



## ПОЛИНОМИАЛЬНЫЕ СОБСТВЕННЫЕ ФУНКЦИИ ОПЕРАТОРА ПЕРРОНА–ФРОБЕНИУСА

*В. М. Аникин, С. С. Аркадакский, С. Н. Купцов, А. С. Ремизов*

Саратовский национальный исследовательский  
государственный университет им. Н.Г. Чернышевского  
Россия, 410012 Саратов, Астраханская, 83

E-mail: anikinvm@info.sgu.ru

В работе выявляется структура полиномиальных собственных функций и функций ядра оператора Перрона–Фробениуса, соотнесенного с одномерными хаотическими отображениями, итеративная функция которых обладает следующими свойствами: кусочно-линейный характер; полные ветви, каждая из которых переводит область своего задания на полный интервал определения отображения; произвольный наклон ветви (области задания ветви), отсутствие щелей между ветвями.

Знание решения спектральной задачи позволяет аналитически определить скорость установления инвариантного распределения в системе, скорость расщепления корреляций в динамической системе, обладающей хаотическими свойствами, строить разложение функций, аналогичные разложению Эйлера–Маклорена.

В качестве метода решения спектральной задачи используется комбинированный подход, основанный на методе производящей функции для собственных функций оператора и методе неопределенных коэффициентов.

Впервые получено общее аналитическое решение спектральной задачи для случая произвольных наклона кусочно-линейных ветвей отображения и их сочетания.

Найдено решение задачи на полиномиальные собственные функции и собственные значения оператора Перрона–Фробениуса для произвольных кусочно-линейных отображений с полными ветвями без «щелей» – конечных областей нулевого значения итеративной функции. Определен также общий вид функций, составляющих ядро оператора. Результаты верифицируются на примере сдвигов Бернулли.

Факторизация производящей функции для собственных функций оператора позволяет найти универсальный набор рекуррентно вычисляемых коэффициентов, на основе которых и конструируются собственные полиномиальные функции. Полученные решения включают как частные случаи решения подобной задачи для отображений, представляющих композицию полных линейных ветвей, но характеризующихся одинаковым модулем производной и произвольным чередованием знака производной (сдвиги Бернулли, разнообразные пилообразные отображения).

*Ключевые слова:* Кусочно-линейные хаотические отображения, оператор Перрона–Фробениуса, полиномиальные собственные функции оператора, ядро оператора.

DOI:10.18500/0869-6632-2016-24-4-6-16

*Ссылка на статью:* Аникин В.М., Аркадакский С.С., Купцов С.Н., Ремизов С.А. Полиномиальные собственные функции оператора Перрона–Фробениуса // Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика, 2016. Т. 24, № 4. С. 6–16.

## Введение

Эволюционные свойства хаотических отображений вида

$$x_{n+1} = g(x_n), \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (1)$$

где  $g(x_n)$  нелинейная (кусочно-линейная) итеративная функция, можно изучать дуальным образом – посредством траекторного и вероятностного анализа. Траекторное описание имеет определенный смысл лишь при наличии точного (представленного функционально через стартовое значение и число итераций) выражения для итераций отображения. Это открывает перспективы для альтернативного аналитического решения задач, в которых требуется найти опять же статистические характеристики отображения с учетом вероятностного распределения стартового значения  $x_0$  [1,2]. Поскольку траектории отображений характеризуются чувствительной зависимостью от стартового значения, то траекторное описание с неизбежностью в конечном итоге сменяется вероятностным, и тогда интересуются не конкретным значением динамической переменной, а вероятностью принадлежности этого значения некоторой подобласти определения отображения. Главная роль при вероятностном описании эволюционного процесса принадлежит линейному оператору Перрона–Фробениуса (ОПФ) [1–3], задающему правило преобразования вероятностных плотностей при итерациях отображения, когда стартовое значение априори рассматривается как случайное число. Асимптотическое значение вероятностного распределения динамической переменной называют инвариантным распределением рассматриваемого отображения. В иных терминах – это «неподвижная точка» ОПФ, собственная функция оператора с собственным числом, равным единице. Другим собственным функциям ОПФ отвечают значения, меньшие единицы.

Собственным функциям и собственным числам оператора Перрона–Фробениуса приписывают фундаментальное [4,5] и прикладное [1,6] значение. Скажем, второе собственное число ОПФ для отображения Гаусса [1,6] Д. Кнут возводит в ранг фундаментальной константы [5, с. 411]. Именно собственные числа ОПФ определяют скорость установления инвариантного распределения и скорость расцепления корреляций в хаотической системе. Собственные функции оператора входят в аналитические выражения для автокорреляционных функций орбит (траекторий) хаотических отображений, а также могут быть использованы в качестве базисных составляющих при разложении функций в ряды [7]. Знание решения спектральной задачи для некоторых базовых отображений позволяет легко находить решение спектральной задачи для топологически сопряженных отображений [8]. Такие отображения могут быть определены на произвольных (в том числе бесконечных) интервалах и обладать, естественно, инвариантной мерой, отличной от равномерного распределения. Решение спектральной задачи для не одномерных отображений с независимым изменением координатных составляющих (отображений Coumno) очевидным образом находится посредством соответствующего комбинирования решений задач на нахождение собственных функций и чисел ОПФ для отдельных составляющих «многомерного» отображения.

В этой связи представляет несомненный интерес нахождение явного вида собственных функций и собственных чисел ОПФ. Приоритет в постановке спектральных задач для одномерных хаотических отображений принадлежит участникам евро-

пейско-американской научной группы И.Р. Пригожина [9]. Решением этой проблемы в Саратовском университете занимается научный коллектив, у истоков которого стоял А.Ф. Голубенцев [1,10]. Для достижения цели использовались методы производящей функции, инвариантных функциональных подпространств и неопределенных коэффициентов. В качестве объектов выступали кусочно-линейные отображения (конечных областей с нулевым значением итеративной функции), обладающие одинаковым модулем тангенса наклона линейных ветвей, переводящих свой отрезок определения на полный (как правило, единичный) интервал [1–3, 11–16].

Настоящая работа направлена на дальнейшее обобщение результатов по решению спектральной задачи для оператора Перрона–Фробениуса для кусочно-линейных отображений с полными ветвями, но определенными на промежутках различной длины (то есть с различными по модулю значениями тангенса угла наклона). Ниже рассматривается комбинированный метод производящих функций и неопределенных коэффициентов решения этой задачи для нахождения полиномиальных собственных функций оператора.

### 1. Определение ядра и собственных функций оператора Перрона–Фробениуса

Рассмотрим на единичном промежутке  $(0; 1)$  отображение (1) с кусочно-монотонной итеративной функцией вида

$$g(x) = \sum_{k=1}^n g_k(x) \chi_{(a_{k-1}, a_k]}(x), \quad g(0) = 0, \quad (2)$$

где  $0 = a_0 < a_1 < \dots < a_n = 1$  – точки разбиения единичного промежутка;  $g_k(x)$  – строго монотонная и дифференцируемая функция на подынтервале  $(a_{k-1}, a_k]$ , отображающая  $(a_{k-1}, a_k]$  на единичный полуинтервал  $(0; 1]$ ;  $\chi_{(a_{k-1}, a_k]}$  – характеристическая функция подынтервала  $(a_{k-1}, a_k]$ .

С отображением (2) ассоциируется оператор Перрона–Фробениуса

$$Pf(x) = \sum_{k=1}^n f(\phi_k(x)) |\phi_k'(x)|, \quad (3)$$

где функция  $f(x)$  имеет смысл вероятностной плотности, а через  $\phi_k = g_k^{-1}$  обозначена обратная функция для монотонной ветви отображения  $g_k(x)$ . Функции  $\phi_k$  можно доопределить в нуле по непрерывности.

Ядро (нуль-пространство) оператора  $P$  определяется уравнением

$$\sum_{k=1}^n f(\phi_k(x)) |\phi_k'(x)| = 0, \quad (4)$$

которое можно переписать следующим образом:

$$f(\phi_n(x)) |\phi_n'(x)| - \sum_{k=1}^{n-1} f(\phi_k(x)) |\phi_k'(x)| = 0. \quad (5)$$

После замены  $t = \phi_n(x)$ ,  $x = g_n(t)$  уравнение (5) можно записать в виде

$$f(t) = |g'_n(t)| \sum_{k=1}^{n-1} f(\phi_k(g_n(t))) |\phi'_k(g_n(t))| \quad (6)$$

для  $t \in (a_{n-1}, a_n]$ . Определив функцию  $f$  произвольным образом на  $[a_0, a_{n-1}]$  и с помощью равенства (6) на  $(a_{n-1}, a_n]$ , получим, что  $f$  принадлежит ядру оператора  $P$ , определяемого соотношением (3).

Рассмотрим в качестве примера частный случай:  $n = 2$ , итерационная функция симметрична относительно середины отрезка

$$f_2(x) = f_1(1-x), \quad \frac{1}{2} \leq x \leq 1; \quad \phi_2(x) = 1 - \phi_1(x).$$

В этом случае соотношение (6) даёт для произвольного элемента нуль-пространства:

$$F_2(x) = -F_1(1-x), \quad \frac{1}{2} \leq x \leq 1,$$

то есть если итерационная функция симметрична относительно середины единичного отрезка, то нуль-пространство состоит из функций, антисимметричных относительно середины отрезка.

Рассмотрим теперь в качестве плотности равномерного распределения. Тогда (3) примет вид

$$P\chi_{[1,0]}(x) = \sum_{k=1}^n \chi_{[1,0]}(\phi_k(x)) |\phi'_k(x)| = \sum_{k=1}^n |\phi'_k(x)| \cdot \chi_{[1,0]}(x). \quad (7)$$

Из равенства (7) следует, что функция  $\chi_{[1,0]}(x)$  является неподвижной точкой оператора Перрона–Фробениуса  $P$  (инвариантной плотностью отображения (2)) тогда и только тогда, когда

$$\sum_{k=1}^n |\phi'_k(x)| = 1. \quad (8)$$

В [17] приведены примеры построения на основе (8) кусочно-нелинейных отображений с равномерным инвариантным распределением.

## 2. Спектральная задача для кусочно-линейных отображений с полными ветвями и произвольным наклоном ветвей

Рассмотрим оператор Фробениуса–Перрона в случае, когда функции  $g_k$  и  $\phi_k$  линейные, и

$$\phi_k(x) = (-1)^{\sigma_k} \Delta a_k x + r_k, \quad (9)$$

где величина  $\sigma_k$  характеризует направление наклона линейной ветви отображения (9) и определяется как

$$\sigma_k = \begin{cases} 0, & \phi'_k(x) > 0, \\ 1, & \phi'_k(x) < 0, \end{cases}$$

$\Delta a_k = a_k - a_{k-1}$  – угловой коэффициент  $k$ -й ветви отображения и одновременно длина  $k$ -го отрезка разбиения; значение параметра  $r_k$  уравнения (6) выражается через границы подынтервала  $(a_{k-1}, a_k]$  как  $r_k = \sigma_k a_k + (1 - \sigma_k) a_{k-1}$ .

В соответствии с (9) имеем  $|\phi'_k(x)| = \Delta a_k$ , тогда

$$\sum_{k=1}^n |\phi'_k(x)| = \sum_{k=1}^n |\Delta a'_k(x)| = 1,$$

поэтому рассматриваемое отображение имеет равномерное инвариантное распределение и является базовым.

Оператор Фробениуса–Перрона для отображения с линейными ветвями будет иметь вид

$$Pf(x) = \sum_{k=1}^n \Delta a_k ((-1)^{\sigma_k} \Delta a_k x + r_k). \quad (10)$$

Будем решать задачу нахождения собственных значений и собственных функций оператора (10):

$$\sum_{k=1}^n \Delta a_k f((-1)^{\sigma_k} \Delta a_k x + r_k) = \lambda f(x). \quad (11)$$

Поскольку уравнение (11), определяющее собственные функции оператора, содержит только линейное преобразование независимой переменной, собственные функции оператора являются полиномами, и задача сводится к определению собственных чисел и коэффициентов соответствующих полиномов. Эта задача может быть решена стандартным способом: будем считать, что

$$f(x) = f_m(x) = \sum_{j=0}^m \frac{B_j}{j!} x^j, \quad B_m = 1. \quad (12)$$

Тогда вместо (11) имеем:

$$\sum_{k=1}^n \Delta a_k f_m((-1)^{\sigma_k} \Delta a_k x + r_k) = \lambda_m f_m(x). \quad (13)$$

Приравнивая коэффициенты при  $x^m$  в левой и правой частях равенства, получаем соотношение, определяющее собственные числа оператора:

$$\lambda_m = \sum_{k=1}^n (-1)^{\sigma_k m} (\Delta a_k)^{m+1}. \quad (14)$$

Остальные  $m$  равенств дают линейную систему уравнений относительно коэффициентов полиномов  $B_j$ , решением которой и исчерпывается поставленная задача, однако выкладки при этом являются достаточно громоздкими. Выкладки можно существенно упростить и получить выражение для  $B_j$  в явном виде, если воспользоваться следующим подходом. Продифференцируем (13)  $l$  раз, тогда получим

$$\sum_{k=1}^n (-1)^{\sigma_k l} (\Delta a_k)^{l+1} f_m^{(l)}((-1)^{\sigma_k} \Delta a_k x + r_k) = \lambda f_m^{(l)}(x). \quad (15)$$

Полагая в (15)  $x = 0$ , получаем

$$\sum_{k=1}^n (-1)^{\sigma_k l} (\Delta a_k)^{l+1} f_m^{(l)}(r_k) = \lambda_m f_m^{(l)}(0). \quad (16)$$

В силу соотношения (12), имеем

$$f_m^{(l)}(x) = \sum_{j=0}^{m-1} \frac{B_{l+j}}{j!} x^j. \quad (17)$$

Объединяя (16) и (17), получаем выражения для коэффициентов полинома:

$$B_m = 1, \\ B_l = \frac{1}{\lambda_m - \lambda_l} \sum_{k=1}^n (-1)^{\sigma_k l} (\Delta a_k)^{l+1} \left( \sum_{j=1}^{m-1} \frac{B_{l+j}}{j!} r_k^j \right), \quad l = \overline{0, m-1}. \quad (18)$$

Введем обозначения

$$u_{lj} = \frac{1}{j!} \sum_{k=1}^n (-1)^{\sigma_k l} (\Delta a_k)^{l+1} r_k^j. \quad (19)$$

Тогда окончательно (18) можно переписать в следующем виде:

$$B_m = 1, \\ B_l = \frac{1}{u_{m0} - u_{l0}} \sum_{j=1}^{m-1} u_{lj} B_{l+j}, \quad l = \overline{0, m-1}. \quad (20)$$

Таким образом, спектральная задача для оператора Перрона–Фробениуса (7) имеет такое решение: собственные функции есть полиномы (12) с коэффициентами, определяемыми соотношениями (18), а соответствующие собственные числа есть

$$\lambda_m = \sum_{k=1}^n (-1)^{\sigma_k m} (\Delta a_k)^{m+1} = u_{m0}. \quad (21)$$

### 3. Верификация полученных результатов

Рассмотрим в качестве примера хорошо изученный двоичный сдвиг Бернулли – отображение с равномерным разбиением единичного отрезка и положительным тангенсом угла наклона двух линейных ветвей итерационной функции. В этом случае

$$n = 2; \quad \sigma_1 = \sigma_2 = 0; \quad \Delta a_1 = \Delta a_2 = \frac{1}{2}; \quad r_1 = 0; \quad r_2 = \frac{1}{2}. \quad (22)$$

Подстановка (22) в (14) даёт известное соотношение для собственных чисел:

$$\lambda_m = \frac{1}{2^m}. \quad (23)$$

Соотношение (18) в рассматриваемом частном случае преобразуется к виду:

$$B_l = \frac{2^{m-l}}{1 - 2^{m-1}} \sum_{j=1}^m j = 1^{m-l} \frac{B_{l+j}}{j!2^{j+1}}.$$

Отсюда легко получаются значения для  $B_{m-1}$ :

$$B_{m-1} = \frac{1}{2} B_m. \quad (24)$$

Известно, что собственными функциями оператора Перрона–Фробениуса для двичного сдвига Бернулли являются полиномы Бернулли. Для сравнения полученных выше результатов с известными необходимо учесть, что обычно полиномы Бернулли записывают так:

$$B_m(x) = \sum_{k=0}^m b_k x^k, \quad b_m = 1. \quad (25)$$

Сравнивая (12) и (25), убеждаемся, что должно выполняться соотношение:

$$b_l = \frac{m!}{l!} B_l,$$

тогда вместо (24) имеем:

$$b_{m-1} = -\frac{m}{2},$$

что совпадает с известными значениями соответствующих коэффициентов полиномов Бернулли [18].

### Заключение

В статье определена структура полиномиальных собственных функций и нуль-пространства оператора Перрона–Фробениуса кусочно-линейных отображений без «щелей» (подынтервалов, на которых итеративная функция равна нулю) и с полными ветвями, которые могут обладать различными значениями модуля тангенса наклона. Полученные решения включают как частные случаи решения подобной задачи для отображений, представляющих композицию полных линейных ветвей, но характеризующихся *одинаковым* модулем производной и произвольным чередованием знака производной. Сдвиги Бернулли и разнообразные пилообразные отображения, рассмотренные нами ранее, являются частными случаями такого класса отображений.

Возможность использования приема факторизации производящей функции позволяет найти универсальный набор рекуррентно вычисляемых коэффициентов, на основе которых и конструируются собственные полиномиальные функции.

### Библиографический список

1. Аникин В.М., Голубенцев А.Ф. Аналитические модели детерминированного хаоса / Предисл. Д.И. Трубецкова. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2007. 328 с.

2. *Аникин В.М., Аркадакский С.С., Ремизов А.С.* Несамосопряженные линейные операторы в хаотической динамике. Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 2015. 96 с.
3. *Аникин В.М.* Спектральные задачи для оператора Перрона–Фробениуса // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2009. Т. 17, № 4. С. 35–48.
4. *Бабенко К.И.* Основы численного анализа. М.: Наука, 1986. 744 с.
5. *Кнут Д.* Искусство программирования. В 3 т. Т. 2: Получисленные алгоритмы. 3-е изд. М.: Вильямс, 2000. 832 с.
6. *Аникин В.М.* Отображение Гаусса: эволюционные и вероятностные свойства. Саратов : Изд-во Саратов. ун-та, 2007. 80 с.
7. *Аникин В.М., Аркадакский С.С., Купцов С.Н., Ремизов А.С., Василенко Л.П.* Релаксационные свойства хаотических динамических систем // Известия РАН. Сер. Физическая. 2009. Т. 73, № 12. С. 1739–1744.
8. *Аникин В.М., Аркадакский С.С., Купцов С.Н., Ремизов А.С., Василенко Л.П.* Классификация хаотических моделей малоразмерной нелинейной динамики // Известия РАН. Сер. Физическая. 2009. Т. 73, № 12. С. 1790–1792.
9. *Пригожин И., Стенгерс И.* Время, хаос, квант. К решению парадигмы времени. М.: УРСС, 2000. 240 с.
10. *Аникин В.М., Трубецков Д.И.* Вопросы теории детерминированного хаоса в работах А.Ф. Голубенцева (к 80-летию со дня рождения) // Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2013. Т. 21, № 5. С. 120–123.
11. *Голубенцев А.Ф., Аникин В.М., Аркадакский С.С.* О некоторых свойствах оператора Фробениуса–Перрона // Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика. 2000. Т. 8, № 2. С. 67–73.
12. *Голубенцев А.Ф., Аникин В.М.* Инвариантные функциональные подпространства линейных эволюционных операторов хаотических отображений // Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика. 2005. Т. 13, № 1–2. С. 3–17.
13. *Аникин В.М., Аркадакский С.С., Ремизов А.С.* Аналитическое решение спектральной задачи для оператора Перрона–Фробениуса кусочно-линейных хаотических отображений // Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2006. Т. 14, № 2. С. 16–34.
14. *Аникин В.М., Аркадакский С.С., Ремизов А.С.* Особенности решения спектральной задачи для оператора Перрона–Фробениуса, обусловленные критическим сочетанием параметров хаотического отображения // Теоретическая физика. 2007. Т. 8. С. 176–183.
15. *Аникин В.М., Ремизов А.С., Аркадакский С.С.* Собственные функции и числа оператора Перрона–Фробениуса кусочно-линейных хаотических отображений // Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика. 2007. Т. 15, № 2. С. 62–75.
16. *Аникин В.М., Аркадакский С.С., Ремизов А.С., Купцов С.Н., Василенко Л.П.* Определение инвариантной плотности отображения Реньи на основе гауссова подхода // Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика. 2008. Т. 16, № 6. С. 46–56.

17. *Аникин В.М., Аркадакский С.С., Купцов С.Н., Ремизов А.С., Василенко Л.П.* О показателе Ляпунова для хаотических одномерных отображений с равномерным инвариантным распределением // Известия РАН. Сер. физическая. 2008. Т. 72, № 12. С. 1800–1804.
18. Справочник по специальным функциям / Под ред. М. Абрамовица, И. Стиган. М.: Наука, 1979. С. 611.

*Поступила в редакцию 01.09.2016*

## POLYNOMIAL EIGENFUNCTIONS OF THE PERRON–FROBENIUS OPERATOR

*V. M. Anikin, S. S. Arkadaksky, S. N. Kuptsov, A. S. Remisov*

National Research Saratov State University  
Astrahanskaya, 83, 410012 Saratov, Russia

E-mail: anikinvm@info.sgu.ru, anikinvm@yandex.ru

In the paper, we reveal the structure of polynomial functions of the eigenfunctions and the kernel of the Perron–Frobenius operator for one-dimensional chaotic maps that iterative functions have the following properties: they are piecewise-linear ones; they have full branches transforming the domain of its definition to the full range of the mapping; they have arbitrary slope of branches; they have not some gaps between the branches.

Knowledge of solution of the spectral problem allows us to find analytically the rate of establishment of the invariant distribution in the, the rate of decay of correlations in a dynamic system, which has chaotic properties, to construct the function decomposition similar to the Euler–Maclaurin decomposition.

For solving the spectral problem, we introduce a combined approach based on the method of generating function for the operator eigenfunctions and the method of undetermined coefficients.

The new results of the paper is a general solution of the spectral problem for piecewise linear maps having arbitrary skew of linear branches of the mapping.

We present the solution for polynomial eigenfunctions and eigenvalues of Perron–Frobenius operator associated to arbitrary piece-wise linear chaotic maps with full branches without «gaps» (finite intervals where iterative function is equal to zero). A general form of the functions of the operator kernel is written.

The factoring generating function for the eigenfunctions allows us to find an universal set of coefficients that are calculated recursively and form polynomial eigenfunctions. These solutions include partial spectral solutions for Bernoulli shifts and other sawtooth maps.

*Keywords:* Piece-wise linear chaotic maps, the Perron–Frobenius operator, polynomial eigenfunctions, the kernel.

DOI: 10.18500/0869-6632-2016-24-4-6-16

*Paper reference:* Anikin V.M., Arkadaksky S.S., Kuptsov S.N., Remisov A.S. Polynomial eigenfunctions of the Perron–Frobenius operator // Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics. 2016. Vol. 24. Issue 4. P. 6–16.

### References

1. *Anikin V.M., Goloubentsev A.F.* Analytical models of deterministic chaos / Preface by D. I. Trubetskov. Moscow: FIZMATLIT, 2007. 328 p. (in Russian).
2. *Anikin V.M., Arkadaksky S.S., Remisov A.S.* Non-selfadjoint operators in chaotic dynamics. Saratov: Izd-vo Sarat. un-ta, 2015. 96 p. (in Russian).

© *В.М. Аникин, С.С. Аркадакский, С.Н. Купцов, А.С. Ремизов*  
Изн. вузов «ПНД», т. 24, № 4, 2016

3. *Anikin V.M.* Spectral problems for the Perron–Frobenius operator // *Izvestiya VUZ. AND.* 2009. Vol. 17, Iss. 4. P. 35–48 (in Russian).
4. *Babenko K.I.* Fundamental of numerical analysis. Moscow: Nauka, 1986. 744 p. (in Russian).
5. *Knuth D.E.* The art of computer programming. 3d ed. Vol. 2. Seminumerical Algorithms. Addison-Wesley Longman, Inc., 1998.
6. *Anikin V.M.* The Gauss map: evolution and probability properties. Saratov: Saratov University Press, 2007. 80 p. (in Russian).
7. *Anikin V.M., Arkadasky S.S., Kuptsov S.N., Remisov A.S., Vasilenko L.P.* Relaxation properties of chaotic dynamical systems: operator approach // *Bulletin of the Russian Academy of science: Physics.* 2009. Vol. 73, Iss. 12. P. 1632–1637.
8. *Anikin V.M., Arkadasky S.S., Kuptsov S.N., Remisov A.S., Vasilenko L.P.* Classification of one-dimensional chaotic models // *Bulletin of the Russian Academy of science: Physics.* 2009. Vol. 73, Iss. 12. P. 1681–1683.
9. *Prigogine I. Stengers I.* Time, Chaos, Quantum: Towards the Resolution of the Paradox of Time. Moscow: URSS, 2000. 240 p. (in Russian).
10. *Anikin V.M., Trubetskov D.I.* Problems of deterministic chaos theory in A. F. Goloubentsev’s works // *Izvestiya VUZ. AND.* 2013. Vol. 21, Iss. 5. P. 120–123 (in Russian).
11. *Goloubentsev A.F., Anikin V.M., Arkadasky S.S.* On some properties of the Frobenius–Perron operator for the Bernoulli shifts // *Izvestiya VUZ. AND.* 2000. Vol. 8, Iss. 2. P. 67–73 (in Russian).
12. *Goloubentsev A.F., Anikin V.M.* Invariant subspaces for linear evolution operators of chaotic maps // *Izvestiya VUZ. AND.* 2005. Vol. 13, Iss. 1–2. P. 3–17 (in Russian).
13. *Anikin V.M., Arkadasky S.S., Remisov A.S.* Analytical solution of spectral problem for the Perron–Frobenius operator of piece-wise linear chaotic maps // *Izvestiya VUZ. AND.* 2006. Vol. 14, Iss. 2. P. 16–34 (in Russian).
14. *Anikin V.M., Arkadasky S.S., Remisov A.S.* Features of solving spectral problem for the Perron–Frobenius operator caused by critical combination of chaotic map parameters // *Theoretical Physics.* 2007. Vol. 8. P. 176–183 (in Russian).
15. *Anikin V.M., Remisov A.S., Arkadasky S.S.* Eigenfunctions and eigenvalues of the Perron–Frobenius operator of piece-wise linear chaotic maps // *Izvestiya VUZ. AND.* 2007. Vol. 15, Iss. 2. P. 62–75 (in Russian).
16. *Anikin V.M., Arkadasky S.S., Remisov A.S., Kuptsov S.N., Vasilenko L.P.* Investigation of structure of invariant density for Renyi map by Gauss method // *Izvestiya VUZ. AND.* 2008. Vol. 16, Iss. 6. P. 46–56 (in Russian).
17. *Anikin V.M., Arkadasky S.S., Kuptsov S.N., Remisov A.S., Vasilenko L.P.* Lyapunov exponent for chaotic 1D maps with uniform invariant distribution // *Bulletin of the Russian Academy of science: Physics.* 2008. Vol. 72, Iss. 12. P. 1684–1688.
18. *Abramovits M., Steegan I.* Handbook of Special Functions. Moscow: Nauka, 1979. P. 611 (in Russian).



*Аникин Валерий Михайлович* родился (1947) в Аткарске (Саратовская область). Окончил физический факультет Саратовского государственного университета (1970). Доктор физико-математических наук, профессор, декан физического факультета СГУ, заведующий кафедрой компьютерной физики и метаматериалов на базе Саратовского филиала Института радиотехники и электроники им. В.А. Котельникова РАН, ученый секретарь диссертационного совета Д212.243.01 на базе СГУ. Область научных интересов: математическое моделирование хаотических и стохастических процессов, диссертационное исследование, история физики. В числе работ: монография «Аналитические модели детерминированного хаоса» (совместно с А.Ф. Голубенцевым; М.: ФИЗМАТЛИТ, 2007), методическое пособие для аспирантов и соискателей учёной степени естественных специальностей «Диссертация в зеркале автореферата» (совместно с Д.А. Усановым; М.: ИНФРА-М, 2013-2015).

410012 Саратов, Астраханская, 83  
Саратовский государственный университет имени Н.Г. Чернышевского  
E-mail: anikinvm@yandex.ru; anikinvm@info.sgu.ru



*Аркадакский Сергей Сергеевич* родился в Саратове (1949). Окончил физический факультет СГУ (1971). Кандидат физико-математических наук (1986), доцент кафедры компьютерной физики и метаматериалов на базе Саратовского филиала Института радиотехники и электроники им. В.А. Котельникова РАН. Область научных интересов – электроника СВЧ, нелинейная динамика. Соавтор монографии «Несамосопряженные линейные операторы в хаотической динамике» (Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 2015).

410012 Саратов, Астраханская, 83  
Саратовский государственный университет имени Н.Г. Чернышевского  
E-mail: arkadaksyys@mail.ru



*Купцов Сергей Николаевич* родился в Саратове (1949). Окончил механико-математический факультет СГУ (1971). Старший преподаватель кафедры математической экономики. Область научных интересов – спектральная теория линейных операторов.

410012 Саратов, Астраханская, 83  
Саратовский государственный университет имени Н.Г. Чернышевского  
E-mail: kuptsovsn@info.sgu.ru



*Ремизов Александр Сергеевич* родился в Саратове (1980). Окончил физический факультет СГУ (2002). Кандидат физико-математических наук (2007). Доцент кафедры компьютерной физики и метаматериалов на базе Саратовского филиала Института радиотехники и электроники им. В.А. Котельникова РАН. Область научных интересов – нелинейная динамика. Соавтор монографии «Несамосопряженные линейные операторы в хаотической динамике» (Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 2015).

410012 Саратов, Астраханская, 83  
Саратовский государственный университет имени Н.Г. Чернышевского  
E-mail: remisovas@mail.ru



## ДИНАМИКА РОЛИКОВЫХ ДОМЕНОВ И ОБРАЗОВАНИЕ СТРУКТУР ИЗ ЧАСТИЦ ПРИ ПАРАМЕТРИЧЕСКОМ ВОЗБУЖДЕНИИ КАПИЛЛЯРНЫХ ВОЛН

*С. В. Кияшко, А. В. Назаровский*

Институт Прикладной физики РАН  
603950, Нижний Новгород, БОКС-120, ул. Ульянова, 46  
E-mail: kiyashko@appl.sci-nnov.ru, nazarovsky@appl.sci-nnov.ru

Представлен обзор результатов изучения динамики роликовых доменов параметрически возбуждаемых волн на поверхности жидкости. С позиции нелинейной динамики обсуждаются процессы установления регулярных волновых структур и структур из тяжелых частиц, образующихся под действием поля стоячих волн.

В экспериментальных исследованиях получен ряд интересных результатов, касающихся динамики роликовых доменов и образование структур из частиц при параметрическом возбуждении капиллярных волн. Обнаружен эффект мультивариантности сценариев перехода к устойчивому состоянию равновесия. Обнаружено, что при включении внешнего сигнала наблюдаются различные сценарии в динамике конкурирующих доменов при неизменных параметрах системы. На поверхности жидкости большой вязкости при многоугольной форме границ обнаружен эффект мультистабильности, при которой возможно существование нескольких устойчивых роликовых режимов, отличающихся только ориентацией в пространстве. Обнаружено образование многозаходных спиральных структур из тяжелых частиц, помещенных в слой жидкости, на поверхности которого параметрически возбуждаются капиллярные волны.

Известно, что процессы возникновения, взаимодействия, синхронизации и разрушения пространственных структур во многих системах имеют схожую динамику. Но в некоторых системах изучение этих процессов может быть сопряжено со значительными трудностями. В данном случае результаты получены при исследовании параметрически возбуждаемой капиллярной ряби, которая является весьма удобным объектом для исследования образования структур и перехода от регулярных структур к хаосу из-за своей простоты и вместе с тем большого разнообразия наблюдаемых эффектов. Описанные в обзоре результаты будут важны для понимания процессов происходящих в системах различной физической природы.

*Ключевые слова:* Формообразование, капиллярные волны, роликовые структуры, конкуренция доменов, тяжелые частицы, спиральные структуры, мультистабильность.

DOI: 10.18500/0869-6632-2016-24-4-17-38

*Ссылка на статью:* Кияшко С.В., Назаровский А.В. Динамика роликовых доменов и образование структур из частиц при параметрическом возбуждении капиллярных волн // Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2016. Т. 24, № 4. Р. 17–38.

## Введение

Автоколебательные процессы в активных двумерных системах часто приводят к мультистабильности, когда при фиксированных параметрах системы в зависимости от начальных условий возможно установление различных стационарных состояний. Фазовое пространство подобных систем может быть достаточно сложным и содержать не только простые аттракторы, но и хаотические. Возникновение новых состояний равновесия, как правило, связано с нахождением системы вблизи точек бифуркации. Для построения моделей, описывающих процессы, происходящие в двумерных системах с неустойчивостью, используются уравнения типа Гинзбурга–Ландау и Свифта–Хохенберга [1]. При этом возможность существования нескольких устойчивых состояний равновесия обосновывается наличием существования нескольких локальных минимумов функционала свободной энергии. Для понимания процессов, происходящих в реальных физических системах важно знать, каким образом происходит процесс установления какого-либо устойчивого состояния. Во многих мультистабильных автоколебательных системах имеется резонатор. Устойчивые состояния равновесия соответствуют одной из мод резонатора (они могут отличаться частотой и пространственной структурой). Достижение равновесного состояния происходит за один этап в процессе роста начальных возмущений и установления стационарной амплитуды за счет нелинейных потерь при конкуренции с другими модами. При этом отбор одной из возможных мод происходит на стадии линейного роста возмущений. Побеждает та мода, для которой начальные возмущения лежат в области притяжения ее равновесного состояния [1].

При наличии сильного затухания в автоколебательных системах границы не создают резонатора и оказывают слабое ориентирующее влияние на волновое поле. Это обстоятельство качественно меняет процесс достижения устойчивого состояния равновесия в системе. Теперь в процессе неустойчивости и достижения амплитудой поля стационарного значения еще не происходит достижения устойчивого состояния равновесия, так как влияние границ слабое. Затем, на втором этапе будет происходить длительный процесс взаимодействия с границами, в конце которого поле будет полностью согласовано с границами и состояние равновесия будет полностью достигнуто. Такая ситуация возникает например при параметрическом возбуждении волн в среде с сильным затуханием. Однако, насколько нам известно из публикаций, исследование достижения состояния равновесия в двумерных параметрически возбуждаемых системах при наличии мультистабильности в условиях сильной конкуренции еще не проводилось. Что, по-видимому, связано с трудностями проведения измерений на высоких частотах электромагнитных волн.

В то же время параметрически возбуждаемая капиллярная рябь является одним из наиболее удобных объектов для экспериментального исследования формообразования структур и перехода от регулярных структур к хаосу. Это связано с удобством изменения контрольных параметров в системе: надкритичности, диссипации, длины возникающих волн, граничных и начальных условий, а также легкостью визуализации возникающих полей поверхностных волн. Исследовались нестационарные пространственно неоднородные режимы [2], модуляционная неустойчивость [3], возникновение доменов, доменных стенок [4] и переход к хаосу дефектов [5]. При увеличении вязкости нелинейные потери увеличиваются, и при большой вязкости воз-

никает сильная конкуренция, а на поверхности жидкости может существовать только одна пара стоячих волн. В этом случае наблюдаются роликовые структуры с различной ориентацией. В процессе установления стационарного режима могут возникать домены поля, отличающиеся пространственной ориентацией, которые конкурируют друг с другом [6, 7]. Эксперименты с роликовыми структурами, как правило, проводились в кюветах прямоугольной и круглой геометрии. При этом обычно наблюдались круглые решения в круглой кювете и прямые ролики, параллельные одной из сторон, в прямоугольной кювете. Домены поля с различной ориентацией роликов в пространстве могут конкурировать друг с другом. Подобная ситуация для 2-х взаимодействующих доменов рассмотрена в работе [6]. Движение фронта, разделяющего домены, происходило равномерно и параллельно одной из границ прямоугольной кюветы, и задача по существу была одномерной. В работе [7] экспериментально исследована динамика двумерных роликовых доменов сложной формы, у которых подвижными границами являются несколько сторон. Показано, что в зависимости от начальных и граничных условий на краях кюветы возникают двумерные домены различной формы, а их динамика определяется движением их фронтов. Форма кюветы при этом была квадратной. В настоящей работе исследуется динамика роликовых доменов в кювете прямоугольной формы и в кювете с закругленным углом, где качественное поведение в системе теперь будет зависеть и от соотношения длин ее сторон [8, 9]. Границы многоугольных доменов при этом состоят из отрезков прямолинейных фронтов, которые расположены под различными углами друг к другу. При этом ролики в различных доменах были ориентированы перпендикулярно друг к другу и параллельно разным границам кюветы.

Так как при сильной диссипации кюветы не являются резонаторами для волн, а границы кюветы оказывают слабое ориентирующее воздействие на волны, то кроме простых роликовых структур могут возникать и более сложные структуры, такие как, например, спиральные волны и прямые ролики в круглой кювете [10, 11]. При этом при возбуждении капиллярных волн ориентация роликов в круглой кювете могла быть различной в пространстве (безразличное состояние равновесия). Можно предположить, что, если граница содержит несколько прямых участков, то границы кюветы окажут свое ориентирующее воздействие и могут возникнуть многоустойчивые состояния равновесия для прямых роликовых структур, различающихся по углу ориентации роликов относительно выбранного направления от центра кюветы к ее границе.

В настоящей работе исследуется возникновение многоустойчивых состояний равновесия для роликовых структур и их устойчивость при отклонении роликов по углу от состояния равновесия в кюветах многоугольной формы [12].

При исследовании процессов, происходящих в океанологии, биофизике, астрофизике, а также при решении прикладных проблем, связанных с разработкой технологии часто возникают задачи о движении частиц в поле гидродинамических течений [13]. Существенный интерес представляет выяснение механизма транспорта тяжелых частиц в гидродинамических системах, когда они находятся вдали от состояния равновесия. В таких системах при этом в результате процессов самоорганизации могут возникать пространственные структуры, и движение частиц могут дать дополнительную информацию о самих структурах. Движение частиц в параметрически возбуждаемой капиллярной ряби исследовалось в ряде работ [14–17] в условиях

возникновения взаимно ортогональных стоячих волн на поверхности слоя вязкой жидкости колеблющейся в вертикальном направлении. Исследовались траектории отдельных частиц и диффузия облака частиц в такой квадратной решетке волн.

При увеличении вязкости в параметрически возбуждаемой ряби на фоне регулярной структуры могут возникать топологические дефекты. Они обладают свойствами квазичастиц, могут взаимодействовать, образовывать цепочки в виде доменных стенок и аннигилировать.

С ростом амплитуды колебаний слоя число возникающих дефектов увеличивается и образом пространственного беспорядка при этом является ансамбль взаимодействующих дефектов [5, 18].

Известно, что в поле поверхностных стоячих волн плавающие частицы собираются в узлах стоячих волн. При этом частицы расположены на линиях, повторяющих структуру стоячих волн, а тяжелые частицы остаются лежать на дне, так как при малой вязкости сил вязкого трения, возникающих при обтекании частиц, еще недостаточно, чтобы сдвинуть их с места.

При увеличении вязкости эти силы возрастают, и течение жидкости вблизи дна становится способно передвигать частицы. Именно такая ситуация рассматривается в данной работе [19]. В жидкости большой вязкости из-за сильной конкуренции выживает только одна пара стоячих волн, и на поверхности жидкости при параметрическом возбуждении образуются роликовые (линейчатые) структуры. Обычно в кюветах прямоугольной формы прямые ролики расположены параллельно одной из сторон кюветы. В круглой кювете обычно наблюдаются круговые стоячие волны.

В работе [20] исследовалось образование круговых пространственных структур из суспензии биологических клеток. Так как параметрически возбуждаемая рябь при сильной конкуренции представляет собой типичную автоколебательную систему, то в ней может быть мультистабильность. В зависимости от начальных условий при неизменных параметрах среды возможны различные устойчивые состояния, отличающиеся пространственной структурой поля. Недавно в работе [10] было показано существование многозаходных спиральных волн, которые отличались числом заходов спирали и направлением их закрученности.

В настоящей работе исследуется образование спиральных структур из тяжелых частиц под действием поля параметрически возбуждаемых спиральных волн.

### Описание эксперимента

Эксперименты по исследованию динамики роликовых доменов при сильной конкуренции проводились подобно тому, как это было в работе [7]. В качестве экспериментальной жидкости использовалось силиконовое масло большой вязкости с такими параметрами: вязкость жидкости  $\nu = 0.95 \text{ см}^2/\text{с}$ , плотность  $\rho = 0.97 \text{ г/см}^3$  и коэффициент поверхностного натяжения  $\sigma = 20 \text{ дин/см}$ . Использовались прямоугольные кюветы, выполненные из оргстекла с размерами 23 см по длинной стороне и от 11 до 23 см по короткой. Вертикальные колебания кюветы создавались с помощью вибростенда TV2500 фирмы «TIRAvib», а колебания вибростенда управлялись синусоидальным сигналом от кварцевого генератора. В экспериментах в качестве экспериментальной жидкости использовалось силиконовое масло с большой вязко-

стью (вязкость примерно в 100 раз больше вязкости воды). Кюветы помещались на стол вибростенда и совершали вертикальные вибрации под действием вибростенда. При этом контролировалась амплитуда ускорений и частота вынуждающей силы ( $F \sim 41...81$  Гц) и глубина жидкости ( $L \sim 3.5...5.5$  мм). Картины стоячих волн наблюдались в отраженном свете. Различные сценарии перехода к стационарному состоянию записывались на видеокамеры для компьютерной обработки.

В качестве источника света использовалась лампа дневного света, расположенная на высоте 2 м над поверхностью жидкости. Заметим, что в процессе записи паттернов видеокамерой происходит усреднение изображения по периоду капиллярных волн, так что их пучностям соответствуют более яркие области, чем узлам. Обработка изображения проводилась так же, как в [20].

### **Мультивариантность сценариев перехода к устойчивому состоянию при конкуренции роликовых доменов**

Синусоидальный управляющий сигнал подавался на усилитель вибростенда при фиксированной глубине жидкости и частоте внешнего сигнала. В момент включения вибростенда на стенках прямоугольной кюветы возникал тонкий пограничный слой, который служил начальным возмущением. Вблизи границ возникают области капиллярных стоячих волн, у которых границы параллельны стенкам кюветы. Фронты этих областей начинают двигаться к центру кюветы со скоростью  $V_{\text{фр}}$ .

Измеряя положение этих фронтов капиллярных волн во времени, можно было определить эту скорость. Выяснилось, что скорость постоянна во времени и при увеличении надкритичности стремится к групповой скорости свободных волн  $V_{\text{гр}}$ . Этот результат хорошо совпадает с результатами в работе [21], где экспериментально исследовалось распространение кругового фронта для жидкости малой вязкости ( $\nu = 0.04$  см<sup>2</sup>/с) и аналогичным результатам по динамике доменов в кюветах квадратной формы [7]. В процессе конкуренции доменов могла возникнуть ситуация, когда в кювете остаются только два домена прямоугольной формы [6]. При этом скорость движения фронтов конкурирующих доменов  $V_{\text{фр}}$  также растет с ростом надкритичности, но величина ее примерно на порядок медленнее, чем скорость фронта возбуждения, который распространяется по области, где ряби еще нет  $V_{\text{фр}} \sim V_{\text{фр}}^0/8$ .

На рис. 1, *a* представлена двумерная структура поля после того, как фронты возбуждения дошли до центра кюветы, а их амплитуды выровнялись. Видно, что два из трех доменов треугольные, а третий по форме напоминает две трапеции, смещенные меньшими сторонами. При изменении размеров прямоугольной кюветы площади треугольных доменов уменьшались и были равны  $S_{1,2} = a^2/4$ , а площадь большого (трапециидального) домена была равна  $S_0 = ba - a^2$ , где  $a$  и  $b$  – длины короткой и длинной сторон кюветы. В углах прямоугольной кюветы видны зародыши вертикальных и горизонтальных доменных стенок. Экспериментально выяснилось, что диагональные доменные стенки устойчивы в середине кюветы и неустойчивы на краях.

Для нахождения основных сценариев, которые возникают при конкуренции доменов сложной формы в прямоугольных кюветах, мы проводили серии экспериментов с фиксированными параметрами (глубина жидкости, частота и амплитуда

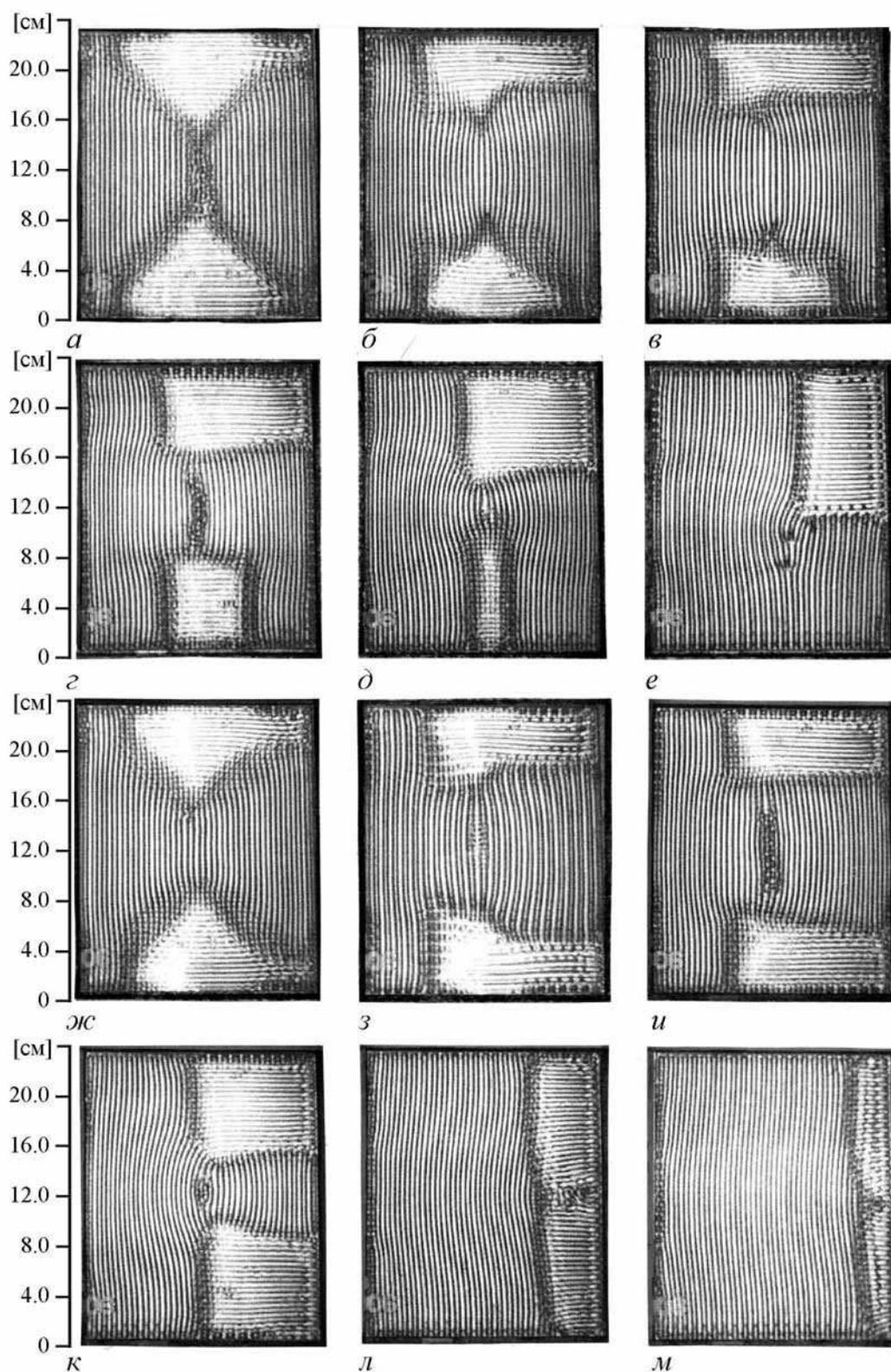


Рис. 1. Последовательная эволюция доменов в кювете 23×18 см

внешнего сигнала). В каждой серии эксперимент повторялся многократно. Для выяснения зависимости этих процессов от соотношения длин сторон кюветы.

Для выяснения зависимости этих процессов от соотношения длин сторон кюветы все эти серии экспериментов проводили отдельно для различных соотношений длин сторон прямоугольной кюветы.

В результате экспериментов обнаружен эффект мультивариантности сценариев перехода к устойчивому состоянию равновесия. Его особенность состоит в том, что при включении внешнего сигнала наблюдаются различные сценарии в динамике конкурирующих доменов при неизменных параметрах системы. Выяснилось, что появление того или иного сценария практически равновероятно и зависит от случайных начальных возмущений. Домены при этом различались как формой их границ, так и характером изменения их площадей во времени. Два характерных сценария динамики доменов сложной формы в процессе конкуренции представлены на рис. 1. Сценарии представлены в виде последовательных картин поля капиллярных волн на поверхности жидкости в кювете прямоугольной формы ( $f = 73$  Гц,  $h = 6$  мм). Каждая последовательность картин поля представлена в виде 6 кадров, расположенных в двух строках (1 и 2 строка представляет один сценарий, а 3 и 4 строки – другой).

На рис. 1 в первой и третьей строке слева изображена картина, с которой начинаются оба сценария. Выяснено, что все сценарии начинаются с одинаковой картины поля. Эта картина устанавливается после того, как фронты ряби после включения достигают середины кюветы, и устанавливается двумерная роликовая структура.

Подобная картина изображена первой слева в верхнем ряду. На этой картине три домена, два из которых представляют собой прямоугольные треугольники. Гипотенузы этих треугольных доменов лежат на коротких сторонах прямоугольной кюветы, а катеты совпадают с диагоналями в углах кюветы и служат границами раздела между доменами. Третий домен с наибольшей площадью по форме напоминает фигуру с двумя трапециями, совмещенными верхними сторонами, а их основания лежат на боковых длинных сторонах кюветы. Сравнивая картины поля в различных сценариях, можно видеть, что в углах кюветы начинают возникать фронты, расположенные перпендикулярно стенке и параллельно роликам другого домена. Далее эти фронты двигаются равномерно, при этом один край скользит вдоль границы раздела исходных треугольных доменов, а другой лежит на границе кюветы.

Такое движение фронтов, разделяющих домены с различной ориентацией роликов, приводит к тому, что треугольные домены плавно трансформируются в квадратные, а затем в прямоугольные (вторая строка) или сжимаются в линию. Так как каждый квадратный домен имеет две границы с перпендикулярным расположением роликов, а границы движутся параллельно роликам в одном домене и перпендикулярно роликам другого домена, то домен квадратной формы будет неустойчивым. Конкуренция на границе двух роликовых доменов исследована ранее в работе [6].

На границе доменов фронты продолжают двигаться равномерно со скоростью  $V_{\text{фр}}$  вдоль каждой из сторон кюветы. В результате квадратные домены далее превращаются в прямоугольные, а площади непрерывно уменьшаются до нуля и устанавливается однородная роликовая структура. Заметим, что при различных сценариях квадратные домены могут возникнуть в различных углах кюветы и однородная роликовая структура может иметь ориентацию вдоль одной из сторон кюветы. Также мы измеряли зависимость площадей конкурирующих доменов от времени после того,

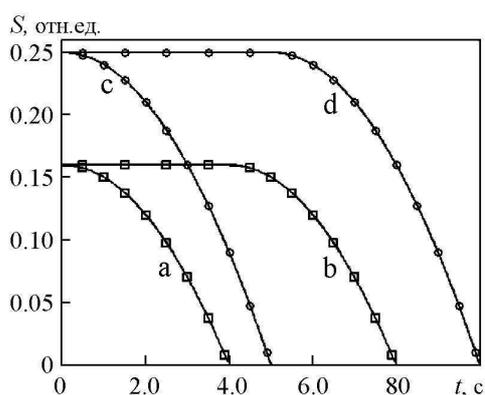


Рис. 2. Графики зависимости площадей доменов от времени в безразмерных единицах: а, с – нижний треугольный домен; b, d – верхний треугольный домен (соответствуют 1-му сценарию динамики доменов на рис. 1, а–е)

короткой стороны). Нижний домен к этому моменту времени непрерывно уменьшается (1-й сценарий на рис. 1, а–е).

На рис. 1 (третья и четвертая строки) представлен другой сценарий, отличающийся тем, что после доменов треугольной формы возникают два симметричных квадратных домена, переходящих в уменьшающиеся прямоугольные домены. В результате измерений найдено 16 различных сценариев при конкуренции доменов, причем 7 основных, а остальные отличаются от них зеркальной или осевой симметрией. С ростом надкритичности  $\epsilon$  увеличивается общая скорость движения фронтов, так как при этом возрастает скорость движения фронтов конкурирующих доменов, а сценарии в динамике фронтов не изменяются. При изменении соотношения длин сторон кюветы сценарии качественно повторяются, а изменяются лишь относительные площади треугольных доменов (рис. 2).

При равенстве длин сторон кюветы (квадратная кювета) в сценариях динамики доменов наступает вырождение и часть сценариев не реализуется, и почти всегда существуют не три, а четыре домена.

На основе экспериментальных данных о динамике доменов сложной формы можно сделать вывод, что основные свойства в поведении доменов состоят в следующем.

1. Процесс динамики доменов начинается с возникновением трех доменов, два из которых треугольные и их основания совпадают с короткими границами кюветы.
2. Границы роликовых доменов, расположенные по диагоналям углов, неустойчивы к возникновению фронтов доменов, параллельных к роликам в одном домене и перпендикулярно роликам в другом домене.
3. Возникающие фронты двигаются с постоянной скоростью, причем один край фронта скользит вдоль границы кюветы, а другой – вдоль диагональной границы, при этом уменьшая ее длину.

Учитывая эти экспериментальные данные, можно построить теоретическую модель, которая может позволить описать динамику двумерных доменов сложной формы, начиная с момента образования доменов треугольной формы. Предположим,

как сформировались домены треугольной формы. На рис. 2 представлены данные измерений зависимости площадей доменов от времени. Экспериментальные данные отмечены точками, сплошные линии соответствуют расчету по теоретической модели, предложенной ниже. Круглые точки соответствуют размеру кюветы  $(1 \times 0.8)$ , а квадратные  $(1 \times 0.5)$  (длина большей стороны принята за единицу). На графике видно, что до момента образования домена квадратной формы верхний домен сложной формы имеет площадь неизменной и равной площади треугольного домена (приблизительно  $0.25a^2$ , где  $a$  – длина

что на поверхности вязкой жидкости, помещенной в квадратную кювету, происходит процесс возбуждения стоячих капиллярных волн. Пусть после включения внешнего управляющего сигнала на поверхности жидкости установилась роликовая структура в виде трех роликовых доменов с однородной в пространстве амплитудой. Из известных экспериментов с жидкостью большой вязкости (вязкость в 100 раз больше, чем вязкость воды) выяснено, что влияние твердых границ приводит к тому, что ролики вблизи границ стремятся принять положение параллельно или перпендикулярно ее границе [10]. Так как диагональная граница симметрична по отношению к близлежащим роликовым доменам, то поэтому она остается устойчивой в середине кюветы. Диагональная граница вблизи стенок кюветы оказывается неустойчивой по отношению к возникновению фронта, параллельного роликам в одном из доменов, а при такой ориентации роликов фронт будет двигаться с максимальной скоростью.

Предположим, что с точностью по времени, равной нескольким периодам внешней силы во всех углах кюветы возникли фронты, параллельные роликам в одном из доменов. Далее возникшие фронты будут двигаться равномерно, при этом один край фронта будет скользить вдоль диагональной границы, а другой – вдоль границы кюветы. Именно такое движение фронтов полностью определяет динамику возникших двумерных доменов сложной формы.

Два возможных сценария в динамике доменов сложной формы, построенные в рамках сделанных исходных предположений, показаны на рис. 3, *a–e* (1-й сценарий), *жс–м* (2-й сценарий), последовательные картины представлены через одинаковые интервалы времени.

Рассмотрим в качестве примера один из возможных сценариев в процессе динамики доменов сложной формы. Пусть у нас возникли четыре новых коротких фронта (рис. 3, *жс*): два вертикальных на нижнем треугольном домене и один вертикальный, а другой горизонтальный на верхнем треугольном домене. Тогда с течением времени верхний домен будет изменять свою форму так, что он будет превращаться в квадратный, оставаясь неизменным по площади (рис. 3, *з–и*). Затем он будет превращаться в домен прямоугольной формы, а площадь его будет непрерывно уменьшаться до нуля (рис. 3, *к–м*). Площадь нижнего домена будет непрерывно уменьшаться до нуля по квадратичному закону. Зависимость площадей доменов от времени легко вычисляется по простым формулам

$$S_1 = 0.25a^2 - V_\phi^2 t^2, \quad \text{для } t \in [0, t_1]$$

$$S_2 = \begin{cases} 0.25a^2, & \text{для } t \in [0, t_1] \\ 0.25a^2 - V_\phi^2 t^2, & \text{для } t \in [t_1, 2t_1] \end{cases} \quad (1)$$

( $t$  – текущее время,  $a$  – длина короткой стороны кюветы,  $t_1 = 0.5a/V_\phi$ ). На рис. 2 представлены графики зависимости площади доменов от времени в безразмерных единицах. Расчет по формулам представлен сплошными линиями, а точки соответствуют экспериментальным данным для двух величин соотношения длин сторон прямоугольной кюветы при величине надкритичности  $\varepsilon = 0.043$ , глубине жидкости  $h$  в мм и частоте внешней силы 73 Гц. В обоих случаях скорость фронта бралась из данных эксперимента.

На рис. 2 видно, что найденная в эксперименте зависимость площади доменов от времени с точностью до ошибки измерения близка к квадратичной и хорошо согласуется с вычисленной в рамках предложенной модели.

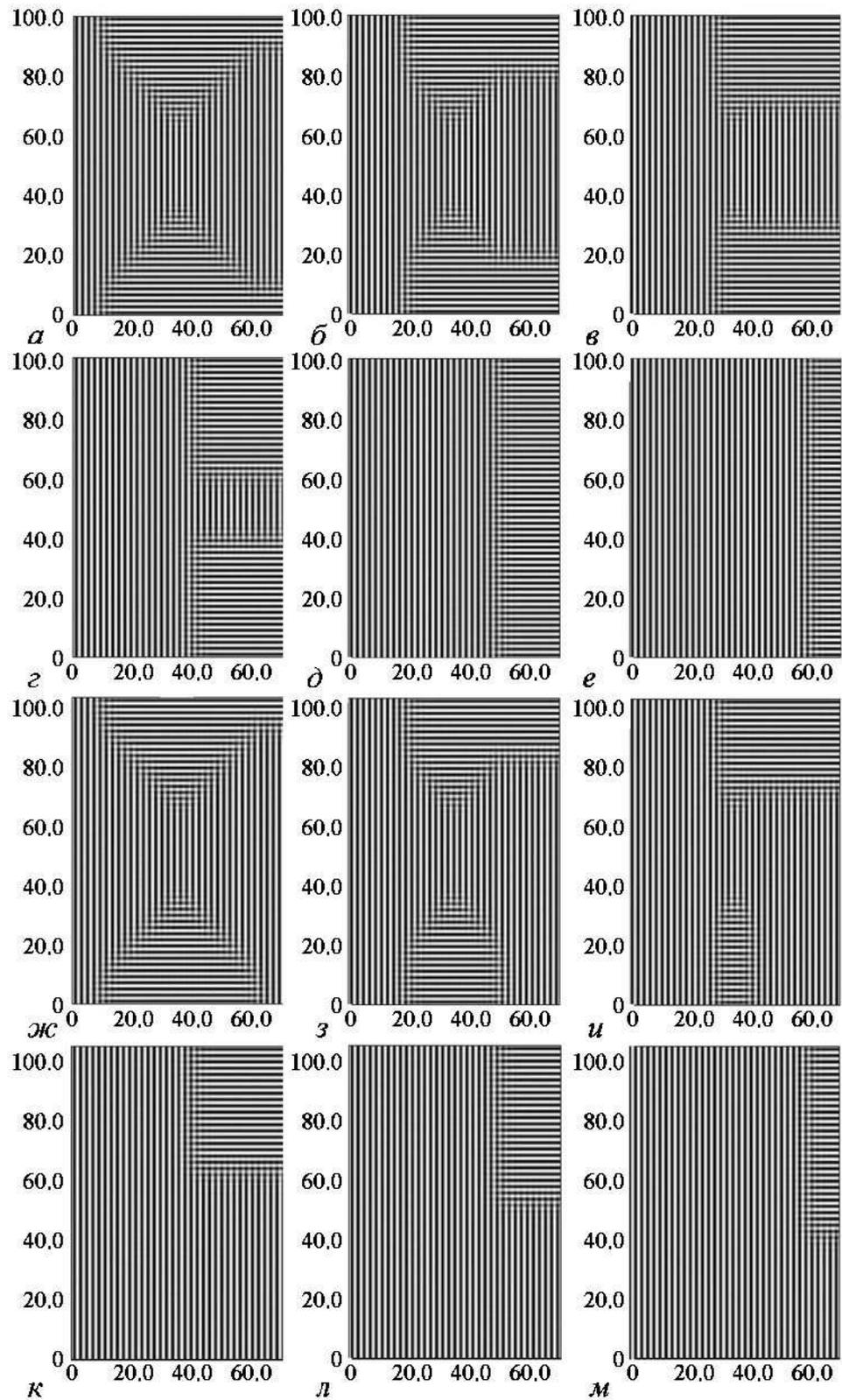


Рис. 3. Последовательные картины поля, полученные при компьютерном моделировании динамики доменов для двух ( $a-e$ ,  $ж-м$ ) из 16-ти возможных сценариев

Мы исследовали также влияние непрямолинейности границ на примере квадратной кюветы с закругленным углом [9]. Выяснилось, что качественное поведение конкурирующих доменов в различных сценариях совпадает с их поведением в кюветках квадратной и прямоугольной формы. Выяснилось, что несмотря на закругление фронты конкурирующих доменов остаются почти прямолинейными, даже и в стационарном состоянии.

### **Мультистабильность роликовых структур при многоугольной форме границ**

Эксперименты по исследованию мультистабильности для роликовых структур при многоугольной форме границ проводились следующим образом. Начальными условиями служили случайные начальные возмущения, которые возникали при медленном увеличении амплитуды управляющего внешнего сигнала, который подавался на усилитель вибростенда. При амплитуде внешнего сигнала  $A$  больше некоторой критической, на поверхности жидкости возбуждались двумерные структуры стоячих волн в виде прямых роликов. При этом увеличивали надкритичность до величин  $\varepsilon = 0.1 \dots 0.15$  и наблюдали установление устойчивого роликового режима (надкритичность определяется как  $\varepsilon = (A - A_0)/A_0$ , где  $A_0$  – амплитуда ускорения кюветы, при которой возникают капиллярные волны). В результате эксперимента выяснилось, что процесс установления устойчивого стационарного состояния в отличие от автоколебательных систем с резонатором происходит в два этапа. На первом этапе устанавливается квазиустойчивая роликовая структура с амплитудой близкой к стационарной и ориентацией безразличной по отношению к устойчивым состояниям равновесия. Далее на втором этапе происходит на порядок более медленный процесс самоориентации структур к устойчивому состоянию равновесия за счет взаимодействия со стенкой. Ролики при этом выстраиваются перпендикулярно или параллельно к ближайшей стенке кюветы. После установления устойчивого роликового решения мы измеряли угол отклонения роликов от вертикали на соответствующих видеокдрах изображения роликовой структуры поля. Затем повторяли процедуру выключения и включения многократно. При этом наблюдалось счетное число устойчивых состояний равновесия роликов по углу. Причем в кюветках с нечетным количеством сторон многоугольной кюветы количество устойчивых состояний было равно числу сторон, а для кювет с четным числом сторон оно было в два раза меньше (ввиду зеркальной симметрии при обходе по углу половина устойчивых состояний повторяет друг друга). На рис. 4, *a–d* представлены картины устойчивых состояний стоячих волн в кюветках с разным числом сторон. Видно, что в центре кюветы с нечетным числом сторон (пятиугольник) ролики параллельны одной из сторон кюветы, а концы большинства роликов почти перпендикулярно опираются на две противоположные стороны (рис. 4, *a*). В кюветках с четным числом сторон (рис. 4, *b–d*) ролики в центре кюветы опираются обоими концами на две противоположные стенки кюветы. Далее подробнее представим результаты экспериментов в кювете шестиугольной формы.

Проводились серии экспериментов для многоугольных кювет с различным числом сторон для разных глубин жидкости на различных частотах и при разных надкритичностях. В результате выяснилось, что в широком диапазоне параметров существуют многоустойчивые режимы существования роликовых структур, а их чис-

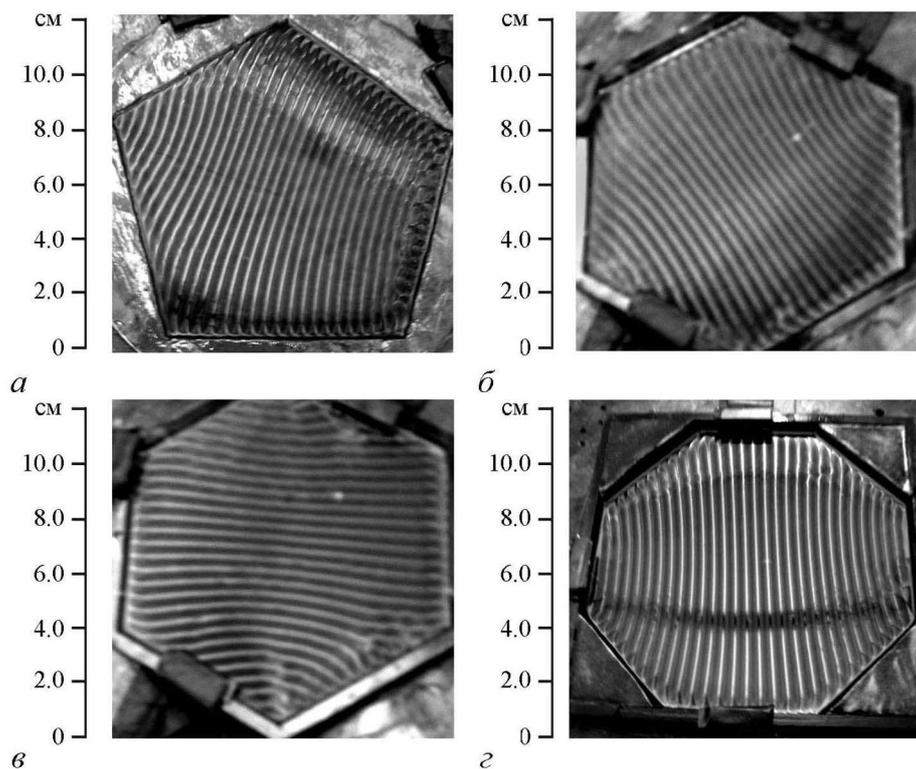


Рис. 4. Двумерные картины устойчивых роликовых режимов в кюветах многоугольной формы. а – пятиугольная кювета, б, в – шестиугольная кювета, з – восьмиугольная кювета. Частота  $F = 53$  Гц, глубина жидкости 6 мм

ло определялось только числом сторон многоугольной кюветы. После обнаружения мультгистабильности мы исследовали устойчивость стационарного режима при отклонении роликовой структуры от состояния равновесия по углу (что соответствует повороту роликовой структуры как целое на некоторый угол вокруг центра кюветы). Для этого выбирали в качестве исходной позиции какую-либо квазиустойчивую роликовую структуру, повернутую на некоторый угол относительно перпендикуляра к какой-либо плоской стороне многоугольной границы. Затем исследовали процесс самоориентации структуры во времени. Выяснилось, что при этом вся роликовая структура вращается как целое вокруг центра кюветы до тех пор, когда длинные ролики, проходящие близко к центру не установятся перпендикулярно плоской границе (в кюветах с нечетным количеством сторон ролики при этом немного изогнутые). Типичный график изменения угла поворота структуры во времени для шестиугольной границы представлен на рис. 5, где устойчивое состояние соответствует  $30^\circ$  по углу, а граница раздела соседних зон устойчивости –  $0^\circ$ ). Видно, что вначале скорость вращения структуры почти постоянна, а затем она уменьшается и стремится к нулю при приближении к состоянию равновесия.

Установлено, что качественное поведение структуры в процессе ее самоориентации не зависит от количества сторон многоугольной границы и от частоты вынуждающей силы. Однако время самоориентации структур зависит от надкритичности. В области устойчивых роликовых режимов мы измерили время самоориентации структуры к состоянию равновесия в зависимости от надкритичности. Измерялось

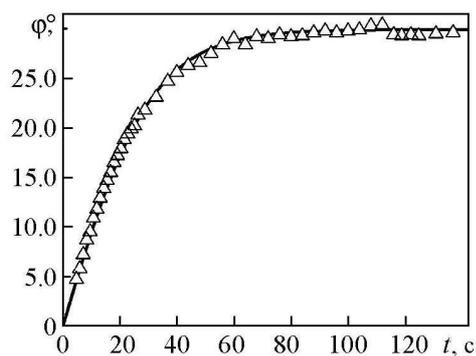


Рис. 5. График изменения угла поворота структуры во времени для шестиугольной кюветы

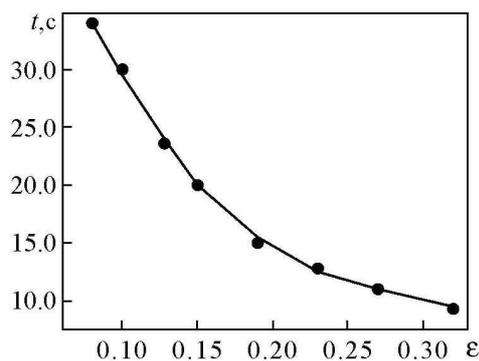


Рис. 6. Зависимость времени установления устойчивого роликового режима от надкритичности. Частота  $F = 53$  Гц, глубина жидкости  $h = 6$  мм

время поворота структуры от начального отклонения по углу от  $2^\circ$  до  $12^\circ$ , так как при дальнейшем повороте при приближении к состоянию равновесия скорость вращения роликовой структуры сильно замедлялась, что видно на рис. 5. На рис. 6 представлены графики такой зависимости для шестиугольной кюветы ( $F = 53$  Гц,  $h \sim 6$  мм). Видно, что время установления устойчивого стационарного режима уменьшается обратно пропорционально надкритичности и при увеличении надкритичности в три раза время самоориентации уменьшилось также в три раза.

Однако при больших значениях надкритичности качественное поведение роликовых режимов может измениться. Если при малых значениях надкритичности для разных частот существуют области устойчивых прямолинейных роликов, то при дальнейшем увеличении надкритичности на фоне роликов из-за неустойчивости однородного режима могут возникать волны модуляции и дефекты, но структуры остаются устойчивыми. Далее при больших значениях  $\epsilon$  наступает хаотический режим, и устойчивые режимы не наблюдаются. Так как поведение системы для кювет с разным числом сторон были подобны, то далее представлены результаты для шестиугольной кюветы. На рис. 7 представлены области существования устойчивых роликов для разных частот в зависимости от надкритичности. В области 1 существуют устойчивые прямые ролики, в области 2 – ролики с дефектами на фоне волн модуляции, а в области 3 – хаотический режим.

Эксперименты показали, что число устойчивых состояний для роликов зависит от количества сторон многоугольной кюветы и растет с увеличением их числа. Стенки многоугольной кюветы оказывают на прилегающие к ним волны ориентирующее воздействие, так же как и в прямоугольных кюветах. Естественно предположить, что минимальная длина стороны при этом должна быть больше, чем длина возбуждающихся волн. Тогда максимальное число

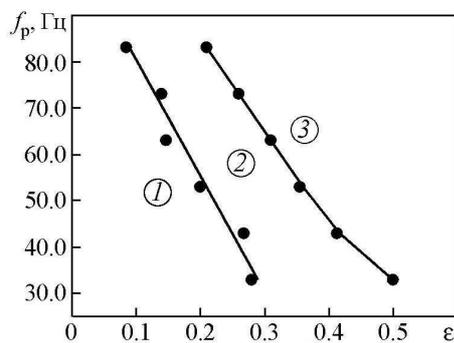


Рис. 7. Области существования устойчивых роликов для разных частот в зависимости от надкритичности

устойчивых состояний в кювете в форме правильного многоугольника с нечетным числом сторон будет:

$$n < \frac{\pi d}{\lambda}, \quad (2)$$

где  $n$  – число устойчивых состояний,  $d$  – поперечный размер кюветы,  $\lambda$  – длина волны возникающих волн (для кюветы с четным числом сторон  $n$  будет в два раза меньше).

Обсудим возможный механизм самоориентации роликов при отклонении от состояния равновесия для многоугольника с четным числом сторон. В устойчивом состоянии равновесия ролики стоячего поля ориентированы перпендикулярно стороне кюветы. В среде с большой вязкостью вблизи стенки под действием поля стоячих волн возникают симметричные вихревые течения, а среднее течение отсутствует. При отклонении от состояния равновесия вихревые течения располагаются под углом к границе, и возникает среднее течение, направленное к состоянию равновесия. В результате под влиянием среднего течения роликовая структура начинает дрейфовать к состоянию равновесия. С помощью частиц расположенных на дне кюветы мы зафиксировали средние течения вблизи стенок. Их величина была близка к скоростям движения концов роликов, скользящих вдоль стенок кюветы. Исходя из экспериментальной зависимости изменения угла поворота роликовой структуры от времени при ее самоориентации можно предложить феноменологическое уравнение типа Гинзбурга–Ландау для описания этого процесса:

$$\frac{d\phi}{dt} = a - b\phi^2, \quad (3)$$

где  $a$  – величина пропорциональная надкритичности,  $b$  – коэффициент нелинейности. На рис. 5 представлен график численного решения зависимости угла поворота структуры от времени для параметров, найденных из эксперимента. Видно хорошее качественное совпадение расчетной зависимости с экспериментальной (рис. 5).

### Образование спиральных структур из тяжелых частиц

Эксперименты показали, что процесс образования спиральных структур наблюдается в широкой области параметров. Выяснилось, что процесс носит пороговый характер по величине надкритичности и если величина надкритичности меньше

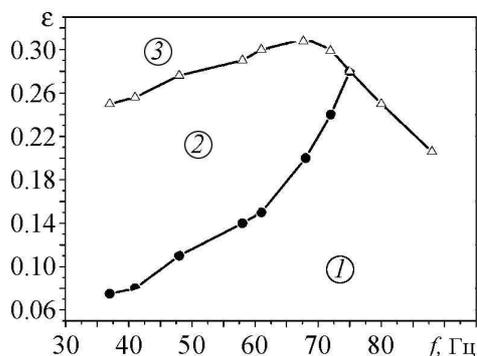


Рис. 8. Экспериментально найденные области параметров с различным поведением системы

некоторой пороговой величины, то частицы неподвижны, хотя стоячие спиральные волны уже существуют. Установлено, что основными параметрами, которые влияют на качественно различное поведение системы являются надкритичность и частота вынуждающей силы. На рис. 8 представлены экспериментально найденные области параметров с различным поведением системы. В области 1 устойчиво существуют стоячие спиральные волны на поверхности жидкости, но частицы покоятся на дне

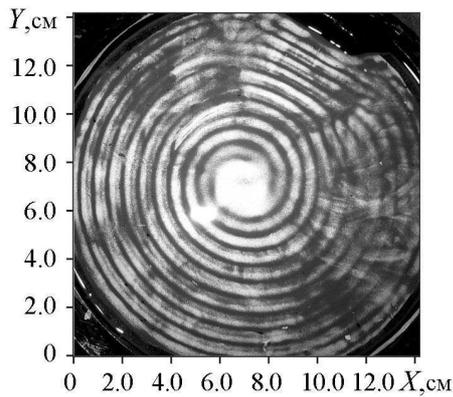


Рис. 9. Двухзаходная спиральная структура примеси, образованная спиральной волной при частоте  $f = 68$  Гц, глубине  $h = 3.6$  мм, амплитуде ускорения  $4g$

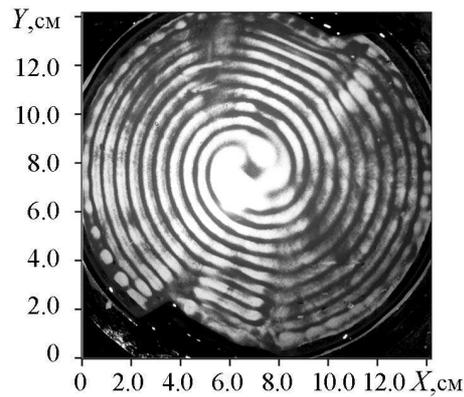


Рис. 10. Четырехзаходная спиральная структура примеси, образованная двухзаходной спиральной волной при частоте  $f = 68$  Гц, глубине  $h = 3.6$  мм, амплитуде ускорения  $4g$

кюветы. Очевидно, что скорости средних течений недостаточно велики. Чтобы сдвинуть частицы (скорости средних течений пропорциональны квадрату амплитуды поля стоячих волн). В области 2 уже возникают и формируются спиральные структуры из частиц. При этом на дне возникает периодический рельеф из частиц с распределением частиц по радиусу, близким к синусоидальной функции. Линия, разделяющая области 1 и 2, задает критическую величину  $\epsilon$ , при превышении которой начинается эффект образования структур. В области 3 спиральные стоячие волны становятся неустойчивыми. Возникают хаотические волны модуляции и дефекты, и процесс образования регулярных структур из частиц нарушается. Типичные картины образования спиральных структур представлены на рис. 9, 10. На рис. 9 представлена двухзаходная спиральная структура, установившаяся под действием стоячего поля однозаходной спиральной стоячей волны. Заметим, что число заходов удваивается по сравнению с однозаходной спиральной поверхностной волной и совпадает с усредненной картиной стоячего поля. На рис. 10 представлена четырехзаходная спиральная структура, полученная под воздействием двухзаходной спиральной стоячей волны. Для исследования формирования частиц во времени мы получили записи роста структур в виде последовательности кадров, однако непосредственное измерение слоя частиц было затруднительно. Для качественной оценки толщины слоя частиц использовалась покадровая обработка яркостной картины периодического распределения частиц в пространстве с учетом нормирования яркости на единицу. Интенсивность яркости после нормировки менялась от нуля (белый цвет, отсутствие частиц) до единицы (черный цвет, максимальное отсутствие частиц). На рис. 11 представлена типичная картина распределения интенсивности яркости частиц в структуре в радиальном сечении в начальный и в конечный момент времени. Видно, что из начального случайного распределения (рис. 11, а) под действием стоячих волн частицы формируют в пространстве структуру, близкую к периодической (рис. 11, б), при этом период структуры вдвое меньше длины волны периодического распределения частиц в пространстве с учетом нормирования яркости по начальным кадрам. На рис. 12 представлен график зависимости нормированной на единицу амплитуды квазипериодической функции распределения частиц в пространстве от времени,

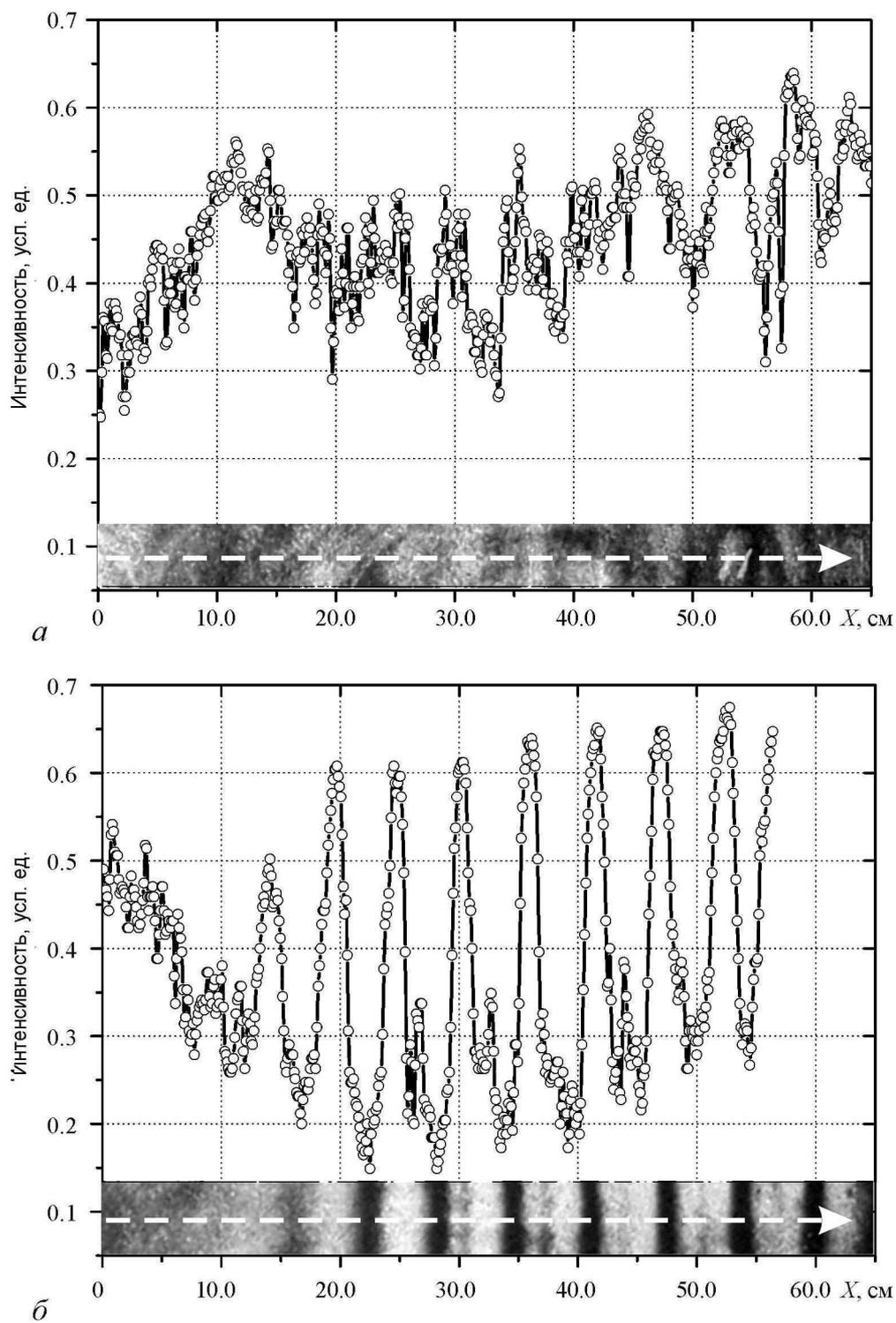


Рис. 11. Картина распределения интенсивности яркости частиц в структуре в радиальном сечении (реальные фото обрабатываемых секторов показаны внизу графиков) под действием спиральной волны в начальный (а) и конечный, через 21 с, (б) момент времени

полученный вычислением усредненной разницы между максимумами и минимумами в яркостной картине структуры частиц.

Сделаем оценку по переносу частиц потоком в вязкой жидкости. В вязкой жидкости частицы малого размера тонут со скоростью

$$V = \frac{2}{g} R^2 \frac{\rho_1 - \rho_2 g}{\rho_2 \nu}, \quad (4)$$

где  $\rho_1$  и  $R$  – плотность и радиус частицы,  $\rho_2$  и  $\nu$  – плотность и кинематическая вязкость жидкости, соответственно.

Если размер частицы приблизительно равен  $\delta \cdot 10^{-3}$  см, вязкость в 10 раз больше вязкости воды, а плотность в 5 раз превышает плотность жидкости, то скорость осаждения частиц будет приблизительно 0.5 см/с.

Если скорость внешнего потока направлена против силы тяжести и превышает эту величину, то частица будет передвигаться под действием потока жидкости.

Оценим колебательную скорость потока, создаваемую в волне. Вертикальная скорость  $V_2 \sim A\omega$ . При частоте накачки 30 Гц и амплитуде волны 0.5 мм вертикальная скорость  $V_2$  составит приблизительно 7.5 см/с. Если вертикальная компонента скорости  $V_2$  будет превышать 0.5 см/с, то частица будет отрываться от остальных частиц и перемещаться потоком.

Так как при уменьшении надкритичности амплитуда стоячей волны уменьшается, то эффект образования периодической структуры поля будет иметь пороговый характер, как это и наблюдалось в эксперименте (рис. 9, 10). Пусть переменная в пространстве часть высоты слоя частиц

$$\tilde{h} = A(z, t) \cdot f(R, \phi), \quad (5)$$

где  $A$  – огибающая амплитуды для известной функции  $f(R, \phi)$  возникающей в процессе неустойчивости, а волновое число периодической по  $x$  и  $y$  функции, описывающей изменение высоты слоя частиц.

Учитывая то, что у нас в эксперименте наблюдается рост спиральной структуры из частиц в течение 15...20 с, а затем наступает ограничение, можно предложить модельные уравнения для описания этого процесса. Так как исходная толщина слоя одинакова во всем пространстве пятна, а неустойчивость так же однородна в пространстве, то в уравнении будет только зависимость от времени

$$\frac{dA}{dt} = \gamma - \alpha A^2, \quad (6)$$

где постоянные коэффициенты  $\gamma$  и  $\alpha$  находятся из эксперимента.

Например, для слоя жидкости толщиной 4 мм, толщине слоя частиц меньше критической и коэффициентах, равных 1 и 3, соответственно, уравнение (2) качественно хорошо описывает результаты эксперимента.

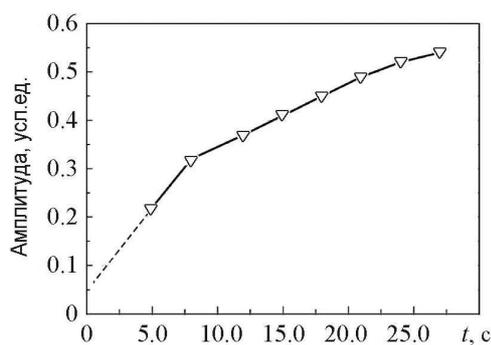


Рис. 12. Зависимость амплитуды периодической функции распределения частиц в пространстве от времени

Таким образом, из результатов эксперимента выяснилось, что процесс образования спиральных структур наблюдается в широкой области параметров. Эффект образования структур имеет пороговый характер и зависит от интенсивности поля стоячих волн. Обнаружено образование многозаходных спиральных структур из частиц. Установлено, что основными параметрами, которые влияют на качественно различное поведение системы, являются надкритичность и частота вынуждающей силы. Результаты эксперимента показали, что процесс образования спиральных структур наблюдается в широкой области параметров. Предложенные модельные уравнения качественно хорошо описывают поведение в системе.

### Заключение

Экспериментально исследована динамика роликовых доменов, которые возникают на поверхности жидкости большой вязкости при параметрическом возбуждении. Установлено, что в зависимости от граничных и начальных условий на краях кюветы возникают двумерные домены различной формы, а динамика доменов определяется движением их фронтов. В результате экспериментов обнаружен эффект мультивариантности сценариев перехода к устойчивому состоянию равновесия. Его особенность состоит в том, что при включении внешнего сигнала наблюдаются различные сценарии в динамике конкурирующих доменов при неизменных параметрах системы. Предложена модель наблюдаемого явления, численные расчеты в соответствии с которой хорошо согласуются с экспериментом.

Экспериментально исследована динамика роликовых структур параметрически возбуждаемых капиллярных волн на поверхности жидкости большой вязкости при многоугольной форме границ. Обнаружен эффект мультистабильности при которой возможно существование нескольких устойчивых роликовых режимов, отличающихся только ориентацией в пространстве. Исследована их устойчивость при отклонении роликов по углу от состояния равновесия. Предложена модель наблюдаемого явления, численные расчеты в соответствии с которой хорошо согласуются с экспериментом.

Результаты могут представлять интерес при исследованиях процессов установления устойчивых режимов в активных средах при сильной конкуренции и при исследовании формирования двумерных структур из проводящих частиц, способных рассеивать электромагнитные волны [22].

Экспериментально исследовано образование спиральных структур из тяжелых частиц под действием поля параметрически возбуждаемых спиральных волн. Процесс образования спиральных структур наблюдается в широкой области параметров. Эффект образования структур имеет пороговый характер и зависит от интенсивности поля стоячих волн. Обнаружено образование многозаходных спиральных структур из частиц. Установлено, что основными параметрами, которые влияют на качественно различное поведение системы, являются надкритичность и частота вынуждающей силы. Предложенные модельные уравнения качественно хорошо описывают поведение в системе.

*Работа выполнена в рамках государственного задания ИПФ РАН проект № 0035-2014-0007.*

## Библиографический список

1. *Rabinovich M.I., Ezersky A.B., and Weidman P.D.* The Dynamics of Patterns // World Scientific, Singapore, 2000.
2. *Захаров В.Е., Львов В.С., Мушер С.Л.* О нестационарном поведении системы параметрически возбужденных спиновых волн // Физика твердого тела. 1972. № 4. С. 2913.
3. *Езерский А.Б., Рабинович М.И., Реутов В.П., Старобинец И.М.* Пространственно-временной хаос в параметрически возбуждаемой капиллярной ряби // ЖЭТФ. 1986. 91. Вып. 6 (12). С. 2070.
4. *Ezersky A.B., Kiyashko S.V., Matusov P.A., Rabinovich M.I.* Domain, domain walls and dislocations in capillary ripples // Europhys. Lett. 1994. Vol. 26, № 3. Pp. 183–188.
5. *Ezersky A.B., Nazarovskiy A.V., Kiyashko S.V.* Bound states of topological defects in parametrically excited capillary ripples // Physica D. 2001. Vol. 152–153. Pp. 310–324.
6. *Афенченко В.О., Кияшко С.В., Пискунова Л.В.* Движение фронта при конкуренции роликовых доменов параметрически связанных волн // Изв. РАН Сер. Физ. 2004. Т. 68, № 12. С. 1771–1775.
7. *Кияшко С.В.* Динамика роликовых доменов параметрически возбуждаемых капиллярных волн // Изв. вузов. Радиофизика. 2008. Т. LI, № 4. С. 359–365.
8. *Кияшко С.В., Афенченко В.О., Назаровский А.В.* Динамика роликовых доменов параметрически возбуждаемых капиллярных волн при прямоугольной геометрии границ // Изв. вузов ПНД. 2013. Т. 21, № 6. С. 58–68.
9. *Kiyashko S.V., Afenchenko V.O., Nazarovskii A.V.* Dynamics of Roll Domains in a Rounded-Corner Cell // Physics of Wave Phenomena. 2014. Vol. 22, № 2. Pp. 132–139.
10. *Kiyashko S.V., Korzinov L.N., Rabinovich M.I., Tsimring L.S.* Rotating spirals in a Faraday experiment // Phys. Rev. E. 1996. Vol. 54, № 5. Pp. 5037–5040.
11. *Edwards W.S. and Fauve S.* Patterns and quasi-patterns in the Faraday experiment // J. Fluid Mech. 1994. Vol. 278. Pp. 123–148.
12. *Кияшко С.В., Афенченко В.О., Назаровский А.В.* Мультистабильность роликовых структур параметрически возбуждаемых капиллярных волн при многоугольной форме границ // Изв. вузов. Радиофизика. 2016. Т. 59, № 6. С. 489.
13. *Ottino J.M.* The kinematics of mixing: stretching, chaos, and turbulence. Cambridge University press, Cambridge 1989.
14. *Gollub J.P.* Nonlinear waves: Dynamics and transport // Physica D. 1991. Vol. 51. P. 501.
15. *Mesquita O.N., Kane S., Gollub J.P.* Transport by capillary waves: Fluctuating Stokes drift // Phys. Rev. A. 1992. Vol. 45, № 6. P. 3700.
16. *Ramshankar R., Berlin D., Gollub J.P.* Transport by capillary waves. Part I. Particle trajectories // Phys. Fluids A 2. 1990. P. 1955.
17. *Ramshankar R., Gollub J.P.* Transport by Capillary Waves, Part II: Scalar Dispersion and the Structure of the Concentration field // Phys. Fluids A 3. 1991. P. 1344.
18. *Езерский А.Б., Кияшко С.В., Назаровский А.В.* Перенос примеси топологическими дефектами поля параметрически возбуждаемой капиллярной ряби // Препринт № 506 ИПФРАН, 1999.

19. *Кияшко С.В., Аfenченко В.О., Назаровский А.В.* Спиральные структуры из тяжелых частиц при параметрическом возбуждении стоячих капиллярных волн // Изв. вузов ПНД. 2013. Т. 21, № 2. С. 201–208.
20. *Кияшко С.В., Назаровский А.В.* Структуры при параметрическом возбуждении капиллярной ряби в слое с периодической неоднородностью глубины // Изв. РАН Сер. Физ. 2000. Т. 64, № 12. С. 2405–2411.
21. *Матусов П.А., Цимринг Л.Ш.* Распространение фронта параметрически возбуждаемой капиллярной ряби // Препринт №225, Горький, ИПФ АН, 1988.
22. *Afenchenko V.O., Ezersky A.B., Kaverin B.S., Kiyashko S.V., and Chesnokov S.A.* Production of materials with periodically arranged microparticles by photopolymerization of patterns formed at parametric excitation of capillary surface waves // Physics of Wave Phenomena. 2011. Vol. 19, № 1. Pp. 68–73.

*Поступила в редакцию 17.09.2016*

## **DYNAMICS OF ROLL DOMAINS AND THE FORMATION OF STRUCTURES OF PARTICLES IN PARAMETRIC EXCITATION OF CAPILLARY WAVES**

*S. V. Kiyashko, A. V. Nazarovsky*

Institute of Applied Physics of the RAS  
46 Ul'yanov Street, 603950, Nizhny Novgorod, Russia  
E-mail: kiyashko@appl.sci-nnov.ru, nazarovsky@appl.sci-nnov.ru

The proposed material is a review of the results of the study of the dynamics of roll domains of parametrically excited waves on the surface of the liquid. The processes of establishing regular wave patterns and structures from heavy particles produced by a field of standing waves are discussed from the standpoint of nonlinear dynamics.

In experimental studies, carried out over the past few years, a number of interesting results concerning the dynamics of roll domains and the formation of structures of particles at parametric excitation of capillary waves were obtained. The effect of multivariate scenarios of transition to a stable state of equilibrium was discovered, whose specific feature is that when an external signal is turned on there are various scenarios in the dynamics of competing domains at constant parameters of the system. On the surface of the liquid of high viscosity with a polygonal shape of boundaries the effect of multistability was detected, at which the existence of several stable roll regimes differing only in the orientation in space is possible. The formation of multiarmedspiral structures of heavy particles placed in a liquid layer on the surface of which capillary waves are parametrically excited was observed.

It is well known that the processes of occurrence, interaction, synchronization and destruction of spatial structures have similar dynamics in many systems (i.e., described by the same equations). But in some systems, the study of these processes can be associated with considerable difficulties. The results described in this review were obtained in the study of parametrically excited capillary ripples, which are very convenient objects for studying the pattern formation and the transition from regular structures to chaos because of its simplicity and at the same time a wide variety of observed effects. Taking this into account, we believe that the results described in the review will be important for understanding the processes taking place in various physical systems.

*Keywords:* Pattern formation, capillary waves, roll structures, domains competition, heavy particles, spiral structures, multistability.

DOI: 10.18500/0869-6632-2016-24-4-17-38

*Paper reference:* Kiyashko S.V., Nazarovsky A.V. Dynamics of roll domains and the formation of structures of particles in parametric excitation of capillary waves // Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics. 2016. Vol. 24, № 4. P. 17–38.

## References

1. *Rabinovich M.I., Ezersky A.B., and Weidman P.D.* The Dynamics of Patterns // World Scientific, Singapore, 2000.
2. *Zakharov V.E., Lvov V.S., Musher S.L.* On non-stationary behavior of a system of parametrically excited spin waves // *Fiz. Tverd. Tela.* 1972. № 4. P. 2913. (in Russian)
3. *Ezersii A.B., Rabinovich M.I., Reutov V.P., Starobinets I.M.* Spatiotemporal chaos in the parametric excitation of a capillary ripple // *JETP.* 1986. Vol. 64, № 6. P. 1228.
4. *Ezersky A.B., Kiyashko S.V., Matusov P.A., Rabinovich M.I.* Domain, domain walls and dislocations in capillary ripples // *Europhys. Lett.* 1994. Vol. 26, № 3. Pp. 183–188.
5. *Ezersky A.B., Nazarovskiy A.V., Kiyashko S.V.* Bound states of topological defects in parametrically excited capillary ripples // *Physica D.* 2001. Vol. 152–153. Pp. 310–324.
6. *Afenchenko V.O., Kiyashko S.V., and Piskunova L.V.* Front Motion under Competition of Roll Domains of Parametrically Excited Capillary Wave // *Bull. of the RAS: Physics.* 2004. Vol. 68, № 12. P. 1987.
7. *Kiyashko S.V.* Dynamics of roll domains of parametrically excited capillary waves // *Radiophys. Quantum El.* 2008. Vol. 51. 324. doi:10.1007/s11141-008-9033-7
8. *Kiyashko S.V., Afenchenko V.O., Nazarovskiy A.V.* Dynamics of roll domains of parametrically excited capillary waves at the boundaries of the rectangular geometry // *Izvestiya VUZ. AND.* 2013. Vol. 21, № 6. Pp. 58–68. (in Russian)
9. *Kiyashko S.V., Afenchenko V.O., Nazarovskii A.V.* Dynamics of Roll Domains in a Rounded-Corner Cell // *Physics of Wave Phenomena.* 2014. Vol. 22, № 2. Pp. 132–139.
10. *Kiyashko S.V., Korzinov L.N., Rabinovich M.I., Tsimring L.S.* Rotating spirals in a Faraday experiment // *Phys. Rev. E.* 1996. Vol. 54, № 5. Pp. 5037–5040.
11. *Edwards W.S. and Fauve S.* Patterns and quasi-patterns in the Faraday experiment // *J. Fluid Mech.* 1994. Vol. 278. Pp. 123–148.
12. *Kiyashko S.V., Afenchenko V.O., Nazarovskiy A.V.* Multistability of roll structures of parametrically excited capillary waves in the boundaries of a polygonal form // *Izv. VUZ. Radiophys.* 2016. Vol. 59, № 6. P. 489. (in Russian)
13. *Ottino J.M.* The kinematics of mixing: stretching, chaos, and turbulence. Cambridge University press, Cambridge 1989.
14. *Gollub J.P.* Nonlinear waves: Dynamics and transport // *Physica D.* 1991. Vol. 51. P. 501.
15. *Mesquita O.N., Kane S., Gollub J.P.* Transport by capillary waves: Fluctuating Stokes drift // *Phys. Rev. A.* 1992. Vol. 45, № 6. P. 3700.
16. *Ramshankar R., Berlin D., Gollub J.P.* Transport by capillary waves. Part I. Particle trajectories // *Phys. Fluids A 2.* 1990. P. 1955.
17. *Ramshankar R., Gollub J.P.* Transport by Capillary Waves, Part II: Scalar Dispersion and the Structure of the Concentration field // *Phys. Fluids A 3.* 1991. P. 1344.
18. *Ezersky A.B., Kiyashko S.V., Nazarovskiy A.V.* Transport of impurities by topological

defects of field parametrically excited capillary ripples // Preprint N. 506 IAP RAN, 1999. (in Russian)

19. *Kiyashko S.V., Afenchenko V.O., Nazarovskiy A.V.* The spiral structures of the heavy particles in parametric excitation of standing capillary waves // *Izvestiya VUZ. AND.* 2013. Vol. 21, № 2. P. 201–208.
20. *Kiyashko S.V., Nazarovskiy A.V.* Structures in parametric excitation of capillary ripples in the layer with aperiodic depthinhomogeneity // *Izv. RAN Ser. Fiz.* 2000. Vol. 64, № 12. P. 2405–2411. (in Russian)
21. *Matusov P.A., Tsimring L.Sh.* The propagation of the front of parametrically excited capillary ripples // Preprint N. 225, Gorky, IAP AN, 1988. (in Russian)
22. *Afenchenko V.O., Ezerskiy A.B., Kaverin B.S., Kiyashko S.V., and Chesnokov S.A.* Production of materials with periodically arranged microparticles by photopolymerization of patterns formed at parametric excitation of capillary surface waves // *Physics of Wave Phenomena.* 2011. Vol. 19, № 1. Pp. 68–73.



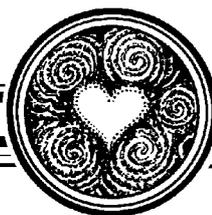
*Кияшко Сергей Васильевич* – родился в 1942 году. Закончил Горьковский государственный университет (1969). После окончания ГГУ работает в Институте прикладной физики РАН ведущим научным сотрудником. Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук (НИРФИ, 1980) и доктора физико-математических наук по специальности механика жидкости и плазмы (2004). Область научных интересов теоретическое и экспериментальное исследование динамики волновых процессов в нелинейных средах с неустойчивостью. Опубликовал более 50 статей в отечественных и иностранных журналах.

603950, Нижний Новгород, БОКС-120, ул. Ульянова, 46  
Институт Прикладной физики РАН  
E-mail: kiyashko@appl.sci-nnov.ru



*Назаровский Александр Владимирович*, родился в 1974 году. Окончил радиофизический факультет Нижегородского государственного университета им. Н.И. Лобачевского (1998). Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук. Младший научный сотрудник Института прикладной физики РАН. Область научных интересов – волновые процессы, хаос и формирование структур в неравновесных средах. Имеет более 30 публикаций в отечественных и иностранных журналах.

603950, Нижний Новгород, БОКС-120, ул. Ульянова, 46  
Институт Прикладной физики РАН  
E-mail: nazarovskiy@appl.sci-nnov.ru



## КЛАССИЧЕСКИЕ ДВУМЕРНЫЕ МОДЕЛИ КУЧИ ПЕСКА

*А. В. Подлазов*

Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН  
125047, Москва, Миусская пл., д.4

E-mail: tiger-cub@mail.ru

Работа посвящена изучению моделей кучи песка – открытых нелинейных систем, демонстрирующих возникновение лавинообразного развивающегося отклика на единичное возмущение устойчивого состояния. Подробно рассмотрены пять наиболее известных вариантов правил в двумерной постановке – модели Дхара–Рамасвами, Пастор–Саторраса–Веспиньяни, Федеров, Манни и Бака–Танга–Визенфельда.

Для первых четырех моделей были известны аналитические решения, полученные различными способами, а для пятой – причины, препятствовавшие построению решения. Обобщение этих результатов позволяет выработать единый подход к теоретическому исследованию самоорганизованно-критических явлений.

Самоорганизация в критическое состояние приводит к возникновению масштабно-инвариантных свойств, статистическое описание которых в общем случае не может быть дано на основе правил изучаемых моделей. Между локальным поведением их элементов на микроуровне и целостным поведением всей системы на макроуровне посредничают модели промежуточного уровня. Их правила не выводятся из правил исходных моделей, а формулируются на основе физической интуиции, результатов компьютерного эксперимента и общих представлений о динамических процессах, удерживающих систему вблизи критической точки. На промежуточном уровне коллективная динамика всех рассмотренных моделей сведена к привычным для математической физики процессам, в первую очередь – к несимметричному случайному блужданию. На этой основе предложены сходные методики решения моделей, причем модель БТВ решена впервые.

Для рассматриваемых моделей аналитически определены все критические индексы, на основе чего проанализировано влияние особенностей правил моделей на их общие свойства.

Важнейшей деталью правил является их стохастичность или детерминированность. Первая увеличивает количество характеристик лавины, различающихся по свойствам, а вторая помогает крупным лавинам помещаться в систему конечного размера и приводит к возникновению у системы как у целого динамических симметрий, отсутствующих на уровне правил поведения ее отдельных элементов.

*Ключевые слова:* Самоорганизованная критичность, модели кучи песка, масштабная инвариантность, степенные распределения, конечно-размерный скейлинг, модели промежуточного уровня, случайные блуждания, спонтанная анизотропия, динамические симметрии.

DOI: 10.18500/0869-6632-2016-24-4-39-70

*Ссылка на статью:* Подлазов А.В. Классические двумерные модели кучи песка // Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2016. Т. 24, № 4. С. 39–70.

## Введение

Одним из ключевых признаков сложного поведения является *масштабная инвариантность* происходящих процессов, т.е. отсутствие у описывающих их величин собственных (не связанных с размерами системы) характерных значений. Ключ к пониманию природы масштабно-инвариантных явлений дает теория самоорганизованной критичности [1], демонстрирующая возникновение целостных свойств у открытых систем, состоящих из большого числа элементов, поведение которых подчиняется локальным нелинейным правилам. Базовым образом здесь служит куча песка, на которую по одной добавляют песчинки. Если песка в куче мало, то осыпание, вызванное добавленной песчинкой, скорее всего, не достигнет края кучи и песчинка останется в ней. Если песка много, возможно возникновение глобального осыпания, в результате которого большое количество песчинок свалится за край кучи. Равновесие между числом песчинок, добавляемых в кучу и покидающих ее, достигается при некотором критическом количестве песка, при котором возмущение может распространяться по куче сколь угодно далеко, в среднем не затухая и не разрастаясь. При этом описывающие его величины утрачиваются собственные характерные значения.

Исследователями предложен целый ряд самоорганизованно-критических моделей, из которых для данного обзора были взяты классические модели кучи пуска, представляющие собой клеточные автоматы на решетке размера  $L \times L$ . В ее ячейках находятся неотрицательные целые числа  $z_{i,j}$  ( $0 \leq i, j < L$ ), традиционно интерпретируемые как количество *песчинок*. Элементарное событие модели состоит из *возмущения* устойчивого состояния и процесса *релаксации*. Устойчивым считается состояние, в котором для всех ячеек выполнено неравенство  $z_{i,j} < z_c$ , где  $z_c$  – *порог устойчивости*, одинаковый для всех ячеек. Возмущение производится путем увеличения на единицу значения в выбранной по определенным правилам ячейке  $(i, j)$ , что рассматривается как вброс в кучу песчинки:  $z_{i,j} + = 1$  (то есть к величине  $z_{i,j}$  добавляется 1). Если в результате возмущения ячейка теряет устойчивость, то она *опрокидывается*, передавая некоторое количество песчинок своим соседкам согласно правилам модели. Это, в свою очередь, способно нарушить устойчивость соседних ячеек, приводя к развитию *лавины* опрокидываний, продолжающейся до тех пор, пока все ячейки вновь не обретут устойчивость. После этого релаксационный процесс считается завершенным и дается старт следующему событию.

В настоящей работе рассматриваются 5 моделей типа кучи песка, правила опрокидывания которых, изображенные на рис. 1, демонстрируют различные комбинации особенностей:

- *модель Дхара–Рамасвами* (ДР) [2] – направленная, детерминированная, консервативная, абелева;
- *модель Пастор–Саторраса–Веспиньяни* (ПСВ) [3] – направленная, стохастическая, консервативная, квазиабелева;
- *модель Федеров* [4] – изотропная, детерминированная, диссипативная, неабелева;
- *модель Манны* [5] – изотропная, детерминированная, диссипативная, квазиабелева;



нится, если при опрокидывании неустойчивой ячейки изымать из нее и раздавать соседкам не пороговое количество песчинок, а все имеющиеся (для модели ПСВ – работа [13], для модели Манна – результат автора). Однако после такой модификации правил модели уже не будут абелевыми, в силу чего они определены здесь как *квазиабелевы*. Инструментарий теории абелевых моделей к ним хотя и применим, но, скорее всего, ничего по-настоящему интересного узнать не позволит (иначе он бы работал и на неабелевых моделях). Диссипативная модель Федеров является *неабелевой*, так как для нее порядок опрокидывания ячеек существенно сказывается на развитии лавины.

Кроме правил опрокидывания неустойчивых ячеек необходимо описать правила вброса песчинок, инициирующих лавины, и правила выбытия песчинок, без которого невозможно достижение стационарного состояния системы.

Для направленных моделей (ДР и ПСВ) вброс песчинок осуществляется в случайно выбранную ячейку верхнего слоя. Нижний слой является открытым, то есть при опрокидывании его ячеек все изъятые из них песчинки покидают систему. Боковые края решетки отождествлены (периодические граничные условия).

Для диссипативной модели (Федеры) вброс осуществляется строго случайно по всей решетке. Краевые условия будут уточнены в ходе анализа этой модели.

Наконец, для консервативных изотропных моделей (Манна и БТВ) правила вброса песчинок непринципиальны (приводимые далее графики получены при вбросе, осуществляемом в одну из четырех центральных ячеек, выбираемую случайно). Краевые условия – открытые, то есть при опрокидывании прикраевой ячейки песчинки, выпавшие за край, покидают систему.

Целью изучения моделей является их *решение*, то есть определение показателей распределений различных характеристик лавин, из которых наиболее интересными являются:

- *размер* (число произошедших опрокидываний)  $N$ ;
- *площадь* (число опрокинувшихся ячеек)  $S$ ;
- *периметр* (число ячеек, получивших песчинку, но не опрокинувшихся, включая песчинки, выпавшие за край решетки)  $C$ ;
- *длительность* (число шагов времени при одновременной обработке неустойчивых ячеек)  $T$ .

Кроме того, иногда полезным оказывается рассмотрение таких производных характеристик как *средняя кратность опрокидывания*  $M = N/S$ , *активность*  $A = N/T$  и *радиус* (характерная линейная протяженность) области лавины  $R \sim \sqrt{S}$ .

Статья организована следующим образом. В разделе 1 описываются методы работы со степенными распределениями и облегчающий вычисление их показателей механизм несимметричного случайного блуждания. Раздел 2 посвящен моделям с анизотропным распространением активности, к числу которых относятся не только направленные модели ДР и ПСВ, но и изотропная модель Федеров. В разделе 3 на материале модели Манна демонстрируется инструментарий обращения с моделями, в которых распространение активности изотропно. В разделе 4 этот же инструментарий применен к модели БТВ. Завершается статья выводами, в которых суммируются и обобщаются ее результаты.

## 1. Степенные распределения вероятностей

**1.1. Скейлинговые свойства масштабно-инвариантных систем.** Статистическим выражением масштабно-инвариантных свойств являются степенные распределения происходящих событий с плотностью вероятности вида

$$u(x) = x^{-(1+\alpha)} \cdot g(x/x_1), \quad (1)$$

где  $\alpha$  – *характеристический показатель*;  $g(\xi)$  – *скейлинговая функция*, примерно постоянная при  $\xi \ll 1$  и убывающая быстрее любой степени аргумента при  $\xi \rightarrow \infty$ . В силу масштабной инвариантности размер события  $x_1$ , крупного настолько, что оно уже не помещается в систему конечного размера  $L$ , растет как некоторая его степень

$$x_1 \sim L^\nu. \quad (2)$$

При этом доля событий, не помещающихся в систему, убывает с ростом ее размера как

$$\text{Prob}\{x > x_1\} = \int_{x_1}^{\infty} u(x) dx \cong \int_{L^\nu}^{\infty} x^{-(1+\alpha)} \cdot g(xL^{-\nu}) dx \sim L^{-\varepsilon},$$

где  $\varepsilon = \alpha\nu$  – *универсальный показатель*, величина которого не зависит от того, какая величина используется для его вычисления, поскольку если событие не помещается в систему, то оно не помещается сразу по всем своим характеристикам.

Сочетание формул (1) и (2) позволяет определить скейлинговое поведение и для среднего события

$$\langle x \rangle = \int x \cdot u(x) dx \sim L^\sigma, \quad \sigma = \nu - \varepsilon. \quad (3)$$

Первый и второй *скейлинговые показатели*  $\nu$  и  $\sigma$ , связывающие характерные значения  $x_1$  и  $\langle x \rangle$  с обусловившим их появление конечным размером системы  $L$ , часто удается установить из общих соображений, что существенно облегчает теоретический анализ.

При одновременном рассмотрении различных характеристик  $x$  и  $y$  события зависимость между ними удобно описать условным средним некоторой степени  $q > 0$

$$y(x) = \sqrt[q]{\langle y^q \rangle_x} \simeq c(q) \cdot x^{\gamma_{yx}}. \quad (4)$$

Как правило, условное распределение  $u(y|x)$  является узким, в результате чего *показатель связи*  $\gamma_{yx}$  не зависит от выбора  $q$ , что позволяет при проведении расчетов с точностью до коэффициента считать связь таких величин функциональной. Далее используется степень  $q = 1$ , то есть в качестве взаимозависимостей характеристик выступает условное среднее.

Сопоставление размеров крупных событий  $y_1 \sim x_1^{\gamma_{yx}}$  дает соотношение между показателем связи и скейлинговыми показателями

$$\gamma_{yx} = \nu_y / \nu_x. \quad (5)$$

С другой стороны, формула преобразования вероятностей  $u_x(x)dx = u_y(y)dy$  позволяет выразить показатель связи и через характеристические показатели

$$\gamma_{yx} = \alpha_x / \alpha_y, \quad (6)$$

что в сочетании с формулой (5) приводит к тождеству

$$\alpha_x \nu_x = \alpha_y \nu_y = \varepsilon, \quad (7)$$

подтверждающему независимость универсального показателя  $\varepsilon$  от выбора рассматриваемой величины.

**1.2. Случайное блуждание и показатели связи.** На практике использование соотношения (5) предполагает условленность показателя связи для рассматриваемых величин. Определить его для систем, находящихся в самоорганизованно-критическом состоянии, позволяет учет природы последнего. Пусть имеется некоторая переменная  $x$ , характеризующая активность на шаге  $t$ . Ее изменение по шагам можно рассматривать как несмещенное случайное блуждание

$$x_{t+1} = x_t + \delta_t, \quad (8)$$

где  $\langle \delta_t \rangle = 0$ . В самом деле, при  $\langle \delta_t \rangle < 0$  лавина быстро затухнет, а при  $\langle \delta_t \rangle > 0$  может неограниченно развиваться, что приводит к появлению отрицательной обратной связи, удерживающей систему в состоянии с  $\langle \delta_t \rangle = 0$ .

Пусть, кроме того, величина  $x$  такова, что блуждание оказывается и *некоррелированным*, то есть  $\langle x_t \cdot \delta_t \rangle = \langle x_t \rangle \cdot \langle \delta_t \rangle$ . Тогда стандартная процедура возведения обеих сторон отображения (8) в квадрат с последующим усреднением приводит к формуле  $\langle x_{t+1}^2 \rangle - \langle x_t^2 \rangle = \langle \delta_t^2 \rangle$ , которая при степенной зависимости среднеквадратичного приращения от номера шага и достигнутого значения

$$\langle \delta_t^2 \rangle \sim t^\tau x^\xi, \quad (9)$$

естественной для масштабно-инвариантных систем, позволяет вычислить показатель связи

$$\gamma_{xt} = (\tau + 1) / (2 - \xi). \quad (10)$$

Как мы увидим далее, в ряде задач – при удачном выборе величины  $x$  – показатели  $\tau$  и  $\xi$  находятся без труда.

Если  $\tau = \xi = 0$ , то есть свойства блуждания не зависят ни от его результата, ни от прошедшего времени, то соотношение (10) дает показатель  $\gamma_{xt} = 1/2$ , соответствующий обычной диффузии. В противном случае диффузия будет *аномальной*. Простейшим механизмом, лежащим в ее основе, является *несимметричное* блуждание с переменной длиной скачка. В частности, если  $\delta_t = \pm \delta_\pm$  с вероятностями  $p_\pm$ , то из нормировки  $p_+ + p_- = 1$  и условия несмещенности  $p_+ \delta_+ = p_- \delta_-$  получается

$$\langle \delta^2 \rangle = \delta_+ \delta_- \quad (11)$$

Зависимость длин скачков  $\delta_\pm$  от  $t$  или  $x$  может иметь сравнительно простое объяснение, что и позволяет перейти к формуле (9).

## 2. Модели с анизотропным распространением активности

**2.1. Направленные модели.** Модель Дхара–Рамасвами была полностью решена сразу ее авторами в работе [2], а решение модели Пастор–Саторраса–Веспиньяни дано еще в работах [9, 10]. Тем не менее, здесь развивается иной подход к этим моделям, следующий работе [14], отличительной чертой которого является возможность распространения и на более сложные модели.

В моделях ДР и ПСВ лавина распространяется строго сверху вниз, проходя каждый слой по одному разу. Поэтому длительность лавины  $T$  совпадает с числом затронутых ею слоев. Различие между моделями состоит в том, что в модели ДР ни одна ячейка не опрокидывается более одного раза (то есть площадь лавины  $S$  и ее размер  $N$  совпадают), тогда как в модели ПСВ возможны многократные опрокидывания.

Длительность лавин, крупных настолько, что они уже не помещаются в систему, определяется, очевидно, числом имеющихся в решетке слоев

$$T_1 = L \quad \text{или} \quad \nu_T = 1. \quad (12)$$

На каждом шаге в систему добавляется одна песчинка, поэтому в стационарном режиме в среднем одна песчинка будет ее и покидать. Единичное опрокидывание перемещает две песчинки на один слой, а для прохождения песчинки через всю систему необходимо перемещение на  $L$  слоев. Таким образом, среднее количество опрокидываний во время лавины

$$\langle N \rangle = L/2 \quad \text{или} \quad \sigma_N = \nu_N - \varepsilon = 1. \quad (13)$$

Будем характеризовать лавину на слое  $t$  ее шириной (числом опрокинутых ячеек слоя)  $w_t$  и активностью (числом произошедших на слое опрокидываний)  $a_t$ . Для модели ДР эти величины совпадают, тогда как в модели ПСВ они могут различаться.

При прохождении лавины по слоям ее ширина совершает случайные блуждания, смещение в которых никак не связано с номером слоя или текущей шириной, то есть в формуле (9)  $\tau = \xi = 0$  и соотношение (10) дает  $\gamma_{wt} = 1/2$ . Типичная площадь лавины, достигшей слоя  $T$ , находится суммированием ширины по слоям  $S(T) = \sum_{t=0}^T w_t \sim T^{\gamma_{wt}+1}$ , или  $\gamma_{ST} = 3/2$ , откуда, подставляя значение (12) в соотношение (5), получаем

$$\nu_S = 3/2. \quad (14)$$

Для модели ДР  $\nu_N = \nu_S$  и  $\nu_C = \nu_T$ , то есть определены все скейлинговые показатели. Формула (13) дает значение универсального показателя  $\varepsilon = 1/2$ , на основе чего из тождества (7) вычисляются и характеристические показатели распределений  $\alpha_c = \alpha_T = 1/2$  и  $\alpha_N = \alpha_S = 1/3$ , завершает решение модели.

Для модели ПСВ необходимо сделать еще один шаг. Здесь при продвижении лавины по слоям случайные блуждания совершает и активность  $a_t$ , приращение которой является суммой случайных независимых случайных величин, взятой по ширине области лавины  $w_t$ . В самом деле, если с верхнего слоя в ячейку передается четное число частиц, то ее прохождение не меняет числа опрокидываний, а если нечетное, то при наличии в ней песчинки, число опрокидываний увеличивается на

единицу, а при отсутствии – уменьшается [10]. Таким образом,  $\langle \delta_t^2 \rangle \sim w_t \sim t^{1/2}$ , то есть в формуле (9)  $\tau = 1/2$ ,  $\xi = 0$  и соотношение (10) дает  $\gamma_{at} = 3/4$ . И по аналогии с формулой (14) получаем

$$v_N = 7/4.$$

Далее вновь с помощью значения (13) находится универсальный показатель  $\varepsilon = 3/4$ , что почти завершает решение модели вычислением характеристических показателей  $\alpha_T = 3/4$ ,  $\alpha_N = 3/7$  и  $\alpha_S = 1/2$  из тождества (7).

Нерассмотренным остается только периметр лавины. Эта характеристика, которая далее сыграет ключевую роль при анализе моделей Манни и БТВ, а для моделей ДР и Федера является тривиальной, для модели ПСВ имеет не вполне четкий физический смысл, поскольку большая часть периметра оказывается внутри области лавины, а не на ее границе. Тем не менее, для полноты картины, следуя формальному определению периметра, посчитаем показатели и для него. Произвольная ячейка принадлежит периметру тогда и только тогда, когда она до лавины была пустой, вероятность чего пропорциональна ширине  $w_t$ , а в ее ходе получила ровно одну песчинку, вероятность чего обратно пропорциональна средней активности  $a_t/w_t$ . Таким образом, на слое оказывается порядка  $w_t^2/a_t \sim t^{1/4}$  ячеек периметра. Соответственно,  $v_C = 5/4$  и  $\alpha_C = 3/5$ .

**2.2. Модель Федеров.** Несмотря на строгую изотропию правил, модель Федеров демонстрирует направленную динамику, в силу чего может быть решена на основе того же подхода из работы [14], который был применен к моделям ДР и ПСВ. Однако сделать это, опираясь лишь на правила модели уже не удастся – необходимо предварительное изучение ее свойств и построение модели промежуточного уровня.

Может показаться, что в силу наличия в системе диссипации для достижения стационарного состояния открытый край не нужен. Однако, как показывает моделирование, если отождествить противоположные края решетки, свернув ее в тор, то система в какой-то момент впадает в бесконечный цикл. То есть, то количество песчинок в системе, которого достаточно для поддержки сколь угодно длительной лавины, оказывается уже недостаточным для возникновения диссипации.

Примечательно, что во время бесконечной лавины среднее заполнение ячеек  $\langle z \rangle = z_\infty = 2$  точно и без дисперсии. Объясняется данное значение устройством бесконечной лавины, которая представляет собой один или несколько фронтов опрокидывания, циклически обходящих решетку. При этом каждая ячейка, потерявшая устойчивость, при опрокидывании должна в среднем вернуть назад (туда, откуда фронт уже ушел) столько же песчинок, сколько она передает вперед (туда, куда идет фронт). А вперед передается столько песчинок, сколько в среднем не хватало ячейке до потери устойчивости. В сочетании с отсутствием диссипации два указанных обстоятельства и приводят к значению  $z_\infty = z_c/2 = 2$ .

Далее мы будем полагать верхний и нижний края решетки открытыми, а левый и правый отождествим, свернув ее в вертикальный цилиндр, как и для моделей ДР и ПСВ. Такая топология наиболее удобна для анализа, поскольку система становится квазиодномерной, распадаясь на *слои* ячеек, находящихся на одинаковом расстоянии от края.

У каждой песчинки, попавшей в систему, есть два пути ее покинуть: диссипация при опрокидывании ячейки с надкритическим числом песчинок или падение за

край при опрокидывании краевой ячейки. Как показывает компьютерное моделирование, второй путь значим только для событий, начинающихся в непосредственной близости от края. По мере удаления точки вброса от края число песчинок, выпавших за него, стремительно уменьшается (примерно в 10 раз на 10 слоев). Это обусловлено неконсервативностью правил, ограничивающей длину свободного пробега песчинок по решетке, в результате чего они покидают ее на сравнительно небольшом расстоянии от места вброса (в силу чего в правила и было введено требование его пространственной равномерности). Поэтому почти все песчинки выбывают в результате диссипации, а за край падают только те немногие, которым удается его достичь.

В результате возникает сложная пространственная структура заполнения, изображенная на рис. 2. За исключением прикраевого слоя и области в середине решетки всюду  $\langle z \rangle > z_\infty$ . Нарушение этого неравенства ведет к прекращению активности, а значит, и диссипации, в результате чего приток песчинок начинает преобладать над их оттоком, увеличивая заполнение. Общий вид его зависимости от номера слоя тоже вполне понятен. С одной стороны, вдалеке от края величина  $\langle z \rangle$  должна убывать, приближаясь к значению  $z_\infty$ , реализующемуся в системе без краев. А с другой – на самом краю из-за падения песчинок за него  $\langle z \rangle$  тоже мало. Где-то между этими двумя минимумами должен быть и максимум. Причем он располагается очень близко к краю (всего лишь на 4-м от него слое – см. левую врезку на рис. 2) в силу отмеченного выше экспоненциального сокращения шансов песчинки выпасть за край при удалении от него.

В таких условиях открытый край становится источником активности. Чем ближе к нему вброшена инициирующая песчинка, тем выше заполнение и лучше усло-

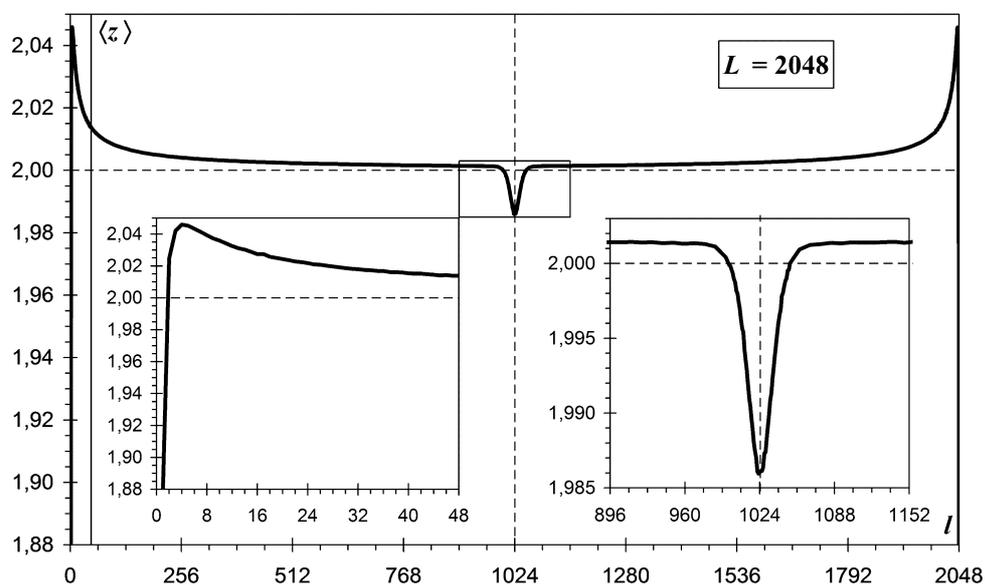


Рис. 2. Среднее заполнение ячеек по слоям решетки в модели Федерова. Заполнение максимально вблизи края, а по мере по мере удаления от него уменьшается, стремясь по гиперболе к предельному значению  $z_\infty$ , но в середине решетки проседает до значений, меньших  $z_\infty$ . На врезках увеличена область, обведенные рамочками: на левой – прикраевая область с максимумом заполнения, на правой – центральная с его минимумом. Слои нумеруются от одного края до другого (а не до середины, как в тексте)

вия для развития лавины. Поэтому самые крупные лавины, происходящие в системе, начинаются около ее края и завершаются около ее середины. Возникновение крупной лавины, идущей в обратную сторону, маловероятно. Такое поведение модели в самоорганизованно критическом состоянии уместно характеризовать как *спонтанную анизотропию*. Она связана с распространением краевых эффектов на всю систему (точнее говоря, на ближайшую к данному краю ее половину). Приблизительно можно считать, что лавины идут только вглубь решетки, принимая вид одного или изредка нескольких последовательных фронтов опрокидывания. При этом длительность лавины оказывается соизмерима с числом пройденных ею слоев, а размер – с площадью.

Для модели Федеров показатели (12) и (13) сохраняются, хотя если величина первого очевидна в силу анизотропии распространения активности, то природа второго существенно меняется. Можно показать, что среднее число опрокидываний в слое  $l$ , вызванных вбросом иницирующей песчинки на слой  $l_0$ , для системы достаточно большого размера  $L$  удовлетворительно приближается формулой

$$\langle N(l, l_0) \rangle \sim \frac{\theta(l - l_0)}{L} \quad (15)$$

где  $\theta$  – функция Хевисайда, а слои нумеруются от ближайшего края к середине. Вид числителя этой формулы означает, что количество опрокидываний на слое зависит только от его расположения относительно слоя вброса, но не зависит напрямую ни от номеров слоев, ни от расстояния между ними. Иными словами, лавины в своем развитии не испытывают систематической тенденции ни к разрастанию, ни к угасанию, как и должно быть в самоорганизованно-критическом состоянии. Знаменатель формулы (15) определяется из того соображения, что среднее число опрокидываний, происходящих на слое за время, соответствующее одному вбросу на него иницирующей песчинки (то есть за  $L$  шагов), не зависит от размера системы. Соответственно, за один шаг должна получаться величина, обратно пропорциональная  $L$ , в чем можно убедиться непосредственно, а именно:

$$\langle N(l) \rangle = 2 \int_0^{L/2} \langle N(l, l_0) \rangle dl_0 \sim l/L, \quad (16)$$

А повторное интегрирование и дает зависимость  $\langle N(l) \rangle = 2 \int_0^{L/2} \langle N(l) \rangle dl \sim L$ , воспроизводящую значение (13).

Следует отметить, что спонтанная анизотропия модели Федеров, хоть и является очень похожей на анизотропию, изначально заложенную в правила моделей ДР и ПСВ, все-таки отличается тем, что имеет место лишь в глобальном масштабе. Локальная динамика остается изотропной, что приводит к такому важному явлению, отсутствующему в направленных моделях, как *возвращение активности* на уже пройденные лавиной слои, которое и обуславливает различия показателей распределений для моделей ДР и Федеров.

Если в случае модели ДР можно строго показать, что область лавины является односвязной и не имеет дырок, то в случае модели Федеров односвязность, вообще говоря, ниоткуда не следует. Однако возникновение дырок в этой модели является, по-видимому, событием весьма маловероятным. В ходе компьютерного исследования

модели автору ни разу не встретились дырявые лавины, зато неоднократно наблюдалось зарастание уже, казалось бы, вполне оформившейся дырки. Поэтому можно считать, что дырок нет, а изменение ширины области лавины  $w$  обусловлено исключительно блужданием, совершаемым ее границей при изменении номера слоя  $l$ .

Данное блуждание оказывается несимметричным. Так, если происходит уменьшение ширины области лавины, ее граница сдвигается внутрь один раз. А если происходит увеличение ширины, то граница может сдвигаться вовне несколько раз из-за возвращения активности на слой. Успешному, то есть приводящему к новым опрокидываниям, возвращению активности способствует медленный рост ширины области лавины по слоям, поскольку вдоль менее крутой границы активность может возвратиться на большее число слоев. Схематично эта ситуация представлена на рис. 3.

Можно считать, что длина скачка, совершаемого границей вовне, пропорциональна числу слоев, на которых активность может за один раз вернуться, сдвигая границу, то есть  $\delta_+ \sim \delta l / \delta s$ , тогда как длина скачка вовнутрь  $\delta_- = \text{const}$ . Отсюда с помощью формулы (11) находятся показатели в формуле (9)  $\tau = 1$ ,  $\xi = -1$  и соотношение (10) дает  $\gamma_{wt} = 2/3$ , в связи с чем на смену значению (14) приходит

$$v_S = 5/3.$$

Как и для модели ДР здесь  $v_N = v_S$  и  $v_C = v_T$ , поэтому все последующие шаги аналогичны. Универсальный показатель в модели Федеров  $\varepsilon = 2/3$ , а характери-

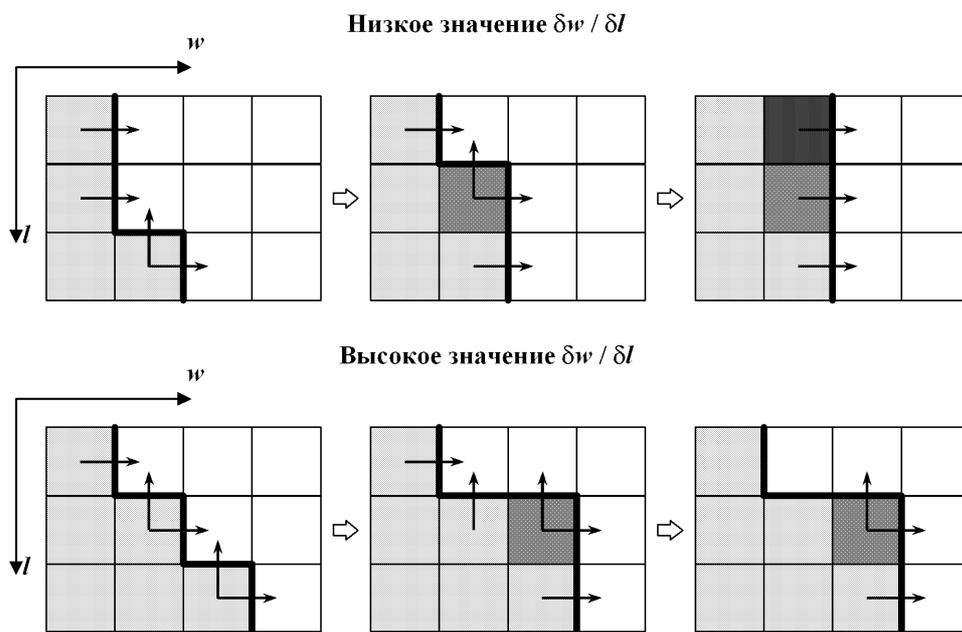


Рис. 3. Пример возвращения активности. Стрелками показана передача песчинок при опрокидывании ячеек. Светлой заливкой отмечены ячейки, опрокинутые при первом же прохождении лавины по слоям, промежуточной – ячейка, опрокидывание которой происходит при возвращении активности на один слой, а темной – ячейка, опрокидывание которой происходит (вверху) или не происходит (внизу) при возвращении активности на два слоя. Жирной линией показана граница области лавины. Чем быстрее она смещается вовне при движении по слоям, тем ниже шансы на успешное возвращение активности

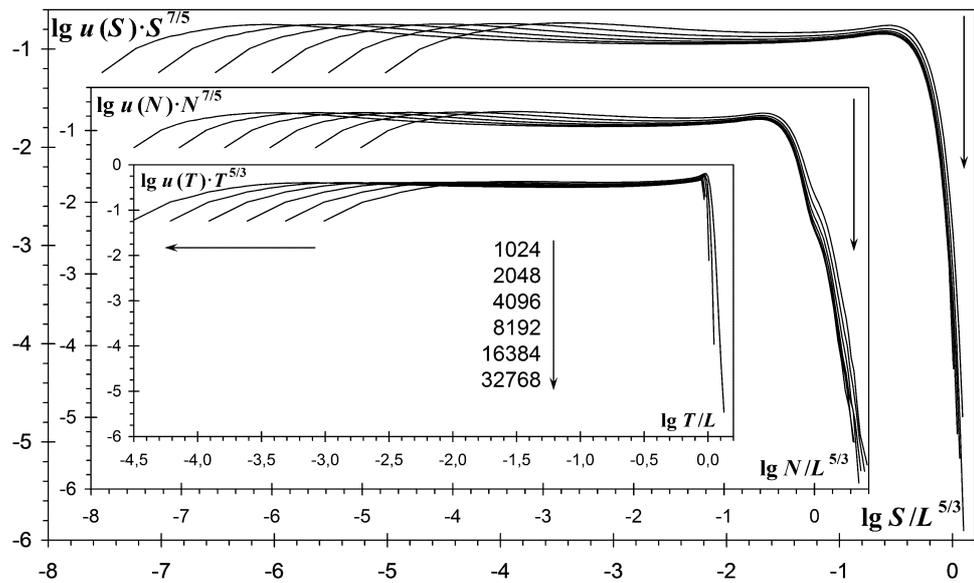


Рис. 4. Распределения лавин в модели Федеров. За счет домножения плотности распределения на  $x^{1+\alpha}$  графики приобретают горизонтальный участок, который соответствует области промежуточной асимптотики, где распределение имеет степенной вид. При этом за счет деления аргумента на  $L^\nu$  получается скейлинговая функция распределения из формулы (1), к которой графики приближаются по мере увеличения  $L$  (здесь и далее указано стрелками). Даже для решеток очень большого размера наложение графиков оказывается неполным, что говорит о существенной роли краевых эффектов

стические  $\alpha_C = \alpha_T = 2/3$  и  $\alpha_N = \alpha_S = 2/5$ . Рис. 4 подтверждает правильность найденных значений.

Завершим обсуждение модели Федеров, пояснением природы рва заполнения (см. правую врезку на рис. 2), возникающего посередине решетки. Ров заполнения служит яркой и наглядной иллюстрацией самоорганизационного возникновения целостных свойств, то есть свойств, имеющих у системы, но в принципе отсутствовавших у ее составных частей. Правила модели вполне локальны и оперируют лишь соседними ячейками. Более того, дистанция, проходимая каждой отдельной песчинкой за время ее пребывания в системе, ограничена несколькими десятками ячеек. Тем не менее, система произвольного размера находит свою середину. Ров отрывается постоянным потоком песчинок, направленным к ближайшему краю решетки. Величина потока находится дифференцирование формулы (16):

$$\frac{d}{dt} \langle N(t) \rangle \sim \frac{1}{L}.$$

Структура заполнения решетки вполне определяется особенностью распределения активности по слоям. Так, ров отрывается потоками песка, направленными от середины решетки к ее краям. При этом следует заметить, что за счет флуктуаций заполнения лавины могут немного перехлестывать за середину решетки, вынося там песчинки на другую сторону рва, то есть перемещая их сразу по направлению к обоим краям. В противном случае, рва бы не образовывалось, поскольку правила модели изотропны и суммарный перенос песка любой лавиной равен нулю.

Примечательным отличием модели Федеров от рассматриваемых консервативных моделей является противонаправленность распространения активности и переноса песчинок. Активность идет от края в глубину, а песчинки перемещаются из глубины к краю. В консервативных моделях эти процессы сонаправлены.

### 3. Модель Манны

Исследование модели Манны дается на основе работ [15–17]. Эта модель существенно сложнее моделей с анизотропным распространением активности. Однако, как и в их случае, из правил модели Манны легко можно определить два скейлинговых показателя.

Во-первых, площадь области лавины, очевидно, ограничена площадью решетки:

$$S_1 \sim L^2 \text{ или } \nu_S = 2. \quad (17)$$

Во-вторых, движение каждой отдельно взятой песчинки по решетке представляет собой случайное блуждание. Чтобы покинуть решетку, добравшись от ее середины до открытого края, песчинке надо пройти дистанцию порядка  $L$  ячеек, что требует порядка  $L^2$  шагов. Каждая лавина начинается добавлением одной песчинки в систему, поэтому и покидать ее в стационарном состоянии будет в среднем одна песчинка. Таким образом,

$$\langle N \rangle \sim L^2 \text{ или } \sigma_N = \nu_N - \varepsilon = 2. \quad (18)$$

Отсюда немедленно находится характеристический показатель для средней кратности опрокидывания  $M = N/S$ . Из равенства показателей (17) и (18) получаем  $\nu_M = \nu_N - \nu_S = \varepsilon$ , что в сочетании с тождеством (7) дает

$$\alpha_M = 1. \quad (19)$$

По аналогии с формулой (3) при любом значении  $\nu_M$  можно записать

$$\langle M \rangle = \int M^{-1} \cdot g(M/L^{\nu_M}) dM \sim \int^{L^{\nu_M}} dM/M \sim \log L, \quad (20)$$

что легко проверяется по результатам моделирования (см. рис. 12 далее).

Единичный характеристический показатель очень удобен и при проведении выкладок, так как соотношение (6) упрощается до тождества

$$\alpha_x = \gamma_{Mx}. \quad (21)$$

Заметим, что в случае моделей с анизотропным распространением активности такая же ситуация имела место для средней активности  $A = N/T$ , для которой в силу равенства показателей (12) и (13) получалось  $\alpha_A = 1$ . Но если для решения этих моделей такой результат был излишним, то модель Манны далее будет решена с помощью значения (19) тремя разными способами. Подобная избыточность позволяет не только продемонстрировать общую технику исследования самоорганизованно-критических систем и убедиться в адекватности построенной модели промежуточного уровня, но и подготовить почву для изучения модели БТВ, которая еще сложнее, чем модель Манны.

**3.1. Пространственная декомпозиция области лавины.** Область лавины представляется как последовательность *слоев опрокидывания*, внутри которых его кратность примерно одинакова, как показано на рис. 5. Для модели БТВ, правила которой строго детерминированы, такое описание было бы строгим (см. рис. 10 далее). Однако для модели Манны в силу стохастичности ее правил оно является лишь приближением. Тем не менее, поскольку основанные на нем расчеты находятся в прекрасном согласии с результатами моделирования, точность такого приближения следует считать удовлетворительной.

Слой области лавины нумеруются из ее глубины наружу, начиная с единицы. То есть, если максимальная кратность опрокидывания для рассматриваемой лавины равна  $m$ , то она состоит из слоев с номерами  $0 \leq k < m$ , на которых произошло  $(m - k)$  опрокидываний.

В силу масштабной инвариантности критического состояния характерная величина внешнего радиуса  $k$ -го слоя дается степенной зависимостью

$$r_k \sim k^\gamma, \quad (22)$$

в которой коэффициент пропорциональности полагается не зависящим от  $m$ . Иначе говоря, по мере развития лавины при появлении новых слоев границы уже имеющихся не испытывают систематического смещения в какую-либо сторону, подвергаясь лишь флуктуациям. Это предположение является очень сильным и неочевидным. Как будет показано далее, будучи справедливым для модели Манны, оно не выполняется для модели БТВ.

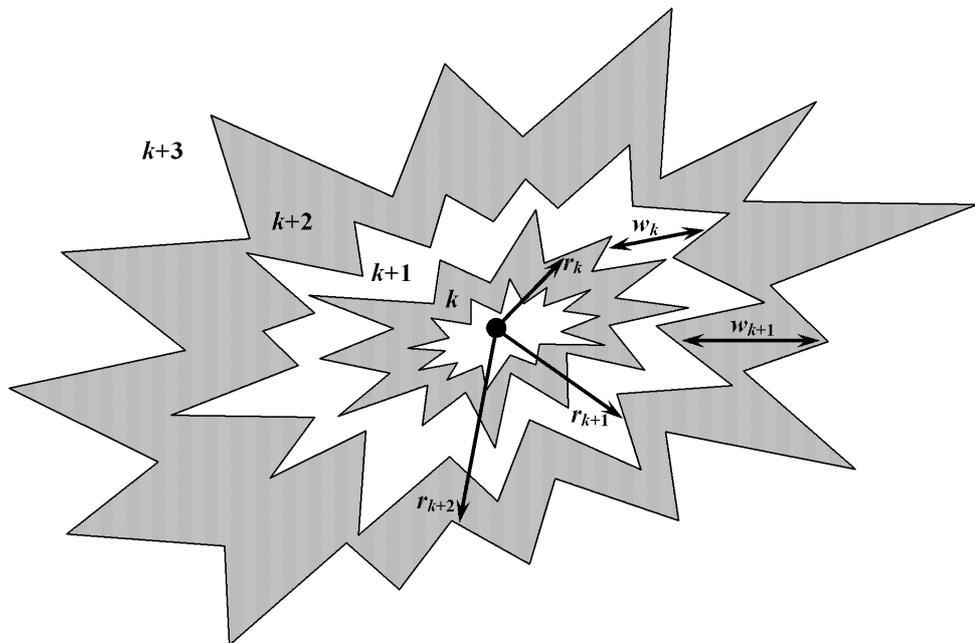


Рис. 5. Схематичное представление слоев опрокидывания. Увеличение номера слоя соответствует уменьшению кратности опрокидывания

Характерная *ширина*  $k$ -го слоя

$$w_k \cong \frac{dr_k}{dk} \sim k^{\gamma-1} \sim r_k^{1-1/\gamma}, \quad (23)$$

а его площадь

$$s_k \sim r_k w_k \sim k^{2\gamma-1} \sim r_k^{2-1/\gamma} \quad (24)$$

Определим периметр слоя как длину его внешней границы. Она не является гладкой линией, образуя складки, соизмеримые по размеру с шириной слоя (23) (см. рис. 5). Поэтому его периметр не пропорционален радиусу (22). Назовем *фронтом* слоя усредненное положение его внешней границы. Поскольку усреднение сглаживает ее складки, длину фронта уже можно считать пропорциональной радиусу слоя. Количество складок границы определяется длиной фронта, что позволяет записать для периметра выражение

$$c_k \sim r_k w_k \sim s_k \sim k^{2\gamma-1} \sim r_k^{2-1/\gamma}. \quad (25)$$

Внутри слоя ячейки (в среднем) отдают соседям и получают от них одно и то же число песчинок. Однако на границе слоев этот баланс нарушается, так как ячейки внутреннего слоя отдают больше, чем получают от ячеек внешнего. То есть, количество песчинок, передаваемых слоем вовне, определяется его периметром (25), в каждой точке которого происходит передача песчинки.

Введем понятие *активных частиц*, под которыми будем понимать песчинки, которые в ходе лавины покидают слой без компенсации. Количество активных частиц на  $k$ -ом слое равно разнице числа отданных наружу и полученных изнутри песчинок:

$$a_k \cong \frac{dc_k}{dk} \sim k^{2\gamma-2} \sim r_k^{2-2/\gamma}. \quad (26)$$

Активные частицы перемещаются из глубины области лавины к ее периферии, тогда как остальные песчинки – в случайном направлении. Таким образом, развитие лавины представляет собой сочетание направленного и ненаправленного движений. Подобное разделение имеет смысл только в критическом состоянии. В докритическом состоянии активные частицы будут утрачивать этот статус, не достигая границ области лавины, а в сверхкритическом даже вынос вовне всех активных частиц не будет приводить к завершению лавины из-за продолжающегося появления новых активных частиц.

Переносом активных частиц определяется продвижение фронтов вовне, скорость которого пропорциональна числу активных частиц, приходящихся на единицу длины фронта

$$v_k \sim \frac{a_k}{r_k} \sim k^{\gamma-2} \sim r_k^{1-2/\gamma}. \quad (27)$$

Следовательно, время, которое фронт пребывает в пути с момента своего появления, составляет

$$t_k \sim r_k^{2/\gamma} \sim k^2. \quad (28)$$

С помощью формул (26) и (27) запишем поток частиц через  $k$ -й слой  $j_k = v_k a_k \sim r_k^{3-4\gamma}$ . Он не должен зависеть ни от номера слоя, ни от числа слоев, ибо он выносит ту самую песчинку, добавлением которой инициирована лавина. Таким образом,

$$\gamma = 4/3. \quad (29)$$

Формула (24) позволяет выразить размер  $N = \sum_{k=0}^m (m-k)s_k \sim m^{2\nu+1}$  и площадь  $S = \sum_{k=0}^m s_k \sim m^{2\nu}$  лавины через максимальную кратность опрокидывания. Таким образом, средняя кратность опрокидывания  $M$  отличается от максимальной  $m$  лишь коэффициентом, откуда на основе значения (29) и тождества (21) находим  $\alpha_N = \gamma_{MN} = 3/11$  и  $\alpha_S = \gamma_{MS} = 3/8$ . Подставляя в формулы (25) и (28) в качестве номера слоя  $m$ , аналогичным образом получаем  $\alpha_C = \gamma_{MC} = 3/5$  и  $\alpha_T = \gamma_{MT} = 1/2$ .

Наконец, из соотношений (7) и (18) определяем сначала значения показателей  $\nu_N = 11/4$  и  $\varepsilon = 3/4$ , а затем и  $\nu_M = 3/4$ ,  $\nu_C = 5/4$  и  $\nu_T = 3/2$ , завершая тем самым решение модели.

Сопоставление полученных результатов с компьютерным экспериментом представлено на рис. 6. Совпадение является очень хорошим для всех показателей, кроме скейлингового показателя для длительности. Представляется весьма вероятным, что зависимости между различными характеристиками событий, иногда могут иметь не чисто степенной вид (4), а приобретать к нему логарифмические поправки, связанные с недостаточной узостью условных распределений. При размерах систем, доступных для моделирования, логарифмическая функция неотличима от степенной, имеющей показатель в пределах нескольких сотых долей. Это может приводить к возникновению систематических погрешностей при экспериментальном определении показателей, в результате отклоняющихся от строгого соответствия формулам (5) и (6). Однако практика показывает, что подобная неприятная ситуация никогда не возникает для величин, имеющих зафиксированный правилами скейлинговый показатель  $\nu$  или  $\sigma$ . Именно на них следует ориентироваться, проверяя решение нало-

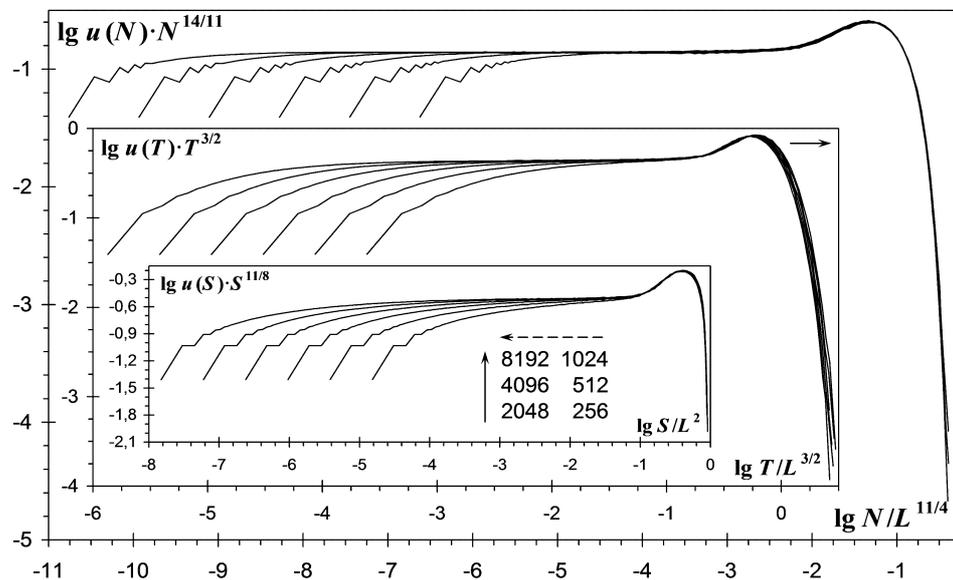


Рис. 6. Распределения лавин в модели Манна. Рисунок аналогичен рис. 4. Здесь наложение графиков даже для решеток не столько большого размера, как в случае модели Федеров, заметно лучше, что свидетельствует о меньшей роли краевых эффектов. Исключением является лишь распределение лавин по длительности  $T$ , для которого картина существенно хуже, чем для распределений по размеру  $N$  и площади  $S$ . Чтобы исправить ситуацию, пришлось бы увеличить теоретическое значение  $\nu_T$  на несколько сотых

жением отмасштабированных графиков плотности. В силу формул (17) и (18) такими характеристиками для модели Манна являются площадь лавины и ее размер, для которых теоретические показатели идеально проходят экспериментальную проверку.

Аналогичная ситуация имеет место и для модели ПСВ с показателями, описывающими площадь и периметр. При их экспериментальном определении тоже возникают систематические погрешности до нескольких сотых, хотя показатели, описывающие размер и длительность, находятся с высокой точностью, обеспеченной привязкой  $v_T$  и  $\sigma_S$  к правилам модели.

**3.2. Сведение к случайному блужданию.** Как и в случае модели ПСВ, тоже имеющей стохастические правила, здесь потребуется рассмотрение двух процессов случайного блуждания. С первым из них связано изменение кратности опрокидывания  $M$  с течением времени  $T$ . Для этого процесса в формуле (9)  $\tau = \xi = 0$  и соотношение (10) в сочетании с тождеством (21) дают значение  $\alpha_T = \gamma_{MT} = 1/2$ , через который далее будут выражены все остальные показатели модели.

Второе блуждание является более сложным процессом и отвечает за изменение активности  $A$ , которое происходит при продвижении фронта лавины вовне. При этом приращение активности возникает как сумма независимых случайных величин, взятая по всему фронту лавины, длина которого пропорциональна радиусу ее области  $R$ . Таким образом, чтобы выразить активность через время, надо сначала выразить радиус через время.

Не вводя новых обозначений, запишем  $\gamma_{rt} = \tau$ , имея в виду пока неизвестный показатель из формулы (9). В ней  $\xi = 0$  (количество ненулевых слагаемых в рассматриваемой сумме пропорционально, а приращение радиуса за один шаг обратно пропорционально текущей активности, так что ее вклады в величину приращения взаимокompенсируются), так что соотношение (10) дает  $\gamma_{at} = (\tau + 1)/2$ . Отсюда получаем  $\gamma_{NT} = \gamma_{at} + 1 = (\tau + 3)/2$  и (с учетом соотношения (6))  $1/\alpha_N = \tau + 3$ . С другой стороны, в силу компактности области лавины  $\gamma_{SR} = 2$ , что приводит к значению  $\gamma_{ST} = \gamma_{SR} \cdot \gamma_{RT} = 2\tau$ , позволяющему с помощью формул (6) и (7) определить универсальный показатель  $\varepsilon = 1/2\tau$ . Наконец, подстановка найденных значений в выражение (18), переписанное посредством тождества (7) в виде  $1/\alpha_N - 1 = 2/\varepsilon$ , образует уравнение, из которого вычисляется значение  $\tau = 2/3$ , а через него легко рассчитываются все остальные показатели модели.

Единственным отличием в результатах между этим разделом и предыдущим является то, что там фигурировал периметр области лавины, а здесь – ее активность. Однако эти две величины характеризуются одними и теми же показателями. И это неслучайно. Если просуммировать определение (26) по слоям лавины, то общее количество активных частиц совпадет с ее периметром. Иначе говоря, активные частицы, совершающие направленное движение, по завершении лавины и образуют ее периметр, или, что то же самое, вынос всех активных частиц на периферию области лавины и ведет к ее завершению.

**3.3. Ланжевеновское уравнение.** Рассмотрим изменение продвижения границы области лавины как динамический процесс. В момент времени  $t$  (заметим, что это не обязательно модельное время) положение границы в полярных координатах определяется направлением  $\varphi$  и радиусом  $r(\varphi, t)$ , отсчитываемыми от точки вброса песчинки, инициировавшей лавину. Такое описание является приближенным, так как

не позволяет учитывать загибы границы, однако дальнейшее совпадение результатов выкладок и эксперимента позволяет считать его удовлетворительным.

В силу масштабной инвариантности критического состояния средний радиус области лавины зависит от времени степенным образом:

$$r(t) = \langle r(\varphi, t) \rangle \sim t^{1/z},$$

где  $z$  – динамический показатель.

Длина границы возрастает быстрее ее радиуса, набираясь преимущественно на ее выступах. Поэтому интерес представляет отклонение радиуса по данному направлению от среднего значения

$$h(\varphi, t) = r(\varphi, t) - r(t).$$

Мерой неровности границы служит ее *ширина*

$$w(t) = \sqrt{\langle h^2(\varphi, t) \rangle} \sim r^\chi(t), \quad (30)$$

где  $\chi$  – показатель шероховатости.

Изменение положения границы обусловлено двумя основными процессами. Первый – боковое распространение ее выступов, второй – их возникновение за счет вовлечения в лавину новых ячеек с высоким заполнением. Таким образом, динамику границы можно описать стохастическим уравнением переноса следующего вида:

$$\frac{\partial h(\varphi, t)}{\partial t} = V \cdot \left| \frac{\partial h(\varphi, t)}{r(t) \partial \varphi} \right| + \eta, \quad (31)$$

где  $V$  – скорость продвижения склонов выступов, происходящего в обоих (отсюда – модуль) тангенциальных направлениях, а шумовой член  $\eta$  описывает рост выступов в радиальном направлении, обусловленный действием случайных факторов.

Прежде чем конкретизировать вид этих величин, заметим, что масштабно-инвариантная запись вида (30) предполагает, что все члены уравнения (31) при пространственном огрублении должны оставаться одного и того же порядка величины или становиться пренебрежимо малы. Иными словами, при одновременной перенормировке переменных

$$r \rightarrow b \cdot r, \quad t \rightarrow b^z \cdot t, \quad h \rightarrow b^\chi \cdot h \quad (32)$$

вид уравнения (31) должен сохраняться неизменным за исключением, возможно, выпадения несущественных членов (таковы, например, все члены со старшими производными, учет которых в правой части уравнения (31) должен обеспечить его корректность). Поэтому при определении поведения  $V$  и  $\eta$  мы будем ориентироваться лишь на те факторы, которые остаются существенными при пространственном огрублении.

Тангенциальное продвижение склонов выступов является сильно коррелированным процессом, поскольку на склоне находятся ячейки, получившие дополнительные песчинки. Опрокидывание любой из них с высокой вероятностью приводит к опрокидыванию всех ячеек склона или значительной их части. Иначе говоря, чем шире граница, тем быстрее она смещается вбок. Таким образом, можно считать  $V \sim w(t)$ , что ведет преобразованию для скорости вида

$$V \rightarrow b^\chi \cdot V. \quad (33)$$

Осреднение шума при огрублении должно проводиться вдоль границы, на которой он и действует. В силу ее фрактального характера, малые изменения  $\varphi$  влекут большие изменения  $h$ . Поэтому можно приближенно считать, что именно величина  $h$  характеризует пространственное положение границы, так что шум можно с приемлемой точностью представить в виде  $\eta(t, h)$  с корреляцией  $\langle \eta(t, h) \cdot \eta(t', h') \rangle \sim \delta(t - t') \cdot \delta(h - h')$ . Соответственно, при перенормировке (32) шумовой член изменяется как

$$\eta \rightarrow b^{-(z+\chi)/2} \cdot \eta. \quad (34)$$

После перенормировки (32), выполненной с учетом формул (33) и (34), уравнение (31) принимает вид

$$b^{\chi-z} \cdot \frac{\partial h}{\partial t} = b^{2\chi-1} \cdot \frac{V}{r} \left| \frac{\partial h}{\partial \varphi} \right| + b^{-(\chi+z)/2} \cdot \eta,$$

который должен быть эквивалентен исходному, что требует выполнения скейлинговых соотношений

$$\chi - z = 2\chi - 1 = -(\chi + z)/2 \Leftrightarrow z = 3/4, \quad \chi = 1/4.$$

Таким образом,  $r \sim t^{4/3}$  и  $w \sim r^{1/4}$ . Этот результат совпадает с формулами (22) и (23) при подстановке в них показателя (29) с тем единственным уточнением, что в модели роль времени из уравнения продвижения границы ожидаемо берет на себя кратность опрокидывания  $m$ . Двух полученных показателей связи  $\gamma_{rm} = 4/3$  и  $\gamma_{wr} = 1/4$  в сочетании со значениями (17) и (18) и тождеством (21) достаточно для почти полного решения модели. Единственной характеристикой, для которой показатели не рассчитываются напрямую, является длительность лавины. Однако они могут быть установлены благодаря совпадению периметра и активности.

Отдельным важным результатом проведенных расчетов является показатель связи

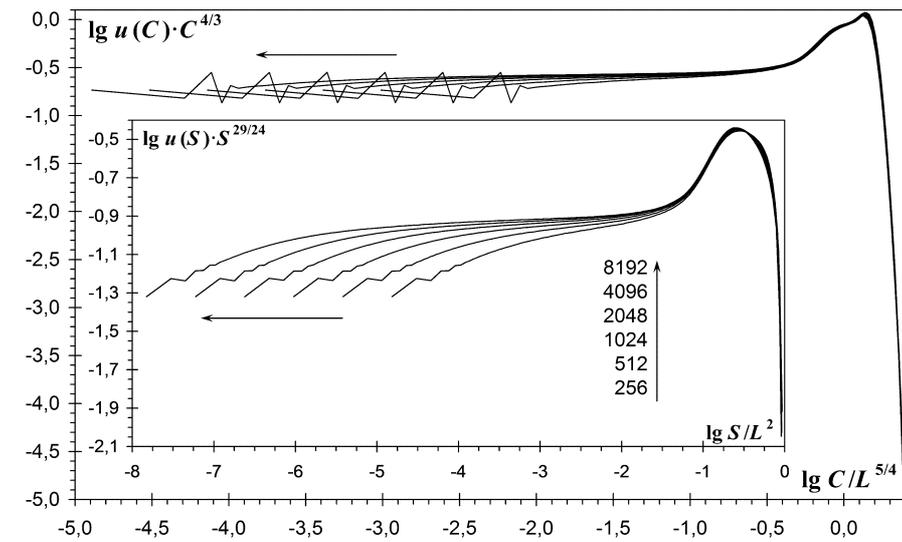
$$\gamma_{CS} = 5/8, \quad (35)$$

который пригодится далее при анализе модели БТВ. Для нахождения этого значения не требуется никаких показателей или соотношений, специфичных для рассматриваемой модели, а достаточно воспользоваться геометрически триальными показателем  $\gamma_{SR} = 2$  и соотношением  $\gamma_{CR} = \gamma_{wr} + 1$ .

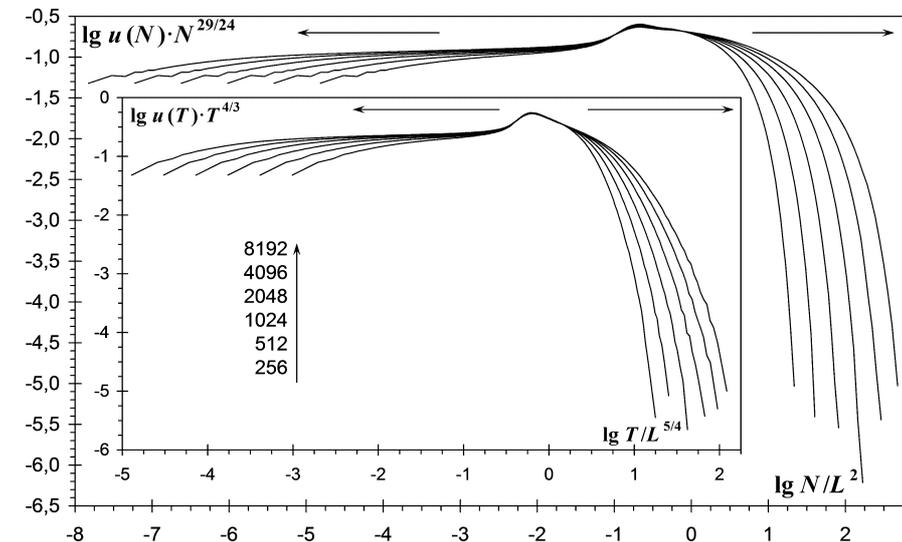
## 4. Модель БТВ

**4.1. Предварительные замечания и общий анализ модели.** Модель БТВ, которая в будущем году будет праздновать свое тридцатилетие, является исторически первой самоорганизованно-критической моделью. В ее изучение были вложены наибольшие усилия исследователей. Тем не менее, именно эта модель успешнее многих прочих сопротивлялась теоретическому решению. Поэтому рассказ о ней будет построен задом наперед, начинаясь с представления результатов компьютерного эксперимента и анонса значений показателей, которые будут рассчитаны далее.

Сложность модели БТВ связана, в первую очередь с тем, что к ней не вполне применим формализм конечно-размерного скейлинга, задаваемый формулами (1) и (2). В этой модели, как и в других, величины, описывающие происходящие события,



*a*



*б*

Рис. 7. Распределения лавин в модели БТВ: *a* – скейлинговое поведение периметра и площади: при рассмотрении зависимости  $u(x) \cdot x^{1+\alpha}$  от  $x/L^\nu$  графики совпадают всюду, кроме области самых малых значений; *б* – нескейлинговое поведение размера и длительности – несмотря на совпадение показателей ( $\nu_N = \nu_S = 2$ ,  $\alpha_N = \alpha_S = 5/24$  и  $\nu_T = \nu_C = 5/4$ ,  $\alpha_T = \alpha_C = 1/3$ ) отмасштабированные графики совпадают лишь в промежуточной асимптотике, а при  $N/L^\nu \gg 1$  вновь расходятся

подчиняются степенному распределению в области промежуточной асимптотики. Ее правая граница, на которой плотность начинает отклоняться от степенного вида, как и в других моделях, дается формулой (2). Однако если для одних характеристик лавин скейлинговая функция стабилизируется при  $L \rightarrow \infty$ , то для других она оказывается существенно зависящей от размера системы.

Примеры обоих типов поведения приведены на рис. 7. Вероятность возникновения лавин, имеющих очень большие периметр или площадь, стремительно убывает по мере их увеличения, определяя вид скейлинговой функции. А вот размер и

длительность лавин могут быть много больше значений, ограничивающих область промежуточной асимптотики. Причем в случае размера наличие таких – сверхкрупных – событий принципиальным образом сказывается на статистических свойствах модели.

В самом деле, формулы (17) и (18) сохраняют применимость для модели БТВ, так как на их выводе не сказываются минимальные отличия ее правил от правил модели Манна. Однако значение (18) несовместимо с формулой (3) и экспериментальным значением  $\nu_N = 2$ , то есть средний размер лавины определяется именно теми событиями, которые не поместились в систему. Однако, не поместившись, они не прекращаются, переходя от «экстенсивного» развития, связанного с увеличением геометрических размеров, к «интенсивному», осваивающему ограниченную площадь. В результате на такие события приходится львиная доля опрокидываний.

Как видно из рис. 8, различия распределений площадей и размеров касаются лишь лавин, охвативших почти всю решетку. Однако за их счет существенно расширяется диапазон возможных размеров лавин.

В силу различия вида распределений совпадение показателей в паре размер–площадь (периметр–длительность) еще не означает близости этих величин, как это имело место для размера и площади в модели Федеров. Для умеренных событий, не чувствующих конечности размеров системы, можно считать, что  $N \sim S$  ( $T \sim C$ ), однако для сверхкрупных событий уже  $N \gg S$  ( $T \gg C$ ), хотя доля таких событий ничтожна.

В 55%+ случаев вброс песчинки не нарушает устойчивость системы ( $N=S=0$ ), еще в 25%+ случаев возникают лавины без повторных опрокидываний ( $N=S>0$ ) и лишь в 20%– случаев возникают повторные опрокидывания ( $N > S$ ). Распре-

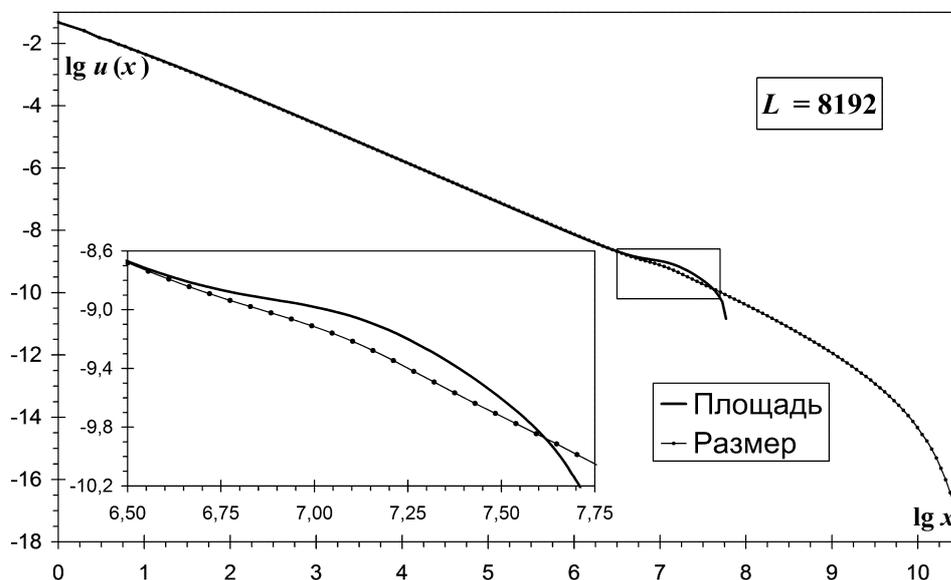


Рис. 8. Сравнение распределений лавин по размеру и площади в модели БТВ. Графики плотности для обеих характеристик совпадают почти всюду за исключением области самых больших значений. На врезке увеличен обведенный рамочкой фрагмент рисунка, где начинается расхождение графиков. За счет имеющегося здесь небольшого зазора между плотностями становятся возможны события с  $N \gg L^2$

деления всех характеристик количественно преобладающих лавин без повторных опрокидываний подчиняются формулам (1) и (2) с теми же самыми скейлинговыми (но иными характеристическими) показателями. Это значит, что возможны крупные лавины, как с  $N = S$ , так и с  $N \gg S$ . Таким образом, условное распределение  $u(N|S)$ , равно как и другие условные распределения пар величин, описывающих происходящие события, нельзя считать узким. Вследствие этого показатель в формуле (4) оказывается зависящим от степени усреднения  $q$ , так что вопрос о том, можно ли связь между характеристиками лавины считать функциональной, начинает требовать экспериментальной проверки (впрочем, ничто не мешает рассматривать условное среднее как таковое).

Функциональной можно считать связь между площадью и периметром лавины, распределения которых демонстрируют скейлинговое поведение. Более того, показатель связи этих величин, оказывается одинаковым для моделей БТВ и Манны (причем это единственный совпадающий показатель связи для этих моделей), в чем позволяет убедиться рис. 9. Такой результат ожидаем, так как при получении значения (35) правила моделей учитывались максимально огрубленно, что не позволило проявиться различиям в их свойствах.

Области лавин в моделях БТВ и Манны при сходстве геометрии существенно различаются по структуре. Как уже было сказано, понятие слоя опрокидывания, будучи для модели Манны лишь общеописательным, для БТВ является вполне четким. В результате в ней все ячейки слоя, кроме граничных, опрокидываются в точности одно и то же число раз, отдавая и получая при этом строго равное количество песчинок. После лавины ячейки внутри слоя содержат столько же песчинок, сколько и до нее, а ячейки внутренней границы слоя – даже больше (внешней – меньше). В таких условиях лавина может прекратиться, только если внутренняя и внешняя

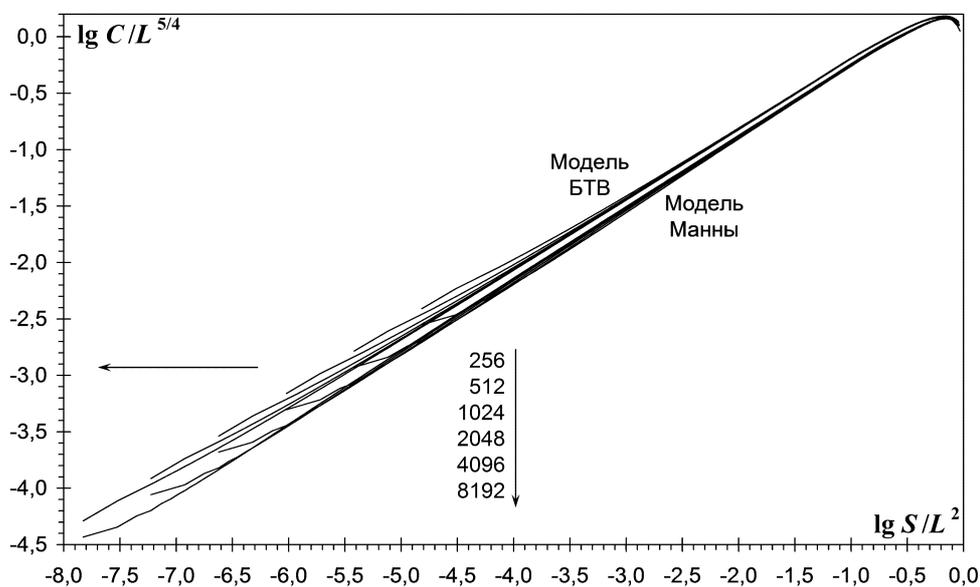


Рис. 9. Связь периметра и площади для изотропных консервативных моделей. Для обеих моделей рассматриваемые величины имеют одинаковые скейлинговые показатели  $\nu_S = 2$ ,  $\nu_C = 5/4$ . Поэтому в силу соотношения (5) и показатель связи для них один и тот же

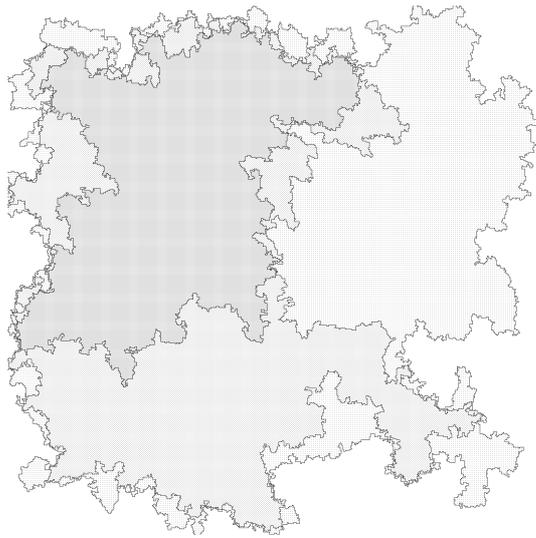


Рис. 10. Пример слоев опрокидывания для крупной лавины в модели БТВ. Точка вброса (в середине решетки) лежит на границе области максимальной кратности опрокидывания. Толщина окружающих ее слоев в некоторых местах составляет всего одну ячейку. Размер решетки  $L = 512$ . Лавина затронула  $S = 196990$  ячеек, в ее ходе произошло  $N = 380107$  опрокидываний и за край выпало  $F = 45$  песчинок. Максимальная кратность опрокидывания (она же – число волн)  $m = 3$

границы слоя где-то совпадут, из-за чего ячейки, принадлежащие одновременно к обеим границам, все-таки вернут состояние, которое имели до лавины, а с ним – и устойчивость. В модели Манны альтернативой были флуктуации при передаче песчинок, но в модели БТВ такой возможности нет, в результате чего каждый слой ее лавин в каких-то местах истончается до единичной ширины, как показано на рис. 10. Следствием этого является невозможность роста ширины слоев с их номером, что в силу формулы (23) дает тривиальное значение  $\gamma = 1$ . Иными словами, формула (22) упрощается до записи

$$r_k \sim k, \quad (36)$$

коэффициент пропорциональности в которой, однако, сам по себе является случайной величиной, чем и обеспечивается возможность лавин как с единичной, так и с очень большой кратностью опрокидывания при одном и том же радиусе.

Наряду с пространственной декомпозицией области лавины посредством рассмотрения слоев опрокидывания возможна и временная декомпозиция процесса ее развития посредством рассмотрения *волн опрокидывания* [18–20], под которыми понимается такой порядок обработки неустойчивых ячеек, при котором опрокидывание ячейки вброса осуществляется только тогда, когда нет других неустойчивых ячеек. При этом каждое ее опрокидывание начинает новую волну, которая, распространяясь от точки вброса вовне, создает новые слои. Соответственно границы распространения волн совпадают с границами слоев, возникающих по завершении лавины, хотя вложенность волн не обязана совпадать со слоями, поскольку во время одной лавины иногда могут возникать такие пары волн, ни одна из которых не вкладывается в другую.

Как показывает моделирование, в подавляющем большинстве случаев последующие волны не пересекают границы предыдущих. Вместе с тем, в среднем размер

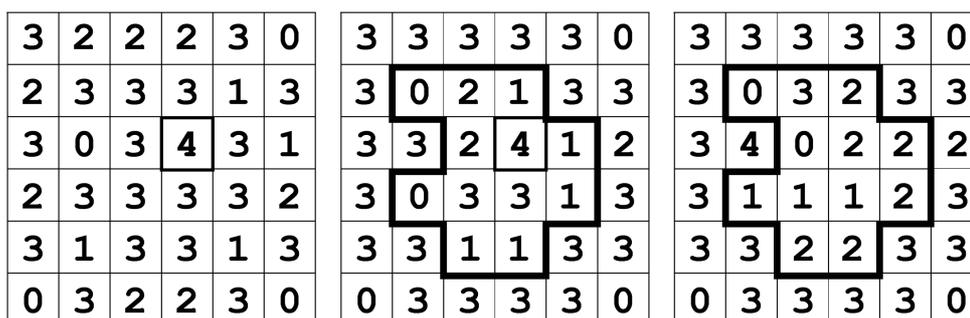


Рис. 11. Пример прорыва границы волны опрокидывания. Слева – состояние системы перед началом первой волны. Тонкой рамочкой обведена точка вброса – единственная неустойчивая ячейка. Посередине – состояние системы перед началом второй волны. Граница первой волны показана толстой линией. Ячейки, примыкающие к ней изнутри, потеряли песчинки, а примыкающие снаружи – приобрели. Справа – момент развития второй волны, когда она выходит за пределы первой. После этого опрокидывания начинают распространяться вдоль ее внешней границы

следующей волны оказывается больше размера предыдущей (за исключением волн, соизмеримых с площадью решетки, которым уже просто некуда дальше расти) [21]. Такое поведение связано с уже упомянутым возникновением на границе слоя двух рядов ячеек, в первом из которых количество песчинок уменьшилось, а во втором – увеличилось. Внешняя граница слоя, состоящая из обедненных ячеек, представляет существенное препятствие для распространения очередной волны опрокидывания (50% вероятности того, что лавина выйдет за пределы первой волны, соответствует площадь последней примерно в 500 ячеек). Однако если прорваться на следующий слой все же удастся (простейший пример того, как это происходит, показан на рис. 11), то далее опрокидывания с высокой вероятностью подхватываются его внутренней границей, состоящей из обогащенных ячеек, легко распространяясь сначала вдоль нее, а затем – и вовне.

Такое поведение, сопряженное с ожиданием удачных условий для прорыва через обедненные ячейки и последующего обхода обогащенных, не обязательно требует полностью сформированной границы. Оно возможно и на ее незамкнутых фрагментах, возникающих в тех местах, которые потом могут оказаться внутри слоев. Как бы то ни было, в силу фрактального характера границ, движение вдоль них требует большого времени, чем и объясняется совпадение показателей для периметра и длительности. А редкостью события прорыва границы объясняется совпадение показателей для площади и размера, ведущее к малой кратности опрокидывания. Поэтому, несмотря на то, что для модели БТВ ни средняя, ни максимальная кратности опрокидывания не демонстрируют скейлингового поведения, для них можно ожидать выполнения формулы (20), что подтверждает рис. 12. Таким образом, эта формула является более общей, чем единичный характеристический показатель (19), на основе которого она была выведена для модели Манни.

В отличие от лавин, волны опрокидывания описываются скейлинговыми распределениями, для которых был строго получен ряд важных теоретических результатов. В частности, в работах [12,20,22] определен вид распределения волн по размеру и выведена формула

$$\langle m \rangle \sim \log L, \tag{37}$$

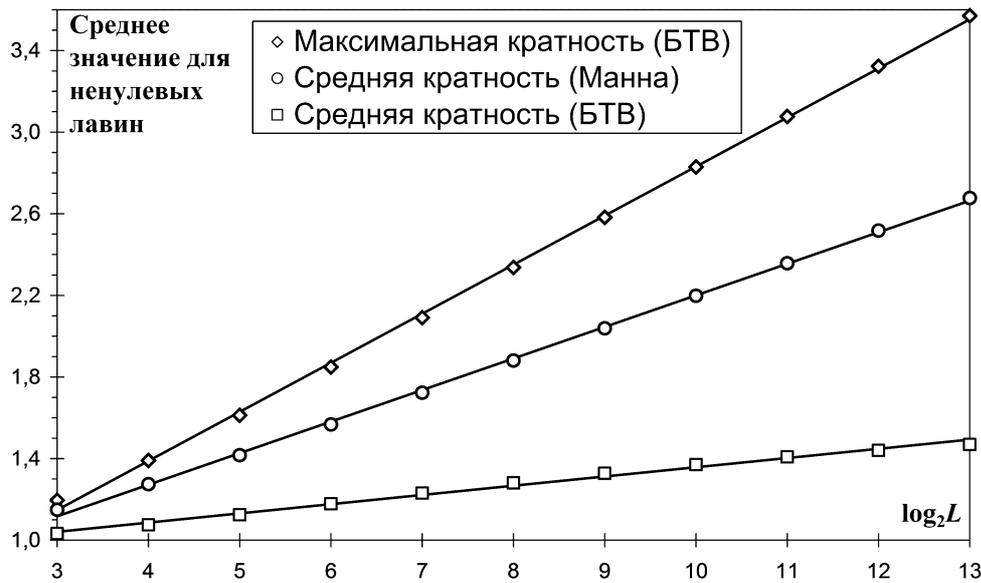


Рис. 12. Кратность опрокидывания в моделях Манна и БТВ. Прямыми линиями показаны аппроксимации экспериментальных зависимостей. Для  $\langle m_{\text{БТВ}} \rangle$  и  $\langle M_{\text{Манна}} \rangle$  линейные аппроксимации практически идеальны, тогда как  $\langle M_{\text{БТВ}} \rangle$ , видимо, растет чуть медленнее, чем логарифм размеров решетки

являющаяся аналогом формулы (20). А в работах [18, 23] показано, что периметр волн пропорционален их длительности, а та связана с их радиусом формулой  $t \sim r^{5/4}$ , что в совокупности воспроизводит значение (35). Поэтому в адекватности общефизических соображений, высказанных до настоящего момента, можно не сомневаться, тогда как дальнейшие рассуждения подкрепляются лишь компьютерным экспериментом и потому не столь надежны.

**4.2. Решение модели и сопоставление с моделью Манна.** Возникновение повторных волн опрокидывания является в значительной мере случайным процессом. Это означает, что хотя параметры условного распределения  $u(m|x)$ , где  $x$  – некоторая характеристика лавины, и зависят от  $x$ , само распределение не является узким. Поэтому к величине  $m$  неприменим весь тот формализм, который использовался для решения прочих самоорганизованно-критических моделей.

Вместе с тем, как показывает моделирование, условное среднее  $m(x)$ , изменяется как некоторая степень  $x$  (а вот обратное уже неверно – зависимость  $x(m)$  не является степенной функцией). Опираясь на этот экспериментальный факт, с помощью формулы (37) и записи

$$\langle m \rangle = \int^{L^{\nu_x}} m(x) \cdot x^{-(1+\alpha_x)} dx$$

приходим к тождеству

$$\gamma_{mx} = \alpha_x, \tag{38}$$

аналогичному тождеству (21) для модели Манна.

Если рассматривать инициацию волн опрокидывания с течением времени как несимметричное случайное блуждание, то простейшее предположение о длинах скачка из формулы (11) будет иметь вид  $\delta_- = \text{const}$ ,  $\delta_+ \sim 1/m$ , так как новой волне

нужно «втиснуться» в пространство лавины, поделенное между уже возникшими волнами. Таким образом, в формуле (9) имеем  $\tau = 0$ ,  $\xi = -1$  и соотношение (10) дает  $\gamma_{mT} = 1/3$ . Непосредственная проверка этого значения по результатам компьютерного моделирования проблематична, поскольку любой алгоритм обеспечивает либо параллельную обработку всех потерявших устойчивость ячеек, либо блокировку ячейки вброса для описания развития волн, но не то и другое одновременно. Однако, исходя из совпадения показателей для длительности лавины и ее периметра, можно ожидать соотношения  $\gamma_{mC} = 1/3$ , в правдоподобии которого позволяет удостовериться рис. 13.

Тождество (38) дает характеристические показатели для длительности и периметра  $\alpha_T = \alpha_C = 1/3$ , на основе которых находится универсальный показатель  $\varepsilon = 5/12$  и остальные характеристические показатели  $\alpha_N = \alpha_S = 5/24$ , которые ранее были использованы для построения графиков на рис. 7.

Несмотря на удовлетворительное совпадение полученных значений с результатами эксперимента, к проведенным расчетам следует относиться с определенной осторожностью, учитывая, что использованная методика не была апробирована на другом материале и опирается на интуитивно неочевидные экспериментальные данные.

В завершение рассмотрения модели БТВ вернемся к природе ее отличий от модели Манны, попытавшись соотнести развитые для них системы понятий.

Если распространить на модель Манны представление о волнах опрокидывания (следуя не буквальному определению, а сохраняя физический смысл), они в ней будут вести себя не так, как в модели БТВ. Здесь границы слоев размыты и на них нет сплошных рядов из обедненных и обогащенных ячеек. Поэтому границы не представляют собой принципиального препятствия для волн опрокидывания (имен-

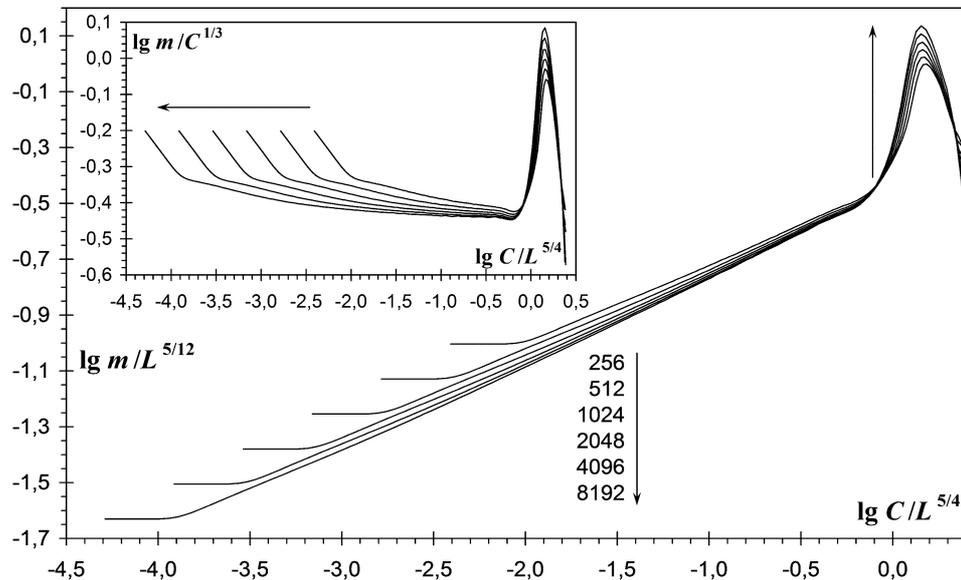


Рис. 13. Связь числа волн и периметра области лавины в модели БТВ. После нормировки переменных на  $L^\nu$  графики, полученные при разных размерах решетки, совпадают. Врезка демонстрирует уменьшение отклонения от зависимости между рассматриваемыми величинами по мере роста размера системы

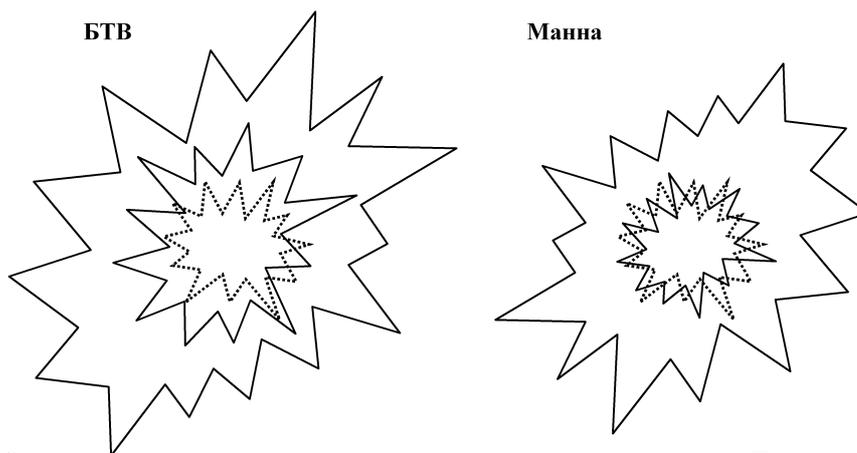


Рис. 14. Схематичное представление изменения границ слоев опрокидывания. Пунктиром показана граница единственного слоя после прохождения первой волны опрокидывания, сплошными линиями – границы между слоями после прохождения второй волны. В модели Манна волна просто добавляет к слою новый, тогда как в модели БТВ она еще и смещает границу предыдущего слоя

но этим объясняется то, что заполнение ячеек в модели Манна  $\langle z \rangle \approx 2.056$  ниже, чем в модели БТВ  $\langle z \rangle \approx 2.125$  (в пределе  $L \rightarrow \infty$ ). Однако поскольку нет и никаких дополнительных преимуществ в распространении опрокидывания вдоль границы, после прохождения очередной волны предыдущий слой сохраняет свои размеры. Волна просто увеличивает кратность опрокидывания внутри каждого пройденного ею слоя без систематического смещения их границ. Иными словами, при прохождении волн в модели Манна границы слоев смещаются лишь случайным образом, а в модели БТВ они испытывают, кроме того, и систематический сдвиг, направленный вовне (см. рис. 14). Таким образом, обнаруживается различие между моделями БТВ и Манна на уровне симметрий. Только это не статические симметрии правил, которые у моделей совпадают, а динамические симметрии тех самоорганизационных процессов, которые обеспечивают пребывание систем в критическом состоянии.

С другой стороны, если попытаться распространить на модель БТВ представление об активных частицах, то вместо выражения  $a_k \sim r_k^{1/2}$ , которое определение (26) давало для модели Манна, из формул (35) и (36) получается  $a_k \sim r_k^{1/4}$  (следует подчеркнуть, что формула (25) неприменима к модели БТВ в силу принципиально иной структуры слоев опрокидывания, так что пользоваться следует именно общей формулой (35)). Таким образом, локальная активность на одном и том же расстоянии от точки вброса в этих моделях связана формальной зависимостью  $a_{\text{Манна}} \sim a_{\text{БТВ}}^2$ . Модели Манна требуется принципиально больше активных частиц, чем модели БТВ, так как в первой модели они двигаются через слои с практически неподвижными границами, тогда как во второй – они могут перемещаться и вместе с подвижными границами слоев.

### Выводы

Для большинства самоорганизованно-критических моделей непосредственное определение на основе их правил показателей распределений, описывающих происходящие в этих моделях события, является нетривиальной задачей. Важным под-

спорьем служит формулировка моделей промежуточного уровня, с одной стороны, описывающих коллективную динамику для исходных модели, а с другой – допускающих исследование с помощью сравнительно простого математического аппарата.

Этот подход, опирающийся на физическую интуицию и компьютерный эксперимент, был применен к 5 моделям кучи песка. В таблице собраны полученные в ходе их решения скейлинговые и универсальные показатели. Эти значения позволяют рассчитать все остальные показатели: характеристические – из соотношения (7), показатели связи – из соотношения (5) и вторые скейлинговые показатели – из соотношения (3). Однако для ключевых выводов достаточно данных, представленных в таблице.

Важнейшей характеристикой модели является универсальный показатель  $\varepsilon$ , зависимость которого от ее особенностей представляется наиболее интересной. Чем он больше, тем легче крупным лавинами помещаться в систему конечного размера. Введение избранного направления может увеличить универсальный показатель ( $\varepsilon_{\text{БТВ}} < \varepsilon_{\text{ДР}}$ ), но может и не увеличить ( $\varepsilon_{\text{Манни}} = \varepsilon_{\text{ПСВ}}$ ). Очевидно, его увеличивает диссипация ( $\varepsilon_{\text{БТВ}} < \varepsilon_{\text{Федеров}}$ ). Однако сильнее всего на нем сказывается стохастичность ( $\varepsilon_{\text{БТВ}} < \varepsilon_{\text{Манни}}$  и  $\varepsilon_{\text{ДР}} < \varepsilon_{\text{ПСВ}}$ ).

Стохастичность проявляет себя еще и неравенствами  $\nu_N > \nu_S$  и  $\nu_C > \nu_T$ , тогда как для всех рассмотренных детерминированных моделей  $\nu_N = \nu_S$  и  $\nu_C = \nu_T$ . Иначе говоря, в стохастических моделях лавины имеют больше разнообразных осмысленных характеристик, чем в детерминированных. По этой причине для решения стохастических моделей приходилось рассматривать два процесса случайного блуждания, а для детерминированных хватало и одного.

Важнейшим следствием детерминированности правил оказывается возникновение динамических симметрий. В модели ДР вся эволюция лавин сосредотачивается на их границе, которая тем самым становится выделенной частью области лавины, тогда как в модели ПСВ существенные события происходят и в объеме. В модели Федеров имеет место спонтанная анизотропия, направляющая активность от краев решетки к ее середине, несмотря на изотропию правил. Наконец, в модели БТВ при смещении границ слоев проходящими волнами нарушается симметрия между направлениями наружу и вовнутрь лавины, тогда как в модели Манни эти направления равноправны.

*Работа выполнена при поддержке РФФИ (проекты 14-01-00773 и 16-01-00342).*

## Библиографический список

1. Бак П. Как работает природа: Теория самоорганизованной критичности / Пер. с англ. Изд. стереотип. / Синергетика: от прошлого к будущему. № 66. М.: URSS, 2015. 276 с.

Таблица

| Модель        | БТВ              | ДР             | Федеров        | ПСВ            | Манни          |
|---------------|------------------|----------------|----------------|----------------|----------------|
| $\nu_N$       | 2*               | $1\frac{1}{2}$ | $1\frac{2}{3}$ | $1\frac{3}{4}$ | $2\frac{3}{4}$ |
| $\nu_N$       | 2                | $1\frac{1}{2}$ | $1\frac{2}{3}$ | $1\frac{1}{2}$ | 2              |
| $\nu_r$       | $1\frac{1}{4}$ * | 1              | 1              | 1              | $1\frac{1}{2}$ |
| $\nu_C$       | $1\frac{1}{4}$   | 1              | 1              | $1\frac{1}{4}$ | $1\frac{1}{4}$ |
| $\varepsilon$ | $\frac{5}{12}$   | $\frac{1}{2}$  | $\frac{2}{3}$  | $\frac{3}{4}$  | $\frac{3}{4}$  |

\*Нескейлинговое поведение

2. *Dhar D., Ramaswamy R.* Exactly solved model of self-organized critical phenomena // *Phys. Rev. Lett.* 1989. Vol. 63, N16. Pp. 1659–1662.
3. *Pastor-Satorras R., Vespignani A.* Universality classes in directed sandpile models // *J. Phys. A.* 2000. Vol. 33, N3. Pp. L33–L39.
4. *Feder H.J.S., Feder J.* Self-organized criticality in a stick-slip process // *Phys. Rev. Lett.* 1991. Vol. 66, N20. Pp. 2669–2672.
5. *Manna S.S.* Two-state model of self-organized criticality // *J. Phys. A.* 1991. Vol. 24, N7. Pp. L363–L639.
6. *Bak P., Tang C., Wiesenfeld K.* Self-organized criticality: An explanation of 1/f-noise // *Phys. Rev. Lett.* 1987. Vol. 59, N4. Pp. 381–384.
7. *Bak P., Tang C., Wiesenfeld K.* Self-organized criticality // *Phys. Rev. A.* 1988. Vol. 38, N1. Pp. 364–374.
8. *Dhar D., Pruessner G., Expert P., Christensen K., Zachariou N.* Directed Abelian sandpile with multiple downward neighbors // *Phys. Rev. E.* 2016. Vol. 93. 042107.
9. *Paczuski M., Bassler K.E.* Theoretical results for sandpile models of SOC with multiple topplings // *Phys. Rev. E.* 2000. Vol. 62, Iss. 4. Pp. 5347–5352.
10. *Kloster M., Maslov S., Tang C.* Exact solution of stochastic directed sandpile model // *Phys. Rev. E.* 2001. Vol. 63. 026111.
11. *Hu C.K., Ivashkevich E.V., Lin C.Y., Priezzhev V.B.* Inversion symmetry and exact critical exponents of dissipating waves in the sandpile model // *Phys. Rev. Lett.* 2000. Vol. 85, N19. Pp. 4048–4051.
12. *Ktitarev D.V., Lübeck S., Grassberger P., Priezzhev V.B.* Scaling of waves in the Bak–Tang–Wiesenfeld sandpile model // *Phys. Rev. E.* 2000. Vol. 61, N1. Pp. 81–92.
13. *Hughes D., Paczuski M.* Large scale structures, symmetry, and universality in sandpiles // *Phys. Rev. Lett.* 2002. Vol. 88. 054302.
14. *Подлазов А.В.* Двумерные самоорганизованно-критические модели типа кучи песка с анизотропной динамикой распространения активности // *Изв. вузов. ПНД.* 2012. Т. 20, № 6. С. 25–46.
15. *Малинецкий Г.Г., Подлазов А.В.* Сравнение двумерных изотропных консервативных самоорганизованно-критических моделей типа кучи песка // *Инженерный журнал: Наука и инновации.* 2012. Т. 4, № 4. 167.
16. *Подлазов А.В.* Решение двумерной самоорганизованно-критической модели Манна // *Изв. вузов. ПНД.* 2013. Т. 21, № 6. С. 69–87.
17. *Подлазов А.В.* Двумерная самоорганизованно-критическая модель Манна для песчаных сред // *Мат. модел. и числ. мет.* 2014, № 3(3). С. 89–110.
18. *Ivashkevich E.V., Ktitarev D.V., Priezzhev V.B.* Critical exponents for boundary avalanches in a 2D Abelian sandpile // *J. Phys. A: Math. Gen.* 1994. Vol. 27, N16. Pp. L585–L590.
19. *Dhar D., Manna S.S.* Inverse avalanches in the Abelian sandpile model // *Phys. Rev. E.* 1994. Vol. 49, N4. Pp. 2684–2687.
20. *Ivashkevich E.V., Ktitarev D.V., Priezzhev V.B.* Waves of topplings in an Abelian sandpile // *Physica A.* 1994. Vol. 209, N3–4. Pp. 347–360.

21. *Paczuski M., Boettcher S.* Avalanches and waves in the Abelian sandpile model // *Phys. Rev. E.* 1997. Vol. 56, N4. Pp. R3745–R3748.
22. *Priezzhev V.B., Ktitarev D.V., Ivashkevich E.V.* Formation of avalanches and critical exponents in Abelian sandpile model // *Phys. Rev. Lett.* 1996. Vol. 76, N12. Pp. 2093–2096.
23. *Majumdar S.N., Dhar D.* Equivalence between the Abelian sandpile model and the  $q \rightarrow 0$  limit of the Potts model // *Physica A.* 1992. Vol. 185, N1–4. Pp. 129–145.

*Поступила в редакцию 01.09.2016*

## CLASSICAL TWO-DIMENSIONAL SANDPILE MODELS

*A. V. Podlazov*

Russian Academy of Sciences Keldysh Institute of Applied Mathematics  
 Miusskaya sq., 4, Moscow, 125047, Russia  
 E-mail: tiger-cub@mail.ru

I consider sandpile models being open nonlinear systems demonstrating the phenomenon of avalanche-like response to a single disturbance of steady state. I study thoroughly the five most known variants of the two-dimensional rules referred as the models of Dhar–Ramaswamy, Pastor-Satorras–Vespignani, Feder–Feder, Manna and Bak–Tang–Wiesenfeld. The analytical solutions obtained in various ways are known for the first four models and the reasons preventing the construction of a solution are known for the fifth one. The generalization of these results allows to develop a common approach to the theoretical study of self-organized critical phenomena.

Self-organization into the critical state gives rise to the scale-invariant properties. Their statistical description can not be generally obtained on the basis of the models' rules. Intermediate level models mediate between the microlevel of the elements local behavior and the macrolevel of the entire system behavior. The rules of these models are not derived from the rules of original models, but are formulated on the ground of physical intuition, computer simulation results and common understanding of the dynamic processes that hold the system near the critical point.

The collective dynamics of all of the models is reduced at the intermediate level to the processes familiar to mathematical physics, the first of them are asymmetric random walks. On this basis, I propose uniform methods of solution of models. The BTW model is solved for the first time.

All the critical indices are analytically calculated for the models considered. The influence of the rules features of models on their common properties is analysed on these ground.

The most important for the rules is the aspect whether they are stochastic or deterministic. The former increases the number of avalanche characteristics with different properties, and the later helps large avalanches fit into a finite-size system and results in the system as a whole obtaining dynamic symmetries absent at the level of elements behaviour rules.

*Keywords:* Self-organized criticality, sandpile models, scale invariance, power laws, finite-size scaling, meso-level models, random walks, spontaneous anisotropy, dynamical symmetries.

DOI: 10.18500/0869-6632-2016-24-4-39-70

*Paper reference:* Podlazov A.V. Classical two-dimensional sandpile models // *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics.* 2016. Vol. 24, N4. P. 39–70.

## References

1. *Bak P.* How nature works: The science of self-organized criticality. Springer-Verlag, New York, Inc. 1996.
2. *Dhar D., Ramaswamy R.* Exactly solved model of self-organized critical phenomena // *Phys. Rev. Lett.* 1989. Vol. 63, N16. Pp. 1659–1662.
3. *Pastor-Satorras R., Vespignani A.* Universality classes in directed sandpile models // *J. Phys. A.* 2000. Vol. 33, N3. Pp. L33–L39.
4. *Feder H.J.S., Feder J.* Self-organized criticality in a stick-slip process // *Phys. Rev. Lett.*, 1991. Vol. 66, N20, pp. 2669–2672.
5. *Manna S.S.* Two-state model of self-organized criticality // *J. Phys. A.* 1991. Vol. 24, N7. Pp. L363–L639.
6. *Bak P., Tang C., Wiesenfeld K.* Self-organized criticality: An explanation of  $1/f$ -noise // *Phys. Rev. Lett.* 1987. Vol. 59, N4. Pp. 381–384.
7. *Bak P., Tang C., Wiesenfeld K.* Self-organized criticality // *Phys. Rev. A.* 1988. Vol. 38, N1. Pp. 364–374.
8. *Dhar D., Pruessner G., Expert P., Christensen K., Zachariou N.* Directed Abelian sandpile with multiple downward neighbors // *Phys. Rev. E.* 2016. Vol. 93. 042107.
9. *Paczuski M., Bassler K.E.* Theoretical results for sandpile models of SOC with multiple topplings // *Phys. Rev. E.* 2000. Vol. 62, N4. Pp. 5347–5352.
10. *Kloster M., Maslov S., Tang C.* Exact solution of stochastic directed sandpile model // *Phys. Rev. E.* 2001. Vol. 63. 026111.
11. *Hu C.K., Ivashkevich E.V., Lin C.Y., Priezzhev V.B.* Inversion symmetry and exact critical exponents of dissipating waves in the sandpile model // *Phys. Rev. Lett.* 2000. Vol. 85, N19. Pp. 4048–4051.
12. *Ktitarev D.V., Lübeck S., Grassberger P., Priezzhev V.B.* Scaling of waves in the Bak-Tang-Wiesenfeld sandpile model // *Phys. Rev. E.* 2000. Vol. 61, N1. Pp. 81–92.
13. *Hughes D., Paczuski M.* Large scale structures, symmetry, and universality in sandpiles // *Phys. Rev. Lett.* 2002. Vol. 88. 054302.
14. *Podlazov A.V.* Two-dimensional self-organized critical sandpile models with anisotropic dynamics of the activity propagation // *Izvestiya VUZ. AND.* 2012. Vol. 20, N6. Pp. 25–46.
15. *Malinetskiy G.G., Podlazov A.V.* Comparison of two-dimensional isotropic conservative self-organized critical sandpile models // *Engineering Journal: Science and Innovation.* 2012. Vol. 4, N4. 167.
16. *Podlazov A.V.* Solution of two-dimensional self-organized critical Manna model // *Izvestiya VUZ. AND.* 2013. Vol. 21, N6. Pp. 69–87.
17. *Podlazov A.V.* Two-dimensional self-organized critical Manna model // *Mathematical modeling and computational methods.* 2014. Vol. 3, N3. Pp. 89–110.
18. *Ivashkevich E.V., Ktitarev D.V., Priezzhev V.B.* Critical exponents for boundary avalanches in a 2D Abelian sandpile // *J. Phys. A: Math. Gen.* 1994. Vol. 27, N16. Pp. L585–L590.

19. *Dhar D., Manna S.S.* Inverse avalanches in the Abelian sandpile model // *Phys. Rev. E.* 1994. Vol. 49, N4. Pp. 2684–2687.
20. *Ivashkevich E.V., Ktitarov D.V., Priezzhev V.B.* Waves of topplings in an Abelian sandpile // *Physica A.* 1994. Vol. 209, N3–4. Pp. 347–360.
21. *Paczuski M., Boettcher S.* Avalanches and waves in the Abelian sandpile model // *Phys. Rev. E.* 1997. Vol. 56, N4. Pp. R3745–R3748.
22. *Priezzhev V.B., Ktitarov D.V., Ivashkevich E.V.* Formation of avalanches and critical exponents in Abelian sandpile model // *Phys. Rev. Lett.* 1996. Vol. 76, N12. Pp. 2093–2096.
23. *Majumdar S.N., Dhar D.* Equivalence between the Abelian sandpile model and the  $q \rightarrow 0$  limit of the Potts model // *Physica A.* 1992. Vol. 185, N1–4. Pp. 129–145.



*Подлазов Андрей Викторович* – родился в Москве (1973), окончил Московский физико-технический институт (1996). После окончания МФТИ работает в Институте прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН старшим научным сотрудником. Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук в ИПМ им. М.В. Келдыша РАН (2001) в области теории самоорганизованной критичности и теории масштабно-инвариантных процессов. Автор монографий «Управление риском. Риск, устойчивое развитие, синергетика» [М.: Наука, 2000. 432 с.] (в соавторстве с В.А. Владимировым, Ю.Л. Воробьевым, Г.Г. Малинецким и др.) и «Нелинейная динамика: Подходы, результаты, надежды» [Изд.3/ Синергетика: от прошлого к будущему. М.: ЛИБРОКОМ, 2011. 280 с.] (в соавторстве с Г.Г. Малинецким и А.Б. Потаповым). Опубликовал 60 научных статей по направлениям, указанным выше, а также по демографии, математической истории и вопросам развития системы образования.

125047 Москва, Миусская пл., 4  
 ИПМ им. М.В. Келдыша РАН  
 E-mail: Tiger@Keldysh.ru



УДК 517.98.537

**CONTINUED FRACTIONS,  
THE PERTURBATION METHOD AND EXACT SOLUTIONS  
TO NONLINEAR EVOLUTION EQUATIONS**

*A. I. Zemlyanukhin, A. V. Bochkarev*

Yuri Gagarin State Technical University of Saratov  
Politekhnikeskaya 77, Saratov, 410008, Russia  
E-mail: zemlyanukhinai@sstu.ru

A new method is proposed in which constructing exact solutions to nonlinear evolution equations is based on successive applying the perturbation method and apparatus of the continued fractions. It is shown that exact solitary-wave solutions arise in the limiting case as the sum of geometric series of the perturbation method based on the linearized problem. It is demonstrated that the continued fraction corresponding to the perturbation series, terminates to a convergent giving an expression for the desired exact soliton-like solution. The order of the convergent is established to be not less than twice the pole order of the original equation's solution. The effectiveness of the method is demonstrated on the solution of integrable 5th order equation of the Korteweg–de Vries family, 3rd order equation with 5 arbitrary constants, the Calogero–Degasperis–Fokas equation and the non-integrable Kuramoto–Sivashinsky equation. The analysis showed that in the case of integrable equations the continued fraction corresponding to the perturbation series terminates unconditionally, that is, the series is geometric or becomes so after regrouping the terms. For non-integrable equations the requirement of termination of the continued fraction that is equivalent to the geometricity of the perturbation series leads to the conditions on the original equation coefficients, which are necessary for the existence of exact soliton-like solutions. The advantages of the method, which can be easily implemented using any of the computer mathematics systems, include the ability to work with equations, the solution of which has a pole of zero, fractional or higher natural order.

*Keywords:* Continued fractions, perturbation method, exact solutions, nonlinear evolution equations.

DOI: 10.18500/0869-6632-2016-24-4-71-85

*Paper reference:* Zemlyanukhin A.I., Bochkarev A.V. Continued fractions, the perturbation method and exact solutions to nonlinear evolution equations // *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*, 2016. Vol. 24. N4. P. 71–85.

## Introduction

Forty-five years ago R. Hirota published a paper [1] presenting a direct bilinear method to construct N-soliton solutions and Backlund transformations for integrable equations. The basic idea was to replace the dependent variable to bring the original equation to bilinear form, for which a perturbation series is terminated at soliton solutions. The solutions in this case are represented by Pade approximants [2] of a special kind. Hirota noted that the use of Pade summation technique to the perturbation series for the original equation is possible, but not advisable because of too slow convergence or even divergence of such a series [1]. Furthermore, it is known [3] that the soliton, as a fundamentally nonlinear formation cannot be obtained in any finite order of the perturbation method based on the solution to the linearized problem.

The aim of this article is to expand understanding of the possibilities of direct perturbation method for integrable and nonintegrable equations and to offer effective techniques to build their exact soliton-like solutions. For summation of the perturbation series we will apply the techniques of continuous fractions [4], which is closely connected with Pade approximants, but historically arisen much earlier. In the framework of this approach the special properties of the series [5] that allow to find exact solutions to nonlinear evolution equations will be identified.

Following [1], we first consider the Korteweg – de Vries (KdV) equation

$$u_t + 6uu_x + u_{xxx} = 0. \quad (1)$$

For the KdV equation (1), we seek a solution asymptotically vanishing at infinity. Let us denote  $u = w_x$ , integrate the equation (1) for  $x$  and choose the constant of integration equal to zero:

$$w_t + 3w_x^2 + w_{xxx} = 0. \quad (2)$$

Substituting the expansion

$$w = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n w_n(x, t) \quad (3)$$

into equation (2), collect terms with the same degrees of  $\varepsilon$ . We obtain the infinite system of equations for determining the functions  $w_n(x, t)$ :

$$\begin{aligned} \varepsilon^1 : \quad w_{1t} + w_{1,xxx} &= 0, \\ \varepsilon^2 : \quad w_{2t} + w_{2,xxx} &= -3w_{1x}^2, \\ \varepsilon^3 : \quad w_{3t} + w_{3,xxx} &= -6w_{1x}w_{2x}, \\ \varepsilon^4 : \quad w_{4t} + w_{4,xxx} &= -6w_{1x}w_{3x} - 3w_{2x}^2, \\ &\dots \end{aligned} \quad (4)$$

The first equation of (4) has a particular solution  $w_1 = \exp(kx - \omega t)$  under the condition  $\omega = k^3$ , which is the dispersion relation of the linearized problem. Each of the subsequent equations of the system (4) has a solution of the form  $w_n = K_n(\exp(kx - \omega t))^n$ ,

where  $n$  is the number of the equation and  $K_n$  is a constant. Sequentially calculating the constants  $K_2, K_3, \dots$  and denoting

$$z = \varepsilon \exp(kx - \omega t), \quad (5)$$

the expression (3) can be written in the form of the power series

$$w = z - \frac{z^2}{2k} + \frac{z^3}{4k^2} - \frac{z^4}{8k^3} + \frac{z^5}{16k^4} - \frac{z^6}{32k^5} + \dots \quad (6)$$

It is seen that the series (6) is geometric with the first term  $z$  and common factor  $-z/(2k)$ .

Under condition  $|z/(2k)| < 1$  the series (6) converges and has the sum

$$w = \frac{z}{1 + \frac{1}{2k}z} = \frac{\varepsilon \exp(kx - k^3t)}{1 + \frac{\varepsilon}{2k} \exp(kx - k^3t)}. \quad (7)$$

The last expression is an exact solution to (2) for all values of the constants  $\varepsilon$  and  $k$ . Differentiating (7) by  $x$ , we obtain one-soliton solution of the KdV equation (1):

$$u = \frac{4k^3 \varepsilon \exp(kx - k^3t)}{\left[2k + \varepsilon \exp(kx - k^3t)\right]^2}.$$

Note that introducing the notation  $F = 1 + \exp[kx - k^3t + \ln(\varepsilon/(2k))]$ , the solution (7) can be represented in the form  $w = 2(\ln F)_x$ . Then  $u = w_x = 2(\ln F)_{xx}$ , which coincides with the Hirota formula for the N-soliton solution or transformation that converts the KdV equation to the bilinear form.

At this stage, most important that solitary-wave solution (7) occurs not in some finite order of the perturbation method, but arises in the limit as the exact sum of the geometric series (6).

The property of geometricity of the perturbation series was used previously in [6, 7] to construct the so-called padeons, in [8] to suggest the formal linearization method. However, the study of the universality of this property for integrable equations and the possibility of its effective use in non-integrable cases has not previously been conducted.

The structure of the perturbation series for the majority of integrable equations is much more complicated than for the KdV equation. In such cases to identify the geometricity of the series it is convenient to use the apparatus of continued fractions.

### 1. Continued fractions and power series

Any power series with nonzero coefficients  $a_n$

$$z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n \quad (8)$$

can be put into correspondence with continued fraction [9]

$$\frac{z}{1 + \frac{b_2 z}{1 + \frac{b_3 z}{1 + \frac{b_4 z}{1 + \dots}}}} \quad (9)$$

whose coefficients  $b_n$  are calculated by the formulas

$$\begin{aligned}
 b_2 &= -a_2, \\
 b_3 &= \frac{a_2^2 - a_3}{a_2}, \\
 b_4 &= \frac{a_2 a_4 - a_3^2}{a_2(a_2^2 - a_3)}, \\
 b_5 &= \frac{(a_2^2 a_5 - 2a_2 a_3 a_4 + a_3^2 - a_3 a_5 + a_4^2)}{(a_2^2 - a_3)(a_2 a_4 - a_3^2)}, \\
 &\dots
 \end{aligned} \tag{10}$$

The first  $n$  levels of the fraction (9) form its  $n$ -th convergent  $P_n/Q_n$ :

$$\begin{aligned}
 \frac{P_1}{Q_1} &= z, \\
 \frac{P_2}{Q_2} &= \frac{z}{1 + b_2 z}, \\
 \frac{P_3}{Q_3} &= \frac{z}{1 + \frac{b_2 z}{1 + b_3 z}} = \frac{z + b_3 z^2}{1 + (b_2 + b_3)z}, \\
 \frac{P_4}{Q_4} &= \frac{z}{1 + \frac{b_2 z}{1 + \frac{b_3 z}{1 + b_4 z}}} = \frac{z + (b_3 + b_4)z^2}{1 + (b_2 + b_3 + b_4)z + (b_2 b_4)z^2}, \\
 &\dots
 \end{aligned} \tag{11}$$

Expressions (10) can be obtained by equating the convergents  $P_n/Q_n$  to corresponding partial sums of the series (8).

The convergents (11) of the series (8) form a stepped sequence of Pade approximants [A/B] of this series [10]

$$\frac{P_n}{Q_n} = \begin{cases} \left[ \frac{n}{2} / \frac{n}{2} \right], & n - \text{even}, \\ \left[ \frac{n+1}{2} / \frac{n-1}{2} \right], & n - \text{odd}. \end{cases}$$

Continued fraction (9) is truncated and becomes its  $N$ -th convergent, if for any  $n > N$ ,

$$\frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}} = \frac{P_n}{Q_n}.$$

The difference between two consecutive convergents satisfies the condition [11]

$$\frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}} - \frac{P_n}{Q_n} = \frac{(-1)^n z^{n+1} b_2 b_3 \cdot \dots \cdot b_{n+1}}{Q_{n+1} Q_n}. \tag{12}$$

The equation (12) gives a sufficient condition for continued fraction to be truncated: for any  $n > N$  equality

$$B_n = b_2 b_3 \cdot \dots \cdot b_{n+1} = 0 \quad (13)$$

is true.

Truncation of the continued fraction corresponding to power series means that the series is geometric perhaps after rearrangement of its terms. In the examples considered below the power series is a perturbation series of the evolution equation to be solved. The establishment of geometricity of the series is equivalent to finding the exact solitary-wave solution.

## 2. Equation of the KDV family

Consider the 5th order KdV-type evolution equation [12]

$$u_t + u_{xxxxx} + 10uu_{xxx} + 20u_x u_{xx} + 30u^2 u_x = 0. \quad (14)$$

In accordance with the direct perturbation method the solution to (14) can be found in the form of a functional series in powers of a parameter  $\varepsilon$ :

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n u_n(x, t). \quad (15)$$

Substituting (15) into (14) and collecting the terms with identical power of  $\varepsilon$ , we get the system

$$\begin{aligned} \varepsilon^1 : \quad u_{1t} + u_{1xxxxx} &= 0, \\ \varepsilon^2 : \quad u_{2t} + u_{2xxxxx} &= -10u_1 u_{1xxx} - 20u_{1x} u_{1xx}, \\ \varepsilon^3 : \quad u_{3t} + u_{3xxxxx} &= -10(u_1 u_{2xxx} + u_2 u_{1xxx}) - 20(u_{1x} u_{2x})_x - \\ &\quad -30u_1^2 u_{1x}, \\ \varepsilon^4 : \quad u_{4t} + u_{4xxxxx} &= -10(u_1 u_{3xxx} + u_2 u_{2xxx} + u_3 u_{1xxx}) - \\ &\quad -20((u_{1x} u_{3x})_x + u_{2x} u_{2xx}) - \\ &\quad -30u_1(u_1 u_{2x} + 2u_2 u_{1x}), \\ &\dots \end{aligned} \quad (16)$$

The first equation of (16) has a solution  $u_1 = \exp(kx - \omega t)$  under the condition

$$\omega = k^5. \quad (17)$$

Finding the solutions to the following equations of (16) in the form  $u_n = K_n (\exp(kx - \omega t))^n$ , define constants  $K_n$ . Introducing the notation (5), expression (15) can be given the form of a power series

$$u = z - \frac{z^2}{k^2} + \frac{3z^3}{4k^4} - \frac{1z^4}{2k^6} + \frac{5z^5}{16k^8} - \frac{3z^6}{16k^{10}} + \frac{7z^7}{64k^{12}} - \frac{1z^8}{16k^{14}} + \dots \quad (18)$$

Now we construct the continued fraction corresponding to the series (18). By calculating the values  $b_n$  using formulas (10), we write expressions for sequence of  $B_n$  (13):

$$B_1 = \frac{1}{k^2}, \quad B_2 = -\frac{1}{4k^4}, \quad B_3 = -\frac{1}{16k^6}, \quad B_4 = 0, \quad B_5 = 0, \quad \dots$$

Starting with  $n = 4$ , all values of  $B_n$  turn to zero, therefore, continued fraction corresponding to the series (18) terminates and degenerates into 4th convergent (Pade approximant [2/2])

$$\frac{P_4}{Q_4} = [2/2] = \frac{z}{1 + \frac{b_2 z}{1 + \frac{b_3 z}{1 + b_4 z}}} = \frac{4k^4 z}{(2k^2 + z)^2}. \quad (19)$$

Represent the fraction (19) as the sum of geometric series

$$\frac{P_4}{Q_4} = \frac{z}{1 - \left( -\frac{z}{k^2} - \frac{z^2}{4k^4} \right)} = z \sum_{n=0}^{\infty} \left( -\frac{z}{k^2} - \frac{z^2}{4k^4} \right)^n. \quad (20)$$

By grouping the terms of the last expression in powers of  $z$ , we will receive the series (18). In other words, the use of continued fraction allows to rearrange the perturbation series for equation (14) to geometric one (20) in such a way that the sum of the series coincides with the corresponding convergent and is an exact solution to the original equation. In fact after the substitutions (5) and (17) the fraction (19) takes the form

$$\frac{4k^4 \varepsilon \exp(kx - k^5 t)}{\left[ 2k^2 + \varepsilon \exp(kx - k^5 t) \right]^2}$$

and becomes the exact solution to the equation (14).

Note that there is a relationship between the pole order of integrable equation's solution and the order of convergent, which truncates the continued fraction for the perturbation series. In this case, equation (14), as well as any equation of the KdV hierarchy, has a solution with a pole of second order ( $p = 2$ ). From (19) it is seen that corresponding convergent has the order of  $2p$ , that is, the Pade approximants stop to change starting with order  $[p/p]$ .

### 3. Integrable equation of the 3rd order

Equation

$$u_t = u_{xxx} - \frac{3}{8} \frac{(Q + u_x^2)_x^2}{u_x(Q + u_x^2)} + \frac{1}{2} Q'' u_x, \quad (21)$$

where  $Q = c_0 + c_1 u + c_2 u^2 + c_3 u^3 + c_4 u^4$  is an arbitrary polynomial, is the second canonical form of the equation  $K_6$  from the encyclopedia of integrable systems [13].

Find the solution to equation (21) in the manner described in section 3. After multiplying (21) term by term by  $u_x (Q + u_x^2)$ , we substitute (15) in (21) and group



#### 4. Generalized Calogero-Degasperis-Fokas (CDF) equation

The CDF equation containing two arbitrary coefficients  $\alpha$  and  $\beta$

$$u_t + \frac{1}{4}u_{xxx} - \frac{3u_x u_{xx}}{4u} + \frac{3u_x^3}{8u^2} + \frac{3}{8}u_x \left( \alpha u + \frac{\beta}{u} \right)^2 = 0, \quad (26)$$

is integrable [14]. Above we have obtained the exact solitary-wave solutions to integrable equations: KdV-type (14) and  $K_6$  (21). A perturbation series for each of them were definitely geometric, moreover in the case of the equation (21) geometricity of the series observed at arbitrary values of the coefficients  $c_0, \dots, c_4$ .

The change in numerical multipliers of the equation may lead to its non-integrability. Consider a generalization of the CDF equation, in which one of the numeric multipliers is replaced by an arbitrary coefficient  $\gamma$ :

$$u_t + \gamma u_{xxx} - \frac{3u_x u_{xx}}{4u} + \frac{3u_x^3}{8u^2} + \frac{3}{8}u_x \left( \alpha u + \frac{\beta}{u} \right)^2 = 0. \quad (27)$$

Obviously, an arbitrary constant is a solution to the equation (27). Denoting this constant as  $E$ , we seek solitary-wave solution to this equation in the neighborhood of  $E$  in the form of sum

$$u = E + \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n u_n(x, t). \quad (28)$$

After multiplying (27) term by term by  $u^2$ , we substitute (28) in (27) and group the obtained expression in powers of  $\varepsilon$ :

$$\begin{aligned} \varepsilon^1 : \quad & u_{1t} + \gamma u_{1xxx} + \frac{3}{8E^2} (E^2 \alpha + \beta)^2 u_{1x} = 0, \\ \varepsilon^2 : \quad & u_{2t} + \gamma u_{2xxx} + \frac{3}{8E^2} (E^2 \alpha + \beta)^2 u_{2x} = \frac{3}{4E} u_{1x} u_{1xx} - \frac{3(E^4 \alpha^2 - \beta^2)}{4E^3} u_1 u_{1x}, \\ \varepsilon^3 : \quad & u_{3t} + \gamma u_{3xxx} + \frac{3}{8E^2} (E^2 \alpha + \beta)^2 u_{3x} = \frac{3}{4E} (u_{1x} u_{2x})_x - \\ & - \frac{3(E^4 \alpha^2 - \beta^2)}{4E^3} (u_1 u_2)_x - \frac{3}{8E^2} u_1^3 - \frac{3}{4E^2} u_1 u_{1x} u_{1xx} - \frac{3(E^4 \alpha^2 + 3\beta^2)}{8E^4} u_1^2 u_{1x}, \\ & \dots \end{aligned} \quad (29)$$

The first equation of (29) has the particular solution  $u_1 = \exp(kx - \omega t)$  under condition

$$\omega = \frac{k}{8E^2} \left[ E^2 (3E^2 \alpha^2 + 6\alpha\beta + 8\gamma k^2) + 3\beta^2 \right].$$

Sequentially solving the following equations (29), after the introduction of the notation (5) for the series of (28) we get

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n u_n(x, t) = z - \frac{z^2}{8E^3 \gamma k^2} (E^4 \alpha^2 - E^2 k^2 - \beta^2) + \\ + \frac{z^3}{256E^6 \gamma^2 k^4} \left( 3E^8 \alpha^4 - E^6 \alpha^2 k^2 (4\gamma + 9) + 6E^4 k^4 (1 - 2\gamma) - \right. \\ \left. - 6E^4 \alpha^2 \beta^2 + 3E^2 \beta^2 k^2 (3 - 4\gamma) + 3\beta^4 \right) - \dots \end{aligned} \quad (30)$$

Identifying the perturbation series (30) with the series (8), we calculate the coefficients  $b_n$  of the corresponding continued fraction by formulas (10) and write the expressions for the sequence of  $B_n$  (13):

$$B_1 = \frac{E^4\alpha^2 - E^2k^2 - \beta^2}{8E^3\gamma k^2},$$

$$B_2 = \frac{1}{256E^6\gamma^2 k^4} \left( E^8\alpha^4 + E^6\alpha^2 k^2(4\gamma + 1) + 2E^4k^4(6\gamma - 1) - \right. \\ \left. - 2E^4\alpha^2\beta^2 + E^2\beta^2 k^2(12\gamma - 1) + \beta^4 \right),$$

...

Other expressions are too bulky to be presented. All members of the sequence  $B_n$ , beginning with  $B_4$ , contain two common multipliers:

$$(4\gamma - 1) \left( 3E^4\alpha^2 + 16E^2\gamma k^2 - 3E^2k^2 + 16\beta^2\gamma - 3\beta^2 \right).$$

Thus, the continued fraction is terminated in two cases:

$$\gamma = \frac{1}{4} \quad (31)$$

or

$$\gamma = \frac{3}{16} \left( 1 - \frac{E^4\alpha^2}{E^2k^2 - \beta^2} \right).$$

The first case corresponds to the original integrable CDF equation (26). The series (30) is geometric and its sum equals to the 4th order convergent

$$\frac{P_4}{Q_4} = [2/2] = 16k^4E^6z / \left( \left[ (E^2\alpha - \beta)^2 + E^2k^2 \right] \left[ (E^2\alpha + \beta)^2 + E^2k^2 \right] z^2 + \right. \\ \left. + 8E^3k^2(E^4\alpha^2 - E^2k^2 - \beta^2)z + 16E^6k^4 \right). \quad (32)$$

The second case establishes a definite relationship between the coefficients of the original equation and the parameters of sought solution for which the sum of the series (30) is defined as

$$\frac{P_4}{Q_4} = [2/2] = 36k^4E^6z \left[ (E^2k^2 + \beta^2)(E^2k^2 + 4\beta^2)z^2 - \right. \\ \left. - 24E^3k^2(E^2k^2 + \beta^2)z + 36E^6k^4 \right]. \quad (33)$$

To determine the exact solution to the equation (27) it is necessary to replace  $z$  in the above fractions  $P_4/Q_4$  by the expression (5), in which we do accept

$$\omega = \frac{k}{8} \left( 3E^2\alpha^2 + 6\alpha\beta + 2k^2 + \frac{3\beta^2}{E^2} \right)$$

in the case of (32) and

$$\omega = \frac{3k}{16(E^2k^2 + \beta^2)} \left[ E^2 \left( E^2\alpha^2 k^2 + 2\alpha^2\beta^2 + 4\alpha\beta k^2 + k^4 \right) + \beta^2 \left( 4\alpha\beta + 3k^2 \right) + \frac{2\beta^4}{E^2} \right]$$

in the case of (33). In both cases, in accordance with (28) the exact solution has the form of  $u = E + P_4/Q_4$ .

Note that the solution (32) at  $\alpha \neq 0$  has the pole of the 1st order. At  $\alpha = 0$  there is a full square in the denominator of (32)

$$\frac{P_4}{Q_4} = \frac{16k^4 E^6 z}{\left[4E^3 k^2 - (E^2 k^2 + \beta^2)z\right]^2}$$

and the solution has a pole of the second order. This conclusion is consistent with the results of the pole order determination for solutions to the equation (27) using the dominant terms analysis [15]. In fact, this equation written in a variable of a traveling wave  $\xi = kx - \omega t$  under the condition (31) takes the form

$$\frac{2}{3}u_{\xi\xi\xi\xi} - 2\frac{u_{\xi}u_{\xi\xi}}{u} + \frac{u_{\xi}^3}{u^2} + \frac{1}{k^3}\left(k\alpha^2 u^2 + 2k\alpha\beta - \frac{8\omega}{3} + \frac{k\beta^2}{u^2}\right)u_{\xi} = 0. \quad (34)$$

Replacing  $u$  in (34) by a power function  $p\xi^{-q}$  with constants  $p$  and  $q$ , for the left part (34) we get

$$k^3 p^2 (q^2 - 4)\xi^{-q-3} - 3\alpha^2 k p^4 \xi^{-3q-1} + 2p^2 (4\omega - 3\alpha\beta k)\xi^{-q-1} - 3\beta^2 k \xi^{q-1}. \quad (35)$$

The first two terms of (35) have the minimum values of degree, they are dominant. Equating their degrees in accordance with the Kruskal's compensation principle [16], we find  $q = 1$ , that is, the solution has a pole of the 1st order.

When  $\alpha = 0$  the expression (35) simplifies to

$$k^3 p^2 (q^2 - 4)\xi^{-q-3} + 8p^2 \omega \xi^{-q-1} - 3\beta^2 k \xi^{q-1}.$$

The first term is the only dominant. Equating to zero the coefficient in front of him gives  $q = 2$ , therefore, the decision in this case has a pole of the 2nd order.

Thus, between the pole order  $q$  of solution to the equation and the order  $r$  of the convergent  $P_r/Q_r$  giving the solution of this equation, there is a link:

$$r \geq 2q \quad (36)$$

## 5. Kuramoto–Sivashinsky (KS) equation

Finding the solution to the non-integrable KS equation [17]

$$u_t + uu_x + u_{xx} + \alpha u_{xxx} + \beta u_{xxxx} = 0 \quad (37)$$

in the form of (15), after grouping by powers of  $\varepsilon$  we have the following system of equations

$$\begin{aligned} \varepsilon^1 : & u_{1t} + u_{1xx} + \alpha u_{1xxx} + \beta u_{1xxxx} = 0, \\ \varepsilon^2 : & u_{2t} + u_{2xx} + \alpha u_{2xxx} + \beta u_{2xxxx} = -u_1 u_{1x}, \\ \varepsilon^3 : & u_{3t} + u_{3xx} + \alpha u_{3xxx} + \beta u_{3xxxx} = -(u_1 u_2)_x, \\ \varepsilon^4 : & u_{4t} + u_{4xx} + \alpha u_{4xxx} + \beta u_{4xxxx} = -(u_1 u_3)_x - u_2 u_{2x}, \\ & \dots \end{aligned} \quad (38)$$

The first equation of the system (38) has a particular solution  $u_1 = \exp(kx - \omega t)$  under the condition

$$\omega = \beta k^4 + \alpha k^3 + k^2. \quad (39)$$

Sequentially solving the following equations (38), after the introduction of the notation (5) for a series (15) we get

$$\begin{aligned} u = z - & \frac{z^2}{2k(7\beta k^2 + 3\alpha k + 1)} + \\ & + \frac{z^3}{3k^2(13\beta k^2 + 4\alpha k + 1)(7\beta k^2 + 3\alpha k + 1)} - \\ & - \frac{(27\beta k^2 + 10\alpha k + 3)z^4}{24k^3(21\beta k^2 + 5\alpha k + 1)(13\beta k^2 + 4\alpha k + 1)(7\beta k^2 + 3\alpha k + 1)^2} + \dots \end{aligned} \quad (40)$$

The analysis of dominant terms of (37) shows that the expression (40) corresponds to a function with a pole of the 3rd order. According to the inequality (36), the exact solution of equation (37) is a convergent of the order not lower than  $P_6/Q_6$  or diagonal Pade approximant at least  $[3/3]$  order. The above noted that the corresponding expressions are too bulky and difficult to operate even with the use of modern systems of symbolic mathematics. To simplify the calculation one can use appropriate transformation of the perturbation series (40). Let's use the fact that the cube root of the power series (40) corresponds to a function with a pole of the 1st order. To extract the cube root of (40), consider the equation  $u = z^{-2}v^3$ , where

$$v = z + \sum_{n=2}^{\infty} c_n z^n, \quad (41)$$

and equate coefficients on both sides of this equation with equal powers of  $z$ . Solving the resulting equalities with respect to  $c_n$ , we find

$$\begin{aligned} v = z - & \frac{z^2}{6k(7\beta k^2 + 3\alpha k + 1)} + \\ & + \frac{(8\beta k^2 + 5\alpha k + 2)z^3}{36k^2(13\beta k^2 + 4\alpha k + 1)(7\beta k^2 + 3\alpha k + 1)^2} - \\ & - \frac{(210\beta^2 k^4 + 170\alpha\beta k^3 + 50\alpha^2 k^2 + 49\beta k^2 + 36\alpha k + 7)z^4}{324k^3(21\beta k^2 + 5\alpha k + 1)(13\beta k^2 + 4\alpha k + 1)(7\beta k^2 + 3\alpha k + 1)^3} + \dots \end{aligned} \quad (42)$$

As before, calculate the coefficients of the continued fraction corresponding to the series (42) by formulas (10) and write expressions for the sequence of  $B_n$  (13):

$$\begin{aligned} B_1 &= \frac{1}{6k(7\beta k^2 + 3\alpha k + 1)}, \\ B_2 &= \frac{-5\beta k^2 + \alpha k + 1}{36k^2(13\beta k^2 + 4\alpha k + 1)(7\beta k^2 + 3\alpha k + 1)^2}, \\ B_3 &= \frac{1}{648k^3(21\beta k^2 + 5\alpha k + 1)(13\beta k^2 + 4\alpha k + 1)^2(7\beta k^2 + 3\alpha k + 1)^3} \times \\ & \times \left( 1428\beta^3 k^6 + 100\alpha\beta^2 k^5 - 115\alpha^2\beta k^4 + 25\alpha^3 k^3 - 514\beta^2 k^4 - \right. \\ & \left. - 312\alpha\beta k^3 + 13\alpha^2 k^2 - 68\beta k^2 + 8\alpha k + 2 \right), \\ & \dots \end{aligned} \quad (43)$$

In accordance with (36) the first fraction of the sequence of convergents (11) which can match the solution with the 1st order pole is  $P_2/Q_2$  (Pade approximant [1/1]). In order to continued fraction corresponding the series (42) terminates and coincide with  $P_2/Q_2$ , it is necessary that all the values (43) starting from  $B_2$  go to zero. From the condition  $B_2 = 0$  we find

$$\alpha = \frac{5\beta k^2 - 1}{k}. \quad (44)$$

Substituting (44) into (43), we have

$$\begin{aligned} B_1 &= \frac{1}{12k(11\beta k^2 - 1)}, \\ B_2 &= 0, \\ B_3 &= \frac{\beta k^2 - 1}{5184k^3(23\beta k^2 - 2)(11\beta k^2 - 1)}, \\ &\dots \end{aligned}$$

As it is seen, only one condition (44) is not enough. Demanding  $B_3 = 0$ , obtain the second condition

$$\beta = \frac{1}{k^2}. \quad (45)$$

Pair of conditions (44), (45) is enough to the continued fraction terminates and matches up with a convergent  $P_2/Q_2$ , which in this case takes the form

$$v = \frac{P_2}{Q_2} = [1/1] = \frac{120zk}{z + 120k}.$$

Substituting the expression obtained for  $v$  in (41), we find  $u$  as follows

$$u = \frac{120^3 k^3 z}{(z + 120k)^3}. \quad (46)$$

Replacing  $z$  in (46) by expression (5) and taking into account the dispersion relation (39) and the conditions (44), (45) for the coefficients of the equation KS, we get the exact solution

$$u = \frac{120^3 k^3 \varepsilon \exp(kx - 6k^2 t)}{[\varepsilon \exp(kx - 6k^2 t) + 120k]^3}. \quad (47)$$

The solution (47) can be obtained in the other way. For example, the replacement of the dependent variable  $u = w^3$  transforms (37) to equation, the solution of which has the pole of the 1st order. Substitution  $u = w_x$  in (37) allows to decrease the order of solution pole by one. In both cases the application of the proposed method to the transformed equations enabled us to obtain the solution (47), but with increased computational costs.

## 6. Scheme of the method. Advantages and disadvantages

The examples above allow us to represent a general scheme of the method of finding the exact solitary-wave solutions to evolution equations.

*Step 1.* Preparation of the perturbation series in the form of a power series based on the solution of the linearized problem.

*Step 2.* Calculation of sequence  $B_n$  of products of the coefficients of the continued fraction corresponding to the perturbation series.

*Step 3a.* For an integrable equation, there exists a natural number  $r$ , such that

$$\forall n \geq r \Rightarrow B \equiv 0, \quad (48)$$

the continued fraction terminates unconditionally and is transformed into the convergent  $P_r/Q_r$ . The perturbation series is geometric and the fraction  $P_r/Q_r$  gives an expression for the sum of the series and the exact solution to the equation.

*Step 3b.* For non-integrable equation the solutions of which have a pole of order  $q$ , it is necessary to find conditions under which for some natural  $r \geq 2q$  the inequality (48) is true. Such conditions, if found, establish the connection between coefficients of the equation and the parameters of its solution. When these conditions are met the perturbation series becomes geometric, the continued fraction is transformed into a convergent  $P_r/Q_r$  and gives the exact solution to the equation. If such conditions could not be found, the equation can be solved by this method.

In practice, the equality to zero of three or four successive quantities  $B_n$  in step 3b indicates the condition (48) is met and the exact solution is found, that can be checked by substitution of the appropriate convergent  $P_r/Q_r$  into the original equation.

The advantages of the method include the ability to work with equations, the solution of which has a pole of zero, fractional, or high natural order. In these cases, the perturbation series should be transformed so that it matches a function with a pole of the first or second order. For this the perturbation series can be term-by-term differentiated, raised to a rational degree, inversed and so on.

The steps of the method are easy to automate with any of the modern systems of symbol mathematics.

The method can be used as an empirical criterion of integrability of evolutionary equations: if the perturbation series is geometric or becomes such under the condition including only the coefficients of the equation, the equation with high probability relates to integrable. After checking most of integrable evolution equations contained in [13], we have not found any counterexample. Note that geometricity of the series under condition that includes both the coefficients of the equation and the solution parameters, such as (44) and (45), indicates that the equation is non-integrable.

The disadvantages of the method include inability to classify all exact solutions of evolution equations and impossibility of solving equations with variable coefficients.

*This research was supported by RFBR (project No. 16-01-00176-a).*

## References

1. *Hirota R.* Exact solution of the Korteweg–de Vries equation for multiple collisions of solitons // *Phys. Rev. Lett.* 1971. Vol. 27. Pp. 1192–1194.
2. *Baker G.A.Jr., Graves-Morris P.* Padé Approximants, Cambridge: Cambridge U.P., 1996.
3. *Manevitch L.I.* Linear and nonlinear mathematical physics: from harmonic waves to solitons // *Soros. Obrazov. Journ.* 1996. N1. Pp. 86–93 (Russian).
4. *Jones W.B., Thron W.J.* Continued fractions: analytic theory and applications. Reading, MA: Addison-Wesley, 1980.

5. *Zemlyanukhin A.I., Bochkarev A.V.* The perturbation method and exact solutions of nonlinear dynamics equations for media with microstructure // *Computational Continuum Mechanics*. 2016. Vol. 9, N2. Pp. 182–191 (Russian).
6. *Lambert F. and Musette M.* Solitary waves, padeons and solitons // *Lect. Notes Math.* 1984. Vol. 1071. Pp. 197–212.
7. *Lambert F., Musette M.* Solitons from a direct point of view: padeons // *J. Comp. Appl. Math.* 1986. Vol. 15. Pp. 235–249.
8. *Baikov V.A., Khusnutdinova K.R.* Formal linearization and exact solutions of some nonlinear partial differential equations // *J. Nonlin. Math. Phys.* 1996. N3. Pp. 139–146.
9. *Bender C.M., Milton K.A.* Continued fraction as a discrete nonlinear transform // *J. Math. Phys.* 1994. Vol. 35, N1. Pp. 364–367.
10. *Cohen H.* Numerical Approximation Methods. New York: Springer-Verlag, 2011.
11. *Khovansky A.N.* Applications of continued fractions and their generalization to problems in approximation theory. Groningen: P. Noordhoff N.V., 1963.
12. *Meshkov A.G., Sokolov V.V.* Integrable evolution equations with the constant separant // *Ufa Math. J.* 2012. Vol. 4, N3. Pp. 104–153.
13. Encyclopedia of Integrable Systems / A.B. Shabat, V.E. Adler, V.G. Marikhin, V.V. Sokolov (Eds.), L.D. Landau Institute for Theoretical Physics – Research Institute for Symbolic Computations, J. Kepler Universität, 2007.
14. *Gandarias M.L., Saez S.* Traveling-wave solutions of the Calogero–Degasperis–Fokas equation in 2+1 dimensions // *Theor. Math. Phys.* 2005. Vol. 144, N1. Pp. 916–926.
15. *Ryabov P.N.* Exact solutions of the Kudryashov–Sinelschikov equation // *Appl. Math. Comput.* 2010. Vol. 217, N7. Pp. 3585–3590.
16. The Painlevé Property: One Century Later / R. Conte (Ed.). New York: Springer, 1999.
17. *Kudryashov N.A.* Methods of nonlinear mathematical physics. Dolgoprudnyj: Izd. Dom Intellekt, 2010.

*Поступила в редакцию 26.06.2016*

## **НЕПРЕРЫВНЫЕ ДРОБИ, МЕТОД ВОЗМУЩЕНИЙ И ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ЭВОЛЮЦИОННЫХ УРАВНЕНИЙ**

*А. И. Землянухин, А. В. Бочкарёв*

Саратовский государственный технический университет имени Гагарина Ю. А.  
410054 Саратов, ул. Политехническая, 77  
E-mail: zemlyanukhinai@sstu.ru

Предложен новый метод построения точных решений нелинейных эволюционных уравнений, основанный на последовательном применении метода возмущений и аппарата непрерывных дробей. Показано, что точные уединенно-волновые решения возникают в предельном случае как суммы геометрических рядов метода возмущений на основе

линеаризованной задачи. Продемонстрировано, что непрерывная дробь, соответствующая ряду возмущений, обрывается, и оставшаяся подходящая дробь дает выражение для искомого точного солитоноподобного решения. Установлено, что порядок подходящей дроби не меньше удвоенного порядка полюса решения исходного уравнения. Эффективность метода продемонстрирована на решении интегрируемых уравнений: семейства Кортевега–де Вриза 5-го порядка, третьего порядка с 5-ю произвольными постоянными, Калоджеро–Дегаспериса–Фокаса и неинтегрируемого уравнения Курамото–Сивашинского. Проведенный анализ показал, что в случае интегрируемых уравнений непрерывная дробь, соответствующая степенному ряду метода возмущений, обрывается безусловно, то есть ряд является геометрическим или становится таковым после перегруппировки слагаемых. Для неинтегрируемых уравнений требование обрывания непрерывной дроби, равносильное геометричности ряда метода возмущений, приводит к условиям на коэффициенты исходного уравнения, необходимым для существования точных солитоноподобных решений. К преимуществам метода, который может быть легко реализован с помощью любой из систем компьютерной математики, можно отнести возможность работы с уравнениями, решение которых имеет полюс нулевого, дробного или высокого натурального порядка.

*Ключевые слова:* Непрерывные дроби, метод возмущений, точные решения, нелинейные эволюционные уравнения.

DOI: 10.18500/0869-6632-2016-24-4-71-85

*Ссылка на статью:* Землянухин А.И., Бочкарев А.В. Непрерывные дроби, метод возмущений и точное решение нелинейных эволюционных уравнений // Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика, 2016. Т. 24. № 4. Р. 71–85.

*Землянухин Александр Исаевич* родился в 1967 году в Саратове, окончил с отличием механико-математический факультет Саратовского государственного университета в 1989 году. Заведующий кафедрой «Прикладная математика и системный анализ» Саратовского государственного технического университета. Защитил диссертации на соискание учёной степени кандидата физико-математических наук в СГУ (1995) и доктора физико-математических наук в Институте проблем машиноведения РАН (1999) в области динамических задач механики деформируемого твердого тела. Автор монографии «Нелинейные волны в цилиндрических оболочках: солитоны симметрии, эволюция» (1999, в соавторстве с Л.И.Могилевичем). Области научных интересов: нелинейная волновая динамика деформируемых систем, аналитические и численные методы нелинейной математической физики.

410008 Саратов, Политехническая, 77  
Саратовский государственный технический университет имени Гагарина Ю.А.  
E-mail: zemlyanukhinai@sstu.ru



*Бочкарев Андрей Владимирович* родился в 1973 году в Саратове, окончил с отличием физический факультет Саратовского государственного университета в 1995 году. Доцент кафедры «Прикладная математика и системный анализ» Саратовского государственного технического университета. Защитил диссертацию на соискание учёной степени кандидата технических наук в СГТУ (1999). Научные интересы: нелинейная волновая динамика деформируемых систем, точные решения нелинейных уравнений в частных производных.

410008 Саратов, Политехническая, 77  
Саратовский государственный технический университет имени Гагарина Ю.А.  
E-mail: ab2009sar@list.ru





## СРАВНЕНИЕ ЧИСЛЕННЫХ РЕАЛИЗАЦИЙ АЛГОРИТМА РАСЧЁТА ВЗАИМНОЙ ИНФОРМАЦИИ НА ОСНОВЕ УЧЁТА БЛИЖАЙШИХ СОСЕДЕЙ

*И. В. Сысоев*

Национальный исследовательский  
Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского  
Россия, 410012 Саратов, Астраханская, 83

E-mail: ivssci@gmail.com

*Цель.* Сравнить эффективность реализации различных подходов к оцениванию функции взаимной информации на основе учёта ближайших соседей.

*Метод.* Численно реализованы два подхода к вычислению функции взаимной информации: лобовой, основанный на поиске ближайших соседей перебором, и сортировочный, основанный на сортировке одного из наблюдаемых рядов.

*Результаты.* Показано, что алгоритмическая сложность сортировочного метода ниже, чем лобового, но выше, чем алгоритмическая сложность самой сортировки, реализованной любым из методов быстрой сортировки.

*Обсуждение.* Реализация сортировочного алгоритма оправдана в случае, если приходится иметь дело с выборками большой длины, в то время как для сравнительно небольших выборок (порядка сотен отсчётов) можно ограничиться лобовым подходом.

*Ключевые слова:* Взаимная информация, метод ближайших соседей, быстрая сортировка.

DOI:10.18500/0869-6632-2016-24-4-86-95

*Ссылка на статью:* Сысоев И.В. Сравнение численных реализаций алгоритма расчёта взаимной информации на основе учёта ближайших соседей // Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2016. Т. 24, № 4. С. 86–95.

## Введение

Функция взаимной информации  $I_{x,y}$  между двумя выборками  $\{x_n\}_{n=1}^N$  и  $\{y_n\}_{n=1}^N$  – популярная мера выявления связанности экспериментальных данных, широко используемая в задачах различных областей наук, в частности, в нелинейной динамике [1] для оптимальной реконструкции вектора состояния по скалярной временной реализации, в медицине для обработки объёмных изображений [2, 3], в нейрофизиологии [4] и даже в лингвистике [5]. Наиболее простой подход к расчёту функции взаимной информации – через оценку одномерных  $p_x$  и  $p_y$  и двумерного  $p_{x,y}$  распределений с помощью гистограмм [6]. Его основной недостаток заключается в том, что для распределений с длинными хвостами, часто реализующихся на практике, необходим очень большой объём данных для получения более-менее достоверных оценок, иначе большое число редко населённых бинов приводит к большим погрешностям в оценке  $p_x$ ,  $p_y$  и  $p_{x,y}$ , в результате чего оценка  $I_{x,y}$  оказывается сильно ненадёжна.

Важность задачи породила целый ряд подходов [7], среди которых наиболее востребованными оказались основанные на использовании ядер [8] и учёте ближайших соседей [9]. Предложенный в [9] алгоритм имеет ряд важных преимуществ, в первую очередь с точки зрения достоверности получаемых оценок. Так, для линейных гауссовских процессов показано, что получаемые оценки асимптотически не смещённые с ростом длины выборки, а при отсутствии связи – и вовсе несмещённые при произвольной длине ряда, хотя для сигналов с более сложными свойствами, например, хаотических детерминированных, такие выкладки не проводились (и вряд ли в общем случае возможны). Кроме того, алгоритм имеет преимущество с вычислительной точки зрения: при оценивании расстояния между точками в двумерном пространстве используется не евклидова норма, а максимальный модуль разности по координатам (1), вычисление которого на ЭВМ гораздо проще и имеет большую точность, поскольку нет необходимости возводить в квадрат и брать квадратный корень.

$$d_{i,j} = \max(|x_i - x_j|, |y_i - y_j|). \quad (1)$$

Основная проблема лобовой реализации данного подхода лежит в вычислительной плоскости: поиск расстояния от каждой точки до каждой требует  $O(N^2)$  операций, что при больших размерах выборки, например,  $\sim 10^4$ , приведёт к вычислительной сложности, требующей при реализации на современном персональном компьютере уже зримого – порядка секунд, десятков и даже сотен секунд – времени. При обработке единичной реализации это не становится существенным затруднением. Но при попарной обработке большого числа записей, например, сигналов стандартной 32-х канальной ЭЭГ, либо при исследовании зависимости функции взаимной информации сигнала самого с собою со сдвигом во времени, что необходимо, например, для определения оптимального вложения [1], время расчётов может быстро достигнуть неприемлемых значений – часов и даже дней. Сократить его можно, используя ряд технических приёмов: параллелизацию расчётов, кеширование результатов промежуточных вычислений, за счёт выбора языка программирования и компилятора. Некоторые детали этих приёмов рассмотрены далее. Проблема в том, что даже реализовав все эти оптимизации, уменьшить время расчётов удастся в фиксированные несколько или два-три десятка раз, что полезно, но не принципиально.

Поэтому наиболее перспективным является разработка алгоритма, имеющего меньший, чем  $O(N^2)$ , порядок вычислительной сложности, как это было указано в оригинальной работе [9]. Целью данной работы является сравнение лобового метода расчёта и метода, основанного на сортировке экспериментальных данных, при этом важно понять, для какого объёма выборки реализация сортировочного алгоритма является оправданной. При этом значительная часть дополнительных оптимизаций также была проведена: в частности, было реализовано распараллеливание расчётов и также выбраны язык программирования и компилятор, обеспечивающие высокую эффективность итогового кода. Отметим, что обзор методов сортировок и его реализация не является предметом данной работы и будет здесь излишним. Автор не претендует на новизну и значимость в этом вопросе.

## 1. Численные алгоритмы расчёта

Рассмотрим простейший вариант алгоритма, предложенного в [9], основанный на учёте одного первого соседа. Итоговая формула для вычисления оценки функции взаимной информации имеет вид:

$$I_{x,y} = \psi(N) + \psi(1) - \langle \psi(n_x(i) + 1) + \psi(n_y(i) + 1) \rangle_i, \quad (2)$$

где  $N$  – длина выборки,  $n_x(i)$  и  $n_y(i)$  – число соседей  $i$ -той точки на плоскости  $(X, Y)$  таких, что расстояние до них по одной из координат:  $x$  или  $y$  соответственно меньше расстояния до ближайшего соседа  $\varepsilon_i/2$ , найденного по формуле (1),  $\psi(n)$  – дигамма функция.

**1.1. Прямой алгоритм.** Блоксхема прямой, или «лобовой» реализации метода расчёта функции взаимной информации на основе учёта первого ближайшего соседа приведена на рис. 1.

Оптимизация представленного алгоритма по производительности должна быть ориентирована в первую очередь на уменьшение числа и упрощение действий, производимых  $O(N^2)$  раз. Можно выделить два места в представленном на рис. 1 варианте реализации, где возможно сокращение числа действий:

1. уменьшение числа проверок на несовпадение индексов – блоков  $i \langle j$ ;
2. уменьшение числа вычислений модуля разности вида  $|x[i] - x[j]|$  и  $|y[i] - y[j]|$  при расчёте расстояний.

Ликвидировать проверки в первом вложенном цикле можно, разбив его на два: от 0 до  $i$  не включительно и от  $(i + 1)$  до  $N$  не включительно. Ликвидировать проверки во втором цикле можно тем же способом, но есть более эффективный подход: если проверку убрать вовсе, величины  $n_x(i)$  и  $n_y(i)$  будут всегда ровно на 1 больше, чем нужно, поскольку  $i$ -тая точка всегда является соседом сама для себя. Однако в итоговое выражение входят  $\psi(n_x(i) + 1)$  и  $\psi(n_y(i) + 1)$ , таким образом, заменив в аргументе дигамма функции  $(n_x(i) + 1)$  на  $n_x(i)$  и убрав проверку на совпадение индексов, получим искомое выражение.

Для уменьшения числа вычислений модуля разницы лучше всего было бы создать матрицы расстояний между всеми точками по  $x$  и по  $y$ , тогда вместо четырёх вычислений величины  $|x_i - x_j|$ : двух на этапе расчёта  $\varepsilon(i)/2$  и двух на этапе расчёта

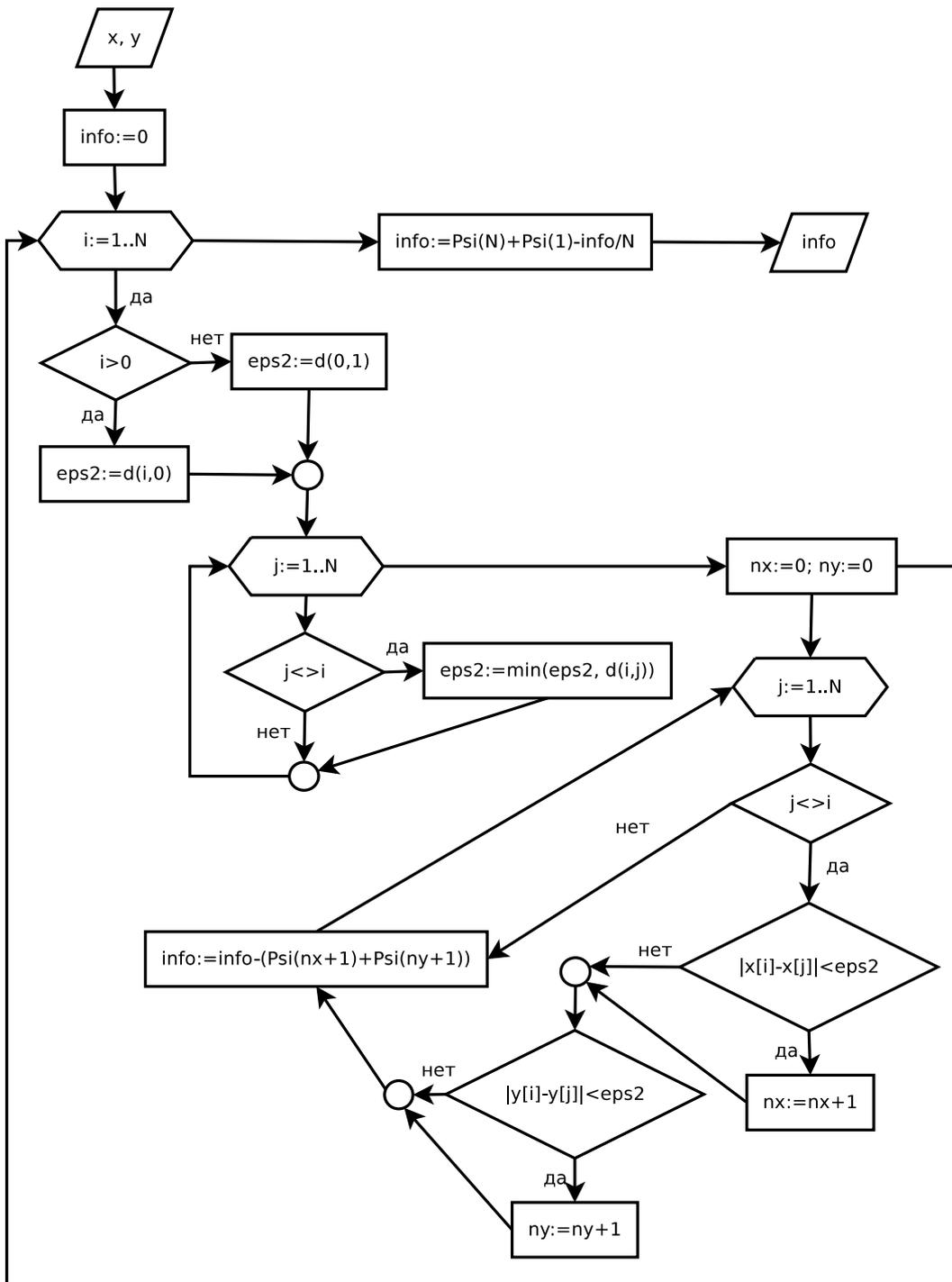


Рис. 1. Блок-схема прямого не оптимизированного алгоритма. Для краткости часть кода вынесена во встроенные функции:  $\max$  и  $\min$  – функции поиска максимума и минимума от 2 аргументов,  $\Psi$  – дигамма функция,  $d$  – расстояние, рассчитанное по формуле (1)

$n_x(i)$  ограничиться только одним; аналогично и для  $|y_i - y_j|$ . Однако при больших размерах выборки это неприемлемо, так как размер матрицы будет расти пропорционально  $O(N^2)$  и, например, для выборки размером в  $10^4$  значений составит уже  $4999 \times 10^4$  элементов (учитывая, что матрица симметрична и хранение главной диагонали не требуется), что требует  $\sim 200$  Мб оперативной памяти при одинарной точности и  $\sim 400$  Мб при двойной, причём таких матриц придётся хранить две: для  $x_i$  и  $y_i$ . Понятно, что уже для 20–30 тысяч значений потребление памяти будет слишком велико даже, если проводить вычисления в числах с одинарной точностью.

Альтернативой созданию матрицы расстояний является хранение массивов значений  $|x_i - x_j|$  и  $|y_i - y_j|$  внутри цикла по  $i$ , хотя экономия в этом случае будет не столь велика, так как модуль разницы между  $|x_p|$  и  $|x_q|$  будет рассчитан дважды: при  $p = i, q = j$  и при  $p = j, q = i$ . К сожалению, такой подход оказывается далеко не всегда оправдан, поскольку частично вступает в конфликт с другими оптимизациями. Основная проблема состоит в том, что заполнение массива является затратной с точки зрения числа обращений к памяти операцией, которая происходит  $O(N^2)$  раз, так что вместо четырёх обращений к памяти на чтение за  $x_i$  и  $x_j$  получаем 2 обращения к памяти на чтение за  $x_i$  и  $x_j$ , одно на запись для расстояния  $|x_i - x_j|$  и одно на чтения для него же.

Повысить производительность можно, кешировав значение  $x_i$  и  $y_i$  во внешнем цикле в локальные переменные. Эта оптимизация, однако, уменьшает эффект от предыдущей.

Ещё одним способом немного сократить время вычислений является оптимизация подхода к вычислению дигамма функции. Можно заметить, что нас интересуют только значения дигамма функции целого положительного аргумента, начиная с 1 и заканчивая  $N$ . Поэтому можно обратиться к итерационной формуле<sup>1</sup> из [10]:

$$\begin{aligned}\psi(1) &= -\gamma, \\ \psi(n+1) &= \psi(n) + 1/(n-1) \quad \forall n > 1,\end{aligned}\tag{3}$$

где  $\gamma$  – константа Эйлера<sup>2</sup>. Сделав всего  $N$  итераций в цикле, можно получить и сохранить в памяти все необходимые значения дигамма функции от всех аргументов от 1 до  $N$ , а затем вместо вычисления, например,  $\psi(n_x(i))$  просто обращаться к  $n_x(i)$ -тому элементу сохранённого массива. Хотя число обращений к дигамма функции составляет всего  $O(N)$ , при не очень больших размерах выборки, например, в несколько сотен или тысяч точек, двукратное вычисление сложной трансцендентной функции для произвольного действительного аргумента на каждом шаге может вести к существенным затратам вычислительных ресурсов.

Если описанных оптимизаций оказывается недостаточно, разумно задействовать возможности параллельных расчётов, что относительно просто реализуемо в данной ситуации благодаря фактической независимости операций внутри внешнего цикла по  $i$ .

Перечисленные оптимизации не могут решить главную проблему – вычислительная сложность сохраняет порядок  $O(N^2)$ .

<sup>1</sup>На самом деле итерационная формула работает для любых комплексных значений аргумента, не являющихся целыми отрицательными числами.

<sup>2</sup> $\gamma \approx 0.5772156649015328606065120900824024310421$ .

**1.2. Сортировочный алгоритм.** Практика показывает, что число ближайших соседей по каждой координате  $n_x(i)$  и  $n_y(i)$  очень невелико по сравнению с общей длиной выборки  $N$  и составляет порядка  $\sqrt{N}$ . Таким образом, если отсортировать исходные данные, например, в порядке возрастания величины  $x$ , то в новой выборке  $\{x_{i'}\}_{i'=1}^N$  все ближайшие соседи по  $X$  точки с номером  $i'$  имеют близкие к ней номера. Точки с номерами  $(i'+1)$  и  $(i'-1)$  будут иметь в общем случае достаточно большое расстояние до точки с номером  $i'$  по координате  $Y$ , но если перебирать все точки с большими и меньшими номерами последовательно, то довольно скоро (как раз на расстоянии  $\sim \sqrt{N}$ ) можно будет найти точку с номером  $(i' + l_{i'})$  (или

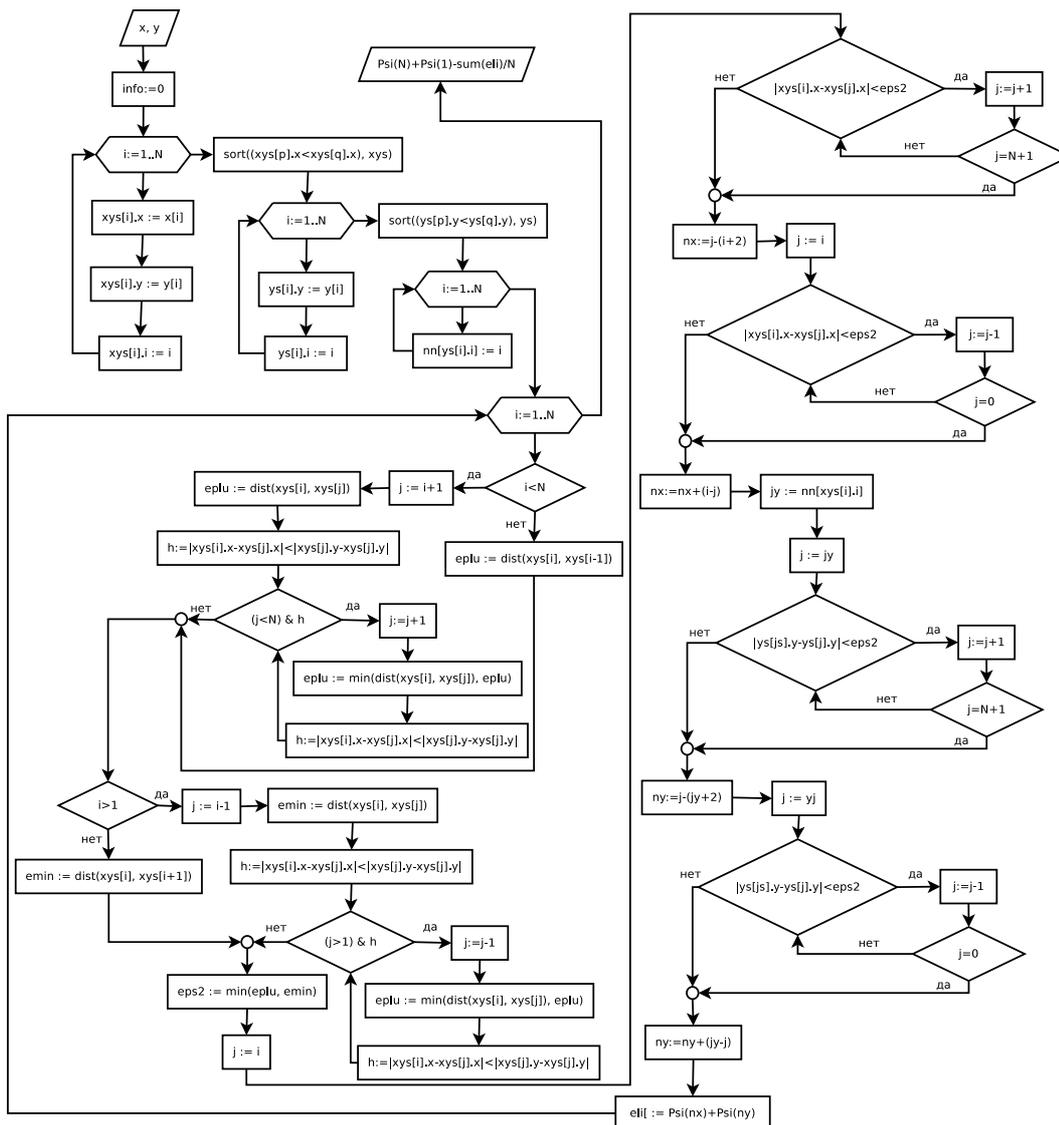


Рис. 2. Блоксхема сортировочного алгоритма. Для краткости часть кода вынесена во встроенные функции:  $\max$  и  $\min$  – функции поиска максимума и минимума от 2 аргументов,  $\Psi$  – дигамма функция,  $\text{dist}$  – расстояние, рассчитанное по формуле (1),  $\text{sort}$  – функция сортировки записей, принимающая дополнительный аргумент – условие,  $\text{sum}$  – считает сумму элементов массива

$(i' - k_{i'})$  при переборе с уменьшением номера), для которой расстояние по  $Y$  окажется меньше, чем расстояние по  $X$ , после чего дальнейший перебор оказывается бессмысленным: согласно определению расстояния (1) более удалённые по  $X$  точки будут иметь большее расстояние до  $i'$ -той, чем та, на которой перебор прекратился. То есть, поиск ближайшего соседа имеет смысл производить только среди элементов отсортированной выборки с номерами от  $(i' - k_{i'})$  до  $(i' + l_{i'})$ . При этом, поиск ближайшего соседа и вычисление  $k_{i'}$  и  $l_{i'}$  разумно совместить.

Далее, отсортированный ряд  $\{x_{i'}\}_{i'=1}^N$  легко использовать для определения числа  $n_x(i)$ , последовательно сравнивая расстояния между точками с близкими к  $i'$  номерами и  $i'$ -ой точкой до тех пор, пока оно не превысит  $\varepsilon_i/2$ . Для поиска соседей по  $Y$  нужно сделать аналогичную сортировку выборки в порядке возрастания величины  $Y: \{y_{i''}\}_{i''=1}^N$ . Кроме того, нужно при построении  $\{x_{i'}\}$  сохранить номера, которые точки имели в исходной выборке, т.е. запомнить пары  $(i, i')$ . Тогда можно будет по номеру  $i'$  восстановить  $i$ . Также следует составить массив номеров  $i''$ , отсортированный в порядке увеличения соответствующих им номеров исходной выборки  $i$ . Тогда для определения  $i''$ , соответствующего  $i$ , достаточно просто обратиться к элементу массива с индексом  $i$ .

Поскольку все упомянутые сортировки можно произвести до основного цикла, а типичная быстрая сортировка имеет порядок сложности  $O(N \log(N))$ , их вклад в общее время работы программы оказывается незначительным. При этом сложность алгоритма в целом уменьшается с  $O(N^2)$  до примерно  $O(N\sqrt{N})$ , считая, что  $N\sqrt{N} \gg N \log(N)$ , за счёт уменьшения числа итераций внутренних циклов. Блок-схема сортировочного алгоритма приведена на рис. 2.

## 2. Тестирование алгоритмов и выводы

Среднее по 20 запускам время работы прямого и сортировочного алгоритмов с учётом указанных выше оптимизаций приведено в таблице 1, где представлены однопоточный и многопоточный варианты. В качестве данных использовалась реализация двумерного гауссовского шума с нулевым средним и матрицею ковариаций  $\begin{bmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{bmatrix}$ , где значение  $\rho$  варьировало в пределах от 0 до 1 (в таблице 1 приведены результаты для  $\rho = 0.9$ ). Полученные в результате выполнения всех вариантов как прямого, так и сортировочного алгоритмов значения  $I_{x,y}$  совпали и оказались близки к аналитически рассчитанному<sup>3</sup> значению  $I_{x,y} = -\frac{1}{2} \ln(1 - \rho^2)$ .

|                          | прямой, 1 | прямой, 8 | сорт., 1 | сорт., 8 |
|--------------------------|-----------|-----------|----------|----------|
| $\langle t \rangle$ , мс | 13835     | 3158      | 94.43    | 35.27    |
| $\sigma_t$ , мс          | 150       | 215       | 1.78     | 1.89     |

Таблица 1. Среднее по 20 запускам время и среднеквадратичный разброс времени исполнения оптимизированного прямого и сортировочного алгоритма для однопоточной (помечено как 1) и многопоточной (помечено как 8) реализаций на процессоре AMD FX-8150. Программа реализована на языке D и скомпилирована компилятором gdc версии 4.8.1 с ключом оптимизации  $-O2$ . Многопоточная версия использует 8 потоков вычислений

<sup>3</sup>Среди прочего в [9] обсуждаются и погрешности предложенного метода, основанного на учёте ближайших соседей

Из таблицы 1 видно, что при использованной длине выборки в  $2^{16}$  значений преимущество сортировочного алгоритма по скорости исполнения (время необходимое на операции ввода/вывода не учитывалось) составляет 146 раз для однопоточной реализации и 89 раз для многопоточной. Разница объясняется общим очень малым временем исполнения сортировочного метода, что снижает эффект от параллелизации алгоритма, поскольку затраты на создание и завершение дочерних потоков оказываются уже существенны. Кроме подробно проанализированной реализации на языке D, алгоритм был также реализован на языках Pascal (диалект FreePascal, версия 2.6.4 с ключом -O2) и Fortran (использовался компилятор gfortran версии 4.8.1). В обоих случаях распараллеливание расчётов не проводилось. Версия на Fortran показала результаты очень близкие к однопоточной версии на D, что неудивительно, поскольку оба компилятора используют значительную часть общей кодовой базы набора компиляторов gcc, в том числе оптимизатор, причём использовалась одна и та же версия gcc. Программа на Psascal показала существенно худшие результаты: 50 с в прямой версии против 13.8 с для версии на D при  $N = 2^{16}$ , причём сортировочная версия была быстрее прямой примерно в 130 раз. Таким образом, как и ожидалось, ускорение, достигаемое за счёт применения сортировочной версии алгоритма, в целом не зависит от языка программирования, хотя абсолютное время расчётов может варьировать в несколько раз.

Чтобы охарактеризовать зависимость результатов от длины выборки, аналогичные вычисления были проведены для других длин, начиная от 512 – см. рис. 3.

Из рис. 3 видно, что в двойном логарифмическом масштабе зависимости близки к прямым, что и должно быть, поскольку для обоих алгоритмов теоретически эта зависимость носит степенной характер:  $O(N^2)$  для прямого и  $O(N\sqrt{N})$  для сортировочного. При этом абсолютная разница во времени работы между прямым и сортировочным методами увеличивается с ростом размера выборки, что соответствует предположению о том, что прямые, описывающие теоретически описывающие полученные результаты, должны иметь различный наклон – больший для прямого метода. Можно также отметить, что для относительно малых длин выборки – менее двух тысяч – дисперсия значений времени выполнения очень велика, что выражается в «неровности» получившихся кривых. При таких длинах существенный вклад во время исполнения сортировочного алгоритма дают сами сортировки, а для вариантов с распараллеливанием – затраты на создание, поддержание и завершение дочерних потоков.

Таким образом, по результатам проведённого сопоставления сортировочный алгоритм оказывается гораздо более эффективным, нежели лобовая реализация. Тем не менее, время выполнения лобовой реализации, особенно с учётом возможной параллелизации, оказывается приемлемым во многих случаях. Учитывая заметно большую сложность реализации сортировочного алгоритма, его преимущества оказываются существенными в случае длинных выборок и больших ансамблей, когда

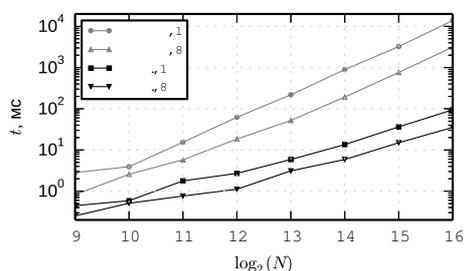


Рис. 3. Зависимость времени расчётов от длины выборки, усреднённая по 20 запускам. Различные кривые соответствуют прямому и сортировочному алгоритмам, выполняемым в 1 или 8 потоках

время написания программы начинает существенно уступать суммарному времени её выполнения.

Важно отметить, что сложность самого оптимизированного алгоритма составляет порядка  $O(N\sqrt{N})$ , то есть она заведомо выше, чем сложность любого известного метода быстрой сортировки, составляющая  $O(N \ln(N))$ . Таким образом, в принципе не важно, какой алгоритм быстрой сортировки будет использован, поскольку, хотя использование сортировки снижает сложность алгоритма поиска ближайших соседей, но снижает его недостаточно, чтобы сама сортировка стала узким местом алгоритма.

Оптимизированный с учётом сортировки алгоритм может быть адаптирован для более сложных мер таких, как энтропия переноса [11] и информации взаимодействия [12] – везде, где необходим оценка многомерных плотностей распределений по наблюдаемой выборке.

*Работа выполнена при поддержке РФФИ, гранты № 14-02-00492, № 16-34-00203 и стипендии Президента РФ для молодых учёных СП-1510.2015.4.*

### **Библиографический список**

1. *Fraser A.M., Swinney H.L.* Independent coordinates for strange attractors from mutual information // *Phys. Rev. A.* 1986. Vol. 33. 1134.
2. *Wells W.M., Viola P., Atsumi H., Nakajima Sh., Kikinis R.* Multi-modal volume registration by maximization of mutual information // *Medical Image Analysis.* 1996. Vol. 1. Iss. 1. Pp. 35–51.
3. *Pluim J.P.W., Maintz J.B.A., Viergever M.A.* Mutual-information-based registration of medical images: a survey // *IEEE Transac. on Medical Imaging,* 2003. Vol. 22, Iss. 8. Pp. 986–1004.
4. *Paninski L.* Estimation of Entropy and Mutual Information // *Neural Computation.* 2003. Vol. 15. Pp. 1191–1253.
5. *Church K.W., Hanks P.* Word association norms, mutual information, and lexicography // *Computational Linguistics.* 1990. Vol. 16, Iss. 1. Pp. 22–29.
6. *Moddemeijer R.* On estimation of entropy and mutual information of continuous distributions // *Signal Processing.* 1989. Vol. 16, Iss. 3. Pp. 233–248.
7. *Ai-Hua Jiang, Xiu-Chang Huang, Zhen-Hua Zhang, Jun Li, Zhi-Yi Zhang, Hong-Xin Hua.* Mutual information algorithms // *Mechanical Systems and Signal Processing.* 2010. Vol. 24. Pp. 2947–2960.
8. *Il-Moon Yo., Rajagopalan B., Lall U.* // Estimation of mutual information using kernel density estimators // *Phys. Rev. E.* 1995. Vol. 52(3). Pp. 2318–2321.
9. *Kraskov A., Stögbauer H., Grassberger P.* Estimating mutual information // *Phys. Rev. E.* 2004. Vol. 69. 066138.
10. *Abramowitz M., Stegun I.A., eds.* Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables (10th ed.). New York: Dover. 1972. Pp. 258–259.
11. *Schreiber Th.* Measuring Information Transfer // *Phys. Rev. Lett.* 2000. Vol. 85. Pp. 461–464.
12. *McGill W.J.* Multivariate information transmission // *Psychometrika.* 1954. Vol. 19. Pp. 97–116.

*Поступила в редакцию 10.08.2016*

## COMPARISON OF NUMERICAL REALISATION OF ALGORITHM OF MUTUAL INFORMATION CALCULATION BASED ON NEAREST NEIGHBOURS

*I. V. Sysoev*

National Research Saratov State University  
Astrahanskaya, 83, 410012 Saratov, Russia  
E-mail: ivssci@gmail.com

*Purpose.* To compare efficiency of different realizations of approaches to estimation of mutual information function based on nearest neighbours.

*Method.* Two approaches to calculation of mutual information function were realized numerically: straightforward approach is based on brute force, and sorting based one.

*Results.* The algorithmic complexity of sorting based method was shown to be less than of straightforward approach, but larger than the complexity of any quick sort method.

*Discussion.* Realization of sorting based method is reasonable in the case, when one has to deal with long samplings, while for small samplings the straightforward approach is enough.

*Keywords:* Mutual information, nearest neighbours method, quick sort.

DOI: 10.18500/0869-6632-2016-24-4-86-95

*Paper reference:* Sysoev I.V. Comparison of numerical realisation of algorithm of mutual information calculation based on nearest neighbours // Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics. 2016. Vol. 24. Issue 4. P. 86–95.



*Сысоев Илья Вячеславович* – родился в Саратове в 1983 году. Окончил Саратовский государственный университет имени Н.Г. Чернышевского в 2004 году, защитил диссертацию на соискание учёной степени кандидата физико-математических наук в 2007 году. С 2005 года работал на кафедре электроники, колебаний и волн ассистентом. С 2008 года доцент кафедры динамического моделирования и биомедицинской инженерии СГУ.

Основные научные интересы: анализ временных рядов, в том числе разработка и адаптация к экспериментальным данным методов анализа связанности, изучение сигналов мозга, изучение эпилепсии.

410012 Саратов, Астраханская, 83  
Саратовский государственный университет имени Н.Г. Чернышевского  
E-mail: ivssci@gmail.com