

СОДЕРЖАНИЕ

От редактора. <i>Гуллев Ю.В.</i>	3
КОНФЕРЕНЦИИ, СЕМИНАРЫ, СИМПОЗИУМЫ	
ХАОС-91: Обзор номера. <i>Трубецков Д.И.</i>	5
ОБЗОР АКТУАЛЬНЫХ ПРОБЛЕМ НЕЛИНЕЙНОЙ ДИНАМИКИ	
<i>Дацинко Н.М., Сонечкин Д.М.</i> Вейвлетный анализ временных рядов и динамика атмосферы	9
БИФУРКАЦИИ В ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ РАЗЛИЧНОЙ ПРИРОДЫ	
<i>Кузнецов А.П., Кузнецов С.П.</i> Критическая динамика одномерных отображений. Часть I: Сценарий Фейгенбаума	15
ПРИКЛАДНЫЕ ЗАДАЧИ НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ КОЛЕБАНИЙ И ВОЛН	
<i>Блиох Ю.П., Бородкин А.В., Любарский М.Г., Онищенко И.Н., Файнберг Я.Б.</i> Применение метода функционального отображения для исследования ЛБВ-генератора с запаздывающей обратной связью	34
<i>Сонечкин Д.М.</i> Поиск периодических траекторий и описание аттрактора по временным реализациям.	50
<i>Буц В.А., Курпильнов А.Н., Мануйленко О.В., Толстолужский А.П.</i> Неустойчивость и динамический хаос при слабонелинейном взаимодействии волн	57
<i>Сочнев С.В.</i> Построение одномерных отображений по данной плотности распределения и автокорреляционной функции.	63
ДЕТЕРМИНИРОВАННЫЙ ХАОС	
<i>Зверев В.В.</i> О возникновении хаотического аттрактора при движении ядерных спинов в ферромагнетике	72
<i>Рождественский В.В., Стручков И.Н.</i> Переходный хаос в системах с четной нелинейностью.	83
<i>Андрушкевич А.В., Кипчатов А.А., Красичков Л.В., Короновский А.А.</i> Путь к хаосу в кусочно-линейной модели генератора на туннельном диоде	93
<i>Намаянас А.М., Тамашевичюс А.В.</i> Измерение корреляционной размерности из временных реализаций	104
АВТОВОЛНЫ. САМООРГАНИЗАЦИЯ	
<i>Санин А.Л., Ермолаев Ю.Л., Мизангронцев Д.Б.</i> Структуры электронного тока в неоднородных системах	109
МЕТОДИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ ПО НЕЛИНЕЙНОЙ ДИНАМИКЕ	
<i>Безручко Б.П., Прохоров М.Д., Селезнев Е.П.</i> Как в эксперименте увидеть то, что реально "не должно существовать".	117
<i>Кузнецов А.П., Кузнецов С.П.</i> Задача	123
PERSONALIA	
Памяти Льва Израилевича Каца	124
АНОНС	
Специальные выпуски журнала	8
Новая книга	14 33

C O N T E N T S

Editorial. <i>Yu. V. Gulyaev</i>	3
SCHOOLS, CONFERENCES, SEMINARS, SYMPOSIUMS	
CHAOS-91: Special issue review. <i>D.I. Trubetskoy</i>	5
REVIEWS OF ACTUAL PROBLEMS OF NONLINEAR DYNAMICS	
Wavelet transform of time series and atmosphere dynamics. <i>N.M. Datsenko and D.M. Sonechkin</i>	9
BIFURCATIONS IN DYNAMICAL SYSTEMS	
Critical dynamics for one-dimensional maps. Part 1. Feigenbaum's scenario. <i>A.P. Kuznetsov and S.P. Kuznetsov</i>	15
APPLIED PROBLEMS OF NONLINEAR OSCILLATIONS AND WAVE THEORY	
The application of the functional reflection method to the TWT-generator with delayed feedback. <i>Yu.P. Bliokh, A.V. Borodkin, M.G. Lyubarskiy, I.N. Onishchenko and Ya. B. Fainberg</i>	34
Identification of the periodic trajectories and attractors description by time series. <i>D.M. Sonechkin</i>	50
Instability and dynamical chaos in a weak nonlinear interaction of waves. <i>V.A. Butz, A.N. Kupriyanov, O.V. Manuilenko and A.P. Tolstoluzhskiy</i>	57
The construction of one-dimensional maps with given stochastic properties. <i>S.V. Sochnev</i>	63
DETERMINISTIC CHAOS	
On the origination of the chaotic attractor in nuclear spin motion in ferromagnet. <i>V.V. Zverev</i>	72
Chaotic transients in systems with nearly even nonlinearity. <i>V.V. Rozhdestvensky and I.N. Struchkov</i>	83
Route to chaos in piecewise-linear model of the tunnel diode oscillator. <i>A.V. Andrushkevich, A.A. Kipchatov, L.V. Krasichkov, and A.A. Koronovskiy</i>	93
Measurement of correlation dimension from time series. <i>A.N. Namajtnas and A.V. Tamaševičius</i>	104
AUTOWAVES. SELF-ORGANIZATION	
Electron stream structures in inhomogeneous systems. <i>A.L. Sanin, Yu.L. Ermolaev, and D.B. Mizandrontsev</i>	109
METODICAL PAPERS ON NONLINEAR DYNAMICS	
How objects which "must not exist really" can be seen in experiment. <i>B.P. Bezruchko, M.D. Prokhorov and E.P. Seleznev</i>	117
Problem. <i>A.P. Kuznetsov and S.P. Kuznetsov</i>	123
PERSONALIA	
Lev Izrailevich Katz. (Obituary).	124
ANNOUNCEMENTS	
Special issues	8
New book	14 33

ОТ РЕДАКТОРА

Представляем читателям новый научно-технический журнал "Прикладная нелинейная динамика", который будет выходить в серии "Известия высших учебных заведений". Соучредителями журнала стали Министерство высшего образования, науки и технической политики России и Саратовский государственный университет.

В последние годы в Саратовском университете, а также в Саратовском филиале Института радиотехники и электроники РАН, сложились научные группы, активно работающие в области прикладной нелинейной динамики. Ими проведены теоретические и экспериментальные исследования детерминированного хаоса в системах различной природы, в процессе которых получен ряд важных результатов; написано несколько книг, положительно встреченных научной общественностью и переведенных за рубежом; проведено три школы "Стохастические колебания в радиофизике и электронике".

С самого начала журнал задуман как междисциплинарный, доступный для преподавателей, научных работников, аспирантов и студентов разных специальностей. Он должен способствовать широкому распространению идей, методов, образов и представлений нелинейной теории колебаний и волн, сформировавшихся в последние годы. Думаем, что журнал должен выполнять роль своеобразного колледжа для подготовки специалистов по нелинейной динамике.

Журнал будет публиковать статьи по натурному и вычислительному эксперименту, по теории динамических систем различной природы; статьи, посвященные изложению результатов исследования бифуркаций, хаоса, самоорганизации, результатов решения прикладных задач нелинейной теории колебаний и волн в физике, химии, биологии, медицине, радиоэлектронике, экономике, социологии и других научных дисциплинах. Определение "прикладная" в названии журнала представляется важным: оно поможет исключить необъятность тематики, придаст журналу практическую направленность и, возможно, откроет новые (может быть даже необычные) сферы применения нелинейной динамики. Предполагается, что в журнале будут следующие основные разделы:

- Обзоры актуальных проблем нелинейной динамики
- Бифуркации в динамических системах различной природы
- Прикладные задачи нелинейной теории колебаний и волн
- Детерминированный хаос
- Солитоны
- Автоволны. Самоорганизация
- Нелинейная динамика в лицах. История. Personalia
- Школы, конференции, семинары, симпозиумы
- Книжное обозрение

Представляется разумным для расширения читательской аудитории иметь "журнал в журнале" специально для студентов, аспирантов и преподавателей с таким рубриками:

- Методические заметки по нелинейной динамике
- Маленькая энциклопедия современной нелинейной динамики
- Книжная полка студента

Периодичность журнала - шесть номеров в год. Планируются тематические выпуски.

В состав редакционной коллегии вошли ведущие специалисты в различных областях науки, в которых могут использоваться идеи и методы нелинейной динамики. Я хотел бы поблагодарить их за то, что они берут на себя большой труд по созданию нового журнала.

Главный редактор журнала,
академик РАН

Ю.В. Гуллев

EDITORIAL

We have the pleasure of introducing readers to a new scientific and technical journal "Applied Nonlinear Dynamics" which starts to be published in series "Izvestiya VUZ" ("Proceedings of Higher Educational Institutes"). The co-founders of the journal are the Ministry of Science, High School and Technical Policy of Russian Federation and Saratov State University. It is not accidentally, because research groups have appeared recently in Saratov University and in Saratov Branch of the Institute of Radio Engineering and Electronics of Russian Academy of Sciences, which work actively in the field of applied nonlinear dynamics. Particularly, deterministic chaos in different systems has been studied both theoretically and experimentally and series of important results have been obtained by these groups; several books have been written, which have met with approval of scientific community and have been translated into foreign languages; three scientific schools "Stochastic oscillations in radiophysics and electronics" have been held.

From the very beginning the journal is planned to be an intersubject one, available to professors and teachers, research workers, students and postgraduate students of different specialities. It should promote the dissemination of nonlinear oscillation and wave ideas, which have been formed in last years. I believe that the journal should play a role of an original college, preparing specialists in nonlinear dynamics.

The journal will publish research papers on natural and computer experiment, theory of different dynamical systems; papers devoted to investigation of bifurcations, chaos, self-organization, applications of nonlinear oscillation and wave theory in physics, chemistry, biology, medicine, radiophysics, economy, sociology and other branches of science. The definition "applied" in the title is assumed to be significant: it should help to restrict the scope of the journal, to give it a practical trend, and to open new (maybe, unusual) applications of nonlinear dynamics. It is assumed, that the journal will include the following parts:

- Reviews of actual problems of nonlinear dynamics
- Bifurcations in dynamical systems
- Applied problems of nonlinear oscillation and wave theory
- Deterministic chaos
- Solitons
- Autowaves. Self-organization
- History of nonlinear dynamics. Personalia
- Conferences. Meetings. Symposiums. Scientific schools
- Book review

It seems to be reasonable, for expanding the readers' audience, to have a "journal in journal" for students and professors with the following parts:

- Methodical papers on nonlinear dynamics
- Small encyclopedia of modern nonlinear dynamics
- Student's bookshelf

The journal will be published six times a year; the thematical issues are planned.

The editorial board includes authorities in different fields, where the ideas and methods of nonlinear dynamics are used. I take an opportunity to thank them for shouldering a work for creating a new journal.

Editor-in-Chief, Full member
of Academy of Sciences of Russia

Yu. V. Gulyaev



ХАОС-91: ОБЗОР НОМЕРА

С 8 по 15 октября 1991 года в пансионате "Волжские дали" под Саратовом состоялась III Всесоюзная школа "Стохастические колебания в радиофизике и электронике". Уже на первых саратовских школах (в октябре 1985 и 1988 годов) стало ясно, что они сразу же вышли за рамки своего названия, поскольку на них обсуждались общие проблемы и методы нелинейной теории колебаний и волн, а также различные нелинейные явления не только в радиофизике и электронике, но и в гидродинамике, физике плазмы, физике лазеров, нелинейной оптике, физике твердого тела, медицине, биологии и других областях науки.

Все чаще организаторы и участники школы стали использовать аббревиатуру ХАОС - хаотические автоколебания и образование структур. Справедливости ради следует отметить, что в целом удачное сокращение не полностью отражает широкий спектр тематики школ, которые, сохранив прикладную направленность, все больше превращаются в школы по нелинейной динамике. Поэтому решение опубликовать материалы школы ХАОС-91 в журнале "Прикладная нелинейная динамика" вполне соответствует и междисциплинарному духу журнала и программе прошедшей школы.

К сожалению, в данный номер вошли далеко не все лекции и доклады школы по следующим причинам: хаосу и структурам в СВЧ электронике, а также нелинейным явлениям в медицине и биологии, в магнитоэлектронике и магнитооптике решено посвятить специальные выпуски. Кроме того, некоторые авторы и рецензенты не прислали статьи и рецензии к указанному сроку, наконец, часть школьных лекций и статей была опубликована раньше в других изданиях.

Журнал открывается статьей Н.М. Даценко и Д.М. Сонечкина, которая содержит краткое изложение основ вейвлетного анализа и иллюстрацию его использования для изучения временных колебаний индекса зональной циркуляции атмосферы. Термин вейвлетный анализ, соответствующий английскому *wavelet transform*, нельзя назвать удачным, но он не имеет хорошего русского эквивалента (авторы предлагают два варианта: волноподобный анализ или анализ волновых пакетов)*. Метод относится к новым средствам исследования временных рядов данных, соответствующих хаотическому поведению динамических систем. В отличие от методов, близких к обычному спектральному анализу, когда из анализируемого временного ряда можно извлечь информацию о вкладе той или иной гармоник в характер изменения ряда, вейвлетный анализ позволяет получить информацию и о временной локализации этих вкладов.

Обзорная часть статьи, несмотря на ее краткость, несомненно, представляет интерес для широкого круга читателей.

Известный физик Дж. Займан писал в своей книге "Принципы теории твердого тела" (М.: Мир, 1966. С.10): "Все, что я попытался сделать, это дать

* В журнале "В мире науки" (1991. N 3. С. 95-96) вейвлетный анализ назван теорией всплесков. Подчеркивается, что всплески выделяют как положение, так и масштаб характерных особенностей сигнала (в этом и смысл названия). Упоминается, что "...Массачусетский университет объявил о создании специальных микросхем, способных осуществлять "всплесковое" преобразование".

последовательную математическую трактовку простейших моделей, пригодных для демонстрации простейших принципов...

Коль скоро модель принята, нельзя уклоняться от дальнейших выкладок. На своем опыте я убедился, что не так легко найти в печати прямой вывод простых, хорошо известных формул из первых принципов... Я старался доводить все расчеты до конца - или по крайней мере делать их вразумительными в принципе - не прибегая слишком часто к обычному заклинанию утомленного автора: "Можно показать, что..."

Этому "правилу Займана" вполне удовлетворяет статья А.П. Кузнецова и С.П. Кузнецова, посвященная изложению основных результатов критической динамики одномерных отображений, демонстрирующих сценарий перехода к хаосу через каскад бифуркаций удвоения периода. Более того, если в цитате заменить местоимение "я" на "мы", то она легко впишется в текст статьи. Данная работа полезна читателю как маленькая энциклопедия по сценарию Фейгенбаума, включающая количественную универсальность и скейлинговые свойства систем у порога хаоса, их доказательство на основе метода ренормализационной группы, большое количество конкретных примеров из различных областей физики (конвекция Рэлея-Бенара, оптический резонатор с нелинейной средой, разные варианты осцилляторов под внешним воздействием и др.). Статья снабжена достаточно полной библиографией.

"Богатым" получился раздел "Прикладные задачи нелинейной теории колебаний и волн" - в смысле объектов исследования, и в смысле методов, используемых для их анализа.

В статье Ю.П. Блюха, А.В. Бородкина, М.Г. Любарского, И.Н. Онищенко и Я.Б. Файнберга метод функционального отображения применен к изучению теоретической модели одного из первых генераторов хаоса - шумотрону, предложенному В.Я.Кисловым с сотрудниками. Применение упомянутого метода к сложной распределенной системе с запаздывающей обратной связью, которой является шумотрон, позволило авторам значительно продвинуться в аналитическом изучении прибора, упростить вычислительный эксперимент и выявить особенности механизмов возникновения режимов автомодуляции. Несомненно, что "изюминкой" работы является удачная и реалистическая модель активного элемента анализируемой системы, в которой выделены "линейный" участок с инерционными свойствами и "нелинейный", где их можно не учитывать. Важно, что подобная модель может быть применена и к другим распределенным генераторам.

Статья Д.М. Сонечкина касается проблемы, которую можно сформулировать в виде вопроса: "Существует ли маломерный климатический аттрактор?" Для оценки характеристик аттрактора вместо известного алгоритма Грассбергера - Прокачиа используется алгоритм, основанный на скейлинговых свойствах расстояния от произвольной точки аттрактора до ее первого, второго и т.д. ближайшего соседа в конечной выборке.

Алгоритм расчета размерности аттрактора по "ближайшим соседям" применен к анализу рядов временных колебаний полей среднемесячной температуры воздуха на европейском континенте в течение двадцатого века.

На основе расчетов автор выдвигает гипотезу о том, что типичная фазовая траектория (она составляет выборку данных) посещает внутренние области аттрактора чаще, чем его граничные области. Это означает неоднородность климатического аттрактора. Эффектным в рамках упомянутой гипотезы выглядит объяснение теплых зим последнего десятилетия, которое некоторые метеорологи связывали с "парниковым эффектом", предполагающим изменение аттрактора в целом. В статье описаны также вычислительные эксперименты по поиску периодических траекторий температурных рядов, которые можно использовать для прогноза текущего состояния атмосферы.

Критерий возникновения хаоса при слабонелинейном взаимодействии волн,

который является обобщением аналогичного критерия при взаимодействии типа волна- частица, сформулирован в статье В.А. Буца, А.Н. Куприянова, О.В. Мануйленко и А.П. Толстолужского. В ней также приведены примеры применения критерия к задаче о взаимодействии высокочастотных и низкочастотных волн в нелинейных средах и результат проверки его в прямых численных экспериментах.

Заключает раздел статья С.В. Сочнева, в которой изложен способ построения одномерного отображения с заданной корреляционной функцией и плотностью распределения случайной величины. Практическая направленность работы ясна: отыскание путей создания простых генераторов шума с наперед заданными свойствами.

Разнообразием анализируемых систем отличается и раздел, посвященный детерминированному хаосу: представлены результаты исследования возникновения хаотического аттрактора с канторовой структурой в простой модели динамики ядерных спинов в ферромагнетике (В.В. Зверев), приведены данные, полученные при экспериментальном и теоретическом изучении переходного хаоса, связанного со столкновением странного аттрактора с границей его области притяжения, в радиотехнических автогенераторах с четной нелинейностью (В.В. Рождественский, И.Н. Стручков), обсуждаются пути к хаосу в кусочнолинейной модели автогенератора на туннельном диоде (А.В. Андрушкевич, А.А. Кипчатов, Л.В. Красичков, А.А. Короновский).

В работе А.М. Намаюнаса и А.В. Тамашявичюса описано аналоговое электронное устройство, работающее в масштабе реального времени и позволяющее находить корреляционную размерность странных аттракторов, если известна временная реализация одной переменной. Приведены результаты анализа, полученные с помощью этого устройства, хаотического сигнала LC-генератора, к колебательному контуру которого подключена параллельно инерционно-нелинейная цепочка из последовательно соединенных полупроводникового диода и катушки индуктивности. Экстравагантный, в какой-то степени, результат статьи состоит в том, что измеренные и рассчитанные по алгоритму Грассбергера - Прокаччия значения корреляционной размерности (достаточно хорошо совпадающие) оказались меньше двух. Авторы связывают этот результат с особенностями топологии аттрактора и, в первую очередь, с его неоднородностью. Приводятся аналогичные примеры и из "чужих" работ. Уместно вспомнить замечание Г. Шустера из его известной книги "Детерминированный хаос. Введение" (М.: Мир, 1988. С.130-131): "Каплан и Йорки (Kaplan, Yorke, 1979) предложили следующую обобщенную формулу для любого странного аттрактора:

$$D_{ky} = j + \frac{\sum_{i=1}^j \lambda_i}{|\lambda_{j+1}|} .$$

Здесь D_{ky} - хаусдорфова размерность по Каплану - Йорки, а показатели Ляпунова упорядочены ($\lambda_1 > \lambda_2 > \dots > \lambda_n$), так что j - наибольшее целое, для которого $\sum_{i=1}^j \lambda_i > 0$.

Хотя эта формула проверялась численно (Russel et al., 1980) и показано, что она справедлива для некоторых систем, однако, по-видимому, она точна лишь для однородных аттракторов, и определение границ ее применимости остается актуальной задачей для дальнейшего исследования". Заметим, что раздел, из которого взята цитата, также называется "Гипотеза Каплана - Йорки".

В рубрике "Автоволны. Самоорганизация" - всего одна статья (А.Л. Санина, Ю.Л. Ермолаева, Д.Б. Мизандронцева), где приведены результаты численного

решения уравнений электронной гидродинамики (уравнение непрерывности и уравнение движения электронов) и уравнения для электрического поля (обобщенное уравнение Пуассона) в предположении периодического и случайного распределения плотности нейтрализующего ионного фона. Показано, что в анализируемой системе образуются резонансные пространственные структуры.

В следующих номерах журнала будет продолжена публикация материалов школы ХАОС-91, в частности, тех, которые анонсировались в рекламном выпуске.

Редактор выпуска,
член-кор. РАН, профессор
Д.И. Трубецков



Редакционная коллегия готовит специальные выпуски журнала:

"Нелинейные колебания и волны, хаос и структуры в магнитоэлектронных и магнитооптических системах"

Редактор выпуска - профессор *Калиникос Борис Антонович*

"Нелинейная динамика живых систем"

Редактор выпуска - профессор *Романовский Юрий Михайлович*

"Нелинейные волны, хаос и структуры в сверхвысокочастотной электронике"

Редактор выпуска - член-кор. РАН профессор *Трубецков Дмитрий Иванович*

Специальные выпуски будут содержать заказные статьи, а также результаты оригинальных исследований, соответствующих тематике выпуска. Авторы, желающие участвовать в специальных выпусках журнала, должны прислать статьи в адрес редакции не позднее 1 сентября 1993 года.

Editorial staff prepares following special issues

"Nonlinear oscillations and waves, chaos, and structures in magneto-electronic and magneto-optic systems"

Editor of issue - professor
Boris A. Kalinikos

"Nonlinear dynamics of living systems"

Editor of issue - professor
Yuriy M. Romanovsky

"Nonlinear waves, chaos, and structures in microwave electronics"

Editor of issue - corresponding member of the Academy
of Sciences of Russia professor *Dmitriy I. Trubetskov*

Special issues will consist of custom papers and original contributions also, which satisfy the issues subjects. Those who wish to participate in special issues are invited to send off their papers to the editorial office before 1 september 1993.





ВЕЙВЛЕТНЫЙ АНАЛИЗ ВРЕМЕННЫХ РЯДОВ И ДИНАМИКА АТМОСФЕРЫ

Н.М. Даценко, Д.М. Сонечкин

Описан вейвлетный анализ - новое средство исследования временных рядов данных, генерированных хаотическими динамическими системами. Его использование иллюстрируется в анализе временных колебаний индекса зональной циркуляции атмосферы.

За последнее десятилетие развито большое число методов изучения метрических и топологических свойств мультифракталов, появляющихся при рассмотрении странных аттракторов динамических систем со сложным, кажущимся случайным, хаотическим поведением. В их числе методы оценки размерностей, энтропий и ляпуновских экспонент, спектров статических и динамических скейлинговых индексов. Перечисленные методы позволяют характеризовать странные аттракторы глобально, в лучшем случае указывая возможный диапазон вариаций средних характеристик. В этом отношении перечисленные методы нелинейного анализа подобны традиционному спектральному анализу, который экстрагирует из рассматриваемого временного ряда информацию об относительных вкладах отдельных гармоник в общую изменчивость ряда, но ничего не сообщает о временной локализации этих вкладов.

Совсем недавно появилось новое средство нелинейного анализа временных рядов (в том числе и многомерных) - так называемый вейвлетный анализ (англ. - wavelet transform) - название, которое еще не имеет русского эквивалента, но которое можно перевести как анализ волновых пакетов. Вейвлетный анализ (ВА) соединяет возможности, присущие упомянутым выше методам анализа метрических свойств мультифракталов, с возможностями спектрального анализа, дополняя их возможности локального исследования.

Следуя [1], дадим основные определения ВА. Объектом ВА является комплексная функция $s(t)$, где t будем называть временем. Достаточно очевидно также обобщение ВА на случай двух- и трехмерного аргумента, который тогда можно интерпретировать как пространственную координату [2]. На полуплоскости $H(b, a)$, где $b \in \mathbb{R}$, $a > 0$, определим свертку функции $s(t)$ с функцией $g(t)$ - анализирующей вейвлетной функцией - следующим образом:

$$S(b, a) = a^{-n} \int g^* \left(\frac{t-b}{a} \right) s(t) dt, \quad (1)$$

где звездочка означает комплексное сопряжение. В Фурье-образах, которые будем обозначать крышечкой сверху символа функции, уравнение (1) переписывается в виде

$$S(b,a) = a^n \int \hat{g}^*(a\omega) e^{ib\omega} \hat{s}(\omega) d\omega. \quad (1a)$$

На вейвлетную функцию положим условие допустимости

$$C_g = 2\pi \int |\hat{g}(\omega)| \frac{d\omega}{|\omega|} < \infty.$$

Выберем $\hat{g}(\omega)$ из числа дифференцируемых функций. Тогда вейвлетная функция будет допустима, если $\hat{g}(0)=0, \int g(t)dt=0$. Это означает, что свертка не вносит никакой постоянной составляющей в функцию $S(b,a)$.

Поскольку $S(b,a)$ - комплексная функция, возможно ее двойное представление - как в виде ее вещественной и мнимой частей по отдельности, так и, что часто удобнее для последующей интерпретации, через амплитуду и фазу:

$$S(b,a) = |S(b,a)| \exp(i\varphi(b,a)), \quad (0 \leq \varphi(b,a) < 2\pi).$$

Соответствие (1), в общем, не локально. Однако, если вейвлетная функция исчезает вне некоторого интервала (t_{\min}, t_{\max}) , значение $s(t)$ в точке t_0 влияет только на те значения $S(b,a)$, которые на полуплоскости H лежат в конусе $t_0 - b \in a\Lambda$, расширяющемся с ростом параметра масштаба a . Вершина этого конуса (при $a \rightarrow 0$) находится в точке $b = t_0$. И наоборот, значение $S(b,a)$ в точке (b_0, a_0) влияет (при обратном к (1) преобразовании) только на те значения $s(t)$, которые лежат внутри конуса $t \in a_0\Lambda + b_0$ с вершиной в точке (b_0, a_0) и расширяющегося по мере уменьшения параметра масштаба. В частотной области на значение $S(b,a)$ в точке (b_0, a_0) влияют только гармоники функции $s(t)$, лежащие внутри диапазона частот $\hat{s}(\omega)$ такого, что $\omega_{\min} < a\omega < \omega_{\max}$, где $(\omega_{\min}, \omega_{\max})$ - диапазон частот, вне которого $\hat{g}(a\omega)$ пренебрежимо мала.

Чтобы функция $S(b,a)$ была легко интерпретируема в терминах свойств анализируемой функции $s(t)$, надо наложить на вейвлетную функцию некоторые дополнительные ограничения. Первым очевидным свойством является ковариантность ВА по отношению к сдвигу и растяжению анализируемой функции: если $S(b,a)$ есть преобразование $s(t)$, то $S(b-t_0, a)$ есть преобразование $s(t-t_0)$, и $S(\frac{b}{\lambda}, \frac{a}{\lambda})$ есть преобразование $\lambda^n s(\frac{t}{\lambda})$, где $\lambda > 0$. Следствием ковариантности к сдвигу является воспроизведение при ВА частоты комплексного монохроматического сигнала в виде фазы $\varphi(b,a)$, меняющейся с постоянной скоростью (зависящей от частоты сигнала) на каждой линии $a = \text{const}$, при этом амплитуда $|S(b,a)|$ остается постоянной. Вдоль каждой линии $b = \text{const}$ амплитуда $|S(b,a)|$ меняется с частотой сигнала. Если сигнал есть сумма нескольких гармоник, то, в соответствии с вышеупомянутой частотной локализацией ВА, на полуплоскости H появляется несколько картинок такого рода, ограниченных величинами $a_i = \text{const}_i, i=1,2,\dots$ по числу гармоник. Визуально эти картинки легко воспринимаются.

Если анализируемая функция $s(t)$ представляет собой вещественный гармонический сигнал, а не комплексный, как только что было рассмотрено, то амплитуда $|S(b,a)|$ вдоль линий $a = \text{const}$ перестает быть постоянной, что затрудняет интерпретацию. Чтобы этого не происходило, образ Фурье вейвлетной функции $\hat{g}(\omega)$ должен быть равным нулю для $\omega < 0$. Такие вейвлетные функции называются прогрессивными.

Наиболее часто используемыми, допустимыми и прогрессивными вещественными вейвлетными функциями являются так называемые "мексиканская шляпа" -

$$g(t) = \text{Me}(t) = (1-t^2)\exp(-1/2t^2), \quad (2)$$

"французская шляпа" -

$$g(t) = Fr(t) = \begin{cases} 1.0 & \text{при } |t| < 1, \\ -0.5 & \text{при } 1 \leq |t| < 3, \\ 0 & \text{при } |t| \geq 3 \end{cases} \quad (3)$$

(особенно удобная для ВА дискретных временных рядов). Комплексным их обобщением являются вейвлетные функции, так называемые "одногорбая шляпа" -

$$g(t) = Me(t)\exp(ict) \text{ или } g(t) = Fr(t)\exp(ict), \quad (4)$$

"двугорбая шляпа" -

$$g(t) = Me(t)(\exp(ic_1t) + \exp(ic_2t))$$

или

$$g(t) = Fr(t)(\exp(ic_1t) + \exp(ic_2t)). \quad (5)$$

Здесь для выполнения условия прогрессивности все константы должны быть более пяти. "Двугорбая шляпа" используется обычно для идентификации в анализируемом сигнале специфических комбинаций гармонических компонент, например, отдельных аккордов при анализе звуковых сигналов. Для выявления в анализируемой функции сигнала с изменяющейся монотонно со временем частотой можно использовать вейвлетную функцию вида

$$g(t) = Me(t)\exp(ict)\exp(idt^2), \quad (6)$$

где $d > 0$ - ожидаемая скорость роста мгновенной частоты сигнала $s + 2dt$.

Все эти и им подобные вейвлетные функции пригодны для обнаружения сингулярностей анализируемой функции, таких как разрывы самой функции или ее производных [3]. В таких случаях на полуплоскости H появляется картина, где амплитуда $|S(b,a)|$ растет при $a \rightarrow 0$, а линии равных фаз $\varphi(b,a)$ сходятся при $a \rightarrow 0$ в направлении точек $b = t_0$, где расположена сингулярность. Таким образом, ВА - новое интересное средство обнаружения моментов нарушения стационарности временного ряда.

Ко зариантность ВА к сдвигу и растяжению позволяет использовать ее для обнаружения автомодельной (скейлинговой, самоподобной и самоафинной) структуры анализируемой функции, поскольку самоподобие $\Delta f(\lambda t) \sim \lambda^{\alpha(\tau)} \Delta f_\tau(t)$, где $\Delta f_\tau(t) = f(\tau+t) - f(\tau)$, влечет за собой подобное же самоподобие [4]. $\Delta S_\tau(\lambda b, \lambda a) \sim \lambda^{\alpha(\tau)} \Delta S_\tau(b, a)$, $\Delta S_\tau(b, a) = S(\tau+b, a) - S(\tau, a)$. На полуплоскости H самоподобие проявляется как древовидная структура, ветви которой расходятся при $a \rightarrow 0$, варьируясь в своих формах как в зависимости от используемой вейвлетной функции, так и от характера автомодельности анализируемого сигнала. Константа $\alpha(\tau)$ является параметром самоподобия. Распределение ее значений $p(\alpha)$ связано с известным из теории динамических систем спектром $f(\alpha^*)$ статических скейлинговых индексов странного аттрактора соотношением $\alpha^* = \alpha + n$, где n - показатель степени в формуле (1). Таким образом, ВА временного ряда, порожденного измерениями одной или двух фазовых координат хаотической динамической системы, пригоден для прямого расчета спектра скейлинговых индексов (и, следовательно, спектра обобщенных размерностей) хаотической динамики системы. Но дополнительно ВА дает информацию о локализации конкретных значений этих индексов во времени (и в фазовом пространстве динамической системы, реконструированном по Ф. Такенсу).

Уже известны примеры успешных расчетов скейлинговых индексов для ряда одномерных отображений в случае, когда временная реализация хаотической динамики представлена многомерным вектором $x(t)$. Предлагаем новый способ расчета $f(\alpha^*)$ спектра, использующий прием Г. Кантора взаимнооднозначного отображения n -мерного вектора x в одномерное пространство. Пусть, например, $x \equiv (0.17\dots, 0.63\dots, 0.45\dots)$ - трехмерный вектор. Тогда его канторовское одномерное отображение $y \equiv (0.164735\dots)$ получается по правилу: сначала после запятой выписываются все десятые доли всех по очереди компонент вектора, затем - сотые и т.д. Если известно, что вектор был трехмерным, то по отображению он может быть однозначно реконструирован. Далее, временной ряд $y(t)$ может быть объектом ВА, при котором возможна оценка спектра его скейлинговых индексов $\rho(\alpha)$. Размерность D_y одномерной хаотической динамической системы (хаусдорфовой, информационной, корреляционной и т.п.) также может быть объектом ВА. Оказывается [5], $D_y \geq D_x/n$, где D_x - соответствующая размерность аттрактора хаотической динамической системы, породившей временной ряд $x(t)$.

Вейвлетный анализ был использован нами для исследования временных колебаний индекса зональной циркуляции, характеризующего скорость вращения атмосферы северного полушария Земли в западно-восточном направлении на среднем уровне (примерно 5.5 км). Ежедневные значения этого индекса известны из метеорологических наблюдений за период с 1.01.49 по настоящее время, т.е. более чем за 40 лет (и с довольно высокой точностью). При ВА зонального индекса можно решать две основные задачи: во-первых, искать сингулярности в многолетнем временном ходе индекса как признаки изменений климата, во-вторых, исследовать автомодельную структуру временных колебаний индекса как проявление макротурбулентной природы общей циркуляции атмосферы. Первая задача требует обработки всего имеющегося в наличии 40-летнего ряда данных с подбором вейвлетной функции, наиболее чувствительной к временным колебаниям именно этого ряда. Работа эта чрезвычайно трудоемка и в настоящее время не закончена. Поэтому здесь ограничимся сообщением о некоторых результатах по второй задаче.

Для реализации вейвлетного анализа на ЭВМ составлена программа, предусматривающая численную свертку (1) для дискретно заданных функций $s(t)$ и $g(t)$ с выбором анализируемого диапазона параметров сдвига и масштаба. Предусмотрено использование как вещественных, так и комплексных вейвлетных функций. Результатом счета являются поля вещественных и мнимых компонент $S(b,a)$, а также поля рассчитанных по ним амплитуд и фаз в полуплоскости H (по оси a обычно представляемой в логарифмическом масштабе). Стандартно выбирается двенадцать значений параметра масштаба и до 1000 значений параметра сдвига. Применительно к индексу зональной циркуляции атмосферы такой выбор параметров обеспечивает анализ временных колебаний в диапазоне от двух дней до примерно двух месяцев, и эти колебания исследуются на трехлетнем временном интервале. По полученным данным в диапазоне выявленной автомодельности рассчитывается спектр скейлинговых индексов.

На рис. 1 даны результаты вейвлетного анализа на полуплоскости H для вещественной части функции $S(b,a)$. Видно, что по мере уменьшения параметра масштаба значения функции $S(b,a)$ образуют ветвящуюся структуру. Уже одно это может свидетельствовать [5] об автомодельной природе временных колебаний индекса зональной циркуляции атмосферы. Заметим, что в мелкомасштабной части представленного на рис.1 диапазона масштабов $1 \leq A \leq 24$ (что соответствует временным колебаниям индекса зональной циркуляции от примерно 8 до 190 дней) известно существование колмогоровского энергетического каскада, где спектральная плотность временных колебаний убывает с ростом частоты по степенному закону. Иногда этот каскад называют каскадом отрицательной вязкости на том основании, что в нем энергия временных колебаний мелких вихрей передается крупным вихрям.

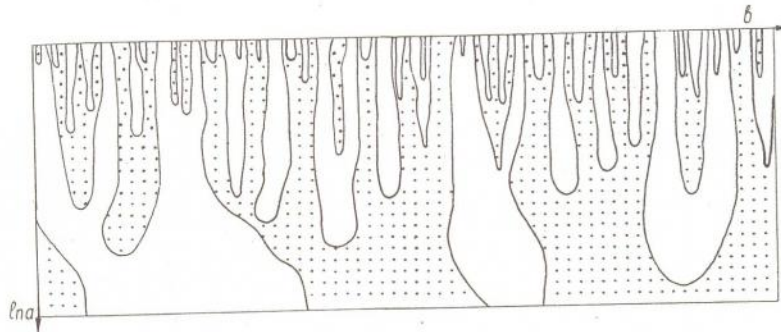


Рис. 1. Вейвлетное преобразование временного ряда ежедневных значений индекса зональной циркуляции атмосферы северного полушария Земли за пять месяцев в диапазоне от 1 до примерно 30 дней (вейвлетная функция - вещественная "мексиканская шляпа")

Известно [6,7], что в диапазоне отрицательной вязкости существенна перемежаемость макротурбулентных движений. Перемежаемость приводит к изменению крутизны спада энергетического спектра с изменением частоты и проявляется в образовании крупномасштабных локализованных во времени

структур. Поправка к показателю степени $-5/3$, соответствующему каскаду отрицательной вязкости [7,8], может быть вычислена по спектру обобщенных размерностей или статических скейлинговых индексов. Последние, как было отмечено выше, можно рассчитать с помощью ВА. Пример такого расчета представлен на рис. 2.

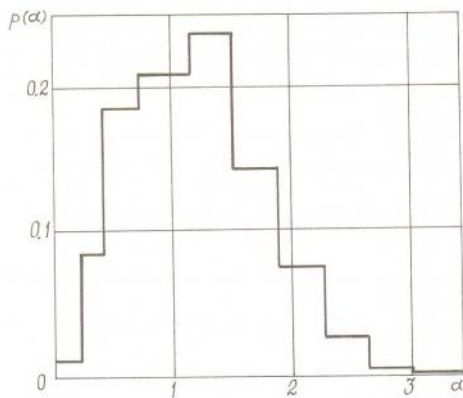


Рис.2. Гистограмма повторяемости различных значений скейлингового индекса для временных колебаний индекса зональной циркуляции (с рис.1) в диапазоне "отрицательной вязкости" от примерно 10 до 24 дней

Библиографический список

1. Wavelets / Eds. J.M. Combes, A. Grossmann, Ph. Tchamitchian. Springer. 1989.
2. Argoul F. et al. Wavelet transform of fractal aggregate // Phys. Lett. A. 1989. Vol. 135, N 6,7. P.327.
3. Grossmann A. Wavelet transforms and edge detection // Stochastic Processes in Physics and Engineering. Reidel, 1988. P. 149.
4. Argoul F. et al. Wavelet analysis of turbulence reveals the multifractal nature of the Richardson cascade // Lett. to Nature. 1989. Vol. 338. P.51.
5. Labor E., Turcsanyi B. On the reversible and irreversible representations of motions in R^n to R^2 // Phys. D. 1985. Vol.16. P.124.

6. *Мирабель А.П., Монин А.С.* Двумерная турбулентность // УФН. 1979. Т.2, вып.3. С.47.
 7. *Nelkin M.* What do we know about self-similarity in fluid turbulence? // J. Stat. Phys. 1989. Vol.54, N 1,2. P.1.
 8. *Mandelbrot B.B.* The fractal geometry of nature. Freeman, 1982.

*Гидрометцентр России
 Москва*

WAVELET TRANSFORM OF TIME SERIES AND ATMOSPHERE DYNAMICS

N.M. Datsenko, D.M. Sonechkin

Wavelet transform is described as a new tool for investigation of data generated by the chaotic dynamic systems. Its usage is illustrated by the analysis of the temporal oscillation of the atmosphere zonal circulation index.



В издательстве Саратовского университета выходит книга

Ю.А. Калинин, А.Д. Ессин

МЕТОДЫ И СРЕДСТВА ФИЗИЧЕСКОГО ЭКСПЕРИМЕНТА В ВАКУУМНОЙ СВЧ ЭЛЕКТРОНИКЕ

В первой части книги "Методы, аппаратура и результаты исследований" впервые в отечественной и зарубежной практике обобщены и систематизированы опыт и результаты разработки методов физического эксперимента для анализа структуры интенсивных немодулированных и модулированных по плотности и скорости протяженных электронных пучков, электродинамических структур, процессов взаимодействия электронных пучков с СВЧ полями, а также теплофизических характеристик электровакуумных СВЧ приборов.

Приводятся результаты экспериментальных исследований физических процессов в электровакуумных СВЧ приборах, направленных на улучшение их параметров и характеристик.

Во второй части книги "Проектирование и оптимизация конструкций электровакуумных приборов на основе экспериментальных исследований" иллюстрируется эффективность применения методов физического эксперимента в проектировании и разработке мощных широкополосных ЛБВ. Проведено сопоставление теоретических и экспериментальных результатов для апробации и уточнения математических моделей приборов. Рассмотрено применение методов физического эксперимента в системе автоматизированного проектирования ЛБВ для улучшения параметров, совершенствования конструкций приборов и повышения их серийнопригодности, стабильности и надежности.

Книга предназначена для специалистов в области исследования, проектирования, разработки, производства и применения мощных широкополосных ЛБВ, ускорительной техники, электронно-лучевой технологии.

Часть I вышла в свет в четвертом квартале 1992 года,
 часть II выйдет в третьем квартале 1993 года.





КРИТИЧЕСКАЯ ДИНАМИКА ОДНОМЕРНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ

Часть 1. Сценарий Фейгенбаума

А.П. Кузнецов, С.П. Кузнецов

В обзорном плане излагаются основные результаты, характеризующие сценарий перехода к хаосу через каскад бифуркаций удвоения периода в контексте теории критических явлений. Даны компьютерные иллюстрации скейлинга. Представлены приближенный ренормгрупповой анализ, позволяющий построить процедуру ренормпреобразования в явной форме, и примеры нелинейных систем, демонстрирующих обсуждаемый тип критического поведения.

Введение

Для понимания хаоса в нелинейных системах ключевое значение имеет вопрос о сценариях его возникновения. А именно: каковы типичные последовательности бифуркаций, которые можно наблюдать при адиабатически медленном изменении управляющих параметров системы, отвечающем переходу из области простого регулярного поведения в область хаоса? Трудными многими исследователями выявлены типичные сценарии - переход к хаосу через каскад удвоений периода (Myrberg, 1963 [1]; Шарковский, 1964 [2]; Metropolis и др., 1973 [3]; May, 1976 [4] и другие), через перемежаемость (Афраймович и Шильников, 1974 [5]; Romeau и Manneville, 1980 [6]) и через квазипериодичность (Арнольд [7]; Ruelle и Takens, 1980 [8]; Shenker, 1982 [9]).

Как оказалось, постановка вопроса о сценариях перехода к хаосу подразумевает не только качественные варианты ответа. Одно из самых замечательных достижений последних лет состоит в открытии количественной универсальности и скейлинговых свойств динамики нелинейных систем у порога хаоса. Для их теоретического обоснования был привлечен метод ренормализационной группы (РГ), подобный развитому ранее в физике фазовых переходов. Для систем, демонстрирующих каскад удвоений периода, этот принципиальный шаг был сделан Фейгенбаумом (Feigenbaum, 1979 [10-12]). Позднее аналогичный подход был развит для перемежаемости (Hirsh, 1982 [13]; Hu и Rudnik, 1982 [14]) и квазипериодичности (Ostlund и др., 1983 [15]; Feigenbaum и др., 1982 [16]).

В теории фазовых переходов метод РГ привлекают для описания критического поведения вещества вблизи точки фазового перехода (критической точки), когда имеют место флуктуации с пространственными масштабами, намного превышающими межатомное расстояние. По аналогии можно говорить о критических явлениях в нелинейных системах, имея в виду режимы динамики, реализующиеся у порога хаоса и обладающие временными масштабами, намного

превышающими прочие характерные времена задачи. Использование этой терминологии предполагает такой подход к проблеме возникновения хаоса, когда на первый план выдвигаются концепции универсальности, скейлинга и метод РГ, а не просто качественное описание последовательностей бифуркаций [17-21].

В семействах нелинейных систем, зависящих от нескольких параметров, могут встретиться новые типы критического поведения и классы универсальности, допускающие РГ анализ (некоторые примеры известны [19-21]). О ситуациях такого рода можно говорить как о *мультипараметрической критичности*. Каждый тип мультипараметрической критичности должен характеризоваться присущей ему уникальной, обладающей свойством самоподобия, структурой пространства параметров вблизи критической точки. Эти структуры можно рассматривать как обобщение понятия "сценарий перехода к хаосу" на многопараметрический случай.

В первой части настоящей статьи мы изложим в обзорном плане основные результаты, характеризующие сценарий перехода к хаосу через каскад бифуркаций удвоения периода в контексте теории критических явлений. Будут даны компьютерные иллюстрации скейлинга, изложен приближенный ренормгрупповой анализ, позволяющий построить процедуру ренормпреобразования в явной форме, а также приведены примеры нелинейных систем, демонстрирующих этот тип динамики.

Во второй части работы будет рассмотрено развитие теории критических явлений на случай одномерных многопараметрических отображений.

В третьей части работы мы обсудим некоторые аспекты ренормдинамики нелинейных систем.

1. Логистическое отображение

Наиболее простой и удобный для изучения класс систем, демонстрирующих переход к хаосу через каскад удвоений периода, - это одномерные рекуррентные уравнения вида

$$x_{n+1} = f(x_n), \quad (1)$$

где $f(x)$ - гладкая функция, зависящая от параметра λ , отображающая некоторый отрезок оси x в себя и имеющая на этом отрезке единственный квадратичный экстремум. Примером может служить логистическое отображение

$$x_{n+1} = 1 - \lambda x_n^2, \quad (2)$$

в интервале значений λ от 0 до 2.

Модель (2) играет фундаментальную роль в теории критических явлений у порога динамического хаоса. Если говорить о методологическом аспекте, то напрашивается аналогия с гармоническим осциллятором. Наиболее характерные черты такой аналогии - междисциплинарный характер моделей, которые дают единый математический формализм для описания систем разной физической природы. В то же время степень абстрактности модели (2) выше, чем гармонического осциллятора. Гармонический осциллятор позволяет описывать поведение реальной физической системы в *любой момент времени*. Чтобы придать физический смысл дискретному времени n в соотношении (2), приходится прибегать к помощи специального метода сечений Пуанкаре [22-24]. При этом динамика нелинейной системы оказывается определенной лишь в некоторые избранные моменты времени. Точные количественные результаты получаются лишь в асимптотике *больших интервалов времени*. Для гармонического осцил-

лятора переменная x всегда допускает естественную физическую интерпретацию (смещение маятника, величина электрического поля в резонаторе, разность населенностей уровней и т.д.). Для модели (2) переменной x давать наглядную интерпретацию не обязательно. Наиболее полное "соприкосновение" с физической реальностью происходит с помощью параметра λ - основного параметра, характеризующего нелинейность физической (химической, биологической) системы. При исследовании реальной системы в контексте критических явлений решающее значение имеет изменение *характера* динамического режима при вариации параметра нелинейности. В такой ситуации и наблюдаются скейлинговые закономерности, которые могут быть проверены количественно в соответствии с предсказаниями модели (2).

Обсудим свойства логистического отображения (2) у порога хаоса.

При $\lambda < 0.75$ отображение (2) имеет единственный устойчивый режим - неподвижную точку $x_0 = (\sqrt{1+4\lambda} - 1)/2\lambda$. При переходе параметра λ через значение $\lambda_1 = 0.75$ величина, характеризующая устойчивость неподвижной точки - мультипликатор $\mu = f'(x_0) = 1 - \sqrt{1+4\lambda}$, обращается в -1 и неподвижная точка теряет устойчивость. От нее отделяется цикл периода 2. При $\lambda_2 = 1.25$, в свою очередь, теряет устойчивость 2-цикл и рождается устойчивый цикл периода 4 и т.д. до бесконечности. Как говорят, реализуется *каскад бифуркаций удвоения периода*.

Последовательность точек бифуркаций удвоения периода λ_n сходится к критической точке $\lambda_c = 1.40115518909$ по закону геометрической прогрессии:

$$(\lambda_n - \lambda_c) / (\lambda_{n+1} - \lambda_c) \rightarrow \delta_F, \quad (3)$$

где $\delta_F = 4.6692016091$ - универсальная константа Фейгенбаума. Соотношение (3) работает тем лучше, чем больше n и является в этом смысле асимптотическим. Это - первый скейлинговый закон Фейгенбаума.

Отношение ближайших к экстремуму отображения (2) элементов 2^n и 2^{n+1} циклов подчиняется второму соотношению Фейгенбаума

$$x_0^{(n)} / x_0^{(n+1)} \rightarrow a_F,$$

где $a_F = -2.502907876$ - универсальный масштабный фактор.

Непосредственно в критической точке $\lambda = \lambda_c$ все 2^n циклы неустойчивы. При $n \rightarrow \infty$ они лежат вблизи сложно устроенного критического аттрактора, имеющего фрактальную структуру.

В закритической области на оси λ имеет место сложная картина областей, которая содержит множество ненулевой меры, отвечающее хаотическим режимам [25], и бесконечное число "окон" периодических режимов, порядок появления которых устанавливается теоремой Шарковского [2,26].

В случае хаотической динамики переменная x последовательно посещает множество, состоящее из 2^n отрезков на интервале (0,1). Правило их обхода во времени совпадает с правилом обхода элементов соответствующего 2^n цикла, но в пределах отрезков точка располагается случайным образом. При возрастании λ соседние отрезки последовательно смыкаются краями (как говорят, имеет место обратный каскад). Внутри каждого окна периодических режимов, в свою очередь, наблюдается каскад удвоений периода, завершающийся в соответствующей критической точке переходом к хаосу.

2. Иллюстрации скейлинга

Приведем основные компьютерные иллюстрации сложной динамики логистического отображения, сделав акцент на картине критических явлений.

На рис. 1,а показано бифуркационное дерево, дающее зависимость значений переменной x на аттракторе от управляющего параметра λ . Хорошо видны точки бифуркаций удвоения периода - в этих точках каждая ветвь дерева расщепляется на две. В критической точке $\lambda=\lambda_c$ число ветвей становится бесконечным и формируется фрактальная структура. Области хаоса при $\lambda>\lambda_c$ выглядят как более или менее равномерно заполненные точки участки "кроны". Последовательное исчезновение "дыр" в кроне отвечает обратному каскаду, а прореживающие ее светлые вертикальные полосы - это окна периодических режимов.

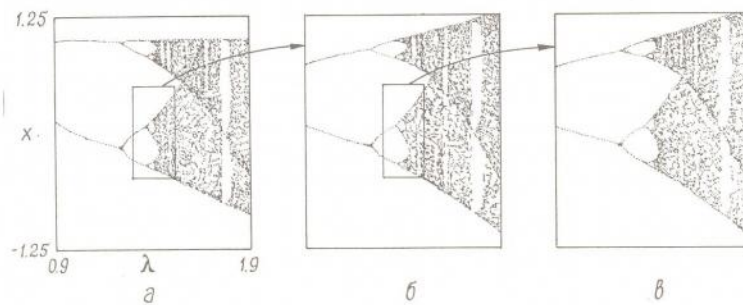


Рис.1. Скейлинг на бифуркационном дереве

Скейлинг на бифуркационном дереве иллюстрируется серией рисунков (см. рис. 1, а - 1, в). Каждый последующий рисунок серии представляет собой увеличенный фрагмент предыдущего. При этом масштаб по оси динамической переменной пересчитывается в a_F раз относительно точки $x=0$ - экстремума отображения (2), а по оси управляющего параметра - в δ_F раз относительно критической точки. Все картинки хорошо совпадают, причем степень соответствия тем лучше, чем на более глубокий уровень иерархии мы проникаем.

Устройство аттрактора в критической точке может быть описано по аналогии с классическим канторовым множеством. Напомним, что при его построении отрезок единичной длины делят на три части и оставляют лишь два крайних. Затем эти два отрезка делят на три части и т.д. до бесконечности. Фейгенбаумовский аттрактор строится из отрезков $[x_1, x_2]$, затем $[x_1, x_3]$ и $[x_4, x_2]$ и т.д., края которых образованы последовательными итерациями точки экстремума отображения (2) при $\lambda=\lambda_c$ (рис. 2). Возникшее в пределе бесконечного уровня построения множество имеет дробную величину хаусдорфовой размерности $D_H=0.5380450$.

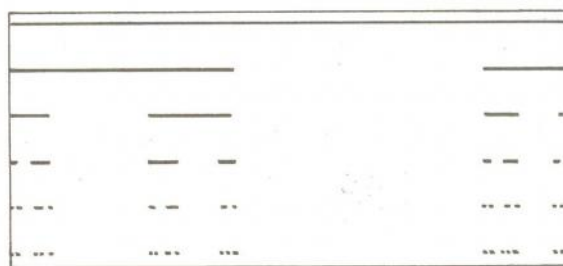


Рис.2. Построение критического аттрактора

Наличие хаоса в логистическом отображении можно зафиксировать с помощью ляпуновского показателя,

$$\Lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln |2\lambda x_i|, \quad (4)$$

характеризующего неустойчивость фазовых траекторий. На рис. 3,а показана зависимость ляпуновского показателя от управляющего параметра λ . В докритической области, где реализуются только устойчивые периодические движения, ляпуновский показатель отрицателен. В критической точке он переходит через ноль в первый раз. За критической точкой зависимость Λ от λ имеет фрактальный характер, причем чередуются области хаоса с положительным ляпуновским показателем с областями периодических режимов, для которых показатель отрицателен.

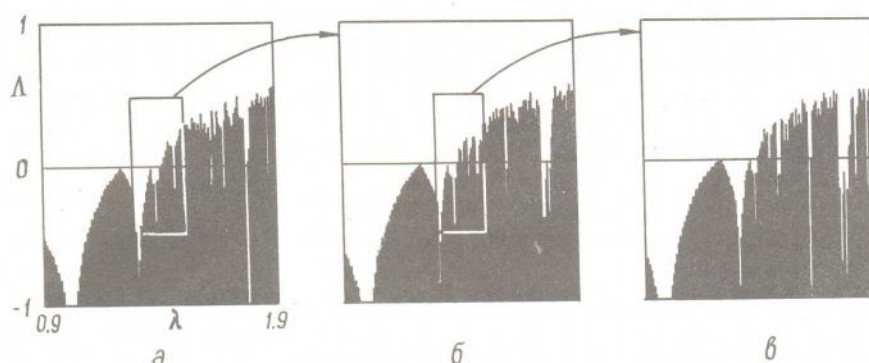


Рис.3. Скейлинг для зависимости ляпуновского показателя от параметра λ

Вблизи критической точки поведение ляпуновского показателя подчиняется простому скейлинговому закону

$$\Lambda \rightarrow \Lambda/2, \quad (\lambda - \lambda_c) \rightarrow (\lambda - \lambda_c)/\delta_F \quad (5)$$

Отсюда вытекает соотношение для огибающей ляпуновского показателя в хаотической области:

$$\Lambda \approx (\lambda - \lambda_c)\chi, \quad (6)$$

где критический индекс $\chi = \ln 2 / \ln \delta_F = 0.4498$. На рис. 3,б,в показаны увеличенные фрагменты зависимости ляпуновского показателя от параметра λ в окрестности критической точки, причем пересчет масштабов осуществлен в соответствии с соотношениями (5). Ожидаемый скейлинг подтверждается с хорошей точностью, растущей при переходе к более глубоким уровням. Ляпуновский показатель иногда интерпретируют как аналог параметра порядка в теории фазовых переходов [17,24].

На рис. 4 показан спектр колебаний логистического отображения в критической точке. Он обладает ярко выраженной иерархической организацией по уровням амплитуд субгармоник. Линии каждого уровня могут быть найдены по линиям предыдущего с помощью известного приближенного соотношения [27,28]:

$$\frac{1 + a_F^2 \pm 2a_F \cos(\pi\omega/2)}{4a_F^4} S_n(\omega) \rightarrow \begin{cases} S_{n+1}(\omega/2), & \text{знак "+"}, \\ S_{n+1}(1-\omega/2), & \text{знак "-"} \end{cases} \quad (7)$$

Это соотношение задает еще два новых критических индекса: $\gamma = 10 \lg(1/4a_F^2 + 1/4a_F^4) = 13.35$ дБ и характеризует средний перепад между соседними уровнями субгармоник, а $\alpha = |2a_F/(1+a_F^2)| = 0,69$ и характеризует степень неравномерности распределения амплитуд субгармоник на данном уровне иерархии.

Описанные нами критические индексы - универсальная константа δ_F , масштабный фактор a_F , критический индекс ляпуновского показателя χ , индексы γ и α и величина хаусдорфовой размерности D_H - характеризуют все основные скейлинговые свойства логистического отображения, а вместе с ним и скейлинговые свойства любых систем, принадлежащих тому же классу универсальности.

Известно еще несколько более тонких характеристик фейгенбаумовского критического аттрактора. Одна из них - σ -функция, введенная Фейгенбаумом. Она служит для описания глобальных скейлинговых свойств на бифуркационном дереве. Действительно, фактор a_F определяет правило пересчета масштаба переменной x лишь в окрестности экстремума отображения (2). Для других областей на дереве правило пересчета будет другим, например, в окрестности самой дальней от экстремума точки $x = 1$ скейлинг осуществляется с константой a_F^2 . Сложные масштабные закономерности на бифуркационном дереве можно проиллюстрировать, исследуя правило относительного расщепления соседних ветвей, что приводит к функции

$$\sigma(m/2^{n+1}) = \frac{x'_m - x'_{m+2^n}}{x_m - x_{m+2^{n-1}}} \quad (8)$$

где x_m и x'_m - элементы циклов периода 2^n и 2^{n+1} отображения (2) в критической точке, причем $m, n \rightarrow \infty$. Эта функция, найденная численно, показана на рис.5. Она имеет фрактальную структуру и содержит разрывы во всех двоичных рациональных точках $m/2^n$. Справедливы предельные соотношения

$$\sigma(+0) \rightarrow 1/a_F^2, \quad \sigma(1/2-0) \rightarrow 1/|a_F|. \quad (9)$$

Эти две величины задают максимальный и минимальный масштабы расщепления на бифуркационном дереве.

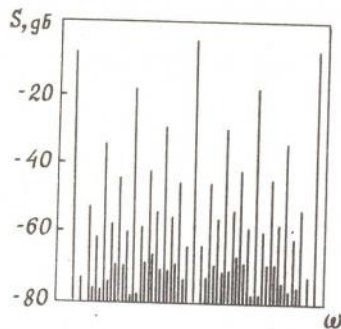


Рис.4. Спектр в критической точке

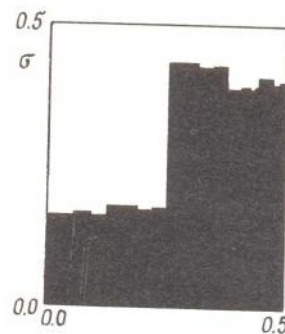


Рис.5. σ -функция

При построении σ -функции сохраняется информация о временном правиле обхода элементов цикла. Можно, однако, абстрагироваться от этого правила и рассматривать критический аттрактор как чисто геометрический объект. Сложные масштабные правила расщепления на дереве в такой интерпретации сводятся к тому, что все отрезки, из которых строится аттрактор, имеют разную длину (см.

рис.3). Оказывается, что такой мультифрактал можно описать с помощью гладкой функции, которую называют скейлинг-спектром, или $f(\alpha)$ -спектром (Halsey и др. [29]).

Для этого, используя процедуру [29], определим функцию разбиения на n -м уровне разрешения:

$$\Gamma_n = \sum_{i=1}^{2^n} p_i^n / l_i^\tau, \quad (10)$$

где $p_i = 1/2^n$, $l_i = |x_i - x_{i+2^n}|$, x_i - последовательность, генерируемая отображением (2) в критической точке с нулевым начальным условием. Далее потребуем, чтобы Γ_n оставались конечными при $n \rightarrow \infty$ и определим параметр:

$$q = \frac{1}{n} \log_2 \left| \sum_{i=1}^{2^n} l_i^{-\tau} \right|. \quad (11)$$

Следуя [29], получаем скейлинг-спектр в параметрической форме:

$$\alpha = \frac{d\tau}{dq}, \quad f = \alpha q - \tau. \quad (12)$$

На рис.6 приведен скейлинг-спектр, найденный численно. Он располагается в интервале изменения α от $1/\log_2 a_F^2 = 0.37776$ до $1/\log_2 |a_F| = 0.755512$ и имеет экстремум, равный величине хаусдорфовой размерности аттрактора: $f_{\max} = D_H = 0.5380450$.

Нетрудно ввести теперь и семейство обобщенных размерностей $D(q) = \tau / (1-q)$ (Grassberger, Procaccia [30]). Соответствующий график показан на рис.7, где некоторые важные точки - хаусдорфова размерность $D_H = D(0)$, информационная размерность $D_I = D(1)$, корреляционная размерность $D_C = D(2)$ - отмечены численными значениями.

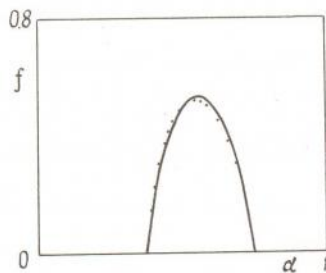


Рис.6. Скейлинг-спектр

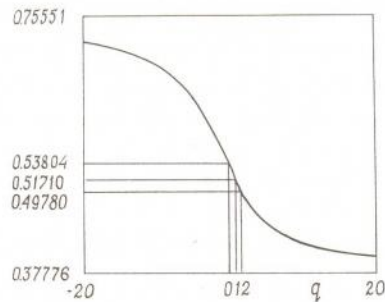


Рис.7. График обобщенной размерности

Критический аттрактор отображения (2) может быть хорошо аппроксимирован *двухмасштабным канторовым множеством* [29]. Это множество получается, когда каждый очередной отрезок делится на три части в отношении $a, 1-a-b, b$ и средний интервал исключается. Фрактальная размерность предельного множества D определяется из уравнения [29].

$$a^D + b^D = 1.$$

Для аппроксимации фейгенбаумовского аттрактора нужно принять $a = 1/|a_F|$, $b = 1/a_F^2$. Хаусдорфова размерность, вычисленная по формуле $1/|a_F|^D + 1/a_F^{2D} = 1$, равна 0.5245, что близко к точному значению ($D_H = 0.5380450$). В рамках двухмасштабной аппроксимации формулы (7) для спектра в критической точке и предельные соотношения (9) для σ -функции являются строгими, а $f(\alpha)$ -спектр показан точками на рис.6.

3. Приближенный ренормгрупповой анализ

Чтобы понять природу рассмотренных скейлинговых закономерностей, проведем приближенный ренормгрупповой анализ критических явлений в логистическом отображении. Для этого выполним отображение (2) дважды и отбросим член порядка x^4 :

$$x_{n+2} = 1 - \lambda - 2\lambda^2 x_n^2 + \dots \quad (13)$$

Если сделать в полученном соотношении замену переменной

$$x \rightarrow X(1-\lambda), \quad (14)$$

и параметра

$$\lambda' = \varphi(\lambda) = 2\lambda^2(\lambda-1), \quad (15)$$

то мы вновь приходим к отображению (2):

$$X_{n+2} = 1 - \lambda' X_n^2 \quad (16)$$

Итак, оператор эволюции за удвоенный временной интервал *приводится* приближенной перенормировкой к исходному виду. Поскольку описанную процедуру можно повторить многократно, строя оператор эволюции на увеличивающихся по закону 2^n временных интервалах, мы имеем "рецепт" описания динамики на любых, сколь угодно больших промежутках времени. Это дает возможность описать критическую динамику логистического отображения только на основе анализа свойств его неподвижной точки.

Действительно, неподвижная точка логистического отображения (2) теряет устойчивость при $\lambda_1 = 0.75$. Решая уравнение $\lambda_1 = \varphi(\lambda_2)$, находим бифуркационное значение для 2-цикла: $\lambda_2 = 1.24279$. Из уравнения $\lambda_2 = \varphi(\lambda_3)$ находим точку потери устойчивости 4-цикла: $\lambda_3 = 1.34400$ и т.д. Итерационная схема $\lambda_n = \varphi(\lambda_{n+1})$ позволяет найти весь каскад бифуркаций удвоения (табл.1).

Можно сказать, что отображение $\lambda' = \varphi(\lambda)$ задает *ренормдинамику*. Одна итерация этого отображения - это один шаг в *ренормвремени*, отвечающий удвоению периода в реальном времени. Критической ситуации соответствует *неустойчивая неподвижная точка ренормдинамики*. В нее можно прийти, итерируя уравнение $\lambda' = \varphi(\lambda)$ в обратном ренормвремени.

Описанную процедуру можно проиллюстрировать с помощью диаграммы, подобной диаграмме Ламерея, на которой изображена функция $\varphi(\lambda)$ и показаны последовательные итерации отображения $\lambda_n = \varphi(\lambda_{n+1})$, сходящиеся к критической точке $\lambda_c = \varphi(\lambda_c)$ (рис.8). В данном случае $\lambda_c = (1+\sqrt{3})/2 = 1.36603$.

В критической точке оператор эволюции при ренормализации переходит сам в себя. Поэтому из существования при $\lambda = \lambda_c$ неподвижной точки логистического отображения следует существование всевозможных циклов с периодами $2, 4, 8, \dots, 2^n$. Они характеризуются одним и тем же мультипликатором, величину которого

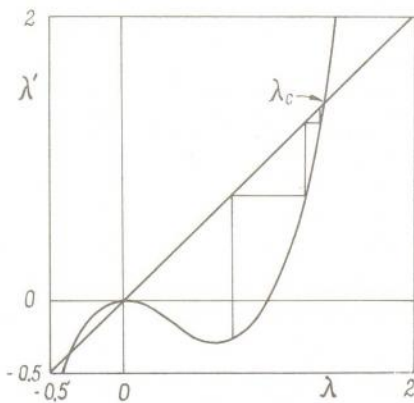


Рис.8. Ренормдинамика на "диаграмме Ламерея"

находим из известного выражения для мультипликатора неподвижной точки:

$$\mu_c = 1 - \sqrt{1 + 4\lambda_c} = -1.54246. \quad (17)$$

Поскольку $|\mu_c| > 1$, то все циклы в критической точке неустойчивы.

При ренормировке в критической точке масштаб динамической переменной x пересчитывается по правилу (14), что позволяет оценить масштабную константу $a_F = 1/(1 - \lambda_c) = -2.73205$.

Нетрудно получить теперь закон (3) сходимости бифуркационных значений λ_n к критической точке. Из отображения $\lambda_n = \varphi(\lambda_{n+1})$ при $\lambda_{n+1} \rightarrow \lambda_c$ находим:

$$\lambda_n \approx \varphi(\lambda_c) + \varphi'(\lambda_c)(\lambda_{n+1} - \lambda_c) = \lambda_c + \varphi'(\lambda_c)(\lambda_{n+1} - \lambda_c). \quad (18)$$

Это и есть соотношение (3), причем для константы δ_F имеем $\delta_F = \varphi'(\lambda_c) = 4 + \sqrt{3} = 5.73205$.

В табл. 2 приведены точные и приближенные значения всех скейлинговых констант, сопоставляя которые можно судить о точности описанной схемы РГ анализа.

Итак, приближенный РГ анализ позволяет понять качественную сторону процедуры перенормировки и предсказывает основные критические закономерности перехода к хаосу через каскад удвоений периода.

Рассмотренная здесь схема ренормгруппового анализа является приближенной, что связано с приближенным характером процедуры перенормировки, которая может быть сделана более точной. Для этого выполним отображение (2) четыре раза и оставим в полученном точном соотношении члены только порядка x^2 :

$$x_{n+4} = 1 - \lambda [1 - \lambda(1 - \lambda)^2]^2 + 8\lambda^4(1 - \lambda)[1 - \lambda(1 - \lambda)^2]x_n^2 + \dots \quad (19)$$

Потребуем теперь, чтобы полученный оператор эволюции был бы подобен оператору эволюции на удвоенном интервале времени (13). Это приводит к соотношению

$$8\lambda^4(1 - \lambda)[1 - \lambda(1 - \lambda)^2]\{1 - \lambda[1 - \lambda(1 - \lambda)^2]^2\} = 2(\lambda')^2(1 - \lambda'), \quad (20)$$

которое задает в неявной форме уточненное значение выражения для функции $\lambda' = \varphi(\lambda)$.

Такая процедура допускает дальнейшее уточнение: можно потребовать, чтобы были подобны с точностью до членов порядка x^2 операторы эволюции за четыре и восемь, затем - восемь и шестнадцать, ..., 2^k и 2^{k+1} временных шага. Это приводит каждый раз ко все более точному выражению для функции $\lambda' = \varphi(\lambda)$. В зависимости от уровня РГ анализа k можно получить различные значения скейлинговой константы $\delta_F = \varphi'(\lambda_c)$ и критической точки $\lambda_c = \varphi(\lambda_c)$ (табл. 3).

Критич. параметры	Таблица 1		Таблица 2		Таблица 3			
	Значение параметра		n	λ_n приближ	λ_n точное	k	δ_F	λ_c
	прибл.	точное						
λ_c	1.36603	1.40115	0	0.75	0.75	0	5.732	1.36603
a_F	-2.73205	-2.50291	1	1.242792	1.25	1	5.129	1.40344
δ_F	5.73205	4.66920	2	1.344006	1.36809894	2	4.834	1.40115
μ_c	-1.54246	-1.60119	3	1.362168	1.39404616	3	4.698	1.40116
			4	1.365352	1.39963724			
			5	1.365908	1.40082874			
					
			∞	1.366025	1.40115519			

Нетрудно видеть, что в пределе $k \rightarrow \infty$ получаются точные результаты. Отсюда вытекает важный вывод о том, что фейгенбаумовский сценарий перехода к хаосу характеризуется *одномерной ренормдинамикой* - для его описания достаточно задать одну единственную функцию $\lambda' = \varphi(\lambda)$. Поэтому *сценарий Фейгенбаума оказывается типичным в однопараметрической ситуации.*

4. Строгий ренормгрупповой анализ

Изложим теперь основные идеи строгого РГ анализа Фейгенбаума. Обозначая правую часть (1) через $f_0(x)$, выполним отображение дважды и изменим масштаб x в некоторое число раз a . В результате получим

$$x_{k+2} = af_0(f_0(x_k/a)). \quad (21)$$

Функцию, стоящую в правой части, обозначим теперь через $f_1(x)$. Повторяя эту процедуру многократно, приходим к рекуррентному РГ уравнению

$$f_{k+1}(x) = af_k(f_k(x/a)), \quad (22)$$

которое связывает ренормализованные отображения f_k и f_{k+1} , определяющие эволюцию системы соответственно за 2^k и 2^{k+1} временных шагов.

Критическое поведение соответствует неподвижной точке уравнения (22):

$$g(x) = ag(g(x/a)). \quad (23)$$

Численное решение этого функционального уравнения позволяет найти масштабную константу $a = a_F$ и получить функцию $g(x)$ в виде полиномиальной аппроксимации:

$$g(x) = 1 - 1.527632997x^2 + 0.1048151943x^4 + 0.0267056735x^6 - 0.6065274139x^8 + \\ + 0.0000815819x^{10} + 0.0000253684x^{12} - 0.0000026878x^{14}. \quad (24)$$

Рассмотрим решение уравнения РГ (22) в линейном приближении около неподвижной точки $g(x)$. Полагая $f_k(x) = g(x) + \varepsilon h_k(x)$, имеем:

$$h_{k+1}(x) = \hat{m}h_k(x), \quad (25)$$

где линейный оператор \hat{m} определен соотношением

$$\hat{m}h(x) = a [g'(g(x/a))h(x/a) + h(g(x/a))]. \quad (26)$$

Оператор \hat{m} имеет дискретный спектр, причем (для возмущений неустранимых инфинитезимальной заменой переменных) *только одно собственное число $\delta = \delta_F$ превышает по модулю единицу.* Это означает, что коразмерность данного вида критического поведения равна единице и он является типичным в однопараметрической ситуации. Соответствующая собственная функция $h(x)$ оператора \hat{m} может быть найдена численно в виде полиномиальной аппроксимации:

$$h(x) = 1 - 0.3256514x^2 - 0.0505539x^4 + 0.0145598x^6 - 0.0008810x^8 - \\ - 0.0001062x^{10} + 0.0000198x^{12}. \quad (27)$$

При больших k отображение $f_k(x)$ имеет вид $f_k(x) = g(x) + C\delta_F^k h(x)$, коэффициент C пропорционален отклонению параметра λ от критической точки. Ясно, что при уменьшении этого отклонения в δ_F раз и увеличении k на единицу (что отвечает удвоению временного масштаба) вид f_k не изменится. Это и есть фейгенбаумовский скейлинг.

5. Фейгенбаумовская критическая динамика реальных нелинейных систем

После работ Фейгенбаума описанный тип критического поведения со всеми присущими ему количественными закономерностями скейлинга в окрестности критической точки был обнаружен в огромном количестве реальных нелинейных физических систем и математических моделей [22,23,31-39].

Приведем несколько примеров, относящихся к системам разной физической природы, что позволит глубже прочувствовать мощь концепции универсальности. Все рассматриваемые физические ситуации являются многопараметрическими, и, чтобы наблюдать переход к хаосу по сценарию Фейгенбаума, достаточно варьировать всего один параметр. В качестве управляющего параметра удобно выбирать тот, который допускает наиболее простое регулирование и измерение в эксперименте.

Конвекция Релея - Бенара. Первый пример заимствован из гидродинамики - это движение горизонтального слоя жидкости, подогреваемого снизу. Как показал Лоренц [40], такая задача при некоторых предположениях описывается системой трех дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -Px + Py, \\ \dot{y} &= -xz + Rx - y, \\ \dot{z} &= xy - bz. \end{aligned} \quad (28)$$

Здесь R - число Релея, пропорциональное разности температур внизу и вверху слоя, нормированное так, что $R=1$ соответствует порогу конвекции, P - число Прандтля, пропорциональное отношению кинематической вязкости и теплопроводности жидкости, b - параметр геометрии.

В качестве управляющего параметра выбирают число Релея, поскольку в эксперименте оно допускает естественное регулирование за счет изменения температуры дна ячейки, в которую помещена жидкость. В обширной литературе, посвященной системе Лоренца, параметры P и b обычно полагают равными 10 и $8/3$ соответственно.

Система (28) характеризуется сложной динамикой. Хаос возникает при превышении числа Релея над пороговым значением $R = 24.74$. При еще больших значениях числа Релея имеются "окна" периодических движений. Изменяя R сверху вниз, внутри этих окон можно наблюдать каскад удвоений периода, а за критической точкой - характерный обратный каскад слияния полос. Одно из наиболее широких окон лежит в интервале $99.52450 < R < 100.795$. Для него в табл. 4 приведены бифуркационные значения числа Релея.

Переход к хаосу по сценарию Фейгенбаума наблюдался и экспериментально для конвекции в ртути, силиконовом масле и др. [23]. Одним из признаков каскада удвоений являлась характерная эволюция спектра колебаний.

Оптический резонатор с нелинейной средой. Эта система была рассмотрена в серии работ Икеды с соавторами [41,42] и представляет собой кольцевой резонатор, частично заполненный средой с фазовой нелинейностью. Резонатор возбуждается лучом лазера через одно полупрозрачное зеркало, а выходной сигнал снимается через другое. В результате интерференции промодулированного по фазе сигнала с монохроматическим возможно возникновение сложных колебательных режимов.

Если пренебречь релаксацией фазы колебаний и считать, что она мгновенно реагирует на изменение амплитуды света, то система Икеды может быть приближенно описана двумерным отображением:

$$E_{n+1} = A + BE_n \exp(i|E_n|^2). \quad (29)$$

Таблица 4

Нелинейная система и управляющий параметр	Динамические уравнения	Бифуркационные значения	Критические значения
Конвекция Релея-Бенара R	$\dot{x} = -Px + Py,$ $\dot{y} = -Xz + Rx - y,$ $\dot{z} = xy - bz,$ $P=10, b=8/3$	100.7952 99.9800 99.62851 99.54712 99.52934 99.525533	99.52450
Оптический нелинейный резонатор A	$E_{n+1} = A +$ $+BE_n \exp(i E_n ^2),$ $B=0.15361446$	2.30729537 2.44065537 2.47918150 2.48632189 2.48826717 2.48868645 2.48877637 2.48879563	2.48880088
Нелинейный осциллятор под внешним воздействием A	$\ddot{x} + \gamma \dot{x} +$ $+(1+A \cos \Omega t) \sin x = 0$ $\Omega = 1.56$ $\gamma = 0.15$	0.519 0.79338 0.89150 0.907097 0.909900 0.9105672	0.9107356
Отображение Хенона λ	$x_{n+1} = 1 - \lambda x_n^2 - by_n,$ $y_{n+1} = x_n,$ $b = 0.3$	1.2675 1.8125 1.9216455 1.9452005 1.9502644	1.9516465
Отображение окружности K	$x_{n+1} = x_n + \Omega +$ $+(K/2\pi) \sin 2\pi x_n,$ $\Omega = 0.3$	2.74828266 3.10351200 3.18364271 3.20096158 3.20467850 3.20547489	3.20569196

Здесь A - комплексная амплитуда света на входе в нелинейную среду; B - параметр, пропорциональный сигналу лазера; E_n - параметр диссипации поля в среде.

В качестве управляющего параметра естественно выбрать интенсивность излучения лазера A . В табл.4 приведены значения этого параметра, при котором наблюдается каскад удвоений периода при фиксированном B , равном 0.15361446.

Осциллятор под периодическим внешним воздействием. Это сам по себе широкий класс физических задач и математических моделей, допускающих механические, радиотехнические (в виде всевозможных нелинейных колебательных контуров), оптические и т.д. реализации. В качестве первого примера укажем осциллятор Дуффинга при гармоническом воздействии:

$$\ddot{x} + \gamma \dot{x} + \mu x + \alpha x^3 = A \cos \Omega t, \quad (30)$$

где γ - параметр нелинейности, μ - параметр диссипации, A и Ω - амплитуда и частота внешнего воздействия, частота колебаний свободного осциллятора нормирована на единицу. Эта задача характеризуется четырьмя существенными параметрами: γ , μ , Ω и A .

Частный случай осциллятора Дуффинга представляет собой система Уегы [22]

$$\ddot{x} + \gamma \dot{x} + x^3 = A \cos t, \quad (31)$$

которая характеризуется двумя параметрами - γ и A . Она допускает физическую реализацию в виде электронной цепи с нелинейной индуктивностью.

Весьма распространена ситуация *параметрического возбуждения нелинейного осциллятора гармоническим сигналом*:

$$\ddot{x} + \gamma \dot{x} + (1 + A \cos \Omega t) \sin x = 0. \quad (32)$$

Здесь нелинейность выбрана в виде, типичном для математического маятника.

Все описанные системы демонстрируют каскад удвоений периода движения и переход к хаосу по Фейгенбауму. В качестве управляющего параметра естественно выбрать амплитуду воздействия A . Для примера в табл. 4 приведены бифуркационные значения амплитуды воздействия и критическая точка для параметрически возбуждаемого осциллятора (32) при фиксированных Ω и γ .

В рамках рассматриваемого класса задач внешнее воздействие не обязательно гармоническое, оно может быть и импульсным. В свою очередь, осциллятор может быть и линейным, но тогда для возникновения сложной динамики эффективность толчка должна зависеть от положения осциллятора. Это может быть, например, *маятник с затуханием, помещенный между полюсами электромагнита*, причем электромагнит периодически включается на очень короткое время. Колебания такого маятника описываются уравнением

$$\ddot{x} + \gamma \dot{x} + x = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \Phi(x) \delta(t - nT), \quad (33)$$

где $\Phi(x)$ - период включения электромагнита, T - функция, характеризующая распределение поля электромагнита вдоль траектории шарика. Используя известный закон движения маятника между n -м и $(n+1)$ -м импульсами, можно перейти от уравнения (33) к дискретному отображению [43]:

$$x_{n+1} = f(x_n) - b y_n, \quad y_{n+1} = x_n, \quad (34)$$

где $b = \exp(-\gamma T)$ - нормированный параметр диссипации. Если взять функцию $f(x)$ в виде $1 - \lambda x^2$, то получаем *отображение Хенона* [22-24]:

$$x_{n+1} = 1 - \lambda x_n^2 - b y_n, \quad y_{n+1} = x_n, \quad (35)$$

Отображение Хенона с ростом параметра λ и фиксированном b также демонстрирует каскад удвоений периода (см. табл. 4).

Автоколебания, синхронизированные внешним воздействием. Это тоже широкий класс физических систем. К нему относится, например, *генератор Ван-дер-Поля при периодическом воздействии*:

$$\ddot{x} - (\gamma - x^2)\dot{x} + x = A \cos t. \quad (36)$$

Каскад удвоений периода можно наблюдать с ростом амплитуды воздействия A в режиме синхронизации, когда реализуются колебания с частотой, находящейся в рациональном соотношении с частотой воздействия.

Рассмотрим достаточно общую ситуацию, когда на систему, демонстрирующую бифуркацию Хопфа рождения предельного цикла, действует периодическое возмущение. В случае импульсного воздействия приходим к уравнению

$$\dot{z} - (\alpha + i\omega)z + (\beta + i\gamma) |z|^2 z = A \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT), \quad (37)$$

где $z = r e^{ix}$ - комплексная амплитуда. Рассматривая динамику фазы x между n -м и $(n+1)$ -м импульсами в случае сильной фазовой нелинейности и сильной диссипации, из (37) можно получить *стандартное отображение окружности* [22-24]

$$x_{n+1} = x_n + \Omega + [K \sin 2\pi x_n] / 2\pi \pmod{1}, \quad (38)$$

где $\Omega = (\omega - \gamma\alpha/\beta)T$ - нормированная амплитуда воздействия, $K = 2\pi\gamma A / \sqrt{\alpha\beta}$ - параметр, определяемый соотношением частоты автоколебаний и частоты внешнего воздействия. Отображение окружности - весьма популярная модель для описания эффектов синхронизации и перехода к хаосу через разрушение квазипериодического движения. С ростом амплитуды воздействия K в пределах какой-либо полосы синхронизации для отображения окружности можно также наблюдать каскад удвоений периода (соответствующий пример приведен в табл. 4).

Все описанные нелинейные системы демонстрируют переход к хаосу по сценарию Фейгенбаума. Этот сценарий может быть обнаружен как в результате компьютерного исследования, так и в реальном эксперименте с помощью любой из рассмотренных нами иллюстраций: по характерному виду бифуркационного дерева, по спектру колебаний, по графику ляпуновского показателя, т.д. Существенно, что для нелинейных систем самой разной физической природы фиксируются одни и те же значения скейлинговых констант. Это обстоятельство демонстрирует важную роль логистического отображения для понимания закономерностей рождения хаоса через удвоения периода в нелинейных системах. В то же время логистическое отображение является одномерным и однопараметрическим. Переход к *многомерным нелинейным системам* привносит определенную специфику в картину удвоений.

Двумерные отображения (например, отображения Хенона) характеризуются двумя мультипликаторами μ_1 и μ_2 . В точке потери устойчивости 2^n цикла один из мультипликаторов 2^{n+1} цикла равен единице: $\mu_1 = 1$. С ростом управляющего параметра мультипликаторы μ_1 и μ_2 движутся навстречу друг другу по действительной оси, затем сливаются, расходятся в комплексной плоскости, обходя начало координат, возвращаются на действительную ось в области $\mu < 0$, снова расходятся, и лишь после этого один из них обращается в -1 . Такая эволюция мультипликаторов приводит к последовательной перестройке фазового портрета, как показано на рис.9. Неподвижная точка сначала является устойчивым узлом, затем узел превращается в фокус, а фокус вновь становится устойчивым узлом. В точке бифуркации удвоения узел превращается в седло, и от него отделяются два устойчивых узла, являющиеся элементами цикла удвоенного периода.

В результате такого каскада удвоений формируется сложно устроенный слоистый аттрактор. В отличие от логистического отображения он имеет фрактальную структуру и, соответственно, дробную величину хаусдорфовой размерности не только в критической точке, но и в хаотическом режиме. На

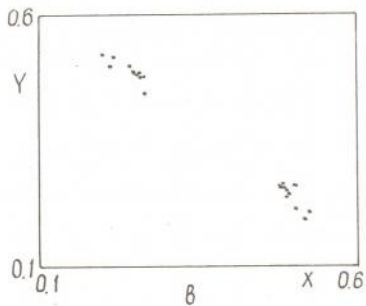
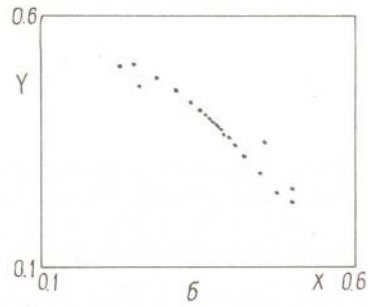
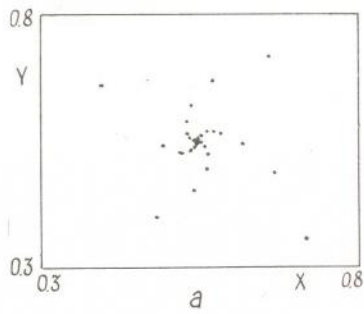


Рис.9. "Падение" изображающей точки на аттрактор Хенона в докритической области при $b=0.75$:
 а - $\lambda=0.15$, мультипликаторы комплексные; неподвижная точка типа фокус;
 б - $\lambda=2.28$, мультипликаторы действительные, отрицательные; изображающая точка последовательно посещает соседние ветви, неподвижная точка типа узел;
 в - $\lambda=2.38$, произошло удвоение периода, траектория изображающей точки "накручивается" на оба элемента 2-цикла

рис.10,а показан хаотический аттрактор Хенона, для которого можно видеть характерную фрактальную структуру в "поперечном" направлении, тогда как вдоль аттрактора "нити", из которых он сформирован, сплошные. В то же время критическая ситуация по-прежнему является уникальной. Это легко усмотреть из сопоставления с рис.10,б, на котором изображен аттрактор Хенона в критической точке. Поперечная структура "схлопнулась", а в мелких масштабах нить аттрактора (лежащая на одномерном центральном многообразии) распалась на группы точек - возникла продольная фрактальная структура. Критический аттрактор имеет известную нам величину хаусдорфовой размерности D_H , равную 0.5380450.

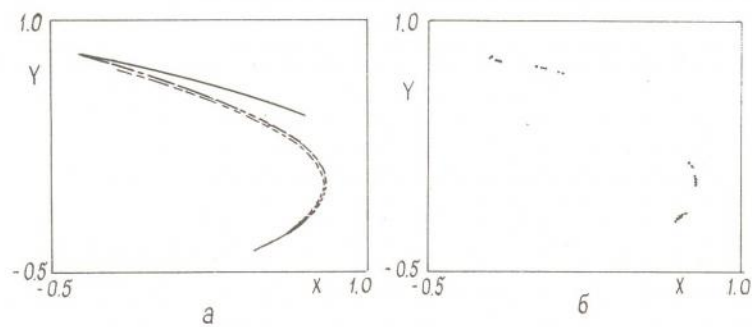


Рис.10. Аттрактор Хенона в хаотической области при $b=0.3$, $\lambda=2.1$ (а) и в критической точке $b=0.3$, $\lambda=1.95026$ (б)

Для дискретных отображений с размерностью больше двух картина удвоений протекает аналогично (Collet, Eckmann, Koch [44]).

Для трехмерных потоков, описываемых дифференциальными уравнениями, двумерные отображения дают типичную картину удвоений в сечении Пуанкаре. Чтобы вложить эту картину в трехмерное пространство, необходимо "провернуть" сечение вокруг породившего его предельного цикла (рис.11). При этом сечение Пуанкаре может сделать разное число вращений в меридиональной плоскости. Определив эти числа в каждой точке удвоения, можно ввести

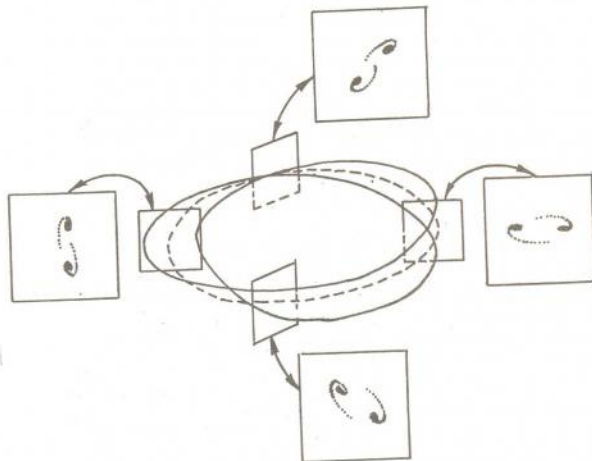


Рис.11. Вложение сечения Пуанкаре в трехмерное фазовое пространство

некоторые классы вложения аттракторов в трехмерное фазовое пространство (Crawford и Omohundro [45]). Для разных классов спектры колебаний нелинейных систем имеют определенные отличия.

Отмеченные особенности, однако, лишь уточняют картину сценария Фейгенбаума. В какой-то мере результаты работы [45] позволяют говорить о возможной классификации, но в рамках все того же типа критической динамики *скейлинговые константы остаются неизменными*. Таким образом, переход к системам с многомерным фазовым пространством не вносит принципиально новых моментов в картину перехода к хаосу по сценарию Фейгенбаума.

* * *

В заключение скажем несколько слов о путях развития "теории удвоений периода". Наиболее естественное продолжение исследований состоит в копировании методологии теории колебаний и волн и предполагает решение задач о динамике логистического отображения под действием внешнего сигнала (периодического и хаотического), о динамике связанных отображений, одномерных и двумерных решеток связанных отображений, сетей. В рамках этого направления накоплен значительный эмпирический компьютерный материал, экспериментальные результаты и целый ряд результатов в рамках метода РГ. Для распределенных (решеточных) систем РГ подход вовлекает пространственную переменную и приводит к новому типу скейлинга - *скейлингу пространственных структур, формирующихся в среде у порога хаоса* (см., например, обзор [46] и литературу к нему).

Еще одна возможность возникает при переходе к многопараметрическим нелинейным системам. В этом случае "фазовый портрет" ренормгруппового уравнения устроен более сложно - возникает разнообразие типов неподвижных точек, причем число неустойчивых направлений, отвечающих за скейлинг, равно двум и больше. В реальной динамике это отвечает наличию новых видов критического поведения с более высокой размерностью.

Наконец, третье направление исследований состоит в существенно более глубоком развитии представлений о ренормдинамике, вводящем в рассмотрение более сложные ситуации, такие как *бифуркации в уравнении ренормгруппы* [47-

48], *ренормциклы* [49], *ренормхаос* [50]. Развитие этой тематики, как можно надеяться, приведет к РГ описанию множества, определяющего границу хаоса в многопараметрических нелинейных системах с позиций РГ, универсальности и скейлинга.

Библиографический список

1. Myrberg P.J. Iteration der reellen polynome zweiten grades//Ann.Acad.Sci. Fenn. Ser. A. 1963. Vol.336. P.1.
2. Шарковский А.М. Существование циклов непрерывного преобразования прямой в прямую//Укр. мат. журн. 1964. Т.26. N 1. С.61.
3. Metropolis N., Stein P.R., Stein M.L. Finite limit sets for transformations of the unit interval//J.Comb. Theory. 1973. Vol.15. P.25.
4. May R.M. Simple mathematical models with very complicated dynamics//Nature. 1976. Vol.261. P.459.
5. Афраймович В.С., Шильников Л.П. О некоторых глобальных бифуркациях, связанных с исчезновением неподвижных точек седлоузла//Докл. АН СССР. 1974. Т.219. N3. С.1281.
6. Pomeau Y., Manneville P. Intermittent transition to turbulence in dissipative dynamical systems//Commun. Math. Phys. 1980. Vol.74. P.189.
7. Арнольд В.И. Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978.
8. Ruelle D., Takens F. On the nature of turbulence//Commun. Math. Phys. 1971. Vol.20. P.167.
9. Shenker S.J. Scaling behavior in a map of a circle onto itself: Empirical results//Physica. 1982. Vol.D5. P.405.
10. Feigenbaum M.J. Quantitative universality for a class of nonlinear transformations//J. Stat. Phys. 1978. Vol.19, N 1. P.25.
11. Feigenbaum M.J. The universal metric properties of nonlinear transformations//J. Stat. Phys. 1979. Vol.21, N 6. P.669.
12. Фейгенбаум М. Универсальность в поведении нелинейных систем//УФН. 1983. Т.141, N 2. С.343.
13. Hirsh J.E., Nauenberg M., Scalapino D.J. Intermittency in the presence of noise: a renormalization group formulation//Phys. Lett. 1982. Vol.A87. P.391.
14. Hu B., Rudnik J. Exact solution to the Feigenbaum renormalization-group equations for intermittency//Phys. Rev. Lett. 1982. Vol.48. P.1645.
15. Ostlund S., Rand D., Sethna J., Siggia E. Universal properties of the transition from quasi-periodicity to chaos in dissipative systems// Physica. 1983. Vol.D8. P.303.
16. Feigenbaum M.J., Kadanoff L.P., Shenker S.J. Quasiperiodicity in dissipative systems: Renormalization group analysis//Physica. 1982. Vol.5D. P.370.
17. Hu B. Introduction to real-space renormalization-group methods in critical and chaotic phenomena//Phys. Rep. 1982. Vol.91, N.5. P.233.
18. Aranson I.S., Gaponov-Grekhov A.V., Rabinovich M.I. The onset and spatial development of turbulence in flow systems//Physica. 1988. Vol.D33. P.1.
19. Chang S.J., Wortis M., Wright J.A. Iterative properties of a one-dimensional quartic map. Critical lines and tricritical behavior//Phys. Rev. 1981. Vol.A24, N5. P.2669.
20. Закс М.А., Любимов Д.В., Пиковский А.С. Универсальные сценарии перехода к хаосу через гомоклинические бифуркации. Препринт ин-та механики сплошных сред УО АН СССР. 1987. 70 с.
21. Вул Е.Б., Синай Я.Г., Ханин К.М. Универсальность Фейгенбаума и термодинамический формализм//УМН. 1984. Т.39, N 3. С.3.
22. Мун Ф. Хаотические колебания. М.: Мир, 1990.
23. Берже П., Помо И., Вигаль К. Порядок в хаосе. М.: Мир, 1991.
24. Шустер Г. Детерминированный хаос. М.: Мир, 1988.

25. *Jakobson M.V.* Absolutely continuous measures for oneparameter families of one-dimensional maps//Commun. Math. Phys. 1981. Vol.81, N 1. P.39.
26. *Шарковский А.Н., Майстренко Ю.А., Романенко Ю.Е.* Разностные уравнения и их приложения. Киев: Наукова Думка, 1986.
27. *Huberman B., Zisook A.* Power spectra of strange attractors//Phys. Rev. Lett. 1981. Vol.26. P.626.
28. *Nauenberg M., Rudnik J.* Universality and the power spectrum at the onset of chaos//Phys. Rev. 1981. Vol.B24. P.493.
29. *Halsey T.S., Jensen M.H., Kadanoff L.P., Procaccia I., Shraiman B.I.* Fractal measures and their singularities//Phys. Rev. 1986. Vol.A33. P.1141.
30. *Grassberger P., Procaccia I.* Characterization of strange attractors//Phys. Rev. Lett. 1983. Vol.50, N 5. P.346.
31. *Lanford O.E.* III. A computer assisted proof of the Feigenbaum conjectures //Bull. Amer. Math. Soc. 1982. Vol.6, N 3. P.427.
32. *Franceschini V.* Feigenbaum sequence of bifurcations in the Lorenz model//J. Stat. Phys. 1980. Vol.22. P.397.
33. *Kai T.* Universality of power spectrum of a dinamical system with an infinite sequence of period doubling bifurcations//Phys. Lett. 1981. Vol.A86, N 5. P.263.
34. *Testa J., Pere J., Jeffries C.* Evidence for universal chaotic behavior of a driven nonlinear oscillator//Phys. Rev. Lett. 1982. Vol.48, N 11. P.714.
35. *Yen W.J., Kao Y.H.* Universal scaling and chaotic behavior of a Josephson-junction analog//Phys. Rev. Lett. 1982. Vol.49, N 26. P.1888.
36. *Анищенко В.С., Астахов В.В., Летчфорд Т.Е., Сафонова М.А.* О бифуркациях в трехмерной двухпараметрической автоколебательной системе со странным аттрактором//Изв. вузов. Сер. Радиофизика. 1983. Т.26, N 2, С.169.
37. *Libhaber A., Fauve S., Laroche C.* Two-parameter study of the routes to chaos //Physica. 1983. Vol.ZD. P.73.
38. *Xiao-lan Chen, You-gin Wang, Shi-gang Chen.* Period-doubling bifurcations and chaotic behavior in nonequilibrium superconductivity film//Solid State Commun. 1984. Vol.25, N 1. P.1.
39. *Астахов В.В., Безручко Б.П., Селезнев Е.П.* Исследование динамики нелинейного колебательного контура при гармоническом воздействии//Радиотехника и электроника. 1987. Т.32, N 12. С.2558.
40. *Lorenz E.N.* Deterministic nonperiodic flow//J. Atmos. Sci. 1963. Vol.20, N 2. P.130.
41. *Ikeda K., Daido H., Akimoto O.* Optical turbulence: chaotic behavior of transmitted light from a ring cavity//Phys. Rev. Lett. 1980. Vol.45. P.709.
42. *Carmichael H., Snapp R., Schieve W.* Oscillatory instabilities leading to "optical turbulence" in a bistable ring cavity//Phys. Rev. 1982. Vol.26. P.3408.
43. *Кузнецов С.П., Ерастова Е.Н.* Теория Фейгенбаума//Лекции по электронике СВЧ и радиофизике. Саратов, Изд-во Саратов. ун-та, 1983. Кн.2. С.3.
44. *Collet P., Eckmann J.P., Koch H.* Period doubling bifurcations for families of maps on R^n //J.stat. Phys. 1980. Vol.25, N 1. P.1.
45. *Crawford D., Omohundro S.* On the global structure of period doubling flows //Physica. 1984. Vol.13D. P.161.
46. *Кузнецов А.П., Кузнецов С.П.* Критическая динамика решеток связанных отображений: Обзор//Изв. вузов. Сер. Радиофизика. 1991. Т.34, N 10. С.1021.
47. *Кузнецов А.П., Кузнецов С.П., Сатаев И.Р.* Воздействие фрактального сигнала на систему Фейгенбаума и бифуркация в уравнении ренормгруппы//Изв. вузов. Сер. Радиофизика. 1991. Т.34, N 6. С.661.
48. *Kuznetsov A.P., Kuznetsov S.P., Sataev I.R.* Period-doubling system under fractal signal. Bifurcation in the renormalization group equation//Chaos, Solitons&Fractals. 1991. Vol.1, N 4. P.355.
49. *Chang S.J., Fendley P.R.* Scaling and universal behavior on the bifurcation attractor//Phys. Rev. 1986. Vol.A33, N 6. P.4092.

50. Чуриков Б.В., Шепелянский Д.Л. Граница хаоса и статистические аномалии. Препринт 86-174. Саратовский филиал Новосиб. ин-та ядерной физики СО АН СССР, 1986. 30 с.

Саратовский филиал института радиоэлектроники РАН

CRITICAL DYNAMICS FOR ONE-DIMENSIONAL MAPS PART 1: FEIGENBAUM'S SCENARIO

A.P. Kuznetsov, S.P. Kuznetsov

A review of main results is given, concerning the Feigenbaum's scenario in the context of critical phenomena theory. Computer-generated illustrations of scaling are presented. Approximate renormalization group (RG) analysis is considered, allowing to obtain RG transformation in an explicit form. Examples of nonlinear systems are discussed, demonstrating this type of critical behaviour.



An offer for publication

*A monography written by famous Russian specialists in vacuum electronics
prof. Yu.A. Kalinin and A.D. Yessin, Ph.D.*

METHODS AND MEANS OF PHYSICAL EXPERIMENT IN VACUUM ELECTRONICS OF SUPER HIGH FREQUENCIES

Part 1 of the book entitled "Methods, Apparature and Experimental results" presents a first known attempt of a summary and systematic review of methods and results of the analysis of intense electron beams with or without density or velocity modulation, electromagnetic probing of the RF circuits, study of the electron beam interaction with RF fields, and of the heating properties of electron vacuum devices as well. The results of experimental investigations of electron device physics leading to the enhancement of the device performance are also given.

Part 2, "The Design and Optimization of the Electron Devices on the Basis of Experimental Studies", illustrates the efficiency of the methods described in applications to design and engineering of the power and broadband travelling wave tubes (TWTs). A comparison of the theoretical and experimental results is given which is necessary for testing and improving of theoretical models. A particular attention is paid to the methods of enhancement of the device construction and performance, including repeatability, stability and fidelity.

The monography is adressed to the specialists in engineering, design, production and applications of the power broadband TWTs, accelerators and electron-beam devices. It may also be useful for senior students and post-graduates in electronics and RF physics.





ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ФУНКЦИОНАЛЬНОГО ОТОБРАЖЕНИЯ ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ ЛБВ-ГЕНЕРАТОРА С ЗАПАЗДЫВАЮЩЕЙ ОБРАТНОЙ СВЯЗЬЮ

*Ю.П. Блюх, А.В. Бородкин, М.Г. Любарский, И.Н. Онищенко,
Я.Б. Файнберг*

С помощью метода функционального отображения описана и исследована нелинейная динамика ЛБВ-генератора с запаздывающей обратной связью. Показано, что при малых коэффициентах обратной связи область линейной стадии взаимодействия пучка с волной приобретает свойства узкополосного фильтра, формирующего квазимонохроматический сигнал к началу нелинейной стадии взаимодействия. Резонансный характер пучковой неустойчивости приводит к сильной зависимости динамики поля от мгновенной частоты сигнала, что и определяет механизм возникновения стохастической автомодуляции выходного сигнала генератора.

Введение

Исследованию механизмов стохастизации в электронных и радиофизических приборах посвящено большое количество оригинальных работ, а также ряд монографий и обзоров (см., например, [1-5]). Такой интерес обусловлен как широким разнообразием режимов, демонстрируемых относительно простыми электронными устройствами, так и возможностью их адекватного математического описания. Последнее относится, в основном, к системам с сосредоточенными параметрами, описываемым уравнениями в полных производных. Такие динамические системы в большей или меньшей степени поддаются аналитическому исследованию и для многих из них удается определить механизм стохастизации, бифуркационные значения параметров и т.д. Значительно хуже изучены системы с распределенными параметрами, динамика которых описывается нелинейными уравнениями в частных производных. Здесь основными являются численные методы исследования и моделирование непрерывной среды дискретным набором связанных между собой ячеек, каждая из которых представляет собой систему с конечным числом степеней свободы [6,7].

В данной работе в качестве математического аппарата описания сложной динамики систем с распределенными параметрами предлагается метод функционального отображения, который, как это будет показано на примере ЛБВ-генератора с запаздывающей обратной связью, позволяет продвинуться по пути аналитического исследования и значительно (в 10^4 - 10^3 раз) сокращает время численного решения эволюционных уравнений в частных производных.

1. Эволюционные уравнения и функциональное отображение генератора

Под ЛБВ-генератором с запаздывающей обратной связью будем подразумевать лампу бегущей волны (ЛБВ), работающую в режиме самовозбуждения, обусловленном наличием обратной связи. Такой генератор можно рассматривать как распределенную кольцевую систему, состоящую из усилителя ВЧ колебаний, основанного на эффекте Черенкова, и цепи запаздывающей обратной связи, которая может содержать линейные элементы: аттенюатор, фазовращатель, фильтр и т.д. Нелинейный ЛБВ-усилитель является системой с распределенными параметрами, поскольку описывается уравнениями в частных производных. Эти уравнения хорошо известны [2,8] и в безразмерных переменных имеют следующий вид:

$$\frac{\partial \epsilon}{\partial \xi} + s \frac{\partial \epsilon}{\partial \tau} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-i\varphi} d\varphi_0, \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi^2} = \text{Re}\{\epsilon e^{i\varphi}\}. \quad (1)$$

Здесь $\epsilon(\xi, \tau)$ - безразмерная комплексная амплитуда усиливаемой волны; φ_0, φ - начальная и текущая фазы частицы пучка в волне; $s = \text{sign}(v_0 - v_g)$, где v_0 - начальная скорость частиц; v_g - групповая скорость волны.

Связь с размерными переменными (временем t , координатой x , амплитудой продольной компоненты электрического поля волны E) задается формулами

$$\xi = \delta k x, \quad \tau = \frac{v_g}{|v_0 - v_g|} \delta k (v_0 t - x), \quad \epsilon = \frac{keE}{mv_0^2 \delta k^2},$$

где k - волновой вектор волны, δk - пространственный инкремент неустойчивости.

Уравнения (1) дополняют краевые условия

$$\varphi(0, \tau) = \varphi_0 \in [-\pi, \pi], \quad \frac{\partial \varphi(0, \tau)}{\partial \xi} = 0, \quad (2)$$

означающие отсутствие модуляции плотности и скорости пучка на входе генератора.

Цепь обратной связи зададим условием

$$\epsilon(0, \tau + \Theta) = q \epsilon(L, \tau), \quad (3)$$

где $\xi = 0, \xi = L$ - координаты начала и конца области взаимодействия пучка с волной, Θ - время задержки в цепи обратной связи, q - комплексный коэффициент обратной связи.

Чтобы полностью определить задачу, необходимо описать начальное состояние генератора. Это удобно сделать, задав входной сигнал на отрезке времени формуле $\tau \in [0, \Theta + L]$:

$$\epsilon(0, \tau) = \epsilon_0(\tau), \quad \tau \in [0, \Theta + L]. \quad (4)$$

(Почему верхняя граница интервала равна $\Theta + L$, а не Θ , будет ясно из дальнейшего.)

Уравнения (1) являются простейшими, описывающими нестационарные процессы в ЛБВ. В них не учтено возможное изменение сопротивления связи и групповой скорости с частотой, не учтен пространственный заряд пучка, предполагается малым изменение скорости частиц пучка в процессе взаимодействия с волной. Мы преднамеренно остановились на этих уравнениях, чтобы выяснить, является ли механизм возникновения регулярной и стохастической автомодуляции выходного сигнала генератора свойством данной системы, либо обусловлен какими-либо из перечисленных выше эффектов.

Начально-краевая задача (1) - (4) полностью описывает работу ЛБВ-генератора с запаздывающей обратной связью, но в таком виде она малоприменна для аналитического исследования. Численное же решение требует большого объема вычислений из-за большой длительности переходных режимов генерато-

ра, особенно вблизи бифуркационных значений параметров, и не всегда дает ответ на вопрос о механизме возникновения регулярной или стохастической автомодуляции.

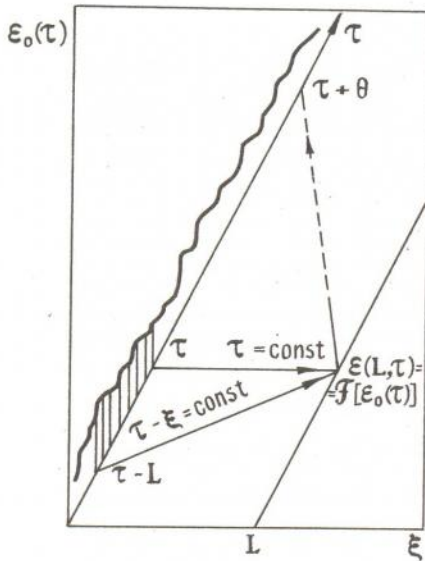


Рис.1. Схема пространственно-временных связей в ЛБВ-генераторе

Исследование генератора и его моделирование на ЭВМ значительно упростится, если предварительно решить задачу без обратной связи, т.е. найти нелинейный функционал F , позволяющий по известному входному сигналу $\varepsilon_0(\tau)$ определить выходной сигнал:

$$\varepsilon(L, \tau) = F[\varepsilon_0(\tau)].$$

То, что F является не функцией, а функционалом, следует из системы (1), имеющей два типа характеристик (рис. 1). Информация переносится частицами пучка вдоль характеристик $\tau = \text{const}$ и волной вдоль характеристик $\tau - \xi = \text{const}$. Поэтому значение сигнала на выходе генератора в момент времени τ определяется функцией $\varepsilon_0(\tau)$, заданной на интервале времени $[\tau, \tau - L]$.

Определив функционал F и подключив условие (4), можно записать уравнение генератора в виде функционального отображения

$$\varepsilon_0(\tau + \Theta) = qF[\varepsilon_0(\tau)], \quad (5)$$

эквивалентного исходной задаче в частных производных. В п.2 функционал F будет найден в предположении малого коэффициента обратной связи: $-\ln |q| \gg 1$.

2. Структура функционального отображения ЛБВ-генератора

Система уравнений (1), (2) не имеет аналитических решений. Однако в случае монохроматического входного сигнала,

$$\varepsilon_0(\tau) = \varepsilon_v e^{iv\tau},$$

решения хорошо изучены численными методами [9,10] и имеют вид

$$\varepsilon(\xi, \tau) = \varepsilon_v(\xi) e^{iv\tau}.$$

Поведение функции $\varepsilon_v(\xi)$ для некоторых значений v показано на рис.2.

Первый же вывод, который следует из приведенных зависимостей, следующий: функция отображения входного сигнала в выходной сигнал не может быть функцией только амплитуды. Даже для монохроматических входных сигналов величина выходного сигнала сильно зависит от частоты. Если же на вход подается сигнал произвольной формы, то для нахождения выходного сигнала нет, казалось бы, иного способа, как численное решение уравнений (1) в частных производных. Однако при $|q| \ll 1$ решение с высокой степенью точности совпадает в каждый момент с монохроматическим, зависящим от двух комплексных параметров - амплитуды и частоты. Это объясняется следующим.

Как видно из рис. 2, амплитуда выходного сигнала не превышает нескольких единиц. Это означает, что при $|q| \ll 1$ сигнал на входе генератора всегда мал.

Разобьем длину L на две условные части: "линейную" $0 < \xi < L_*$ и "нелинейную" $L_* < \xi < L$. На линейной части амплитуда всегда мала и динамика пучка и волны может быть хорошо описана в рамках линейного приближения. Сформировавшееся к концу линейной части состояние пучка и волны является граничным условием для решения задачи на нелинейной части. В дальнейшем будет показано, что даже при широкополосном сигнале на входе прибора длинная линейная часть формирует сигнал, близкий к монохроматическому. Таким образом, на нелинейной стадии решение имеет стандартный двухпараметрический вид. Это утверждение, безусловно, не является абсолютно точным, но точность его тем выше, чем длиннее линейная часть, т.е. чем меньше $|q|$.

Представим линеаризованные уравнения (1) в следующем виде:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varepsilon}{\partial \xi} + s \frac{\partial \varepsilon}{\partial \tau} &= -i\Phi, & \Phi(0, \tau) &= 0, \\ \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \xi^2} &= \frac{1}{2} \varepsilon, & \frac{\partial \Phi(0, \tau)}{\partial \xi} &= 0, \end{aligned} \quad (6)$$

где $\Phi = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\varphi_0} \delta\varphi d\varphi_0$, $\delta\varphi = \varphi - \varphi_0$.

Для монохроматического входного сигнала $\varepsilon_0(\tau) = \varepsilon_0 e^{i\omega\tau}$ решение уравнений (6) имеет вид

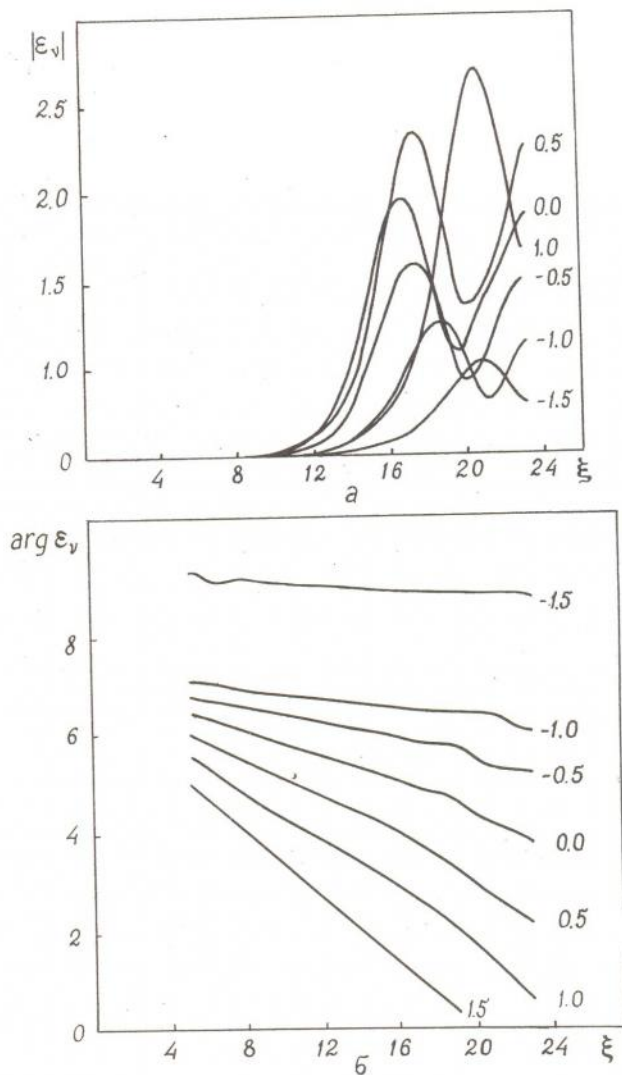


Рис.2. Зависимости амплитуды (а) и фазы (б) монохроматических сигналов от координаты. Кривые параметризованы частотой ν

$$\begin{aligned} \varepsilon_v(\xi, \tau) &= e^{i\nu\tau} \varepsilon_v \sum_j \alpha_j(v) e^{x_j(v)\xi}, \\ \Phi_v(\xi, \tau) &= i e^{i\nu\tau} \varepsilon_v \sum_j \alpha_j(v) [x_j(v) + isv] e^{x_j(v)\xi}, \\ \frac{\partial \Phi_v(\xi, \tau)}{\partial \xi} &= i e^{i\nu\tau} \varepsilon_v \sum_j \alpha_j(v) x_j(v) [x_j(v) + isv] e^{x_j(v)\xi}, \end{aligned} \quad (7)$$

где $x_j(v)$ - корни характеристического уравнения

$$x^2(x + isv) = -i/2, \quad (8)$$

а $\alpha_j(v)$ - коэффициенты разложения вектора начальных условий $(\varepsilon_v, 0, 0)$ по собственным векторам системы (6).

Поскольку лишь один корень x , имеет положительную вещественную часть (обозначим его $x(v)$), то поведение решения на линейной стадии взаимодействия быстро приобретает характер экспоненциального роста. С ростом ξ вектор решения $(\varepsilon_v, \Phi_v, \frac{\partial \Phi_v}{\partial \xi})$ экспоненциально быстро стремится к направлению, задаваемому вектором e_v :

$$e_v = (1, i[x(v) + isv], i x(v)[x(v) + isv]),$$

так что пучковые компоненты решения при $\xi \gg 1$ однозначно связаны с полевой компонентой.

Если форма входного сигнала $\varepsilon_0(\tau)$ произвольна, общее решение системы (6) имеет вид

$$\varepsilon(\xi, \tau) = G_\xi \circ \varepsilon \equiv \int_{\tau-\xi}^{\tau} g_\xi(\tau-\tau') \varepsilon_0(\tau') d\tau',$$

где $g_\xi(\tau-\tau')$ - функция Грина уравнений (6).

Сравнив выражения для общего решения и решения для монохроматического сигнала, нетрудно видеть, что последнее определяет преобразование Фурье полевой компоненты функции Грина, что позволяет найти ее с помощью обратного преобразования Фурье. Приведем явный вид функции g_ξ , полученный в предположении $\xi \gg 1$ методом перевала:

$$g_\xi(\tau) = 1/4 \left(\frac{x_0}{\pi \xi} \right)^{1/2} [1 + 3s \frac{\tau}{\xi}]^2 e^{3/4 x_0 \xi [1 - \frac{9}{4} (\frac{\tau}{\xi} - \frac{s}{3})^2]}, \quad (9)$$

где $x_0 = (-is + \sqrt{3})2^{-4/3}$ - корень уравнения (8) при $v=0$.

Хотя выражение (9) получено как первый член асимптотического ряда, сравнение численных решений и решений, полученных с использованием функции (9), показывает, что уже при $\xi \gg 3$ различие между ними мало.

Аналогично можно найти компоненты функции Грина g'_ξ и g''_ξ , описывающие поведение функций Φ и $\partial\Phi/\partial\xi$, однако проще воспользоваться тем, что функция Грина является решением исходных уравнений, так что

$$g'_\xi = i \left(\frac{\partial}{\partial \xi} + s \frac{\partial}{\partial \tau} \right) g_\xi, \quad g''_\xi = \frac{\partial}{\partial \xi} g'_\xi.$$

Из (9) видно, что $|g_\xi(\tau)|$ имеет максимум при $\tau = (s/3)\xi$, полуширина которого пропорциональна $\xi^{1/2}$. Из этого следует, что частоты $|\nu| \geq \xi^{-1/2}$, если они присутствуют в спектре входного сигнала $\varepsilon_0(\tau)$, подавляются после прохождения линейной стадии взаимодействия (точнее, уменьшается их доля в спектре сигнала). Таким образом, функция Грина действует как фильтр, полоса пропускания которого убывает с ростом длины взаимодействия. При $L \gg 1$ к нелинейной стадии взаимодействия сигнал приходит квазимонохроматическим даже тогда, когда на входе ЛБВ он был широкополосным.

Для описания эволюции сигнала на нелинейной стадии ($L_* < \xi < L$) необходимо решить исходные уравнения, взяв в качестве граничного условия поле $\varepsilon(L_*, \tau)$

в конце линейной стадии, а также определив фазы частиц пучка и их скорости при $\xi=L_*$. Последнее можно сделать, воспользовавшись отмеченной выше квази-монохроматичностью сигнала при $L_* \gg 1$, по формулам

$$\begin{aligned} \delta \rho(\varphi_0) &= 2|\Phi| \sin(\varphi_0 + \arg \Phi), \\ \delta v(\varphi_0) &= \left| \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} \right| \cos(\varphi_0 + \arg \frac{\partial \Phi}{\partial \xi}), \end{aligned}$$

где $\delta \rho$ и δv - отклонения плотности и скорости частиц пучка от невозмущенных значений.

Таким образом, эволюция сигнала на нелинейной стадии определяется тремя комплекснозначными функциями, которые необходимо задать на интервале времени $(\tau-L+L_*, \tau)$. Длина этого интервала составляет несколько единиц, а характерный масштаб времени изменения вектора состояния после линейной части порядка $L_*^{1/2} \gg 1$. В силу этого можно было бы считать упомянутые функции постоянными и искать решение в виде монохроматического сигнала с нулевой частотой, но при этом мы бы сильно огрубил задачу, поскольку, как видно на примере монохроматических сигналов, решения весьма чувствительны к временным характеристикам граничного условия. Поэтому учтем зависимость от времени сигнала $\varepsilon(L_*, \tau)$ на интервале $(\tau-L+L_*, \tau)$, аппроксимировав его экспонентой:

$$\varepsilon(L_*, \tau) \approx \varepsilon e^{i\nu\tau},$$

где $\nu = -\frac{i}{\varepsilon(L_*, \tau)} \frac{\partial \varepsilon(L_*, \tau)}{\partial \tau}$ - мгновенная частота, вообще говоря, комплексная.

Отметим, что аппроксимировать $\varepsilon(L_*, \tau)$ можно было бы и другой функцией, например, полиномом, но использование мгновенной частоты ν в качестве характеристики сигнала более удобно.

Может показаться, что необходимо определить мгновенные частоты и амплитуды функций, описывающих вариации плотности и скорости пучка. Однако в этом нет необходимости, поскольку при $L_* \gg 1$ все три функции имеют одну и ту же частоту, а их амплитуды образуют вектор с направлением e_ν .

Чтобы доказать это утверждение, рассмотрим структуру полевой компоненты функции Грина, которую можно записать в виде

$$g_\xi(\tau-\tau') = \xi^{-1/2} P(u) e^{-\alpha\xi(1-u^2)},$$

где $P(u)$ - полином, $u = 3/2[(\tau-\tau')/\xi - s/3]$, $|\alpha| \sim 1$.

При вычислении свертки $G \circ \varepsilon$ не все члены полинома равноправны, что показывает следующая простая оценка. Пусть

$$\begin{aligned} I_n &= \int u^n e^{-\alpha\xi u^2} \varepsilon_0(\tau') dt', \\ C_n &= \int |v|^n |e^{-\alpha v^2}| dv, \end{aligned}$$

тогда

$$|I_n| \leq \max |\varepsilon_0| C_n \xi^{-n/2 - 1/2}. \quad (10)$$

Таким образом, при $\xi \gg 1$ вклад каждого члена полинома тем меньше, чем выше его степень.

Представим выражение для мгновенной частоты при $\xi=L_*$ в виде

$$\nu = -\frac{i}{\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial \tau} = -\frac{i}{G_{L_* \circ \varepsilon_0}} \frac{\partial}{\partial \tau} G_{L_* \circ \varepsilon_0}.$$

Поскольку функция $\partial g_\xi / \partial \tau$ того же типа, что и g_ξ , то и к ней применима оценка (10). Частоту ν можно представить в виде

$$\nu = a_0 + a_1 \frac{I_1}{I_0} + \dots$$

с независимыми от входного сигнала $\varepsilon_0(\tau)$ коэффициентами a_i . Заметим, что $a_0=0$ с точностью до ξ^{-1} , поскольку старший член соответствующего полинома антисимметричен по $\tau-\tau'$. Таким образом, в первом не исчезающем приближении для v справедливо выражение

$$v \approx a_1 \frac{I_1}{I_0} \sim \xi^{-1/2},$$

что согласуется со сделанной выше оценкой полосы пропускания длиной линейной части ЛБВ.

Пучковые компоненты функции Грина имеют аналогичную структуру. Поэтому

$$\Phi/\varepsilon = i \left(\frac{\partial G_\xi}{\partial \xi} + s \frac{\partial G_\xi}{\partial \tau} \right) \circ \varepsilon / G_\xi \circ \varepsilon = b_0 + b_1 (I_1/I_0) + \dots$$

и такое же представление имеет место для $\varepsilon^{-1} \partial \Phi / \partial \xi$, т.е. эти функции однозначно (с точностью до $\xi^{-1/2}$) задаются мгновенной частотой v , что и требовалось доказать.

Таким образом, при большой длине L_* линейной стадии эволюция сигнала на нелинейной стадии зависит от двух параметров: амплитуды и мгновенной частоты промежуточного сигнала $\varepsilon(L_*, \tau)$. Следующие два обстоятельства упрощают эту зависимость. Во-первых, аргумент решения на нелинейной стадии меняется практически по тому же закону, что и на линейной (см. рис.2). Во-вторых, модуль выходного сигнала не зависит от фазы промежуточного сигнала $\varepsilon(L_*, \tau)$, что следует из инвариантности исходной системы (1) относительно сдвига фазы поля.

Исходя из этого, зависимость выходного сигнала от промежуточного имеет вид

$$\varepsilon(L, \tau) = F_{L, L_*}(|\varepsilon(L_*, \tau)|, v(\tau)) = e^{i \arg G_{L, L_*} \circ \varepsilon(L_*, \tau)},$$

где F - вещественнозначная функция.

Поскольку $(L-L_*) \sim 1 \ll L_*$, то $v(\tau)$ можно с той же степенью точности вычислить по формулам линейной теории как при $\xi=L_*$, так и при $\xi=L$, а модули полей (в том же линейном приближении) в точках $\xi=L_*$ и $\xi=L$ связаны соотношением

$$|G_{L, \circ \varepsilon_0}| = e^{\operatorname{Re} \alpha(v)(L-L_*)} |G_{L_*, \circ \varepsilon_0}|.$$

Суммируя все вышесказанное, получим окончательно искомый вид функционала, связывающего входной и выходной сигналы ЛБВ:

$$\begin{aligned} \varepsilon(L, \tau) &= F_L(|G_{L, \circ \varepsilon_0}(\tau)|, v(\tau)) \frac{G_{L, \circ \varepsilon_0}(\tau)}{|G_{L, \circ \varepsilon_0}(\tau)|}, \\ v(\tau) &= -i \frac{\partial}{\partial \tau} \ln G_{L, \circ \varepsilon_0}(\tau). \end{aligned}$$

Таким образом, работу ЛБВ-генератора с запаздывающей обратной связью можно описать функциональным отображением для входного сигнала:

$$\varepsilon_0(\tau + \Theta) = q F_L(|G_{L, \circ \varepsilon_0}(\tau)|, v(\tau)) \frac{G_{L, \circ \varepsilon_0}(\tau)}{|G_{L, \circ \varepsilon_0}(\tau)|}. \quad (11)$$

Функция F_L может быть задана в виде таблицы, полученной численным решением уравнений в полных производных, либо аппроксимирована какой-либо удобной для работы функцией, например, полиномом.

Прежде чем перейти к исследованию свойств данного функционального отображения, перечислим те особенности черенковского взаимодействия, которые позволили нам определить вид функционала F :

1) наличие двух пересекающихся семейств характеристик уравнений в частных производных,

2) наличие неустойчивости, приводящей к экспоненциальному росту одного из возможных решений линейной теории,

3) резонансный характер неустойчивости, т.е. зависимость пространственного инкремента неустойчивости от частоты исходного возмущения,

4) малость коэффициента обратной связи, благодаря чему длинная линейная стадия взаимодействия формирует стандартный вектор состояния.

Перечисленные условия могут быть выполнены в пучковых генераторах, основанных и на других элементарных механизмах взаимодействия волн с частицами - на нормальном и аномальном эффектах Допплера.

В заключение отметим, что к функциональному отображению приведенного типа сводится целый класс уравнений в полных производных с запаздывающим аргументом.

3. Механизмы стохастической автомодуляции

Исследуем возможные механизмы потери устойчивости монохроматических режимов работы генераторов, описываемых отображением (11). Численное решение уравнений (1) - (3) показывает, что после разрушения монохроматического режима довольно быстро (например, при увеличении тока пучка) наступает режим стохастической автомодуляции. Это указывает, как правило, на совпадение механизма разрушения монохроматического режима с механизмом его стохастизации. Поэтому определение условий и механизма потери устойчивости монохроматических решений дает хорошую оценку снизу для тока стохастической автомодуляции генератора и позволяет качественно описать основные спектральные характеристики сигнала в этом режиме.

Будем рассматривать уравнение

$$\varepsilon(\tau+\Theta) = F(|G \circ \varepsilon(\tau)|, \nu(\tau)) e^{i \arg G \circ \varepsilon(\tau)}, \quad (12)$$

к которому легко перейти от (11) с помощью очевидных переобозначений. Функционал G будем описывать его комплексной амплитудно-частотной характеристикой $a(\nu)$, задаваемой соотношением

$$G \circ e^{i\nu\tau} = a(\nu) e^{i\nu\tau}.$$

Уравнение (12) допускает монохроматические решения с частотами ν_n , удовлетворяющими условию фазового баланса

$$\Theta \nu_n = \arg a(\nu_n) + 2\pi n, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

и амплитудами ε_n , определяемыми из уравнения

$$\varepsilon_n = F(|a(\nu_n)| \varepsilon_n, \nu_n). \quad (13)$$

Исследуем устойчивость описанных решений, для чего представим $\varepsilon(\tau)$ в виде

$$\varepsilon(\tau) = \varepsilon_n e^{i\nu_n \tau} (1 + u(\tau)),$$

где $u(\tau)$ - малое возмущение.

Линеаризуя уравнение (12) вблизи невозмущенного монохроматического решения, получим уравнение для $u(\tau)$, решение которого в силу его линейности будем искать в виде

$$u(\tau) = e^{\gamma\tau} (u_+ e^{i\mu\tau} + u_- e^{-i\mu\tau}).$$

Опуская очевидные выкладки, приведем характеристическое уравнение системы линейных уравнений для u_+ , u_- :

$$e^{2\lambda} - \frac{1}{2} e^{\lambda_0} \left(\frac{a_+}{a_0} + \frac{a_-^*}{a_0^*} \right) \left(1 + |a_0| \frac{\partial F}{\partial x} + \lambda \frac{\partial \ln F}{\partial v} \right) + \frac{a_+ a_-^*}{|a_0|} \frac{\partial F}{\partial x} \left(1 + \lambda \frac{\partial \ln F}{\partial v} \right) = 0. \quad (13)$$

Здесь $\lambda = \gamma + i\mu$, $a_0 = a(v_n)$, $a_{\pm} = a(v_n \pm \mu)$, $\frac{\partial}{\partial x}$ и $\frac{\partial}{\partial v}$ - производные по первому и второму аргументам функции F в точке $|a(v_n)|_{\epsilon_n, v_n}$.

Монохроматический режим неустойчив, если хотя бы один из корней λ характеристического уравнения расположен в правой полуплоскости.

Рассмотрим сначала простой случай, когда $\partial F / \partial v = \partial a / \partial v = 0$. При этом уравнение (13) упрощается:

$$e^{2\lambda} - e^{\lambda_0} \left(1 + |a_0| \frac{\partial F}{\partial x} \right) + |a_0| \frac{\partial F}{\partial x} = 0. \quad (14)$$

Уравнение (14) имеет два семейства корней:

$$\lambda_{\kappa}^{(1)} = i2\pi\kappa / \Theta + i\pi/2(1 - \text{sign} \partial F / \partial x) + \ln(|a_0| |\partial F / \partial x|) / \Theta, \\ \lambda_{\kappa}^{(2)} = i2\pi\kappa / \Theta, \quad \kappa = 0, \pm 1, \dots$$

Корни первого семейства обладают вещественной частью, что дает следующее условие неустойчивости монохроматического режима:

$$|a_0| \left| \frac{\partial F}{\partial x} \right| > 1. \quad (15)$$

Заметим, что предположение о независимости функций F и a от частоты v превращает отображение (12) в одномерное, для которого условие (15) является, как известно [11], условием неустойчивости неподвижной точки.

Учтем теперь зависимость функций F и a от v . Здесь в первую очередь следует обратить внимание на второе семейство корней $\lambda^{(2)}$, поскольку даже слабая зависимость упомянутых функций от v может сдвинуть корни $\lambda_{\kappa}^{(2)}$ с мнимой оси, и безразличное равновесие по соответствующему направлению будет нарушено. Семейство же $\lambda^{(1)}$ устойчиво к слабой зависимости от v .

Рассмотрим случай, когда изменение функций F и a на соседних собственных частотах генератора невелико:

$$\left| \frac{\partial a}{\partial v} \right| \frac{1}{\Theta} \ll 1, \quad \left| \frac{\partial \ln F}{\partial v} \right| \frac{1}{\Theta} \ll 1. \quad (16)$$

Для ЛБВ-генератора первое условие, как следует из вида (9) функции Грина, эквивалентно неравенству

$$L^{1/2} / \Theta \ll 1.$$

Поскольку в безразмерных переменных, в которых записано исходное уравнение (1), $\Theta \geq L$, а $|\partial \ln F / \partial v| \sim 1$, то оба неравенства (16) эквивалентны условию $L \gg 1$, выполнение которого мы предположили ранее.

Рассмотрим сначала случай, когда от v зависит только a . Поскольку семейство $\lambda^{(2)}$ в том приближении, в котором оно получено, не зависит от вида F , положим $F \equiv 1$. В этом случае искомое решение характеристического уравнения имеет вид

$$\lambda_{\kappa}^{(2)} = i \frac{2\pi\kappa}{\Theta} \left[1 + \frac{1}{\Theta} \frac{\partial \arg a(v_n)}{\partial v_n} \right] + \frac{2\pi^2 \kappa^2}{\Theta^4} \frac{1}{|a(v_n)|} \frac{\partial^2 |a(v_n)|}{\partial v_n^2},$$

т.е. при

$$\frac{\partial^2 |a(v_n)|}{\partial v_n^2} > 0 \quad (17)$$

монохроматический режим неустойчив.

Таким образом, монохроматический режим генератора, состоящего из фильтра ($a(v)$) и идеального ограничителя ($F \equiv 1$) в качестве нелинейного элемента, неустойчив, если амплитудно-частотная характеристика фильтра локально вогнутая. Этот результат был получен еще в 50-х годах И.С. Гоноровским [12].

Следует подчеркнуть, что оба критерия - (15), (17) - получены нами из одного характеристического уравнения, т.е. функциональное отображение содержит в себе оба механизма потери устойчивости. Будем называть первый механизм потери устойчивости амплитудным, а второй - частотным, поскольку первый связан с функцией отображения амплитуды и является простым обобщением механизма потери устойчивости в точечном отображении, а второй обусловлен частотными свойствами отображения.

Учтем теперь зависимость $F(v)$, но прежде покажем, что без учета этой зависимости невозможно определение механизма потери устойчивости монохроматического режима работы ЛБВ-генератора.

Действительно, амплитудно-частотная характеристика функции Грина выпуклая в достаточной широкой области вблизи максимума, приходящегося на нулевую частоту. Это простое следствие того факта, что максимальный инкремент пучковой неустойчивости достигается при точном резонансе между волной и частицами пучка. Что же касается амплитудного механизма, то, казалось бы, падающий участок зависимости $|\epsilon_{\text{вмх}}(\epsilon_{\text{вх}})|$ может при изменении параметров q и L стать достаточно крутым, чтобы выполнялось условие $|a \partial F / \partial x| > 1$. Для ЛБВ-генератора всегда, однако, выполняется обратное неравенство. Для доказательства этого утверждения определим зависимость $F(|\epsilon_0|)$, используя решения $|\epsilon(\xi)|$ уравнений в полных производных (см. рис. 2).

Зависимость $\epsilon_{\text{вмх}}(\epsilon_{\text{вх}})$ может быть получена решением уравнений с различными начальными условиями $\epsilon_{\text{вх}}$ и сопоставлением соответствующих амплитуд выходного сигнала $\epsilon_{\text{вмх}} = \epsilon(L)$ (рис.3). При $|q| \ll 1$ зависимости $\epsilon(\xi) = f(\xi, \epsilon_{\text{вх}})$ для различных начальных амплитуд отличаются друг от друга только сдвижкой по оси ξ , т.е. $f(\xi, \epsilon_{\text{вх}}) = f(\xi + \ln \epsilon_{\text{вх}} / \text{Re} \alpha)$ и $\epsilon_{\text{вмх}} = f(L + \ln \epsilon_{\text{вх}} / \text{Re} \alpha)$.

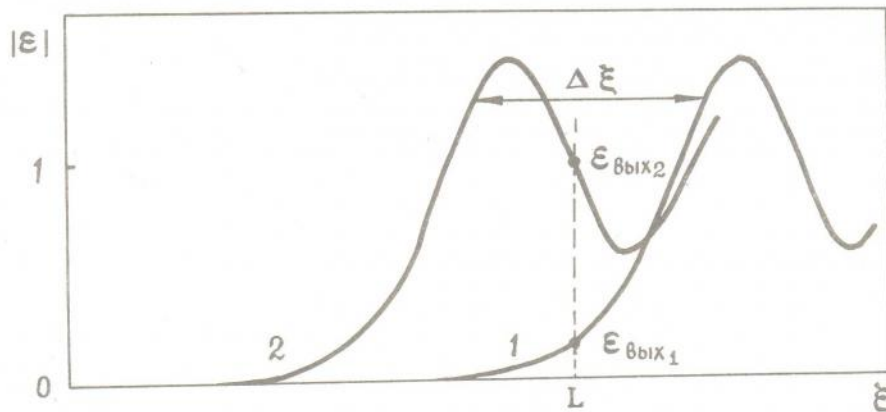


Рис.3. Построение функции отображения $\epsilon_{\text{вмх}}(\epsilon_{\text{вх}})$ по зависимости $|\epsilon(\xi)|$. Кривые 1 и 2 отличаются начальной амплитудой $\epsilon_{\text{вх}1} > \epsilon_{\text{вх}2}$. Расстояние $\Delta \xi$ определяется выражением $\Delta \xi \text{Re} \alpha = \ln(\epsilon_{\text{вх}1} / \epsilon_{\text{вх}2})$

Записав теперь уравнение генератора в дискретном времени в виде отображения

$$\varepsilon_{n+1} = |q| f(L + \ln \varepsilon_n / \text{Re} \alpha), \quad (18)$$

легко получить условие неустойчивости его неподвижной точки ε_* :

$$|\partial \ln f / \partial \xi|_{\xi = L + \ln \varepsilon_* / \text{Re} \alpha} > \text{Re} \alpha.$$

Но $|\partial \ln \varepsilon(\xi) / \partial \xi|$ максимален на линейной стадии и равен, естественно, $\text{Re} \alpha$, а на нелинейной стадии (до максимума $\varepsilon(\xi)$) уменьшается до нуля. Падающий же участок зависимости $\varepsilon(\xi)$, как это можно убедиться по численным решениям, в высокой степени симметричен относительно максимума $\varepsilon(\xi)$, т.е. и там $|f'/f| < \text{Re} \alpha$. Итерирование отображения (18) с функцией f , построенной численным решением уравнений в полных производных, подтверждает отсутствие режимов с автомодуляцией. Таким образом, наблюдаемая при численном решении уравнений (1) - (4) автомодуляция не может быть объяснена амплитудным механизмом неустойчивости.

Прежде чем перейти к выяснению причины потери устойчивости монохроматического режима генератора, заметим следующее. Отображение (18) можно записать в виде

$$x_{n+1} = f(L + \ln |q| / \text{Re} \alpha + \ln x_n / \text{Re} \alpha), \quad (19)$$

откуда видно, что параметры L и $|q|$ входят только в комбинации $L + \ln |q| / \text{Re} \alpha$. Поскольку на нелинейной стадии функция f периодична с периодом $\approx 2\pi$, то ожидать каких-либо изменений в режиме работы генератора следует при

$$L + (1/\text{Re} \alpha) \ln |q| \approx 2\pi. \quad (20)$$

Второе замечание касается возможности реализации амплитудного механизма неустойчивости в ЛБВ-генераторе. Это может быть достигнуто введением диссипации волны в пространстве взаимодействия, поскольку отмеченная нами симметрия функции $\varepsilon(\xi)$ относительно своего максимума при этом нарушается и падающий участок зависимости $\varepsilon(\xi)$ становится более крутым. При достаточно большой диссипации нами наблюдались возникновение автомодуляции и несколько бифуркаций удвоения периода, причем оба способа - решение уравнений в частных производных и итерация соответствующего отображения - дали прекрасно согласующиеся результаты. В качестве примера на рис. 4 приведены функция отображения f и устойчивый цикл 2^3 , полученные численным решением уравнений ЛБВ с диссипацией.

Вернемся теперь к функциональному отображению (12) и определим критерий неустойчивости в случае, когда функция отображения явно зависит от частоты. Предполагая выполненными условиями (16), воспользуемся методом последовательных приближений для нахождения уточненных значений корней $\lambda_x^{(2)}$ уравнения (13). В результате простых, но довольно громоздких выкладок, получим следующий критерий неустойчивости:

$$(1/2) \frac{\partial^2}{\partial v^2} |a_0| + [(\frac{\partial}{\partial v} |a_0|)^2 + \frac{\partial}{\partial v} \ln F \frac{\partial}{\partial v} |a_0|] (1 - |a_0| \frac{\partial}{\partial x} F)^{-1} > 0 \quad (21)$$

являющийся обобщением условия (17).

Смысл условия (21) станет яснее, если мы его получим другим способом. Предположим, что амплитудный механизм неустойчивости отсутствует и, более того, амплитудная функция отображения сильно сжимающая. Это означает, что амплитуда гораздо быстрее приходит к своему предельному значению, чем частота $\nu(\tau)$. В этом случае амплитуду можно считать функцией частоты и можно найти эту зависимость из условия

$$|\varepsilon(\nu)| = F(|a(\nu)|, |\varepsilon(\nu)|, \nu(\tau)), \quad (22)$$

которое следует из отображения (12). Теперь, когда амплитуда $|\epsilon(\tau)|$ связана с частотой $\nu(\tau)$, отображение (12) переходит в функциональное отображение только для фазы. Таким образом, мы приходим к эффективному фазовому отображению, исследование на устойчивость неподвижных точек (монокроматических решений) которого приводит к критерию неустойчивости

$$(1/2) \frac{d^2}{d\nu^2} |a(\nu)| + \frac{d}{d\nu} |a(\nu)| \frac{d}{d\nu} \ln |\epsilon(\nu)| > 0, \quad (23)$$

которое, если воспользоваться неявным определением (22) $|\epsilon(\nu)|$, тождественно совпадает с (21).

Если за потерю устойчивости монокроматического режима ответственен описанный выше частотный механизм неустойчивости, то точки на плоскости $(|\epsilon|, \nu)$, полученные итерацией отображения (12), должны группироваться вдоль линии $|\epsilon(\nu)|$.

Перейдем теперь к результатам численного решения уравнения (12) с функцией F , описывающей ЛБВ-усилитель. Функция F строилась по численным решениям уравнений (1) с граничными условиями $\epsilon_0(\tau) = \epsilon_0 e^{i\nu\tau}$ с различными частотами ν .

При малых значениях параметра неравновесности $L + \ln |q| / \text{Re} \alpha$ наблюдается самовозбуждение генератора на одной из собственных частот ν_n , значения которых хорошо согласуются с заранее вычисленными по условию фазового баланса. Следует отметить, что выбором граничного условия $\epsilon_0(\tau)$, $\tau \in [0, \Theta + L)$ можно добиться возбуждения генератора на той или иной из собственных частот, лежащих вблизи максимума инкремента.

С ростом параметра надкритичности монокроматический режим теряет устойчивость и возникает автомодуляция. Если за потерю устойчивости ответственен описанный выше частотный механизм (условие (23)), то точки на плоскости $(|\epsilon|, \nu)$, полученные итерацией отображения (12), должны группироваться вдоль линии $|\epsilon(\nu)|$, определяемой решением уравнения (22). Представленные на рис.5 результаты численного решения убедительно демонстрируют это.

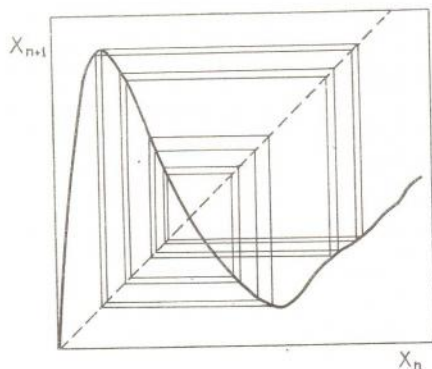


Рис.4. Цикл 2^3 и амплитудная функция отображения ЛБВ-генератора с диссипацией

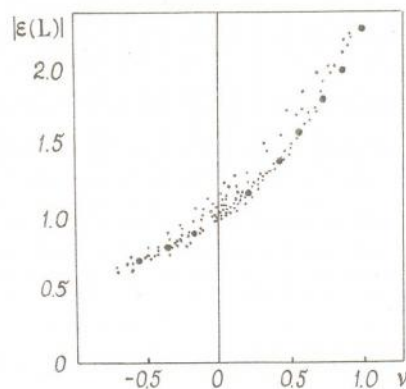
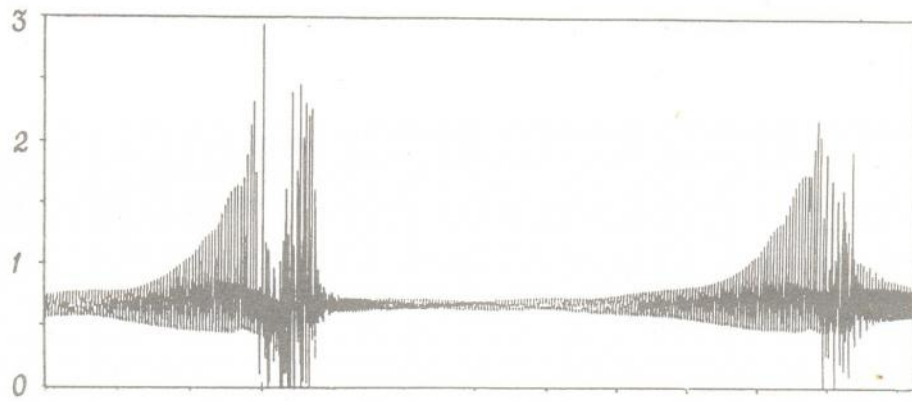
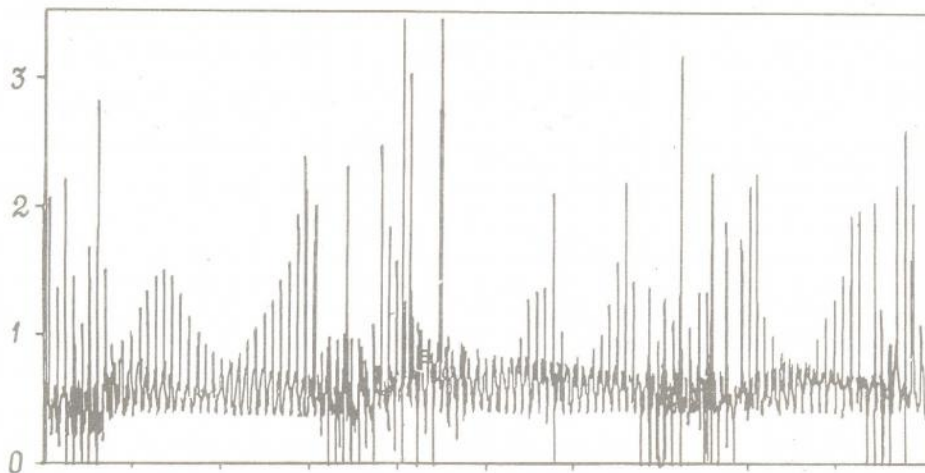


Рис.5. Результаты численного итерирования отображения (12). Крестиками отмечена функция $|\epsilon(\nu)|$ (22)

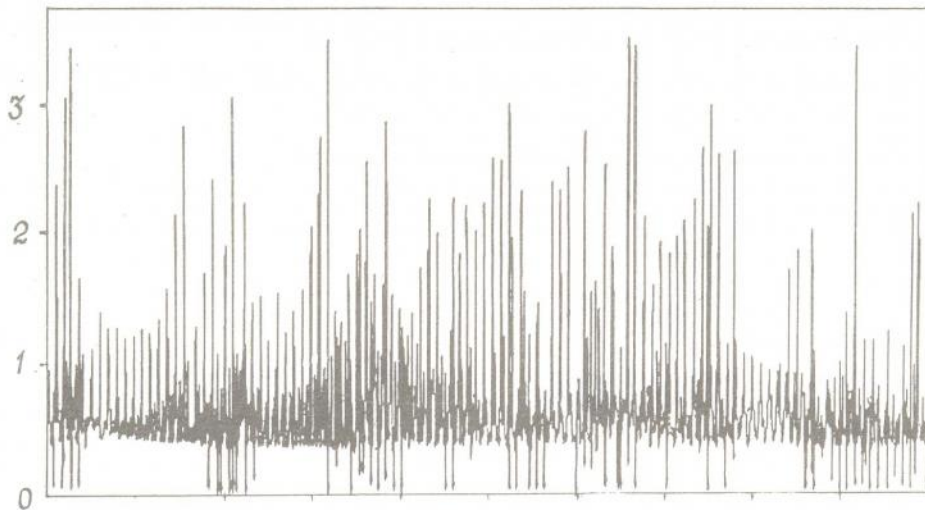
Существует еще один простой способ определения, какой из механизмов - амплитудный или частотный - приводит к автомодуляции. Для этого достаточно определить положение спутников в спектре сигнала, возникающих при превышении порога неустойчивости. В случае амплитудного механизма ближайшие



a



б



в

Рис.6. Примеры реализаций сигнала генератора при увеличении тока пучка

сателлиты расположены на расстоянии порядка π/Θ от основной частоты. В случае же частотного механизма расстояние до сателлитов в два раза больше - $2\pi/\Theta$. Это следует из вида мнимых частей корней $\lambda^{(1)}$ и $\lambda^{(2)}$ характеристического уравнения.

Приведенные на рис. 6,7 примеры реализаций и характерного спектра в развитом стохастическом режиме, полученные методом функционального отображения, подтверждают, что именно частотный механизм неустойчивости приводит к возникновению нерегулярной автомодуляции выходного сигнала ЛБВ-генератора. Об этом свидетельствует как динамика формы сигнала при увеличении параметра надкритичности (отсутствие бифуркаций удвоения периода, свойственных амплитудному механизму неустойчивости), так и спектр сигнала, в котором явно подчеркнуты частоты, отстоящие друг от друга на расстоянии порядка $2\pi/\Theta$. Характерной особенностью рассматриваемой модели является переход к хаосу через перемежающуюся турбулентность, когда участки с плавноменяющейся регулярной автомодуляцией сменяются участками с нерегулярным поведением, длительность которых возрастает с увеличением параметра надкритичности (см. рис. 6,а,б,в).

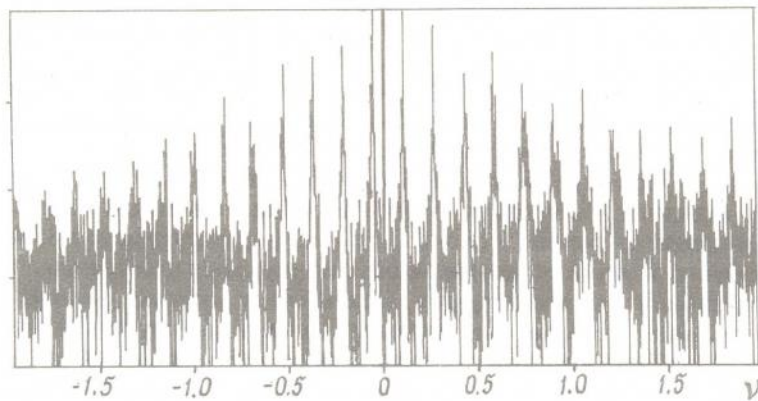


Рис.7. Характерный спектр генератора в режиме развитой стохастичности

Спектральные характеристики стохастических сигналов содержат в себе информацию о механизме неустойчивости. Для амплитудного механизма характерны однородные компактные спектры, в которых собственные частоты выделены незначительно. Частотному же механизму соответствуют спектры с хорошо выделенными собственными частотами и широкий пьедестал со сплошным спектром. Различия в ширине спектра обусловлены тем, что в первом случае сигнал модулирован, в основном, по амплитуде, а во втором случае - по частоте, и только как следствие этого - по амплитуде. Ширина же спектра при частотной модуляции всегда больше, чем при амплитудной модуляции [13].

Анализ полученных результатов позволяет сделать следующий вывод о характере физических процессов, происходящих в ЛБВ-генераторе. При малом коэффициенте обратной связи даже в режиме развитой стохастической автомодуляции взаимодействие пучка с полем на своей нетривиальной -нелинейной - стадии носит одноволновой характер. Это означает, что на нелинейной стадии в любой момент времени пучок взаимодействует с монохроматической волной, но частота и амплитуда волны различны в разные моменты времени. Разумеется, в этом утверждении содержится некоторая идеализация происходящих процессов, однако такой подход является достаточно точным. Численное решение уравнений (1) - (3) в частных производных показало, что мгновенные функции распределения частиц пучка по скоростям на выходе генератора остаются узкими, как и при

одноволновом взаимодействии, даже в развитом стохастическом режиме генерации, в то время как многоволновое взаимодействие характеризуется в несколько раз более широкой функцией распределения.

Завершая анализ результатов численных решений уравнений (1) и итерацией отображения (12), отметим следующий немаловажный факт. Если сравнить значения среднего квадрата амплитуды сигнала генератора в стохастическом режиме и в режиме монохроматической генерации, то оказывается, что в первом случае он в 1,5-2 раза больше. Это означает, что коэффициент полезного действия при переходе в режим стохастической автомодуляции генератора возрастает в 1,5-2 раза. Для объяснения этого явления обратимся к рис. 5. Как уже отмечалось, при автомодуляции точка, изображающая сигнал генератора, движется вдоль кривой $|\epsilon(\nu)|$, т.е. значения $|\epsilon(\tau)|$ бывают как больше, так и меньше соответствующего значения для потерявшего устойчивость монохроматического режима. Однако форма кривой $|\epsilon(\nu)|$ такова, что $|\epsilon(\tau)|^2$ в среднем больше своего стационарного значения, в чем легко убедиться, рассмотрев характерные для начальной стадии развития неустойчивости малые гармонические колебания частоты $\nu(\tau)$ вблизи исходной собственной частоты ν_n .

* * *

Метод функционального отображения, предложенный в данной работе, хорошо описывает те особенности распределенных систем, которые теряются при использовании точечных отображений. Для ЛБВ-генератора с запаздывающей обратной связью такой особенностью является нелокальность связи выходного сигнала со входным. Благодаря этому длинная линейная часть генератора приобретает свойства узкополосного фильтра, формирующего квазимонохроматический сигнал к началу нелинейной стадии взаимодействия. Резонансный характер пучковой неустойчивости, лежащий в основе работы генератора, приводит к сильной зависимости динамики поля и частиц пучка на нелинейной стадии от мгновенной частоты сигнала. Именно эта зависимость и определяет механизм потери устойчивости монохроматического режима генерации и возникновение стохастической автомодуляции. Особо следует подчеркнуть, что функциональное отображение исследованного вида применимо для описания нестационарных процессов не только в ЛБВ-генераторе, но и в других генераторах, основанных на распределенном взаимодействии пучка заряженных частиц с собственной волной электродинамической структуры.

Библиографический список

1. Кислов В.Я. Теоретический анализ шумоподобных колебаний в электронно-волновых системах и автогенераторах с запаздыванием // Лекции по электронике СВЧ и радиофизике. Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 1980. Т.5. С.78.
2. Гинзбург Н.С., Кузнецов С.П. Периодические и стохастические автомодуляционные режимы в электронных генераторах с распределенным взаимодействием // Релятивистская высокочастотная электроника. Горький: ИПФ АН СССР, 1981. С.101.
3. Кузнецов С.П. Сложная динамика генераторов с запаздывающей обратной связью // Изв. вузов. Сер. Радиофизика. 1982. Т.25, N 12. С.1410.
4. Анищенко В.С. Сложные колебания в простых системах. М.: Наука, 1990.
5. Дмитриев А.С., Кислов В.Я. Стохастические колебания в радиофизике и электронике. М.: Наука, 1989.
6. Гапонов-Грегов А.В., Рабинович М.И., Старобинец И.М. Динамическая модель пространственного развития турбулентности // Письма в ЖЭТФ. 1984. Т.39, N 12. С.561.

7. Анищенко В.С., Арансон И.С., Постнов Д.Э., Рабинович М.И. Пространственная синхронизация и бифуркации развития хаоса в цепочке связанных генераторов // Докл. АН. СССР. 1986. Т.28, N 5. С.1120.

8. Шапиро В.Д., Файнберг Я.Б. Квазилинейная теория возбуждения колебаний при инжекции электронного пучка в плазменное полупространство // ЖЭТФ. 1964. Т.47, N 4. С.1389.

9. Nordsieck A. Theory of large signal behavior of travellingwave amplifiers // Proc. IRE. 1953. Vol.5, N 5. P.630.

10. Вайнштейн Л.А. Нелинейная теория ЛБВ // Радиотехника и электроника. 1957. Т.2, N 8. С.1027.

11. Кузнецов С.П. Бифуркации удвоения в простой модели распределенной системы // Изв. вузов. Сер. Радиофизика. 1982. Т.25, N 11. С.1364.

12. Гоноровский И.С. К теории высокочастотных автогенераторов с запаздывающей обратной связью // Радиотехника. 1958. Т.13, N 5. С.19.

13. Харкевич А.А. Спектры и анализ. М.: Физматгиз, 1962.

Харьковский физико-технический институт

THE APPLICATION OF THE FUNCTIONAL REFLECTION METHOD TO THE TWT-GENERATOR WITH DELAYED FEEDBACK

*Yu.P. Bliokh, A.V. Borodkin, M.G. Lyubarskiy,
I.N. Onischenko, Ya.B. Fainberg*

Using the functional reflection method the nonlinear dynamics of the TWT-generator with delayed feedback is considered. It is shown, that if the feedback factor is small, the region of linear stage beam-wave interaction assumes a character of narrow-band filter. So, the quasi-monochromatic signal is formed to the beginning of the nonlinear stage of interaction. The resonance character of the beam instability leads to the strong dependence of the field dynamics on the instantaneous signal frequency. It determines the origin of stochastic automodulation mechanism of the generator output signal.



ПОИСК ПЕРИОДИЧЕСКИХ ТРАЕКТОРИЙ И ОПИСАНИЕ АТТРАКТОРА ПО ВРЕМЕННЫМ РЕАЛИЗАЦИЯМ

Д.М. Сонечкин

Описываются результаты расчетов размерностей и поиска периодических траекторий по временным рядам метеорологических данных, рассматриваемых как реализации траекторий хаотической динамической системы.

В последнее время достигнут значительный прогресс в описании структуры притягивающих множеств (аттракторов) хаотических динамических систем (ДС), в том числе их метрических и динамических свойств, таких как размерности аттрактора, энтропии ДС и ляпуновские показатели траекторий, принадлежащих ее аттрактору. Развита вычислительные алгоритмы, пригодные для расчета этих характеристик, независимо от того, известны ли эволюционные уравнения рассматриваемой ДС или нет.

Наиболее популярным, широко используемым в зарубежных и отечественных приложениях теории ДС является алгоритм оценки размерности аттракторов и энтропии, предложенный П. Грассбергером и И. Прокаччиа. Он связан с вычислением значений корреляционного интеграла по временному ряду значений одной или нескольких фазовых координат, характеризующему вероятности наблюдения двух состояний ДС, различающихся друг от друга не более чем на заданную величину. Численными экспериментами с очень простыми ДС было показано, что этот алгоритм позволяет оценить размерность аттрактора и энтропию даже по временным рядам сравнительно небольшой длительности в тех случаях, когда истинная размерность аттрактора очень невелика. При этом алгоритм оказался малочувствителен к изменению своих параметров.

Эти обнадеживающие результаты стимулировали попытки применения алгоритма Грассбергера - Прокаччиа к исследованию притягивающих множеств, которые предполагались существующими в динамике заведомо многомерных ДС, являющихся математическими моделями реальных процессов. В том числе, со второй половины 80-х годов стали появляться работы по оценке размерностей погодных и климатических аттракторов (первой из них была работа [1]). Авторы работ приходили к выводу, что размерность погодных и климатических аттракторов очень невелика (от 3 до примерно 8). Однако к тому времени уже стало известно, что оценки по алгоритму Грассбергера-Прокаччиа весьма чувствительны к выбору параметров алгоритма (объему выборки, способу ее дискретизации, построению вектора состояния, выбору размерности вложения). В частности, коррелированность исходного ряда данных по времени, его конечность и неизбежное присутствие в данных измерительных шумов приводят к систематическим смещениям в оценках размерности аттрактора по этому алгоритму. Все это заставило Грассбергера [2] усомниться в состоятельности

выводов о маломерности климатического аттрактора. Совсем недавно Э. Лоренц [3] указал на еще одну проблему, возникающую при оценках размерностей аттракторов моделей атмосферных движений из-за сложности нелинейных взаимодействий между разными фазовыми переменными этих моделей. На примере цепочки связанных осцилляторов он продемонстрировал, что реконструкция фазового портрета по ряду переменной, непосредственно связанной со сравнительно малым числом осцилляторов, приводит к довольно малым величинам размерности аттрактора, а по другим переменным, зависящим от состояний всех осцилляторов, - к большим величинам. Последние кажутся более реалистичными. Тем самым Лоренц присоединился к мнению Грассбергера о невозможности существования маломерного климатического аттрактора. Заметим, что еще в 1985 г. на семинаре по численным методам теории бифуркаций в г. Пущино (см. также [4]) автор статьи и Н.Е. Зимин на примере 30-летнего ряда ежедневных данных о зональном переносе воздуха в тропосфере умеренных широт северного полушария Земли продемонстрировали, что размерность погодного аттрактора очень велика и по алгоритму Грассбергера - Прокаччия можно оценить только "грубозернистую" размерность, получаемую в качестве функции числа шаров фиксированного радиуса, покрывающих исследуемый аттрактор. Эта оценка оказалась убывающей с ростом "грубозернистости" описания аттрактора из чего был сделан вывод, что для практических целей, когда деталями атмосферной динамики можно пренебречь (например, в задаче долгосрочного прогноза погоды), можно надеяться на создание сравнительно простых в смысле числа степеней свободы атмосферных моделей. Это прямо противоположно господствующему среди метеорологов мнению, что с ростом заблаговременности прогноза прогностическая модель должна усложняться. Методически наш вывод совпал с тем, что сказал в своей работе Лоренц [3]: оценки размерностей и других характеристик атмосферных аттракторов несмотря на формальную ошибочность делавшихся на их основе выводов, являются полезными, ибо помогают представить все многообразие разномасштабных атмосферных процессов как совокупность взаимодействующих подсистем, число степеней свободы некоторых из них может быть очень невелико. Следовательно, параметризуя взаимодействие выделенной подсистемы с другими, можно надеяться на создание конструктивных моделей долгопериодной динамики атмосферы.

Возможно, подобный вывод будет справедлив для широкого класса ДС как моделей реальных физических процессов. При этом полезно иметь в виду следующее.

Общая форма эволюционных уравнений реальных процессов имеет вид

$$\varepsilon_1 \frac{dx}{dt} = X(x, y, z, f), \quad \frac{dy}{dt} = Y(x, y, z, f), \quad \frac{dz}{dt} = \varepsilon_2 Z(x, y, z, f), \quad (1)$$

где x - "быстрые" и z - "медленные" переменные относительно непосредственно интересующих исследователя переменных y ; x, y, z заданы в многомерном или даже бесконечномерном гильбертовом пространстве с соответствующими начальными и краевыми условиями; ε_1 и ε_2 - малые параметры, введенные так, что в масштабе времени t переменные x приспособиваются к $y(x \cong X^{-1}(x, y, z, f))$, а переменные z примерно постоянны ($z \cong z_0$), f - внешние силы. В выделенном временном масштабе эволюционная система (1) может быть тогда аппроксимирована ДС:

$$\frac{dy}{dt} = Y(X^{-1}(x, y, z_0, f), y, z_0, f). \quad (2)$$

Последняя, при условии ее диссипативности, имеет аттрактор, который может быть вложен в конечномерное многообразие, называемое инерциальным [5]. Ясно, что для оценки размерности инерциального многообразия и самого аттрактора ДС (2) можно воспользоваться временным рядом реализации (1) для

переменных u длиной не более ε_2^{-1} , а число отсчетов реализации на единицу времени должно быть порядка ε_1^{-1} . В противном случае на геометрии наблюдаемого фазового портрета ДС будут заметно сказываться короткопериодные осцилляции, обусловленные взаимодействием x с u , и/или долгопериодные "тренды", обусловленные взаимодействием u с переменными z . Таким образом, в реальных системах эффективная длина временного ряда исходных данных всегда ограничена. За это время трудно рассчитывать на наблюдение всех тонких деталей динамики (1). Аттрактор ДС (2) может быть поэтому реконструирован только в своих основных чертах. Во всяком случае, из-за "тренда" рассчитывать на наблюдение его канторовской структуры вряд ли придется. Скорее, можно говорить только о реконструкции по ряду структуры инерциального многообразия и даже только его, наиболее часто посещаемой, части. Наша гипотеза состоит в том, что многообразие является "толстым" фракталом, т.е. имеет положительную меру и целую размерность, а наиболее важной структурной его характеристикой является лакунарность, для оценки которой надо вычислять весь спектр обобщенных размерностей фрактала.

Известно, что при использовании конечного временного ряда данных для расчета корреляционного интеграла оценка последнего в зависимости от радиуса покрывающих шаров оказывается ступенчатой функцией. Это препятствует оценке корреляционной размерности путем предельного перехода к нулевому радиусу. Кроме того, для расчета обобщенных размерностей необходимо [6] возводить в разные степени, в том числе отрицательные, поточечные значения корреляционного интеграла, некоторые из них при этом оказываются нулевыми. Это приводит в обобщенном алгоритме Грассбергера - Прокаччия к делению на нуль. Поэтому алгоритм Грассбергера - Прокаччия мало подходит для оценок размерностей в этих условиях. В меньшей степени проявляются отмеченные недостатки у другого алгоритма оценки характеристик аттрактора эксплуатирующего скейлинговые свойства расстояния от произвольной точки аттрактора до ее 1-2-, ..., k -го ближайшего соседа в конечной выборке. Этот скейлинг проявляется по номеру " k " и, для фиксированного номера, по длине выборки [7,8]:

$$D_k \overline{\ln r(k, N)} = \Psi(k) - \ln N, \quad (3)$$

где $\overline{\ln r(k, N)}$ - среднее по выбранным референц-точкам аттрактора значение логарифма расстояния от каждой из них до k -го ближайшего соседа, рассчитанное по ряду из N точек аттрактора; если принять $\Psi(k) = \ln k$, это приведет к смещению оценки размерности; если же согласно [8] принять $\Psi(k) = \frac{d \ln \Gamma(k)}{dk}$, то эта замена

даст несмещенную оценку. Аналогичные (3) формулы легко выписываются для всего спектра обобщенных размерностей путем замены логарифма расстояния, которое всегда ненулевое, на его q -ю степень. Но не будем рассматривать весь спектр размерностей, а укажем лишь более простой способ учета неоднородности аттрактора через посредство нормировки $\ln r(k, N)$ на $\ln r(\max, N)$ - логарифм расстояния от референц-точки до наиболее удаленной от нее точки из выборки. Этот способ опирается на кажущееся разумным предположение, что внутренние части аттрактора посещаются типичной фазовой траекторией, составляющей выборку данных, чаще, чем граничные части аттрактора. Поэтому для референц-точки внутри аттрактора расстояния до ее ближайших соседей и до самых удаленных точек выборки будут меньше, чем соответствующие расстояния для близких к границам аттрактора референц-точек. Нормировка уменьшает вариации расстояний до ближайших соседей от одной референц-точки к другой.

Этот алгоритм был применен к анализу рядов временных колебаний полей среднемесячной температуры воздуха на территории бывшего СССР и зарубеж-

ной Европы в течение XX века. Так как температура воздуха имеет годовой ход, данные каждого месяца анализировались отдельно, т.е. как бы бралось отображение Пуанкаре на секущей по периоду внешней силы. Исходные данные на 55-ти метеостанциях предварительно преобразовывались во временные ряды коэффициентов разложения по так называемым естественным ортогональным составляющим (собственным векторам ковариационной матрицы изменчивости аномалий температурного поля на станциях относительно норм соответствующих месяцев года, что известно в радиофизике как разложение Карунена - Лоева, а в теории ДС - как сингулярный анализ).

Фазовый вектор составляли несколько первых, отвечающих наибольшим собственным числам матрицы, коэффициентов за два последовательных месяца. Детали всей процедуры предварительной обработки данных приведены в [9], где описано также их использование в схеме долгосрочного прогноза поля температуры методом "аналогов", а именно: за "прогноз" принимается поле температуры месяца, следующего сразу после месяца (данные по его полю температур берутся из архива), являющегося ближайшим соседом текущего месяца. Этот метод прогноза очень близок к описанным в [10-12].

Число коэффициентов, по которым подбирались для прогноза аналоги из архива, определялось по размерности аттрактора, оцененной предварительно величиной около шести по алгоритму Грассбергера - Прокаччия. Однако хорошей схожести этой оценки при увеличении размерности пространства вложения вплоть до 30 не получалось. Для уточнения оценки, а также для распространения метода прогноза на поля температуры с двух-, трех- и шестимесячным осреднением, был использован алгоритм (3), причем рассматривались первые семь ближайших соседей и оценка размерности делалась поточечно, т.е. отдельно для каждого года за период 1985-1991.

В логарифмических координатах графики зависимости расстояния до k -го соседа как функции " k " оказались для каждого года довольно заметно отличными от прямых линий и сильно смещенными по ординате относительно друг друга: для одних годов удалось найти в архиве очень хорошие аналоги, для других - нет. Но после того как была введена нормировка на величину расстояния до наиболее удаленной точки из архива (метеорологи называют ее лучшим антилогом) и за абсциссу графиков была взята логарифмическая производная гамма-функции, графики сблизались между собой и стали почти прямыми линиями. После же усреднения по годам средний график стал почти идеально прямой линией. Значит скейлинг по номеру соседа имеет место. Угол наклона среднего графика к оси абсцисс варьируется от месяца к месяцу, что вполне естественно, ибо картина отображения Пуанкаре зависит от выбора секущей (например, для одномесячного осреднения оценка размерности по наклону варьируется от 4.18 при подборе аналогов для прогноза на январь до 6.24 при прогнозе на август). Похожие оценки получились для данных с другими осреднениями температуры. Все эти расчеты были сделаны при размерности вложения, равной шести, а затем - двенадцати. В последнем случае отдельные поточечные размерности, например, для данных с трехмесячным осреднением в прогнозе на февраль - март - апрель в среднем за 1981-1991 гг. дали заметно большие величины - 9.90.

Надо отметить, что экстремально теплые зимы последнего десятилетия, связываемые некоторыми метеорологами с "парниковым эффектом", в терминах модели (1), (2) можно интерпретировать как климатический "тренд", меняющий аттрактор в целом. Чтобы проверить эту интерпретацию, против альтернативы, что наблюдаемый рост размерности (и потепление зим) обусловлен попаданием реализующейся в реальности траектории погодного аттрактора в его редко посещаемую часть, были рассчитаны расстояния от 1-до 7-го лучших аналогов и лучшего антилога по рядам разной длительности: до 1920 г. с референц-точками

за 1921-31 гг., до 1940 г. с референц-точками за 1941-51 гг. и т.д. до 1960 г. и 1980г. Оказалось, что для размерности вложения шесть скейлинг по длине ряда по формуле (3) действительно существует даже без нормировки по антилогу. Он дает среднюю размерность, например, для подбора аналогов при прогнозе на февраль - март - апрель, равную 5.30 по 1-му аналогу и 3.30 - по 7-му. Эти цифры свидетельствуют о том, что по мере роста длины архива данных с 20 - до 80-ти и более лет расстояния от референц-точки до ее ближайших соседей убывают. Это вполне естественно, если только ряд не слишком нестационарен, когда эти расстояния не должны зависеть от длины архива. После нормировки на расстояние до антилога эти цифры уменьшились до 2.90 и 1.75 соответственно, так как при росте архива расстояния до лучшего антилога росли и относительные расстояния до лучших аналогов убывали еще более быстро, чем абсолютные расстояния.

При увеличении размерности вложения до 12-ти, однако, из-за данных за 80-е годы скейлинг по объему архива нарушился для абсолютных расстояний до ближайших соседей. Это навело на мысль, что климатический "тренд" все же проявляется в 80-е годы. Но при введении нормировки и эти данные показали вполне удовлетворительный скейлинг. По 1-му аналогу получилась оценка размерности 4.37, а по 7-му - 4.84. Из этого можно сделать вывод об отсутствии в рассматриваемых температурных рядах климатических "трендов". Аномально теплые зимы 80-х годов более вероятно считать проявлением внутренней изменчивости атмосферы, а именно: попаданием текущей фазовой траектории в ранее редко посещаемую часть аттрактора при сохранении неизменной его формы в целом, что доказывается сохранением его скейлинговых свойств в течение всего XX века.

Коль скоро температурный ряд данных за XX век можно считать порожденным фазовой траекторией атмосферного аттрактора, допустимо поставить вопрос о его топологической структуре. Как известно [13-15], странный аттрактор есть замыкание счетного множества периодических траекторий. Т.е. сколь угодно близко к любой точке аттрактора проходит какая-либо периодическая траектория. Типичная траектория аттрактора блуждает между периодическими траекториями, поочередно притягиваясь к одной из них и копируя ее в течение некоторого промежутка времени, после чего покидает ее окрестность и притягивается к другой периодической траектории. Такую типичную траекторию можно аппроксимировать дугами периодических траекторий, окрестности которых она посетила за рассматриваемый период времени. Сами периодические траектории не очень долгого периода можно экстрагировать из наблюдаемого временного ряда данных хаотической ДС [14]. В общем случае число периодических траекторий странного аттрактора растет с ростом длины их периода и по асимптотике этого роста даже можно оценить размерность аттрактора. Но для систем типа (1), (2), где аттрактор наблюдаем только на конечном временном интервале, трудно рассчитывать на наблюдение большого числа периодических траекторий. Очень долгопериодные траектории просто не имеют смысла, ибо их период превосходит временной масштаб, необходимый для перехода системы (1), (2) к стационарному состоянию.

Используя алгоритм экстрагирования периодических траекторий из ряда хаотических данных типа, описанного в [14], мы исследовали периодичности временного ряда коэффициентов разложения по естественным составляющим поля средних температур воздуха на территории бывшего СССР и зарубежной Европы в холодный период года (с октября по март). Признаком периодической траектории было замыкание отрезка временного ряда, т.е. уменьшение расстояния в реконструированном фазовом пространстве между некоторой начальной и некоторой конечной точкой отрезка заданной длины до первой предписанной величины. Последняя варьировалась от эксперимента к эксперименту. Все

найденные отрезки одного и того же периода считались относящимися к окрестности одной периодической траектории, если при каком-то фазовом сдвиге их относительно друг друга они оказывались различающимися не более чем на вторую предписанную величину. Из совпавших по этому признаку отрезков траектории вычислялась средняя - эталон соответствующей периодической траектории. Совокупность всех эталонов для всех периодов служит алфавитом для кодирования всего температурного ряда и аппроксимации его дугами эталонов.

Более того, рассматривая текущий холодный период как самую последнюю референц-точку хаотического ряда, среди эталонов можно найти тот, какая-то фаза которого является ближайшим соседом текущей референц-точки. Расстояние может считаться с учетом устойчивости продолжения референц-точки относительно эталона, что можно использовать в целях прогноза более содержательного, чем вышеупомянувшиеся прогнозы по "анalogии" текущего состояния атмосферы.

Эксперименты по поиску периодических траекторий температурных рядов были проведены сначала в шестимерном фазовом пространстве вложения и для контроля - в девятимерном пространстве. В целом они согласуются между собой. Не вдаваясь в детали полученных результатов, укажем, что наиболее надежно из ряда данных выделились периодические траектории с периодами 3, 7, 11, 9 (3x3) и 14 (2x7) лет. Их природа согласно численным экспериментам с малокомпонентными атмосферными моделями связана с субгармоническими резонансами годового хода притока тепла к атмосфере с колебаниями, возбуждаемыми при разрушении, так называемой, бароклиной неустойчивости атмосферы. Резонансы описываются на бифуркационной диаграмме атмосферных моделей [16] "чертовой лестницей" чередования рациональных и иррациональных значений для отношений частот годового хода притока тепла и бароклиной неустойчивости, вычисляемой по правилу Фейри. Алфавит выделенных периодических траекторий согласно [15] полезно дополнить информацией о числах вращения траекторий относительно друг друга, что может быть использовано как в целях прогноза, так и для обнаружения нарушений стационарности временного ряда. В настоящее время указанная работа для температурных рядов данных находится в стадии выполнения.

Библиографический список

1. *Nicolis C., Nicolis G.* Is there a climatic attractor? // *Nature*. 1984. Vol.311. P.529.
2. *Grassberger P.* Do climatic attractor exist? // *Nature*. 1986. Vol. 323. P.609.
3. *Lorenz E.N.* Dimension of weather and climatic attractors // *Nature*. 1991. Vol. 353. P.241.
4. *Сонечкин Д.М.* Об оценке числа степеней свободы крупномасштабных атмосферных процессов // *Тр. Гидрометцентра СССР*. 1987. Вып. 290. С.27.
5. *Temam R.* Infinite dimensional dynamical systems in mechanics and physics // *Applied Mathem. Sciences*, Springer, 1988. Vol. 68.
6. *Pawelzik K., Schuster H.G.* Generalized dimensions and entropies from a measured time series // *Phys. Rev. A*. 1987. Vol. 35. N 1. P.481.
7. *Badii R., Politi A.* Hausdorff dimension and uniformity factor of strange attractors // *Phys. Rev. Lett.* 1984. Vol. 52. N 19. P.1661.
8. *Grassberger P.* Finite sample corrections to entropy and dimension estimates // *Phys. Lett. A*. 1988. Vol. 128. N 6,7. P. 369.
9. *Виноградская А.А., Зимин Н.Е., Сонечкин Д.М.* Предельные возможности долгосрочного прогноза погоды по архивным данным // *Метеорология и гидрология*. 1990. N 10. С.5.

10. *Farmer J.D., Sidorowich J.J.* Predicting chaotic time series // *Phys. Rev. Lett.* 1987. Vol. 59. N 8. P.845.
11. *Sugihara G., May R.M.* Nonlinear forecasting as a way of distinguishing chaos from measurement error in time series // *Nature*. 1990. Vol. 344. P.734.
12. *Abarbanel H.D.I., Brown R., Kadtke J.B.* Prediction in chaotic nonlinear systems: methods for time series with broadband Fourier spectra // *Phys. Rev. A*. 1990. Vol. 41. N 4. P.1782.
13. *Procaccia I.* Universal properties of dynamically complex systems: the organization of chaos // *Nature*. 1988. Vol. 333. P.618.
14. *Auerbach D.* et al. Exploring chaotic motion through periodic orbits // *Phys. Rev. Lett.* 1987. Vol. 58. N 23. P.2387.
15. *Mindlin G.B.* et al. Classification of strange attractors by integers // *Phys. Rev. Lett.* 1990. Vol. 64. N 20. P.2350.
16. *Виноградская А.А.* и др. Теория годового хода зональной циркуляции атмосферы. 2. Четырнадцатимодовая модель суб- и супергармонических резонансов // *Тр. Гидрометцентра СССР*. 1988. Вып. 297. С. 166.

*Гидрометцентр России
Москва*

IDENTIFICATION OF THE PERIODIC TRAJECTORIES AND ATTRACTORS DESCRIPTION BY TIME SERIES

D.M. Sonechkin

The results of calculation of dimensions and identification of periodic trajectories by time series of meteorological data considered as series of trajectories of chaotic dynamic system are described.



НЕУСТОЙЧИВОСТЬ И ДИНАМИЧЕСКИЙ ХАОС ПРИ СЛАБОНЕЛИНЕЙНОМ ВЗАИМОДЕЙСТВИИ ВОЛН

В.А. Буц, А.Н. Курпьянов, О.В. Мануйленко, А.П. Толстолужский

Предлагается критерий возникновения хаотической динамики при слабонелинейном взаимодействии волн. При этом обобщается критерий возникновения хаоса при взаимодействии типа волна - частица. Роль ширины нелинейного резонанса играет инкремент неустойчивости. Численный анализ подтверждает этот критерий.

Введение

Исследование динамических систем, траектории которых являются сложными, хаотическими, в большинстве случаев возможно только численными методами. Однако в той области фазового пространства, где отсутствуют инвариантные поверхности, ограничивающие движение, для описания системы могут быть с успехом использованы методы статистической физики.

Обычная эволюция траекторий динамической системы при изменении ее параметров заключается в следующем. При определенных значениях параметров траектории являются регулярными и достаточно простыми. Изменение значений параметров может привести к локальной стохастичности, т.е. к возникновению в фазовом пространстве областей стохастичности, которые разделены инвариантными поверхностями. И, наконец, при достижении параметрами некоторых критических значений возникает глобальная неустойчивость, когда область хаотического движения становится односвязной, а инвариантные поверхности разрушены. Для анализа регулярных траекторий с успехом применяются разнообразные асимптотические методы; в области же стохастичности, чтобы определить характер траекторий, а также методы, которыми они могут быть исследованы, необходимо знать критерии перехода от регулярного движения к стохастическому. В настоящее время существует несколько критериев перехода к глобальной стохастичности (см., например, [1]).

Наиболее простым и эффективным является критерий Чирикова [2,3]. Так как этот критерий (и многие другие) основан на понятии нелинейного резонанса, то он удобен и широко используется при изучении процессов, включающих в себя взаимодействие типа волна - частица.

В настоящей работе сформулированы условия, при выполнении которых динамика взаимодействия типа волна - волна становится хаотической. Эти условия проверяются на системе, описывающей взаимодействие ВЧ и НЧ волн в нелинейных средах.

1. Формулировка критерия

Как известно, перекачка энергии из одной волны в другие при их нелинейном взаимодействии носит характер неустойчивости. При этом естественно предположить, что величина инкремента развития этой неустойчивости (Γ) играет роль ширины нелинейного резонанса при взаимодействии типа волна - волна. Далее, можно предположить, что динамика этого взаимодействия будет хаотической, когда параметр $K = \Gamma / \delta\omega$ станет больше единицы ($K > 1$), где $\delta\omega$ - расстояние между резонансами различных волн. Отметим, что величина $\delta\omega$ обычно пропорциональна минимальной частоте.

Такая формулировка критерия основана на качественной картине процесса слабонелинейного взаимодействия волн. Для более строгого обоснования его рассмотрим хорошо изученный процесс распада. Пусть волна с амплитудой a_1 , волновым вектором k_1 и частотой ω_1 распадается на две волны $(a_2, k_2, \omega_2, a_3, k_3, \omega_3)$. Кроме того, предположим, что имеется еще одна волна (a_4, k_4, ω_4) , у которой $k_4 = k_3$, $\omega_4 - \omega_3 = \Delta \ll \omega_1$.

Рассмотрим случай, когда четвертая волна не влияет на процесс распада. Тогда уравнения для динамики изменения амплитуд и фаз трех взаимодействующих волн имеют вид [4, формула (2.10)]

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau} a_1 &= iV^* a_2 a_3, \\ \frac{d}{d\tau} a_2 &= iV a_1 a_3^*, \\ \frac{d}{d\tau} a_3 &= iV a_1 a_2^*, \end{aligned} \quad (1)$$

где V - матричный элемент взаимодействия. На линейной стадии ($|a_1| = \text{const}$, $\varphi_1 = \text{const}$) процесс распада характеризуется экспоненциальным ростом амплитуд $|a_2|$ и $|a_3|$ с инкрементом $\Gamma = |a_1| |V|$. Изменение фазы $\varphi = 2\varphi_2 + 2\varphi_3$ подчиняется уравнению математического маятника:

$$\frac{d^2}{d\tau^2} \Phi + (2|a_1| |V|)^2 \sin(\Phi) = 0, \quad (2)$$

из которого видно, что полуширина нелинейного резонанса равна 4Γ .

Пусть теперь отсутствует третья волна, а в трехволновом взаимодействии вместо нее участвует четвертая волна. Тогда система уравнений, описывающая динамику амплитуд взаимодействующих волн, будет иметь вид ($\delta = \omega_1 - \omega_2 - \omega_4$)

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau} a_1 &= iV_1^* a_2 a_4 \exp(i\delta\tau), \\ \frac{d}{d\tau} a_2 &= iV_1 a_1 a_4^* \exp(-i\delta\tau), \\ \frac{d}{d\tau} a_4 &= iV_1 a_1 a_2^* \exp(-i\delta\tau). \end{aligned} \quad (3)$$

На линейной стадии для фазы $\Psi = 2\varphi_2 + 2\varphi_4 + 2\delta\tau$ также получаем уравнение (2), где $\Gamma = \Gamma_1 = |a_1| |V_1|$. Откуда следует, что расстояние между нелинейными резонансами равно 2δ . Предполагая, что ширина нелинейного резонанса для фаз на линейной стадии для четвертой волны мала ($\Gamma_1 \ll \Gamma$), получим условие перекрытия нелинейных резонансов, а соответственно, условие возникновения стохастической неустойчивости: $2\Gamma/\delta > 1$. Отметим, что приведенный критерий, так же, как и другие [1], позволяет определить область параметров, в которой динамика системы становится хаотической. Что касается границы перехода к хаосу, то для ее определения требуются более тщательные аналитические или численные исследования.

2. Основные уравнения

Сформулированные выше условия перехода к стохастичности проверяются на примере нелинейного взаимодействия высокочастотных (ВЧ) и низкочастотных (НЧ) волн в средах с квадратичной нелинейностью. В приближении слабой нелинейности уравнения для определения комплексных амплитуд взаимодействующих волн легко находятся из системы уравнений Максвелла и уравнений движения среды. Будем для простоты считать, что во взаимодействии участвует только одна НЧ волна, затухание отсутствует, а коэффициенты матрицы взаимодействия не зависят от номера ВЧ волны. В этих приближениях систему уравнений, описывающую динамику взаимодействующих волн, можно привести к виду

$$\begin{aligned} i \frac{d}{d\tau} a_n &= b a_{n-1} \exp(i\Delta\tau) + b^* a_{n+1} \exp(-i\Delta\tau), \\ \frac{d^2}{d\tau^2} b + \Omega^2 b &= - \sum_n a_{n-1}^* a_n \exp(-i\Delta\tau), \end{aligned} \quad (4)$$

где a_n - комплексная амплитуда ВЧ волны с номером n , b - комплексная амплитуда НЧ волны, $\Delta = \omega_n - \omega_{n-1}$; ω_n - частота ВЧ волны с номером n , Ω - частота свободных НЧ колебаний.

При получении системы (4) также предполагалось, что между взаимодействующими волнами имеется пространственный синхронизм, т.е. выполнены условия $k_n - k_l = \bar{x}$, где k_n - волновой вектор ВЧ волны с номером n , l , \bar{x} - волновой вектор НЧ волны. Нас в общем случае будут интересовать процессы, характерное время развития которых может быть меньшим периода НЧ волны ($T_{нч}$). Поэтому в системе уравнений (4) уравнение для НЧ волны является полным, второго порядка, т.е. не укорочено. Если характерные времена нелинейных процессов значительно меньше $T_{нч}$, то в (4) можно подставить $b = b_1(\tau) \exp(-i\Omega\tau)$. Считая, что b_1 медленно меняется со временем, усредним полученные уравнения по периоду НЧ волны. В результате имеем систему уравнений, которая впервые, по-видимому, была получена в [5,6] и анализировалась многими авторами:

$$\begin{aligned} i \frac{d}{d\tau} a_n &= b a_{n-1} \exp(i\delta\tau) + b^* a_{n+1} \exp(-i\delta\tau), \\ i \frac{d}{d\tau} b &= \sum_n a_{n-1}^* a_n \exp(-i\delta\tau), \end{aligned} \quad (5)$$

где $\delta = (\omega_n - \omega_{n-1} - \Omega)$ - расстройка.

Системы уравнений (4) или (5) описывают широкий круг нелинейных процессов взаимодействия волн. В частности, в зависимости от начальных условий эти системы описывают либо процессы распада (когда вначале задана одна высокочастотная волна, например, процессы $l \rightarrow l'+l$, $l \rightarrow l'+s$), либо процессы слияния (когда вначале задана одна ВЧ волна и амплитуда НЧ волны), либо процессы типа beat-wave (когда вначале заданы амплитуды двух ВЧ волн). На небольших временах, когда амплитуды всех волн, кроме заданных, малы, а заданные изменились незначительно, система (4) может быть линеаризована и из нее легко находится инкремент неустойчивости соответствующего процесса (Γ). Его величина пропорциональна амплитудам первоначально заданных волн ($\Gamma = \Gamma(a_{n0}, b_0)$). Если $K > 1$, то, как мы предположили, должен наступить динамический хаос.

3. Трехволновое взаимодействие

Рассмотрим подробнее наиболее простые и важные случаи нелинейного взаимодействия трех волн, распространяющихся в нелинейной среде:

1) распад ВЧ поперечной электромагнитной волны с частотой ω_0 , волновым вектором \vec{k}_0 и амплитудой \vec{A}_0 , которая распадается в плазме на электромагнитную ($\omega_{-1}, \vec{k}_{-1}, \vec{A}_{-1}$) и ленгмюровскую ($\omega_p, \vec{k}_p, \vec{A}_p$) волны;

2) аналогичный процесс в замагниченной плазме ($\omega_H^2 \gg \omega_p^2$);

3) распад волны ($\omega_0, \vec{k}_0, \vec{A}_0$), распространяющейся в замагниченном, компенсированном по заряду электронном пучке, на электромагнитную ($\omega_{-1}, \vec{k}_{-1}, \vec{A}_{-1}$) и пучковую ($k_p \vec{V}, k_p, \vec{A}_p$) волны. Таким образом, во всех трех случаях рассматриваем процесс распада $t \rightarrow t+1$.

Из уравнений Максвелла и гидродинамических уравнений движения плазмы (пучка) для описания динамики распада несложно получить систему (4), в которой $n = \{0, -1\}$;

$$\begin{aligned}
 1) \quad & a_0 \equiv A_0(\tau)/A_0(0); \quad a_{-1} \equiv A_{-1}(\tau)/A_0(0)\{\omega_{-1}/\omega_0\}^{1/2}; \\
 & b \equiv [\delta n/n_0]\{\sigma(k_p, 0, A_0)\cos\alpha\}^{1/3}; \quad \tau \equiv \theta t; \quad \Omega^2 \equiv \omega_p^2/\theta^2; \\
 & \Delta \equiv \{\omega_0 - \omega_{-1}\}/\theta; \quad \theta \equiv \{\lambda(k_p, 0, A_0)\cos^2\alpha\}^{1/3}; \\
 3) \quad & a_0 \equiv A_{oz}(\tau)/A_{oz}(0); \quad a_{-1} \equiv A_{-1z}(\tau)/A_{oz}(0)(\omega_{-1}/\omega_{-1}^*)(\omega_0^*/\omega_0)(\omega_{-1}/\omega_0)^{1/2}; \\
 & b \equiv [\delta n/n_0]\sigma(k_{pz}, V_0, A_{oz})^{1/3}; \quad \tau \equiv \lambda(k_{pz}, V_0, A_{oz})^{1/3}t; \\
 & \Omega^2 \equiv (k_{pz}^2/k^2)\omega_p^2\lambda^{-2/3}; \quad \Delta \equiv \{\omega_0 - \omega_{-1}\}\lambda^{-1/3}; \\
 & \lambda(k_{pz}, V_0, A_{oz}) \equiv k_{pz}^2\omega_p^4[A_{oz}^2/32\pi m_e n_0]\{\omega_0/\omega_0^*\}^2[1/\omega_{-1}\omega_{-1}^*\omega_0]; \\
 & \sigma(k_{pz}, V_0, A_{oz}) \equiv k_{pz}^2\omega_p^2[\pi m_e n_0/A_{oz}^2]\{\omega_{-1}/\omega_0\}^{1/2}\{\omega_{-1}/\omega_{-1}^*\}^2; \quad \omega_n^* \equiv \omega_n - \vec{k}_n \vec{V}_0.
 \end{aligned}$$

Здесь δn - медленные возмущения этой плотности, n_0 - невозмущенная плотность плазмы; α - угол между векторами \vec{A}_0 и \vec{A}_{-1} ; $\omega_p^2 = 4\pi n_0 e^2/m_e$ - частота ленгмюровских колебаний плазмы; e - заряд электрона, m_e - масса электрона, \vec{V}_0 - невозмущенная скорость пучка. Если в п.3) принять $\vec{V}_0 = 0$, то получим переменные для описания распада в замагниченной плазме (см. п.2)).

3.1. Начальная стадия распада. Инкремент неустойчивости. Критерий стохастичности

На небольших временах, когда амплитуда волны A_0 (волны накачки) меняется мало, распад $t \rightarrow t+1$ носит характер неустойчивости. Величину инкремента этой неустойчивости легко найти из системы уравнений (4), полагая в ней амплитуду волны накачки a_0 постоянной и равной 1, т.е. решая систему (4) в приближении заданной амплитуды a_0 . В начальный момент времени амплитуды всех остальных волн малы. В этом случае система (4) становится линейной. Полагая в ней $b = b_0 \exp(-i\omega\tau)$ и $a_{-1} = a_{-10} \exp(-i\omega\tau - i\Delta\tau)$, для определения комплексной величины ω получим следующее дисперсионное уравнение:

$$(\omega^2 - \Omega^2)(\omega + \Delta) = 1. \quad (6)$$

В рассматриваемом случае параметром, определяющим различный характер динамики поля, естественно выбрать амплитуду волны накачки A_0 . Когда эта амплитуда достаточно мала, так что $\Omega^2 \gg 1$, то максимальная величина инкремента достигается в условиях точного выполнения резонансных условий $\omega_0 - \omega_{-1} = \omega_p$:

$$\Gamma = \text{Im}\omega = 1/\sqrt{2}\Omega. \quad (7)$$

Условие $\Omega^2 \gg 1$ с учетом (7) означает, что параметр $K = \Gamma/\Omega \ll 1$. В данном случае происходит регулярный процесс перекачки энергии из волны накачки в энергию рассеянной поперечной волны и в энергию ленгмюровской волны.

Рассмотрим теперь случай больших амплитуд поля волны накачки ($\Omega^2 \ll 1$). Максимальное значение величины инкремента в этом случае достигается при $\Delta \rightarrow 0$:

$$\Gamma = \text{Im} \omega = \sqrt{3}/2. \quad (8)$$

Параметр K в этом случае превышает единицу ($K > 1$) и процесс распада должен быть хаотическим, а для его описания могут быть использованы методы статистической физики.

3.2. Анализ численных результатов

Система уравнений (4) была решена численно для различных значений амплитуды волны накачки. Были исследованы временная динамика амплитуд взаимодействующих волн (рис. 1,а, 2,а), спектры полученных реализаций (рис. 1,б, 2,б) и автокорреляционные функции (рис. 1,в, 2,в). Характерные зависимости этих величин для случая, когда $K < 1$, представлены на рис. 1. Из этих рисунков видно, что реализуется обычный процесс трехволнового взаимодействия. Амплитуды взаимодействующих волн периодически меняют свою величину, спектр реализаций линейчатый, а корреляционная функция осциллирует, почти не меняя своей величины. Динамика поля качественно меняется, когда амплитуда волны накачки достигает такой величины, что параметр K становится больше единицы ($K > 1$) (см. рис. 2). В этом случае поля становятся хаотическими, спектры - широкими, сплошными, а корреляционная функция быстро спадает до нуля.

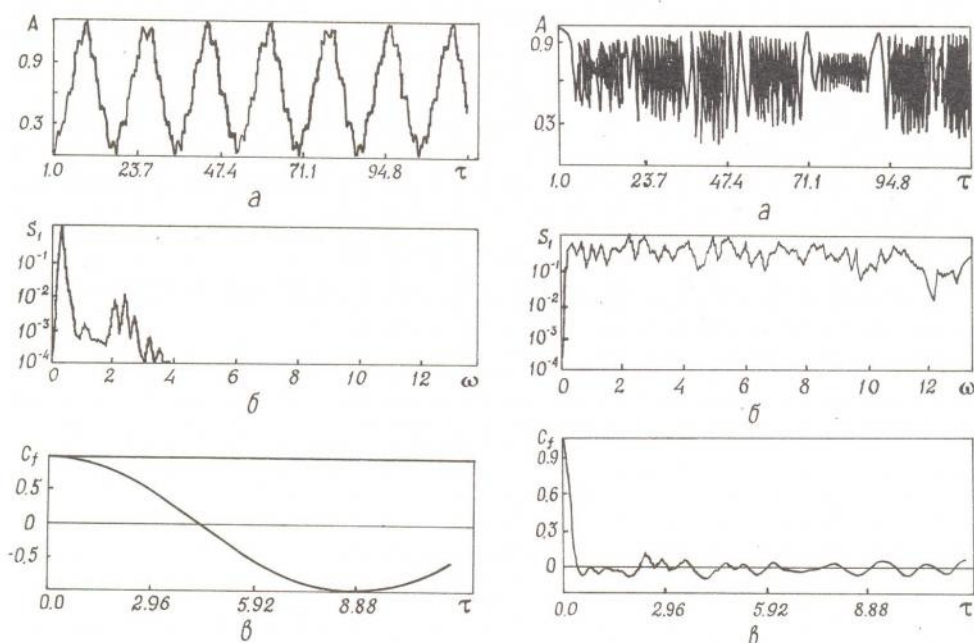


Рис. 1

Рис. 2

В заключение необходимо сделать следующее замечание. Критерий $K > 1$ действительно показывает область параметров, где имеет место хаотическая динамика неинтегрируемых систем. Для интегрируемых систем он не работает. Обычно бывает трудно указать, интегрируема рассматриваемая система или нет. Поэтому критерием нужно пользоваться осторожно. Действительно, система (4) при малой амплитуде падающей волны сводится к системе уравнений первого порядка [5,6] и при бесконечном числе волн полностью интегрируема. Интегрируемой она является и при конечном числе волн, когда число красных и синих сателлитов одинаково.

Следует отметить, что в [4] рассмотрена динамика системы, представляющей собой систему большого числа связанных нелинейных осцилляторов. Найдены условия возникновения хаотичности в этой системе. Показано, что это возможно только при наличии нелинейного самовоздействия, т.е. когда в гамильтониане имеется нелинейность четвертой степени. Если ограничиться в гамильтониане нелинейностью третьей степени и считать, что имеется большое число высокочастотных осцилляторов (собственные частоты ω_n), которые связаны друг с другом через один с собственной частотой Ω ($\omega_n \gg \Omega$), то система уравнений в [4] легко сводится к системе (4). Таким образом, сформулированный выше критерий пригоден для более широкого круга физических процессов, чем просто взаимодействия типа волна - волна. В частности, в рассматриваемой системе осцилляторов для возникновения стохастичности нет необходимости в эффектах самовоздействия.

Библиографический список

1. Лихтенберг А., Либерман М. Регулярная и стохастическая динамика. М.: Мир, 1984.
2. Заславский Г.М., Чуриков Б.В. Стохастическая неустойчивость нелинейных колебаний//УФН. 1971. Т.105. N5. С.3.
3. Chirikov B.V. A universal instability of many-dimensional oscillator system// Phys. Reports. 1979. Vol.52. P.265.
4. Заславский Г.М., Сагдеев Р.З. Введение в нелинейную физику. М.: Наука, 1988.
5. Bakaj A.S. Interaction of high-frequency and low-frequency waves in a plasma //Nuclear fusion. 1970. Vol.10. P.53.
6. Вояницкий А.А., Репалов Н.С. Нелинейное взаимодействие продольных волн в неизотермической плазме//ЖТФ. 1970. Т.40. N 1. С.32.

Харьковский физико-технический институт

INSTABILITY AND DYNAMICAL CHAOS IN A WEAK NONLINEAR INTERACTION OF WAVES

V.A. Butz, A.N. Kupriyanov, O.V. Manuylenko, A.P. Tolstoluzhskiy

The criterion of chaotic dynamics arising under a weak nonlinear waves interaction is suggested. The chaos arising criterion for wave - particle interaction is generalized. The value of the instability growth rate plays a role of the nonlinear resonance width. Computer simulations confirm this criterion.



ПОСТРОЕНИЕ ОДНОМЕРНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ ПО ДАННОЙ ПЛОТНОСТИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ И АВТОКОРРЕЛЯЦИОННОЙ ФУНКЦИИ

С. В. Сочнев

Предложен способ построения одномерного отображения с заданной плотностью распределения случайной величины (инвариантной мерой) и заданной корреляционной функцией (временем корреляции). Указанная процедура может оказаться полезной в тех приложениях, где приходится моделировать псевдослучайные процессы с заданными свойствами или сопоставлять сложному случайному процессу более простой (одномерное отображение), совпадающий с ним по ряду параметров.

В задачах машинного моделирования часто возникает необходимость построения генераторов шума с заданными свойствами. Имеющиеся стандартные подпрограммы позволяют получать последовательности δ -коррелированных псевдослучайных чисел, равномерно распределенных на некотором отрезке. Развито множество способов получения случайных чисел с заданной плотностью распределения. Например, подвергая некоторую случайную величину нелинейному преобразованию, можно получить любую требуемую плотность распределения. Для получения требуемой функции автокорреляции процесса его подвергают линейной фильтрации, но это нарушает исходную плотность распределения. Таким образом, надежных методов получения последовательностей псевдослучайных чисел с заданной функцией плотности распределения и заданной автокорреляционной функцией не существует. Постоянный интерес в области получения генераторов шума с заданными свойствами рождает много интересных алгоритмов. В частности, не новой является идея использования для этой цели простейших динамических систем, демонстрирующих хаотическое поведение, - одномерных отображений.

Рассмотрим и обоснуем построение кусочно-гладкого унимодального отображения отрезка $[0,1]$ в себя,

$$x_{n+1} = f(x_n), \quad n=0, 1, \dots,$$

обладающего следующими свойствами:

- 1) величина x имеет заданную плотность распределения (инвариантную меру) на отрезке $[0,1]$, не обращающуюся нигде на нем в ноль;
 - 2) время корреляции в последовательности x_n равно заданной величине τ .
- Введем обозначения, которые понадобятся в дальнейшем:
 $R(x)$ - функция симметрии отображения такая, что

$$f(x) = f(R(x)) \text{ и } R(R(x)) \equiv x, \quad \forall x \in [0,1];$$

X_c - координата вершины отображения, $f(X_c) = 1$; $M(x)$ - первообразная инвариантной меры; $M(x) = \int_x^1 \mu(y)dy$ - вероятность попадания в $[x,1]$.

Графически эти обозначения поясняются на рис.1.

После одной итерации на отрезок $[f(x),1]$ отобразятся точки, расположенные на отрезках $[x, X_c]$ и $[X_c, R(x)]$. Вероятность найти точку на одном из двух последних отрезков определяется как

$$P = \left| \int_x^{X_c} \mu(y)dy + \int_{X_c}^{R(x)} \mu(y)dy \right| = |M(x) - M(R(x))|;$$

модуль взят, чтобы учесть случай $x > X_c$. Вероятность найти точку на отрезке $[f(x),1]$ есть

$$P_1 = \int_{f(x)}^1 \mu(y)dy = M(f(x)).$$

Поскольку предполагается, что плотность распределения инвариантна относительно итераций, то эти вероятности должны совпадать: $M(f(x)) = |M(x) - M(R(x))|$. Отсюда получается искомое отображение:

$$f(x) = M^{-1}(|M(x) - M(R(x))|). \quad (1)$$

(Подробнее получение этой формулы рассмотрено в [1]).

Из формулы (1) видно, что при постоянной инвариантной мере (т.е. постоянной $\mu(x)$) отображение можно изменять, изменяя $R(x)$ - функцию симметрии. Это обстоятельство можно использовать, чтобы получить требуемую корреляционную функцию процесса x_n .

Отметим следующий факт: если инвариантная мера $\mu(x)$ симметрична относительно середины отрезка $[0,1]$ (т.е. $\mu(x) = \mu(1-x)$) и функция отображения зеркально симметрична (т.е. $R(x) = 1-x$, $x \in [0,1]$), то процесс x_n будет δ -коррелирован (см. [2]).

Для равномерного распределения в классе функций симметрии

$$R_{X_c}(x) = 1 - \frac{1 - X_c}{X_c} x, \quad x \in [0, X_c]$$

(линейно отображающих $[0, X_c]$ на отрезок $[X_c, 1]$) там было аналитически показано, что

$$C(\tau) = \begin{cases} C_0 e^{-\tau/\tau_c}, & X_c > 1/2 \\ C_0 \delta(\tau), & X_c = 1/2, \\ C_0 e^{-\tau/\tau_c} (-1)^\tau, & X_c < 1/2, \end{cases}$$

с временем экспоненциального спада

$$\tau_c = \left| \frac{1}{\ln |2X_c - 1|} \right|. \quad (2)$$

Качественно этот результат можно понять, рассмотрев предельные случаи $X_c \rightarrow 1$ и $X_c \rightarrow 0$. В случае $X_c \rightarrow 1$ (рис.2) основная величина корреляционного интеграла будет набираться на отрезке $[0, X_c^{(1)}]$. А на этом отрезке отображение слабо отличается от биссектрисы $y=x$, т.е. $x_{n+1} = x_n \operatorname{tg} \alpha = x_n (1+\epsilon)$, где $\epsilon \ll 1$; это и означает медленный спад корреляций. Причем спад будет тем длительней, чем ближе X_c к 1. В противоположном случае ($X_c \rightarrow 0$) основная величина корреляционного интеграла набирается на отрезке $[X_c^{(2)}, 1]$. На этом отрезке функция последования близка к прямой $y = 1 - x$, т.е.

$$x_{n+1} = (1 - x_n) \operatorname{tg} \beta = (1 - x_n)(1 + \delta),$$

где $\delta \ll 1$; это означает, что корреляции медленно затухают, меняя знак на каждой следующей итерации. Время затухания тем больше, чем ближе X_c к 0. Приведенное рассуждение позволяет предположить, что качественно этот результат остается в силе для любого (не только равномерного) распределения, симметричного относительно середины отрезка $[0,1]$.

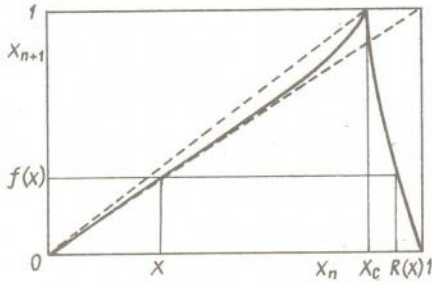


Рис.1. Сгенерированная функция последования для $\mu(x) = \frac{A}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left[-\frac{(x-1/2)^2}{2\sigma^2}\right]$ при $\sigma = 0.2$ и $X_c = 0.85$

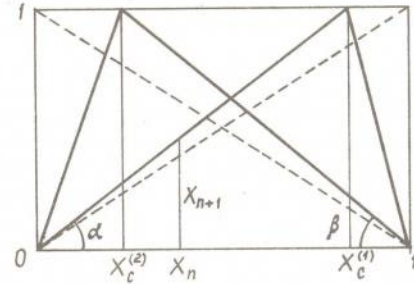


Рис.2. Поведение функции последования в асимптотическом случае при $X_c \rightarrow 1$ и $X_c \rightarrow 0$

Оценим функцию корреляции $C(\tau)$ процесса x_n в асимптотическом случае $X_c \rightarrow 1$. Можно сделать два следующих предположения.

1. Пусть вычисляется функция корреляции от аргумента τ_0 , тогда точками со значениями $x > \beta$, где β определяется из условия

$$f^{[\tau_0-1]}(\beta) = X_c,$$

в корреляционном интеграле можно пренебречь. В самом деле, в силу монотонности отображения для любого x из указанной области найдется такое $\tau \leq \tau_0 - 1$, что $f^{[\tau]}(x) > X_c$, т.е. точка попадает на отрезок $[X_c, 1]$ через τ итераций. Поскольку якобиан отображения, переводящего асимптотически малый отрезок $[X_c, 1]$ в отрезок $[1, 0]$, асимптотически велик, то за одну такую итерацию точка случайным образом распределится на отрезке $[0, 1]$, т.е. "забудет свою предысторию". Такие точки не будут давать вклада в корреляционный интеграл.

Проверим справедливость этого предположения в случае равномерного распределения и

$$R_{X_c}(x) = 1 - \frac{1 - X_c}{X_c} x, \quad x \in [0, X_c]$$

Из [2] (или по формуле (1)) отображение в этом случае есть

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{X_c}, & 0 \leq x \leq X_c \\ \frac{1-x}{1-X_c}, & X_c < x \leq 1 \end{cases}$$

Согласно сделанному предположению из корреляционного интеграла $C(\tau)$ выпадут все точки, кроме $x \in [0, \beta]$, где $f^{[\tau]}(\beta) = 1$, $\beta = X_c^\tau$. Если $x \in [0, \beta]$, то $f^{[\tau]}(x) = x/\beta$. Поэтому

$$C(\tau) = \int_0^\beta \left(x - \frac{1}{2}\right) \left(\frac{x}{\beta} - \frac{1}{2}\right) dx = \frac{\beta^2}{12} = \frac{X_c^{2\tau}}{12}.$$

Это - экспоненциально затухающая корреляционная функция со временем экспоненциального спада $\tau_c = \left| \frac{1}{2 \ln X_c} \right|$. В асимптотическом случае $X_c = 1 - \alpha$, α - мало, получаем $\tau_c = \frac{1}{2\alpha}$. Точная формула (2) в этом случае дает тот же результат:

$$\tau_c = \left| \frac{1}{\ln(2(1-\alpha) - 1)} \right| = \frac{1}{2\alpha},$$

т.е. предположение 1 приводит к асимптотически верной формуле. При изменении инвариантной плотности картина качественно измениться не должна.

2. Пусть величина β , о которой говорилось выше, определена. Для вычисления корреляционного интеграла необходимо знать, как ведет себя функция $f^{(n)}(x)$ на отрезке $[0, \beta]$. Известно при этом, что $f^{(1)}(0) = 0$, $f^{(1)}(\beta) = 1$ и функция $f^{(1)}(x)$ монотонно возрастает. Предположим, что для ее оценки можно воспользоваться линейной аппроксимацией:

$$f^{(1)}(x) = x/\beta, \quad x \in [0, \beta].$$

Справедливость такой оценки еще будет обсуждена, пока же отметим, что для большинства сгенерированных отображений отличие функции последования от прямой на интересующем участке не сказывалось радикально на результатах вычислений. Для примера на рис.1 приведена сгенерированная $f(x)$ для

$$\mu(x) = \frac{A}{\sqrt{2\pi\sigma}} \exp\left[-\frac{(x-1/2)^2}{2\sigma^2}\right] \text{ при } \sigma = 0.2 \text{ и } X_c = 0.85.$$

Заметим, что существует отрезок $[R(\beta), 1]$, симметричный отрезку $[0, \beta]$. Его точки "помнят свою предысторию", как и точки отрезка $[0, \beta]$. Для увеличения точности аппроксимации $C(\tau)$ в случае, промежуточном между асимптотикой $X_c \rightarrow 1$ и $X_c = 1/2$, отрезок $[R(\beta), 1]$ надо включить в корреляционный интеграл. С учетом сказанного этот интеграл принимает следующий вид:

$$C_1(\beta) = \int_0^\beta dx \left(\frac{x}{\beta} - \frac{1}{2}\right) \left\{ \left(x - \frac{1}{2}\right) \mu(x) + \left(R(x) - \frac{1}{2}\right) \mu(R(x)) \left| R_x(x) \right| \right\}. \quad (3)$$

Если теперь в этом интеграле вместо β подставим $\beta(\tau)$, то получим явную зависимость функции корреляции от времени.

Для определения $\beta(\tau)$ обратимся к функции последования в форме (1). В асимптотическом случае $X_c \rightarrow 1$ обращает на себя внимание тот факт, что $f(x)$ не сильно отличается от биссектрисы $y=x$. Поэтому разложим (1) в ряд Тейлора,

удержав первые два члена. Учитывая равенства $M_x = -\mu(x)$ и $M_x^{-1}(x) = -\frac{1}{\mu(M^{-1}(x))}$, получим следующую аппроксимацию для функции последования:

$$f(x) = x + \frac{M(R(x))}{\mu(x)} = x \left[1 + \frac{\delta(x)}{x} \right]. \quad (4)$$

Чтобы было удобней проследить за динамикой системы, перейдем от функции последования (4) к дифференциальному уравнению, описывающему поведение x .

Это можно сделать в силу малости члена $\frac{\delta(x)}{x}$, что соответствует асимптотическому приближению. Для отображения в виде прямой $f(x) = \frac{x}{X_c}$, $x(\tau) = \frac{x}{X_c^\tau}$,

где \bar{X}_c - постоянная координата вершины отображения. Отсюда $\frac{dx(\tau)}{d\tau} = -\frac{x}{\bar{X}_c} \ln \bar{X}_c = -x(\tau) \ln \bar{X}_c$. При условии, что для отображения (4) модуль растяжения в каждой точке $[1 + \frac{\delta(x)}{x}]$ слабо меняется на расстояниях порядка $\delta(x)$, движение будет аналогично выше рассмотренному, если положить $\frac{1}{\bar{X}_c} = 1 + \frac{\delta(x)}{x}$. Тогда дифференциальное уравнение примет вид

$$\dot{x} = x \ln(1 + \frac{\delta(x)}{x}). \quad (5)$$

Интегрируя, получаем время движения из точки z в 1:

$$\tau = \int_z^1 \frac{dx}{x \ln(1 + \frac{\delta(x)}{x})}, \quad (6)$$

где $\delta(x) = \frac{M(R(x))}{\mu(x)}$.

Если в (6) подставить вместо z величину β , то получим функцию $\tau(\beta)$. Искомая зависимость $\beta(\tau)$ является функцией, обратной к (6). Для практического определения времени корреляции можно (предполагая экспоненциальное затухание корреляционной функции) определить такое β^* , что

$$C_1(\beta^*) = C_0/e. \quad (7)$$

Время движения из данного β^* в 1 и будет временем корреляции:

$$\tau_c = \int_{\beta^*}^1 \frac{dx}{x \ln(1 + \frac{M(R(x))}{x\mu(x)})}. \quad (8)$$

Получим соответствующие формулы в случае противоположной асимптотики $X_c \rightarrow 0$. Рассуждения в этом случае аналогичны (необходимо лишь учесть тот факт, что $C(\tau)$ - знакопеременная функция). Введем следующие вспомогательные величины:

X_0 - неподвижная точка отображения такая, что $f(X_0) = X_0$, $x = X_0 + \alpha$, α^* - величина аналогичная β^* такая, что $f^{|\tau_0-1|}(X_0 + \alpha^*) = X_c$. Она позволяет свести область интегрирования в корреляционном интеграле к отрезку $[X_0 - \alpha^*, X_0 + \alpha^*]$. Действительно, остальные точки отрезка $[0, 1]$ в течение серии из τ_0 итераций хотя бы один раз попадут на ветвь отображения, переводящую асимптотически малый отрезок $[0, X_c]$ в отрезок $[1, 0]$. Якобиан такого отображения асимптотически велик, и точка случайно распределится на $[0, 1]$, т.е. "забудет свою предысторию" и не даст вклада в корреляционный интеграл. Аппроксимируя функцию последования на интересующем нас участке прямой, получаем для корреляционного интеграла:

$$|C_2(\alpha^*)| = \int_{X_0 - \alpha^*}^{X_0 + \alpha^*} dx (X_0 + \alpha - \frac{1}{2}) \{ (X_0 + \alpha - \frac{1}{2}) \mu(X_0 + \alpha) + (R(X_0 + \alpha) - \frac{1}{2}) \mu R(X_0 + \alpha) | R_z(X_0 + \alpha) | \}. \quad (9)$$

Закон движения α аналогичен закону движения x в предыдущем случае. Время движения из α в $1 - X_0$ дается формулой

$$\tau(x^*) = \int_{x^*}^{1-x_0} \frac{2dx}{x(\ln K_1 + \ln K_2)}, \quad (10)$$

$$\text{где } K_1 = 1 + \frac{\delta_2(x)}{x}, \quad K_2 = 1 - \frac{\delta_2(-x)}{x},$$

$$\delta_2(x) = 2X_0 - 1 - \frac{1 - M(R(X_0+x))}{\mu(X_0+x)}. \quad (11)$$

Эти формулы аналогичны формулам (3), (8) для случая $X_c \rightarrow 1$. Скорость движения является усреднением скоростей в точках x и $-x$ (эти точки лежат симметрично относительно неподвижной точки X_0), что является следствием знакопеременности движения. Если теперь найти функцию, обратную к (10) $x^*(\tau)$, и подставить в выражение (9), то получим явную зависимость $C_2(\tau)$.

Итоговая функция корреляции равна сумме двух найденных:

$$C(\tau) = C_1(\tau) + C_2(\tau). \quad (12)$$

Причем поведение результирующей функции в случае $X_c \rightarrow 1$ определяется членом C_1 , а в случае $X_c \rightarrow 0$ - членом C_2 .

Итак, по заданной инвариантной мере $\mu(x)$ на отрезке $[0,1]$ и заданной функции симметрии $R(x)$ произведено построение функции последования одномерного отображения $f(x)$ согласно формуле (1). При этом первообразная $M(x)$ инвариантной меры определялась численным интегрированием, а затем аппроксимировалась линейными сплайнами по своим значениям в $N_M \sim 100$ точках (это было вызвано необходимостью вычислять функцию M^{-1} , что делало прямые вычисления недопустимо долгими). Функция симметрии $R(x)$ задавалась на отрезке $[0, X_c]$ и продолжалась на отрезок $[X_c, 1]$ из условия $R(R(x)) \equiv x$, т.е. $R(x) = R^{-1}(x)$ при $x \in [X_c, 1]$, $R^{-1}(x) \in [X_c, 0]$. Полученная функция последования интерполировалась сплайнами (линейными или кубическими) по своим значениям в $N_f \sim 20+400$ точках в зависимости от требуемой точности. В основном рассматривались "гауссовы" законы распределения,

$$\mu(x) = \frac{A}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left\{-\frac{(x-1/2)^2}{2\sigma^2}\right\}, \quad A - \text{нормировочная константа,}$$

хотя возможности численного алгоритма позволяли генерировать широкий спектр законов распределения. Предел варьированию инвариантной меры ставило следующее обстоятельство. Возникла неподвижная точка отображения $f^{(n)}(x)$

при некотором n , в которой производная $\left| \frac{df^{(n)}(x)}{dx} \right|$ становилась меньше 1, т.е.

рождался устойчивый предельный цикл, соответствующий данному n ; инвариантная мера при этом разрушалась. Происходило это, как правило, если на некотором отрезке I_1 заданная инвариантная мера принимала нулевое (или очень малое) значение, т.е. эффективный носитель $\mu(x)$ сжимался. Например, в приведенном выше классе инвариантных мер указанный эффект наступал при $\sigma \leq 0.1$. Однако даже при $\sigma = 0.01$ устранить его можно было, добавив к основному пику $\mu_\sigma(x)$ небольшой "пьедестал" $\mu_1(x) = \mu_\sigma^{(1/2)}/1000$, который, будучи незаметным на фоне μ_σ , расширял эффективный носитель $\mu(x)$ до всего отрезка $[0,1]$ и тем самым восстанавливал инвариантную меру.

Для различных функций последования, построенных таким образом, производилось непосредственное вычисление корреляционной функции с помощью итераций. По случайно заданному начальному значению x_0 строилась последовательность $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$, где $x_{n+1} = f(x_n)$. Функция корреляции вычислялась по формуле

$$C(\tau) = \frac{1}{k-\tau+1} \sum_{i=0}^{k-\tau} x_i x_{i+\tau} - \frac{1}{4}.$$

Следует отметить, что подобные вычисления требуют существенных затрат машинного времени, ибо ошибка ϵ определения $C(\tau)$ пропорциональна $K^{1/2}$, где K - количество точек, по которым проводится усреднение. По полученной таким образом $C(\tau)$ методом наименьших квадратов строилась прямая через точки

$(\tau, \ln \frac{C(0)}{C(\tau)})$, обратный наклон прямой принимался равным временем корреляции τ_c .

Для тех же функций последования строились аналогичные графики $(\tau, \ln \frac{C(0)}{C(\tau)})$, где $C(\tau)$ определялось по формуле (12). Из них определялось время корреляции τ_c . Графики, приведенные на рис.3, иллюстрируют характерное поведение указанных кривых.

Зависимость времени корреляции от X_0 для различных σ представлена на рис.4.

Рассмотрим вопрос о справедливости предположения 2, позволяющего аппроксимировать на отрезке $[0, \beta]$ функцию $f^{(n)}(x)$ прямой линией. Для этого оценим поведение функции последования вблизи X_c . Воспользовавшись значением производной, получим:

$$f_x(X_c) = \frac{\mu(X_c)}{\mu(1)} (1 + |R_x(X_c - 0)|).$$

Отношение $\frac{\mu(X_c)}{\mu(1)}$ показывает, что если инвариантная мера имеет максимум в центре отрезка и спадает до нуля к краям, то производная функции последования вблизи X_c будет нарастать до бесконечности при приближении к X_c , т.е. поведение f вблизи X_c будет качественно похоже на изображенное на рис.1. При этом разность между аппроксимирующей линейной функцией $f^{(n)}(x)$ будет тем больше, чем меньше будет дисперсия σ^2 у инвариантной меры. Именно этой разностью определяется ошибка в аналитическом выражении для функции корреляции.

На рис.5. приведена зависимость относительной ошибки ϵ определения времени корреляции τ_c от значения среднеквадратичного отклонения σ . Для получения более точной аппроксимации $f^{(n)}(x)$ можно попытаться интегрировать уравнение $dx/V(x) = dy/V(y)$, где $V(x) = x \ln(1 + \frac{\delta(x)}{x})$ с начальными условиями $y=1$ при $x=\beta$. Полученная таким образом зависимость $y(x)$ будет хорошим приближением для $f^{(n)}(x)$.

При практическом построении генераторов случайных чисел по данному алгоритму следует задать требуемую инвариантную меру (плотность распределения) и по желаемому времени корреляции подобрать X_c . Причем, для знакопеременного поведения функции корреляции необходимо брать $X_c < 1/2$. Конкретную величину X_c подбирают, исходя из заранее известных зависимостей $\tau_c(X_c)$ (которые можно получить по формуле (12) или экспериментально).

Преимущество аналитического определения $C(\tau)$ по формуле (12) состоит в том, что в эту формулу функция $f(x)$ (которую необходимо построить) не входит явно; там присутствуют лишь заданные $\mu(x)$, $R(x)$ и определяемая по $\mu(x)$ первообразная $M(x)$.

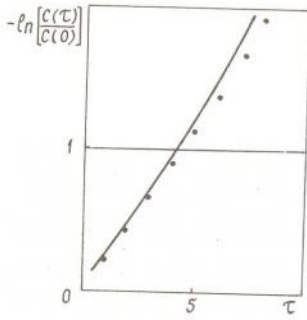


Рис.3. Зависимость логарифма функции корреляции от времени при $\sigma=0.3$, $X_c=0.85$: сплошная линия - результат расчета по формуле (12); точки - результаты вычислений с помощью итераций

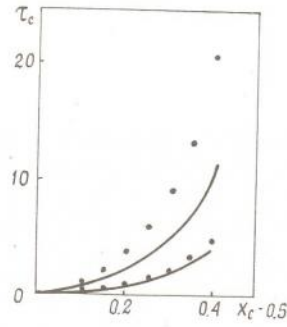


Рис.4. Зависимость времени корреляции от X_c для различных σ : сплошные линии - результаты аналитических вычислений по формулам (3), (6); точки - результаты вычислений с помощью итераций

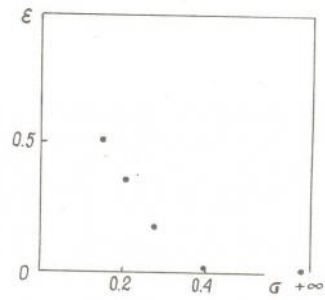


Рис.5. Зависимость относительной ошибки определения времени корреляции $\epsilon = \frac{\tau_c - \tau_c^*}{\tau_c^*}$ от значения среднеквадратичного отклонения $\sigma = (\langle (x - 1/2)^2 \rangle)^{1/2}$ (τ_c^* вычисляется по формуле (12))

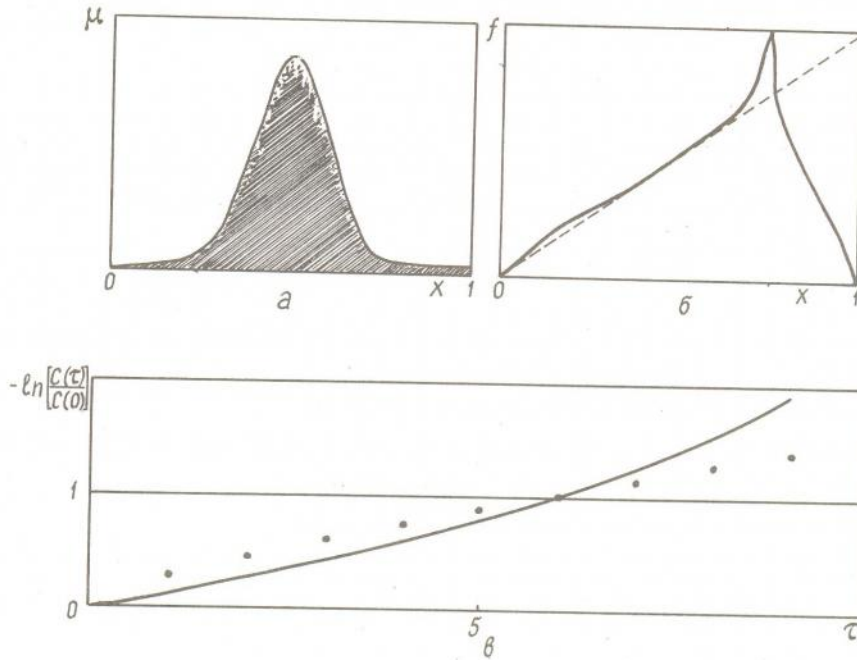


Рис.6. Результаты моделирования для $\mu_1(x) = \frac{A}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp[-\frac{(x-1/2)^2}{2\sigma^2}]$ при $\sigma = 0.1$, $X_c=0.75$: а - плотность распределения с гистограммой после 20 000 итераций, б - соответствующее отображение, в - зависимость функции корреляции от времени (масштаб по вертикали - логарифмический); сплошная линия - результат расчета по формуле (12), точки - результаты вычисления с помощью итераций

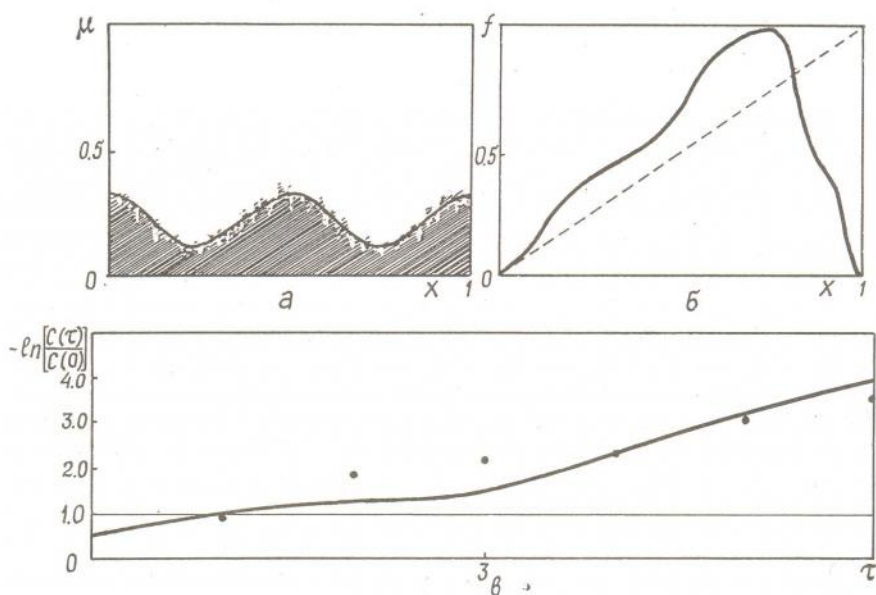


Рис.7. Зависимости, аналогичные приведенным на рис.6, полученные для $\mu_2(x) = A(1 + \frac{1}{2} \cos(4\pi x))$

Для примера на рис.6 и 7 приведены результаты моделирования с плотностью распределения

$$\mu_1(x) = \frac{A}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left[-\frac{(x-1/2)^2}{2\sigma^2}\right] \text{ и } \mu_2(x) = A(1 + \frac{1}{2} \cos(4\pi x))$$

соответственно при $\sigma = 0.1, X = 0.75$.

Автор благодарен В.В. Рождественскому за стимулирующие дискуссии и ряд ценных замечаний.

Библиографический список

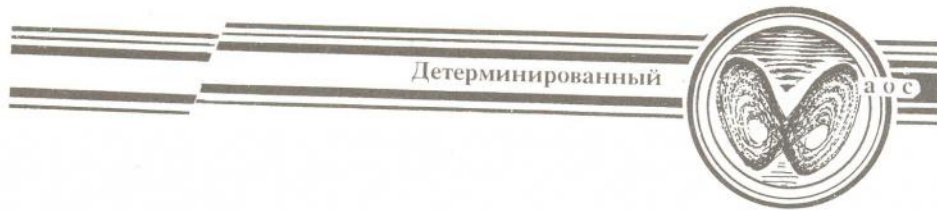
1. Ершов С.В., Малинецкий Г.Г.//ЖВМ и МФ. 1988. Т.28. N 10. С.1491.
2. Grossman S., Tomae S.//Z. Naturforsch. 1977. Vol. 32a. P.1353.

Московский физико-технический институт
Долгопрудный

THE CONSTRUCTION OF ONE-DIMENSIONAL MAPS WITH GIVEN STOCHASTIC PROPERTIES

S.V. Sochnev

The way of the construction of one-dimensional maps with a given distribution function (invariant measure) and a given correlation function (correlation time) is presented in this work. The above procedure may be useful in such applications where one must model quasi-random processes with given properties or compare a complex chaotic system with a more simple one coinciding in some parameters.



Изв. вузов "ПНД", т.1, №1, №2, 1993

УДК 539.21

О ВОЗНИКНОВЕНИИ ХАОТИЧЕСКОГО АТТРАКТОРА ПРИ ДВИЖЕНИИ ЯДЕРНЫХ СПИНОВ В ФЕРРОМАГНЕТИКЕ

В. В. Зверев

Аналитически и численно показано, что при движении ядерных спинов в ферромагнетике возникает хаотический аттрактор, имеющий структуру канторовского множества. Для изучения случая сильного перемешивания развит статистический подход.

Введение

В последние годы получены замечательные результаты, касающиеся типичных "сценариев" поведения нелинейных динамических систем. В частности, показана возможность стохастизации движения и формирования (при наличии диссипации) хаотического ("странного") аттрактора, т.е. притягивающего множества сложной структуры в фазовом пространстве [1].

В данной работе исследован (теоретически и численно) процесс динамической стохастизации для простой трехмерной модели динамики ядерной намагниченности в магнитоупорядоченном кристалле при наличии диссипации (блховской релаксации) и динамического сдвига частоты; предполагается, что последний обусловлен взаимодействием ядерных спинов с электронной подсистемой ферромагнетика [2] (возникновение стохастизации в аналогичной бездиссипативной модели рассматривалось в работах [3]; одномерная модель с диссипацией исследовалась в [4]).

1. Физические предположения и модельные уравнения

Рассмотрим однородную динамику ядерной намагниченности (считая последнюю классической величиной) с учетом нелинейного самовоздействия ядер, обусловленного сверхтонким взаимодействием с электронной подсистемой ферромагнетика. Запишем динамическую часть уравнения движения обычным образом (см., например, [2]), добавляя релаксационные члены блховского типа:

$$\frac{d\vec{M}}{dt} = \gamma_n [\vec{M} \times \vec{H}_{\text{эфф}}] - \vec{M}_1/T_2 - (\vec{M}_1 - \vec{e}_z M_0)/T_1, \quad (1)$$

где $\vec{H}_{\text{эфф}} = -\delta W/\delta \vec{M} = A\vec{M}_{\text{эл}}, \vec{M}_{\text{эл}} = \vec{e}_z M_{\text{эл}}^0 + \chi(\vec{h}_1 + A\vec{M}_1);$

A - константа сверхтонкого взаимодействия, $M_{\text{эл}}^0$ - равновесная электронная намагниченность, χ - линейная восприимчивость электронной подсистемы, \vec{h}_1 - внешнее (поперечное) переменное магнитное поле, $T_{1,2}$ - времена релаксации.

Мы полагаем, что ядерная спин-система находится под действием периодической последовательности РЧ-импульсов, где каждый импульс имеет прямоугольную огибающую и синусоидальное заполнение на частоте, близкой к резонансной. Также считается, что импульсы являются достаточно короткими и интенсивными, поэтому:

а) угол отклонения ядерной намагниченности от продольной оси (во вращающейся системе координат) в общем случае не мал;

б) за время $T_{им}$ воздействия одиночного импульса РЧ-поля процессы, обусловленные наличием нелинейных и релаксационных членов, порождают малое дополнительное изменение намагниченности и могут не учитываться; таким образом, во время действия импульса движение намагниченности можно описывать уравнением

$$d\vec{M}/dt = \gamma_n [\vec{M} \times (\vec{e}_z A M_{0z} + A \chi \vec{h}_D)].$$

Интегрируя уравнение движения при этих предположениях, можно получить эволюционное отображение, имеющее вид

$$\vec{M}_{N+1} = \vec{e}_z M_{00} + R U_z (\alpha + \beta (\vec{e}_z U_{им} \vec{M}_N)) U_{им} \vec{M}_N = \vec{F}(\vec{M}_N). \quad (2)$$

Здесь

$$\vec{M}_N = \vec{M}(t_0 + (T_{св} + T_{им})N), \quad M_{00} = M_0 (1 - \exp(-T_{св}/T_1));$$

$$R = \text{diag}(\alpha, \alpha, \gamma), \quad \alpha = \exp(-T_{св}/T_2), \quad \gamma = \exp(-T_{св}/T_1);$$

$$\alpha = -\Delta\omega T_{св} + A^2 \chi (M_0 T_{св} - T_1 M_{00}), \quad \beta = A^2 \chi T_1 (1 - \gamma);$$

$U_z(\cdot)$ - матрица поворота вокруг оси \vec{e}_z на угол, указанный в аргументе;
 $U_{им} = U(-\omega_{эфф} T_{им}, \vec{n}_0)$ - матрица поворота вокруг оси \vec{n}_0 на угол $-\omega_{эфф} T_{им}$, где $\vec{n}_0 = (\vec{e}_x + \vec{e}_z \Delta\omega) / \omega_{эфф}$, $\omega_{эфф} = [(\Delta\omega)^2 + \omega_1^2]^{1/2}$.

Путем итерирования отображения (2) можно последовательно находить положения конца вектора ядерной намагниченности, соответствующие моментам времени $t_0 + (T_{св} + T_{им})N$, $N = 0, 1, 2, \dots$. Такой анализ достаточен для обнаружения хаотического (непериодического) движения.

2. Преобразование фазовой капли

Из общей теории [1] известно, что эволюционное отображение порождает хаотическое движение (при котором траектория стремится к хаотическому аттрактору), если оно определенным образом деформирует "фазовую каплю" - уменьшая объем (производя сжатие) на каждом шаге преобразования, в то же время производит растяжение по некоторым направлениям. На рис.1 показано, каким образом отображение (2) трансформирует "каплю" в пространстве намагниченностей. Сжатие "капли" обусловлено релаксацией (якобиан преобразования - $|\det(\partial M_{N+1} / \partial M_N)| = \gamma \alpha^2 < 1$), а растяжение возникает вследствие "перекручивания", связанного с наличием нелинейных членов. Таким образом, отображение (2) порождает один из вариантов "преобразования пекаря".

3. Изображения хаотических аттракторов (численные результаты)

На рис.2 изображена бифуркационная диаграмма, полученная путем итерирования отображения (2) для каждого значения параметра βM_{00} вдоль вертикали отложены 500 значений M_x / M_{00} , соответствующих движению после

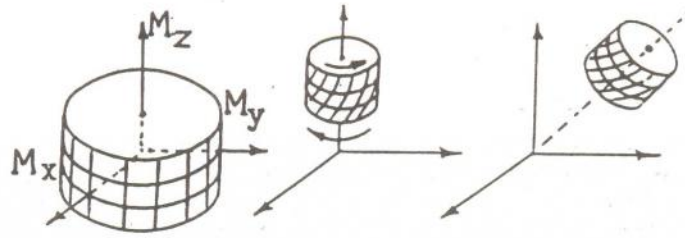


Рис.1

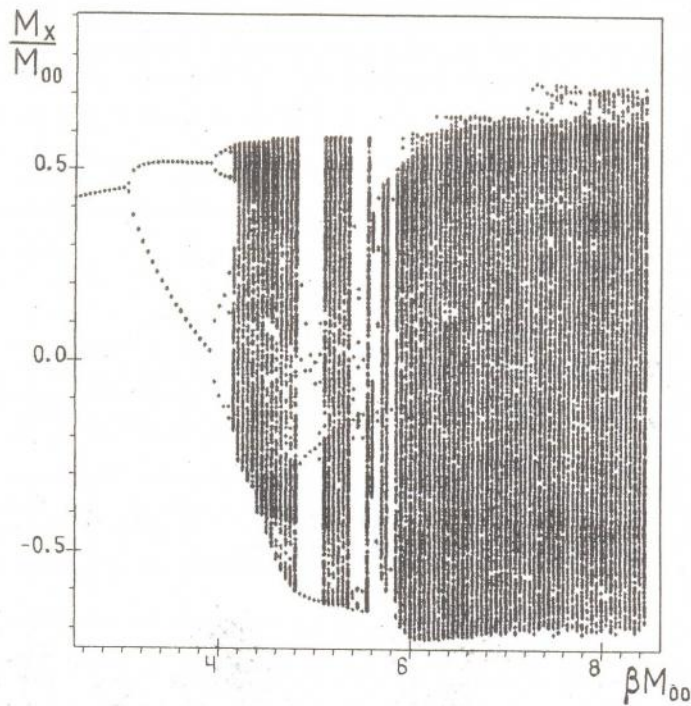
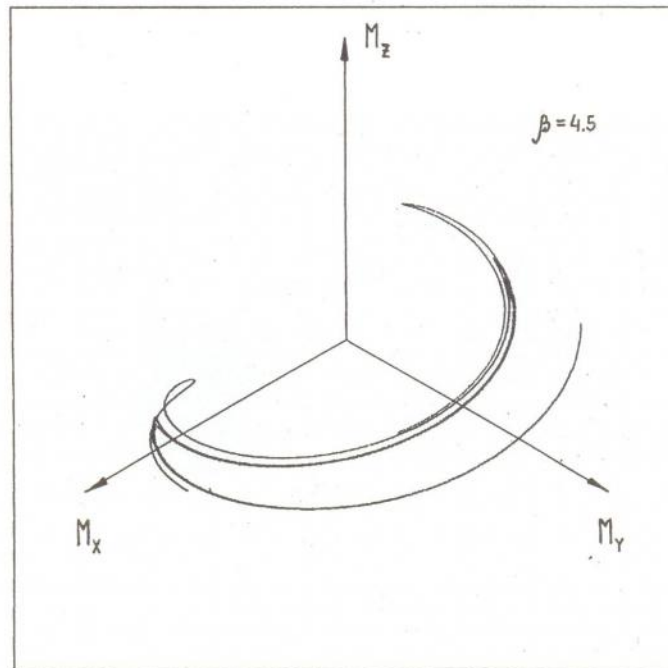
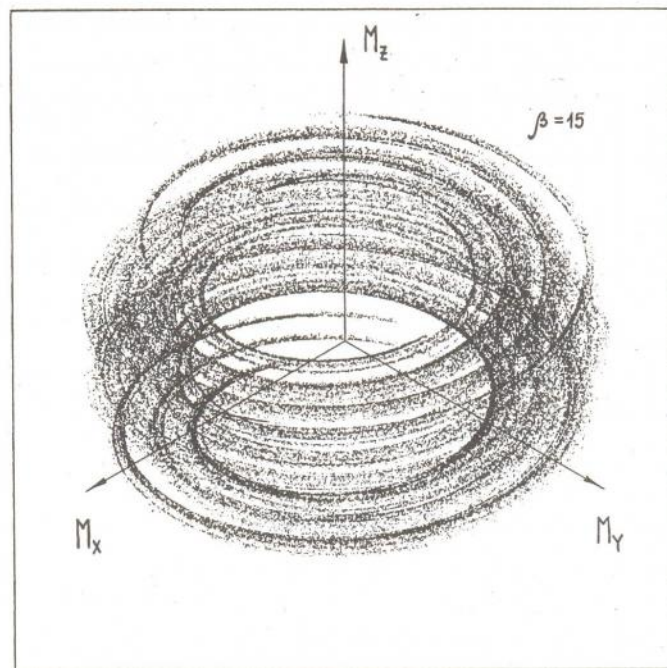


Рис.2

завершения переходного процесса). Очевидно, что реализуется стандартный "сценарий" перехода к хаосу через бесконечную последовательность удвоений периода ("сценарий" Фейгенбаума). Видны "окна периодичности", разрывающие хаотическую область. На рис.3 приводятся трехмерные изображения хаотических аттракторов при различных β и $M_{00}=1$. Заметим, что при малых β аттрактор имеет квазилинейную структуру (т.е. выглядит как "жирная линия"), а при больших β множество точек, формирующее изображение, выглядит как порожденное некоторым случайным процессом. Изображения при промежуточных значениях β позволяют предположить, что аттрактор является фракталом канторовского типа и обладает самоподобной структурой.



a



b

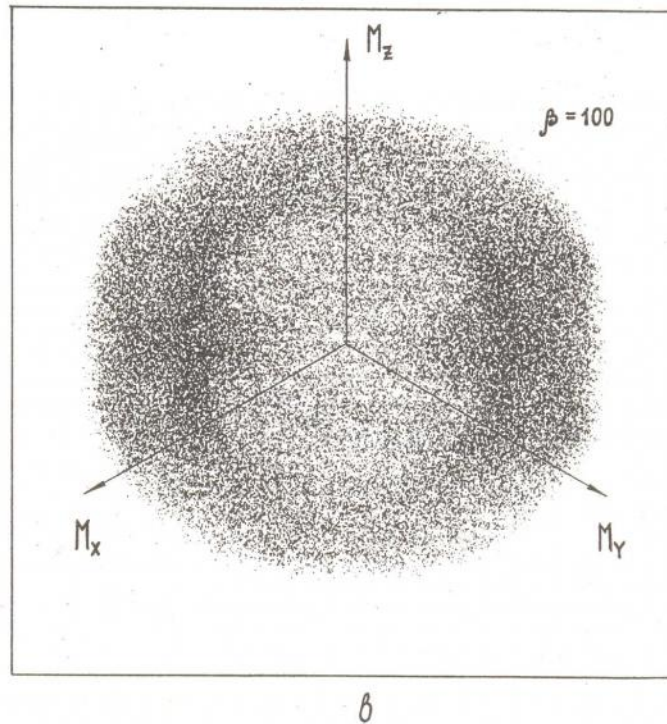


Рис.3

4. Аналитическое описание фрактальной структуры аттрактора

Рассмотрим метод, позволяющий описать фрактальную (самоподобную) структуру аттрактора аналитически в некотором предельном случае. Обсуждаемый метод основан на построении инвариантного множества отображения (2) в виде разложения по параметру; его различные модификации рассматривались в работах [5]. Кратко изложим идею и суть метода.

1. Основываясь на численных результатах, можно заметить, что при малых ε изучаемое трехмерное отображение (2) в некотором смысле "близко" к одномерному, получающемуся из исходного в результате отбрасывания некоторых "малых" членов; последние удобно выделить, вводя формальный "параметр малости" ε . В нашем случае

$$M_{N+1}^x = \varepsilon (M_N^x \cos \psi + M_N^z \sin \psi) = \varepsilon M_{00} \sin \psi + \varepsilon \alpha (M_N^x \cos \psi + \Delta M_N^z \cos \psi), \quad (3a)$$

$$M_{N+1}^y = \varepsilon (-M_N^x \sin \psi + M_N^z \cos \psi) = \varepsilon M_{00} \cos \psi + \varepsilon \alpha (-M_N^x \sin \psi + \Delta M_N^z \sin \psi), \quad (3b)$$

$$M_{N+1}^z = M_{00} - \gamma M_N^y, \quad (3b)$$

где $\psi = \beta M_N^y - \alpha$, $\Delta M_N^z = M_N^z - M_{00}$ (для простоты взят случай точного резонанса $\Delta \omega = 0$); $\varepsilon = 1$ соответствует точному отображению, $\varepsilon = 0$ - приближенному. Если инвариантное множество точного отображения есть фрактал, имеющий вид "жирной линии" (т.е. линии с тонкой канторовской структурой), то приближенное отображение имеет инвариантом обычную линию, аппроксимирующую вышеупомянутый фрактал. С целью получения более компактной записи перепишем уравнение (3a)-(3b) в следующем виде:

$$M_{N+1}^a = \mathcal{Z}^a(M_N^x, M_N^y, M_N^z) = \mathcal{Z}_0^a + \varepsilon \mathcal{Z}_1^a, \quad a = \{x, y\}, \quad M_{N+1}^z = \mathcal{Z}^z(M_N^y). \quad (3')$$

2. Базируясь на сказанном в п.1, можно искать точные уравнения фрактала в виде, формально совпадающем с системой параметрических уравнений обычной линии (при условии, что функции в правых частях этих уравнений строятся в виде разложений по степеням ε). Некоторое упрощение возникает, если связать параметр p с одной из координат: полагаем $M^z = M_{00} + p$ и

$$M^x = \wp(p) = \wp_0(p) + \varepsilon \wp_1(p) + \dots, \quad (4a)$$

$$M^y = \Theta(p) = \Theta_0(p) + \varepsilon \Theta_1(p) + \dots \quad (4б)$$

3. Записывая параметрические уравнения (4a) с неизвестными функциями \wp, Θ и налагая условие инвариантности (т.е. требование, чтобы элемент точечного множества вновь принадлежал этому множеству после однократного действия отображения), получим систему функциональных уравнений:

$$\wp(\mathcal{Z}^z(\Theta(p)) - M_{00}) = \mathcal{Z}^x(\wp(p), \Theta(p), M_{00} + p), \quad (5a)$$

$$\Theta(\mathcal{Z}^z(\Theta(p)) - M_{00}) = \mathcal{Z}^y(\wp(p), \Theta(p), M_{00} + p). \quad (5б)$$

Ее можно решать, производя разложение по ε и приравнивая члены с одинаковыми степенями. В результате получается бесконечная система рекуррентных соотношений для последовательного отыскания $\wp_i(p), \Theta_i(p), i=0,1,2,\dots$ Существенно, что эти функции - многозначные; это и отражает тот факт, что уравнения (5a,б) описывают не обычную кривую, а канторовский фрактал с самоподобной структурой.

Приведем результаты для нулевого и первого приближения:
нулевое приближение -

$$M^x = \wp_0(p) = -\alpha \sin(\alpha + \beta p / \gamma), \quad (6a)$$

$$M^y = \Theta_0(p) = \alpha \cos(\alpha + \beta p / \gamma), \quad (6б)$$

$$M^z = M_{00} + p; \quad (6в)$$

первое приближение -

$$M^x = \wp_0(\mathcal{Z}^z(\Theta_0(p)) - M_{00}) + \mathcal{Z}_1^x(\wp_0(p), \Theta_0(p), p + M_{00}), \quad (7a)$$

$$M^y = \wp_0(\mathcal{Z}^z(\Theta_0(p)) - M_{00}) + \mathcal{Z}_1^y(\wp_0(p), \Theta_0(p), p + M_{00}), \quad (7б)$$

$$M^z = \mathcal{Z}^z(\Theta_0(p)). \quad (7в)$$

На рис.4 сравниваются результаты, полученные прямым итерированием отображения (2) (точки) и вышеизложенным методом (сплошные линии). Изображение хаотического аттрактора получено численно для $\alpha=0.05$. Аттрактор грубо аппроксимируется выражениями (6) (нулевое приближение, на рис.4 - линия из крестиков). Структура первого порядка, описываемая формулами (7), изображена сплошными линиями. Отклонения точек (получены итерированием) от этих линий обусловлены наличием структуры высших порядков.

5. Приближенная статистическая теория хаотического движения (случай сильного перемешивания)

В том случае, если параметр β , входящий в отображение (2), достаточно велик (оценки для реальных веществ дают $\beta=50-5 \cdot 10^5$), к хорошим результатам приводит другой приближенный подход, состоящий в замене угловой переменной в U_z случайным углом, имеющим равномерное распределение на $[0, 2\pi]$: $\alpha + \beta(\bar{\varepsilon}_z U_{\text{им}} \bar{M}_N) \rightarrow \bar{\varphi}$. Таким образом, нелинейное детерминистическое распределение заменяется случайным линейным. Приведем ряд строгих результатов, позволяющих обосновать этот подход.

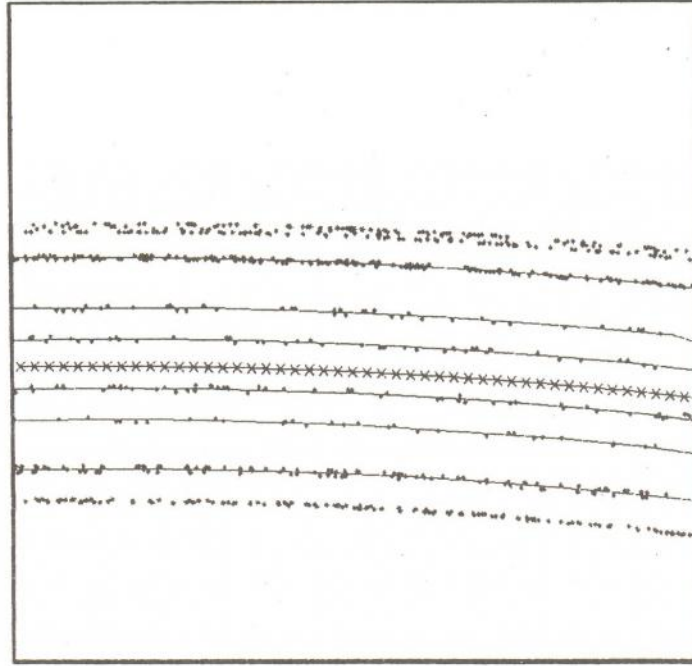


Рис.4

Асимптотическое разложение и приближение случайных фаз. Здесь вместо уравнения движения для амплитуды намагниченности удобно рассматривать уравнение для функции распределения, описывающее эволюцию этой функции в дискретной шкале времени (уравнение типа Колмогорова - Чепмена [6]):

$$P_{N+1}(\vec{x}) = \iint P_{\text{фл}}(\vec{x} - \vec{z}) W(\vec{y}, \vec{z}) P_N(\vec{z}) d\vec{y} d\vec{z}, \quad (8)$$

где ядро $W(\vec{y}, \vec{z}) = \delta(\vec{y} - \vec{F}(\vec{z}))$ ответственно за функциональное преобразование, отражающее один шаг нелинейной эволюции, определяемой уравнением (2); свертка с $P_{\text{фл}}$ позволяет учесть (в простом модельном приближении) влияние равновесных тепловых флуктуаций ядерной намагниченности (избегая строгого учета флуктуаций, мы один раз за цикл добавляем к намагниченности малую случайную величину; добавки, соответствующие различным моментам времени, считаются статистически независимыми).

От уравнения (8) удобно перейти к уравнению для характеристических функций:

$$\Psi_{N+1}(\vec{u}) = \Lambda(\vec{u}) \int M(\vec{u}, \vec{v}) \Psi_N(\vec{u}) d\vec{v}. \quad (9)$$

Здесь $\Psi_N(\vec{u}) = (2\pi)^{-3} \int P_N(\vec{x}) \exp(-i\vec{u}\vec{x}) d\vec{x}$ и (если считать, что статистика флуктуаций описывается нормальным законом)

$$\Lambda(\vec{u}) = \int P_{\text{фл}}(\vec{x}) \exp(-i\vec{u}\vec{x}) d\vec{x} = \exp(-1/2\vec{u}^2 \sigma^2), \quad (10)$$

а также

$$M(\vec{u}, \vec{v}) = (2\pi)^{-3} \int \exp(i\vec{v}\vec{z} - i\vec{u}\vec{F}(\vec{z})) d\vec{z}. \quad (11)$$

Для простоты ограничимся рассмотрением случая точного резонанса и возбуждения последовательностью 90-градусных РЧ-импульсов (все доказательства переносятся на общий случай). Проводя интегрирование, получим:

$$M(\vec{u}, \vec{v}) = [2\pi(v_1^2 + v_3^2)^{1/2}]^{-1} \exp(-iu_3) \delta((v_1^2 + v_3^2)^{1/2} - \alpha(u_1^2 + u_2^2)^{1/2}) \times \sum_{\vartheta=0}^{\infty} \exp[i\vartheta(\alpha + \arg(u_1 + iu_2) - \arg(v_1 + iv_3))] \delta(v_2 + \gamma u_3 + \vartheta\beta). \quad (12)$$

Далее покажем, что при наличии флуктуаций и при $\beta \gg 1$ особую роль играет слагаемое с $\vartheta=0$, выделим его:

$$M(\vec{u}, \vec{v}) = \bar{M}(\vec{u}, \vec{v}) + \Delta M(\vec{u}, \vec{v}), \quad (13)$$

где

$$\bar{M}(\vec{u}, \vec{v}) = [2\pi(v_1^2 + v_3^2)^{1/2}] \exp(iu_3) \delta(v_2 + \gamma u_3) \delta((v_1^2 + v_3^2)^{1/2} - \alpha(u_1^2 + u_2^2)^{1/2}). \quad (14)$$

Полагая $\psi_N(\vec{v}) = \Lambda(\vec{v}) \psi_N^{(0)}(\vec{v})$, удобно ввести обозначения:

$$\begin{aligned} \psi_{N+1}^{(1)}(\vec{u}) &= \Lambda(\vec{u}) \int \bar{M}(\vec{u}, \vec{v}) \Lambda(\vec{v}) \psi_N^{(0)}(\vec{v}) d\vec{v}, \\ \psi_{N+1}^{(2)}(\vec{u}) &= \Lambda(\vec{u}) \int \Delta M(\vec{u}, \vec{v}) \Lambda(\vec{v}) \psi_N^{(0)}(\vec{v}) d\vec{v}, \end{aligned}$$

тогда $\psi_{N+1} = \psi_{N+1}^{(1)} + \psi_{N+1}^{(2)}$. Заметим, что функции $\psi_N(\cdot)$, являющиеся фурье-образами функций распределения, обладают свойствами абсолютной интегрируемости. Таким образом, мы ищем решение в классе функций, образующих нормированное пространство Римана - Лебега $RL_1[-\infty, \infty]$:

$$\|f\|_1 = \int |f(\vec{u})| d\vec{u}.$$

В результате громоздких преобразований могут быть найдены следующие оценки по норме:

$$\|\psi_{N+1}^{(1)}\|_1 < (2\pi)^{-1/2} (\sigma^2(1+\alpha^2))^{-3/2} < \infty, \quad (15)$$

$$\|\psi_{N+1}^{(2)}\|_1 < 8\sqrt{2}\pi^{5/2} \sigma^{-3} (1+\alpha^2)^{-3/2} [\exp(1/2\sigma^2\beta^2/(1+\gamma^2)) - 1]^{-1} \rightarrow 0 \text{ при } \beta \rightarrow \infty. \quad (16)$$

Имеем: $\|\psi_{N+1}\|_1 < \|\psi_{N+1}^{(1)}\|_1 + \|\psi_{N+1}^{(2)}\|_1 < \infty$, если $\|\psi_N\|_1 < \infty$; таким образом, в результате итерирования получается функция, принадлежащая тому же нормированному пространству. Кроме того, поскольку $\psi_{N+1}^{(1)}$ не зависит от β , а $\|\psi_{N+1}^{(2)}\|_1$ путем выбора достаточно большого β (даже при малой интенсивности флуктуаций!) может быть сделано сколь угодно малым, мы вправе использовать приближенную замену $M \rightarrow \bar{M}$. Можно показать, что это эквивалентно замене

$$W(\vec{y}, \vec{z}) \rightarrow \tilde{W}(\vec{y}, \vec{z}) = (2\pi)^{-1} \int_0^{2\pi} \delta(\vec{y} - \vec{F}_*(\vec{z}, \varphi)) d\varphi, \quad (17)$$

где $\vec{F}_*(\vec{z}, \varphi) = \vec{e}_z + RU_z(\varphi)U_m\vec{z}$. Это, в свою очередь, соответствует замене нелинейного отображения (2) на линейное случайное отображение (приближение случайных фаз).

Существование и устойчивость стационарного распределения. Интересен вопрос о возможности установления стационарного вероятностного распределения при $t \rightarrow \infty$ (при $N \rightarrow \infty$) за счет хаотического движения, возмущенного шумом. Рассмотрим этот вопрос в рамках приближения случайных фаз.

Мы должны выяснить:

а) имеет ли решение уравнение

$$\psi_{cr}(\vec{u}) = \Lambda(\vec{u}) \int M(\vec{u}, \vec{v}) \psi_{cr}(\vec{v}) d\vec{v} ? \quad (18)$$

б) Если да - обладает ли решение устойчивостью? Иначе говоря, если $\psi_N = \psi_{cr} + \Delta\psi_N$ и взято произвольное начальное "малое" отклонение $\Delta\psi_0$, получим ли мы $\Delta\psi_N \rightarrow 0$ при $N \rightarrow \infty$?

Покажем, что ответы на оба вопроса - положительные.

Учитывая вид уравнения (12), можно заметить, что решения уравнения (18) (если они существуют) зависят только от двух переменных: $P = [u_1^2 + u_2^2]^{1/2}$ и $\Omega = u_3$; удобно объединить их в вектор $\vec{H} = (P, \Omega)$. Обозначая

$$\mathfrak{R}_N((u_1^2 + u_2^2)^{1/2}, u_3) = \psi_N(u_1, u_2, u_3),$$

можно переписать (9) в виде

$$\mathfrak{R}_{N+1}(\vec{H}) = f(\vec{H}) (2\pi)^{-1} \int_0^{2\pi} d\varphi \mathfrak{R}_N(\vec{S}(\vec{H}, \varphi)). \quad (19)$$

Здесь $\vec{S}(\vec{H}, \varphi) = (P(P, \Omega, \varphi), Q(P, \Omega, \varphi))$ - некоторое преобразование плоскости:

$$P(P, \Omega, \varphi) = [\gamma^2 \Omega^2 + \alpha^2 P^2 \sin^2 \varphi]^{1/2}, \quad (20a)$$

$$Q(P, \Omega, \varphi) = -\alpha P \cos \varphi, \quad (20б)$$

и $f(\vec{H}) = \exp(-i\Omega)$. Применяя теорему о среднем, запишем (19) как

$$\mathfrak{R}_{N+1}(\vec{H}) = f(\vec{H}) \mathfrak{R}_N(\vec{S}(\vec{H}, \hat{\varphi})). \quad (19')$$

Условимся обозначить как $\vec{S}^{[N]}(\vec{H}, \hat{\varphi}_1, \hat{\varphi}_2, \dots, \hat{\varphi}_N)$ результат N -кратного итерирования отображения плоскости $\vec{S}(\cdot)$ (на каждом шаге итерирования возникает свое "среднее" значение угла).

Можно записать формальное решение как результат бесконечного числа итераций:

$$\begin{aligned} \mathfrak{R}_\infty(\vec{H}) = \lim_{N \rightarrow \infty} & f(\vec{H}) f(\vec{S}(\vec{H}, \hat{\varphi}_1)) f(\vec{S}^{[2]}(\vec{H}, \hat{\varphi}_1, \hat{\varphi}_2)) \dots \\ & \dots f(\vec{S}^{[N-1]}(\vec{H}, \hat{\varphi}_1, \hat{\varphi}_2, \dots, \hat{\varphi}_{N-1})) \mathfrak{R}_0(\vec{S}^{[N]}(\vec{H}, \hat{\varphi}_1, \hat{\varphi}_2, \dots, \hat{\varphi}_N)) \end{aligned} \quad (20')$$

(здесь \mathfrak{R}_0 - характеристическая функция начального распределения). Существенно, что отображение (20a,б) при любом $\varphi \in [0, 2\pi]$ переводит исходную точку (P, Ω) в точку (P', Ω') , более близкую к началу координат:

$$(P')^2 + (\Omega')^2 < \max(\alpha, \gamma) (P^2 + \Omega^2), \text{ где } \max(\alpha, \gamma) < 1.$$

Как следствие, при $N \rightarrow \infty$

$$\vec{S}^{[N]}(\vec{H}, \hat{\varphi}_1, \hat{\varphi}_2, \dots, \hat{\varphi}_N) \rightarrow 0 \text{ и } \mathfrak{R}_0(\vec{S}^{[N]}) \rightarrow \mathfrak{R}_0(\vec{0}) = 1$$

(последнее равенство есть обычное условие нормировки для характеристической функции). Мы видим, что в пределе больших времен происходит потеря памяти о начальном распределении; сходимость бесконечного произведения в (20') очевидна ($|f|=1$). Таким образом, существует стационарное распределение $\mathfrak{R}_{cr} = \mathfrak{R}_\infty$.

Из линейности преобразования (19') следует, что то же самое уравнение описывает эволюцию приращений. Далее, повторяя все вышесказанное и учитывая, что $\Delta\mathfrak{R}_0(\vec{H}) \rightarrow 0$ при $\vec{H} \rightarrow 0$ (а это следует опять же из условия нормировки), мы легко приходим к выводу об устойчивости стационарного решения.

На рис.5,а для сравнения представлены результаты, полученные численным итерированием и накоплением статистических данных (точки) либо путем численного решения интегрального уравнения для плотности стационарного распределения (сплошные линии); здесь $\rho = [M_x^2 + M_y^2]^{1/2}$, $q = |M_z - M_{00}|$. На рис.5,б изображен также рельеф двумерного распределения в координатах ρ, q .

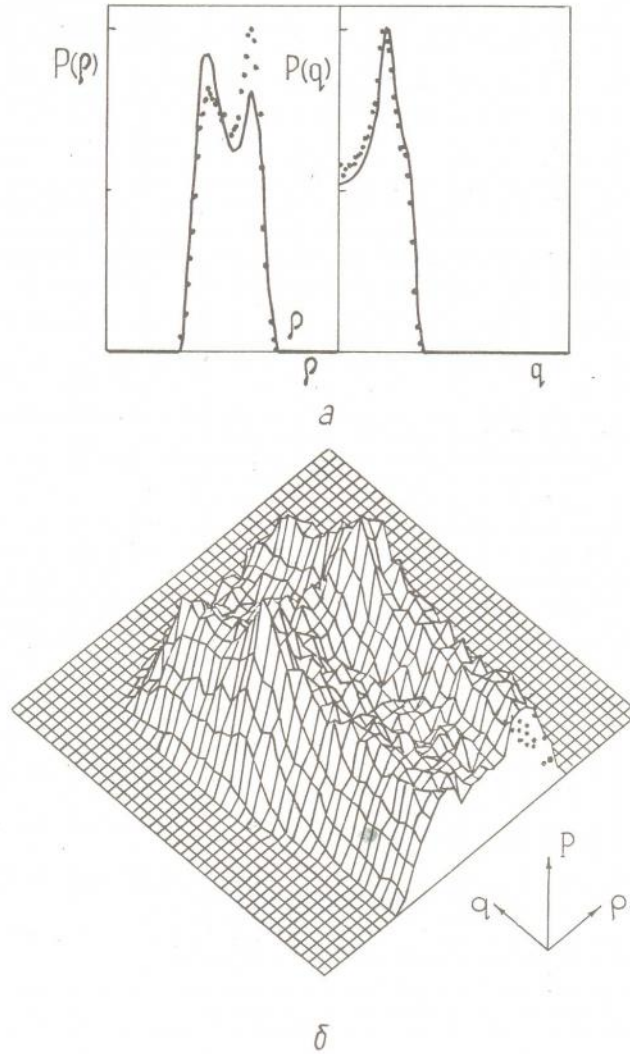


Рис.5

В заключение заметим, что уравнение (18), а также уравнение, получающееся из (8) в результате замены индексов $(N, N+1 \rightarrow \text{ст})$, являются некоторыми обобщенными формами уравнений самоподобия. Известно [7], что более простые уравнения такого типа могут иметь фрактальные решения. Хотя мы не обладаем строгим доказательством существования фрактальных решений уравнения (18), негладкость графиков функций, получающихся при численном решении этого уравнения для некоторых значений параметров, позволяет высказать такое предположение.

Библиографический список

1. Шустер Г. Детерминированный хаос. М.: Мир, 1988.
2. Туров Е.А., Куркин М.И., Николаев В.В. Движение ядерных спинов с учетом их взаимодействия по Сулу и Накамура//ЖЭТФ. 1973. Т.64. С.283.
Боровик-Романов А.С. и др. Спиновое эхо в системах со связанной ядерно-электронной прецессией//УФН. 1984. Т.142. С.537.
3. Буишвили Л.Л., Угулава А.И. Остохастическом движении вектора ядерной намагниченности//ФТТ. 1983. Т.25. С.2370.
Алексеев К.Н., Берман Г.П., Цифринович В.И.//Тр. IV Междунар. рабочей группы по нелинейным и турбулентным процессам в физике. Киев, 1989. Т.2. С.334.
Алексеев К.Н., Берман Г.П., Цифринович В.И. Хаотическая динамика в ЯМР //ЖЭТФ. 1990. Т.97. С.1277.
4. Рухлов В.С. Хаотический режим в нелинейном ЯМР//Письма в ЖЭТФ. 1991. Т.52. С.1060.
Rukhlov V.S.//Phys. Lett. 1991. Vol.160. P.131.
5. Bribges R., Rowlands G.//Phys. Lett. 1977. Vol.63A. P.189.
Yamaguchi Y., Mishima N. Structure of strange attractor and homoclinic bifurcation of two-dimensional cubic map//Phys. Lett. 1984. Vol.104A. P.179.
Зверев В.В., Рубинштейн Б.Я. О мультистабильности, обусловленной перестройками хаоса в кольцевом резонаторе с нелинейным элементом//Опт. и спектр. 1987. Т.62. С.872.
6. Зверев В.В., Рубинштейн Б.Я. Хаотическая автомодуляция излучения в кольцевом резонаторе. Случай сильного перемешивания//Опт. и спектр. 1988. Т.65. С.971.
Zverev V.V., Rubinstein B.Ja.//J.Stat.Phys. 1991. Vol.63. P.221.
7. Фегер Е. Фракталы. М.: Мир, 1991.

Уральский политехнический институт
Екатеринбург

ON THE ORIGINATION OF THE CHAOTIC ATTRACTOR IN NUCLEAR SPIN MOTION IN FERROMAGNET

V.V. Zverev

It is shown both analytically and numerically that the chaotic attractor arises in the nuclear spin motion in ferromagnet and it has the Cantor set structure. The statistical treatment has been used for the investigation of the intense mixing case.



Изв. вузов "ПНД", т.1, №1, №2, 1993

УДК 621.373.21

ПЕРЕХОДНЫЙ ХАОС В СИСТЕМАХ С ЧЕТНОЙ НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ

В.В. Рожественский, И.Н. Стручков

Проведено детальное экспериментальное исследование переходного хаоса в автогенераторах со многими степенями свободы и нелинейностью, близкой к четной. Экспериментально подтверждено существование в таких системах переходного хаоса, связанного с граничным кризисом странного аттрактора и ранее открытого в одномерных и двумерных отображениях. Экспериментально установлено существование переходного хаоса с экспоненциальной зависимостью его среднего времени жизни от управляющего параметра p - бескризисного переходного хаоса. Построено двумерное невязимнооднозначное отображение, демонстрирующее бескризисный переходный хаос.

Введение

Термином переходный хаос (ПХ) обозначается длительный переходный процесс, имеющий все признаки динамического хаоса (устойчивая функция распределения, непрерывный спектр, локальная неустойчивость и др.), завершающийся быстрым (за время порядка обратной верхней частоты спектра колебаний системы) переходом к регулярному движению (состоянию покоя либо периодическим колебаниям). Согласно современным теоретическим представлениям о природе динамического хаоса, причиной ПХ может быть либо граничный кризис (столкновение странного аттрактора с границей его области притяжения), либо наличие в фазовом пространстве динамической системы стохастического множества, не являющегося аттрактором и отделяющего устойчивую особую точку или предельный цикл (регулярный аттрактор) от неустойчивых элементов фазового портрета (репеллеров).

Исследованию ПХ первого типа посвящено много работ, в основном теоретических, подкрепленных численными экспериментами на простейших отображениях, демонстрирующих стохастическую динамику (см., например [1] и обширную библиографию к ней). Его основной чертой является наличие критического значения управляющего параметра динамической системы p_c , при котором ПХ сменяется режимом стохастических автоколебаний. Основная закономерность этого ПХ - зависимость среднего времени жизни τ от управляющего параметра - имеет вид

$$\ln \left[\frac{\tau}{\tau_0} \right] = -\ln [f(p_c - p)] \quad \text{при } p < p_c, \quad (1)$$

$$\tau = \infty \quad \text{при } p \geq p_c,$$

где f - монотонная функция, $f(0)=0$ и $f(x)>0$ при $x>0$. Поведение $f(p_c - p)$ при $p \rightarrow p_c$ зависит от размерности аттрактора, рождающегося при $p=p_c$, и от свойств

границы его области притяжения. Для гладкой границы асимптотическая формула для τ имеет вид

$$\text{Ln}\left[\frac{\tau}{\tau_0}\right] = -\alpha \text{Ln}[p_c - p], \quad (2)$$

где α - критический показатель скейлинга (2), $\alpha > 1/2$ [2,3].

Механизм возникновения ПХ второго типа известен в математике уже давно. Например, в трехмерном фазовом пространстве он может вызываться разделительной гомоклиной структурой, отделяющей устойчивый предельный цикл от внешних репеллеров [4]. В качестве другого примера можно привести диффеоморфизм сферы S^2 , включающий конструкцию подковы Смейла [5], отделяющей устойчивую особую точку от источника. Если размерность фазового пространства системы равна или больше четырех, то соответствующие стохастические множества, окружающие устойчивое положение равновесия, могут существовать и для потоков [6]. В динамических системах этого типа фазовая траектория должна как бы "просочиться" через стохастическую "губку", прежде чем она сможет притянуться к устойчивому положению равновесия. Несмотря на то, что гомоклиная структура и подкова Смейла были известны намного раньше, чем странные аттракторы, ПХ второго типа совершенно не исследован. В частности, не известна зависимость среднего времени жизни τ от параметра, в качестве которого естественно брать коэффициент сжатия-растяжения в подкове Смейла или вещественную часть собственного числа седла, порождающего гомоклинную структуру. Заметим, что механизм ПХ второго типа, вообще говоря, не предусматривает существования критического значения управляющего параметра.

Целью нашей работы явилось экспериментальное исследование статистических свойств ПХ. Основное внимание было уделено натурному моделированию с помощью радиофизических средств (по замечанию Дж. Бернала, "схемная радиотехника - это экспериментальная математика"), и лишь в конце работы были проведены контрольные вычислительные эксперименты.

1. Автогенератор ПХ и методика эксперимента

Известно, что ПХ наблюдается в системах, содержащих в своем фазовом пространстве наряду с хаотическими притягивающими множествами регулярные аттракторы. Этому условию удовлетворяет выбранный нами автогенератор переходного хаоса (АПХ), построенный по блок-схеме, изображенной на рис.1 [7,8]. Характеристика нелинейного элемента близка к четной, подобно изображенной на рис.2. Управляющим параметром p служил коэффициент деления потенциометра. Отличием этого генератора от известных является квадратичность нелинейности при малых уровнях входного сигнала, обеспечивающая устойчивость нулевого положения равновесия при любых значениях p . Характеристическое сопротивление фильтра равнялось R . Частота среза фильтра выбиралась настолько низкой, чтобы можно было пренебрегать паразитными

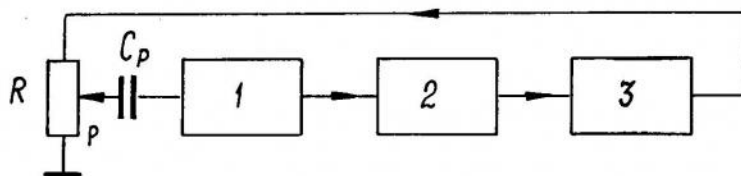


Рис.1. Блок-схема АПХ: 1 - линейный безынерционный усилитель переменного тока, 2 - безынерционный нелинейный элемент, 3 - LC-фильтр нижних частот, R - прецизионный потенциометр

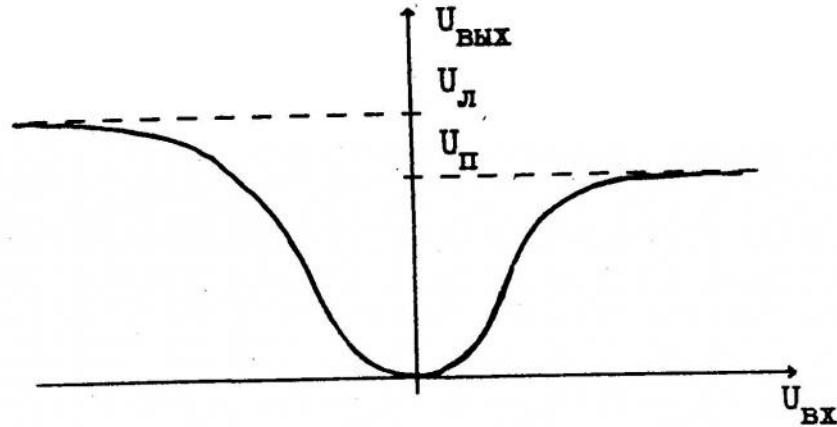


Рис.2. Передаточная характеристика нелинейности с возможной асимметрией амплитудного ограничения

параметрами элементов электронной схемы.

Было испытано четыре различных макета АПХ с разными частотами среза фильтра и с разными способами формирования нелинейной характеристики. В НЧ-макете нелинейная характеристика формировалась парой транзисторов, включенных пушпульно и работавших на общую нагрузку. Частота среза фильтра равнялась 12кГц. В других макетах нелинейность (включая ограничение) формировалась с помощью высокочастотных диодов, поэтому частота среза фильтра в них могла быть увеличена и достигала 650 кГц в ВЧ-макете. Кроме того, в этом макете можно было регулировать степень симметрии нелинейной характеристики путем изменения уровня правого или левого плеча ограничения (см. рис.2). Таким образом можно было устанавливать максимально возможную степень симметрии или вносить контролируемую асимметрию в нелинейную характеристику. Размерность фазового пространства АПХ определялась числом звеньев фильтра, которое составляло для НЧ-макета 8, а в ВЧ-макете могло изменяться с помощью выключателей от 4 до 14.

Подбором разделительной емкости C_p можно было добиться генерации стохастического режима при любых значениях параметра p , а также существования широкой области значений p , в которой наблюдался переходный хаос.

Эксперименты по измерению статистических свойств заключались в измерении длительности ПХ после запуска колебаний АПХ цугом импульсов длительностью 1мс (параметры запускающего сигнала были выбраны произвольно, но поддерживались всегда постоянными, равно как и место подачи запускающего цуга в автогенератор). Завершение ПХ фиксировалось с помощью детектора, момент появления нулевого сигнала на выходе которого соответствовал окончанию ПХ. Длительность ПХ носила при этом случайный характер и после достаточного количества запусков можно было построить гистограмму распределения длительностей ПХ. Другой режим работы использовался при определении зависимости среднего времени жизни $\tau(p)$ от управляющего параметра p . В нем АПХ перезапускался автоматически сразу после окончания очередного ПХ, и электронный счетчик подсчитывал число запусков в течение определенного времени. Время жизни находилось делением этого полного времени на число запусков. Длительности отдельных реализаций ПХ изменялись в процессе экспериментов от десятка миллисекунд до десятков минут, т.е. примерно в 60 000 раз. Для определения $\tau(p)$ производилось усреднение не менее

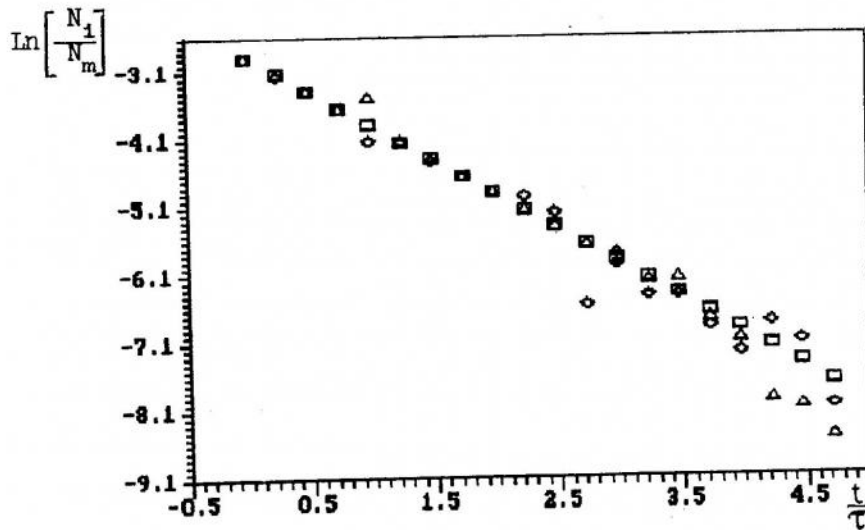
чем по 500 запускам, так что достоверные измерения τ заключались в пределах от ≈ 30 мс до ≈ 60 с (в диапазоне трех с половиной декад). При проведении измерений были приняты все необходимые меры для обеспечения стационарности (стабилизация питания, экранировка, прецизионный проволочный потенциометр), и статистическая обработка нескольких массивов данных, проведенная с помощью критериев Кокса - Стюарта и Валлиса - Мура [9], подтвердила статистическую устойчивость и отсутствие тренда экспериментальных данных.

2. Результаты измерений

Измерение гистограммы функции распределения длительностей ПХ при фиксированном p для всех исследованных макетов АПХ дало одинаковые результаты. В случае, когда произведение среднего времени жизни ПХ τ на частоту среза фильтра f_p превышало 10^4 , гистограммы описывались экспонентой (как и в ранее исследованных системах с переходным хаосом):

$$N(t) = N_m \exp\left[-\frac{t}{\tau}\right]. \quad (3)$$

Для примера на рис.3 приведены гистограммы распределения времен жизни ПХ для ВЧ-макета с 11 звеньями в фильтре при трех различных значениях



$p \times 10^3$	532	563	584
$\tau, \text{мс}$	14.72	126	1115
объем выборки	30076	3927	897
СИМВОЛ	□	△	◇

Рис.3. Нормированные гистограммы относительно времен генераций $\frac{N[t, (p)]}{N_m}$ в полулогарифмическом масштабе для АПХ ($N=11$)

управляющего параметра. Зависимость среднего времени жизни τ от управляющего параметра p были разными. Для НЧ-макета эта зависимость описывалась формулой (2), характерной для ПХ, порожденного граничным кризисом. Типичный график приведен на рис.4,а. Критическое значение p_c управляющего параметра p находилось внутри области регулировки, и при $p > p_c$ ПХ в автогенераторе обнаружен не был.

Для ВЧ-макета с максимально симметричной характеристикой нелинейности $\tau(p)$ экспоненциально росло при увеличении p во всей доступной для измерения области значений $\tau(p)$ без каких-либо признаков отклонения $\ln \left[\frac{\tau}{\tau_0} \right]$ от линейной зависимости и, следовательно, без каких-либо признаков существования критического значения p_c (соответствующий график приведен на рис.4,б):

$$\tau = \tau_0 \exp[C_0 p]. \quad (4)$$

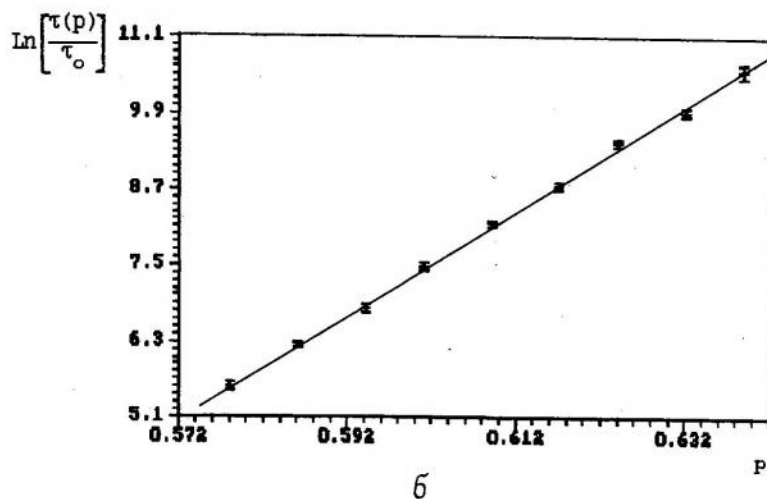
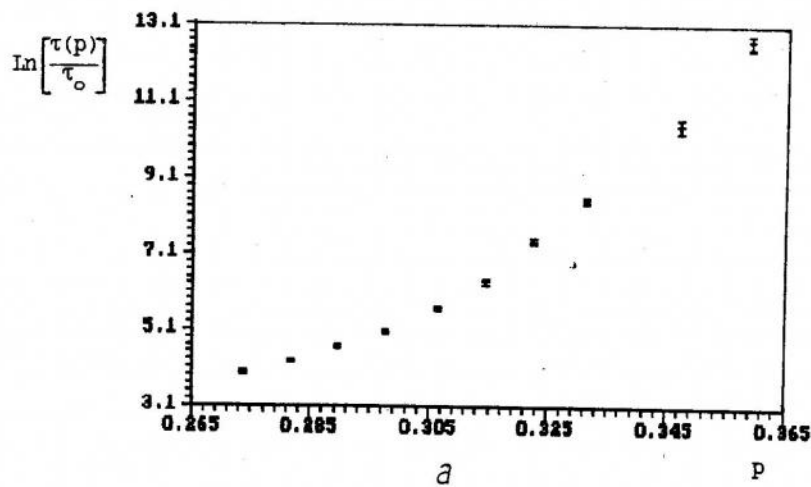


Рис.4. Экспериментальные зависимости $\ln \left[\frac{\tau(p)}{\tau_0} \right]$ ($\tau_0 = 1 \text{ мс}$) от p : а - для НЧ-макета (8 звеньев), б - для ВЧ-макета (9 звеньев)

С целью выяснения причин разного поведения зависимости $\tau(p)$ для НЧ- и ВЧ-макетов были произведены измерения этой зависимости для ВЧ-макета, в характеристику нелинейности которого вносилась контролируемая асимметрия.

Степень асимметрии характеризовалась величиной параметра $\alpha = \frac{U_n - U_p}{U_n + U_p}$

(см. рис.2). Оказалось, что внесение асимметрии иногда разрушает зависимость (4) и вызывает более быстрый, чем линейный, рост $\text{Ln}[\tau(p)]$ при увеличении p . При $|\alpha| = 0.08$ экспериментальные кривые $\tau(p)$ уже удовлетворительно описываются формулой (2) (соответствующий график приведен на рис.5).

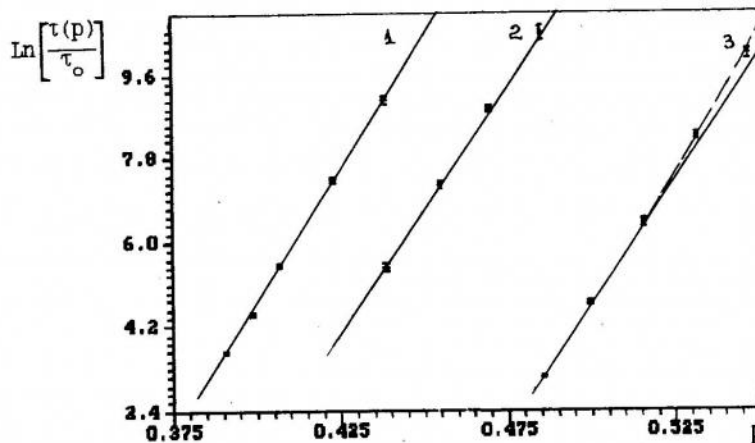


Рис.5. Экспериментальные зависимости $\text{Ln}[\frac{\tau(p)}{\tau_0}]$ ($\tau_0 = 1\text{мс}$) от p для ВЧ-макета (4 звена) при различных величинах асимметрии нелинейности: 1 - $\alpha=0.0$, 2 - $\alpha=0.03$, 3 - $\alpha=0.08$

3. Численный эксперимент

Контрольные численные эксперименты были предприняты на упрощенной математической модели АПХ, в которой фильтр моделировался задержкой и парой RC-цепей (дифференцирующей и интегрирующей). Такая модель описывается дифференциальным уравнением второго порядка с запаздыванием [8]:

$$\ddot{x}(t) + 2\gamma\dot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) = K \frac{d}{dt} \{f[x(t-1)]\} . \quad (5)$$

Функция $f(x)$ моделировала нелинейность АПХ и описывалась формулой

$$f[x] = \frac{2x^2(1 + \alpha \text{sign}[x])}{1 + 2x^2} . \quad (6)$$

С помощью параметра α моделировалась асимметрия нелинейности. Численное интегрирование (5) производилось при $\gamma = 0.85$, $\omega_0^2 = 0.56$ в соответствии с параметрами реального АПХ. Параметр K был пропорционален p : $K = \Delta p$, где $\Delta = \gamma + [\gamma^2 - \omega_0^2]^{0.5}$. Численный эксперимент проводился на ПЭВМ IBM PC AT и заключался, как и натурный эксперимент, в вычислении зависимости $\tau(p)$ и

построении гистограмм времен ПХ. При этом модель (5) показала наличие ПХ, качественные черты которого совпадали с аналогичными для ПХ в натурном эксперименте. Однако естественные ограничения по времени вычислений не позволили получить зависимость $\tau(p)$ в настолько широкой области значений $\tau(p)$, чтобы можно было с уверенностью говорить о ее типе.

Если отказаться от моделирования реальных АПХ и рассмотреть (5) при $\tau \gg 1 > \omega_0$ (последнее неравенство соответствует очень сильному различию верхней и нижней частот пропускания или отсутствию подавления низких частот в полосе пропускания АПХ), то тогда оно может быть приближенно заменено двумерным, в общем случае необратимым, отображением (его вывод дан в приложении):

$$\begin{cases} \bar{x} = Ax + B[f(x) - s], \\ \bar{s} = C[x + \bar{x}] + s, \end{cases} \quad (7)$$

где $f(x)$ дается выражением (6), а

$$A = \frac{2\exp[-2\gamma] - (1 - \exp[-2\gamma])\omega_0^2}{2 + (1 - \exp[-2\gamma])\omega_0^2},$$

$$B = \frac{2(1 - \exp[-2\gamma]) [\gamma + [\gamma^2 - \omega_0^2]^{1/2}]}{2 + (1 - \exp[-2\gamma])\omega_0^2} p,$$

$$C = \frac{\omega_0^2}{2[\gamma + [\gamma^2 - \omega_0^2]^{1/2}]} p^{-1}.$$

Отображение (7) позволяет исследовать ПХ в диапазоне $\tau(p)$ не только существенно более широком, чем для уравнения (5), но даже более широком, чем в натурном эксперименте. Разумеется, отображение (7) можно рассматривать и независимо от уравнения (5) при любых значениях коэффициентов.

На рис.6 приведены зависимости $Lp[\tau(p)]$ при трех значениях параметра асимметрии α (0.0, ± 0.1) и $\gamma = 0.85$, $\omega_0^2 = 0.56$. Каждое значение $\tau(p)$ определялось как среднее по 100 завершившимся (притянувшимся к нулевому положению равновесия) переходным процессам (7) с различными начальными условиями $(x_0; s_0)$, равномерно распределенными в интервале $[-2; 2]$.

Таким образом, отображение (7) демонстрирует ПХ, прерываемый окнами периодических колебаний. Среднее время жизни ПХ экспоненциально зависит от управляющего параметра. Следует отметить, что даже в окнах периодичности существуют начальные условия, при которых отображение (7) демонстрирует ПХ, сходящийся к нулевому положению равновесия.

* * *

Перечислим следующие основные результаты:

1) впервые проведено детальное экспериментальное исследование ПХ в автогенераторах со многими степенями свободы и нелинейностью, близкой к четной;

2) экспериментально подтверждено существование в таких системах ПХ, связанного с граничным кризисом странного аттрактора, обнаруженного ранее в одномерных и двумерных отображениях;

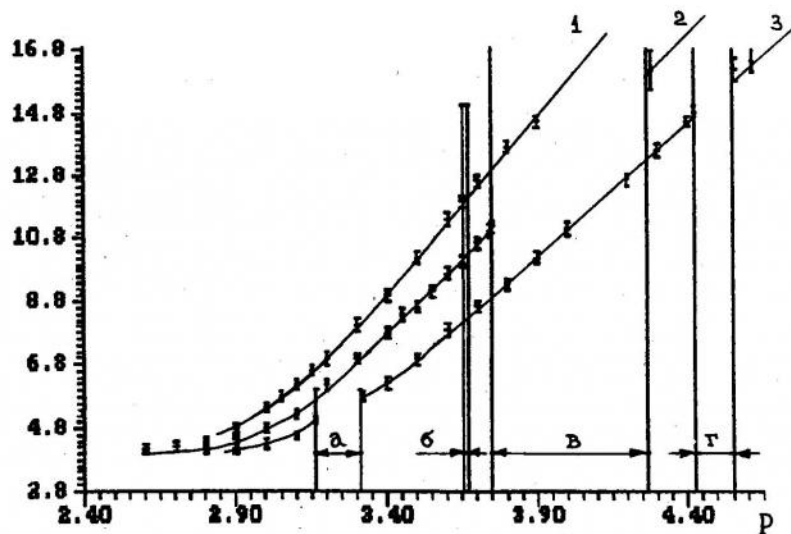


Рис.6. Зависимости $L_n[\langle n \rangle]$ для ПХ в отображении (7) при различных величинах асимметрии нелинейности (6): 1 - $\alpha = -0.1$, 2 - $\alpha = 0.0$, 3 - $\alpha = 0.1$; вертикальными полосами показаны окна периодичности: а - $\Delta_1(\alpha = 0.1)$, б - $\Delta_2(\alpha = -0.1)$, в - $\Delta_3(\alpha = 0.0)$, г - $\Delta_4(\alpha = 0.1)$

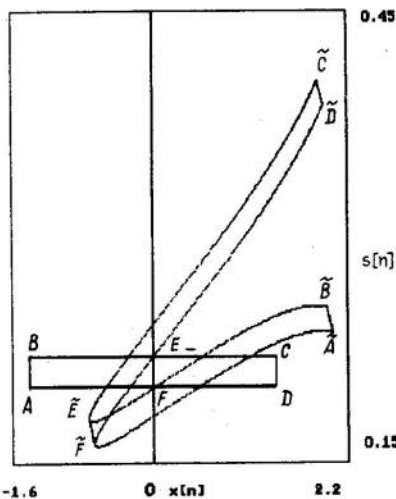


Рис.7. Преобразование отображением (7) узкого прямоугольника $ABCD = \{x \in [-1.4; 1.4], s \in [0.2; 0.22]\}$ в криволинейный прямоугольник $\tilde{A}\tilde{B}\tilde{C}\tilde{D}$ ($\omega_0^2 = 0.56$, $\gamma = 0.85$, $H = 0.0$, $p = 4.0$)

узких горизонтальных прямоугольников (рис.7). При увеличении управляющего параметра (коэффициента усиления АПХ) плотность этой "стохастической сети" растет, что вызывает рост среднего времени жизни ПХ. При нарушении симметрии характеристики нелинейности в недрах стохастического множества может рождаться аттрактор (странный, либо, как в случае отображения (7), регулярный), и тогда система будет демонстрировать ПХ гранично-кризисного типа.

3) экспериментально установлено существование бескризисного ПХ с экспоненциальной зависимостью среднего времени жизни от управляющего параметра p : $\tau(p) = \tau_0 \exp[C_0 p]$;

4) построено двумерное невязимнооднозначное отображение, демонстрирующее бескризисный ПХ.

Анализ результатов натурального и численного исследования АПХ с нелинейностью, близкой к четной, позволяет составить следующую правдоподобную картину возникновения ПХ. Благодаря невязимнооднозначности и симметричности характеристики нелинейности в фазовом пространстве системы возникает сложно устроенное стохастическое множество (типа гомоклиной структуры или подковы Смейла), отделяющее устойчивое положение равновесия от неустойчивой бесконечности и вызывающее ПХ бескризисного типа. Подтверждением этому может служить характер преобразования отображением (7)

Вывод отображения (7)

Отображение (7) получается в приближении сильной диссипации: $\gamma \gg 1$ из следующей эквивалентной уравнению (5) системы уравнений [8]

$$\begin{cases} \epsilon \dot{x}(t) = f[x(t-1)] - \{kx(t) + s(t)\}, \\ \dot{s}(t) = \omega_0^2 \epsilon x(t), \end{cases}$$

где $\epsilon = 1/K$, $k = 2\gamma\epsilon$. Действительно, перепишем первое уравнение этой системы, сгруппировав в левой его части члены, линейные по $x(t)$,

$$\dot{x}(t) + 2\gamma x(t) = K[f[x(t-1)] - s(t)]$$

(K - то же, что и в (5)), и введем следующие обозначения:

$$\begin{aligned} x_n(\eta) &\equiv x(n + \eta), \quad x_n \equiv x(t \equiv n); \\ s_n(\eta) &\equiv s(n + \eta), \quad s_n \equiv s(t \equiv n). \end{aligned}$$

С учетом того, что отклик $h(\xi)$ на δ -импульс левой части последнего уравнения равен $\exp[-2\gamma\xi]$, получим с помощью интеграла Дюамеля систему уравнений

$$\begin{cases} x_n(\eta) = x_n \exp[-2\gamma\eta] + K \int_0^\eta [f[x_n(\xi-1)] - s_n(\xi)] \exp[2\gamma(\xi-\eta)] d\xi, \\ s_n(\eta) = s_n + \omega_0^2 \epsilon \int_0^\eta x_n(\xi) d\xi. \end{cases}$$

Для $\eta = t_{зад} = 1$ последнюю систему можно переписать в следующем виде:

$$\begin{cases} x_{n+1} = qx_n + K[I_1 - I_2], \\ s_{n+1} = s_n + \omega_0^2 I_3, \end{cases} \quad (\text{П.1})$$

где $q = h(1) \equiv \exp[-2\gamma]$, $I_1 \equiv \int_0^1 f[x_n(\xi-1)] \exp[2\gamma(\xi-1)] d\xi$

$$I_2 \equiv \int_0^1 s_n(\xi) \exp[2\gamma(\xi-1)] d\xi, \quad I_3 \equiv \int_0^1 \epsilon x_n(\xi) d\xi.$$

В случае сильной диссипации ($2\gamma \gg 1$) ядро $h(\xi)$ интеграла Дюамеля является быстро затухающей функцией, существенно отличной от нуля лишь в малой окрестности $\xi=0$. Вследствие этого допустимы следующие оценки интегралов I_1 , I_2 :

$$I_1 \approx \int_0^1 f[x_n(0)] \exp[2\gamma(\xi-1)] d\xi \equiv f[x_n] (1-q), \quad (\text{П.2})$$

$$I_2 \approx \int_0^1 s_n(1) \exp[2\gamma(\xi-1)] d\xi \equiv s_{n+1} (1-q). \quad (\text{П.3})$$

Последняя оценка особенно хорошо "работает" в приближении квазистатичности $s(t)$ (по сравнению с $x(t)$) при $\omega_0^2 \ll 1$. Для получения из системы (П.1) искомого отображения, воспользуемся следующей аппроксимацией I_3 :

$$I_3 = \varepsilon \frac{1}{2} [x_n + x_{n+1}] . \quad (\text{П.4})$$

Подстановка формул (П.2)-(П.4) в уравнения (П.1) дает следующее двумерное отображение:

$$\begin{cases} \bar{x} = qx + \bar{B} [f(x) - \bar{s}] , \\ \bar{s} = s + \bar{C} [x + \bar{x}] , \end{cases} \quad (\text{П.5})$$

где $\bar{B} \equiv K(1-q) \gg 1$, $\bar{C} \equiv \frac{1}{2} \omega_0^2 \varepsilon \ll 1$. Искомое отображение (7) получается из системы (П.5) после подстановки в первое уравнение второго и приведения коэффициентов при подобных членах.

Библиографический список

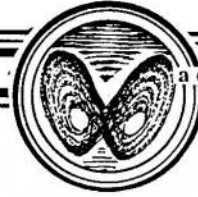
1. Grebogi C., Ott E., Yorke J.A. Crisis, sudden changes in chaotic attractors and transient chaos//Physica D. 1983. Vol.7, N 1. P.181.
2. Grebogi C., Ott E., Yorke J.A. Critical exponent of chaotic transients in nonlinear dynamical systems//Phys. Rev. Lett. 1986. Vol.57, N 11. P.1284.
3. Пиковский А.С., Рождественский В.В. Размерность и время переходного процесса при переходах типа кризис в хаосе//ЖТФ. 1987. Т.57, N 1. С.1401.
4. Неймарк Ю.И. Метод точечных отображений в теории нелинейных колебаний. М.: Наука, 1972.
5. Палис Ж.В., ду Мелу. Геометрическая теория динамических систем. М.: Мир, 1986.
6. Берже П., Помо И., Вигаль К. Порядок в хаосе. М.: Мир, 1991.
7. Рождественский В.В., Стручков И.Н.//Тез. докл. конф. "Радиофизическая информатика", 27-29 нояб. 1990 г. М., 1990.
8. Рождественский В.В., Стручков И.Н. Переходный хаос в автогенераторе стохастических колебаний с жестким возбуждением и четной нелинейностью//ЖТФ. 1992, N 8 (в печати).
9. Закс Л. Статистическое оценивание/Пер. с нем. М.: Статистика, 1976.

Московский физико-технический институт
Долгопрудный

CHAOTIC TRANSIENTS IN SYSTEMS WITH NEARLY EVEN NONLINEARITY

V.V. Rozhdestvensky, I.N. Struchkov

We study the chaotic transients observed in radiophysical autogenerators with many degrees of freedom and nearly even nonlinearity. The existence of chaotic transients, associated with the boundary crisis and earlier observed in one- and two-dimensional maps, was experimentally confirmed for the first time in such systems. There were also discovered the chaotic transients of a new type (so-called "uncrisis" chaotic transients), whose average lifetime depends upon the system parameter p (autogenerators amplifying factor) via $\tau(p) = \tau_0 \exp(c_0 p)$, with τ_0 , c_0 - some constants. The two-dimensional non one-to-one map is examined, which demonstrated uncrisis chaotic transients. Such maps were unknown earlier.



ПУТЬ К ХАОСУ В КУСОЧНО-ЛИНЕЙНОЙ МОДЕЛИ ГЕНЕРАТОРА НА ТУННЕЛЬНОМ ДИОДЕ

А.В. Андрушкевич, А.А. Кипчатов, Л.В. Красичков, А.А. Короновский

Представлены результаты экспериментального и численного исследования кусочно-линейного аналога генератора на туннельном диоде. Показано, что хаотизация в нем происходит по сценарию удвоения периода на фоне глобальной картины поведения, основанной на добавлениях периода. Построена карта режимов кусочно-линейного генератора на плоскости управляющих параметров "параметр диссипации - параметр нелинейности", которая качественно совпадает с картой режимов генератора на реальном туннельном диоде с гладкой вольтамперной характеристикой (ВАХ).

Введение

Известно, что простые динамические системы способны демонстрировать сложное и хаотическое поведение. Примером таких систем является генератор на туннельном диоде, сконструированный и исследованный С.В. Кияшко, А.С. Пиковским, М.И. Рабиновичем [1-4]. В натурном и численном экспериментах они показали, что в данном генераторе присутствуют хаотические колебания, а с помощью метода символической динамики доказали их существование при параметре нелинейности ϵ , стремящемся к нулю. Позднее для этого генератора, реализованного по эквивалентной схеме, показанной на рис.1, экспериментально была получена карта динамических режимов, показывающая пути возникновения хаоса и закономерности переходов между различными типами сложнопериодических колебаний при изменении управляющих параметров [5]. Оказалось, что поведение генератора на плоскости параметров "инкремент затухания - параметр нелинейности ϵ " разбивается на инвариантные зоны колебаний, рожденные на основе k -тактных циклов ($k=1,2,3, \dots$). Эти зоны разграничены линиями добавления периода, пересечение которых приводит к изменению базового периода колебаний на единицу.

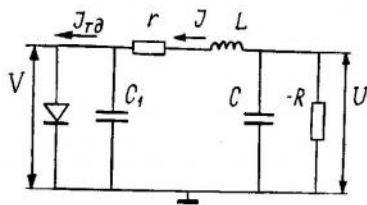


Рис.1. Эквивалентная схема генератора на туннельном диоде

Общая картина поведения при изменении параметра диссипации подобна "чертовой лестнице" с самоподобной фрактальной структурой зон колебаний. Однако, если в генераторе на туннельном диоде существует хаос, то возникает закономерный вопрос: где место на "ступенях чертовой лестницы" хаосу и каков путь хаотизации колебаний в такой системе? На основании экспериментальной карты режимов [5] можно предположить, что переход к хаосу в этом генераторе происходит через удвоение периода, так как было обнаружено единственное удвоение, за которым следовала область хаотических колебаний.

Данная работа направлена на выявление сценария хаотизации колебаний в генераторе на туннельном диоде. Для исключения влияния на динамику системы неконтролируемых процессов в $p-n$ переходе был выбран путь радиотехнического кусочно-линейного моделирования ВАХ туннельного диода. Кусочно-линейный подход часто используется при численном моделировании и резко упрощает анализ поведения систем. Л.О.Чжуа и другие во многих своих работах исследуют различные генераторы хаоса, в которых нелинейность задается кусочно-линейными характеристиками. Например, для неавтономного нелинейного контура он показал, что возможен переход от гладкой нелинейной функции, описывающий диод, к ее кусочно-линейному аналогу без качественного изменения динамики системы [6].

Для генератора на туннельном диоде также несомненный интерес представляет вопрос о возможности перехода от гладкой N -образной нелинейной функции, описывающей туннельный диод, к N -образной кусочно-линейной функции и то, как это повлияет на динамику системы. Для этого была экспериментально реализована модель генератора (см. рис.1), в которой с помощью схем на операционных усилителях сконструирована модель туннельного диода, имеющего кусочно-линейную ВАХ (рис.2).

Принципиальная электрическая схема генератора приведена на рис.3,

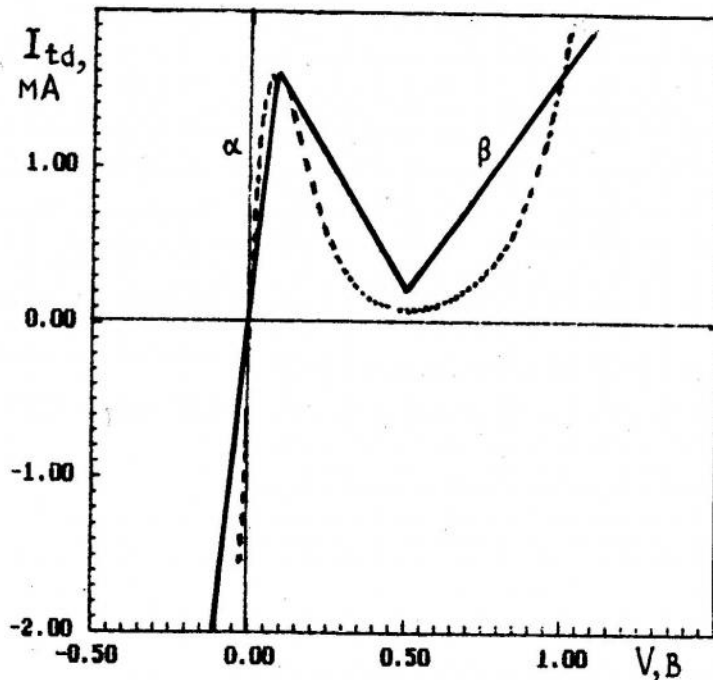


Рис.2. ВАХ туннельного диода (пунктирная линия) и его кусочно-линейной модели (сплошная линия)

где на операционных усилителях DA1-DA3 реализована кусочно-линейная модель туннельного диода с N -образной ВАХ, а на DA4 - гиратор, обеспечивающий отрицательное сопротивление, являющееся источником энергии для генератора. Форма ВАХ диода и величина отрицательного сопротивления определяются номиналами резисторов схемы и опорными напряжениями E_1, E_2 [7].

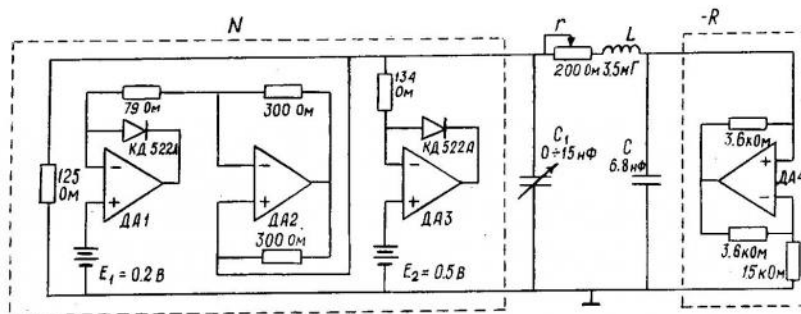


Рис.3. Принципиальная схема кусочно-линейной модели генератора на туннельном диоде

Динамика генератора на туннельном диоде (см. рис.1), описывается системой обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} L \frac{dI}{dt} &= -Ir + U - V, \\ C \frac{dU}{dt} &= -I - U/R, \\ C_1 \frac{dV}{dt} &= I - I_{td}(V), \end{aligned} \quad (1)$$

где $I_{td}(V)$ определяет ВАХ нелинейного элемента схемы.

1. Результаты натурального эксперимента

Исследования колебательных режимов кусочно-линейного аналога генератора Кияшко - Пиковского - Рабиновича проводились на плоскости управляющих параметров "параметр диссипации - параметр нелинейности ϵ ". Технология исследований и идентификации сложных колебаний была аналогична эксперименту с реальным туннельным диодом [5] и основывалась на анализе фазовых портретов и спектров колебаний.

В фазовом пространстве поведению генератора соответствует спираль, раскручивающаяся на плоскости "ток через кусочно-линейную модель туннельного диода $I_{td}(V)$ - напряжение на емкости контура $U(t)$ ". Переключению кусочно-линейной модели туннельного диода с ветви α на ветвь β (см. рис.2) соответствует срыв изображающей точки с плоскости в пространство и ее возвращение к началу спирали.

Карта режимов работы генератора, представленная на плоскости параметров "инкремент затухания γ - шунтирующая емкость C_1 ", разделена на характерные зоны колебаний A, B, C, ..., G (рис.4). Каждая зона содержит области периодического поведения и области хаотического поведения, показанные штриховкой.

Периодические режимы обозначены здесь отношением двух чисел ($n:m$), соответствующих отношению числа витков траектории аттрактора, оставшихся в плоскости, к числу витков траектории аттрактора, выходящих в пространство. Сумма этих двух чисел ($n+m$) дает полное число оборотов траектории в фазовом пространстве, а следовательно, однозначно определяет число субгармоник в спектре, равное $(n+m-1)$ [5].

Для кусочно-линейного аналога генератора хорошо видно из карты режимов, что переход от периодических к хаотическим колебаниям внутри зон добавления периода происходит через каскад бифуркаций удвоения периода. В

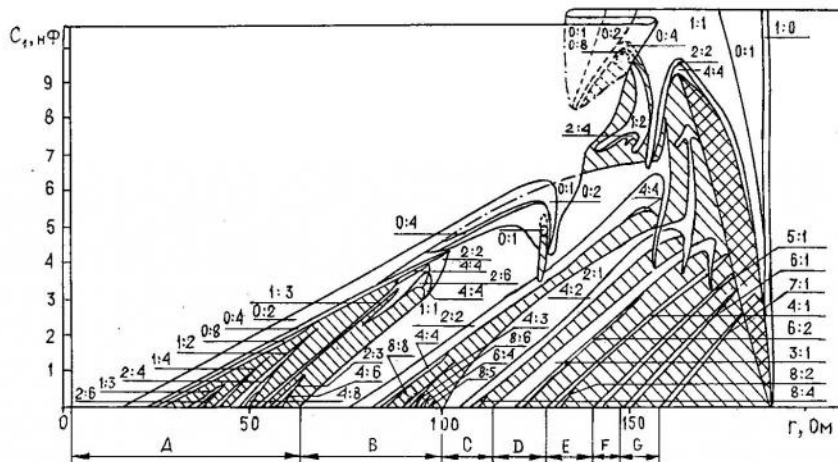


Рис.4. Плоскость управляющих параметров кусочно-линейной модели генератора на туннельном диоде

натурном эксперименте удавалось обнаружить три бифуркации удвоения периода. На рис. 5 показаны фазовые портреты и спектры мощности, иллюстрирующие переход к хаосу по сценарию Фейгенбаума в зоне А (на карте режимов) с возрастанием инкремента затухания: $(0:1) \rightarrow (0:2) \rightarrow (0:4) \rightarrow$ (хаос). На рис.6 аналогично показан переход к хаосу через удвоения периода в зоне В с увеличением параметра γ : $(1:1) \rightarrow (2:2) \rightarrow (4:4) \rightarrow$ (хаос).

Рассматривая, как изменяется поведение генератора при движении по всей плоскости параметров с увеличением сопротивления γ , можно выявить следующие закономерности. Зоны диаграммы А, В, С, ..., Г повторяют друг друга в своем строении с тем отличием, что при переходе от одной зоны к другой фазовый портрет приобретает дополнительный оборот в плоскости медленных движений (система с большей диссипацией дольше раскачивается до установления порогового значения тока I_m через кусочно-линейную модель туннельного диода). Так, например, аналогичны друг другу области периодичности $(0:1)$ в зоне А, $(1:1)$ в зоне В, $(2:1)$ в зоне С и т.д. То есть, при переходе от зоны к зоне происходит добавление периода и эквидистантный спектр субгармоник сменяется другим эквидистантным спектром с числом субгармоник большим на единицу.

Видно (см. рис.4), что зоны диаграммы содержат окна устойчивости высоких порядков (например, $(1:3)$, $(1:4)$ в зоне А, $(4:3)$, $(6:4)$ в зоне В). Кроме того, внутри зоны А удалось выявить закономерности, присущие всей диаграмме режимов в целом: скейлинг добавления периода и переход к хаосу через удвоения периода. Например, область периодичности $(2:3)$ аналогична области $(1:2)$ с тем отличием, что фазовый портрет режима $(2:3)$ приобрел дополнительный виток траектории в плоскости медленных движений и дополнительный виток траектории, выходящий в пространство (добавление периода на два). Переход от режимов $(1:2)$ и $(2:3)$ к хаосу также происходит через удвоение периода колебаний: $(1:2) \rightarrow (2:4) \rightarrow (4:8) \rightarrow$ (хаос), $(2:3) \rightarrow (4:6) \rightarrow$ (хаос).

Увеличение параметра нелинейности ϵ (емкости C_1) приводит к постепенному сближению зон колебаний и смещению их в сторону больших значений инкремента затухания. При этом на плоскости параметров образуются складки, что соответствует неоднозначному поведению генератора.

Таким образом, поведение кусочно-линейной модели генератора на плоскости управляющих параметров в основном аналогично поведению генератора на туннельном диоде, и карта режимов разбивается на повторяющиеся зоны

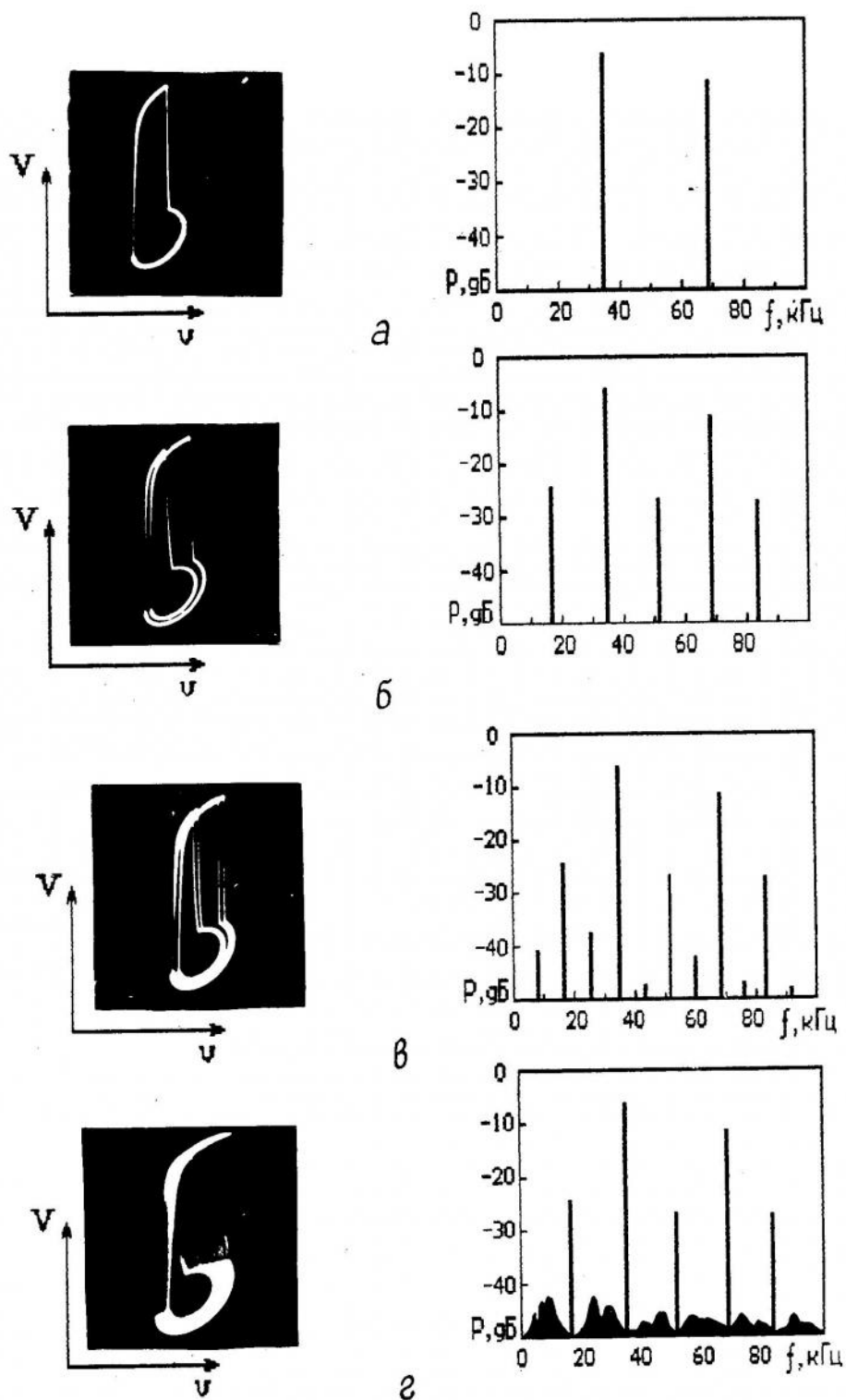
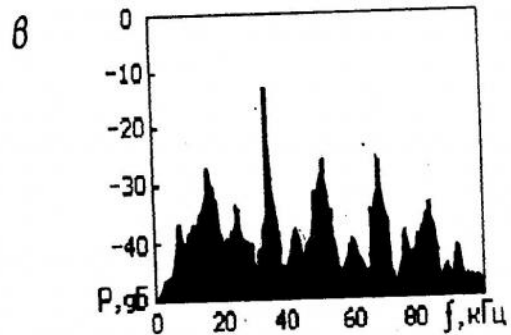
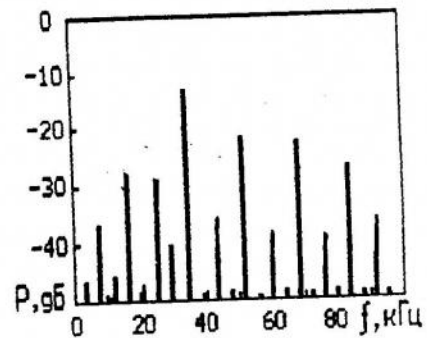
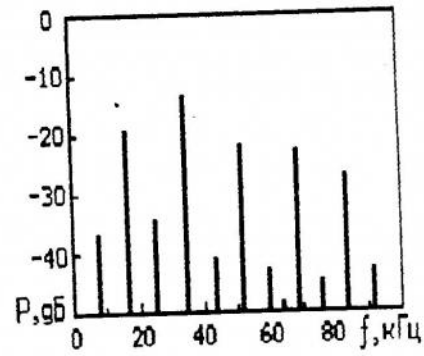
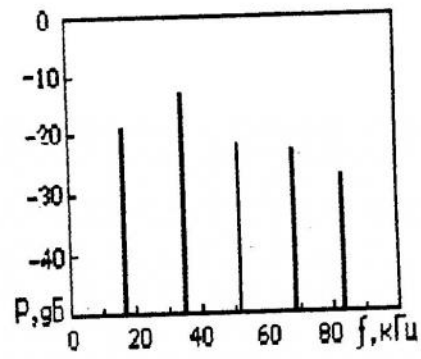
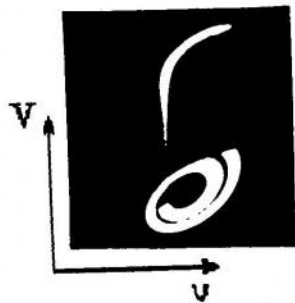
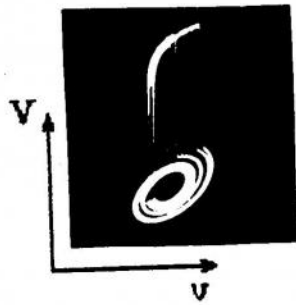
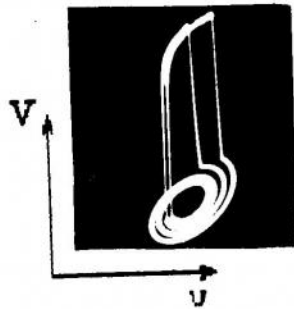
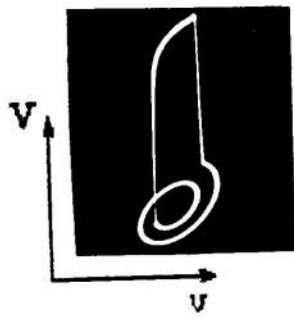


Рис.5. Эволюция фазовых портретов и спектров мощности (натурный эксперимент):
а - (0:1), б - (0:2), в - (0:4), г - (хаос)



а

б

в

г

Рис.6. Эволюция фазовых портретов и спектров мощности (натурный эксперимент):
 а - (1:1), б - (2:2), в - (4:4), г - (хаос)

колебаний A, B, C, \dots, G , рожденные на основе k -тактных циклов. Эти зоны разграничены линиями добавления периода, пересечение которых приводит к изменению базового периода зоны на единицу. Выявление сценария удвоения периода однозначно подтверждает рождение хаотических колебаний внутри зон добавления периода в широком диапазоне изменения параметра ϵ .

2. Результаты численного моделирования

Для проведения численного исследования поведения системы (1) уравнения запишем в безразмерном виде

$$\begin{aligned} \dot{x} &= 2\delta x + y - gz, \\ \dot{y} &= -x - y/2\lambda, \\ \epsilon \dot{z} &= x - f(z) \end{aligned} \quad (2)$$

с помощью соотношений

$$\begin{aligned} x &= I/I_m, \quad y = U(C/L)^{1/2}/I_m, \quad z = V/V_m, \\ \delta &= -(1/2)r(C/L)^{1/2}, \quad g = V_m(C/L)^{1/2}/I_m, \quad \lambda = -(1/2)R(C/L)^{1/2}, \\ &\quad \epsilon = gC_1/C, \end{aligned}$$

в которых $f(z)$ - нормированная кусочно-линейная характеристика туннельного диода (рис.7),

$$f(z) = \begin{cases} 11.765 z, & z \leq 0.085, \\ 1 - 2.108(z - 0.085), & 0.085 < z < 0.5, \\ 0.125 + 1.75(z - 0.5), & z \geq 0.5. \end{cases} \quad (3)$$

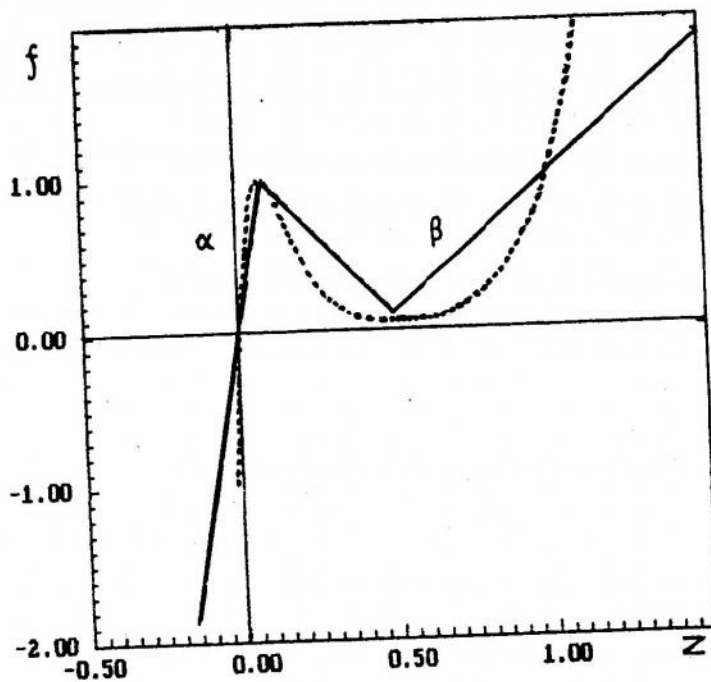


Рис.7. Нормированные ВАХ туннельного диода (пунктирная линия) и его кусочно-линейной модели (сплошная линия)

Численное моделирование уравнений (2) с нелинейной характеристикой (3) проводилось при фиксированном значении параметров g, λ, ϵ ($g=0.8535, \lambda=-1.0677, \epsilon=0.2$) и при изменении параметра δ в диапазоне от 0.0 до -0.2. Интегрирование уравнений осуществлялось методом Рунге - Кутты 4-го порядка с шагом $h=0.04$.

Была рассчитана бифуркационная диаграмма (рис.8), на которой представлены максимальные значения переменной y , отложенные в зависимости от адиабатически медленно меняющегося параметра δ . Количество приращений N бифуркационного параметра δ равно 500. На каждом шаге по δ представлено 50 максимумов переменной y . На приведенной бифуркационной диаграмме отчетливо видна скейлинговая структура добавления периода при переходе от одной зоны диаграммы к другой. На основании результатов расчета бифуркационной диаграммы был вычислен коэффициент масштабной инвариантности α_i ; $\alpha_i = \Delta_i / \Delta_{i+1}$, Δ_i - ширина зоны, i - номер зоны.

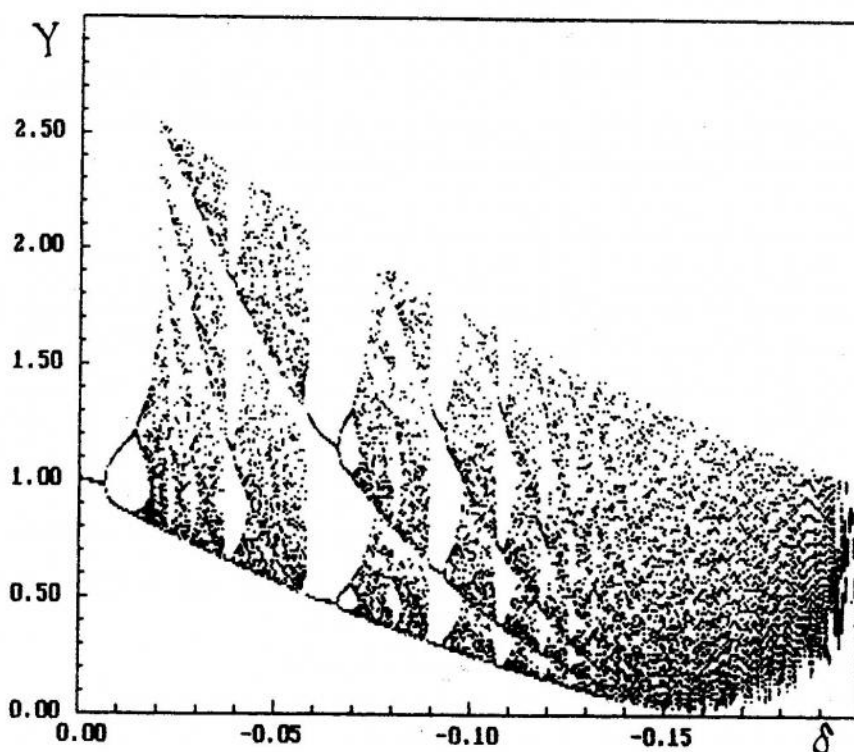


Рис.8. Бифуркационная диаграмма системы (2) - (3)

Результаты расчета коэффициента α представлены ниже. Среднее значение α составляет величину 1.36 ± 0.05 :

i	3	4	5	6
α_i	1.445	1.392	1.339	1.283

Значение коэффициента α , определенное по результатам численного моделирования системы (2)-(3), хорошо согласуется с результатами расчета α по данным натурального эксперимента [5]. Кроме этого, бифуркационная диаграмма наглядно иллюстрирует переход к хаосу внутри зон добавления периода через последовательность бифуркаций удвоения периода.

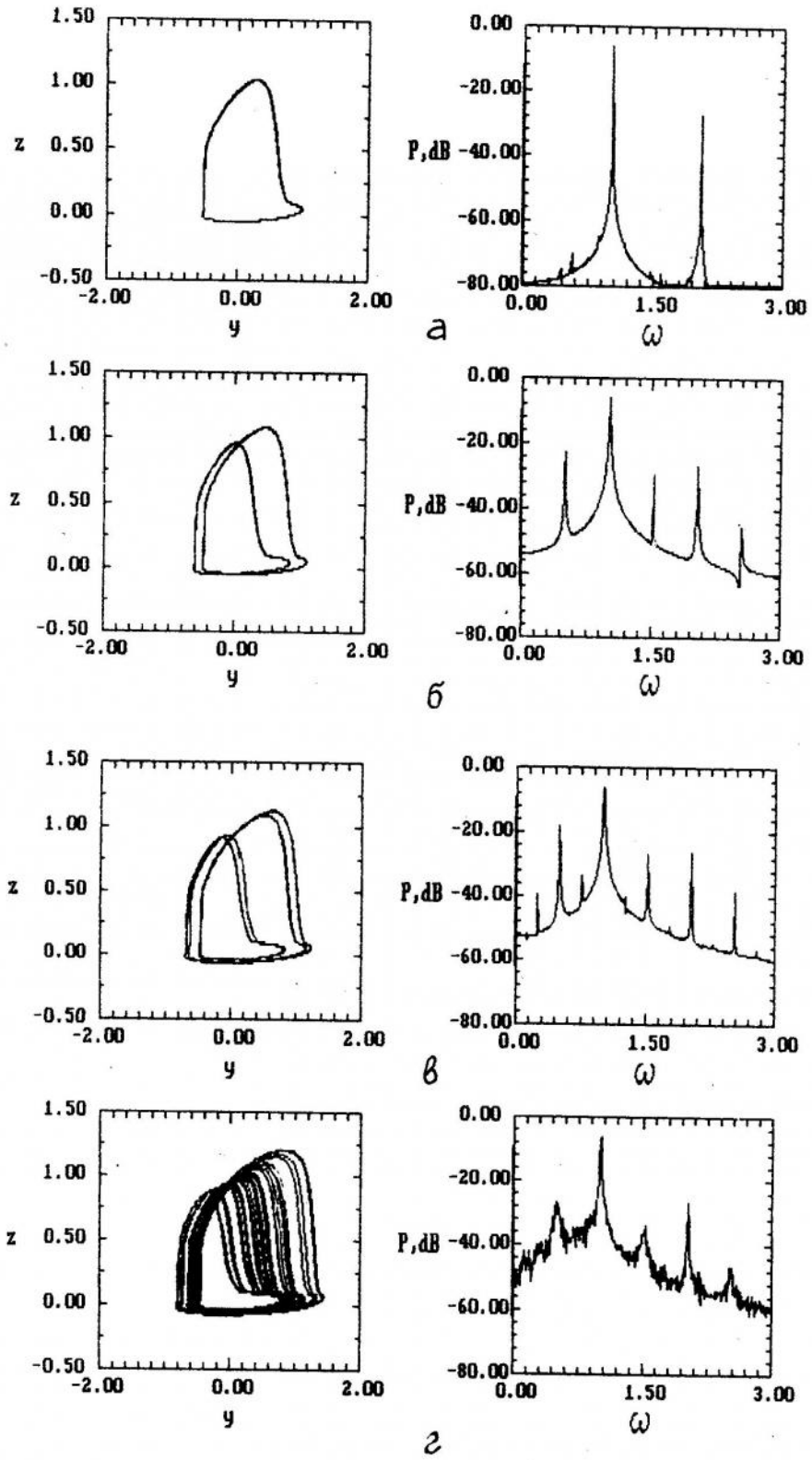


Рис.9. Фазовые портреты и спектры мощности для системы (2) - (3) (численный эксперимент): а - $\delta=0.000$ (0:1), б - $\delta=-0.0100$ (0:2), в - $\delta=-0.0150$ (0:4), г - $\delta=-0.0185$ (хаос)

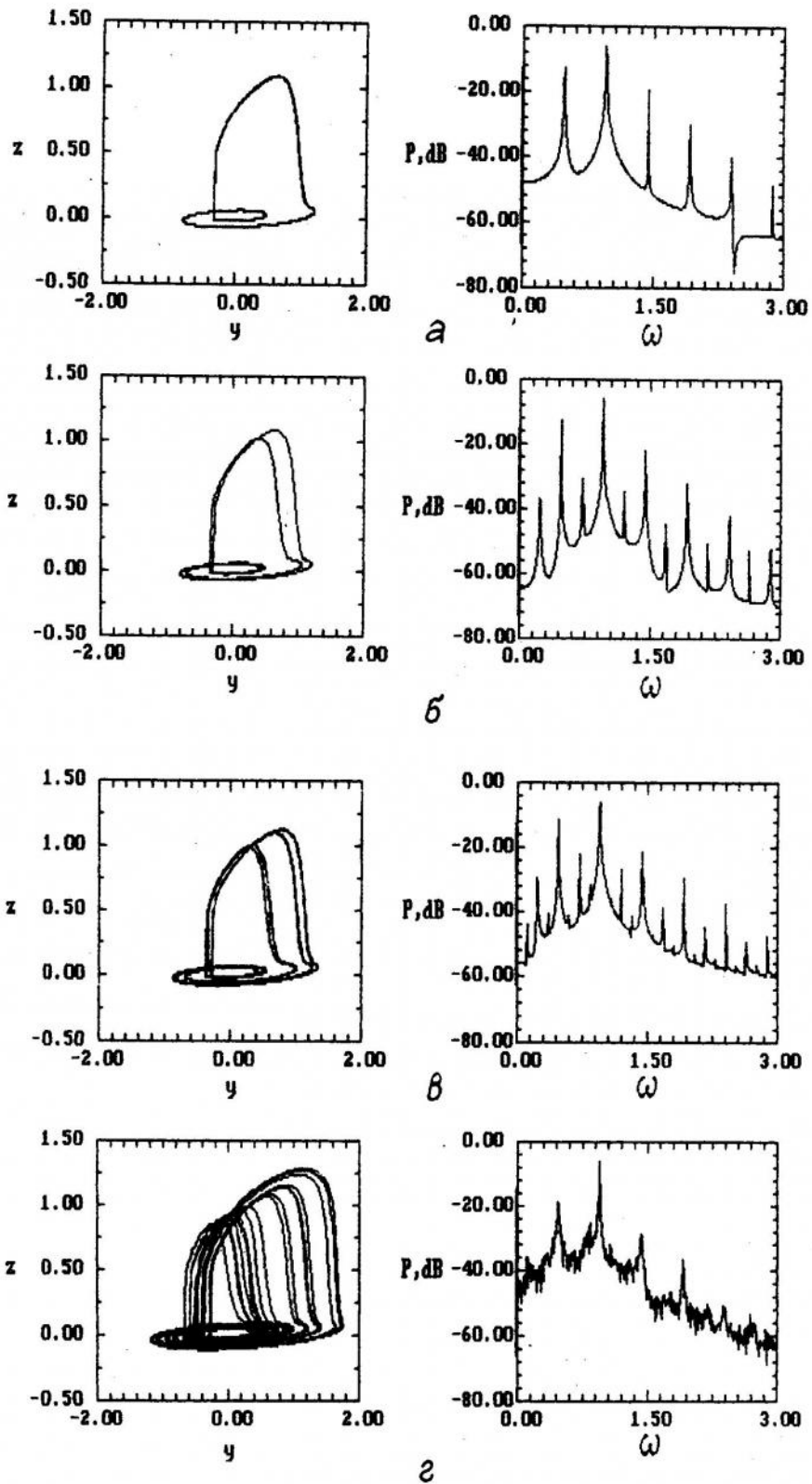


Рис.10. Фазовые портреты и спектры мощности для системы (2) - (3) (численный эксперимент): а - $\delta = -0.0600$ (1:1), б - $\delta = -0.0670$ (2:2), в - $\delta = -0.0700$ (4:4), г - $\delta = -0.0760$ (хаос)

На рис.9,10 представлены фазовые портреты и спектры колебаний генератора, полученные при нескольких фиксированных значениях δ . При этом на рис.9 представлена эволюция фазовых портретов и спектров при переходе к хаосу на базе цикла (0:1), а на рис.10 - на базе цикла (1:1). Представленные фазовые портреты и спектры качественно подобны экспериментальным (см. рис.5,6).

Результаты натурального и численного эксперимента позволяют говорить о том, что система уравнений (2) с кусочно-линейной аппроксимацией ВАХ диода (3) достаточно точно описывает динамику генератора на туннельном диоде.

* * *

Проведенные исследования демонстрируют, что кусочно-линейный подход, часто используемый для моделирования нелинейности в численном эксперименте, не менее успешно может быть применен и при натурном моделировании динамических систем, имеющих S- и N-образные характеристики. Существенным преимуществом кусочно-линейного моделирования сложной динамики является возможность широкодиапазонного варьирования характеристик схем, определяющих ее нелинейные свойства, а также возможность строгого количественного контроля этих характеристик. Качественное совпадение карт режимов для классического генератора на туннельном диоде [5] и для его кусочно-линейного аналога, описанного в настоящей работе, подтверждает не только возможность, но и показывает эффективность кусочно-линейного подхода в натурном моделировании. Благодаря этому удалось получить экспериментальное и численное доказательства существования хаотических колебаний в исследуемом генераторе путем выявления сценария удвоения периода, который в классическом генераторе из-за шумов схемы не наблюдался.

Работа выполнена в рамках программы "Университеты России".

Библиографический список

1. Пиковский А.С., Рабинович М.И. Простой автогенератор со стохастическим поведением // Докл. ДАН СССР. 1978. Т.239, N2. С.301.
2. Кияшко С.В., Пиковский А.С., Рабинович М.И. Автогенератор радиодиапазона со стохастическим поведением // Радиотехника и электроника. 1980. Т.25. С.336.
3. Рабинович М.И. Стохастические автоколебания и турбулентность // УФН. 1978. Т.125. С.123.
4. Пиковский А.С. О статистических свойствах простейшей модели стохастических автоколебаний // Изв. вузов. Сер. Радиофизика. 1980. Т.23, N7. С.883.
5. Андрушкевич А.В., Кипчатов А.А. Хаос и периодичность в генераторе на туннельном диоде // Изв. вузов. Сер. Радиофизика. 1990. Т.33, N4. С.431.
6. Matsumoto T., Chua L.O., Tanaka S. Simplest chaotic nonautonomous circuit // Phys. Rev. A. 1984. Vol.30, N2. P.1155.
7. Chua L.O., Desoer C., Kuh E. Linear and nonlinear circuits. New York: McGraw-Hill, 1987. P.171.

НИИ механики и физики Саратовского университета

ROUTE TO CHAOS IN THE PIECEWISE-LINEAR MODEL OF THE TUNNEL DIODE OSCILLATOR

A.V. Andrushkevich, A.A. Kipchatov, L.V. Krasichkov, A.A. Koronovskiy

The results of both experimental analysis and computer simulation of the piecewise-linear analog of the oscillator with tunnel diode are presented. A period-doubling route to chaos on the base of period adding is shown. The bifurcation diagram on the driving parameter plane (the damping parameter - the parameter of nonlinearity) of the piecewise-linear oscillator is plotted. This bifurcation diagram is qualitatively similar to bifurcation diagram of the tunnel diode oscillator with the smooth nonlinear function.

ИЗМЕРЕНИЕ КОРРЕЛЯЦИОННОЙ РАЗМЕРНОСТИ ИЗ ВРЕМЕННЫХ РЕАЛИЗАЦИЙ

А.М. Намаюнас, А.В. Тамашевичюс

Описано электронное устройство, предназначенное для определения корреляционной размерности странных аттракторов из временной реализации одной переменной. В отличие от компьютерных систем прибор работает в масштабе реального времени. Дано математическое описание процедуры и представлена блок-схема прибора. Проведено измерение корреляционной размерности для генератора хаотических колебаний, представляющего собой LC-автогенератор с дополнительной инерционно-нелинейной цепочкой. Отмечено хорошее согласие со значениями, полученными численными методами из соответствующей системы динамических уравнений. Для сравнения также приведены результаты анализа периодического сигнала и случайного шума.

Введение

Хаотические колебания наблюдаются в самых различных нелинейных динамических системах [1]. В последнее время все большее внимание уделяется количественному описанию динамического хаоса с помощью таких характеристик, как размерности аттрактора, энтропии, показатели Ляпунова [2]. В частности, эти параметры позволяют отличить детерминированный динамический хаос от случайных шумов. Среди различного рода размерностей аттрактора наибольшую популярность приобрела так называемая корреляционная размерность [3]. Эта количественная мера, как правило, определяется численным методом с помощью компьютера. Для анализа экспериментальных данных дополнительно требуется аналого-цифровой преобразователь соответствующего исследуемым колебаниям быстродействия.

Имеются несколько аналоговых устройств, не требующих использования цифрового компьютерного оборудования. Например, в работе [4] описано оптическое устройство для определения корреляционной размерности из отображений Пуанкаре. Это устройство ограничено двумерными отображениями. Другой недостаток - трудоемкость и неудобство изготовления необходимых для анализа прозрачных фотографических изображений исследуемых сечений Пуанкаре.

Известен также электронный прибор [5], дающий возможность в масштабе реального времени, т.е. непосредственно в эксперименте, оценить минимальную размерность вложения аттрактора. Однако минимальная размерность вложения [1] (или число активных степеней свободы) является величиной целой и не отражает характера и плотности заполнения аттрактором фазового пространства.

В настоящей работе проведено усовершенствование ранее разработанного прибора [5] с целью обеспечения возможности определения дробной размерности аттракторов.

1. В численных алгоритмах для реконструкции фазового пространства из временной реализации одной переменной $x(t)$ обычно используется метод задержек [6]. С помощью этого метода формируется массив n -мерных векторов $\{\bar{x}_i^n\}$, $i=1, 2, \dots, N$, где

$$\bar{X}_i^n = \{x(iT), x[(i+1)T], \dots, x[(i+n-1)T]\}. \quad (1)$$

Далее рассчитывается корреляционный интеграл [3]:

$$\bar{C}^n(r) = \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^N H(r - |\bar{X}_j^n - \bar{X}_i^n|), \quad (2)$$

где $H(y)$ - функция Хевисайда. При малых значениях параметра r интеграл имеет степенную зависимость

$$C^n(r) \sim r^{d(n)}, \quad (3)$$

где $d(n)$ при больших значениях размерности вложения n стремится к искомой корреляционной размерности ν .

При аналоговой обработке сигнала удобно модифицировать эту процедуру следующим образом. Пусть задается условие

$$x(t) = c, \quad (4)$$

где c - произвольно выбранный фиксированный уровень, например, среднее значение $x(t)$. Условие (4) для переменного сигнала выполняется в определенные моменты времени t_i . Расстояния между соседними точками t_i и t_{i+1} , т.е. интервалы между последующими пересечениями сигналом заданного уровня, обозначим через T_i . Из этих интервалов формируются m -мерные векторы:

$$\bar{T}_i^m = \{T_i, T_{i+1}, \dots, T_{i+m-1}\}, \quad i=1, 2, \dots \quad (5)$$

Используя эти векторы, можно рассчитать аналогичный (2) корреляционный интеграл и определить корреляционную размерность $\bar{\nu}$. Следует обратить внимание, что вследствие использованного условия (4) размерность $\bar{\nu}$ на единицу меньше размерности ν (аналогично размерностям, получаемым из сечений Пуанкаре).

2. Выше описанную модифицированную процедуру определения размерности $\bar{\nu}$ можно проводить не только численно, но и с помощью аналогового электронного устройства, блок-схема которого показана на рис.1. Устройство содержит компаратор 1, расширитель импульсов 2, блок ждущих мультивибраторов 3, схему сравнения 4 и счетчик импульсов 5.

В компараторе происходит преобразование непрерывного хаотического сигнала $x(t)$ (рис.2, диаграмма 1) в хаотическую последовательность коротких d -импульсов, разделенных интервалами T_i, T_{i+1} и т.д. (рис.2, диаграмма 2), т.е. формируется m -мерный вектор \bar{T}_i^m . В расширителе эти импульсы преобразуются в более длинные r -импульсы (рис.2, диаграмма 3) с регулируемой длительностью r . Параметр r в этом блоке играет роль радиуса гиперсферы в корреляционном интеграле (2). Одновременно блок мультивибраторов 3 выдает последователь-

ность коротких d -импульсов с независимо регулируемыми интервалами $T_j, T_{j+1}, \dots, T_{j+m-1}$ (рис.2, диаграмма 4), т.е. формирует m -мерный опорный вектор \vec{T}_j^m (в разработанном устройстве максимальное значение m равно 8; на рис.2 приведена иллюстрация для случая $m=2$). Заметим, что первые d -импульсы блока мультивибраторов в каждом пакете \vec{T}_j^m синхронизируются от компаратора 1, а последующие d -импульсы, задающие интервалы T_j , устанавливаются независимо. Расширенные r -импульсы и короткие d -импульсы с блока мультивибраторов поступают на схему сравнения 4. Если все импульсы в соответствующих пакетах совпадают, схема выдает короткий импульс совпадения (рис.2, диаграмма 5), регистрируемый счетчиком 5. На рис.2 показаны две ситуации на временной реализации, в которых произошло такое совпадение (отмечено знаком "+"), а в третьей ситуации один из r -импульсов не совпал с соответствующим d -импульсом из опорного пакета (отмечено знаком "-") и импульс совпадения не появился.

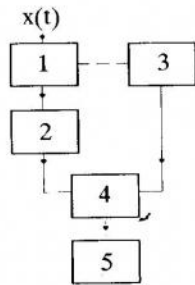


Рис.1

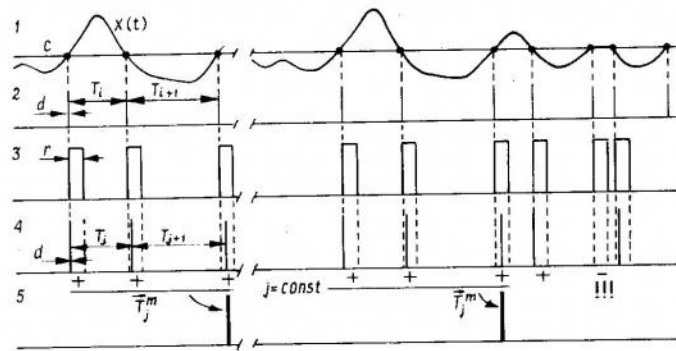


Рис.2

Совпадение происходит в тех случаях, когда

$$T_{i+k-1} < T_{j+k-1} < (T_{i+k-1} + r) \quad (6)$$

для всех $k = 1, 2, \dots, m$. Полное число точек, описываемых вектором (5) и попадающих в окрестность опорного вектора \vec{T}_j^m , дается выражением, аналогичным корреляционному интегралу (2):

$$M^m(r) = \sum_j \prod_k^m \{H[r - (T_{jk-1} - T_{ik-1})] H(T_{jk-1} - T_{ik-1})\}. \quad (7)$$

Это число приблизительно подчиняется степенному закону

$$M^m(r) \sim r^{-d^*(m)}, \quad (8)$$

где $d^*(m)$ с увеличением m сходится к точечной корреляционной размерности $\bar{\nu}^*$ ("**" означает, что величина является локальной, поскольку в (7) суммирование производится только по индексам i , а индекс j фиксирован).

Эта процедура является локальным анализом аттрактора ($j = \text{const}, r \ll T_j$). Очевидно, что другие области аттрактора могут быть исследованы соответствующим подбором опорного вектора \vec{T}_j^m . В отличие от компьютерных методов в данном устройстве легко подобрать опорные точки в наиболее "плотных"

областях на аттракторе путем поиска максимальной частоты следования импульсов совпадения. Такие точки, имеют максимальный статистический вес в случае усреднения по j .

3. Проверка работоспособности устройства производилась с помощью простого радиоэлектронного генератора хаотических колебаний [7]. Генератор представляет обычный LC-автогенератор, к колебательному контуру которого параллельно подключена инерционно-нелинейная цепочка, состоящая из последовательно соединенных полупроводникового диода и катушки индуктивности. В данном эксперименте генератор выдавал хаотический широкополосный сигнал с центральной частотой сплошного спектра вблизи 10 кГц.

Результаты анализа хаотического сигнала показаны на рис.3, 4. Частота следования импульсов совпадения была достаточно высока, например, 3 кГц при $m = 2$ и $r = r_0 = 1.2$ мкс, так что счетчик импульсов работал в режиме частотомера. Таким образом, значения M на рис.3 соответствуют количеству точек, набранных за $1с$. По наклонам зависимостей $M^m(r)$ в двойном логарифмическом масштабе определялась функция $d^*(m)$ (рис.4, линия 1). Функция быстро насыщается и достигает значения 0.82 (\bar{v}^*). Для сравнения на том же рисунке приведены результаты измерения для периодического сигнала (линия 2) и случайного шума (линия 3). Здесь результаты очевидны: $\bar{v}^* = 0$ в случае регулярного сигнала и $d^*(m) \sim m$, т.е. насыщения не наблюдается в случае полностью стохастического сигнала (рис.4, сплошная линия).

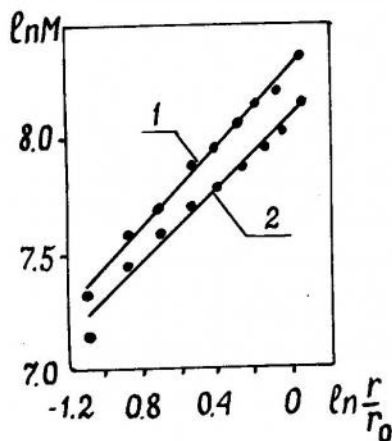


Рис.3

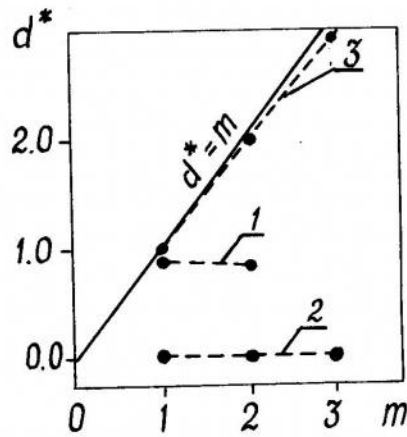


Рис.4

4. Исследованный генератор хаотических колебаний согласно результатам работы [5] имеет три степени свободы, т.е. минимальное число независимых переменных равно трем. Действительно, как показал качественный анализ, основанный на сравнении временных разверток, фазовых портретов, сечений Пуанкаре и частотных спектров, данный генератор хорошо описывается тремя обыкновенными дифференциальными уравнениями, которые в безразмерном обозначении имеют вид

$$\begin{aligned} dx/dt &= ax+y-z, \\ dy/dt &= -x, \\ dz/dt &= b[x-F(z)], \end{aligned} \quad (9)$$

где $F(z) = \ln(kz+1)$ при $z > 0$ и $F(z) = kz$ при $z \leq 0$ есть функция, отражающая вольтамперную характеристику диода. Хаотический режим наблюдается, например, при $a = 0.91$, $b = 10$ и $k = 500$. Полученная путем численного интегрирования данной системы уравнений, временная реализация $x(t)$ анализировалась тремя

способами. Согласно методу [3] по формулам (1) - (3) определена корреляционная размерность $\nu = 1.92$. С помощью выше описанного модифицированного метода и формул (4), (5) определена корреляционная размерность $\bar{\nu} = 0.92$, т.е. $\bar{\nu} = \nu - 1$. Наконец, точечная корреляционная размерность $\bar{\nu}^*$, рассчитанная по алгоритму, имитирующему действие аналогового устройства, имела значение 0.95 для опорного вектора $\vec{T}_j = \{1.53; 0.94; 2.70\}$. Таким образом, все эти величины, а также экспериментальное значение $\bar{\nu}^* = 0.82$ достаточно хорошо, если иметь в виду неоднородность аттрактора, согласуются между собой.

Обращает внимание довольно низкое значение корреляционной размерности $\nu = 1.92$, т.е. $\nu < 2$ (соответственно $\bar{\nu} < 1$ и $\bar{\nu}^* < 1$), что может показаться неожиданным в случае трехмерного хаотического потока. Данный вопрос заслуживает отдельного рассмотрения. Отметим лишь, что величины $\nu < 2$ встречаются и для других систем. Это, по-видимому, связано с особенностями топологии аттракторов (например, для трехмерного аттрактора Ресслера получено значение фрактальной размерности 1.548 [8]).

Библиографический список

1. Неймарк Ю.И., Ланда П.С. Стохастические и хаотические колебания. М.: Наука, 1987.
2. Dimensions and entropies in chaotic systems/Ed. G.Mayer-Kress. Berlin: Springer, 1981.
3. Grassberger P., Procaccia I. Characterization of strange attractors//Phys.Rev.Lett. 1983. Vol.50. N 5. P.346.
4. Lee C.-K., Moon F.C. An optical technique for measuring fractal dimensions of planar Poincare maps//Phys. Lett. A. 1986. Vol.114. N 5. P.222.
5. Namajūnas A., Pozela J., Tamaševičius A. An electronic technique for measuring phase space dimension from chaotic time series//Phys. Lett.A. 1988. Vol.131. N 2. P.85.
6. Packard N.H., Crutchfield J.P., Farmer J.D., Shaw R.S. Geometry from a time series//Phys. Rev. Lett. 1980. Vol.45. N 9. P.712.
7. Пикирис Р.А., Пирагас К.А., Тамашевичюс А.В. Схемы преобразования LC-автогенератора в генератор шума//Радиотехника, 1986. N 9. С.43.
8. Agarwal A.K., Banerjee K., Bhattacharjee J.K.// Phys. Lett. A. 1986. Vol.119. N.6. P.280.

Вильнюсский институт физики полупроводников

MEASUREMENT OF CORRELATION DIMENSION FROM TIME SERIES

A.M. Namajūnas, A.V. Tamaševičius

An electronic technique for determining the correlation dimension of strange attractors from a single observable is described. In contrast to the conventional computer methods the elaborated electronic instrument operates on a real time scale. Mathematical description of the procedure as well as the block diagram of the instrument are presented. The correlation dimension is measured for a chaotic oscillator which is a standard LC-oscillator containing an additional nonlinear inertial chain. There is a good agreement of the experimental result with the numerical calculations carried out for the corresponding dynamical equations. In addition, the periodic oscillations and random noise are analyzed electronically for comparison.



СТРУКТУРЫ ЭЛЕКТРОННОГО ТОКА В НЕОДНОРОДНЫХ СИСТЕМАХ

А.Л. Санин, Ю.Л. Ермолаев, Д.Б. Мизангронцев

Проведен анализ и численное решение стационарных уравнений гидродинамики и электрического поля. Для электронного тока в неоднородной системе установлены условия образования и изучены свойства резонансных пространственных структур. Если неоднородное распределение ионов случайно (спектр распределения типа белого шума), показано, что структуры обладают достаточно выраженными периодическими свойствами.

Введение

Образование пространственных структур, чрезвычайное многообразие их форм характерно для многих распределенных систем [1,2]. В частности, оно имеет место при движении электронов в системах с неоднородным распределением нейтрализующего заряда. В таких системах при определенных условиях возможно образование пространственно-периодических резонансных структур. В статье приведены результаты численного моделирования и анализа свойств пространственных структур электронного тока для периодического и случайного распределений нейтрализующего заряда с использованием уравнений гидродинамики и электрического поля. Анализ решений простейших стационарных уравнений, их фурье-спектров позволяет изучить резонансный механизм образования пространственных структур. Более полное рассмотрение, основанное на уравнениях с частными производными по координате и времени, позволяет изучить временные переходные процессы к стационарным режимам и структурам. Резонансы на неоднородностях и формирование пространственных структур возможны и при граничных условиях, зависящих от времени [3]. Если распределение нейтрализующего заряда представляет случайный процесс типа белого шума, то и здесь возможно образование структур с достаточно выраженными периодическими свойствами.

1. Основные уравнения и допущения

Рассмотрим стационарное однородное движение электронов в области $x > 0$. В плоскости $x = 0$ расположен эмиттер, поток электронов в плоскости эмиттера характеризуется плотностью n_b и скоростью направленного движения v_b . Полагаем, что скорость направленного движения v_b много больше тепловой v_T . Электрическое поле в плоскости эмиттера обозначим E_b . Величина E_b зависит от

пространственного распределения электронов потока и неподвижных ионов в области $x > 0$, а также от полей внешних источников. Если внешние источники отсутствуют, то поле E_b определяется лишь характером самосогласованного движения электронов в системе. В зависимости от параметров системы поле E_b может равняться нулю или быть отличным от нуля. Путем подбора параметров системы или включением внешних источников можно управлять полем в достаточно широких пределах и задавать необходимое значение E_b . В области $x > 0$ распределен нейтрализующий заряд, с плотностью положительных ионов

$$n_i = n_i^{(0)} + n_i^{(1)}(x),$$

где $n_i^{(0)}$ - однородная компонента;

$n_i^{(1)}(x)$ - компонента, характеризующая распределение ионов по длине.

Рассмотрим два вида функциональной зависимости от x :

для гармонической зависимости $n_i^{(1)}(x) = n_i^{(1)} \cos k_0 x$, где $n_i^{(1)}$ - амплитуда,

$2\pi/k_0$ - масштаб неоднородности;

для случайного сигнала $n_i^{(1)} = n_i^{(2)} f(x)$, где $n_i^{(2)}$ - интенсивность, $f(x)$ - распределение типа белого шума.

Для описания движения электронов используем стационарные уравнения: непрерывности

$$n_e v = n_b v_b, \quad (1)$$

движения

$$v \frac{dv}{dx} = -\frac{e}{m} E - v v - \frac{v_T^2}{n_e} \frac{dn_e}{dx}, \quad (2)$$

электрического поля

$$\frac{dE}{dx} = -4\pi e(n_e - n_i). \quad (3)$$

Здесь n_e, v - плотность и скорость электронов в области $x > 0$, e, m - заряд и масса электрона, E - напряженность электрического поля, v - частота рассеяния.

Величины n_i, n_e, v, E , а также v, v_T, x пронормируем при помощи n_b, v_b . В результате получим

$$\begin{aligned} N_i &= n_i/n_b, \quad N_e = n_e/n_b, \quad V = v/v_b, \quad \varepsilon = E/E_0, \\ V_T &= v_T/v_b, \quad E_0 = 4\pi e n_b/k_p, \quad \omega_p = (4\pi e^2 n_b/m)^{1/2}, \\ \eta &= v/\omega_p, \quad k_p = \omega_p/v_b, \quad \zeta = k_p x, \end{aligned}$$

а уравнения (1) - (3) для нормированных величин примут вид

$$N_e V = 1, \quad (4)$$

$$V \frac{dV}{d\zeta} = -\varepsilon - \eta V - V_T^2 \frac{1}{N_e} \frac{dN_e}{d\zeta}, \quad (5)$$

$$\frac{d\varepsilon}{d\zeta} = -N_e + N_i, \quad (6)$$

Если функция, выражающая распределение ионов, имеет неоднородную компоненту первого вида, то для нормированной плотности ионов получим $N_i = \gamma(1+h\cos r\zeta)$, где $\gamma = n_i^{(0)}/n_b$ - параметр нейтрализации, $h = n_i^{(1)}/n_i^{(0)}$, $r = k_0/k_p$.

Для второго вида функциональной зависимости неоднородной компоненты нормированная плотность запишется как $N_i = \gamma(1+\delta f(\zeta))$, где $\delta = n_i^{(2)}/n_i^{(0)}$.

Ограничимся изучением режимов движения электронов с положительными значениями V . Полагаем, что V_T зависит от свойств эмиттера и постоянна при $\zeta > 0$.

Если распределение ионов однородное, не зависит от координаты ζ , тогда $N_i = \gamma$, а неоднородная компонента исчезает $h = \delta = 0$, получаем автономную систему уравнений. Кроме того, рассмотрим бесстолкновительный предел, т.е. движение при $\eta = 0$. Для этой системы нами было показано, что точка $\gamma V_T = 1$ является бифуркационной [3]. Она выражает пороговое условие появления пространственно-периодических решений системы уравнений для N, V, \mathcal{E} . Если $\gamma V_T < 1$ (в размерном виде $(n_i^{(0)}/n_b)(\vartheta_T/\vartheta_b) < 1$), решения для N, V, \mathcal{E} имеют периодическую зависимость от координаты ζ .

Интегрирование уравнений (4)-(6) при $h = \delta = \eta = 0$, $V_T = 0$ и заданном граничном поле дает

$$\gamma^{1/2}[\mathcal{E}_b + \gamma(1-\gamma^{-1})^2 - \gamma Z]^{1/2} - \arcsin \frac{\gamma^{1/2} Z}{[\mathcal{E}_b + \gamma(1-\gamma^{-1})^2]^{1/2}} = \gamma^{3/2} \zeta + \mathcal{E}_b \gamma^{1/2} - \arcsin \frac{\gamma^{1/2}(1-\gamma^{-1})}{[\mathcal{E}_b + \gamma(1-\gamma^{-1})^2]^{1/2}}, \quad (7)$$

где $Z = V\gamma^{-1}$. Выражение (7) в неявной форме определяет связь между V и ζ . Характерный пространственный период процесса зависит от коэффициента $\gamma^{3/2}$ перед ζ . В размерном виде $\gamma^{3/2} \zeta = (n_i^{(0)}/n_b)^{3/2} (\omega_p/\vartheta_b) x$, а период равен $2\pi / (n_i^{(0)}/n_b)^{3/2} (\omega_p/\vartheta_b)$.

Анализ и численные решения показывают, что наряду с основной гармоникой пространственной частоты $\gamma^{3/2}$ возбуждаются высшие составляющие. Если $\gamma = 1$, а $\mathcal{E}_b = 0$, то возможно однородное состояние. Переменные V, N, \mathcal{E} не зависят от координаты ζ . Если при $\gamma = 1$ $\mathcal{E}_b \neq 0$, то возможно образование пространственно-периодической структуры. При $\gamma \neq 1$ возможны периодические решения, как и при $\gamma < 1$, так и $\gamma > 1$.

Если производные для автономной системы уравнений при указанных ограничениях приравнять к нулю, то получим равновесные значения:

$$V^{(p)} = \gamma^{-1}, \quad N_e^{(p)} = \gamma, \quad \mathcal{E}^{(p)} = 0 \quad (8)$$

Если $\eta \neq 0$, то

$$V^{(p)} = \gamma^{-1}, \quad N_e^{(p)} = \gamma, \quad \mathcal{E}^{(p)} = -\eta V^{(p)}, \quad (9)$$

где $V^{(p)}, N^{(p)}, \mathcal{E}^{(p)}$ - равновесные значения.

2. Резонансы на периодических неоднородностях

Решения автономных уравнений характеризуют свойства электронного тока в системе с однородным распределением нейтрализующего заряда. Если распределение положительного заряда неоднородное, то появятся дополнительные механизмы образования структур - резонансные механизмы. Рассмотрим отклик электронного тока, когда плотность нейтрализующего заряда имеет гармоническую добавку h , но $\delta = 0$. Для малых h рассмотрим задачу в линейном приближении. Полагаем, что переменные величины V, N, \mathcal{E} можно представить в следующем виде:

$$V = V^{(p)} + V^{(1)}, \quad N = N^{(p)} + N^{(1)}, \quad \varepsilon = \varepsilon^{(p)} + \varepsilon^{(1)}, \quad (10)$$

где $V^{(1)}, N^{(1)}, \varepsilon^{(1)}$ являются малыми величинами, зависящими от координаты ζ . Подставляя (9), (10) в исходную систему уравнений (4)-(6), линеаризуя ее, получаем уравнение для $V^{(1)}$:

$$(1 - \gamma^2 V_T^2) (d^2 V^{(1)} / d\zeta^2) + \eta \gamma dV^{(1)} / d\zeta + \gamma^3 V^{(1)} = -\gamma^2 h \cos r \zeta - \gamma^3 h V^{(1)} \cos r \zeta. \quad (11)$$

Это уравнение гармонического осциллятора с "внешним" воздействием и параметрическим изменением пространственной частоты осциллятора. "Внешнее" воздействие обусловлено свойствами самой системы и определяется амплитудой неоднородности h (пространственная частота неоднородности r , период $2\pi/r$). Пространственная частота осциллятора близка к $\gamma^{3/2}$ при $\eta \ll 1$, $V_T \ll 1$. Характер решений исходной системы зависит от соотношения между $\gamma^{3/2}$ и r , при этом возможны различные резонансы. Рассмотрим те из них, которые происходят при двух условиях

$$\gamma^{3/2} = r, \quad 2\gamma^{3/2} = r.$$

Для первого условия это обычный резонанс, он обусловлен первым слагаемым правой части уравнения (11). При малых h результаты численного счета системы (4)-(6) хорошо согласуются с характером решений приближенного уравнения (11), имеют выраженный линейный рост амплитуды от ζ . С увеличением h и расстояния ζ проявляются нелинейные свойства. При конечных η образуется пространственно-периодическая структура с постоянной амплитудой. Для режима с параметрами $\gamma = 1$, $\eta = 0.1$, $V_T = 0$, $h = 0.1$ и $\varepsilon_b = 0$, $\zeta \in [0, 30\pi]$ решения для N в зависимости от величины ζ даны на рис.1,а, а фазовый портрет в плоскости (V, ε) - на рис.1,б. Решения уравнений (4)-(6) проведены в широких пределах изменения параметров $\gamma, \eta, V_T, h, \varepsilon_b$ и r [3]. Резонансные свойства образующихся пространственных структур исследованы на основе фурье-спектров решений для скорости. При расстройке $\Delta = \gamma^{3/2} - r \neq 0$ фурье-спектры для компоненты $F_V(q)$ состоят из отдельных спектральных линий $F_V(r), F_V(2r), F_V(3r) \dots$, соответствующих сигналу "внешнего" воздействия, а также из спектральных линий собственной пространственной частоты $F_V(\gamma^{3/2})$, гармоник

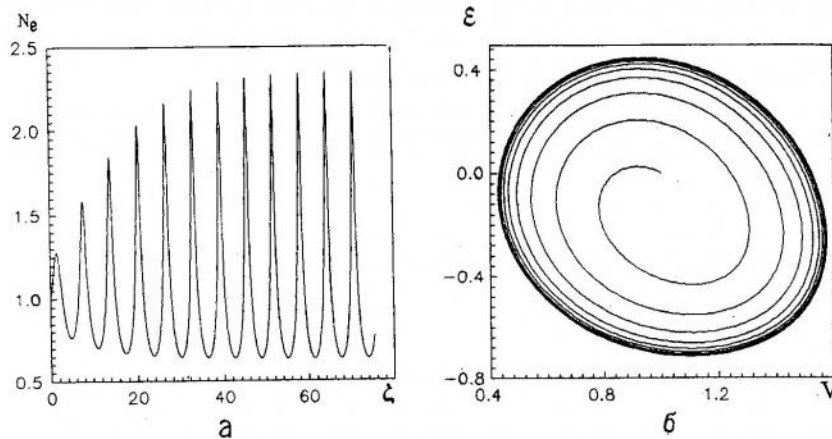


Рис.1

$F_V(2\gamma^{3/2}), \dots$ и фурье-компонент $F_V(r - \gamma^{3/2}), F_V(r + \gamma^{3/2}) \dots$ на комбинационных пространственных частотах $r - \gamma^{3/2}, r + \gamma^{3/2} \dots$ соответственно. По мере уменьшения Δ увеличивается амплитуда основной гармоники $F_V(r)$, а также высших гармоник $F_V(2r); F_V(3r) \dots$. Хотя сигнал "внешнего" воздействия гармонический, образующаяся структура является периодической. Благодаря нелинейным свойствам высшие гармоники достаточно сильно возбуждены. В линейном приближении при $\gamma V_T \ll 1$ коэффициент перед старшей производной мало отличается от единицы. В нелинейном режиме коэффициент перед старшей производной имеет вид $(V^2 - V_T^2)V$, в условиях резонанса V может приближаться к V_T и становится малым. Если $V_T = 0$, минимальные значения V могут приближаться к нулю, оставаясь положительными. В результате образуется последовательность (через пространственный период) минимумов скорости V и, соответственно, последовательность максимумов плотности электронов N_e .

Для второго условия определяющую роль начинает играть второе слагаемое в правой части (11) и наблюдается параметрический резонанс.

Для режима с параметрами $\gamma = 1, r = 2, \eta = 0, V_T = 0, h = 0.2$ и $\epsilon_b = -0.05, \zeta \in [0, 30\pi]$ решения для N_e, ϵ даны на рис.2,а, а зависимость $\epsilon(V)$ - на рис.2,б. При малых значениях h и $\eta = 0$ вблизи спектральной линии $F_V(1)$ возбуждается широкая полоса пространственных частот q (например, для режима с параметрами $\gamma = 1, \eta = 0.1, r = 2, h = 0.2, \eta = 0.1, \epsilon_b = -0.05$). Спектральная линия $F_V(1)$ выражена слабо, а $F_V(2) > F_V(1)$. Для режима с параметрами $\gamma = 1, r = 2, \eta = 0.1, h = 0.2, \epsilon_b = -0.05$ амплитуда спектральной линии $F_V(1)$ примерно в 50 раз больше, чем в предыдущем примере. При этом соблюдается обратное неравенство: $F_V(2) < F_V(1)$.

Другие режимы движения, когда $\gamma^{3/2}/r \gg 1$ и является целым числом или, наоборот, много меньше единицы и представляет рациональную дробь, исследованы нами в [3].

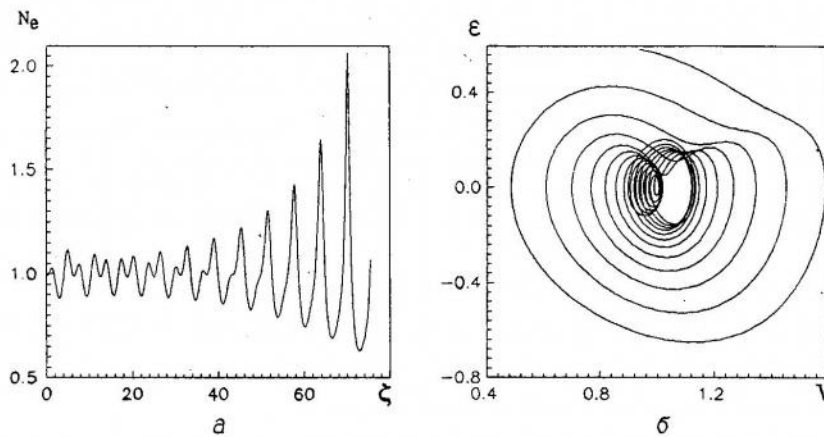


Рис.2

3. Моделирование шума и электронного отклика

Функция $f(\zeta)$ моделируется как ступенчатая функция со случайной амплитудой, представляющей собой δ -коррелированный случайный процесс с нулевым средним. Если $h = 0$, а δ мало, то можно составить дифференциальное уравнение для $V^{(1)}$ путем замены $h \cos \zeta$ на $\delta f(\zeta)$ в уравнении (11). Теперь правая часть принимает вид:

$$-\gamma^2 \delta f(\zeta) - \gamma^3 \delta V^{(1)}(\zeta) f(\zeta).$$

Первое слагаемое соответствует "внешней" случайной силе, второе - параметрическому случайному изменению пространственной частоты. Для изучения вкладов каждого из слагаемых вначале рассматривалась линеаризованная система уравнений для переменных величин $V^{(n)}, N^{(n)}, \mathcal{E}^{(n)}$ с одним из слагаемых, а затем - с обоими слагаемыми вместе. Численное решение уравнения для $V^{(n)}, N^{(n)}, \mathcal{E}^{(n)}$ и отыскание их фурье-спектров позволяет изучить роль каждого из слагаемых. Например, для режима с параметрами $\gamma = 1, \eta = V_T = 0, \mathcal{E}_b = 0, \delta = 0.1$ свойства решения обусловлены первым слагаемым, т.е. случайной силой. Фурье-спектр для скорости в этом режиме совпадает с фурье-спектром решения при отсутствии параметрического слагаемого. Для изучения вклада параметрического слагаемого необходимо ввести граничное поле $\mathcal{E}_b \neq 0$, причем этот вклад может быть существенным. Например, для режима с параметрами $\gamma = 2 (\gamma^{3/2} = 2.8), \eta = V_T = 0, \delta = 0.1, \mathcal{E}_b = -0.05, \zeta \in (0, 40\lambda)$ при отсутствии параметрического слагаемого величина фурье-компоненты $F_V(2.8)$ почти в пять раз меньше, чем в случае, когда оба слагаемых присутствуют. Мы полагаем, что совместное действие имеет место, поэтому фурье-компонента увеличивается.

Рассмотрим свойства решений нелинейной системы уравнений (4)-(6) для $\mathcal{E}_b = 0$, когда проявляется действие первого слагаемого правой части. Численные расчеты проведены для режима с параметрами $\gamma = 1, V_T = \eta = 0, \delta = 0.1, \mathcal{E}_b = 0, \zeta \in [0, 160\lambda]$, результаты реализации $N_e(\zeta)$ и фурье-компоненты $F_{N_e}(q)$ даны на рис.3. Зависимость $N_e(\zeta)$ выражает сложный характер сигнала, она имеет крупномасштабную модуляцию (оггибающую) и мелкомасштабные колебания с периодом 2λ . Огибающая состоит из отдельных фрагментов, форма, максимумы и протяженность которых могут быть различными.

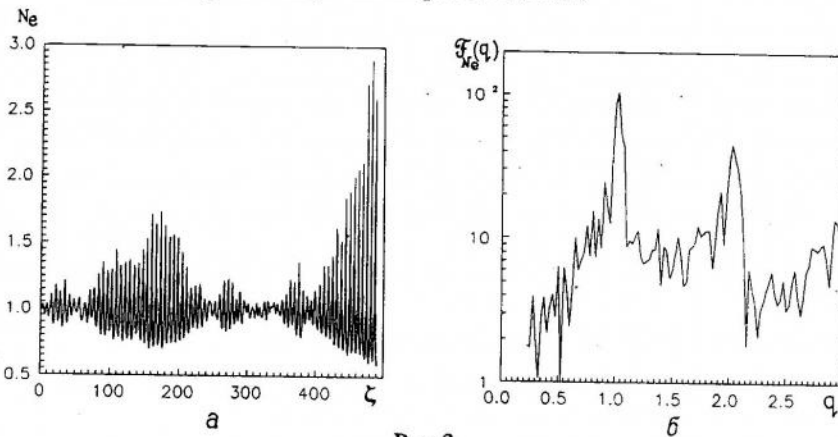


Рис.3

Если спектр возбуждающего сигнала (для N_i) широкополосный, спектральная линия $F_{N_i}(1)$ не выражена и имеет приблизительно такую же амплитуду, как и все другие спектральные линии (рис.4,а), то фурье-спектр отклика отличается от спектра возбуждающего сигнала. Это отличие вызвано резонансом. Как следствие резонанса в спектре отклика (см. рис.3,б) возникают отдельные спектральные линии $F_{N_e}(1), F_{N_e}(2), \dots$. Отношение $F_{N_e}(1)/F_{N_i}(1), F_{N_e}(2)/F_{N_i}(2), \dots$ может быть значительным. Следовательно, структура образуется из однородного состояния, когда шум вводится. Неструктурированный шум, имеющий широкополосный спектр, наводит пространственную структуру с достаточно выраженными периодическими свойствами. Нелинейные эффекты проявляются в существовании высших гармоник $F_{N_e}(2), F_{N_e}(3), \dots$. Для анализа процесса образования структуры полный промежуток был разделен на четыре равные интервала: $[0, 40\lambda], [40\lambda, 80\lambda], [80\lambda, 120\lambda], [120\lambda, 160\lambda]$. Для каждого из них вычислялись

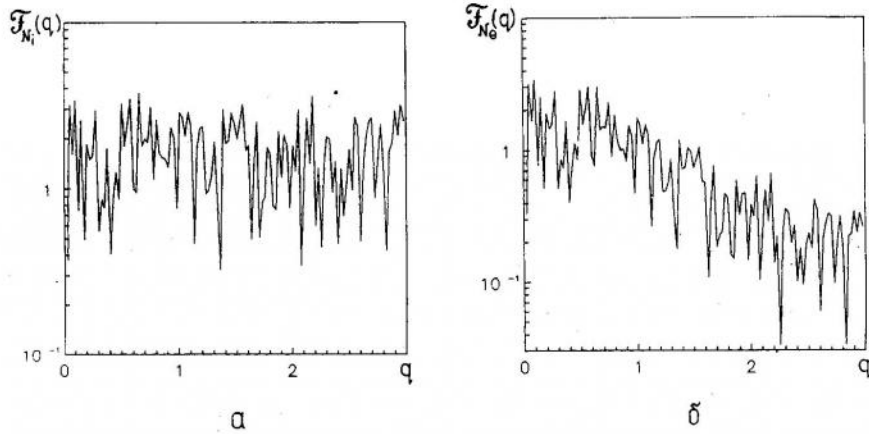


Рис.4

дисперсии скорости σ_v и фурье-компоненты $F_v(q)$. Дисперсия скорости σ_v определялась посредством формул

$$\sigma_v = \sqrt{\frac{\sum_{j=1}^J (V_j - \langle V \rangle)^2}{J}}, \quad \langle V \rangle = \frac{1}{J} \sum_{j=1}^J V_j/J, \quad V_j = V(\zeta_j);$$

$J = 1024$ для каждого из интервалов и $J = 4096$ для полного промежутка $[0, 160\pi]$. Представим результаты вычислений для режима с параметрами $\gamma = 1$ ($\gamma^{3/2} = 1$), $\eta = 0$, $V_T = 0$, $\epsilon_b = 0$, $\delta = 0.1$:

J	$[0, 40\pi]$	$[40\pi, 80\pi]$	$[80\pi, 120\pi]$	$[120\pi, 160\pi]$
σ_v	$2.77 \cdot 10^{-2}$	$9.257 \cdot 10^{-2}$	0.16	0.189
$F_v(1)$	8.25	16.61	22.153	24.01
$F_v(2)$	0.94	3.17	5.62	6.6
$F_v(3)$	0.176	0.93	2.01	2.71

С увеличением номера интервала величины σ_v и $F_v(q)$ возрастают, но происходит замедление роста. Ограничение роста пространственных колебаний и стабилизация имеют место, если вводится диссипация. Для режима с параметрами $\gamma = 1$, $\eta = 0.1$, $V_T = 0$, $\epsilon_b = 0$, $\delta = 0.5$, $\zeta \in [0, 160\pi]$ на рис. 5, а дана зависимость $F_{N_e}(q)$. В режиме частых столкновений при $\eta = 1$ и $\gamma = 1$, $V_T = 0$, $\epsilon_b = 0$, $\delta = 0.1$

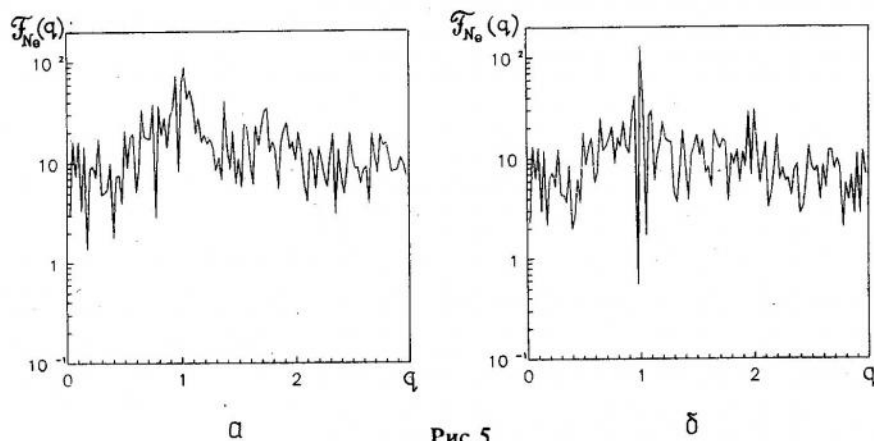


Рис.5

амплитуды пространственных колебаний становятся такими же малыми, как и амплитуды шума исходного сигнала. Фурье-спектр $F_{N_e}(q)$ (рис.4,б) имеет сходство с фурье-спектром исходного сигнала (см. рис.4,а). Фурье-компоненты $F_{N_e}(q)$ не выражены и распределены в широкой области. Возбуждение структур случайным сигналом менее эффективно, чем регулярным. Для сигнала возбуждения, имеющего обе составляющие -гармоническую и случайную типа белого шума ($h < \delta$), в режиме с параметрами $\gamma = 1, \eta = 0.2, \epsilon_b = 0, h = 0.1, \delta = 0.4, \zeta \in (0, 160\pi)$ зависимость $F_{N_e}(q)$ приведена на рис.5,б.

Если функция плотности N_i не имеет однородной компоненты, а только составляющую типа белого шума $N_i = (n_i^{(2)}/n_b) f(\zeta)$, то и в этом случае возможно образование структур с достаточно выраженными периодическими свойствами.

Из представленных результатов видно, что электроны тока чувствительны как к регулярным, так и случайным неоднородностям нейтрализующего заряда. Неоднородности вызывают переходы из однородных состояний в структурированные, при этом отклик электронного газа характеризуется чрезвычайным многообразием форм и свойств образующихся структур.

Библиографический список

1. Эбелинг В. Образование структур при необратимых процессах/Под ред. Ю.Л. Климонтовича. М.: Мир, 1979.
2. Рабинович М.И., Трубецков Д.И. Введение в теорию колебаний и волн. М.: Наука, 1984.
3. Ермолаев Ю.Л., Санин А.Л. Электронная синергетика. Л.: Изд-во ЛГУ, 1989.

Государственный технический университет
Санкт-Петербург

ELECTRON STREAM STRUCTURES IN INHOMOGENEOUS SYSTEMS

A.L. Sanin, Yu.L. Ermolaev, D.B. Mizandroutsev

Numerical modelling and detailed investigations of electron spatial stream structures induced by inhomogeneously distributed positive charge were carried out. For the random distribution charges the resonant mechanism of electron structure formations is discussed.



КАК В ЭКСПЕРИМЕНТЕ УВИДЕТЬ ТО, ЧТО РЕАЛЬНО "НЕ ДОЛЖНО СУЩЕСТВОВАТЬ"

Б.П. Безручко, М.Д. Прохоров, Е.П. Селезнев

На примере неавтономного осциллятора демонстрируется экспериментальный подход, позволяющий сделать наглядной роль неустойчивости в формировании сложной динамики нелинейной системы. Приводится описание установки для наблюдения нестационарных процессов, с помощью которой можно увидеть на экране осциллографа неустойчивые циклы в фазовом пространстве, сделать количественные оценки устойчивости состояний, исследовать структуру хаотических аттракторов.

Введение

Любая реальная система, находящаяся в неустойчивом положении, обречена на переход в другое, устойчивое состояние. Карандаш, поставленный вертикально острием на твердую поверхность стола, всегда падает. Становятся невидимыми на экране замкнутые кривые, соответствующие потерявшим устойчивость предельным циклам, при построении фазовых портретов колебательных систем с помощью осциллографа. Как экспериментально исследовать то, что неизбежно должно стать ненаблюдаемым? Ответ, возможно, даже единственный, очевиден: искусственно вновь и вновь возвращать систему в неустойчивое состояние и вести наблюдение до тех пор, пока не произошло существенных изменений. Таким приемом широко пользуются в экспериментальной физике, например, для анализа состояний, неустойчивых из-за тепловых эффектов, когда напряжение на исследуемые образцы или устройства подают импульсно, а наблюдение проводят в течение короткого интервала времени (пока температура объекта близка к исходной).

В предлагаемой статье аналогичный подход используется для исследования нелинейных явлений в колебательном контуре с диодом, с целью сделать более наглядной роль неустойчивых состояний в формировании сложной динамики этой популярной нелинейной радиофизической системы*. С помощью осциллографа, электронного ключа и устройства для задания начальных условий удастся визуализировать неустойчивые объекты в фазовом пространстве, исследовать бассейны притяжения различных устойчивых состояний, почувствовать структуру хаотических аттракторов.

* Колебательный контур с варакторным диодом широко используется в радиотехнике в качестве селективного элемента с электрической перестройкой, умножителя и делителя частоты, а также рассматривался в качестве элементной базы для ЭВМ с фазово-частотным представлением информации. После обнаружения в нем хаотического поведения [1] контур активно используется как конструктивный элемент для нелинейного моделирования. При больших амплитудах периодического воздействия эта система демонстрирует широкий набор состояний, включая би- и мультстабильные, переход к хаосу через последовательность бифуркаций удвоения периода, кризисы аттракторов, перемежаемость. Желая получить более подробную информацию можно порекомендовать статьи [2-5].

1. Описание экспериментальной установки

Воспользуемся экспериментальной установкой (рис.1), где исследуемая цепь выделена жирной линией. Будем задавать начальное положение изображающей точки в фазовом пространстве системы и следить за ней в течение некоторого интервала времени. Для этого разорвем цепь с помощью электронного ключа K , подключим диод к дополнительному источнику напряжения - блоку начальных условий, а затем в момент времени $t = 0$ восстановим цепь столь быстро, чтобы за время срабатывания ключа распределение зарядов в диоде не успело релаксировать к равновесному. В квазистатическом приближении состояние контура при гармоническом воздействии $V \sin(\omega t - \Delta\varphi)$ определяется током в цепи I , напряжением на диоде U и фазой $\Phi = \omega t - \Delta\varphi$, т.е. его фазовое пространство трехмерно. Структура этого пространства (наличие аттракторов со своими бассейнами притяжения и неустойчивых объектов) определяется значениями параметров системы, а начальное положение изображающей точки - состоянием диода в момент восстановления цепи и значением $\Delta\varphi$. В дальнейшем для упрощения мы будем задавать начальные условия на линии $\Delta\varphi = \text{const}$, $I \approx 0$, а для их характеристики используем напряжение U_0 (см. прил., п.3). Для наблюдения за системой используем проекции фазовых траекторий на плоскости $I-U$, $U-\Phi$, $I-\Phi$. Проекция на плоскость $U-I$ получается при подаче сигналов $U(t)$ и $I(t)$ на горизонтально и вертикально отклоняющие пластины электронно-лучевой трубки. Проекция на две другие плоскости фактически являются временными реализациями $U(t)$ и $I(t)$, которые фиксируются осциллографом в режиме временной развертки, синхронизированной сигналом гармонического воздействия.

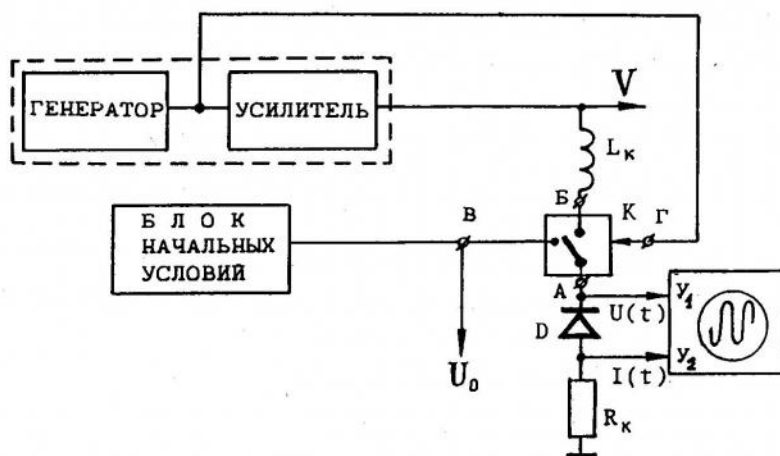


Рис.1. Исследуемая цепь $L_k R_k D$ и блок-схема экспериментальной установки

2. Экспериментальные результаты

В качестве иллюстрации возможностей предлагаемого экспериментального подхода рассмотрим рис.2, на котором приведена плоскость $V-U_0$. Амплитуда внешнего воздействия V является параметром исследуемой системы, а значение U_0 характеризует начальные условия. Сплошные линии на рисунке соответствуют условиям попадания начального положения изображающей точки в фазовом пространстве в близкие окрестности устойчивых циклов, штриховые линии - в

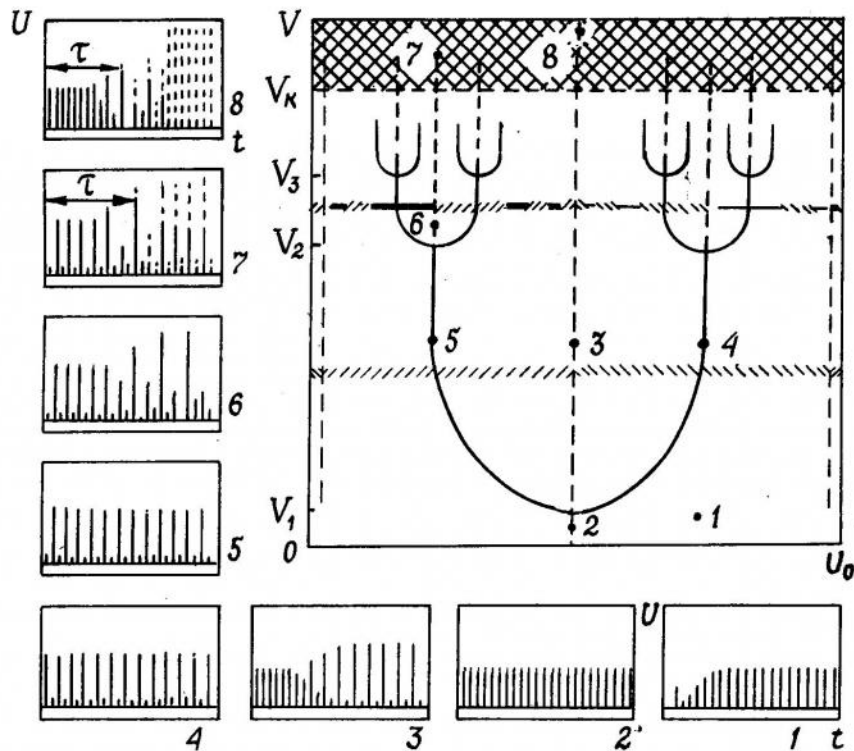


Рис.2. Плоскость $V - U_0$ для контура с диодом. Штриховкой и сплошными горизонтальными линиями различной толщины обозначены бассейны притяжения мультистабильных циклов, двойной штриховкой - область хаоса. Рисунки осциллограмм выполнены с фотографий, а их номера соответствуют номерам точек на плоскости

окрестности неустойчивых циклов. Осциллограммы иллюстрируют качественный вид проекций фазовой траектории на плоскость $U-\Phi$ для некоторых характерных точек, отмеченных на рисунке. Эти проекции наиболее удобны для идентификации колебательных состояний, так как зависимость $U(t)$ имеет вид острых пиков обратной для диода полярности, а минимальное расстояние между соседними пиками равно периоду внешнего воздействия.

При $V < V_1$ в фазовом пространстве контура существует один устойчивый цикл периода внешнего воздействия (периода 1). Траектория попадает на него из любых начальных точек, а вид и длительность переходного процесса зависят от V и U_0 (см. точки 1, 2, конечные участки на осциллограммах идентичны, пики повторяются через период воздействия). Минимальное время переходного процесса соответствует попаданию начальной точки непосредственно на цикл (точка 2). Ситуация качественно меняется при $V \geq V_1$, где V_1 соответствует первой бифуркации удвоения периода, когда цикл периода 1 теряет устойчивость, а в его окрестности рождается цикл периода 2. Теперь, если задать начальные условия вблизи пунктирной линии (точка 3), колебания некоторое время сохраняют все признаки цикла периода 1, а затем система переходит к одному из двух возможных колебательных состояний периода 2, т.е. имеет место бистабильность. Осциллограммы бистабильных состояний периода 2 отличаются друг от друга только сдвигом во времени на период внешнего воздействия (точки 4 и 5). Значения U_0 , при которых система попадает на тот или иной цикл, выделены для одного фиксированного значения V из интервала $V_1 < V < V_2$ различной штриховкой. Весь бассейн притяжения бистабильного цикла можно представить,

продолжив штриховку на области, ограниченные сверху линией $V=V_2$, снизу - линией $V=V_1$, а слева и справа - приведенными на рис. 2 штриховыми линиями (они соответствуют условиям попадания изображающей точки на неустойчивый цикл периода 1). После второй бифуркации удвоения периода ($V_2 < V < V_3$) в системе существует четыре мультистабильных состояния периода 4, области притяжения которых выделены на рисунке для одного из значений параметра, взятого в интервале $V_2 < V < V_3$. Помещая начальную точку на правой и левой границах областей бассейнов их притяжения (на рис.2 штриховыми линиями обозначены лишь некоторые из них), можно убедиться, что вид фазовой траектории какое-то время близок к потерявшим устойчивость циклам периода 2 и 1 (точки 5, 6). Сравнивая области притяжения мультистабильных состояний в интервалах $V_1 < V < V_2$ и $V_2 < V < V_3$, можно убедиться, что после бифуркации удвоения каждая из областей меньшего периода дробится на большое число областей притяжения двух мультистабильных состояний удвоенного периода, размеры которых уменьшаются с приближением к границам разделившейся области. При дальнейшем увеличении параметра V наряду с устойчивыми циклами большого периода при подборе начальных условий в фазовом пространстве системы можно обнаружить все неустойчивые циклы меньшего периода. Причем эта особенность сохраняется и в закритической области $V > V_c$, где V_c соответствует переходу к хаосу.

Отметим, что при $V < V_c$ осциллограммы на рис.2 имеют достаточно высокую четкость, хотя они получены в режиме периодической развертки и представляют собой наложение друг на друга большого числа временных реализаций процесса (равному частному от деления времени экспозиции при фотографировании изображения на экране на период развертки осциллографа). Это свидетельствует о затухании начальных микровозмущений, так как точность, с которой в реальной системе может быть задано начальное состояние, и возможность его повторения в эксперименте ограничены естественными и техническими флуктуациями. Ситуация качественно меняется в области хаоса ($V > V_c$, на рис.2 обозначена двойной штриховкой), для которой характерна неустойчивость фазовых траекторий на аттракторе, а следовательно, и экспоненциальный рост возмущений. В этой части плоскости осциллограммы сохраняют четкость только на начальном участке, длительность которого τ зависит от V и U_0 (осциллограммы 7, 8). По времени τ , за которое различие в траекториях изображающей точки при последовательном запуске достигнет макроуровня (заметного на глаз), можно сделать некоторые количественные оценки. Например, в [6] τ использовалось для экспериментальной оценки порядка величины ляпуновского характеристического показателя.

Анализ осциллограмм хаотических колебаний (7,8) показывает, что отдельные их фрагменты похожи на циклы, потерявшие устойчивость с ростом параметра. Это отмечается на всем протяжении колебательного процесса, в чем можно убедиться, перейдя к наблюдению стационарного режима (замкнув ключ K в положении Б, используя одноразовую развертку и запоминающий осциллограф, см.рис.1). О том, что это не случайное совпадение формы траектории в фазовом пространстве, а отражение факта включения потерявших устойчивость циклов в структуры объекта, соответствующего хаотическим колебаниям исследуемой системы, свидетельствуют результаты, приведенные на рис.2: пары точек 3 и 8, 5 и 7, в которых при $t = 0$ система оказывается на одном цикле, устойчивом или потерявшем устойчивость, лежат на общей линии, т.е. связаны "исторически". Таким образом, в хаотическом режиме изображающая точка, покинув один неустойчивый цикл, попадает в окрестность другого неустойчивого цикла и т.д. Естественно, что флуктуации накладывают ограничения на возможности анализа структуры аттрактора реальной системы. В частности, не исключено, что описанный характер хаотической реализации может быть результатом воздействия шума на систему с большим числом устойчивых циклов, имеющих узкие бассейны притяжения.

Перечисленные моменты не исчерпывают возможностей предлагаемой установки для исследования колебаний в контуре с диодом. Меняя параметры в этой системе, можно обнаружить еще целый ряд интересных эффектов. Но наиболее впечатляющим для нас осталось наблюдение давно потерявших устойчивость циклов периода 1 и при существенном по сравнению с приведенным на рис.2 увеличении параметра. Система "помнит" о них, даже когда демонстрирует переход к хаосу через удвоение других циклов, имеющих очень большой исходный период.

Приложение

Остановимся на некоторых технических моментах, которые могут оказаться полезными для экспериментаторов.

1. Принципиальная схема ключа, использованного нами, приведена на рис.3. Она включает в себя непосредственно аналоговый ключ DA1 (микросхема КР590КН7), формирователь импульсов (в качестве него использовался стандартный генератор импульсов Г5-56, работающий в режиме внешнего запуска), делитель частоты (микросхемы DD1 и DD2 типа К155ИЕ5). Переключатель К2 меняет коэффициент деления и длину наблюдаемой временной реализации, а К1 позволяет зафиксировать ключ в положении Б и рассматривать установившиеся колебания. Гармонический сигнал постоянной амплитуды поступает с генератора (см. рис.1) на вход формирователя, который вырабатывает прямоугольные импульсы положительной полярности с частотой внешнего воздействия f_0 . Импульсы формирователя поступают на вход делителя частоты, с выхода которого управляющий импульсный сигнал подается на управляющий вход Г ключа и внешнюю синхронизацию осциллографа. Скважность импульсов равна 2, а частота следования $f_i = f_0/N$, где f_0 - частота генератора сигнала воздействия, $N=16, 32, 64, 128, 256$ - коэффициент деления. В режиме наблюдения переходов процессов (К1 в положении 1) ключ управляется импульсами делителя частоты, а в режиме стационарных колебаний (К1 в положении 2) на управляющий вход DA1 подается постоянное напряжение +5В. Микросхема КР590КН7 содержит два нормально замкнутых и два нормально разомкнутых ключа. В момент паузы к диоду через развязку подключается блок задания начальных условий (контакты 1-16 и 8-9 микросхемы DA1 замкнуты), а в момент прихода импульса ключ присоединяет катушку индуктивности L_x (замкнуты контакты 3-4 и 5-6 микросхемы DA1). Время включения микросхемы КР590КН7 не более 0,3 мкс, сопротивление ключа в открытом состоянии 14 Ом.

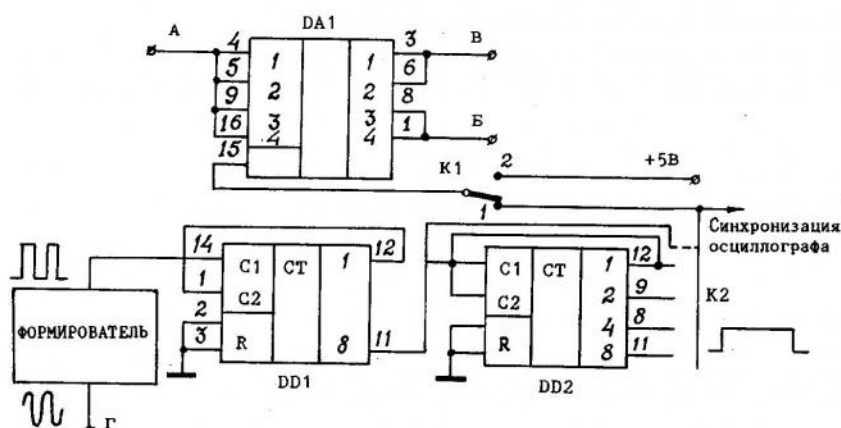


Рис.3. Схема электронного ключа (обозначения клемм соответствуют приведенным на рис.1)

2. В эксперименте в качестве нелинейного элемента использовался диод типа Д242, катушка L имела 200 витков провода ПЭЛШО 0.1 и помещалась в броневой сердечник СБ2000НМ17. Линейная резонансная частота колебательного контура f_r равна 33 кГц, добротность - 22. Таким образом, время переключения ключа значительно меньше характерных временных масштабов процессов, наблюдаемых в контуре.

3. Для задания начальных условий использовался регулируемый, стабилизированный источник ТЭС-14 с дополнительной РС-цепью развязки. При этом состояние диода на плоскости $U - I$ перед отключением от блока соответствует статической вольтамперной характеристике. При обратной для диода полярности напряжения U_0 значение тока мало и можно считать, что начальная точка на плоскости $U - I$ находится на оси напряжения. Для более произвольного выбора положения начальной точки может быть использован источник переменного напряжения регулируемой частоты и амплитуды.

4. Изменить $\Delta\varphi$ можно сдвигом во времени импульсов на выходе формирователя относительно запускающего сигнала. Величина $\Delta\varphi$ определяет наклон линий на плоскости $V - U_0$.

5. Амплитуда сигнала внешнего воздействия V измерялась непосредственно на выходе усилителя. Нами использовались генераторы типа ГЗ-112, усилитель с низким (менее 1 Ом) выходным сопротивлением типа У7-5, осциллографы С1-103, С1-122, вольтметры типа В7-34.

Выражаем признательность В.В. Астахову и А.П. Кузнецову за полезное обсуждение работы.

Библиографический список

1. *Linsay P.S.* Period doubling and chaotic behaviour in a driven anharmonic oscillator // *Phys. Rev. Lett.* 1981. Vol.47, N19. P.1349.
2. *Buskirk R., Jeffries C.* Observation of chaotic dynamics of coupled nonlinear oscillators // *Phys. Rev. A.* 1985. Vol. 31, N5. P.3332.
3. *Астахов В.В., Безручко Б.П., Селезнев Е.П.* Исследование динамики нелинейного колебательного контура при гармоническом воздействии // *Радиотехника и электроника.* 1987. Т.32, N12. С.2558.
4. *Кипчатов А.А.* Неоднозначность поведения неавтономного нелинейного контура // *Изв. вузов. Сер. Радиофизика.* 1989, Т.33, N2. С.182.
5. *Baxter J.H., Vocko M.F., Douglass D.H.* Behaviour of a nonlinear resonator driven at subharmonic frequencies // *Phys. Rev. A.* 1990. Vol.41, N2. P.619.
6. *Безручко Б.П., Булгакова Л.В., Кузнецов С.П., Трубецков Д.И.* Стохастические автоколебания и неустойчивость в лампе обратной волны // *Радиотехника и электроника.* 1983. Т.28, N6. С.1136.

Саратовский филиал ИРЭ РАН

HOW OBJECTS WHICH "MUST NOT EXIST REALLY" CAN BE SEEN IN EXPERIMENT

B.P. Bezruchko, M.D. Prokhorov, E.P. Seleznev

Using nonautonomous nonlinear oscillator, we demonstrate the experimental approach, which permit to illustrate the role of unstability in complicated dynamics formation of nonlinear systems. The experimental system for observation of nonequilibrium processes is described, which permits to see on oscilloscop the unstable cycles in fase space, to estimate the stability of states, to investigate the structure of chaotic attractors.



Изв. вузов "ПНД", т.1, №1, №2, 1993

В разделе "Методические заметки" мы планируем помещать также задачи по теории колебаний, волн, нелинейной динамике и хаосу. Думаем, что они будут полезны студентам и аспирантам, изучающим нелинейную теорию колебаний и волн. Структура задачников обычно копирует традиционное деление физики на механику, электричество, оптику и т.д., при этом задачи по теории колебаний попадают в различные разделы, что не способствует формированию единого "колебательного" мышления. Кроме того, бурное развитие нелинейной динамики требует непрерывного методического осмысления все новых и новых результатов.

Надеемся, что преподаватели вузов поделятся своим опытом на страницах нашего журнала. В этом номере помещена задача, которая, хотя и может быть решена строго, допускает изящное приближенное решение.

Редакционная коллегия

ЗАДАЧА

Маятник в виде жесткого невесомого стержня длиной l , на конце которого укреплен массивный шарик, отклонили на малый угол α от неустойчивого положения равновесия и отпустили без начальной скорости. Используя малость α , определите, через какое время маятник пройдет нижнее положение равновесия.

Саратовский филиал ИРЭ РАН

*А.П.Кузнецов
С.П.Кузнецов*

PROBLEMS ON NONLINEAR DYNAMICS

In "Methodical Notes" we plan to present, particularly, the problems on oscillations, waves, nonlinear dynamics and chaos. We hope that it will be useful for students and postgraduates studying these fields. Usually, the Books of Problems have a structure copying that of physical courses subdivided into Mechanics, Electricity, Optics and so on. Thus, the problems on oscillations and waves fit into different parts. This fact isn't favorable for the formation of united "oscillatory" manner of thought. Moreover, the fast development of nonlinear studies demands permanently to gain a deeper methodical understanding of new results. We hope that the higher school lecturers will contribute their progressive educational findings to our Journal. In this issue we publish the problem which may be solved rigorously, but admits an elegant approximate solution.

Editors

PROBLEM

A pendulum being a rigid weightless rod with a massive little ball at the end, is deflected from the upper equilibrium point at a very small angle α and released without initial velocity. Evaluate the time of going through the lower equilibrium point. The pendulum length is l .

*Kuznetsov A.P.
Kuznetsov S.P.*

PERSONALIA

ПАМЯТИ ЛЬВА ИЗРАИЛЕВИЧА КАЦА



30 ноября 1992 года скончался доктор физико-математических наук профессор Саратовского государственного университета Лев Израилевич Кац.

Лев Израилевич родился 18 марта 1937 года в городе Саратове. Вся его жизнь была связана с физическим факультетом Саратовского университета, который он с отличием окончил в 1959 году. После окончания СГУ он был направлен на работу в Научно-исследовательский институт механики и физики СГУ. В университете Лев Израилевич прошел путь от инженера лаборатории радиоэлектроники до профессора.

Научные интересы Льва Израилевича затрагивают самые различные области радиофизики и твердотельной электроники. В двадцать восемь лет он защитил кандидатскую диссертацию, будучи уже известен своими работами. В последние годы он занимался исследованием особенностей распространения электромагнитных волн миллиметрового и субмиллиметрового диапазонов в магнитоактивной плазме носителей

заряда в полупроводниках. Изложению результатов этих исследований была посвящена его докторская диссертация и книга "Взаимодействие электромагнитных колебаний СВЧ с плазмой носителей заряда в полупроводнике", состоящая из двух частей и вышедшая в 1979 году в издательстве Саратовского университета.

Лев Израилевич впервые исследовал ряд новых физических явлений, например, эффект распространения электромагнитных волн в ударно-ионизованной плазме полупроводника, когда ионизация вызвана волной, распространяющейся в плазме твердого тела. Им обнаружен новый физический эффект осцилляционной зависимости гальваномагнитных явлений в полупроводнике от амплитуды внешнего высокочастотного поля.

Известные специалисты в области теории твердого тела Ф.Г. Басс и Ю.Г. Гуревич в отзыве на докторскую диссертацию Л.И. Каца отмечали, что его работа "... является пионерским исследованием по объемному нелинейному взаимодействию с носителями тока в плазме полупроводников". И далее: "... в течение длительного времени мы занимались теоретическими исследованиями нелинейных эффектов в полупроводниках, связанных с разогревом тока полем сильной электромагнитной волны. Экспериментальные же работы, в силу их сложности, практически отсутствовали. Диссертанту удалось не только провести широкий комплекс экспериментальных исследований по указанному вопросу и создать ряд новых приборов, но и существенно развить теоретические представления".

Главная отличительная черта Льва Израилевича - озаренный фантазией, фейерверком остроумия, шутками, неисчерпаемым запасом энергии. Он был всегда заметен, привлекал к себе людей и, казалось, во всем одерживал победы,

одерживал с легкостью, с блеском. Он был поистине великим фантазером: наверное ни у кого в университете не было столько изобретений, сколько у него. Причем, изобретений самых разнообразных, порой неожиданных.

Всей стране были известны школы по твердотельной электронике в "Волжских далях". Ехали на "школы Каца", где он был добрым и гостеприимным хозяином.

На кафедру электроники и волновых процессов он пришел не так давно - шесть лет назад - и сразу стал своим. Он с жадностью брался за чтение лекций, предлагал новые спецкурсы. За эти годы Лев Израилевич подготовил и прочитал семь курсов лекций. С воодушевлением читал "горячий" спецкурс по только что открытой высокотемпературной проводимости, читал теорию волн, яркие лекции на школах для старшеклассников, хотел участвовать в работе Колледжа прикладных наук.

Под его руководством защищено более двадцати кандидатских диссертаций. Около него всегда было много учеников и студентов. Он любил их, и они любили его.

Лев Израилевич был примечательной фигурой на семинарах и Ученых Советах, где выделялся нестандартно поставленным вопросом, нестандартной оценкой работы, точной репликой, во время и к месту рассказанным анекдотом.

Он воспитал прекрасных детей, тоже физиков, для которых отец несомненно был и Другом, и Учителем, и просто Человеком, достойным подражания.

Он любил жизнь, любил свой сад, любил свой старенький "Запорожец", любил книги, любил и знал поэзию, сам писал стихи... Он много сделал и делал, хотел сделать еще больше. Его сердце устало от него, и он не ушел, а убежал от нас.

Горько и больно, когда из жизни уходит близкий товарищ, с которым не одно десятилетие были рядом.

Ушел от нас... Ушел? Скорее убежал.
Внезапной смерти вид побег напоминает.
Несъеденный пирог, недопитый бокал.
На полуслове оборвал
Речь: рукопись, как чай, дымится, остывает.
Не плачьте. Это нас силком поволокут,
Потащат, ухватив за шиворот, потянут.
А он избавился от пут
И собственную смерть, смотри, не счел за труд,
Надеждой не прельщен, заминкой не обманут.

На университетском небосклоне горела очень яркая звезда. И вот произошла катастрофа - звезда погасла. Мы простились с умным, талантливым, ярким человеком.

В телеграмме, присланной из Москвы академиком Прохоровым, профессором Ирисовой, профессором Веселаго, профессором Рухадзе и Виноградовыми, есть такие слова памяти: "Глубоко потрясены известием о кончине профессора Льва Израилевича Каца. Наше сотрудничество с ним - ярким ученым с оригинальным и глубоким пониманием физики - было всегда плодотворным и продуктивным. Мы будем долго помнить Льва Израилевича как большого и яркого, темпераментного человека, обладавшего редкостной добротой".

*Лаборатория Научно-исследовательского
института механики и физики СГУ*

*Кафедра электроники
и волновых процессов
Саратовского университета*

К СВЕДЕНИЮ АВТОРОВ

Правила оформления рукописей

1. Статьи объемом не более 16 страниц должны быть напечатаны на белой бумаге через два интервала и представлены в двух экземплярах. При компьютерном наборе размер шрифта - не меньше стандартного машинописного.

2. На первой странице перед текстом статьи должны быть напечатаны: индекс УДК, название статьи, инициалы и фамилии авторов, краткий реферат статьи. К статье прилагаются:

а) на английском языке - название статьи, инициалы и фамилии авторов, название организации, в которой работают авторы, краткий реферат;

б) краткие сведения об авторах с фотографиями.

Приложения даются в двух экземплярах.

3. Рисунки выполняются тушью на белой бумаге отдельно в двух экземплярах, тоновые фотографии также представляются в двух экземплярах. Рисунки, полученные машинной графикой, должны быть достаточно четкими и яркими. Размеры рисунков в мм: простые ненасыщенные 80x60, сложные 250x160. На обороте указываются: порядковый номер рисунка, фамилии авторов, название статьи. Подрисуночные подписи печатаются на отдельном листе и не должны дублировать внутритекстовое описание рисунка.

4. Все формулы должны быть вписаны черными чернилами четко и ясно. Формулы должны быть размечены во всех случаях, когда строчные и прописные буквы одинаковы по начертанию и отличаются только своими размерами (С и с, V и v, U и u, W и w, S и s, P и p, K и k, X и x, Y и y, Z и z, Θ и θ, Ψ и ψ). Необходимо прописные буквы подчеркивать простым карандашом двумя черточками снизу (С, V), а строчные - двумя черточками сверху (\bar{c} , \bar{v}). При написании необходимо также делать ясное различие между буквами J и I и пояснять их на полях. Буква Q подчеркивается двумя черточками снизу, цифра 0 не подчеркивается. Особенно четко следует вписывать схожие по написанию l и e (l подчеркивается зеленым карандашом), к (русское) и k (латинское), h и n, q и g, ", " (запятую), "' " (штрих), "1" (единицу), "2" (двойку), г и z. Особое внимание должно быть обращено на аккуратное написание индексов и показателей степеней. Надстрочные знаки нужно отчеркивать дугой \cup , подстрочные - дугой \cap . Индексы, являющиеся сокращениями слов, должны быть пояснены отдельно. В вещественных числах ставится десятичная точка.

5. Греческие буквы подчеркиваются красным карандашом, прописные указываются особо. Для обозначения вектора используются стрелки над буквой, для усреднения величины - черта сверху.

6. В библиографическом списке нумерация источников должна соответствовать очередности ссылок на них в тексте. В списке должны быть указаны:

а) для книг - фамилия автора, инициалы, название книги, город, издательство, год издания, том;

б) для журнальных статей - фамилия автора, инициалы, название статьи, звание журнала, серия, год, том, номер, выпуск, первая страница статьи;

в) для депонированных статей - название статьи, инициалы, фамилия автора, название организации, в которой выполнена работа, город, год, объем статьи, название депонирующей организации, дата депонирования, регистрационный номер;

г) для препринта - фамилия автора, инициалы, название издания, полное название издающей организации, год, количество страниц;

д) для материалов конференций, школ, семинаров - фамилия автора, инициалы, название статьи, название издания, время и место проведения конференции, город, издательство, год, первая страница статьи.

Ссылки на неопубликованные работы не желательны.

7. Статьи, направляемые авторам на переработку, должны быть возвращены в редакцию не позднее двух месяцев после получения. При нарушении этого условия статья рассматривается как вновь поступившая.

Статьи, присланные без соблюдения перечисленных выше правил, к рассмотрению редакцией не принимаются.

Рекомендации по составлению "краткого реферата" и "сведений об авторах"

1. Публикация реферата преследует две основные цели:

а) помочь ученым, работающим над теми же вопросами, по которым написана статья, уточнить, имеет ли смысл читать статью полностью;

б) упростить и ускорить работу реферативных журналов, которые получают возможность немедленно перепечатывать авторские рефераты.

Реферат должен представлять собой самостоятельное законченное сообщение объемом не более 200-250 слов. В нем должны быть обозначены основные идеи и результаты, содержащиеся в статье. Авторы должны иметь в виду, что рефераты могут оказаться единственными материалами, которые будут прочитаны.

2. Краткие сведения об авторах составляются по следующей форме.

Иванов Петр Сидорович - родился в 1938 году в Москве, окончил Московский физико-технический институт в 1961 году. После окончания МФТИ работает в ФИ АН РАН. Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук в МГУ (1964) и доктора физико-математических наук в МГУ (1977) в области теории колебаний и волн, профессор МГУ. Область научных интересов - теория колебаний и волн, радиофизика и электроника, применение нелинейной динамики в различных областях науки. Автор монографии "Детерминированный хаос и экономика" и соавтор учебника "Волны в экологии". Опубликовал много научных статей по направлениям, указанным выше. Лауреат Государственной премии СССР. Редактор журнала International Journal of Chaos Theory и член редакционной коллегии журнала "Физика и жизнь".

Зав. редакцией *Н.Н.Левина*
Редактор *И.Ю.Бучко*
Художественный редактор *Е.И.Бочаров*
Художник *Д.В.Соколов*
Технический редактор *Л.В.Агальцова*

Корректоры *Е.Б.Крылова, Е.А.Митенева, Т.В.Михайлова,*
Г.А.Рогова, Р.Э.Арбитман, М.В.Попова

Сдано в набор 15.02.93 Подписано к печати 20.07.93 Формат 70x108/16.
Бумага типографская №1. Печать офсетная. Гарнитура Таймс.
Усл.печ.л. 11,20 (8,0). Заказ 764. Уч.-изд.л. 10,7. Тираж 200 экз. С221

Издательство Саратовского университета.
410601, Саратов, Университетская, 42.

МГП "Типография №1". 410040, Саратов, Вишневая, 10.
