

- magnetic structures. *Izvestiya VUZ. Appl. Nonlinear Dyn.* 2012. Vol. 20. Issue 1 (in Russian).
16. Silvester P.P., Ferrari R.L. *Finite Elements for Electrical Engineers*. Cambridge University Press, 1996.
 17. Vashkovskii A.V., Stalmakhov V.S., Sharaevskii Yu.P. *Magnetostatic Waves in Microwave Electronics*. Saratov: SSU, 1993. 312 p. (in Russian).
 18. O'Keefe T.W. and Patterson R.W. Magnetostatic surfacewave propagation in finite samples. *J. Appl. Phys.* 1978. Vol. 49. 4886.
 19. Camley R.E. Nonreciprocal surface waves. *Surface Science Reports*. 1987. Vol. 7. 103.
 20. Haus H. *Waves and Fields in Optoelectronics*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1984.



Грачев Андрей Андреевич родился в Саратове (1994). Получил степень бакалавра (2015) по специальности «Радиофизика» и степень магистра (2017) по специальности «Прикладные математика и физика» на факультете нелинейных процессов Саратовского государственного университета. Является постоянным участником научных конференций. Работает стажёром-исследователем в Саратовском филиале ИРЭ РАН и в лаборатории «Метаматериалы» СГУ. Научные интересы: планарные структуры, метаматериалы, системы обработки и передачи информации, бриллюэновская спектроскопия, управляемые микро- и наноструктуры. Имеет 5 научных статей в реферируемых научных журналах.

410012 Саратов, Астраханская, 83
 Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского
 E-mail: andrew.a.grachev@gmail.com



Садовников Александр Владимирович родился в Саратове (1987). Окончил с серебряной медалью МОУ СОШ № 73 (Саратов) и поступил на факультет нелинейных процессов СГУ (1987), который окончил с красным дипломом. В 2009 году поступил в аспирантуру по специальностям «Радиофизика», «Оптика» и в 2012 году защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук. Работает старшим научным сотрудником в лаборатории «Метаматериалы» СГУ и доцентом на кафедре «Физика открытых систем». Научные интересы: планарные структуры, метаматериалы, системы обработки и передачи информации, бриллюэновская спектроскопия, управляемые микро- и наноструктуры. Имеет 50 научных статей в реферируемых научных журналах.

Россия, 410012 Саратов, Астраханская, 83
 Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского
 E-mail: sadovnikovav@gmail.com



НЕЛИНЕЙНАЯ ДИНАМИКА СПИНОВЫХ ВОЛН В ЛАТЕРАЛЬНЫХ МАГНИТНЫХ МИКРОВОЛНОВОДАХ

С. А. Одинцов, А. В. Садовников

Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского
Россия, 410012 Саратов, Астраханская, 83
E-mail: odinoff@gmail.com, sadovnikovav@gmail.com
Поступила в редакцию 2.07.2017

Развитие идей магноники – нового направления исследования спин-волновых процессов в регулярных и нерегулярных микро- и наноразмерных магнитных структурах – и совершенствование методов изготовления и структурирования магнитных материалов открывает новые перспективы для создания миниатюрных устройств генерации, передачи и обработки информационных сигналов в СВЧ и терагерцевом диапазонах. Большой интерес представляет исследование латеральных магнитных микроструктур, поддерживающих как линейный, так и нелинейный режим распространения спиновых волн. Следует отметить, что латеральное расположение магнитных волноводов приводит как к сложной нелинейной динамике спиновой волны, так и к многомодовой спин-волновой связи в планарной топологии. Более того, исследование нелинейных режимов распространения связанных спиновых волн в латеральных магнитных микроволноводах имеет важное значение для нелинейной физики диссипативных систем в целом.

Исследование системы двух латеральных микроволноводов, лежащих на одной подложке и помещённых в магнитное поле, производилось численно методом конечных элементов и экспериментально методом мандельштам–бриллюэновской спектроскопии магнитных материалов с микронным разрешением.

Показано, что неоднородное распределение величины внутреннего магнитного поля изменяет пространственный профиль собственных типов мод электромагнитных волн, распространяющихся в системе латеральных магнитных микроволноводов. Результаты численного моделирования хорошо согласуются с результатами экспериментального исследования. Эффекты нелинейного переключения мощности спин-волнового сигнала в системах латеральных магнитных микроволноводов позволяют создавать нелинейные ответвители и делители мощности спин-волнового сигнала в планарных топологиях магнитных сетей для селективной обработки информационных сигналов.

Ключевые слова: Латеральные волноводы, спиновая волна, устройства обработки сигналов, ответвитель.

DOI: 10.18500/0869-6632-2017-25-5-56-68

Образец цитирования: Одинцов С.А., Садовников А.В. Нелинейная динамика спиновых волн в латеральных магнитных микроволноводах // Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2017. Т. 25, № 5. С. 56–68. DOI: 10.18500/0869-6632-2017-25-5-56-68

NONLINEAR DYNAMICS OF SPIN WAVES IN LATERAL MAGNETIC MICROWAVEGUIDES

S. A. Odintsov, A. V. Sadovnikov

Saratov State University
83, Astrakhanskaya, 410012 Saratov, Russia
E-mail: odinoff@gmail.com, sadovnikovav@gmail.com
Received 2.07.2017

In the present work, a numerical and experimental study of the nonlinear dynamics of spin waves in lateral magnetic microwave guides was made. The mechanism of nonlinear spin-wave coupling between different types of modes in lateral waveguides was revealed. The investigation of lateral magnetic microstructures supporting both linear and nonlinear propagation of spin waves is of great interest nowadays. Moreover, the study of nonlinear modes of propagation of coupled spin waves in lateral magnetic microwave guides is of great importance for the nonlinear physics of dissipative systems as a whole.

It is shown, that the inhomogeneous distribution of the value of the internal magnetic field leads to the variation of the spatial profile of the eigenmode of electromagnetic waves propagating in a system of lateral magnetic microwaveguides. The results of the numerical simulation are in good agreement with the results of the experimental study. The effects of nonlinear switching of the power of the spin-wave signal in systems of lateral magnetic microwave guides allow creating nonlinear couplers and power dividers of the spin-wave signal in the planar topologies of magnon networks for selective processing of information signals.

It is shown, that an increase in the amplitude of the spin wave leads to a change in the coupling length. The effects of nonlinear switching in lateral magnetic waveguides allow the creation of nonlinear couplers and power dividers of the spin-wave signal in planar topologies of magnonic networks for selective processing of information signals in the microwave and terahertz ranges.

Keywords: Lateral waveguides, spin wave, signal processing devices, coupler.

DOI: 10.18500/0869-6632-2017-25-5-56-68

References: Odintsov S.A., Sadovnikov A.V. Nonlinear dynamics of spin waves in lateral magnetic microwaveguides. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*. 2017. Vol. 25. Issue 5. P. 56–68. DOI: 10.18500/0869-6632-2017-25-5-56-68

Введение

Развитие идей магноники – нового направления исследования спин-волновых процессов в нерегулярных и микро- и наноразмерных магнитных структурах [1] – и совершенствование методов изготовления и структурирования магнитных материалов [2] открывает новые перспективы для создания миниатюрных устройств генерации, передачи и обработки информационных сигналов в СВЧ и терагерцевом диапазонах. Важным является исследование нелинейных процессов в нерегулярных магнитных микро- и наноструктурах. Результаты исследования нелинейных спин-волновых процессов в ферромагнетиках внесли значительный вклад в теорию, описывающую нелинейную динамику диссипативных систем [3–5]. Такие нелинейные явления в тонких пленках железо-иттриевого граната (ЖИГ), как образование и распространение солитонов, экспериментально исследовались в ферромагнитных

волноводах миллиметровой ширины с использованием радиофизических методов [6–9] и мандельштам–бриллюэновской спектроскопии магнитных материалов [10–19]. Было показано, что, используя нелинейные эффекты в ЖИГ [20], возможно создавать перестраиваемые спин-волновые устройства [21–25], например, нелинейные фазовращатели, фильтры [26–28] и устройства переключения сигнала на основе магнетонных кристаллов [29]. В последние годы довольно активно ведется исследование нелинейных спин-волновых явлений в системах генерации когерентных спин-волновых мод спин-орбитальным моментом, создаваемым чистыми спиновыми токами (pure spin current [25]). В связи с этим особый интерес представляет исследование латеральных магнитных микроструктур, поддерживающих как линейный, так и нелинейный режимы распространения спиновых волн. Следует отметить, что латеральное расположение магнитных волноводов приводит как к сложной нелинейной динамике спиновой волны, так и к многомодовой спин-волновой связи в планарной топологии. Более того, исследование нелинейных режимов распространения связанных спиновых волн в латеральных магнитных микроволноводах имеет важное значение для нелинейной физики диссипативных систем в целом.

В настоящей работе проведено исследование нелинейной динамики спиновых волн в латеральной системе магнитных микроволноводов. Показано, что неоднородное распределение внутреннего магнитного поля изменяет пространственный профиль собственных типов мод системы магнитных микроволноводов. Результаты численного моделирования хорошо согласуются с результатами экспериментального исследования.

Модель структуры

Рассмотрим структуру, схема которой приведена на рис. 1 и которая представляет собой два латеральных микроволновода (обозначим их как S_1 и S_2) из плёнки ЖИГ (YIG) ($Y_3Fe_5O_{12}$ (111)), лежащих на подложке из галлий–гадолиниевого граната (GGG) ($Gd_3Ga_5O_{12}$ (111)). Волноводы имеют ширину $w = 200 \mu\text{m}$, расстояние между волноводами $d = 40 \mu\text{m}$. Численное моделирование проводилось методом конечных элементов с помощью решения полной системы уравнений Максвелла [30]. Латеральные микроволноводы помещены во внешнее магнитное поле H_0 , направленное вдоль оси y . В каждом из волноводов вдоль оси x распространяются электромагнитные волны. На рис. 1, *a* продемонстрирована расчётная область и разбиение исследуемой структуры на треугольные элементы [30]. Параметры создаваемой сетки были следующие: максимальный размер элемента сетки $10.5 \mu\text{m}$, минимальный размер элемента сетки $0.0188 \mu\text{m}$, коэффициент линейного увеличения размера элемента 1.25 , коэффициент кривизны 0.25 . Коэффициент кривизны необходим для определения размера граничных элементов по сравнению с кривизной геометрической границы (это отношение размера элемента к радиусу кривизны). Радиус кривизны, умноженный на коэффициент кривизны, дает максимальный допустимый размер элемента вдоль границы. Меньший коэффициент кривизны дает более тонкую сетку вдоль изогнутых границ. Граничные условия выбраны в виде: «магнитных стенок» (касательная составляющая вектора напряжённости магнитного поля равна нулю) на левой и правой границах расчётной области и «электрических стенок» (касательная

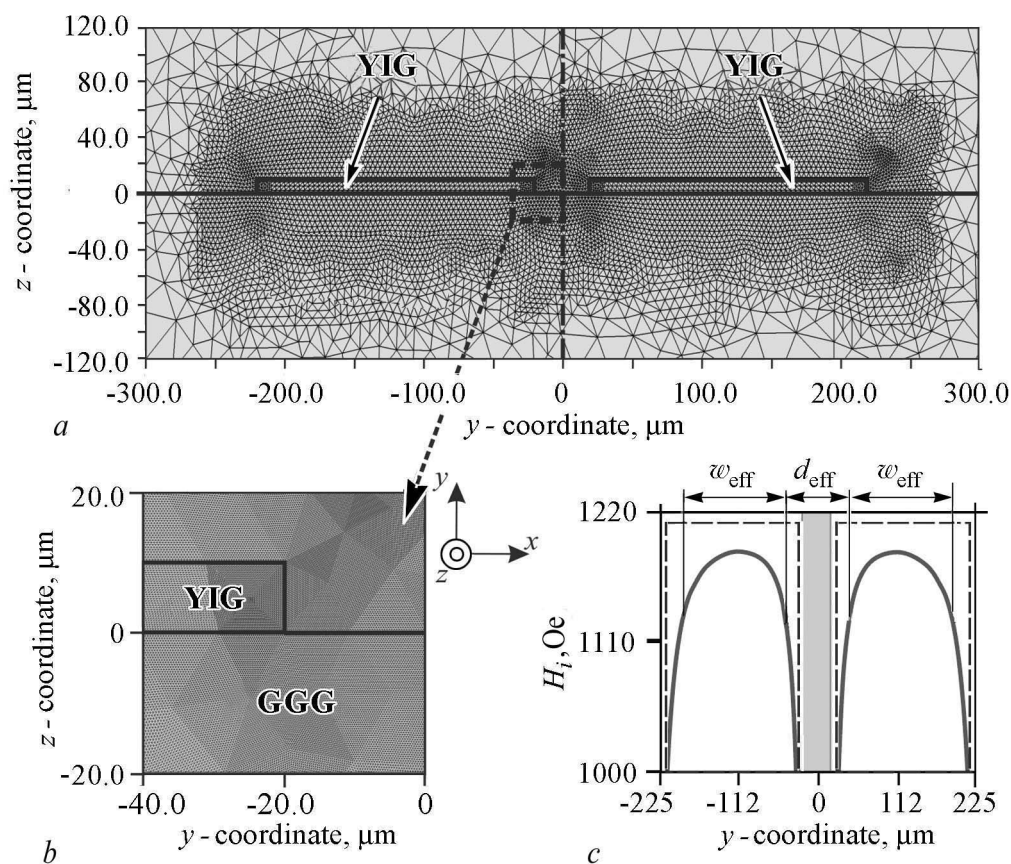


Рис. 1. *a* – схема расчётной области и исследуемой структуры; *b* – фрагмент расчетной области подробно показывающий разбиение сетки на углах ЖИГ плёнки; *c* – распределение однородного внутреннего поля (штриховая линия) и неоднородного внутреннего поля (сплошная линия) в латеральных микроволноводах

Fig. 1. *a* – scheme of the numerical domain and the structure under study; *b* – the domain on the calculated area detailing the partition of the grid at the corners of the YIG film; *c* – distribution of a homogeneous internal field (dashed line), inhomogeneous internal field (solid line) in side-coupled waveguides

составляющая вектора напряженности электрического поля равна нулю) на верхней и нижней границах. Тензор магнитной проницаемости ЖИГ в этом случае записывается в виде [3]

$$\hat{\mu} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \mu & -i\mu_a \\ 0 & i\mu_a & \mu \end{bmatrix}, \quad (1)$$

где $\mu(f) = (f_H(f_H + f_M) - f^2)/(f_H^2 - f^2)$, $\mu_a(f) = (f_M f)/(f_H^2 - f^2)$, $f_H = \gamma H_0$, $f_M = 4\pi\gamma M_0$, $\gamma = 2.8$ МГц/Ое – гиромагнитное отношение для ЖИГ, $M_0 = 170$ Ое. Относительная диэлектрическая проницаемость ЖИГ равна $\epsilon = 14$. Предполагается, что в направлении оси x структура бесконечна.

В областях ЖИГ микроволноводов проводилось уменьшение шага разбиения сетки, для увеличения точности расчета. На рис. 1, *b* показан участок структуры с сеткой в области края ЖИГ микроволновода. Стоит отметить, что поскольку физической причиной связи спиновых волн в системе латеральных микроволноводов

являются электромагнитные поля, провисающие за границу микроволновода, то учет формы края и адекватный размер сетки в области щели между волноводами обеспечивает высокую точность расчета.

На рис. 1, с показаны две конфигурации распределения внутреннего поля в системе из двух латеральных микроволноводов, которое было получено по уравнению из работы [31],

$$H_x(x, y) = -H_0 \frac{1}{\pi} \left(\operatorname{arctg} \frac{N+x}{y} + \operatorname{arctg} \frac{N-x}{y} \right), \quad (2)$$

где N – половина расстояния между максимумами распределения поля, H_0 – значение магнитного поля. Штриховыми линиями показано однородное распределение внутреннего магнитного поля, а сплошными линиями показано неоднородное распределение поля, полученное с помощью решения магнитоэлектростатической задачи методом конечных элементов. Уменьшение величины внутреннего поля в центре обоих микроволноводов до значения $H_{i0} = 1159$ Ое приводит к смещению частоты ферромагнитного резонанса пленки ЖИГ. Следует отметить, что латеральное расположение волноводов приводит к асимметричному профилю распределения поля внутри волноводов по отношению к центру каждого из них, в отличие от одиночного ЖИГ микроволновода [31, 32]. Поэтому для расчета параметров собственных мод латеральных микроволноводов удобно ввести эффективную ширину волноводного канала $w_{\text{eff}} \sim 150$ мкм, обеспечивающую распространение спиновых волн. Следует иметь в виду, что при этом увеличивается эффективный зазор между волноводами d_{eff} . Таким образом, из решения статической задачи становится понятным, что для вычисления спектров собственных мод волн, распространяющихся в системе латеральных магнитных микроволноводов, необходимым является учет неоднородного распределения статического магнитного поля внутри волноводов.

Результаты численного моделирования

Известно, что спектр собственных мод двух латеральных микроволноводов состоит из симметричных и антисимметричных мод [33]. Симметричные моды соответствуют случаю, когда амплитуды магнитных потенциалов в обоих магнитных волноводах имеют одну и ту же фазу, а в случае антисимметричных мод – сдвиг между фазами амплитуд составляет π . Из рис. 2 видно, что профили распределения трансформируются при учете неоднородности внутреннего магнитного поля, а именно, происходит «расталкивание» в распределении полей, поскольку, как было отмечено выше, увеличивается эффективное расстояние между волноводными каналами. Также стоит заметить, что при увеличении частоты и как следствие этого при увеличении величины продольного волнового числа распределение E_x компоненты поля трансформируется, а именно, поле становится более локализованным в центральной области магнитных микроволноводов. Результатом этого является уменьшение интеграла перекрытия полей мод и как следствие уменьшение величины связи между волнами, распространяющимися в волноводах, что, в свою очередь, влияет на величину длины связи

$$L_n = \pi / |k_n^s - k_n^{as}|, \quad (3)$$

где n – номер поперечной моды; k_n^s и k_n^{as} – волновые числа симметричных и антисимметричных мод, соответственно. Далее рассматриваем только первую поперечную моду. Наблюдаемое распределение интенсивности спиновой волны является результатом интерференции симметричной и антисимметричной мод. При этом мощность волны перекачивается из одного микроволновода в другой на расстоянии, равном длине связи.

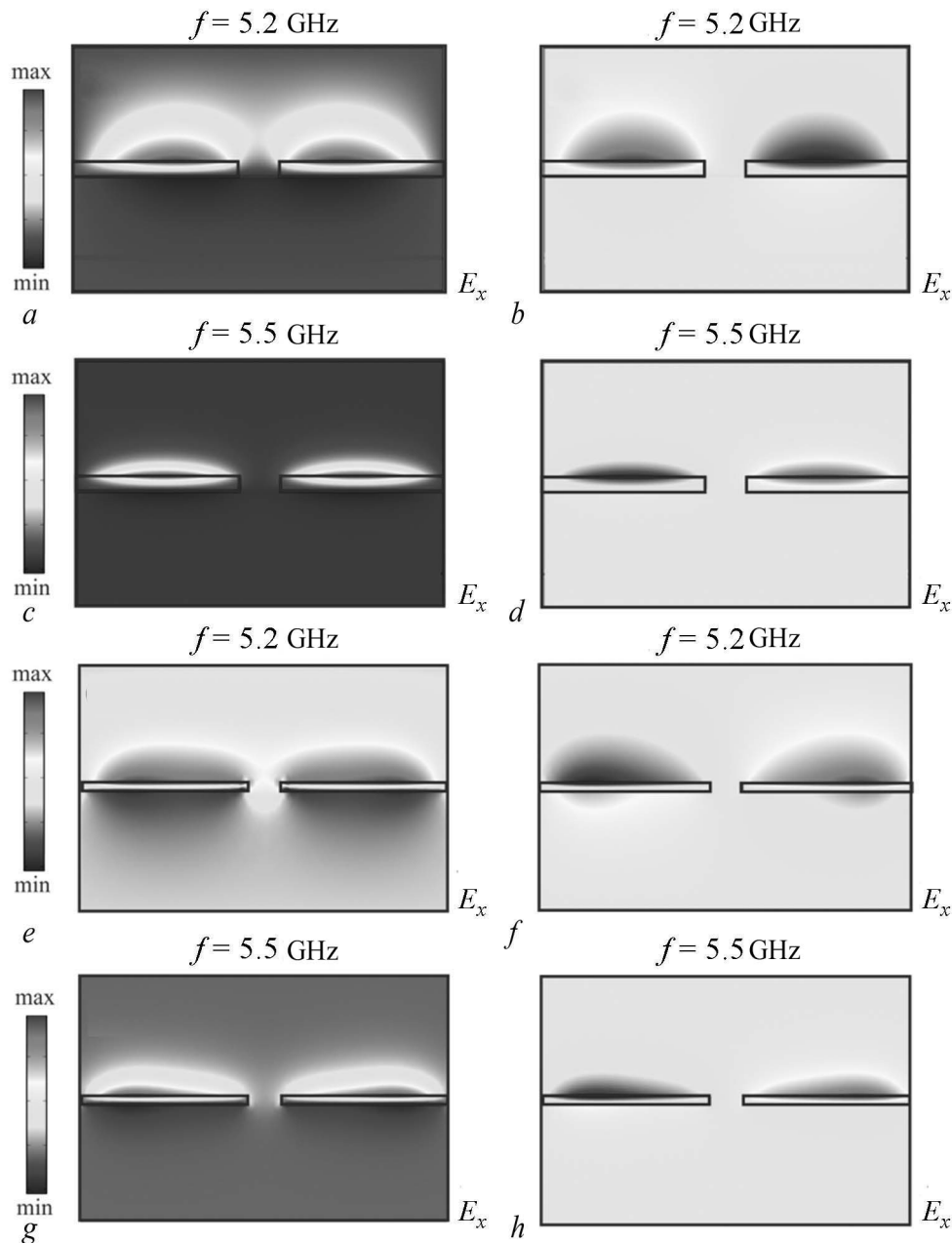


Рис. 2. Распределение компоненты E_x для симметричных (слева) и антисимметричных (справа) мод в случае однородного профиля статического магнитного поля (a–d) и неоднородного внутреннего профиля поля (e–h)

Fig. 2. Distribution of the E_x component for symmetric (left) and antisymmetric (right) modes in the case of a homogeneous profile of the static magnetic field (a–d) and the inhomogeneous internal field profile (e–h)

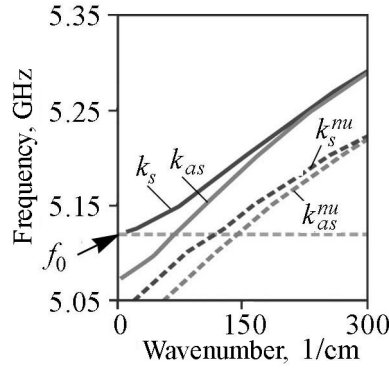


Рис. 3. Дисперсия первой симметричной и антисимметричной моды в случае однородного внутреннего профиля статического магнитного поля (сплошные линии) и в случае неоднородного (non-uniform) профиля поля (штриховые линии). Магнитное поле 1200 Ое

Fig. 3. Dispersion of the first symmetric and anti-symmetric mode in the case of a homogeneous internal profile of the static magnetic field (solid lines) and in the case of an inhomogeneous field profile (dashed lines). The magnetic field is 1200 Oe

На рис. 3 показаны дисперсионные характеристики (зависимость продольного волнового числа от частоты) симметричных и антисимметричных мод для однородного (сплошные линии) и неоднородного (штриховые линии) распределения внутреннего магнитного поля в микроволноводе.

Видно, что дисперсионная характеристика, которая получена при неоднородном распределении профиля внутреннего магнитного поля, смещена по частоте вниз, относительно дисперсионной характеристики, полученной при однородном распределении поля. Это связано с особенностью распределения поля в неоднородной конфигурации. Границы полосы возбуждения ПМСВ рассчитывались по формулам [3] $f_{\perp} = \sqrt{f_h(f_h + f_m)}$ и $f_W = f_h + f_m/2$.

Динамика спиновых волн в латеральных микроволноводах описывается

связанными нелинейными уравнениями Гинзбурга–Ландау [34] в виде

$$i \frac{d\Phi_{1,2}}{dx} = k\Phi_{1,2} + \kappa\Phi_{2,1} + (\zeta - i\nu_2) |\Phi_{1,2}|^2 \Phi_{1,2} - i\nu_1 \Phi_{1,2}. \quad (4)$$

Здесь $\Phi_{1,2} = \Phi_{1,2}(x)|_{y=y_{1,2}}$ – амплитуда спиновой волны вдоль оси x ; координаты $y_{1,2}$ определяют центральные точки в волноводах S_1 и S_2 , соответственно; $k = k(f)$ – волновое число спиновой волны, распространяющейся в одиночном микроволноводе; $\kappa = \kappa(f) = \beta C(f) \approx |k_s(f) - k_{as}(f)|$ – коэффициент связи спиновых волн между латеральными волноводами; β – коэффициент пропорциональности; $\zeta = dk/d\varphi^2$ – нелинейный коэффициент, который определялся из условия уменьшения намагниченности насыщения при увеличении амплитуды спиновой волны с учетом дисперсионного соотношения [10]

$$\omega^2 - \left(\omega_H + \frac{\omega_M}{2}\right)^2 = - \left(\frac{\omega_M}{2}\right)^2 e^{-2|\beta|S}, \quad (5)$$

где S – толщина плёнки; $\nu_1 = \frac{1}{v_g} \left| \frac{\partial \omega}{\partial H_1} \right| \frac{\Delta H}{2}$ и $\nu_2 = \frac{1}{v_g^2} \frac{\Delta H}{2} \left| \frac{\partial \omega}{\partial H_1} \right| \left| \frac{\partial^2 \omega}{\partial k^2} \right|_{\varphi=0}$ – линейное и нелинейное затухание спиновой волны, соответственно; $\omega = 2\pi f$ круговая частота. Ширина линии ферромагнитного резонанса определялась экспериментально на частоте 9.7 GHz и составляла $\Delta H = 0.54$ Ое [35]. Уравнение (3) решалось методом Рунге–Кутты при $\omega_M = \omega_{M_0}(1 - \varphi)$ с начальными условиями $A(x = 0, t = 0) = A_0$.

Влияние нелинейности проявляется в изменении фазы симметричной и антисимметричной мод при увеличении амплитуды спиновой волны. Это, в свою

очередь, приводит к изменению длины связи. На рис. 4 показаны результаты численного решения уравнения (2). Сплошной линией показана зависимость нормированной амплитуды от продольной координаты z в случае малой амплитуды входного сигнала $A_0 = 0.06$. Штриховой линией показана зависимость нормированной амплитуды от продольной координаты z в нелинейном случае, когда $A_0 = 6.41$.

Экспериментальное исследование нелинейных режимов распространения спиновых волн в системе латеральных микроволноводов проводилось методом мандельштам–бриллюэновской спектроскопии магнитных материалов в конфигурации обратного рассеяния. Экспериментальный макет для исследований представлял собой линию задержки с микрополосковыми антеннами шириной $30 \mu\text{m}$, которые использовались для возбуждения спиновых волн. Сначала строилась двумерная карта пространственного распределения вдоль системы латеральных микроволноводов квадрата намагниченности. Затем проводилось построение интегральной интенсивности сигнала вдоль оси x . Шаг сканирования вдоль оси x составлял $200 \mu\text{m}$. На рис. 4 символами (кружками и квадратами) показан результат экспериментально полученной зависимости интенсивности спиновой волны вдоль микроволновода S_2 в линейном (мощность входного сигнала -25 dBm) и в нелинейном (мощность входного сигнала 19 dBm) режимах для частоты сигнала 5.15 GHz , соответственно. Полученные результаты показывают увеличение длины связи в 1.3 раза в нелинейном случае по сравнению с линейным. Также видно хорошее взаимное соответствие результатов численного расчета и экспериментального исследования. Стоит отметить, что при дальнейшем увеличении мощности входного СВЧ сигнала рост величины длины связи не происходит из-за нелинейного затухания спиновой волны. Модель связанных нелинейных уравнений Гинзбурга–Ландау описывает эффекты нелинейного затухания, что и обуславливает справедливость ее использования для описания нелинейной динамики спиновых волн в латеральных микроволноводах.

Выводы

В настоящей работе проведено численное и экспериментальное исследование нелинейной динамики спиновых волн в латеральных магнитных ЖИГ микроволноводах. Показано, что длина связи увеличивается при увеличении мощности входного СВЧ сигнала. Эффекты нелинейного переключения в системах латеральных магнитных микроволноводов позволяют создавать нелинейные ответвители и делители мощности спин-волнового сигнала в планарных топологиях магнетонных сетей для селективной обработки информационных сигналов.

Работа выполнена при частичной поддержке РФФИ (№ 16-37-00217, № 16-02-00789) и РНФ (№ 16-19-10283).

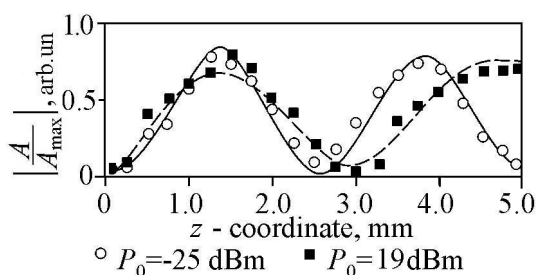


Рис. 4. Зависимость амплитуды спиновой волны от продольной координаты z в волноводе S_2 , при разных уровнях мощности входного сигнала

Fig. 4. Dependence of the amplitude of the spin wave on the longitudinal coordinate z in the waveguide S_2 , at different power levels of the input signal

Библиографический список

1. Никитов С.А., Калябин Д.В., Лисенков И.В., Славин А.Н., Барабаненков Ю.Н., Осокин С.А., Садовников А.В., Бегинин Е.Н., Морозова М.А., Шараевский Ю.П., Филимонов Ю.А., Хивинцев Ю.В., Высоцкий С.Л., Сахаров В.К., Павлов Е.С. Магноника – новое направление спинтроники и спин-волновой электроники // УФН. 2015. Т. 185. С.1099–1128.
2. Chumak A.V., Vasyuchka V.I., Serga A.A., Hillebrands B. Magnon spintronics // Nat. Phys. 2015. Vol. 11. P. 453.
3. Gurevich A.G., Melkov G.A. Magnetization Oscillations and Waves. London: CRC Press, 1996.
4. Stancil D.D., Prabhakar A. Spin Waves: Theory and Applications. Springer, 2009.
5. Розанов Н.Н. Диссипативные оптические солитоны // УФН. 2000. Т. 170, вып. 4. С. 462–465.
6. Zvezdin A.K., Popkov A.F. Contribution to the nonlinear theory of magnetostatic spin waves // Zh. Eksp. Teor. Fiz. 1983. Vol. 84. P. 606–615.
7. Zilberman P.E., Nikitov S.A., Temiryazev A.G. Four-magnon decay and the kinetic instability of a magnetostatic traveling wave in yttrium garnet ferrite films // JETP Lett. 1985. Vol. 42. Issue 3. P. 110.
8. Boardman A.D., Nikitov S.A., Waby N. Existence of spin-wave solitons in an anti-ferromagnetic film // Phys.Rev. B. 1993. Vol. 48. 13602.
9. Chen M., Tsankov M., Nash J., Patton C. Microwave magnetic-envelope dark solitons in yttrium iron garnet thin films // Phys. Rev. Lett. 1993. Vol. 70. 1707.
10. Damon R.W., Eshbach J.R. Magnetostatic modes of a ferromagnet slab // J. Phys. Chem. Solids. 1961. Vol. 19. P. 308.
11. O'Keefe T.W., Patterson R.W. Magnetostatic surface-wave propagation in finite samples // J. Appl. Phys. 1978. Vol. 49. Pp. 4886–4895.
12. Bajpai S.N. Excitation of magnetostatic surface waves: Effect of finite sample width // J. Appl. Phys. 1985. Vol. 58. P. 910.
13. Morozova M.A., Grishin S.V., Sadovnikov A.V., Romanenko D.V., Sharaevskii Yu.P., Nikitov S.A. Band gap control in a line-defect magnonic crystal waveguide // Appl. Phys. Lett. 2015. Vol. 107. 242402.
14. Demidov V.E., Demokritov S.O. Magnonic waveguides studied by microfocus Brillouin light scattering // IEEE Trans. Magn. 2015. Vol. 51. 0800215.
15. Beginin E.N., Sadovnikov A.V., Sharaevskii Yu.P., Nikitov S.A. Multimode surface magnetostatic wave propagation in irregular planar YIG waveguide // Solid State Phenomena. 2014. Vol. 215. Pp. 389–393.
16. Beginin E., Sadovnikov A., Sharaevsky Y., Nikitov S. Spatiotemporal dynamics of magnetostatic and spin waves in a transversely confined ferrite waveguide // Bull. Russ. Acad. Sci.: Phys. 2013. Vol. 77. Pp. 1429–1431.
17. Morozova M.A., Grishin S.V., Sadovnikov A.V., Sharaevskii Y.P., Nikitov S.A. Magnonic bandgap control in coupled magnonic crystals // IEEE Trans. Magn. 2014. Vol. 50. 4007204.

18. Demidov V.E., Demokritov S.O., Rott K., Krzysteczko P., Reiss G. Mode interference and periodic self-focusing of spin waves in permalloy microstrips // *Phys. Rev. B*. 2008. Vol. 77. 064406.
19. Kumar D., Adeyeye A.O. Broadband and total autocollimation of spin waves using planar magnonic crystals // *J. Appl. Phys.* 2015. Vol. 117. 143901.
20. Suhl H. The theory of ferromagnetic resonance at high signal powers // *Journal of Physics and Chemistry of Solids*. 1957. Vol. 1. P. 209.
21. Slavin A.N., Buttner O., Bauer M., Demokritov S.O., Hillebrands B., Kostylev M.M., Kalinikos B.A., Grimalsky V.V., Rapoport Y. Collision properties of quasi-one-dimensional spin wave solitons and two-dimensional spin wave bullets // *Chaos*. 2003. Vol. 13.
22. Demidov V.E., Rekers P., Mahrov B., Demokritov S.O. Nonlinear transverse stabilization of spin-wave beams in magnetic stripes // *Applied Physics Letters*. 2006. Vol. 89. 212501.
23. Demidov V. E., Hansen U.-F., Dzyapko O., Koulev N., Demokritov S.O., Slavin A.N. Formation of longitudinal patterns and dimensionality crossover of nonlinear spin waves in ferromagnetic stripes // *Phys. Rev. B*. 2006. Vol. 74. 092407.
24. Demidov V.E., Jersch J., Rott K., Krzysteczko P., Reiss G., Demokritov S.O. Nonlinear propagation of spin waves in microscopic magnetic stripes // *Phys. Rev. Lett.* 2009. Vol. 102. 177207.
25. Demidov V.E., Evelt M., Bessonov V., Demokritov S.O., Prieto J.L., Munoz M., Ben Youssef J., Naletov V.V., de Loubens G., Klein O., Collet M., Bortolotti P., Cros V., Anane A. Direct observation of dynamic modes excited in a magnetic insulator by pure spin current // *Scientific Reports*. 2016. Vol. 6. 32781.
26. Adam J.D., Davis L.E., Dionne G.F., Schloemann E.F., Stitzer S.N. Ferrite devices and materials // *IEEE Trans. MTT*. 2002. Vol. 50. Issue 3. P. 721.
27. Scott M.M., Patton C.E., Kostylev M.P., Kalinikos B.A. Nonlinear damping of high-power magnetostatic waves in yttrium-iron-garnet films // *Journal of Applied Physics*. 2004. Vol. 95. Pp. 6294–6301.
28. Hansen U.-H., Demidov V.E., Demokritov S.O. Dual-function phase shifter for spin-wave logic applications // *Applied Physics Letters*. 2009. Vol. 94. 252502.
29. Sadovnikov A.V., Beginin E.N., Morozova M.A., Sharaevskii Yu.P., Grishin S.V., Sheshukova S.E., Nikitov S.A. Nonlinear spin wave coupling in adjacent magnonic crystals // *Appl. Phys. Lett.* 2016. Vol. 109. 042407.
30. Садовников А.В., Рожнев А.Г. Моделирование распространения магнитостатических волн в одномерных магнонных кристаллах // *Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика*. 2012. Т. 20, № 1. С. 143–159.
31. Karlqvist O. Calculation of the magnetic field in the ferromagnetic layer of a magnetic drum // *Trans. Roy. Inst. Techno.* 1954. Vol. 86, Issue 3.
32. Davies C.S., Sadovnikov A.V., Grishin S.V., Sharaevsky Y.P., Nikitov S.A., Kruglyak V.V. Field-controlled phase-rectified magnonic multiplexer // *IEEE Trans.* 2015. Vol. 51, Issue 1.

33. Sadovnikov A.V., Beginin E.N., Odincov S.A., Sheshukova S.E., Sharaevskii Yu.P., Stognij A.I., Nikitov S.A. Frequency selective tunable spin wave channeling in the magnonic network // *Appl. Phys. Lett.* 2016. Vol. 108. 172411.
34. Lvov V.S. Wave Turbulence under Parametric Excitation. Berlin: Springer, 1994.
35. Ustinov A.B., Kalinikos B.A. A microwave nonlinear phase shifter // *Applied Physics Letters*. 2008. Vol. 93. 102504.

References

1. Nikitov S.A., Kalyabin D.V., Lisenkov I.V., Slavin A.N., Barabanenkov Y.N., Osokin S.A., Sadovnikov A.V., Beginin E.N., Morozova M.A., Sharaevsky Y.P., Filimonov Y.A., Khivintsev Y.V., Vysotsky S.L., Sakharov V.K., and Pavlov E.S. Magnonics: A new research area in spintronics and spin wave electronics. *Phys. Usp.* 2015. Vol. 58. Number 10.
2. Chumak A.V., Vasyuchka V.I., Serga A.A., Hillebrands B. Magnon spintronics. *Nat. Phys.* 2015. Vol. 11. P. 453.
3. Gurevich A.G., Melkov G.A. Magnetization Oscillations and Waves. London: CRC Press, 1996.
4. Stancil D. D., Prabhakar A. Spin Waves: Theory and Applications. Springer, 2009.
5. Rosanov N. Dissipative optical solitons. *Phys. Usp.* 2000. Vol. 43. Issue 4. Pp. 421–424.
6. Zvezdin A.K., Popkov A.F. Contribution to the nonlinear theory of magnetostatic spin waves. *Zh. Eksp. Teor. Fiz.* 1983. Vol. 84. P. 606–615.
7. Zilberman P.E., Nikitov S.A., Temiryazev A.G. Four-magnon decay and the kinetic instability of a magnetostatic traveling wave in yttrium garnet ferrite films. *JETP Lett.* 1985. Vol. 42. Issue 3. P. 110.
8. Boardman A.D., Nikitov S.A., Waby N. Existence of spin-wave solitons in an antiferromagnetic film. *Phys. Rev. B.* 1993. Vol. 48. 13602.
9. Chen M., Tsankov M., Nash J., Patton C. Microwave magnetic-envelope dark solitons in yttrium iron garnet thin films. *Phys. Rev. Lett.* 1993. Vol. 70. 1707.
10. Damon R.W., Eshbach J.R. Magnetostatic modes of a ferromagnet slab. *J. Phys. Chem. Solids.* 1961. Vol. 19. P. 308.
11. O’Keeffe T.W., Patterson R.W. Magnetostatic surface-wave propagation in finite samples. *J. Appl. Phys.* 1978. Vol. 49. Pp. 4886–4895.
12. Bajpai S.N. Excitation of magnetostatic surface waves: Effect of finite sample width. *J. Appl. Phys.* 1985. Vol. 58. P. 910.
13. Morozova M.A., Grishin S.V., Sadovnikov A.V., Romanenko D.V., Sharaevskii Yu.P., Nikitov S.A. Band gap control in a line-defect magnonic crystal waveguide. *Appl. Phys. Lett.* 2015. Vol. 107. 242402.
14. Demidov V.E., Demokritov S.O. Magnonic waveguides studied by microfocus Brillouin light scattering. *IEEE Trans. Magn.* 2015. Vol. 51. 0800215.
15. Beginin E.N., Sadovnikov A.V., Sharaevskii Yu.P., Nikitov S.A. Multimode surface

- magnetostatic wave propagation in irregular planar YIG waveguide. *Solid State Phenomena*. 2014. Vol. 215. Pp. 389–393.
16. Beginin E., Sadovnikov A., Sharaevsky Y., Nikitov S. Spatiotemporal dynamics of magnetostatic and spin waves in a transversely confined ferrite waveguide. *Bull. Russ. Acad. Sci.: Phys.* 2013. Vol. 77. Pp. 1429–1431.
 17. Morozova M.A., Grishin S.V., Sadovnikov A.V., Sharaevskii Y.P., Nikitov S.A. Magnonic bandgap control in coupled magnonic crystals. *IEEE Trans. Magn.* 2014. Vol. 50. 4007204.
 18. Demidov V.E., Demokritov S.O., Rott K., Krzysteczko P., Reiss G. Mode interference and periodic self-focusing of spin waves in permalloy microstrips. *Phys. Rev. B*. 2008. Vol. 77. 064406.
 19. Kumar D., Adeyeye A.O. Broadband and total autocollimation of spin waves using planar magnonic crystals. *J. Appl. Phys.* 2015. Vol. 117. 143901.
 20. Suhl H. The theory of ferromagnetic resonance at high signal powers. *Journal of Physics and Chemistry of Solids*. 1957. Vol. 1. P. 209.
 21. Slavin A.N., Buttner O., Bauer M., Demokritov S.O., Hillebrands B., Kostylev M.M., Kalinikos B.A., Grimalsky V.V., Rapoport Y. Collision properties of quasi-one-dimensional spin wave solitons and two-dimensional spin wave bullets. *Chaos*. 2003. Vol. 13.
 22. Demidov V.E., Rekers P., Mahrov B., Demokritov S.O. Nonlinear transverse stabilization of spin-wave beams in magnetic stripes. *Applied Physics Letters*. 2006. Vol. 89. 212501.
 23. Demidov V.E., Hansen U.-F., Dzyapko O., Koulev N., Demokritov S.O., Slavin A.N. Formation of longitudinal patterns and dimensionality crossover of nonlinear spin waves in ferromagnetic stripes. *Phys. Rev. B*. 2006. Vol. 74. 092407.
 24. Demidov V.E., Jersch J., Rott K., Krzysteczko P., Reiss G., Demokritov S.O. Nonlinear propagation of spin waves in microscopic magnetic stripes. *Phys. Rev. Lett.* 2009. Vol. 102. 177207.
 25. Demidov V.E., Evelt M., Bessonov V., Demokritov S.O., Prieto J. L., Munoz M., Ben Youssef J., Naletov V. V., de Loubens G., Klein O., Collet M., Bortolotti P., Cros V., Anane A. Direct observation of dynamic modes excited in a magnetic insulator by pure spin current. *Scientific Reports*. 2016. Vol. 6. 32781.
 26. Adam J.D., Davis L.E., Dionne G.F., Schloemann E.F., Stitzer S.N. Ferrite devices and materials. *IEEE Trans. MTT*. 2002. Vol. 50. Issue 3. P. 721.
 27. Scott M.M., Patton C.E., Kostylev M.P., Kalinikos B.A. Nonlinear damping of high-power magnetostatic waves in yttrium-iron-garnet films. *Journal of Applied Physics*. 2004. Vol. 95. Pp. 6294–6301.
 28. Hansen U.-H., Demidov V.E., Demokritov S.O. Dual-function phase shifter for spin-wave logic applications. *Applied Physics Letters*. 2009. Vol. 94. 252502.
 29. Sadovnikov A.V., Beginin E.N., Morozova M.A., Sharaevskii Yu.P., Grishin S.V., Sheshukova S.E., Nikitov S.A. Nonlinear spin wave coupling in adjacent magnonic crystals. *Appl. Phys. Lett.* 2016. Vol. 109. 042407.

30. Sadovnikov A.V., Rozhnev A.G. Electrodynamical characteristics of periodic ferromagnetic structures. *Izvestiya VUZ. Appl. Nonlin. Dynamics*. 2012. Vol. 20, Issue 1. Pp. 143–159 (in Russian).
31. Karlqvist O. Calculation of the magnetic field in the ferromagnetic layer of a magnetic drum. *Trans. Roy. Inst. Techno.* 1954. Vol. 86, Issue 3.
32. Davies C.S., Sadovnikov A.V., Grishin S.V., Sharaevsky Y.P., Nikitov S.A., Kruglyak V.V. Field-controlled phase-rectified magnonic multiplexer. *IEEE Trans.* 2015. Vol. 51, Issue 1.
33. Sadovnikov A.V., Beginin E.N., Odincov S.A., Sheshukova S.E., Sharaevskii Yu.P., Stognij A.I., Nikitov S.A. Frequency selective tunable spin wave channeling in the magnonic network. *Appl. Phys. Lett.* 2016. Vol. 108. 172411.
34. Lvov V.S. Wave Turbulence under Parametric Excitation. Berlin: Springer, 1994.
35. Ustinov A.B., Kalinikos B.A. A microwave nonlinear phase shifter. *Applied Physics Letters*. 2008. Vol. 93. 102504.



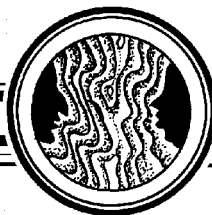
Одинцов Сергей Александрович родился в рабочем поселке Новоспасское, Ульяновской области (1995). Получил степень бакалавра (2015) по специальности «Радиофизика» и степень магистра (2017) по специальности «Прикладные математика и физика» на факультете нелинейных процессов Саратовского государственного университета. Работает в лаборатории «Метаматериалы» СГУ. Аспирант первого года обучения по направлению «Физика и астрономия», постоянный участник научных конференций. Опубликовал в соавторстве 6 статей в реферируемых журналах.

Россия, 410012 Саратов, Астраханская, 83
 Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского
 E-mail: odinoff@gmail.com



Садовников Александр Владимирович родился в Саратове (1987). Окончил с серебряной медалью МОУ СОШ № 73 (Саратов) и поступил на факультет нелинейных процессов СГУ (1987), который окончил с красным дипломом. В 2009 году поступил в аспирантуру по специальностям «Радиофизика», «Оптика» и в 2012 году защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук. Работает старшим научным сотрудником в лаборатории «Метаматериалы» СГУ и доцентом на кафедре «Физика открытых систем». Научные интересы: планарные структуры, метаматериалы, системы обработки и передачи информации, бриллюэновская спектроскопия, управляемые микро- и наноструктуры. Имеет 50 научных статей в рецензируемых научных журналах.

Россия, 410012 Саратов, Астраханская, 83
 Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского
 E-mail: sadovnikovav@gmail.com



МЕТОД УСРЕДНЕНИЯ, МАЯТНИК С ВИБРИРУЮЩИМ ПОДВЕСОМ: Н. Н. БОГОЛЮБОВ, А. СТЕФЕНСОН, П. Л. КАПИЦА И ДРУГИЕ

Е. М. Богатов, Р. Р. Мухин

Старооскольский технологический институт им. А.А. Угарова,
филиал Национального исследовательского технологического университета «МИСИС»
309516 Старый Оскол, Белгородской обл., мкр. Макаренко, 42
E-mail: e.bogolyubsky@yandex.ru, mukhiny@mail.ru

Поступила в редакцию 1.07.2017

В работе прослеживаются главные моменты исторического развития одного из основных методов исследования нелинейных систем – метода усреднения, который понимается как переход от так называемого точного уравнения

$$\frac{dx}{dt} = \varepsilon X(t, x)$$

(ε – малый параметр), к усреднённому уравнению

$$\frac{d\xi}{dt} = \varepsilon X_0(\xi) + \varepsilon^2 P_2(\xi) + \dots + \varepsilon^m P_m(\xi)$$

путём подходящей замены переменной.

Анализируется подход Боголюбова–Крылова к проблеме обоснования метода усреднения, основанный на теореме об инвариантной мере.

В работе представлена эволюция взглядов на физический маятник с вибрирующим подвесом, начиная с работ по описанию его простых движений (А. Стефенсон, Г. Джеффрис, Н.Н. Боголюбов, П.Л. Капица, В.Н. Челомей и др.) и заканчивая сложными движениями. В последнем случае проявляются различные характерные особенности сложного поведения нелинейных систем – бифуркации, хаотические режимы и т.д. (Дж. Блэкберн, М. Баргучелли и др.). Описывается ряд аналогов маятника с вибрирующей точкой подвеса за пределами классической механики (А.В. Гапонов, М.А. Миллер – локализация частицы в электрическом поле; С.М. Осовец – стабилизация горячей плазмы; В. Пауль, Н. Рэмси, Х. Демельт – удержание частиц в переменном электромагнитном поле).

Важной частью работы являются исторические сведения о Н.М. Крылове, Н.Н. Боголюбове, П.Л. Капице, что позволяет яснее представить мотивацию производившихся исследований, их обусловленность.

Ключевые слова: Метод усреднения, теорема Крылова–Боголюбова об инвариантной мере, маятник с вибрирующим подвесом, маятник Капицы, парадоксы Челомея, уравнение Матье, динамическая устойчивость, бифуркация, динамический хаос.

DOI: 10.18500/0869-6632-2017-25-5-69-87

Образец цитирования: Богатов Е.М., Мухин Р.Р. Метод усреднения, маятник с вибрирующим подвесом: Н.Н. Боголюбов, А. Стефенсон, П.Л. Капица и другие // Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2017. Т. 25, № 5. С. 69–87. DOI: 10.18500/0869-6632-2017-25-5-69-87

**THE AVERAGING METHOD, A PENDULUM WITH A VIBRATING
SUSPENSION: N. N. BOGOLYUBOV, A. STEPHENSON,
P. L. KAPITZA AND OTHERS**

E. M. Bogatov, R. R. Mukhin

Sary Oskol Technological Institute named after A.A.Ugarov,
the Branch of National Research Technological University «MISIS»
42, mkr. Makarenko, 309512 Sary Oskol, Belgorod region, Russia
E-mail: e.bogolyubsky@yandex.ru, mukhiny@mail.ru

Received 1.07.2017

The main moments of the historical development of one of the basic methods of nonlinear systems investigating (the averaging method) are traced. This method is understood as a transition from the so-called exact equation

$$\frac{dx}{dt} = \varepsilon X(t, x)$$

(ε is small parameter), to the averaging equation

$$\frac{d\xi}{dt} = \varepsilon X_0(\xi) + \varepsilon^2 P_2(\xi) + \dots + \varepsilon^m P_m(\xi)$$

by corresponding variable substitution.

Bogolyubov–Krylov’s approach to the problem of justifying the averaging method, based on the invariant measure theorem, is analyzed.

The paper presents the evolution of views on a physical pendulum with a vibrating suspension, beginning with the description of its simple motions (A. Stephenson, G. Jeffreys, N.N. Bogolyubov, P.L. Kapitza, V.N. Chelomey, etc.) and ending with complex movements. In the latter case, various characteristic features of the complex behavior of nonlinear systems is appeared – bifurcations, chaotic regimes, etc., (J. Blackburn, M. Bartuccelli, and others). A number of analogs of a pendulum with a vibrating suspension point outside of classical mechanics are described (A.V. Gaponov, M.A. Miller – localization of a particle in an electric field; S.M. Osovets – stabilization of hot plasma; V. Paul, N. Ramsey, H. Dehmelt – confinement of particles in an alternating electromagnetic field).

An important part of the work is historical information about N.M. Krylov, N.N. Bogolyubov, P.L. Kapitza, which makes possible to more clearly show the motivation of the studies, their conditionality.

Keywords: Averaging method, Krylov–Bogolyubov theorem about invariant measure, pendulum with vibrating suspension, Kapitza pendulum, Chelomey paradoxes, Mathieu equation, dynamic stability, bifurcation, dynamic chaos.

DOI: 10.18500/0869-6632-2017-25-5-69-87

References: Bogatov E.M., Mukhin R.R. The averaging method, a pendulum with a vibrating suspension: N.N. Bogolyubov, A. Stephenson, P.L. Kapitza and others. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*. 2017. Vol. 25. Issue 5. P. 69–87. DOI: 10.18500/0869-6632-2017-25-5-69-87

Предварительные замечания

Физика и математика издавна сталкивались с отдельными нелинейными задачами, но их самостоятельное изучение стало делом науки XX в. Имелось несколько линий развития в исследовании нелинейных явлений – во Франции, Нидерландах, в Великобритании, США, Советском Союзе. В Советском Союзе изучение нелинейных явлений сосредоточилось главным образом в Москве и Горьком (школа

Мандельштама–Андропова и группа московских математиков) и в Киеве (школа Крылова–Боголюбова). На последней и сосредоточим поначалу наше внимание.

На Украине ещё до 1917 г. был высокий уровень математических исследований, среди которых выделяются классические результаты Харьковской математической школы (А.М. Ляпунов, В.И. Стеклов). В 1902 г. в Киевском университете начал работать ученик П.Л. Чебышева Д.А. Граве, который принёс в Киев высокую культуру и научные традиции Петербургской математической школы [1, с. 16]. Но подлинный расцвет физико-математических наук на Украине начался в 1920-е гг., и одной из главных причин этого следует считать появление школы Крылова–Боголюбова.

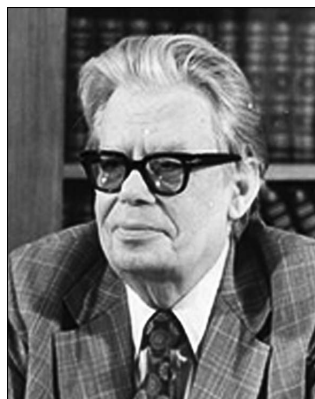


Н. М. Крылов

Николай Митрофанович Крылов (1879–1955) окончил Петербургский горный институт (1902). Знакомство Крылова с нелинейными системами произошло в 1908 г. на лекциях Э. Пикара, когда Крылов учился в Сорбонне. Огромное влияние на становление Крылова как математика оказал А. Пуанкаре, чьи лекции он также слушал [2, с. 28–29]. Работа Крылова в Академии наук Украины началась в 1922 г. после его переезда в Киев. К тому времени Крылов являлся признанным лидером в области аппроксимации функций, приближённому решению дифференциальных уравнений. С 1923 г. в работе семинара Крылова активное участие стал принимать его аспирант Н.Н. Боголюбов.

Николай Николаевич Боголюбов (1909–1992) очень рано проявил незаурядные математические способности, которые были раскрыты благодаря усилиям его отца, сделавшего всё возможное для развития таланта своего сына. В 1913 г. семья Боголюбова переехала в Киев, а в 1922–1923 г. Боголюбов познакомился с Крыловым, и их плодотворное сотрудничество продолжалось более двух десятилетий. Свою первую научную работу Боголюбов опубликовал в возрасте 15 лет.

Довоенный киевский период деятельности Боголюбова был посвящён математике и её приложениям, среди которых доминирует нелинейная механика – важнейший раздел современной математической физики. Систематическому изложению истории нелинейной механики отведено немало места в литературе [3–6]; кроме того, в диссертации Е.М. Нестеренко [6] и в обстоятельной работе А.М. Самойленко [5] приведена подробная библиография. В настоящей работе мы коснёмся одного из главных инструментов нелинейной механики – метода усреднения и проиллюстрируем его на примере маятника с вибрирующим подвесом. Маятник с вибрирующим подвесом в настоящее время является одной из важнейших базовых моделей нелинейной механики, и он связан с именами многих выдающихся исследователей. Оказалось, что эта система выходит далеко за рамки простой иллюстрации методов нелинейной механики.



Н. Н. Боголюбов

Метод усреднения

Для изучения периодических решений нелинейных дифференциальных уравнений широкое применение нашел разработанный А. Пуанкаре и А.М. Ляпуновым метод малого параметра [7–9]. По сравнению с обычными методами теории возмущений этот метод получил строгое обоснование и нашел применение не только для количественного, но и для качественного исследования. Новые потребности приложений, в первую очередь бурно развивавшейся в 1920-е гг. радиотехники, привели к необходимости дальнейшего развития методов решения нелинейных дифференциальных уравнений.

Н.М. Крылов и Н.Н. Боголюбов создали новые методы исследования нелинейных уравнений, пригодных для изучения не только периодических, но и квазипериодических решений. Этот новый раздел математической физики был ими назван *механикой нелинейных колебаний* или сокращённо – нелинейной механикой. Первые результаты были опубликованы в Докладах Французской Академии наук в 1932 г. [10] и в серии последующих работ. Полученные достижения были подытожены в двух монографиях Крылова и Боголюбова [11] (1934) и [12] (1937).

Строгое обоснование новых методов было проведено в получившей широкую известность работе Крылова и Боголюбова об инвариантной мере [13] и в фундаментальной монографии Боголюбова «О некоторых статистических методах в математической физике» [14]. Хотя поначалу реакция математической общественности на предложенные новые методы была неоднозначной (в частности, резкую критику они встретили со стороны А.А. Маркова на II Всесоюзном математическом съезде в Ленинграде), работы Крылова и Боголюбова по нелинейной механике в целом имели счастливую судьбу. Свою роль здесь сыграло издание двух упомянутых монографий Крылова и Боголюбова [11, 12] в 1943 г. в Принстоне в вольном переводе С. Лефшеца [15]. Основные идеи метода усреднения в форме, удобной для практических приложений, Боголюбов изложил в работе [16], следуя своей монографии [14]. Обратимся к методу усреднения [14, 16].

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений в так называемой стандартной форме, к которой могут быть приведены многие уравнения теории колебаний

$$\frac{dx_k}{dt} = \varepsilon X_k(t, x_1, \dots, x_n), \quad k = 1, 2, \dots, n, \quad (1)$$

или в векторной форме

$$\frac{dx}{dt} = \varepsilon X(t, x),$$

где ε – малый параметр, а функции X_k могут быть представлены в виде

$$X_k(t, x_1, \dots, x_n) = \sum_{\nu} e^{i\nu t} X_{k,\nu}(x_1, \dots, x_n).$$

Подобным образом можно учесть также члены высшего порядка по ε :

$$\frac{dx_k}{dt} = \varepsilon X_k(t, x_1, \dots, x_n) + \varepsilon^2 Y_k(t, x_1, \dots, x_n) + \dots$$

При ряде не очень жестких ограничений, накладываемых на правые части, уравнение (1) путём замены переменных

$$x = \xi + \varepsilon F_1(t, \xi) + \varepsilon^2 F_2(t, \xi) + \dots + \varepsilon^m F_m(t, \xi)$$

сводится к уравнению

$$\frac{d\xi}{dt} = \varepsilon X_0(\xi) + \varepsilon^2 P_2(\xi) + \dots + \varepsilon^m P_m(\xi) + \varepsilon^{m+1} R(t, \xi).$$

Пренебрегая слагаемым $\varepsilon^{m+1} R(t, \xi)$, получаем «усреднённое» уравнение m -го приближения

$$\frac{d\xi}{dt} = \varepsilon X_0(\xi) + \varepsilon^2 P_2(\xi) + \dots + \varepsilon^m P_m(\xi) \quad (2)$$

Преимущество приближённых уравнений (2) перед точными заключается в том, что их правые части не содержат явно времени t . Во многих интересных для приложений случаях оказывается достаточно исследовать более простые усреднённые уравнения (2). Здесь встаёт проблема обоснования метода усреднения, которая главным образом сводится к решению двух вопросов.

1. Нахождение условий, при которых разность между решением точного уравнения (1) и решением усреднённого уравнения (2) при малых значениях параметра ε становится сколь угодно малой на больших, но конечных интервалах времени.
2. Установление соответствия между поведением точного уравнения (1) и усреднённого уравнения (2) на бесконечном интервале времени.

Боголюбов показал, что при выполнении некоторых общих условий ограниченности и гладкости, накладываемых на правую часть уравнения (1), когда равномерно по отношению к x существует предел

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T X(t, x) dt = X_0(x),$$

решения первого приближения уравнения (2) сколь угодно мало отличаются от решений уравнения (1) на интервале $t \sim 1/\varepsilon$, если они совпадают при $t = 0$. Далее Боголюбов установил условия асимптотической устойчивости, близости периодических решений точного и усреднённого уравнений и получил ряд более тонких результатов. Дальнейшее развитие метода усреднения в трудах самого Боголюбова и его учеников выходит за рамки настоящей работы.

Перейдём к вопросу об инвариантной мере, имеющему самое непосредственное отношение к обоснованию метода усреднения.

Теорема Крылова–Боголюбова об инвариантной мере

Роль этой теоремы выходит далеко за рамки обоснования метода усреднения, она занимает важное место в общей теории динамических систем. Данный результат отчётливо характеризует особенности личности Боголюбова как исследователя. Задача о нелинейных колебаниях, вызванная прикладными вопросами, привела к созданию новой главы математической физики – нелинейной механики, которая нашла многочисленные применения в исследованиях по механике, гидродинамике, небесной механике, теории устойчивости, теории космического полёта, теории управления и др. Но Боголюбов пошёл дальше. Он провёл обоснование новых методов по

всем канонам математической строгости, исходя из «первых принципов», что поставило нелинейную механику на прочный математический фундамент и тем самым значительно увеличило ценность этой главы математической физики. Всё это стало возможным благодаря редко встречающемуся многообразию интересов Боголюбова и широте его научного диапазона.

Работа Крылова и Боголюбова по инвариантной мере (1937, [13]) имела счастливую судьбу и быстро получила широкую известность. Статья была опубликована в журнале *Annales of Mathematics*, который уже тогда, во многом благодаря С. Лефшецу, имел репутацию журнала с высоким уровнем публикуемых работ. Кроме того, ещё до публикации статьи Крылова и Боголюбова, по этой работе был сделан доклад на очень представительной Первой международной топологической конференции в Москве (1935), где присутствовали практически все виднейшие топологи мира [17].

Понятие инвариантной меры является естественным обобщением интегрального инварианта Пуанкаре. Существование инвариантной меры предполагается при исследовании динамических систем статистическими методами. В этой связи упомянем первую эргодическую теорему – теорему возвращения Пуанкаре, её обобщения Э. Хопфом, устойчивость по Пуассону, эргодические теоремы Биркгофа и фон Неймана. Крылов и Боголюбов в своей работе [13] доказали существование инвариантной меры для широкого класса динамических систем и вследствие этого эргодические методы обрели твёрдую почву.

Крылов и Боголюбов рассмотрели динамическую систему, состояние которой в момент времени t характеризуется точкой $P(x_1, \dots, x_n)$ n -мерного евклидова пространства E_n . Движение этой точки описывается дифференциальными уравнениями

$$\frac{dx_k}{dt} = X_k(x_1, \dots, x_n), \quad k = 1, \dots, n.$$

Через $T_t P$ обозначается точка пространства E_n , в которую данная точка перемещается к моменту t , если при $t = 0$ она находилась в точке P . Для произвольного множества A из E_n обозначение $T_t A$ имеет аналогичный смысл. Боголюбов и Крылов, учитывая возможность распространения на динамические системы с бесконечным числом степеней свободы, перешли к более общему рассмотрению в метрическом и компактном пространстве R . Мера m является *инвариантной*, если для любого множества A пространства R

$$m(T_t A) = m(A).$$

Крылов и Боголюбов установили, что в компактном фазовом пространстве R динамической системы существует инвариантная мера. Приведём авторскую формулировку главного результата.

Теорема (Крылова–Боголюбова). Пусть φ – любая нормированная мера в пространстве R . Тогда последовательность мер

$$\Phi_\tau(A) = \frac{1}{\tau} \int_0^\tau \varphi(T_{-t} A) dt \quad (\tau \rightarrow \infty)$$

компактна и каждая предельная мера этой последовательности является нормированной инвариантной мерой.

Далее в работе [13] Крылов и Боголюбов изучили совокупность всех инвариантных мер, допускаемых данной динамической системой.

Физический маятник с вибрирующим подвесом

Метод усреднения Боголюбов продемонстрировал на совершенно нетривиальном примере маятника с вибрирующей точкой подвеса в работе «Теория возмущений в нелинейной механике» (1950) [16]. Боголюбов показал, что у перевёрнутого маятника неустойчивое верхнее положение становится устойчивым, если точка подвеса вибрирует с достаточно большой частотой. Это выглядит парадоксальным. Рассказывали, что ещё в 1942 г., когда научные институты Киева находились в эвакуации в Уфе, в споре с М.А. Лаврентьевым по поводу маятника с вибрирующим подвесом Боголюбов выиграл пари, показав математическое доказательство факта устойчивости верхнего положения [5, с. 113]. Лаврентьев тогда изучал устойчивость полета артиллерийских снарядов, и задачи теории устойчивости входили в круг его непосредственных интересов [18, с. 46].

Но Боголюбов не был здесь первым. Указанная задача была рассмотрена манчестерским математиком А. Стефенсоном в серии статей 1906–1908 гг. [19–22]. Стефенсон исходил из уравнения движения маятника с вибрирующим подвесом для случая малых отклонений

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{(g - a\omega^2 \sin \omega t)\theta}{l} = 0, \quad (3)$$

нашёл его приближённое решение и привёл условие устойчивости верхнего положения равновесия. Такая же задача рассмотрена в известном пособии Г. Джеффриса «Методы математической физики» [23]. Уравнение (3) – это известное уравнение типа Матье, встречающееся в теории движения Луны. Его решают с помощью разложения в ряды и используя бесконечные детерминанты. К уравнению Матье в связи с теорией колебаний, к маятнику с вибрирующим подвесом в 1920–1930-е гг. обращался ряд других исследователей, среди которых Б. ван дер Поль [24], М. Струт [25], П. Хирш [26], А. Эрдейи [27], Э. Ловенстерн [28]. В работе [29] Б. ван дер Поль и М. Струт изучили области устойчивости решений уравнения Матье и привели соответствующие диаграммы. Можно сказать, что это был период накопления фактов, вызревания проблемы, когда публикуемые работы по данному вопросу воспринимаются рутинными и проходят не очень замеченными, поскольку время данной проблемы еще не пришло. История знает немало таких случаев, когда после скрытого, латентного периода одна или несколько ярких работ по-другому высвечивают проблему и привлекают к ней внимание. Так случилось и с маятником с вибрирующим подвесом. А указанными рубежными работами стали работы Н.Н. Боголюбова [16] и П.Л. Капицы [30, 31].

Боголюбов в своей работе [16] совершенно строго решил более общую задачу. Он исходил, в отличие от Стефенсона и Джеффриса, из точного нелинейного уравнения с учётом затухания

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \lambda \frac{d\theta}{dt} + \frac{(g - a\omega^2 \sin \omega t) \sin \theta}{l} = 0. \quad (4)$$

В системе имеется малый параметр $\varepsilon = a/l \ll 1$, где a – амплитуда колебаний точки подвеса, l – длина маятника. Сделав замену переменных, Боголюбов привёл

уравнение второго порядка (4) к двум уравнениям первого порядка в стандартной форме (1). Затем, применяя к ним метод усреднения, он получил уравнения первого приближения. После этого Боголюбов исследовал на устойчивость полученное квазипериодическое решение, соответствующее верхнему положению равновесия маятника. Условие устойчивости получилось следующим:

$$\omega > \sqrt{2}\omega_0 \frac{l}{a}, \quad (5)$$

где ω – частота колебаний точки подвеса, ω_0 – собственная частота маятника.

Работы П. Л. Капицы



П. Л. Капица

Отметим, что период с августа 1946 до начала 1955 г. был для Капицы нелегким временем. Он был снят со своих постов и отстранён от всех работ. Но Капица продолжал заниматься физикой в небольшой лаборатории, оборудованной на его даче на Николиной горе. Так что обращение Капицы к работе о маятнике с вибрирующим подвесом было вынужденным. В сборнике воспоминаний о Н.Н. Боголюбове [32] говорится, что идею изучить маятник с вибрирующим подвесом подал П.Л. Капице его сын Сергей. Будучи студентом третьего курса Московского авиационного института в 1945-46 гг., он узнал об эффекте маятника с вибрирующим подвесом на лекции по механике [32, с. 93–94].

В своих работах [30–31] П.Л. Капица не ссылается на своих предшественников, да и вряд ли они были ему известны, и ограничивается лишь ссылкой на книгу Джеффриса [23]. Но приводимое там решение Капицу не удовлетворило, так как предложенный метод был мало пригоден для исследования устойчивости, поскольку ограничивался случаем периодического решения при малых углах θ . Более того, Капица указывает что «красивое и поучительное явление динамической устойчивости перевёрнутого маятника не только не вошло в современные руководства по механике, но даже почти не известно широкому кругу специалистов. Можно предположить, что такое незаслуженное отношение к этому явлению было следствием того, что изучение его связано с решением уравнения Матье; оно производилось бесконечными детерминантами (метод *Hill*) или специальными функциями, что приводило к решению формального характера, не дающему возможности наглядно описать движение» [31, с. 8].

Сами явления динамической устойчивости были давно хорошо известны. Капица указывает, что при динамическом равновесии наиболее устойчиво то состояние, при котором центр тяжести занимает наиболее высокое положение, соответствующее максимуму потенциальной энергии. В качестве примеров этого принципа можно назвать обычный волчок, движение человека на ходулях, велосипедиста, движение автобуса, локомотива и пр., наиболее устойчивое положение достигается тогда, когда центр тяжести занимает, по возможности, более высокое положение [30, с. 588].

Как и в работе Боголюбова [16], у Капицы имеется тот же самый малый параметр $\varepsilon = a/l$ и он рассматривает то же уравнение движения (4), справедливое для

любых значений угла θ , но без учёта затухания. Это уравнение Капица обобщил для случая физического маятника, проинтегрировав следующее выражение [30–31]:

$$M_\theta = m(l^2 + k^2) \frac{d^2\theta}{dt^2} + mla\omega^2 \sin \omega t \sin \theta,$$

где m – масса маятника, M_θ – момент пары внешних сил, действующих на маятник, k – радиус инерции маятника. Затем Капица произвёл разделение быстрого и медленного движений: угловая частота ω колебаний подвеса была намного больше частоты собственных колебаний маятника, так что за один период $T = 2\pi\omega^{-1}$ полного колебания подвеса маятника угол θ мало отклонялся от некоторого среднего значения φ . Таким образом,

$$\theta = \varphi + \beta.$$

Затем Капица произвёл усреднение за период T одного полного колебания подвеса и получил уравнение первого приближения для быстрой переменной φ . Таким же путём можно получить и высшие приближения. Полученное им условие устойчивости имеет вид

$$\frac{1}{2}a^2\omega^2 \geq gl \left(1 + \frac{k^2}{l^2} \right).$$

При $k = 0$ это выражение совпадает с условием устойчивости Боголюбова (5). Капица провёл подробное исследование системы, изучив при различных ситуациях условия равновесия, значения углов наклона стержня к вертикали при равновесном положении, провёл обобщение задачи на случай, когда подвес маятника совершает более сложные периодические колебания, чем гармонические и т.д. Капица не ограничился лишь теоретическим изучением маятника с вибрирующим подвесом, а провёл его экспериментальное исследование и отметил некоторые возможности практических применений. Позднее Л.Д. Ландау со свойственной ему элегантностью предложил несколько иной подход к задаче о маятнике с вибрирующим подвесом, введя понятие «эффективной потенциальной энергии» $U_{\text{эфф}}$, и провёл обобщение на случай систем с любым числом степеней свободы. Положения устойчивого равновесия отвечают минимуму функции $U_{\text{эфф}}$. Рассмотренная им задача о маятнике с вибрирующим подвесом вошла в первый том широко известного курса «Теоретической физики» Л.Д. Ландау и Е.М. Лифшица [33].

Имя Капицы, обстоятельность проведённых исследований, публикация в таком журнале, как ЖЭТФ (с 1950-х гг. он стал регулярно переводиться на английский язык) и в широко известном курсе Ландау и Лифшица – всё это способствовало тому, что такая система с необычным поведением, как маятник с вибрирующим подвесом, его динамическая устойчивость приобрели широкую известность. Описываемые явления входят в необъятную область резонансных явлений, краткий обзор которых приведен в монографии В.Г. Широнова [34].

Мы не ставили себе целью дать исчерпывающее описание исторического развития маятниковых систем с вибрирующим подвесом, да это было бы и затруднительно сделать в небольшой по объёму статье. Наша задача более скромная – осветить главные события и привлечь внимание к сложности поведения и нетривиальности таких, казалось бы, простых систем. В контексте сказанного в дальнейшем коснёмся лишь самых основных вопросов.

Работа Боголюбова [16] и, особенно, работы Капицы [30–31] (маятник с вибрирующим подвесом нередко называют «маятником Капицы») стимулировали поток

исследований по вибрационной механике (см., например, [35]). К сожалению, работа Боголюбова [16] получила меньшую известность, чем она заслуживает. Эта работа послужила толчком важных исследований В.Н. Челомей о повышении устойчивости упругих систем с помощью вибраций.

В.Н. Челомей (впоследствии ставший крупнейшим специалистом в области ракетно-космической техники) рассмотрел класс упругих систем под действием продольных периодических сил

$$P = P_0 + F(\omega t),$$

$$F(\omega t) = \sum_{m \neq 0} (a_m \cos m\omega t + b_m \sin m\omega t).$$

Представляя перемещения системы в виде $S = V\varphi$, где V – функция координат системы, Челомей получил для функции времени $\varphi(t)$ дифференциальное уравнение в линейном приближении

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + 2n \frac{d\varphi}{dt} + \Omega^2 \left[\alpha - \frac{F(\omega t)}{P_k} \right] \varphi = 0, \quad (6)$$

где Ω – частота собственных колебаний несжатой системы, P_k – критическая статическая сила, n и α – постоянные величины. Применяя к уравнению (6) метод усреднения Боголюбова, Челомей показал, что система будет устойчивой и тогда, когда продольная сила P_0 превышает P_k , и нашёл условия устойчивости. Тем самым открылась принципиальная возможность повышения устойчивости упругих систем при помощи вибраций.

Челомей также провёл обобщение задачи на более сложный случай, когда система описывается нелинейным уравнением:

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + 2n \frac{d\varphi}{dt} + \Omega^2 \left[\alpha - \frac{F(\omega t)}{P_k} \right] f_1(\varphi) + \varepsilon f_2 \left(\varphi, \frac{d\varphi}{dt} \right) = 0,$$

где f_1 и f_2 – нелинейные функции φ и $d\varphi/dt$, ε – малый параметр.

Челомей отметил точное совпадение уравнения движения стержня, возбуждаемого на конце вертикальной составляющей от центробежной силы вращающейся массы, с уравнением малых колебаний маятника с вибрирующим подвесом. При этом колебания маятника в нижнем положении соответствуют колебаниям статически устойчивого стержня ($P_0 < P_k$) и, наоборот, колебания маятника в верхнем положении – колебаниям статически неустойчивого стержня ($P_0 > P_k$) [36].

В дальнейшем Челомей экспериментально продемонстрировал кажущиеся парадоксальными явления, вызванные вибрациями [37]. Вот одна такая система, когда вертикальный прямолинейный стержень был изогнут под действием груза, превосходящего критическое значение Эйлера $T_{кр}$.

Под действием продольных вибраций стержень выпрямлялся (рис. 1). Как известно (см., например, [38]), $T_{кр}$ является бифуркационным значением продольной силы, когда стержень теряет устойчивость по отношению к малым возмущениям. Здесь мы сталкиваемся со случаем, когда с помощью внешнего воздействия появляется возможность *управления бифуркациями*. Челомей представил установки, демонстрирующие целый ряд парадоксальных явлений, таких как всплывание тяжёлого шара в жидкости (рис. 2) и т.п.

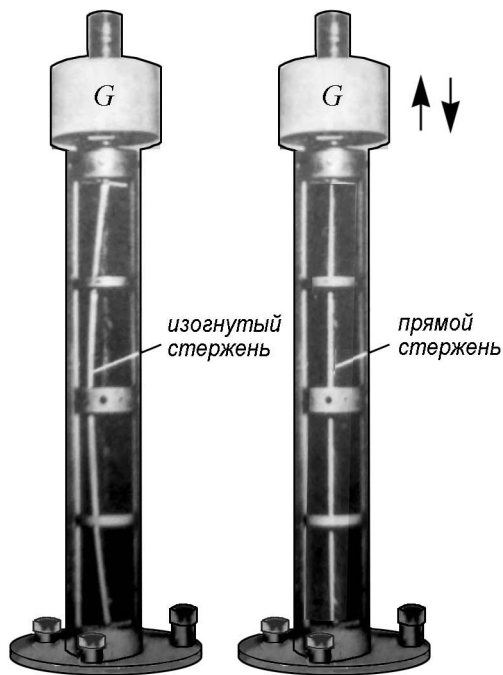


Рис. 1. Повышение устойчивости вертикального нагруженного стержня при действии вибраций, [37]

Fig. 1. Increase of stability of a vertical loaded rod under the action of vibrations

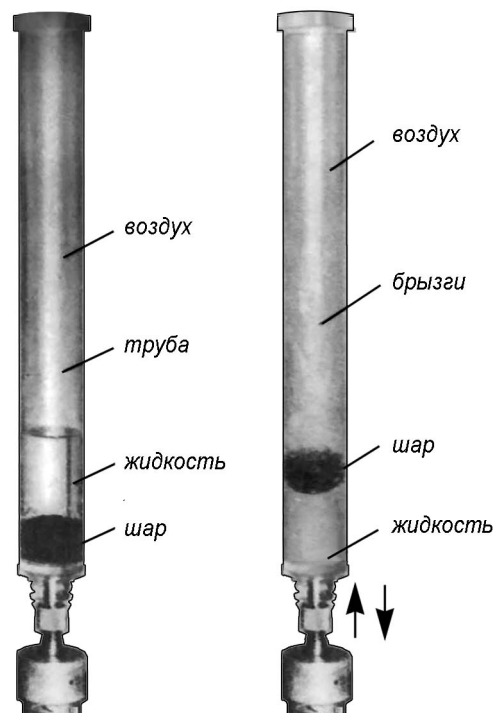


Рис. 2. Всплытие тяжелого шара в вибрирующей жидкости, [37]

Fig.2 The emergence of a heavy ball in a vibrating fluid

И идеи Капицы также получили продолжения в разных направлениях. Оказалось, что существуют аналоги маятника с вибрирующей точкой подвеса в системах за пределами классической механики.

К примеру, А.В. Гапонов и М.А. Миллер изучали вопрос о локализации частицы в электрическом поле. Как известно, потенциал в электрическом поле может достигать максимального или минимального значения лишь на границах области поля. Следовательно, невозможно устойчивое равновесие в поле пробного заряда (теория Ирншоу). Гапонов и Миллер показали, что при наложении высокочастотного поля возможно не только стабилизировать локализацию частицы, создавая одно-, двух- и трёхмерные ловушки для неё, но и ускорять частицы [39, 40]. Полученные результаты имели важное значение для интенсивно развивающихся исследований по ускорительной технике, физике плазмы, масс-спектрометрии. Вот одна из таких работ, на которую результаты Капицы [30, 31] также оказали непосредственное влияние. Для удержания и стабилизации плазменных конфигураций было предложено воздействовать на плазму высокочастотным полем [41]. Для стабилизации Z-пинча использовалось поле $H \cos \omega t$. Уравнения, описывающие малые радиальные отклонения плазменного шнура относительно положения равновесия, сводятся к уравнению типа Матье

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} - (A + B \cos \omega t)\xi = 0.$$

Здесь ξ – координата границы плазмы, A и B зависят от параметров плазменного

шнура и величины магнитного поля. Был получен критерий устойчивости

$$\omega^4 > B^2 > 2\omega^2 A,$$

который полностью согласуется с условием устойчивости (5).

Сложные движения маятника с вибрирующим подвесом

Осознание важности динамической устойчивости в разных областях физики стимулировало подробное изучение такой просто устроенной нелинейной системы, как маятник с вибрирующим подвесом. Особенно усилился интерес к этой системе после обнаружения в ней сложных движений. В этой связи остановимся на работах Дж. Блэкберна с соавторами [42] и М. Бартучелли с соавторами [43, 44]. В работе [42] была поставлена задача строгого и последовательного изучения маятника с вибрирующим подвесом, не ограничиваясь приближениями, на которых основывались предыдущие исследования [16, 20–22, 30, 31, 33]. Первое, что сделали авторы работы [42], они критически рассмотрели ранее использовавшиеся приближения: линеаризованная модель (уравнение Матье), разделение медленного и быстрого движений с усреднением по последним и введение эффективного потенциала.

Пусть подвес совершает вертикальные гармонические колебания $y_0 = b \cos \omega t$. Напишем уравнение движения маятника без учета затухания с безразмерными параметрами в обозначениях работы [43]

$$\ddot{\theta} + (\alpha - \beta \cos \tau) \sin \theta = 0,$$

где $\tau = \omega t$, $\alpha = g/(l\omega^2)$, $\beta = b/l$.

Затем произведем линеаризацию:

$$\ddot{\theta} + (\alpha - \beta \cos \tau)\theta = 0 \quad - \quad \text{нижнее положение}, \quad (7)$$

$$\ddot{\xi} + (\alpha + \beta \cos \tau)\xi = 0 \quad - \quad \text{верхнее положение}, \quad (8)$$

где $\xi = \pi + \theta$.

При изучении устойчивости важное значение имеет знак величины α , тогда как изменение величины β означает лишь сдвиг по времени и её знак не оказывает на интересующие нас вопросы никакого влияния. Выбирая $\beta > 0$, авторы работы [42] изучили диаграмму устойчивости линеаризованных уравнений (7)–(8) на плоскости $\beta\alpha$ и нашли, что перевернутый маятник будет находиться в устойчивом состоянии при $\beta = 0.129\dots 0.465$. При изучении нижнего положения был получен существенно новый результат – оказалось, что движение маятника *будет устойчивым не при всех значениях параметров*. Область устойчивости находится между значениями $\beta = 0$ и $\beta = 0.450 - 1.799\alpha$. Имеются такие значения параметров, когда области устойчивости верхнего и нижнего положения перекрываются.

Перейдем к приближению разделения медленного и быстрого движений и введению эффективного потенциала. В этом приближении нижнее положение маятника всегда устойчиво [33] в противоречии с результатами, приведенными выше. Метод эффективного потенциала оставляет открытым вопрос о границах устойчивости в верхнем положении. Согласно указанному приближению, увеличение амплитуды колебаний подвеса приводит к расширению потенциальной ямы. Маятник в верхнем

положении оказывается устойчивым при больших отклонениях от вертикали, угол отклонения может достигать $\pm \pi/2$ при больших β и ω . Этот результат невозможно получить при линеаризованном подходе, так же как невозможно и изучение вращательного режима.

Линеаризованное приближение, разделение движений, эффективный потенциал очень наглядны и удобны, но они дают лишь частичное понимание. Строгое исследование требует привлечения современной теории динамических систем вместе с вычислительным и лабораторным экспериментом.

Для анализа устойчивости верхнего положения маятника Бартучелли и соавторы [44] применили теорию КАМ. Они основывались на том, что приближенная линеаризованная система (без затухания) является интегрируемой гамильтоновой системой. Тогда полную систему можно рассматривать с учетом возмущения. Перейдя к переменным действие–угол, авторы [44] показали, что существует инвариантный КАМ-тор, который под действием возмущения деформируется, но все траектории остаются в ограниченной области – КАМ-тор создает топологическое препятствие для расхождения траекторий. Тем самым, исходя из первых принципов, была доказана устойчивость верхнего положения маятника.

Строгое и последовательное рассмотрение привело к открытию новых явлений в поведении маятника с вибрирующим подвесом. По-видимому, первым к изучению бифуркаций такого маятника обратился М.А. Красносельский с соавторами еще в конце 1960-х гг. [45]. Более подробное изучение провел М. Бартучелли с соавторами [43]. Оказалось, что для величины β существует значение β_c , то есть предельное значение амплитуды колебаний подвеса, при превышении которого существует только вращательное движение маятника. При $\beta < \beta_c$, но близким к нему, происходит бифуркация образования предельного цикла, и затем возбуждаются колебания с частотой, равной половине частоты вынужденных колебаний [43]. Блэкберн с соавторами назвали такие колебания флаттер-модой. При значении $\beta = \beta_c$ перевернутое положение становится совершенно неустойчивым, и маятник переходит во вращательное движение. Дальнейшие исследования еще значительно изменили картину поведения рассматриваемой системы [44]. При $\alpha = 0.5$ (нижнее положение маятника), начиная с $\beta = 0.55$, при увеличении β происходят бифуркации удвоения периода с переходом к хаотическому движению. При значении $\beta_d = 0.64018$ движение становится полностью хаотическим. Авторы [44] полагают, что в этом случае имеет место образование странного аттрактора, что подтверждается положительным значением показателя Ляпунова. Для верхнего положения ($\alpha = -0.1$) характер движения системы также определяется значением β . Здесь $\beta_d = 2.145$ и при $\beta < \beta_d$ движение системы носит колебательный характер. При $\beta_c = 0.623$ верхнее положение маятника становится неустойчивым, происходит бифуркация образования предельного цикла, что приводит к флаттер-моду. При дальнейшем росте β колебания исчезают, и остается только вращательный аттрактор. При $\beta > \beta_d$ движение становится хаотическим.

Динамические методы для удержания и стабилизации системы частиц стали привлекать пристальное внимание, и здесь были достигнуты впечатляющие успехи. В частности, исследования удержания частиц в неоднородных переменных электромагнитных полях (В. Пауль, Н. Рэмси, Х. Демельт) в 1989 г. были удостоены Нобелевской премии. Так, в ловушке Пауля стабилизация проводится с помощью переменного электрического поля [46, 47]. Такие ловушки дают возможность иссле-

довать даже одиночные изолированные частицы в течение длительных интервалов времени. Высокочастотные колебания создают эффективный потенциал [33], наличие минимума которого обеспечивает устойчивость. Основные идеи здесь те же, что и в теории маятника с вибрирующим подвесом. Однако приближенного рассмотрения (разделение быстрого и медленного движений, эффективный потенциал и т.д.) здесь недостаточно, требуется более строгий подход. Совершенно строго устойчивость для произвольно большого интервала времени определяется на основе теории КАМ. Для неоднородных систем устойчивость значительно усложняется вследствие диффузии Арнольда. Для рассматриваемых систем удержания частиц наложением не очень обременительных условий на потенциал удается удовлетворительным образом обеспечить стабильность положения частиц в ловушке. Это подтверждается и в лабораторных экспериментах [48, 49].

Что же в итоге? В настоящее время рассматриваемая область становится неотъемлемой. Такая просто устроенная система, как маятник с вибрирующим подвесом, все более основательно завоевывает себе «место под солнцем», утверждаясь как одна из базовых моделей нелинейной динамики. Область ее приложений все более расширяется. Укажем лишь два примера. С помощью модели перевернутого маятника изучается бозе-конденсат частиц со спином 1 [50], маятник с вибрирующим подвесом обобщается на систему многих тел [51]. Свойства и самой модели выявлены еще далеко не полно. В данной работе мы постарались представить основные вехи истории изучения маятника с вибрирующим подвесом – как он, поначалу воспринимавшийся как забавный феномен, превратился в важный инструмент исследования нелинейных систем. Если это удалось, авторы считают свою задачу выполненной.

Библиографический список

1. *Урбанский В.М.* Становление математических исследований в УССР. Дисс. ... канд. физ.-мат. наук. Киев, 1983. 198 с.
2. *Боголюбов А.Н., Урбанский В.М.* Николай Митрофанович Крылов. Киев: Наукова думка, 1987. 176 с.
3. *Волосов В.М.* Метод осреднения в теории нелинейных колебаний // *Механика в СССР за 50 лет. Т. 1. Общая и прикладная механика.* М., Наука, 1968. С. 115–136.
4. *Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А., Лыкова О.Б.* Асимптотические методы в нелинейной механике // *История отечественной математики. Т. 4. Кн. 2.* Киев: Наукова думка, 1970. С. 264–290.
5. *Самойленко А.М.* Н.Н. Боголюбов и нелинейная механика // *Успехи мат. наук.* 1994. Т. 49, вып. 5. С. 103–146.
6. *Нестеренко Е.М.* О развитии асимптотических методов нелинейной механики. Дисс. ... канд. физ.-мат наук. М., 1970.
7. *Poincaré H.* Les méthodes nouvelles de la mécanique celeste. V. 1–3. Paris: Gauthier-Villars, 1892–1899.
8. *Poincaré H.* Mémoire sur les courbes définies par les équations différentielles, I–IV // *J. Math. Pures Appl.*, 3 série, 1881, 7, 375–422; 1882, 8, 251–286; 4 série, 1885, 1, 167–244; 1886, 2, 151–217.
9. *Ляпунов А.М.* Общая задача об устойчивости движения. М.-Л.: ГИТТЛ, 1950. 472 с.

10. *Kryloff N. et Bogoluboff N.* Quelques exemples d'oscillations non lineares // Comptes Rendus des l'Acad. Sci. de Paris. 1932. Vol. 194.
11. *Крылов Н.М., Боголюбов Н.Н.* Новые методы нелинейной механики. М.;Л.: ОНТИ ГТТИ, 1934.
12. *Крылов Н.М., Боголюбов Н.Н.* Введение в нелинейную механику. Киев: Изд-во АН УССР, 1937.
13. *Kryloff N., Bogoliuboff N.* La théorie générale de la mesure dans son application à l'étude des systèmes dynamiques de la mécanique non linéaire // Ann. Math. 1937. Vol. 38. P. 65–113.
14. *Боголюбов Н.Н.* О некоторых статистических методах в математической физике. Киев: Изд-во АН УССР, 1945.
15. *Kryloff N.M., Bogoliuboff N.N.* Introduction to Non-linear Mechanics. Prinseton, NY: Prinseton Univ. Press. 1943.
16. *Боголюбов Н.Н.* Теория возмущений в нелинейной механике // Сб. трудов Инта строит. Механики АН УССР. Киев. 1950. Т. 14 С. 9–34.
17. *Александров П.С.* Первая международная топологическая конференция в Москве // Успехи мат. наук. 1936. Вып. 1. С. 260–262.
18. Век Лаврентьева. Новосибирск: Изд-во СО РАН, филиал «Гео», 2000. 456 с.
19. *Stephenson A.* On a class of forced oscillations // Quart. J. Pure and Appl. Math. 1906. Vol. 37, N148. P. 353–360.
20. *Stephenson A.* On the stability of the steady state of forced oscillation // Phil. Mag. and J. Sci. Ser. 6. 1907. Vol. 14, N84. P. 707–712.
21. *Stephenson A.* On induced stability // Phil. Mag. and J. Sci. Ser. 6. 1908. Vol. 15, N86. P. 233–236.
22. *Stephenson A.* On a new type of dynamical stability // Memoirs and Proceedings of the Manchester Literary and Philosophical Society. 1908. Vol. 52, N8.
23. *Jeffreys H.* Methods of Mathematical Physics. Cambridge (C.U.P.). 2nd Edition, 1950.
24. *Van der Pol B.* Stabiliseering door kleine trillingen // Physica. Bd. 1925. 5. P. 157–162.
25. *Strutt M.J.* Stabiliseering en labiliseering door trillingen // Physica. Bd. 1927. 7. P. 265–271.
26. *Hirsh P.* Das Pendel mit Oszillierendem Aufhängepunkt // Z. angew. Math. Mech. Bd. 1930. 10. P. 41–52.
27. *Erdelyi A.* Über die Kleinen Schwingungen eines Pendels mit oszillierendem Aufhängepunkt // Z. angew. Math. Mech. Bd. 1934. 14.
28. *Lowenstern E.R.* The stabilizing effect of imposed oscillations of high frequency on a dynamical system // The London, Edinburgh and Dublin Phil. Mag. 1932. Vol. 13. P. 458–486.
29. *Van der Pol B., Strutt M.J.O.* On the stability of Mathieu equation // The London, Edinburgh and Dublin Phil. Mag. 7th series. 1928. Vol. 5. P. 23–28.
30. *Капица П.Л.* Динамическая устойчивость маятника при колеблющейся точке подвеса // ЖЭТФ. 1951. Т. 21. Вып. 5. С. 588–597.
31. *Капица П.Л.* Маятник с вибрирующим подвесом // УФН. 1951. Т. 44. Вып. 1. С. 7–20.
32. Воспоминания об академике Н.Н. Боголюбове. М.: МИАН, 2009. 178 с.

33. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Механика. М.: Наука, 1965.
34. Широнос В.Г. Резонанс в физике, химии и биологии. Ижевск. Изд. Дом «Удмурт. ун-т», 2000/01. 92 с.
35. Блехман И.И. Вибрационная механика. М.: Наука, 1994.
36. Челомей В.Н. О возможности повышения устойчивости упругих систем при помощи вибраций // ДАН СССР. 1956. Т. 110. № 3. С. 345–347.
37. Челомей В.Н. Парадоксы в механике, вызываемые вибрациями // ДАН СССР. 1983. Т. 270. № 1. С. 62–67.
38. Богатов Е.М., Мухин Р.Р. О связи между нелинейным анализом, бифуркациями и нелинейной динамикой: на примере Воронежской школы нелинейного функционального анализ // Известия вузов. ПНД. 2015. № 6. С. 74–88.
39. Гапонов А.В., Миллер М.А. О потенциальных ямах для заряженных частиц в высокочастотных полях // ЖЭТФ. 1958. Т. 34. Вып. 2. С. 242–243.
40. Гапонов А.В., Миллер М.А. Об использовании движущихся высокочастотных потенциальных ям для ускорения заряженных частиц // ЖЭТФ. 1958. Т. 34. Вып. 3. С. 751–752.
41. Осовец С.М. Динамические методы удержания и стабилизации горячей плазмы // УФН. 1974. Т. 112. Вып. 4. С. 638–683.
42. Blackburn J.A., Smith H.Y.T., Gronbech-Jensen N. Stability and Hopf bifurcation in an inverted pendulum // Amer. J. Phys. 1992. Vol. 60. P. 903–908.
43. Bartuccelli M.V., Gentile G., Georgin K.V. On the dynamics of a vertically driven damped planar pendulum // Proc. Roy. Soc. Lond. 2001. Vol. 457. P. 3007–3022.
44. Bartuccelli M.V., Gentile G., Georgin K.V. KAM theory, Linstedt series and the stability of the upside-down pendulum // Discrete and Continuous Dynamical Systems. 2003. Vol. 9, № 2. P. 413–426.
45. Бурд В.Ш., Забрейко П.П., Колесов Ю.С., Красносельский М.А. Принцип усреднения и бифуркация почти периодических решений // ДАН СССР. 1969. Т. 187, № 6, С. 1219–1221.
46. Osberghaus O., Paul V., Fischer E. Forschungsberichte des Wirtschafts und Werker ministeriums. Nardheim Westfalen. 1958. Nr. 415.
47. Пауль В. Электромагнитные ловушки для заряженных и нейтральных частиц. Нобелевская лекция // УФМ. 1990. Т. 160. Вып. 12. С. 109–127.
48. Levi M. Geometry and physics of averaging with applications // Physica D. 1999. Vol. 132. P. 150–164.
49. Levi M., Zehnder E. Boundedness of solutions for quasiperiodic potentials // SIAM J. Math. Anal. 1995. Vol. 26. P. 1233–1256.
50. Gerving C.S., Hoang T.M. and oth. Non-equilibrium dynamics of un unstable quantum pendulum explored in a spin-1 Bose–Einstein condensate // Nature Communication. School of Physics, Georgia Ist. of Tech. 2012. P. 1–6.
51. Citro R., Dalla Torre E. G., D'Alessio L., Polkovnikov A., Babadi M., Oka T., and Demler E. Dynamical stability of a many-body Kapitza pendulum // Ann. of Physics. 2015. Vol. 360. P. 694–710.

References

1. Urbanskii V.M. PhD Thesis. Kiev, 1983 (in Russian).
2. Bogolyubov A.N., Urbanskii V.M. Nikolai Mitrophanovich Krylov. Kiev, Naukova Dumka, 1987 (in Russian).

3. Volosov V.M. Averaging method in the theory of nonlinear vibration. In: Mechanics in USSR for 50 Years. Moscow: Nauka, 1968. P. 115–136 (in Russian).
4. Bogolyubov N.N., Mitropolsky Y.A. and Lykova O.B. Asimptoticheskie metody v nelinejnoj mehanike. *Istorija Otechestvennoj Matematiki*. Vol. 4, part 2. Kiev, Naukova dumka, 1970, P. 264–290 (in Russian).
5. Samoilenko A.M. N.N. Bogolyubov and non-linear mechanics. *Uspekhi Mat. Nauk*. 1994. 299. Vol. 49, N5. P. 103–146.
6. Nesterenko E.M. PhD Thesis. Moscow, 1970 (in Russian).
7. Poincaré H. Les Méthodes Nouvelles de la Mécanique Celeste. V. 1–3. Paris: Gauthier-Villars, 1892–1899.
8. Poincaré H. Mémoire sur les courbes définies par les équations différentielles, I–IV. *J. Math. Pures Appl.*, 3 série, 1881, 7, 375–422; 1882, 8, 251–286; 4 série, 1885, 1, 167–244; 1886, 2, 151–217.
9. Lyapunov A.M. The General Problem of the Stability of Motion. Moscow; Leningrad, 1950 (in Russian).
10. Kryloff N. et Bogoluboff N. Quelques exemples d'oscillations non lineares. *Comptes Rendus des l'Acad. Sci. de Paris*. 1932. Vol. 194.
11. Krylov N.M., Bogolyubov N.N. New Methods of Nonlinear Mechanics. Moscow; Leningrad: ONTI, 1934 (in Russian).
12. Krylov N.M., Bogolyubov N.N. Introduction to Nonlinear Mechanics. Kiev, 1937 (in Russian).
13. Kryloff N., Bogoliuboff N. La théorie générale de la mesure dans son application à l'étude des systèmes dynamiques de la mécanique non linéaire. *Ann. Math.* 1937. Vol. 38. P. 65–113.
14. Bogolyubov N.N. About Some Statistical Methods in Mathematical Physics. Kiev, 1945 (in Russian).
15. Kryloff N.M., Bogoliuboff N.N. Introduction to Non-linear Mechanics. Prinseton, NY: Prinseton Univ. Press, 1943.
16. Bogolyubov N.N. Theory of perturbations in nonlinear mechanics (in Russian). *Coll. sci. works builds. Mechanics Inst. of the Ukrainian Academy of Sciences*. Kiev. 1950. Vol. 14. P. 9–34.
17. Aleksandrov P.S. First International topological conference in Moscow. *Uspekhi Mat. Nauk*. 1936. No.1. P. 260-262 (in Russian).
18. Vek Lavrent'eva. Novosibirsk: SB RAS, 2000 (in Russian).
19. Stephenson A. On a class of forced oscillations. *Quart. J. Pure and Appl. Math.* 1906. Vol. 37, N148. P. 353–360.
20. Stephenson A. On the stability of the steady state of forced oscillation. *Phil. Mag. and J. Sci. Ser. 6*. 1907. Vol. 14, N84. P. 707–712.
21. Stephenson A. On induced stability. *Phil. Mag. and J. Sci. Ser. 6*. 1908. Vol. 15, N86. P. 233–236.
22. Stephenson A. On a new type of dynamical stability. *Memoirs and Proceedings of the Manchester Literary and Philosophical Society*. 1908. Vol. 52, N8.
23. Jeffreys H. Methods of Mathematical Physics. Cambridge (C.U.P.). 2nd Edition, 1950.
24. Van der Pol B. Stabiliseering door kleine trillingen. *Physica. Bd.* 1925. Vol. 5. P. 157–162.

25. Strutt M.J. Stabiliseering en labiliseering door trillingen. *Physica. Bd.* 1927. Vol. 7. P. 265–271.
26. Hirsh P. Das Pendel mit Oszillierendem Aufhängepunkt. *Z. angew. Math. Mech. Bd.* 1930. Vol. 10. S. 41–52.
27. Erdelyi A. Über die Kleinen Schwingungen eines Pendels mit oszillierendem Aufhängepunkt. *Z. angew. Math. Mech. Bd.* 1934. Vol. 14.
28. Lowenstern E.R. The stabilizing effect of imposed oscillations of high frequency on a dynamical system. *The London, Edinburgh and Dublin Phil. Mag.* 1932. Vol. 13. P. 458–486.
29. Van der Pol B., Strutt M.J.O. On the stability of Mathieu equation. *The London, Edinburgh and Dublin Phil. Mag.* 7th series. 1928. Vol. 5. P. 23–28.
30. Kapitza P.L. Dynamic stability of the pendulum with vibrating suspension point. *Sov. Phys. JETP.* 1951. Vol. 21. P. 588–597 (in Russian); see also Collected Papers of P.L. Kapitza, edited by D. Ter Haar, Pergamon, London, 1965. Vol. 2. P. 714–726.
31. Kapitza P.L. Pendulum with an oscillating pivot. *Sov. Phys. Uspekhi.* 1951. Vol. 44, Iss. 1. P. 7–20 (in Russian).
32. Vospominaniya ob Akademike N.N. Bogolyubove. Moscow, 2009 (in Russian).
33. Landau L. D. and Lifschitz E. M. Mechanics. Moscow: Nauka, 1965 (in Russian); New York, Pergamon, 1976.
34. V.G. Shironosov. Resonance in Physics, Chemistry and Biology. Department of BioMedPhysics, UdsU, Izhevsk, 2001. 92 p. (in Russian).
35. Blekhman I.I. Vibration Mechanics. Moscow: Nauka, 1994 (in Russian).
36. Chelomey V.N. On the possibility of elastic systems stability increase by means of vibrations. *DAN SSSR.* 1956. Vol. 110, No.3. P. 345–347 (in Russian).
37. Chelomey V.N. Paradoxes in mechanics caused by vibrations. *DAN SSSR.* 1983. Vol. 270, No.1. P. 62–67 (in Russian).
38. Bogatov E.M., Mukhin R.R. The relation between the non-linear analysis, bifurcations and nonlinear dynamics (on the example of Voronezh school of nonlinear functional analysis). *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics.* 2015. Vol. 23, No.6. P. 74–88 (in Russian).
39. Gaponov A.V., Miller M.A. Potential wells for charged particles in high-frequency fields. *Sov. Phys. JETP.* 1958. Vol. 34, Iss. 2. P. 242–243 (in Russian).
40. Gaponov A.V., Miller M.A. Use of Moving High-Frequency Potential Wells for the Acceleration of Charged Particles. *Sov. Phys. JETP.* 1958. Vol. 34, Iss. 3. P. 751–752 (in Russian).
41. Osovets S.M. Dynamic methods of confinement and stabilization of hot plasma. *Sov. Phys. Uspekhi.* 1974. Vol. 112, Iss. 4. P. 638–683 (in Russian).
42. Blackburn J.A., Smith H.Y.T., Gronbech-Jensen N. Stability and Hopf bifurcation in an inverted pendulum. *Amer. J. Phys.* 1992. Vol. 60. P. 903–908.
43. Bartuccelli M.V., Gentile G., Georgin K.V. On the dynamics of a vertically driven damped planar pendulum. *Proc. Roy. Soc. Lond.* 2001. Vol. 457. P. 3007–3022.
44. Bartuccelli M.V., Gentile G., Georgin K.V. KAM theory, Linstedt series and the stability of the upside-down pendulum. *Discrete and Continuous Dynamical Systems.* 2003. Vol. 9, N2. P. 413–426.
45. Burd V.Sh., Zabreiko P.P., Kolesov Yu.S., and Krasnosel'skii M.A., Principle of averaging and bifurcation almost periodic solutions. *DAN SSSR.* 1969. Vol. 187, N6. P. 1219–1221 (in Russian).

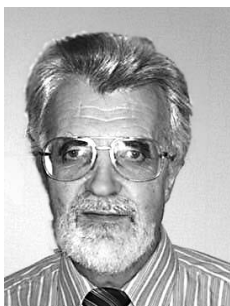
46. Osberghaus O., Paul V., Fischer E. Forschungsberichte des Wirtschafts und Werker ministeriums. Nardheim Westfalen. 1958. Nr. 415.
47. Paul V. Electromagnetic traps for charged and neutral particles. Nobel lecture. *Sov. Phys. Uspekhi*. 1990. Vol. 160, Iss. 12. P. 109–127.
48. Levi M. Geometry and physics of averaging with applications. *Physica D*. 1999. Vol. 132. P. 150–164.
49. Levi M., Zehnder E. Boundedness of solutions for quasiperiodic potentials. *SIAM J. Math. Anal.* 1995. Vol. 26. P. 1233–1256.
50. Gerving C.S., Hoang T.M. and oth. Non-equilibrium dynamics of un unstable quantum pendulum explored in a spin-1 Bose–Einstein condensate. *Nature Communication. School of physics, Georgia Ist. of Tech.* 2012. P. 1–6.
51. Citro R., Dalla Torre E.G., D’Alessio L., Polkovnikov A., Babadi M., Oka T., and Demler E. Dynamical stability of a many-body Kapitza pendulum. *Ann. of Physics*. 2015. Vol. 360. P. 694–710.

Богатов Егор Михайлович – родился в Волгограде (1974). Окончил Воронежский государственный университет (1997). После окончания ВГУ работал преподавателем в Воронежской государственной архитектурно-строительной академии и в ВГУ. Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук (ВГУ, 2000) по специальности «Дифференциальные уравнения». После защиты диссертации работает на кафедре высшей математики Старооскольского технологического института им. А.А. Угарова (филиал) Национального исследовательского технологического университета «МИСИС» в должности доцента. Автор учебника «Организация эксперимента» (в соавторстве с В.П. Соловьёвым). Руководитель научного проекта РФФИ по теме «Математическое моделирование процессов теплопереноса в нелинейных периодических двухфазных средах вида газ–металл» (2006–2008). Опубликовал более 30 научных статей по дифференциальным уравнениям и их приложениям. Имеет сертификат инструктора Wolfram Research Mathematica по обучению пакетам компьютерной математики в странах Восточной Европы. Область научных интересов: математическое моделирование физических процессов в неоднородных средах, история функционального анализа.



309516 Старый Оскол, мкр-н Макаренко, 42
 Старооскольский технологический институт им. А.А. Угарова (филиал)
 Национального исследовательского технологического университета «МИСИС»
 E-mail: embogatov@inbox.ru

Мухин Равиль Рафкатович – родился в Челябинской области (1947), окончил Московский инженерно-физический институт (1976). Защитил кандидатскую диссертацию по химической физике (1991, Институт органического синтеза и углехимии АН Казахстана) и докторскую диссертацию по истории динамического хаоса (2011, ИИЕТ РАН). Автор монографии «Очерки по истории динамического хаоса» (2007, 2012). Область научных интересов: история физико-математических наук. В настоящее время профессор Старооскольского технологического института (НИТУ МИСиС).



309516 Белгородская обл., Старый Оскол, мкр-н Макаренко, 42
 Старооскольский технологический институт им. А.А. Угарова, филиал
 Национального исследовательского технологического университета
 «Московский институт стали и сплавов»
 E-mail: mukhiny@mail.ru

Научное издание

Зав. редакцией *Н.Н. Левина*
Редакторы *Н.Н. Левина, Л.А. Сидорова*
Оформление художника *Д.В. Соколова*
Оригинал-макет подготовлен
И.А. Пономаревой, О.Н. Строгановой
в пакете *L^AT_EX*

Подписка на 2018 год
осуществляется по Объединенному Каталогу «Пресса России»
Раздел: 30. «Научно-технические издания.
Известия РАН. Известия ВУЗов»
и по Интернет-Каталогу Агентства «Книга-Сервис»
а также по Договору между Подписчиком
(юридическим или физическим лицом)
и Издателем (Саратовским государственным университетом)

Цена годовой подписки (6 номеров) договорная
Заявки на заключение Договора принимаются
по почте, по телефону редакции, по эл. почте редакции

Адрес редакции: 410012 Саратов, Астраханская, 83
Тел./факс: (845-2) 52-38-64
E-mail: and@nonlin.sgu.ru

Сайт журнала <http://andjournal.sgu.ru>

Распространение журнала осуществляется
редакцией журнала по адресной системе

**Условия подписки на электронную версию журнала на сайте
Научной электронной библиотеки <http://elibrary.ru>**

Сдано в набор 2.10.2017. Подписано к печати 3.11.2017
Формат 70x108/16. Бумага офсетная. Печать офсетная
Усл. печ. л. 7,7 (5,5). Уч.-изд. л. 7,0. Заказ №152–Т.

Отпечатано в Типографии ФГБОУ ВО СНИГУ
410012 Саратов, Б.Казачья, 112А, тел. (845-2) 27-33-85

© Редакция журнала
«Известия вузов. ПНД», 2017
© Оформление художника
Д.В. Соколова, 2017