

Журнал включен в «Перечень периодических научных и научно-технических изданий РФ,  
рекомендованных для публикации основных результатов диссертаций  
на соискание ученой степени доктора наук»

**МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ**

Известия высших учебных заведений

**ПРИКЛАДНАЯ НЕЛИНЕЙНАЯ ДИНАМИКА**

*научно-технический журнал*

издается с 1993 года

Выходит 6 раз в год

Том 22, № 2, 2014, Саратов

## СО Д Е Р Ж А Н И Е

ПРИКЛАДНЫЕ ЗАДАЧИ НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ КОЛЕБАНИЙ И ВОЛН <i>Чистяков В.В.</i> О динамике вращения твердого тела вокруг неподвижной оси, проходящей через центр масс, при сухом трении в опорах .....	3
НЕЛИНЕЙНАЯ ДИНАМИКА И НЕЙРОНАУКА <i>Рабинович М.И.</i> Творчество – непредсказуемость и производство информации	16
БИФУРКАЦИИ В ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ РАЗЛИЧНОЙ ПРИРОДЫ <i>Пономаренко В.П.</i> Регулярная и хаотическая динамика двухкольцевой системы фазовой синхронизации. Часть 1: Динамика частотно-фазовой системы с одинаковыми фильтрами первого порядка в цепях управления .....	25
ДЕТЕРМИНИРОВАННЫЙ ХАОС <i>Аржанухина Д.С., Кузнецов С.П.</i> Грубый хаос в автономной системе с запазды- ванием .....	36
АВТОВОЛНЫ. САМООРГАНИЗАЦИЯ <i>Слепнев А.В., Шепелев И.А., Вадивасова Т.Е.</i> Вынужденная синхронизация бегущих волн в активной среде в автоколебательном и возбудимом режимах.....	50
<i>Бастраков И.И., Гаврилова К.А., Григорьева С.А., Осипов Г.В.</i> Подавление воз- буждений в активной среде с помощью слабого внешнего воздействия ..	62
МЕТОДИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ ПО НЕЛИНЕЙНОЙ ДИНАМИКЕ <i>Камышов В.В., Быстров В.С.</i> Аналитическое исследование нелинейных свойств сегнетоэлектриков .....	77
НАУКА – ОБРАЗОВАНИЮ <i>Аникин В.М., Пойзнер Б.Н.</i> «Предзащита» диссертации: Формальные требова- ния и традиции .....	95
<i>Материалы X Международной школы «Хаотические автоколебания и образование структур – 2013» Россия, Саратов, 7–12 октября 2013</i>	
ПРИКЛАДНЫЕ ЗАДАЧИ НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ КОЛЕБАНИЙ И ВОЛН <i>Санин А.Л., Смирновский А.А.</i> Квантовый ангармонический осциллятор с одно- членным потенциалом, трением и внешним воздействием .....	103
АВТОВОЛНЫ. САМООРГАНИЗАЦИЯ <i>Полежаев А.А., Борина М.Ю.</i> Пространственно-временные структуры в актив- ной среде, вызванные диффузионной неустойчивостью .....	116

C O N T E N T S

APPLIED PROBLEMS OF NONLINEAR OSCILLATION AND WAVE THEORY

- Chistyakov V.V.* About rotational dynamics of a rigid body around non-principal axis passing through the center of mass under dry friction acting ..... 3

NONLINEAR DYNAMICS AND NEUROSCIENCE

- Rabinovich M.* Creativity – unpredictability and information production ..... 16

BIFURCATION IN DYNAMICAL SYSTEMS

- Ponomarenko V.P.* Regular and chaotic dynamics of two-ring phase locked system Part 1: Dynamics of frequency-phase system with identical first-order filters in control circuits ..... 25

DETERMINISTIC CHAOS

- Arzhanukhina D.S., Kuznetsov S.P.* Robust chaos in autonomous time-delay system 36

AUTOWAVES. SELF-ORGANIZATION

- Slepnev A.V., Shepelev I.A., Vadivasova T.E.* External synchronization of traveling waves in an active medium in self-sustained and excitable regime ..... 50

- Bastrakov I.I., Gavrilova K.A., Grigorieva S.A., Osipov G.V.* The suppression of the excitation of the active medium with a weak external action ..... 62

METHODICAL PAPERS IN NONLINEAR DYNAMICS

- Kamyshlov V.V., Bystrov V.S.* Analytical research of nonlinear properties of ferro-electrics ..... 77

SCIENCE FOR EDUCATION

- Anikin V.M., Poizner B.N.* «Pre-defense» of thesis: Formal requirements and traditions 95

*Transactions of the X International School  
«Chaotic Oscillations and Pattern Formation – 2013»  
Russia, Saratov, October 7–12, 2013*

APPLIED PROBLEMS OF NONLINEAR OSCILLATION AND WAVE THEORY

- Sanin A.L., Smirnovsky A.A.* Quantum anharmonic oscillator with one-term potential, friction and external force ..... 103

AUTOWAVES. SELF-ORGANIZATION

- Polezhaev A.A., Borina M.Yu.* Spatial-temporal patterns in active medium caused by diffusion instability ..... 116



## О ДИНАМИКЕ ВРАЩЕНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА ВОКРУГ НЕПОДВИЖНОЙ ОСИ, ПРОХОДЯЩЕЙ ЧЕРЕЗ ЦЕНТР МАСС, ПРИ СУХОМ ТРЕНИИ В ОПОРАХ

*В. В. Чистяков*

ФГБОУ ВПО Ярославский ГПУ им. К.Д. Ушинского

Рассмотрена динамика вращения твердого тела вокруг неподвижной оси  $Oz$ , проходящей через его центр масс  $C$  и не являющейся главной осью инерции. Возникающие инерционные пары  $M_{x,y}$  ( $J_{xz}$ ,  $J_{yz}$ ,  $\omega$ ,  $\varepsilon$ ) обуславливают сухое трение с коэффициентом  $\delta$ , делающее величину углового ускорения  $\varepsilon$  и причиной, и следствием действия сил одновременно. Проинтегрированы аналитически уравнения свободного и вынужденного ( $M_z = \text{const}$ ) движений с учетом квадратичного по угловой скорости  $\omega$  аэродинамического сопротивления, а также численно – колебательного движения под действием гармонического и ангармонических («ступенька», «пила») моментов. Полученные предельные циклы сравниваются с аналогичными при линейных вращательных колебаниях.

*Ключевые слова:* Астатический ротор, ось инерции, инерционные пары, сухое трение, квадратичное сопротивление, вращательные колебания.

### Введение

Если ось вращения проходит через центр масс насаженного тела, но не является для него осью свободного вращения из-за отличных от нуля центробежных моментов инерции  $J_{xz}$  и  $J_{yz}$ , то поперечные реакции  $N_O$ ,  $N_B$  в опорах (рис. 1) и обусловленный ими тормозящий момент сухого трения  $M_{\text{тр}}$  появляются лишь при вращении тела и зависят от закона вращения. Потому явление самоотторжения (заклинивания) оси, как это бывает, например, в случае маятника с трением [1], для астатического ротора невозможно в принципе.

В качестве примера такого ротора можно привести знаменитый *кельтский камень* [2], насаженный на поворотную ось 2-го порядка, или нечто, изготовленное по его образцу, например, просверленный вкось через центр однородный эллипсоид с неравными осями.

Для нахождения необходимых сил нормальных реакций в местах контактов тел в самом общем случае движения применяют изложенный в § 7.2 монографии А.И. Лурье [3] метод для определения реакций связи контактирующих

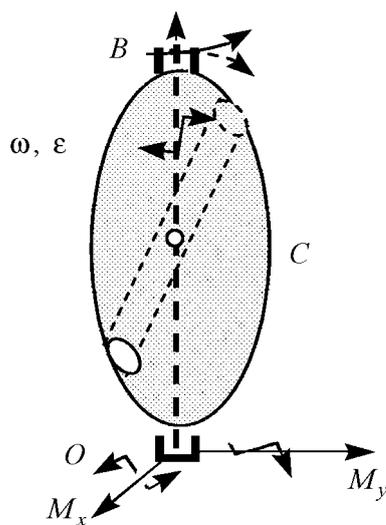


Рис. 1. Астатический ротор с неглавной осью вращения (3D-кельтский камень)

ответственных за поворот вокруг направлений  $C_x$  и  $C_y$ , [3] даёт то же уравнение динамики, что и использование принципа *Д'Аламбера* для нахождения поперечных реакций  $N_O$ ,  $N_B$  (см. рис. 1) в осях вращающегося тела, а с ними и момента  $M_{fr}$ .

Последний при этом будет зависеть не только от угловой скорости  $\omega$ , но и от углового ускорения  $\epsilon$  (!), и при этом вкуче с прочими парами сил определяет само это ускорение. То есть формально величины  $M_{fr}$  и  $\epsilon$  выступают одновременно и ведущими и ведомыми факторами.

Эта двусторонняя причинно-следственная связь не может не вызывать фундаментального интереса с точки зрения динамики нелинейной, так как в некоторых вырожденных случаях может приводить к несовместным в рамках динамики абсолютно твердого тела (а.т.т.) уравнениям, внося тем самым вклад в копилку парадоксов сухого трения [4].

Кроме того, подобная связь часто реализуется в *социодинамике* (эконофизике), динамике биологических процессов и явлений и т.д., и потому есть смысл исследовать возможный механический аналог столь сложных систем.

Равно как и само незаклинивающее сухое трение, не существующее вне движения и чем-то напоминающее трение жидкостное, представляет чисто практический интерес рассмотрение ситуаций, когда требуется чрезвычайно точное динамическое уравнивание высокоскоростного вращательного устройства (турбины, ротора, вала станка и т.д.), а также в тех случаях, когда такое уравнивание не предполагается. Последнее, как ни печально, может означать аварийную, а в некоторых случаях – катастрофическую ситуацию утраты гидротурбиной, ротором и пр. динамической уравниваемости, когда и вступает в силу вышеозначенное трение и не только оно (см. далее).

Настоящая работа посвящена изучению вопроса, как влияет такое трение в осях на динамику вращения ротора, насколько она схожа или различна с динамикой, описываемой стандартными уравнениями с линейным либо квадратичным трением.

в  $m$  точках твердых тел через введение  $m$  избыточных обобщенных координат  $q_{n+1}, q_{n+2}, \dots, q_{n+m}$ . После составления уравнений Лагранжа эти координаты вкуче с обобщенными скоростями принимаются равными нулю.

Так, автор [1] использует данный прием для нахождения выражения для силы нормальной реакции  $N$  и самой силы трения  $\Phi$  в оси колеблющегося маятника с целью последующего составления и решения уравнения нелинейных колебаний с возможностью уже упомянутого самоотторжения, когда маятник «зависает».

Нетрудно показать, что применение данного метода через введение избыточных угловых переменных  $q_2$  и  $q_3$ ,

Проблема решается в рамках классической динамики твердого тела и рассматривает основные типические случаи вращения динамически неуравновешенного астатического ротатора: свободное вращение под действием резистивных факторов; вращение под действием постоянного тягового момента; свободные колебания под действием упругой пары и вращательные колебания под действием вынуждающей гармонической и ангармонической («ступенька», «пила») пар.

## 1. Тормозящий момент

Решение классической проблемы нахождения динамических реакций в осях вращающегося тела дает следующие выражения для возникающих усилий в подвижной ( $B$ ) и неподвижной ( $O$ ) опорах (см., например, [5])

$$\begin{cases} B_y = \frac{\varepsilon J_{xz} - \omega^2 J_{yz}}{h}, \\ B_x = \frac{\varepsilon J_{yz} + \omega^2 J_{zx}}{h}. \end{cases} \quad \begin{cases} O_x = -\frac{\varepsilon J_{yz} + \omega^2 J_{zx}}{h}, \\ O_y = -\frac{\varepsilon J_{xz} - \omega^2 J_{yz}}{h}, \end{cases} \quad h = OB. \quad (1)$$

Эти несимметричные по отношению к обращению времени величины, тем не менее, складываясь своими проекциями по теореме Пифагора, дают пару поперечных сил, не зависящую от направления вращения

$$N_O = N_B = \frac{\sqrt{(J_{xz}^2 + J_{yz}^2)} (\varepsilon^2 + \omega^4)}{h}$$

и вызывающую силы трения с их тормозящим осевым моментом

$$M_{\text{тр}} = -\frac{2\delta \sqrt{(J_{xz}^2 + J_{yz}^2)} (\varepsilon^2 + \omega^4)}{h} = -\alpha \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}. \quad (2)$$

Размерность коэффициента  $\alpha$  здесь совпадает с размерностью инвариантного при повороте эффективного центробежного момента инерции  $\sqrt{J_{xz}^2 + J_{yz}^2}$ .

Не имеет принципиального значения, какой вид сухого трения имеет место в опорах – качения или скольжения. И в том и в другом случае возникающий момент  $M_{\text{тр}}$  пропорционален итоговой силе  $N_O + N_B$  нормального давления на опоры.

Отличительной чертой такого трения (назовем его *инерционным*) является необращение его величины в ноль в точке разворота вращения. В этот момент из-за смены направления  $M_{\text{тр}}$  следует ожидать скачка ускорения  $\varepsilon$  и, следовательно, удара.

Что же касается сил аэродинамического сопротивления вращению, то они традиционно описываются квадратичным моментом  $M_R = -c|\omega|\omega$ , от ускорения не зависят и во времени изменяются плавным образом. Коэффициент пропорциональности  $c$  здесь также имеет смысл некоторого момента инерции.

## 2. Вращение по инерции

Пусть тело имеет угловую скорость  $\omega_0$ , когда перестает действовать ведущий момент, и далее оно движется лишь под действием тормозящих пар  $M_R$  и  $M_{\text{тр}}$ . Очевидно, что направление вращения не изменится, и динамика его будет описываться

уравнением

$$J_{zz}\ddot{\varphi} = -\alpha\sqrt{\dot{\varphi}^4 + \ddot{\varphi}^2} - c\dot{\varphi}^2. \quad (3)$$

Его разрешение относительно старшей производной возможно через перегруппировку и возведение в квадрат

$$J_{zz}^2\ddot{\varphi}^2 + 2cJ_{zz}\ddot{\varphi}\dot{\varphi}^2 + c^2\dot{\varphi}^4 = \alpha^2\ddot{\varphi}^2 + \alpha^2\dot{\varphi}^4,$$

и оно неоднозначно

$$\ddot{\varphi} = \frac{-cJ_{zz} \pm \alpha\sqrt{J_{zz}^2 + c^2 - \alpha^2}}{J_{zz}^2 - \alpha^2}\dot{\varphi}^2.$$

Знак перед радикалом выбирается из очевидного условия

$$J_{zz}\ddot{\varphi} + c\dot{\varphi}^2 = \alpha\frac{\pm J_{zz}\sqrt{J_{zz}^2 + c^2 - \alpha^2} - c\alpha}{J_{zz} - \alpha} \leq 0. \quad (4)$$

Тогда при  $J_{zz} > \alpha$  должен быть выбран «-»:

$$\ddot{\varphi} = -\dot{\varphi}^2\frac{cJ_{zz} + \alpha\sqrt{J_{zz}^2 + c^2 - \alpha^2}}{J_{zz}^2 - \alpha^2} \equiv -\gamma\dot{\varphi}^2. \quad (5)$$

Уравнение можно представить как

$$J_{zz}\ddot{\varphi} = -c\dot{\varphi}^2 - \dot{\varphi}^2\frac{c\alpha^2 + \alpha J_{zz}\sqrt{J_{zz}^2 + c^2 - \alpha^2}}{J_{zz}^2 - \alpha^2}, \quad (6)$$

и момент трения, согласно А. И. Лурье [3], определится квадратичным выражением

$$M_{fr}(\omega) = -\frac{c\alpha^2 + \alpha J_{zz}\sqrt{J_{zz}^2 + c^2 - \alpha^2}}{J_{zz}^2 - \alpha^2}\omega^2. \quad (7)$$

В самом общем случае параметров уравнение легко интегрируется и дает верное решение

$$-\frac{\ddot{\varphi}}{\dot{\varphi}^2} = \gamma \Leftrightarrow \frac{1}{\omega} - \frac{1}{\omega_0} = \gamma t \Rightarrow \omega(t) = \frac{\omega_0}{1 + \omega_0\gamma t}, \quad \varphi(t) = \frac{\ln(1 + \omega_0\gamma t)}{\gamma}. \quad (8)$$

Здесь, в отличие от классического линейного по  $\omega$  сопротивления и от тормозящего постоянного момента, угловой путь до полной остановки логарифмически расходится со временем из-за медленно убывающей угловой скорости.

Таким образом, кельтский камень, закрепленный на проходящей через центр масс, то есть на *центральной* оси с трением в опорах, вращается по инерции точно так же, как и в отсутствие такового трения, но при наличии квадратичного момента сопротивления. Но множитель такого сопротивления помимо аэродинамических величин определяется также коэффициентом трения  $\delta$ , центробежными моментами инерции и расстоянием между опорами

$$c^* = \frac{cJ_{zz}^2 + \alpha J_{zz}\sqrt{J_{zz}^2 + c^2 - \alpha^2}}{J_{zz}^2 - \alpha^2}, \quad \alpha = \frac{2\delta\sqrt{J_{xz}^2 + J_{yz}^2}}{h} \quad (9)$$

и не обращается в нуль даже в безвоздушном пространстве ( $c = 0$ ).

Последнее означает, что инерционное трение при значительном своем коэффициенте  $\alpha$  поддерживает квадратичность диссипативной пары для астатического ротатора вплоть до очень малых оборотов, несмотря на то, что в аэродинамике на малых скоростях ньютоновский квадратичный закон переходит в линейный стоксовый.

Стоит отметить, что в частных (вырожденных) ситуациях, например  $J_{zz} = \alpha = c$ , уравнение (3) решения не имеет при начальном условии  $\omega(0) = \omega_0 \neq 0$ . Также бессмысленно решение (8) с уходом угловой скорости в бесконечность при  $\gamma < 0$ , то есть когда осевой момент инерции ротатора  $J_{zz} < \alpha$ .

По мнению Пэнлеве [4], подобные ситуации свидетельствуют о неэффективности динамики а.т.т. и законов Кулона–Амонтона в решении механических проблем, связанных с сухим трением. Эти и им подобные частные случаи требуют особого подхода (в печати), учитывающего связанное с конечностью скорости звука в материале ротатора запаздывание углового ускорения  $\varepsilon(t - \tau)$  (и скорости  $\omega(t - \tau)$ ), определяющего динамические реакции, от ускорения  $\varepsilon(t)$ , задающего темп изменения осевого кинетического момента ротатора  $K_z$ . Другими словами, подхода, так или иначе уводящего проблему в область динамики реального деформируемого тела.

### 3. Вращение под действием постоянного разгоняющего момента

Пусть постоянный во времени осевой ( $O_z$ ) момент  $M$  приложен к неподвижному телу в момент времени  $t = 0$ . Соответствующее уравнение разгона тела вокруг этой центральной оси будет отличаться от (5) постоянным слагаемым в правой части

$$J_{zz}\ddot{\phi} = M - \alpha\sqrt{\dot{\phi}^4 + \ddot{\phi}^2} - c\dot{\phi}^2. \quad (10)$$

Предельная скорость разгона  $\omega_\infty$  определится из условия  $\ddot{\phi} \rightarrow 0$

$$M - c\dot{\phi}^2 - \alpha\sqrt{\dot{\phi}^4} = 0 \Rightarrow \omega_\infty = \sqrt{\frac{M}{c + \alpha}}. \quad (11)$$

Аналогичным образом оно неоднозначно разрешится относительно старшей производной

$$\begin{aligned} \ddot{\phi}^2 (J_{zz}^2 - \alpha^2) - 2\ddot{\phi}J_{zz} (M - c\dot{\phi}^2) + \dot{\phi}^4 (c^2 - \alpha^2) + M^2 - 2c\dot{\phi}^2 M &= 0 \Rightarrow \\ \ddot{\phi} &= \frac{J_{zz} (M - c\dot{\phi}^2) \pm \sqrt{J_{zz}^2 (M - c\dot{\phi}^2)^2 - (J_{zz}^2 - \alpha^2) (\dot{\phi}^4 (c^2 - \alpha^2) - 2c\dot{\phi}^2 M + M^2)}}{J_{zz}^2 - \alpha^2} \Rightarrow \\ \ddot{\phi} &= \frac{J_{zz} (M - c\dot{\phi}^2) - \alpha\sqrt{\dot{\phi}^4 (J_{zz}^2 + c^2 - \alpha^2) - 2c\dot{\phi}^2 M + M^2}}{J_{zz}^2 - \alpha^2}. \end{aligned} \quad (12)$$

Отрицательный знак при  $J_{zz} > \alpha$  выбирается аналогичным (4) образом.

Анализ данного уравнения по методу А.И. Лурье

$$\begin{aligned} J_{zz}\ddot{\phi} &= (M - c\dot{\phi}^2) - (M - c\dot{\phi}^2) + \\ &+ \frac{J_{zz}^2 (M - c\dot{\phi}^2) - \alpha J_{zz} \sqrt{\dot{\phi}^4 (J_{zz}^2 + c^2 - \alpha^2) - 2c\dot{\phi}^2 M + M^2}}{J_{zz}^2 - \alpha^2} \Leftrightarrow \\ J_{zz}\ddot{\phi} &= M - c\dot{\phi}^2 + \alpha \frac{(M - c\dot{\phi}^2) - J_{zz} \sqrt{\dot{\phi}^4 (J_{zz}^2 + c^2 - \alpha^2) - 2c\dot{\phi}^2 M + M^2}}{J_{zz}^2 - \alpha^2} \end{aligned}$$

дает выражение для момента трения

$$M_{\text{fr}}(\omega, M) = \alpha \frac{\alpha(M - c\omega^2) - J_{zz} \sqrt{(M - c\omega^2)^2 + J_{zz}^2 \omega^4}}{J_{zz}^2 - \alpha^2} \quad (13)$$

и его начального и предельного значений –

$$M_{\text{fr}}(0, M) = -\frac{\alpha M}{J_{zz} + \alpha}, \quad M_{\text{fr}}(\omega_{\infty}, M) = -\frac{M\alpha}{c + \alpha}. \quad (14)$$

Само уравнение разгона (12) автономно, и оно решается стандартным методом перехода к переменной  $\omega = \dot{\varphi}(\varphi)$

$$\omega \frac{d\omega}{d\varphi} = \frac{J_{zz}(M - c\omega^2) - \alpha \sqrt{\omega^4 (J_{zz}^2 + c^2 - \alpha^2) - 2c\omega^2 M + \alpha^2 M^2}}{J_{zz}^2 - \alpha^2}.$$

Последнее эквивалентно уравнению

$$\frac{d\varphi}{d\omega} = \frac{(J_{zz}^2 - \alpha^2) \omega}{J_{zz}(M - c\omega^2) - \alpha \sqrt{\omega^4 (J_{zz}^2 + c^2 - \alpha^2) - 2c\omega^2 M + \alpha^2 M^2}}, \quad (15)$$

решение которого в параметрической форме –

$$\varphi(\omega) = \int_0^{\omega} \frac{(J_{zz}^2 - \alpha^2) \omega' d\omega'}{J_{zz}(M - c\omega'^2) - \alpha \sqrt{\omega'^4 (J_{zz}^2 + c^2 - \alpha^2) - 2c\omega'^2 M + \alpha^2 M^2}}, \quad (16)$$

$$t(\omega) = \int_0^{\omega} \frac{(J_{zz}^2 - \alpha^2) d\omega'}{J_{zz}(M - c\omega'^2) - \alpha \sqrt{\omega'^4 (J_{zz}^2 + c^2 - \alpha^2) - 2c\omega'^2 M + \alpha^2 M^2}}. \quad (17)$$

Выражение (16) для угла поворота в принципе может быть проинтегрировано после цепочки стандартных замен как рациональная дробь со знаменателем 4-го порядка. Что касается интеграла (17), то он может быть сведен к эллиптическому.

Численное интегрирование дает в общем-то стандартную кинетику разгона ротатора (рис. 2). Однако при одинаковых тяговых моментах и одинаковых предельных скоростях темп разгона при наличии только квадратичного аэродинамического сопротивления представляется более быстрым, нежели когда такое сопротивление дополняется еще инерционным трением.

Без учета квадратичной добавки интегрирование (12) дает фазовый портрет системы на плоскости  $(\varphi, \omega)$

$$\begin{aligned} \varphi(\omega) = & \frac{2\sqrt{J_{zz}^2 - \alpha^2}}{\alpha} \ln \left( \left| \frac{\sqrt{\omega^4 (J_{zz}^2 - \alpha^2) + M^2} - M - \omega^2 \sqrt{J_{zz}^2 - \alpha^2}}{\sqrt{\omega^4 (J_{zz}^2 - \alpha^2) + M^2} - M + \omega^2 \sqrt{J_{zz}^2 - \alpha^2}} \right| \right) - \\ & \frac{4 \left( \sqrt{\omega^4 (J_{zz}^2 - \alpha^2) + M^2} - M \right)}{\alpha \omega^2} - \\ & - 4 \frac{J_{zz} - \alpha}{J_{zz} + \alpha} \ln \left( \left| \frac{\sqrt{\omega^4 (J_{zz}^2 - \alpha^2) + M^2} - M - \omega^2 (J_{zz} - \alpha)}{\sqrt{\omega^4 (J_{zz}^2 - \alpha^2) + M^2} - M + \omega^2 (J_{zz} - \alpha)} \right| \right). \end{aligned} \quad (18)$$

Примечательно, что требование астатичности ротатора в рассмотренной задаче не является обязательным. Даже при наличии статических составляющих в реакциях опор и вызванных ими дополнительных сил трения решение (16), (17) не изменится по существу. Просто это дополнительное постоянное по величине и направлению трение может быть включено со знаком минус в разгоняющий момент  $M$ .

Вообще же реально при высоких оборотах вращения и резких разгонах и торможениях наличие статических реакций в опорах и связанного с ними трения не является проблемой, и может быть учтено как малое возмущение.

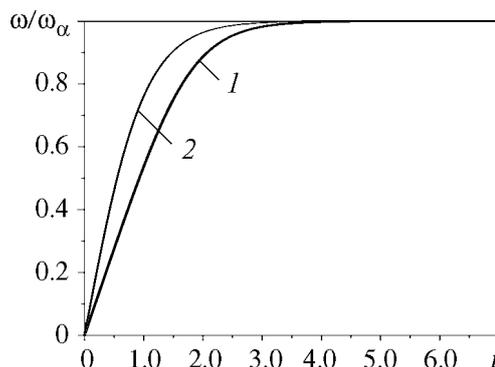


Рис. 2. Зависимость угловой скорости от времени при постоянном тяговом моменте при наличии (1) и отсутствии (2) сухого трения

#### 4. Вращательные колебания (гармонический момент)

При наличии возвращающего упругого момента  $M_{el}(\varphi) = -\kappa\varphi$  такой ротатор способен совершать колебания как свободные, так и вынужденные под действием гармонически изменяющейся со временем пары  $M_{ind}(t) = A_0 \sin(\Omega t)$ . Первый тип без учета квадратичной добавки описывается уравнением

$$J_{zz}\ddot{\varphi} = -\text{sign}(\dot{\varphi})\alpha\sqrt{\dot{\varphi}^4 + \ddot{\varphi}^2} - \kappa\varphi. \quad (19)$$

Разрешение его относительно второй производной дает

$$\ddot{\varphi} = \frac{-J_z\kappa\varphi - \text{sign}(\dot{\varphi})\alpha\sqrt{\dot{\varphi}^4(J_z^2 - \alpha^2) + \kappa^2\varphi^2}}{J_{zz}^2 - \alpha^2}. \quad (20)$$

Для вынужденных колебаний, соответственно

$$\ddot{\varphi} = \frac{-J_z(\kappa\varphi - A_0 \sin \Omega t)}{J_{zz}^2 - \alpha^2} - \frac{\text{sign}(\dot{\varphi})\alpha\sqrt{-2\kappa A_0\varphi \sin \Omega t + A_0^2 \sin^2 \Omega t + \dot{\varphi}^4(J_z^2 - \alpha^2) + \kappa^2\varphi^2}}{J_{zz}^2 - \alpha^2}. \quad (21)$$

Простым преобразованием правой части можно выделить член, ответственный за трение в осях и величину поперечных усилий в опорах  $O$  и  $B$ :

$$\begin{aligned} \ddot{\varphi} &= \frac{-\kappa\varphi + A_0 \sin \Omega t}{J_z} + \frac{\kappa\varphi - A_0 \sin \Omega t}{J_z} + \frac{-J_z(\kappa\varphi - A_0 \sin \Omega t)}{J_{zz}^2 - \alpha^2} - \\ &= \frac{\text{sign}(\dot{\varphi})\alpha\sqrt{-2\kappa A_0\varphi \sin \Omega t + A_0^2 \sin^2 \Omega t + \dot{\varphi}^4(J_z^2 - \alpha^2) + \kappa^2\varphi^2}}{J_{zz}^2 - \alpha^2} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow J_z\ddot{\varphi} &= -\kappa\varphi + A_0 \sin \Omega t + \frac{\alpha^2(A_0 \sin \Omega t - \kappa\varphi)}{J_{zz}^2 - \alpha^2} - \\ &= \frac{\alpha \text{sign}(\dot{\varphi}) J_z \sqrt{-2\kappa A_0\varphi \sin \Omega t + A_0^2 \sin^2 \Omega t + \dot{\varphi}^4(J_z^2 - \alpha^2) + \kappa^2\varphi^2}}{J_{zz}^2 - \alpha^2} \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} M_{fr}(\varphi, \omega, t) = \frac{\alpha^2 (A_0 \sin \Omega t - \kappa \varphi)}{J_{zz}^2 - \alpha^2} - \\ \frac{\alpha \operatorname{sign}(\omega) J_z \sqrt{\kappa^2 \varphi^2 - 2\kappa A_0 \varphi \sin \Omega t + A_0^2 \sin^2 \Omega t + \omega^4 (J_z^2 - \alpha^2)}}{J_{zz}^2 - \alpha^2}, \\ N_O = N_B = \frac{M_{fr}}{2\delta}. \end{array} \right. \quad (22)$$

Достоинно внимания то, что своей плавной, не зависящей от угловой скорости частью, момент  $M_{fr}$  может значительно усиливать консервативную возвращающую и вынуждающую гармоническую пары при примерном равенстве характеристик  $J_{zz}$  и  $\alpha$ .

Что же касается разрывной части с множителем  $\operatorname{sign}(\omega)$ , то она ответственна за удар, амплитуда которого

$$I_m = \frac{2\alpha J_z |\kappa \varphi_m - A_0 \sin \Omega t|}{J_{zz}^2 - \alpha^2}$$

помимо соотношения между  $J_{zz}$  и  $\alpha$  зависит также от углового положения точки разворота  $\varphi_m$  (в установившемся режиме – просто угловой амплитуды) и от сдвига фаз между  $\varphi(t)$  и  $A_0 \sin \Omega t$ . Как поперечная сила этот удар будет передаваться обоим опорам  $O$  и  $B$  с множителем  $1/(2\delta)$  (22).

Уравнения (20) и (21) в принципе можно приближенно проинтегрировать одним из принятых в теории нелинейных колебаний способов (см. например [6]). В частности, при помощи теории возмущений, рассматривая в качестве такового всё или только разрывную часть  $M_{fr}$ .

Численный расчет (Maple 15) дает при высоких значениях коэффициента трения зависимости для угла и скорости, существенно отличающиеся по форме от свободных линейных колебаний (рис. 3). Так, для кривой  $\omega(t)$  характерны изломы в точках разворота, тем ярче выраженные, чем больше параметр  $\alpha$ . Примечательно также, что затухание идет существенно быстрее, чем в линейных системах с аналогичными параметрами (штрихпунктир).

У вынужденных колебаний ангармоничность также сильнее выражена при высоких показателях трения (рис. 4).

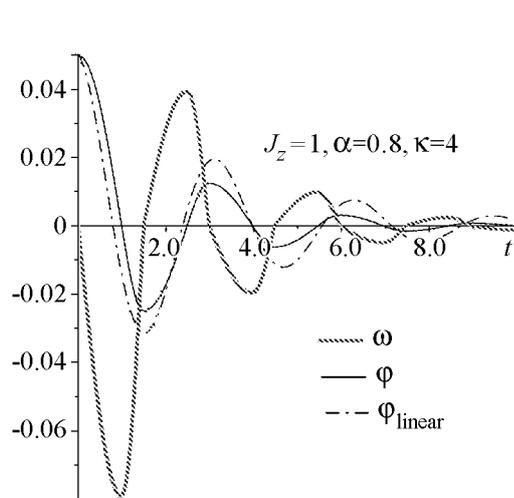


Рис. 3. Кинетика свободных колебаний

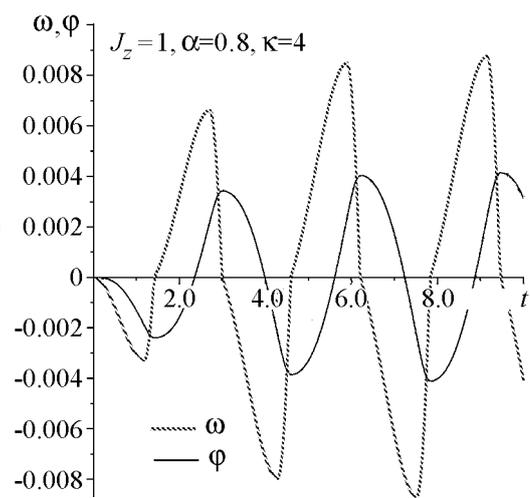


Рис. 4. Вынужденные колебания

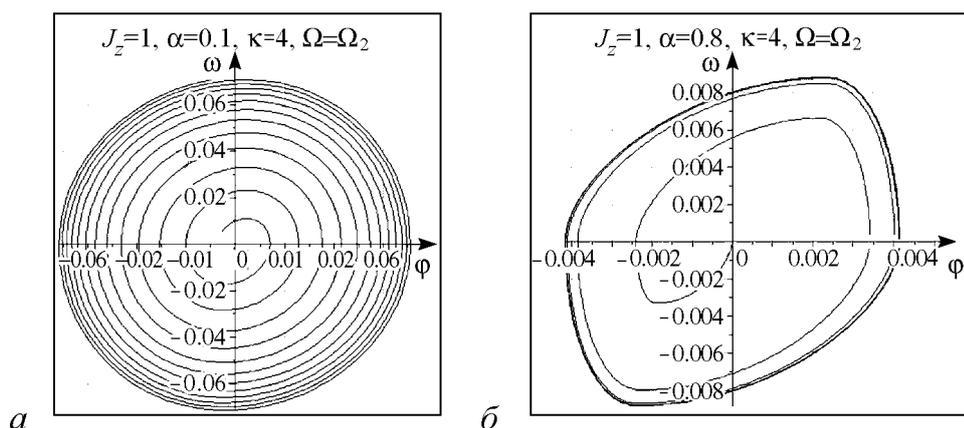


Рис. 5. Фазовый портрет системы при малых (а) и больших (б) параметрах трения  $\alpha$

Интересен фазовый портрет таких колебаний с характерной неправильностью предельного цикла (рис. 5), однако сохраняющего центральную симметричность. Примечательно, что максимальная угловая скорость на этом цикле достигается вдали от положения равновесия, скорее ближе к поворотным точкам.

При малых параметрах  $\alpha$  и вид колебаний, и предельный цикл близки по форме к соответствующим кривым линейных вынужденных колебаний.

## 5. Колебания под действием ангармонического момента

**5.1. «Ступенька».** В ряде чисто технических проблем представляет интерес движение ротора при чередующихся по направлению постоянных внешних моментах, то есть когда периодическое внешнее воздействие имеет в идеале ступенчатую форму. Последнюю можно описать сингулярной формулой

$$M_{\text{ind}}(t) = A_0 \text{sign}(\sin \Omega t). \quad (23)$$

Каким образом наличие инерционного трения влияет на форму вынужденных колебаний, на портрет системы на фазовой плоскости? Чтоб ответить на этот вопрос, необходимо исследовать динамическое уравнение, имеющее вид

$$\ddot{\varphi} = \frac{-J_z (\kappa \varphi - A_0 \text{sign}(\sin \Omega t))}{J_{zz}^2 - \alpha^2} - \frac{\text{sign}(\dot{\varphi}) \alpha \sqrt{-2\kappa A_0 \varphi \text{sign}(\sin \Omega t) + A_0^2 + \dot{\varphi}^4 (J_z^2 - \alpha^2) + \kappa^2 \varphi^2}}{J_{zz}^2 - \alpha^2}. \quad (24)$$

Его решение можно получить аналитически из (16) путем сшивки в особых точках, а также и численно для конкретных значений параметров.

Помимо двух, по закону положенных изломов в точках изменения полярности момента на квазипериоде кривой  $\omega(t)$  (рис. 6), есть еще два, соответствующие точке разворота. Изломы наблюдаются и на предельном цикле (рис. 7) в фазовой плоскости.

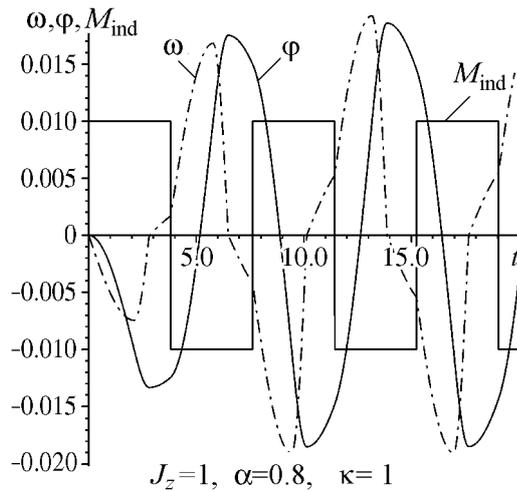


Рис. 6. Кинетика  $\varphi(t)$  и  $\omega(t)$  при больших трениях при действии ступенчатого момента

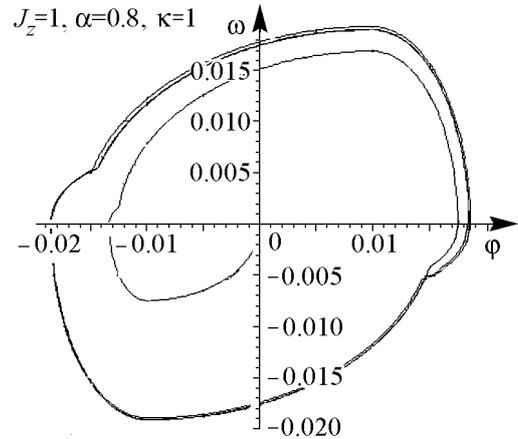


Рис. 7. Фазовый портрет астатичного ротора при больших  $\alpha$

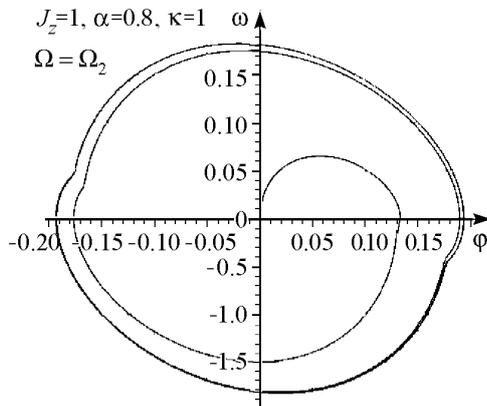


Рис. 8. Фазовый портрет стандартной линейной системы с большим трением («ступенька»)

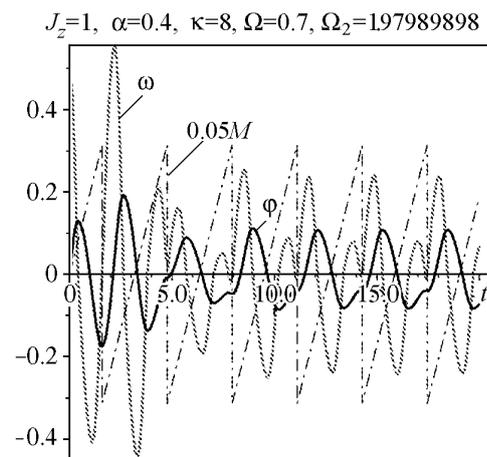


Рис. 9. Кинетика  $\varphi$  и  $\omega$  при подаче пилообразного вынуждающего момента

Однако аналогичные изломы имеют место и на предельном цикле линейной колебательной системы, диссипативный момент в которой пропорционален угловой скорости (рис. 8).

Что касается вынуждающей частоты, то для обеих систем она выбиралась равной резонансной для линейной системы  $\Omega_2 = \sqrt{\kappa/J_{zz} (1 - \alpha^2/J_{zz}^2)}$ . Уже упомянутая сдвоенность изломов на кривой угловой скорости свидетельствует о вдвойне опасных ударных воздействиях на ось в случае наличия инерционного трения.

**5.2. «Пила».** Периодический пилообразный момент моделировался формулой

$$M(t) = M_0 \cos(\arccos(\Omega t)) \operatorname{sign}(\sin(\Omega t)). \quad (25)$$

Частоты  $\Omega$  выбирались как близкие, так и далекие от «резонанса»  $\Omega_2$ , начальные условия – по типу «отклонение» и «толчок» (импульс).

При различных значениях вынуждающей частоты  $\Omega$  установившаяся кинетика угла поворота и угловой скорости ротора практически совпа-

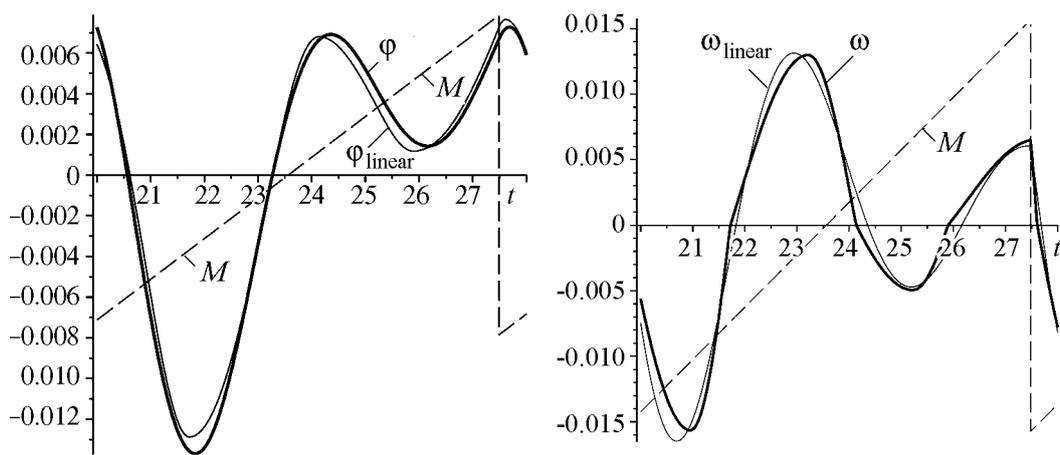


Рис. 10. Кинетика угла поворота (а) и угловой скорости (б) у астатичного ротатора и классического линейного осциллятора при  $J_z = 2.0$ ,  $\alpha = 0.9$ ,  $\kappa = 4$ ,  $\Omega = 0.4\Omega_2$

дала с аналогичной кинетикой классической линейной системы с тем же моментом инерции  $J_{zz}$ , но диссипативным моментом  $M_{\text{тр}}(t) = -\alpha \cdot 1 \cdot \omega$  (множитель  $1 \text{ с}^{-1}$  – для нужной размерности), отличаясь только дополнительными изломами  $\omega(t)$  в точках разворота.

Таким образом, можно заключить, что в исследованной многомерной области параметров как при гармоническом вынуждающем воздействии, так и при различных ангармонических исследуемый ротатор, в основном, ведет себя как линейная осциллирующая система, отличаясь лишь в деталях второго порядка.

Разумеется, проблема схожести предельного поведения астатичного колебательного ротатора и линейного осциллятора с инерционным трением требует более глубокой проработки и выходит за рамки настоящей статьи. Однако полученные предварительные результаты оправдывают повсеместное применение простой и удобной линейной модели для демонстрации принципиальных свойств колебательного устройства.

### Выводы

Изучено как свободное, так и вынужденное движение важной динамической системы, весьма близкой по физическим свойствам к реальной: астатического ротатора с неглавной осью вращения. Примечательным свойством такой системы является возникновение инерционного трения в оси, а вместе с ним и двусторонней причинно-следственной связи между угловым ускорением и тормозящим моментом такого трения.

Показано: а) свободное вращение по инерции эквивалентно движению с квадратичным по угловой скорости сопротивлением; б) вынужденные колебания под действием как гармонического, так и различных ангармонических моментов по основным характеристикам схожи с аналогичными колебаниями простых линейных систем с диссипацией.

Различие с последними выражается в наличии дополнительных ударных воздействий на ось в поворотных точках, где скачком изменяется момент сухого трения  $M_{\text{тр}}$ .

Изучение таких ударов представляет практический интерес в плане анализа и моделирования хода и последствий аварийных ситуаций, связанных с развитием у ротатора (вращательного осциллятора) динамической неуравновешенности.

Кроме того, несмотря на схожесть предельного поведения с классической линейной системой, рассмотренный ротатор с часовой пружиной и трением может быть включен в библиотеку нелинейных колебательных моделей для существующих компьютерных имитационных программ типа Nonlinear Oscillations (Physics Academic Soft) и др.

*Работа выполнена в рамках государственного задания Минобрнауки РФ по теме «Разработка компетентностно-ориентированной модели обучения физике в общеобразовательной средней школе», № государственной регистрации 01201261999.*

### Библиографический список

1. Смирнов Ю.П. Об уравнениях динамики систем с трением // Сборник научно-методических статей по теоретической механике. Вып. 11. М.: Высшая школа, 1981. С. 184.
2. Borisov A.V., Jalnin A.Yu., Kuznetsov S.P., Sataev I.R., Sedova J.V. Dynamical phenomena occurring due to phase volume compression in nonholonomic model of the rattleback // Regular and Chaotic Dynamics. 2012. Vol. 17, № 6. P. 512.
3. Лурье А.И. Аналитическая механика. М.: Наука, 1961.
4. Painlevé P. Leçons sur le frottement. Paris: Hermann, 1895. (Пэнлеве П. Лекции о трении. М.: Гостехиздат, 1954.)
5. Маркеев А.П. Теоретическая механика: Учебник для университетов. М.: ЧеРо, 1999.
6. Батъ М.И., Джанелидзе Г.Ю., Кельзон А.С. Теоретическая механика в примерах и задачах. М.: Наука, 1973.

*Поступила в редакцию* 20.01.2014  
*После доработки* 3.02.2014

## ABOUT ROTATIONAL DYNAMICS OF A RIGID BODY AROUND NON-PRINCIPAL AXIS PASSING THROUGH THE CENTER OF MASS UNDER DRY FRICTION ACTING

*V. V. Chistyakov*

Yaroslavl State Pedagogical University named after K.D. Ushinsky

The dynamics is studying for rigid body rotating around fixed axis Oz being central but not principal. Therefore the inertial torques  $M_x$  and  $M_y$  arose depending both on mass geometry  $J_{xz}$ ,  $J_{yz}$  and on angular velocity  $\omega$  and acceleration  $\varepsilon$ . Dry friction acting on axis's supports with coefficient  $\delta$  leads to that the value of  $\varepsilon$  serves as the reason and result of the motion simultaneously. There were integrated numerically and/or analytically the dynamical equations of free and forced motion including rotational harmonic and

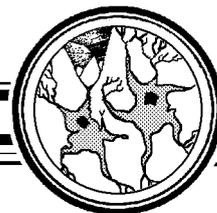
inharmonic oscillations too. The results obtained are comparing with those following from the standard linear equations.

*Keywords:* Astatic rotator, axis of inertia, inertial torque, dry friction, quadratic drag, rotational oscillations.



*Чистяков Виктор Владимирович* – родился в городе Буй Костромской области (1957), окончил факультет общей и прикладной физики Московского физико-технического института (1981). После окончания МФТИ работал инженером-программистом в НИИ Вычислительных Комплексов (Москва). Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук (1992, НИФХИ им. Л.Я. Карпова, Москва). Работал в учреждениях науки и высшего образования Ярославля. Автор более 60 научных и научно-методических трудов и изобретений. Последние 4 года работал в области динамики резистивного движения, опубликовал цикл работ по интегрированию динамических уравнений в условиях, приближенных к реальным. В настоящее время доцент Ярославского ГПУ им. К.Д. Ушинского, Ярославской ГСХА и ЯФ ЛГУ им А.С. Пушкина.

150000 Россия, Ярославль, ул. Республиканская, 108  
ФГБОУ ВПО Ярославский ГПУ им. К.Д. Ушинского  
E-mail: v.chistyakov@yarcx.ru, chistiakov\_v\_v@rambler.ru



## ТВОРЧЕСТВО – НЕПРЕДСКАЗУЕМОСТЬ И ПРОИЗВОДСТВО ИНФОРМАЦИИ\*

*М. И. Рабинович*

Университет Калифорнии, Сан-Диего

Можно ли с помощью формул проникнуть в самую интимную сферу когнитивных функций человека – его творческую лабораторию. Ведь даже воздух этой сферы наполнен импровизацией и неоднозначностью. В последние три-пять лет подобные весьма успешные попытки предпринимаются все более широким кругом исследователей – физиологов, психологов и специалистов по нелинейной физике. В этой статье мы рассмотрим два примера творческих процессов – сочинение стихов и джазовую импровизацию. С математической точки зрения, эти процессы имеют много общего и базируются на универсальных принципах ментальной динамики человека.

*Ключевые слова:* Творческий дар, когнитивные неустойчивости, информационная размерность, сюрприз в поэзии и джазовой импровизации.

### Динамические модели креативности

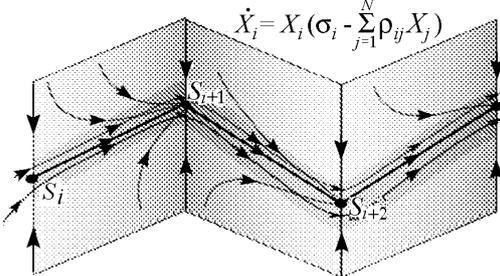
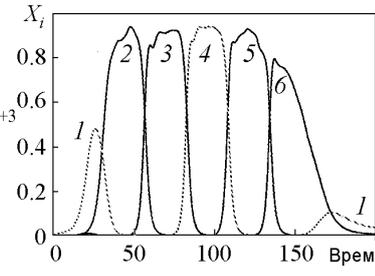
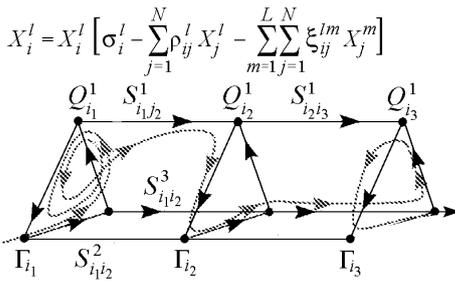
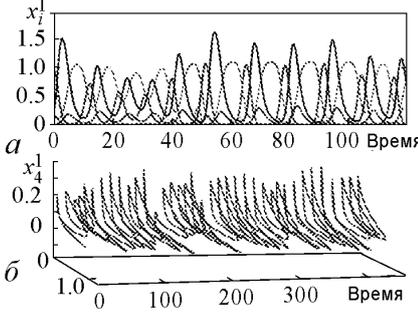
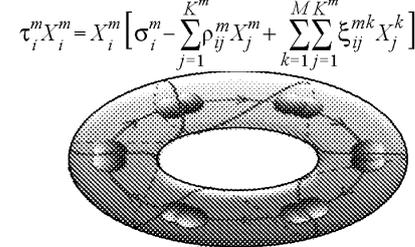
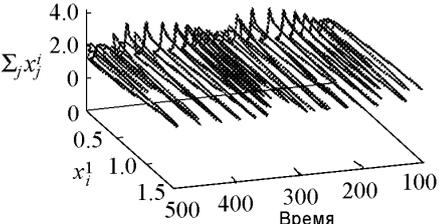
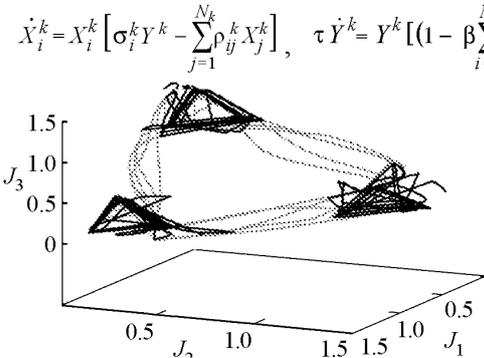
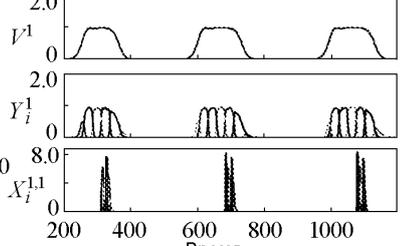
Среди обитающих на Земле видов человек обладает удивительнейшими способностями – творить новое. Это и мысли, и орудия производства, и неожиданное поведение в жизни и на сцене. Креативность человека лежит в основе всех его экстраординарных достижений не только в искусстве и науках, но и в самой возможности существования его как вида в усложняющихся экологических и демографических условиях. Возможность генерировать новую и в то же время полезную информацию и отыскивать обратные связи, обеспечивающие решение «неразрешимых» проблем, это единственная возможность не допустить превращения нашей Земли в «планету обезьян». Поскольку креативность сопутствует всему эволюционному пути человека, разумно предположить, что мозг человека развивался в направлении совершенствования его креативного мышления и, следовательно, признаки этого развития должны обнаруживаться и в его генетической организации и в устройстве нейронных структур человеческого мозга.

Построение динамической модели творчества предполагает рассмотрение его как процесс производства информации, одновременно контролирующей ее новизну. Естественно, что новая информация гарантирует неожиданность, сюрприз, но

\* Данные заметки представляют собой краткое изложение лекции, прочитанной в Калифорнийском Университете Сан-Диего.

она, однако, должна иметь еще и смысл в контексте решаемой когнитивной задачи. Обсуждаемые ниже динамические модели креативности базируются на общих когнитивных принципах: транзитивности во времени, существовании метастабильных состояний, устойчивости процесса и его восприимчивости к доступной информации [1, 2]. Динамические модели ключевых креативных функций, из которых могут быть составлены модели большинства других, более сложных функций, включающих эмоции, представлены в таблице.

Таблица

№	Модель и фазовый портрет	Осциллограмма
1	$\dot{X}_i = X_i \left( \sigma_i - \sum_{j=1}^N \rho_{ij} X_j \right)$ 	
2	$X_i^l = X_i^l \left[ \sigma_i^l - \sum_{j=1}^N \rho_{ij}^l X_j^l - \sum_{m=1}^L \sum_{j=1}^N \xi_{ij}^{lm} X_j^m \right]$ 	
3	$\tau_i^m \dot{X}_i^m = X_i^m \left[ \sigma_i^m - \sum_{j=1}^{k^m} \rho_{ij}^m X_j^m + \sum_{k=1}^M \sum_{j=1}^{k^m} \xi_{ij}^{km} X_j^k \right]$ 	
4	$\dot{X}_i^k = X_i^k \left[ \sigma_i^k Y^k - \sum_{j=1}^{N^k} \rho_{ij}^k X_j^k \right], \quad \tau \dot{Y}^k = Y^k \left[ (1 - \beta \sum_{i=1}^{N^k} X_i^k) - Z^k \right], \quad \theta \dot{Z}^k = \sum_m \xi^{km} Y^m - Z^k$ 	

**Рабочая память.** Первая строка таблицы представляет процесс воспроизведения последовательности элементарных информационных единиц, хранящихся в рабочей памяти [1]. Функция этого процесса в сохранении правильной последовательности в информационно цепочке, например, цифр в телефонном номере. Модель, которая описывает этот процесс, – обобщенное уравнение Лотки–Вольтерры.

Оно является каноническим для многих процессов в экологии, химической кинетике, репликационных биомолекулярных процессах и многих других. Математическим образом соответствующего устойчивого когнитивного процесса в фазовом пространстве модели служит так называемый устойчивый гетероклинический канал [2, 3]. Он обладает несколькими замечательными свойствами, которые обеспечивают ему особое место в теории нелинейных диссипативных динамических систем. Основой такого канала, его образующей, служит гетероклиническая цепочка – последовательность метастабильных состояний (седел), связанных друг с другом однонаправленно неустойчивыми сепаратрисами. Хотя гетероклиническая цепочка и не является структурно устойчивым объектом – под действием возмущений сепаратрисы идут уже не точно в седла, они, однако, сохраняют в фазовом пространстве память о скелете, окрестность которого и служит притягивающим объектом, каналом для всех близких траекторий. Такой канал устойчив, если сжатие фазового объема в его окрестности оказывается сильнее его растяжения за счет растягивающего эффекта при движении вдоль неустойчивой сепаратрисы от одного метастабильного состояния к следующему.

Поскольку каждому информационному элементу в информационной цепочке соответствует свое метастабильное состояние, устойчивость цепочки гарантирует правильность восстановления последовательной информации, записанной в рабочей памяти. Чувствительность канала к внешней информации определяется тем, что под ее воздействием осуществляется выбор метастабильных состояний среди уже имеющих в памяти, но не задействованных в организации канала (как в семантических задачах – берутся слова из активного словарного запаса), либо внешние сигналы провоцируют образование новых метастабильных состояний.

Здесь следует сделать важное замечание, касающееся динамики этой модели, когда условия существования устойчивого канала не выполнены [3]. Пусть матрица связей между отдельными информационными единицами общим числом шесть допускает графическое представление в виде двух взаимодействующих треугольников (рис. 1). Динамика каждого треугольного элемента порождает в его фазовом пространстве гетероклинический предельный цикл (рис. 2). Прямое произведение таких циклов в объединенном фазовом пространстве дает двумерный тор. Если теперь учесть слабое взаимодействие между «треугольниками», тогда тор разрушается и происходит одно из двух: либо циклы взаимно синхронизируются и возникает объединенный цикл, либо рождается хаос – странный аттрактор (рис. 3). Соответствующий динамический процесс характеризуется конечной энтропией Колмогорова–Синая и, следовательно, конечной величиной порождаемой информации [4]. Если в качестве информационных единиц будем рассматривать отрывки музыкальных мелодий, то в результате случайного блуждания по метастабильным состояниям услышим непредсказуемую музыку.

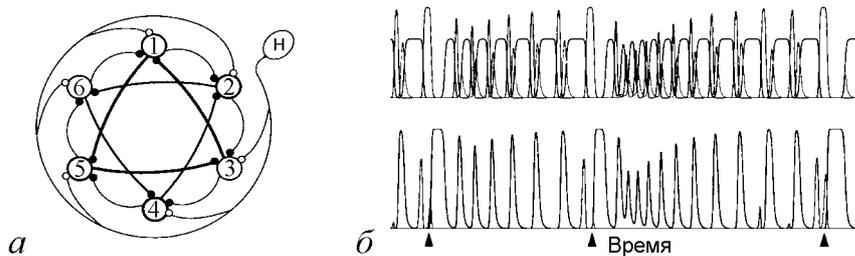


Рис. 1. Архитектура нейронного нетворка из шести конкурирующих участников (а); пример хаотической временной динамики, рождающейся в результате взаимодействия (б)

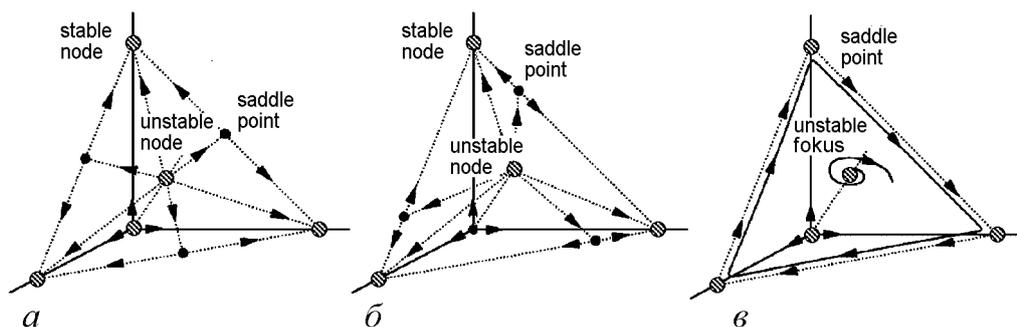


Рис. 2. Бифуркации по пути рождения гетероклинического цикла (в) в модели Лотки–Вольтерры из трех конкурирующих агентов

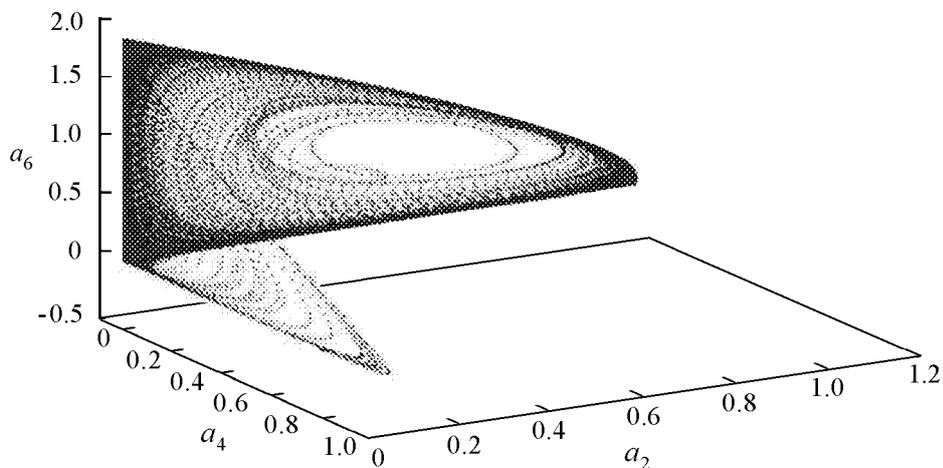


Рис. 3. Странный аттрактор в 6-мерной системе Лотки–Вольтерры в проекции на 3-мерное пространство

**Байндинг.** Вторая строка таблицы посвящена «гетероклиническому байндингу». Это динамический феномен, заключающийся в связывании информационных потоков, соответствующих разным сторонам креативного процесса. Например, в поэзии это объединение семантического смысла, ритмики и мелодии стихотворения. Математическим образом такого объединения в фазовом пространстве служит объединенный канал из связанных гетероклинических цепочек – ребер. Для нашего примера их три. Естественно, размерность фазового пространства модели (число независимых переменных) возрастает втрое. Приглядевшись к рисунку, можно заметить,

что число неустойчивых сепаратрис у седел не одна, а две. Благодаря этому, как показано в [4], информационная плотность в объединенном канале выше, чем в элементарном, и при движении вдоль такого канала количество информации, определяемое через информационную размерность, растет быстрее. Такой трехкомпонентный креативный процесс эффективнее. Для креативности, кстати, количество (не людей, а идей) всегда переходит в качество.

### *Поэзия.*

Нам не дано предугадать,  
Как наше слово отзовется,  
Какою мыслью обернется,  
И что захочется сказать.

Это – наше продолжение двух известных строк Ф.И. Тютчева. Таким образом я хочу выразить идею, что поэт, доверяясь языку, и сам не всегда знает, что ему сказанное слово навяжет в результате обратного действия, и во что стихотворение выльется. Похожая мысль высказана и в известном стихотворении Анны Ахматовой (1940):

Мне ни к чему одические рати  
И прелесть элегических затей.  
По мне, в стихах все быть должно некстати,  
Не так, как у людей.

Вот это самое «некстати» и есть ключ и он же сюрприз процитированного стихотворения. Иосиф Бродский в своей Нобелевской лекции высказал убежденность, что раскрытие в конечном итоге такого сюрприза и утоление жажды ответа и является главным стимулом создания стихов. Поэт в этом смысле подобен пленнику какой-либо сильной страсти, от которой нет лекарства:

Взяла меня ночь в оборот –  
Перейти можешь реку ты вброд,  
Сны глотай и с котомкою прочь,  
Знаю, трудно себя превозмочь.  
  
Улыбнись, позади твой острог.  
Ты пройдешь за порогом порог,  
Что напишешь раздаришь другим,  
Хоть предстанешь пред всеми нагим.  
  
Не пугай, мне боязнь не с руки,  
Сохранить бы упругость строки...  
Дар не может так просто пропасть,  
Ведь поэт, как игрок –  
Это вздох, это страсть.

*М. Рабинович, «Ночь и поэт»*

Сходные мысли можно найти у многих поэтов. Так, известный французский поэт Поль Валери заметил, что поэзия обладает своей собственной динамикой: «У поэзии есть свойство воспроизводить себя по форме, параллельно стимулируя мозг к преобразованию этого пути». Конечно, поэзия – это, в первую очередь, язык, но он организован так, что воздействие стихотворения обычными формами языка воспроизвести невозможно.

Не последнюю роль в организации поэтического текста играют знаки препинания. Они тоже являются информационными единицами и часто служат источником неустойчивости – неоднозначности. Особенно это характерно для тире. У меня, например, при очередном прочтении стихотворения «Куст» (1935) Цветаевой, которая явно симпатизировала «тире», рождаются совершенно разные ассоциации.

Что нужно кусту от меня?  
Не речи ж! Не доли собачьей  
Моей человеческой, кляня  
Которую – голову прячу  
  
В него же (седей – день от дня!).  
Сей мощи, и плечи, и гущи –  
Что нужно кусту – от меня?  
Имущему – от неимущей!

У любимого мною Мандельштама есть совершенно замечательное стихотворение, о смысле которого до сих пор спорят критики. Это – «Волны» (1935). Одно из толкований, мне импонирующее, предполагает, что Мандельштам изобразил в «Волнах» многомасштабную неустойчивость его мира – и внутреннего и окружающего. Именно поэтому «Волны» часто цитируются в связи с описанием турбулентности:

Бежит волна – волной волне хребет ломая,  
Кидаясь на луну в невольничьей тоске,  
И янычарская пучина молодая –  
Неусыпленная столица волновая –  
Кривеет, мечется и роет ров в песке.  
  
А через воздух сумрачно-хлопчатый  
Неначатой стены мерещатся зубцы,  
А с пенных лестниц падают солдаты  
Султанов мнительных – разбрызганы, разъяты –  
И яд разносят хладные скопцы.

Неоднозначность же трактовки этого стихотворения следует хотя бы из того факта, что его можно многовариантно продолжить, начиная с любой мандельштамовской строки. В рамках нашей динамической модели это означает множественность неустойчивых направлений почти у каждого метастабильного состояния.

**Синхронизация последовательностей. Джазовый «хаос».** Все мы получали удовольствие от джазовых импровизаций, конечно, не задумываясь о динамических механизмах их разнообразия. Я приведу лишь один пример такого механизма. Пусть в группе из трех джазистов один (лидер) задает ритм. Каков будет результат? Как правило, установится режим полной ритмической синхронизации. Его математический имидж – предельный цикл на двумерном торе – представлен в *третьей строке* таблицы. Однако возможны более интригующие ситуации, когда два участника уже сыгрались и их достаточно устойчивый совместный ритм не поддается «руководству сверху». Тогда при несоизмеримости собственного ритма с навязываемым рождается хаос и появляется та самая непредсказуемость, которой джаз и ценен. Наши компьютерные эксперименты показали, что область такой групповой креативности в пространстве параметров модели достаточно широка. Сейчас мы работаем совместно с композитором и надеемся, что в скором времени будем иметь возможность сравнить результаты моделирования с реальным процессом музыкальной импровизации.

**Чанкинг.** Всякая мыслительная и поведенческая активность человека представляет собой последовательность шагов, промежуточных стадий и т.п., которые объединяются в более крупные блоки. Эти блоки образуют новую последовательность и т.д., и т.д. Такой процесс называется чанкинг (chunking). Наглядным примером может служить организация письменного текста – если за элементарную информационную единицу взять слово, то предложение или фраза, объединяющая слова в блок, – это чанк. Последовательность таких чанков – это параграф «суперчанк» и т.д. В стихах чанк – это обычно строфа. Математическим образом чанкинга в фазовом пространстве соответствующей модели (*четвертая строка* таблицы) является гетероклинический канал, метастабильные состояния которого, в свою очередь, – сами гетероклинические каналы [5].

Понимание процессов, связанных с динамикой чанкинга, чрезвычайно важно для самых разнообразных задач, включая проблему репликации длинных биохимических молекул, например РНК.

Обычно функции основных информационных единиц и чанков четко разделяются. Но не всегда, и это порождает дополнительную неоднозначность. Есть такой прием в поэтической речи – анжамбеман (*enjambement* – фр.) – перенесение окончания законченной поэтической фразы или предложения из одной строфы в следующую (можно говорить о переносе слова из одной строки в другую и внутри строфы). Прием для современной поэзии очень характерный. Неожиданный перенос – разрыв фразы ритмической паузой делает стихотворение более напряженным, порывистым, но часто и более многозначным. Переносимое слово уже не связано с рифмой, то есть подсказкой. Так появляется неопределенность, то есть сюрприз или – рождается информация.

Часто перенос встречается в поэзии Марины Цветаевой, подчеркивая нервность ее стиха. Перенос способен, в частности, перераспределять основные и «колеблющиеся» признаки значений слов (Ю. Тынянов). Мы уже встречали такой перенос между строфами в ее стихотворении «Куст». А вот пример переноса внутри строфы в стихотворении Цветаевой «Ты, меня любивший фальшью» (1923):

Ты, меня любивший фальшью  
Истины – и правдой лжи,  
Ты, меня любивший – дальше  
Некуда! – За рубежи!

Ты, меня любивший дольше  
Времени. – Десницы взмах!  
Ты меня не любишь больше:  
Истина в пяти словах.

Действительно, слово «истина» во второй строке практически непредсказуемо, даже для искушенного читателя.

### **Креативность и непредсказуемость в науке**

В определенном смысле говорить о моделировании креативности в науке гораздо сложнее, чем о динамических моделях поэтического или музыкального творчества, где результаты такого творчества на виду или на слуху. Тем не менее между

этими процессами очень много общего, когда мы подходим к ним с позиций нелинейной физики и информационной динамики. Как говорил Эрнст Мах, «выдвигающий проекты, строящий воздушные замки, пишущий романы, создающий социальные и технические утопии – все они проводят мысленные эксперименты». Проведение же таких экспериментов есть последовательный когнитивный процесс, удовлетворяющий тем же динамическим принципам мышления/поведения, о которых мы говорили в самом начале.

В этих кратких заметках мы обсуждали динамические свойства творческого процесса, не затрагивая другой ключевой проблемы – как такой процесс запустить. Здесь уже необходимо учитывать и эмоциональное состояние человека-творца, точнее, взаимодействие эмоциональной и когнитивной составляющих его ментальной активности. Для разрешения «неразрешимой» научной загадки необходимо, по выражению великого математика XX века Анри Пуанкаре, довести себя до состояния чрезвычайного умственного напряжения, граничащего с галлюцинациями. Нужно достичь границы, за которой уже само сознание становится неустойчивым. Подобные динамические модели уже существуют, но об этом мы поговорим в следующий раз.

### Библиографический список

1. Рабинович М. Оперативная память и число семь // Наука и Жизнь. 2010, № 8. С. 13.
2. Рабинович М.И., Мюезинолу М.К. Нелинейная динамика мозга: Эмоции и интеллектуальная деятельность// УФН. 2010. Т. 180, № 4. С. 371.
3. Afraimovich V.S., Zhigulin V.P., and Rabinovich M.I. On the origin of reproducible sequential activity in neural circuits // Chaos. 2004. Vol. 14. P. 1123. doi:10.1063/1.18196252004
4. Rabinovich M.I., Afraimovich V.S., Bick C., and Varona P. Information flow dynamics in the brain// Phys. Life Rev. Vol. 9. P. 51. doi:10.1016/j.plrev.2011.11.002.2012
5. Rabinovich M.I., Varona P., Tristan I. and Afraimovich V.S. Chunking dynamics: Heteroclinic in mind // Frontiers in COMPUTATIONAL NEUROSCIENCE. March 2014. Volume 8. Article 22.

Поступила в редакцию 11.05.2014

### CREATIVITY – UNPREDICTABILITY AND INFORMATION PRODUCTION

*Mikhail Rabinovich*

BioCircuits Institute, UCSD, USA

It is possible or not using formulas to penetrate the most intimate sphere of human cognitive functions – his creative laboratory. After all, even the air in this sphere filled with ambiguity and improvisation. In the last three-five years, such attempts are very

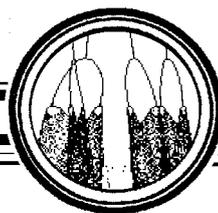
successfully taken by the physiologists, psychologists and experts in nonlinear physics. In this article we look at two examples of creative processes – writing poems and jazz improvisation. From a mathematical point of view, these processes have much in common and are based on universal principles of mental dynamics.

*Keywords:* Creative ability, cognitive instabilities, information dimension, surprise in poetry and jazz improvization.



*Рабинович Михаил Израилевич* – родился в Горьком (1941). Окончил Горьковский госуниверситет (1962), в 1962–67 годах работал там же ассистентом, в 1967–77 – доцентом. С 1977 – начальник лаборатории, а затем – отдела нелинейной динамики в Институте прикладной физики АН. Доктор физ.-мат. наук (1974), профессор (1980), чл.-корр. АН СССР (1991). В 1990 работал в качестве приглашенного профессора в Чикагском университете, с 1991 – профессор Калифорнийского университета в Сан-Диего. Основатель и Президент Международного центра Перспективных Исследований (Нижний Новгород, 1994–2002). С 2004 года живет в США. Область научных интересов – прикладная математика, динамический хаос и теория турбулентности, нелинейная динамика классических полей, нейродинамика и динамика когнитивных процессов. Автор более двухсот научных работ и пяти монографий.

9500 Гилман шоссе 0328 Ла-Хойя, Калифорния 92093-0328  
Калифорнийский Университет Сан-Диего  
E-mail: [mrabinovich@gmail.com](mailto:mrabinovich@gmail.com)



## РЕГУЛЯРНАЯ И ХАОТИЧЕСКАЯ ДИНАМИКА ДВУХКОЛЬЦЕВОЙ СИСТЕМЫ ФАЗОВОЙ СИНХРОНИЗАЦИИ

Часть 1

### Динамика частотно-фазовой системы с одинаковыми фильтрами первого порядка в цепях управления

*В. П. Пономаренко*

Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского

Изложены результаты исследования режимов динамического поведения автогенераторной системы с частотно-фазовым управлением при использовании инверсно включенного многочастотного дискриминатора в цепи частотного управления в случае одинаковых фильтров первого порядка в цепях фазового и частотного управления. Исследование проведено на основе математической модели системы с одной степенью свободы с применением качественно-численных методов нелинейной динамики. Показано, что в такой системе возможно существование как синхронного режима, так и множества периодических несинхронных режимов. Установлено расположение областей параметров с различными динамическими режимами системы, изучены процессы, развивающиеся в области неустойчивости синхронного режима.

*Ключевые слова:* Системы с частотно-фазовым управлением, динамические состояния, устойчивость, бифуркации, фазовые портреты, режим синхронизации, несинхронные режимы.

### Введение

Двухкольцевые системы фазовой синхронизации с цепями управления по фазе и частоте, иначе называемые системами частотно-фазовой автоподстройки (ЧФАП), являются интересными объектами теории колебаний и нелинейной динамики и представляют большой интерес для ряда приложений: стабилизация частоты колебаний, оптимальный прием, синхронизация и слежение, в том числе, в спутниковых радионавигационных системах, информационно-телекоммуникационные системы передачи и обработки информации, в том числе системы с использованием динамического хаоса [1–6] и др. В основе функционирования систем ЧФАП лежит принцип автоматической подстройки частоты колебаний управляемого (перестраиваемого) гене-

ратора к частоте колебаний внешнего (эталонного) сигнала. Исследования нелинейной динамики систем ЧФАП [7–12] показали, что благодаря наличию цепей фазового и частотного управления в таких системах реализуются многие динамические состояния и бифуркационные переходы, которые свойственны автоколебательным системам со сложной динамикой. Основным режимом систем ЧФАП при решении традиционных задач синхронизации и слежения является режим фазовой синхронизации, которому соответствуют моногармонические колебания управляемого генератора на частоте внешнего сигнала. В задачах генерации сложных регулярных и хаотических колебаний основными динамическими состояниями систем являются несинхронные режимы с непостоянными величинами фазового и частотного расстройств управляемого и внешнего колебаний (квазисинхронные и асинхронные [5]). Несинхронным режимам соответствуют периодические, квазипериодические и хаотические режимы автомодуляции фазы колебаний управляемого генератора. Использование несинхронных режимов в качестве основных рабочих процессов систем ЧФАП позволяет расширить их функциональные возможности, которые могут найти применение, в частности, для создания на основе таких систем источников фазового хаоса для прямохаотических систем передачи данных [13,14].

В связи с возможностью расширения области применения систем с частотно-фазовым управлением за счет использования несинхронных режимов приобретает актуальность проблема поиска эффективных путей увеличения набора возможных автомодуляционных колебаний различной сложности и областей их существования. В качестве таких путей естественно рассматривать модификации цепей управления – усложнение фильтров низких частот (ФНЧ) и нелинейных характеристик дискриминаторов, а также использование в кольце частотного управления положительной, вместо традиционной отрицательной, обратной связи, которую легко реализовать инверсным включением частотного дискриминатора [15]. Исследование динамики отдельной системы с частотным управлением при инверсии характеристики частотного дискриминатора показали [15–19], что в такой системе создаются условия для активного взаимодействия автомодуляционных колебаний, что делает систему богаче в отношении сложной динамики. Интересные свойства динамического поведения системы с частотным управлением обнаружены при использовании частотного дискриминатора, работающего не по одной переходной частоте, а на множестве переходных частот (так называемого многочастотного дискриминатора). Такой дискриминатор реализуется на основе фазового дискриминатора и линии задержки [20–22]. В этом случае поведение системы с частотным управлением качественно подобно поведению системы автофазирования (фазовой системы с управляемым фазовращателем) [23–26] и характеризуется счетным числом режимов стационарной генерации и возможностью возникновения режимов хаотических колебаний на многоспиральных аттракторах.

В данной работе исследуются особенности динамического поведения системы ЧФАП с инверсно включенным многочастотным дискриминатором в цепи частотного управления, имеющим синусоидальную характеристику, и одинаковыми ФНЧ первого порядка в цепях частотного и фазового управления. В работе показано, что в такой системе возможно существование периодического квазисинхронного режима и множества различных периодических асинхронных режимов.

## 1. Математическая модель системы

Нелинейная динамика системы ЧФАП описывается следующим уравнением для разности фаз  $\varphi$  внешнего и управляемого колебаний, записанным в операторной форме ( $p \equiv d/dt$ ) [1]

$$p\varphi + \Omega_1 K_1(p) F(\varphi) + \Omega_2 K_2(p) \Phi(p\varphi) = \delta\omega. \quad (1)$$

Здесь  $K_1(p)$  и  $K_2(p)$  – коэффициенты передачи ФНЧ в цепях управления;  $F(\varphi)$  и  $\Phi(p\varphi)$  – характеристики фазового и частотного дискриминаторов, нормированные на единицу;  $\Omega_1$  и  $\Omega_2$  – коэффициенты усиления по цепям управления;  $\delta\omega$  – начальная расстройка частот внешнего и управляемого колебаний. Характеристики дискриминаторов будем аппроксимировать функциями  $F(\varphi) = \sin \varphi$  и  $\Phi(p\varphi) = -\sin(\beta_1 p\varphi)$ , где  $\beta_1$  – параметр частотного дискриминатора [5,22]. Знак «минус» в выражении для  $\Phi(p\varphi)$  соответствует инверсному включению частотного дискриминатора.

В данной работе будем рассматривать случай, когда в цепях управления используются одинаковые интегрирующие ФНЧ первого порядка с коэффициентами передачи  $K_1(p) = K_2(p) = 1/(1 + a_1 p)$ , где  $a_1$  – постоянная времени. Математическая модель системы ЧФАП с такими ФНЧ представляется получаемой из уравнения (1) динамической системой с цилиндрическим фазовым пространством  $U_1 = (\varphi \pmod{2\pi}, u)$

$$\frac{d\varphi}{d\tau} = u, \quad \frac{du}{d\tau} = \gamma - \sin \varphi - \lambda u + b \sin(\beta \lambda u), \quad (2)$$

где  $\tau = t(\Omega_1 a_1)^{1/2}$ ,  $\lambda = (\Omega_1 a_1)^{-1/2}$ ,  $b = \Omega_2/\Omega_1$ ,  $\beta = \beta_1 \Omega_1$ ,  $\gamma = \delta\omega/\Omega_1$ .

Исследование полной картины нелинейной динамики рассматриваемой системы ЧФАП на основе модели (2) сопряжено с существенными трудностями, в связи с чем в качестве основного метода ее исследования применено компьютерное моделирование, которое базируется на качественных и численных методах нелинейной динамики [27] и использовании программного комплекса «ДНС» [28].

## 2. Нелинейная динамика модели (2)

В системе (2) параметры  $\lambda$ ,  $b$ ,  $\beta > 0$  по физическому смыслу. В силу инвариантности системы (2) относительно замены  $(\varphi, u, \gamma) \rightarrow (-\varphi, -u, -\gamma)$  достаточно рассмотреть ее при значениях  $\gamma \geq 0$ . Движения системы (2) будем исследовать на развертке фазового цилиндра  $U_1$  на часть  $-\pi < \varphi < \pi$  плоскости  $(\varphi, x)$ . Разбиение фазового цилиндра  $U_1$  на траектории системы (2) определяют [27] состояния равновесия, предельные циклы первого и второго рода (соответственно колебательные и вращательные) и сепаратрисы седел. Особые траектории системы (2) имеют применительно к динамике рассматриваемой системы ЧФАП следующий физический смысл. Устойчивое состояние равновесия соответствует режиму синхронизации. Устойчивый предельный цикл колебательного типа (не охватывающий фазовый цилиндр) определяет квазисинхронный режим с периодически изменяющимися величинами рассогласований  $\varphi$  и  $u$ . Устойчивый предельный цикл вращательного типа (охватывающий фазовый цилиндр) отвечает асинхронному режиму с вращением

фазы, в котором рассогласование фаз  $\varphi$  неограниченно нарастает (при  $\gamma > 0$ ) или убывает (при  $\gamma < 0$ ), а разность частот  $u$  периодически изменяется относительно некоторого среднего значения.

Система (2) при значениях  $0 \leq \gamma < 1$  имеет два состояния равновесия  $A_1(\arcsin \gamma, 0)$  и  $A_2(\pi - \arcsin \gamma, 0)$ . Состояние равновесия  $A_1$  устойчиво при значениях  $b < \beta^{-1}$  и неустойчиво при  $b > \beta^{-1}$ , состояние равновесия  $A_2$  – седло. Вычисляя первую ляпуновскую величину  $L$  [29] на границе области устойчивости  $b = \beta^{-1}$ , получаем  $L(b = \beta^{-1}) = -\pi(1 - \gamma^2)^{1/4} \beta^2 \lambda^3 / 8 < 0$ , то есть граница области устойчивости  $A_1$  является «безопасной».

На рис. 1 приведен параметрический портрет системы (2) на плоскости параметров  $(\gamma, b)$ , построенный по результатам численного исследования системы при значениях параметров  $\lambda = 0.2, \beta = 8$ . Линия  $l_0$  ( $b = \beta^{-1}$ ) на рис. 1 – это граница области устойчивости состояния равновесия  $A_1$ . При переходе с возрастанием параметра  $b$  через значение  $b = \beta^{-1}$  происходит рождение на фазовом цилиндре  $U_1$  устойчивого предельного цикла  $S_0$  колебательного типа, охватывающего неустойчивое состояние равновесия  $A_1$ , то есть режим синхронизации в системе ЧФАП мягко сменяется квазисинхронным режимом цикла  $S_0$ . В этом режиме диапазон колебаний величины разности фаз  $\varphi$  не превосходит  $2\pi$ .

Кривая  $d_0$  на рис. 1, проходящая в области значений  $b > \beta^{-1}$ , отвечает петле сепаратрис первого рода  $\Pi_0$  седла  $A_2$ . Петля  $\Pi_0$  содержит внутри себя предельный цикл  $S_0$ . Так как седловая величина  $\sigma = \lambda(b\beta - 1) > 0$ , то петля  $\Pi_0$  неустойчивая [27], при пересечении с возрастанием  $b$  кривой  $d_0$  из петли  $\Pi_0$  рождается неустойчивый колебательный предельный цикл  $\Gamma_0$ , также содержащий внутри себя

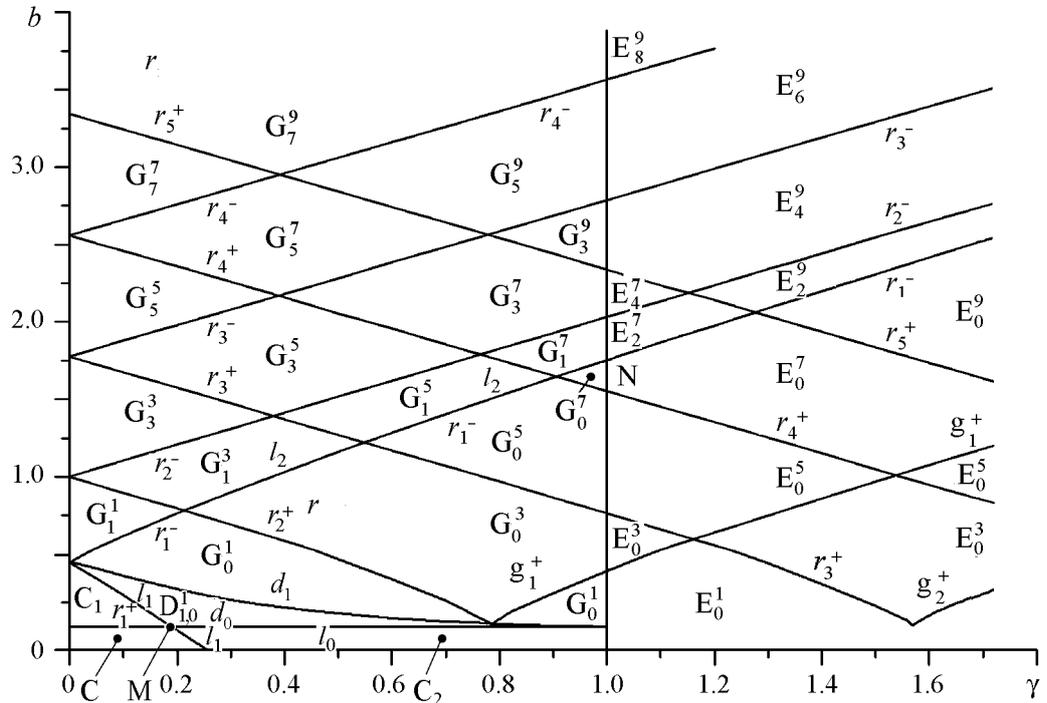


Рис. 1. Параметрический портрет  $(\gamma, b)$  модели (2) при значениях  $\lambda = 0.2, \beta = 8$

устойчивый предельный цикл  $S_0$  и неустойчивое состояние равновесия  $A_1$ . Кривая  $d_1$ , проходящая выше кривой  $d_0$  близко к ней, соответствует бифуркации двойного предельного цикла колебательного типа, который образуется в результате слияния предельных циклов  $S_0$  и  $\Gamma_0$ . При пересечении кривой  $d_1$  в сторону убывания параметра  $b$  происходит рождение устойчивого и неустойчивого предельных циклов  $S_0$  и  $\Gamma_0$ .

Кривые  $l_1$  и  $l_2$  на рис. 1 отвечают петлям сепаратрис второго рода  $\Pi_1$  и  $\Pi_2$  седла  $A_2$ , охватывающим фазовый цилиндр  $U_1$  и расположенным на  $U_1$  соответственно в областях  $u > 0$  и  $u < 0$ . Точка  $M$  на кривой  $l_1$  соответствует обращению в ноль седловой величины  $\sigma$  и делит кривую  $l_1$  на две части:  $l_1^-$  – выше точки  $M$  и  $l_1^+$  – ниже точки  $M$ . Петля сепаратрис  $\Pi_1$  неустойчивая ( $\sigma > 0$ ) на кривой  $l_1^-$  и устойчивая ( $\sigma < 0$ ) на кривой  $l_1^+$ . При пересечении кривой  $l_1^+$  с увеличением параметров  $b$  или  $\gamma$  петля  $\Pi_1$  разрушается, из нее рождается устойчивый вращательный предельный цикл в области  $u > 0$  фазового цилиндра. При пересечении кривой  $l_1^-$  в сторону убывания  $b$  или  $\gamma$  из петли  $\Pi_1$  рождается неустойчивый вращательный предельный цикл в области  $u > 0$  фазового цилиндра. Петля сепаратрис  $\Pi_2$  неустойчивая ( $\sigma > 0$ ), при пересечении кривой  $l_2$  с увеличением  $\gamma$  или с уменьшением  $b$  (с уменьшением  $\gamma$  или с увеличением  $b$ ) эта петля разрушается, из нее рождается (с ней сливается и исчезает) неустойчивый вращательный предельный цикл, расположенный в области  $u < 0$  фазового цилиндра.

Кроме бифуркационных кривых  $l_0, d_0, d_1, l_1$  и  $l_2$  при численном исследовании системы (2) установлено существование на диаграмме  $(\gamma, b)$  множеств бифуркационных кривых  $r_i^+, g_i^+$  и  $r_i^-$  ( $i = 1, 2, 3, \dots$ ), отвечающих образованию на фазовом цилиндре  $U_1$  двойных (полуустойчивых) вращательных предельных циклов, расположенных на  $U_1$  соответственно в областях  $u > 0$  и  $u < 0$ . Некоторые из таких кривых – кривые  $r_1^+, r_2^+, r_3^+, r_4^+, r_5^+, g_1^+, g_2^+$  и кривые  $r_1^-, r_2^-, r_3^-, r_4^-$  приведены на рис. 1. При пересечении кривых  $r_i^+$  в сторону возрастания параметра  $b$  на фазовом цилиндре в области  $u > 0$  появляются пары вращательных предельных циклов – верхний устойчивый  $L_i^+$  и нижний неустойчивый  $\Gamma_i^+$ . При пересечении кривых  $g_i^+$  с увеличением параметра  $b$  на фазовом цилиндре в области  $u > 0$  появляются пары вращательных предельных циклов, из которых верхний неустойчивый, а нижний устойчивый. При переходе с возрастанием  $b$  через кривые  $r_i^-$  на фазовом цилиндре  $U_1$  в области  $u < 0$  также появляются пары вращательных предельных циклов – верхний  $\Gamma_i^-$  неустойчивый и нижний  $L_i^-$  устойчивый.

Отметим, что при рассматриваемых значениях параметров  $\lambda$  и  $\beta$  кривая  $r_1^+$  проходит ниже кривой  $l_1^-$  вблизи нее, а кривая  $r_1^-$  проходит ниже кривой  $l_2$  близко к ней. На рис. 2 приведен фрагмент  $(\gamma, b)$ -диаграммы, на котором

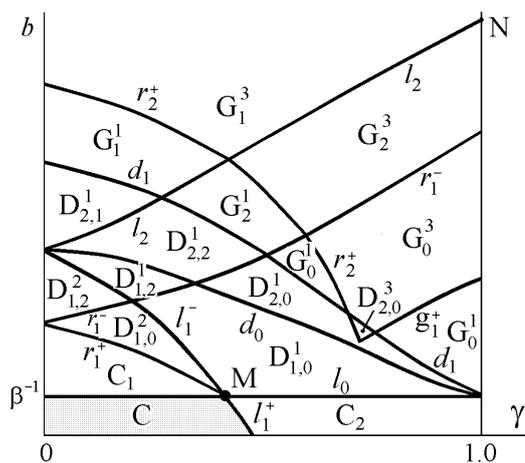


Рис. 2. Фрагмент параметрического портрета  $(\gamma, b)$  модели (2)

качественно изображено взаимное расположение бифуркационных кривых  $l_1, r_1^+, l_2, r_1^-, d_0$  и  $d_1$ . Часть линии  $\gamma = 1$  выше точки N (см. рис. 1,2) соответствует петле сепаратрисы седло-узла второго рода  $\Pi_3$  в области  $u < 0$ . При пересечении этой части линии  $\gamma = 1$  в сторону возрастания параметра  $\gamma$  петля  $\Pi_3$  разрушается, из нее рождается неустойчивый вращательный предельный цикл в области  $u < 0$  на фазовом цилиндре  $U_1$ .

Примечательно, что картина расположения бифуркационных кривых на рис. 1, соответствующих образованию двойных вращательных предельных циклов, напоминает приведенное в [23, 24] разбиение плоскости параметров «коэффициент усиления цепи управления – начальная частотная расстройка» на области с различным числом состояний равновесия модели системы автоматического фазирования (или системы с частотным управлением при синусоидальной характеристике частотного дискриминатора).

Бифуркационные кривые, приведенные на рис. 1, 2, выделяют на плоскости  $(\gamma, b)$  области параметров с качественно различным поведением модели (2). На рис. 3–5 представлены примеры фазовых портретов системы (2) для некоторых из этих областей. В области C, заключенной между частями кривой  $l_1^+$  и частями линий  $l_0, b = 0$  и  $\gamma = 0$ , система (2) не имеет предельных циклов, единственным

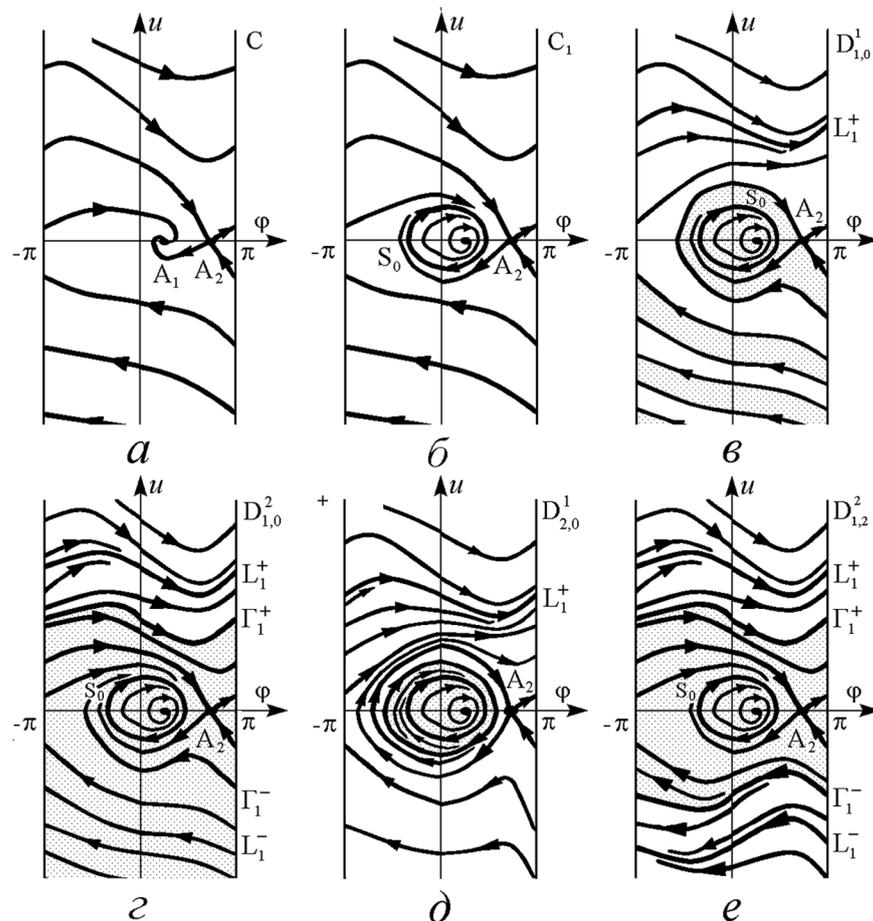


Рис. 3. Фазовые портреты модели (2), соответствующие областям C, C<sub>1</sub>, D<sub>1,0</sub><sup>1</sup>, D<sub>1,0</sub><sup>2</sup>, D<sub>2,0</sub><sup>1</sup> и D<sub>1,2</sub><sup>2</sup> на диаграмме  $(\gamma, b)$

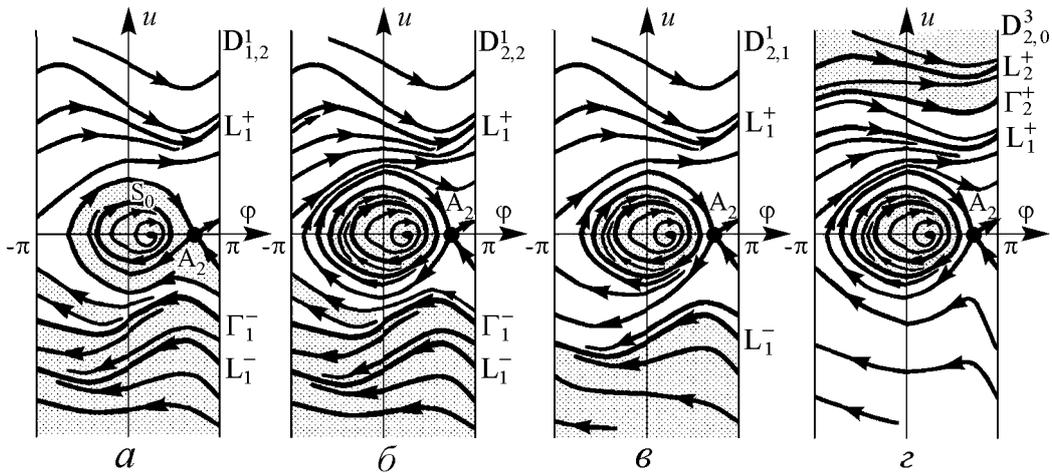


Рис. 4. Фазовые портреты модели (2), соответствующие областям  $D_{1,2}^1$ ,  $D_{2,2}^1$ ,  $D_{2,1}^1$  и  $D_{2,0}^3$  на диаграмме  $(\gamma, b)$

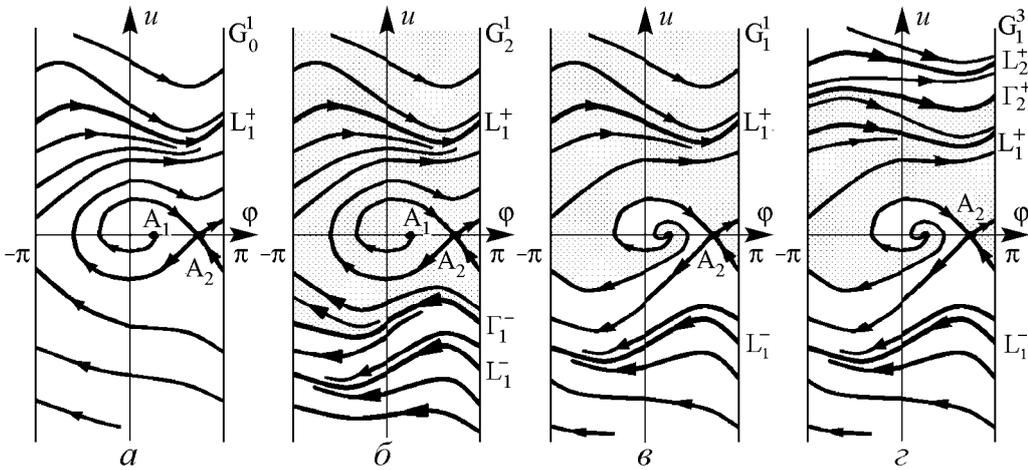


Рис. 5. Фазовые портреты модели (2), соответствующие областям  $G_0^1$ ,  $G_2^1$ ,  $G_1^1$  и  $G_1^3$  на диаграмме  $(\gamma, b)$

аттрактором на фазовом цилиндре  $U_1$  является состояние равновесия  $A_1$  (рис. 3, *a*), то есть система обладает свойством глобальной асимптотической устойчивости. Для значений  $(\gamma, b) \in C$  в системе ЧФАП реализуется режим синхронизации при любых начальных значениях  $\varphi$  и  $u$ .

При значениях  $\gamma$  и  $b$  из области  $C_1$ , заключенной между частями кривых  $l_0$  и  $r_1^+$  (см. рис. 2), предельный цикл  $S_0$  является единственным аттрактором системы (2) (рис. 3, *б*), следовательно, в системе ЧФАП независимо от начальных условий устанавливается периодический квазисинхронный режим цикла  $S_0$ . Это режим периодической автомодуляции фазы колебаний управляемого генератора. В области параметров  $G_0^1$  единственным аттрактором модели (2) на фазовом цилиндре  $U_1$  является вращательный предельный цикл  $L_1^+$  (рис. 5, *a*), следовательно, в системе ЧФАП при любых начальных условиях устанавливается периодический асинхронный режим цикла  $L_1^+$ . В области  $C_2$  (см. рис. 1, 2) этот асинхронный режим и режим синхронизации существуют в системе ЧФАП одновременно, реализация этих режимов зависит от начальных значений  $\varphi$  и  $u$ .

В областях  $D_{1,0}^1$ ,  $D_{1,0}^2$ ,  $D_{2,0}^1$ ,  $D_{1,2}^2$ ,  $D_{1,2}^1$ ,  $D_{2,2}^1$ ,  $D_{2,1}^1$  и  $D_{2,0}^3$ , качественный вид которых представлен на рис. 2, предельный цикл  $S_0$  существует на фазовом цилиндре одновременно с вращательными предельными циклами. В обозначениях этих областей первый нижний индекс означает число колебательных предельных циклов, второй нижний и верхний индексы означают число вращательных предельных циклов, расположенных соответственно в области  $u < 0$  и в области  $u > 0$  фазового цилиндра. Фазовые портреты системы (2) для областей  $D_{1,0}^1$ ,  $D_{1,0}^2$ ,  $D_{2,0}^1$ ,  $D_{1,2}^2$  приведены на рис. 3, *в, г, д, е*, а для областей  $D_{1,2}^1$ ,  $D_{2,2}^1$ ,  $D_{2,1}^1$ ,  $D_{2,0}^3$  – на рис. 4, *а, б, в, г*, соответственно. Видно, что модель (2) является бистабильной в областях параметров  $D_{1,0}^1, D_{1,0}^2, D_{2,0}^1$  (рис. 3, *в, г, д*) и тристабильной в областях  $D_{1,2}^2, D_{1,2}^1, D_{2,2}^1, D_{2,1}^1, D_{2,0}^3$  (рис. 3, *е* и рис. 4). Для значений параметров из этих областей в системе ЧФАП в зависимости от начальных условий реализуется либо периодический квазисинхронный режим предельного цикла  $S_0$ , либо один из периодических асинхронных режимов предельных циклов  $L_1^+$  и  $L_1^-$ .

При значениях  $0 \leq \gamma < 1$  в области параметров, расположенной выше кривой  $d_1$ , и при значениях  $\gamma > 1$  (см. рис. 1, 2) у системы (2) существуют только вращательные предельные циклы. При этих значениях параметров в системе ЧФАП существуют только периодические асинхронные режимы. В обозначениях областей с асинхронными режимами на рис. 1, 2 нижний и верхний индексы означают число вращательных предельных циклов, расположенных соответственно в области  $u < 0$  и в области  $u > 0$  фазового цилиндра  $U_1$ . На рис. 5 приведены примеры фазовых портретов модели (2) для значений параметров из областей  $G_0^1, G_2^1, G_1^1$  и  $G_1^3$ . В областях с асинхронными режимами модель (2) является мультистабильной, какой из асинхронных режимов предельных циклов  $L_i^+$  или  $L_i^-$  устанавливается в системе ЧФАП – это зависит от начальных значений  $\varphi$  и  $u$ . Возрастание параметра  $b$  ведет к повышению степени мультистабильности системы за счет увеличения числа асинхронных режимов.

### Заключение

Результаты качественно-численного исследования модели (2) показывают, что применение частотного дискриминатора с инвертированной синусоидальной характеристикой в системе ЧФАП с одинаковыми фильтрами первого порядка в цепи частотного и фазового управления приводит к значительному усложнению поведения системы. Это усложнение обусловлено, во-первых, возможностью потери устойчивости режима синхронизации и возникновением периодического квазисинхронного режима, во-вторых, возможностью существования множества различных периодических асинхронных режимов, число которых растет при возрастании параметра  $b$ . Таким образом, если в отдельной системе с частотным управлением применение многочастотного дискриминатора с синусоидальной характеристикой обуславливает существование множества состояний равновесия, то в частотно-фазовой системе с таким дискриминатором создаются возможности для реализации множества периодических асинхронных режимов. Асинхронные режимы возникают в результате бифуркаций двойных предельных циклов вращательного типа и петель сепаратрис седлового и седло-узлового состояний равновесия системы (2). Выяснено, что в зависимости от значений параметров для системы (2) характерно существование множества качественно различных типов фазового портрета движений, отличающихся числом и

месторасположением вращательных предельных циклов на фазовом цилиндре. Примечательно, что квазисинхронный режим может существовать одновременно с асинхронными режимами. Сравнение областей глобальной асимптотической устойчивости в моделях системы ЧФАП в случае, когда  $K_1(p)=1$ ,  $K_2(p) = 1/(1 + a_1p)$  [30], и в рассматриваемом здесь случае, когда  $K_1(p)=K_2(p)=1/(1 + a_1p)$ , показывает, что в последнем случае эта область меньше. Этот факт обусловлен влиянием имеющейся в этом случае инерционности цепи фазового управления.

В качестве продолжения исследования, проведенного в данной работе, во второй части работы будут изучены особенности нелинейной динамики рассматриваемой системы ЧФАП в случае применения одинаковых ФНЧ третьего порядка в цепях управления.

### Библиографический список

1. *Капранов М.В.* О полосе захвата при частотно-фазовой автоподстройке // Науч. докл. высш. школы. Сер. «Радиотехника и электроника». 1958. Т. 2, № 9. С. 162.
2. *Шахгильдян В.В., Ляховкин А.А.* Системы фазовой автоподстройки частоты. М.: Связь, 1972. 448 с.
3. *Ходаковский В.А., Бычков В.Г.* Оптимальное устройство синхронизации при больших частотных нестабильностях радиоканала // Изв. вузов. Радиоэлектроника. 1974. Т. 17, № 4. С. 29.
4. *Каганов В.И., Терещенко С.В.* Помехоустойчивость двухкольцевой системы автоматического управления // Радиотехника и электроника. 2012. Т. 57, № 3. С. 353.
5. *Шалфеев В.Д., Матросов В.В.* Нелинейная динамика систем фазовой синхронизации. Нижний Новгород: Изд-во Нижегородского госуниверситета, 2013. 366 с.
6. *M. Gardner.* Phase lock techniques, third ed. Hoboken, NJ: John Wiley & Sons; 2005. 421p.
7. *Пономаренко В.П., Тихонов Е.А.* Динамика автогенератора с частотно-фазовым управлением при инверсии характеристики частотного дискриминатора // Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2003. Т. 11, № 6. С. 75.
8. *Пономаренко В.П., Тихонов Е.А.* Хаотическая и регулярная динамика автогенераторной системы с нелинейной петлей частотно-фазового управления // Радиотехника и электроника. 2004. Т. 49, № 2. С. 205.
9. *Матросов В.В.* Динамические свойства генератора с частотно-фазовым управлением // Известия вузов. Радиофизика. 2004. Т. 47. № 4. С. 334.
10. *Матросов В.В.* Моделирование динамики системы частотно-фазовой автоподстройки с фильтрами первого порядка // Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского. Сер. «Математическое моделирование и управление». 2006. Вып. 2(31). С. 17.
11. *Пономаренко В.П.* Динамические режимы в моделях автогенераторных систем с частотным и частотно-фазовым управлением // Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2007. Т. 15, № 3. С. 33.
12. *Пономаренко В.П.* Динамические режимы и нелинейные эффекты в автогенераторе с частотно-фазовым управлением // Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2008. Т. 16, № 6. С. 18.

13. *Дмитриев А.С., Широков М.Е.* Выбор генератора для прямохаотической системы связи // Радиотехника и электроника. 2004. Т. 49, № 7. С. 840.
14. *Дмитриев А.С., Клецов А.В., Кузьмин Л.В.* Генерация сверхширокополосного хаоса в дециметровом диапазоне // Радиотехника и электроника. 2009. Т. 54, № 7. С. 709.
15. *Пономаренко В.П., Заулин И.А.* Динамика автогенератора, управляемого петлей частотной автоподстройки с инвертированной характеристикой дискриминатора // Радиотехника и электроника. 1997. Т. 42, № 7. С. 828.
16. *Пономаренко В.П.* Формирование сложных колебаний в автогенераторной системе с нелинейной цепью частотного управления // Радиотехника и электроника. 1999. Т. 44, № 5. С. 565.
17. *Пономаренко В.П.* Моделирование эволюции динамических режимов в автогенераторной системе с частотным управлением // Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика. 1997. Т. 5, № 5. С. 44.
18. *Пономаренко В.П., Матросов В.В.* Самоорганизация временных структур в мультиравновесной автогенераторной системе с частотным управлением // Журнал технической физики. 1997. Т. 67, № 3. С. 1.
19. *Пономаренко В.П., Матросов В.В.* Сложная динамика автогенератора, управляемого петлей частотной автоподстройки с комбинированным дискриминатором // Радиотехника и электроника. 1997. Т. 42, № 9. С. 1125.
20. *Капранов М.В., Романов Е.В.* Линейные модели системы ЧАП с дискриминатором на линии задержки // Радиотехника. 1988. № 11. С. 34.
21. *Капранов М.В.* Связь запаздывания сигнала в волоконно-оптической линии задержки с параметрами каскадно-кольцевых ФАП на границе устойчивости // В кн. Радиотехнические устройства пьезоэлектроники. Омск, 1985.
22. *Каганов В.И.* Радиоэлектронные системы автоматического управления. Компьютеризированный курс: Учебное пособие для вузов. М.: Горячая линия–Телеком, 2009. 432 с.
23. *Заулин И.А., Пономаренко В.П.* Анализ динамических процессов в статических системах синхронизации // Радиотехника и электроника. 1989. Т. 33, № 1. С. 106.
24. *Заулин И.А., Пономаренко В.П.* Синхронные и автоколебательные режимы в многоустойчивых системах с фазовым управлением // Радиотехника и электроника. 1993. Т. 38, № 4. С. 732.
25. *Мишагин К.Г., Шалфеев В.Д., Пономаренко В.П.* Нелинейная динамика систем фазирования в антенных решетках: Учебное пособие. Н. Новгород: Изд-во Нижегородского государственного университета, 2007. 188 с.
26. *Томашевский А.И., Капранов М.В.* Регулярные и хаотические колебания в системах автоматической подстройки фазы усилителей // Вестник МЭИ. 1999. № 5. С. 64.
27. *Баутин Н.Н., Леонтович Е.А.* Методы и приемы качественного исследования динамических систем на плоскости. М.: Наука, 1990. 488 с.
28. Динамика нелинейных систем. Программный комплекс для исследования нелинейных динамических систем с непрерывным временем: Учебно-методическая разработка / Сост. В.В. Матросов. Н. Новгород: ННГУ, 2002. 54 с.

29. Баутин Н.Н. Поведение динамических систем вблизи границ области устойчивости. М.: Наука, 1984. 176 с.
30. Пономаренко В.П. Нелинейные эффекты в автогенераторной системе с частотно-фазовым управлением // Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2012. Т. 20, № 4. С. 66–84.

Поступила в редакцию 30.01.2014  
После доработки 28.04.2014

## REGULAR AND CHAOTIC DYNAMICS OF TWO-RING PHASE LOCKED SYSTEM

Part 1

### Dynamics of frequency-phase system with identical first-order filters in control circuits

*V. P. Ponomarenko*

Lobachevsky State University of Nizhni Novgorod

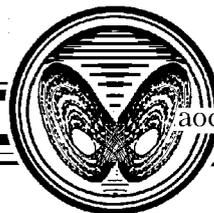
We present the results of investigation of dynamical modes in the model of oscillatory system with frequency-phase control using multi-frequency discriminator inversely switched in the chain of frequency control. The study was carried out on the basis of mathematical model of the system with one degree of freedom with the use of qualitative and numerical methods of nonlinear dynamics. It is shown that in such a system may be realized both synchronous and great number of non-synchronous periodic modes. Location parameters domains are established with different dynamic modes of the system. The processes developing in the domain of instability of the synchronous mode are considered.

*Keywords:* Systems with frequency-phase control, dynamical states, stability, bifurcation, phase portraits, synchronous and non-synchronous modes.

*Пономаренко Валерий Павлович* – родился в Мурманске (1941), окончил Горьковский университет (1963). С 1968 года работает в Научно-исследовательском институте прикладной математики и кибернетики при Нижегородском университете (НИИ ПМК при ННГУ). Защитил диссертации на соискание ученой степени кандидата технических наук (1972) и доктора физико-математических наук (1993) в области теории синхронизации, теории колебаний и динамики систем. С 1991 года – заместитель директора НИИ ПМК при ННГУ. Область научных интересов – теория колебаний и волн, применение нелинейной динамики в радиоавтоматике, синхронизация автоколебательных систем, математическое моделирование. Один из авторов монографий «Фазовая синхронизация» и «Системы фазовой синхронизации». Опубликовал много научных статей по направлениям, указанным выше.

603005 Н. Новгород, ул. Ульянова, 10  
НИИ Прикладной математики и кибернетики ННГУ  
E-mail: povp@uic.nnov.ru





## ROBUST CHAOS IN AUTONOMOUS TIME-DELAY SYSTEM

*D. S. Arzhanukhina<sup>1</sup> and S. P. Kuznetsov<sup>2,3</sup>*

<sup>1</sup>Saratov State University

<sup>2</sup>Kotel'nikov's Institute of Radio-Engineering and Electronics of RAS, Saratov Branch

<sup>3</sup>Department of Physics and Astronomy, University of Potsdam

We consider an autonomous system constructed as modification of the logistic differential equation with delay that generates successive trains of oscillations with phases evolving according to chaotic maps. The system contains two feedback loops characterized by two generally distinct retarding time parameters. In the case of their equality, chaotic dynamics is associated with the Smale–Williams attractor that corresponds to the double-expanding circle map for the phases of the carrier of the oscillatory trains. Alternatively, at appropriately chosen two different delays attractor is close to torus with Anosov dynamics on it as the phases are governed by the Fibonacci map. In both cases the attractors manifest robustness (absence of regularity windows under variation of parameters) and presumably relate to the class of structurally stable hyperbolic attractors.

*Keywords:* Attractor, hyperbolic chaos, maps, Anosov dynamics, Arnold cat, Fibonacci map, Smale–Williams attractor.

### Introduction

The concept of uniformly hyperbolic chaotic dynamics was advanced in mathematical theory of dynamical systems half a century ago [1–6]. It deals with invariant sets in state space of systems composed exclusively of orbits of saddle type with such a restriction that their stable and unstable manifolds do not touch each other (intersect transversally). The hyperbolic invariant sets are structurally stable. It implies their robustness in respect to (at least small) variation of functions and parameters in the dynamical equations. Henceforth, the hyperbolic dynamics may be regarded as preferable for any possible practical application of chaos and as deserving prior research in a frame of physical and technical disciplines [7, 8].

One important class of the uniform hyperbolicity is Anosov dynamics in systems where the hyperbolic invariant set occupies the whole accessible phase space; usually it is considered in the context of the phase volume preserving maps or flows (conservative dynamics). Alternatively, in the context of dissipative systems, the uniformly hyperbolic attractors were introduced; their mathematical examples are Smale–Williams solenoid,

Plykin type attractors, DA-attractor of Smale<sup>1</sup>. Although originally they relate to artificial discrete-time systems, analogous attractors can occur as well in Poincaré maps associated with continuous time systems governed by differential equations. In the last case it is used to speak about *suspension* of these attractors provided by the appropriate flows.

Till a short time ago, realistic examples of uniformly hyperbolic dynamics which could relate to real-world systems were poorly presented and discussed in the literature. One example is a hinge mechanism with Anosov dynamics described and studied in [9]. An artificial example of suspension of Plykin-type attractor was constructed in PhD thesis of Hunt [10], but it is surely too complicated to allow a real physical implementation. Possible occurrences of suspension of Plykin-type attractors in neuron model [11] and in modified Lorenz model [12] were discussed, but no convincing data on a level of concrete equations and numerical simulation were provided.

Recently a number of implementable systems with uniformly hyperbolic attractors were advanced and studied due to efforts of Saratov group of nonlinear dynamics [13–20]. It is essential that these examples are constructed on a base of the physical rather than the mathematical toolbox exploiting such entities as oscillators, nonlinear elements, interactions, self-oscillatory and parametric excitation etc.

One particular productive method for design of systems with uniformly hyperbolic attractors is based on using time-delay nonlinear feedback loops [21–24]. Most of the examples suggested were non-autonomous systems functioning in presence of the external periodic driving [21–23]. An exception is an autonomous system with attractor of Smale–Williams type considered in Ref. [24]. The present article is inspired by that work. We construct and study numerically an autonomous time-delay system manifesting different types of uniformly hyperbolic attractors depending on two parameters of time delay.

## 1. Basic equations

Let us start with *logistic delay equation* offered in due time in population biology [25]:

$$\dot{r} = \mu[1 - r(t - \tau_1)]r(t). \quad (1)$$

Here the population is characterized by the positive variable  $r$  evolving in time and normalized in such way that the saturation occurs at  $r = 1$ . A positive parameter  $\mu$  is the birth rate,  $\tau_1$  is the delay time characterizing lag of the effect of saturation. According to Ref. [25], under condition  $\tau_1 < \pi/2\mu$  the system has a stable stationary state  $r = 1$  and for  $\tau > \pi/2\mu$  self-oscillations occur. At large values  $\tau_1$  the generated waveform looks like a periodic sequence of pulses (Fig. 1, *a*). The period grows with the delay  $\tau_1$  as  $P \cong (1 + e^{\mu\tau_1})/\mu$ . Estimate for the minimal level of the population in between the pulses is  $r_{\min} \cong \mu\tau \exp(-e^{\mu\tau_1} + 2\mu\tau_1 - 1)$ , i.e. it manifests the double exponentially decrease with increase of  $\tau_1$ .

Now, let us regard the variable  $r$  as *squared amplitude* of some oscillatory process with frequency  $\omega_0$ . For this, we set  $r = x^2 + y^2$  and require the new variables to satisfy

---

<sup>1</sup>The abbreviation DA stands for «derived from Anosov».

the equations

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -\omega_0 y + (1/2)\mu(1 - x^2(t - \tau_1) - y^2(t - \tau_1))x, \\ \dot{y} &= \omega_0 x + (1/2)\mu(1 - x^2(t - \tau_1) - y^2(t - \tau_1))y.\end{aligned}\quad (2)$$

Solutions of the equations (2) instead of the solitary pulses manifest successive oscillatory trains for  $x$  and  $y$  while the envelope evolves exactly according to (1) (Fig. 1, *b*).

Next, let us add terms proportional to  $x(t - \tau_1)x(t - \tau_2) - y(t - \tau_1)y(t - \tau_2)$  and  $x(t - \tau_1)y(t - \tau_2) + x(t - \tau_2)y(t - \tau_1)$  with small coefficient  $\varepsilon$  in the first and the second equation

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -\omega_0 y + (1/2)\mu(1 - x^2(t - \tau_1) - y^2(t - \tau_1))x + \\ &\quad + \varepsilon[x(t - \tau_1)x(t - \tau_2) - y(t - \tau_1)y(t - \tau_2)], \\ \dot{y} &= \omega_0 x + (1/2)\mu(1 - x^2(t - \tau_1) - y^2(t - \tau_1))y + \\ &\quad + \varepsilon[x(t - \tau_1)y(t - \tau_2) + x(t - \tau_2)y(t - \tau_1)],\end{aligned}\quad (3)$$

where we suppose always that the delays satisfy the inequality  $\tau_2 \geq \tau_1$ . Now, in the case of generation of pulses with low enough level of minimal amplitude between them, just these additional terms will initiate formation of each next pulse of oscillations. Due to this, the phase of the oscillations for the new-born pulse will be determined by the phases of the previous pulses via some mapping as discussed in detail in the following sections. In presence of this initiation of the oscillations the characteristic repetition period of the pulses is reduced comparing to the original system (2).

Formally, the time-delay system is infinite-dimensional. Indeed, an instantaneous state is determined by *functions*  $x(t)$  and  $y(t)$  defined on a time interval of length  $\tau_2$ . To start solution of the equations (3) the initial conditions have to be chosen as some functions  $x(t)$  and  $y(t)$  on the time interval  $[-\tau_2, 0]$ . In the course of numerical integration they are represented by arrays sampled with time step used in the integration scheme, and the elements of the arrays are replaced step by step by the newly obtained values to be accounted on latter stages of the computations. In other respects the integration schemes

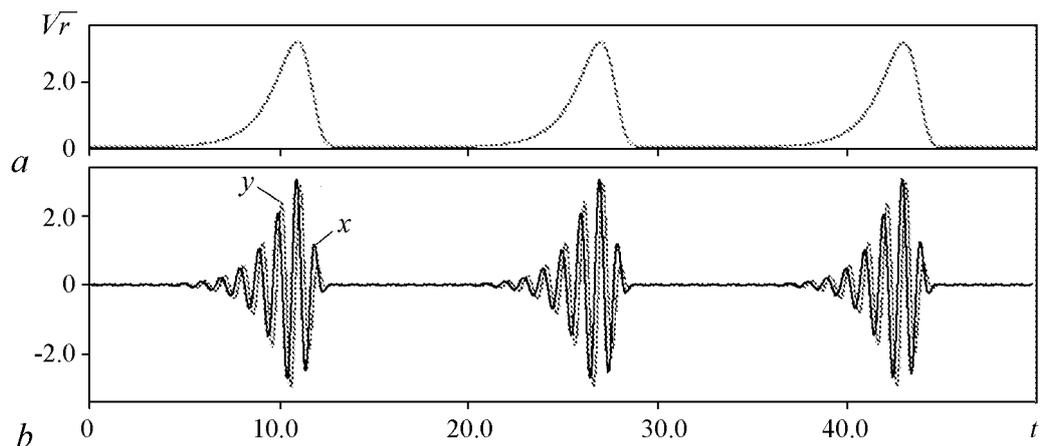


Рис. 1. Self-pulsations in the logistic-delay equation (1) at  $\mu = 1.6$ ,  $\tau_1 = 2$  (a) and oscillatory trains generated by system (2) at  $\omega_0 = 2\pi$  (b). The period of the pulses is roughly  $T \approx 16$

are analogous to those used for solution of ordinary differential equations. With arbitrary initial conditions the computations are executed for sufficiently long time and then, after reliable arrival at the attractor, processing of the data is performed including plotting waveforms, portraits of attractors, evaluation of the Lyapunov exponents etc.

Now let us turn to some concrete cases of the model (3).

## 2. Attractor of Smale–Williams type

Let us start with the simplest particular case setting both delay time parameters equal:  $\tau_2 = \tau_1 = \tau$ . It leads to the equations

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -\omega_0 y + (1/2)\mu(1 - x^2(t - \tau) - y^2(t - \tau))x + \varepsilon[x^2(t - \tau) - y^2(t - \tau)], \\ \dot{y} &= \omega_0 x + (1/2)\mu(1 - x^2(t - \tau) - y^2(t - \tau))y + 2\varepsilon x(t - \tau)y(t - \tau). \end{aligned} \quad (4)$$

To clarify the principle of functioning of the system suppose that during some current stage of activity the variables behave as  $x \sim \cos(\omega_0 t + \varphi)$  and  $y \sim \sin(\omega_0 t + \varphi)$ ; then the additional terms are expressed as

$$\begin{aligned} x^2(t - \tau) - y^2(t - \tau) &\sim \cos^2(\omega_0 t + \varphi) - \sin^2(\omega_0 t + \varphi) = \cos(2\omega_0 t + 2\varphi), \\ 2x(t - \tau)y(t - \tau) &\sim 2\cos(\omega_0 t + \varphi)\sin(\omega_0 t + \varphi) = \sin(2\omega_0 t + 2\varphi). \end{aligned} \quad (5)$$

These relations determine actually the stimulating signal for oscillations on the immediate next stage of activity. The phase shift of this signal is transferred to the oscillations arising on this stage. Hence, the phase undergoes the doubling transformation

$$\varphi_{n+1} = 2\varphi_n + \text{const}. \quad (6)$$

It is the expanding circle map, or the Bernoulli map, which is chaotic and is characterized by the Lyapunov exponent  $\Lambda = \ln 2 \approx 0.693$ .

We may consider a Poincaré map for the time-delay system that corresponds to transformation of the infinite-dimensional space vector on a time interval from one pulse of oscillations to the next one. Attractor of this Poincaré map is supposed to be a kind of Smale–Williams solenoid embedded in the infinite-dimensional state space. Actually, the phase  $\varphi$  plays a role of the angular variable in the Smale–Williams solenoid while in other directions compression of the phase volume will take place. Respectively, attractor of the original autonomous time-delay system (4) is a suspension of the Smale–Williams solenoid in the infinite-dimensional state space.

Figure 2 shows waveforms for dynamical variables  $x$  and  $y$  illustrating operation of the system (4) at

$$\omega_0 = 2\pi, \quad \mu = 1.6, \quad \tau = 2, \quad \varepsilon = 0.05. \quad (7)$$

In accordance with the above qualitative considerations, the process looks like a sequence of trains of oscillations. Note that the average period of their appearance is less than that in models (1), (2), and in the regime under discussion it is  $T \approx 10$ . Although represented by nearly periodic alternation of excitation and suppression of the oscillations, the process is actually chaotic (in contrast to the regular one observed in Fig. 1, *b*). Chaos reveals

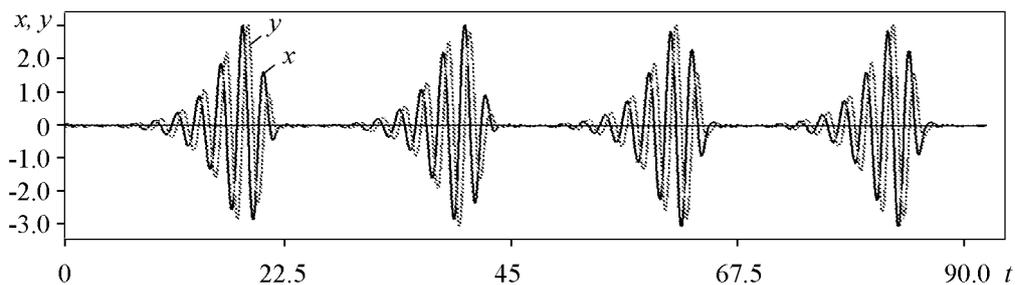


Рис. 2. Waveforms for the dynamical variables  $x$  (black) and  $y$  (gray) according to the results of the numerical solution of equation (4) at  $\mu = 1.6$ ,  $\omega_0 = 2\pi$ ,  $\tau = 2$ ,  $\varepsilon = 0.05$

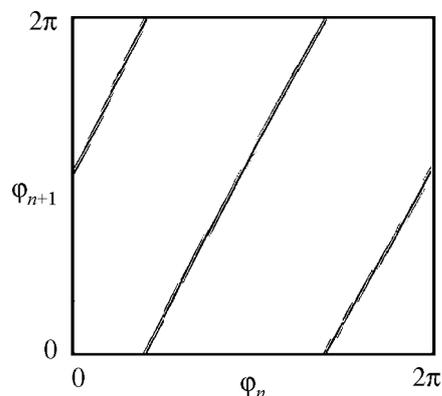


Рис. 3. Diagram illustrating the transformation of phases in the successive stages of the activity plotted according to the results of the numerical solution of equation (4) at  $\mu = 1.6$ ,  $\omega_0 = 2\pi$ ,  $\tau = 2$ ,  $\varepsilon = 0.05$

itself in variations of phases on successive stages of activity. More accurate analysis shows that these phases obey approximately the Bernoulli map. Figure 3 illustrates it by a diagram obtained in the numerical simulation. The phases were determined at moments of maximal amplitude at successive excitation stages as  $\varphi_n = \arg(x - iy)$  and plotted for sufficiently large number of processed successive oscillatory trains. Surely, the mapping for the phases looks topologically equivalent to the expected Bernoulli map: one complete bypass for the pre-image  $\varphi_n$  (that is variation by  $2\pi$ ) corresponds to the two-fold bypass for the image  $\varphi_{n+1}$ .

Fig.4 shows 3D and 2D projections of the attractor from the infinite-dimensional phase space of our time-delay system.

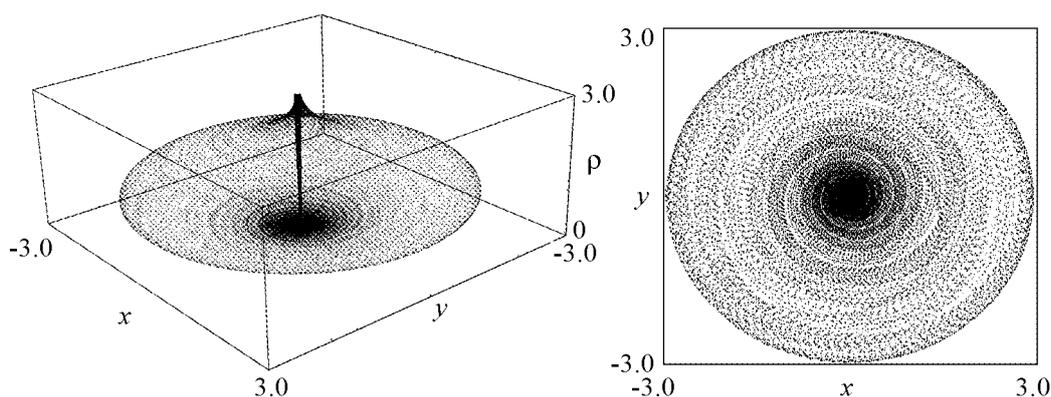


Рис. 4. 3D and 2D projections of the attractor from the infinite-dimensional phase space at  $\omega_0 = 2\pi$ ,  $\mu = 1.6$ ,  $\tau = 2$ ,  $\varepsilon = 0.05$ . The first diagram is plotted in the coordinates  $(x, y, \rho)$ , where  $\rho = \sqrt{x^2(t - \tau) + y^2(t - \tau)}$ , and the second on the plane of variables  $(x, y)$

For computation of Lyapunov exponents we use the Benettin algorithm [26, 27] adapted for the time-delayed systems [28, 29]. It is based on simultaneous numerical solutions of the equations (4) and the variation equations

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{x}} &= -\omega_0 \tilde{y} + (1/2)\mu[1 - x^2(t - \tau) - y^2(t - \tau)]\tilde{x} - \\ &\quad - \mu x[x(t - \tau)\tilde{x}(t - \tau) + y(t - \tau)\tilde{y}(t - \tau)] + 2\varepsilon[x(t - \tau)\tilde{x}(t - \tau) - y(t - \tau)\tilde{y}(t - \tau)], \\ \dot{\tilde{y}} &= \omega_0 \tilde{x} + (1/2)\mu[1 - x^2(t - \tau) - y^2(t - \tau)]\tilde{y} - \\ &\quad - \mu y[x(t - \tau)\tilde{x}(t - \tau) + y(t - \tau)\tilde{y}(t - \tau)] + \varepsilon[y(t - \tau)\tilde{x}(t - \tau) + x(t - \tau)\tilde{y}(t - \tau)]. \end{aligned} \quad (8)$$

Formally, there are an infinite number of Lyapunov exponents in the time-delayed system, but we necessarily restrict ourselves dealing with a finite number of them. To evaluate the larger  $M$  exponents we integrate a collection of  $M$  sets of equations of form (8). In the computations, the perturbation vectors are represented as finite-dimensional arrays of values  $\tilde{x}$  and  $\tilde{y}$  sampled on intervals of length  $\tau$  with time step of the integration scheme of the delay equations. The dot product for the vectors involved in normalization and Gram–Schmidt orthogonalization required in the Benettin algorithm is determined as a sum of products of pairs of the elements relating to one and another array.

It is convenient to use normalization of the Lyapunov exponents  $\lambda_i$  by the average period of pulse repetition  $T$ , namely, to set  $\Lambda = \lambda T$ . It makes natural to relate them with the Lyapunov exponent of the Bernoulli map obtained in the qualitative analysis.

According to the computations, in the regime corresponding to parameters (7) the largest four Lyapunov exponents are

$$\begin{aligned} \Lambda_1 &= 0.6964, & \Lambda_2 &= 0.0000, \\ \Lambda_3 &= -12.129, & \Lambda_4 &= -15.538, \dots \end{aligned} \quad (9)$$

The estimate of the Kaplana–Yorke dimension for the attractor of the Poincaré map (the Smale–Williams solenoid) is  $D_{KY}^0 = 1 + \Lambda_1/|\Lambda_3| \approx 1.06$ . Dimension of the attractor in the infinite-dimensional phase space of the autonomous system is  $D_{KY} = 2 + (\Lambda_1 + \Lambda_2)/|\Lambda_3| = 1 + D_{KY}^0 \approx 2.06$ .

Figure 5 shows plots for four Lyapunov exponents of the system (4) versus  $\varepsilon$ ,  $\tau$  and  $\mu$ . Observe that the largest exponent remains almost constant in a wide interval of the parameter variation

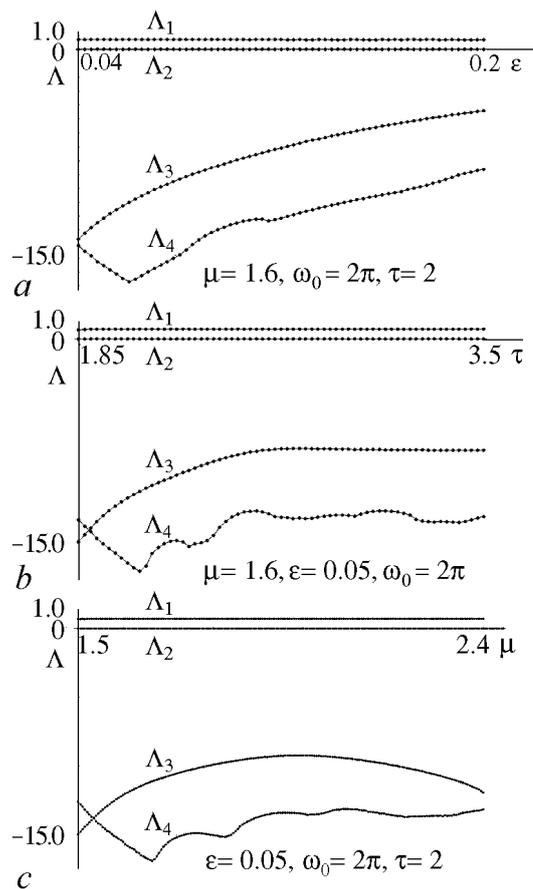


Рис. 5. Lyapunov exponents of the system (4) versus the parameters  $\varepsilon$  (a),  $\tau$  (b),  $\mu$  (c)

and remains close to the expected value  $\ln 2 = 0.693\dots$ . The second is close to zero (up to numerical inaccuracy). As usual in autonomous systems, it is interpreted as associated with perturbations of infinitesimal shift along the phase trajectory. Other exponents are negative.

Note smooth character of dependences of the Lyapunov exponents on parameters, particularly, there are no drops in the plot of  $\Lambda_1$ , which could correspond to regularity windows intrinsic usually to non-hyperbolic systems. It confirms robust nature of chaos, which is natural in a frame of our qualitative argumentation that it is associated with the uniformly hyperbolic attractor of Smale–Williams type.

### 3. Attractor associated with Anosov-type dynamics on torus

Now return to the model with two different time delays  $\tau_1$  and  $\tau_2$ :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -\omega_0 y + (1/2)\mu(1 - x^2(t - \tau_1) - y^2(t - \tau_1))x + \\ &\quad + \varepsilon[x(t - \tau_1)x(t - \tau_2) - y(t - \tau_1)y(t - \tau_2)], \\ \dot{y} &= \omega_0 x + (1/2)\mu(1 - x^2(t - \tau_1) - y^2(t - \tau_1))y + \\ &\quad + \varepsilon[x(t - \tau_1)y(t - \tau_2) + x(t - \tau_2)y(t - \tau_1)] \end{aligned} \quad (10)$$

and select these parameters to get such situation that the delayed signals stimulating excitation of a new  $(n + 1)$ -th pulse of oscillations arrive being emitted from the previous two pulses  $n$  (delay  $\tau_1$ ) and  $n - 1$  (delay  $\tau_2$ ).

Suppose that at the previous two activity stages the phases were  $\varphi_n$  and  $\varphi_{n-1}$ , namely,  $x(t - \tau_1) \sim \cos(\omega_0 t + \varphi_n)$ ,  $y(t - \tau_1) \sim \sin(\omega_0 t + \varphi_n)$ ,  $x(t - \tau_2) \sim \cos(\omega_0 t + \varphi_{n-1})$ ,  $y(t - \tau_2) \sim \sin(\omega_0 t + \varphi_{n-1})$ . Then, the additional terms in the right-hand parts are expressed as

$$\begin{aligned} x(t - \tau_1)x(t - \tau_2) - y(t - \tau_1)y(t - \tau_2) &\sim \cos(2\omega_0 t + \varphi_n + \varphi_{n-1}), \\ x(t - \tau_1)y(t - \tau_2) + x(t - \tau_2)y(t - \tau_1) &\sim \sin(2\omega_0 t + \varphi_n + \varphi_{n-1}). \end{aligned} \quad (11)$$

As follows, on the next,  $(n + 1)$ -th stage of activity the phase will be determined (up to a constant) by the *Fibonacci map*

$$\varphi_{n+1} = \varphi_n + \varphi_{n-1} + \text{const} \pmod{2\pi}. \quad (12)$$

Of what kind attractor is in this case? For the infinite-dimensional Poincaré map of our time-delay system attractor is an object close geometrically to a two-dimensional torus, and the discrete-time dynamics of the angular variables on this torus obey the map (12). It relates to the class of Anosov maps. Due to structural stability of the Anosov dynamics, one can conjecture that on the attractor in the infinite-dimensional state space of the Poincaré map the dynamics remains of the same nature; in other dimensions the phase volume compression occurs that corresponds to the approach of orbits to the attractor. Respectively, attractor in the phase space of the continuous-time system (10) is a suspension of that object, and here (in the autonomous system) we have an additional neutral direction associated with a zero Lyapunov exponent.

Figure 6 shows waveforms for the variables  $x$  and  $y$  obtained from numerical solution of the equations (10) at

$$\mu = 1.6, \quad \varepsilon = 0.02, \quad \omega_0 = 2\pi, \quad \tau_1 = 2, \quad \tau_2 = 14. \quad (13)$$

The process looks like a sequence of trains of oscillations for which the phases of the high-frequency carrier vary in a random-like way from one to the next stage of activity. The average period of repetition of the pulses evaluated numerically is roughly  $T \approx 10.85$ .

Figure 7 shows 3D and 2D projections of the attractor from the infinite-dimensional phase space of our time-delay system on the plane of variables  $(x, y)$ .

Figure 8 illustrates correspondence of the dynamics of the phases to the Fibonacci map. The phases  $\varphi_n$  are determined at instants of maximal amplitude in the oscillation trains as  $\varphi = \arg(x - iy)$ . Diagram (a) presents the data in the coordinates  $(\varphi_n + \varphi_{n-1}, \varphi_{n+1})$  and one can see that the dots lie in a strip parallel to the bisector. (Although the strip looks widened, this does not violate the expected topological nature of the mapping.) Diagram (b) shows the 3D diagram for the phases in coordinates  $(\varphi_{n+1}, \varphi_n, \varphi_{n-1})$ , which corresponds visually to the Fibonacci map.

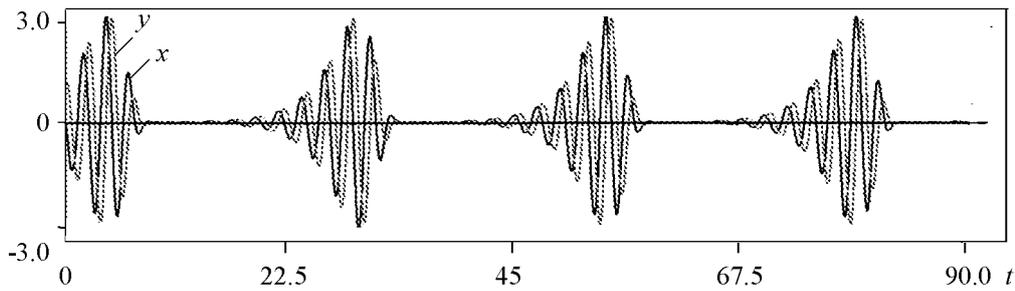


Рис. 6. Waveforms for variables  $x$  (black) and  $y$  (gray) according to the numerical solution of equation (10) at  $\mu = 1.6, \varepsilon = 0.02, \omega_0 = 2\pi, \tau_1 = 2, \tau_2 = 7\tau_1 = 14$

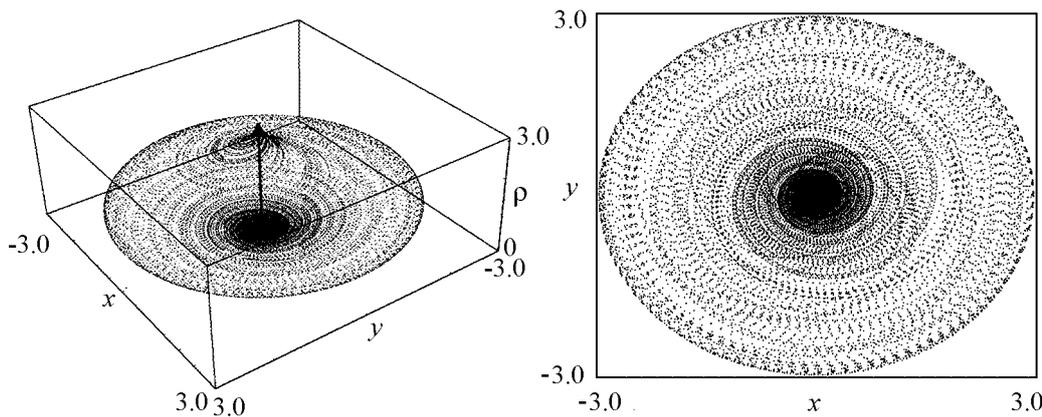


Рис. 7. 3D and 2D projections of the attractor from the infinite-dimensional phase space at  $\mu = 1.6, \varepsilon = 0.02, \omega_0 = 2\pi, \tau_1 = 2, \tau_2 = 7\tau_1 = 14$ . The first diagram is plotted in the coordinates  $(x, y, \rho)$ , where  $\rho = \sqrt{x^2(t - \tau) + y^2(t - \tau)}$ , and the second on the plane of variables  $(x, y)$

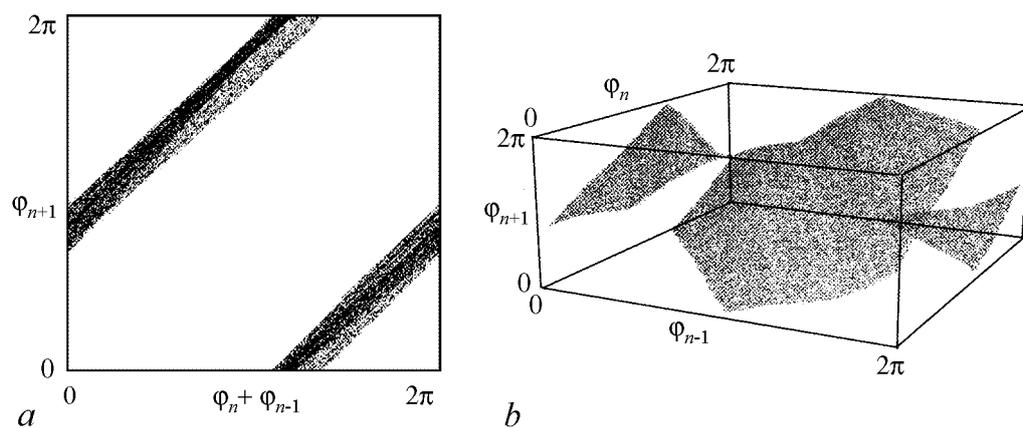


Рис. 8. Diagrams illustrating dynamics of the phases of the system (10) in successive stages of activity

One more way to illustrate the Anosov dynamics for the phases is similar to the famous picture of Arnold's cat [30, 15, 16]. For each pair of phases  $\varphi_n$  and  $\varphi_{n-1}$  on the  $n$ -th and  $n-1$  stages of activity, we determine either the point with such coordinates fit or not in the picture of the cat face drawn on the plane. If yes, then the point is marked on the graph, and on the following two plots the corresponding points are depicted, respectively after 3 and 6 iteration steps. If the initial point does not fall within the specified cat face area, the dots are not marked, and we carry on with further iterations. Figure 9 shows the pictures obtained by this method comparing with the respective diagram originating from iterations of the Fibonacci map itself.

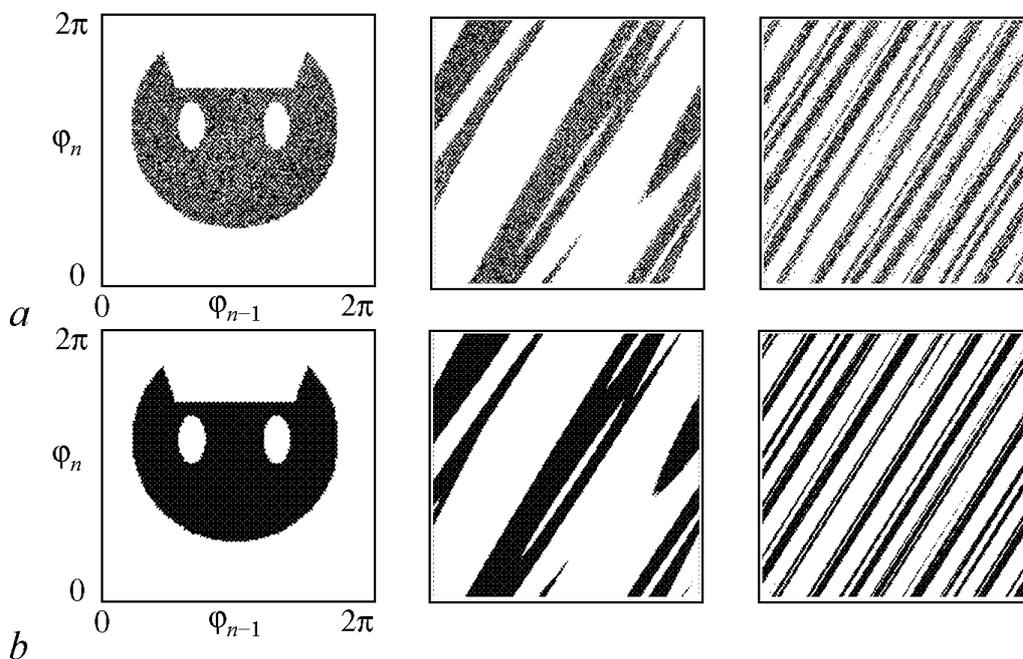


Рис. 9. Transformation of the cat face area under successive iterations of the mapping for the phases obtained in computations for the model (10) (a) and for the Fibonacci map (b). (See explanations in the text.)

For computation of the Lyapunov exponents we use the algorithm similar to that described in the previous section. It is based on the joint numerical solutions of the equations (10) and the variation equations

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{x}} &= -\omega_0 \tilde{y} + (1/2)\mu[1-x^2(t-\tau_1)-y^2(t-\tau_1)]\tilde{x} - \mu x(x(t-\tau_1)\tilde{x}(t-\tau_1) + y(t-\tau_1)\tilde{y}(t-\tau_1)) + \\ &+ \varepsilon[x(t-\tau_1)\tilde{x}(t-\tau_2) + x(t-\tau_2)\tilde{x}(t-\tau_1) - y(t-\tau_1)\tilde{y}(t-\tau_2) - y(t-\tau_2)\tilde{y}(t-\tau_1)], \\ \dot{\tilde{y}} &= \omega_0 \tilde{x} + (1/2)\mu(1-x^2(t-\tau_1)-y^2(t-\tau_1))\tilde{y} - \mu y(x(t-\tau_1)\tilde{x}(t-\tau_1) + y(t-\tau_1)\tilde{y}(t-\tau_1)) + \\ &+ \varepsilon[y(t-\tau_2)\tilde{x}(t-\tau_1) + y(t-\tau_2)\tilde{x}(t-\tau_2) + x(t-\tau_2)\tilde{y}(t-\tau_1) + y(t-\tau_1)\tilde{x}(t-\tau_2)]. \end{aligned} \quad (14)$$

The perturbation vectors are represented in computations as finite arrays of  $\tilde{x}$  and  $\tilde{y}$  on time intervals of length  $\tau_2$  sampled with the integration step used for the numerical solution of the equations. We compute four larger exponents and normalize them by the factor  $T$ ; at parameters (13) they are

$$\begin{aligned} \Lambda_1 &= 0.4851, & \Lambda_2 &= 0.0003, \\ \Lambda_3 &= -0.4691, & \Lambda_4 &= -0.5404... \end{aligned} \quad (15)$$

The first and the third Lyapunov exponents are close in magnitude and opposite in sign. Their may be compared with the Lyapunov exponents of the Fibonacci map  $\Lambda = \pm \ln(1 + \sqrt{5})/2 = \pm 0.4812...$  The second exponent is zero up to numerical inaccuracy. The fourth and subsequent Lyapunov exponents are all negative, of larger absolute values.

Figure 10 shows plots for the Lyapunov exponents depending on the coupling parameter  $\varepsilon$  (a), parameter of activity  $\mu$  (b) and the delay  $\tau_1$  (c) at fixed other parameters. As seen, in a fairly wide range of the parameters the largest Lyapunov exponent remains approximately constant, and one of the negative exponents is close in the absolute value to the positive exponent. It indicates persistence of the Anosov dynamics on the attractor.

Viewing the graphics in Fig. 10 one can distinguish two somewhat different

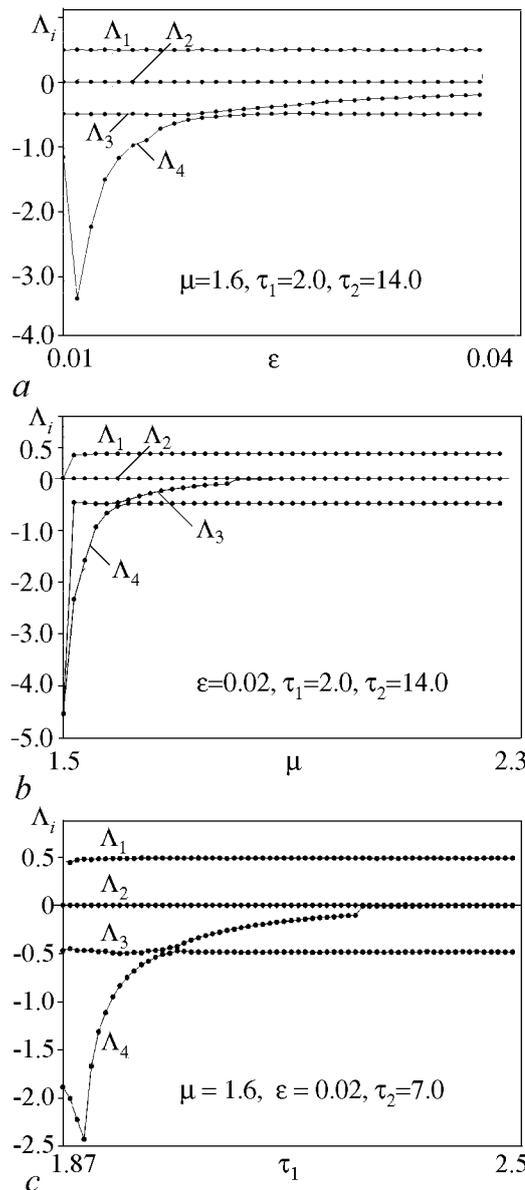


Рис. 10. Lyapunov exponents of the system (10) depending on the parameters  $\varepsilon$ ,  $\mu$  and  $\tau$

situations. Namely, in the left parts of the diagrams the first negative exponent is nearly equal to the positive one in absolute value, and the next negative exponent is lesser. As we go to the right some crossover occurs, and the two negative exponents exchange their places. After that, obviously, approach of trajectories to the attractor in time is slower than the convergence and the divergence of orbits on the attractor itself. (Apparently, it implies different nature of the attractors in these two situations, but we leave the comparative analysis of them outside the frame of the present article.)

We outline again the smooth character of dependences of the Lyapunov exponents on parameters that confirms robust nature of chaos. It may be thought that the attractors we deal with in this section are uniformly hyperbolic, close to the so-called «non-strange chaotic attractors» briefly mentioned and discussed in the literature [31–33].

### Conclusion

In this paper, we introduce an autonomous system built on the basis of the logistic differential equation with delay. As shown, the dynamics of the phases of generated successive oscillatory trains corresponds to expanding circle map or Anosov map on a torus depending on selection of two retarding time parameters. Numerical simulations show robust chaos generation in these cases, and we conjecture the uniformly hyperbolic nature on the attractors in the infinite-dimensional state space of the time-delay system.

The suggested system and analogous constructions may be realized on a basis of electron devices as generators of robust chaos; physically they may be simpler in implementation comparing, for example, with systems constructed on the basis of coupled oscillators [13–16].

Due to the insensitivity of chaos to variations in parameters, the chaos generators of this kind are of interest from a practical point of view, for example in application for communication, random number generation, cryptographic schemes etc. [7].

*D.S.A. acknowledges support of this work by RFBR grant № 14-02-31162, and S.P.K. thanks Prof. A. Pikovsky for discussions.*

### References

1. *Anosov D.V., Gould G.G., Aranson S.K., Grines V.Z., Plykin R.V., Safonov A.V., Sataev E.A., Shlyachkov S.V., Solodov V.V., Starkov A.N., Stepin A.M.* Dynamical Systems IX: Dynamical Systems with Hyperbolic Behaviour (Encyclopaedia of Mathematical Sciences) (Vol. 9). Springer, 1995.
2. *Smale S.* Differentiable dynamical systems // *Bull. Amer. Math. Soc. (NS)*. 1967. Vol. 73. P. 747.
3. *Williams R.F.* Expanding attractors // *Publications mathématiques de l'I.H.É.S.* 1974. Vol. 43. P. 169.
4. *Afraimovich V. and Hsu S.-B.* Lectures on chaotic dynamical systems. AMS/IP Studies in Advanced Mathematics, Vol.28. American Mathematical Society, Providence RI, International Press, Somerville, MA, 2003.
5. *Devaney R.L.* An Introduction to Chaotic Dynamical Systems. NY: Addison – Wesley, 1989.

6. *Shilnikov L.* Mathematical problems of nonlinear dynamics: A tutorial // *Int. J. of Bif. & Chaos.* 1997. Vol. 7, 9. P. 1353.
7. *Elhadj Z., Sprott J.C.* Robust Chaos and Its Applications. WS, Singapore, 2011.
8. *Banerjee S., Yorke J.A., Grebogi C.* Robust Chaos // *Phys. Rev. Lett.* 1998. Vol. 80. P. 3049.
9. *Hunt T.J., MacKay R.S.* Anosov parameter values for the triple linkage and a physical system with a uniformly chaotic attractor // *Nonlinearity.* 2003. Vol. 16. P. 1499.
10. *Hunt T.J.* Low Dimensional Dynamics: Bifurcations of Cantori and Realisations of Uniform Hyperbolicity. PhD Thesis. University of Cambridge, 2000.
11. *Belykh V., Belykh I., Mosekilde E.* The hyperbolic Plykin attractor can exist in neuron models // *Int. J. of Bifurcation and Chaos.* 2005. Vol. 15. P. 3567.
12. *Morales C.A.* Lorenz attractor through saddle-node bifurcations// *Ann. de l'Inst. Henri Poincaré.* 1996. Vol. 13. P. 589.
13. *Kuznetsov S.P.* Example of a physical system with a hyperbolic attractor of the Smale–Williams type // *Phys. Rev. Lett.* 2005. Vol. 95. 144101.
14. *Kuznetsov S.P. and Seleznev E.P.* A strange attractor of the Smale–Williams type in the chaotic dynamics of a physical system // *JETP.* 2006. Vol. 102. P. 355.
15. *Isaeva O.B., Jalnina A.Yu. and Kuznetsov S.P.* Arnold's cat map dynamics in a system of coupled nonautonomous van der Pol oscillators // *Phys. Rev. E* 74, 2006, 046207.
16. *Kuznetsov S.P. and Pikovsky A.* Autonomous coupled oscillators with hyperbolic strange attractors // *Physica.* 2007. Vol. D232. P. 87.
17. *Kuznetsov S.P.* Dynamical chaos and uniformly hyperbolic attractors: from mathematics to physics // *Physics-Uspexhi.* 2011. Vol. 54, № 2. P. 119.
18. *Kuznetsov S.P.* Hyperbolic Chaos: A Physicist's View. Higher Education Press: Beijing and Springer-Verlag: Berlin, Heidelberg, 2012.
19. *Arzhanukhina D.S., Kuznetsov S.P.* A system of three non-autonomous oscillators with hyperbolic chaos. I. The model with dynamics on attractor governed by Arnold's cat map on torus // *Applied Nonlinear Dynamics (Saratov).* 2012. Vol. 20, № 6. P. 56 (in Russian).
20. *Arzhanukhina D.S., Kuznetsov S.P.* A system of three non-autonomous oscillators with hyperbolic chaos. II. The model with DA-attractor // *Applied Nonlinear Dynamics (Saratov).* 2013. Vol. 21, № 2. P. 163 (in Russian).
21. *Kuznetsov S.P. and Ponomarenko V.I.* Realization of a strange attractor of the Smale–Williams type in a radiotechnical delay-feedback oscillator // *Tech. Phys. Lett.* 2008. Vol. 34, № 9. P. 771.
22. *Kuznetsov S.P. and Pikovsky A.S.* Hyperbolic chaos in the phase dynamics of a Q-switched oscillator with delayed nonlinear feedbacks // *Europhysics Letters.* 2008. Vol. 84. 10013.
23. *Kuznetsov A.S., Kuznetsov S.P.* Parametric generation of robust chaos with time-delayed feedback and modulated pump source // *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation.* 2013. Vol. 18, № 3. P. 728.
24. *Kuznetsov S.P. and Pikovsky A.* Attractor of Smale–Williams type in an autonomous time-delay system. Preprint nlin. arXiv: 1011.5972, 2010.

25. *Fowler A.C.* An asymptotic analysis of the delayed logistic equation when the delay is large // *IMA Journal of Applied Mathematics*. 1982. Vol. 28. P. 41.
26. *Benettin G., Galgani L., Giorgilli A., Strelcyn J.-M.* Lyapunov characteristic exponents for smooth dynamical systems and for Hamiltonian systems: A method for computing all of them // *Meccanica*. 1980. Vol. 15. P. 9.
27. *Schuster H.G. and Just W.* Deterministic chaos: an introduction. Wiley-VCH, 2005.
28. *Farmer J.D.* Chaotic attractors of an infinite-dimensional dynamical system // *Physica D*. 1982. Vol. 4. P. 366.
29. *Balyakin A.A. and Ryskin N.M.* Features of computation of spectrum of Lyapunov exponents in distributed self-oscillatory systems with delayed feedback // *Applied Nonlinear Dynamics (Saratov)*. 2007. Vol. 15, № 6. P. 3. (In Russian.)
30. *Arnold V. I. and Avez A.* Ergodic Problems in Classical Mechanics. New York, Benjamin, 1968.
31. *Farmer J., Ott E., and Yorke J.* The dimension of chaotic attractors // *Physica D*. 1983. Vol. 7. P. 153.
32. *Grassberger P. and Procaccia I.* Measuring the strangeness of strange attractors // *Physica D*. 1983. Vol. 9. P. 189.
33. *Anishchenko V. S., Astakhov V. V., Neiman A. B., Vadivasova T. E., and Schimansky-Geier L.* Nonlinear Dynamics of Chaotic and Stochastic Systems: Tutorial and Modern Development. Springer, Berlin, Heidelberg, 2002.

*Поступила в редакцию 17.03.2014*

## ГРУБЫЙ ХАОС В АВТОНОМНОЙ СИСТЕМЕ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

*Д. С. Аржанухина<sup>1</sup>, С. П. Кузнецов<sup>2,3</sup>*

<sup>1</sup>Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского

<sup>2</sup>Институт радиотехники и электроники им. В.А. Котельникова РАН, Саратовский филиал

<sup>3</sup>Департамент физики и астрономии университета Потсдама

Рассматривается автономная система, построенная как модификация логистического дифференциального уравнения с запаздыванием и генерирующая последовательные пути колебаний с фазой, трансформирующейся в соответствии с хаотическими отображениями. Система содержит две петли обратной связи, характеризующиеся двумя, вообще говоря, разными временами задержки. В случае их равенства хаотическая динамика определяется аттрактором Смейла–Вильямса, который соответствует двукратно растягивающему отображению окружности для фазы несущего сигнала цугов колебаний. При выбранных определенным образом разных временах задержки динамика фаз соответствует отображению Фибоначчи на торе. Таким образом, на аттракторе осуществляется динамика типа Аносова. В обоих случаях аттракторы проявляют грубость (отсутствие окон регулярности при изменении параметров) и, предположительно, относятся к классу структурно-устойчивых гиперболических аттракторов.

*Ключевые слова:* Аттрактор, гиперболический хаос, отображение, динамика Аносова, кот Арнольда, отображение Фибоначчи, аттрактор Смейла–Вильямса.



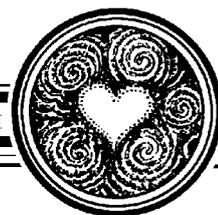
*Аржанухина Дарья Сергеевна* – родилась в Саратове (1988). Окончила факультет нелинейных процессов Саратовского государственного университета (2011). Защитила дипломную работу на тему «Сложная динамика и разрушение гиперболического хаоса в отображении «кот Арнольда» с диссипативным возмущением». В настоящее время является аспирантом базовой кафедры динамических систем факультета нелинейных процессов СГУ. Имеет 4 публикации.

410012 Саратов, ул. Астраханская, 83  
Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского  
E-mail: arzhanukhinadarja@rumbler.ru



*Кузнецов Сергей Петрович* – родился в Москве (1951). Окончил Саратовский государственный университет (1973). Сотрудник Саратовского филиала Института радиотехники и электроники им. В.А. Котельникова РАН (с 1988). Руководит лабораторией теоретической нелинейной динамики. Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук в СГУ (1977) и доктора наук (1987) по специальности радиофизика. Профессор базовой кафедры динамических систем СГУ. Автор монографии «Динамический хаос и гиперболические аттракторы: От математики к физике», монографии «Hyperbolic Chaos. A Physicist's View», монографии «Strange Nonchaotic Attractors» (совместно с А. Пиковским и У. Фойдель), а также учебно-научных монографий «Динамический хаос» и «Нелинейные колебания» (в соавторстве с А.П. Кузнецовым и Н.М. Рыскиным). Опубликовал свыше 200 научных статей по нелинейной динамике, радиофизике и электронике. Под его руководством защищены десять кандидатских диссертаций. Лауреат государственной научной стипендии для ученых России (1994–1996), Соросовский доцент (1998), Соросовский профессор (2000, 2001). Член редакционной коллегии журнала «Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика».

410019 Саратов, ул. Зеленая, 38  
Саратовский филиал ИРЭ имени В.А. Котельникова РАН  
E-mail: spkuz@yandex.ru



## ВЫНУЖДЕННАЯ СИНХРОНИЗАЦИЯ БЕГУЩИХ ВОЛН В АКТИВНОЙ СРЕДЕ В АВТОКОЛЕБАТЕЛЬНОМ И ВОЗБУДИМОМ РЕЖИМАХ

*А.В. Слепнев, И.А. Шепелев, Т.Е. Вадивасова*

Саратовский государственный университет

Исследуется модель одномерной активной среды с периодическими граничными условиями, элемент которой представляет собой осциллятор ФитцХью–Нагумо. Такая среда, в зависимости от значений параметров, может являться как возбудимой, так и автоколебательной. Периодические граничные условия обеспечивают существование режимов бегущих волн в возбудимом и автоколебательном случаях без внешних детерминированных или случайных воздействий. Исследуется воздействие, оказываемое на среду локальной периодической силой. Кроме непрерывной среды также рассматривается ее аналог, представляющий собой одиночный осциллятор ФитцХью–Нагумо с дополнительной цепочкой обратной связи, содержащей задержку во времени. Проведено сравнение эффектов синхронизации в возбудимом и автоколебательном режимах активной среды и ее аналога.

*Ключевые слова:* Автоколебательная среда, мультистабильность, пространственные структуры, синхронизация.

### Введение

Исследование активных сред остается на сегодняшний день одним из актуальных направлений в нелинейной динамике. Особый интерес представляют возбудимые распределенные системы и среды, которые часто встречаются в задачах биофизики [1–5]. При некоторых условиях в возбудимых системах без внешнего воздействия могут наблюдаться незатухающие колебания, которые трудно отличить от соответствующих режимов в автоколебательных системах. Суть этих условий состоит в реализации возврата импульса возбуждения, возникшего в некотором элементе системы обратно к этому же элементу, в результате чего без внешнего сигнала вновь выполняются условия возбуждения. Примером могут служить спиральные волны в пространстве [6–10], а также одномерные бегущие волны, возникающие в возбудимой среде при реализации периодических граничных условий [3, 11–15]. Простей-

ший случай возникновения автоколебаний в детерминированной возбудимой системе – автоколебания двух взаимодействующих осцилляторов ФитцХью–Нагумо, связанных через цепочку с задержкой [16, 17].

Хотя указанные колебательные режимы в возбудимых системах хорошо известны, остается ряд неизученных вопросов. Прежде всего возникает вопрос, можем ли мы считать колебания в возбудимых системах разновидностью автоколебаний? Как известно, одним из фундаментальных свойств автоколебаний является частотная синхронизация, то есть захват характерных частот при внешнем воздействии или в результате взаимодействия систем [18]. Для возбудимых систем, колебания которых индуцируются шумом, в условиях когерентного резонанса было установлено явление стохастической синхронизации, которому посвящено большое количество публикаций [19–21]. При этом эффекты синхронизации детерминированных колебаний в возбудимых системах и средах остаются значительно менее изученными. Имеется ряд работ, посвященных управлению колебаниями с помощью внешних импульсов в моделях сердечной мышцы, представляющих собой распределенные возбудимые системы [22–24]. Из приведенных в них результатов видно, что локальное внешнее воздействие может изменять фазу колебаний и частоту следования импульсов возбуждения. Однако указанные работы не были направлены конкретно на изучение свойств синхронизации, в частности, не рассматривалось существование области синхронизации при вариации параметров воздействия. До настоящего времени неисследованным остается вопрос о том, имеются ли какие-либо особенности указанных колебаний в возбудимых системах по сравнению с колебаниями в распределенных системах и средах, состоящих из автоколебательных ячеек (автогенераторов), и не может ли реакция на внешний периодический сигнал служить средством диагностики характера исследуемой системы?

В настоящей работе приведены результаты численного моделирования одномерной среды, элемент которой представляет собой осциллятор ФитцХью–Нагумо [25, 26]. Такая среда, в зависимости от значений параметров, может являться как возбудимой, так и автоколебательной. Периодические граничные условия обеспечивают существование режимов бегущих волн в возбудимой среде без внешних детерминированных или случайных воздействий. Таким образом, в каждой точке среды реализуются стационарные колебания. Аналогичное поведение можно наблюдать и в автоколебательном режиме. Исследовалось воздействие, оказываемое на среду локальной периодической силой. Кроме непрерывной среды был также рассмотрен ее аналог, представляющий собой единичный осциллятор ФитцХью–Нагумо с дополнительной цепочкой обратной связи, содержащей задержку во времени. Использование данной модели позволяет существенно упростить численное моделирование и исследовать интересующие нас эффекты в большем объеме и при меньших затратах времени на вычисления.

Целью проведенных исследований является сравнение синхронизации среды, находящейся в возбудимом и в автоколебательном режимах. Мы постараемся дать ответ на вопрос, существуют ли качественные отличия эффектов синхронизации в двух указанных случаях.

## 1. Модель исследуемой среды

В качестве элементарной ячейки активной среды был выбран осциллятор ФитцХью–Нагумо, представляющий собой одну из простейших моделей нейрона [25,26],

$$\begin{cases} \varepsilon \frac{dx}{dt} = x - y - \alpha x^3, \\ \frac{dy}{dt} = \gamma x - y + \beta, \end{cases} \quad (1)$$

где  $x = x(t)$ ,  $y = y(t)$  – безразмерные вещественные динамические переменные;  $t$  – безразмерное время;  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ ,  $\varepsilon$  – управляющие параметры системы. Зафиксируем параметры  $\alpha = 0.2$ ,  $\gamma = 3$ ,  $\varepsilon = 0.01$  и будем менять значение  $\beta$ . При  $\beta \in [0; \beta_{cr})$  осциллятор находится в автоколебательном режиме, а при  $\beta \in (\beta_{cr}; 5]$  – в возбужденном. Значение  $\beta_{cr} \approx 3$  является бифуркационным и соответствует субкритической бифуркации Андронова–Хопфа.

Модель среды конструируется следующим образом. Объединим  $N$  осцилляторов (1) в одномерное кольцо и используем предельный переход  $N \rightarrow \infty$ , считая размер каждого элемента  $h_s$  в пределе бесконечно малым. Получаем следующие уравнения активной среды:

$$\begin{cases} \varepsilon \frac{\partial x}{\partial t} = x - y - \alpha x^3 + d \frac{\partial^2 x}{\partial s^2}, \\ \frac{\partial y}{\partial t} = \gamma x - y + \beta. \end{cases} \quad (2)$$

Здесь  $x = x(s, t)$ ,  $y = y(s, t)$ , где  $s$  – безразмерная пространственная координата,  $d$  – коэффициент диффузии (характеризует взаимодействие соседних элементов). Граничные условия имеют вид

$$x(0, t) \equiv x(L, t), \quad y(0, t) \equiv y(L, t), \quad (3)$$

где  $L$  – длина системы (пространственный период). Уравнения (2) исследовались при фиксированных параметрах  $\alpha = 0.2$ ,  $\gamma = 3$ ,  $\varepsilon = 0.01$ ,  $d = 0.1$ ,  $L = 100$ , параметр  $\beta$  выбирался в диапазоне  $[0; 5]$  в соответствии с требуемым режимом. Значение  $\beta = \beta_{cr} \approx 3$ , как и в одиночном осцилляторе (1), является бифуркационным и соответствует переходу элементов среды из автоколебательного режима в возбужденный.

При значениях параметров, указанных выше, в среде наблюдается явление мультистабильности – в зависимости от выбора начальных условий в ней существуют бегущие волны, отличающиеся друг от друга длинами волн. Мультистабильность имеет место как в автоколебательном, так и в возбужденном режимах (рис. 1) [27]. Ведем номер моды  $n$ , равный целому числу длин волн  $n$ , укладывающихся на длине системы  $L$ . Будем отличать одну бегущую волну от другой по

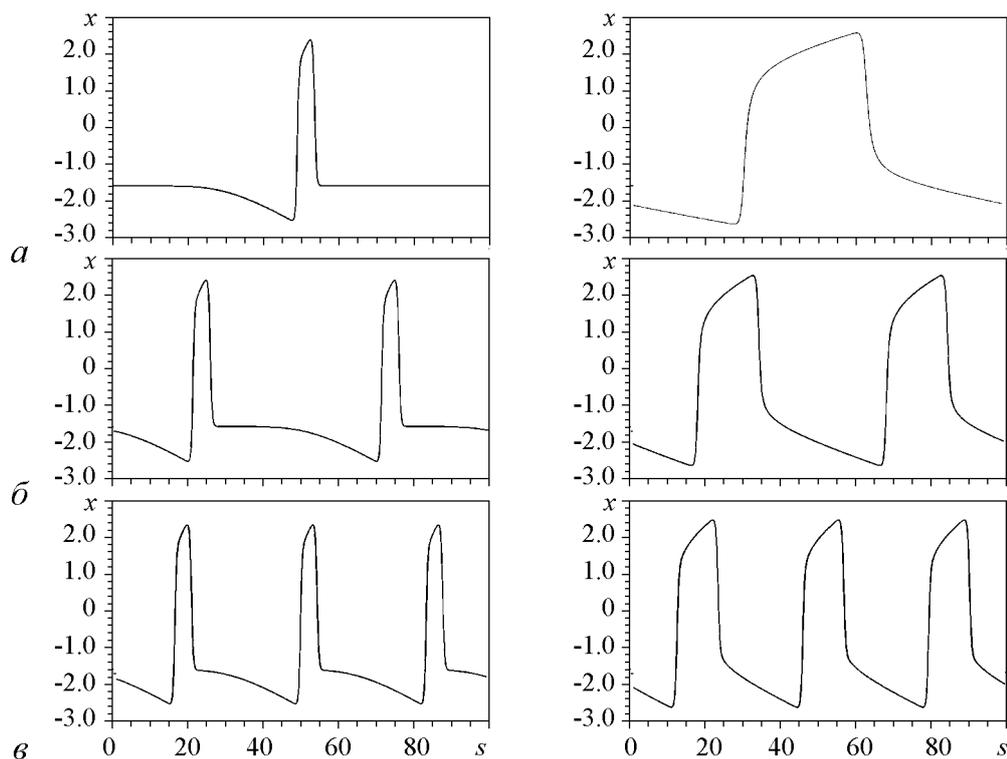


Рис. 1. Мультистабильность в активной среде в возбудимом (слева,  $\beta = 4$ ) и автоколебательном (справа,  $\beta = 2$ ) режимах. Пространственные профили бегущих волн  $n = 1$  (а),  $n = 2$  (б) и  $n = 3$  (в)

номеру  $n$ . Следует отметить, что при взаимной связи элементов среды, которая предполагается в исследуемой модели (2), существуют две волны с одним и тем же номером  $n$ , которые отличаются направлением распространения. Поскольку свойства таких волн совершенно идентичны, будем рассматривать только моды, распространяющиеся слева направо. В автоколебательной среде (при  $\beta < \beta_{cr}$ ) кроме бегущих волн существует режим однородных в пространстве колебаний, который в настоящей работе не рассматривается.

## 2. Одиночный осциллятор с запаздывающей обратной связью как аналог исследуемой системы

В качестве простого аналога активной среды в некоторых случаях удобно взять единственный осциллятор ФитцХью–Нагумо с цепью обратной связи, содержащей задержку во времени. Уравнения такой системы имеют вид

$$\begin{cases} \varepsilon \frac{dx}{dt} = x - y - \alpha x^3 + d[x(t - t_d) - x(t)], \\ \frac{dy}{dt} = \gamma x - y + \beta, \end{cases} \quad (4)$$

где  $t_d$  – время задержки. Модель (4) является полным аналогом однородной среды (2) при соответствующих значениях параметров, если время задержки выбрано равным

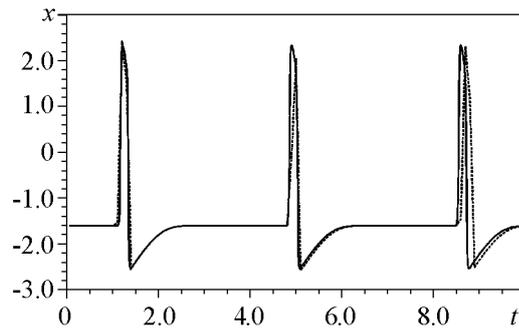


Рис. 2. Форма колебаний  $x(t)$  моды  $n = 1$  в среде (2) (сплошная линия) и в модели (4) (пунктирная линия) в возбудимом режиме при  $\beta = 4$ ,  $d = 0.1$

различные сосуществующие колебательные моды, которые очень хорошо соответствуют колебаниям, наблюдаемым в среде (2). Так, на рис. 2 приводится сравнение формы колебаний во времени для первой моды. Незначительные расхождения объясняются неточностью задания времени задержки, которое в численной схеме должно составлять целое число шагов интегрирования по времени. Важно также отметить, что в возбудимой среде различные волновые моды имеют одну и ту же фазовую скорость [27] и, соответственно, время задержки будет для них одинаково. В автоколебательном режиме фазовая скорость бегущих волн различна, и значение  $t_d$  будет зависеть от номера моды.

времени, в течении которого импульс возбуждения в (2) совершает полный оборот по кольцу

$$t_d = \frac{L}{v_{ph}} = nT, \quad (5)$$

где  $v_{ph}$  – фазовая скорость моды с номером  $n$ , а  $T$  – период колебаний данной моды во времени. Подбирая соответствующие начальные условия (соответствующую форму колебаний на интервале времени, равном  $t_d$ ) можно полу-

### 3. Синхронизация колебаний при локальном внешнем гармоническом воздействии

Исследуем воздействие на среду внешней гармонической силы, приложенной к одному элементу среды (то есть в одной точке пространства). С учетом внешнего воздействия уравнения среды принимают вид

$$\begin{cases} \varepsilon \frac{\partial x}{\partial t} = x - y - \alpha x^3 + d \frac{\partial^2 x}{\partial s^2}, \\ \frac{\partial y}{\partial t} = \gamma x - y + \beta + C_0 \delta(s - s_0) \cos(\omega_{\text{ext}} t). \end{cases} \quad (6)$$

Здесь  $C_0$  и  $\omega_{\text{ext}}$  – амплитуда и частота гармонической силы, приложенной в точке  $s_0$ . При численном моделировании функция Дирака заменяется на величину, обратную шагу  $\Delta s$  по пространству. Обозначим далее  $C = C_0/\Delta s$ . В силу симметрии системы, результаты не зависят от выбора точки  $s_0$ . В проведенных расчетах полагалось  $s_0 = 50$ . Измерения средней частоты колебаний проводились в точке  $s = 0$ , что также не является принципиальным. Для трех устойчивых мод  $n = 1, 2, 3$ , обнаруженных в среде (6), были построены зависимости отношения средней частоты колебаний  $\omega_{\text{av}}$  к частоте внешнего воздействия  $\omega_{\text{ext}}$  от  $\omega_{\text{ext}}$  при фиксированной амплитуде  $C$ .

Рассмотрим сначала случай возбудимой среды. Численное моделирование показало возможность захвата частоты для всех трех исследуемых мод в конечной области значений частоты воздействия. Области синхронизации были хорошо заметны

только при достаточно большом значении амплитуды ( $C = 12$ ), что объясняется локальным характером воздействия. Однако при этом воздействие оставалось подпороговым, то есть не приводило к переходу элемента среды в точку  $s_0$  в состояние возбуждения (рис. 3).

На рис. 4 приведены зависимости отношения частот от  $\omega_{\text{ext}}$ , полученные для различных мод в различных режимах. Горизонтальные участки графиков, для которых отношение частот в преде-

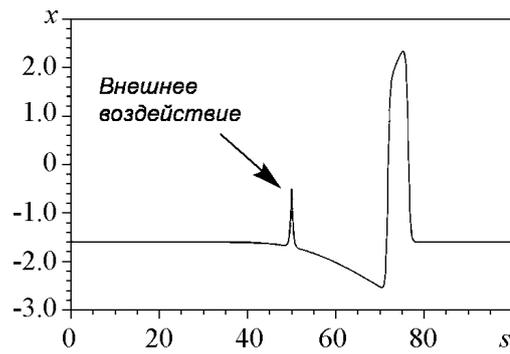


Рис. 3. Пространственный профиль волны  $n = 1$  в возбудимой среде (6) при амплитуде воздействия  $C = 12$ , иллюстрирующий подпороговый характер воздействия

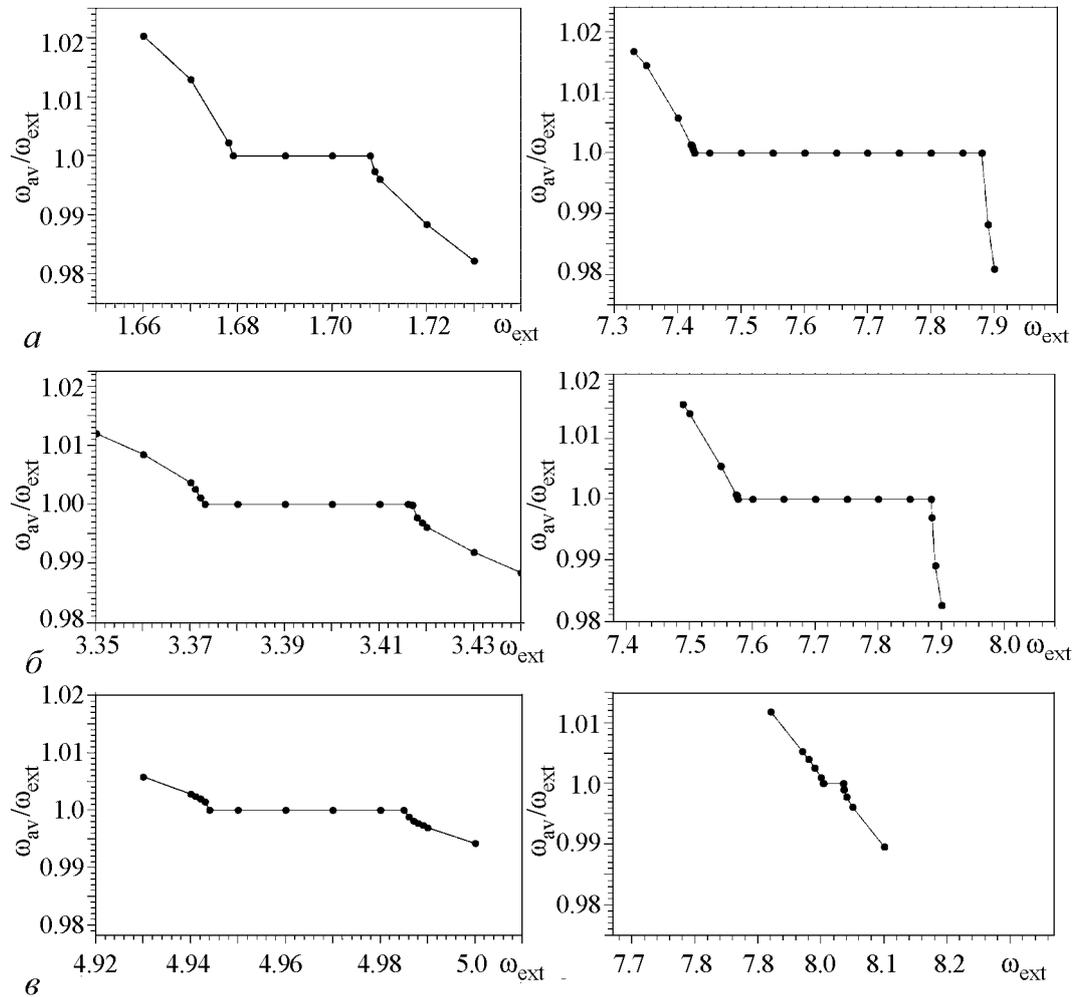


Рис. 4. Зависимости отношения частот  $\omega_{\text{av}}/\omega_{\text{ext}}$  от частоты воздействия  $\omega_{\text{ext}}$  в активной среде (6) в возбудимом (слева,  $\beta = 4$ ) и автоколебательном (справа,  $\beta = 2$ ) режимах, полученные при  $C = 14$  для различных мод:  $n = 1$  (а),  $n = 2$  (б) и  $n = 3$  (в)

лах численной ошибки равно единице, соответствуют области захвата на основной частоте. Можно видеть, что ширина области синхронизации в возбудимом режиме увеличивается с номером моды, в то время как в автоколебательном режиме она убывает, и наиболее широкая область соответствует  $n = 1$ , а не  $n = 3$ , как наблюдается в возбудимой среде. При этом ширина областей синхронизации в автоколебательном случае, в целом, на порядок больше, чем для возбудимой среды.

Установленные особенности эффектов синхронизации связаны с принципиально различным поведением элементов среды. В случае автоколебательной среды каждый элемент является автоколебательной системой (автогенератором) и обладает собственной частотой. Синхронизация системы в целом означает синхронизацию всех элементарных автогенераторов. При этом их фазы могут иметь достаточно сложное распределение и могут меняться вдоль кольца немонотонным образом. На пространственно-временной диаграмме колебаний в области синхронизации (рис. 5, *a*) можно наблюдать искажение фронта волны. Возникает участок, где волна движется в обратном направлении (меняется наклон светлой полосы, соответствующей бегущему импульсу). Изменения движения фронта волны позволяют автоколебательным элементам среды подстраиваться и менять частоту в соответствии с частотой воздействия в сравнительно широких пределах. В возбудимой среде отдельные элементы не являются автогенераторами, и говорить об их синхронизации нельзя. Синхронизация связана с системой в целом. Частота колебаний элементов возбудимой среды определяется временем, в течение которого импульс возбуждения пробегает по кольцу. Это время связано со скоростью движения импульса (фазовой скоростью бегущей волны). Вынужденная синхронизация означа-

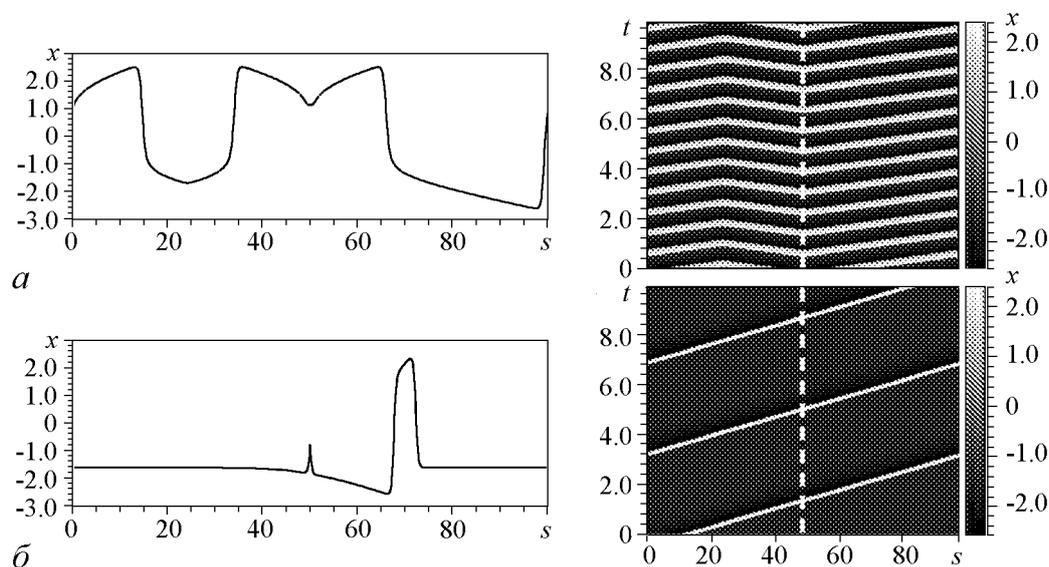


Рис. 5. Мгновенные пространственные профили (слева) и пространственно-временные диаграммы (справа) колебаний моды  $n = 1$ , полученные для системы (6) в области синхронизации при автоколебательном (*a*) и возбудимом (*б*) режимах. Значения параметров соответствуют рис. 4. Значение переменной  $x$  показано градациями тона (белый цвет соответствует максимуму, черный минимуму). Пунктирной линией отмечена точка пространства, к которой приложено внешнее воздействие

ет, что под действием внешней силы изменяется скорость движения импульса. Такие изменения оказываются возможны только в незначительных пределах. Причем, несмотря на локальный характер воздействия, скорость импульса остается одинаковой во всех точках пространства, о чем свидетельствуют прямые наклонные полосы на пространственно-временной диаграмме (рис. 5, б). В этом случае поведение волнового фронта в области синхронизации и вне её на диаграмме практически неразличимы.

Из тех же соображений можно объяснить и различную тенденцию в поведении мод при синхронизации автоколебательной и возбудимой среды. В автоколебательной среде колебания любой моды характеризуются практически одним и тем же периодом  $T_0$ . Соответственно, при синхронизации на основном тоне, локальное возмущение для всех мод имеет период, близкий к  $T_0$ , несмотря на то, что число волн (импульсов) в пространственном профиле растет с ростом номера моды  $n$ . В возбудимой среде частота колебаний пропорциональна номеру  $n$  и синхронное возмущение производится в  $n$  раз чаще. Таким образом, синхронизация коротковолновых мод в автоколебательной среде оказывается менее эффективной по сравнению с основной модой. Напротив, в возбудимой среде, в связи с ростом частоты синхронного воздействия, синхронизовать коротковолновые моды становится проще, чем моду  $n = 1$ .

Помимо уравнений среды (6) была исследована частотная синхронизация в модели осциллятора с задержкой (4), которая при внешнем гармоническом воздействии принимает вид

$$\begin{cases} \varepsilon \frac{dx}{dt} = x - y - \alpha x^3 + d [x(t - t_d) - x(t)], \\ \frac{dy}{dt} = \gamma x - y + \beta + C \cos(\omega_{\text{ext}} t). \end{cases} \quad (7)$$

Значения параметров модели (7) выбирались такими же как в (6) (за исключением амплитуды воздействия), а время задержки  $t_d$  рассчитывалось в соответствии с соотношением (5) на основании данных, полученных из численного интегрирования (2). Для трех колебательных мод в модели (7), соответствующих номерам  $n = 1, 2, 3$ , в среде в возбудимом режиме осциллятора ( $\beta = 4$ ) время задержки было одним и тем же:  $t_d \approx 3.72$ . В автоколебательном режиме ( $\beta = 2$ ) время задержки для различных мод несколько различалось и составляло  $t_d \approx 0.844, 1.656, 2.350$  для первой, второй и третьей моды, соответственно.

Для трех мод в модели (7) были построены области синхронизации на плоскости параметров воздействия ( $\omega_{\text{ext}}, C$ ). Результаты, полученные в возбудимом и автоколебательном режиме представлены на рис. 6. Необходимо отметить тот факт, что при наличии локального воздействия среда перестает быть однородной и модель (7) уже не является полным аналогом (6). Однако, как можно видеть из представленных результатов, качественное соответствие поведения двух моделей полностью сохраняется. Наблюдаются те же закономерности синхронизации: области синхронизации в возбудимом режиме значительно уже, чем в автоколебательном, причем с ростом номера моды в возбудимом режиме они становятся шире, в то время как в автоколебательном режиме – сужаются.

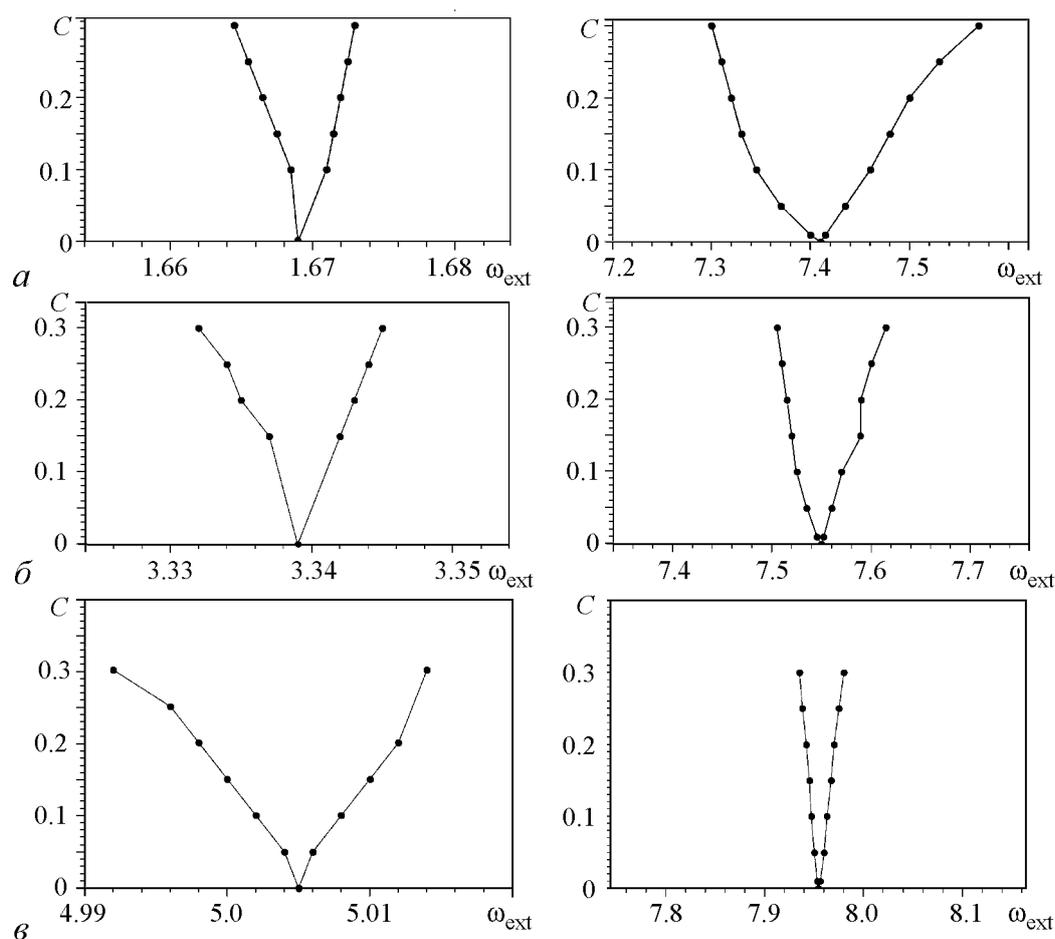


Рис. 6. Области синхронизации на плоскости параметров  $(\omega_{\text{ext}}, C)$  для мод  $n = 1$  (а),  $n = 2$  (б) и  $n = 3$  (е) в модели (7) при  $\beta = 4$  (возбудимый режим, слева) и  $\beta = 2$  (автоколебательный режим, справа)

### Заключение

Проведенные исследования показали, что колебания, возникающие в детерминированной среде, составленной из возбудимых элементов, могут быть синхронизированы внешним воздействием в некоторой области частотных расстроек и, в этом смысле, могут рассматриваться как особый автоколебательный режим. То же самое относится к любым возбудимым системам, в которых колебания возникают не в результате шумового (или иного) внешнего воздействия, а вследствие дополнительных обратных связей (как, например, в модели (4)). Однако, при этом, были выявлены существенные отличия частотной синхронизации в возбудимой среде по сравнению с автоколебательной средой. Во-первых, области синхронизации в возбудимой среде значительно (в целом на порядок) уже, чем в автоколебательной. Во-вторых, что на наш взгляд особенно интересно, ширина областей синхронизации по-разному зависит от номера колебательной моды  $n$ : в возбудимой среде она растет с ростом  $n$ , а в автоколебательной, напротив, уменьшается. Данная особенность могла бы оказаться

полезной при установлении характера элементов среды в реальных экспериментах. Однако требуется показать, что она носит общий характер и не является чертой, присущей одной модели. Полагаем, что данный вопрос заслуживает дальнейшего исследования с использованием других моделей возбудимой среды.

*Работа выполнена при частичной поддержке Министерства образования и науки РФ (код проекта 1008).*

### **Библиографический список**

1. *Wiener N., Rosenblueth A.* The mathematical formulation of the problem of conduction of impulses in a network of connected excitable elements, specifically in cardiac muscle // *Arch. Inst. Cardiol. Mexico.* 1946. Vol. 16. P. 205.
2. *Rinzel J., Keller J.D.* Traveling wave solutions of a nerve conduction equation // *J. Biophys.* 1973. Vol. 13. P. 1313.
3. *Winfree A.T.* The geometry of biological time. New York: Springer, 1980.
4. *Романовский Ю.М., Степанова Н.В., Чернавский Д.С.* Математическое моделирование в биофизике. М.-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2003.
5. *Keener J., Sneyd J.* Mathematical physiology. New York: Springer, 1998.
6. *Winfree A.* Varieties of spiral wave behavior: An experimentalist's approach to the theory of excitable media // *Chaos.* 1991. Vol. 1, № 3. P. 303.
7. *Лоскутов А.Ю., Михайлов А.С.* Основы теории сложных систем. М.-Ижевск: НИЦ «РХД», Институт компьютерных исследований, 2007.
8. *Bub G., Shrier A., Glass L.* Spiral Waves Break Hearts: New research stresses the importance of communication between cardiac cells. Inside Science News Services, 2005
9. *Pertsov A.M., Ermakova E.A., Panfilov A.V.* Rotating spiral waves in a modified FitzHugh–Nagumo model // *Phys. D.* 1984. Vol. 14. P. 117.
10. *Zaritski R.M., Pertsov F.M.* Stable Spiral structures and their interaction in two-dimensional excitable media // *Physical Review E.* 2002. Vol. 66, № 6. P. 066120(1–6).
11. *Jones K.R.T.* Stability of the traveling wave solution of the FitzHugh–Nagumo system // *Trans. Amer. Math. Soc.* 1984. Vol. 286. P. 431.
12. *Neu J.C., Preissig R.S. and Krassowska W.* Initiation of propagation in a one-dimensional excitable medium // *Phys. D.* 1997. Vol. 102. P. 285.
13. *Nagai Y., González H., Shrier A., Glass L.* Paroxysmal starting and stopping of circulating waves in excitable media // *Phys. Rev. Letters.* 2000. Vol. 84, № 18. P. 4248.
14. *Cytrynbaum E. and Keener J.P.* Stability conditions for the traveling pulse: Modifying the restitution hypothesis // *Chaos.* 2002. Vol. 12 P. 788.
15. *Alford J.G., Auchmuty G.* Rotating wave solutions of the FitzHugh–Nagumo equations // *J. Math. Biol.* 2006. Vol. 53, № 5. P. 797.

16. *Buric N., Todorovic D.* Dynamics of FitzHugh–Nagumo excitable systems with delayed coupling // *Phys. Rev. E.* 2003. Vol. 67. P. 066222.
17. *Schöll E., Hiller G., Hövel P., Dahlem M.A.* Time-delayed feedback in neurosystems // *Phil. Trans. R. Soc. A.* 2009. Vol. 367. P. 1079.
18. *Rosenblum M. G., Pikovsky A., Kurths J.* Synchronization—a universal concept in nonlinear sciences. Cambridge, UK: Cambridge University Press, 2001.
19. *Han S.K., Yim T.G., Postnov D.E., Sosnovtseva O.V.* Interacting coherence resonance oscillators // *Phys. Rev. Lett.* 1999. Vol. 83, № 9. P. 1771.
20. *Neiman A., Schimansky-Geier L., Cornell-Bell A., Moss F.* Noise-enhanced phase synchronization in excitable media // *Phys. Rev. Lett.* 1999. Vol. 83, № 23. P. 4896.
21. *Hu B., Zhou Ch.* Phase synchronization in coupled nonidentical excitable systems and array-enhanced coherence resonance // *Phys. Rev. E.* 2000. Vol. 61, № 2. P. R1001(1–4).
22. *Nomura T., Glass L.* Entrainment and termination of reentrant wave propagation in a periodically stimulated ring of excitable media // *Phys. Rev. E.* 1996. Vol. 53, № 6. P. 6353.
23. *González H., Nagai Y., Bub G., Glass L.* Resetting and annihilating reentrant waves in a ring of cardiac tissue: Theory and experiment // *Progress of Theor. Phys. Supplement.* 2000. Vol. 139. P. 83.
24. *Glass L., Nagai Y., Hall K., Talajic M., Natte S.* Predicting the entrainment of reentrant cardiac waves using phase resetting curves // *Phys. Rev. E.* 2002. Vol. 65. P. 021908(1–10).
25. *FitzHugh R.A.* Impulses and physiological states in theoretical models of nerve membrane // *Biophys. J.* 1961. Vol. 1. P. 445.
26. *Nagumo J.S., Arimoto S., Yoshizawa S.* An active pulse transmission line simulating nerve axon // *Proceedings of the Institute of Radio Engineers.* 1962. Vol. 50. P. 2061.
27. *Слепнев А.В., Вадивасова Т.Е.* Два вида автоколебаний в активной среде с периодическими граничными условиями // *Нелинейная динамика.* 2012. Т. 8, № 3. С. 497.

*Поступила в редакцию*      6.12.2013  
*После доработки*                      14.02.2014

## **EXTERNAL SYNCHRONIZATION OF TRAVELING WAVES IN AN ACTIVE MEDIUM IN SELF-SUSTAINED AND EXCITABLE REGIME**

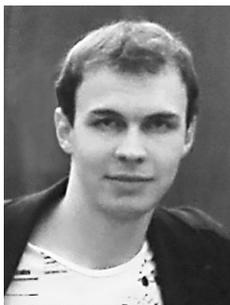
*A. V. Slepnev, I. A. Shepelev, T. E. Vadivasova*

National Research Saratov State University

The model of a one-dimensional active medium, which cell represents FitzHugh–Nagumo oscillator, is studied with periodical boundary conditions. Such medium can be either self-oscillatory or excitable one in dependence of the parameters values. Periodical boundary conditions provide the existence of traveling wave regimes both in excitable and

self-oscillatory case without any deterministic or stochastic impacts. The local periodic force influence on the medium is under study. In addition to the uniform medium study the single FitzHugh–Nagumo oscillator with complementary time-delayed feedback is considered. The comparison of synchronization effects in excitable and self-oscillatory regimes of the active medium and its analogue is carried out.

*Keywords:* Self-oscillatory medium, multistability, spatial structures, synchronization.



*Слепнев Андрей Вячеславович* – родился в 1987 году в Саратове, окончил физический факультет Саратовского государственного университета по специальности «радиофизика и электроника» (2009). В 2011 году получил в СГУ степень магистра физики по направлению «Физика». Аспирант кафедры радиофизики и нелинейной динамики. Научные интересы: динамика распределенных систем, пространственные структуры, влияние случайного воздействия на динамику нелинейных систем.

410012 Саратов, Астраханская, 83  
Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского  
E-mail: a.v.slepnev@gmail.com



*Шепелев Игорь Александрович* – родился в Саратове (1989), окончил физический факультет Саратовского государственного университета по специальности «радиофизика и электроника» (2012), в настоящее время обучается в магистратуре. Научные интересы: численный эксперимент, математическое моделирование, активные среды, распределенные системы, влияние случайного воздействия на динамику нелинейных систем.

410012 Саратов, Астраханская, 83  
Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского  
E-mail: igor\_sar@li.ru



*Вадивасова Татьяна Евгеньевна* – родилась в 1958 году. Окончила физический факультет Саратовского государственного университета (1981), доктор физико-математических наук. В настоящее время – профессор кафедры радиофизики и нелинейной динамики физического факультета СГУ. Научные интересы сосредоточены в области нелинейной динамики: эффекты синхронизации в ансамблях хаотических осцилляторов, явление фазовой мультистабильности взаимодействующих хаотических систем, свойства различных типов нерегулярных аттракторов, статистические характеристики динамического хаоса, роль флуктуаций в нелинейных системах и др. Автор более 60 публикаций в отечественной и зарубежной печати, включая 3 монографии.

410012 Саратов, ул. Астраханская, 83  
Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского  
E-mail: vadivasovate@yandex.ru



## ПОДАВЛЕНИЕ ВОЗБУЖДЕНИЙ В АКТИВНОЙ СРЕДЕ С ПОМОЩЬЮ СЛАБОГО ВНЕШНЕГО ВОЗДЕЙСТВИЯ

*И. И. Бастратов, К. А. Гаврилова, С. А. Григорьева, Г. В. Осипов*

Нижегородский государственный университет имени Н. И. Лобачевского

В данной работе представлены два новых метода подавления импульса в одномерной и двумерной возбудимых средах с помощью внешнего воздействия. В предложенных методах использовалось кратковременное импульсное воздействие, приводящее к изменению скоростей распространения фронтов, что, в свою очередь, привело к дестабилизации распространяющегося импульса и переходу среды в невозбужденное состояние. Исследования проводились на модели Зыкова, которая при некотором наборе параметров является моделью возбудимой среды. Были определены условия на амплитуду и длительность внешних воздействий, необходимые для подавления возбуждений.

*Ключевые слова:* Нелинейная динамика, активные среды, спиральные волны, модель Зыкова, волны возбуждения.

### Введение

Модель возбудимой среды – одна из базовых моделей активных сред. В таких средах возможно существование устойчивых самоподдерживающихся волн. Возбудимые среды широко распространены в автокаталитических химических реакциях [1, 2] и в биологии – нейронные структуры, нейронная и мышечная ткани [3–6]. Такие среды интересны тем, что в них могут распространяться волны возбуждения, которые можно рассматривать как один из механизмов связи между различными частями сред. В некоторых случаях существование распространяющихся волн является нежелательным эффектом. Например, самопроизвольное разрушение спиральной волны на несколько волн и их последовательное дробление из-за неоднородности могут приводить к хаотическому пространственно-временному поведению. Такая динамика рассматривается как возможный механизм для начала желудочковой фибрилляции в сердечной мышце [7]. Таким образом, существует необходимость в разработке эффективных методов для инициации, управления и уничтожения волн возбуждения.

Разработке стратегий по борьбе с сердечными аритмиями на основе математических моделей посвящено большое число исследований. В [8] описано развитие

систем, моделирующих поведение клеток сердечной ткани, механизмы возникновения аритмий сердца и способы борьбы с ними. Способ стимуляции сердца для снижения вероятности сердечной недостаточности, использующий управление с обратной связью (вызываются малые возмущения постоянной амплитуды с чередующимися частотами), предложен в [9]. Этот способ более устойчив к шумам, чем многие аналогичные методы, и поэтому более эффективен, с точки зрения реализации экспериментов и применения для лечения аритмии. В [10] предложен способ подачи внешнего воздействия для подавления спиральной волны в одномерной кусочно-линейной модели ФитцХью–Нагумо – периодическое импульсное воздействие малой амплитуды непрерывное во времени. Управление волнами с помощью обратной связи обсуждалось в [11–14]. В [15] предложено для подавления фибрилляции желудочков подавать последовательность из нескольких (5 или 7) электрических импульсов малой амплитуды, вместо одного импульса с большой амплитудой. При этом снижение суммарной энергии импульсов составило в среднем 84%. Для удержания клеток миокарда в «заблокированном» состоянии в течении заданного промежутка времени в [16] предложено использование синусоидального высокочастотного переменного тока.

В работе предлагается метод, который использует кратковременное импульсное воздействие на среду для уничтожения нестатических состояний в возбудимых средах, таких как распространяющиеся импульсы, одиночная спиральная волна и хаос спиральных волн.

## 1. Модель

Рассмотрим достаточно общую модель, которая описывает возбудимую среду через двумерное уравнение реакции-диффузии

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = F(u, v) + D_u \Delta u, \\ \frac{\partial v}{\partial t} = \varepsilon G(u, v) + D_v \Delta v, \end{cases} \quad (1)$$

где  $\varepsilon \ll 1$  малый параметр, который управляет пространственно-временными масштабами в системе;  $u$  и  $v$  – быстрые и медленные переменные, соответственно;  $\Delta$  – оператор Лапласа в пространственных координатах;  $D_{u,v}$  – коэффициенты диффузии для быстрой и медленной переменных. В нервной и мышечных тканях диффузия медленной переменной отсутствует, то есть  $D_v = 0$  в (1). Функции  $F(u, v)$  и  $G(u, v)$  определяют локальную кинетику системы.

Динамика изолированного элемента среды (в (1)  $D_u = D_v = 0$ ) описывается следующей системой:

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = F(u, v), \\ \frac{dv}{dt} = \varepsilon G(u, v). \end{cases} \quad (2)$$

Функции  $F(u, v)$  и  $G(u, v)$ , используемые при моделировании возбудимых сред, качественно представлены на рис. 1. Изоклина  $F(u, v) = 0$  имеет  $N$ -образную

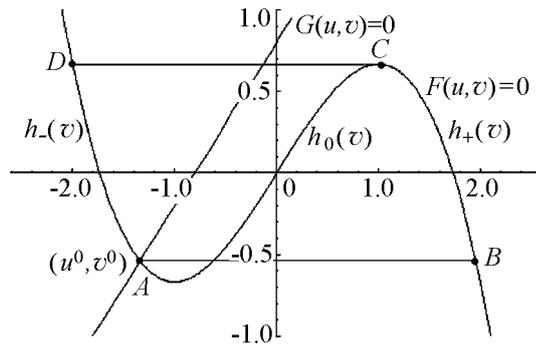


Рис. 1. Фазовый портрет возбудимой системы после подачи внешнего стимула. Изоклины  $F(u, v) = 0$  и  $G(u, v) = 0$ . Маршрут  $ABCD$  соответствует одиночному кратковременному импульсу. Интервал  $AB$  соответствует переднему фронту импульса, интервал  $BC$  – возбужденной части импульса, интервал  $CD$  – заднему фронту импульса и интервал  $DA$  – невозбужденной части импульса

форму. Обозначим левую убывающую ветвь через  $h_-(v)$ , правую убывающую ветвь как  $h_+(v)$  и среднюю возрастающую ветвь как  $h_0(v)$ . Изоклина  $G(u, v) = 0$  монотонная функция и пересекает левую ветвь  $h_-(v)$  изоклины  $F(u, v) = 0$  в одной точке. Обозначим  $v_{\max}$  и  $v_{\min}$  значения в стационарных точках на изоклине  $F(u, v) = 0$ , где достигаются локальные максимальное и минимальное значения переменной  $v$ , соответствующие расположению  $A$  и  $C$  на рис. 1. Единичный элемент среды имеет на пересечении изоклин  $F(u, v) = 0$  и  $G(u, v) = 0$  состояние равновесия  $(u_0, v_0)$ . Это состояние устойчиво по отношению к малым возмущениям. В пространственно-

распределенной системе однородное состояние с координатами  $u = u_0$  и  $v = v_0$  линейно устойчиво. Однако оно может быть неустойчиво к большим возмущениям, которые могут приводить к появлению неоднородного движения. В частности, в зависимости от возмущения можно получить различные возбудимые движения [17]. Будем рассматривать одиночные импульсы в однородной среде, одиночную спираль и спирально-волновой беспорядок.

Для распространяющегося импульса обозначим время возбуждения через  $T_{AB}$ , время гашения через  $T_{CD}$ , длину переднего фронта волны через  $l_{AB}$ , длину заднего фронта волны через  $l_{CD}$ , длину возбужденной части через  $l_{BC}$  и длину невозбужденной части импульса  $l_{DA}$ .

Сначала рассмотрим процессы подавления возбуждения в одномерной модели, а затем продемонстрируем их для двумерной.

## 2. Подавление возбуждения в одномерной среде

Рассмотрим систему (1) в одномерном случае без диффузии медленной переменной. Одиночный элемент описывается моделью Зыкова [18]

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = F(u, v) + D_u \Delta u, \\ \frac{\partial v}{\partial t} = \varepsilon G(u, v), \end{cases} \quad (3)$$

где  $x \in [0, L]$ ,  $L$  – параметр, определяющий размер среды.  $F$  и  $G$  следующие кусочно-линейные функции:

$$F(u, v) = \begin{cases} -k_1 u - v, & u \leq \sigma, \\ k_f(u - a) - v, & \sigma < u < b - \sigma, \\ k_2(b - u) - v, & b - \sigma \leq u, \end{cases} \quad (4)$$

$$G(u, v) = \begin{cases} k_g u - v, & k_g u - v \geq 0, \\ k_\varepsilon(k_g u - v), & k_g u - v < 0. \end{cases} \quad (5)$$

Здесь  $k_{1,2}$  – определим из непрерывности функции  $f(u, v) = F(u, v) + v$ , при  $u = \sigma$  и  $u = b - \sigma$ , то есть  $k_1 = -k_f(\sigma - a)/\sigma$ ,  $k_2 = k_f(b - \sigma - a)/\sigma$ .

Рассмотрим систему (3) с функциями (4) и (5) при следующих значениях параметров:  $a = 5$ ,  $b = 20$ ,  $k_f = 0.4$ ,  $k_g = 1.7$ ,  $\sigma = 0.2$ ,  $k_\varepsilon = 6$ ,  $\varepsilon \ll 1$ . Выберем  $D_u = 1$  и  $L = 35$ , граничные условия считаем периодическими  $u(x + L, t) = u(x, t)$ . Кроме пространственно однородного устойчивого состояния  $u(x, t) = u^0$  и  $v(x, t) = v^0$ , при определенных условиях существует решение в виде распространяющегося импульса. Его форма определяется контуром  $ABCD$  на рис. 2.

Маршрут  $ABCD$  состоит из четырех различных интервалов:

- два участка быстрых движений: передний фронт импульса –  $AB$  и задний фронт импульса –  $CD$ ;
- два участка медленных движений:  $BC$  и  $DA$ , соответствующие возбужденному и не возбужденному состоянию среды, соответственно.

Найдем условия, при которых одиночный импульс может быть подавлен относительно коротким импульсным воздействием. Это может быть достигнуто за счет введения внешней импульсной силы  $e(x, t)$  во второе уравнение системы (3).

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = F(u, v) + D_u \Delta u, \\ \frac{\partial v}{\partial t} = \varepsilon G(u, v) + e(x, t), \end{cases} \quad (6)$$

где

$$e(x, t) = \begin{cases} E_0, & t \in \Delta t, \\ 0, & t \notin \Delta t. \end{cases} \quad (7)$$

Здесь  $\Delta t$  – продолжительность внешнего импульса,  $E_0$  – его амплитуда.

Существование малого параметра  $\varepsilon$  в системе (3) позволяет разделить все движения на быстрые и медленные. Медленная переменная  $v(x, t)$  имеет характерное время эволюции  $\tau_v = 1/\varepsilon$ , а быстрая переменная  $u(x, t)$  может значительно измениться в течение намного более короткого промежутка времени. Поэтому для переднего фронта  $AB$  и заднего  $CD$  фронта импульса значения медленной переменной  $v$  в нулевой аппроксимации могут приниматься как константы:  $v_f$  – соответствует переднему фронту и  $v_b$  – соответствует заднему фронту.

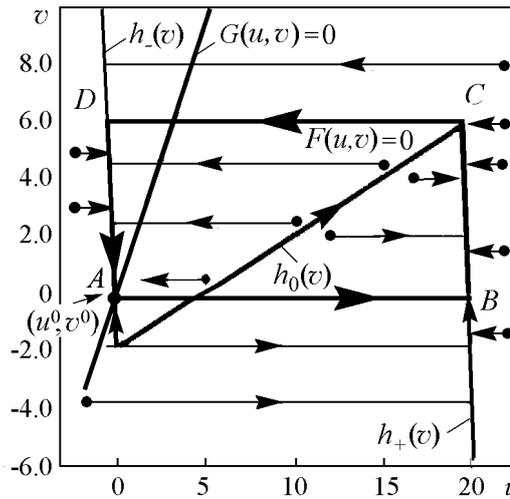


Рис. 2. Фазовый портрет единичного элемента среды при  $\varepsilon = 0.001$ . Маршрут  $ABCD$  соответствует одиночному кратковременному импульсу возбуждения

Если время действия внешнего импульса  $\Delta t$  короче, чем время возбуждения  $T_{AB}$  или время релаксации  $T_{CD}$ , то эти предположения могут быть применены к системе (6). Тогда, после подачи импульса, значение медленной переменной для переднего и заднего фронтов импульса, в нулевой аппроксимации для  $\varepsilon$ , тоже являются константами. Из второго уравнения (6) находим  $v_{f,b}^{imp}$  – значения медленной переменной на переднем и заднем фронтах, соответственно:

$$v_{f,b}^{imp} = v_{f,b} + E, \quad (8)$$

где  $E = E_0 \Delta t$ . В данном случае  $E_0 \Delta t$  – энергия внешнего воздействия. Модель, описывающую эволюцию переднего и заднего фронтов волны, можно представить как

$$\frac{\partial u}{\partial t} = F(u, v_{f,b}^{imp}) + D_u \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \quad (9)$$

В зависимости от величины внешнего импульса будем различать три типа воздействий: слабое, среднее и сильное. В качестве слабого воздействия рассмотрим такой импульс, после подачи которого значение медленной переменной не выходит из интервала  $(v_{\min}, v_{\max})$ . При постоянном значении  $v_{f,b}^{imp}$  уравнение (9) может иметь три пространственно однородных статических состояния с абсциссами

$$u_1^{f,b} = -v_{f,b}^{imp}/k_1 \in h_-(v), \quad u_2^{f,b} = a + v_{f,b}^{imp}/k_f \in h_0(v), \quad u_3^{f,b} = b - v_{f,b}^{imp}/k_2 \in h_+(v), \quad (10)$$

определяемыми уравнением  $\widehat{F} \equiv F(u, v_{f,b}^{imp}) = 0$ , где величина  $V_f^{imp}$  определяет состояние равновесия для переднего фронта волны, а величина  $V_b^{imp}$  определяет состояние равновесия для заднего фронта волны. При среднем внешнем воздействии может существовать только одно пространственно однородное устойчивое статическое состояние, координата которого  $u \in h_-(v)$  или  $u \in h_+(v)$ . При сильном внешнем воздействии устойчивых статических состояний нет.

### 2.1. Подавление возбуждения с помощью слабого внешнего воздействия.

Пусть имеем слабое внешнее воздействие. Будем рассматривать случай когда  $u_1^{f,b} < u_2^{f,b} < u_3^{f,b}$ . Тогда два из этих установившихся состояний  $u_1^{f,b}$  и  $u_3^{f,b}$  устойчивы, а  $u_2^{f,b}$  неустойчиво. Поэтому (9) описывает две стационарные волны переключения:

- волна от  $u_1^f$  до  $u_3^f$ , соответствующая переднему фронту;
- волна от  $u_3^b$  до  $u_1^b$ , соответствующая заднему фронту.

Профили этих волн переключения, распространяющиеся со скоростями  $c_{f,b}$ , являются решениями уравнения

$$-c_{f,b} \frac{du}{d\xi_{f,b}} = F(u, v_{f,b}^{imp}) + D_u \frac{d^2 u}{d\xi_{f,b}^2}, \quad (11)$$

где  $\xi_{f,b} = x - c_{f,b}t$ ,  $c_f$  – скорость переднего фронта,  $c_b$  – скорость заднего фронта. Граничные условия

$$\left. \frac{du}{d\xi_f} \right|_{\xi_f=0} = 0 \quad \text{и} \quad \left. \frac{du}{d\xi_f} \right|_{\xi_f=T} = 0 \quad (12)$$

для переднего фронта волны и

$$\left. \frac{du}{d\xi_b} \right|_{\xi_b=0} = 0 \quad \text{и} \quad \left. \frac{du}{d\xi_b} \right|_{\xi_b=T} = 0 \quad (13)$$

для заднего фронта волны.

Решение для переднего и заднего фронтов волны может быть найдено при малых значениях  $\sigma$ . Тогда в (11) остается только ветвь  $h_0(v)$

$$F(u, v_{f,b}^{imp}) = k_f(u - a) - v_{f,b}^{imp}. \quad (14)$$

Система (11) с одним из граничных условий (12) или (13) является задачей на собственные числа для единственных значений скорости распространения  $c_{f,b}$ . При этом значения  $v_{f,b}^{imp}$  определяют скорости и направления движения переднего и заднего фронтов распространяющегося импульса. Поэтому кратковременное импульсное воздействие может вызывать изменение значения медленной переменной на переднем и заднем фронтах бегущего импульса, что приводит к изменению скоростей распространения фронтов. Распространение переднего и заднего фронтов с различными скоростями может привести к дестабилизации распространяющегося импульса и переходу в состояние равновесия.

Собственные значения задач (11), (12) и (11), (13) являются комплексно-сопряженными и равны  $p_{1,2}^{f,b} = -c_{f,b}/2 \pm i\sqrt{4k_f - c_{f,b}^2}/2$ .

Тогда, для переднего и заднего фронтов волны получим выражения

$$u(\xi_{f,b}) = e^{\gamma \xi_{f,b}} \left[ A_{f,b}^1 \cos \delta \xi_{f,b} + A_{f,b}^2 \sin \delta \xi_{f,b} \right] + u_2^{f,b}, \quad (15)$$

где  $\gamma = -c_{f,b}/2$ ,  $\delta = \sqrt{4k_f - c_{f,b}^2}/2$ ,  $A_f^1 = u_1^f - u_2^f$ ,  $A_b^1 = u_3^b - u_2^b$ ,  $A_f^2 = ((u_3^f - u_2^f)e^{-\gamma T} - A_f^1 \cos \delta T) / \sin \delta T$ ,  $A_b^2 = ((u_1^b - u_2^b)e^{-\gamma T} - A_b^1 \cos \delta T) / \sin \delta T$ .

Скорости переднего и заднего фронтов

$$c_{f,b}^2 = \frac{4k_f \ln^2 \left( \frac{b}{a_{f,b}} - 1 \right)}{\pi^2 + \ln^2 \left( \frac{b}{a_{f,b}} - 1 \right)}, \quad (16)$$

с продолжительностью

$$T_{f,b} = \frac{1}{\sqrt{k_f}} \sqrt{\pi^2 + \ln^2 \left( \frac{b}{a_{f,b}} - 1 \right)}, \quad (17)$$

где  $a_f = b - a - v_f^{imp}/k_f$ ,  $a_b = a - v_b^{imp}/k_f$  – имеют смысл порогового значения медленной переменной. Таким образом, подавая внешнее воздействие, можно изменять значения медленной переменной на переднем и заднем фронтах импульса и, как следствие, регулировать скорости распространения обоих фронтов (рис. 3).

В зависимости от знака  $E_0$  можно выделить два случая подавления распространяющегося импульса:

- При  $E_0 < 0$  происходит дестабилизация импульса, распространяющегося в среде за счет увеличения возбужденной части ВС и уменьшения невозбужденной части AD (см. рис. 2). Довозбуждение импульса обусловлено замедлением движения заднего фронта и ускорением движения переднего фронта (см. рис. 3).
- При  $E_0 > 0$  происходит дестабилизация импульса, распространяющегося в среде за счет уменьшения возбужденной части BC и увеличения невозбужденной части AD (см. рис. 2). Гашение импульса обусловлено ускорением движения заднего фронта и замедлением движения переднего фронта (см. рис. 3).

Подавление возбуждения возможно, только если амплитуда и продолжительность внешних импульсов достаточно велики. При этом одной из важнейших характеристик является ширина возбужденной части импульса  $l_{BC}$ . Значение  $l_{BC}$  может быть найдено из уравнения для медленных движений следующей системы:

$$\begin{cases} F(u, v) = h_+(v) = 0, \\ -c^* \frac{dv}{d\xi_{f,b}} = \varepsilon G(u, v), \end{cases} \quad (18)$$

где  $c^*$  – скорость распространения невозмущенного импульса.

$$l_{BC} = \frac{\varepsilon}{c^*} \left( 1 + \frac{k_g}{k_2} \right). \quad (19)$$

Для невозмущенного распространяющегося импульса ( $E = 0$ ) скорости переднего и заднего фронтов должны быть равны ( $c_f = c_b$ ). Тогда при фиксированных значениях параметров получаем следующее соотношение медленной переменной для переднего и заднего фронта импульса  $v_b = (b - 2a)k_f - v_f$ . Воспользовавшись этим соотношением, получим выражение для скорости невозмущенного распространяющегося импульса

$$c_{f,b}^2 = \frac{4k_f \ln^2 \left( \frac{a + v_f/k_f}{b - a - v_f/k_f} \right)}{\pi^2 + \ln^2 \left( \frac{a + v_f/k_f}{b - a - v_f/k_f} \right)}. \quad (20)$$

Зная значения ширины возбужденной части импульса и обеих скоростей переднего и заднего фронтов, можно получить оценки продолжительности и амплитуды внешнего импульса, необходимого для подавления всех возбуждений в среде.

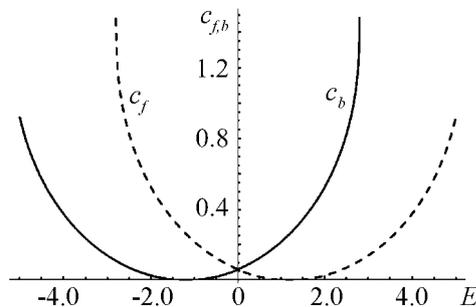


Рис. 3. Скорости переднего  $c_f$  и заднего  $c_b$  фронтов импульса в зависимости от  $E$

Найдем значение  $E_{cr}^T$  такое, что после подачи импульса в систему передний и задний фронты с течением некоторого времени  $T$  достигнут друг друга. В течение этого времени после прекращения подачи импульса в нулевой аппроксимации можно рассматривать новые распространяющиеся значения переднего  $c_f$  и заднего  $c_b$  фронтов как константы. Таким образом, можно найти значение  $E_{cr}^T$ , такое что передний и

задний фронты смогут пройти интервал, равный ширине исходного невозмущенного импульса  $l_{BC}$  в течение времени  $T$ . Оценим критическую величину  $E_{cr}^T$ . Для этого рассмотрим уравнение

$$c_f T + l_{BC} = c_b T, \quad (21)$$

где  $T \leq T_{AB} = l_{AB}/c^*$  и  $l_{BC}$  могут быть найдены из (21). Время, в течение которого возбужденная часть импульса уменьшится до нуля,

$$T = \frac{l_{BC}}{c_b - c_f}. \quad (22)$$

Приближенные значения времени подавления импульса могут быть найдены в зависимости от значения  $E$ , так как величины  $c_b$  и  $c_f$  зависят от  $E$ . Предполагая, что новые скорости возмущенного импульса остаются постоянными в течение времени  $T \leq T_{AB}$ , оценка критической величины  $E_{cr}^T$  после этого распространяющего импульса, может быть получена из (22) при  $T = T_{AB}$ . Аналогичная оценка времени подавления импульса и критической величины амплитуды внешнего воздействия может быть получена для случая довозбуждения импульса. При этом в качестве необходимого условия для подавления импульса, можно рассматривать условие расширения возбужденной части импульса на всю среду. Общее время подавления импульса состоит из

- времени, в течение которого вся среда окажется возбужденной,

$$T_1 = \frac{L - l_{BC}}{c_f - c_b}, \quad (23)$$

где  $L$  – размер среды,

- времени перехода от возбужденного состояния среды к невозбужденному

$$T_2 = T_{CD} + T_{DA}. \quad (24)$$

Таким образом, общее время возбуждения может быть выражено как:  $T_{\text{общ}} = T_1 + T_2$ , что является неявным заданием оценки критической величины  $E_{cr}^T$  при  $T_{\text{общ}} = T_{AB}$ .

**2.2. Подавление возбуждения через параметрическое управление.** Ранее мы использовали системное управление, то есть изменяли позиции в фазовом пространстве системы импульсным воздействием при постоянных значениях параметров среды. Теперь продемонстрируем подавление возбуждения через параметрическое управление, то есть будем изменять значение одного из системных параметров. Возьмем в качестве  $F(u, v)$  и  $G(u, v)$  следующие функции, описывающие модель ФитцХью–Нагумо:

$$F(u, v) = u - \frac{u^3}{3} - v, \quad (25)$$

$$G(u, v) = u - \gamma v + \beta, \quad (26)$$

где  $\beta$  определяет асимметрию между возбуждением и восстановлением для каждого элемента,  $\gamma$  характеризует диссипацию медленной переменной  $v$ . В качестве управляющих параметров рассмотрим релаксационный параметр  $\varepsilon$  и параметр  $\beta$ .

Аналогично предыдущим случаям будем рассматривать только кратковременное импульсное воздействие. Тогда для параметрического  $\varepsilon$ -управления можно записать

$$\varepsilon \equiv \varepsilon(x, t) = \begin{cases} E_0, & t \in \Delta t, \\ 0, & t \notin \Delta t, \end{cases} \quad (27)$$

и для  $\beta$ -управления

$$\beta \equiv \beta(x, t) = \begin{cases} \beta_0 + E_0 t, & t \in \Delta t, \\ \beta_0, & t \notin \Delta t. \end{cases} \quad (28)$$

В (27) и (28)  $E_0$  и  $\Delta t$  имеют тот же смысл, что и ранее. Импульсное изменение параметра  $\beta$  эквивалентно добавлению внешнего импульса  $\varepsilon$  во второе уравнение системы (3). Поэтому теория, рассмотренная ранее, может быть применена для случая параметрического управления. Изменение параметра  $\beta$  приводит к изменению значений медленных переменных в переднем и заднем фронтах распространяющихся волн.

**2.3. Локализованное в одномерной среде импульсное воздействие.** Изменение скоростей переднего и заднего фронтов может быть достигнуто за счет воздействия только на небольшой участок среды, содержащий передний или задний фронт волны. В этом случае импульсное воздействие может быть записано как

$$e \equiv e(x, t) = \begin{cases} E_0, & t \in \Delta t, x \in \Delta x, \\ 0, & t \notin \Delta t, x \notin \Delta x, \end{cases} \quad (29)$$

где  $\Delta t$  – время воздействия,  $\Delta x$  – область воздействия. Так как положения переднего и заднего фронтов соответствуют, например, положениям максимальных значений производных быстрой и медленной переменных, то время и область воздействия могут быть однозначно определены.

### 3. Численные эксперименты

Проведены численные эксперименты для различных значений параметров  $E_0$  и  $\Delta t$ . На рис. 4 представлены численные результаты для различных значений амплитуды  $E_0$  при фиксированной длительности  $\Delta t = 10$  приложенного внешнего импульса. Внешний импульс приложен в момент времени  $t = 0$ . В случае успешного довозбуждения импульса происходит расширение возбужденной части исходного импульса на всю среду, что приводит к его уничтожению и переходу среды в невозбужденное состояние. В случае успешного гашения импульса происходит сужение возбужденной части исходного импульса, что приводит к его уничтожению и переходу среды в невозбужденное состояние. В случае неуспешного подавления значение импульсного воздействия  $E = E_0 \Delta t$  недостаточно для дестабилизации начального импульса. Расширение возбужденной части исходного импульса, продолжающееся и

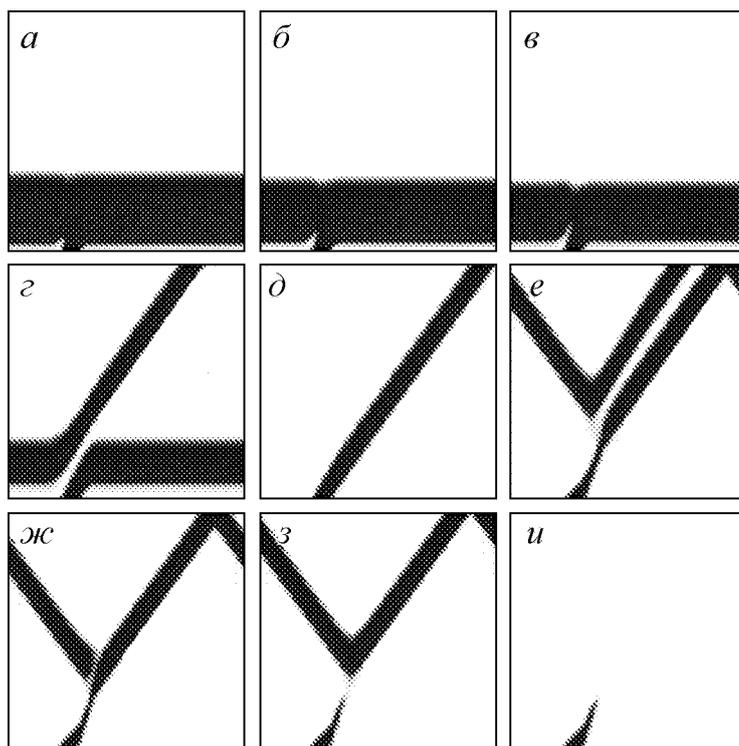


Рис. 4. Пространственно-временные диаграммы эволюции начального импульса (по горизонтали отложена пространственная координата, по вертикали – временная; темным цветом обозначены возбужденные области, светлым – невозбужденные области). Успешное довозбуждение импульса (а–в) при значениях амплитуды  $E_0$ :  $-5.5$  (а),  $-3.5$  (б),  $-2.5$  (в). Успешное гашение импульса (жс–и) при значениях амплитуды  $E_0$ :  $3.5$  (жс),  $3.59$  (з),  $3.6$  (и). Неуспешное подавление (з–е): неуспешное довозбуждение при  $E_0 = -0.5$  (з); невозмущенная модель Зыкова при  $E_0 = 0$  (д); неуспешное гашение при  $E_0 = 3.0$  (е)

после прекращения подачи внешнего воздействия, через некоторое время заканчивается, область возбуждения начинает сужаться и в итоге начальный импульс восстанавливается. Таким образом, подавление распространяющегося импульса возможно, если значение  $E$  больше некоторой критической величины  $E_{cr}^T$ .

#### 4. Подавление возбуждения в двумерной среде

**4.1. Подавление одиночной спиральной волны.** Рассмотрим двумерную модель с импульсным внешним воздействием

$$\begin{cases} c \frac{\partial u}{\partial t} = F(u, v) + D_u \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right), \\ \frac{\partial v}{\partial t} = \varepsilon G(u, v) + e(x, t), \end{cases} \quad (30)$$

со свободными граничными условиями

$$\frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=0, x=L} = 0 \quad \text{и} \quad \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{y=0, y=L} = 0, \quad (31)$$

где  $e(x, t)$  определено системой (7).

Спиральная волна имеет ширину возбужденной части, которая является относительно постоянной вдали от ядра спиральной волны и от границ среды [19]. Предположим, что ширина возбужденной части волны совпадает с шириной импульса, распространяющегося в одномерной среде с тем же набором параметров. Заметим, что эволюция спиральной волны может рассматриваться как движение свободного конца спирали и движение переднего и заднего фронтов спиральной волны. Поэтому внешний импульс, применяемый к одиночной спиральной волне или пространственно-временному беспорядку, приведет к результатам, аналогичным полученным ранее для одномерной среды.

Внешнее воздействие может привести к изменению скорости распространения переднего и заднего фронтов спиральной волны. Таким образом, изменится ширина возбужденной части, что приведет к дестабилизации и уничтожению спиральной волны.

Проведены численные эксперименты для различных значений параметров  $E_0$  и  $\Delta t$ . На рис. 5, 6 представлены результаты расчетов для различных значений амплитуды  $E_0$  при фиксированной длительности приложенного внешнего импульса  $\Delta t = 10$ . Внешний импульс приложен в момент времени  $t = 0$ . В случае успешного довозбуждения происходит расширение возбужденной части импульса, что приводит к переходу среды в возбужденное состояние, дестабилизации и уничтожению спиральной волны и последующему переходу среды в невозбужденное состояние. В случае успешного гашения происходит сужение возбужденной части импульса, что приводит к дестабилизации и уничтожению спиральной волны и переходу среды в невозбужденное состояние.

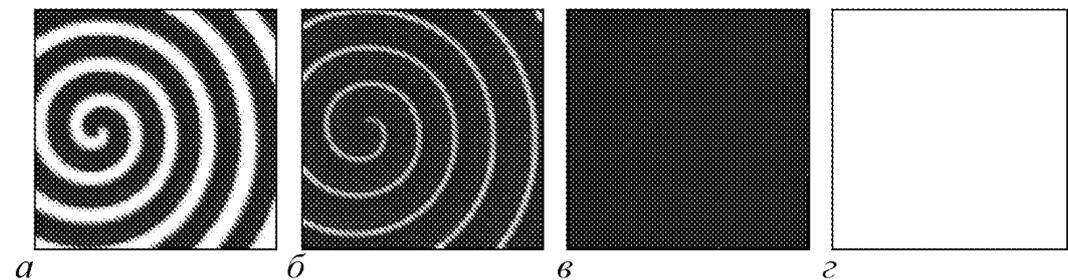


Рис. 5. Мгновенные распределения эволюции начального импульса (по горизонтали отложена пространственная координата  $x$ , по вертикали – пространственная координата  $y$ ; темным цветом обозначены возбужденные области, светлым – невозбужденные области). Довозбуждение импульса при амплитуде  $E_0 = -2.5$  и временах  $t$ :  $a - 0$ ,  $b - 4.0$ ,  $v - 10.0$ ,  $z - 17.0$

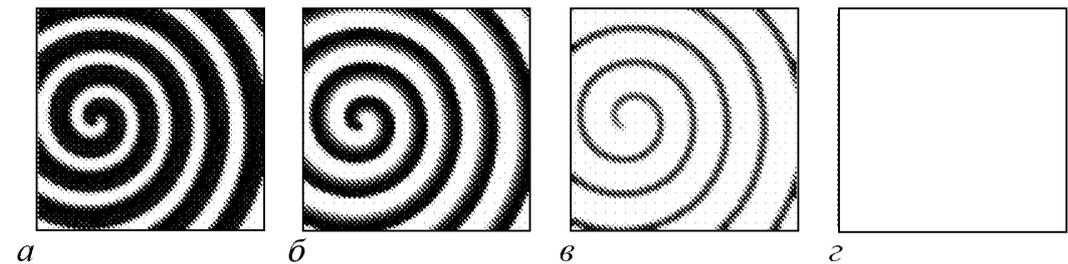


Рис. 6. Мгновенные распределения эволюции начального импульса (по горизонтали отложена пространственная координата  $x$ , по вертикали – пространственная координата  $y$ ; темным цветом обозначены возбужденные области, светлым – невозбужденные области). Гашение импульса при амплитуде  $E_0 = 5.0$  и временах  $t$ :  $a - 0$ ,  $б - 2.0$ ,  $в - 4.0$ ,  $г - 7.0$

**4.2. Подавление спирально-волнового беспорядка.** По схеме, изложенной в предыдущем пункте, были проведены численные эксперименты для различных значений параметров  $E_0$  и  $\Delta t$ . На рис. 7, 8 приведены мгновенные распределения эволюции начального импульса  $u(x, y, 0)$ . В случае успешного довозбуждения происходит расширение возбужденной части импульса, что приводит к переходу среды в возбужденное состояние, дестабилизации и уничтожению спирально-волнового беспорядка и последующему переходу среды в невозбужденное состояние. В случае успешного гашения происходит сужение возбужденной части импульса, что приводит к дестабилизации и уничтожению спирально-волнового беспорядка и переходу среды в невозбужденное состояние.

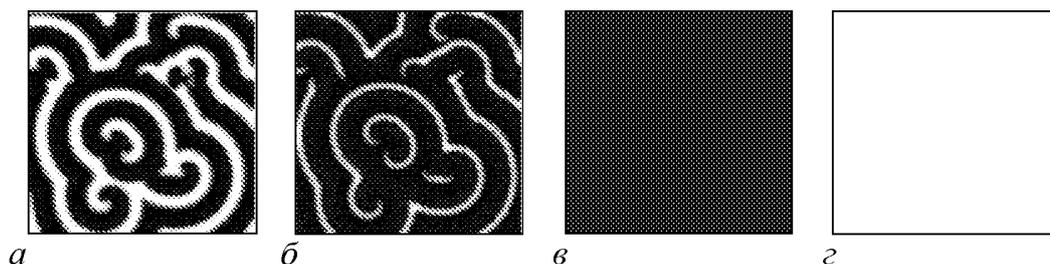


Рис. 7. Мгновенные распределения эволюции начального импульса (по горизонтали отложена пространственная координата  $x$ , по вертикали – пространственная координата  $y$ ; темным цветом обозначены возбужденные области, светлым – невозбужденные области). Довозбуждение импульса при амплитуде  $E_0 = -3.0$  и временах  $t$ :  $a - 0$ ,  $б - 3.0$ ,  $в - 11.0$ ,  $г - 16.0$

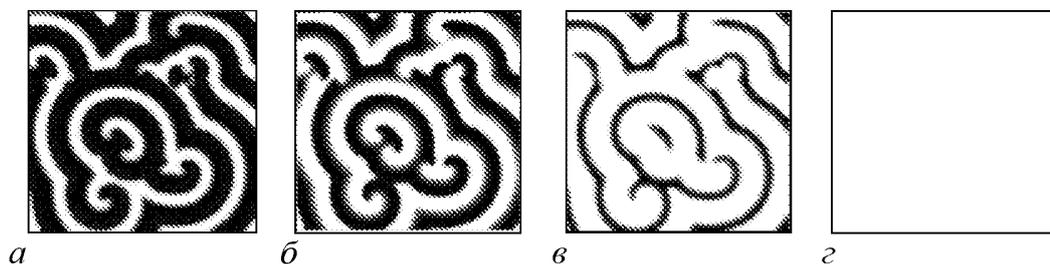


Рис. 8. Мгновенные распределения эволюции начального импульса (по горизонтали отложена пространственная координата  $x$ , по вертикали – пространственная координата  $y$ ; темным цветом обозначены возбужденные области, светлым – невозбужденные области). Гашение импульса при амплитуде  $E_0 = 4.5$  и временах  $t$ :  $a - 0$ ,  $б - 3.0$ ,  $в - 5.0$ ,  $г - 10.0$

### Заклучение

В работе предложены способы подавления нестатических состояний в возбудимых средах, таких как распространяющиеся импульсы, одиночная спиральная волна, спирально-волновой беспорядок. Было показано, что короткое импульсное воздействие может вызывать изменение значений медленной переменной переднего и заднего фронтов волн и соответствующее изменение скоростей фронтов. Распространение фронтов с различными скоростями ведет к дестабилизации распространяющегося импульса и переходу среды в невозбужденное состояние. Приведенные методы не требуют постоянного во времени применения воздействия. И в случае

довозбуждения и в случае гашения внешние воздействие не приводит явно к возбуждению или невозбуждению всей среды, а влияет только на передний и задний фронты.

*Теоретические исследования поддержаны грантом РФФ № 14-2-00811. Частично работа поддержана грантом (Соглашение от 27 августа 2013г. № 02.В.49.21.0003 между МОН РФ и ННГУ.)*

#### **Библиографический список**

1. Merkin J.H., Petrov V., Scott S.K., Showalter K. Wave-induced chemical chaos // Phys. Rev. Lett. 1996. Vol. 76, № 3. P. 546.
2. Zimmermann M.G., Firlie S.O., Natiello M.A. et al. Pulse bifurcation and transition to spatio-temporal chaos in an excitable reaction-diffusion model // Physica D. 1997. Vol. 110. P. 92.
3. Резниченко Г.Ю. Математические модели в биофизике и экологии, Ижевск: Институт компьютер. исследований, 2006. 184 с.
4. FitzHugh R.A. Impulses and physiological states in theoretical model of nerve membrane // Biophys. J. 1961. P. 445.
5. Hodgkin A.L., Huxley A.F. A quantitative description of membrane current and its application conduction and excitation in nerve // J. Physiol. 1952. P. 500.
6. Zeeman E.C. Differential equations for the heartbeat and nerve impulses. Mathematical institute, Univer. of Warwick, Coventry, 1972.
7. Востриков В.А., Горбунов Б.Б. Сравнение биполярных импульсов, генерируемых внешними дефибрилляторами // Клиническая анестезиология и реаниматология. 2006. Т. 3, № 6.
8. Елькин Ю.Е., Москаленко А.В. Базовые механизмы аритмий сердца // Клиническая аритмология. Под ред. проф. А.В. Ардашева. М.: ИД Медпрактика-М, 2009. С. 45.
9. Sridhar S., Duy-Manh Le, Yun-ChiehMi, Sinha S., Pik-Yin Lai, Chan C.K. Suppression of cardiac alternans by alternating-period-feedback stimulations // Physical Review. Vol. 2013. Vol. 87, № 4. 042712.
10. Konishi K., Takeuchi M., Shimizu T. Design of external forces for eliminating traveling wave in a piecewise linear FitzHugh–Nagumo model // Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science. 2011. Vol. 21, № 2. 023101.
11. Sakurai T., Mihaliuk E., Chirila F., Showalter K. Design and control of wave propagation patterns in excitable media // Science. 2009(2002). Vol. 296, № 5575; Vilas C., Garcia M.R., Banga J.R., Alonso A.A. Robust feed-back control of distributed chemical reaction systems // Chemical engineering science. 2007. Vol. 62, № 11. P. 2941.
12. Yoneshima H., Konishi K., Kokame H. Symposium on nonlinear theory and its applications // Chaos: Proceedings of the International. 2008. Vol. 21, № 2. 023101.
13. Guo W., Qiao C., Zhang Z., Ouyang Q., Wang H. Spontaneous suppression of spiral turbulence based on feedback strategy // Physical Review. 2010. Vol. 81. 056214.
14. Sakaguchi H., Nakamura Y. Sample entropy of GPI neurons dependence on the level of alertness in 6OHDA rats // Journal of the Physical Society of Japan. 2010.

Vol. 79. 074802.

15. Luther S., Fenton F.H., Kornreich B.G., Squires A., Bittihn P. Low-energy control of electrical turbulence in the heart // Nature. 2011. Vol. 475, № 7355. 235-9.
16. Tandri H., Weinberg S.H., Chang K.C., Zhu R., Trayanova N.A., Tung L., Berger R.D. Reversible cardiac conduction block and defibrillation with high-frequency electric field // Science Translational Medicine. 2011. Vol. 3, № 102. 102ra96.
17. Лоскутов А.Ю., Михайлов А.С. Введение в синергетику. М.: Наука, 1990. 272 с.
18. Zykov V.S., Mikhailov A.S., Muller S.C. Controlling spiral waves in confined geometries by global feedback // Phys. Rev. Lett. 1997. Vol. 78.
19. Гулько А.Б., Петров А.А. Механизм образования замкнутых путей проведения в возбудимой среде // Биофизика. 1972. Т. 17, вып. 2. 270 с.

Поступила в редакцию 30.01.2014

После доработки 7.04.2014

## THE SUPPRESSION OF THE EXCITATION OF THE ACTIVE MEDIUM WITH A WEAK EXTERNAL ACTION

*I. I. Bastrakov, K. A. Gavrilova, S. A. Grigorieva, G. V. Osipov*

Lobachevsky State University of Nizhni Novgorod

This paper presents two new methods of suppressing an impulse in one-dimensional and two-dimensional excitable media using an external influence. In the proposed methods, we used short-impulse influence, leading to a change in velocity of the front, which in turn led to the destabilization of the propagating impulse and transition medium unexcited state. The studies were conducted on the Zykov model that a certain set of parameters is a model of an excitable medium. The conditions were determined for the amplitude and duration of the external influences required for suppressing excitation.

*Keywords:* Nonlinear dynamics, active medium, spiral waves, Zykov model, excitation waves.



*Бастраков Илья Иванович* – родился в 1992 году в Омутнинске. Получил степень бакалавра прикладной математики и информатики в 2013 году в Нижегородском государственном университете им. Н.И. Лобачевского. С 2013 года проходит обучение в магистратуре по специальности «Математическое моделирование» факультета ВМК ННГУ. Выполнял исследования по проектам ФЦП «Исследования и разработки по приоритетным направлениям развития научно-технологического комплекса России на 2007–2013 годы». Им опубликовано 3 тезиса научных конференций.

603950 Нижний Новгород, пр-т Гагарина, д. 23  
Нижегородский государственный университет имени Н. И. Лобачевского  
E-mail: ilya.bastrakov@gmail.com



*Гаврилова Ксения Андреевна* – родилась в 1992 году в Дзержинске. Получила степень бакалавра прикладной математики и информатики в 2013 году в Нижегородском государственном университете им. Н.И. Лобачевского. С 2013 года проходит обучение в магистратуре по специальности «Математическое моделирование» факультета ВМК ННГУ. Выполняла исследования по проектам ФЦП «Исследования и разработки по приоритетным направлениям развития научно-технологического комплекса России на 2007–2013 годы». Ею опубликовано 2 тезиса научных конференций.

603950 Нижний Новгород, пр-т Гагарина, д. 23  
Нижегородский государственный университет имени Н. И. Лобачевского  
E-mail: gavrilovakseniaan@gmail.com



*Григорьева Светлана Анатольевна* – окончила механико-математический факультет Нижегородского государственного университета им. Н.И. Лобачевского с дипломами бакалавра (2006) и магистра (2008) математики. В 2008–2011 проходила обучение в аспирантуре на факультете Вычислительной математики и кибернетики Нижегородского государственного университета им. Н.И. Лобачевского по специальности «Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление». С 2008 года ассистент кафедры Теории управления и динамики машин факультета ВМК ННГУ. Участвует в разработке курса *Methods of optimization* для иностранных студентов 3-го курса специализации *Information Technologies*. Выполняет исследования по российским и международным проектам: ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 годы, ФЦП «Исследования и разработки по приоритетным направлениям развития научно-технологического комплекса России на 2007–2013 годы». Принимала участие в работе российских и международных научных коллективов под руководством: проф. J. Suykens из Католического университета г. Левена, Бельгия; проф. С.К. Chan из Тайваньской Академии наук Sinika, Тайвань; проф. И.Р. Ефимова из Вашингтонского университета, США; проф. J. Kurths из Потсдамского института исследования климата, Германия. Научные исследования С.А. Григорьевой проводятся по математическому моделированию и оптимальному управлению динамики сложных систем. Ею опубликовано 7 научных трудов из них: 5 тезисов научных конференций, 1 методическая работа, также 1 статья в журнале *Прикладной нелинейной динамики* (ВАК).

603950 Нижний Новгород, пр-т Гагарина, д. 23  
Нижегородский государственный университет имени Н. И. Лобачевского  
E-mail: sv.grigoryeva@gmail.com



*Осипов Григорий Владимирович* – родился в 1960 году. Является высококвалифицированным преподавателем и выполняет все виды педагогической работы: читал лекции по общим курсам «Классическая механика» и «Теория колебания», ведет практические и лабораторные занятия, руководит курсовыми и дипломными работами студентов. Разработал специальные курсы «Синхронизация, структуры и хаос в нелинейных дискретных средах», «Численные методы в исследовании нелинейных систем» и «Возбудимые среды: динамика и управление». Опубликовал более 120 научных работ, а за последние 5 лет – 30 работ в ведущих отечественных и зарубежных журналах и в сборниках материалов нескольких международных конференций, на которых выступал с докладами в качестве приглашенного лектора. В 2004 году защитил докторскую диссертацию по теме «Синхронизация в неоднородных ансамблях локально диффузионно связанных регулярных и хаотических осцилляторов». За последние пять лет участвовал в выполнении двух международных (INTAS) и пяти российских (РФФИ) научных проектов (в трех из них – в качестве руководителя). Работал по приглашениям, в том числе как приглашенный профессор, зарубежных университетов в Дармштадте, Леувене, Тайбее, Потсдаме, Вене, Гонконге, Ланкастере и Бостоне.

603950 Нижний Новгород, пр-т Гагарина, д. 23  
Нижегородский государственный университет имени Н. И. Лобачевского  
E-mail: grosipov@gmail.com



## АНАЛИТИЧЕСКОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ НЕЛИНЕЙНЫХ СВОЙСТВ СЕГНЕТОЭЛЕКТРИКОВ

*В. В. Камышов, В. С. Быстров*

Институт математических проблем биологии РАН, Пущино

В статье описан метод, позволяющий получить аналитическое выражение для нелинейной зависимости величины поляризации сегнетоэлектрика от величины внешнего электрического поля. Для нахождения аналитической связи использована функция специального класса –  $K_{ml}$ -функция второго порядка. Указаны структура построенных рядов и группы рядов, представляющие  $K_{ml}$ -функцию в любой точке комплексной плоскости. Проанализированы области сходимости рядов, полученные в виде граничного условия. Применение метода рассмотрено в данной работе на примере полимерного сегнетоэлектрика поливинилиденфторида (ПВДФ–ТрФЭ). Предлагаемый метод может быть использован для любых сегнетоэлектриков или других нелинейных упорядоченных систем в окрестности точек фазовых переходов и при различных внешних воздействиях.

*Ключевые слова:* Нелинейные системы, аналитическое описание, метод специальных  $K_{ml}$ -функций второго порядка, сегнетоэлектрики, поляризация в электрическом поле.

### Введение

В настоящее время для математического описания и исследования нелинейных свойств многих нелинейных систем применяются различные приближенные и численные методы. Аналитические решения в общем виде, за исключением некоторых специальных случаев, как правило, построить не удастся. Получение таких решений в аналитическом виде имеет большое прикладное значение, так как позволяет существенно снизить вычислительные затраты на необходимое проведение исследований ряда нелинейных зависимостей. Например, в случае таких нелинейных систем и материалов, как сегнетоэлектрики, имеющих в настоящее время огромное значение для различных нанотехнологий, для исследования крайне важной зависимости поляризации от внешнего электрического поля (и других воздействий) приходится применять довольно длительные вычислительные процедуры, причем с ограниченной точностью, как для термодинамического описания [1], так и для молекулярного моделирования [2,3].

В то же время, проведены исследования, позволяющие получать такие аналитические описания нелинейных систем и аналитически исследовать различные

нелинейные зависимости в этих системах. Делать это позволяет метод специальных  $K_{ml}$ -функций второго порядка [4–6]. Ниже мы подробно рассмотрим применение этого метода к сегнетоэлектрическим поливинилиденфторидным (ПВДФ–ТрФЭ) сополимерам, с соотношением процентного состава компонентов ВДФ:ТрФЭ (70:30). Данный материал выбран нами в качестве примера, так как он имеет наиболее широкое практическое применение и по нему есть много экспериментальных данных (по необходимым нам для конкретных расчетов коэффициентам), а также данных по сопоставимому компьютерному молекулярному моделированию. Но рассматриваемый подход применим к любым типам сегнетоэлектриков, что и будет продемонстрировано ниже.

## 1. Основные соотношения. Методика анализа

Из теории сегнетоэлектриков известно нелинейное выражение, которое связывает величину поляризации в сегнетоэлектрике, напряженность внешнего электрического поля и температуру в окрестности точки фазового перехода [1]

$$E = \alpha_0(T - T_0)P + \beta P^3 + \gamma P^5, \quad (1)$$

где  $E$  – величина напряженности внешнего электрического поля;  $P$  – величина поляризации в сегнетоэлектрике;  $T$  – температура;  $T_0$  – температура Кюри;  $\alpha_0$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  – постоянные коэффициенты, которые определяются опытным путем для каждого сегнетоэлектрика отдельно.

В сегнетоэлектриках могут происходить фазовые переходы первого или второго рода. Для сегнетоэлектриков с фазовыми переходами второго рода (например, нитрит натрия, фторобериллат аммония [1]) коэффициенты  $\alpha_0$ ,  $\beta > 0$ , а  $\gamma = 0$ . Соответственно выражение (1) принимает следующий, более простой вид:

$$E = \alpha_0(T - T_0)P + \beta P^3. \quad (2)$$

Рассмотрим сначала подробнее этот более простой случай.

**1.1. Случай фазового перехода второго рода.** Запишем выражение (2) в виде полинома

$$\beta P^3 + \alpha_0(T - T_0)P - E = 0. \quad (3)$$

Разделим обе части уравнения на  $\beta$  и введем следующие обозначения:

$$P^3 + \frac{\alpha_0}{\beta}(T - T_0)P - \frac{E}{\beta} = 0; \quad (4)$$

$$s_2 = \frac{\alpha_0}{\beta}(T - T_0), \quad s_3 = -\frac{E}{\beta}. \quad (5)$$

В результате получим полином третьей степени

$$P^3 + s_2P + s_3 = 0. \quad (6)$$

Выразить поляризацию  $P$  как функцию от напряженности внешнего поля  $E$  в этом случае можно двумя способами.

**1.1.1. Решение методом Кардано.** Первый метод решения – это классическая формула Кардано. В этом случае решение имеет следующий известный вид:

$$P = \sqrt[3]{-\frac{s_3}{2} + \sqrt{\frac{s_3^2}{4} + \frac{s_2^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{s_3}{2} - \sqrt{\frac{s_3^2}{4} + \frac{s_2^3}{27}}}. \quad (7)$$

Из полученных значений берем только те, которые удовлетворяют условию

$$\alpha = \sqrt[3]{-\frac{s_3}{2} + \sqrt{\frac{s_3^2}{4} + \frac{s_2^3}{27}}}, \quad \beta = \sqrt[3]{-\frac{s_3}{2} - \sqrt{\frac{s_3^2}{4} + \frac{s_2^3}{27}}}, \quad (8)$$

$$\alpha\beta = -\frac{s_2}{3}.$$

**1.1.2. Решение методом  $K_{ml}$ -функций.** Второй метод решения – это метод  $K_{ml}$ -функций [4–6]. Используя  $K_{ml}$ -функции первого порядка, решение полинома (3) можно получить в виде одного ряда

$$P_j = \sqrt[3]{-s_3} K_{31}(\alpha_{31}), \quad j = 1, 2, 3, \quad (9)$$

$$\alpha_{31} = -\frac{1}{3} s_2 (-s_3)^{-\frac{2}{3}}$$

( $\alpha_{31}$  – параметр, в который входят коэффициенты и показатели степеней членов полинома) или в виде двух рядов

$$P_j = \sqrt[2]{-s_2} K'_{31}(\beta_{31}), \quad j = 1, 2, \quad (10)$$

$$\beta_{31} = -\frac{1}{2} s_3 (-s_2)^{-\frac{3}{2}}$$

и

$$P_j = -\frac{s_3}{s_2} K''_{31}(\gamma_{31}), \quad j = 3, \quad (11)$$

$$\gamma_{31} = -1 (-s_3)^2 (s_2)^{-3}$$

( $\beta_{31}$  и  $\gamma_{31}$  также являются параметрами, в которые входят коэффициенты и показатели степеней членов полинома).

Функции  $K_{31}(\alpha_{31})$ ,  $K'_{31}(\beta_{31})$ ,  $K''_{31}(\gamma_{31})$  представляются бесконечными степенными рядами от параметров  $\alpha_{31}$ ,  $\beta_{31}$ ,  $\gamma_{31}$ , соответственно. Эти ряды имеют следующий вид:

$$K_{31}(\alpha_{31}) = 1 + \alpha_{31} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\alpha_{31}^n}{n!} \prod_{i=1}^{n-1} (n+1-3i),$$

$$K'_{31}(\beta_{31}) = 1 + \beta_{31} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\beta_{31}^n}{n!} \prod_{i=1}^{n-1} ((i-n)+1-3i), \quad (12)$$

$$K''_{31}(\gamma_{31}) = 1 + \gamma_{31} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\gamma_{31}^n}{n!} \prod_{i=1}^{n-1} (3n+1-1i).$$

Радиусы сходимости этих рядов, соответственно

$$\begin{aligned} R_{31} &= 0.6299604, \\ R'_{31} &= 0.1924501, \\ R''_{31} &= 0.1481481. \end{aligned} \quad (13)$$

Для всех  $|\alpha_{31}| \leq R_{31}$  ряд  $K_{31}(\alpha_{31})$  сходится и дает возможность получить три корня полинома (4). Как только начинает выполняться условие  $|\alpha_{31}| > R_{31}$ , сходимость ряда  $K_{31}(\alpha_{31})$  прекращается и начинают сходиться ряды  $K'_{31}(\beta_{31})$  и  $K''_{31}(\gamma_{31})$ . При этом выполняются условия  $|\beta_{31}| \leq R'_{31}$  и  $|\gamma_{31}| \leq R''_{31}$ .

Ряд  $K'_{31}(\beta_{31})$  дает возможность получить два корня, а ряд  $K''_{31}(\gamma_{31})$  – один корень.

Оба приведенных выше метода дают одинаковые результаты. Используя их, можно получить аналитическую зависимость поляризации  $P$  от напряженности поля  $E$ . Получив аналитическую зависимость  $P(E)$ , можем получить затем и аналитическую связь между диэлектрической восприимчивостью  $\varepsilon$  и напряженностью поля  $E$ , диэлектрической проницаемостью  $\varepsilon$  (или обратной диэлектрической проницаемостью) и температурой  $T$ , полной поляризацией  $P$  и температурой  $T$  (при различных значениях напряженности поля  $E$ ). Получение всех этих нелинейных зависимостей, характеризующих конкретный сегнетоэлектрический материал, крайне важны для различных технических применений.

Итак, из вышеприведенных результатов видно, что, используя формулу Кардано либо  $K_{ml}$ -функции первого порядка, можно достаточно просто получить аналитическую зависимость  $P(E)$ . Но это достаточно простой случай, когда еще возможно получить аналитическое выражение решения по формуле Кардано. В случае фазовых переходов первого рода это уже невозможно. И вот тут метод  $K_{ml}$ -функций второго порядка позволяет получить аналитическое описание процессов поляризации в сегнетоэлектрике.

**1.2. Случай фазового перехода первого рода.** Для сегнетоэлектриков, в которых имеют место фазовые переходы первого рода (триглицинсульфат, колеманит, кислый сульфат аммония, сегнетова соль [2]), задача нахождения аналитической зависимости  $P(E)$  усложняется. Это объясняется тем, что в уравнении (1) ни один из коэффициентов  $\alpha_0$ ,  $\beta$  и  $\gamma$  теперь не равен нулю. Поэтому уравнение (1) принимает следующий вид:

$$\alpha_0(T - T_0)P + \beta P^3 + \gamma P^5 - E = 0, \quad (14)$$

причем  $\alpha_0$  и  $\gamma$  больше нуля, а  $\beta$  меньше нуля. Преобразуем выражение (14) и запишем его по степеням  $P$

$$P^5 + \frac{\beta}{\gamma}P^3 + \frac{\alpha_0(T - T_0)}{\gamma}P - \frac{E}{\gamma} = 0. \quad (15)$$

Введем следующие обозначения:

$$s_2 = \frac{\beta}{\gamma}; \quad s_4 = \frac{\alpha_0(T - T_0)}{\gamma}; \quad s_5 = -\frac{E}{\gamma}. \quad (16)$$

Тогда уравнение (14) примет следующий вид:

$$P^5 + s_2P^3 + s_4P + s_5 = 0. \quad (17)$$

В уравнении (17) в коэффициент  $s_5$  входит напряженность внешнего поля  $E$ , поэтому для получения аналитической зависимости  $P(E)$  необходимо сделать обращение полинома (17), то есть найти функцию  $P(s_2, s_4, s_5)$ . Эта задача может быть решена при помощи  $K_{ml}$ -функций второго порядка [4–6].

**1.2.1. Решение задачи с помощью  $K_{ml}$ -функций второго порядка.** Запишем в общем виде четырехчленный полином (частным случаем которого будет являться наш полином (17)):

$$P^m + s_{m-l_1} P^{l_1} + s_{m-l_2} P^{l_2} + s_m = 0. \quad (18)$$

В выражении (18) приняты следующие обозначения:  $P$  – неизвестная исследуемая переменная;  $s_{m-l_1}, s_{m-l_2}, s_m$  – коэффициенты полинома, в общем случае комплексные числа;  $m, l_1, l_2$  – показатели степеней, целые положительные числа  $m > l_1 > l_2$ .

В общем виде ряд, представляющий  $K_{ml}$ -функции второго порядка, выглядит так [4–6]:

$$K_{m,l_1,l_2}(\alpha_{ml_1}, \alpha_{ml_2}) = 1 + \sum_{i=1}^2 \alpha_{ml_i} + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n-1} \sum_{\substack{r_1, r_2=0; \\ r_1+r_2=n}}^n \prod_{i=1}^2 \frac{\alpha_{ml_i}^{r_i}}{r_i!} \prod_{v=1}^{n-1} (vm-1 - \sum_{i=1}^2 l_i r_i). \quad (19)$$

А корни полинома (18) через функции (19) выражаются следующим образом:

$$P_j = \sqrt[m]{-s_m} K_{m,l_1,l_2}(\alpha_{ml_1}, \alpha_{ml_2}), \quad j = 1, 2, \dots, m. \quad (20)$$

В формулах (19) и (20) приняты следующие обозначения:

$$\alpha_{m,l_1} = \frac{s_{m-l_1} (\sqrt[m]{-s_m})^{l_1}}{m s_m}, \quad \alpha_{m,l_2} = \frac{s_{m-l_2} (\sqrt[m]{-s_m})^{l_2}}{m s_m}. \quad (21)$$

где  $\alpha_{ml_1}, \alpha_{ml_2}$  – обобщенные параметры, сформированные из коэффициентов полинома (18) и его степеней.

Степенной ряд (19) представляет собой бесконечный ряд двух комплексных переменных, который сходится в некоторой области, определяемой сопряженными радиусами сходимости  $r_{ml_1}$  и  $r_{ml_2}$ . Для того чтобы ряд (19) сходился, необходимо и достаточно выполнения условия

$$|\alpha_{ml_1}| \leq r_{ml_1} \quad \text{и} \quad |\alpha_{ml_2}| \leq r_{ml_2} \quad (22)$$

Как только условие (22) нарушается и абсолютная величина одного из параметров превышает свой радиус сходимости, ряд (19) становится расходящимся. Таким образом возникает задача построения аналитического продолжения функции, которая выражается рядом (19) в области (22), за пределы этой области. Для решения этой задачи преобразуем полином (18). Разделим его почленно на  $s_{m-l_1}$ . В результате получим

$$\frac{1}{s_{m-l_1}} P^m + P^{l_1} + \frac{s_{m-l_2}}{s_{m-l_1}} P^{l_2} + \frac{s_m}{s_{m-l_1}} = 0, \quad (23)$$

$$P^{l_1} + \frac{1}{s_{m-l_1}} P^m + \frac{s_{m-l_2}}{s_{m-l_1}} P^{l_2} + \frac{s_m}{s_{m-l_1}} = 0. \quad (24)$$

Легко заметить, что уравнение (24) можно получить из исходного полинома (18) путем подстановок

$$\begin{aligned} s_m &\rightarrow \frac{s_m}{s_{m-l_1}}, \\ s_{m-l_1} &\rightarrow \frac{1}{s_{m-l_1}}, \\ s_{m-l_2} &\rightarrow \frac{s_{m-l_2}}{s_{m-l_1}} \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} m &\rightarrow l_1, \\ l_1 &\rightarrow m, \\ l_2 &\rightarrow l_2. \end{aligned} \tag{25}$$

Соответственно и следующий ряд, представляющий  $K_{ml}$ -функцию за пределами области (22), получается из ряда (19) путем подстановок (25). В результате применения подстановок, аналогичных (25), мы получаем серию выражений для нахождения корней полинома (18) при любых значениях коэффициентов, принадлежащих полю комплексных чисел. В зависимости от соотношения коэффициентов полинома (18), его корни будут выражены либо одним рядом (26)

$$P_j = \sqrt[m]{-s_m} K_{ml_1, ml_2}(\alpha_{ml_1}, \alpha_{ml_2}), \quad j = 1, 2, \dots, m. \tag{26}$$

либо первой группой из двух рядов (27):

$$\left\{ \begin{aligned} P_j &= \sqrt[l_1]{-\frac{s_m}{s_{m-l_1}}} K_{l_1, m, l_2}(\alpha_{l_1 m}, \alpha_{l_1 l_2}), \quad j = 1, 2, \dots, l_1, \\ P_j &= \sqrt[m-l_1]{-s_{m-l_1}} K_{m-l_1, -l_1, l_2-l_1}(\alpha_{m-l_1, -l_1}, \alpha_{m-l_1, l_2-l_1}), \quad j = l_1 + 1, l_1 + 2, \dots, m, \end{aligned} \right\} \tag{27}$$

либо второй группой из двух рядов (28):

$$\left\{ \begin{aligned} P_j &= \sqrt[l_2]{-\frac{s_m}{s_{m-l_2}}} K_{l_2, m, l_1}(\alpha_{l_2 m}, \alpha_{l_2 l_1}), \quad j = 1, 2, \dots, l_2, \\ P_j &= \sqrt[m-l_2]{-s_{m-l_2}} K_{m-l_2, -l_2, l_1-l_2}(\alpha_{m-l_2, -l_2}, \alpha_{m-l_2, l_1-l_2}), \quad j = l_2 + 1, l_2 + 2, \dots, m, \end{aligned} \right\} \tag{28}$$

либо одной группой из трех рядов (29):

$$\left\{ \begin{aligned} P_j &= \sqrt[m-l_1]{-s_{m-l_1}} K_{m-l_1, -l_1, l_2-l_1}(\alpha_{m-l_1, -l_1}, \alpha_{m-l_1, l_2-l_1}), \quad j = 1, 2, \dots, m-l_1, \\ P_j &= \sqrt[l_1-l_2]{-\frac{s_{m-l_2}}{s_{m-l_1}}} K_{l_1-l_2, m-l_2, -l_2}(\alpha_{l_1-l_2, m-l_2}, \alpha_{l_1-l_2, -l_2}), \quad j = m-l_1+1, \dots, m-l_2, \\ P_j &= \sqrt[l_2]{-\frac{s_m}{s_{m-l_2}}} K_{l_2, m, l_1}(\alpha_{l_2 m}, \alpha_{l_2 l_1}), \quad j = m-l_2+1, \dots, m. \end{aligned} \right\} \tag{29}$$

Все вместе – (26), (27), (28) и (29) представляют полную  $K_{ml}$ -функцию второго порядка. Области сходимости для рядов (26)–(29) находятся из условия наличия общего корня у полинома и его производной и в общем случае достаточно сложны. Поэтому будем находить такие выражения для конкретных показателей степеней.

Вернемся к частному случаю, а именно к полиному (17). В этом полиноме

$$\begin{aligned} m = 5, \quad l_1 = 3, \quad l_2 = 1, \\ s_{m-l_1} = s_2, \quad s_{m-l_2} = s_4, \quad s_m = s_5. \end{aligned} \quad (30)$$

Запишем в развернутой форме все возможные группы представлений для полинома (17).

Первая группа состоит из одного ряда:

$$\begin{aligned} P_j = \sqrt[5]{-s_5} [1 + (\alpha_{ml_1} + \alpha_{ml_2}) - \\ - \frac{1}{2!} [(m - (2l_1 + 1))\alpha_{ml_1}^2 + 2(m - (l_1 + l_2 + 1))\alpha_{ml_1}\alpha_{ml_2} + \\ + (m - (2l_2 + 1))\alpha_{ml_2}^2] + \frac{1}{3!} [(m - (3l_1 + 1))(2m - (3l_1 + 1))\alpha_{ml_1}^3 + \\ + 3(m - (2l_1 + l_2 + 1))(2m - (2l_1 + l_2 + 1))\alpha_{ml_1}^2\alpha_{ml_2} + \\ + 3(m - (l_1 + 2l_2 + 1))(2m - (l_1 + 2l_2 + 1))\alpha_{ml_1}\alpha_{ml_2}^2 + \\ + (m - (3l_2 + 1))(2m - (3l_2 + 1))\alpha_{ml_2}^3] - \dots, \end{aligned}$$

где

$$\alpha_{ml_1} = \frac{s_2(-s_5)^{\frac{l_1}{m}}}{ms_5}, \quad \alpha_{ml_2} = \frac{s_4(-s_5)^{\frac{l_2}{m}}}{ms_5}, \quad j = 1, 2, \dots, m. \quad (31)$$

Вторая группа состоит из двух рядов:

$$\begin{aligned} P_j = \sqrt[2]{-s_2} [1 + (\alpha_{m-l_1, -l_1} + \alpha_{m-l_1, l_2-l_1}) - \frac{1}{2!} [((m - l_1) - (-2l_1 + 1))\alpha_{m-l_1, -l_1}^2 + \\ + 2((m - l_1) - (-l_1 + (l_2 - l_1) + 1))\alpha_{m-l_1, -l_1}\alpha_{m-l_1, l_2-l_1} + \\ + ((m - l_1) - (2(l_2 - l_1) + 1))\alpha_{m-l_1, l_2-l_1}^2] + \\ + \frac{1}{3!} [((m - l_1) - (-3l_1 + 1))(2(m - l_1) - (-3l_1 + 1))\alpha_{m-l_1, -l_1}^3 + \\ + 3((m - l_1) - (-2l_1 + (l_2 - l_1) + 1))(2(m - l_1) - \\ - (-2l_1 + (l_2 - l_1) + 1))\alpha_{m-l_1, -l_1}^2\alpha_{m-l_1, l_2-l_1} + \\ + 3((m - l_1) - (-l_1 + 2(l_2 - l_1) + 1))(2(m - l_1) - \\ - (-l_1 + 2(l_2 - l_1) + 1))\alpha_{m-l_1, -l_1}\alpha_{m-l_1, l_2-l_1}^2 + \\ + ((m - l_1) - (3(l_2 - l_1) + 1))(2(m - l_1) - (3(l_2 - l_1) + 1))\alpha_{m-l_1, l_2-l_1}^3] - \dots, \end{aligned}$$

где

$$\alpha_{m-l_1, -l_1} = \frac{s_5(-s_2)^{-\frac{l_1}{m-l_1}}}{(m-l_1)s_2}, \quad \alpha_{m-l_1, l_2-l_1} = \frac{s_4(-s_3)^{\frac{l_2-l_1}{m-l_1}}}{(m-l_1)s_2}, \quad j = 1, 2, \dots, m - l_1;$$

$$\begin{aligned}
P_j = & \sqrt[3]{\frac{-s_5}{s_2}} [1 + (\alpha_{l_1 m} + \alpha_{l_1 l_2}) - \frac{1}{2!} [(l_1 - (2m + 1))\alpha_{l_1 m}^2 + \\
& + 2(l_1 - (m + l_2 + 1))\alpha_{l_1 m}\alpha_{l_1 l_2} + (l_1 - (2l_2 + 1))\alpha_{l_1 l_2}^2] + \\
& + \frac{1}{3!} [(l_1 - (3m + 1))(2l_1 - (3m + 1))\alpha_{l_1 m}^3 + \\
& + 3(l_1 - (2m + l_2 + 1))(2l_1 - (2m + l_2 + 1))\alpha_{l_1 m}^2\alpha_{l_1 l_2} + \\
& + 3(l_1 - (m + 2l_2 + 1))(2l_1 - (m + 2l_2 + 1))\alpha_{l_1 m}^2\alpha_{l_1 l_2} + \\
& + (l_1 - (3l_2 + 1))(2l_1 - (3l_2 + 1))^3\alpha_{l_1 l_2}^3] - \dots,
\end{aligned}$$

где

$$\alpha_{l_1 m} = -\frac{\left(\frac{-s_5}{s_2}\right)^{\frac{m-l_1}{l_1}}}{l_1 s_2}, \quad \alpha_{l_1 l_2} = -\frac{s_4 \left(\frac{-s_5}{s_2}\right)^{\frac{l_2-l_1}{l_1}}}{l_1 s_2}, \quad j = 1, 2, \dots, l_1. \quad (32)$$

Третья группа, состоит из двух рядов:

$$\begin{aligned}
P_j = & \sqrt[4]{-s_4} [1 + (\alpha_{m-l_2, l_1-l_2} + \alpha_{m-l_2, -l_2}) - \\
& - \frac{1}{2!} [((m-l_2) - (2(l_1-l_2) + 1))\alpha_{m-l_2, l_1-l_2}^2 + \\
& + 2((m-l_2) - ((l_1-l_2) + (-l_2) + 1))\alpha_{m-l_2, l_1-l_2}\alpha_{m-l_2, -l_2} + \\
& + ((m-l_2) - (2(-l_2) + 1))\alpha_{m-l_2, -l_2}^2] + \\
& + \frac{1}{3!} [((m-l_2) - (3(l_1-l_2) + 1))(2(m-l_2) - (3(l_1-l_2) + 1))\alpha_{m-l_2, l_1-l_2}^3 + \\
& + 3((m-l_2) - (2(l_1-l_2) + (-l_2) + 1))(2(m-l_2) - \\
& - (2(l_1-l_2) + (-l_2) + 1))\alpha_{m-l_2, l_1-l_2}^2\alpha_{m-l_2, -l_2} + \\
& + 3((m-l_2) - ((l_1-l_2) + 2(-l_2) + 1))(2(m-l_2) - \\
& - ((l_1-l_2) + 2(-l_2) + 1))\alpha_{m-l_2, l_1-l_2}\alpha_{m-l_2, -l_2}^2 + \\
& + ((m-l_2) - (3(-l_2) + 1))(2(m-l_2) - (3(-l_2) + 1))\alpha_{m-l_2, -l_2}^3] - \dots,
\end{aligned}$$

где

$$\alpha_{m-l_2, l_1-l_2} = \frac{s_2 (-s_4)^{\frac{l_1-l_2}{m-l_2}}}{(m-l_2)s_4}, \quad \alpha_{m-l_2, -l_2} = \frac{s_5 (-s_4)^{-\frac{l_2-l_2}{m-l_2}}}{(m-l_2)s_4}, \quad j = 1, 2, \dots, m-l_2; \quad (33)$$

$$\begin{aligned}
P_j = & \frac{-s_5}{s_4} [1 + (\alpha_{l_2 l_1} + \alpha_{l_2 m}) - \frac{1}{2!} [(l_2 - (2l_1 + 1)) \alpha_{l_2 l_1}^2 + \\
& + 2(l_2 - (l_1 + m + 1)) \alpha_{l_2 l_1} \alpha_{l_2 m} + (l_2 - (2m + 1)) \alpha_{l_2 m}^2] + \\
& + \frac{1}{3!} [(l_2 - (3l_1 + 1))(2l_2 - (3l_1 + 1)) \alpha_{l_2 l_1}^3 + \\
& + 3(l_2 - (2l_1 + m + 1))(2l_2 - (2l_1 + m + 1)) \alpha_{l_2 l_1}^2 \alpha_{l_2 m} + \\
& + 3(l_2 - (l_1 + 2m + 1))(2l_2 - (l_1 + 2m + 1)) \alpha_{l_2 l_1} \alpha_{l_2 m}^2 + \\
& + (l_2 - (3m + 1))(2l_2 - (3m + 1)) \alpha_{l_2 m}^3] - \dots,
\end{aligned}$$

где

$$\alpha_{l_2 l_1} = -\frac{s_2 \left( -\frac{s_5}{s_4} \right)^{\frac{l_1 - l_2}{l_2}}}{l_2 s_4}, \quad \alpha_{l_2 m} = -\frac{\left( -\frac{s_5}{s_4} \right)^{\frac{m - l_2}{l_2}}}{l_2 s_4}, \quad j = 1, 2, \dots, l_2.$$

Четвертая группа состоит из трех рядов:

$$\begin{aligned}
P_j = & \sqrt[3]{-s_2} [1 + (\alpha_{m-l_1, -l_1} + \alpha_{m-l_1, l_2-l_1}) - \frac{1}{2!} [((m-l_1) - (-2l_1+1)) \alpha_{m-l_1, -l_1}^2 + \\
& + 2((m-l_1) - (-l_1 + (l_2-l_1) + 1)) \alpha_{m-l_1, -l_1} \alpha_{m-l_1, l_2-l_1} + \\
& + ((m-l_1) - (2(l_2-l_1) + 1)) \alpha_{m-l_1, l_2-l_1}^2] + \\
& + \frac{1}{3!} [((m-l_1) - (-3l_1+1))(2(m-l_1) - (-3l_1+1)) \alpha_{m-l_1, -l_1}^3 + \\
& + 3((m-l_1) - (-2l_1 + (l_2-l_1) + 1))(2(m-l_1) - \\
& - (-2l_1 + (l_2-l_1) + 1)) \alpha_{m-l_1, -l_1}^2 \alpha_{m-l_1, l_2-l_1} + \\
& + 3((m-l_1) - (-l_1 + 2(l_2-l_1) + 1))(2(m-l_1) - \\
& - (-l_1 + 2(l_2-l_1) + 1)) \alpha_{m-l_1, -l_1} \alpha_{m-l_1, l_2-l_1}^2 + \\
& + ((m-l_1) - (3(l_2-l_1) + 1))(2(m-l_1) - (3(l_2-l_1) + 1)) \alpha_{m-l_1, l_2-l_1}^3] - \dots,
\end{aligned}$$

где

$$\alpha_{m-l_1, -l_1} = \frac{s_5 (-s_2)^{-\frac{l_1}{m-l_1}}}{(m-l_1) s_2}, \quad \alpha_{m-l_1, l_2-l_1} = \frac{s_4 (-s_3)^{\frac{l_2-l_1}{m-l_1}}}{(m-l_1) s_2}, \quad j = 1, 2, \dots, m-l_1;$$

$$\begin{aligned}
P_j = & \sqrt[2]{-\frac{s_4}{s_2}} [1 + (\alpha_{l_1-l_2, m-l_2} + \alpha_{l_1-l_2, -l_2}) - \\
& - \frac{1}{2!} [((l_1 - l_2) - (2(m - l_2) + 1)) \alpha_{l_1-l_2, m-l_2}^2 + \\
& + 2((l_1 - l_2) - ((m - l_2) + (-l_2) + 1)) \alpha_{l_1-l_2, m-l_2} \alpha_{l_1-l_2, -l_2} + \\
& + ((l_1 - l_2) - (2(-l_2) + 1)) \alpha_{l_1-l_2, -l_2}^2] + \\
& + \frac{1}{3!} [((l_1 - l_2) - (3(m - l_2) + 1))(2(l_1 - l_2) - (3(m - l_2) + 1)) \alpha_{l_1-l_2, m-l_2}^3 + \\
& + 3((l_1 - l_2) - (2(m - l_2) + (-l_2) + 1))(2(l_1 - l_2) - \\
& - (2(m - l_2) + (-l_2) + 1)) \alpha_{l_1-l_2, m-l_2}^2 \alpha_{l_1-l_2, -l_2} + \\
& + 3((l_1 - l_2) - ((m - l_2) + 2(-l_2) + 1))(2(l_1 - l_2) - \\
& - ((m - l_2) + 2(-l_2) + 1)) \alpha_{l_1-l_2, m-l_2} \alpha_{l_1-l_2, -l_2}^2 + \\
& + ((l_1 - l_2) - (3(-l_2) + 1))(2(l_1 - l_2) - (3(-l_2) + 1))^3 \alpha_{l_1-l_2, -l_2}] - \dots,
\end{aligned}$$

где

$$\alpha_{l_1-l_2, m-l_2} = \frac{\left(-\frac{s_4}{s_2}\right)^{\frac{m-l_2}{l_1-l_2}}}{(l_1-l_2)s_4}, \quad \alpha_{l_1-l_2, -l_2} = \frac{s_5 \left(-\frac{s_4}{s_2}\right)^{\frac{-l_2}{l_1-l_2}}}{(l_1-l_2)s_4}, \quad j = 1, 2, \dots, l_1 - l_2;$$

$$\begin{aligned}
P_j = & \frac{-s_5}{s_4} [1 + (\alpha_{l_2 l_1} + \alpha_{l_2 m}) - \\
& - \frac{1}{2!} [(l_2 - (2l_1 + 1)) \alpha_{l_2 l_1}^2 + 2(l_2 - (l_1 + m + 1)) \alpha_{l_2 l_1} \alpha_{l_2 m} + \\
& + (l_2 - (2m + 1)) \alpha_{l_2 m}^2] + \frac{1}{3!} [(l_2 - (3l_1 + 1))(2l_2 - (3l_1 + 1)) \alpha_{l_2 l_1}^3 + \\
& + 3(l_2 - (2l_1 + m + 1))(2l_2 - (2l_1 + m + 1)) \alpha_{l_2 l_1}^2 \alpha_{l_2 m} + \\
& + 3(l_2 - (l_1 + 2m + 1))(2l_2 - (l_1 + 2m + 1)) \alpha_{l_2 l_1} \alpha_{l_2 m}^2 + \\
& + (l_2 - (3m + 1))(2l_2 - (3m + 1)) \alpha_{l_2 m}^3] - \dots,
\end{aligned}$$

где

$$\alpha_{l_2 l_1} = -\frac{s_2 \left(-\frac{s_5}{s_4}\right)^{\frac{l_1-l_2}{l_2}}}{l_2 s_4}, \quad \alpha_{l_2 m} = -\frac{\left(-\frac{s_5}{s_4}\right)^{\frac{m-l_2}{l_2}}}{l_2 s_4}, \quad j = 1, 2, \dots, l_2. \quad (34)$$

Области сходимости рядов (31)–(34) определяем из следующего выражения:

$$108p_5^2 p_2^5 + 16p_4^3 p_2^4 - 900p_4 p_5^2 p_2^3 - 128p_4^4 p_2^2 + 2000p_2 p_4^2 p_5^2 + 3125p_5^4 + 256p_4^5 = 0. \quad (35)$$

Таким образом, используя группы рядов (31)–(34) и выражение для нахождения областей сходимости (35), мы можем аналитически определить величину поляризации в сегнетоэлектрике при любых значениях величины напряженности внешнего электрического поля.

## 2. Применение полученных аналитических зависимостей

Покажем на примере поливинилиденфторидного (ПВДФ–ТрФЭ) сополимера с соотношением процентного состава компонентов ВДФ:ТрФЭ (70:30), как работает рассмотренный аналитический метод.

Этот сегнетоэлектрик имеет фазовые переходы первого рода и следующие численные значения для коэффициентов:

$$\begin{aligned}\alpha &= \alpha_0(T - T_0) = 7.5 \cdot 10^7 (T - 303), \\ \beta &= (-1.1 \pm 0.3) \cdot 10^{12}, \\ \gamma &= (6.2 \pm 1.5) \cdot 10^{13}.\end{aligned}\tag{36}$$

Расчет проводим в следующих температурных диапазонах:

$$\begin{aligned}\Delta T_1 &= 2 \dots 5 \text{ К}, \\ \Delta T_2 &= 5 \dots 10 \text{ К}, \\ \Delta T_3 &= 10 \dots 50 \text{ К}, \\ \Delta T_4 &= 50 \dots 80 \text{ К}, \\ \Delta T_5 &= 80 \dots 117 \text{ К}.\end{aligned}\tag{37}$$

Напряженность внешнего поля меняем в пределах

$$E = -10^{10} \dots 10^{10} \text{ [В/м]}.$$

Запишем полином, который связывает величину поляризации и величину напряженности внешнего электрического поля

$$P^5 + s_2 P^3 + s_4 P + s_5 = 0,\tag{38}$$

где

$$\begin{aligned}s_2 &= \frac{\beta}{\gamma} = \frac{(-1.1 \cdot 10^{12})}{6.2 \cdot 10^{13}} = -0.0177, \\ s_4 &= \frac{\alpha_0(T - T_0)}{\gamma} = \frac{7.53 \cdot 10^7 (T - 303)}{6.2 \cdot 10^{13}} = 1.2145 \cdot 10^{-6} (T - 303), \\ s_5 &= -\frac{E}{\gamma} = -\frac{E}{6.2 \cdot 10^{13}} = -1.613 \cdot 10^{-14} E.\end{aligned}\tag{39}$$

Коэффициенты принимают следующие значения.

Для  $\Delta T_1 = 2 \text{ К}$

$$\begin{aligned}s_2 &= -0.0177, \\ s_4 &= 2.429 \cdot 10^{-6}, \\ s_5 &= -1.613 \cdot 10^{-14} E.\end{aligned}\tag{40}$$

Для  $\Delta T_1 = 5 \text{ К}$

$$\begin{aligned}s_2 &= -0.0177, \\ s_4 &= 6.0725 \cdot 10^{-6}, \\ s_5 &= -1.613 \cdot 10^{-14} E.\end{aligned}\tag{41}$$

Для  $\Delta T_1 = 10$  К

$$\begin{aligned} s_2 &= -0.0177, \\ s_4 &= 12.145 \cdot 10^{-6}, \\ s_5 &= -1.613 \cdot 10^{-14} E. \end{aligned} \quad (42)$$

Для  $\Delta T_1 = 50$  К

$$\begin{aligned} s_2 &= -0.0177, \\ s_4 &= 60.725 \cdot 10^{-6}, \\ s_5 &= -1.613 \cdot 10^{-14} E. \end{aligned} \quad (43)$$

Для  $\Delta T_1 = 80$  (°К)

$$\begin{aligned} s_2 &= -0.0177, \\ s_4 &= 97.16 \cdot 10^{-6}, \\ s_5 &= -1.613 \cdot 10^{-14} E. \end{aligned} \quad (44)$$

Для  $\Delta T_1 = 117$  К

$$\begin{aligned} s_2 &= -0.0177, \\ s_4 &= 142.096 \cdot 10^{-6}, \\ s_5 &= -1.613 \cdot 10^{-14} E. \end{aligned} \quad (45)$$

• Для коэффициентов (40) при  $\Delta T_1 = 2$  К определяем из выражения (35), какие ряды сходятся при различных значениях напряженности  $E$ . Получаем следующие области для рядов:

$$E = (0 \dots 6.798e5) \text{ В/м} \rightarrow \text{сходятся ряды } (m - l_1), (l_1 - l_2), (l_2);$$

$$E = (6.798e5 \dots 4.648e8) \text{ В/м} \rightarrow \text{сходятся ряды } (m - l_1), (l_1);$$

$$E = (4.648e8 \dots 1.00e10) \text{ В/м} \rightarrow \text{сходится ряд } m.$$

В среде MATLAB была составлена программа для нахождения суммы рядов (31)–(34). Результаты расчета сводим в табл. 1.

При  $E < 0$  значения корней симметричны относительно начала координат.

• Для коэффициентов (41) при  $\Delta T_2 = 5$  К определяем из выражения (35), какие ряды сходятся при различных значениях напряженности  $E$ . Получаем следующие области для рядов:

$$E = (0 \dots 2.6927e6) \text{ В/м} \rightarrow \text{сходятся ряды } (m - l_1), (l_1 - l_2), (l_2);$$

$$E = (2.6927e6 \dots 4.41689e8) \text{ В/м} \rightarrow \text{сходятся ряды } (m - l_1), (l_1);$$

$$E = (4.41689e8 \dots 1.0e10) \text{ В/м} \rightarrow \text{сходится ряд } m.$$

Результаты расчета сведены в табл. 2.

• Для коэффициентов (42) при  $\Delta T_3 = 10$  К определяем из выражения (35), какие ряды сходятся при различных значениях напряженности  $E$ . Получаем следующие области для рядов:

$$E = (0 \dots 7.64185e6) \text{ В/м} \rightarrow \text{сходятся ряды } (m - l_1), (l_1 - l_2), (l_2);$$

$$E = (7.64185e6 \dots 4.03213e8) \text{ В/м} \rightarrow \text{сходятся ряды } (m - l_1), (l_1);$$

$$E = (4.03213e8 \dots 1.0e10) \text{ В/м} \rightarrow \text{сходится ряд } m.$$

Результат расчета сводим в табл. 3.

• Для коэффициентов (43) при  $\Delta T_4 = 50$  К определяем из выражения (35), какие ряды сходятся при различных значениях напряженности  $E$ . Получаем следующие области для рядов:

$$E = (0 \dots 8.808e7) \text{ В/м} \rightarrow \text{сходятся ряды } (m - l_1), (l_1 - l_2), (l_2);$$

$$E = (8.808e7 \dots 1.0400129e8) \text{ В/м} \rightarrow \text{сходятся ряды } (m - l_1), (l_1);$$

$$E = (1.0400129e8 \dots 1.0e10) \text{ В/м} \rightarrow \text{сходится ряд } m.$$

Результаты расчета сводим в табл. 4.

• Для коэффициентов (44) при  $\Delta T_5 = 80$  К определяем из выражения (35), какие ряды сходятся при различных значениях напряженности  $E$ . Получаем следующие области для рядов:

$$E = (0 \dots 1.081e8) \text{ В/м} \rightarrow \text{сходятся ряды } (m - l_1), (l_1 - l_2), (l_2);$$

$$E = (1.081e8 \dots 1.8359e8) \text{ В/м} \rightarrow \text{сходятся ряды } (m - l_1), (l_1);$$

$$E = (1.8359e8 \dots 1.0e10) \text{ В/м} \rightarrow \text{сходится ряд } m.$$

Результаты расчета сводим в табл. 5.

• Для коэффициентов (45) при  $\Delta T_6 = 117$  К определяем из выражения (35), какие ряды сходятся при различных значениях напряженности  $E$ . Получаем следующие области для рядов:

$$E = (0 \dots 1.0e8) \text{ В/м} \rightarrow \text{сходятся ряды } (m - l_2), (l_2);$$

$$E = (1.0e8 \dots 1.0e10) \text{ В/м} \rightarrow \text{сходится ряд } m.$$

Результаты расчета сводим в табл. 6.

При  $\Delta T_{кр} = 117$  К точки ветвления функции  $P = P(E)$  переходят из области действительных значений в область комплексных значений, поэтому петли гистерезиса на графике  $P = P(E)$  исчезают.

Таблица 1

Зависимость величины поляризации от величины напряженности внешнего электрического поля при  $\Delta T_1 = 2$  К

$E$ (В/м)	1	1e5	6.798e5	1e6	1e7	1e8
Z1	0.132	0.132	0.132	0.132	0.132	0.135
Z2	0.0117	0.0114	0.0068	0.007+	0.011+	0.021+
				+0.003i	+0.016i	+0.038i
Z3	-0.132	-0.132	-0.132	-0.132	-0.132	-0.129
Z4	-0.0117	-0.012	-0.013	-0.014	-0.023	-0.048
Z5	6.64e-9	6.66e-4	0.0068	0.007-	0.011-	0.021-
				-0.003i	-0.016i	-0.038i
$E$ (В/м)	3e8	4e8	4.648e8	5e8	1e9	1e10
Z1	0.139	0.141	0.142	0.143	0.149	0.196
Z2	0.028+	0.03+	0.031+	0.032+	0.037+	0.058+
	+0.055i	+0.061i	+0.063i	+0.064i	+0.079i	+0.14i
Z3	-0.122	-0.115	-0.1028	-0.1+	-0.112+	-0.15+
				+0.012i	+0.035i	+0.09i
Z4	-0.074	-0.087	-0.1028	-0.1-	-0.112-	-0.15-
				-0.012i	-0.035i	-0.09i
Z5	0.028-	0.03-	0.031-	0.032-	0.037-	0.058-
	-0.055i	-0.061i	-0.063i	-0.064i	-0.079i	-0.14i

Таблица 2

Зависимость величины поляризации от величины напряженности  
внешнего электрического поля при  $\Delta T_2 = 5$  К

$E$ В/м	1	1e5	1e6	2.6927e6	1e7	1e8
Z1	0.13	0.131	0.131	0.131	0.132	0.134
Z2	0.0188	0.0185	0.017	0.0107	0.013+ +0.013i	0.022+ +0.03i
Z3	-0.13	-0.13	-0.13	-0.131	-0.13	-0.128
Z4	-0.0188	-0.0188	-0.02	-0.0216	-0.026	-0.05
Z5	2e-9	2e-4	0.0027	0.0107	0.013- -0.013i	0.022- -0.03i
$E$ (В/м)	3e8	4e8	4.416e8	5e8	1e9	1e10
Z1	0.138	0.14	0.141	0.142	0.149	0.1967
Z2	0.029+ +0.05i	0.031+ +0.06i	0.032+ +0.06i	0.032+ +0.06i	0.038+ +0.08i	0.058+ +0.15i
Z3	-0.12	-0.113	-0.1025	-0.1+ +0.014i	-0.11+ +0.035i	-0.157+ +0.09i
Z4	-0.076	-0.09	-0.1025	-0.1- -0.014i	-0.11- -0.035i	-0.157- -0.09i
Z5	0.029- -0.05i	0.031- -0.06i	0.032- -0.06i	0.032- -0.06i	0.038- -0.08i	0.058- -0.15i

Таблица 3

Зависимость величины поляризации от величины напряженности  
внешнего электрического поля при  $\Delta T_3 = 10$  К

$E$ (В/м)	1	1e5	1e6	7.64185e6	3e7	4e7
Z1	0.13	0.13	0.13	0.13	0.131	0.131
Z2	0.026	0.026	0.026	0.015	0.018+ +0.019i	0.019+ 0.023i
Z3	-0.13	-0.13	-0.13	-0.13	-0.129	-0.0129
Z4	-0.0267	-0.0268	-0.027	-0.031	-0.039	-0.041
Z5	1.3e-9	1.3e-4	1.3e-3	0.015	0.018- -0.019i	0.019- -0.023i
$E$ (В/м)	2e8	3e8	4.03213e8	6e8	1e9	1e10
Z1	0.135	0.137	0.139	0.142	0.148	0.196
Z2	0.027+ +0.046i	0.03+ +0.053i	0.032+ +0.058i	0.035+ +0.067i	0.038+ +0.08i	0.058+ +0.147i
Z3	-0.123	-0.117	-0.1019	-0.10+ +0.023i	-0.11+ +0.036i	-0.157+ 0.088i
Z4	-0.067	-0.08	-0.1019	-0.10+ -0.023i	-0.11- -0.036i	-0.157- 0.088i
Z5	0.027- -0.046i	0.03- -0.05i	0.032- -0.058i	0.035- -0.067i	0.038- -0.08i	0.058- -0.147i

Таблица 4

Зависимость величины поляризации от величины напряженности внешнего электрического поля при  $\Delta T_4 = 50$  К

$E$ (В/м)	1	1e6	1e7	8.808e7	1.0400129e8	1e9	1e10
Z1	0.117	0.114	0.115	0.12	0.12	0.142	0.1947
Z2	0.066	0.068	0.066	0.036+ +0.01i	0.036	0.04+ +0.07i	0.06+ +0.14i
Z3	-0.066	-0.068	-0.07	-0.096	-0.104	-0.11+ +0.04i	-0.15+ +0.09i
Z4	-0.117	-0.114	-0.113	-0.096	-0.087	-0.11- -0.04i	-0.15- -0.09i
Z5	2e-10	2e-4	0.0026	0.036- -0.036i	0.036	0.04- -0.07i	0.06- -0.14i

Таблица 5

Зависимость величины поляризации от величины напряженности внешнего электрического поля при  $\Delta T_5 = 80$  К

$E$ (В/м)	1	1e6	1e7	1.081e8	1.8359e8	1e9	1e10
Z1	0.096+ +0.02i	0.096+ +0.02i	0.096+ +0.02i	0.0909	0.108	0.137	0.193
Z2	0.096- -0.02i	0.096- -0.02i	0.096- -0.02i	0.0909	0.048	0.048+ +0.07i	0.06+ 0.14i
Z3	-0.096+ +0.02i	-0.096+ +0.02i	-0.097+ +0.02i	-0.1+ +0.029i	-0.1+ +0.03i	-0.11+ +0.05i	-0.16+ +0.09i
Z4	-0.096- -0.02i	-0.096- -0.02i	-0.097- -0.02i	-0.1- -0.029i	-0.1- -0.03i	-0.11- -0.05i	-0.16- -0.09i
Z5	1.6e-10	1.66e-4	1.66e-3	0.019	0.048	0.048- -0.07i	0.06- -0.14i

Таблица 6

Зависимость величины поляризации от величины напряженности внешнего электрического поля при  $\Delta T_6 = 117$  К

$E$ (В/м)	1	1e6	1e7	1e8	1e9	1e10
Z1	1.13e-10	1.13e-4	1.13e-3	1.15e-2	0.129	0.191
Z2	0.1+ +0.039i	0.1+ +0.039i	0.1+ +0.038i	0.098+ +0.035i	0.054+ +0.06i	0.06+ +0.14i
Z3	-0.1+ +0.039i	-0.1+ +0.039i	-0.1+ +0.039i	-0.1+ +0.04i	-0.12+ +0.05i	-0.16+ +0.09i
Z4	-0.1- -0.039i	-0.1- -0.039i	-0.1- -0.039i	-0.1- -0.04i	-0.12- -0.05i	-0.16- -0.09i
Z5	0.1- -0.039i	0.1- -0.039i	0.1- -0.038i	0.098- -0.035i	0.054- -0.06i	0.06- -0.14i

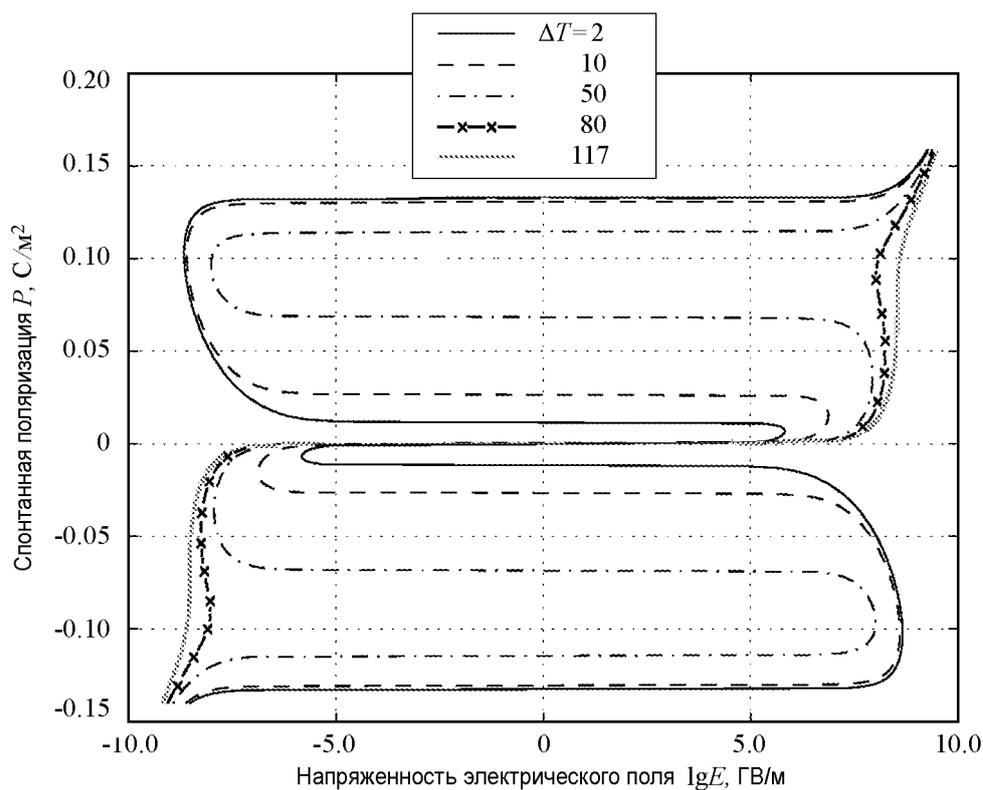


Рис. Зависимость спонтанной поляризации  $P$  от напряженности электрического поля  $E$  при различных температурах  $\Delta T$ , К

Построенные по данным из таблиц графики представлены на рисунке.

Анализ полученных результатов показывает, что в температурном диапазоне от 305 до 383 К в поливинилиденфториде (ПВДФ–ТрФЭ) имеет место явно выраженный фазовый переход первого рода. Происходят значительные скачки величины поляризации и присутствуют устойчивые петли гистерезиса.

В температурном диапазоне от 383 до 420 К также имеет место фазовый переход первого рода, но он имеет менее выраженное проявление.

При температуре около 420 К фазовый переход прекращается и сегнетоэлектрик переходит в параэлектрическую фазу.

Все полученные результаты хорошо совпадают с экспериментальными данными, взятыми из [7].

### Заключение

Полученные в статье результаты, позволяют судить о том, что метод  $K_{nl}$ -функций дает возможность аналитически описывать практически любые нелинейные процессы. Если в достаточно простых случаях, например, при описании фазового перехода второго рода, еще существует альтернатива, то в более сложных

случаях этот метод становится практически единственным методом, который позволяет получить аналитическое решение для сложных нелинейных процессов.

На данном этапе исследований удалось хорошо изучить  $K_{ml}$ -функции первого и второго порядков, для них найдены структуры рядов и области сходимости этих рядов, для функций более высоких порядков еще не выяснены вопросы, связанные с областями сходимости. Развитие теории  $K_{ml}$ -функций высоких порядков позволит аналитически описывать еще более сложные нелинейные процессы. В этом направлении будут продолжены исследования.

Кроме этого, хотелось бы отметить историко-математическое значение  $K_{ml}$ -функций. Большинство процессов, которые мы наблюдаем в природе и в жизни, имеют нелинейный характер. Нелинейные зависимости, с любой разумной точностью, можно описать полиномами разных степеней, ученые это поняли давно. Но если описывать процессы удавалось, то находить решение полиномов в виде аналитических функций долгое время не получалось. Многие крупные ученые, такие как Абель, Клейн, Лагранж и другие, пытались получить такие функции, но в общем виде решить эту задачу не смогли.  $K_{ml}$ -функции, впервые открытые нашим соотечественником Ф.Г. Кравченко, позволяют ответить на все вопросы, связанные с аналитическим решением полиномов. Работы с использованием  $K_{ml}$ -функций будут продолжены и в ближайшем будущем дадут интересные результаты.

#### Библиографический список

1. Струков Б.А., Леванюк А.П. Физические основы сегнетоэлектрических явлений в кристаллах. М.: Наука. Физматлит, 1995. 304 С.
2. Bystrov V.S., Bystrova N.K., Paramonova E.V., Sapronova A.V. Computational nanostructures and physical properties of the ultra-thin ferroelectric Langmuir–Blodgett films // *Ferroelectrics Letters*. 2006. Vol. 33. P. 153.
3. Bystrov V.S., Bystrova N.K., Paramonova E.V., Vizdrik G., Sapronova A.V., Kuehn M., Kliem H. and Kholkin A.L. First-principles calculations of molecular polarization switching in P(VDF-TrFE) ferroelectric thin Langmuir-Blodgett films // *J. Phys. D: Condens.Matter*. 2007. Vol. 19. 456210. doi: 10.1088/0953-8984/19/45/456210.
4. Кравченко Ф.Г. Элементарные  $K_{ml}$ -функции и их свойства // *Вычислительная и прикладная математика* // Межвед. науч. сборник. Киев. 1970. Вып. 2. С. 171.
5. Быстров В.С., Камышилов В.В. Аналитический метод исследования характеристических уравнений // *Электронный журнал «Исследовано в России»*. 2006. Т. 194. С. 1825. <http://zhurnal.ape.relarn.ru/articles/2006/194.pdf>
6. Кравченко Ф.Г., Камышилов В.В. Формальные операции над элементами аналитических функций // *Электронный журнал «Исследовано в России»*. 2006. 195. С. 1835. <http://zhurnal.ape.relarn.ru/articles/2006/195.pdf>
7. Блинов Л.М., Фридкин В.М., Палто С.П., Буне А.В., Даубен П.А., Дюшарм С. Двумерные сегнетоэлектрики // *Успехи физических наук*. 2000. Т. 170, № 3.

Поступила в редакцию 26.03.2014

## ANALYTICAL RESEARCH OF NONLINEAR PROPERTIES OF FERROELECTRICS

*V. V. Kamyshlov, V. S. Bystrov*

Institute of Mathematical Problems of Biology RAS, Pushchino

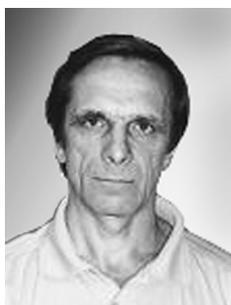
This paper describes a method to obtain an analytical expression for the nonlinear dependence of the ferroelectric polarization on the external electric field. To find analytical dependence, used a special  $K_{ml}$ -function of second order. Listed structure built of series and groups of series representing  $K_{ml}$ -function at any point in the complex plane. Analyzed domain of convergence of series, received as a boundary condition. To show the application of the method, as an example used a ferroelectric polymer polyvinylidene fluoride (PVDF–TrFE). The proposed method can be used for any other ferroelectric or nonlinear systems ordered in the neighborhood of phase transitions under various external influences.

*Keywords:* Nonlinear systems, analytical expression, special  $K_{ml}$ -function of second order, ferroelectric, polarization on the external electric field.



*Камышов Владимир Витальевич* – родился в Новокузнецке (1970), окончил Московский энергетический институт (1996). После окончания МЭИ работал в различных научно-исследовательских организациях. Окончил аспирантуру (2006) в Институте математических проблем биологии. Опубликовал 10 научных статей. Является одним из авторов нового метода обращения алгебраических функций. Область научных интересов: аналитические методы решения нелинейных алгебраических уравнений и систем, методы обращения алгебраических функций.

142290, Московская область, г. Пушкино, ул. Институтская, д. 4  
Институт математических проблем биологии РАН  
E-mail: gatorado@rambler.ru



*Быстров Владимир Сергеевич* – родился в г. Барановичи (1949), окончил физико-математический факультет Латвийского университета (1971). Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук (Ростовский-на-Дону государственный университет, 1984) и доктора физико-математических наук (Латвийский университет, 1993) по физике локальных фазовых образований в полярных средах. С 1991 года работает в Институте математических проблем биологии Пушкинского научного центра РАН (Пушино), является ведущим научным сотрудником, руководителем группы компьютерного моделирования молекулярных наноструктур. С 2006 года также постоянно сотрудничает с Университетом Авейро (Португалия) как приглашенный научный сотрудник. Активно занимается новым научным направлением «Биосегнетоэлектричество», а также математическим моделированием, квантово-химическими расчетами и исследованием различных неорганических (таких, как гидроксипатит) и органических, биомолекулярных структур с водородными связями и полярными свойствами. Автор монографии «Компьютерное моделирование молекулярных наноструктур. Биосегнетоэлектричество: Пептидные нанотрубки» и ряда других книг и глав в книгах. Опубликовал около 150 научных работ по указанным выше направлениям.

142290, Московская область, г. Пушкино, ул. Институтская, д. 4  
Институт математических проблем биологии РАН  
E-mail: vsbys@mail.ru



## «ПРЕДЗАЩИТА» ДИССЕРТАЦИИ: ФОРМАЛЬНЫЕ ТРЕБОВАНИЯ И ТРАДИЦИИ

*В. М. Аникин<sup>1</sup>, Б. Н. Пойзнер<sup>2</sup>*

<sup>1</sup>Национальный исследовательский Саратовский государственный университет

<sup>2</sup>Национальный исследовательский Томский государственный университет

Излагается мнение ученых секретарей диссертационных советов по физико-математическим наукам о порядке проведения научных семинаров по экспертизе диссертаций, представляемых к защитам, и подготовки соответствующих Заключений организаций, где выполнена работа.

*Ключевые слова:* Представление диссертации к защите.

### Введение

«Положение о присуждении ученых степеней», введенное в действие с 1 января 2014 года, в обязательном порядке возлагает на организации, в которых выполняются диссертационные работы, разработку локальных актов, определяющих порядок подготовки Заключений по диссертациям и их выдачи соискателям [1, п. 16]. В данных заметках комментируются базовые требования к Заключениям организаций по выполненным диссертациям, зафиксированные в [1], сложившийся порядок проведения экспертных научных семинаров, а также даются рекомендации по содержанию отдельных разделов данных документов.

### Предзащита как заключительная стадия апробации диссертации

Термин «предзащита» не фигурирует в официальных документах ВАК, но в научной среде понимают, что речь идет о «главном» (и даже без кавычек – главном) для соискателя ученой степени заседании кафедры, факультета или образовательного или научного института в форме научного семинара, где обсуждается диссертационная работа, представленная, по мысли автора и его научного руководителя (консультанта), в «чистовом» варианте. При благополучном исходе этого семинара соискатель получает драгоценное положительное Заключение организации, где выполнена работа, то есть Заключение, содержащее рекомендацию о защите диссертации в диссертационном совете. Именно только положительная оценка диссертации на предзащите открывает соискателю дорогу в диссертационный совет.

С отрицательным Заключением, согласно «Положению» [1, п. 18], соискателю дорога в диссертационный совет закрыта. И тогда он *volens nolens* вынужден заняться фундаментальной до(пере)работкой диссертации...

На практике часто (если не как правило) на «предзащитных» семинарах принимают положительное Заключение при условии внесения в тексты диссертации и автореферата каких-либо «косметических» уточнений и исправлений. До поступления диссертации в совет подобные изменения делать не запрещается. Но тогда научный «ОТК», сформированный на семинаре, должен проверить, действительно ли необходимые замечания учтены, и только после этого выдавать Заключение.

Но все ли критические замечания играют одинаково важную роль для процедуры защиты и, утилитарно говоря, в какой мере их нужно учитывать? Замечания полезно разделить, по крайней мере, на три категории:

1) направленные на выполнение требований к диссертациям, формулируемых официальными документами ВАК;

2) касающиеся формы представления результатов в диссертации и автореферате;

3) прочие.

Первая категория замечаний подлежит обязательному выполнению. Приведем некоторые примеры.

Так, одним из основных вопросов на предзащите является установление соответствия содержания диссертации заявленным отрасли науки и специальности, предусмотренным номенклатурой научных работников, по которым выбранный для защиты диссертационный совет наделен полномочиями проводить защиты докторских и кандидатских диссертаций. В некоторых случаях на научных семинарах идут дискуссии об адекватном выборе отрасли науки (например, физико-математические или технические науки) и специальности (радиофизика или физическая электроника, твердотельная электроника или те же радиофизика и физическая электроника, оптика или лазерная физика, лазерная физика или биофизика и т.п.), реализуемых в пределах компетенции одного диссертационного совета. При решении данного вопроса следует ориентироваться на паспорта специальностей, признаваемые ВАК, и анализировать содержательные акценты, которые характерны для конкретной диссертации (методы исследования, объект и предмет исследования, выносимые на защиту положения, выводы и т.д.).

Примером замечания «первого рода» может также служить замечание о недостаточном соблюдении требований к структурированию и оформлению работы (п. 15 «Положения» [1]). В этом случае потребуются внимательное изучение государственного стандарта [2], определяющего содержание, структуру и правила оформления диссертационного текста, и последующее приведение текста работы в соответствие требованиям этого стандарта. Соблюдение стандарта – не пустая формальность, оно «выгодно» прежде всего самому автору, поскольку этим достигается лучшее восприятие диссертации как ее рецензентами, так и другими представителями научного сообщества. Небрежно и не по правилам оформленная работа не может не вызвать критики.

Категория замечаний «второго рода» обязательно учитывается в плане формального отражения необходимых рубрик с аспектными характеристиками диссертации, которые должны входить и в отзывы организаций на основе анализа материалов диссертации. Что касается понятия качества соответствующих формулировок, то это в отдельных случаях может составлять предмет дискуссий, и содержательное

наполнение аспектных характеристик зависит от опыта экспертной работы соискателя и его научного руководителя (консультанта) – с одной стороны и остальных участников экспертного заседания – с другой стороны<sup>1</sup>.

В третьей категории замечаний могут оказаться замечания, касающиеся логического и количественного распределения материала по главам диссертации, степени полноты библиографического списка и его анализа, уровня лингво-дисциплинарной компетенции автора [3] и др. Если с замечаниями о подходе к распределению материала по главам диссертации можно полемизировать, то нечеткость использованных формулировок и грамматические ошибки в тексте явно не способствуют повышению уровня доверия к написанному.

Представление диссертации в диссертационный совет (с полным комплектом сопроводительных обязательных документов) согласно п. 18 «Положения» должно сопровождаться размещением текста диссертации на официальном сайте организации, на базе которой создан диссертационный совет. Круг лиц, которые допускаются к защите кандидатской диссертации, определен п. 3 «Положения» [1]: это аспиранты и официально прикрепленные к организации для выполнения диссертации соискатели, успешно сдавшие кандидатские экзамены (порядок сдачи экзаменов, перечень и примерные программы утверждаются Минобрнауки РФ).

### **Предзащита как генеральная репетиция будущей защиты диссертации**

На наш взгляд, заседание по экспертизе и представлению диссертационной работы должно проходить в условиях, приближенных к «боевым», то есть согласно сценарию самой защиты на заседании диссертационного совета. Общая атмосфера семинара: научная дискуссия, гласность, требовательность, принципиальность, соблюдение научной этики, наличие анализа достоверности и обоснованности всех выводов, сделанных в обсуждаемой работе.

**Подготовительный этап.** Старт к организации экспертного семинара дает обращение соискателя или научного руководителя (консультанта) к руководителю подразделения, где выполнена работа. Это обращение предполагает, что диссертация и ее автореферат полностью подготовлены и могут быть представлены на семинаре вместе с копиями статей, опубликованных в рецензируемых изданиях, а также с распечаткой результатов проверки текста диссертации и автореферата системой, подтверждающей оригинальность труда. Одновременно научный руководитель свою просьбу сопровождает письменным отзывом на диссертацию.

На семинар заблаговременно приглашаются специалисты по профилю диссертации с целью образования квалификационного «кворума»: на семинаре необходимо присутствие не менее трех (в случае представления кандидатской диссертации) или пяти (в случае представления докторской диссертации) докторов наук по каждой специальности представляемой диссертации. Естественно, особый авторитет семинару придает участие в нем членов диссертационных советов по профилю диссертации, которые могут выступать не только в роли «рядовых» слушателей, но и в роли рецензентов.

<sup>1</sup>Конечно, представления о том, как должен выглядеть «образцовый» документ, могут обладать вариативностью. Вот любопытный пример. Вспоминая свою эпопею по разработке рекомендаций по сочинению математических текстов, известный математик Питер Халмош так описал парадоксальную ситуацию, возникшую в результате обсуждения его труда коллегами-математиками: «Критические замечания были великолепны; резкие, честные и конструктивные, они противоречили друг другу» (Халмош П. Как писать математические тексты // УМН. 1971. Т. 26, вып. 5 (161). С. 243–269).

Одновременно с приглашением на семинар рецензенты (три доктора наук – по профилю докторской диссертации, два доктора или доктор и кандидат наук по профилю кандидатской диссертации) заблаговременно получают тексты диссертации и автореферата, копии опубликованных работ соискателя. Вполне полезным может оказаться согласование кандидатур рецензентов с председателем диссертационного совета, в который планируется представить работу для защиты.

Рецензенты знакомятся с диссертацией, научными публикациями соискателя и составляют отзывы, а также проект Заключения организации, где выполнена работа. В отзывах оцениваются актуальность избранной темы, степень обоснованности научных положений, выводов и рекомендаций, сформулированных в диссертации, их достоверность и новизна, соответствие содержания диссертации заявленной специальности и отрасли науки (в том числе посредством указания соответствия конкретным пунктам паспорта специальности), оценка ценности научных работ соискателя, их научной и практической значимости, выявление полноты изложения материалов диссертации в работах, опубликованных соискателем ученой степени, формулируется вывод о соответствии (несоответствии) диссертации критериям, установленным «Положением» [1].

Задачей рецензентов и экспертного заседания в целом является также выявление личного участия соискателя ученой степени в получении результатов, изложенных в диссертации, и отсутствия в тексте заимствований, не снабженных ссылками на источник. Отзывы рецензентов предоставляются для ознакомления председателю заседания (как правило, руководителю подразделения, где выполнена работа) и соискателю до проведения заседания.

**Сценарий предзащиты.** В начале заседания (при наличии кворума по числу докторов наук по профилю диссертации) председательствующий сообщает фамилию, имя и отчество соискателя, название диссертации, приводит информацию о научном руководителе (научном консультанте) соискателя и рецензентах, подтверждает наличие всех документов, требующихся для представления диссертации в диссертационный совет.

Далее слово предоставляется соискателю, который излагает существо и основные положения диссертации в течение 20–30 минут (в случае кандидатской диссертации) или 40–60 минут (в случае докторской диссертации). Доклад для лучшей информированности слушателей сопровождается демонстрацией электронной презентации и представлением участникам семинара раздаточного материала, отражающего основные научные достижения соискателя.

Что можно посоветовать выступающему? Полезно перед выступлением составить письменный вариант доклада. Но читать свой доклад не рекомендуется. Как мы уже отмечали в [3], докладчика, боящегося «хоть на одну фразу оторвать глаза от бумаги, под гнетом... плотно вцепившейся в мозг мысли: “А вдруг забуду, что сказать дальше?”» (В.В. Вересаев), конечно, понять можно – сказываются общее волнение и опасение не уложиться в отведенное время. Однако простая читка доклада и всего того, что представлено на слайдах, может создать у слушателей негативное впечатление об уровнях подготовки соискателя и владения им излагаемым материалом. От соискателя ждут осмысленного, динамичного, «без бумажки» выступления.

Сам доклад целесообразно разбить на «субсообщения», каждое из которых имеет кульминацией защищаемое научное положение, сопровождаемое добротной аргументацией в пользу его научной ценности и (или) прикладного значения, преимуществ предлагаемого метода решения поставленной задачи, достоверности по-

лученных результатов и т.п. Следует избегать оглашения научных положений «чехом» в конце доклада, когда контекст каждого из положений уже вытеснен другими фактами или даже забыт!

А введение и заключение к собственно докладу по материалам диссертации задают пару «границ» выступления: на «входе» – это обоснование выбора темы, постановка цели, задач и методов исследования, а на «выходе» – очерчивание цели и задач нового яруса исследований, к которому можно и нужно приступить *in futurum*, благодаря достижениям соискателя, «закодированным» в защищаемых им научных положениях.

По окончании доклада соискателю задаются вопросы в устной или письменной форме. «Прикладная» ценность этого этапа предзащиты для соискателя состоит в том, что он получает представление о возможном круге вопросов, которые могут быть заданы уже в процессе официальной защиты диссертации. Но, прежде всего, соискатель обязан четко отвечать на вопросы, связанные с главными аспектными характеристиками своей работы, и ответы на подобные вопросы необходимо «отрепетировать» заранее!

После ответов соискателя на вопросы слово передается его научному руководителю или консультанту. В принципе, за руководителем нужно закрепить право высказывать свое мнение и о личности соискателя как исследователя, и о существовании его работы, ибо, как известно, «нет врага большего для диссертанта, чем сам диссертант».

Затем свое мнение о работе излагают рецензенты с предоставлением соискателю возможности ответить на замечания. В последующей дискуссии принимают участие все присутствующие на семинаре, после чего соискателю предоставляется заключительное слово.

В заключительной части семинара оглашается подготовленный заранее рецензентами проект Заключения по диссертационной работе и проводится обсуждение всех содержащихся в нем рубрик. Наконец, принимается главное решение, ради которого и собрались участники заседания: постановляющая часть проекта Заключения, содержащая рекомендацию к защите, выносится на открытое или тайное (по решению научного семинара) голосование научно-педагогических и научных работников, присутствующих на семинаре. Постановляющая часть Заключения считается принятой, если за нее проголосовали (как и при голосовании за присуждение ученой степени) две трети от числа голосующих.

### **Слагающие итогового Заключения**

Основное содержание Заключения организации, где выполнялась диссертационная работа, определяет п. 16 «Положения» [1]. Современные методические рекомендации по формулировке различных рубрик Заключения содержатся в пособии для соискателей ученых степеней [4] и ряде статей, на которые указываются ссылки.

Итак, в Заключении организации, где выполнена работа, по рассматриваемой диссертации отражаются:

- личное участие соискателя ученой степени в получении результатов, изложенных в диссертации;
- степень достоверности результатов проведенных соискателем ученой степени исследований [5];
- новизна и практическая значимость, ценность научных работ соискателя ученой степени [6–8];

- научная специальность, которой соответствует диссертация;
- полнота изложения материалов диссертации в работах, опубликованных соискателем ученой степени.

Для подтверждения качества проведенной научной экспертизы в Заключении необходимо привести, естественно, также

- сведения о соискателе, теме диссертации, дате ее утверждения на ученом совете подразделения, заявленной специальности и отрасли науки диссертации, дате проведения семинара;
- сведения (с указанием фамилии, имени, отчества, ученой степени и ученого звания, занимаемой должности, месте основной работы) о председательствующем заседании, об участниках заседания, о научном руководителе или консультанте соискателя, о рецензентах диссертации;
- краткое описание хода научной дискуссии, результаты голосования при принятии Заключения.

Заключение по диссертации завершается постановляющей частью. Положительное Заключение содержит вывод о соответствии диссертации критериям «Положения о присуждении ученых степеней» и рекомендацию о защите диссертации в совете по профилю диссертации. В отрицательном Заключении аргументированно излагаются причины, по которым диссертация не может быть рекомендована к защите.

### Заключение

Описанный сценарий семинара – предзащиты диссертации – призван подготовить соискателя и в научном, и в психологическом плане к Акту Защиты Диссертации. На экспертном семинаре по диссертационной работе выявляются и проверяются научный кругозор соискателя, его навыки докладчика и полемиста, уровень владения научным материалом и средствами научной аргументации.

Почти все, что сказано выше, отражает бюрократичность, нормативность процедур и формализованность документов, традиционно (см. [9]) сопутствующих в России процессу защиты диссертации.

На наш взгляд, желательно, чтобы диссертант воспользовался выпадающими на него испытаниями как средством изучения особенностей и точек бифуркации своей творческой деятельности. В сложившихся обстоятельствах он обязан не забывать, что для слушателей его доклада результаты, «упакованные» в текст диссертации, представляют некий *чёрный ящик* в смысле У.Р. Эшби. Поэтому едва ли не главная и обычно трудная для соискателя задача – этот ящик сделать проницаемым для взгляда. Но решить её более или менее удовлетворительно не удастся, если соискатель для самого себя не превратит *«black box»* в *«transparent box»*.

Что требуется от диссертанта для успешности такого превращения? Сознательно занять позицию науковеда по отношению к собственному произведению креативной мысли. Методологически и отчасти психологически приблизиться к позиции науковеда помогает восстановление истории собственного творчества, увенчавшегося диссертацией.

Эвристические предписания для подобной рефлексии автора можно найти у франко-американского социолога науки и техники Бр. Латура. В частности, у него полезно позаимствовать такое правило: «Мы изучаем науку в действии, а не готовые

научные и технологические продукты<sup>2</sup>; для этого мы или отправляемся в то время, когда научные факты и машины ещё не превратились в чёрные ящики<sup>3</sup>, или следим за дискуссиями, в ходе которых эти ящики открываются<sup>4</sup>» [10, с. 398]. Например, наш опыт консультирования диссертантов и редактирования их защищаемых положений показывает: формулируя новизну научного положения, целесообразно реконструировать ту исследовательскую ситуацию в прошлом, что послужила соискателю импульсом к выбору оригинального решения проблемы. Решение задачи убедительно и лаконично отразить за короткое время доклада сущность своей работы способствует более глубокому проникновению в диссертационный материал, приводя к открытию новых горизонтов в научной деятельности, что является одним из залогов удачной творческой судьбы диссертанта [11].

### Библиографический список

1. Положение о присуждении ученых степеней. Утверждено постановлением Правительства Российской Федерации от 24 сентября 2013 г. № 842.
2. ГОСТ Р 7.0.11-2011. Система стандартов по информации, библиотечному и издательскому делу. Диссертация и автореферат диссертации. Структура и правила оформления. М. : ФГУП «СТАНДАРТ-ИНФОРМ», 2012. 12 с.
3. Аникин В.М., Пойзнер Б.Н. Коммуникативная функция автореферата и уровень лингво-дисциплинарной компетенции диссертанта // Известия Саратовского университета. Новая серия. 2013. Сер. Физика. Т. 13, вып. 1. С. 80.
4. Аникин В.М., Усанов Д.А. Диссертация в зеркале автореферата : методическое пособие для аспирантов и соискателей ученой степени естественно-научных специальностей. 3 изд., перераб. и доп. М. : ИНФРА-М, 2013. 128 с. (Менеджмент в науке).
5. Аникин В.М., Пойзнер Б.Н. Как диссертанту аргументировать достоверность научных положений и результатов, выносимых на защиту // Изв. вузов. Физика. 2011. Т. 54, № 6. С. 105.
6. Аникин В.М., Пойзнер Б.Н., Усанов Д.А. Схема поаспектной характеристики диссертации: правила, рекомендации, примеры // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2009. Т. 17, № 3. С. 137.
7. Аникин В.М., Усанов Д.А. Автореферат диссертации : функции, структура, значимость // Изв. Сарат. ун-та. Новая серия. 2008. Серия Физика. Т. 8, вып. 2. С. 61.
8. Аникин В.М., Пойзнер Б.Н. Эпистемологические упражнения магистранта: формулировка и оценка научных положений в своей диссертации // Изв. вузов. Физика. 2012. Т. 55, № 8/3. С. 213.
9. Аникин В.М. Альберт Эйнштейн и Питирим Сорокин: истории диссертационных защит // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2011. Т. 19, № 3. С. 52.

<sup>2</sup>Таковы научные положения, выносимые на защиту, выводы и рекомендации диссертанта etc.

<sup>3</sup>То есть в творческое прошлое самого соискателя, откуда тянутся корни его защищаемых положений, выводов и всего, чем он гордится нынче.

<sup>4</sup>Дискуссии эти надлежит отразить в обзорной главе (обзорном подразделе) диссертации, дабы они бросали свет на происхождение новаций соискателя, который проложил свой собственный путь в проблемном поле.

10. *Латур Бр.* Наука в действии: следуя за учеными и инженерами внутри общества / Предисл. О.В. Хархордин. СПб.: Изд-во Европейского университета в С.-Петербурге, 2013. 414 с.
11. *Аникин В.М., Пойзнер Б.Н.* Какова природа интересного, или дефиниции науки и научности – эпистемологический компонент профессиональной компетенции (радио)физика как инженера исследователя // Известия вузов. Физика. 2013. №10/3. С. 118.

*Поступила в редакцию 21.01.2014*

### «PRE-DEFENSE» OF THESIS: FORMAL REQUIREMENTS AND TRADITIONS

*V. M. Anikin<sup>1</sup>, B. N. Poizner<sup>2</sup>*

<sup>1</sup>National Research Saratov State University

<sup>2</sup>National Research Tomsk State University

Opinions of secretaries of dissertation councils on Physics and Mathematics about holding scientific seminar presenting dissertation to defense are given.

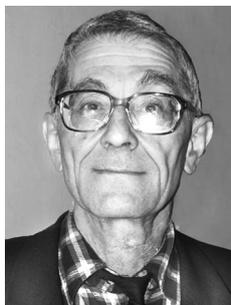
*Keywords:* Submission of thesis for defense.

*Аникин Валерий Михайлович* – родился в Аткарске Саратовской области (1947). Окончил физический факультет Саратовского государственного университета (1970). Доктор физико-математических наук, профессор, декан физического факультета СГУ, заведующий базовой кафедрой компьютерной физики и метаматериалов физического факультета СГУ в Саратовском филиале Института радиотехники и электроники им. В.А. Котельникова РАН, ученый секретарь диссертационного совета Д.212.243.01 на базе СГУ, эксперт Министерства образования и науки Российской Федерации. Область научных интересов – математическое моделирование хаотических и стохастических процессов, диссертационоведение. В числе работ – монография «Аналитические модели детерминированного хаоса» (совместно с А.Ф. Голубенцевым; М.: ФИЗМАТЛИТ, 2007), методическое пособие «Диссертация в зеркале автореферата» для аспирантов и соискателей ученой степени естественнонаучных специальностей (совместно с Д.А. Усановым; М.: ИНФРА-М, 2013, 2014).



410012 Саратов, ул. Астраханская, 83  
Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского  
E-mail: AnikinVM@yandex.ru

*Пойзнер Борис Николаевич* – родился в Томске (1941). Окончил радиофизический факультет Томского государственного университета (1963). Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук (1970). Работал на кафедре квантовой электроники и фотоники (1964–1967 и с 1970). В настоящее время – профессор этой кафедры. Читает лекции по нелинейной оптике, лазерной технике, основам синергетики, социальной информатике. Автор и соавтор более 400 публикаций, 10 изобретений, 20 учебных пособий и монографий по физике лазеров, процессам самоорганизации и хаотизации в оптических, радиофизических, социокультурных системах, вопросам вузовской педагогики и (само)образования, науковедению и культурологии, проблемам творчества как целенаправленной деятельности в обществе. Заслуженный работник высшей школы РФ (2005). Ученый секретарь диссертационного совета Д.212.267.04 на базе ТГУ. Действительный член Национального союза библиофилов РФ.



634050 Томск, пр-т Ленина, 36  
НИ ТГУ, РФФ, каф. квантовой электроники и фотоники  
E-mail: pznr@elefot.tsu.ru



## КВАНТОВЫЙ АНГАРМОНИЧЕСКИЙ ОСЦИЛЛЯТОР С ОДНОЧЛЕННЫМ ПОТЕНЦИАЛОМ, ТРЕНИЕМ И ВНЕШНИМ ВОЗДЕЙСТВИЕМ\*

*А. Л. Санин<sup>1</sup>, А. А. Смирновский<sup>2</sup>*

<sup>1</sup>Санкт-Петербургский государственный политехнический университет

<sup>2</sup>Физико-технический институт им. А.Ф. Иоффе РАН

В контексте уравнения Шрёдингера–Ланжевена–Костина проводится численное моделирование динамических закономерностей ангармонического осциллятора с одночленным потенциалом четвёртой степени при импульсном возбуждении колебаний, разных амплитудах внешнего воздействия и коэффициентах трения. Детально исследуется и обсуждается частотный отклик, обусловленный переходами в неэквилибратном энергетическом спектре осциллятора, генерация высших нечетных гармоник, а также роль трения.

*Ключевые слова:* Квантовый осциллятор 4 степени, уравнение Шрёдингера–Ланжевена–Костина, свободные и вынужденные колебания, трение.

### Введение

Классические осцилляторы с полиномиальными потенциалами четвёртой степени исследуются в течение длительного времени, об их свойствах известно достаточно много. Полином, состоящий из квадратичного слагаемого и слагаемого четвёртой степени, представляет собой потенциал консервативного осциллятора Дуффинга, который широко исследовался и исследуется в классической механике, в том числе при наличии трения и внешнего воздействия, зависящего от времени. В зависимости от знака коэффициентов такой осциллятор может быть одноямным или двухъямным. Много исследований связано со случаем, когда коэффициент в слагаемом с четвёртой степенью является малым, то есть является возмущением гармонического осциллятора. Не меньший интерес представляют проблемы, когда слагаемое четвёртой степени является доминирующим, а не малой добавкой. В предельном случае, при отсутствии квадратичного члена, свойства осциллятора будут определяться одночленным потенциалом четвёртой степени. Это пример относительно простого нелинейного осциллятора с частотой, зависящей от энергии (или, другими словами, от

\*Статья написана по материалам доклада на X Международной школе «Хаотические автоколебания и образования структур», 7–12 октября 2013 г. Саратов, Россия.

начальных условий). В данном случае классическое уравнение движения включает в себя силу, пропорциональную кубу расстояния от положения равновесия со знаком «минус». Это уравнение анализировалось во многих работах, например, в [1,2]. В более общем случае в уравнение движения также вводится сила трения, пропорциональная скорости с обратным знаком, а также дополнительное внешнее воздействие, зависящее от времени [3]. В [3] внешнее воздействие представляет собой малую добавку, пропорциональную произведению кубического множителя и гармонической по времени функции.

Теория осцилляторов с указанными потенциалами может быть обобщена на случаи движения, когда существенную роль играют квантовые динамические закономерности. В этих случаях классические функции Гамильтона преобразуются в операторы Гамильтона квантовой механики, и получаемые осцилляторы будут представлять собой квантовые аналоги классических, поэтому их называют квантовыми ангармоническими осцилляторами. Под это название подпадают осцилляторы не только с малой ангармонической добавкой, но и с доминирующим слагаемым четвёртой степени по координате. Изучение квантовых ангармонических осцилляторов имеет фундаментальное значение для различных приложений: в молекулярной физике, химии, электронике и нанотехнологиях, в разработках квантовых компьютеров. В научной литературе уделяется исключительное внимание стационарным решениям уравнения Шрёдингера, включающим энергетические спектры и собственные функции [4–6]. Однако анализ динамических задач с учетом начальных условий для перечисленных потенциалов является совершенно недостаточным и представляет скорее открытую проблему. Для квантового осциллятора с двухъямным потенциалом (ему соответствует классический консервативный осциллятор Дуффинга), существует множество статей, отметим некоторые из них [7–10]. Если в уравнение Шрёдингера с двухъямным потенциалом ввести слагаемое, обусловленное трением, а также внешнее воздействие, зависящее от времени, то получим уравнение для квантового диссипативного осциллятора Дуффинга, численное исследование которого проводилось нами ранее [11, 12]. Однако для более детального понимания динамики квантовых волновых пакетов с полиномиальными потенциалами следует рассмотреть более простую модель квантового осциллятора с одночленным потенциалом четвёртой степени. В отличие от квантового гармонического осциллятора, здесь спектр энергии не является эквидистантным, частоты перехода между соседними состояниями будут разными. Цель нашего исследования состоит в изучении частотных свойств квантового осциллятора с одночленным потенциалом четвёртой степени.

Статья состоит из введения, трёх разделов и заключения. В первом разделе обсуждаются основные уравнения и численный метод интегрирования уравнения Шрёдингера–Ланжевена–Костина (ШЛК). Второй раздел посвящён анализу решений стационарного и нестационарного уравнений Шрёдингера. В третьем разделе в рамках уравнения ШЛК обсуждаются свободные и вынужденные колебания осциллятора с трением, генерация высших нечётных гармоник.

## 1. Основные уравнения и численное интегрирование

Уравнение ШЛК, записанное в безразмерном виде, можно представить как

$$i \frac{\partial \psi}{\partial \tau} = -\frac{1}{2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi^2} + U_{\Sigma} \psi - \frac{ik}{2} \left( \ln \frac{\psi}{\psi^*} - \left\langle \ln \frac{\psi}{\psi^*} \right\rangle \right) \psi. \quad (1)$$

Здесь  $\zeta, \tau$  – координата и время,  $k$  – коэффициент трения,  $i$  – мнимая единица. Волновая функция  $\psi$  удовлетворяет условию нормировки

$$\int_{-\zeta_L}^{\zeta_L} \psi^* \psi d\zeta = 1. \quad (2)$$

Рассматриваемая квантовая система ограничена непроницаемыми стенками в точках  $\pm\zeta_L$  ( $\zeta_L$  – полуширина системы). Символ  $\langle \rangle$  означает усреднение по координате, так что

$$\left\langle \ln \frac{\psi}{\psi^*} \right\rangle = \int \psi^* \ln \frac{\psi}{\psi^*} \psi d\zeta. \quad (3)$$

Величина  $U_\Sigma$  состоит из двух слагаемых

$$U_\Sigma = \zeta^4 + U_{\text{ext}}, \quad U_{\text{ext}} = U_0 \zeta \sin(\Omega_{\text{ext}} \tau), \quad (4)$$

где  $U_0$  и  $\Omega_{\text{ext}}$  – амплитуда и частота внешнего воздействия  $U_{\text{ext}}$ .

Если  $k = 0$ ,  $U_{\text{ext}} = 0$ , то из уравнения (1) можно получить уравнение для собственных функций  $\phi_n$  и собственных значений  $\varepsilon_n$

$$\left( -\frac{1}{2} \frac{d^2}{d\zeta^2} + \zeta^4 \right) \phi_n = \varepsilon_n \phi_n, \quad (5)$$

$n$  – номер состояния.

Уравнения (1) и (5) являются инвариантными относительно выбора базисных единиц измерения. Диссипативные свойства системы зависят от величины коэффициента трения  $k$ , величина  $\ln(\psi/\psi^*)$  может быть представлена в виде

$$\ln \left( \frac{\psi}{\psi^*} \right) = i (2 \arg(\psi) + 2n\pi), \quad (6)$$

где  $\arg(\psi) = \arctg(\text{Im } \psi / \text{Re } \psi)$  – главное значение фазы. Следует отметить, что физически корректные решения имеют место, когда фаза является непрерывной функцией координаты  $\zeta$ .

Граничные условия на стенках системы и начальное условие задавались в виде

$$\psi(\pm\zeta_L, \tau) = 0, \quad \psi(\zeta, \tau = 0) = \psi_0(\zeta). \quad (7)$$

В качестве начального условия использовалось стационарное решение (5) для основного состояния, а колебания возбуждались под действием одиночного кратковременного импульса

$$U_0 = -F_0 \zeta, \quad \tau \in (0; \Delta\tau), \quad (8)$$

где  $F_0$  – величина силы, действующей в течение короткого промежутка времени  $\Delta\tau$ , много меньшего времени наблюдения (расчёта)  $T$ .

Численное интегрирование нестационарного уравнения (1) было проведено при заданных начальном и граничных условиях при помощи итерационного конечно-разностного метода установления по псевдовремени, являющегося разновидностью метода простых итераций. Производные по координате аппроксимировались со вторым порядком точности, временная производная также вычислялась со вторым порядком точности (по методу Кранка–Николсона), исключая моменты, где потенциал  $U_0$  изменялся скачком. В процессе вычислений контролировалось условие нормировки (2), которое сохранялось с точностью до  $10^{-6}$ . Реализованный численный

метод тестировался на различных задачах (например, на задачах для гармонического осциллятора).

Динамика квантового волнового пакета исследовалась при помощи анализа распределения плотности вероятности  $N = \psi^* \psi$  во времени, а также средних значений динамических переменных: координаты  $\langle \zeta \rangle$ , скорости  $\langle V \rangle$  и стандартных отклонений  $\sigma_\zeta = \sqrt{\langle (\Delta \zeta)^2 \rangle}$ ,  $\sigma_V = \sqrt{\langle (\Delta V)^2 \rangle}$  (под знаком радикала стоят среднеквадратичные отклонения координаты и скорости). Произведение  $\sigma_\zeta \sigma_V$  определяет соотношение неопределённостей как функцию времени.

С помощью метода быстрого преобразования Фурье проведён анализ квадратов модулей  $|\Phi_{\langle \zeta \rangle}(\Omega)|^2$ , зависящих от частоты  $\Omega$  и отражающих функциональную зависимость  $\langle \zeta \rangle$  от времени. В дальнейшем используется обозначение  $F_{\langle \zeta \rangle}(\Omega) = |\Phi_{\langle \zeta \rangle}(\Omega)|^2$ .

## 2. Волново-пакетная динамика на частотах перехода

Для интерпретации динамических закономерностей необходимо знать спектр энергий стационарного уравнения Шрёдингера [11] с учётом того, что рассматриваемая система является пространственно-ограниченной. Расчёты энергетического спектра и частот переходов между соседними уровнями проведены для двух размеров ямы:  $\zeta_L = 3$  и  $\zeta_L = 7$ . Соответствующие кривые, выражающие зависимость от номера состояния, даны на рис. 1. Для большего размера потенциальной ямы кривая не имеет излома и хорошо аппроксимируется функцией  $1.84x^{1/3}$ . В этом случае динамические свойства обусловлены только потенциалом четвёртой степени (для рассматриваемого на рис. 1 интервала номеров состояний). Для меньшего размера потенциальной ямы кривая зависимости  $\Delta \epsilon_n$  от  $n$  имеет излом и состоит из двух участков. До излома кривые для двух ям совпадают, а затем постепенно расходятся.

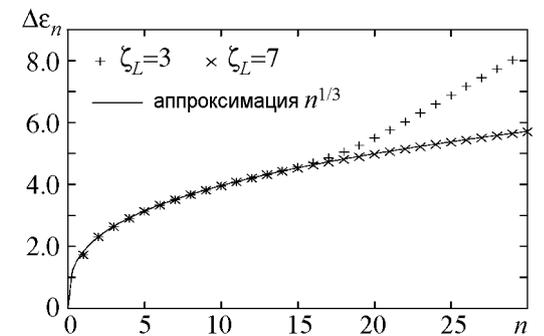


Рис. 1. Разности энергетических уровней  $\Delta \epsilon_n$  как функция номера состояния  $n$

Для ямы меньшего размера зависимость  $\Delta \epsilon_n$  от  $n$ , начиная с некоторых значений  $n$ , становится прямой и соответствует уровням ямы без потенциала четвёртой степени (то есть уровням «пустой ямы»). Если размер ямы взять ещё меньше, то расхождение начинается ещё раньше (от меньшего значения номера состояния  $n$ ). Спектр энергий для  $\zeta_L = 3$  и разности энергий между соседними состояниями даны в табл. 1.

Таблица 1

Спектр энергий, разности между уровнями (частоты переходов)

$n$	1	2	3	4	5	6	7	8
$\epsilon_n$	0.668	2.394	4.697	7.336	10.244	13.379	16.712	20.221
$\Delta \epsilon_n$	1.726	2.303	2.639	2.907	3.135	3.333	3.509	3.669

В рассматриваемой безразмерной задаче разности энергий  $\Delta\varepsilon_n$  между соседними уровнями равны частотам переходов, то есть  $\Delta\varepsilon_n = \Omega_n$ . Частоты переходов  $\Omega_n$ , представленные здесь, обнаруживаются в динамических режимах, которые обсуждаются ниже. Число возбуждаемых частот  $\Omega_n$  в динамических задачах зависит от амплитуды начального условия и внешнего гармонического воздействия. Отметим, что с ростом номера состояния  $n$  возрастают величина  $\Delta\varepsilon_n$  и частота перехода  $\Omega_n$ , но разница  $\Omega_{n+1} - \Omega_n$  уменьшается. В соответствии с графиком (см. рис. 1) излом кривой происходит при некотором критическом  $n > 16$ . Для  $n > 20$  характер зависимости близок к линейному.

Волновая функция основного состояния может быть найдена аналитически на основе вариационного метода Ритца или другим удобным способом [4–6]. В данной работе она рассчитывалась численно.

Свободные колебания, возникающие при воздействии одиночного импульса на основное состояние осциллятора с одночленным потенциалом четвёртой степени, исследовались нами при разных амплитудах импульса  $F_0$ , но с одной и той же длительностью импульса  $\Delta\tau = 0.5$ . Длительность временной развёртки  $T$  варьировалась от 1000 до 5000. Рассматривались режимы колебаний как при отсутствии трения ( $k = 0$ ), так и с его учётом ( $k > 0$ ). Наиболее простыми по свойствам и картинам распределения являются режимы при малых  $F_0$ , например, при  $F_0 = -1$ . В этом случае распределение плотности вероятности  $N$  на плоскости  $(\zeta, \tau)$  имеет форму «ёлки», ветви которой не уменьшаются по длине, а лишь варьируются периодически (рис. 2, а; тёмный цвет соответствует большим значениям плотности вероятности  $N$ ). Временная реализация  $\langle\zeta\rangle$  приведена на рис. 2, б, её частотный отклик представлен на рис. 2, в. Для данного значения  $F_0$  эффективно возбуждаются две спектральные фурье-компоненты на частотах  $\Omega_1 = 1.7257$  и  $\Omega_2 = 2.3032$ . Это соот-

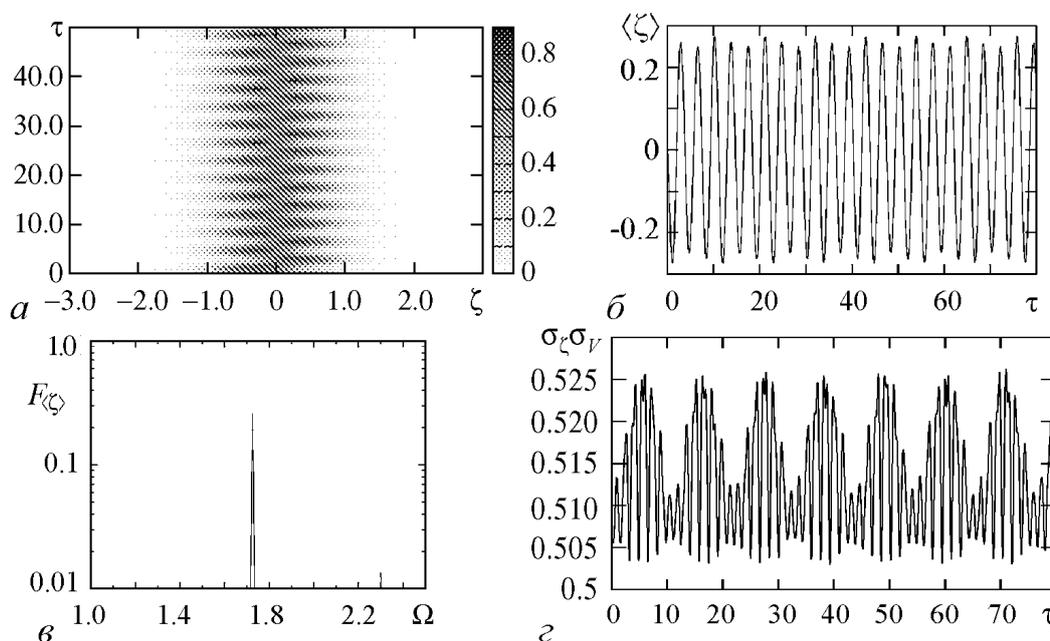


Рис. 2. Распределение плотности вероятности  $N$  (а), временная реализация средней координаты (б), частотный отклик  $F_{\langle\zeta\rangle}(\Omega)$  (в) и произведение неопределённостей (г) при  $F_0 = -1$

ветствует возбуждению энергетических уровней  $\varepsilon_2$  и  $\varepsilon_3$ . Разница  $\Omega_2 - \Omega_1$  определяет неглубокую амплитудную модуляцию, достаточно хорошо заметную на временной реализации  $\langle \zeta \rangle$ . Наиболее интенсивной является спектральная компонента на частоте  $\Omega_1$  с  $F_{\langle \zeta \rangle}(\Omega_1) \approx 0.3$ , компонента на частоте  $\Omega_2$  меньше основной компоненты более чем на порядок:  $F_{\langle \zeta \rangle}(\Omega_2) \approx 0.06 F_{\langle \zeta \rangle}(\Omega_1)$ . Для рассматриваемых свободных колебаний при  $F_0 = -1$  график зависимости произведения стандартных отклонений от времени дан на рис. 2, з. Отметим, что картина колебаний представляет собой биеения. Минимальные значения произведения неопределённостей немного выше 0.5. Максимальное значение превосходит минимальное всего на 0.025.

Колебательные процессы усложняются с увеличением  $F_0$ . Причина этого – появление новых спектральных частотных компонент. Исследуемый осциллятор становится многочастотным. Временная реализация для средней координаты  $\langle \zeta \rangle$  и соответствующий ей частотный отклик  $F_{\langle \zeta \rangle}(\Omega)$  при амплитуде одиночного импульса  $F_0 = -5$  представлены на рис. 3. Компонента на частоте  $\Omega_1$  практически не изменяется,  $F_{\langle \zeta \rangle}(\Omega_1) \approx 0.3$ , однако спектральная компонента на частоте  $\Omega_2$  резко возрастает до значения  $F_{\langle \zeta \rangle}(\Omega_2) \approx 0.5$ . Кроме того, появляются дополнительные спектральные компоненты на частотах  $\Omega_3 = 2.6389$  и  $\Omega_4 = 2.9086$  с амплитудами  $F_{\langle \zeta \rangle}(\Omega_3) \approx 0.3$  и  $F_{\langle \zeta \rangle}(\Omega_4) \approx 0.07$ . По сравнению с предыдущим вариантом (для  $F_0 = -1$ ), здесь временная реализация становится более сложной (что обусловлено прежде всего перечисленными спектральными компонентами). Кроме частот, заключённых на промежутке [1.6; 3], появляются спектральные компоненты с высокими частотами, однако их интенсивность очень слабая.

С последующим увеличением  $F_0$  возбуждаются состояния с более высокими номерами и энергиями, следовательно, появляются новые спектральные компоненты. Для сравнения с предыдущими режимами мы рассмотрим результаты вычислений для  $F_0 = -10$ . Временная реализация и частотный спектр для этого случая представлены на рис. 4. Последующее усложнение временной реализации  $\langle \zeta \rangle$  обусловлено появлением новых спектральных компонент и перераспределением энергии по спектру. Здесь число спектральных компонент на промежутке  $1.6 < \Omega < 3.9$  возрастает до десяти, две из них имеют значения  $F_{\langle \zeta \rangle}(\Omega)$  ниже 0.01, а остальные – выше 0.01. Спектральная компонента с максимальным значением  $F_{\langle \zeta \rangle}(\Omega) \approx 0.13$  реализуется на частоте  $\Omega_5 = 3.1350$ . Компоненты на более высоких частотах ( $\Omega > \Omega_5$ ) ослабевают, то есть значения  $F_{\langle \zeta \rangle}(\Omega)$  уменьшаются. Отметим, что все спектральные компоненты имеют частоты  $\Omega$ , совпадающие с частотами переходов  $\Omega_n$  между соседними состояниями (см. табл. 1). Спектральная компонента с максимальным значением  $F_{\langle \zeta \rangle}$  смещается в сторону более высоких частот при увеличении амплитуды

одиночного импульса  $F_0$ . Зависимость  $F_{\langle \zeta \rangle}$  от амплитуды импульса  $F_0$  для первых двух частот  $\Omega_1$  и  $\Omega_2$  представлена в табл. 2.

Здесь также уместно отметить определённое соответствие классическим результатам для нелинейного осциллятора с одночленным потенциалом четвертой степени. В классическом случае частота осциллятора пропорцио-

Таблица 2

Значения  $F_{\langle \zeta \rangle}(\Omega_n)$   
для  $n = 1, 2$  при разных  $F_0$

$F_0$	$F_{\langle \zeta \rangle}(1.7257)$	$F_{\langle \zeta \rangle}(2.303)$
-1	0.4	0.015
-5	0.28	0.415
-10	0.0025	0.019

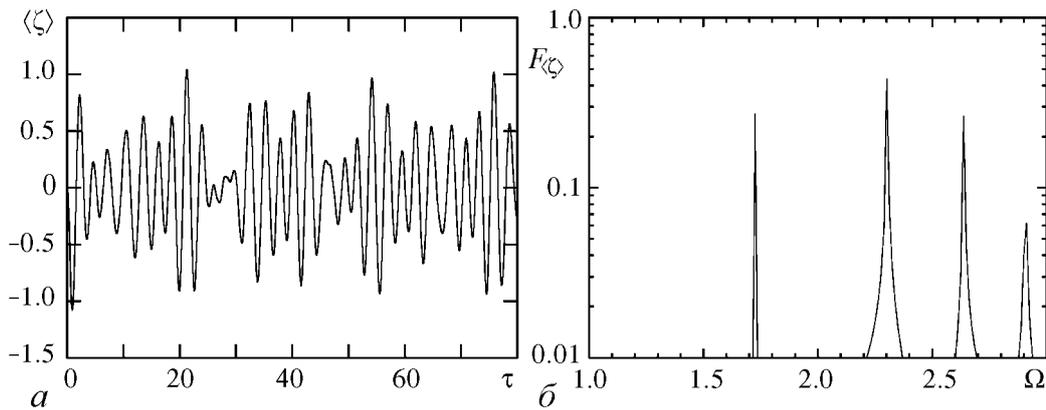


Рис. 3. Временная реализация для средней координаты (а) и частотный отклик  $F_{\langle \zeta \rangle}(\Omega)$  (б) при  $F_0 = -5$

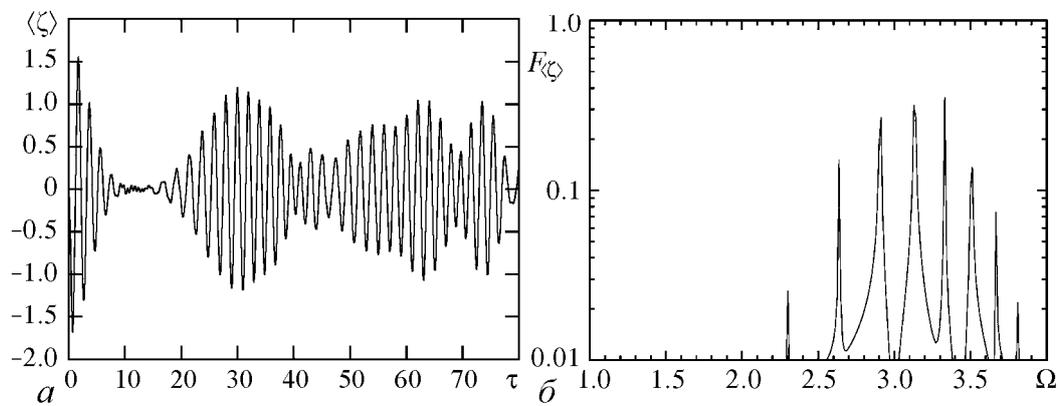


Рис. 4. Временная реализация для средней координаты (а) и частотный отклик  $F_{\langle \zeta \rangle}(\Omega)$  (б) при  $F_0 = -10$

нальна корню четвёртой степени от энергии системы [1,3]. В рассматриваемом нами квантовом случае после окончания воздействия одиночного импульса на систему волновой пакет приобретает дополнительную энергию, и с её ростом (при увеличении  $F_0$ ) возрастает частота наиболее интенсивной спектральной линии. Кроме того, в системе возбуждаются новые спектральные компоненты и осциллятор становится многочастотным. При воздействии  $F_0 = -10$  также возникают две спектральные компоненты для  $\Omega > 7.8$ , обусловленные переходами между состояниями «пустой» ямы, где воздействие потенциала  $U = \zeta^4$  уже практически не проявляется.

### 3. Свободные и вынужденные колебания ангармонического осциллятора с трением

Квантовые осцилляторы с квадратичным потенциалом и более сложные (с двухъямным потенциалом) исследовались в ряде работ [11–13] в контексте уравнения Шрёдингера–Ланжевена–Костина. Основываясь на результатах, связанных с переходом системы из возбуждённого состояния в основное [11], авторы статьи [13] предложили использовать диссипативную систему в качестве кубита. Независимо от возможных приложений, представляет интерес рассмотрение колебаний изучаемого

нами квантового осциллятора как при малом значении коэффициента трения, так и при доминирующем влиянии трения.

Рассмотрим сначала случай затухания колебаний квантового осциллятора без внешнего периодического воздействия. Когда коэффициент трения  $k = 0.1$ , а амплитуда возбуждающего сигнала  $F_0 = -1$ , мы имеем медленный процесс затухания колебаний средней координаты  $\langle \zeta \rangle$  (рис. 5, а). Для классического осциллятора с квадратичным потенциалом в случае доминирующего влияния трения на систему возможно аperiодическое затухание колебаний, в результате чего осциллятор возвращается в равновесное состояние. Здесь возможны два типа временной эволюции: для одного из них обобщённая координата уменьшается, проходит через равновесное значение, меняет знак и асимптотически стремится к равновесию; для другого – координата уменьшается и асимптотически стремится к равновесию без изменения знака. Для рассматриваемой нами квантовой системы при заданном значении  $F_0 = -1$  и варьируемом значении коэффициента трения  $k$  от 1.7 до 6.9 имеется определённая аналогия с временной эволюцией классического линейного осциллятора с квадратичным потенциалом и трением. На рис. 5, б–г даны картины эволюции для  $k = 1.7, 3.4, 6.9$  (это примерно  $\Omega_1, 2\Omega_1$  и  $4\Omega_1$ ). Во всех случаях первый минимум на графике соответствует моменту выключения начального возбуждающего импульса, с ростом коэффициента трения его величина уменьшается. На рис. 5, б отчётливо наблюдаются ещё два экстремума (локальный максимум и минимум), но при  $k = 3.4$  (рис. 5, в) все экстремумы, кроме первого, практически исчезают. Данное значение  $k$  примерно соответствует  $2\Omega_1$ , а как следует из теории для классического линейного осциллятора с трением, именно это значение является критическим (осциллятор пе-

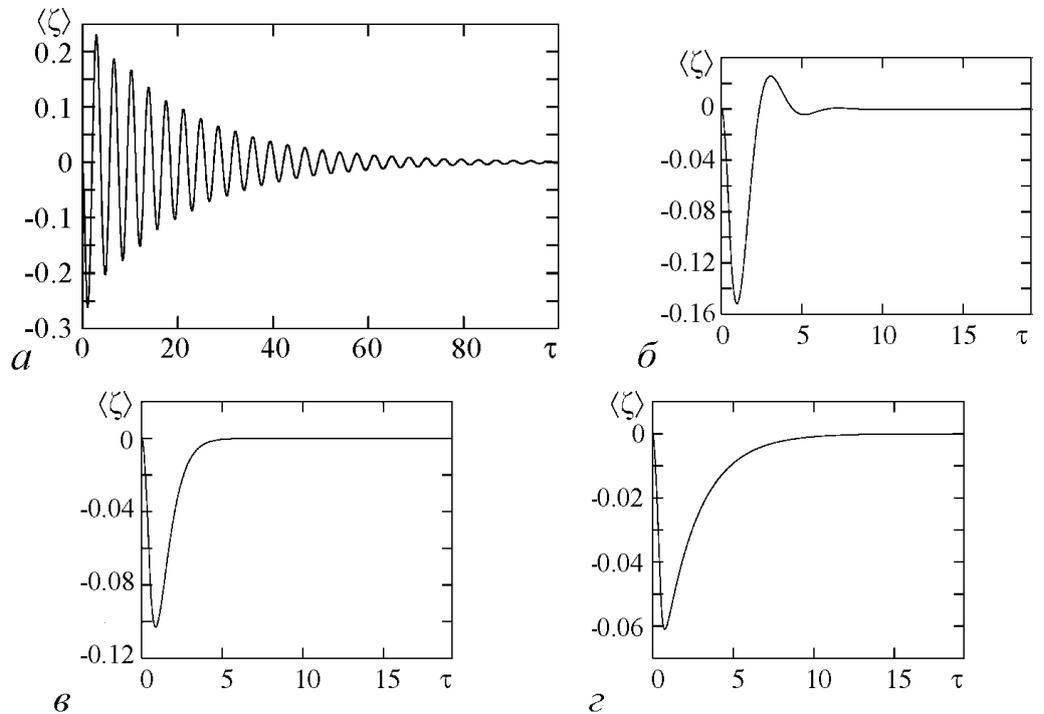


Рис. 5. Эволюция при  $F_0 = -1$  и разных  $k$ : 0.1 (а), 1.7 (б), 3.4 (в), 6.9 (г)

рестаёт совершать колебания, затухание происходит по экспоненциальному закону). Также, в соответствии с классической механикой, при дальнейшем увеличении  $k$  (например, до  $k = 6.9$ , как на рис. 5,  $z$ ) скорость затухания уменьшается. В целом, несмотря на некоторые различия, имеется определённое сходство со свойствами переходного процесса для классического осциллятора с квадратичным потенциалом при доминирующем влиянии трения на колебания.

Вынужденные колебания квантового осциллятора с одночленным потенциалом четвёртой степени при наличии трения исследовались для разных амплитуд внешнего гармонического воздействия, но с одной и той же частотой  $\Omega_{\text{ext}} = 1.7257$ , равной частоте перехода  $\Omega_1$  между основным и первым возбуждённым состояниями; коэффициент трения во всех расчётах полагался  $k = 0.1$ . Начальное состояние системы соответствовало основному состоянию. Для случая слабого внешнего воздействия с амплитудой  $U_0 = 0.1$  на рис. 6,  $a, б$  представлены распределение плотности вероятности  $N$  на плоскости  $(\zeta, \tau)$  и средняя координата как функция времени. На рис. 6,  $a$ , как и ранее, более тёмным участкам рисунка соответствуют большие значения  $N$ . Временная реализация для средней координаты  $\langle \zeta \rangle$  (см. рис. 6,  $б$ ) характеризуется переходным участком до момента времени  $\tau \approx 70$ , а затем режим колебаний становится практически установившимся. На переходном участке происходит монотонный рост амплитуды колебаний, а в установившемся режиме наблюдается незначительная амплитудная модуляция. Произведение стандартных

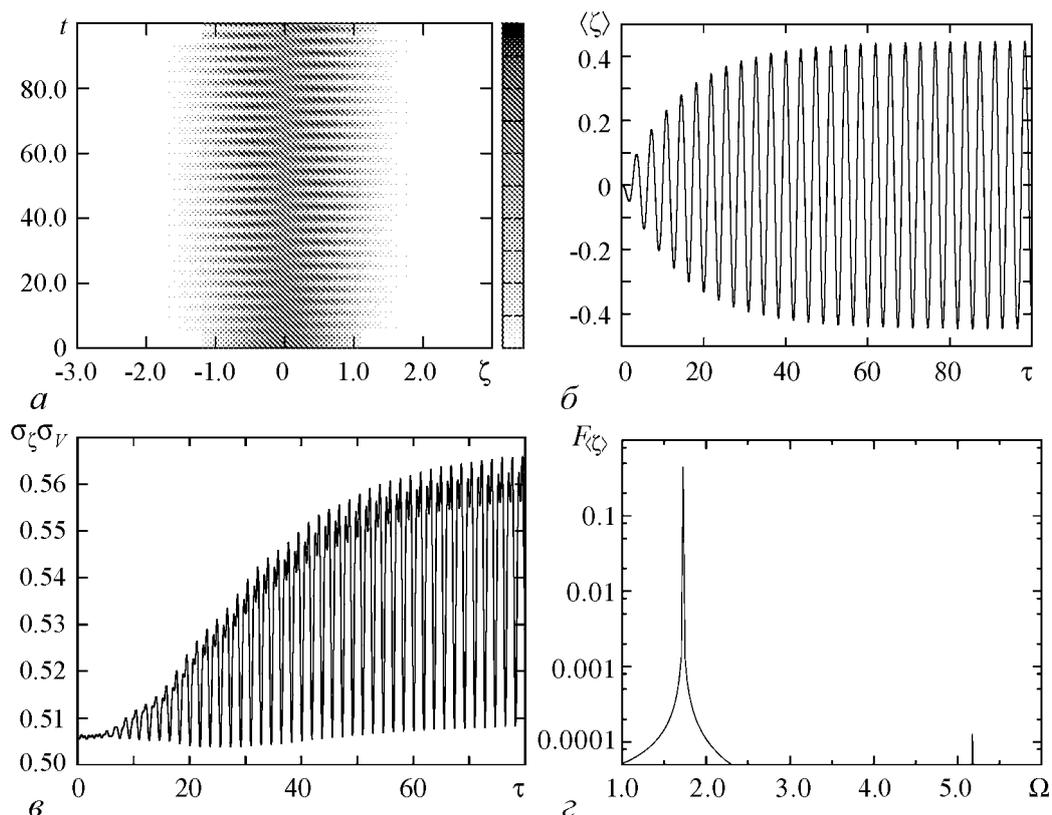


Рис. 6. Распределение плотности вероятности  $N$  ( $a$ ), средняя координата  $\langle \zeta \rangle$  как функция времени ( $б$ ), произведение стандартных отклонений ( $в$ ) и частотный спектр ( $z$ ) при  $U_0 = 0.1$

отклонений в виде функции времени дано на рис. 6, в. Оно осциллирует с малым отклонением от минимального значения 0.5. На рис. 6, г видно, что при слабом внешнем воздействии эффективно возбуждается одна спектральная компонента на частоте  $\Omega_{\text{ext}}$ , другая спектральная компонента на частоте  $3\Omega_{\text{ext}}$  возбуждается очень слабо. При увеличении  $U_0$  картина процессов изменяется. Для  $U_0 = 1$  средняя координата  $\langle \zeta \rangle$  и произведение стандартных отклонений на промежутке  $\tau \in [400; 500]$  представлены на рис. 7 (колебания являются установившимися). По сравнению с предыдущим вариантом величина  $F_{\langle \zeta \rangle}(3\Omega_{\text{ext}})$  возрастает более чем на три порядка, и немного увеличивается спектральная компонента на частоте  $\Omega_{\text{ext}}$ . Сравнивая отношение  $F_{\langle \zeta \rangle}(\Omega_{\text{ext}})/F_{\langle \zeta \rangle}(3\Omega_{\text{ext}})$  для  $U_0 = 0.1$  и  $U_0 = 1$ , получаем в первом случае величину порядка  $10^4$ , а во втором –  $10^2$ . Это означает, что при увеличении амплитуды внешнего воздействия на порядок амплитуда колебаний на кратной высшей гармонике возрастает также примерно на порядок.

Если  $U_0 = 5$ , то амплитуда колебаний заметно возрастает по сравнению с вариантом для  $U_0 = 1$  (рис. 8, а), также возрастает амплитуда колебаний стандартных отклонений (рис. 8, б). Кроме того, происходит последующее перераспределение энергии колебаний по спектру и, наряду со спектральными компонентами на частотах  $\Omega_{\text{ext}}$ ,  $3\Omega_{\text{ext}}$ , возникает компонента на частоте  $5\Omega_{\text{ext}}$  (рис. 8, в).

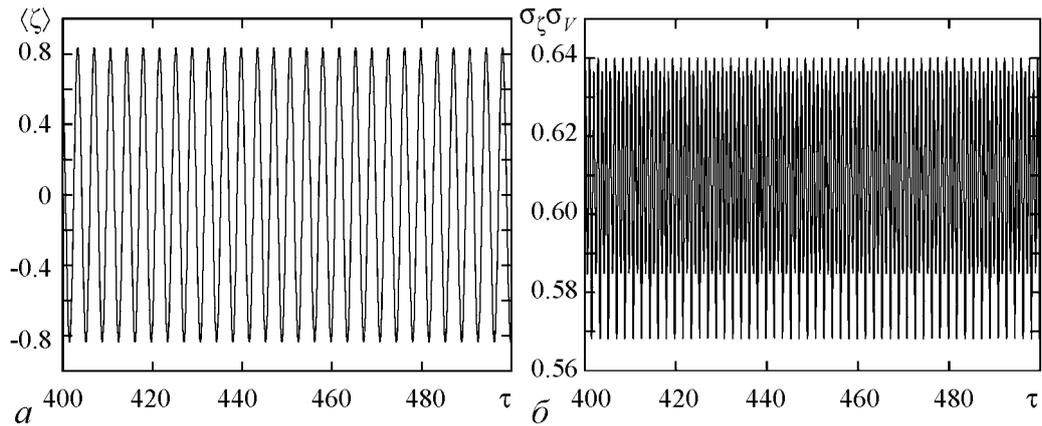


Рис. 7. Средняя координата (а) и произведение стандартных отклонений (б) при  $U_0 = 1$

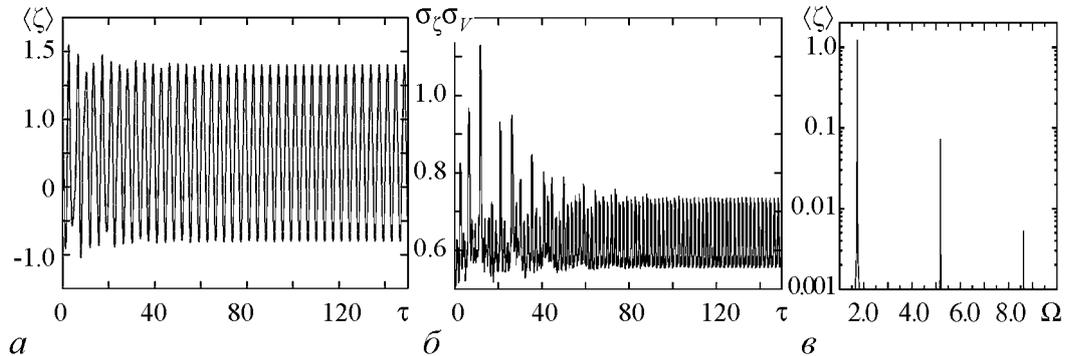


Рис. 8. Средняя координата (а), произведение стандартных отклонений (б) и фурье-спектр средней координаты (в) при  $U_0 = 5$

Характерной особенностью рассматриваемых режимов колебаний является малое число спектральных компонент: кроме основной частоты  $\Omega_{\text{ext}}$  и её высших нечётных гармоник с  $3\Omega_{\text{ext}}$ ,  $5\Omega_{\text{ext}}$ , другие спектральные компоненты отсутствуют. Данная особенность обусловлена наличием трения в системе, которое даже при таком малом значении коэффициента трения играет роль селектора. Другой особенностью рассмотренных режимов является слабая зависимость амплитуды колебаний на основной частоте  $\Omega_{\text{ext}}$  от амплитуды внешнего воздействия  $U_0$  и, наоборот, сильная зависимость величины  $F_{\langle \zeta \rangle}$  для высших нечётных гармоник.

### Заключение

Квантовый ангармонический осциллятор с одночленным потенциалом четвёртой степени, ограниченный стенками непроницаемой ямы, исследован с разных позиций. На основе стационарного уравнения Шрёдингера изучен его энергетический спектр и рассчитаны разности энергий между соседними квантовыми уровнями. Установлена нелинейная степенная зависимость разности энергий от номера состояния, аналогичная зависимости частоты от энергии для классического ангармонического осциллятора с одночленным потенциалом; при определённых размерах квантовой системы эта зависимость имеет излом. До излома характер спектра обусловлен потенциалом четвёртой степени, после влияния потенциала резко ослабевает, и уровни энергий практически соответствуют спектру «пустой» ямы. Разности энергий между соседними уровнями определяют частоты колебаний осциллятора в динамическом режиме при заданных начальных условиях в случае решения нестационарного уравнения Шрёдингера.

Для исследуемой системы без трения изучены временные реализации средней координаты волнового пакета, произведения стандартных отклонений и частотные спектры. Показано, что возбуждаемые колебания являются многочастотными, при этом число генерируемых частот увеличивается с ростом амплитуды одиночного возбуждающего импульса (или, другими словами, с ростом энергии волнового пакета); частоты совпадают с частотами переходов между соседними уровнями, и с увеличением амплитуды возбуждающего импульса происходит перераспределение энергии по частотному спектру с возникновением новой наибольшей по интенсивности спектральной компоненты.

В рамках уравнения Шрёдингера–Ланжевена–Костина исследованы колебания ангармонического осциллятора с диссипативной силой, пропорциональной скорости движения с обратным знаком. Проведено численное интегрирование уравнения ШЛК при разных коэффициентах трения, изучены процессы затухания колебаний в режиме слабой диссипации и, наоборот, когда трение играет доминирующую роль в системе. Показана качественная аналогия с процессами затухания колебаний классического осциллятора с квадратичным потенциалом. При разных амплитудах внешнего периодического воздействия и одной и той же его частоте, равной частоте перехода между основным и первым возбуждённым состояниями, проанализированы вынужденные колебания при неизменном коэффициенте трения. Установлено, что с увеличением амплитуды внешнего воздействия происходит рост числа выс-

ших нечётных гармоник, соответствующие им амплитуды спектральных компонент также увеличиваются. При этом в спектре отсутствуют другие частоты, что обусловлено влиянием трения, которое, можно сказать, играет роль «селектора» частот. Таким образом, рассмотренная динамическая модель квантового осциллятора может представлять собой базу для объяснения и понимания конкретных квантово-механических систем.

### Библиографический список

1. *Табор М.* Хаос и интегрируемость в нелинейной динамике. Пер. с англ. М.: Эдиториал УРСС, 2001. 320 с.
2. *Paramikos G., Robnik M.* WKB approach applied to 1D time-dependent nonlinear Hamiltonian oscillators // *J. Phys. A: Mathematical and Theoretical*. 2012. Vol.45, № 1. P. 0152069(1–16).
3. *Bartachelli M.V., Berretti A., Deane J.H.B., Gentile G., S.A. Gourley.* Selection rules for periodic orbits and scaling laws for a driven damped quartic oscillator // *Nonlinear analysis. Elsevier. Real world applications*. 2008. Vol. 9. P. 1966.
4. *Banerjee K., Bhatnagar S.P., Choudhry V., Kanwal S.S.* The anharmonic oscillator // *Proc. R. Soc. London*. 1978. A. 360. P. 575.
5. *Jafarpour M., Afchar D.* Calculation of energy eigenvalues for the quantum anharmonic oscillator with a polynomial potential // *J. Phys. A: Math. Gen.* V. 35. 2002. P. 87.
6. *Jafarpour M., Afchar D.* Energy levels for the pure  $\lambda x^{2m}$  potentials // *Journal Sciences, Islamic Republic of Iran*. 2007. Vol. 18, № 1. P. 75.
7. *Dittrich T., Grossmann F., Jung P., Oelschlägel B., Hänggi P.* Localization and tunneling in periodically driven bistable systems // *Physica A*. 1993. Vol. 194, № 1–4. P. 173–182.
8. *Roy A., Bhattacharjee J.K.* Chaos in the quantum double well oscillator: the Ehrenfest view revisited // *Phys. Lett. A*. Vol. 288, № 1. 2001. P. 1–3.
9. *Bagmanov A.T., Sanin A.L., Smirnovsky A.A.* Dynamical tunneling in system with non-monotonous potential and impenetrable walls // *Proc. of SPIE. Bellingham, WA*. 2006. Vol. 6253. P. 625303(1-9).
10. *Sanin A.L., Smirnovsky A.A., Bagmanov A.T.* Motion, tunneling and quantum revivals of wave packets into systems with distributed potential and boundary walls // *Proc. of SPIE*. 2007. Vol. 6597. P. 659705.
11. *Sanin A.L., Smirnovsky A.A.* Oscillatory motion in confined potential systems with dissipation in the context of the Schrodinger–Langevin–Kostin equation // *Phys. Lett. A*. 2007. Vol. 372, № 1. P. 21.
12. *Санин А.Л., Смирновский А.А.* Физика. Квантовая динамика. Санкт-Петербург: Изд. Политехн. универ., 2012. 280 с.
13. *de Falco D., Tamascelli D.* Quantum annealing and the Schrodinger–Langevin–Kostin equation // *J. Phys. Rev. A*. 2009. Vol. 79. P. 012315.

*Поступила в редакцию* 26.03.2014  
*После доработки* 24.04.2014

# QUANTUM ANHARMONIC OSCILLATOR WITH ONE-TERM POTENTIAL, FRICTION AND EXTERNAL FORCE

*A.L. Sanin<sup>1</sup>, A.A. Smirnovsky<sup>2</sup>*

<sup>1</sup>St.Petersburg State Polytechnical University

<sup>2</sup>Ioffe Physical-Technical Institute of the Russian Academy of Sciences

In the context of the Schrodinger–Langevin–Kostin equation, the quantum anharmonic oscillator with one-term 4-degree potential has been numerically investigated. The generated frequencies of the oscillator are defined by the non-equidistant energy spectra, the number of discrete frequencies depends on the initial state energy. Due to increasing of initial state energy, spectra are displaced in the direction of higher frequencies. Influence of friction on transition from excited state into ground one is also investigated. Role of friction on the generation of discrete spectral lines is also discussed.

*Keyword:* Quantum quartic oscillator, Schroedinger–Langevin–Kostin equation, free and driving oscillations, friction.



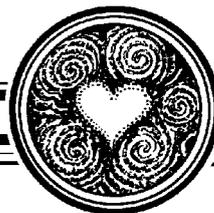
*Санин Андрей Леонардович* – родился в Ленинграде (1935). Окончил Ленинградский политехнический институт в 1963 (инженер-физик). В настоящее время работает на кафедре «Теретическая физика» Санкт-Петербургского государственного политехнического университета, доктор физико-математических наук, профессор кафедры. Область научных интересов: качественный анализ и численное моделирование электронных волн и структур; квантовая динамика гамильтоновых и диссипативных систем. Имеет более 200 публикаций в журналах и других изданиях, включая монографии («Структуры и хаос - проблемы физики», «Электронная синергетика», «Синергетика», «Физика. Квантовая динамика»).

195251 С.-Петербург, ул. Политехническая, 29  
Санкт-Петербургский государственный политехнический университет  
E-mail:andrelsanin@yandex.ru



*Смирновский Александр Андреевич* – родился в Ленинграде в 1982. Окончил магистратуру Санкт-Петербургского государственного политехнического университета (СПбГПУ) в 2005 году по направлению «Прикладные математика и физика», кандидат физико-математических наук. В настоящее время работает научным сотрудником в Физико-техническом институте им. А.Ф. Иоффе РАН и доцентом в СПбГПУ. Область научных интересов: квантовая механика, гидроаэродинамика, численное моделирование. Опубликовал более 20 статей.

194021 С.-Петербург, ул. Политехническая, 26  
Физико-технический институт им. А.Ф. Иоффе РАН  
E-mail:smirta@mail.ru



## ПРОСТРАНСТВЕННО-ВРЕМЕННЫЕ СТРУКТУРЫ В АКТИВНОЙ СРЕДЕ, ВЫЗВАННЫЕ ДИФфуЗИОННОЙ НЕУСТОЙЧИВОСТЬЮ\*

*А. А. Полежаев, М. Ю. Борина*

Физический институт им. П.Н. Лебедева РАН, Москва

В работе обсуждаются результаты исследования моделей типа «реакция-диффузия», обладающих диффузионной неустойчивостью и возникающих в таких системах пространственно-временных структур. В частности, в общем виде приведены условия как тьюринговой, так и волновой неустойчивостей в системах из трёх уравнений рассматриваемого типа с диагональной матрицей диффузии. Описаны качественные свойства, которыми должна обладать система для того, чтобы в ней могла произойти та или другая бифуркация. Приведены результаты исследования возможных типов пространственно-временных структур, возникших в ограниченной области в результате взаимодействия нескольких мод, ставших неустойчивыми вследствие волновой бифуркации. Показано, что в результате конкуренции мод в зависимости от величины параметра, определяющего силу взаимодействия, возможны лишь два режима: квазиодномерные бегущие волны (существует только одна ненулевая мода) или стоячие волны (все моды отличны от нуля). Обсужден возможный механизм перехода из режима стоячих волн в режим бегущих волн с половинной длиной волны, наблюдавшегося экспериментально в пространственно-распределенной реакции Белоусова–Жаботинского, диспергированной в обращенной микроэмульсии аэрозоля.

*Ключевые слова:* Активная среда, диффузионная неустойчивость, волновая бифуркация, амплитудные уравнения.

### Введение

Пространственно-временная самоорганизация в активных средах давно является предметом экспериментальных и теоретических исследований [1–3]. Весьма важную роль в изучении этих явлений сыграла модельная химическая система – так называемая реакция Белоусова–Жаботинского [4], в которой в пространственно-распределённом случае удалось вначале наблюдать спиральные и концентрические автоволны [5, 6], а позднее также и стационарные диссипативные структуры [7]. Качественно новые результаты в исследовании реакции Белоусова–Жаботинского были

\*Статья написана по материалам доклада на X Международной школе «Хаотические автоколебания и образования структур», 7–12 октября 2013 г. Саратов, Россия.

получены группой В. Ванага: они создали экспериментальную систему, в которой реакция протекает в микроэмульсии (растворы реагентов находятся в мицеллоподобных нанок капельках, диспергированных в неполярной жидкости) [8]. Помимо наблюдавшихся ранее, в этой системе удалось получить такие новые типы структур, как антиспирали, волновые пакеты, штрихволны, сегментированные спирали, локализованные колеблющиеся пятна – осциллоны и др. [9–14] (рис. 1).

Теоретический анализ показывает, что основной причиной возникновения большинства из этих структур является диффузионная неустойчивость. На возможность такой неустойчивости указал Алан Тьюринг – выдающийся математик, признанный одним из основателей информатики и теории искусственного интеллекта. Его считают первым теоретиком современного программирования и, наконец, первым в мире хакером. Во время Второй мировой войны Алан Тьюринг возглавлял группу, ответственную за криптоанализ сообщений военно-морского флота Германии. Тьюринг разработал ряд методов взлома, в том числе теоретическую базу для Bombe – машины, использованной для взлома немецкого шифратора Enigma. (Его «хакерская деятельность» внесла во время Второй мировой войны существенный вклад в победу союзных войск над германским флотом, а один из коллег Тьюринга однажды сказал: «Я не берусь утверждать, что мы выиграли войну благодаря Тьюрингу. Однако без него могли бы ее и проиграть».)

В сфере интересов Тьюринга была также математическая биология. В 1952 году в работе «Химическая основа морфогенеза» [15] он опубликовал исследования, посвященные математической теории образования структур в изначально однородной системе, где протекает химическая реакция между веществами, скорость диффузии которых недостаточна для полного перемешивания. Согласно Тьюрингу, систе-

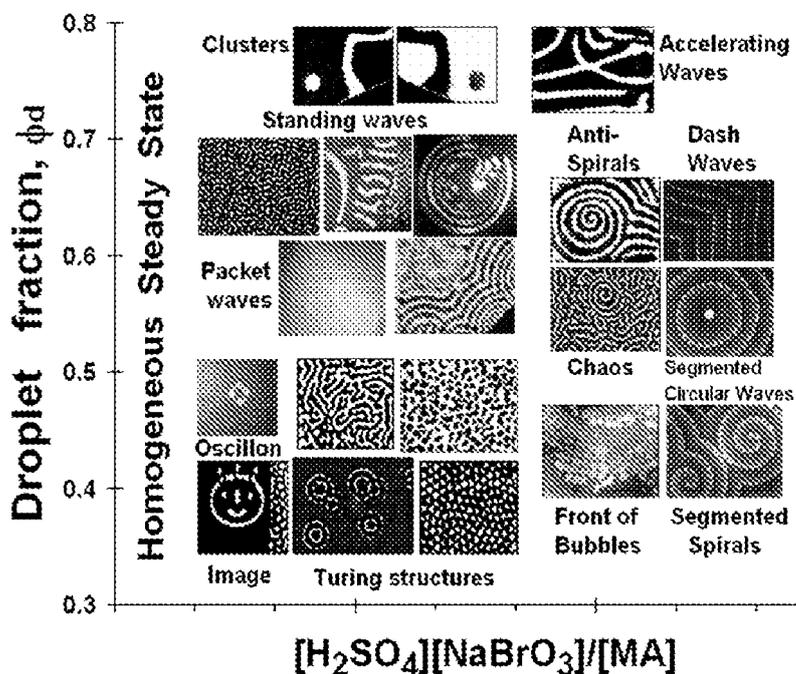


Рис. 1. Таблица структур, экспериментально обнаруженных в реакции Белоусова–Жаботинского, протекающей в микроэмульсии. Конкретный характер структуры зависит как от концентраций исходных реагентов (ось абсцисс), так и от объёмной доли нанок капельек (ось ординат) (из работы [14])

ма, находящаяся в отсутствие диффузии в однородном устойчивом состоянии, может потерять устойчивость относительно волн в некотором диапазоне волновых чисел, в котором одно из собственных значений характеристического уравнения линеаризованной системы становится положительным. Ключевую роль здесь играет неустойчивость, обусловленная диффузией, разрушающая исходное стационарное состояние и вызывающая переход в новое, пространственно неоднородное состояние.

Диффузионная неустойчивость, которая приводит к формированию периодических в пространстве и стационарных во времени концентрационных структур, так называемых диссипативных структур, носит название тьюринговской неустойчивости. В этом случае в соответствующей линеаризованной системе одно из собственных чисел становится положительным в некотором диапазоне волновых чисел, оставаясь действительным. Хорошо известно, что в двухкомпонентной модели это возможно, только если в ней присутствует автокатализ и коэффициенты диффузии компонентов различны (точнее, автокаталитическая переменная имеет меньший коэффициент диффузии).

Другой тип диффузионной неустойчивости, называемой волновой неустойчивостью, связан с тем, что положительной в ограниченном диапазоне волновых чисел становится действительная часть пары комплексно-сопряженных собственных чисел характеристического уравнения. Это порождает периодические в пространстве и времени волны или структуры.

Следует отметить, что в двухкомпонентной реакционно-диффузионной модели возможна лишь тьюринговская неустойчивость, но не волновая. Последняя может возникнуть только в системе, фазовая размерность которой не меньше трех.

В данной работе остановимся на нескольких проблемах, связанных с диффузионной неустойчивостью. Во-первых, покажем, как в явном виде выводятся условия возникновения неустойчивости в трехкомпонентной системе типа «реакция-диффузия» для случая диагональной матрицы диффузии. Выявим качественные свойства, которыми должна обладать система, чтобы в ней могла произойти как тьюринговская, так и волновая бифуркация. Покажем, что условия обеих неустойчивостей не противоречат друг другу и могут выполняться одновременно. Полученные результаты позволяют достаточно легко проводить полный параметрический анализ моделей такого рода.

Далее мы обсудим, какие пространственно-временные структуры порождаются волновой бифуркацией в многомерной среде. Проблема заключается в том, что в результате бифуркации одновременно становятся неустойчивыми несколько, а в случае неограниченной области – бесконечно много, мод. Будут выявлены возможные структуры и показано, что единственным определяющим параметром является сила взаимодействия между конкурирующими модами. Численные эксперименты на основе модели Гирера–Майнхарда, расширенной добавлением третьего уравнения, описывающего еще один быстро диффундирующий ингибитор, полностью подтверждают теоретические предсказания.

Наконец, мы обсудим возможный механизм перехода из режима стоячих волн с длиной волны  $\lambda_{SW}$  в режим бегущих волн с половинной длиной волны:  $\lambda_{TW} = \lambda_{SW}/2$ . Такой переход был обнаружен в пространственно-распределенной реакции Белоусова–Жаботинского, диспергированной в обращенной микроэмульсии аэрозоля ОТ [16].

# 1. Диффузионная неустойчивость в трехкомпонентной модели типа «реакция-диффузия»

Системы такого рода уже исследовались ранее. Так в работе [17] исследована диффузионная неустойчивость в трехкомпонентных системах типа реакция-диффузия с матрицей диффузии произвольного вида, при этом в общем виде выяснено, какими свойствами совместно должны обладать матрицы Якоби и диффузии, чтобы устойчивое в точечной системе стационарное состояние стало неустойчивым при наличии диффузии. В случае диагональной матрицы диффузии нам удалось вывести условия возникновения как тьюринговской, так и волновой бифуркаций в виде конкретных неравенств для параметров модели [18].

Рассмотрим систему из трех дифференциальных уравнений следующего вида:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = f(u, v, w) + D_1 \nabla^2 u, \\ \frac{\partial v}{\partial t} = g(u, v, w) + D_2 \nabla^2 v, \\ \frac{\partial w}{\partial t} = h(u, v, w) + D_3 \nabla^2 w. \end{cases} \quad (1)$$

Здесь  $f, g, h$  – нелинейные функции, описывающие взаимодействие переменных;  $D_1, D_2, D_3$  – соответствующие коэффициенты диффузии. Пусть  $(u^0, v^0, w^0)$  – однородное стационарное состояние системы, причем оно устойчиво в отсутствие диффузии. Линеаризуем уравнения (1) около стационарной точки

$$\begin{cases} \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} = a_{11}\bar{u} + a_{12}\bar{v} + a_{13}\bar{w} + D_1 \nabla^2 \bar{u}, \\ \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} = a_{21}\bar{u} + a_{22}\bar{v} + a_{23}\bar{w} + D_2 \nabla^2 \bar{v}, \\ \frac{\partial \bar{w}}{\partial t} = a_{31}\bar{u} + a_{32}\bar{v} + a_{33}\bar{w} + D_3 \nabla^2 \bar{w}. \end{cases} \quad (2)$$

Здесь  $a_{ij}$  ( $i, j = 1, 2, 3$ ) – постоянные коэффициенты, равные соответствующим частным производным, вычисленным в стационарной точке;  $\bar{u}, \bar{v}$  и  $\bar{w}$  – малые отклонения от положения равновесия  $u^0, v^0$  и  $w^0$ , соответственно. Представив их пропорциональными  $\exp(\lambda t + i\vec{k}\vec{r})$  и подставив в систему (2), найдём дисперсионное уравнение.

$$\lambda^3 - A\lambda^2 + B\lambda - C = 0, \quad (3)$$

где

$$A = \sigma - k^2(D_1 + D_2 + D_3),$$

$$B = \Sigma - k^2[D_1(a_{22} + a_{33}) + D_2(a_{11} + a_{33}) + D_3(a_{11} + a_{22})] + k^4(D_1D_2 + D_1D_3 + D_2D_3),$$

$$C = \Delta - k^2 \sum_{i=1}^3 D_i \theta_i + k^4(D_1D_2a_{33} + D_1D_3a_{22} + D_2D_3a_{11}) - k^6 D_1D_2D_3.$$

Здесь  $\sigma = a_{11} + a_{22} + a_{33}$  – след характеристической матрицы  $\{a_{ij}\}$ ,

$\Delta = a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}) -$   
ее детерминант,

$\Sigma = \sum_{i=1}^3 \theta_i$ , где  $\theta_i = a_{jj}a_{kk} - a_{jk}a_{kj}$ ,  $i \neq j \neq k$ .

Уравнение (3) – кубическое с действительными коэффициентами. Пусть  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  – его корни. Исследуемое состояние устойчиво, если для всех собственных значений характеристического уравнения  $\text{Re } \lambda_i(k^2) < 0$ ,  $i = 1, 2, 3$ . Как следует из критерия Рауса–Гурвица [19], однородное состояние системы устойчиво тогда и только тогда, когда

$$\begin{cases} A < 0, \\ B > 0, \\ C < 0, \\ AB - C < 0. \end{cases} \quad (4)$$

Определим те значения параметров, при которых однородное состояние системы становится неустойчивым, то есть существуют такие  $k \neq 0$ , что хотя бы для одного  $\lambda_i(k^2)$  ( $i = 1, 2, 3$ ),  $\text{Re } \lambda_i(k^2) > 0$ . Нарушение любого из неравенств (4) означает, что в системе произошла бифуркация потери устойчивости однородного состояния. Однако, в силу условия устойчивости однородного состояния в отсутствие диффузии,  $A < 0$  при любых  $k$ . Второе неравенство в (4) не может быть нарушено, если выполняются все остальные условия. Таким образом, либо нарушается условие  $C < 0$ , что означает появление в системе действительного положительного собственного числа, либо нарушается условие  $AB - C < 0$ , и тогда возникает пара комплексно-сопряженных собственных чисел с положительной действительной частью. Первый случай соответствует тьюринговской, а второй – волновой бифуркациям. Рассмотрим каждый из них более подробно.

**1.1. Бифуркация Тьюринга.** Найдем область параметров, соответствующую тьюринговской неустойчивости. Представим функцию  $C(k^2)$ , в виде  $C(k^2) = \Delta - \alpha_T k^2 + \beta_T k^4 - \delta_T k^6$ , где  $\alpha_T = \sum_{i=1}^3 D_i \theta_i$ ,  $\beta_T = D_1 D_2 a_{33} + D_1 D_3 a_{22} + D_2 D_3 a_{11}$ ,  $\delta_T = D_1 D_2 D_3$ .

Функция  $C(x)$  является кубической параболой, которая монотонно убывает, если  $\beta_T^2 - 3\alpha_T \delta_T > 0$ . В противном случае парабола имеет локальные экстремумы, при этом максимум равен

$$C_{\max}(k_0^2) = \Delta + \frac{1}{27\delta_T^2} [2(\beta_T^2 - 3\alpha_T \delta_T)^{\frac{3}{2}} + \beta_T(2\beta_T^2 - 9\alpha_T \delta_T)]$$

и достигается в точке  $k_0^2 = \frac{1}{3\delta_T} (\beta_T + \sqrt{\beta_T^2 - 3\alpha_T \delta_T})$ .

Для бифуркации Тьюринга необходимо, чтобы в некотором диапазоне волновых чисел  $C(k^2)$  стала больше нуля. Таким образом, для того, чтобы в системе имела место тьюринговская неустойчивость, необходимо выполнение условия

$$C_{\max}(k_0^2) = \Delta + \frac{1}{27\delta_T^2} [2(\beta_T^2 - 3\alpha_T \delta_T)^{\frac{3}{2}} + \beta_T(2\beta_T^2 - 9\alpha_T \delta_T)] > 0. \quad (5)$$

Неравенство (5) может быть выполнено, только если  $\beta_T > 0$ , а это возможно, если хотя бы один из коэффициентов на главной диагонали матрицы линеаризации больше нуля (хорошо известное условие наличия автокатализа). Кроме того,

соответствующий коэффициент диффузии должен быть мал по сравнению с двумя остальными. Таким образом, качественные условия возникновения диссипативных структур для трехкомпонентных моделей такие же, как и для двухкомпонентных.

Было показано [18], что в пределе, когда коэффициент диффузии первой, автокаталитической, переменной значительно меньше двух других, однородное стационарное состояние реакционно-диффузионной системы типа (1) обладает тьюринговской неустойчивостью, если параметры этой системы удовлетворяют условиям

$$a_{11} > 0, \sigma < 0, \Sigma > 0, \Delta < 0, \sigma\Sigma - \Delta < 0, \frac{D_2 D_3}{D_1^2} > \frac{27(-\Delta)}{4a_{11}^3}. \quad (6)$$

**1.2. Волновая неустойчивость.** Для нахождения области в параметрическом пространстве, соответствующей волновой неустойчивости, введём функцию  $F(k^2) = AB - C = \sigma\Sigma - \Delta - \alpha_V k^2 + \beta_V k^4 - \delta_V k^6$ . Здесь  $\alpha_V = D_1(\sigma^2 - a_{11}^2 - a_{13}a_{31} - a_{12}a_{21}) + D_2(\sigma^2 - a_{22}^2 - a_{12}a_{21} - a_{23}a_{32}) + D_3(\sigma^2 - a_{33}^2 - a_{13}a_{31} - a_{23}a_{32})$ ,  $\beta_V = (D_1 + D_3)(D_2 + D_3)(a_{11} + a_{22}) + (D_1 + D_2)(D_2 + D_3)(a_{11} + a_{33}) + (D_1 + D_2)(D_1 + D_3)(a_{22} + a_{33})$ ,  $\delta_V = (D_1 + D_2)(D_1 + D_3)(D_2 + D_3)$ .

Как и в предыдущем случае, функция  $F(k^2)$  имеет локальные экстремумы, если  $\beta_V^2 - 3\alpha_V \delta_V > 0$ . Для того, чтобы в системе имела место волновая неустойчивость, необходимо выполнение условия

$$F_{\max}(k_0^2) = \sigma\Sigma - \Delta + \frac{1}{27\delta_V^2} [2(\beta_V^2 - 3\alpha_V \delta_V)^{\frac{3}{2}} + \beta_V(2\beta_V^2 - 9\alpha_V \delta_V)] > 0, \quad (7)$$

где  $k_0^2$  – точка максимума функции  $F(k^2)$ .

Как и в случае, рассмотренном выше, неравенство (7) может быть выполнено, только если  $\beta_V > 0$ , но в данном случае это возможно, если сумма двух членов матрицы  $\{a_{ij}\}$ , стоящих на главной диагонали, больше нуля, и коэффициент диффузии, соответствующий третьей переменной, достаточно велик по сравнению с двумя остальными. В пределе, когда он существенно больше двух других ( $D_3 \gg D_1, D_2$ ), в реакционно-диффузионной системе типа (1) возникнет волновая неустойчивость, если параметры этой системы удовлетворяют условиям

$$(a_{11} + a_{22}) > 0, \sigma < 0, \Sigma > 0, \Delta < 0, \sigma\Sigma - \Delta < 0, \left(\frac{D_1 + D_2}{D_3}\right)^2 < \frac{4}{27} \frac{(a_{11} + a_{22})^3}{(\Delta - \sigma\Sigma)}. \quad (8)$$

## 2. Структуры в многомерной активной среде, возникающие вблизи волновой бифуркации

Непосредственно вблизи волновой бифуркации, как правило, наблюдается два типа структур: бегущие и стоячие волны [20]. В этом случае эффективным методом изучения таких структур является построение и последующее исследование амплитудных уравнений (см., например, [21, 22]). Однако проблема заключается в том, что в многомерном пространстве имеет место вырождение по направлениям, и вклад в формирование структуры может вносить много (в случае неограниченной области – бесконечно много) неустойчивых мод, имеющих одинаковые по модулю волновые

вектора. Ситуация несколько упрощается, когда рассматриваемая область ограничена, поскольку в этом случае набор критических мод, удовлетворяющих граничным условиям, конечен. Этот случай был исследован нами в работе [23]. Уравнения, описывающие амплитуды  $N$  взаимодействующих критических мод, имеют вид

$$\partial_t \tilde{A}_k = \tilde{A}_k - (1 - ic_1) \tilde{A}_k |\tilde{A}_k|^2 - h(1 - ic_2) \tilde{A}_k \cdot \sum_{j=1, j \neq k}^N |\tilde{A}_j|^2, \quad k \in \overline{1, N}. \quad (9)$$

Здесь  $\tilde{A}_k$  – комплексные амплитуды мод, соответствующих одинаковым по модулю, но разным по направлению волновым векторам, ставших неустойчивыми в результате волновой бифуркации. Параметр  $h$  характеризует силу конкуренции между модами; параметры  $c_1$  и  $c_2$  определяют отношение мнимых и действительных частей коэффициентов перед соответствующими кубическими членами.

Представим комплексные амплитуды  $\tilde{A}_k$  в виде  $\tilde{A}_k = A_k e^{i\varphi_k}$ , где  $A_k = |\tilde{A}_k|$ . Подставив их в уравнения (9), получим для модулей амплитуд следующую систему уравнений:

$$\partial_t A_i = A_i - A_i^3 - A_i h \sum_{j=1, j \neq i}^N A_j^2, \quad i \in \overline{1, N}. \quad (10)$$

Эти уравнения включают единственный параметр  $h$ . Остальные параметры, присутствующие в уравнениях (9), входят в уравнения для фаз  $\varphi_k$ , которые мы здесь не приводим.

Как было показано в работе [23], помимо тривиального решения, которое, очевидно, неустойчиво, все стационарные точки системы (10) с точностью до перестановки индексов имеют вид

$$A_i^{st} = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{1 + (p-1)h}}, & i \in \overline{1, p}, \\ 0, & i \in \overline{p+1, N}, \end{cases} \quad (11)$$

где  $p$  – некоторое целое число из интервала  $\overline{1, N}$ .

Для каждой из стационарных точек (11) имеется следующий набор собственных чисел:

$$\lambda_i = \begin{cases} -2(1 + (p-1)h), & i = 1 \\ 2(h-1), & i \in \overline{2, p} \\ 1-h, & i \in \overline{p+1, N} \end{cases} \quad (12)$$

Анализ собственных чисел (12) в зависимости от значения  $h$  дает следующий результат:

- если  $h \in (1, \infty)$ , то с точностью до перестановки индексов устойчиво решение  $A_1^{st} = 1$ ,  $A_i^{st} = 0$ ,  $i \in \overline{2, N}$ , соответствующее  $p = 1$ ;
- если  $h \in \left(-\frac{1}{N-1}, 1\right)$ , то устойчиво решение  $A_i^{st} = \frac{1}{\sqrt{1 + (N-1)h}}$ ,  $i \in \overline{1, N}$ , соответствующее  $p = N$ ;
- для  $p \in \overline{2, N-1}$  устойчивых решений нет.

Таким образом, доказано следующее утверждение:

**Из всего множества стационарных точек (11) системы (10), в зависимости от значения коэффициента  $h$ , устойчивыми могут быть только те точки, для которых либо  $p = 1$ , либо  $p = N$ , а именно: при  $h \in (1, \infty)$  имеется  $N$  устойчивых решений таких, что одна из амплитуд равна единице, а остальные обращаются в ноль; при  $h \in \left(-\frac{1}{N-1}, 1\right)$  существует единственное решение**

$$A_i^{st} = \frac{1}{\sqrt{1 + (N-1)h}}, \quad i \in \overline{1, N}.$$

Итак, в системе (9) вблизи волновой бифуркации в зависимости от силы связи конкурирующих мод  $h$  возможны лишь два режима – стоячие или квазиодномерные бегущие волны. Если параметр  $h$  достаточно велик,  $h > 1$ , одна из мод подавит остальные и сформируется бегущая волна. В противном случае, когда  $h$  мал,  $h \in \left(-\frac{1}{N-1}, 1\right)$ , моды сосуществуют друг с другом, причем имеют одинаковые амплитуды, что соответствует стоячей волне. Промежуточные режимы в системе (9) вблизи волновой бифуркации невозможны.

Полученные теоретические результаты были проверены на примере модели Гирера–Майнхардта [24], в которую было добавлено третье уравнение, соответствующее второму быстро диффундирующему ингибитору [23]. Выполнен параметрический анализ данной модели и построены амплитудные уравнения вблизи волновой бифуркации. При этом в явном виде была установлена взаимосвязь коэффициента  $h$  в уравнениях (9) и параметров исходной модели и, таким образом, определены области существования бегущих и стоячих волн. Для соответствующих значений параметров были проведены численные эксперименты, которые полностью подтвердили теоретические предсказания.

### 3. О механизме переключения стоячей волны в бегущую, сопровождающегося делением длины волны пополам

Основные пространственно-временные структуры в активных средах, порождаемые волновой бифуркацией, – это стоячие и бегущие волны. Иногда наблюдается переключение между этими двумя режимами, что было предметом изучения ряда экспериментальных и теоретических работ. Так переход между стоячими и бегущими волнами наблюдали в терморастворимой конвекции [25] и в цилиндрической конвекции Рэлея–Бенара [26]. Также переключение наблюдалось в периодически возбуждаемых колебательных системах, например, в конвекции бинарной смеси или в нематических жидких кристаллах [27]. Такой переход был индуцирован в реакции Белоусова–Жаботинского внешним периодическим возмущением [28]. Важно, однако, что во всех приведенных случаях длина волны оставалась неизменной.

В работе [16] приведено первое экспериментальное наблюдение перехода от стоячей к бегущей волне, в котором волновое число удваивается. Это явление наблюдали в реакции Белоусова–Жаботинского, диспергированной в обращенной микроэмульсии аэрозоля OT/Span-20 (в так называемой BZ-AOT/Span системе [14]). На рис. 2 приведены экспериментальные результаты, полученные этими авторами.

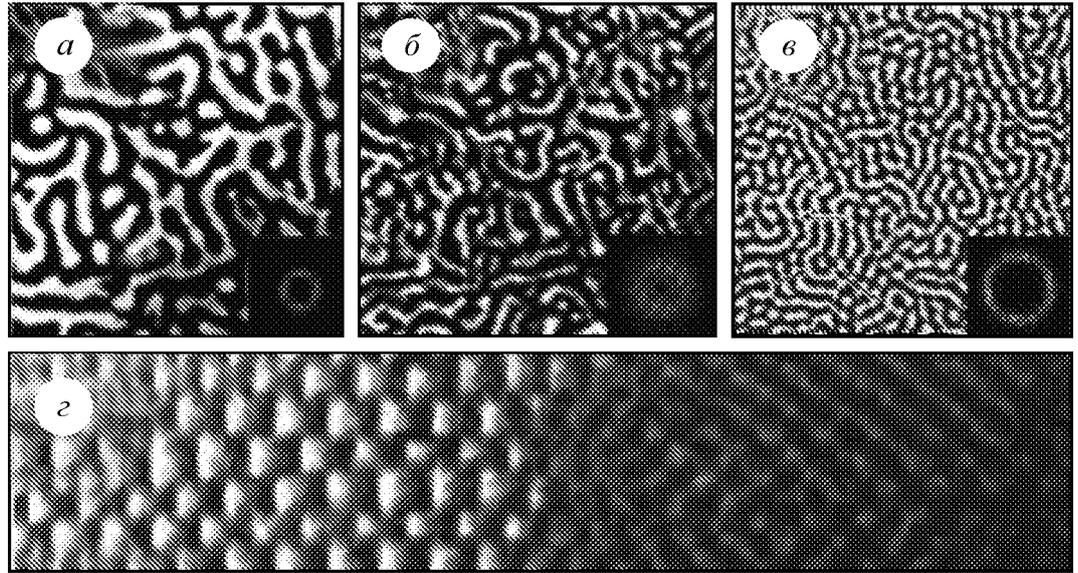


Рис. 2. Снимки стоячих волн (а), переходных структур (б) и бегущих волн (в), обнаруженных в BZ-AOT/Span системе. Пространственно-временной график (г) перехода из режима стоячих волн в режим бегущих, сопровождающийся делением длины волны пополам (из работы [16])

Математическая модель, объясняющая вышеописанный феномен, предложенная нами в работе [29], основана на нескольких предположениях относительно процессов, происходящих в одномерной активной среде, которые перечислены ниже.

1. Стоячая волна есть результат суперкритической волновой бифуркации. Волна описывается переменной  $u_1$ , которую можно представить в виде  $u_1(r, t) = \tilde{A}_1 e^{i(\omega t + kr)} + \tilde{A}_2 e^{i(\omega t - kr)}$ . Здесь  $\tilde{A}_1, \tilde{A}_2$  – комплексные амплитуды мод, ставших неустойчивыми в результате бифуркации и соответствующих одинаковым по модулю, но разным по направлению волновым векторам  $\pm k$  и частоте  $\omega$ . Как было показано выше, стоячая волна возникает в том случае, когда конкуренция между взаимодействующими модами достаточно мала.

2. Допустим, что в той же системе волна  $u_2(r, t) = \tilde{B}_1 e^{i(\omega_2 t + 2kr)} + \tilde{B}_2 e^{i(\omega_2 t - 2kr)}$  с удвоенным по сравнению со стоячей волной волновым числом  $2k$  и частотой  $\omega_2$  устойчива, но может быть возбуждена жестким образом вследствие субкритической волновой бифуркации. При этом конкуренция между модами достаточно велика.

3. Наконец, предположим, что имеет место резонанс между первой и второй волной, заключающийся в том, что у волны  $u_2(r, t)$  не только волновое число, но и частота в два раза больше, чем у первой волны:  $\omega_2 = 2\omega$ .

Амплитудные уравнения для модулей амплитуд  $A_i$  и  $B_i$ , где  $A_i = |\tilde{A}_i|$ ,  $B_i = |\tilde{B}_i|$ ,  $i = 1, 2$ , имеют вид [29]

$$\begin{cases} \partial_t A_1 = A_1 - A_1^3 - h_1 A_1 A_2^2 - \delta_1 (B_1^2 + B_2^2) A_1, \\ \partial_t A_2 = A_2 - A_2^3 - h_1 A_2 A_1^2 - \delta_1 (B_1^2 + B_2^2) A_2, \\ \partial_t B_1 = -\alpha B_1 + B_1^3 - \beta B_1^5 - h_2 B_1 B_2^2 - \delta_2 (A_1^2 + A_2^2) B_1 + \sigma \cos \psi_1(t) A_1^2, \\ \partial_t B_2 = -\alpha B_2 + B_2^3 - \beta B_2^5 - h_2 B_2 B_1^2 - \delta_2 (A_1^2 + A_2^2) B_2 + \sigma \cos \psi_2(t) A_2^2. \end{cases} \quad (13)$$

Во второй паре уравнений системы (13) последние слагаемые в правой части обусловлены резонансом;  $\psi_i$  – разность фаз комплексных амплитуд  $\tilde{A}_i$  и  $\tilde{B}_i$ , медленно меняющаяся со временем;  $h_i$  и  $\delta_i$  – силы связи соответствующих взаимодействующих мод,  $i = 1, 2$ .

Покажем теперь, основываясь на уравнениях (13), каким образом осуществляется переход от стоячей волны к бегущей волне с половинной длиной. В результате случайного начального возмущения амплитуды  $A_i$  начнут расти, амплитуды же  $B_i$  останутся нулевыми, так как для них исходное состояние является устойчивым. В результате сформируется стоячая волна, при этом амплитуды  $A_1$  и  $A_2$  станут равными  $1/\sqrt{1+h_1}$ . В свою очередь, это приведет к тому, что кривая, определяющая состояния равновесия во второй паре уравнений, будет сдвигаться вверх. После этого в некоторый момент времени, когда  $\cos \psi_i(t)$  ( $i = 1$  или  $2$ ) станет равным единице, при условии, что  $\sigma > \frac{1+h_1}{25\beta} (20\beta\alpha' - 3 + \sqrt{9 - 20\beta\alpha'}) \sqrt{\frac{3 - \sqrt{9 - 20\beta\alpha'}}{10\beta}}$ , где  $\alpha' = \alpha + 2\delta_2/(1+h_1)$ , у соответствующей амплитуды  $B_i$  исчезнет нулевое устойчивое состояние, что приведет к переключению в возбужденное состояние. В силу достаточно сильной конкуренции эта мода подавит три остальные, что будет означать переход системы в состояние бегущей волны с половинной длиной.

С учетом полученных оценок было найдено численное решение системы (13). В начальный момент времени амплитуды имели нулевые значения и возмущались случайным шумом. На рис. 3 приведено изменение во времени амплитуд  $A_1$ ,  $B_1$  и  $B_2$  для случая  $h_2 > 1 - 4\alpha\beta$  (амплитуда  $A_2$  ведет себя аналогично  $A_1$ ). Поведение системы описывается переменной  $u$ , являющейся суммой всех четырех мод:  $u(r, t) = A_1 e^{i(\omega t + kr)} + A_2 e^{i(\omega t - kr)} + B_1 e^{i(\omega_2 t + 2kr)} + B_2 e^{i(\omega_2 t - 2kr)}$ . На рис. 4 представлен пространственно-временной график поля результирующей волны  $u$  с учетом полученной выше зависимости амплитуд от времени, который качественно аналогичен экспериментальному (см. рис. 2,  $\varepsilon$ ).

Следует сделать два замечания. К сожалению, нам не удалось найти пример реакционно-диффузионной модели, которая обладает требуемыми свойствами. По сути дела, требуется решить обратную задачу – по амплитудным уравнениям построить порождающую их кинетическую модель. Эта задача весьма сложна и пока не решена. Условие резонанса с позиции теории динамических систем делает ситу-

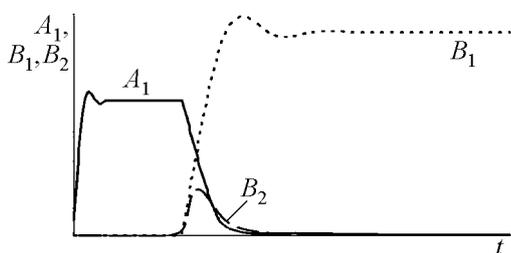


Рис. 3. Временная эволюция амплитуд  $A_1$ ,  $B_1$  и  $B_2$  для случая перехода «стоячая волна  $\lambda_{SW}$  – бегущая волна  $\lambda_{TW} = \lambda_{SW}/2$ »

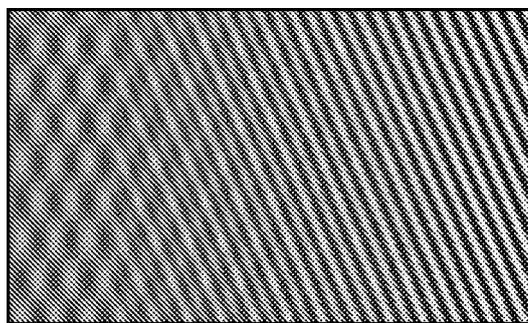


Рис. 4. Пространственно-временной график  $u(r, t)$  перехода «стоячая волна  $\lambda_{SW}$  – бегущая волна  $\lambda_{TW} = \lambda_{SW}/2$ »

ацию негрубой. Однако, на наш взгляд, это не является в данном случае проблемой: в реальной химической системе происходит непрерывный дрейф параметров, при этом резонанс может в какой-то момент наступить, что и приведет к наблюдаемому переключению между режимами.

### Заключение

В данной работе приведены результаты исследования моделей типа «реакция-диффузия», обладающих диффузионной неустойчивостью, и возникающих в таких системах пространственно-временных структур. В частности, в общем виде получены условия как тьюринговской, так и волновой неустойчивостей в системах из трёх уравнений рассматриваемого типа с диагональной матрицей диффузии. Выявлены качественные свойства, которыми должна обладать система для того, чтобы в ней могла произойти та или другая бифуркация. В случае тьюринговской бифуркации в системе необходимо наличие автокаталитической переменной (присутствие положительного члена на главной диагонали матрицы линеаризации), которая имеет достаточно малый коэффициент диффузии по сравнению с двумя другими. Эти условия совпадают с таковыми для двухкомпонентной реакционно-диффузионной модели [30].

Для развития волновой неустойчивости система должна удовлетворять несколько иным условиям, а именно: помимо того, что она должна содержать автокаталитическую переменную, необходимо, чтобы сумма двух членов на главной диагонали матрицы линеаризации была положительной, то есть положительный член главной диагонали должен быть больше по модулю хотя бы одного из двух других членов (при этом сумма всех трех членов отрицательна); кроме того, требуется, чтобы коэффициент диффузии переменной, соответствующей наименьшему члену на главной диагонали, был существенно больше двух других.

Были выделены области в параметрическом пространстве, отвечающие существованию той или иной бифуркации. Показано, что условия тьюринговской и волновой неустойчивостей не противоречат друг другу и могут выполняться одновременно. При этом бифуркации будут происходить в различных непересекающихся диапазонах волновых чисел: характерный масштаб, соответствующий тьюринговской неустойчивости, всегда меньше масштаба волновой неустойчивости.

Выявлены структуры, которые могут возникнуть в многомерной активной среде в результате волновой бифуркации. Для этого вблизи границы волновой неустойчивости построены амплитудные уравнения для  $N$  взаимодействующих между собой мод, удовлетворяющих граничным условиям. Показано, что в результате такого взаимодействия в зависимости от силы межмодовой конкуренции возможны лишь два режима: или квазиодномерные бегущие волны (существует только одна ненулевая мода), или стоячие волны (все  $N$  мод отличны от нуля). Решение с  $p$  ( $p \in \overline{2, N-1}$ ) отличных от нуля мод является неустойчивым и не может быть реализовано.

Наконец, обсужден возможный механизм перехода из режима стоячих волн с длиной волны  $\lambda_{SW}$  в режим бегущих волн с половинной длиной волны:

$\lambda_{TW} = \lambda_{SW}/2$ . Такой переход был обнаружен экспериментально в пространственно-распределенной реакции Белоусова–Жаботинского, диспергированной в обращенной микроэмульсии аэрозоля. Задача решалась в пространственно одномерном случае с использованием аппарата амплитудных уравнений типа Гинзбурга–Ландау. Продемонстрировано, что переход возможен при выполнении нескольких условий, важнейшим из которых является резонанс между модами, соответствующими стоячей и бегущей волнам, заключающийся в том, что у волны с удвоенным волновым числом частота также в два раза больше.

Приведены условия на силы связи между взаимодействующими модами, при выполнении которых в модели реализуется сценарий перехода от стоячей к бегущей волне половинного периода, наблюдаемого в эксперименте. Результат теоретического анализа подтверждается численным моделированием.

*Работа выполнена при частичной поддержке РФФИ: грант 14-01-00196.*

### **Библиографический список**

1. *Николис Г., Пригожин И.* Самоорганизация в неравновесных системах. М.: Мир, 1979. 512 с.
2. *Пригожин И.* От существующего к возникающему. М.: Наука, 1985. 327 с.
3. *Хакен Г.* Синергетика. М.: Мир, 1980. 406 с.
4. *Zhabotinsky A.M.* A history of chemical oscillations and waves// *Chaos*. 1991. Vol. 1. P. 379.
5. *Fields R.J., Burger M.* Oscillations and travelling waves in chemical systems. New York: Wiley, 1985. 681 p.
6. *Kapral R., Showalter K.* Chemical waves and patterns. Dordrecht: Kluwer, 1995. 524 p.
7. *Castets V., Dulos E., Boissonade J., Kepper P.D.* Experimental evidence of a sustained standing Turing-type nonequilibrium chemical pattern// *Phys. Rev. Lett.* 1990. Vol. 64. P. 2953.
8. *Vanag V.K., Epstein I.R.* Pattern formation in a tunable medium: The Belousov–Zhabotinsky reaction in an aerosol OT microemulsion // *Phys. Rev. Lett.* 2001. Vol. 87. 228301.
9. *Gong Y., Christini D.J.* Antispiral waves in reaction-diffusion systems // *Phys. Rev. Lett.* 2003. Vol. 90. 088302.
10. *Vanag V.K., Epstein I.R.* Packet waves in a reaction-diffusion system // *Phys. Rev. Lett.* 2002. Vol. 88. 088303.
11. *Vanag V.K., Epstein I.R.* Dash waves in a reaction-diffusion system // *Phys. Rev. Lett.* 2003. Vol. 90. 098301.
12. *Yang L., Berenstein I., Epstein I.R.* Segmented waves from a spatiotemporal transverse wave instability // *Phys. Rev. Lett.* 2005. Vol. 95. 038303.
13. *Vanag V.K., Epstein I.R.* Resonance-induced oscillons in a reaction-diffusion system // *Phys. Rev. E.* 2006. Vol. 73. 016201.

14. Ванэг В.К. Волны и динамические структуры в реакционно-диффузионных системах. Реакция Белоусова–Жаботинского в обращенной микроэмульсии // УФН. 2004. Т. 174, № 9. С. 991.
15. Turing A.M. The chemical basis of morphogenesis // Philos. Trans. R. Soc. Lond. B. Biol. Sci. 1952. Vol. 237. P. 37.
16. Kaminaga A., Vanag V., Epstein I. Wavelength halving in a transition between standing waves and traveling waves// Phys. Rev. Lett. 2005. Vol. 95. P. 058302.
17. Еленин Е.Г., Куркина Е.С. Диффузионная неустойчивость в трехкомпонентных системах типа «реакция-диффузия». Реакция (NO+CO)/Pt(100) // Изв. вуз. Математическое моделирование. 1994. Т. 6, № 8. С. 17.
18. Борина М.Ю., Полежаев А.А. Диффузионная неустойчивость в трехкомпонентной модели типа «реакция-диффузия» // Компьютерные исследования и моделирование. 2011. Т. 3, № 2. С. 135.
19. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. М.: Наука, 1967. 576 с.
20. Zhabotinsky A.M., Dolnik M., Epstein I.R., Rovinsky A.B. Spatio-temporal patterns in a reaction-diffusion system with wave instability // J. Chem. Science. 2000. Vol. 55. P. 223.
21. Kuramoto Y. Chemical Oscillations, Waves, and Turbulence. Springer-Verlag, Berlin, 1984. 156 p.
22. Nicolis G. Introduction to nonlinear science. Cambridge University Press, 1995. 254 p.
23. Борина М.Ю., Полежаев А.А. Пространственно-временные структуры в многомерной активной среде, обусловленные многомодовым взаимодействием вблизи волновой бифуркации // Изв. вуз. Прикладная нелинейная динамика. 2012. Т. 20, № 6. С. 15.
24. Gierer A., Meinhardt H. A theory of biological pattern formation // Kibernetik. 1972. Vol. 12. P. 30.
25. Deane A.E., Knobloch E., Toomre J. Traveling waves and chaos in thermosolutal convection // Phys. Rev. E. 1987. Vol. 36. P. 2862.
26. Boronska K., Tuckerman L.S. Standing and travelling waves in cylindrical Rayleigh–Benard convection // J. Fluid Mech. 2006. Vol. 559. P. 279.
27. Rehberg I., Rasenat S., Fineberg J., de la Torre Juarez M., Steinberg V. Temporal modulation of traveling waves // Phys. Rev. Lett. 1988. Vol. 61. P. 2449.
28. Marts B., Lin A.L. Transition from traveling to standing waves in the 4:1 resonant Belousov–Zhabotinsky reaction // Phys. Rev. Lett. E. 2008. Vol. 77. P. 026211.
29. Борина М.Ю., Полежаев А.А. О механизме переключения стоячей волны в бегущую, сопровождающегося делением длины волны пополам // Компьютерные исследования и моделирование. 2012. Т. 4, № 4. С. 673.
30. Романовский Ю.М., Степанова Н.В., Чернавский Д.С. Математическая биофизика. М.: Наука, 1984. 304 с.

Поступила в редакцию 8.05.2014

## SPATIAL-TEMPORAL PATTERNS IN ACTIVE MEDIUM CAUSED BY DIFFUSION INSTABILITY

*A. A. Polezhaev and M. Yu. Borina*

P.N. Lebedev Physical Institute of the Russian Academy of Sciences

The results of investigation of reaction-diffusion type models demonstrating diffusion instability are presented. In particular, in general case the condition for both Turing and wave instabilities are obtained for three equations of this type with the diagonal diffusion matrix. Qualitative properties of the system, in which bifurcations of each of the two types can take place, are clarified. Investigation of a set of amplitude equations, describing interaction of several modes which became unstable due to the wave bifurcation, is carried out. It is shown that as a result of competition between modes depending on the value of the parameter defining the strength of interaction only two regimes are possible: either quasi one-dimensional travelling waves (there exists only one nonzero mode) or standing waves (all the modes are nonzero). A possible mechanism for the transition from standing waves to traveling waves with a half wavelength, observed in the Belousov–Zhabotinsky reaction dispersed in a water-in-oil aerosol microemulsion, is considered.

*Keywords:* Active medium, diffusion instability, wave bifurcation, amplitude equations.



*Полезжаев Андрей Александрович* – родился в Москве (1953). Окончил Московский физико-технический институт (1976). Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук (МФТИ, 1979) и доктора физико-математических наук (МГУ, 1994) в области теории нелинейных динамических систем, моделирования процессов пространственно-временной самоорганизации в системах различной природы, математической биофизики. С 1979 года работает в ФИАНе, в настоящее время – заведующим сектором теоретических проблем биофизики. Опубликовал более 100 научных статей по направлениям, указанным выше. Заместитель главного редактора журнала «Компьютерные исследования и моделирование».

119991 Москва, Ленинградский пр-т, 53  
Физический институт им. П.Н. Лебедева РАН  
E-mail: apol@lpi.ru



*Борина Мария Юрьевна* – родилась в 1987 году в Кемерово, окончила Московский инженерно-физический институт (2010). Защитила диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук (2013). В настоящее время – младший научный сотрудник ФИАН. Имеет пять публикаций в реферируемых научных журналах.

119991 Москва, Ленинградский пр-т, 53  
Физический институт им. П.Н. Лебедева РАН  
E-mail: mariazhur@mail.ru

Зав. редакцией *Н.Н. Левина*  
Редакторы *Н.Н. Левина, Л.А. Сидорова*  
Оформление художника *Д.В. Соколова*  
Оригинал-макет подготовлен  
*И.А. Пономаревой, О.Н. Строгановой*  
в пакете  $L^A T_E X$

Подписка на 2014 год осуществляется  
по каталогу Агентства Роспечать  
«Газеты. Журналы», индекс 73498  
и по договору между Подписчиком  
(юридическим или физическим лицом)  
и Издателем (Саратовским государственным университетом)

Стоимость подписки на 2014 год 1080 руб. (6 номеров)  
Заявки на заключение договора принимаются  
по почте, по телефону редакции, по эл. почте редакции

Адрес редакции: 410012, Саратов, Астраханская, 83  
Тел./факс: (845-2) 52-38-64  
E-mail: and@nonlin.sgu.ru

Распространение журнала осуществляется  
редакцией журнала по адресной системе

**Условия подписки на электронную версию журнала на сайте  
Научной электронной библиотеки <http://elibrary.ru>**

Сдано в набор 1.06.2014. Подписано к печати 21.07.2014  
Формат 70x108/16. Бумага офсетная. Печать офсетная  
Усл. печ. л. 11,20 (8,0). Уч.-изд. л. 11,0. Заказ №123-т

Отпечатано в Типографии ФГБОУ ВПО СГУ  
410012 Саратов, Б.Казачья, 112А, тел.27-33-85

© Редакция журнала  
«Известия вузов. ПНД», 2014  
© Оформление художника  
Д.В. Соколова, 2014