

*Журнал включен в «Перечень периодических научных и научно-технических изданий РФ,
рекомендованных для публикации основных результатов диссертаций
на соискание ученой степени доктора наук»*

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Известия высших учебных заведений

ПРИКЛАДНАЯ НЕЛИНЕЙНАЯ ДИНАМИКА

научно-технический журнал

издается с 1993 года

Выходит 6 раз в год

Том 18, № 6 (106), 2010, Саратов

СО Д Е Р Ж А Н И Е

ПРИКЛАДНЫЕ ЗАДАЧИ НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ КОЛЕБАНИЙ И ВОЛН

- Павлова О.Н., Павлов А.Н., Сосновцева О.В.* Динамика малых групп взаимодействующих нефронов в норме и при почечной гипертензии 3
- Кулаков М.П., Фрисман Е.Я.* Синхронизация 2-циклов в системе симметрично связанных популяций, запас–пополнение в которых описывается функцией Рикера 25
- Башкирцева И.А., Карпенко Л.В., Ряшко Л.Б.* Стохастическая чувствительность предельных циклов модели «хищник – две жертвы» 42

БИФУРКАЦИИ В ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ РАЗЛИЧНОЙ ПРИРОДЫ

- Кузнецов А.П., Сатаев И.Р., Тюрюкина Л.В.* На пути к многомерным торам 65

НЕЛИНЕЙНЫЕ ВОЛНЫ. СОЛИТОНЫ

- Хадеева Л.З., Дмитриев С.В.* Характеристики щелевых дискретных бризеров в кристаллах со структурой NaCl 85

НОВОЕ В ПРИКЛАДНОЙ ФИЗИКЕ

- Маненков А.Б.* Характеристики волновода из нелинейного метаматериала 93
- Куркин С.А., Короновский А.А., Егоров Е.Н., Левин Ю.И., Филатов Р.А., Храмов А.Е.* Математическая модель и ее численная реализация для исследования и оптимизации генераторов с электронной обратной связью 106

МЕТОДИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ ПО НЕЛИНЕЙНОЙ ДИНАМИКЕ

- Титов В.Н., Волков Д.В., Яковлев А.В., Рыскин Н.М.* Отражательный клистрон как пример автоколебательной системы с запаздыванием 138

ДЕБЮТ

- Лазаревич И.А.* Радиальные структуры в вибрируемом гранулированном слое 159

ИЗ КНИГ И ЖУРНАЛОВ

- К юбилею лазера. *Трубецков Д.И.* 165
- Мейман Т.Г.* Лазерная одиссея 167

C O N T E N T S

APPLIED PROBLEMS OF NONLINEAR OSCILLATIONS AND WAVE THEORY

- Pavlova O.N., Pavlov A.N., Sosnovtseva O.V.* Dynamics of small groups of interacting nephrons in normal and renal hypertension states 3
- Kulakov M.P., Frisman E.Ya.* Synchronizing the period-2 cycle in the system of symmetrical coupled populations with stock–recruitment based the Ricker population model..... 25
- Bashkirtseva I.A., Karpenko L.V., Ryashko L.B.* Stochastic sensitivity of limit cycles for «predator – two preys» model..... 42

BIFURCATION IN DYNAMICAL SYSTEMS

- Kuznetsov A.P., Sataev I.R., Turukina L.V.* On the way towards multidimensional tori 65

NONLINEAR WAVES. SOLITONS

- Khadeeva L.Z., Dmitriev S.V.* Characteristics of gap discrete breathers in crystals with NaCl structure 85

INNOVATIONS IN APPLIED PHYSICS

- Manenkov A.B.* Characteristics of the nonlinear left-handed waveguide..... 93
- Kurkin S.A., Koronovskii A.A., Egorov E.N., Levin Yu.I., Filatov R.A., Hramov A.E.* Mathematical model and its numerical realization for the investigation and optimization of generators with electron feedback 106

METHODICAL PAPERS ON NONLINEAR DYNAMICS

- Titov V.N., Volkov D.V., Yakovlev A.V., Ryskin N.M.* Reflex klystron as an example of a self-oscillating delayed feedback system 138

DEBUT

- Lazarevich I.A.* Radial patterns in a vibrated granular layer 159

FROM BOOKS AND JOURNALS

- To anniversary of laser. *Trubetskov D.I.* 165
- Maiman Th.H.* The Laser Odyssey..... 167



ДИНАМИКА МАЛЫХ ГРУПП ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩИХ НЕФРОНОВ В НОРМЕ И ПРИ ПОЧЕЧНОЙ ГИПЕРТОНИИ

О.Н. Павлова, А.Н. Павлов, О.В. Сосновцева

На основе вейвлет-анализа экспериментальных данных исследуется эффект синхронизации колебаний в функционировании малых групп структурных элементов почки (парные нефроны и триплеты). Обсуждаются различия синхронной динамики взаимодействующих нефронов нормотензивных и гипертензивных крыс. Показано, что средняя длительность участков синхронизации при гипертонии уменьшается примерно в 3 раза. Установлено, что в динамике взаимодействующих корковых нефронов наиболее типична синфазная синхронизация колебаний (более 90% экспериментальных данных). Проводится сопоставление результатов анализа экспериментальных данных и математического моделирования динамики взаимодействующих структурных элементов почки.

Ключевые слова: Авторегуляция почечного кровотока, нефроны, ритмическая динамика, вейвлет-анализ.

Введение

Исследования последних лет позволили установить, что развитие почечной гипертонии сопровождается изменениями динамики структурных элементов почки (нефронов) и эффектов подстройки ритмов колебаний в функционировании их ансамблей [1–8]. Авторегуляция почечного кровотока на уровне индивидуальных нефронов включает механизмы канальцево-гломерулярной обратной связи (КГОС) и миогенного отклика сосудов [9–13]. Первый из этих механизмов осуществляет регуляцию кровотока в зависимости от концентрации ионов NaCl в фильтрате и приводит к генерации колебаний давления жидкости в канальцах нефрона с периодом 30–40 секунд. Как показано в работах [14–16], эти колебания являются близкими к периодическим в случае нормального артериального давления и хаотическими при гипертонии. Более того, спектральный анализ сигналов давления фильтрата нефронов гипертензивных крыс демонстрирует наличие нескольких субгармоник базовой частоты колебаний, что может интерпретироваться как возможные «следы» субгармонического сценария перехода к хаосу. Второй механизм приводит к ритмическим

сокращения диаметра артериол с периодом 5–10 секунд; он обусловлен активацией гладких мышц стенок сосудов [12, 13].

Традиционно нефрон рассматривается как биологический осциллятор, генерирующий колебания с двумя отмеченными временными масштабами. Сосуществование двух разных (но в то же время взаимодействующих) механизмов приводит к возникновению синхронизации колебаний, которая регистрируется как на уровне отдельного нефрона, так и в динамике нефронных ансамблей. Изучение синхронизации позволяет установить типичные изменения в динамике ритмов при переходе от нормы к патологии. Пожалуй, главная проблема при рассмотрении данного явления связана с тем, что экспериментально регистрируемые сигналы часто оказываются нестационарными. Такая ситуация в целом типична для физиологических экспериментов, она осложняет диагностику наличия эффектов взаимодействия ритмов, в частности, затрудняет оценку длительности участков синхронизации. Кроме того, на основе стандартных методов анализа структуры сигналов может быть достаточно сложно выявить эффекты взаимодействия ритмов, которые происходят в течение коротких интервалов времени (несколько периодов колебаний). Для более детального исследования сложной структуры физиологических процессов в последние годы стали активно применяться методы, позволяющие проводить частотно-временной анализ экспериментальных данных [17–21] и осуществлять расчеты их локальных характеристик, например, локальных энергетических спектров. С этой целью в настоящее время широко применяется вейвлет-анализ [22–24]. За последние годы вейвлет-анализ и специальные методы, основанные на вейвлет-преобразовании, позволили выявить ряд новых эффектов в почечной авторегуляции кровотока [5, 7].

Следует отметить, что несмотря на значительный прогресс, достигнутый в понимании механизмов авторегуляции, до сих пор сохраняется много открытых вопросов об особенностях функционирования структурных элементов почки и их малых ансамблей в норме и при гипертонии. В частности, нет полной ясности в вопросах взаимодействия ритмов колебаний, участвующих в регуляции кровотока, на уровне даже малых групп структурных элементов почки. Если сам факт наличия синхронизации колебаний ранее отмечался и исследовался на основе специальных методик [4], то особенности синхронного поведения (возникновение синфазных и противофазных режимов) в настоящее время остаются не изученными. Целью данной работы является исследование эффектов взаимодействия ритмов колебаний в динамике малых групп структурных элементов почки (парные нефроны и триплеты) и выявление отличий этих эффектов в норме и при гипертонии.

1. Динамика парных нефронов

Согласно результатам исследований структуры почек млекопитающих, до 50% индивидуальных нефронов попарно подсоединены к общей междольковой артерии и до 10% нефронов организованы в триплеты. Это приводит к взаимодействию между соседними структурными элементами, которое основывается на двух различных механизмах: электрохимической и гемодинамической связи.

Первая из них вызвана взаимодействием между электрохимическими сигналами, генерируемыми КГОС соседних нефронов, и, согласно теоретическим представлениям о функционировании парных нефронов, она должна приводить к синфазной синхронизации их колебаний [8]. Гемодинамическая связь возникает из-за того, что

сокращение приносящей артериолы одного нефрона увеличивает гидростатическое давление и кровоток в соседнем нефроне. В свою очередь, это увеличение будет приводить к сокращению приносящей артериолы второго нефрона и увеличению кровотока в первый. Как следствие, гемодинамическая связь должна порождать противофазную синхронизацию. Предположительно, в реальной динамике структурных элементов почек оба механизма действуют одновременно, однако для подтверждения этого и для выявления типичности того или иного типа связи необходимы экспериментальные исследования.

Характерные примеры сигналов парных нефронов (для случаев нормы и патологии) изображены на рис. 1. Исследования проводились с использованием 18 записей давления в проксимальных канальцах структурных элементов почек нормотензивных крыс и 22 записи гипертензивных крыс, предоставленных коллегами из Института Панум (Университет Копенгагена, Дания). При этом на первом этапе изучались эффекты подстройки мгновенных частот ритмов (в рамках метода анализа частотной синхронизации). С этой целью проводилось выделение временных зависимостей мгновенных частот ритмов колебаний в рамках вейвлет-анализа экспериментальных данных с использованием базисной функции Морле. Детали метода ранее обсуждались в работах [25–27].

Практическая ценность теории вейвлетов заключается в возможности проводить локализованный спектральный анализ динамики систем с меняющимися во времени характеристиками и в существовании подвижного частотно-временного окна, позволяющего осуществлять компромисс между временным и частотным разрешением в зависимости от исследуемого частотного диапазона. Это весьма актуально для исследования колебательных процессов в динамике систем живой природы, в которых эффекты подстройки ритмов могут носить непродолжительный характер (например, несколько периодов колебаний) и возникает необходимость в применении методов анализа сигналов, эффективных для исследования структуры процессов малой длительности. Непрерывное вейвлет-преобразование процесса $x(t)$ имеет вид

$$W(a, b) = \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \psi^* \left(\frac{t-b}{a} \right) dt, \quad (1)$$

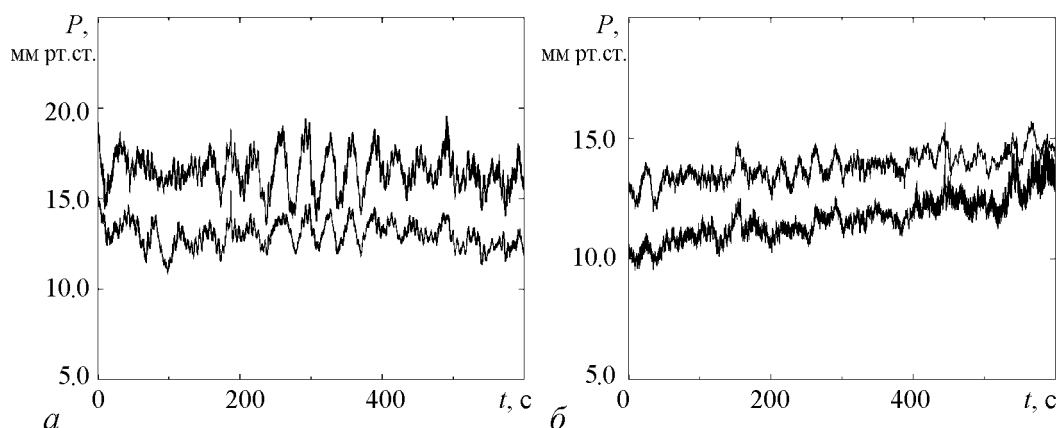


Рис. 1. Примеры сигналов давления фильтрата в канальцах нефронов нормотензивной (а) и гипертензивной (б) крысы. Эти сигналы рассматриваются в качестве $x(t)$ в (1)

где функция ψ называется вейвлетом, который подвергается масштабным преобразованиям и переносам: $\psi_{a,b} = \psi([t - b]/a)$. Параметры a и b характеризуют временной масштаб и локализацию, а звездочка означает комплексное сопряжение. Для осуществления локализованного спектрального анализа применяют комплексные базисные функции, среди которых наибольшую популярность приобрел вейвлет Морле. Он обеспечивает хорошую (по сравнению с некоторыми другими базисами) локализацию как по времени, так и по частоте, позволяя осуществлять расчеты локальных спектров сигналов по 3–5 периодам колебаний.

После расчета коэффициентов вейвлет-преобразования $W(a, b)$ для удобства можно осуществить переход от масштаба a к частоте $f \sim a^{-1}$ (коэффициент пропорциональности зависит от параметров вейвлета Морле) и проводить анализ энергетического спектра $E(f, b) = |W(f, b)|^2$. Локальные максимумы поверхности $E(f, b)$, определяемые в каждый фиксированный момент времени b , позволяют идентифицировать временные зависимости мгновенных частот ритмических процессов. В отличие, например, от метода аналитического сигнала, использующего преобразование Гильберта, вейвлет-анализ может эффективно использоваться в исследованиях многочастотных нестационарных колебательных процессов.

Расчет энергетического спектра, наряду с анализом мгновенных характеристик колебательных процессов (мгновенных частот, амплитуд или локальных энергетических спектров), позволяет также изучать усредненные энергетические характеристики – глобальные энергетические спектры, которые являются аналогом сглаженного спектра мощности, вычисленного на основе финитного преобразования Фурье. На рис. 2 представлены спектры, вычисленные по экспериментальным данным нефронов нормотензивных и гипертензивных крыс, усредненные по соответствующим группам. В динамике нефронов нормотензивных крыс (рис. 2, *a*) отчетливо выражены два характерных ритма – вышеупомянутые медленные ритмические процессы, связанные с механизмом КГОС (с частотой примерно 0.035 Гц), и быстрые (миогенные) колебания (с частотой примерно 0.16 Гц). Кроме того, сигналы, изображенные на рис. 1, содержат случайные флуктуации в области частот выше 1 Гц, которые не представляют интерес при изучении авторегуляции почечного кровото-

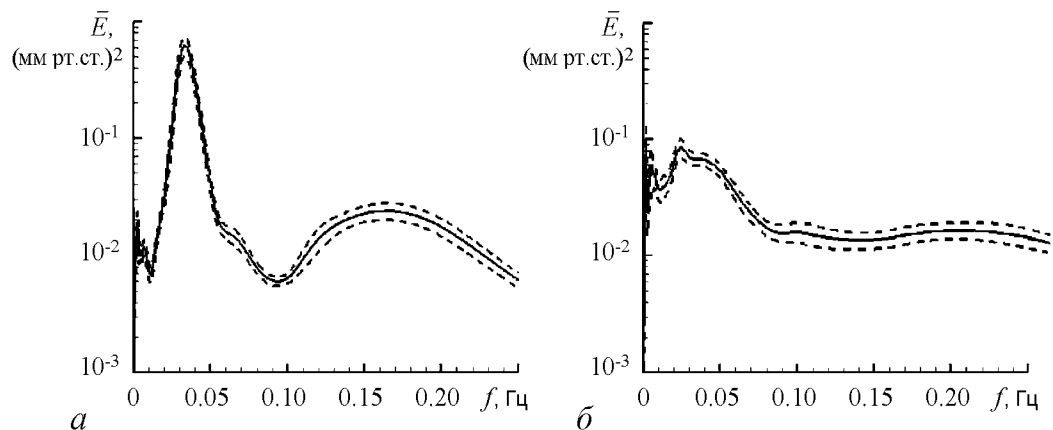


Рис. 2. Усредненные энергетические спектры по экспериментальным данным проксимального давления в нефронах нормотензивных (*a*) и гипертензивных (*б*) крыс

ка – этот диапазон не представлен на спектрах рис. 2. Для нефронов гипертензивных крыс миогенная динамика менее выражена в результатах усреднения по ансамблю реализаций (рис. 2, б), что может быть связано с большей вариабельностью частоты соответствующего ритма относительно среднего уровня. Тем не менее соответствующие ритмические процессы идентифицируются в локальных энергетических спектрах, как это было показано в работе [4].

Рис. 3 иллюстрирует примеры различных синхронных состояний, включающих полную синхронизацию ритмов двух нефронов (наблюдается захват частот для каждой пары ритмов – см. рис. 3, а) и частичную синхронизацию (синхронизируется только одна пара ритмов – см. рис. 3, б). В первом случае отношение частот для каждого колебательного процесса принимает значения, близкие к 1:1 (незначительные отклонения связаны с наличием флуктуаций). Во втором случае синхронизируются только медленные ритмы (динамика, обусловленная наличием КГОС), в то время как миогенные колебания остаются несинхронными. Наличие шума в экспериментальных данных приводит к необходимости введения допустимого предела отклонения от отношения частот 1:1, при котором динамику можно продолжать считать синхронной. В рамках проводимых исследований этот предел был равен $\pm 10\%$ от среднего значения частоты анализируемого ритма (учитывая низкочастотность ритмов и оценки погрешности расчетов мгновенных частот, составляющих величину порядка 1%). Несколько различающиеся значения введенного предела для медленной и быстрой динамики связаны с тем, что миогенные колебания являются существенно более слабыми и в большей степени подверженными влиянию флуктуаций. Кроме того, с увеличением частоты колебаний подвижное частотно-временное окно вейвлет-преобразования увеличивается по ширине в спектральной области, что приводит к снижению точности оценки положения пика спектра по сравнению с диапазоном меньших частот, где окно вейвлет-преобразования является более узким. Следует отметить, что эффекты синхронизации меняются во времени для одной и той же пары рассматриваемых нефронов – режим полной синхронизации может смениться режимом частичной синхронизации или участком несинхронных колебаний.

Учитывая то обстоятельство, что динамика нефронов претерпевает изменения во времени, отражающиеся в изменении режима синхронных колебаний, необходимо

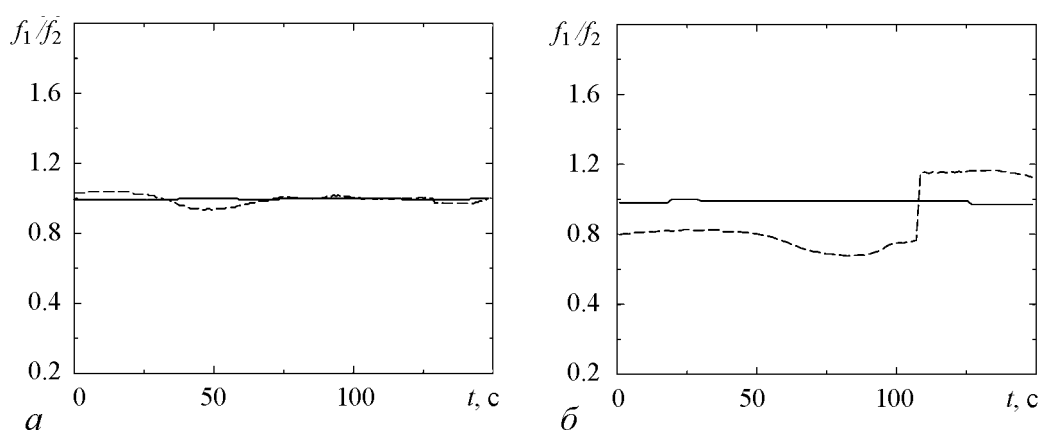


Рис. 3. Типичные примеры полной (а) и частичной (б) синхронизации мгновенных частот ритмов в динамике парных нефронов. Сплошными линиями показана динамика медленных ритмов, штриховыми – быстрых

рассматривать статистические данные по всем экспериментальным данным, чтобы сделать вывод о типичности того или иного режима. С этой целью для каждой пары сигналов анализировалось мгновенное отношение частот быстрых и медленных ритмов (по отдельности для миогенной динамики и ритмов КГОС), затем оценивалась вероятность 3-х вариантов поведения по всем экспериментам, а именно: 1) режима полной синхронизации; 2) режима частичной синхронизации (взаимной подстройки только быстрых или только медленных ритмов); 3) режима полностью несинхронного поведения мгновенных частот колебательных процессов.

Согласно статистическим результатам по исследованию 9 нормотензивных и 11 гипертензивных крыс, приведенным в табл. 1, существуют отличия в явлении захвата мгновенных частот колебательных процессов для парных нефронов нормотензивных и гипертензивных крыс. В первом случае наиболее вероятным является эффект полной синхронизации (около 81% всего времени синхронизируются мгновенные частоты как медленных, так и быстрых ритмов). Еще 19% времени по крайней мере одна пара ритмов демонстрирует эффект захвата частот колебаний. Зафиксировать полностью несинхронный режим удается на протяжении менее 1% времени регистрации сигналов взаимодействующих структурных элементов почки. Для гипертензивных крыс эта статистика меняется, и полностью синхронная динамика встречается лишь на протяжении 39% времени наблюдения (более чем в 2 раза реже по сравнению со случаем нормы). Для спонтанных гипертензивных крыс значительно более типичным эффектом является частичная синхронизация – она наблюдается на протяжении 46% времени регистрации (в основном, это случай синхронизации ритмов КГОС при несинхронной миогенной динамике).

Следствием отмеченных отличий в динамике нормотензивных и гипертензивных крыс является существенное уменьшение длительности участков захвата частот колебаний при патологии. Анализ средней длительности участков захвата частот колебаний приводит к следующим результатам:

- 360 ± 31 с – нормотензивные крысы, медленные ритмы;
- 100 ± 16 с – гипертензивные крысы, медленные ритмы;
- 75 ± 14 с – нормотензивные крысы, быстрые ритмы;
- 25 ± 4 с – гипертензивные крысы, быстрые ритмы.

Таким образом, можно констатировать, что при почечной гипертензии средняя длительность участков захвата частот колебаний уменьшается примерно в 3 раза. Если в случае нормы подстройка частот происходит на протяжении порядка 10–12 периодов колебаний (как для ритмов КГОС, так и для миогенной динамики), то при гипертензии этот участок уменьшается до 3–4 периодов (в среднем).

Аналогичные результаты были получены при другом варианте исследования эффекта синхронизации – рассмотрении поведения во времени разности мгновенных фаз колебаний. Поскольку анализируется режим захвата частот 1:1, условие для фазовой синхронизации можно записать в простом виде

$$|\varphi_1(t) - \varphi_2(t)| < C, \quad (2)$$

где C – константа, $\varphi_1(t)$ и $\varphi_2(t)$ – мгновенные фазы колебаний для каждого нефрона; процедура их введения с помощью вейвлет-преобразования обсуждается, в частности, в монографиях [28, 29]. Для удобства в данной работе рассмотрим нормированные на 2π значения мгновенных фаз и их разности, то есть один полный период

Таблица 1

Статистика различных вариантов синхронной динамики мгновенных частот колебательных процессов

Режим синхронизации	Вероятность, %	
	нормотензивные крысы	гипертензивные крысы
1) полная	≈ 81	≈ 39
2) частичная	≈ 19	≈ 46
3) отсутствие синхронизации	< 1	≈ 15

Таблица 2

Статистика различных вариантов синхронной динамики фаз колебательных процессов

Режим синхронизации	Вероятность, %	
	нормотензивные крысы	гипертензивные крысы
1) полная	≈ 71	≈ 35
2) частичная	≈ 24	≈ 41
3) отсутствие синхронизации	≈ 5	≈ 24

колебаний соответствует набегу фазы, равному 1. По аналогии с изучением динамики мгновенных частот колебаний выбирались немного различающиеся значения константы C , ограничивающей допустимый предел разности фаз синхронных колебаний, а именно $C = 1/10$ для медленных ритмов и $C = 1/6$ – для быстрых. При этом полученные результаты (также для 9 нормотензивных и 11 гипертензивных крыс) качественно соответствовали результатам анализа частотной синхронизации (табл. 2).

Оценки длительности участков захвата фаз колебаний приводят к следующим результатам:

- 270 ± 23 с – нормотензивные крысы, медленные ритмы;
- 90 ± 14 с – гипертензивные крысы, медленные ритмы;
- 60 ± 12 с – нормотензивные крысы, быстрые ритмы;
- 20 ± 3 с – гипертензивные крысы, быстрые ритмы.

Несмотря на то, что значения несколько отличаются от тех, которые были получены для частотной синхронизации (что определяется выбором накладываемых ограничений, в данном случае выбором константы C), соотношения между ними являются похожими, что подтверждает существенные различия динамики в норме и при гипертонии. Независимо от этих вариаций, можно сделать вывод о том, что типичной динамикой парных нефронов нормотензивных крыс является режим полной синхронизации (табл. 1 и 2), а типичным режимом функционирования парных нефронов гипертензивных крыс служит частичная синхронизация. Проведенные исследования позволяют сделать вывод о принципиальных различиях в динамике парных нефронов крыс при нормальном и повышенном артериальном давлении: гипертония сопровождается существенным увеличением вероятности перехода от режима полной синхронизации колебательных процессов к режиму частичной синхронизации.

Рис. 4 иллюстрирует примеры разности мгновенных фаз в случае полной синхронизации парных нефронов нормотензивной крысы (рис. 4, а) и частичной синхронизации взаимодействующих структурных элементов почки гипертензивной

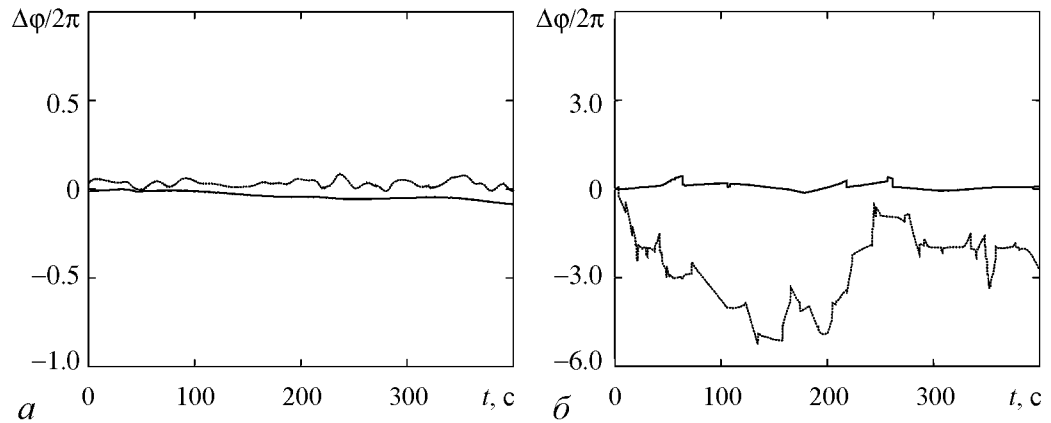


Рис. 4. Типичные примеры полной (а) и частичной (б) синхронизации мгновенных фаз ритмов колебаний в динамике парных нефронов. Сплошными линиями показана динамика медленных ритмов, пунктирами – быстрых

крысы (рис. 4, б). Отметим, что в данном случае анализ фазовой синхронизации не позволил выявить информацию о возможном наличии разных сдвигов фаз в функционировании парных нефронов: как для медленных, так и для быстрых ритмов колебаний была типична синфазная динамика – колебания были синфазными для всех рассмотренных экспериментальных данных. Однако при рассмотрении триплетов были отмечены отличия от такого поведения. Поэтому более подробно остановимся на изучении фазовой синхронизации в динамике трех взаимодействующих структурных элементов почки.

2. Динамика триплетов

Как уже отмечалось, примерно 10% от общего числа нефронов почки организованы в триплеты. В рамках проводившихся исследований было рассмотрено несколько записей экспериментальных данных давления фильтрата в проксимальных канальцах трех взаимодействующих нефронов. При этом было выявлено два варианта поведения.

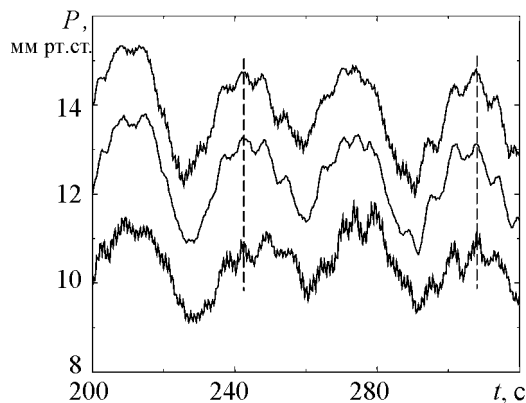


Рис. 5. Фрагменты временных зависимостей давления фильтрата в проксимальных канальцах нефронов триплета. Изображен случай синфазной синхронизации медленных и быстрых ритмов колебаний

Первый вариант: синфазная синхронизация ритмов КГОС. Данный случай мало чем отличается от рассмотренного варианта динамики парных нефронов – как медленные, так и быстрые ритмы демонстрируют наличие синфазных колебаний. Это можно обнаружить путем простого визуального анализа фрагмента экспериментальных данных (рис. 5). С одной стороны, здесь прослеживается синхронное поведение для ритмов, обусловленных механизмом КГОС. Поскольку соответству-

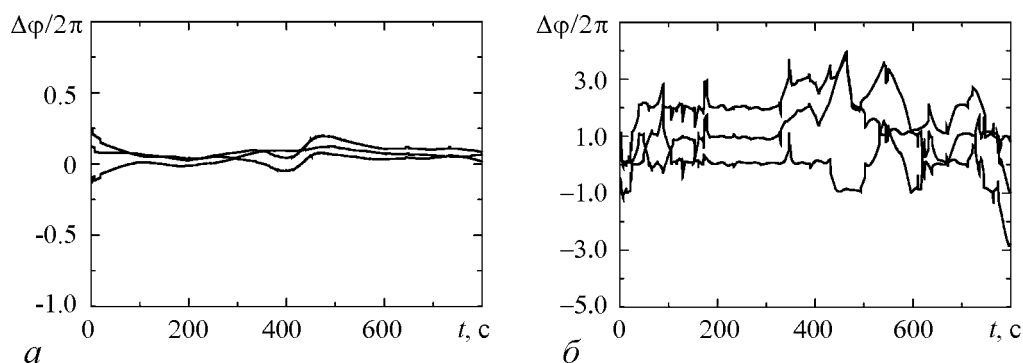


Рис. 6. Временные зависимости разности фаз для медленных (*a*) и быстрых (*б*) ритмов колебаний. Приведены зависимости для колебаний нефронов триплета с номерами 1 и 2, 2 и 3, 1 и 3. Диагностируется только наличие синфазного синхронного режима

ющие колебания имеют большую амплитуду, они хорошо заметны в регистрируемых сигналах. С другой стороны, при более внимательном рассмотрении можно увидеть и быстрые ритмы колебаний. На рис. 5 две пунктирные вертикальные прямые проходят через локальные максимумы колебаний, происходящих с частотой миогенной динамики. С помощью этих прямых отчетливо видно, что локальные максимумы расположены один под другим, то есть в данном случае наблюдается синфазная синхронная динамика как для медленных, так и для быстрых ритмов колебаний.

Однако визуальный анализ становится не очень удобным, если быстрый ритм визуально является плохо различимым, а также для сильно зашумленных экспериментальных данных. В связи с этим анализ синхронности колебаний необходимо сопровождать дополнительными расчетами. В частности, для экспериментальных данных, фрагмент которых был приведен на рис. 5, проведенные расчеты (рис. 6) позволяют четко диагностировать наличие синфазной синхронизации для медленных ритмов, а для быстрых – участки синфазной синхронизации чаще сопровождаются сбоями фаз и фрагментами несинхронной динамики. Так, судя по рис. 6, *б*, наиболее длительная область синфазных миогенных колебаний диагностируется в диапазоне 200–350 с. Отметим, что именно этот участок был приведен на рис. 5, и наличие синфазных колебаний в отмеченной области диагностировалось «на глаз».

Второй вариант: противофазная синхронизация ритмов КГОС. Данный вариант представляется более интересным и не укладывается в рамки ранее описанных явлений. Прежде всего, для медленных ритмов нефронов триплета наблюдается различное поведение: 2 нефрона демонстрируют синфазные колебания, а 3-й находится с ними в противофазе. Это отчетливо видно на рис. 7. В данном случае амплитуда миогенной динамики является очень

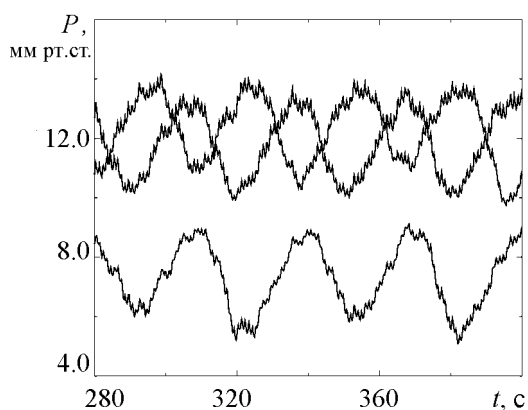


Рис. 7. Фрагменты временных зависимостей давления фильтра в проксимальных канальцах нефронов триплета.

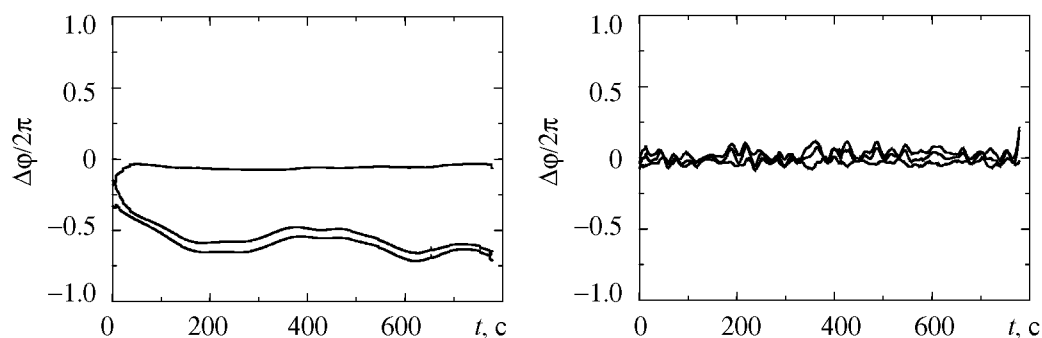


Рис. 8. Временные зависимости разности фаз для медленных (а) и быстрых (б) ритмов колебаний. Приведены зависимости для колебаний нефронов триплета с номерами 1 и 2, 2 и 3, 1 и 3.

маленькой по сравнению с амплитудой медленных колебаний, и визуально проанализировать быстрые ритмы представляется затруднительным (в отличие от примера, изображенного на рис. 5). Как следствие, необходимы расчеты мгновенных фаз колебаний на основе вейвлет-преобразования. Результаты таких расчетов представлены на рис. 8. В случае медленных ритмов они подтверждают вывод, сделанный путем визуального рассмотрения колебательных процессов. Другое наблюдение состоит в разном поведении для быстрых и медленных ритмов: в то время как для колебаний, обусловленных механизмом КГОС, наблюдаются режимы как синфазной, так и противофазной синхронизации, миогенные колебания всех нефронов триплета синхронизируются только синфазно! Таким образом, наблюдается разное поведение для ритмов авторегуляции, и это обстоятельство служит доводом в пользу того, что динамику быстрых и медленных ритмов почечной авторегуляции кровотока на уровне отдельных структурных элементов почки необходимо анализировать по отдельности.

Ранее уже отмечалось, что существует 2 типа связи в динамике взаимодействующих структурных элементов почки – электрохимическая, приводящая к синфазной синхронизации колебаний, и гемодинамическая, порождающая противофазную синхронизацию. Согласно результатам экспериментальных исследований можно сделать вывод о том, что доминирующей является электрохимическая связь: примерно в 93% случаев наблюдается синфазная синхронная динамика и только в 7% экспериментальных данных – противофазная. Этот результат является обоснованием выбора типа связи при решении задач математического моделирования нефронных ансамблей. Отметим, что наличие синфазной синхронизации является типичным явлением как в норме, так и при гипертонии (вероятность возникновения противофазного режима мала в обоих случаях), однако длительность участков синхронизации по-прежнему различается в несколько раз – при патологии участки подстройки частот или фаз колебаний уменьшаются.

3. Математическое моделирование процессов авторегуляции кровотока на уровне парных нефронов

3.1. Математическая модель индивидуального нефрона. К настоящему времени было предпринято несколько попыток построения математической модели нефрона [30–33]. Наиболее простой моделью (и в то же время не только описывающей хаотизацию динамики при вариации управляющих параметров, но и поз-

воляющей получать сигналы, соответствующие реальной динамике нефронов) является модель, предложенная в работе [33]. Она представляет собой систему шести обыкновенных дифференциальных уравнений, содержащую большое количество нелинейных функций, параметров и являющуюся достаточно сложной. Рассмотрим уравнения данной системы, остановившись на ключевых аспектах авторегуляции кровотока.

Гломерулярная фильтрация. Рассмотрим схематическое изображение движения потока крови через приносящую артериолу в гломерулу и из него (рис. 9). Согласно закону сохранения масс, можно записать следующее равенство:

$$\frac{P_a - P_g}{R_a} = F_{\text{filt}} - \frac{P_v - P_g}{R_e}, \quad (3)$$

которое означает, что поток, входящий через приносящую артериолу с сопротивлением R_a , есть разность потока фильтрата из гломерулы F_{filt} и потока, выходящего через выносящую артериолу, имеющую сопротивление R_e . В уравнении (3) P_a , P_g и P_v представляют собой значения давления в артерии, гломеруле и вене, соответственно.

Поток крови, поступающий в приносящую артериолу, состоит из плазменной компоненты и красных кровяных клеток (H_a – артериальный гематокрит). Входящий поток плазмы можно записать следующим образом: $[(P_a - P_g)/R_a] (1 - H_a)$. В фильтрате, образуемом в гломеруле, нет форменных элементов крови и очень мало белка, а низкомолекулярных веществ в нем содержится почти столько же, сколько и в плазме. Поэтому количество белков, входящих в гломерулу, должно быть равно количеству белков, выходящих через выносящую артериолу

$$\left(\frac{P_a - P_g}{R_a} \right) (1 - H_a) C_a = \left[\frac{P_a - P_g}{R_a} (1 - H_a) - F_{\text{filt}} \right] C_e,$$

$$F_{\text{filt}} = (1 - H_a) \frac{P_a - P_g}{R_a} (1 - C_a/C_e). \quad (4)$$

В (4) C_a – концентрация плазменного белка в приносящей артериоле, C_e – концентрация белков в выходящем потоке плазмы.

Фильтрация в гломерулярных капиллярах происходит пассивно и прекращается, если давление в гломеруле

$$P_g = P_t + P_{\text{osm}}^e, \quad (5)$$

где P_t – гидростатическое давление в проксимальном канальце, а P_{osm}^e – осмотическое давление капиллярной крови. P_{osm}^e является функцией только концентрации белков C_e в выносящей артериоле, так как в гломерулярном фильтрате белков нет.

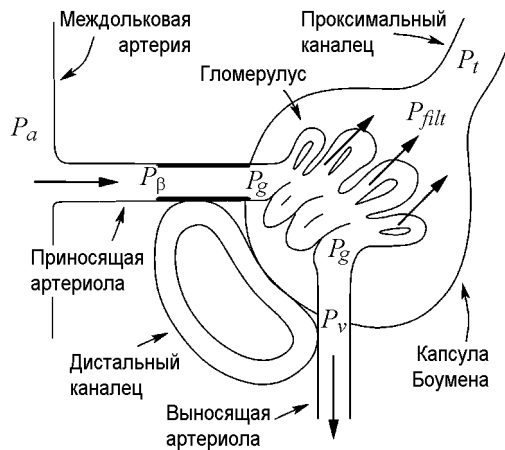


Рис. 9. Схематическое изображение потока в гломеруле и из него. P_a , P_β , P_g , P_v и P_t обозначают давление в различных частях системы, F_{filt} – скорость гломерулярной фильтрации

Для нефронов осмотическое давление капиллярной крови описывается формулой

$$P_{\text{osm}}^e = aC_e + bC_e^2, \quad (6)$$

в которой a и b – параметры концентрации белков.

Динамика в канальцах. После гломерулярной фильтрации ультрафильтрат попадает в проксимальный каналец, в котором 70% реабсорбируется. Изменение объема жидкости V_t в проксимальном канальце, как следует из закона сохранения масс, равно

$$\frac{dV_t}{dt} = F_{\text{filt}} - F_{\text{reab}} - F_{\text{Hen}}. \quad (7)$$

В данном уравнении F_{reab} – реабсорбируемый поток в проксимальном канальце, F_{Hen} – поток в петле Генле.

Изменение давления P_t внутри канальца можно описать следующим уравнением:

$$\frac{dP_t}{dt} = \frac{F_{\text{filt}} - F_{\text{reab}} - F_{\text{Hen}}}{C_{\text{tub}}}. \quad (8)$$

Коэффициент $C_{\text{tub}} = dV_t/dP_t$ называют эластичной растяжимостью проксимального канальца.

Скорость реабсорбции не зависит от давления внутри канальца. Следует отметить, что реабсорбируемое в единицу времени вещество не является постоянной величиной, его количество определяется процентным содержанием данного элемента в фильтрате. Существует понятие Т-гломеруло-канальцевое равновесие: как бы ни изменялась скорость фильтрации, процент реабсорбции вещества остается постоянным.

Далее из проксимального канальца фильтрат попадает в петлю Генле. Петля Генле и дистальный каналец характеризуются достаточно большим сопротивлением потоку (в отличие от проксимального канальца). Анализ экспериментальных данных, проведенный в работах [31, 32], показал, что поток через петлю Генле F_{Hen} приближенно равен

$$F_{\text{Hen}} = \frac{P_t - P_d}{R_{\text{Hen}}}. \quad (9)$$

Здесь P_d – давление в дистальном канальце, R_{Hen} – сопротивление потоку в петле Генле.

Поскольку время прохождения потока по петле Генле является конечной величиной, возникает задержка в реакции системы на изменение потока в этой петле. В работе [33] задержку было предложено описать с помощью системы трех обыкновенных дифференциальных уравнений, содержащей переменные цепи задержки X_1 ,

X_2 и X_3 , а также время задержки T

$$\begin{aligned}\frac{dX_1}{dt} &= F_{\text{Hen}} - \frac{3X_1}{T}, \\ \frac{dX_2}{dt} &= \frac{3(X_1 - X_2)}{T}, \\ \frac{dX_3}{dt} &= \frac{3(X_2 - X_3)}{T},\end{aligned}\quad (10)$$

где $3X_3/T$ – поток на входе в дистальный каналец.

Свойства артериол. Отдельный отрезок любого кровеносного сосуда имеет определенную длину L и площадь поперечного сечения A . Реальная напряженность определяется следующей формулой

$$S = \sigma \frac{L}{L_0}, \quad (11)$$

где σ и L_0 – идеальная напряженность и длина, соответственно (в состоянии покоя).

Общее напряжение артериолы является суммой пассивной и активной составляющих

$$\sigma = \sigma_e + \sigma_a. \quad (12)$$

Активная компонента σ_a определяется эластичными свойствами кровеносных сосудов и откликом гладкой сосудистой мускулатуры, а пассивная σ_e – свойствами мускульной соединительной ткани стенок артериол, в состав которых входят коллаген и эластин

$$\sigma_e = \sigma_{e1} + \sigma_{e2} = C_1(e^{\gamma_1 \varepsilon} - 1) + C_2(e^{\gamma_2 \varepsilon} - 1). \quad (13)$$

$C_{1,2}$ и $\gamma_{1,2}$ – константы, которые характеризуют ткань, ε – сила гемодинамической связи.

Активное напряжение

$$\sigma_a = \begin{cases} \Psi \sigma_{\max} \left(1 - \left| \frac{\varepsilon - \varepsilon_{\max}}{\varepsilon_0} \right| \right), & |\varepsilon - \varepsilon_{\max}| < \varepsilon_0, \\ 0, & |\varepsilon - \varepsilon_{\max}| \geq \varepsilon_0, \end{cases} \quad (14)$$

где Ψ – мускульный тон, измеряемый в пределах $[0,1]$. Зависимость $\sigma_a(\varepsilon)$ называют «тент-кривой» с максимальным значением $\Psi \sigma_{\max}$ и шириной ε_0 .

Предполагая, что артериола несжимаема и имеет постоянную длину, используя закон Лапласа

$$P_{\text{eq}} = \int_{r_i}^{r_0} \frac{S}{r} dr, \quad (15)$$

можно получить для равновесного давления в активной части приносящей артериолы P_{eq} следующую формулу:

$$P_{\text{eq}} = \int_1^{\rho_0/\rho_i} \frac{\sigma_e + \sigma_a}{x(1 + \varepsilon)} dx, \quad (16)$$

В (15), (16) $x = \rho/\rho_i$, $\rho = \sqrt{r^2 - r_i^2 + \rho_i^2}$; r_0 , r_i – внешний и внутренний радиусы артериолы, соответственно. После математических преобразований (16) сводится к виду

$$P_{\text{eq}} = P_{\text{el}} + \Psi P_{\text{act}}. \quad (17)$$

Здесь P_{el} – давление, вызванное эластичными силами в активной части приносящей артериолы, а P_{act} – давление, вызванное мускульными сокращениями в активной части приносящей артериолы.

В прегломерулярной области приносящая артериола описывается в виде двух васкулярных сегментов, один из которых имеет фиксированный внутренний радиус, постоянное сопротивление R_{a0} и длину β , а другой – меняющийся радиус, изменяемое сопротивление и длину $(1 - \beta)$.

Полное сопротивление можно записать следующим образом:

$$R_a = R_{a0}\beta + R_{a0}(1 - \beta)r^{-4}, \quad (18)$$

так как сопротивление активной части пропорционально r^{-4} по закону Пуассона.

Поток через всю артериолу равен потоку через первый и второй сегменты, поэтому

$$\frac{P_g - P_a}{R_a} = \frac{P_\beta - P_a}{\beta R_{a0}}. \quad (19)$$

Артериальное давление в активной части артериолы равно

$$P_\beta = P_a - \beta(P_a - P_g) \frac{R_{a0}}{R_a}. \quad (20)$$

Среднее давление в активной части приносящей артериолы в предположении линейного падения давления вдоль активной части определяется следующим образом:

$$P_{\text{av}} = \frac{P_\beta + P_g}{2} = \frac{1}{2} \left(P_a + P_g - \beta(P_a - P_g) \frac{R_{a0}}{R_a} \right). \quad (21)$$

Динамика артериолы может быть описана уравнением

$$\frac{d^2 r}{dt^2} + d \frac{dr}{dt} - \frac{P_{\text{av}} - P_{\text{eq}}}{\omega} = 0, \quad (22)$$

где r – радиус, параметр d определяет степень затухания колебаний в артериоле, ω есть отношение масса–эластичность стен артериолы, P_{eq} – равновесное давление в активной части приносящей артериолы, P_{av} – среднее давление в активной части выносящей артериолы. Если ввести скорость сокращения или растяжения артериолы v_r , то уравнение (22) можно переписать в виде системы двух обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \frac{dr}{dt} &= v_r, \\ \frac{dv_r}{dt} &= \frac{P_{\text{av}} - P_{\text{eq}}}{\omega} - v_r d. \end{aligned} \quad (23)$$

Канальцево-гломерулярная обратная связь. Анализ экспериментальных данных показал, что КГОС стабилизирует скорость потока в канальцах нефрона и является внутренним механизмом. Данный механизм осуществляет мониторинг ионной концентрации в потоке дистального канальца, активизирует мускульные клетки приносящей артериолы, регулируя ее радиус. При этом мускульный тон Ψ является функцией скорости потока в дистальном канальце $3X_3/T$ и параметра α , определяющего усиление в цепи КГОС

$$\Psi \left(\frac{3X_3}{T} \right) = \Psi_{\max} - \frac{\Psi_{\max} - \Psi_{\min}}{1 + e^{\alpha \left(\frac{3X_3}{TF_{Hen0}} - S \right)}}$$

$$S = 1 - \frac{1}{\alpha} \ln \left(\frac{\Psi_{eq} - \Psi_{\min}}{\Psi_{\max} - \Psi_{eq}} \right). \quad (24)$$

Здесь Ψ_{\min} , Ψ_{\max} и Ψ_{eq} – минимальный, максимальный и равновесный уровни активности, соответственно $3X_3/(TF_{Hen0})$ – выходящий поток из петли Генле, нормированный на равновесное значение потока F_{Hen0} .

Модель одиночного нефрона. Процесс авторегуляции отдельного нефрона, таким образом, может быть описан системой шести дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \frac{dP_t}{dt} &= \frac{1}{C_{tub}} [F_{filt}(P_t, r) - F_{reab} - F_{Hen}(P_t)], \\ \frac{dr}{dt} &= v_r, \\ \frac{dv_r}{dt} &= \frac{P_{av}(P_t, r) - P_{eq}(r, \Psi(X_3, \alpha), T)}{\omega} - v_r d, \\ \frac{dX_1}{dt} &= F_{Hen}(P_t) - \frac{3X_1}{T}, \\ \frac{dX_2}{dt} &= \frac{3(X_1 - X_2)}{T}, \\ \frac{dX_3}{dt} &= \frac{3(X_2 - X_3)}{T}. \end{aligned} \quad (25)$$

Из-за сложности данной модели в тексте не приводится описание всех нелинейных функций, переменных и параметров (в данной работе мы используем те же параметры, что и авторы статьи [33]).

3.2. Математическая модель парных нефронов. Как отмечалось в разделе 1, парные нефроны могут взаимодействовать посредством электрохимических сигналов или через гемодинамическую связь, которая возникает из-за перераспределения потока крови между ними. Гемодинамическая связь в основном зависит от сопротивления потока крови в сети артериол, тогда как электрохимическая связь ассоциируется с передачей сигналов между гладкими мышечными клетками. В результате лишь нефроны, расположенные вблизи друг друга, могут взаимодействовать посредством электрохимических сигналов. Нефроны, расположенные в отдалении,

но к которым кровь поступает от одного и того же участка междольковой артерии, могут взаимодействовать через гемодинамическую связь.

Вначале акцентируем внимание на моделировании электрохимической связи. В модели одиночного нефрона (25) равновесное давление в активной части приносящей артериолы зависит от текущего радиуса r и от уровня активации Ψ гладких мышц, окружающих артериолу и контролирующих ее диаметр (мускульного тона). Мускульная активация возникает в юктагломерулярном аппарате и распространяется вдоль приносящей артериолы. При достижении точки разветвления с артериолой соседнего нефрона часть сигнала может распространяться вдоль артериолы этого соседнего нефрона и приводить к возникновению его отклика, связанного с механизмом КГОС. Эта связь рассматривается как почти мгновенная, поскольку время распространения сигнала от одного нефрона к другому очень мало по сравнению с периодом колебаний КГОС. В работе [31] было показано, что сигнал при его распространении уменьшается по амплитуде почти экспоненциально. Поэтому только часть исходного уровня активации $\gamma = e^{-l/l_0} < 1$ достигнет гладких мышц сосудов, расположенных вблизи макулы денса соседнего нефрона. В выражении для параметра электрохимической связи γ величина l представляет собой расстояние при распространении сигнала связи, а $l_0 \cong 500$ мкм – характерный временной масштаб экспоненциального затухания. В рамках модели парных нефронов электрохимическая связь описывается добавлением вклада уровня активации в одном нефроне в уровень активации в соседнем нефроне

$$\Psi_{1,2}^* = \Psi_{1,2} + \gamma\Psi_{2,1}. \quad (26)$$

В данном случае γ – параметр связи; $\Psi_{1,2}$ – уровни активации каждого из двух несвязанных нефронов, которые определяются соответствующими значениями потока в петлю Генле. В силу наличия характерной длительности распространения сигнала и измеренных расстояний между сетью артериол, типичное значение γ составляет примерно 0.1–0.2 [32].

Рассмотрим теперь дополнительно влияние гемодинамической связи, которую будем описывать с помощью коэффициента ε . Чтобы задать гемодинамическую связь в уравнениях, нужно включить в систему отрезок общей междольковой артерии. После этого общая длительность приносящего кровеносного сосуда будет поделена на следующие участки: участок $\varepsilon < \beta$, являющийся общим для двух взаимодействующих нефронов; участок $(1 - \beta)$, который подвергается воздействию посредством сигнала КГОС; и оставшийся участок $(\beta - \varepsilon)$, для которого сопротивление потока считается постоянным. По сравнению с равновесным сопротивлением отдельных артериол участок общей артерии (по которому перемещается в 2 раза больший поток крови) предположительно имеет вдвое меньшее сопротивление на единицу длины.

Вводя в рассмотрение P_ε – давление в точке ветвления артериол, уравнение непрерывности для потока крови можно записать следующим образом [31]:

$$\frac{P_a - P_\varepsilon}{\varepsilon R_{a0}/2} = \frac{P_\varepsilon - P_{g1}}{R_{a1}} + \frac{P_\varepsilon - P_{g2}}{R_{a2}}, \quad (27)$$

где сопротивление потока, в свою очередь, определяется равенством

$$R_{ai} = (\beta - \varepsilon)R_{a0} + (1 - \beta)\frac{R_{a0}}{r_i^4}, \quad i = 1, 2. \quad (28)$$

Здесь R_{a0} обозначает общее сопротивление потока для каждого из 2-х нефронов в равновесном состоянии; r_1 и r_2 – нормированные радиусы активной части приносящей артериолы для нефрона 1 и нефрона 2, соответственно. Через P_{g1} и P_{g2} обозначены соответствующие гломерулярные давления.

Из-за неявной взаимосвязи между гломерулярным давлением и скоростью фильтрации непосредственное решение системы связанных алгебраических уравнений для модели парных нефронов становится довольно затруднительным. Поэтому мы введем для каждого нефрона гломерулярное давление P_g как новую переменную состояния, которая определяется следующим образом:

$$\frac{dP_{gi}}{dt} = \frac{1}{C_{glo}} \left(\frac{P_\varepsilon - P_{gi}}{R_{ai}} - \frac{P_{gi} - P_v}{R_e} - F_{filt} \right), \quad (29)$$

где $i = 1, 2$. Это означает, что гломерулус рассматривается как эластичная структура, которая характеризуется параметром упругой податливости C_{glo} и вариациями давления, определяемыми дисбалансом между входящим потоком крови $(P_\varepsilon - P_{g,i})/R_{a,i}$, выходящим потоком крови $(P_{g,i} - P_v)/R_e$ и скоростью гломерулярной фильтрации $F_{filt,i}$.

В действительности ожидается, что оба типа взаимодействия присутствуют одновременно и конкурируют между собой. Рис. 10 иллюстрирует, что только электрохимическая или только сильная гемодинамическая связь вызывают синфазную или противофазную синхронизацию, соответственно. Однако их комбинация может приводить к конкуренции между этими режимами и появлению множества сосуществующих решений с разными фазовыми сдвигами.

Реалистичная динамика парных нефронов соответствует диапазону сравнительно больших значений γ при относительно небольших значениях ε (область I на диаграмме рис. 10). Наличие областей бистабильности (выделенных серым цветом) согласуется с результатами, полученными для экспериментальных данных (возможностью реализации режима противофазной синхронизации). С помощью данной модели можно также описать режимы полной и частичной синхронизации, реализуемые в динамике реальных нефронов. Как видно из рис. 11, наблюдается сходство сигналов, полученных экспериментально и в рамках математического моделирования.

Таким образом, результаты математического моделирования эффекта синхронизации колебаний в динамике парных нефронов соответствуют анализу экспериментальных данных. С помощью математического моделирования можно выдвинуть ряд гипотез относительно изменения режима динамики нефронов при гипертонии. Однако модель не позволяет подтвердить данные гипотезы – это можно сделать лишь в рамках дополнительных, более детальных экспериментов. В частности, изме-

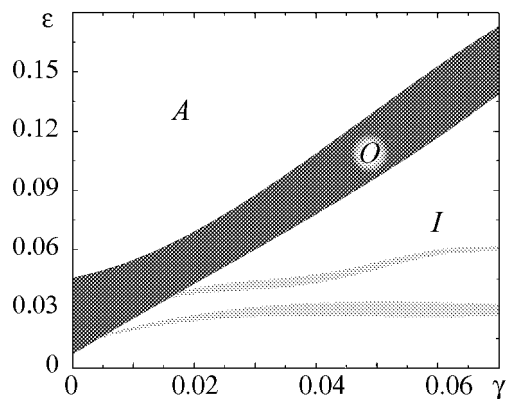


Рис. 10. Упрощенная диаграмма наблюдаемых режимов. I обозначает синфазный режим, A – противофазный, O – область сосуществующих «out-of-phase» режимов. В серой области режимы I и A сосуществуют

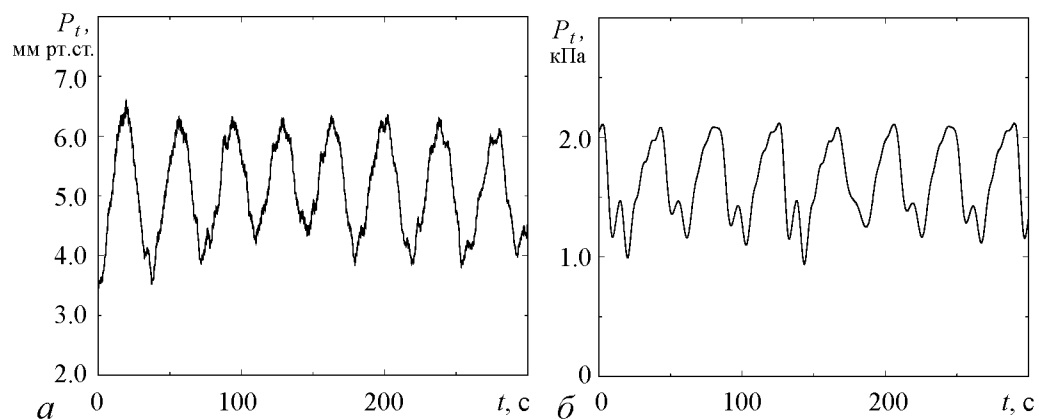


Рис. 11. Примеры сигналов давления фильтрата в канальцах нефронов: *a* – экспериментальные данные, *б* – результаты математического моделирования

нение режима синхронных колебаний при гипертонии может быть вызвано уменьшением уровня активации гладких мышц, приводящим к снижению коэффициента электрохимической связи между нефронами. В свою очередь, это будет приводить к уменьшению длительностей участков захвата частот колебаний, что соответствует экспериментальным наблюдениям (и с помощью модели данный эффект можно проиллюстрировать). Однако нарушения сократительного механизма сосудов могут сопровождаться изменением и режима функционирования отдельного нефрона (с точки зрения математического моделирования – изменениями управляющих параметров), что также способно влиять на характеристики синхронного режима. Более того, отмеченные причины функциональных нарушений могут присутствовать одновременно, еще более усложняя исследования динамики нефронов при развитии гипертонии.

Отметим при этом, что возможный сценарий нарушения синхронного режима, связанный с уменьшением коэффициента связи между взаимодействующими структурными элементами почки, не противоречит ни теоретическим представлениям о динамике нефронов, ни данным экспериментов. Применение методов нелинейной теории колебаний для изучения генеза почечной гипертонии может способствовать появлению нового взгляда на проблему фармакологии данного заболевания, в перспективе совершенствуя лекарственные препараты направленного действия. Безусловно, это требует длительных экспериментальных исследований с привлечением больших коллективов специалистов в области ренальной гипертонии. Но сам факт того, что методы нелинейной теории колебаний могут служить инструментами данного исследования, представляется весьма важным и актуальным.

Заключение

В ходе исследований, проведенных в рамках данной работы, получены следующие основные результаты.

- Выявлены различия в динамике парных нефронов в норме и при гипертонии. Установлено, что взаимодействующие структурные элементы почки нормотензивных крыс чаще всего демонстрируют эффект полной синхронизации, а гипертен-

живных крыс – частичной синхронизации ритмов колебаний. Средняя длительность участков захвата частот в случае нормы составляет примерно 10–12 периодов колебаний, при гипертонии эта длительность уменьшается в 3 раза.

- На основе анализа динамики мгновенных фаз колебательных процессов установлено, что режим синхронизации для медленных ритмов и миогенных колебаний может отличаться – синфазные миогенные колебания парных нефронов могут сопровождаться противофазными медленными колебаниями. Это означает, что эффекты подстройки частот и фаз колебаний для ритмической активности, обусловленной разными механизмами авторегуляции, необходимо анализировать по отдельности.

- В ходе экспериментальных исследований обнаружено, что в динамике взаимодействующих корковых нефронов наиболее типична синфазная синхронизация колебаний (более 90% экспериментальных данных), которая возникает из-за наличия электрохимической связи. Противофазная синхронизация, порождаемая гемодинамической связью, проявляется значительно реже (менее 10% проанализированных взаимодействующих нефронов).

- С помощью модели парных нефронов продемонстрировано наличие синфазных синхронных режимов при электрохимической связи и противофазных – при сильной гемодинамической связи. Выдвинута гипотеза о том, что нарушение синхронизации в динамике нефронов может быть связано с уменьшением коэффициента электрохимической связи между структурными элементами почки. Данная гипотеза не противоречит теоретическим представлениям о динамике нефронов и согласуется с результатами экспериментов.

Авторы выражают искреннюю признательность N.-H. Holstein-Rathlou за предоставленные данные.

Проводимые исследования были поддержаны Министерством образования и науки РФ в рамках ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 годы (государственный контракт П451).

Библиографический список

1. Yip K.-P., Holstein-Rathlou N.-H., Marsh D.J. Chaos in blood flow control in genetic and renovascular hypertensive rats // Am. J. Physiol. Renal Fluid Electrolyte Physiol. 1991. Vol. 261. P. F400.
2. Yip K.-P., Marsh D.J., Holstein-Rathlou N.-H. Low dimensional chaos in renal blood flow control in genetic and experimental hypertension // Physica D. 1995. Vol. 80. P. 95.
3. Holstein-Rathlou N.-H., Yip K.-P., Sosnovtseva O.V., Mosekilde E. Synchronization phenomena in nephron-nephron interaction // Chaos. 2001. Vol. 11. P. 417.
4. Sosnovtseva O.V., Pavlov A.N., Mosekilde E., Holstein-Rathlou N.-H. Bimodal oscillations in nephron autoregulation // Phys. Rev. E. 2002. Vol. 66. P. 061909.
5. Marsh D.J., Sosnovtseva O.V., Pavlov A.N., Yip K.-P., Holstein-Rathlou N.-H. Frequency encoding in renal blood flow regulation // Am. J. Physiol. Regul. Integr. Comp. Physiol. 2005. Vol. 288. P. R1160.
6. Pavlov A.N., Makarov V.A., Mosekilde E., Sosnovtseva O.V. Application of wavelet-

- based tools to study the dynamics of biological processes // Briefings in Bioinformatics. 2006. Vol. 7. P. 375.
7. *Sosnovtseva O.V., Pavlov A.N., Mosekilde E., Yip K.-P., Holstein-Rathlou N.-H., Marsh D.J.* Synchronization among mechanisms of renal autoregulation is reduced in hypertensive rats // *Am. J. Physiol. Renal Physiol.* 2007. Vol. 293. P. F1545.
 8. *Marsh D.J., Sosnovtseva O.V., Mosekilde E., Holstein-Rathlou N.-H.* Vascular coupling induces synchronization, quasiperiodicity, and chaos in a nephron tree // *Chaos.* 2007. Vol. 17. P. 015114.
 9. *Sakai T., Craig D.A., Wexler A.S., Marsh D.J.* Fluid waves in renal tubules // *Biophys. J.* 1986. Vol. 50. P. 805.
 10. *Layton H.E., Pitman E.B., Moore L.C.* Nonlinear filter properties of the thick ascending limb // *Am. J. Physiol. Renal Physiol.* 1997. Vol. 273. P. F625.
 11. *Casellas D., Moore L.C.* Autoregulation and tubuloglomerular feedback in juxtamedullary glomerular arterioles // *Am. J. Physiol. Renal Fluid Electrolyte Physiol.* 1990. Vol. 258. P. F660.
 12. *Gonzalez-Fernandez J.M., Ermentrout G.B.* On the origin and dynamics of the vasomotion of small arteries // *Math. Biosci.* 1994. Vol. 240. P. 127.
 13. *Horowitz A., Menice C.B., Laporte R., Morgan K.G.* Mechanisms of smooth muscle contraction // *Physiol. Rev.* 1996. Vol. 76. P. 967.
 14. *Holstein-Rathlou N.-H., He J., Wagner A.J., Marsh D.J.* Patterns of blood pressure variability in normotensive and hypertensive rats // *Am. J. Physiol. Regul. Integr. Comp. Physiol.* 1995. Vol. 269. P. R1230.
 15. *Holstein-Rathlou N.-H., Leyssac P.P.* TGF-mediated oscillations in the proximal intratubular pressure: differences between spontaneously hypertensive rats and Wistar-Kyoto rats // *Acta Physiol. Scand.* 1986. Vol. 126. P. 333.
 16. *Leyssac P.P., Holstein-Rathlou N.-H.* Tubulo-glomerular feedback response: enhancement in adult spontaneously hypertensive rats and effects of anaesthetics // *Pflügers Arch.* 1989. Vol. 413. P. 267.
 17. *Wang H., Kin S., Ju K., Chon K.H.* A high resolution approach to estimating time-frequency spectra and their amplitudes // *Ann. Biomed. Eng.* 2006. Vol. 34. P. 326.
 18. *Quiroga R., Kraskov A., Kreuz T., Grassberger P.* Performance of different synchronization measures in real data: a case study on electroencephalographic signals // *Phys. Rev. E.* 2002. Vol. 65. P. 041903.
 19. *Huang N.E., Shen Z., Long S.R.* The empirical mode decomposition and the Hilbert spectrum for nonlinear and non-stationary time series analysis // *Proc. R. Soc. Lond. A.* 1998. Vol. 454. P. 903.
 20. *Mallat S.G.* A wavelet tour of signal processing. New York: Academic Press, 1998.
 21. *Addison P.S.* The illustrated wavelet transform handbook: applications in science, engineering, medicine and finance. Philadelphia: IOP Publishing, 2002.
 22. *Grossman A., Morlet J.* Decomposition of Hardy functions into square integrable wavelets of constant shape // *SIAM J. Math. Anal.* 1984. Vol. 15. P. 723.
 23. *Kaiser G.* A friendly guide to wavelets. Boston: Birkhäuser, 1994.
 24. *Torrence C., Compo G.P.* A practical guide to wavelet analysis // *Bull. Amer. Meteor. Soc.* 1998. Vol. 79. P. 61.

25. Павлов А.Н., Сосновцева О.В. Применение двойного вейвлет-анализа для исследования эффектов модуляции в динамике нефронов // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2004. Т. 12, № 6. С. 105.
26. Павлов А.Н., Павлова О.Н., Сосновцева О.В. Взаимодействие ритмов в динамике структурных элементов почек // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2007. Т. 15, № 2. С. 14.
27. Анисимов А.А., Павлова О.Н., Тупицын А.Н., Павлов А.Н. Вейвлет-анализ чирпов // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2008. Т. 16, № 5. С. 3.
28. Короновский А.А., Храмов А.Е. Непрерывный вейвлетный анализ в приложениях к задачам нелинейной динамики. Саратов: ГосУНЦ «Колледж», 2002.
29. Короновский А.А., Храмов А.Е. Непрерывный вейвлетный анализ и его приложения. М.: Физматлит, 2003.
30. Marsh D.J., Sosnovtseva O.V., Chon K.H., Holstein-Rathlou N.-H. Nonlinear interactions in renal blood flow regulation // Am. J. Physiol. Regul. Integr. Comp. Physiol. 2005. Vol. 288. P. R1143.
31. Holstein-Rathlou N.-H., Marsh D.J. A dynamic model of the tubuloglomerular feedback mechanism // Am. J. Physiol. Renal Fluid Electrolyte Physiol. 1990. Vol. 258. P. F1448.
32. Holstein-Rathlou N.-H., Marsh D.J. A dynamic model of renal blood flow autoregulation // Bull. Math. Biol. 1994. Vol. 56. P. 411.
33. Barfred M., Mosekilde E., Holstein-Rathlou N.-H. Bifurcation analysis of nephron pressure and flow regulation // Chaos. 1996. Vol. 6. P. 280.

*Саратовский государственный
университет им. Н.Г. Чернышевского
Датский технический университет*

*Поступила в редакцию 9.12.2009
После доработки 19.07.2010*

DYNAMICS OF SMALL GROUPS OF INTERACTING NEPHRONS IN NORMAL AND RENAL HYPERTENSION STATES

O.N. Pavlova, A.N. Pavlov, O.V. Sosnovtseva

Based on the wavelet-analysis of experimental data, we study in this paper the phenomenon of synchronization of oscillations in the dynamics of small groups of structural units of the kidney (paired nephrons and triplets). Distinctions between synchronous dynamics of interacting nephrons in normal and hypertensive rats are discussed. We show that mean duration of synchronous oscillations is about 3 times less in hypertensive rats. We state that in-phase synchronization is the most typical case in the dynamics of interacting nephrons (more than 90% of experimental data). We compare the results of experimental data analysis and the results of mathematical modeling of the dynamics of interacting units of the kidney.

Keywords: Renal blood-flow autoregulation, nephrons, rhythm dynamics, wavelet-analysis.



Павлова Ольга Николаевна – родилась в Саратове (1985). Окончила физический факультет Саратовского университета по специальности биохимическая физика (2007). В настоящее время работает ассистентом на кафедре радиофизики и нелинейной динамики СГУ. Область научных интересов: динамика биологических систем. Имеет около 20 работ, опубликованных в отечественной и зарубежной печати.

410012 Саратов, ул. Астраханская, 83
Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского
E-mail: pavlova_olya@yahoo.com



Павлов Алексей Николаевич – родился в Саратове (1973). Окончил физический факультет Саратовского университета по специальности радиофизика и электроника (1995). Кандидат физико-математических наук (1998). В настоящее время работает доцентом на кафедре радиофизики и нелинейной динамики СГУ. Область научных интересов: анализ временных рядов. Имеет более 80 работ, опубликованных в отечественной и зарубежной печати.

410012 Саратов, ул. Астраханская, 83
Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского
E-mail: pavlov_lesha@mail.ru



Сосновцева Ольга Владимировна родилась в 1966 году. Окончила физический факультет Саратовского университета (1989). Защитила кандидатскую диссертацию (1996). Неоднократно работала за рубежом: в Германии, Дании и Южной Корее. В настоящее время работает в Датском техническом университете (г. Люнгбю). Научные интересы – явления самоорганизации в ансамблях нелинейных хаотических и стохастических систем; особенности синхронизации хаотической динамики и стохастических процессов, динамика биологических систем. Имеет около 70 публикаций в отечественной и зарубежной печати.

DK-2800, Lyngby, Denmark, Anker Engelundsvej 1, Building 309
Technical University of Denmark
E-mail: olga@fysik.dtu.dk



СИНХРОНИЗАЦИЯ 2-ЦИКЛОВ В СИСТЕМЕ СИММЕТРИЧНО СВЯЗАННЫХ ПОПУЛЯЦИЙ, ЗАПАС–ПОПОЛНЕНИЕ В КОТОРЫХ ОПИСЫВАЕТСЯ ФУНКЦИЕЙ РИКЕРА

М.П. Кулаков, Е.Я. Фрисман

Исследуются системы связанных отображений, построенных на основе модели Рикера и описывающих пространственную динамику неоднородных популяций, представленных двумя связанными группировками особей, между которыми возможно небольшое миграционное взаимодействие. Рассматриваются бифуркационные механизмы синфазной и противофазной синхронизации мультистабильных режимов подобных систем. Для идентификации достигаемых режимов синхронизации вводится количественный показатель синхронизации.

Ключевые слова: Популяция, миграция, система связанных отображений, бифуркация, синхронизация, мультистабильность, бассейн притяжения.

Введение

Для большинства видов животных характерно неравномерное распределение особей по ареалу обитания. Такая неоднородность, будь она вызвана неоднородным распределением трофического (пищевого) ресурса, свойствами ареала (например, неоднородным ландшафтом), сложным типом нелинейной динамики (например, эффектом Олли) или пространственным перераспределением особей по однородному ареалу (для популяций, разные особи которых значительно различаются по своей подвижности), приводит к мозаичности пространственной структуры популяции. Изучению вопросов возникновения, сохранения и количественной динамики такой мозаичной структуры посвящено множество работ. Традиционно динамика подобных структур рассматривается по аналогии с физико-химическими структурами. Как правило, популяция рассматривается как диссипативная, непрерывная (как во времени, так и в пространстве) система, в которой из относительно однородного распределения вследствие мобильности и ограниченного радиуса активности особей образуются конгломераты – скопления особей – и устанавливается

некоторая мозаичность с диффузионной связью между близлежащими скоплениями особей. Вследствие неравновесности системы и перераспределения особей установившаяся мозаичность будет непостоянной как по форме, так и по плотностям скоплений [1].

Зачастую пространственное представление о реальных биологических популяциях формируется на основе достаточно большого числа «точечных» данных о плотностях, отмеченных на определенных учетных территориях, которые по каким-либо критериям рассматриваются как эталонные. При достаточной плотности на учетных территориях можно считать их очагами скоплений особей, а особей, находящихся вне скоплений, считать особями, совершающими сезонное миграционное движение между подобными очагами [2]. В такой ситуации обычно предполагается, что все очаги мозаичности определены и постоянны в пространстве и могут быть представлены как некоторые цепочки (линейные или пространственные) с глобальными связями на основе миграционных потоков [3–12]. Для описания динамики таких систем можно использовать набор логистических отображений, в которых каждый элемент связан с некоторыми другими элементами. Такая связь, независимо от вида отображения, может быть представлена комбинацией двух типов связи: инерциальной и диссипативной. Подобные системы хорошо изучены, обладают богатой феноменологией: здесь выявлены эффекты мультистабильности, синхронизации, хаоса, перемежаемости и др., а также явление кластеризации – образование в процессе развития групп элементов, состояния которых полностью совпадают [3, 8, 12].

С биологической точки зрения вопрос обнаружения, изучения механизмов и количественной идентификации пространственной синхронизации представляется наиболее интересным. Так, две слабо связанные популяции, динамика которых демонстрирует синфазное поведение, могут быть приняты за одну; слабое же изменение параметров связи может привести к возникновению противофазных колебаний и выявить принципиальное различие в динамическом поведении популяций, не отражаясь при этом на динамике их суммарной численности.

1. Уравнения динамики численности двух точечных популяций

Рассмотрим динамику простейшего из возможных случаев, когда имеющаяся пространственная неоднородность привела к формированию двух местообитаний, расселение между которыми возможно только один раз за сезон, что характерно для субпопуляций, сильно разнесенных пространственно. Предположив, что значимыми для развития популяции являются процессы размножения и «зимовки», можно утверждать, что расселение (миграция) возможно либо до периода размножения, либо после него.

Обозначим численность в первом местообитании (первая субпопуляция) в начале n -го сезона размножения через X_n , а во втором местообитании (вторая субпопуляция) – через Y_n . В случае, когда местообитания полностью изолированы и между ними отсутствуют какие-либо миграционные обмены, численность двух этих субпопуляций может быть описана следующими рекуррентными уравнениями:

$$X_{n+1} = f(a_1, X_n), \quad Y_{n+1} = f(a_2, Y_n), \quad (1)$$

где f – некоторая функция воспроизводства, равная сумме числа родившихся с уче-

том младенческой смертности, и выживших особей родительской части популяции; a_1 и a_2 репродуктивные потенциалы соответствующих субпопуляций. При таком задании процесса воспроизводства явно не учитывается возрастная структура и считается, что по истечении одного сезона после размножения особи не различаются по репродуктивным функциям. Подобный сезонный характер процессов воспроизводства наблюдается, например, у ряда насекомых, некоторых видов рыб, большинства видов мелких млекопитающих.

Перейдем теперь к описанию динамики миграционно связанных популяций. Из всех возможных вариантов связи между субпопуляциями рассмотрим миграции, происходящие непосредственно после размножения. Если процессы воспроизводства в местообитаниях определяются уравнениями (1), а доли особей, мигрирующих из местообитаний, равны $m_1(X_n)$ и $m_2(Y_n)$, то динамика численностей субпопуляций может быть описана известным отображением с симметричной диффузионной связью

$$\begin{cases} X_{n+1} = f(a_1, X_n)(1 - m_1(X_n)) + m_2(Y_n)f(a_2, Y_n), \\ Y_{n+1} = f(a_2, Y_n)(1 - m_2(Y_n)) + m_1(X_n)f(a_1, X_n), \end{cases} \quad (2)$$

симметричность в которой означает, что введенная связь не меняет общей численности, то есть сумма численностей в любой период размножения не зависит от доли мигрантов.

Аналогично может быть получена система уравнений динамики субпопуляций в случае, когда миграция происходит перед процессом размножения,

$$\begin{cases} X_{n+1} = f(a_1, X_n(1 - m_1(X_n)) + m_2(Y_n)Y_n), \\ Y_{n+1} = f(a_2, Y_n(1 - m_2(Y_n)) + m_1(X_n)X_n). \end{cases}$$

Замена $\tilde{X}_n = X_n(1 - m_1(X_n)) + Y_n m_2(Y_n)$ и $\tilde{Y}_n = Y_n(1 - m_2(Y_n)) + X_n m_1(X_n)$, которая фактически меняет местами моделируемые фазовые переменные (численность после процессов воспроизводства и численность, наблюдаемую после сезонного расселения), показывает, что эта система тождественна системе (2).

2. Случай постоянной доли мигрантов

В большинстве работ [3, 7, 8, 13–15], так или иначе связанных с изучением системы (2), для описания динамики локальных систем используются однопараметрические отображения (квадратичное Фейгенбаума, кубическое) с областью значений $[0; 1]$ или $[-1; 1]$. Несложно убедиться, что при подобном способе описания связи, если начальная точка лежит в этой области, а коэффициент связи m не отрицателен и не превосходит $m = 1$, то значения динамических переменных и число мигрантов для всех последующих моментов дискретного времени окажутся также лежащими в этой области.

Наиболее изучен случай равенства репродуктивных потенциалов ($a_1 = a_2 = a$) и долей мигрирующих особей ($m_1 = m_2 = m = \text{const}$)

$$\begin{cases} x_{n+1} = f(x_n) + m(f(y_n) - f(x_n)), \\ y_{n+1} = f(y_n) + m(f(x_n) - f(y_n)), \end{cases} \quad (3)$$

демонстрирующий богатую феноменологию – переход к хаосу через бифуркации удвоения периода, эффекты мультистабильности, синхронизации, хаос, перемежаемость и прочее. Для этой системы установлены соотношения подобия на основе законов подобия Фейгенбаума, описаны бифуркационные механизмы синхронизации динамических переменных и др. [7, 8, 13].

Здесь мы рассмотрим особенности динамики системы (3) при допустимых вариациях репродуктивного потенциала a и доли мигрантов m для несимметричного отображения f , основанного на модели запас–пополнение Рикера $X_{n+1} = aX_n e^{-bX_n}$, которое при соответствующей нормировке $x = bX$ сводится к однопараметрическому отображению

$$x_{n+1} = ax_n e^{-x_n}. \quad (4)$$

При $f(x) = axe^{-x}$ система (3) имеет вид

$$\begin{cases} x_{n+1} &= (1-m)ax_n e^{-x_n} + may_n e^{-y_n}, \\ y_{n+1} &= (1-m)ay_n e^{-y_n} + max_n e^{-x_n} \end{cases} \quad (5)$$

и описывает динамику симметрично связанных локальных популяций, воспроизводство которых происходит по модели Рикера. Как и одиночное отображение (4), система (5) имеет единственную нетривиальную неподвижную точку $\bar{x} = \bar{y} = \ln(a) = h$.

Будем в дальнейшем называть синфазными реализациями (синфазным аттрактором) системы (5) асимптотически равные ее динамические состояния (итерации), то есть $x_n = y_n$ при $n \rightarrow \infty$. Соответственно, если динамические состояния асимптотически не равны одновременно, то есть $x_n \neq y_n$ при $n \rightarrow \infty$, будем говорить о несинфазных реализациях (5) (несинфазных аттракторах). Как известно, для систем вида (3) с унимодальной функцией воспроизводства $f(x)$ полностью синфазные ее реализации могут быть описаны одиночным отображением $x_{n+1} = f(x_n)$, а все динамические режимы реализуются на биссектрисе первого координатного угла вокруг нетривиальной неподвижной точки, что очевидно выполняется и для системы (5). Все несинфазные же режимы (5) располагаются симметрично вокруг отрезка $y = 2h - x$, $x \in [0; 2h]$.

Учитывая, что для модели Рикера $f'(h) = 1 - h$, несложно получить характеристическое уравнение системы (5) в окрестности нетривиального стационара

$$\lambda^2 - 2\lambda(1-h)(1-m) - (1-h)^2(1-2m) = 0$$

с корнями $1 - h$ и $(1-h)(1-2m)$. Откуда понятно, что нетривиальная неподвижная точка системы (5) устойчива там же, где и аналогичная точка отображения (4), то есть при $0 < h < 2$, а дальнейшая эволюция синфазных режимов проходит по классическому сценарию перехода к хаосу через удвоение периода.

Численные расчеты показывают, что несинфазные режимы ($x_n \neq y_n$ при $n \rightarrow \infty$) реализуются вне области, определяемой неравенством $|(1-h)(1-2m)| < 1$. Причем на линиях $h = 2(1-m)/(1-2m)$ (при $0 \leq m < 0.5$) и $h = 2m/(2m-1)$ (при $0.5 < m \leq 1$) мультипликатор системы (5) равен (-1) . При переходе параметров через эти линии в системе помимо синфазных могут достигаться различные

несинфазные и противофазные аттракторы, стремление к которым определяется начальной точкой итерирования. Это свойство называют мультистабильностью. Оно заключается в существовании в системе при одном наборе параметров различных динамических режимов – различных аттракторов с разной степенью синхронизации (в частности, циклов разной длины), реализуемых в зависимости от начального состояния системы.

Для определенности далее придерживаемся классической классификации колебаний системы (5) [13]. Циклы, обозначенные N_n – это такие колебательные режимы длины N , которые могут быть реализованы ровно N способами. Друг от друга они отличаются временным сдвигом колебательных реализаций системы (3) (решений) на количество итераций, равное n ($n = 0, 1, 2, \dots, N - 1$). Так, циклы с $n = 0$ соответствуют синфазным колебаниям системы, циклы с $n \neq 0$ – несинфазным.

Известно, что каждый из этих N_n возможных мультистабильных режимов систем (3) и (5) возникает при определенной начальной численности, поэтому в фазовой плоскости можно выделить, по крайней мере, N подмножеств (бассейнов), соответствующих тому или иному аттрактору (если реализуются циклы только длины N). Все эти аттракторы будут различаться между собой реализуемыми на них колебательными режимами, а именно, возникающими на них режимами синхронизации. Для того чтобы отличать один аттрактор от другого, мы предлагаем вычислять для каждого из этих аттракторов количественный показатель, характеризующий достигаемый режим синхронизации. На основе этого показателя синхронизации разработана методика выделения на фазовой плоскости бассейнов аттракторов, соответствующих разным режимам синхронизации.

3. Количественная характеристика синхронизации

Для количественной характеристики и регистрации синхронизации используют различные показатели. Популярны коэффициенты, отражающие стабильность разности фаз колебаний связанных осцилляторов [16–18]. Для системы (3) при квадратичной или кубической функции воспроизводства f вопрос количественного описания синхронизации сводится к вопросу устойчивости полностью синхронного режима $x_n = y_n$, определяемой трансверсальным λ_{\perp} и тангенциальным λ_{\parallel} показателями Ляпунова

$$\lambda_{\perp} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \ln \left| f' \left(\frac{x_n - y_n}{2} \right) \right|,$$

$$\lambda_{\parallel} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \ln \left| f' \left(\frac{x_n - y_n}{2} \right) (1 - 2m) \right|,$$

вычисляемыми для достаточно большого числа временных реализаций на аттракторе (более 10 тысяч), необходимых для получения малой погрешности [3, 12, 15].

Среди всех возможных показателей для нас особый интерес представляют такие показатели, которые позволяют «быстро» оценить меру синхронизации двух связанных осцилляторов по существующей динамике. Так, можно вычислять нормированную разницу между полной и безусловной энтропией, подсчитанной по реализа-

циям любых двух осцилляторов

$$\sigma = \frac{S_x - S_{x|y}}{S_x},$$

где S_x – плотность вероятности, подсчитанная по реализациям x , $S_{x|y}$ – плотность вероятности, подсчитанная по реализациям x_n , при условии, что состояние второго осциллятора равно y [16]. Чтобы избежать утомительных оценок плотности вероятности, можно воспользоваться суммарной ошибкой синхронизации

$$s = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^N |x_i - y_i|,$$

которая стремится к нулю для полностью синхронной траектории или аттрактора [10].

Нормировав эту величину по x_i и вычисляя ее только для $(N - n)$ точек аттрактора, получаем показатель

$$\kappa_x = \frac{1}{N - n} \sum_{i=n}^N \left| \frac{x_i - y_i}{x_i} \right|, \quad (6)$$

который равен нулю для полностью синхронного аттрактора, отличен от нуля для несинфазного аттрактора, близок к нулю в случаях частичной синхронизации. Более того, у двух разных аттракторов с разной степенью синхронизации значения величины (6) будут различны. Также не сложно убедиться, что величина (6) тем больше, чем сложнее устроен несинфазный аттрактор.

Варьируя начальную точку x_0, y_0 , можно получить некоторые области фазовой плоскости, соответствующие различным начальным условиям системы (5), которые приводят к конкретным режимам синхронизации, то есть построить бассейн притяжения аттракторов (рис. 1 и 2). Причем очевидно, что бассейнам синфазных аттракторов будут соответствовать области, в которых $\kappa_x = 0$, а бассейнам несинфазных –

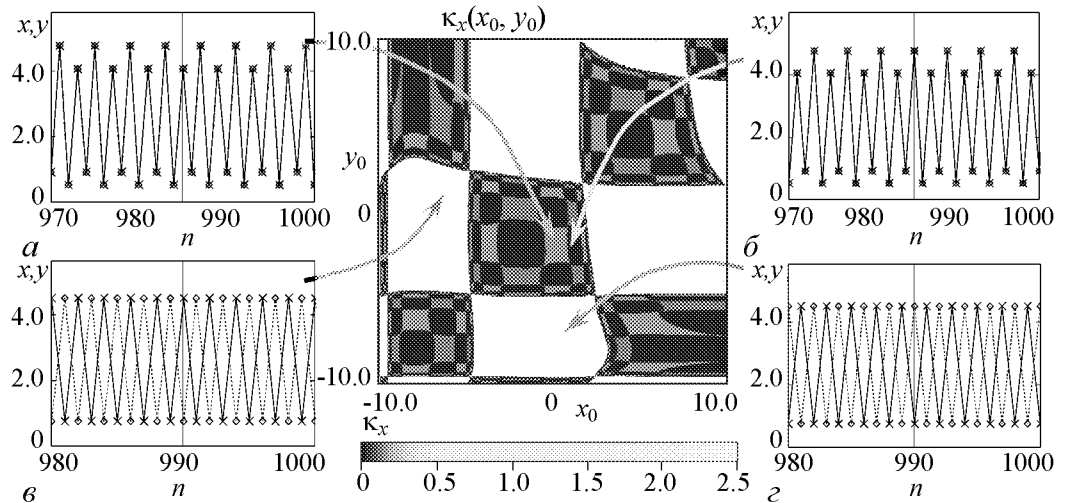


Рис. 1. Линии уровней функции $\kappa_x(x_0, y_0)$ реализаций (5) при $a = 13.0$, $m = 0.025$; соответствующие режимы синхронизации: $a, б$ – синфазные; $в, г$ – противофазные, но в разных фазах

$\kappa_x > 0$. В свою очередь, бассейн несинфазных режимов будет состоять из $(N - 2)$ областей, каждой из которых соответствует свой режим синхронизации. Однако это не гарантирует того, что для двух «близких» аттракторов (со схожими режимами) величины (6) не окажутся равными (с учетом численного округления), поэтому в дальнейшем ограничимся применением показателя синхронизации (6) для количественной идентификации и анализа циклов небольшой длины.

На рис. 1 приведена «карта» уровней величины κ_x в зависимости от начальной точки итерирования системы (5). Темным участкам соответствуют области фазового пространства, из которых траектории системы (5) всегда приходят к синфазному режиму, а белым участкам – области, траектории из которых приходят к несинфазному режиму. На рис. 1 выделены два принципиально разных колебательных состояния: синфазный 4-цикл (4_0) и противофазный 2-цикл (2_1); так же ярко выделяются те же циклы, но с иной фазой колебания, полученные одновременным сдвигом итераций в обоих осцилляторах на одну итерацию для 2-цикла и одну, две и три итерации для 4-цикла. Причем для последних оказалось, что величины κ_x будут незначительно отличаться друг от друга. Подобное свойство величины (6) происходит за счет того, что при ее вычислении используются точки как аттрактора, так и предшествующей ему траектории, которые будут немного иными для аттракторов с разными фазами, так как величины N и n фиксируются для всей фазовой плоскости при получении среза (6). Различие фаз синфазных режимов на рис. 1 отражается в небольшом различии цветов в синфазном бассейне.

На рис. 2 приведены некоторые бассейны притяжений, иллюстрирующие трансформацию бассейна притяжения полностью синфазного режима. На рис. 2, *а, б* свет-

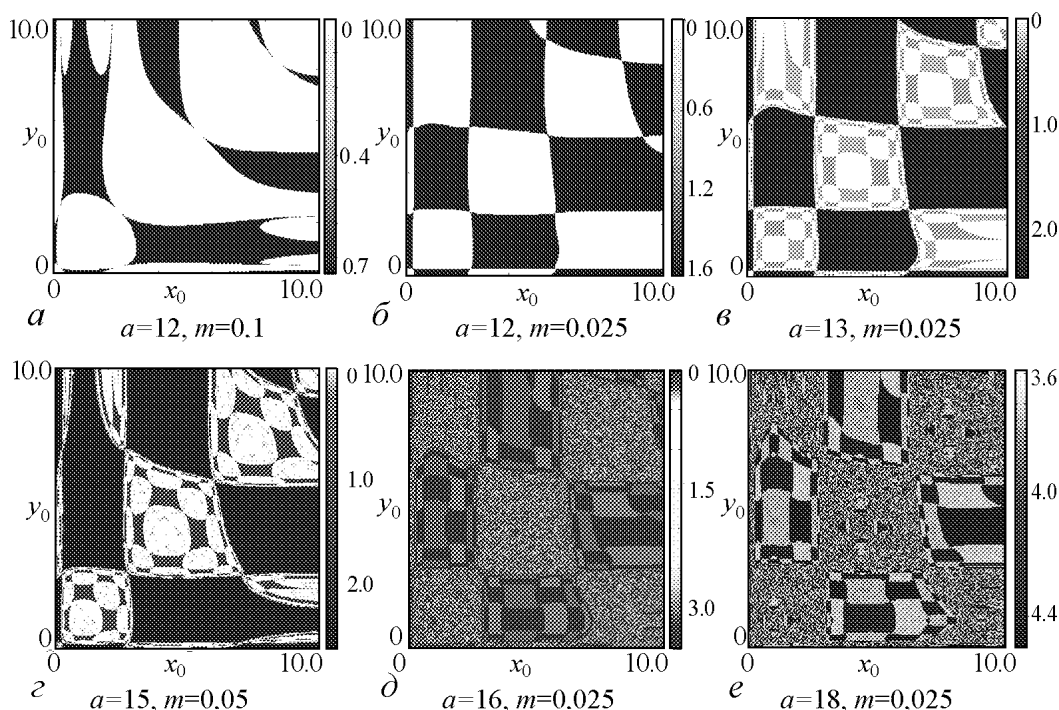


Рис. 2. Трансформация бассейнов притяжений аттракторов

лые участки, симметричные биссектрисе первого координатного угла, соответствуют бассейну синфазных колебаний 2_0 , черные – полностью противофазных – 2_1 . После второй бифуркации синфазного 2_0 -цикла, его разрушения и формирования устойчивого 4_0 -цикла, в системе (5) постепенно формируются сложно организованная иерархия циклов длины 4 и 2 разных фаз, отмеченных оттенками серого. Это отражается в постепенном дроблении синфазного бассейна, сначала как показано на рис. 2, в, а затем, при последующем удвоении периода и формировании 8_0 -цикла, как на рис. 2, г. Дальнейшее изменение мультистабильных состояний и усложнение бассейнов притяжений происходит после разрушения противофазного цикла 2_1 , формирования квазипериодической динамики и ее последующей эволюции до несинфазных циклов разных длин, как показано на рис. 2, д. На последнем рисунке приведен случай полностью хаотической динамики, в котором полностью отсутствуют регулярные синфазные режимы, однако фиксируется сложная фрактальная структура иерархии несинфазных хаотических режимов динамики системы (5).

Используя введенный показатель синхронизации, рассмотрим некоторые бифуркационные механизмы формирования и разрушения синфазной динамики.

4. Особенности формирования синфазных и противофазных 2-циклов

Очевидно, что эволюция аттракторов системы (5) качественно подобна эволюции системы (3), основанной на квадратичной зависимости и описанной в цитируемых работах, поэтому не будем подробно на ней останавливаться. Наиболее интересными для нас являются механизмы формирования синфазных и противофазных циклических режимов. Рассмотрим их на примере циклов длины 2.

Для определения элементов 2-цикла дважды применим отображения (3) для точки x_n и y_n

$$\begin{cases} x_{n+2} = F(F(x_n, y_n), G(x_n, y_n)) = F_2(x_n, y_n), \\ y_{n+2} = G(F(x_n, y_n), G(x_n, y_n)) = G_2(x_n, y_n), \end{cases} \quad (7)$$

где $F(x, y) = f(x) + m(f(y) - f(x))$, $G(x, y) = f(y) + m(f(x) - f(y))$. Тогда элементы 2-цикла $x = x_{n+2} = x_n$ и $y = y_{n+2} = y_n$ можно вычислить из системы

$$\begin{cases} y = \frac{2m-1}{m} f[f(x) + m(f(y) - f(x))] - \frac{m-1}{m} x, \\ x = \frac{2m-1}{m} f[f(y) + m(f(x) - f(y))] - \frac{m-1}{m} y. \end{cases} \quad (8)$$

Решая численно каждое из уравнений (8) относительно одной из переменных (например, перебирая x , находим соответствующие значения y , удовлетворяющие первому уравнению, и симметричные пары переменных, удовлетворяющие второму уравнению), получаем две кривые на фазовой плоскости, симметричные относительно биссектрисы первого координатного угла, пересечением которых являются искомые элементы 2-цикла (рис. 3).

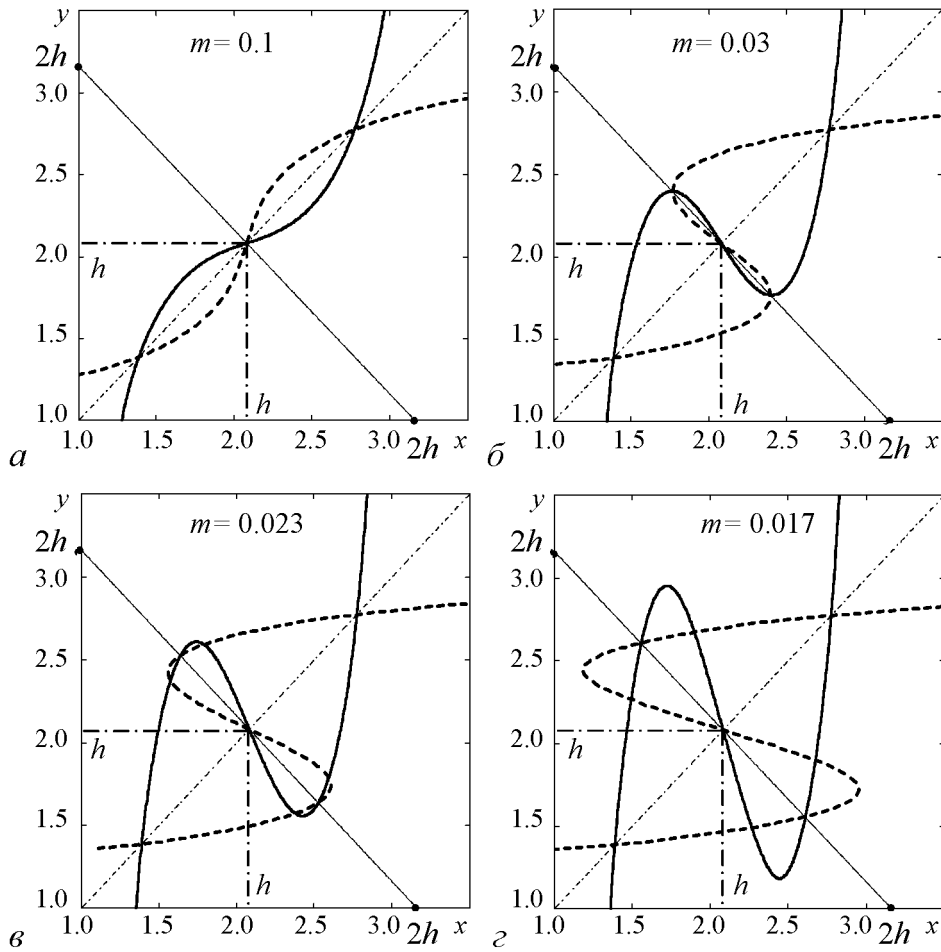


Рис. 3. Эволюция ненулевых решений (8) при уменьшении коэффициента связи m ; $f(x) = axe^{-x}$, $a = 8$; элементы 2-цикла соответствуют точкам пересечения кривых

С другой стороны, решение системы, соответствующее полностью противофазному циклу 2_1 , удовлетворяет соотношениям $x_n = y_{n+1}$, $y_n = x_{n+1}$ и $x_{n+2} = x_n = x$, $y_{n+2} = y_n = y$, откуда с учетом (3) и (7) элементы противофазного цикла можно быстро найти из системы

$$\begin{cases} x = \frac{1-2m}{1-m}f(y) + \frac{m}{1-m}y, \\ y = \frac{1-2m}{1-m}f(x) + \frac{m}{1-m}x. \end{cases} \quad (9)$$

Легко проверить, что системе (9) будут удовлетворять тривиальное $x = y = 0$ и нетривиальное равновесие $x = y = h$, а также значения x и y , соответствующие как синфазным, так и несинфазным элементам цикла 2 системы (3), а при $f(x) = axe^{-x}$ – и системы (5). Несложно показать, что (8) и (9) имеют в качестве своего решения несинфазные элементы систем (3) и (5) тогда и только тогда, когда $h > 2(1-m)/(1-2m)$ ($m < 0.5$), то есть вне области устойчивости.

Проследим, как происходит изменение решений (8) и (9) при $f(x) = axe^{-x}$. В случае $a < e^2$, то есть при устойчивом поведении системы кривые, получае-

мые из (8) и (9), пересекаются в точках, соответствующих стационарным решениям $x = y = 0$ и $x = y = h$. С ростом репродуктивного потенциала a спектр решений (8) существенно расширяется. На рис. 3 изображены кривые, полученные из (8) после исключения нулевого решения.

В результате первой бифуркации (переход через $h = 2$) в спектре решений (8) имеются три ненулевых точки – ставшая неустойчивой неподвижная точка $\bar{x} = \bar{y} = \ln(a) = h$ и элементы устойчивого синфазного 2-цикла (рис. 3, *a*). При уменьшении коэффициента связи m , по мере того как параметры попадают в область $h > 2(1 - m)/(1 - 2m)$, в множестве корней (8) появляется еще пара решений, соответствующая элементам неустойчивого противофазного цикла длины два (рис. 3, *б*). При дальнейшем уменьшении параметра m , этот 2₁-цикл становится устойчивым. Бифуркация сопровождается появлением еще двух пар решений (рис. 3, *в-г*), соответствующих неустойчивым несинфазным 2-циклам с частичной противофазной синхронизацией (без захвата амплитуды). Появление этих циклов приводит к возможности противофазной синхронизации 2₁, как показано на рис. 4, где помимо кривых, полученных из (8) и (9), показана траектория системы (5) (рис. 4, *a, в*) и увеличенный фрагмент фазовой плоскости (рис. 4, *б-г*), включающий элемент цикла 2₁ и неподвижную точку. Рис. 4 иллюстрирует процесс синхронизации и противофазной синхронизации динамики системы (5) соответственно случаям, когда цикл 2₁ существует, но неустойчив (см. рис. 4, *a-б*), и когда он становится устойчивым (см. рис. 4, *в-г*).

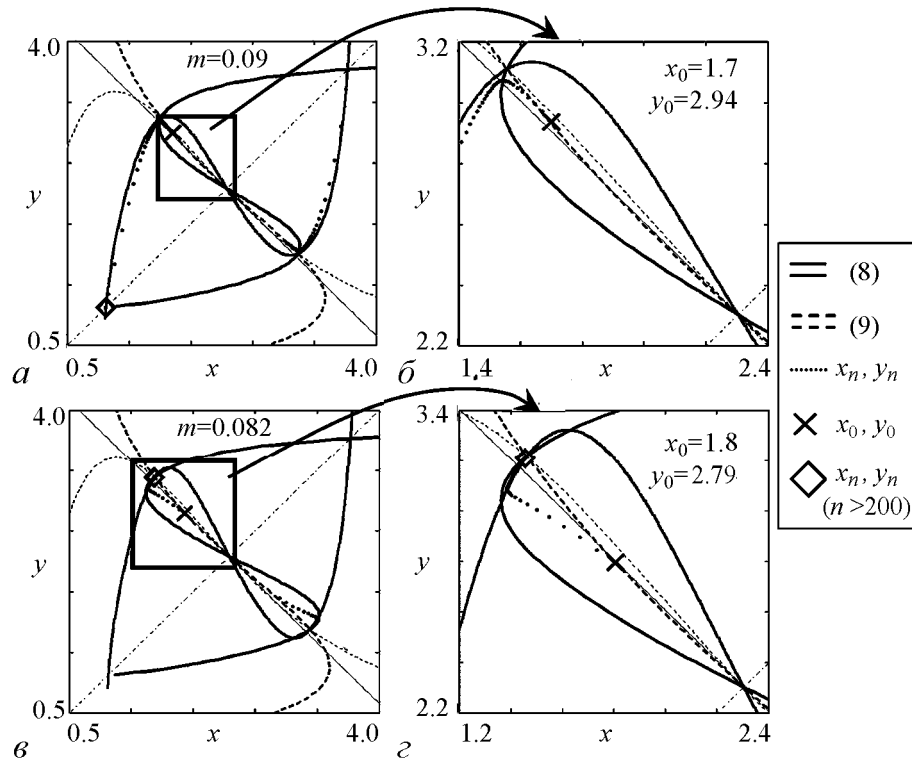


Рис. 4. Формирование устойчивого противофазного 2-цикла (2₁), при $a = 10$: *a, б* – неустойчивый цикл 2₁; *в, г* – устойчивый цикл 2₁

Для определения параметрических границ устойчивости 2-циклов достаточно рассмотреть устойчивость противофазных режимов 2_1 , так как эволюция синфазных состояний для системы (5) аналогична сценарию переходу к хаосу в одиночном уравнении (4).

Уравнения $1 + S(a, m) + J(a, m) = 0$, $1 - S(a, m) + J(a, m) = 0$ и $J(a, m) = 1$, построенные на элементах 2-цикла (синфазных и противофазных) системы (5), будут соответствовать бифуркациям их удвоения, седло-узловой бифуркации и бифуркации рождения тора, при которых мультипликаторы системы (7) соответственно равны $\lambda^* = -1$, $\lambda^* = +1$ и комплексно-сопряженным $\lambda^* = a + ib$ ($|\lambda^*| = 1$). Коэффициенты S и J характеристического полинома $(\lambda^*)^2 - S\lambda^* + J$ определяются как след и детерминант якобиана отображения (7)

$$S = \left[\frac{\partial F_2}{\partial x} + \frac{\partial G_2}{\partial y} \right]_{x^*, y^*} \quad \text{и} \quad J = \left[\frac{\partial F_2}{\partial x} \frac{\partial G_2}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial y} \frac{\partial G_2}{\partial x} \right]_{x^*, y^*},$$

вычисленные для каждого элемента (x^*, y^*) исследуемого 2-цикла. Сами же значения динамических переменных, соответствующих 2-циклу, могут быть найдены численно как решения системы (8) или (9), а также могут быть получены в пределе прямым итерированием исходных уравнений (5).

Путем совмещения определенных таким образом границ устойчивости циклов 2_0 и 2_1 с картой динамических режимов, использованной для идентификации других циклов, была получена диаграмма существования и качественных переходов некоторых мультистабильных состояний системы (5), изображенная на рис. 5, а. Она представляет собой многолистную поверхность в пространстве параметров, где каждому листу соответствует свой режим синхронизации. На диаграмме отмечены также значения мультипликаторов λ^* на границах областей устойчивости цикла 2_1 . При построении карты динамических режимов, каждой паре (a, m) параметрической плоскости задавалась начальная численность x_0, y_0 , принадлежащая бассейну несинфазных режимов (если он существует). Для простоты начальная точка выбиралась на отрезке прямой $y = 2h - x$ ($x \in [0; 2h]$) таким образом, чтобы величина k_x была больше наперед заданного малого ε (чтобы исключить бассейны с частичной синхронизацией).

Для большей наглядности на рис. 5 приведены бифуркационные диаграммы предельных режимов системы (5), полученные при движении одного из параметров по противофазным листам области существования мультистабильных режимов. Наблюдаемые разрывы и скачки предельных состояний на этих диаграммах соответствуют смене одного режима синхронизации на другой. Например, первый разрыв в области существования 2-цикла при движении в сторону роста репродуктивного потенциала a , при фиксированном m , соответствует пересечению границы устойчивости противофазных циклов длины 2, для которой $\lambda^* = +1$, и появлению в спектре (8) и (9) решений, соответствующих устойчивым несинфазным циклам длины 2, несимметричных к полностью синфазному циклу той же длины систем (3) и (5). Далее, после пересечения границы $|\lambda^*| = 1$ динамический режим определяется областью, обозначенной Q и ограниченной двумя противофазными предельными кривыми, сформировавшимися вокруг 2_1 -цикла. Выход из этой области после пересечения

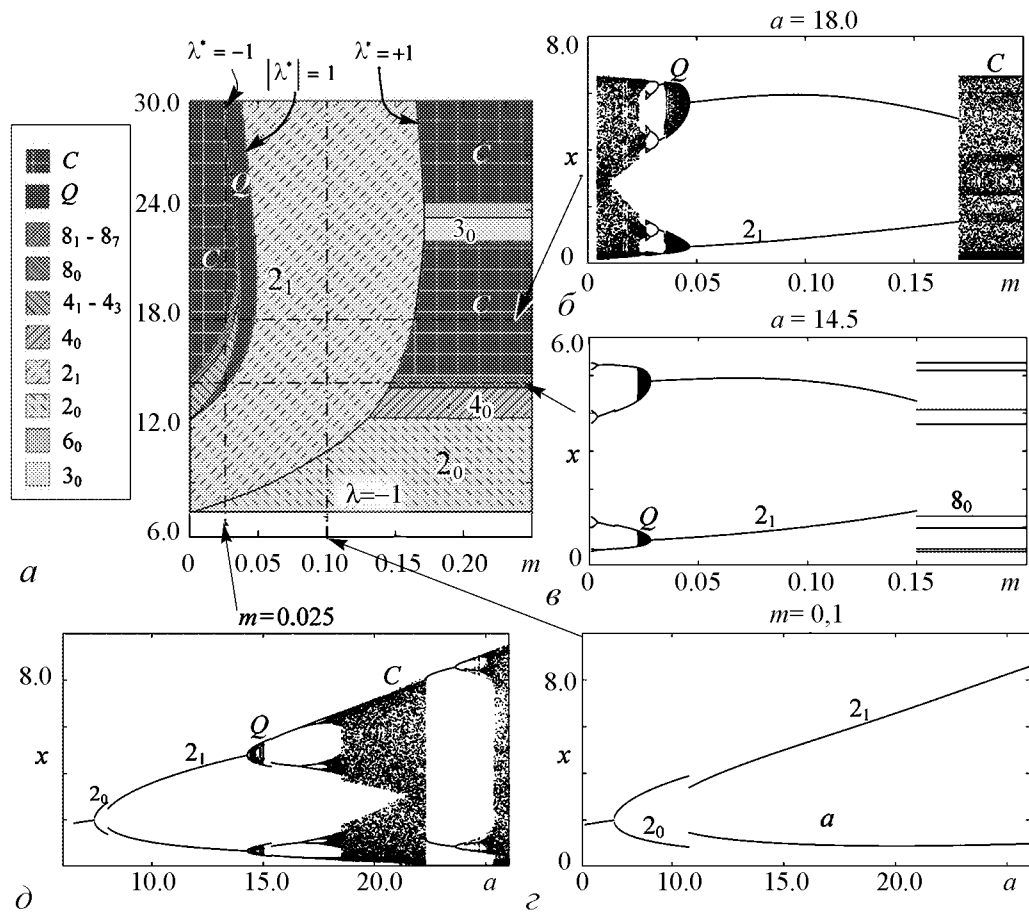


Рис. 5. *a* – Области существования синфазных и несинфазных циклов в фазовой плоскости; *b–d* – бифуркационные диаграммы смены режимов системы (3), наблюдаемых при изменении параметров и переходах через границы существования несинфазных циклов

$\lambda^* = -1$ сопровождается рождением трех типов противофазных циклов длины 4 (4_1 , 4_2 , 4_3) или синфазного 4_0 цикла (рис. 5, *d*).

Особенности численного алгоритма нахождения бассейнов противофазных режимов и их сильно раздробленный характер при больших a , а также отсутствие механизма точной идентификации противофазных режимов приводят к тому, что движение по противофазным листам сопровождается частыми «перескоками» с одного листа синхронизации на другой. Подобные разрывы можно наблюдать при движении в направлении изменения коэффициента связи m . Так, с уменьшением m при пересечении границы, соответствующей $\lambda^* = +1$, устойчивый 2_1 -цикл формируется из хаотической динамики (из области, обозначенной C на рис. 5, *a–b*) или из синфазного 8-цикла (рис. 5, *в*).

Рассмотрим теперь некоторые особенности формирования циклов 2_0 и 2_1 . На рис. 6 показано взаимное расположение бассейнов притяжений, кривых (8) и траектории системы (5). Серым цветом обозначен бассейн синфазных синхронных режимов, белым – противофазных. После второй бифуркации в параметрической подобласти $h > 2(1 - m)/(1 - 2m)$ (при $m < 0.5$) устанавливается один из режимов синхронизации: полностью синфазный или противофазный 2-цикл. Прежде чем достигнуть одного из этих возможных устойчивых циклических состояний, траектория

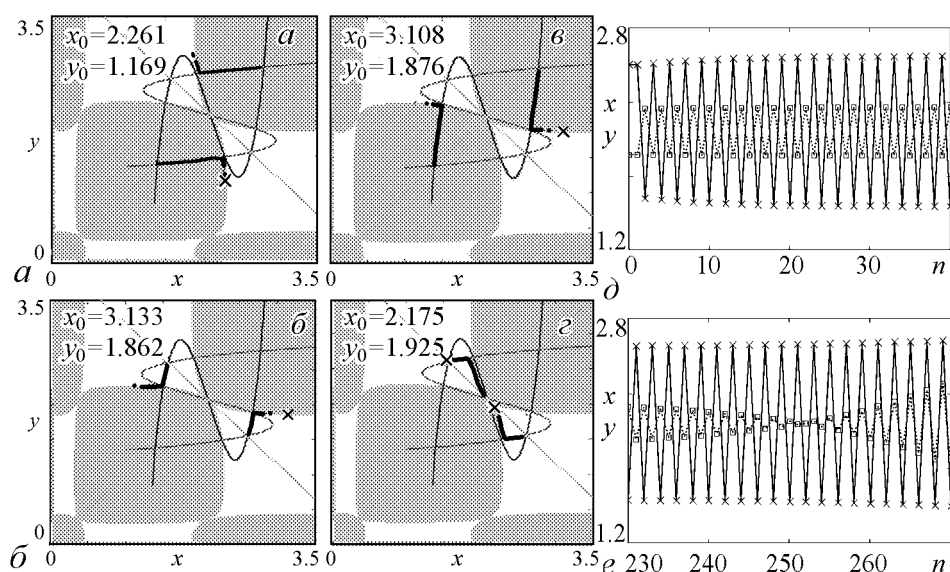


Рис. 6. *a-e* – Фазовая плоскость, фазовые кривые и бассейны притяжений системы (5) при $a = 8.0$, $m = 0.017294$; достижение синфазного (*a, б*) и противофазного (*б, з*) режимов. Динамика (5) при $x_0 = 2.6$, $y_0 = 1.9$ до неустойчивой точки (*д*) и вблизи неустойчивой точки (*з*)

системы может проходить в окрестности неустойчивой точки (состояния с частичной синхронизацией), причем часть траектории до этой точки, как и сама эта точка, лежит на границе двух бассейнов синхронизации.

На рис. 6 показаны два варианта достижения синхронного и противофазного режима синхронизации при движении траектории вблизи неустойчивой пары точек. При таком расположении траектории, вернее, вследствие близости начального состояния к границе бассейна, процесс синхронизации оказывается длительным. В окрестности неустойчивой точки происходит выравнивание фаз колебаний двух переменных и один из осцилляторов на три итерации меняет характер своей динамики с периодического на монотонный, что отражается на временных реализациях, показанных на рис. 6, *д, е*.

Детальный анализ областей нерегулярной динамики, отмеченных на рис. 5 (*C* и *Q*), показал существование в них сложно организованных подобластей циклов конечной длины – окон периодичности (рис. 7, *а, б*): несинфазных, представленных вытянутыми вертикальными полосами сужающимися книзу («ласточки») в области *C* и *Q*, и синфазных, представленных горизонтальными полосами разной высоты («языки») в области *C*. На рис. 7 цифрами с индексом ноль отмечены синфазные циклы соответствующей длины, для несинфазных режимов индексы опущены. На рис. 7, *б*, приведен в увеличенном масштабе участок параметрической плоскости, на котором детализированы окна периодичности в области квазипериодической динамики.

Для более наглядного представления о выделенных областях приведены бассейны притяжений аттракторов (рис. 7, *в-з*). Области чисто хаотической динамики соответствует бассейн, содержащий нормально распределенный случайный набор точечных областей, по форме напоминающий белый шум (см. рис. 7, *з*). В области квазипериодической динамики зафиксирована градиентная структура бассейнов вдоль прямой $y = 2h - x$ (см. рис. 7, *ж*). Среди бассейнов циклов конечной длины выделяется бассейн, соответствующий области, в которой реализуются только

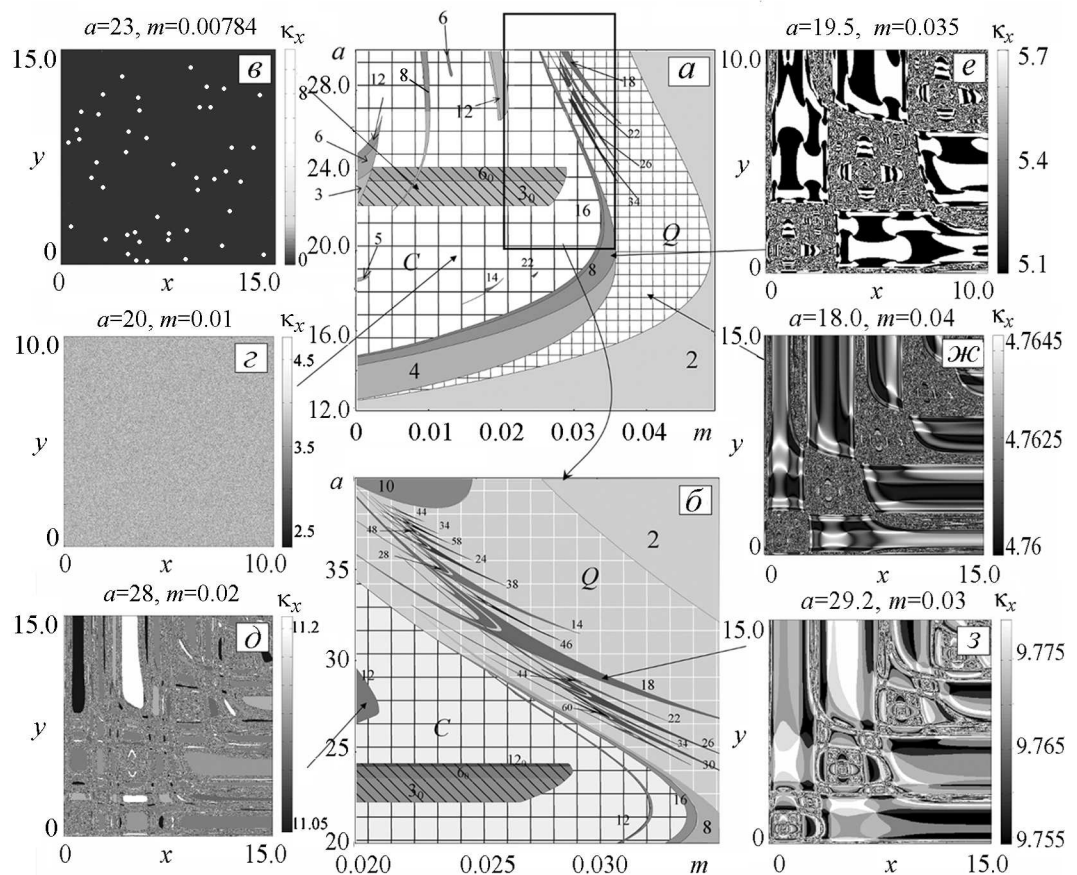


Рис. 7. *a* – Карта динамических режимов несинфазных режимов системы (3) (опущены индексы для несинфазных циклов), *б* – увеличенный фрагмент параметрической плоскости и *в-з* – бассейны притяжения этих режимов

синфазные 3-, 6-, 12-циклы, представляющий собой черный квадрат с редкими точками, для которых показатель синхронизации K_x из-за ошибок округления случайно отличен от нуля (см. рис. 7, *в*). Причем данные синфазные циклы существуют при любом коэффициенте связи m , за исключением, может быть, области Q , где при тех же значениях репродуктивного потенциала, помимо всего, существуют несинфазные циклы конечной длины (см. рис. 7, *е-з*) со сложно устроенными бассейнами. Исключением также может быть случай очень малого m ($m < 0.01$), когда фиксируются несинфазные 3-, 6-, 12-циклы (см. рис. 7, *д*).

Заключение

Итак, в ходе данного исследования было показано, что система симметрично связанных популяций, динамика каждой из которых локально описывается логистическим отображением Рикера, обладает сложно устроенной иерархией мультистабильных состояний, особенно при малом коэффициенте связи. Для количественной идентификации мультистабильных состояний предложен показатель синхронизации, на основе которого на фазовой плоскости локализованы бассейны притяжений некоторых характерных аттракторов.

Вычисляемый показатель имеет различные значения для циклов длины N , изменения переменных в которых различаются лишь начальной фазой. Это позволяет отличать друг от друга не только N их видов, различающихся временным сдвигом динамических переменных относительно друг друга, но плюс еще N их разных фаз, получаемых одновременным сдвигом по времени от начальной точки. Интересно заметить, что фиксированное число временных реализаций, по которым вычисляется этот показатель, позволяет успешно отличать друг от друга синфазные циклы разных фаз.

На основе предложенного количественного показателя синхронизации колебаний удалось локализовать бассейны притяжений на фазовой плоскости и выделить листы мультистабильных состояний. Было показано, что вследствие несимметричности отображения Рикера, переход с одного листа синхронизации на другой сопровождается значительной перестройкой как характера предельной динамики, так и предшествующей ей траектории.

Несимметричный характер модели Рикера с введенной симметричной миграцией приводит к тому, что противофазной синхронизации циклов длины 2 предшествуют три бифуркации. Первая соответствует потере устойчивости ненулевой неподвижной точки и появлению устойчивого синфазного 2-цикла. При второй наблюдается «рождение» вокруг неустойчивой неподвижной точки неустойчивого противофазного 2-цикла. Третья соответствует появлению вокруг неустойчивого противофазного 2-цикла двух пар неустойчивых циклов с частичной синхронизацией и переходу противофазного цикла в устойчивое состояние. Появление последних двух неустойчивых режимов соответствует первому дроблению бассейна притяжений синфазных состояний.

Показано, что при движении траектории вблизи границ бассейнов притяжений процесс синхронизации, оказываясь достаточно длительным во времени, сопровождается эффектами перемежаемости и временной синхронизацией колебаний. На границах бассейнов притяжений 2-циклов при установлении синфазного или противофазного режима происходит выравнивание фаз колебаний, а траектория на фазовой плоскости резко меняет свое направление.

Детальный анализ динамических режимов на параметрической плоскости показал, что помимо ветвящейся структуры листов мультистабильных состояний – явления, типичного для подобных систем, – области нерегулярной динамики характеризуются наличием «окон периодичности», в которых возможно появление как синфазных, так и несинфазных циклов, бассейны которых имеют разнообразную форму.

Описанные бассейны притяжений имеют зачастую сильно раздробленный и даже фрактальный характер. Это указывает на то, что пространственная синхронизация в большой степени оказывается достаточно случайным событием. Малые флуктуации популяционных параметров или долей мигрантов могут быстро изменить форму бассейнов и вызвать перескок популяционной динамики с одного листа синхронизации на другой.

Исследования проведены при финансовой поддержке РФФИ (проект №09-04-00146-а) и конкурсных проектов ДВО РАН (проекты №09-1-П15-01, №09-1-ОБН-12).

Библиографический список

1. Свирижев Ю.М. Нелинейные волны, диссипативные структуры и катастрофы в экологии. М.: Наука, 1987. 368 с.
2. Кисинг Ф., Остфельд Р. Связи популяционной динамики и расселения мелких млекопитающих с изменением сообществ в мозаичной среде: современное состояние и перспективы // Сибирский экологический журнал. 1999. № 1. С. 15.
3. Kaneko K. Clustering, coding, switching, hierarchical, ordering, and control in network of chaotic elements // Physica D. 1990. Vol. 41, № 2. P. 137.
4. Фрисман Е.Я. О механизме сохранения неравномерности в пространственном распределении особей // Математическое моделирование в экологии. 1979. С. 145.
5. Frisman E.Ya. Differences in densities of individuals in populations with uniform ranges // Ecological Modelling. 1980. Vol. 8. P. 345.
6. Фрисман Е.Я. Первичная генетическая дивергенция (теоретический анализ и моделирование). Владивосток: ИАПУ, ДВНЦ АН СССР, 1986. 160 с.
7. Кузнецов С.П. Универсальность и подобие связанных систем Фейгенбаума // Изв. вузов. Радиофизика. 1985. Т. 27, № 8. С. 991.
8. Кузнецов С.П. Переход от симметричного к несимметричному режиму хаотической динамики в системе диссипативно связанных рекуррентных отображений // Изв. вузов. Радиофизика. 1989. Т. 32. № 1. С. 49.
9. de Castro Manuela L., Silva Jacques A.L., Justo Dagoberto A.R. Stability in an age-structured metapopulation model // J. Math. Biol. 2006. № 52. P. 183.
10. Silva Jacques A.L., Giordani Flavia T. Density-dependent migration and synchronism in metapopulations // Bulletin of Mathematical Biology. 2006. № 68. P. 451.
11. Wysham Derin B., Hastings Alan. Sudden shifts in ecological systems: Intermittency and transients in the coupled Ricker population model // Bulletin of Mathematical Biology. 2008. № 70. P. 1013.
12. Omelchenko I., Maistrenko Y., Mosekilde E. Synchronization in ensembles of coupled maps with a major element // Discrete Dynamics in Nature and Society. 2005. № 3. P. 239.
13. Безручко Б.П., Прохоров М.Д., Селезнев Е.П. Виды колебаний, мультистабильность и бассейны притяжений аттракторов симметрично связанных систем с удвоением периода // Изв. вузов. ПНД. 2002. Т. 10. № 10. С. 47.
14. Астахов В.В., Шабунин А.В., Стальмахов П.А. Противофазная синхронизация и формирование мультистабильности в симметрично связанных бистабильных системах // Изв. вузов. ПНД. 2006. Т. 14. № 6. P. 112.
15. Астахов В.В., Шабунин А.В., Стальмахов П.А. Бифуркационные механизмы разрушения противофазной синхронизации хаоса в связанных системах с дискретным временем // Изв. вузов. ПНД. 2006. Т. 14. № 6. С. 100.
16. Шабунин А.В., Демидов В.В., Астахов В.В., Анищенко В.С. Количество информации как мера синхронизации хаоса // Письма в ЖТФ. 2001. Т. 27, вып. 11. С. 78.
17. Kreuz T., Mormann F., Andrzejak R., Kraskov A., Lehnertz K., Grassberger P. Measuring synchronization in coupled model systems: A comparison of different approaches // Physica D. 2007. Vol. 225. P. 29.

18. Смирнов Д.А., Сидак Е.В., Безручко Б.П. Статистические свойства оценки коэффициента фазовой синхронизации // Изв. вузов. ПНД. 2008. Т. 16. № 2. С 111.

*Институт комплексного анализа
региональных проблем ДВО РАН*

Поступила в редакцию 2.04.2010

**SYNCHRONIZING THE PERIOD-2 CYCLE IN THE SYSTEM
OF SYMMETRICAL COUPLED POPULATIONS
WITH STOCK-RECRUITMENT BASED
ON THE RICKER POPULATION MODEL**

M.P. Kulakov, E.Ya. Frisman

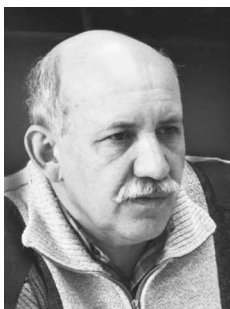
We investigated coupled map lattices based on the Ricker model that describes the spatial dynamics of heterogeneous populations represented by two connected groups of individuals with a migration interaction between them. Bifurcation mechanisms in-phase and antiphase synchronization of multistability regimes were considered in such systems. To identify a synchronization mode we introduced the quantitative measure of synchronization.

Keywords: Population dynamics, migration, coupled map lattices, bifurcation, synchronization, multistability, basin of attraction.



Кулаков Матвей Павлович – родился в 1982 году, окончил факультет математики и информатики в Биробиджанском государственном педагогическом институте (ныне Дальневосточная государственная социально-гуманитарная академия). Работает младшим научным сотрудником в лаборатории математического моделирования динамики региональных систем ИКАРП ДВО РАН. Основные научные интересы сосредоточены в области математического моделирования экологических систем, нелинейной динамики, синхронизации, теории колебаний.

679016 Еврейская автономная область, Биробиджан, ул. Шолом-Алейхема, 4
Институт комплексного анализа региональных проблем ДВО РАН
E-mail: k_matvey@mail.ru



Фрисман Ефим Яковлевич – родился в 1948 году в Сталинабаде (ныне Душанбе), окончил Новосибирский государственный университет в 1971 году. После окончания НГУ работает в Институте автоматизации и процессов управления ДВО РАН. С 1988 года зав. лабораторией математического моделирования экологических систем ИАПУ ДВО РАН. С 2002 года – директор Института комплексного анализа региональных проблем ДВО РАН (Биробиджан). Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата биологических наук (1982) в Институте цитологии и генетики СО РАН (Новосибирск) и доктора биологических наук (1989) в Институте биофизики ДВО РАН (Красноярск) в области математической теории эволюции. Автор 4-х монографий (две вышли в издательстве «Наука» и две – в ДВО АН СССР). Опубликовал более 120 научных работ по общим вопросам математического моделирования и по конкретным моделям экологических и популяционных систем. Соросовский профессор.

679016 Еврейская автономная область, Биробиджан, ул. Шолом-Алейхема, 4
Институт комплексного анализа региональных проблем ДВО РАН
E-mail: frisman@mail.ru



СТОХАСТИЧЕСКАЯ ЧУВСТВИТЕЛЬНОСТЬ ПРЕДЕЛЬНЫХ ЦИКЛОВ МОДЕЛИ «ХИЩНИК – ДВЕ ЖЕРТВЫ»

И.А. Башкирцева, Л.В. Карпенко, Л.Б. Ряшко

В работе рассматривается модель популяционной динамики «хищник – две жертвы». Исследуется детерминированная устойчивость предельных циклов этой трехмерной модели в зоне бифуркаций удвоения периода при переходе от порядка к хаосу. Стохастическая чувствительность циклов к аддитивным и параметрическим случайным возмущениям анализируется с помощью специально конструируемой функции стохастической чувствительности. Демонстрируются возможности функции чувствительности в описании тонких эффектов стохастических воздействий. Показан рост стохастической чувствительности циклов по мере удвоения периода при переходе от порядка к хаосу. Установлена универсальность индекса роста чувствительности.

Ключевые слова: Популяционная динамика, предельный цикл, удвоение периода, стохастическая чувствительность.

Введение

Математическая теория бифуркаций нелинейных динамических систем в настоящее время служит теоретической основой исследований качественных изменений в поведении биологических сообществ [1–5]. Периодические колебания, наблюдаемые в живых системах, могут определяться не только внешними воздействиями, но и внутренними свойствами самой системы. Даже простейшая модель взаимодействия популяций хищника и жертвы, задаваемая классическим уравнением Лотки–Вольтерры, демонстрирует незатухающие колебания численности животных. В литературе описан и детально исследован целый ряд двумерных моделей популяционной динамики [1, 3, 6, 7], в которых при изменении параметра равновесие теряет устойчивость, и в системе появляется предельный цикл.

В настоящее время значительный интерес исследователей вызывают трехмерные модели популяционной динамики [8–10], где кроме регулярных аттракторов – точек покоя (стационарные режимы) и предельных циклов (периодические режимы), могут возникать странные аттракторы (хаотические режимы).

Один из стандартных сценариев перехода системы от порядка к хаосу по мере изменения управляющих параметров состоит в бесконечной последовательности

бифуркаций удвоения периода предельных циклов. Возможность реализации серии бифуркаций удвоения периода была установлена ещё задолго до открытия странных аттракторов, а в 1978 году М. Фейгенбаумом были открыты универсальные закономерности перехода к хаосу посредством такой серии бифуркаций [11]. Наиболее известной моделью, демонстрирующей возникновение странного аттрактора, является модель Лоренца [12]. Именно в этой модели, описывающей динамику тепловой конвекции, подобные свойства динамической системы были обнаружены впервые. Также детерминированный хаос наблюдается и во многих других динамических моделях, среди которых классические системы Ресслера [13], Чуа [14], генератор Анищенко–Астахова [15]. Качественное изменение динамических режимов, связанное с бифуркациями удвоения периода, наблюдается также и в трехмерных популяционных моделях [3, 8–10].

Функционирование реальных биологических систем сопровождается трудно контролируемыми внешними воздействиями. Так, на численность взаимодействующих популяций может влиять изменение погодных условий, болезни, случайная смертность и т.д. Все эти факторы могут быть названы малыми случайными возмущениями и описаны при помощи соответствующих дополнительных слагаемых в уравнениях системы. Включение в модель случайных возмущений приводит к тому, что решение системы также становится случайным процессом. Под действием возмущений решение системы покидает детерминированный аттрактор и формирует вокруг него облако случайных состояний с некоторым вероятностным распределением. Решение стохастической системы, имеющее стационарную плотность распределения случайных состояний, называется *стохастическим аттрактором*. При этом для всякого другого достаточно близкого решения соответствующая плотность распределения стабилизируется и сходится к этой стационарной. Конструкция стохастических аттракторов рассматривалась в [16–21].

Исследование нелинейных систем в присутствии случайных возмущений было начато в [23] и продолжено в большом числе работ (см., например [24, 25]). Многочисленные экспериментальные и теоретические исследования показали, что случайные флуктуации могут вызывать неожиданные и интересные явления, такие как стохастический резонанс [26], индуцированные шумами переходы [27], индуцированный шумом порядок [28], индуцированный шумом хаос [29].

Фазовый портрет системы под воздействием случайных возмущений может претерпевать значительные изменения. Соответствующие деформации, вызванные шумами, особенно ощутимы вблизи точек бифуркаций, где даже малые шумы, вследствие высокой чувствительности аттракторов, могут породить новые явления в динамике системы [22, 30, 31].

Полное вероятностное описание возможных в системе стохастических режимов дается с помощью функции плотности распределения, удовлетворяющей уравнению Фоккера–Планка–Колмогорова. Непосредственное использование этого уравнения уже для систем двух взаимодействующих популяций весьма затруднительно. Важный для практики случай воздействия малых возмущений приводит к известным проблемам анализа уравнений с малыми коэффициентами при старших производных. В этой ситуации одним из наиболее распространенных приемов исследования является прямое численное моделирование случайных траекторий с их последующей статистической обработкой.

В настоящее время развивается подход, позволяющий для искомым вероятностных характеристик стохастических аттракторов системы найти соответствующее приближение. Для систем с малыми случайными возмущениями в работе

А.Д. Вентцеля и М.И. Фрейдлина [32] предложен метод, использующий конструкцию *квазипотенциала*. Для квазипотенциала вблизи аттрактора детерминированной системы может быть найдена [33] квадратичная аппроксимация, позволяющая в итоге получить асимптотику стационарной плотности в форме нормального распределения. При этом разброс случайных траекторий стохастической системы вокруг детерминированного аттрактора может быть описан с помощью *функции стохастической чувствительности*. Данная функция была введена в работах [33, 34], где с ее помощью были исследованы особенности стохастических автоколебаний в моделях брюсселятора и Лоренца.

Аппарат функции стохастической чувствительности использовался в работе [35] для анализа равновесий и предельных циклов двумерной модели «хищник – жертва» с насыщением хищника. Данная же работа посвящена изучению характеристик устойчивости колебательных режимов трехмерной системы «хищник – две жертвы», учитывающей внутривидовую конкуренцию хищников.

В первой части работы излагаются необходимые теоретические сведения по анализу стохастических циклов общих нелинейных динамических систем. Вводится конструкция функции стохастической чувствительности, приводятся методы ее нахождения.

Во второй части детально рассмотрены бифуркации удвоения периода предельных циклов системы «хищник – две жертвы», и впервые для этой модели исследованы характеристики их устойчивости как к однократному начальному возмущению, так и к воздействию аддитивных и параметрических стохастических шумов. Исследованы особенности разброса случайных траекторий в фазовом пространстве и показано, как изменяются статистические характеристики этого разброса при вариации параметров системы.

1. Характеристики устойчивости предельных циклов

Рассмотрим детерминированную динамическую систему, заданную конечным числом нелинейных дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = f(x), \quad (1)$$

где $f(x)$ – достаточно гладкая n -мерная вектор-функция.

Предполагается, что система (1) имеет экспоненциально устойчивый T -периодический аттрактор – предельный цикл $\Gamma: x = \xi(t)$ ($0 \leq t \leq T$), $\xi(0) = \xi(T)$. Это означает, что в некоторой малой окрестности U цикла Γ существуют константы $K > 0$, $l > 0$, такие что для всякого решения $x(t)$ системы (1) с начальным условием $x(0) = x_0 \in U$ выполняется следующее неравенство:

$$\|\Delta(x(t))\| \leq K e^{-lt} \|\Delta(x_0)\|.$$

Здесь $\Delta(x) = x - \gamma(x)$ – отклонение точки x от цикла Γ ; $\gamma(x)$ – точка цикла Γ , ближайшая к x .

Классический анализ устойчивости периодических аттракторов к возмущению начальных данных сводится к исследованию мультипликаторов ρ_i ($i = 1, \dots, n$) соответствующей линейной системы первого приближения

$$\dot{z} = F(t)z, \quad (2)$$

где $z(t) = x(t) - \xi(t)$, $F = \partial f / \partial x(\xi(t))$ – T -периодическая матрица. Пусть $Z(t)$ – фундаментальная матрица системы (2). Тогда мультипликаторы – собственные числа матрицы монодромии $B = Z(T)$ – характеризуют динамику системы (1) в окрестности цикла Γ . Один из них (пусть это будет ρ_n) всегда равен единице. В качестве детерминированной характеристики устойчивости цикла обычно используют величину $r = \max_i |\rho_i|$ ($i = 1, \dots, n-1$). Её смысл заключается в том, что первоначальное отклонение периодического движения через период T умножается на r . Поэтому для затухания возмущения необходимо выполнение неравенства $r < 1$. Это условие является критерием экспоненциальной устойчивости предельного цикла. Отметим, что мультипликаторы характеризуют устойчивость цикла в целом и не позволяют различать и сравнивать по степени устойчивости различные участки цикла.

Для анализа чувствительности цикла Γ к воздействию малых стохастических возмущений рассмотрим соответствующую систему Ито [36]:

$$\dot{x} = f(x) + \varepsilon \sigma(x) \dot{w}, \quad (3)$$

где $\sigma(x)$ – достаточно гладкая $n \times m$ -матричная функция, задающая зависимость возмущения от состояния системы; $w(t)$ – m -мерный стандартный винеровский процесс; скалярный параметр ε характеризует интенсивность возмущения.

Под воздействием стохастических возмущений решение системы (3) покидает детерминированный цикл и формирует вокруг него пучок случайных траекторий. В случае, когда вероятностное распределение случайных состояний в этом пучке с течением времени стабилизируется, можно говорить о наличии у возмущенной системы *стохастического аттрактора*.

Детальное описание плотности стационарного вероятностного распределения состояний $p(x, \varepsilon)$ системы (3) дается стационарным уравнением Фоккера–Планка–Колмогорова

$$\frac{\varepsilon^2}{2} \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} (a_{ij} p) - \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} (f_i p) = 0, \quad a_{ij} = [\sigma \sigma^T]_{ij}.$$

Непосредственное использование этого уравнения даже в простейших ситуациях (автоколебательная система с одной степенью свободы) весьма затруднительно. Важный для практики случай воздействия малых помех приводит к известным проблемам анализа уравнений с малыми коэффициентами при старших производных. В настоящее время известны различные подходы, позволяющие для искомых вероятностных характеристик найти соответствующие приближения. Для систем с малыми случайными возмущениями в работе А.Д. Вентцеля и М.И. Фрейдлина [32] предложен подход, использующий некоторую специально конструируемую функцию Ляпунова – *квазипотенциал*

$$v(x) = - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^2 \ln p(x, \varepsilon).$$

Первая аппроксимация квазипотенциала $v(x) = \varphi(x) + O(\|\Delta(x)\|^3)$ в малой окрестности цикла Γ задается квадратичной формой [33]

$$\varphi(x) = \frac{1}{2} (\Delta(x), \Psi(\gamma(x)) \Delta(x)),$$

где $\Psi(\gamma) = (\partial^2 v / \partial x^2)(\gamma)$. Для каждой точки $\gamma \in \Gamma$ значение функции $\Psi(\gamma)$ является симметрической неотрицательно определенной $n \times n$ -матрицей. Из равенства $(\partial v / \partial x)(\gamma) = 0$ следует, что $(\partial^2 v / \partial x^2)(\gamma)f(\gamma) = 0$. Поэтому $\Psi(\gamma)f(\gamma) = 0$, а значит, матрица $\Psi(\gamma)$ является вырожденной ($\text{rank} \Psi(\gamma) \leq n - 1$). При невырожденных шумах ($\det(\sigma(\gamma)) \neq 0$) имеем $\text{rank} \Psi(\gamma) = n - 1$. Рассмотрим наряду с матричной функцией $\Psi(\gamma)$ матричную функцию $\Phi(\gamma) = \Psi^+(\gamma)$, где $+$ есть знак операции псевдообращения.

В результате асимптотика стационарной плотности распределения $p(x, \varepsilon)$ для малых шумов в малой окрестности цикла Γ может быть записана в форме нормального распределения [37]:

$$p(x, \varepsilon) \approx K \cdot \exp \left(-\frac{(\Delta(x), \Phi^+(\gamma(x))\Delta(x))}{2\varepsilon^2} \right) \quad (4)$$

с ковариационной матрицей $\varepsilon^2 \Phi(\gamma)$. Матрица $\Phi(\gamma)$ описывает разброс точек пересечения случайных траекторий с гиперплоскостью, ортогональной циклу Γ в точке γ . Функцию $\Phi(\gamma)$ будем называть *функцией стохастической чувствительности*. Эта функция характеризует отклик системы (3) вблизи цикла Γ на случайные возмущения. Используя эту функцию, мы можем описать изменение чувствительности цикла в разных его точках.

Функцию стохастической чувствительности удобно искать в параметрической форме. Решение $\xi(t)$ системы (1), связывающее точки Γ с точками временного интервала $[0; T)$ позволяет использовать следующую параметризацию:

$$\Phi(\xi(t)) = W(t).$$

Пусть Π_t – гиперплоскость, ортогональная циклу в точке $\xi(t)$ ($0 \leq t \leq T$). Матричная функция $W(t)$ позволяет [34] записать экспоненциальную гауссовскую асимптотику (4) в параметрической форме

$$p_t(x, \varepsilon) = K \cdot \exp \left(-\frac{(x - \xi(t))^\top W^+(t)(x - \xi(t))}{2\varepsilon^2} \right)$$

со средним значением $m_t = \xi(t)$ и ковариационной матрицей $D(t, \varepsilon) = \varepsilon^2 W(t)$, задающей вблизи $\xi(t)$ разброс точек пересечения случайных траекторий с плоскостью Π_t .

Рассмотрим собственные значения $\lambda_1(t) \geq \lambda_2(t) \geq \dots \geq \lambda_n(t) \geq 0$ и собственные векторы $v_1(t), v_2(t), \dots, v_n(t)$ матрицы $W(t)$. В силу вырожденности матрицы $W(t)$ ($W(t)f(\xi(t)) \equiv 0$), младшее собственное значение $\lambda_n(t) \equiv 0$. Остальные собственные значения и соответствующие им собственные векторы характеризуют разброс пучка в гиперплоскости Π_t по величине и направлению.

Матрица $W(t)$ стохастической функции чувствительности для экспоненциально устойчивого цикла является единственным решением уравнения [33]

$$\dot{W} = F(t)W + WF^\top(t) + P(t)S(t)P(t) \quad (5)$$

с условиями

$$W(t)r(t) = 0, \quad (6)$$

$$W(t+T) = W(t). \quad (7)$$

Здесь

$$F(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(\xi(t)), \quad S(t) = G(t)G^\top(t), \quad G(t) = \sigma(\xi(t)), \quad r(t) = f(\xi(t))$$

$$P(t) = P_{f(\xi(t))}, \quad P_r = I - \frac{rr^\top}{r^\top r},$$

P_r – матрица проектирования на подпространство, ортогональное вектору $r \neq 0$.

Свяжем матрицу $W(t)$ с системой первого приближения. Система первого приближения для отклонения $z(t) = x(t) - \xi(t)$ решений $x(t)$ стохастической системы (3) от $\xi(t)$ имеет вид

$$\dot{z} = F(t)z + \varepsilon G(t)\dot{w}. \quad (8)$$

Для функции $u(t) = \frac{z(t)}{\varepsilon}$ справедлива система

$$\dot{u} = F(t)u + G(t)\dot{w}. \quad (9)$$

Рассмотрим наряду с (9) стохастическую систему

$$\dot{y} = F(t)y + P(t)G(t)\dot{w}, \quad (10)$$

случайные возмущения в которой являются проекциями возмущений системы (9).

Для устойчивого цикла у системы (10) существует решение $\bar{y}(t)$ с ковариационной матрицей $\text{cov}(\bar{y}(t), \bar{y}(t)) = W(t)$. При этом для всякого решения $z(t)$ системы (8) проекция $P(t)z(t)$ сходится в среднем квадратичном к $\varepsilon\bar{y}(t)$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \mathbb{E} \|P(t)z(t) - \varepsilon\bar{y}(t)\|^2 = 0,$$

а ковариационная матрица $\text{cov}(P(t)z(t), P(t)z(t))$ проекций $P(t)z(t)$ сходится к $\varepsilon^2 W(t)$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} (\text{cov}(P(t)z(t), P(t)z(t)) - \varepsilon^2 W(t)) = 0.$$

Для отыскания матрицы $W(t)$ естественно использовать следующий метод установления. Рассмотрим решение $V(t)$ задачи Коши

$$\dot{V} = F(t)V + VF^\top(t) + P(t)S(t)P(t), \quad V(0) = V_0. \quad (11)$$

Матрица $P(t)V(t)P(t)$ независимо от выбора начальной неотрицательно определенной матрицы V_0 сходится к $W(t)$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} (P(t)V(t)P(t) - W(t)) = 0. \quad (12)$$

Действительно, разность $\Delta(t) = V(t) - W(t)$, являясь решением однородного уравнения

$$\dot{\Delta} = F\Delta + \Delta F^\top,$$

имеет явное представление $\Delta(t) = Z(t)\Delta(0)Z^\top(t)$, где $Z(t)$ – фундаментальная матрица решений системы (2). Благодаря экспоненциальной устойчивости цикла, при $t \rightarrow +\infty$ справедливо $P(t)Z(t) \rightarrow 0$ и как следствие выполняется (12)

$$P(t)V(t)P(t) - W(t) = P(t)\Delta(t)P(t) \rightarrow 0.$$

Скорость сходимости этого метода установления напрямую связана со степенью устойчивости цикла и определяется величиной старшего мультипликатора r : при уменьшении r скорость сходимости увеличивается, при стремлении r к единице скорость сходимости резко падает.

Для отыскания приближенных значений $V_i \approx V(t_i)$ ($t_i = ih$) решения $V(t)$ задачи (11) можно взять за основу один из стандартных одношаговых численных методов

$$V_{i+1} = \mathcal{F}_i(V_i, h). \quad (13)$$

При непосредственном использовании схемы (13) накапливающаяся погрешность ведет к расходимости процесса. Дело в том, что из-за неизбежных локальных ошибок у последовательных приближений V_i появляется компонента, лежащая в неустойчивом подпространстве. Рост этой компоненты и ведет к расходимости. Чтобы избежать этого, следует модифицировать схему (13) и вести расчет по формуле

$$V_{i+1} = P_{i+1} \mathcal{F}_i(V_i, h) P_{i+1}.$$

Такая дополнительная «чистка» приближения проектором $P_{i+1} = P(t_{i+1})$ обеспечивает сходимость метода.

Сингулярное разложение матрицы чувствительности. В трехмерном случае у матрицы $W(t)$ собственное значение $\lambda_3(t) \equiv 0$. Функция стохастической чувствительности цикла для каждой точки t может быть выражена двумя собственными числами $\lambda_1(t) \geq \lambda_2(t)$ и соответствующими собственными векторами $v_1(t)$, $v_2(t)$. Сингулярное разложение матрицы $W(t)$ при $n = 3$ имеет вид

$$W(t) = \lambda_1(t) v_1(t) v_1^\top(t) + \lambda_2(t) v_2(t) v_2^\top(t). \quad (14)$$

Для невырожденных шумов функции $\lambda_1(t)$ и $\lambda_2(t)$ являются положительными и задают размер эллипса рассеивания случайных состояний системы в плоскости Π_t , а векторы $v_1(t)$ и $v_2(t)$ определяют направления осей этого эллипса. В плоскости Π_t этот эллипс задается уравнением

$$\frac{\eta_1^2}{\lambda_1} + \frac{\eta_2^2}{\lambda_2} = 2k^2 \varepsilon^2.$$

Здесь $\eta_i = (x - \xi(t), v_i(t))$, $k = -\ln(1 - P)$, а P – доверительная вероятность.

Обозначим через $u_1(t)$, $u_2(t)$ некоторый ортонормальный базис плоскости Π_t , который легко найти, зная T -периодическое решение $\xi(t)$ системы (1). Собственные векторы $v_1(t)$ и $v_2(t)$ могут быть получены поворотом базиса $u_1(t)$, $u_2(t)$ на некоторый угол $\varphi(t)$

$$\begin{aligned} v_1(t) &= u_1(t) \cos \varphi(t) + u_2(t) \sin \varphi(t), \\ v_2(t) &= -u_1(t) \sin \varphi(t) + u_2(t) \cos \varphi(t). \end{aligned} \quad (15)$$

Таким образом, разложение (14), (15) позволяет нам выразить неизвестное решение системы (5) через значения трех скалярных функций $\lambda_1(t)$, $\lambda_2(t)$ и $\varphi(t)$.

Перепишем (14) в форме

$$W(t) = \lambda_1(t) P_1(t) + \lambda_2(t) P_2(t), \quad (16)$$

где матрицы

$$P_1(t) = v_1(t)v_1^\top(t), \quad P_2(t) = v_2(t)v_2^\top(t)$$

являются проекционными: $P_i v_i = v_i$, $P_i v_j = 0$ ($i \neq j$), $P = P_1 + P_2$.

Подставляя разложение (16) в дифференциальное уравнение (5) получаем

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \dot{\lambda}_1 P_1 + \lambda_1 \dot{P}_1 + \dot{\lambda}_2 P_2 + \lambda_2 \dot{P}_2 = \\ &= \lambda_1 F P_1 + \lambda_2 F P_2 + \lambda_1 P_1 F^\top + \lambda_2 P_2 F^\top + (P_1 + P_2) S (P_1 + P_2). \end{aligned}$$

Умножая это соотношение слева на v_i^\top и справа на v_j и используя следующие свойства проекционных матриц

$$\begin{aligned} v_1^\top(t) \dot{P}_1(t) v_1(t) &\equiv 0, \quad v_1^\top(t) \dot{P}_2(t) v_1(t) \equiv 0, \quad v_2^\top(t) \dot{P}_1(t) v_2(t) \equiv 0, \quad v_2^\top(t) \dot{P}_2(t) v_2(t) \equiv 0, \\ v_1^\top(t) \dot{P}_1(t) v_2(t) &= \dot{\varphi}(t) + \dot{u}_1^\top(t) u_2(t), \quad v_1^\top(t) \dot{P}_2(t) v_2(t) = -\dot{\varphi}(t) - \dot{u}_1^\top(t) u_2(t), \end{aligned}$$

получаем

$$\begin{aligned} v_1^\top \dot{V} v_1 &= \dot{\lambda}_1 = \lambda_1 v_1^\top F v_1 + \lambda_1 v_1^\top F^\top v_1 + v_1^\top S v_1, \\ v_2^\top \dot{V} v_2 &= \dot{\lambda}_2 = \lambda_2 v_2^\top F v_2 + \lambda_2 v_2^\top F^\top v_2 + v_2^\top S v_2, \\ v_1^\top \dot{V} v_2 &= \lambda_1 (\dot{\varphi} + \dot{u}_1^\top u_2) + \lambda_2 (-\dot{\varphi} - \dot{u}_1^\top u_2) = \\ &= \lambda_2 v_1^\top F v_2 + \lambda_1 v_1^\top F^\top v_2 + v_1^\top S v_2. \end{aligned}$$

Таким образом, функции $\lambda_1(t)$, $\lambda_2(t)$, $\varphi(t)$ удовлетворяют системе дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \dot{\lambda}_1 &= \lambda_1 v_1^\top [F + F^\top] v_1 + v_1^\top S v_1, \\ \dot{\lambda}_2 &= \lambda_2 v_2^\top [F + F^\top] v_2 + v_2^\top S v_2, \\ (\lambda_1 - \lambda_2) \dot{\varphi} &= \lambda_2 v_1^\top F v_2 + \lambda_1 v_1^\top F^\top v_2 + v_1^\top S v_2 - (\lambda_1 - \lambda_2) \dot{u}_1^\top u_2. \end{aligned} \tag{17}$$

В невырожденном случае, когда $\lambda_1 - \lambda_2 \neq 0$, система (17) позволяет однозначно находить параметры $\lambda_1(t)$, $\lambda_2(t)$, $\varphi(t)$ разложения (14), (15) матрицы $W(t)$, удовлетворяющей системе (5), (6). При этом решение с условием (7) можно получить методом установления, описанным выше.

В случае, когда собственные числа λ_1 , λ_2 равны или близки друг к другу, система (17) имеет особенность. Дело в том, что в случае кратных собственных значений задача отыскания собственных векторов является некорректной. При $\lambda_1(t) = \lambda_2(t)$ соответствующие собственные векторы матрицы $W(t)$ составляют двумерное подпространство: всякий вектор, ортогональный $r(t)$, будет собственным. Формально это означает, что величина угла $\varphi(t)$ в разложении (15) может быть любой. При этом отметим, что в случае $\lambda_1 \equiv \lambda_2$ матрица $W(t)$ имеет простое представление: $W(t) = \lambda_1(t) P(t)$ и отыскание собственных векторов не требуется. В этих обстоятельствах на интервалах, где $\lambda_1(t)$, $\lambda_2(t)$ равны или близки друг к другу, можно перейти от системы (17) к системе (5).

Функция стохастической чувствительности, определяемая в точках цикла Γ собственными числами $\lambda_1(t)$ и $\lambda_2(t)$, характеризует на различных участках этого цикла величину разброса пучка случайных траекторий. Она позволяет сравнивать

степень чувствительности разных частей цикла к стохастическим помехам и предсказывать тонкие эффекты случайных воздействий.

В анализе чувствительности предельного цикла к случайным возмущениям важную роль играет величина $m = \max_{[0;T]} \lambda_1(t)$, которую мы будем называть *показателем стохастической чувствительности* цикла. Эта величина является удобной характеристикой чувствительности цикла в целом.

2. Детерминированная модель

Модель популяционной динамики «хищник – две жертвы» задается [3, 10] вольтерровской системой дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dot{u} = \alpha_1 u - \beta_1 u w - \gamma_{11} u^2 - \gamma_{12} u v, \\ \dot{v} = \alpha_2 v - \beta_2 v w - \gamma_{21} v^2 - \gamma_{22} u v, \\ \dot{w} = -\delta w + \nu_1 u w + \nu_2 v w - \mu w^2, \end{cases} \quad (18)$$

где u и v – численности первого и второго вида жертвы, соответственно; w – численность популяции хищника. Численности u , v и w являются функциями от времени t . Все параметры модели положительны.

Для удобства изучения и сокращения количества параметров эту систему можно преобразовать к нормированным координатам. При помощи замены [3] $\tau = t/\delta$, $u = (\delta/\gamma_{11})x$, $v = (\delta/\gamma_{22})y$, $w = z$, система (18) приводится к виду

$$\begin{cases} \dot{x} = x(a - x - c_1 y - e_1 z), \\ \dot{y} = y(b - y - c_2 x - e_2 z), \\ \dot{z} = -z(1 - d_1 x - d_2 y + g z), \end{cases} \quad (19)$$

где x , y и z – нормированные численности популяций жертв и хищника, зависящие от времени t , а остальные коэффициенты получены заменой $a = \alpha_1/\delta$, $b = \alpha_2/\delta$, $e_{1,2} = \beta_{1,2}/\delta$, $c_1 = (\gamma_{12}\delta)/\gamma_{22}$, $c_2 = (\gamma_{21}\delta)/\gamma_{11}$, $d_1 = \nu_1/\gamma_{11}$, $d_2 = \nu_2/\gamma_{22}$, $g = \mu/\delta$.

Благодаря такой нормировке параметры, отвечающие интенсивности внутривидовой конкуренции в популяциях жертв и скорости вымирания хищников в отсутствие жертв, сделаны равными единице. Оставшиеся параметры c_1 и c_2 характеризуют интенсивность межвидовой конкуренции популяций жертв; e_1 и e_2 – скорость выедания жертв хищником; d_1 и d_2 – прирост популяции хищника вследствие выедания жертв; g – интенсивность внутривидовой конкуренции в популяции хищника.

Параметры a и b отвечают естественному приросту в популяциях первого и второго вида жертвы, соответственно. Их значения можно регулировать, например, изменением интенсивности промысла жертв. Увеличение уровня промысла ведет к снижению значения соответствующего параметра и наоборот.

В работе [10] подробно исследуются параметрические и фазовые портреты системы (19) в зависимости от параметров a и b при следующих фиксированных значениях остальных коэффициентов:

$$c_1 = 6, \quad c_2 = 1, \quad e_1 = 4, \quad e_2 = 10, \quad d_1 = 0.25, \quad d_2 = 4, \quad g = 1.$$

Авторы [10] детально рассматривают перестройки фазовых портретов системы по мере изменения параметра b , характеризующего биотический потенциал второго вида жертвы, при различных фиксированных значениях параметра a . Наиболее интересны динамические эффекты, наблюдающиеся в численном эксперименте при $a = 2.4$. Система (19) при заданных параметрах приобретает вид

$$\begin{cases} \dot{x} = x(2.4 - x - 6y - 4z), \\ \dot{y} = y(b - x - y - 10z), \\ \dot{z} = -z(1 - 0.25x - 4y + z). \end{cases} \quad (20)$$

Именно этот частный случай модели «хищник – две жертвы» мы и будем изучать в данной работе.

Коэффициенты системы (20) подобраны так, что межвидовая конкуренция жертв оказывается сильнее внутривидовой, поэтому в отсутствие хищников устойчивое сосуществование популяций жертв невозможно – одна из них неизбежно вытеснит другую. Таким образом, предлагаемая модель демонстрирует известное свойство некоторых биологических систем, в которых неустойчивое сообщество жертв стабилизируется [38] хищником. В природе этот эффект наблюдается, например, в некоторых морских сообществах [39].

Кроме того, при выбранных значениях коэффициентов можно сказать, что хищник более приспособлен к питанию жертвами второго вида. Жертв только первого вида оказывается недостаточно, чтобы обеспечить пищей популяцию хищника. Следовательно, при вымирании популяции второго вида жертвы популяция хищника вымирает вслед за ней.

В зависимости от значения варьируемого параметра b сосуществование популяций может носить характер не только устойчивого равновесия, но и устойчивых колебаний, а в некотором диапазоне значений параметра наблюдаются и сложные непериодические (квазистохастические) колебательные режимы [40].

Стационарные режимы. Система (20) имеет 6 положений равновесия:

1) При отсутствии жертв популяция хищника вымирает. Этой ситуации отвечает седловое равновесие $O = (0; 0; 0)$.

2) Равновесие $A_1 = (2.4; 0; 0)$ соответствует разрушению биологического сообщества вследствие одновременного вымирания хищника и второго вида жертвы при стабилизации численности популяции первого вида жертвы.

3) Равновесие $A_2 = (0; b; 0)$, существующее при любых положительных значениях параметра b , отвечает выживанию второй популяции жертвы при отсутствии хищника и первого вида жертвы.

4) Ситуации, когда в системе нет хищников и фигурируют только две конкурирующие популяции жертв, соответствует равновесие $B_1 = (1/25(30b - 12); 1/25(12 - 5b); 0)$. Равновесие существует при $0.4 \leq b \leq 2.4$. Эта точка неустойчива, любое отклонение в популяциях жертв ведет к неизбежному вымиранию одного из видов.

5) Равновесие $B_2 = (0; 1/41(b + 10); 1/41(4b - 1))$ имеет смысл при $b \geq 0.25$ и отвечает устойчивому сосуществованию хищника и второй популяции жертвы при вымирании первой. Отметим также, что с первым видом жертвы в отсутствие второго хищник устойчиво сосуществовать не может.

6) При $1.6 \leq b \leq 1.9273$ в системе (20) существует единственное невырожденное положение равновесия $M(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = (2/25(106 - 55b); 2/25(5b - 6); 1/10(5b - 8))$, соответствующее сосуществованию всех трех популяций.

Заключение об устойчивости равновесий модели (20) можно сделать, исходя из исследования системы первого приближения вблизи равновесий с матрицей

$$F = \begin{bmatrix} 2.4 - 2x - 6y - 4z & -6x & -4x \\ -y & b - x - 2y - 10z & -10y \\ 0.25z & -4z & 0.25x + 4y - 2z - 1 \end{bmatrix}.$$

Значения собственных чисел этой системы могут быть найдены численно.

В данной работе нас будут интересовать два из указанных равновесий – A_1 и M . Равновесие A_1 устойчиво на всем интервале существования M . Равновесие M устойчиво только при $b > 1.7638$. При $b < 1.7528$ A_1 является единственным притягивающим множеством в фазовом пространстве (x, y, z) . Рассмотрим оставшийся диапазон $b \in (1.7528; 1.7638)$, на котором помимо равновесия A_1 существует ещё один, более сложный, аттрактор, о котором будет сказано ниже. Если фазовая траектория попадает в область притяжения этого аттрактора, все три популяции будут сосуществовать в автоколебательном режиме. Если же траектория попадает в бассейн притяжения равновесия A_1 , это означает, что система популяций обречена на разрушение – вымирание хищника и второго вида жертвы.

Рассмотрим подробно явления, происходящие в системе (20) по мере уменьшения параметра b на интервале $(1.7528; 1.7638)$.

При переходе b через значение 1.7638 равновесие M теряет устойчивость, и путем мягкого возникновения автоколебаний в системе формируется новый аттрактор – устойчивый предельный цикл. На рис. 1 изображены траектории в фазовом

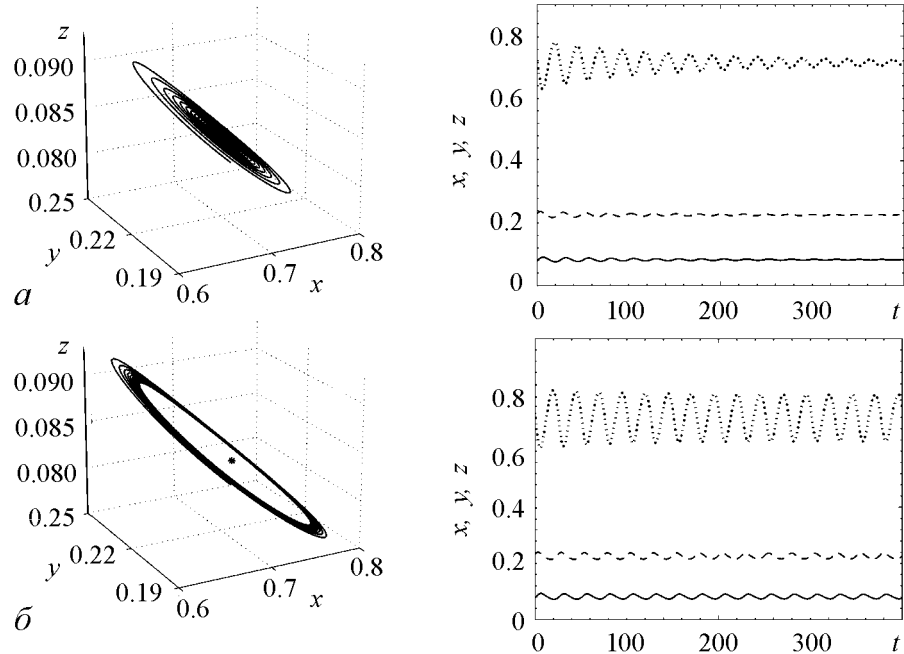


Рис. 1. Формирование аттрактора: фазовый портрет (слева) и колебания численности популяций (справа: x – точки, y – пунктир, z – сплошная линия); a – точка покоя, $b = 1.765$; b – устойчивый предельный цикл, $b = 1.763$

пространстве, стремящиеся к аттрактору, а так же соответствующие им колебания численности популяций в зависимости от времени t . При $b = 1.765$ аттрактором является равновесие M (рис. 1, *а*), а при $b = 1.763$ – предельный цикл (рис. 1, *б*).

Как демонстрирует рисунок, для устойчивого равновесия численность каждой популяции со временем стабилизируется, а при возникновении предельного цикла численности популяций выходят в режим автоколебаний с постоянным периодом и амплитудой. При уменьшении параметра b амплитуда колебаний увеличивается, цикл изменяет свою форму, а затем в системе возникает ряд более сложных явлений, которые рассмотрены ниже.

Уменьшение параметра b ниже критического значения $b = 1.7528$ приводит к тому, что сосуществование популяций в колебательном режиме становится неустойчивым, и единственным устойчивым положением в фазовом пространстве остается равновесие A_1 . Таким образом, снижение репродуктивного потенциала второго вида жертвы (ниже указанного критического уровня), вызванное ухудшениями среды обитания или высокой интенсивностью промысла, приводит к вымиранию его популяции, а вслед за этим и к гибели популяции хищника.

Бифуркационная диаграмма. Явления, наблюдающиеся на интервале $b \in (1.7528; 1.7638)$, наглядно демонстрирует *бифуркационная диаграмма*. Здесь удобно использовать сечение Пуанкаре – полуплоскость $z = \bar{z} = 1/10(5b - 8)$, $y > \bar{y} = 2/25(5b - 6)$. На рис. 2 представлены точки сечения на примере цикла кратности 2 в пространстве (x, y, z) (рис. 2, *а*) и в проекции (x, y) (рис. 2, *б*). Звездочкой на рисунке обозначено равновесие M . На бифуркационной диаграмме (рис. 3) представлены координаты y точек сечения Пуанкаре в зависимости от параметра b . Одна точка соответствует циклу кратности 1, две точки – циклу кратности 2 и так далее.

Рассмотрим аттракторы системы при уменьшении b от 1.7638 до 1.7536. Как уже говорилось, потеря устойчивости равновесия M при $b = 1.7638$ сопровождается рождением устойчивого предельного цикла (бифуркация Хопфа). Соответствующее семейство циклов F_1 обозначено на рис. 3, *а*. При переходе параметра справа налево через значение $b = 1.7536$, предельный цикл семейства F_1 теряет устойчивость.

При $b < 1.7538$ формируется второе семейство аттракторов F_2 , которое на небольшом участке $b \in (1.7536; 1.7538)$ существует одновременно с первым

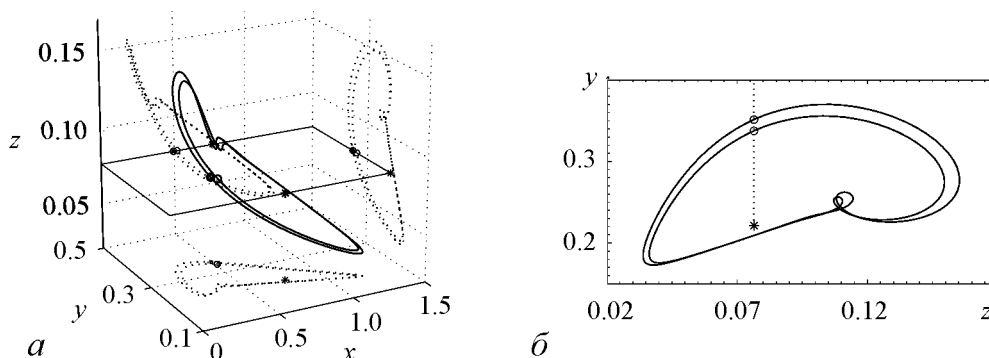


Рис. 2. Построение точек сечения Пуанкаре

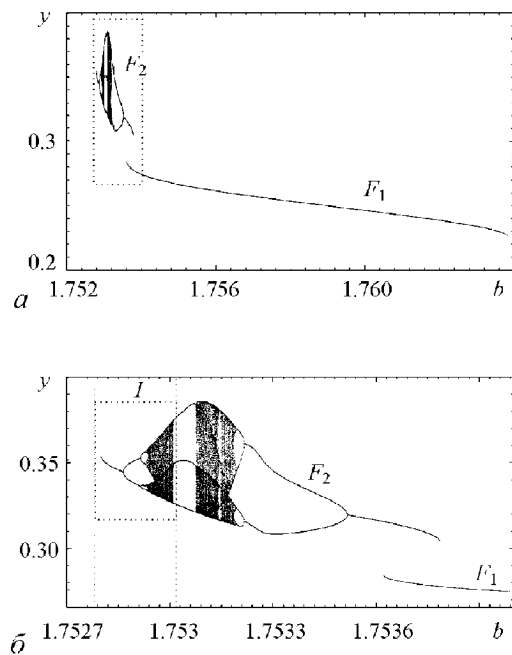


Рис. 3. Бифуркационная диаграмма системы (1)

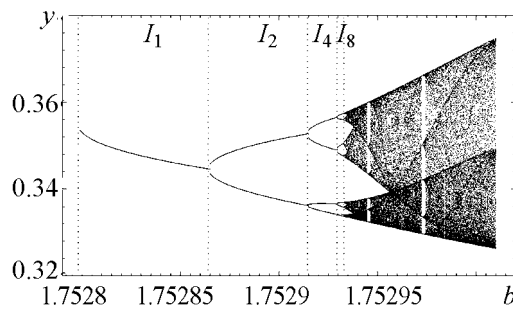


Рис. 4. Бифуркационная диаграмма интервала I

Таким образом, возникновение и дальнейшее усложнение режима автоколебаний в популяциях животных по мере увеличения промысловой нагрузки может предупреждать нас о приближении биологического сообщества к границе разрушения, когда два из трех видов обречены на вымирание.

Рассмотрим подробнее интервал I (рис. 4). Его можно разделить на подынтервалы структурной устойчивости $I_1, I_2, \dots, I_{2^k}, \dots$, соответствующие циклам $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_{2^k}, \dots$. Здесь Γ_{2^k} – цикл кратности 2^k .

Для данной модели $I_1 = (1.7528; 1.75287)$, $I_2 = (1.75287; 1.75291)$, $I_4 = (1.75291; 1.75293)$, $I_8 = (1.75293; 1.752933)$. На рис. 5 представлены предельные циклы кратности 1 ($b = 1.7528$), 2 ($b = 1.7529$) и 4 ($b = 1.752925$), наблюдаемые на интервалах I_1, I_2 и I_4 , и странный аттрактор ($b = 1.753$), а также соответствующие колебания численности популяций во времени. Кривая $x(t)$ обозначена точками, $y(t)$ – пунктиром, $z(t)$ – сплошной линией.

(рис. 3, б). С точки зрения биологии, это означает возможность сосуществования популяций в одном из двух циклических режимов с различной амплитудой колебания численностей.

Семейство F_2 наблюдается на интервале $b \in (1.7528; 1.7538)$. При уменьшении параметра b в пределах интервала $b \in (1.7531; 1.7538)$ в этом семействе происходит серия последовательных бифуркаций удвоения периода предельных циклов, ведущая к установлению хаотического колебательного режима. Затем формируется цикл кратности 3. На бифуркационной диаграмме отчетливо виден соответствующий ему участок. При дальнейшем уменьшении параметра система вновь переходит в состояние хаоса, и весь бифуркационный процесс развивается в обратной последовательности. На интервале $I = (1.7528; 1.75305)$ по мере уменьшения b мы можем наблюдать каскады обратных бифуркаций, при которых период цикла уменьшается в 2 раза. Процесс завершается потерей устойчивости последнего предельного цикла кратности 1 при переходе b справа налево через критическое значение 1.7528. При этом сообщество популяций разрушается, и единственным аттрактором системы (20) остается равновесие A_1 .

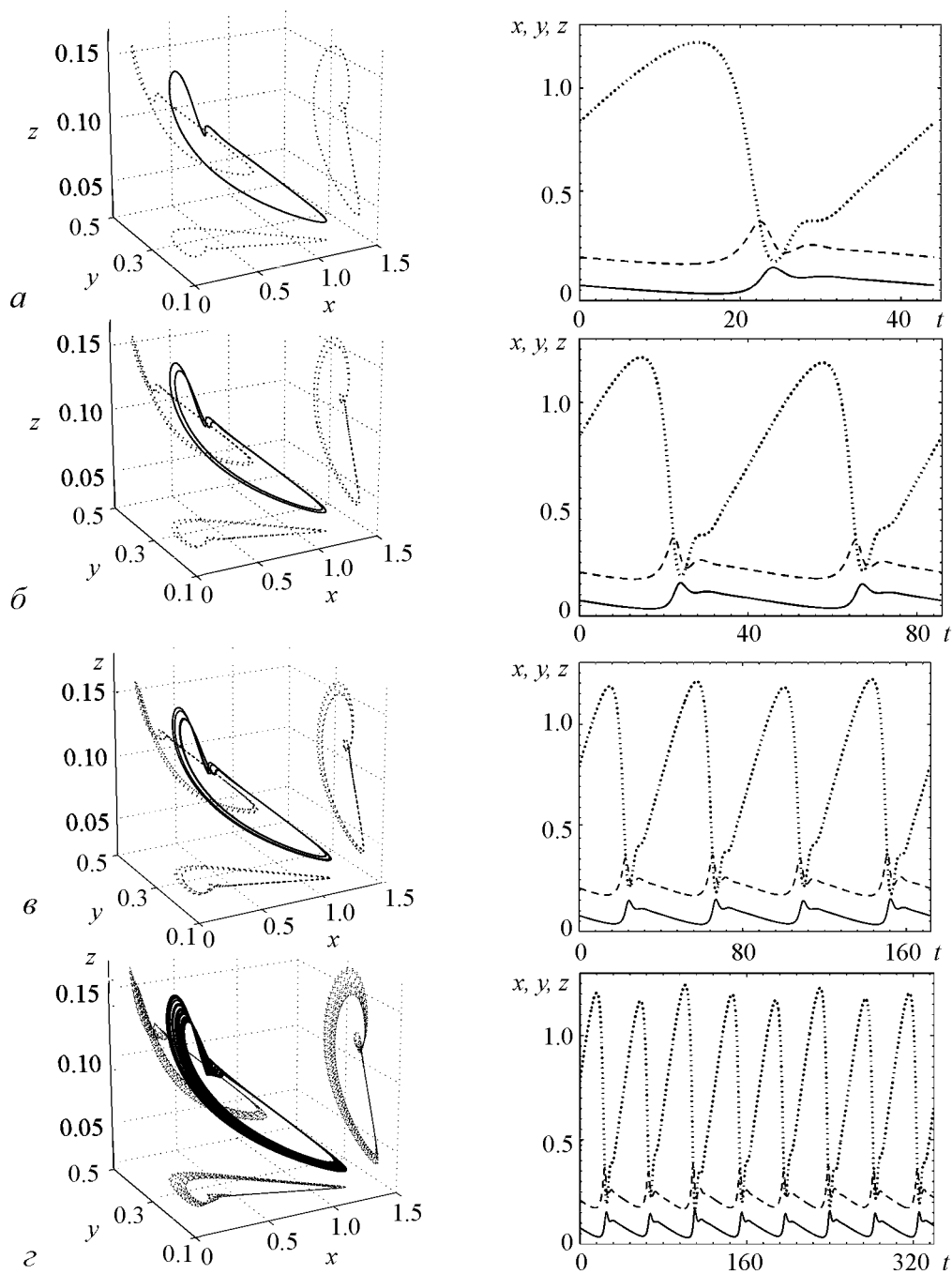


Рис. 5. Аттракторы интервала I (слева) и соответствующие колебания численности популяций (справа: x – точки, y – пунктир, z – сплошная линия) для значений b : 1.7528 (*a*); 1.7529 (*б*); 1.752925 (*в*); 1.753 (*г*)

Анализ детерминированной устойчивости циклов. Проследим зависимость мультипликаторов от параметра b . На рис. 6 показаны значения старшего и младшего мультипликаторов в зонах I_1 , I_2 , I_4 и I_8 . Как можно видеть из рисунка, реакция мультипликаторов на приближение параметра к точке бифуркации слева носит один и тот же характер внутри каждой зоны: старший мультипликатор становится близким

к нулю, значение младшего стремится к (-1) . При переходе через бифуркационное значение, в момент удвоения периода цикла, старший мультипликатор принимает значение около 1, а младший – значение, близкое к нулю.

Это позволяет использовать мультипликаторы как числовую характеристику, определяющую приближение параметра к бифуркационным значениям, и позволяет определить тот момент, в который происходит бифуркация.

Любопытно, что в зоне I_4 на небольшом интервале $b \in (1.752921; 1.752922)$ мультипликаторы становятся комплексными. График модуля мультипликаторов на этом участке представлен на рис. 7.

Рис. 8 демонстрирует поведение показателя детерминированной устойчивости $r(b)$ на интервалах I_1, I_2, I_4 и I_8 . Наименьшие значения $r(b)$ соответствуют предельным циклам, наиболее устойчивым к малому начальному возмущению. В каждом из интервалов I_{2^k} можно выделить локальный минимум $r_k = \min_{b \in I_{2^k}} r(b)$, достигающийся при некотором значении параметра $b = b_k$. Предельный цикл, соответствующий этому значению параметра, будет максимально устойчивым к однократному

начальному возмущению среди всех циклов интервала I_{2^k} . Назовем его *детерминированным 2^k -суперциклом* [41]. Значения b_k и r_k представлены в табл. 1.

Как можно видеть, устойчивость суперциклов в различных интервалах структурной устойчивости отличается незначительно.

Таблица 1
Характеристики устойчивости детерминированных суперциклов

I_{2^k}	I_1	I_2	I_4	I_8
b_k	1.752811	1.752887	1.752917	1.752931
r_k	0.055	0.045	0.026	0.042

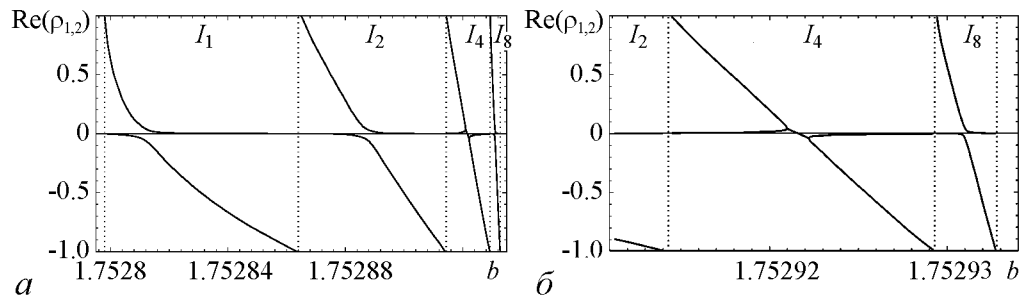


Рис. 6. Мультипликаторы на интервалах I_1, I_2, I_4 и I_8

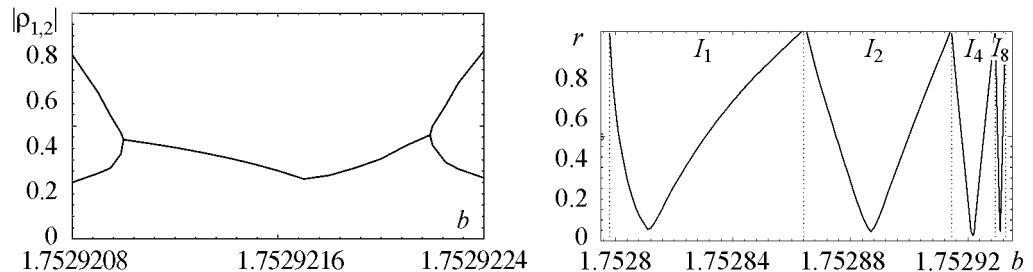


Рис. 7. Модуль мультипликаторов на участке интервала I_4

Рис. 8. Показатель детерминированной устойчивости на интервалах I_1, I_2, I_4 и I_8

3. Модель под воздействием аддитивных шумов

Реальные биологические системы постоянно находятся под влиянием неконтролируемых или слабо контролируемых внешних воздействий. Чтобы учесть эти воздействия, следует добавить в уравнения системы дополнительные стохастические слагаемые.

Фактор случайных миграций особей в популяцию и вне её может быть описан при помощи аддитивных возмущений. Для изучения влияния на модель аддитивных стохастических шумов рассмотрим соответствующую возмущенную систему:

$$\begin{cases} \dot{x} = x(2.4 - x - 6y - 4z) + \varepsilon \dot{w}_1, \\ \dot{y} = y(b - x - y - 10z) + \varepsilon \dot{w}_2, \\ \dot{z} = -z(1 - 0.25x - 4y + z) + \varepsilon \dot{w}_3, \end{cases} \quad (21)$$

где ε – интенсивность возмущения, w_1 , w_2 и w_3 – стандартные независимые винеровские процессы.

Под воздействием шумов бифуркационная диаграмма системы размывается, тем сильнее, чем выше уровень шума (рис. 9). Случайные траектории покидают детерминированный аттрактор и формируют вокруг него стационарно распределенный пучок. На рис. 10 (слева) изображены стохастические циклы, образованные случайными траекториями системы (21) при $\varepsilon = 5 \cdot 10^{-7}$.

Из рисунков видно, что разброс случайных траекторий вокруг детерминированного цикла неравномерен. Перепад дисперсии, соответствующий циклам кратности 1, 2 и 4, представлен на рис. 10 (справа), где изображены графики функции стохастической чувствительности $\lambda_1(t)$ и $\lambda_2(t)$ для этих циклов.

На рис. 11 представлены графики показателя стохастической чувствительности $m(b)$ в зонах I_1 , I_2 , I_4 и I_8 . Значения $m(b)$ устремляются в бесконечность при приближении параметра к границам интервалов структурной устойчивости. Это означает, что вблизи бифуркационных значений параметра система становится максимально чувствительной к возмущениям.

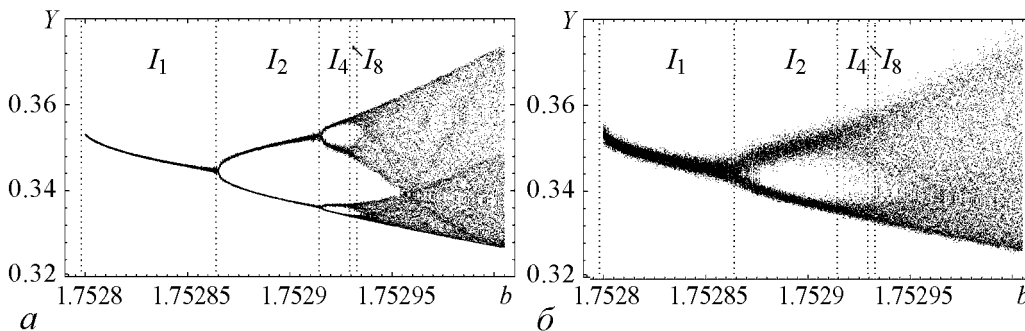


Рис. 9. Бифуркационная диаграмма стохастически возмущенной системы (4) для интервала I при ε : $a = 5 \cdot 10^{-8}$, $b = 5 \cdot 10^{-7}$

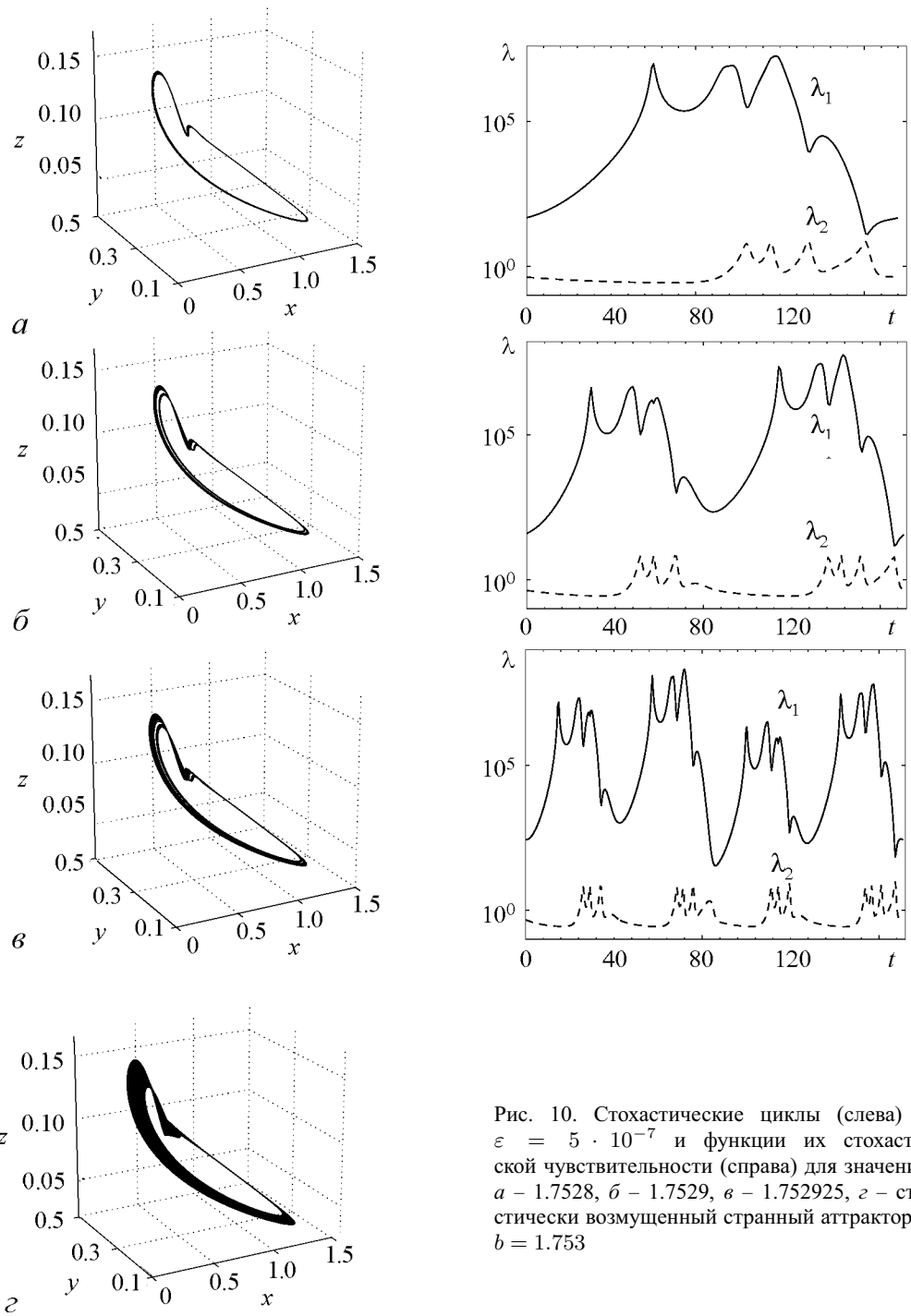


Рис. 10. Стохастические циклы (слева) при $\varepsilon = 5 \cdot 10^{-7}$ и функции их стохастической чувствительности (справа) для значений b : $a - 1.7528$, $\bar{b} - 1.7529$, $\varepsilon - 1.752925$, z - стохастически возмущенный странный аттрактор при $b = 1.753$

Внутри каждого интервала I_{2^k} можно выделить локальный минимум $m_k = \min_{b \in I_{2^k}} m(b)$, который достигается при некотором значении параметра $\bar{b}_k = \arg \min_{b \in I_{2^k}} m(b)$. Соответствующий предельный цикл будет наименее чувствительным к стохастическим возмущениям среди всех циклов кратности 2^k . Мы будем называть его *стохастическим 2^k -суперциклом*.

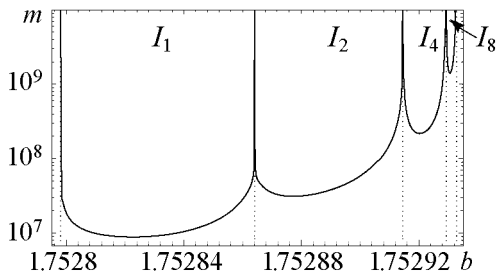


Таблица 2

Характеристики стохастической чувствительности суперциклов системы (21)

I_{2^k}	I_1	I_2	I_4	I_8
\bar{b}_k	1.752821	1.75288	1.75292	1.752931
m_k	$9.09 \cdot 10^6$	$3.41 \cdot 10^7$	$2.18 \cdot 10^8$	$1.42 \cdot 10^9$

Таблица 3

Значения коэффициентов d_k

k	0	1	2
d_k	3.754	6.387	6.499

Рис. 11. Показатель стохастической чувствительности циклов в зонах I_1 , I_2 , I_4 и I_8 для системы (21)

Значения m_k и b_k представлены в табл. 2. Последовательность m_k быстро возрастает при увеличении k . Это означает, что стохастическая чувствительность циклов быстро увеличивается по мере удвоения периода циклов при переходе системы к состоянию хаоса.

Рассмотрим коэффициенты $d_k = m_{k+1}/m_k$. Они определяют скачок чувствительности при переходе от 2^k -суперцикла к 2^{k+1} -суперциклу. Значения коэффициентов d_k представлены в табл. 3. Последовательность этих коэффициентов с возрастанием k стабилизируется.

Сравнивая детерминированный и стохастический анализ, следует отметить, что по мере приближения системы к состоянию хаоса детерминированные и стохастические характеристики дают различные результаты. Детерминированная устойчивость циклов практически не меняется, в то время как стохастическая чувствительность значительно возрастает и стремится к бесконечности.

4. Модель под воздействием параметрических шумов

Рассмотрим также и фактор случайных флуктуаций в рождаемости и смертности особей, который может быть описан при помощи параметрического (мультипликативного) шума. Добавим в модель (21) параметрический шум, действующий на параметр b : $b \rightarrow b + \tilde{\varepsilon}\dot{w}_4$. Здесь $\tilde{\varepsilon} = c \cdot \varepsilon$, w_4 – стандартный винеровский процесс, независимый от w_i ($i = 1, 2, 3$). При этом уравнения системы примут следующий вид:

$$\begin{cases} \dot{x} = x(2.4 - x - 6y - 4z) + \varepsilon\dot{w}_1, \\ \dot{y} = y(b - x - y - 10z) + \varepsilon(\dot{w}_2 + cy\dot{w}_4), \\ \dot{z} = -z(1 - 0.25x - 4y + z) + \varepsilon\dot{w}_3. \end{cases} \quad (22)$$

На рис. 12 представлены графики функций стохастической чувствительности для цикла кратности 1 ($b = 1.7528$) под воздействием только аддитивного шума – сплошная линия, и с добавлением параметрического шума с коэффициентом $c = 10$ – пунктирная линия. Влияние мультипликативного шума отчетливо заметно на графике младшего собственного числа λ_2 . При этом поведение старшего собственного числа λ_1 практически не претерпевает изменений. Повышаются только числовые характеристики функции чувствительности.

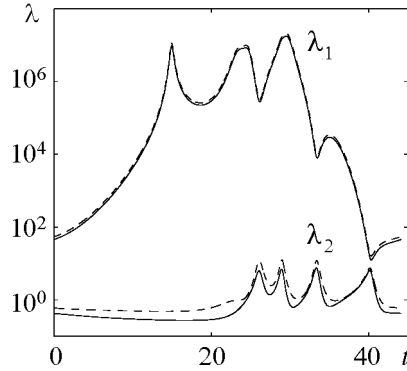


Рис. 12. Сравнение при $b = 1.7528$ функций стохастической чувствительности предельных циклов систем (21) – сплошная линия и (22) ($c = 10$) – штриховая линия

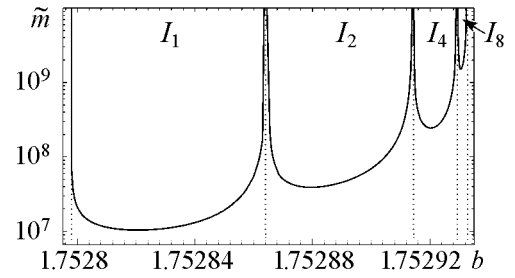


Рис. 13. Показатель стохастической чувствительности циклов в зонах I_1 , I_2 , I_4 и I_8 системы (22) ($c = 10$)

Таблица 4

Характеристики чувствительности суперциклов системы (22) при $c = 10$

I_{2^k}	I_1	I_2	I_4	I_8
\tilde{b}_k	1.752821	1.75288	1.75292	1.752931
\tilde{m}_k	$1.04 \cdot 10^7$	$3.9 \cdot 10^7$	$2.44 \cdot 10^8$	$1.51 \cdot 10^9$

Таблица 5

Значения коэффициентов \tilde{d}_k

k	0	1	2
\tilde{d}_k	3.285	6.387	6.499

График показателя стохастической чувствительности $\tilde{m}(b)$ для параметрически возмущенного цикла в зонах I_1 , I_2 , I_4 и I_8 изображен на рис. 13. Как можно видеть из рисунка, введение в систему параметрического шума не влечет качественных изменений в поведении показателя стохастической чувствительности. При приближении параметра к точкам бифуркации значения показателя чувствительности так же, как и в случае только аддитивного шума, устремляются в бесконечность, но с более высокой скоростью. Это говорит том, что вблизи точек бифуркаций система более чувствительна к параметрическим шумам, чем к аддитивным.

Минимумы показателя стохастической чувствительности $\tilde{m}_k = \min_{b \in I_{2^k}} \tilde{m}(b)$ и значения параметра $\tilde{b}_k = \arg \min_{b \in I_{2^k}} \tilde{m}(b)$, при которых они достигаются, представлены в табл. 4. Как мы можем видеть, $\tilde{b}_i = \tilde{b}_j$ при $i = j$. Отсюда можно сделать вывод, что стохастические суперциклы не зависят от вида действующего на систему шума.

Значения коэффициентов роста чувствительности $\tilde{d}_k = \tilde{m}_{k+1}/\tilde{m}_k$ представлены в табл. 5. Последовательность \tilde{d}_k стабилизируется с ростом k .

Заключение

В данной работе исследованы детерминированная устойчивость и стохастическая чувствительность предельных циклов нелинейных динамических систем в цепочке бифуркаций удвоения периода циклов. Для стохастических циклов излагаются необходимые теоретические сведения по аппроксимации и исследованию соот-

ветствующих вероятностных распределений, использующие конструкцию функции стохастической чувствительности.

На примере популяционной модели «хищник – две жертвы» показан классический сценарий перехода динамической системы к состоянию хаоса путем бесконечной серии бифуркаций удвоения периодов предельного цикла. Построена детальная бифуркационная диаграмма, демонстрирующая этот процесс. Определены границы интервалов структурной устойчивости для циклов кратности 1, 2, 4 и 8.

При помощи мультипликаторов получены характеристики устойчивости системы к однократному начальному возмущению. Исследован характер изменения мультипликаторов в цепи удвоений периода на интервалах структурной устойчивости. При приближении параметра к точке бифуркации слева, значение старшего мультипликатора стремится к 0, а младшего к (-1) . После прохождения этой границы происходит резкий скачок значений мультипликаторов – старший из них становится равным 1, а младший – 0.

Кроме того, при помощи показателя детерминированной устойчивости в каждом из рассмотренных интервалов структурной устойчивости определено значение параметра, соответствующее детерминированному суперциклу – предельному циклу, имеющему наибольшую устойчивость среди циклов своего интервала. Значения показателя устойчивости суперциклов разной кратности различаются незначительно.

При добавлении в модель стохастического возмущения поведение траекторий системы становится случайным. Вокруг детерминированного цикла системы формируется стохастический аттрактор – стационарно распределенный пучок случайных траекторий. Разброс траекторий в этом пучке описан при помощи функции стохастической чувствительности. Для трехмерного цикла функция стохастической чувствительности задается двумя собственными числами матрицы ковариации, которые характеризуют разброс случайных состояний в нормальной циклу гиперплоскости по направлению соответствующих собственных векторов.

Как для аддитивных, так и для параметрических шумов показано характерное устремление в бесконечность показателя стохастической чувствительности при приближении параметра к границам интервалов структурной устойчивости, демонстрирующее нам высокую чувствительность системы к шумам в этих зонах.

Для интервалов структурной устойчивости 1-, 2-, 4- и 8-кратных циклов определены стохастические суперциклы и найдены показатели их стохастической чувствительности. Показано, что по мере роста кратности суперциклов показатель чувствительности увеличивается, причем индекс роста чувствительности увеличивается в геометрической прогрессии.

Выявлено, что по мере перехода системы к состоянию хаоса детерминированные и стохастические характеристики ведут себя различным образом. Детерминированная устойчивость аттракторов практически не меняется, в то время как стохастическая чувствительность неограниченно возрастает с увеличением кратности циклов.

Работа частично поддержана грантами РФФИ 09-01-00026, 09-08-00048, 10-01-96022урал, ФЦП 02.740.11.0202.

Библиографический список

1. Колмогоров А.Н. Качественное изучение математических моделей динамики популяций // В кн.: Проблемы кибернетики. М.: Наука, 1972. Вып. 25. С. 100.
2. Свирежев Ю.М., Логофет Д.О. Устойчивость биологических сообществ. М.: Наука, 1978.
3. Базыкин А.Д. Математическая биофизика взаимодействующих популяций. М.: Наука, 1985.
4. Романовский Ю.М., Степанова Н.В., Чернавский Д.С. Математическая биофизика. М.: Наука, 1984.
5. Turchin P. Complex population dynamics: a theoretical/empirical synthesis. Princeton University Press, 2003.
6. Morozov A., Petrovskii S., Li B.-L. Bifurcations and chaos in a predator-prey system with the Allee effect // Proc. Royal Soc. London Series B–Biol. Sci. 2004. Vol. 271. P. 1407.
7. Krivan V. Optimal foraging and predator-prey dynamics // Theoretical Population Biology. 1996. Vol. 49. P. 265.
8. Arneodo A., Couillet P., Tresser C. Occurrence of strange attractors in three dimensional Volterra equations // Phys. Lett. A. 1980. Vol. 79. P. 423.
9. Xiao D., Li W. Limit cycles for competitive three dimensional Lotka–Volterra system // J. Diff. Eqns. 2000. Vol. 164. P. 1.
10. Анонина Е.А., Анонин Ю.М., Базыкин А.Д. Анализ сложного динамического поведения в модели «хищник – две жертвы» // Проблемы экологического мониторинга и моделирования экосистемы. Л. : Гидрометеиздат, 1982. Т. 5. С. 163.
11. Feigenbaum M.J. Quantitative universality for a class of nonlinear transformations // J. of Stat. Phys. 1978. Vol. 19, № 1. P. 25.
12. Lorenz E.N. Deterministic nonperiodic flow // J. Atmos. Sci. 1963. Vol. 20. P. 130.
13. Roessler O.E. An equation for continuous chaos // Phys. Lett. 1976. Vol. 35a. P. 397.
14. Chua L. O., Komuro M., Matsumoto T. The double scroll family // IEEE Trans. Circuits Syst. 1986. Vol. CAS-33, № 11. P. 1072.
15. Анищенко В.С. Сложные колебания в простых системах. М.: Наука, 1990.
16. Arnold L. Random Dynamical Systems. Springer-Verlag, 1998.
17. Бланк М. Л. Конечномерные стохастические аттракторы бесконечномерных динамических систем // Функц. анализ и его прил. 1986. Т. 20:2. С.54.
18. Scheutzow M. Comparison of various concepts of a random attractor: A case study // Arch. Math. 2002. Vol.78. P. 233.
19. Schmalfuss B. The random attractor of the stochastic Lorenz system // ZAMP. 1997. Vol. 48. P. 951.
20. Billings L., Schwartz I.B. Exciting chaos with noise: unexpected dynamics in epidemic outbreaks // J. Math. Biol. 2002. Vol. 44. P. 31.
21. Schenk-Hoppe K.R. Bifurcations of the randomly perturbed logistic map // Discussion Paper № 353, University of Bielefeld: Department of Economics, 1997.
22. Sieber M., Malchow H., Schimansky-Geier L. Constructive effects of environmental noise in an excitable prey-predator plankton system with infected prey // Ecological Complexity. 2007. Vol. 4. P. 223.

23. *Понтрягин Л.С., Андронов А.А., Витт А.А.* О статистическом рассмотрении динамических систем // ЖЭТФ. 1933. Т. 3, вып. 3. С. 165.
24. *Стратонович Р.Л.* Избранные вопросы теории флуктуаций в радиотехнике. М.: Сов. радио, 1961.
25. *Анищенко В.С., Вадивасова Т.Е., Нейман А.Б., Стрелкова Г.И., Шиманский-Гайер Л.* Нелинейные эффекты в хаотических и стохастических системах. Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2003.
26. *McDonnell M. D., Stocks N. G., Pearce C. E. M., Abbott D.* Stochastic resonance: From Suprathreshold Stochastic Resonance to Stochastic Signal Quantization. Cambridge University Press, 2008.
27. *Хорстхемке В., Лефевр Р.* Индуцированные шумом переходы. М: Мир, 1987.
28. *Gassmann F.* Noise-induced chaos-order transitions // Phys. Rev. E. 1997. Vol.55. P. 2215.
29. *Gao J. B., Hwang S. K., Liu J. M.* When can noise induce chaos? // Phys. Rev. Lett. 1999. Vol.82. P.1132.
30. *Bashkirtseva I. A., Ryashko L. B.* Sensitivity analysis of the stochastically and periodically forced Brusselator// Physica A. 2000. Vol. 278. P.126.
31. *Fedotov S., Bashkirtseva I., Ryashko L.* Stochastic dynamo model for subcritical transition // Phys. Rev.E. 2006. Vol. 73. 066307.
32. *Вентцель А.Д., Фрейдлин М.И.* Флуктуации в динамических системах под действием малых случайных возмущений. М.: Наука, 1979.
33. *Башикирцева И.А., Ряшко Л.Б.* Метод квазипотенциала в анализе чувствительности автоколебаний к стохастическим возмущениям // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 1998. Т. 6, № 5. С. 19.
34. *Башикирцева И.А., Ряшко Л.Б.* Метод квазипотенциала в исследовании локальной устойчивости предельных циклов к случайным возмущениям // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2001. Т. 9, № 6. С. 104.
35. *Башикирцева И.А., Карпенко Л.В., Ряшко Л.Б.* Анализ аттракторов стохастически возмущенной модели «хищник – жертва» // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2009. Т. 17, № 2. С. 37.
36. *Ито К.* О стохастических дифференциальных уравнениях// Математика I. 1957. № 1. С.78.
37. *Bashkirtseva I. A., Ryashko L. B.* Stochastic sensitivity of 3D-cycles // Mathematics and computers in simulation. 2004. Vol. 66. P. 55.
38. *Hofbauer J., Sigmund K.* On the stabilizing effect of predators and competitors on ecological communities // J. Math. Biol. 1989. Vol. 27 (5). P. 537.
39. *Paine R. T.* Food web complexity and species diversity // Amer. Natur. 1966. Vol. 100. P. 65.
40. *Vance R. R.* Predation and resource partitioning in one predator-two prey model communities // Amer. Natur. 1978. Vol. 112. P. 797.
41. *Шустер Г.* Детерминированный хаос: Введение. М.: Мир, 1988.

Уральский государственный
университет им. А.М. Горького

Поступила в редакцию
После доработки

25.06.2010
25.09.2010

STOCHASTIC SENSITIVITY OF LIMIT CYCLES FOR «PREDATOR – TWO PREYS» MODEL

I.A. Bashkirtseva, L.V. Karpenko, L.B. Ryashko

We consider the population dynamics model «predator – two preys». A deterministic stability of limit cycles of this three-dimensional model in a period doubling bifurcations zone at the transition from an order to chaos is investigated. Stochastic sensitivity of cycles for additive and parametrical random disturbances is analyzed with the help of stochastic sensitivity function technique. Thin effects of stochastic influences are demonstrated. Growth of stochastic sensitivity of cycles for period doubling under transition from order to chaos is shown. For the index of sensitivity growth the universality low is established.

Keywords: Population dynamics, limit cycle, period doubling, stochastic sensitivity.



Башкирцева Ирина Адольфовна – родилась в 1965 году. Окончила Уральский госуниверситет (1987). Кандидат физико-математических наук (1997), доцент кафедры математической физики Уральского госуниверситета. Область научных интересов – асимптотический анализ и численное моделирование нелинейных стохастических систем.

620083 Екатеринбург, Ленина, 51
Уральский государственный университет им. А.М. Горького
E-mail: irina.bashkirtseva@usu.ru



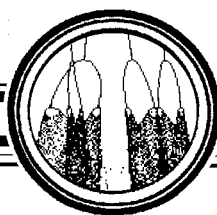
Карпенко Лариса Владимировна – родилась в 1985 году. Окончила Уральский госуниверситет (2008). Аспирант кафедры математической физики Уральского госуниверситета. Область научных интересов – стохастические модели популяционной динамики.

620083 Екатеринбург, Ленина, 51
Уральский государственный университет им. А.М. Горького
E-mail: karpenkolarisa@mail.ru



Ряшко Лев Борисович – родился в 1953 году. Окончил Уральский госуниверситет (1975). Доктор физико-математических наук, профессор кафедры математической физики Уральского госуниверситета. Область научных интересов – устойчивость, стабилизация и управление стохастическими системами. Автор ряда статей по данной тематике.

620083 Екатеринбург, Ленина, 51
Уральский государственный университет им. А.М. Горького
E-mail: lev.ryashko@usu.ru



НА ПУТИ К МНОГОМЕРНЫМ ТОРАМ

А.П. Кузнецов, И.Р. Сатаев, Л.В. Тюрюкина

Обсуждаются задачи о динамике автономной и неавтономной системы трех взаимно связанных автоколебательных осцилляторов, причем во втором случае внешний сигнал непосредственно возбуждает один осциллятор. Выявляются области существования полной синхронизации, двух-, трех- и четырехчастотных торов и хаоса. Выявлены три характерные ситуации внешнего воздействия сигнала на систему трех осцилляторов, одна из которых относится к случаю взаимного захвата автономных осцилляторов, а две других – к их квазипериодическим колебаниям. Показано, что в двух последних случаях многомерные торы не вытесняются хаосом и даже могут доминировать. Для рассматриваемой неавтономной системы обнаружены режимы, когда полная синхронизация внешним сигналом становится невозможной ни при какой амплитуде и частоте сигнала.

Ключевые слова: Синхронизация, фазовые осцилляторы, квазипериодическая динамика, хаос

Введение

Проблема синхронизации многочастотных колебаний является фундаментальной в нелинейной динамике и теории колебаний [1–5]. Исторически концепция поэтапного рождения все более многочастотных движений была выдвинута Ландау и Хопфом [6,7] для объяснения гидродинамической турбулентности. Подход Рюэля и Такенса [8] способствовал распространению мнения о том, что такой сценарий усложнения колебаний должен быть нетипичным – начиная с трехмерных систем многочастотные торы вытесняются хаотическими аттракторами. В последнее время выявлены новые интересные аспекты картины, которые заставляют по-новому взглянуть на задачу о синхронизации многочастотных, в частности, квазипериодических, колебаний высокой размерности. Так, в серии работ [5,9–13] обсуждены и установлены механизмы синхронизации резонансных циклов на торе, которые оказались существенно отличными от синхронизации «обычных» предельных циклов. Эти работы подкреплены радиофизическими экспериментами. В [12–13] использованы фазовые уравнения, описывающие возбуждение двух связанных автоколебательных осцилляторов внешней силой. Показано, что за возникновение трехчастотного режима отвечает бифуркация слияния и исчезновения устойчивой и неустойчивой инвариантных

кривых, чему в исходной системе соответствует аналогичная бифуркация торов. На плоскости частота – амплитуда воздействия область трехчастотных режимов имеет вид «языка», заканчивающегося в точке коразмерности два, в которой сходятся также две линии седло-узловых бифуркаций состояний равновесия, ограничивающие область полной синхронизации осцилляторов [12–13]. В [14] дан анализ той же плоскости параметров с использованием метода карт показателей Ляпунова, который выявил большое число резонансных двухчастотных режимов. Исследовались две качественно разные ситуации, которые отвечают режиму захвата двух автономных осцилляторов и режиму биений. В последнем случае появляется амплитудный порог полной синхронизации, и режимы трехчастотной квазипериодичности могут реализоваться даже при малой амплитуде сигнала.

Для обсуждения проблемы более многомерных торов необходимо повысить размерность системы и тем самым перейти к задаче о вынужденной синхронизации трех связанных автоколебательных осцилляторов. В качестве первого шага однако нужно рассмотреть в стиле работ [12–14] динамику трех взаимно связанных фазовых осцилляторов. Таким образом, в настоящей работе обсуждаются следующие вопросы:

- как располагаются в пространстве параметров трех диссипативно связанных фазовых осцилляторов области полной и частичной синхронизации, а также трехчастотной и двухчастотной квазипериодичности (включая резонансные режимы);
- какие качественно разные типы поведения демонстрирует неавтономная система трех возбуждаемых осцилляторов в зависимости от «внутренней» настройки параметров системы;
- типичны ли режимы трех- и четырехчастотной квазипериодичности в неавтономной системе трех фазовых осцилляторов и вытесняются ли многочастотные режимы хаотическими.

При обсуждении этих вопросов важно «отталкиваться» от физической постановки задачи, для чего в краткой форме приводится вывод соответствующих фазовых уравнений, использующий методику решения аналогичных задач для связанных осцилляторов ван дер Поля.

Отметим, что задача о динамике трех взаимно связанных фазовых осцилляторов в значительной мере исследовалась (например, фундаментальные монографии [2,3] или [15]). Здесь однако она представляет интерес несколько в ином контексте, что будет ясно из дальнейшего. Кроме того, ее обсуждение необходимо как предварительный этап для перехода к неавтономной системе трех осцилляторов. Следует отметить также, что исследование фазовых систем представляет интерес и в контексте динамики ансамблей из фазоуправляемых генераторов – систем фазовой автоподстройки частоты (ФАП) [15–17]. В рамках укороченных уравнений вопросы синхронизации многомодовых генераторов обсуждались также в [18].

1. Фазовая динамика трех связанных автоколебательных осциллятора

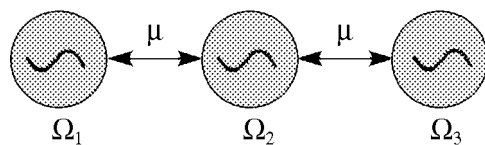


Рис. 1. Схематическое изображение трех связанных автоколебательных осцилляторов

1.1. Фазовые уравнения. Рассмотрим систему трех диссипативно связанных осцилляторов ван дер Поля, соединенных в цепочку, как показано на рис. 1. Система дифференциальных уравнений, описывающая взаимо-

действие таких осцилляторов, имеет вид

$$\begin{aligned}\ddot{x} - (\lambda - x^2)\dot{x} + x + \mu(\dot{x} - \dot{y}) &= 0, \\ \ddot{y} - (\lambda - y^2)\dot{y} + (1 + \Delta_1)y + \mu(\dot{y} - \dot{x}) + \mu(\dot{y} - \dot{z}) &= 0, \\ \ddot{z} - (\lambda - z^2)\dot{z} + (1 + \Delta_2)z + \mu(\dot{z} - \dot{y}) &= 0.\end{aligned}\quad (1)$$

Здесь λ – параметр возбуждения автономных осцилляторов, Δ_1 – частотная расстройка второго осциллятора относительно первого, Δ_2 – частотная расстройка третьего относительно первого, μ – коэффициент диссипативной связи. Частота первого осциллятора принята за единицу.

Если параметр возбуждения λ мал, то для анализа уравнений (1) можно применить метод медленно меняющихся амплитуд [1–5,19]. С этой целью представим динамические переменные в виде

$$x = ae^{it} + a^*e^{-it}, \quad y = be^{it} + b^*e^{-it}, \quad z = ce^{it} + c^*e^{-it}.\quad (2)$$

Здесь $a(t)$, $b(t)$ и $c(t)$ – комплексные амплитуды осцилляторов, которые будем полагать медленно меняющимися на фоне колебаний с единичной частотой.

Наложим традиционные для такого метода дополнительные условия [19]

$$\dot{a}e^{it} + \dot{a}^*e^{-it} = 0, \quad \dot{b}e^{it} + \dot{b}^*e^{-it} = 0, \quad \dot{c}e^{it} + \dot{c}^*e^{-it} = 0.\quad (3)$$

Тогда имеем следующие выражения для скоростей осцилляторов:

$$\dot{x} = i(ae^{it} - a^*e^{-it}), \quad \dot{y} = i(be^{it} - b^*e^{-it}), \quad \dot{z} = i(ce^{it} - c^*e^{-it}).\quad (4)$$

Подставим соотношения (2)–(4) в уравнения (1), умножим полученные выражения на e^{-it} и проведем усреднение для исключения быстро осциллирующих членов. После соответствующих преобразований приходим к следующим укороченным уравнениям:

$$\begin{aligned}2\dot{a} &= \lambda a - |a|^2 a - \mu(a - b), \\ 2\dot{b} &= \lambda b - |b|^2 b + i\Delta_1 b - \mu_1(b - a) - \mu(b - c), \\ 2\dot{c} &= \lambda c - |c|^2 c + i\Delta_2 c - \mu(c - b).\end{aligned}\quad (5)$$

В полученных уравнениях управляющий параметр λ можно убрать следующей перенормировкой переменных и параметров:

$$a = \sqrt{\lambda}\bar{a}, \quad b = \sqrt{\lambda}\bar{b}, \quad c = \sqrt{\lambda}\bar{c}, \quad t = \bar{t}/\lambda, \quad \mu = \lambda\bar{\mu}, \quad \Delta_{1,2} = \lambda\bar{\Delta}_{1,2}.\quad (6)$$

В дальнейшем для сокращения записи черту над нормированными величинами будем опускать. Положим далее $a = Re^{i\psi_1}$, $b = re^{i\psi_2}$ и $c = ve^{i\psi_3}$ где R , r , v –

действительные амплитуды, а $\psi_{1,2,3}$ – фазы осцилляторов. Кроме того, в уравнениях для фаз вслед за [1–3] будем считать, что осцилляторы движутся в окрестностях стационарных невозмущенных орбит $R = r = v = 1$. Тогда получим

$$\begin{aligned}\dot{\psi}_1 &= \frac{\mu}{2} \sin(\psi_2 - \psi_1), \\ \dot{\psi}_2 &= \frac{\Delta_1}{2} + \frac{\mu}{2} \sin(\psi_1 - \psi_2) + \frac{\mu}{2} \sin(\psi_3 - \psi_2), \\ \dot{\psi}_3 &= \frac{\Delta_2}{2} + \frac{\mu}{2} \sin(\psi_2 - \psi_3).\end{aligned}\tag{7}$$

Вводя относительные фазы осцилляторов

$$\theta = \psi_1 - \psi_2, \quad \varphi = \psi_2 - \psi_3,\tag{8}$$

приходим к фазовым уравнениям

$$\begin{aligned}\dot{\theta} &= -\frac{\Delta_1}{2} - \mu \sin \theta + \frac{\mu}{2} \sin \varphi, \\ \dot{\varphi} &= \frac{\Delta_1 - \Delta_2}{2} - \mu \sin \varphi + \frac{\mu}{2} \sin \theta.\end{aligned}\tag{9}$$

При выключенной связи из (7) получаем следующие выражения для собственных частот первого, второго и третьего осцилляторов в принятой нормировке:

$$\Omega_1 = 0, \quad \Omega_2 = \frac{\Delta_1}{2}, \quad \Omega_3 = \frac{\Delta_2}{2}.\tag{10}$$

Для дальнейшего анализа понадобятся значения частот захвата пар первый-второй и второй-третий осциллятор Ω_{1-2} и Ω_{2-3} при выключенной связи с оставшимся. Поскольку в случае диссипативной связи два осциллятора захватываются на частоте, являющейся средним арифметическим собственных частот [2], то

$$\Omega_{1-2} = \frac{\Omega_1 + \Omega_2}{2} = \frac{\Delta_1}{4}, \quad \Omega_{2-3} = \frac{\Omega_2 + \Omega_3}{2} = \frac{\Delta_1 + \Delta_2}{4}.\tag{11}$$

1.2. Условие полной синхронизации трех осцилляторов. Найдем теперь условия полной синхронизации трех связанных осцилляторов (7), то есть режима, когда реализуется точный захват фаз всех трех осцилляторов. В этом случае $\dot{\psi}_1 = \dot{\psi}_2 = \dot{\psi}_3$. Тогда $\dot{\theta} = 0$ и $\dot{\varphi} = 0$, и из (9) находим выражения для относительных фаз

$$\begin{aligned}\mu \sin \theta &= -\frac{\Delta_1 + \Delta_2}{3}, \\ \mu \sin \varphi &= \frac{\Delta_1 - 2\Delta_2}{3}.\end{aligned}\tag{12}$$

Отсюда следуют уравнения границ области захвата

$$\mu = \pm \frac{\Delta_1 + \Delta_2}{3},\tag{13}$$

$$\mu = \pm \frac{\Delta_1 - 2\Delta_2}{3}.\tag{14}$$

В пространстве параметров $(\Delta_1, \Delta_2, \mu)$ условия (13), (14) задают некоторые поверхности. Фиксируем одну из расстроек, например Δ_2 , и изучим устройство плоскости частотная расстройка Δ_1 – величина связи μ . На плоскости (Δ_1, μ) условия (13), (14) задают линии, показанные на рис. 2. Они определяют два языка традиционного вида с вершинами в точках

$$\Delta_1 = -\Delta_2, \quad \Delta_1 = 2\Delta_2. \quad (15)$$

Появление таких значений частотных расстроек имеет простое физическое объяснение. Разобьем исследуемую систему на две подсистемы, как показано на рис. 3, *а*. Частота захвата кластера из второго и третьего осцилляторов как единого целого в соответствии с (11) равна Ω_{2-3} . Условие резонанса этой частоты с частотой первого осциллятора следующее:

$$\Omega_1 = \Omega_{2-3}.$$

Подставляя сюда выражения для соответствующих частот из (10,11), получаем первое из условий (15). Если же разбить три осциллятора на две подсистемы, как показано на рис. 3, *б*, то получим резонансное условие

$$\Omega_{1-2} = \Omega_3.$$

Используя (10) и (11), в этом случае приходим ко второму условию (15).

Однако в отличие от случая двух осцилляторов, языки с вершинами в точках (15) при малой величине связи не отвечают состояниям равновесия. Обсудим этот вопрос подробнее. Внутри области P на рис. 2 в системе имеются четыре неподвижных точки: устойчивый и неустойчивый узел и два седла. Соответствующий фазовый портрет показан на рис. 4, *а*. Устойчивый узел отвечает за режим полной синхронизации. При выходе из области P при пересечении ее границы все четыре точки попарно сливаются, причем соответствующие бифуркации относятся к типу бифуркаций петли сепаратрисы седло-узловой положения равновесия. Пороговая ситуация показана на рис. 4, *б*. После этого равновесия исчезают, и остаются устойчивая и неустойчивая инвариантные кривые (рис. 4, *в*). При этом режим полной синхронизации разрушается с возникновением двухчастотных колебаний.

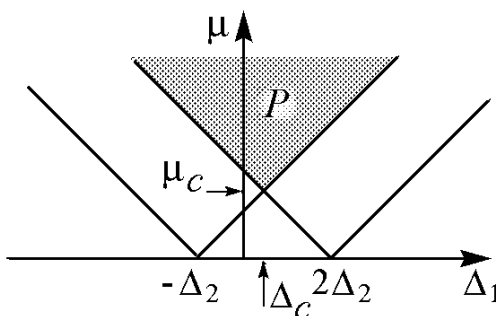


Рис. 2. Область полного захвата трех фазовых осцилляторов P и квазипериодических режимов (белый цвет). Линии отвечают условиям (13) и (14)

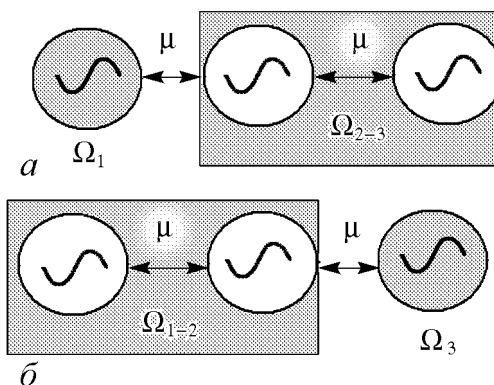


Рис. 3. Объединение трех связанных осцилляторов в подсистемы

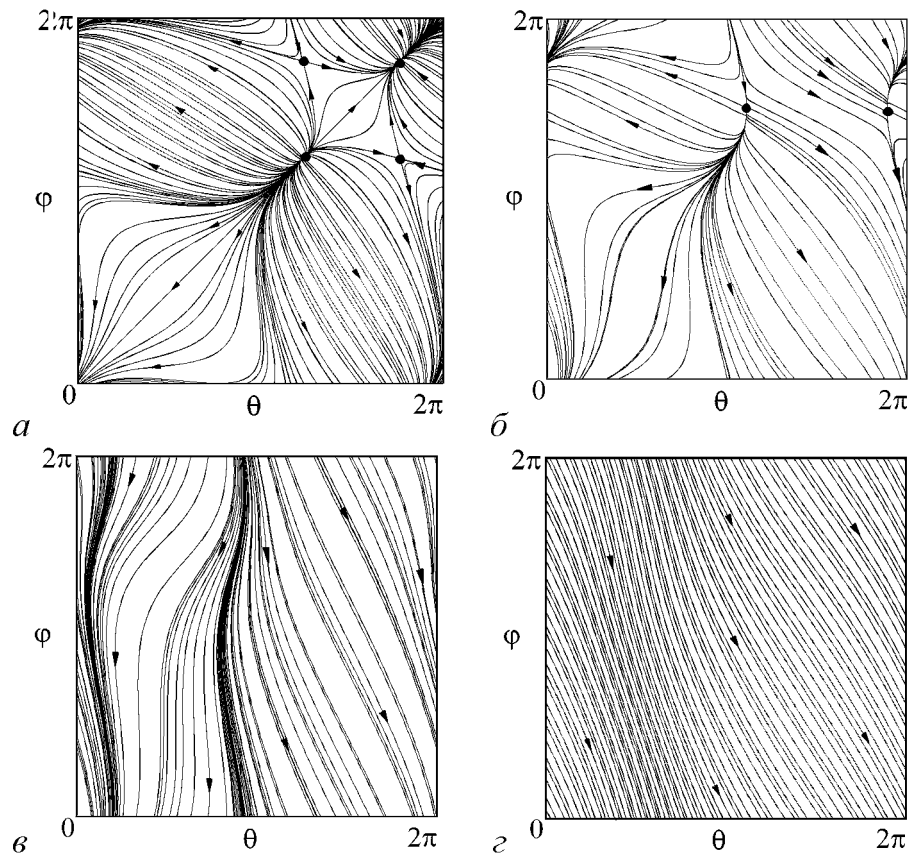


Рис. 4. Фазовые портреты системы (9) при $\Delta_2 = 1$: $a - \Delta_1 = 0.5, \mu = 0.75$; $b - \Delta_1 = -0.25, \mu = 0.75$; $v - \Delta_1 = -0.25, \mu = 0.25$; $z - \Delta_1 = -1.0, \mu = 0.25$

Как можно видеть из рис. 4, v , фаза θ осциллирует около положения равновесия. Поскольку, по определению, θ – относительная фаза первого и второго осцилляторов, это означает, что осцилляторы частично взаимно захвачены (см. рис. 3, b). Если затем уменьшить (с учетом знака) частотную расстройку Δ_1 , то устойчивая и неустойчивая инвариантные кривые сливаются, режим двухчастотного тора разрушается и возникает режим трехчастотных колебаний, которому отвечает «поток» фазовых траекторий на фазовой плоскости (рис. 4, z).

Поясним механизм наблюдаемого поведения. Из соотношений (12) видно, что решения появляются парами: θ_1 и θ_2 для первого уравнения, φ_1 и φ_2 – для второго. При этом имеют место четыре неподвижные точки: $(\varphi_1, \theta_1), (\varphi_1, \theta_2), (\varphi_2, \theta_1), (\varphi_2, \theta_2)$. На фазовой плоскости они располагаются в вершинах прямоугольника (рис. 5, a). Их устойчивые и неустойчивые многообразия образуют замкнутый гетероклинический контур, как схематически показано на рисунке. Будем теперь варьировать одну из комбинаций параметров, стоящих в правых частях (12), например, вторую. Тогда решения θ_1 и θ_2 не меняются, а решения φ_1 и φ_2 сближаются. При выполнении условия (14) они сливаются. На рис. 5, b это будет отвечать одновременному слиянию пар состояний равновесия. После такой бифуркации остаются два многообразия, обозначенные M_1 и M_2 . Из них и возникают неустойчивая и устойчивая инвариантные кривые, причем вторая отвечает за режим частичного

захвата первого и второго осцилляторов. Если выйти через другую границу области полной синхронизации, то сливаются решения θ_1 и θ_2 и возникает режим частичного взаимного захвата второго и третьего осцилляторов¹ (см. рис. 3, а).

Две линии седло-узловых бифуркаций описанного типа сходятся на рис. 2 в точке, которую легко найти, совмещая (13) и (14),

$$\mu_c = \frac{\Delta_2}{2}, \quad \Delta_c = \frac{\Delta_2}{2}. \quad (16)$$

Эти значения отмечены стрелочками на рис. 2. Таким образом, область полной синхронизации имеет пороговый характер по величине связи, что отличает обсуждаемую ситуацию от случая двух связанных осцилляторов.

Вычислим теперь частоту захвата трех осцилляторов. Подставляя в любое из уравнений (7) условия (12), получаем

$$\dot{\psi}_1 = \dot{\psi}_2 = \dot{\psi}_3 = \frac{\Delta_1 + \Delta_2}{6}. \quad (17)$$

С учетом (10) это отвечает тому, что три осциллятора захватываются на частоте Ω^* , являющейся средним арифметическим собственных частот:

$$\Omega^* = \frac{\Omega_1 + \Omega_2 + \Omega_3}{3} = \frac{\Delta_1 + \Delta_2}{6}. \quad (18)$$

1.3. Различные режимы динамики трех осцилляторов. Проведенный выше анализ касался простейших режимов колебаний трех связанных осцилляторов. Для более полного исследования необходимо детально проанализировать устройство пространства параметров, привлекая численные методы и идентифицируя при этом режимы двух и трехчастотной квазипериодичности. С этой целью можно использовать численное определение сигнатуры спектра показателей Ляпунова, как это сделано, например, в [20,21,14]. При этом необходимо численно определить количество нулевых показателей. Равенство нулю показателей Ляпунова проверялось с точностью до допуска, величина которого составляла 10^{-3} . Точность вычисления самих показателей составляла порядка 10^{-4} . Следует отметить при этом, что вид карт на плоскости параметров не меняется существенно при увеличении длительности и точности расчетов и определенного уменьшения «невязки». Как и в [14], результаты будем представлять в виде карты, на которой разными цветами фиксируются типы динамики с разной сигнатурой спектра показателей Ляпунова. С этой целью вычисляются оба показателя Ляпунова системы (9) Λ_1, Λ_2 в каждой точке плоскости

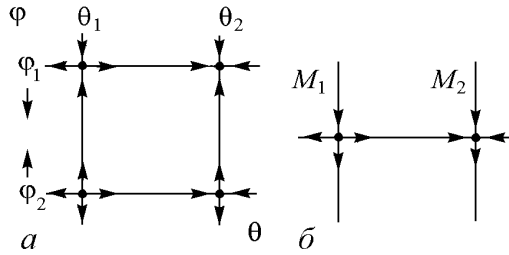


Рис. 5. а – «Каркас» из состояний равновесия и их многообразий системы (10), б – ситуация на пороге разрушения полной синхронизации

¹Эта картина обсуждается столь подробно, поскольку в данном случае она описывается во многом аналитически. Гомоклинические бифуркации более сложных типов играют важную роль в картине синхронизации сетей из небольшого числа фазовых осцилляторов [27,28].

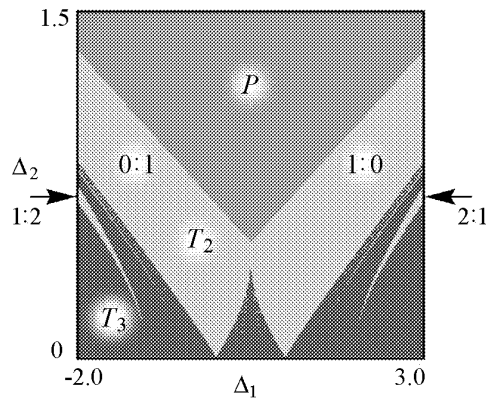


Рис. 6. Карта ляпуновских показателей трех связанных фазовых осцилляторов, $\Delta_2 = 1$

T_3 – трехчастотный тор. Эти термины весьма удобно использовать при характеристике режимов, что и будем делать далее. При этом нужно иметь в виду, что речь идет все же о двухчастотных и трехчастотных режимах, описанных с помощью фазовых уравнений.

Полученная карта системы (9) представлена на рис. 6. Анализируя этот рисунок, прежде всего отмечаем наличие области точного захвата всех трех осцилляторов P , которая отвечает аналитическому рассмотрению. В частности, выявляется амплитудный порог полной синхронизации трех осцилляторов. Область трехчастотной квазипериодичности занимает нижнюю часть карты. В нее погружены области двухчастотной квазипериодичности, имеющие вид характерных языков. Острия этих языков лежат на оси частотной расстройки.

В режиме двухчастотной квазипериодичности T_2 на «фазовом квадрате» $0 < \theta < 2\pi$, $0 < \varphi < 2\pi$ аттрактором системы (9) является инвариантная кривая (см. рис. 4, в). Такие режимы можно классифицировать с помощью величины $w = p : q$, где числа p и q отвечают количеству пересечений инвариантной кривой с вертикальной и горизонтальной сторонами фазового квадрата [22,23]. Поскольку фазовое пространство системы 2π -периодично по каждой переменной θ и φ , то оно может быть по ним замкнуто, так что образуется тор. При этом число $w = p : q$ определяет число вращения на этом торе [22,23].

Для простейших режимов числа вращения двухчастотных режимов легко определяются визуально по фазовым портретам, например, для рис. 4, в имеем $w = 0 : 1$. Однако для получения более детальной картины следует иметь удобный численный метод, пригодный для анализа всей плоскости параметров. Для этого можно модифицировать метод карт динамических режимов [24]. Выполним сечения Пуанкаре системы (9) линиями $\theta = 0$ и $\varphi = 0$ и определим числа p и q – период получаемого дискретного отображения в соответствующем сечении. При этом поскольку фаза может осциллировать, то нужно учитывать только существенные пересечения. Так, если траектория покидает фазовый квадрат через верхнюю границу и снова входит в него через нижнюю, значение p увеличивается на единицу, а если наоборот – уменьшается. Аналогично – для правой и левой границ.

Затем каждая точка плоскости параметров окрашивается в свой цвет в соответствии с величиной числа вращения. В результате получаем своего рода «карту торов», которая для наиболее интересных фрагментов плоскости параметров показана на рис. 7. Для удобства на более «крупномасштабной» ляпуновской карте на рис. 6 также указаны числа вращения основных режимов.

параметров (Δ_1, μ) . Затем эта плоскость окрашивается в соответствии с величиной показателей, так чтобы визуализировать следующие режимы:

- P – наличие устойчивой неподвижной точки (точный захват фаз), $\Lambda_1 < 0$, $\Lambda_2 < 0$;
- T_2 – двухчастотный квазипериодический режим, $\Lambda_1 = 0$, $\Lambda_2 < 0$;
- T_3 – трехчастотный квазипериодический режим $\Lambda_1 = 0$, $\Lambda_2 = 0$.

Отметим, что режиму T_2 в исходной системе (1) в фазовом пространстве отвечает двухчастотный тор, а режиму

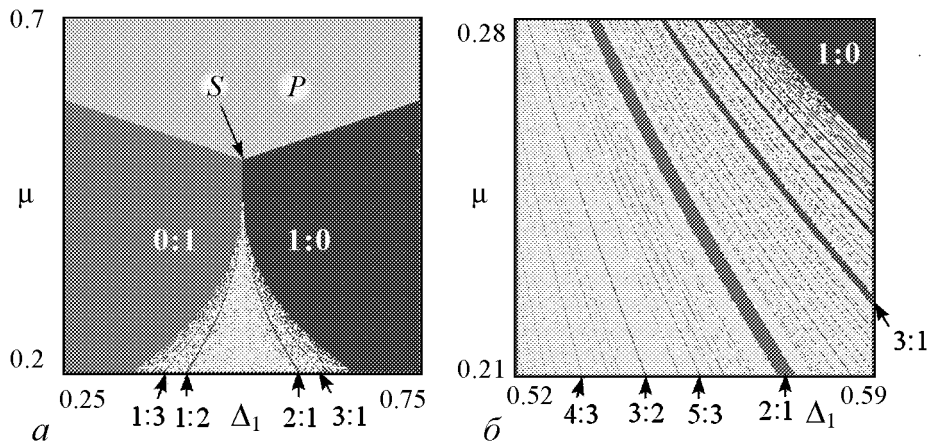


Рис. 7. «Карта торов» трех связанных фазовых осцилляторов в окрестности точки коразмерности два, обозначенной буквой S , $\Delta_2 = 1$

Самые большие языки резонансных двухчастотных торов на рис. 7 имеют числа вращения $w = 0 : 1$ и $w = 1 : 0$. В первом случае относительная фаза первого и второго осцилляторов осциллирует около равновесного значения (осцилляторы частично захвачены), в то время как фаза третьего неограниченно нарастает. Для $w = 1 : 0$ частично захвачена относительная фаза второго и третьего осцилляторов.

На рис. 7, *a* можно видеть очень сложное устройство плоскости параметров, которое на самом деле имеет место в окрестности точки (16), отвечающей порогу полной синхронизации и обозначенной S на карте. Так, область трехчастотных торов пронизана целой системой языков резонансных двухчастотных торов, самые широкие из которых имеют числа вращения $1 : 2$ и $2 : 1$, следующие – числа вращения $1 : 3$ и $3 : 1$ и т.д. О многообразии возможных двухчастотных торов можно судить по увеличенному фрагменту карты на рис. 7, *б*, на котором фиксируются области резонансных торов с числами вращения $4 : 3$, $3 : 2$, $5 : 3$ и т.д. При этом все языки имеют вершины в точке S .

Наличие точек такого типа, по-видимому, характерный атрибут задач о трехчастотной квазипериодичности. Так, аналогичные точки были представлены в работе [25] для связанных отображений поворота, моделирующих динамику связанных осцилляторов (рис. 4.21 в [25].) Там они получили название *saddle node fan* – «седлоузловой веер» в соответствии с характерным расположением системы высших языков двухчастотных торов. Например, об их наличии «сигнализирует» вид плоскости параметров в радиоэлектронном эксперименте [26]. Аналогичная точка для возбуждаемой системы двух осцилляторов наблюдается на иллюстрациях в [12,13] (правда, не представлены языки двухчастотных торов высокого порядка).

2. Неавтономная система трех фазовых осцилляторов

2.1. Фазовые уравнения возбуждаемой системы трех осцилляторов. Рассмотренная выше ситуация являлась простейшим примером появления двух- и трехчастотных колебаний. В духе подхода Ландау–Хопфа за этим следует рассмотреть ситуацию, когда возможными становятся четырехчастотные торы. Физически соответствующая постановка задачи получается, если добавить в систему (1) внешнее воздействие.

Рассмотрим систему трех диссипативно связанных осцилляторов ван дер Поля, возбуждаемых внешней силой

$$\begin{aligned} \ddot{x} - (\lambda - x^2)\dot{x} + x + \mu(\dot{x} - \dot{y}) &= B \sin \omega t, \\ \ddot{y} - (\lambda - y^2)\dot{y} + (1 + \Delta_1)y + \mu(\dot{y} - \dot{x}) + \mu(\dot{y} - \dot{z}) &= 0, \\ \ddot{z} - (\lambda - z^2)\dot{z} + (1 + \Delta_2)z + \mu(\dot{z} - \dot{y}) &= 0. \end{aligned} \quad (19)$$

Здесь обозначения те же, что и в (1), а B и ω – амплитуда и частота внешней силы, соответственно.

Как и принято для метода медленно меняющихся амплитуд для неавтономных систем [1,19], в качестве «опорного» используем колебание на частоте сигнала, полагая

$$x = ae^{i\omega t} + a^*e^{-i\omega t}, \quad y = be^{i\omega t} + b^*e^{-i\omega t}, \quad z = ce^{i\omega t} + c^*e^{-i\omega t}. \quad (20)$$

Здесь $a(t)$, $b(t)$ и $c(t)$ – комплексные амплитуды осцилляторов. Накладывая дополнительное условие, аналогичное (3), получаем для скоростей осцилляторов

$$\dot{x} = i\omega(ae^{i\omega t} - a^*e^{-i\omega t}), \quad \dot{y} = i\omega(be^{i\omega t} - b^*e^{-i\omega t}), \quad \dot{z} = i\omega(ce^{i\omega t} - c^*e^{-i\omega t}). \quad (21)$$

Подставляя (20) и (21) в (19) и оставляя лишь слагаемые, изменяющиеся по закону $e^{i\omega t}$ (остальные являются быстро осциллирующими на этом фоне и исчезают при усреднении), получим

$$\begin{aligned} 2\dot{a} &= \lambda a - |a|^2 a + i\frac{1 - \omega^2}{\omega} a - \mu(a - b) - \frac{B}{2\omega}, \\ 2\dot{b} &= \lambda b - |b|^2 b + i\frac{1 - \omega^2 + \Delta_1}{\omega} b - \mu(b - a) - \mu(b - c), \\ 2\dot{c} &= \lambda c - |c|^2 c - i\frac{1 - \omega^2 + \Delta_2}{\omega} c - \mu(c - b). \end{aligned} \quad (22)$$

При условии $\lambda \ll 1$ можно использовать, что $\omega \approx 1$, и положить $(1 - \omega^2 + \Delta)/(2\omega) \approx 1 - \omega + \Delta/2$ и $B/\omega \approx B$. Кроме того, используя замену переменных, аналогичную (6), можно устранить параметр λ . В результате получаем

$$\begin{aligned} 2\dot{a} &= a - |a|^2 a - 2i\Omega - \mu(a - b) - \frac{B}{2}, \\ 2\dot{b} &= b - |b|^2 b - i(2\Omega - \Delta_1)b - \mu(b - a) - \mu(b - c), \\ 2\dot{c} &= c - |c|^2 c - i(2\Omega - \Delta_2) - \mu(c - b). \end{aligned} \quad (23)$$

Здесь $\Omega \approx (\omega - 1)/\lambda$ – безразмерная отстройка частоты сигнала от единичной.

Уравнения для фаз получаем, полагая в (23) $a = Re^{i\psi_1}$, $b = re^{i\psi_2}$ и $c = ve^{i\psi_3}$. В этом случае фазы определены относительно внешнего сигнала. Считая, что осцилляторы движутся вблизи автономных орбит $R = r = v = 1$, для фаз осцилляторов

получаем

$$\begin{aligned}\dot{\psi}_1 &= -\Omega - \frac{\mu}{2} \sin \theta + b \sin \psi_1, \\ \dot{\psi}_2 &= -\Omega + \frac{\Delta_1}{2} + \frac{\mu}{2} \sin \theta - \frac{\mu}{2} \sin \varphi, \\ \dot{\psi}_3 &= -\Omega + \frac{\Delta_2}{2} + \frac{\mu}{2} \sin \varphi.\end{aligned}\tag{24}$$

Здесь введены относительные фазы осцилляторов

$$\theta = \psi_1 - \psi_2, \quad \varphi = \psi_2 - \psi_3.\tag{25}$$

2.2. Условия полной синхронизации трех осцилляторов внешней силой.

Найдем условие полной синхронизации трех осцилляторов внешней силой. Полагая в (24) $\dot{\psi}_1 = \dot{\psi}_2 = \dot{\psi}_3$, получаем

$$\begin{aligned}\Omega &= -\frac{\mu}{2} \sin \theta + b \sin \psi_1, \\ \Omega - \frac{\Delta_1}{2} &= \frac{\mu}{2} \sin \theta - \frac{\mu}{2} \sin \varphi, \\ \Omega - \frac{\Delta_2}{2} &= \frac{\mu}{2} \sin \varphi.\end{aligned}\tag{26}$$

Разрешим эти уравнения относительно синусов фаз

$$\begin{aligned}3\Omega - \frac{\Delta_1 + \Delta_2}{2} &= b \sin \psi_1, \\ 2\Omega - \frac{\Delta_1 + \Delta_2}{2} &= \frac{\mu}{2} \sin \theta, \\ \Omega - \frac{\Delta_2}{2} &= \frac{\mu}{2} \sin \varphi.\end{aligned}\tag{27}$$

Отсюда легко находим условия седло-узловых бифуркаций

$$\begin{aligned}b &= \pm 3 \left(\Omega - \frac{\Delta_1 + \Delta_2}{6} \right), \\ \Omega &= \frac{\Delta_1 + \Delta_2}{4} \pm \frac{\mu}{4}, \\ \Omega &= \frac{\Delta_2}{2} \pm \frac{\mu}{2}.\end{aligned}\tag{28}$$

Входящие в эти уравнения значения частотных расстроек имеют простой физический смысл. $\Omega^* = (\Delta_1 + \Delta_2)/6$ – частота захвата трех автономных осцилляторов, $\Omega_{2-3} = (\Delta_1 + \Delta_2)/4$ – частота захвата второго и третьего при отключенном первом, а $\Omega_3 = \Delta_2/2$ – собственная частота третьего осциллятора.

По аналогии с обсуждением раздела 1.2 из соотношений (27) заключаем, что в режиме полной синхронизации система имеет ровно восемь состояний равновесия. Решения каждого из уравнений (27) появляются парами, так что в трехмерном пространстве $(\psi_1, \theta, \varphi)$ состояния равновесия располагаются в вершинах параллелепипеда. При вариации любой из комбинаций параметров в левой части (27) две

грани этого параллелепипеда будут сближаться, а другие будут неподвижными. При выполнении одного из условий (28) две соответствующие грани сливаются. Таким образом, в системе (24) при разрушении режима полной синхронизации одновременно попарно сливаются все восемь неподвижных точек. Эта картина аналогична рис. 5, только имеет место в трехмерном фазовом пространстве.

Обратимся теперь к устройству плоскости параметров частота – амплитуда воздействия (Ω, b) системы (24). Первое условие (28) задает на ней язык с вершиной, отвечающей центральной частоте трех осцилляторов Ω^* , как показано на рис. 8. Второе условие (28) определяет полосу, центр которой отвечает частоте взаимного захвата второго и третьего осцилляторов Ω_{2-3} , а ширина $\mu/2$ определяется величиной связи. Третье условие (28) также задает полосу, центр которой соответствует собственной частоте третьего осциллятора Ω_3 , а ширина равна точно константе связи μ .

При вариации параметров осцилляторов $(\Delta_1, \Delta_2, \mu)$ взаимное положение языка и двух указанных полос будет меняться. При этом реализуется достаточно большое количество вариантов. Они однако разбиваются на следующие три характерные группы в соответствии с рис. 8:

- а) полосы имеют общую область, которая захватывает вершину языка (рис. 8, а);
- б) полосы имеют общую область, однако она не захватывает вершину языка (рис. 8, б);
- в) обе полосы не имеют общей области (рис. 8, в).

Эти три ситуации определяют три типа динамики возбуждаемых осцилляторов. В случае а) в системе возможен полный захват трех осцилляторов внешней силой, причем амплитудный порог синхронизации отсутствует. В случае б) полный захват также возможен, но имеет место порог по амплитуде. В случае в) полный захват невозможен.

Отметим, что первые два случая имеют аналоги для задачи о возбуждении двух осцилляторов [12,14], а третий – нет. Итак, особенность системы из трех осцилляторов в том, что их можно «настроить» так, что полный захват внешней силой невозможен ни при каких значениях частоты и амплитуды сигнала.

Какой тип поведения из трех перечисленных реализуется, зависит от параметров автономных осцилляторов. Полезно указать конфигурацию соответствующих областей в пространстве этих параметров. Из (28) нетрудно получить, что две полосы не имеют общей области, если $\mu < (\Delta_1 - \Delta_2)/3$ или $\mu < (\Delta_2 - \Delta_1)/3$. В свою

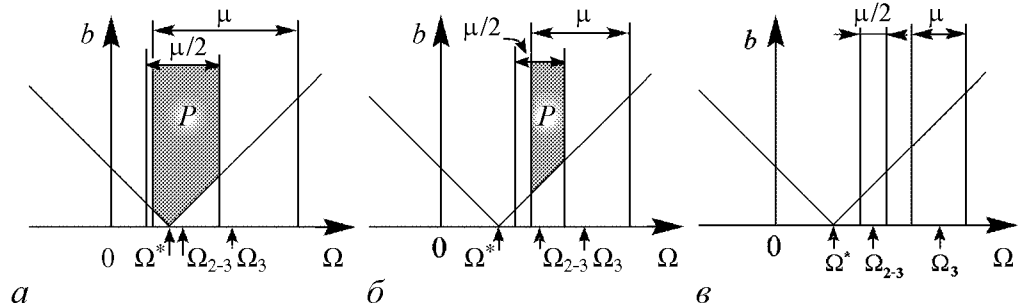


Рис. 8. Три основных типа устройства плоскости параметров частота – амплитуда воздействия (Ω, b) системы (24). Выделена область P полного захвата трех осцилляторов внешним сигналом

очередь, первая полоса захватывает вершину языка, если $\mu > (\Delta_1 - 2\Delta_2)/3$. Если $\mu > (2\Delta_2 - \Delta_1)/3$, то вторая полоса захватывает вершину языка.

Суммарный рисунок показан на рис. 9. На нем более темным цветом показана область, соответствующая ситуации а). Замечательно, что она одновременно отвечает взаимному захвату трех осцилляторов в отсутствие внешнего сигнала. Светло-серым цветом показаны значения параметров, которые отвечают ситуации б), и белым – ситуации в).

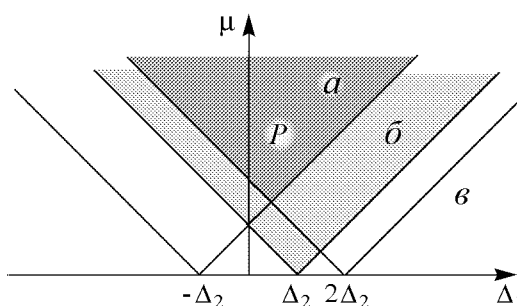


Рис. 9. Области на плоскости «внутренних» параметров системы трех осцилляторов, отвечающие трем типам а), б), в) устройства плоскости частота – амплитуда воздействия неавтономной системы на рис. 8

2.3. Многочастотные режимы. Карты показателей Ляпунова. Обратимся теперь к численному исследованию плоскости параметров частота – амплитуда воздействия (Ω, b) возбуждаемой внешним сигналом системы трех связанных осцилляторов (24). Параметры автономных осцилляторов выбираем следующим образом. Фиксируем частотные расстройки осцилляторов $\Delta_1 = 0.3$, $\Delta_2 = 1$ и используем три значения величины связи: а) $\mu = 0.65$, б) $\mu = 0.4$, в) $\mu = 0.15$. В этом случае реализуются режимы, отвечающие трем ситуациям, показанным на рис. 8, а, б, в. На рис. 10 представлены полученные численно соответствующие карты показателей Ляпунова. Отметим, что размерность системы (24) равна трем, поэтому она характеризуется тремя показателями Ляпунова.

На рисунке показаны области следующих режимов:

- P – наличие устойчивой неподвижной точки, $\Lambda_1 < 0$, $\Lambda_2 < 0$, $\Lambda_3 < 0$;
- T_2 – режим, отвечающий двухчастотному тору, $\Lambda_1 = 0$, $\Lambda_2 < 0$, $\Lambda_3 < 0$;
- T_3 – режим, отвечающий трехчастотному тору, $\Lambda_1 = 0$, $\Lambda_2 = 0$, $\Lambda_3 < 0$;
- T_4 – режим, отвечающий четырехчастотному тору, $\Lambda_1 = 0$, $\Lambda_2 = 0$, $\Lambda_3 = 0$;
- C – хаотический режим, $\Lambda_1 > 0$, $\Lambda_2 < 0$, $\Lambda_3 < 0$.

Если связь между осцилляторами велика, то вид карты на рис. 10, а соответствует случаю возбуждения двух осцилляторов [12–14]. Наблюдаются режимы полной синхронизации и двух-, и трехчастотных торов. При этом область полной синхронизации P имеет вид языка с острием точно на частоте взаимного захвата трех автономных осцилляторов Ω^* . Области трехчастотных торов имеют вид языков, вытянутых к точкам, в которых пересекаются две граничные линии области полной синхронизации. Более детальный анализ типов двухчастотных торов выявляет однако определенные отличия от случая возбуждения двух осцилляторов, как показано ниже.

Ситуация существенным образом меняется при переходе к случаю «умеренной» связи, когда осцилляторы в отсутствие внешнего сигнала не захвачены, рис. 10, б. Появляются два новых типа режимов – четырехчастотные торы и хаос. Эти типы динамики приходят на смену областям трехчастотных торов на рис. 10, а и располагаются как раз в области их локализации. Кроме того, исчезает амплитудный

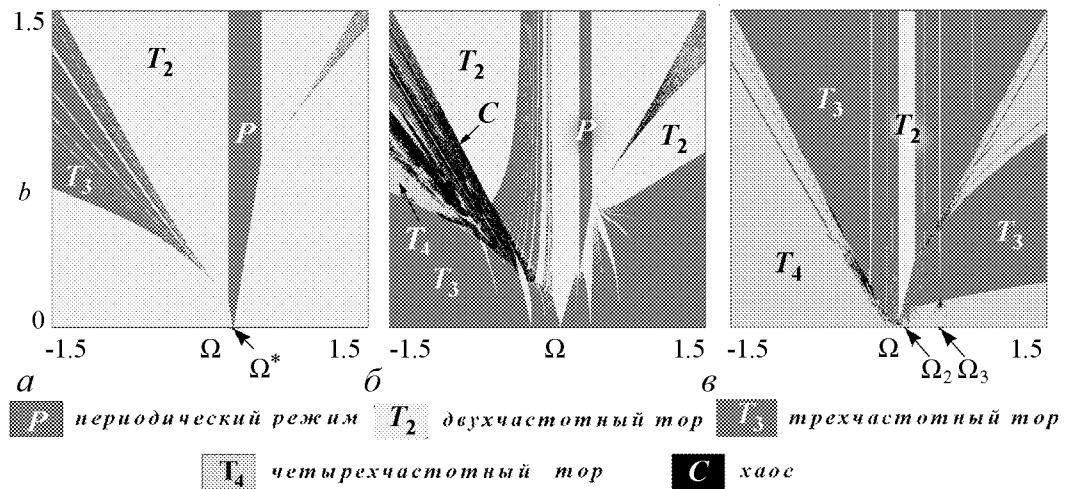


Рис. 10. Карты ляпуновских показателей системы (24) при $\Delta_1 = 0.3$, $\Delta_2 = 1$ и различных значениях μ : $a - 0.65$, $b - 0.4$, $v - 0.15$. Цветовая палитра расшифрована в подписи под рисунком; Ω^* – частота взаимного захвата трех автономных осцилляторов, Ω_2 и Ω_3 – собственные частоты второго и третьего осцилляторов

порог области полной синхронизации. В нижней части карты на смену двухчастотным торам на рис. 10, a приходят трехчастотные торы на рис. 10, b . Можно видеть однако еще одну область трехчастотных торов, пересекающую плоскость параметров сверху вниз. Детали ее внутреннего устройства также обсуждаются ниже.

Интересно обсудить полученную картину в контексте гипотезы Рюэля–Такенса. Подключение третьего осциллятора приводит к тому, что трехчастотные торы разрушаются; однако возникают как области хаоса, так и четырехчастотных торов. Области четырехчастотных торов и хаоса сосуществуют; при этом и тот, и другой режим являются типичными, ни один не превалирует над другим. Таким образом, картина вытеснения высокоразмерных торов хаотическими режимами не наблюдается.

Если еще более уменьшить связь, то четырехчастотные торы начинают доминировать (рис. 10, v). Они вытесняют области хаоса, которые становятся очень незначительными. Четырехчастотные торы наблюдаются теперь и в области малых амплитуд. Режим полной синхронизации осцилляторов исчезает вообще. Вместо него наблюдается лишь узкая полоса двухчастотных торов в окрестности собственной частоты второго осциллятора Ω_2 . Имеются еще несколько очень узких окон двухчастотных торов в виде вертикальных полос. Таким образом, в системе доминируют трех и четырехчастотные торы. Области хаоса располагаются только вдоль границ области трехчастотных торов, причем при не очень больших амплитудах сигнала. Хаос может наблюдаться также в узких областях пространства параметров в окрестности собственной частоты третьего осциллятора Ω_3 .

2.4. Многочастотные режимы. Карты торов. Для более детального описания и классификации наблюдаемых режимов дадим иллюстрации устройства пространства параметров системы (24) в виде «карт торов». Для этого при фиксированных параметрах системы определяем числа p , q и r существенных пересечений фазовой траектории с гранями фазового куба со сторонами $[0, 2\pi]$ в пространстве

(ψ_1, ψ_2, ψ_3) . После этого плоскость параметров окрашивается в разные цвета в соответствии с числами вращения $w = p : q : r^2$.

Полученные «карты торов» представлены на рис. 11. Числа вращения основных двухчастотных торов подписаны. Области трех, четырехчастотных торов и хаоса, которые в ходе численной процедуры фиксируются как непериодические режимы, показаны серым цветом.

Сначала обсудим случай большой связи (рис. 11, *a*), который соответствует карте Ляпунова на рис. 10, *a*. В области малых амплитуд доминируют режимы типа $w = 1 : 1 : 1$. В этом случае первый, второй и третий осциллятор демонстрируют частичный взаимный захват, то есть их относительные фазы $\theta = \psi_1 - \psi_2$ и $\varphi = \psi_2 - \psi_3$ осциллируют, но система в целом внешней силой не захвачена.

В области больших амплитуд в левой части карты имеется область трехчастотных торов, которую пересекают языки резонансных двухчастотных торов. Основные типы резонансных торов характеризуются числами вращения $w = p : q : r$, где $q = r$. Это означает, что второй и третий осциллятор взаимно (частично) захвачены. Система в определенном смысле ведет себя как два осциллятора: первый и взаимно захваченные второй и третий. Именно поэтому картина на рис. 10, *a* так похожа на случай двух осцилляторов. При увеличении частоты (движение слева направо на карте) из этих резонансов остается

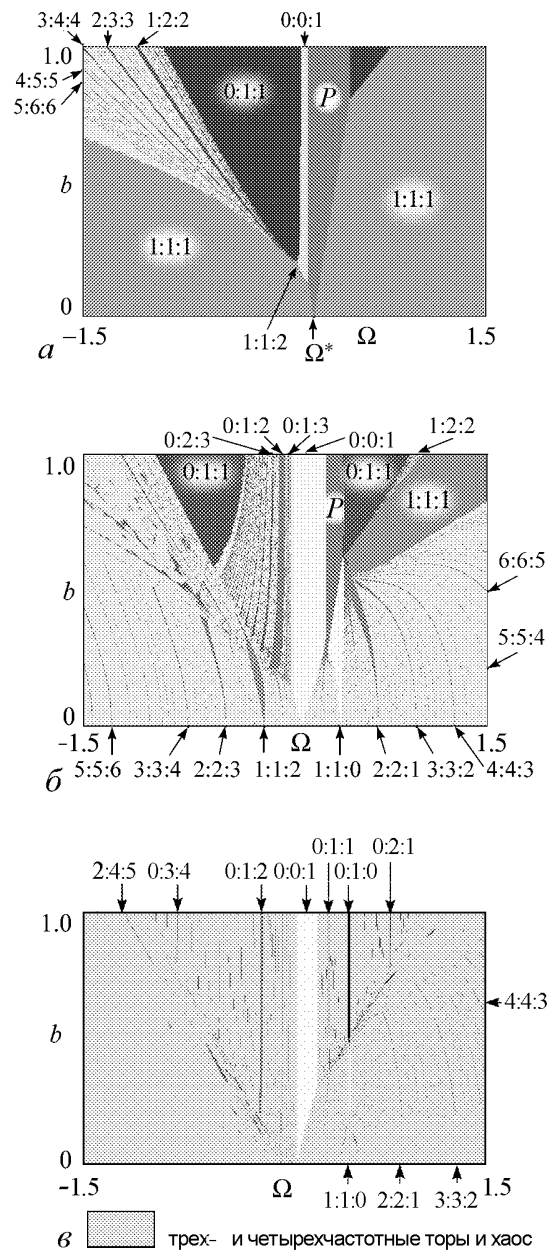


Рис. 11. Карты торов возбуждаемой системы трех связанных осцилляторов (24). Случаи *a*, *b*, *в* относятся к соответствующим конфигурациям на рис. 8, а значения параметров – на рис. 10

²К сожалению, в журнале можно представить только черно-белые иллюстрации, однако поскольку выбор цветовой палитры для чисел вращения вида $w = p : q : r$ априорно не столь очевиден, все же представляется целесообразным описать здесь использованную нами цветовую схему. Сначала определялось наибольшее число из трех чисел p, q, r : $M = \max(p, q, r)$. Затем красный, зеленый и синий цвета смешивались в пропорции $P/M : (1 - q/M) : r/M$. Делалось только одно исключение: для режима $1 : 0 : 1$ по такому правилу соответствовал белый цвет, плохо различимый на картах, поэтому он заменялся на светло-зеленый. Такие правила дают приемлемую цветовую гамму, причем соседние на карте языки с близкими числами вращения оказываются окрашенными в близкие цвета.

режим с числом вращения $w = 0 : 1 : 1$. Это означает, что внешняя сила произвела частичный захват первого осциллятора, а второй и третий по-прежнему взаимно захвачены, но их фазы неограниченно нарастают. Эта область достаточно широка. При дальнейшем увеличении частоты наступает момент, когда частично захваченным внешней силой оказывается и второй осциллятор, а фаза третьего неограниченно растет, так что $w = 0 : 0 : 1$. Наконец, захватываются внешней силой все три осциллятора, при этом захват оказывается уже не частичным, а полным – область P на рис. 11, *a*.

Указанные особенности приводят к разрушению характерной точки типа *saddle node fan*, в которой для системы двух возбуждаемых осцилляторов сходятся области трехчастотных торов и полной синхронизации. Действительно, теперь области трехчастотных торов и полной синхронизации не только разделены режимами $w = 0 : 0 : 1$, но вблизи нижней границы последней наблюдается еще и область $w = 1 : 1 : 2$. Более детальное исследование выявляет в ее окрестности и другие типы торов, например, $w = 1 : 1 : 3$ и т.д., занимающие малую, но конечную область на плоскости параметров. Отметим, что такая картина имеет место только вблизи низкочастотной границы области полной синхронизации P . Вблизи высокочастотной границы мы сразу попадаем в область $w = 0 : 1 : 1$.

Случай умеренной связи на рис. 11, *b* наиболее богат различными резонансами. В области больших амплитуд сигнала при переходе от рис. 11, *a* к рис. 11, *b* значительная часть резонансов $w = 0 : 1 : 1$ оказывается разрушенной. Ее пронизывает целая система областей, отвечающих частичному захвату внешним сигналом первого осциллятора при различных соотношениях с частотами второго и третьего осцилляторов. Наиболее широкие окна отвечают резонансам $0 : 2 : 3$, $0 : 1 : 2$, $0 : 1 : 3$, которые окружены областями трехчастотных торов. При этом уже не наблюдается захват относительной фазы второго и третьего осцилляторов.

Область одновременного частичного захвата внешней силой первого и второго осцилляторов $w = 0 : 0 : 1$ заметно увеличилась по ширине, и практически исчез амплитудный порог возбуждения таких колебаний. Область же полного и точного захвата всех трех осцилляторов P , наоборот, уменьшилась в размере и приобрела конечный амплитудный порог.

В области малых амплитуд наиболее широкие окна отвечают резонансам типа $w = p : p : q$, для которых, как нетрудно понять, взаимно захваченным (частично) является относительное движение первого и второго осцилляторов. При этом для третьего осциллятора, как правило, $q = p \pm 1$. Таким образом, первый и второй осцилляторы сильно связаны. Поэтому картина в области малых амплитуд также напоминает случай двух связанных осцилляторов.

Случай малой связи представлен на рис. 11, *в*. Как следует из аналитического рассмотрения и карты ляпуновских показателей, область полной синхронизации всех трех осцилляторов внешней силой исчезает вообще. Двухчастотные торы практически вытеснены более высокоразмерными. Резонансы типа $w = 0 : 1 : 1$ и $w = 1 : 1 : 1$, которым в предыдущих случаях отвечали самые большие области, практически полностью исчезают. Наиболее широкое оставшееся окно двухчастотных торов отвечает $w = 0 : 0 : 1$ – первый и второй осциллятор частично захвачены внешней силой. Эта область приходит на смену области полной синхронизации осцилляторов. Остальные резонансы, как правило, соответствуют частичному захвату

только первого осциллятора; им отвечают очень узкие области в виде вертикальных полос. При малой амплитуде воздействия резонансные области фактически сохраняются только при $\Omega > 0$ в виде традиционных языков, которые однако очень узкие.

Заключение

Особенность задачи о взаимной синхронизации трех автоколебательных осцилляторов состоит в наличии порога полной синхронизации по величине связи при фиксированной частотной расстройке одной пары. В области малой связи имеет место обширная область трехчастотных режимов, в которую встроены языки двухчастотных режимов, имеющие основания на оси частотной расстройки. Наиболее представительной, с точки зрения наблюдаемых режимов, является точка коразмерности два (saddle node fan, по терминологии [25]), отвечающая порогу полной синхронизации. В ее окрестности наблюдаются режимы частичной синхронизации первого и второго осциллятора и, соответственно, второго и третьего, а также система языков резонансных двухчастотных режимов различного типа.

Задача о возбуждении трех осцилляторов внешней силой выявляет три качественно разные ситуации. Первая из них соответствует режиму взаимного захвата трех автономных осцилляторов, а две вторые – их квазипериодическим колебаниям. В первом случае карта ляпуновских показателей выглядит качественно аналогично случаю вынужденной синхронизации двух связанных осцилляторов, однако имеются и определенные отличия. Так, характерная точка коразмерности два на плоскости параметров разрушается, а на ее месте формируется система мелкомасштабных областей различных двухчастотных режимов. При умеренной связи трех осцилляторов амплитудный порог трехчастотных режимов исчезает, теперь они доминируют в области малой связи. Возникают области четырехчастотных режимов и хаоса, которые однако имеют порог по величине связи.

Существенно новый момент для системы трех неавтономных осцилляторов состоит в том, что можно так «настроить» внутренние параметры осцилляторов, что режим полной синхронизации внешней силой становится вообще невозможным ни при каких амплитуде и частоте воздействия. Ему на смену приходит резонансный двухчастотный режим, отвечающий ситуации частичного захвата двух первых осцилляторов внешней силой, причем фаза третьего неограниченно нарастает. Области хаоса практически полностью исчезают, и режимы четырех и трехчастотной квазипериодичности доминируют. При этом четырехчастотные режимы возможны как в области малой, так и большой связи, если расстройка осцилляторов достаточно велика.

В системе возможно большое число различных типов двухчастотных резонансных режимов, которым соответствуют различные числа вращения $w = p : q : r$. Среди них выделяются семейства, отвечающие различным вариантам частичного захвата осцилляторов внешней силой.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ № 09-02-00426 и программы «Развитие научного потенциала высшей школы» № 2.1.1/1738.

Библиографический список

1. *Пиковский А., Розенблюм М., Куртс Ю.* Синхронизация. Фундаментальное нелинейное явление. М.: Техносфера, 2003. 494 с.
2. *Ланда П.С.* Автоколебания в системах с конечным числом степеней свободы. М.: Наука, 1980. 360 с.
3. *Ланда П.С.* Нелинейные колебания и волны. М.: Наука, 1997. 495 с.
4. *Блехман И.И.* Синхронизация в природе и технике. М.: Наука, 1981. 351 с.
5. *Анищенко В.С., Астахов В.В., Вадивасова Т.Е., Стрелкова Г.И.* Синхронизация регулярных, хаотических и стохастических колебаний. Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2008. 144 с.
6. *Ландау Л.Д.* К проблеме турбулентности // ДАН СССР. 1944. Т. 44, № 8. С. 339.
7. *Hopf E.* A mathematical example displaying the features of turbulence // Communications on Pure and Applied Mathematics. 1948. Vol. 1. С. 303.
8. *Ruelle D., Takens F.* On the nature of turbulence // Commun. Math. Phys. 1971. Vol. 20, № 3. P. 167.
9. *Anishchenko V., Nikolaev S., Kurths J.* Bifurcational mechanisms of synchronization of a resonant limit cycle on a two-dimensional torus // CHAOS. 2008. Vol. 18. 037123 (7 pages).
10. *Анищенко В.С., Николаев С.М.* Механизмы синхронизации резонансного предельного цикла на двумерном торе // Нелинейная динамика. 2008. Т. 4, № 1. С. 39.
11. *Анищенко В.С., Николаев С.М.* Синхронизация квазипериодических колебаний с двумя частотами // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2008. Т. 16, № 2. С. 69.
12. *Anishchenko V., Astakhov S., Vadivasova T.* Phase dynamics of two coupled oscillators under external periodic force // Europhysics Letters. 2009. Vol. 86. P. 30003.
13. *Анищенко В.С., В.В. Астахов, Вадивасова Т.Е., Феоктистов А.В.* Численное и экспериментальное исследование внешней синхронизации двухчастотных колебаний // Нелинейная динамика. 2009. Т. 5, № 2. С. 237.
14. *Кузнецов А.П., Сатаев И.Р., Тюрюкина Л.В.* Синхронизация квазипериодических колебаний связанных фазовых осцилляторов // Письма в ЖТФ. 2010. Т. 36, № 10. С. 73.
15. *Матросов В.В., Касаткин Д.В.* Особенности динамики трех каскадно связанных генераторов с фазовым управлением // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2004. Т. 12, №. 1–2. С. 159.
16. *Пономаренко В.П., Матросов В.В.* Режимы поведения системы двух взаимосвязанных генераторов с фазовым управлением // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2000. Т. 8, №. 4. С. 52.
17. *Матросов В.В., Корзинова М.В.* Коллективная динамика каскадного соединения фазовых систем // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 1994. Т. 2, № 2. С. 10.
18. *Мельникова В.А.* Кандидатская диссертация «О синхронизации многомодовых генераторов», 1977.

19. Кузнецов А.П., Кузнецов С.П., Рыскин Н.М. Нелинейные колебания, 2-е изд. М.: Физматлит, 2005. 292 с.
20. Battelino P.M. Persistence of three-frequency quasiperiodicity under large perturbations // Phys. Rev. A. 1988. Vol. 38, P. 1495.
21. Pazo D., Sanchez E., Matias M.A. Transition to high-dimensional chaos through quasiperiodic motion // Journal of Bifurcation and Chaos. 2001. Vol. 11, № 10. P. 2683.
22. Арнольд В.И., Ильяшенко Ю.С. Обыкновенные дифференциальные уравнения // Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Том 1. 2000. 149 с.
23. Keith W.L., Rand R.H. 1:1 and 2:1 phase entrainment in a system of two coupled limit cycle oscillators // Journal of Mathematical Biology. 1984. Vol. 20. P. 133.
24. Кузнецов С.П. Динамический хаос. М.: Физматлит, 2001. 296 с.
25. Baesens C., Guckenheimer J., Kim S. and MacKay R.S. Three coupled oscillators: mode locking, global bifurcations and toroidal chaos // Physica D. 1991. Vol. 49. P. 387.
26. Linsay P.S., Cumming A.W. Three-frequency quasiperiodicity, phase locking, and the onset of chaos // Physica D. 1989. Vol. 40. P. 196.
27. Ashwin P., Burylko O., Maistrenko Y. Bifurcation to heteroclinic cycles and sensitivity in three and four coupled phase oscillators // Physica D. 2008. Vol. 237. P. 454.
28. Karabacak O., Ashwin P. Heteroclinic Ratchets in a System in Networks of Coupled Oscillators // J. Nonlinear Sci. 2010. Vol 20. P. 105.

Саратовский государственный
университет им. Н.Г. Чернышевского
СФ ИРЭ им. В.А. Котельникова РАН

Поступила в редакцию 2.03.2010
После доработки 5.10.2010

ON THE WAY TOWARDS MULTIDIMENSIONAL TORI

A.P. Kuznetsov, I.R. Sataev, L.V. Turukina

The problem of the dynamics of three coupled self-oscillators and three coupled periodically driven self-oscillators is discussed, in the last case only one of the oscillators is directly excited by the external force. The regions of complete synchronization, two-, three- and four-frequency tori and chaos are revealed. Three typical situations of synchronization of three self-oscillators by the external driving are found. First situation refers to the mode locking of autonomous oscillators. Two other situations refer to quasi-periodic dynamics in the coupled autonomous oscillators. It is shown that multi-dimensional tori are not replaced by chaos and may dominate in the latter two cases. For the non-autonomous system under consideration the types of dynamics of three coupled oscillators are found, for which the complete synchronization of the system by the external driving is impossible independently of signal's amplitude and frequency.

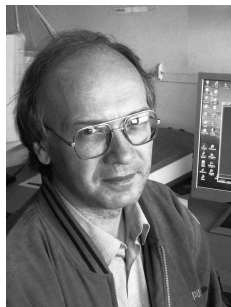
Keywords: Synchronization, phase oscillators, quasi-periodic dynamics, chaos.

Кузнецов Александр Петрович – родился в 1957 году. Доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник Саратовского филиала Института радиотехники и электроники РАН, профессор Саратовского государственного университета, заведующий базовой кафедрой динамических систем СГУ в СФ ИРЭ РАН. Специалист по нелинейной динамике, теории динамического хаоса и теории критических явлений. Занимается использованием идей теории катастроф и теории бифуркаций, а также развитием концепции сценариев перехода к хаосу применительно к многопараметрическим модельным и физическим нелинейным системам. Лауреат гранта Президента Российской Федерации для молодых российских ученых – докторов наук. Лауреат персонального гранта Фонда содействия отечественной науки. Соросовский профессор (2000, 2001), научный руководитель студенческой лаборатории «Теоретическая нелинейная динамика». Опубликовал более 100 научных работ. Автор нескольких оригинальных учебных курсов для факультета нелинейных процессов и Лицея прикладных наук СГУ, 10 учебных пособий и монографии «Нелинейные колебания» (совместно с С.П. Кузнецовым и Н.М. Рыскиным. М.: Физматлит, 2002).



410012 Саратов, ул. Астраханская, 83
Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского
E-mail: apkuz@rambler.ru

Сатаев Игорь Рустамович – родился в 1959 году. Окончил Московский физико-технический институт в 1982 году. Кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник Саратовского филиала Института радиотехники и электроники РАН. Область научных интересов – критическая явления в нелинейной динамике, моделирование динамики на пороге хаоса, применение численных методов для решения ренормгрупповых уравнений. Автор более 30 научных публикаций.



410019 Саратов, ул. Зеленая, д. 38
Саратовский филиал Института радиотехники
и электроники им. В.А. Котельникова РАН
E-mail: sataevir@rambler.ru

Тюрюкина Людмила Владимировна – родилась в 1977 году. Окончила факультет нелинейных процессов в Саратовском государственном университете (2000). Кандидат физико-математических наук (2003, СГУ), имеет звание доцента по специальности радиофизика (2009). В настоящее время старший научный сотрудник Саратовского филиала Института радиотехники и электроники РАН, доцент базовой кафедры динамических систем СГУ в СФ ИРЭ РАН. Область научных интересов – новые аспекты явления синхронизации в системах различной физической природы (радиофизические системы, модели турбулентности, модели биофизических систем и др.); контроль (управление) неустойчивыми режимами; динамический хаос; физические системы с гиперболическими аттракторами. Автор более 80 публикаций, в том числе 30 статей в российских и зарубежных журналах и 3 учебно-методических пособий.



410019 Саратов, ул. Зеленая, д. 38
Саратовский филиал Института радиотехники
и электроники им. В.А. Котельникова РАН
E-mail: lvtur@rambler.ru



ХАРАКТЕРИСТИКИ ЩЕЛЕВЫХ ДИСКРЕТНЫХ БРИЗЕРОВ В КРИСТАЛЛАХ СО СТРУКТУРОЙ NaCl

Л.З. Хадеева, С.В. Дмитриев

Методом молекулярной динамики исследуется влияние соотношения масс анионов и катионов на фононные спектры кристалла со структурой NaCl и на условия существования и свойства щелевых дискретных бризеров. Показано, что дискретные бризеры легко возбудить при отношении масс легкого к тяжелому компоненту менее 0.2, когда щель в фононном спектре достаточно велика. При соотношении масс равном 0.1 обнаружено существование, по меньшей мере, трех типов устойчивых дискретных бризеров, различающихся числом атомов с большой амплитудой колебаний и поляризацией колебаний.

Ключевые слова: Нелинейная динамика решетки, локализация энергии, дискретный бризер, ионный кристалл, фононный спектр.

Введение

Возможность существования дискретных бризеров (ДБ) как точных решений некоторых нелинейных дискретных уравнений была строго доказана в ряде теоретических работ [1–3]. ДБ представляет собой локализованную в пространстве колебательную моду большой амплитуды в бездефектной нелинейной решетке. Частота ДБ должна лежать вне фононного спектра колебания решетки, что обеспечивает отсутствие рассеяния энергии ДБ в виде малоамплитудных (тепловых) колебаний и их существование в течение длительных временных интервалов. Впоследствии ДБ были найдены экспериментально в таких нелинейных периодических дискретных системах, как цепочки сверхпроводящих джозефсоновских контактов, в системах связанных нелинейных оптических волноводов [2–4] и совсем недавно получено экспериментальное доказательство их существования в термодинамическом равновесии в кристалле NaI [5]. ДБ, описанные в последней из названных работ, были ранее предсказаны путем численного моделирования методом молекулярной динамики [6]. Оказалось, что частоты ДБ в кристалле NaI лежат в щели фононного спектра [5, 6]. Щелевые ДБ в диатомных решетках низкой размерности изучались теоретически в целом ряде работ [7–9]. Методом молекулярной динамики недавно было показано, что в диатомном кристалле с морзевскими межатомными взаимодействиями

Таблица

Отношение атомных весов легкого к тяжелому компоненту
для некоторых кристаллов со структурой NaCl

Катион, атомный вес, г/моль	Анион, атомный вес, г/моль								
	N, 14	O, 15.99	F, 80	S, 19	Cl, 32.07	Se, 35.5	Br, 78.96	I, 127	Te, 127.6
Li, 7	-	-	0.37	-	0.22	-	0.09	0.06	-
Na, 23	-	-	0.83	-	0.65	-	0.29	0.18	-
Mg, 24.3	-	0.66	-	-	-	-	-	-	-
K, 39	-	-	0.49	-	0.91	-	0.49	0.31	-
Ti, 47.87	0.29	-	-	-	-	-	-	-	-
Rb, 85.5	-	-	0.22	-	0.42	-	0.94	0.67	-
Zr, 91.2	0.15	-	-	-	-	-	-	-	-
Ag, 107.87	-	-	0.18	-	0.33	-	0.74	-	-
Sn, 118.7	-	-	-	-	-	-	-	-	0.93
Cs, 133	-	-	0.14	-	0.27	-	0.6	0.96	-
Pb, 207.2	-	-	-	0.16	-	0.38	-	-	0.62

реализуется мягкий тип нелинейности, что при наличии щели в фононном спектре допускает существование щелевых дискретных бризеров [10]. В настоящей работе изучается влияние отношения атомных масс компонентов диатомного кристалла со структурой NaCl на условия существования и свойства щелевых ДБ. Ряд кристаллов этого семейства приведен в таблице с указанием отношения атомных весов легкого компонента к тяжелому. Чем меньше данное отношение, тем, как правило, шире щель в фононном спектре и, следовательно, выше вероятность обнаружения щелевых ДБ. Исследования ДБ представляют несомненный фундаментальный интерес, и в отдаленной перспективе на их основе могут быть созданы тепловые диоды [11].

1. Описание компьютерного эксперимента

Структура NaCl представляет собой две гранцентрированные кубические решетки, одна из которых заполнена анионами, а другая – катионами. Решетки

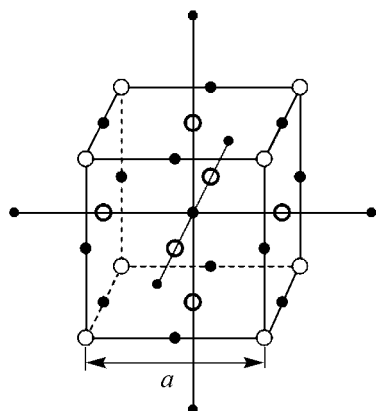


Рис. 1. Структура кристалла типа NaCl. Черными кружками показаны легкие, а светлыми – тяжелые атомы

смещены относительно друг друга на вектор $(a/2, 0, 0)$, где a – параметр решетки (рис. 4). Каждый атом окружен шестью соседями противоположного знака, которые расположены в вершинах правильного октаэдра. Таким образом, каждая трансляционная ячейка содержит четыре аниона и четыре катиона.

Атомы кристалла взаимодействуют посредством парного потенциала, включающего в себя дальнедействующие кулоновские силы, отталкивание Борн–Майера и дисперсионное взаимодействие, описываемые соответственно

три слагаемыми в правой части потенциала

$$U_{KL}(r) = \frac{Q_K Q_L}{r} + f_0 (b_K + b_L) \exp \left[\frac{a_K + a_L - r}{b_K + b_L} \right] - \frac{C_K C_L}{r^6}, \quad (1)$$

где r – расстояние между атомами, $a_K(b_K)$ и $a_L(b_L)$ – эффективные радиусы атомов сорта K и L со стандартной силой $f_0 = 1$ ккал \AA^{-1} моль $^{-1}$. Параметры потенциала были выбраны следующими: $Q_K/e = 1$, $Q_L/e = -1$, где e – абсолютное значение заряда электрона, $a_K = 1.1$ \AA , $a_L = 2.3$ \AA , $b_K = 0.01$ \AA , $b_L = 0.1$ \AA , $C_K = 40.3$ ккал $^{1/2}$ \AA^3 моль $^{1/2}$, $C_L = 190.0$ ккал $^{1/2}$ \AA^3 моль $^{1/2}$.

Для выбранных параметров потенциала структура типа NaCl устойчива. Равновесный параметр решетки составил $a = 6.25$ \AA .

Масса тяжелого атома была взята равной $M_K = 100$ г/моль, а для легкого атома – $M_L = 10$ г/моль, то есть отношение масс равнялось $M_L/M_K = 0.1$.

Используемая расчетная ячейка с наложенными периодическими граничными условиями содержала $11 \times 11 \times 11$ трансляционных ячеек.

2. Результаты моделирования

2.1. Фононный спектр кристалла. На рис. 3 представлены плотности фононных состояний рассматриваемого кристалла для трех различных отношений масс компонентов, достигавшихся изменением массы легких атомов $M_L/M_K = 0.1, 0.2, 0.3$. Как видно из рисунка, с увеличением значения отношения масс ширина щели фононного спектра уменьшается. Наличие запрещенной зоны в спектре

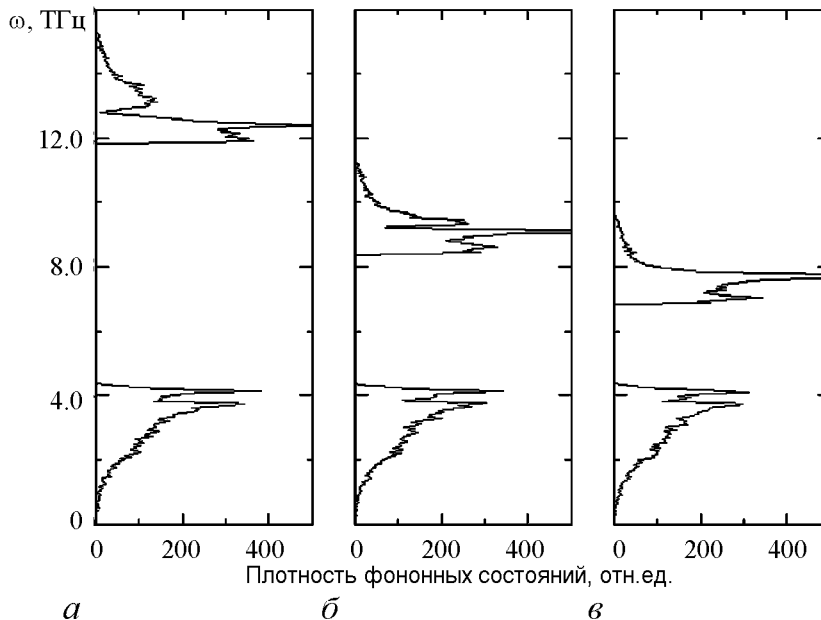


Рис. 2. Плотности состояний фононных спектров кристалла для соотношения масс атомов M_L/M_K : $a - 0.1$, $b - 0.2$, $v - 0.3$

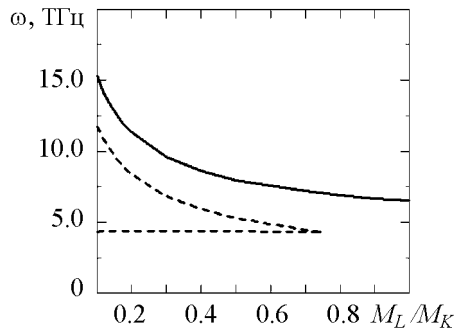


Рис. 3. Максимальная частота (сплошная линия) и границы щели фоннного спектра (штриховая линия) в зависимости от соотношения масс атомов M_L/M_K . Из рисунка видно, что существование щелевых дискретных бризеров невозможно в рассматриваемом кристалле при $M_L/M_K > 0.7$ ввиду отсутствия щели в фоннном спектре при таких соотношениях масс атомов компонентов.

2.2. Дискретные бризеры. ДБ возбуждался путем задания начального смещения из положения равновесия одного или двух легких атомов. Были рассмотрены три вектора смещения для возбуждаемых атомов: $(D, 0, 0)$, $(D, D, 0)$ и (D, D, D) . Все остальные атомы находились в решеточных положениях, и начальные скорости всех атомов равнялись нулю. Смещение D задавалось в пределах $0.01a \leq D \leq 0.05a$. После непродолжительного переходного процесса (около десяти периодов колебаний), связанного с частичным излучением энергии начального возбуждения в виде малоамплитудных тепловых колебаний решетки, устанавливалась устойчивая,

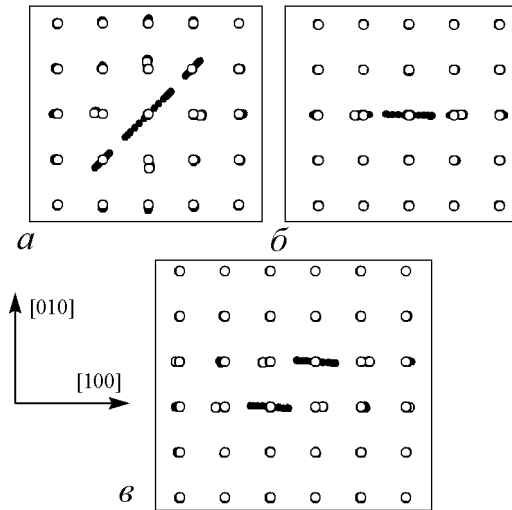


Рис. 4. Стробоскопические картины движения атомов для ДБ типа $[110]_1$ (а), $[100]_1$ (б) и $[100]_2$ (в), где нижний индекс указывает число атомов колеблющихся с большой амплитудой. На (а) и (б) перемещения атомов из положений равновесия увеличены в 7 раз, а на (в) в 5 раз. Черными кружками показаны легкие, а светлыми – тяжелые атомы

фононных колебаний кристалла позволяет искать щелевые ДБ. Причем, вероятность их обнаружения в кристаллах с меньшим соотношением масс легкого и тяжелого компонентов возрастает.

Были рассчитаны частоты фоннных колебательных мод для отношений масс атомов компонентов в интервале $0.1 \leq M_L/M_K \leq 1$. На рис. 3 показана максимальная частота фоннного спектра и границы щели фоннного спектра в зависимости от соотношения масс M_L/M_K . Из рисунка видно, что суще-

ствущая локализованная в пространстве колебательная мода, то есть ДБ. Таким образом были найдены три устойчивых ДБ, для которых на рис. 4 представлены стробоскопические картины движения атомов. На фрагментах (а) и (б) большую амплитуду колебаний имеет один легкий атом и колебания совершаются в направлении $[110]$ и $[100]$, соответственно. На фрагменте (в) большую амплитуду колебаний имеют два ближайших легких атома в пределах одной трансляционной ячейки и колебания совершаются в направлении $[100]$. Во всех трех случаях отметим высокую степень пространственной локализации атомных смещений. Степень пространственной локализации ДБ растет с уменьшением M_L/M_K . Следует заметить, что устойчивых ДБ с поляризацией $[111]$ обнаружено не было.

На рис. 5 частоты трех типов ДБ представлены как функции амплитуды колебания возбужденного атома A . Плавными кривыми соединены точки, полученные в численных экспериментах. Увеличение (уменьшение) амплитуды колебаний ДБ осуществлялось путем увеличения (уменьшения) скорости движения всех атомов на 1% в момент времени, когда кинетическая энергия ДБ достигала максимального значения. После этого осуществлялась выдержка ДБ в течении пятидесяти периодов его колебаний и затем проводилось измерение его частоты и амплитуды. Для каждой из трех кривых на рис. 5 отмечен соответствующий тип ДБ с указанием направления колебаний и числа атомов колеблющихся с большой амплитудой (нижний индекс). Горизонтальной линией показана верхняя граница щели фононного спектра кристалла. Частоты ДБ лежат в щели спектра, именно поэтому их энергия практически не рассеивается по кристаллу. Уменьшение частот ДБ с ростом их амплитуд свидетельствует о мягком типе нелинейности в рассмотренном кристалле с межатомными взаимодействиями, заданными выражением (1).

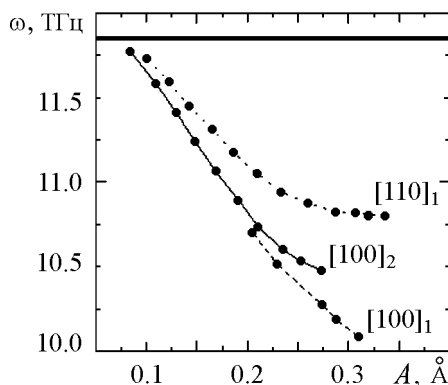


Рис. 5. Частоты трех типов ДБ как функции амплитуды колебания возбужденного атома A

Было установлено, что ДБ $[110]_1$ может иметь амплитуду (в ангстремах) в пределах $0.2 \leq A \leq 0.31$, ДБ $[100]_1$ в пределах $0.1 \leq A \leq 0.34$ и ДБ $[100]_2$ в пределах $0.08 \leq A \leq 0.28$ (см. рис. 5). Попытки дальнейшего увеличения или уменьшения амплитуд ДБ за указанные пределы приводили к разным результатам для разных ДБ. Попытка увеличения амплитуд ДБ $[110]_1$ и $[100]_2$, представленных на рис. 4, *a* и *b*, соответственно, приводила к их трансформации в ДБ $[100]_1$, представленный на рис. 4, *б*. Пример такой трансформации показан на рис. 6 для случая $[100]_2 \rightarrow [100]_1$. Здесь сплошной и пунктирной линиями показаны смещения двух атомов с большой амплитудой колебаний вдоль направления $[100]$ как функции времени для ДБ типа $[100]_2$. Как видно из рисунка, ввиду неустойчивости движения при данной амплитуде колебаний один из возбужденных атомов ДБ типа $[100]_2$ передает свою энергию другому возбужденному атому и превращается в ДБ $[100]_1$. Попытка увеличения

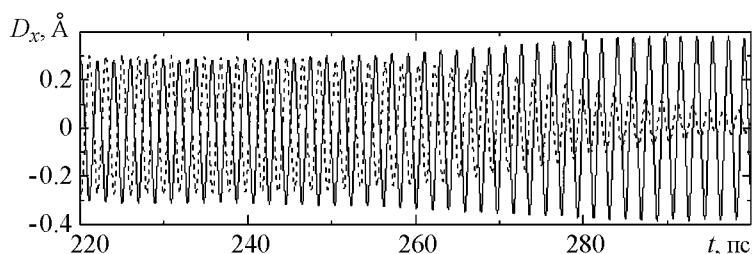


Рис. 6. Пример трансформации ДБ $[100]_2$ (при попытке увеличения его амплитуды сверх 0.28 \AA) в ДБ $[100]_1$

амплитуды колебания ДБ $[100]_1$ за пределы значения, обозначенного на рис. 5, приводило к быстрой радиации энергии в виде малоамплитудных тепловых колебаний кристаллической решетки и уменьшению его амплитуды до максимально возможного значения $A = 0.34 \text{ \AA}$. Попытка уменьшения амплитуды ДБ $[110]_1$ ниже значения 0.2 \AA также приводила к его трансформации в ДБ $[100]_1$. Что касается ДБ $[100]_1$ и $[100]_2$, то они при малых амплитудах начинали сильно взаимодействовать с фононами кристалла ввиду близости их частот к верхней границы щели. Это приводило к быстрому излучению энергии в виде малоамплитудных тепловых колебаний и исчезновению ДБ.

Также были найдены наибольшее и наименьшее значения энергии ДБ, то есть энергия ДБ при достижении максимального и минимального значения амплитуды колебания (см. рис. 5). Для ДБ $[100]_1$ энергия находится в пределах (в ккал/моль) $0.99 \leq E \leq 5.16$, для ДБ $[110]_1$ в пределах $4.67 \leq E \leq 5.15$, а для ДБ $[100]_2$ в интервале $1.65 \leq E \leq 6.86$. Таким образом, энергия ДБ может быть сопоставима с энергией такого топологического дефекта как вакансия в щелочно-галогидных кристаллах [12].

Выводы

По результатам молекулярно-динамического моделирования, представленным в данной работе, можно сделать следующие выводы.

1. Как и в случае с морзевскими межатомными потенциалами, в кристаллах с дальнедействующим кулоновским взаимодействием, рассмотренным в данной работе, реализуется мягкий тип нелинейности, о чем свидетельствует уменьшение частот дискретных бризеров с ростом их амплитуд.

2. При отношении масс компонентов диатомного кристалла $M_L/M_K = 0.1$ обнаружено три типа устойчивых дискретных бризеров, отличающихся числом атомов с большой амплитудой колебаний и поляризацией колебаний. Среди них есть дискретные бризеры с атомом, колеблющимся в направлении $[100]$ или $[110]$, но не в направлении $[111]$.

3. Наиболее устойчивым из обнаруженных оказался дискретный бризер $[100]_1$, то есть дискретные бризеры с одним возбужденным атомом, колеблющимся в направлении $[100]$. Дискретные бризеры $[110]_1$ и $[100]_2$ при попытках увеличения их амплитуд сверх определенных критических значений оказывались неустойчивыми и трансформировались в дискретные бризеры $[100]_1$.

4. Дискретные бризеры могут иметь неожиданно большие энергии, сопоставимые с энергией такого топологического дефекта, как вакансия в щелочно-галогидных кристаллах.

Библиографический список

1. *Sievers A.J. and Takeno S.* Intrinsic localized modes in anharmonic crystals // *Phys. Rev. Lett.* 1988. Vol. 61. P. 970.
2. *Flach S. and Willis C.R.* Discrete Breathers // *Phys. Rep.* 1998. Vol. 295. P. 181.

3. *Flach S. and Gorbach A.V.* Discrete breathers – Advances in theory and applications // *Phys. Rep.* 2008. Vol. 467. P. 1.
4. *Campbell D.K., Flach S., and Kivshar Yu.S.* Localizing energy through nonlinearity and discreteness // *Physics Today.* 2004. Vol. 57. P. 43.
5. *Manley M.E., Sievers A.J., Lynn J.W., Kiselev S.A., Agladze N.I., Chen Y., Llobet A., and Alatas A.* Intrinsic localized modes observed in the high-temperature vibrational spectrum of NaI // *Phys. Rev. B.* 2009. Vol. 79. 134304.
6. *Kiselev S.A., Sievers A.J.* Generation of intrinsic vibrational gap modes in three-dimensional ionic crystals // *Phys. Rev. B.* 1997. Vol. 55. 5755.
7. *Gorbach A.V. and Johansson M.* Discrete gap breathers in a diatomic Klein–Gordon chain: Stability and mobility // *Phys. Rev. E.* 2003. Vol. 67. 066608.
8. *James G. and Kastner M.* Bifurcations of discrete breathers in a diatomic Fermi–Pasta–Ulam chain // *Nonlinearity.* 2007. Vol. 20. 631.
9. *Dmitriev S.V., Medvedev N.N., Mulyukov R.R., Pozhidaeva O.V., Potekaev A.I., and Starostenkov M.D.* Localized vibrational modes in an A_3B two-dimensional perfect crystal // *Russian Physics Journal.* 2008. Vol. 51. 858.
10. *Dmitriev S.V., Sukhorukov A.A., Pshenichnyuk A.I., Khadeeva L.Z., Iskandarov A.M., and Kivshar Yu.S.* Anti-FPU energy recursion in diatomic lattices at low energy densities // *Phys. Rev. B.* 2009. Vol. 80. 094302.
11. *Manley M.E.* Intrinsic localized lattice modes and thermal transport: Potential application in a thermal rectifier. arXiv:0905.2988.
12. *Tharmalingam K.* Calculation of energy of formation of vacancy pairs in alkali halides // *J. Phys. C.* 1970. Vol. 3. 1856.

*Институт проблем сверхпластичности
металлов РАН, Уфа*

*Поступила в редакцию
После доработки*

*25.01.2010
25.10.2010*

CHARACTERISTICS OF GAP DISCRETE BREATHERS IN CRYSTALS WITH NaCl STRUCTURE

L.Z. Khadeeva, S.V. Dmitriev

Molecular dynamics method is used to study the effect of mass ratio of anions and cations on the phonon spectra of the crystal with NaCl structure and on the discrete breathers existence conditions and properties of gap discrete breathers. We show that discrete breathers can be easily excited for the mass ratio less than 0.2, when the gap in the phonon spectrum is wide enough to support them. When the mass ratio is equal to 0.1 we could find at least three types of stable discrete breathers, differed by the number of large amplitude atoms and by polarization of oscillation.

Keywords: Nonlinear lattice dynamics, energy localization, discrete breather, ionic crystal, phonon spectrum.



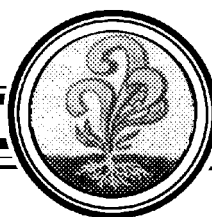
Хадеева Лия Завировна – родилась в 1987 году в Уфе, окончила Уфимский государственный авиационный технический университет в 2009 году. После окончания УГАТУ поступила в аспирантуру Института проблем сверхпластичности металлов РАН по специальности «Физика конденсированного состояния». Опубликовала 7 научных статей.

450001 Уфа, ул. Ст. Халтурина, 39
Институт проблем сверхпластичности металлов РАН
E-mail: liya.z.khadeeva@gmail.com



Дмитриев Сергей Владимирович – родился в 1961 году в Томске, окончил Томский госуниверситет в 1983 году. Защитил диссертацию на соискание степени кандидата технических наук в Тверском госуниверситете (1987) в области механики деформируемого твердого тела и доктора физико-математических наук в Алтайском государственном техническом университете (2008) в области волн солитонного типа в нелинейных дискретных системах. В период с 1995 по 2007 год работал в Японии в Университете электросвязи (Токио) и затем в Токийском государственном университете. В настоящее время заведует лабораторией в Институте проблем сверхпластичности металлов РАН, Уфа. Опубликовал 130 научных работ в отечественных и зарубежных журналах по нелинейной динамике в различных областях физики.

450001 Уфа, ул. Ст. Халтурина, 39
Институт проблем сверхпластичности металлов РАН
E-mail: dmitriev.sergey.v@gmail.com



ХАРАКТЕРИСТИКИ ВОЛНОВОДА ИЗ НЕЛИНЕЙНОГО МЕТАМАТЕРИАЛА

А.Б. Маненков

Исследованы моды планарного диэлектрического волновода, изготовленного из нелинейного метаматериала с отрицательными диэлектрической и магнитной проницаемостями. Рассмотрены зависимости коэффициентов распространения направляемых мод от передаваемой мощности. Рассчитаны распределения полей для систем с переменными профилями проницаемостей. Показано, что в таких структурах может наблюдаться аномально сильное увеличение амплитуды полей.

Ключевые слова: Волноводы с нелинейными метаматериалами, переменные профили диэлектрической и магнитной проницаемостей, направляемые моды

Введение

В последние годы ведутся интенсивные исследования различных метаматериалов¹, которые предназначены для применения в СВЧ и оптических схемах. Обычно такие материалы являются искусственными магнитодиэлектриками (композитами) [1–3]. Их электрические и магнитные свойства можно изменять в очень широких пределах, что позволяет создавать устройства с уникальными электродинамическими характеристиками.

К настоящему времени изучены основные свойства планарных регулярных волноводов с линейными и нелинейными метаматериалами [4–7]. Однако эти исследования нельзя считать достаточно полными: возникающие новые потребности практики, новые технологии, а также новые возможности теоретического анализа дают основание еще раз обратиться к анализу подобных структур и исследовать ряд новых вопросов. В частности, в литературе слабо изучены системы с переменным профилем диэлектрической и магнитной проницаемостей. Заметим, что обобщение теории на структуры с переменными профилями является важным по нескольким

¹Эти материалы называют также «левыми» материалами (англ. — left-handed materials) или средами с отрицательными показателями преломления.

причинам. В реальных системах переменные профили проницаемостей ε и μ могут возникнуть, например, из-за технологических особенностей при изготовлении волноводов, так что профили не будут скачкообразными, как предполагали во многих публикациях. Заметим также, что в волноводах с переменными профилями появляется дополнительная «степень свободы»: такие структуры могут обладать новыми свойствами, которые представляют интерес для практики. Например, за счет переменного профиля можно, по-видимому, менять дисперсионные свойства подобных структур (как это делается в оптических волноводах с обычными диэлектриками).

Отметим одну важную особенность рассматриваемого класса задач. Когда распределение проницаемостей в поперечном сечении волновода непрерывно изменяется от отрицательных значений в сердцевине до положительных значений в оболочке, величина магнитной проницаемости μ будет проходить через нуль; в такой системе, как будет показано ниже, возможно аномальное возрастание величины магнитного поля в окрестности точки, где $\mu = 0$ (для ТЕ-мод). При этом из-за резкого увеличения поля в этой области многие характеристики направляемых мод могут существенно измениться по сравнению с волноводом, у которого профили скачкообразные (как в линейном, так и в нелинейном случаях). Заметим, что указанное явление родственно хорошо известному в физике плазмы эффекту изменения характеристик отражения электромагнитной волны при наклонном падении ее на плазменный слой, в котором диэлектрическая проницаемость проходит через нуль [8, 9].

В данной работе исследуются свойства направляемых мод (НМ) в плоском волноводе, центральный слой которого изготовлен из магнетодиэлектрика с отрицательными значениями проницаемостей ε и μ . Рассматриваются случаи линейных и нелинейных сред.

1. Исходные уравнения

Исследуемый волновод представляет собой планарную структуру (рис. 1). Рассматриваем частный случай симметричного волновода, когда характеристики среды при $y > 0$ и $y < 0$ совпадают. В центральном волноведущем слое в области $|y| < d_g$ проницаемости ε_2 и μ_2 зависят от поперечной координаты y и от амплитуды полей. В дальнейшем предполагаем, что волноведущий слой изготовлен из нелинейного материала с кубической нелинейностью [7]. Этот слой окружен сверху и снизу (при $|y| > d_g$) линейными полубесконечными средами с проницаемостями ε_1 и μ_1 . Основное внимание уделено случаю, когда проницаемости являются непрерывными функциями координаты y (то есть когда они непрерывно меняются по сечению волновода, принимая в некоторой точке нулевые значения).

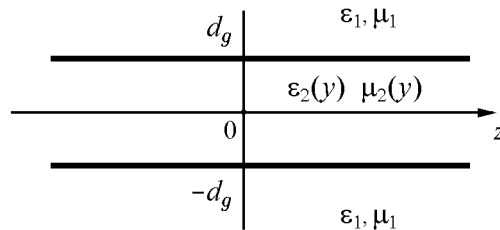


Рис. 1. Геометрия планарного волновода

Для определенности рассматриваем направляемые моды ТЕ-типа, у которых электрическое поле имеет только одну компоненту \mathcal{E}_x , а магнитное — две компоненты \mathcal{H}_y и \mathcal{H}_z . Будем исследовать гармонические процессы, предполагая, что временная зависимость имеет вид $\exp(-i\omega t)$, где ω — частота,

а t – время. Считаем, что среды таковы, что высшие временные гармоники подавлены. Это приближение оправданно, например, при изучении структур, у которых затухание волн на таких гармониках велико.

В рассматриваемой системе диэлектрическая ε и магнитная μ проницаемости в волноведущем слое определяются соотношениями

$$\begin{aligned}\varepsilon_2 &= \varepsilon_2^{(0)}(y) + \alpha_e(y)|\mathcal{E}_x(y)|^2, \\ \mu_2 &= \mu_2^{(0)}(y) + \alpha_m(y)[|\mathcal{H}_y(y)|^2 + |\mathcal{H}_z(y)|^2],\end{aligned}\quad (1)$$

где $\varepsilon_2^{(0)}$ и $\mu_2^{(0)}$ – линейные части (в общем случае комплексные функции). Предполагаем, что вблизи оси волновода действительные части проницаемостей отрицательны $\text{Re } \varepsilon_2^{(0)} < 0$ и $\text{Re } \mu_2^{(0)} < 0$, а в окружающей среде $\text{Re } \varepsilon_1 > 0$ и $\text{Re } \mu_1 > 0$. Коэффициенты нелинейности α_e и α_m могут быть как положительными, так и отрицательными. Предполагаем также, что на частоте ω среды имеют диэлектрические и магнитные потери, то есть во всех точках пространства $\text{Im } \varepsilon \geq 0$ и $\text{Im } \mu \geq 0$. Как показано ниже, это свойство является весьма важным при решении задачи. Вторые слагаемые в (1) предполагаются малыми, то есть выполнены условия малоамплитудного приближения; более точные ограничения, накладываемые на параметры задачи, описаны ниже.

Как известно [6, 7, 10], в волноводах, у которых нелинейности отсутствуют ($\alpha_e = \alpha_m = 0$) или нет потерь ($\text{Im } \varepsilon = \text{Im } \mu = 0$), поля НМ имеют вид волн, бегущих вдоль оси z ; в этом случае все компоненты полей пропорциональны множителю $\exp[i(\beta z - \omega t)]$, где β – комплексная постоянная (константа) распространения. Такое представление решения возможно, поскольку при указанных выше условиях в уравнениях Максвелла переменные разделяются. Для общего случая, когда присутствуют и потери и нелинейность среды, переменные не разделяются и решение становится более сложным [10, 11]. В рассматриваемом случае за счет потерь амплитуды полей НМ будут убывать при увеличении z , а следовательно, ε или μ будут уже зависеть не только от поперечной координаты y : у них появится зависимость от z за счет изменяющихся вторых слагаемых в формулах (1). Если потери малы ($\text{Im } \beta \ll k$), а также малы нелинейные коэффициенты, то изменение проницаемостей с ростом z будет небольшим и медленным, а значит, все характеристики волны будут являться медленно меняющимися функциями осевой координаты z (подробнее см. [10]). Процесс распространения мод в такой системе будет напоминать процесс распространения волн в волноводе с линейными средами, у которого медленно меняются его параметры [12–14]. В первом приближении решение рассматриваемой нелинейной задачи можно искать в виде бегущих волн с медленно меняющимися вдоль оси z амплитудой, фазовой скоростью и распределением полей. В таком случае все компоненты полей НМ пропорциональны выражению

$$A(z) \exp[i(\phi(z) - \omega t)], \quad (2)$$

где $A(z)$ и $\phi(z)$ – комплексные функции ($A(z)$ – амплитуда поля на оси волновода). Например, x -компонента электрического поля НМ приближенно равна

$$\mathcal{E}_x(y, z) = A(z)E_x(y, A(z)) \exp[i(\phi(z) - \omega t)], \quad \partial\phi/\partial z = \beta(A(z)), \quad (3)$$

где β — комплексный (с учетом потерь в среде) коэффициент распространения моды (медленно изменяющаяся функция z). Для определенности ниже исследуем моды, у которых $\text{Im } \beta > 0$. Вывод приведенного представления для поля проводится по схеме, описанной в [10] при анализе вытекающих мод. Отметим, что в первом приближении характер потерь (радиационных или диэлектрических) не является важным.

Рассматриваемая нелинейная задача весьма похожа на линейную задачу распространения волн в нерегулярных волноводах с переменными параметрами [12–14] и может анализироваться с помощью методов, сходных с используемыми в теории обычных волноводов (например, методом возмущений, методом связанных мод или методом поперечных сечений). В то же время следует заметить, что существует ряд принципиальных различий между указанными задачами. В линейных задачах изменение параметров волновода вдоль его оси z может происходить только за счет «внешнего воздействия» (например, в процессе его изготовления). В нелинейной системе изменение значений диэлектрической и магнитной проницаемостей происходит за счет самого поля (самовоздействие поля). Кроме того, в волноводе с линейными средами решение строится с помощью разложений по полным системам собственных мод. В нелинейной задаче, а тем более в открытой геометрии, стандартные способы построения собственных мод не работают и вопрос о спектральных разложениях требует дальнейшего изучения. Несмотря на указанные проблемы, в первом приближении, когда трансформация мод невелика, решение может быть построено по тем методикам, которые были упомянуты выше.

Задача о распространении НМ в волноводе с нелинейной диссипативной средой разбивается на два этапа. На первом этапе в каждом сечении волновода ищутся локальные характеристики мод, причем в каждом сечении все функции зависят от амплитуды поля на оси волновода $A(z)$ как от параметра [10]. На следующем этапе решается задача о распространении волн вдоль волновода. Для волновода с малыми потерями и нелинейностями распространение НМ происходит «адиабатически», то есть мода плавно изменяется с изменением координаты z . Например, фазовый набег НМ равен

$$\text{Re } \phi(z) \sim \int^z \text{Re } \beta(A(z')) dz', \quad (4)$$

где локальный коэффициент распространения β зависит от амплитуды $A(z)$. Приближенно рассматриваемую задачу распространения волны вдоль волновода можно решить, если исследуемый интервал оси z разбить на небольшие участки, на каждом из которых амплитуды полей и коэффициент распространения моды можно считать постоянными, а затем сшивать поля на концах участков; такой способ часто применялся к различным задачам распространения волн в структурах с медленно меняющимися параметрами (см., например, [13], стр. 26–31).

В дальнейшем не будем рассматривать зависимости полей от продольной координаты, а исследуем только локальные свойства НМ, то есть будем рассматривать структуру НМ в произвольном (фиксированном) поперечном сечении волновода (как в теории связанных мод). Учитывая сказанное выше, из уравнений Максвелла при произвольном фиксированном значении z можно получить следующие приближен-

ные уравнения для «локальных» полей:

$$\begin{aligned}\frac{\partial H_z}{\partial y} - i\beta H_y &= -ik\varepsilon E_x, \\ \frac{\partial E_x}{\partial y} &= -k\mu H_y, \quad k\mu H_y = \beta E_x,\end{aligned}\tag{5}$$

где $k = \omega/c$ — волновое число в вакууме (c — скорость света). Таким образом, на каждом малом интервале оси z (см. выше) решается краевая задача при фиксированном («замороженном») значении амплитуды поля A . Подчеркнем еще раз, что на таких интервалах параметры среды, а также коэффициент распространения β , приближенно считаются постоянными; они медленно изменяются при переходе на следующий интервал оси z [10, 13].

Выписанную выше систему (5) можно свести к одному обыкновенному дифференциальному уравнению второго порядка

$$\mu \frac{d}{dy} \left(\frac{1}{\mu} \frac{dE_x}{dy} \right) + (k^2 \varepsilon \mu - \beta^2) E_x = 0.\tag{6}$$

Это уравнение часто используется для анализа мод в волноводе с кусочно-постоянным профилем проницаемостей, когда $\mu'(y) = 0$ (штрихом обозначаем производные по y). Однако для рассматриваемой задачи удобнее использовать систему дифференциальных уравнений первого порядка. Введем две вспомогательные функции

$$U(y) = E_x, \quad V(y) = -iH_z.\tag{7}$$

Из (5) получим следующие два уравнения для этих функций:

$$\begin{aligned}U' &= k\mu V, \\ V' &= [\beta^2/(k\mu) - k\varepsilon]U.\end{aligned}\tag{8}$$

Система (8) имеет «стандартную» форму и она удобна для численного решения задачи [15, 16].

Локальное дисперсионное уравнение (ДУ) для рассматриваемой моды в произвольном сечении волновода получается по обычной схеме. В силу симметрии геометрии задачи далее рассматриваем лишь верхнюю половину системы, изображенной на рис. 1 (при $y > 0$). Для определенности рассмотрим четную (симметричную) НМ. Поле НМ вне волновода должно быть ограничено; при $|y| > d_g$ его можно представить в виде

$$E_x = U = B \exp[-p_1(|y| - d_g)],\tag{9}$$

где d_g — координата верхней границы волноведущего слоя, выше которой параметры среды постоянны; здесь через B обозначена амплитуда электрического поля НМ в окружающей волновод среде. Волновые числа НМ связаны соотношением

$$\beta^2 = k^2 \varepsilon_1 \mu_1 + p_1^2,\tag{10}$$

где p_1 — комплексное поперечное волновое число в покрывающей среде. Для вывода ДУ численно интегрируем систему (8) в «обратном» направлении от точки $y = d_g$, используя начальные значения, которые получаются из (9),

$$U(d_g) = B, \quad V(d_g) = -p_1 B.\tag{11}$$

Интегрирование ведется до точки $y = 0$, в которой затем полученное значение функции $V(0)$ приравниваем нулю в силу четности НМ данного типа. Таким образом, ДУ можно записать в виде: $V(0) = 0$. Отметим, что значение функции $V(0)$ зависит как от p_1 , так и от B ; последнее важно при анализе нелинейного случая.

Для простейшего случая, когда волновод имеет кусочно-постоянные профили проницаемостей и когда все среды линейные (то есть когда $\alpha_e = \alpha_m = 0$ и $\varepsilon_2 = \varepsilon_2^{(0)}(0)$, $\mu_2 = \mu_2^{(0)}(0)$), для четной НМ получаем хорошо известное ДУ:

$$p_1 d = (\mu_1/\mu_2^{(0)})(gd) \operatorname{tg}(gd), \quad g = k\sqrt{\varepsilon_2^{(0)}\mu_2^{(0)} - \varepsilon_1\mu_1}, \quad (12)$$

где $2d = 2d_g$ — толщина центрального слоя. Заметим, что свойства этого ДУ существенно отличаются от свойств ДУ для волновода, изготовленного из обычного диэлектрика [17]; это отличие объясняется тем, что для рассматриваемой структуры множитель $\mu_1/\mu_2^{(0)}$ отрицателен.

2. Численная методика

Для численного решения задачи применен вариант метода стрельбы (пристрелки) [16]. Согласно этой методике интегрируем уравнения (8), используя начальные значения (11), в которых величина поперечного волнового числа p_1 задается численной процедурой поиска корней ДУ. Эта процедура постепенно «сдвигает» комплексное число p_1 к корню ДУ. Используемая программа решения ДУ основана на модифицированном методе Пауэлла [15], который предназначен для поиска нулей системы действительных нелинейных уравнений. Такая система получается, если в уравнении $V(0) = 0$ разделить действительные и мнимые части.

Для нелинейной задачи все характеристики мод зависят от амплитуд полей. При расчетах в качестве параметра удобно выбрать амплитуду электрического поля B на границе $y = d_g$; по полученным значениям поперечного волнового числа p_1 и амплитуд B нетрудно затем вычислить зависимость $\beta(|E_0|)$, где E_0 — поле на оси волновода.

Заметим, что во многих случаях рассматриваемая задача Коши для системы (8) относится к классу так называемых жестких задач и она решалась модифицированным методом Гира [15]. Численные эксперименты показали, что при решении задачи описанная выше процедура интегрирования системы уравнений в обратном направлении, как правило, повышает устойчивость методики. По-видимому, это связано с тем, что при больших $|y|$ поле НМ экспоненциально убывает, поэтому при «обратном» интегрировании не происходит сильного роста ошибок округления.

Как видно из системы (8), магнитная проницаемость $\mu(y)$ входит в знаменатель коэффициента в правой части второго уравнения. Предположим на время, что потери в среде отсутствуют, так что проницаемости — вещественные функции. В случае, когда функция $\mu(y)$ непрерывна, в некоторой точке y_s она обращается в нуль, так как эта функция по предположению знакопеременна. Таким образом, коэффициент в правой части второго уравнения сингулярен. Согласно общей теории обыкновенных дифференциальных уравнений [18, 19], система (8) может иметь сингулярное решение, то есть в некоторой точке поле может обращаться в бесконечность. Чтобы избежать сингулярности, мы вводим малые потери, которые непременно существуют

в средах. В этом случае в окрестности указанной точки y_s поле достигает больших (но конечных) значений. Как отмечалось выше, подобный эффект наблюдается при анализе задач распространения электромагнитных волн в плазме с непрерывным профилем показателя преломления [8, 9]; отличие заключается только в том, что в плазме в нуль обращается ε . Для исключения сингулярностей полей мы предполагаем, что все среды диссипативные.

3. Линейная задача

Рассмотрим сначала линейную задачу. Сделаем прежде всего одно замечание, которое касается обозначений (нумерации) НМ. Предположим, что профили проницаемостей кусочно-постоянные (см. выше). Введем параметр

$$\tau_{21} = |\varepsilon_2^{(0)} \mu_2^{(0)}| - \varepsilon_1 \mu_1. \quad (13)$$

Предполагаем, что выполнено неравенство $\tau_{21} > 0$. При этом условии в волноводе могут распространяться так называемые осциллирующие НМ [4, 6]. При постоянных профилях проницаемостей ε и μ и при условии $\tau_{21} > 0$ поля внутри волноводящего слоя $|y| < d_g$ пропорциональны тригонометрическим функциям. Моды в таком волноводе обозначаем как TE_m , где m — число нулей функции $E_x(y)$. При указанных условиях первой НМ является мода TE_2 . Эта мода имеет отсечку (то есть она не существует в области низких частот); для линейных систем свойства этой моды описаны в работах [4, 6]. Заметим, что при высоких частотах ($kd|\tau_{21}|^{1/2} \gg 1$) структура полей моды TE_2 близка к структуре моды TE_0 обычного диэлектрического волновода. Поскольку будем рассматривать систему, у которой нелинейности малы, а профили проницаемостей близки к ступенчатым (см. ниже), то описанный принцип нумерации мод может быть использован и в этом случае.

Отметим, что при противоположном неравенстве, $\tau_{21} < 0$, в волноводе из метаматериала существует мода типа TE_0 . Эта мода поверхностная [5, 6], она не имеет отсечки, и на низких частотах ($kd|\tau_{21}|^{1/2} \ll 1$) ее структура немного похожа на структуру моды TE_0 обычного диэлектрического волновода.

Заметим также, что большинство мод волновода из метаматериала являются обратными, то есть для них коэффициенты $\text{Re } \beta$ и $\text{Im } \beta$ имеют разные знаки (для обычного планарного волновода знаки этих величин обычно одинаковы). Существует ряд других различий между модами указанных волноводов [6, 17].

Проиллюстрируем подробнее распределения полей на нескольких примерах. На рис. 2 представлены зависимости $E_x(y)$ (сплошная кривая) и $H_y(y)$ (штриховая) для моды TE_2 в волноводе из метаматериала при кусочно-постоянном (ступенчатом) профиле проницаемостей. Штриховой вертикальной линией показано положение

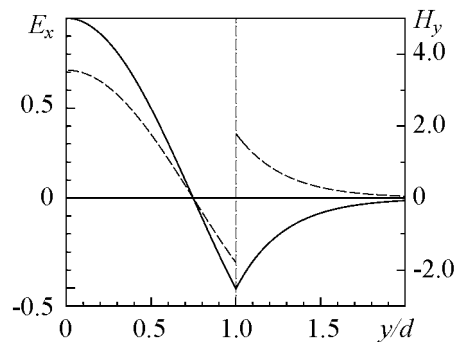


Рис. 2. Распределения полей моды TE_2 в поперечной плоскости волновода, изготовленного из метаматериала

ние границы раздела сред ($y = d$). Параметры задачи были следующими²: $\lambda = 0.86$ мкм, $\varepsilon_1 = 11.664$, $\varepsilon_2^{(0)} = -12.96$, $\mu_1 = 1$, $\mu_2^{(0)} = -1.0$ и $2d = 1.0$ мкм ($d_g = d$). В этом примере волновод не имел диэлектрических и магнитных потерь. Введение небольших потерь в рассматриваемой задаче лишь незначительно изменяет структуру полей. Функции $E_x(y)$ и $H_y(y)$ становятся комплексными. Отличие от разобранного выше бездиссипативного случая заметно только вблизи узкой области, где поля обращались в нуль (см. рис. 2). В структуре с потерями поля в этой области принимают малые, но отличные от нуля значения, которые пропорциональны величинам $\text{Im } \varepsilon$ и $\text{Im } \mu$.

Существенные изменения в структуре полей моды TE_2 происходят в волноводе с неоднородным распределением ε и μ в поперечной плоскости. Рассматриваем структуру, у которой профили близки к ступенчатым, то есть предполагаем, что в волноводе существуют достаточно тонкие переходные области вблизи некоторых плоскостей $y = \pm d$, внутри которых проницаемости изменяются непрерывно, но достаточно быстро. Как и выше, будем описывать только геометрию верхней части волновода. Конкретизируем профили, предполагая, что вне переходных слоев (при $|y - d| > \Delta_t$, $\Delta_t \ll d$) проницаемости ε_2 и μ_2 постоянны, а внутри области $|y - d| < \Delta_t$ плавно изменяются от значений $\varepsilon_2(0)$ и $\mu_2(0)$ до значений ε_1 и μ_1 . В качестве примера на рис. 3 показан типичный вид функции $\text{Re } \mu(y)$, которая определяется формулой, приведенной ниже; мнимые части $\text{Im } \mu(y)$ и $\text{Im } \varepsilon(y)$ близки к постоянным при всех значениях y . Рассматриваем случай, когда в переходной узкой области профили $\varepsilon_2(y)$ и $\mu_2(y)$ описываются полиномом

$$\begin{aligned} \varepsilon_2(y) &= \xi_{1e} + \xi_{2e} f_t(y), & \mu_2(y) &= \xi_{1m} + \xi_{2m} f_t(y), \\ f_t(y) &= 3\eta(1 - \eta^2/3)/2, & \eta &= (y - d)/\Delta_t, \end{aligned} \quad (14)$$

где $\Delta_t \ll d$. Для упрощения записи в этих формулах у ε и μ опущен верхний индекс (0). Напомним, что рассматривается линейная задача. В формуле (14) константы ξ_{1e} , ξ_{2e} , ξ_{1m} и ξ_{2m} определяются из условий непрерывности функций $\varepsilon_2(y)$ и $\mu_2(y)$ в точках $y = d \pm \Delta_t$. Аналогичную форму распределения $\varepsilon_2(y)$ и $\mu_2(y)$ имеют при отрицательных y . В данной геометрии полная толщина центрального волноведущего слоя равна $2d_g = 2(d + \Delta_t)$. Заметим, что функция $f_t(y)$ выбрана так, что непрерывны не только проницаемости $\varepsilon(y)$ и $\mu(y)$, но и их производные по y .

На рис. 4 представлены распределения полей $|E_x(y)|$ (сплошная кривая) и $|H_y(y)|$ (штриховая) моды TE_2 , которая может распространяться в волноводе из метаматериала с тонким переходным слоем. Предполагаем, что все среды диссипативные.

Параметры волновода были следующими: $\lambda = 0.86$ мкм, $\varepsilon_1 = 11.664 + i10^{-4}$, $\varepsilon_2^{(0)} = -12.96 + i10^{-4}$, $\mu_1 = 1 + i10^{-4}$, $\mu_2^{(0)} = -1 + i10^{-4}$, $2d = 1.0$ мкм и $\Delta_t/d = 0.002$. Заметим, что величины потерь $\text{Im } \varepsilon$ и $\text{Im } \mu$ взяты намеренно достаточно большими, чтобы нагляднее показать на рисунках влияние этих параметров на характеристики НМ.

²Использованные значения параметров не связаны с какими-то конкретными веществами; они выбраны близкими к тем, которые ранее использовали при решении различных линейных задач.

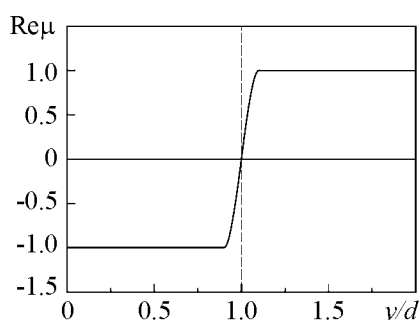


Рис. 3. Зависимость $\text{Re } \mu$ от нормированной поперечной координаты y/d

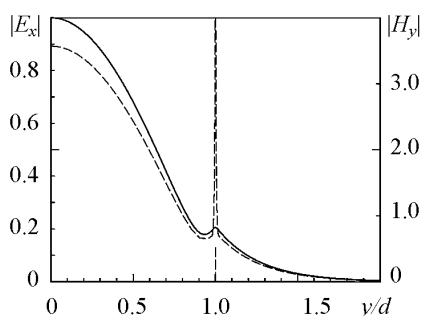


Рис. 4. Распределения модулей полей направляемой моды в волноводе с переменными профилями проницаемостей

Как видно из рис. 2 и 4, совместное влияние небольших потерь и плавного перехода проницаемостей разных сред в узкой приграничной области сильно изменяет структуру полей моды TE_2 . В последнем примере электрическое поле E_x уже не обращается в нуль; вблизи границы центрального слоя оно лишь принимает достаточно малые значения, которые пропорциональны введенным потерям. Наиболее существенное изменение претерпевает распределение магнитного поля H_y . Как отмечалось выше, в области вблизи точки $y = d$, где $\text{Re } \mu \approx 0$, то есть $|\mu| \approx |\text{Im } \mu| \ll |\mu_2^{(0)}(0)|$, поле H_y резко возрастает. Оценки показывают, что по порядку величины максимальное значение $|H_y| \sim |E_0|/\text{Im } \mu_2$, где $E_0 = E_x(0)$. Для рассматриваемой задачи (см. рис. 4) имеем $\max |H_y|/E_0 \sim 450$. На рис. 4 эти большие значения $|H_y|$ не показаны. Таким образом, в структуре с переходным слоем возможно очень сильное увеличение магнитного поля по сравнению со случаем, когда проницаемости меняются скачкообразно.

Естественно, что большие значения магнитного поля могут сказываться и на интегральных характеристиках моды TE_2 . В таблице приведены значения волновых чисел этой моды. Параметры волновода были те же, что и для рис. 4, изменялось только отношение размеров Δ_t/d (см. первую колонку таблицы). Видно, что даже при небольшой толщине Δ_t существование переходного слоя сильно изменяет коэффициент распространения моды; особенно сильно с ростом Δ_t/d изменяется коэффициент затухания $\text{Im } \beta$.

Таблица

Характеристики мод TE_2 волновода

Δ_t/d	p/k	β/k
0.0000	$0.98258 - 0.001507i$	$-3.55380 + 0.000239i$
0.0001	$0.98260 - 0.002459i$	$-3.55380 + 0.000502i$
0.0002	$0.98264 - 0.003408i$	$-3.55381 + 0.000764i$
0.0010	$0.98376 - 0.010868i$	$-3.55411 + 0.002830i$
0.0020	$0.98706 - 0.019453i$	$-3.55499 + 0.005223i$
0.0100	$1.02982 - 0.036246i$	$-3.56698 + 0.010287i$
0.0200	$1.04530 - 0.023895i$	$-3.57157 + 0.006816i$
0.1000	$1.04640 - 0.005546i$	$-3.57196 + 0.001447i$
0.2000	$1.03585 - 0.002528i$	$-3.56889 + 0.000556i$

4. Нелинейная задача

Перейдем теперь к анализу результатов, полученных для волновода с нелинейной средой. Анализ линейных структур показал, что в волноводе из метаматериала при плавном изменении магнитной проницаемости возможно очень сильное возрастание магнитного поля. Поэтому для применимости малоамплитудного приближения в волноводах с кубической нелинейностью сред «простое» требование малости коэффициента $\alpha_m(y)$ недостаточно; нетрудно показать, что должно быть выполнено более жесткое условие

$$\alpha_m(y_s)|H_y(0)|^2/|\text{Im } \mu(y_s)|^2 \ll 1, \quad (15)$$

где y_s — координата точки, в которой $\text{Re } \mu(y_s) = 0$ (см. выше). Заметим, что это условие может быть выполнено только в том случае, когда потери в метаматериале конечны (то есть $\text{Im } \mu > 0$). Поскольку $\text{Im } \mu \ll 1$, то для простоты будем рассматривать системы, у которых коэффициент нелинейности $\alpha_m(y)$ не равен нулю лишь в области, не заходящей в переходный слой.

На рис. 5 приведена зависимость $\text{Re } \beta/k$ от поля на оси волновода $E_0 = E_x(0)$ для моды TE_2 . При расчетах считали, что все среды диссипативные. Параметры волновода были следующими: $\lambda = 0.86$ мкм, $\varepsilon_1 = 11.664 + i10^{-4}$, $\varepsilon_2^{(0)} = -12.96 + i10^{-4}$, $\mu_1 = 1 + i10^{-4}$, $\mu_2^{(0)} = -1 + i10^{-4}$ и $2d = 1.0$ мкм. Профили проницаемостей были те же, что и для рис. 4, при этом $\Delta_t/d = 0.002$. Предполагали, что нелинейна только магнитная проницаемость (то есть $\alpha_e = 0$). Коэффициент нелинейности для магнитной проницаемости при $|y| < d_{nm}$ определялся соотношением

$$\alpha_m(y) = [1 - (y/d_{nm})^2]\alpha_{m0}, \quad (16)$$

а при $|y| > d_{nm}$ коэффициент равен нулю. При расчетах коэффициент нелинейности на оси волновода равен $\alpha_{m0} = 10^{-5}$, а параметр $d_{nm} = 0.9d$. Размер d_{nm}

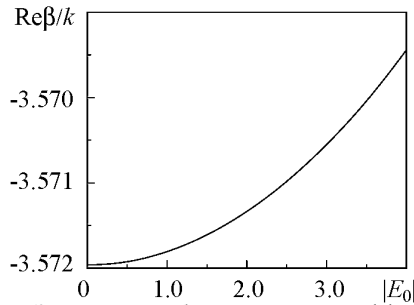


Рис. 5. Зависимость безразмерного коэффициента $\text{Re } \beta/k$ для моды TE_2 от амплитуды поля на оси волновода

удовлетворял неравенству $d_{nm} < d - \Delta_t$, то есть в области, где возможно сильное увеличение магнитного поля, нелинейность отсутствовала, что позволило использовать малоамплитудное приближение. Как видно из рис. 5, в рассматриваемой системе за счет влияния поля коэффициент распространения НМ изменяется достаточно заметно. Аналогичные зависимости получаются для коэффициента затухания $\text{Im } \beta$.

Заключение

В работе рассмотрены локальные характеристики направляемых мод, распространяющихся вдоль волноводов, изготовленных из линейных и нелинейных метаматериалов с отрицательными электрической и магнитной проницаемостями. Задача решалась в малоамплитудном приближении.

Оказалось, что существует значительное различие в структуре полей для волноводов со ступенчатым и плавным профилями проницаемости μ . Расчеты продемонстрировали, что в волноводе с переменным профилем магнитной проницаемости возможно аномально сильное увеличение магнитного поля у мод ТЕ типа; у таких мод максимальная величина магнитного поля ограничена магнитными потерями. Этот эффект накладывает жесткие ограничения на структуру нелинейности сред. По-видимому, в таких системах во многих случаях нельзя использовать модели сред с кубической (керровской) нелинейностью, а необходимо учитывать эффекты насыщения нелинейности. Отметим также, что благодаря указанному эффекту в подобных структурах может реализоваться весьма сильная зависимость дисперсионных характеристик волновода от передаваемой по нему мощности.

Основное внимание в работе уделено анализу структур с непрерывным, но достаточно резким изменением проницаемостей (с переходной областью на границе). Следует отметить, что на практике структура переходного слоя на границе метаматериала, который изготовлен, например, с помощью имплантации микрочастиц, может быть весьма сложной. В работе была рассмотрена идеализированная модель и многие ее параметры требуют дальнейших уточнений. Заметим, что переходные области могут иметь различные характеристики и размеры. В частности, эти области могут быть настолько тонкими, что внутри них среду уже нельзя считать сплошной [9, 20]; возможно, что в этом случае более адекватной будет модель со скачкообразным профилем.

В данной работе были изучены только основные эффекты, которыми характеризуются процессы распространения мод в таких структурах. В некоторых областях параметров может потребоваться учет влияния пространственной дисперсии метаматериала, а также эффектов пробоя. Заметим, что в метаматериале ширина области резкого возрастания поля имеет порядок $\text{Im}(\mu\Delta_t)$; при $\text{Im}\mu \rightarrow 0$ эта область сужается, поэтому влияние пространственной дисперсии будет возрастать [9]. Грубые оценки влияния этого эффекта на значения постоянной распространения и эффект деполяризации моды можно получить методами теории возмущений, используя приведенное выше решение задачи.

Кроме рассмотренных в работе систем, интерес представляют также структуры с профилями проницаемостей, которые плавно меняются по всему сечению волновода (например, волноводы с параболическим профилем). В этом случае за счет неоднородности проницаемостей можно добиться изменения частот отсечки и других дисперсионных характеристик направляемых мод. Все указанные вопросы требуют отдельного исследования.

В работе рассмотрен случай ТЕ-мод, но описанная методика легко обобщается на случай распространения ТМ-мод. Общие заключения о характере решения в этой задаче можно сделать, если поменять местами электрическое и магнитное поля [17]. В частности, ясно, что для случая ТМ-мод в переходных слоях может наблюдаться сильное увеличение электрического поля (в тех точках, где мало значение $|\text{Re}\varepsilon(y)|$).

Автор признателен А.Г. Рожневу за обсуждения вопросов, касающихся реализации численных методов, и Э.А. Тищенко – за ряд полезных замечаний.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (гранты 08-02-00621 и 10-02-01403).

Библиографический список

1. *Smith D.R., Padilla W.J., Vier D.C., et al.* Composite medium with simultaneously negative permeability and permittivity // *Phys. Rev. Lett.* 2000. Vol. 84, № 18. P. 4184.
2. *Ruppin R.* Surface polaritons of a left-handed medium // *Phys. Lett., A.* 2000. Vol. 277. P. 61.
3. *Вендик И.Б., Вендик О.Г., Одум М.А.* Изотропный метаматериал на основе сегнетокерамических сферических включений // *Физика твердого тела.* 2009. Т. 51. № 8. С. 1499.
4. *Shadrivov I.V., Sukhorukov A.A., Kivshar Yu.S.* Guided modes in negative-refractive-index waveguides // *Phys. Review, E.* 2003. Vol. 67. P. 057602.
5. *Shadrivov I.V., Sukhorukov A.A., Kivshar Yu.S., et al.* Nonlinear surface waves in left-handed materials // *Phys. Review, E.* 2004. Vol. 69. P. 016617.
6. *He Y., Cao Z., Shen Q.* Guided optical modes in asymmetric left-handed waveguides // *Optics Comm.* 2005. Vol. 245. P. 125.
7. *Bordman A.D., Egan P.* Novel nonlinear surface and guided TE waves in asymmetric LHM waveguides // *J. Opt. A. Pure Appl. Opt.* 2009. Vol. 11. P. 114032.
8. *Гинзбург В.Л.* Распространение электромагнитных волн в плазме. М.: Наука, 1967.
9. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Электродинамика сплошных сред. М.: Наука, 1992.
10. *Маненков А.Б.* Вытекающие моды в многослойном волноводе с нелинейными диэлектриками // *Изв. вузов. ПНД.* 2008. Т. 16. №4. С. 20–32.
11. *Маненков А.Б.* Волновод с тонкими нелинейными стенками // *Изв. вузов. ПНД.* 2009. Т. 17. № 6. С. 3.
12. *Никольский В.В.* Вариационные методы для внутренних задач электродинамики. М.: Наука, 1967.
13. *Каценеленбаум Б.З.* Теория волноводов с медленно меняющимися параметрами. М.: АН СССР, 1961.
14. *Маненков А.Б.* Возбуждение открытых однородных волноводов // *Изв. вузов. Радиофизика.* 1970. Т. 13. № 5. С. 739.
15. *Каханер Д., Моулер К., Нэш С.* Численные методы и программное обеспечение. М.: Мир, 1998.
16. *Рябенский В.С.* Введение в вычислительную математику. М.: Физматлит, 1994.
17. *Вайнштейн Л.А.* Электромагнитные волны. М.: Радио и связь, 1982.
18. *Трикоми Ф.* Дифференциальные уравнения. М.: Иностран. лит., 1962.
19. *Арфкен Г.* Математические методы в физике. М.: Атомиздат, 1970.
20. *Мандельштам Л.И.* Лекции по оптике, теории относительности и квантовой механике. М.: Наука, 1972. С. 396–400.

*Институт физических проблем
им. П.Л. Капицы РАН, Москва*

*Поступила в редакцию 18.06.2010
После доработки 12.07.2010*

CHARACTERISTICS OF THE NONLINEAR LEFT-HANDED WAVEGUIDE

A.B. Manenkov

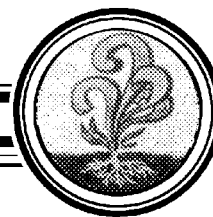
The modes of the planar dielectric waveguide made from nonlinear metamaterials with both negative permittivity and permeability are investigated. The dependencies of the propagation coefficients of the guided mode on the transmitted power are studied. The fields distributions are calculated for the systems with variable permittivity and permeability profiles. It is shown that in such systems a drastic increase in the field magnitudes may occur.

Keywords: Left-handed material waveguides, variable profiles of the permittivity and permeability, guided modes.



Маненков Александр Бенционович – родился в Москве (1943). Окончил Московский физико-технический институт (1965), к.ф.-м.н. (1973), д.ф.-м.н. (1996). С 1965 года работает в Институте физических проблем РАН. В физической лаборатории ИФП под руководством П.Л. Капицы экспериментально и теоретически занимался разработкой микроволновой аппаратуры для плазменных исследований. Совместно с Л.А. Вайнштейном построил общую теорию возбуждения открытых волноводов. Провел (совместно с В.Н. Мелехиным) пионерские исследования волноводов брэгговского типа. В настоящее время – ведущий научный сотрудник ИФП РАН. Область научных интересов – анализ задач возбуждения, распространения и дифракции волн в открытых электродинамических структурах, численное исследование различных задач радиофизики (включая оптику) и электроники.

119334 Москва, Косыгина, 2
Институт физических проблем им. П.Л. Капицы РАН
E-mail: manenkov@kapitza.ras.ru



МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ И ЕЕ ЧИСЛЕННАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ И ОПТИМИЗАЦИИ ГЕНЕРАТОРОВ С ЭЛЕКТРОННОЙ ОБРАТНОЙ СВЯЗЬЮ

*С.А. Куркин, А.А. Короновский, Е.Н. Егоров,
Ю.И. Левин, Р.А. Филатов, А.Е. Храмов*

В статье сформулирована математическая модель и ее численная реализация для исследования широкополосных хаотических колебаний и физических процессов в электронных потоках с виртуальным катодом в генераторах с электронной обратной связью. Кратко описан разработанный программный пакет, позволяющий моделировать нестационарные нелинейные физические процессы в электронных генераторах с виртуальным катодом, а также рассчитывать выходные характеристики соответствующих приборов. Изложены численные методы, которые использованы при программной реализации математической модели. При этом рассмотрены особенности тех или иных численных методов с учетом специфики исследуемых систем. Представлены результаты некоторых расчетов и оптимизации различных конфигураций систем с виртуальным катодом.

Ключевые слова: Численная модель, математическое моделирование, метод частиц в ячейках, СВЧ-генератор, интенсивный электронный поток, виртуальный катод, нелинейная динамика, СВЧ-электроника, виркатор, неоднородное магнитное поле, ионы.

Введение

В настоящее время приборы и устройства микроволнового диапазона, генерирующие хаотические шумоподобные сигналы, приобретают всё большее практическое значение. Подобные электронные устройства могут использоваться в современных информационно-телекоммуникационных системах, основанных на использовании широкополосных хаотических сигналов (см., например, [1–4]), шумовых радарах [5, 6], нелинейных антеннах [7, 8], а также в перспективе в различных технологических процессах химической и нефтяной отраслях промышленности.

В последнее время большой интерес вызывает новый метод генерации широкополосных хаотических сверхвысокочастотных (СВЧ) сигналов, основанный на использовании хаотических режимов колебаний в электронных пучках, обусловленных

собственной электронной распределенной обратной связью. На этом методе основана работа электровакуумных приборов, в которых генерация электромагнитного излучения сантиметрового и миллиметрового диапазона длин волн осуществляется за счет формирования в электронном потоке виртуального катода (генераторы на виртуальном катоде (ВК) или виркаторы) [9–13]. Следует отметить, что, по-видимому, первым генератором с электронной обратной связью являлся генератор с тормозящим полем, предложенный и исследованный в Саратовском государственном университете в конце 50-х годов XX столетия под руководством профессора В.Н. Шевчика [14]. Традиционно виркаторы рассматриваются как релятивистские генераторы сверхмощного широкополосного СВЧ-излучения [11, 13], однако в последнее время особый интерес вызывают именно нерелятивистские источники СВЧ-излучения на основе электронных потоков с ВК [15–17].

Принцип генерации широкополосных хаотических сигналов в нерелятивистских интенсивных электронных пучках при отражении части электронного потока за счет совместного действия пространственного заряда и дополнительного торможения пучка заряженных частиц основан на колебаниях пространственного заряда в динамически формируемом электронном резонаторе, которые далее регистрируются с помощью широкополосной электродинамической системы [17–24]. В такой электронно-волновой системе, получившей также название низковольтного виркатора [15–17], возможно обеспечить возбуждение в пучке хаотических колебаний в сверхширокой полосе частот (более двух октав), что позволяет использовать системы с электронной обратной связью как перспективные источники широкополосного хаотического сигнала среднего и большого уровня мощности. В настоящее время предложены различные схемы низковольтных виркаторов, которые позволяют реализовать различные режимы работы подобного генератора. В связи со всем вышесказанным возникает серьезная задача о проведении математического моделирования и оптимизации подобных генераторов.

Следует отметить, что современный уровень фундаментальных исследований в нелинейной науке, электронике и задачи инженерного проектирования реальных устройств требуют необходимости изучения физического прибора «как целого» с учетом взаимосвязей всех процессов [25–27]. При проведении реальных физических экспериментов на экспериментальных макетах такой подход является естественным. Однако он требует больших затрат средств и времени, а интерпретация полученных экспериментальных результатов оказывается нередко затруднительной. Более того, часто оказывается невозможным ответить на те или иные вопросы, опираясь только на результаты эксперимента. Поэтому возникает необходимость построения нестационарных математических моделей широкополосных устройств с электронной обратной связью для генерации нестационарных хаотических сигналов, которые достаточно полным самосогласованным образом отражают работу прибора в целом.

Наиболее адекватный подход к моделированию нелинейных нестационарных процессов в нерелятивистских и слаборелятивистских пучковых системах с виртуальным катодом основывается на рассмотрении самосогласованной системы кинетических уравнений, описывающих динамику заряженных частиц, совместно с уравнением Пуассона для нахождения квазистатического поля пространственного заряда [25, 27, 28]. Важным аспектом таких математических моделей является их универсальность. Так, формулировка моделей для различных конфигураций приборов с виртуальным катодом (например, низковольтный виркатор на пролетном токе, виркатор с магнетронно-инжекторной пушкой, виркатор с заполнением пространства

дрейфа нейтральным газом и т.д.) при использовании системы уравнений Пуассона–Власова различается лишь формой расчетной области, то есть постановкой граничных условий для электромагнитных полей, а также способом инжекции электронов в область взаимодействия прибора.

Следует отметить, что в настоящее время существует несколько широко используемых коммерческих и свободно распространяемых электромагнитных кодов, способных моделировать системы с виртуальным катодом (системы с электронной обратной связью). Наиболее известен коммерческий код MAGIC [29]. Данный код позволяет решать широкий круг задач вакуумной релятивистской сверхвысококачественной электроники. Другими кодами, широко используемыми на практике, являются коды KARAT [30] и CST Partical Studio [31]. Свободно распространяемым кодом для моделирования пучково-плазменных систем является код XООPIC [32]. Разработан также специализированный код для моделирования процессов излучения в коаксиальной конструкции виркатора [33]. Важно отметить, что данные пакеты программ реализуют при расчетах решение самосогласованной системы уравнений Максвелла–Власова, то есть являются полностью электромагнитными кодами. Такие модели являются принципиально необходимыми для исследования динамики пространственного заряда в релятивистских пучках с виртуальным катодом, когда необходимо учитывать собственные магнитные поля пучка, однако в случае слабoreлятивистских и нерелятивистских систем применение полностью электромагнитных моделей является избыточным и приводит к излишним затратам машинного времени на соответствующие расчеты. Следует также отметить, что вышеописанные пакеты программ являются универсальными, позволяя проводить моделирование самых различных систем и приборов электроники СВЧ, и весьма дорогостоящими, что делает использование их для решения задач оптимизации конкретных приборов весьма сложным. Поэтому создание специализированного программного пакета, направленного на проведение расчетов характеристик хаотических колебаний пространственного заряда электронного потока с виртуальным катодом, моделирование нелинейных физических процессов и оптимизацию характеристик пучково-плазменных генераторов с электронной обратной связью, представляется весьма важной и актуальной задачей в связи с большим интересом к данному новому классу приборов электроники сверхвысоких частот.

В статье подробно изложены математическая и численная модели для исследования широкополосных хаотических колебаний и физических процессов в электронных потоках с виртуальным катодом, кратко описаны структура и возможности прикладного программного пакета, приведены результаты расчетов различных схем низковольтного виркатора, а также дано краткое сравнение с известными экспериментальными данными.

1. Математическая модель

1.1. Исследуемая модель генератора с электронной обратной связью. Исследуемая модель генератора с электронной обратной связью (рис. 1) состоит из трех основных частей: источника электронов; пространства дрейфа в виде отрезка цилиндрического волновода длиной L и радиусом R ; коллектора электронов отработанно-

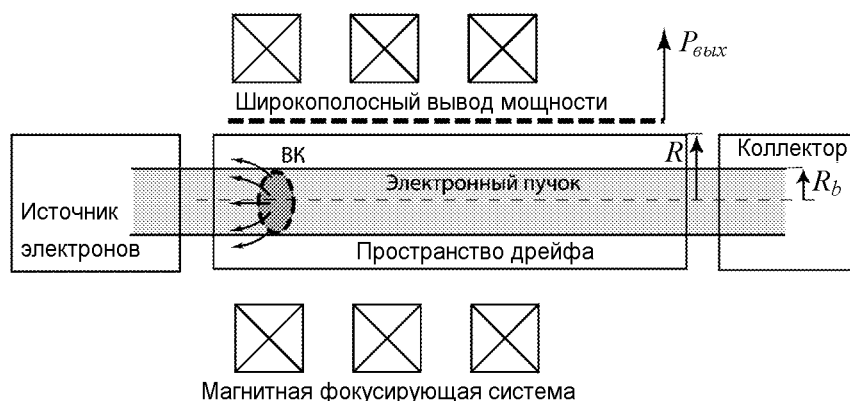


Рис. 1. Общая схема исследуемого генератора хаотических СВЧ-сигналов с электронной обратной связью, использующего в качестве активной среды электронный поток с виртуальным катодом

го пучка, а также выходного элемента, предназначенного для вывода СВЧ-мощности (генерируемого сигнала) из пространства взаимодействия. Вдоль оси системы может быть приложено магнитное поле для фокусировки электронов пучка.

В качестве источника электронного потока выступают либо электронная пушка с частично или полностью изолированным от магнитного поля термокатодом, формирующая аксиально-симметричный электронный поток на входе в пространство взаимодействия [34], либо магнетронно-инжекторная пушка, формирующая трубчатый винтовой пучок электронов, вращающихся в магнитном поле. Последняя рассматривается как перспективный источник мощного электронного потока для низковольтного виркатора [35–37]. Электронный пучок с прямолинейными траекториями электронов, инжектируемый в пространство взаимодействия, может быть либо моноскоростным, либо с заданным распределением заряженных частиц по скорости. Такое распределение задается параметрами работы термокатода и электронной пушки (см. подробнее [34, 38]) или другими условиями формирования и инжекции пучка, используемого в низковольтном виркаторе. В частности, в описываемом программном пакете при проведении численного моделирования может быть задано динамическое или статическое распределение электронов по скоростям на входе в пространство взаимодействия генератора, снятое из эксперимента и заданное табличным образом. Данный подход важен при проектировании и расчете комбинированных усилителей-генераторов, когда генераторная секция с виртуальным катодом располагается вместо коллектора мощного усилительного прибора (например, лампы бегущей волны или клистрона) – в этом случае для моделирования процессов в приборе необходимо учитывать значительный разброс электронов по скоростям [39–41].

Сформированный сплошной или трубчатый электронный пучок с током I инжектируется в пространство взаимодействия через левую (входную) сетку и выводится через правую (выходную) сетку на коллектор. Электроны могут также оседать на боковой стенке пространства взаимодействия. Обозначим внешний радиус пучка как R_b , а толщину трубчатого пучка на входе в пространство взаимодействия – как d . Введём геометрический параметр электронного пучка $\sigma = R_b/R$.

Для вывода мощности в исследуемой модели используется отрезок широкополосной электродинамической системы (обычно, отрезок спирали, обладающей широкой полосой частот и большим сопротивлением связи). Заметим, что в исследуе-

мой модели не учитываются джоулевы потери в стенках прибора и возможное излучение СВЧ-энергии в открытое пространство.

Вдоль оси пространства дрейфа, в котором формируется ВК, прикладывается создаваемое некоторой магнитной системой (например, соленоидом или магнитной периодической фокусирующей системой) внешнее магнитное поле. Простейшие конфигурации внешнего магнитного поля (например, постоянное однородное магнитное поле, создаваемое соленоидом) заданы в программе. В случае более сложных конфигураций используемых магнитных полей существует возможность задания распределений магнитного поля в пространстве прибора на основе расчетов во внешних программах, осуществляющих решение задач магнитостатики, например, с помощью свободно распространяемой программы Ansoft Maxwell SV*. В этом случае внешнее магнитное поле задается в виде файла, в котором представлены распределения продольной и радиальной компонент магнитного поля в пространстве системы. Величина магнитного поля в программе характеризуется параметром B , равным амплитуде индукции внешнего магнитного поля на оси симметрии системы. Вводится также параметр, определяющий степень экранировки электронной пушки от внешнего магнитного поля $\Delta B = (B - B_k)/B$, где B_k – величина индукции магнитного поля в области пушки. Значения параметра ΔB лежат в интервале значений от 0 (абсолютно не изолированная пушка) до 1 (абсолютно изолированная от внешнего магнитного поля пушка).

В случае моделирования прибора с учетом влияния ионизации газов предполагается, что пролетный промежуток равномерно заполнен однородным по составу газом (азот, водород, др.) при относительно малом давлении $p = 10^{-2} \div 10^{-7}$ торр. Электроны пучка вызывают ударную ионизацию молекул газа с образованием положительных ионов и вторичных электронов.

1.2. Основные уравнения модели генератора с электронной обратной связью. Опишем аналитическую модель для исследования генераторов с электронной обратной связью (генераторов на виртуальном катоде), лежащую в основе программного пакета. В ней используется нестационарная двумерная модель динамики электронного потока в пространстве взаимодействия. Модель эта основана на решении самосогласованной системы уравнений движения заряженных частиц, описывающих электронный пучок, и уравнений поля для нахождения самосогласованного электромагнитного поля в системе [25, 28].

В уравнениях, описывающих динамику электронного пучка, используются следующие безразмерные величины: потенциал φ и напряжённость E электрического поля (поля пространственного заряда), индукция B и напряжённость H магнитного поля, плотность заряда ρ и плотность тока j , скорость v и импульс электронов P , а также пространственные координаты z , r и время t , причем

$$\begin{aligned} \varphi' &= \frac{v_0^2}{\eta_0} \varphi, & E' &= \frac{v_0^2}{L\eta_0} E, & B' &= \frac{v_0}{L\eta_0} B, & H' &= \frac{v_0}{\eta_0\mu_0 L} H, & \rho' &= \rho_0 \rho, \\ j' &= j_0 j, & v' &= v_0 v, & P' &= m_e v_0 P, & z' &= Lz, & r' &= Lr, & t' &= \frac{L}{v_0} t. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь штрихом обозначены соответствующие размерные величины, $\eta_0 = e/m_e -$

* <http://www.ansoft.com/maxwellsv/>

удельный заряд покоящегося электрона, v_0 , ρ_0 и j_0 – не зависящие от радиуса статические (невозмущённые) скорость, плотность заряда и плотность тока электронного потока на входе в систему, соответственно, L – длина пространства взаимодействия.

Численное моделирование динамики электронного потока проводится методом крупных частиц (рис. 2). В этом случае анализ динамики электронного потока сводится к анализу движения совокупности большого числа крупных частиц, каждая из которых несет удельный заряд, равный заряду электрона [26]. В рассматриваемой цилиндрической геометрии крупные частицы имеют вид заряженных колец. Для каждой заряженной частицы решаются уравнения движения, которые записываются в следующем виде:

$$\frac{d\mathbf{P}_i}{dt} = \mathbf{E} + \left[\mathbf{P}_i, \left(\frac{\mathbf{B}}{\gamma_i} + \Omega_i \right) \right], \quad i = 1, \dots, N_0, \quad (2)$$

где $\mathbf{P}_i = \gamma \mathbf{u}$ – безразмерный вектор импульса частицы (в цилиндрической системе координат $P_{zi} = \gamma \dot{z}_i$, $P_{ri} = \gamma \dot{r}_i$, $P_{\theta i} = \gamma r_i \dot{\theta}_i$), $\gamma = \sqrt{1 + P^2/c^2}$ – релятивистский фактор, $\Omega = \dot{\theta} \mathbf{e}_z = (P_\theta / \gamma r) \mathbf{e}_z$ – вектор угловой скорости, записанный для случая вращения вектора импульса вокруг оси системы, параллельной орт-вектору \mathbf{e}_z , \mathbf{E} и \mathbf{B} – электрические и магнитные поля, действующие на частицу, c – скорость света. Индексом i обозначены номера частиц, N_0 – полное число заряженных частиц, моделирующих электронный поток.

Начальные условия для уравнений движения определяются способом инжекции частиц. В частности, при простейшем расчете моноскоростного пучка, инжектируемого в пространство взаимодействия низковольтного виркатора, начальные условия будут иметь вид

$$\dot{z}_i = v_0, \quad \dot{r}_i = 0, \quad \dot{\theta}_i = \frac{B_z(z_i, 0) \Delta B}{2\gamma}. \quad (3)$$

Первое и второе начальные условия определяют продольную и радиальную начальные скорости инжектируемых электронов, соответственно. Последнее начальное условие в (3) определяется теоремой Буша для произвольной степени экранировки ΔB источника электронного потока от внешнего магнитного поля [38] и задаёт начальную азимутальную скорость инжектируемого электронного потока при наличии экранировки.

В случае расчета системы с прямолинейным электронным потоком, имеющим разброс инжектируемых электронов по скоростям и углам влета, первые два началь-

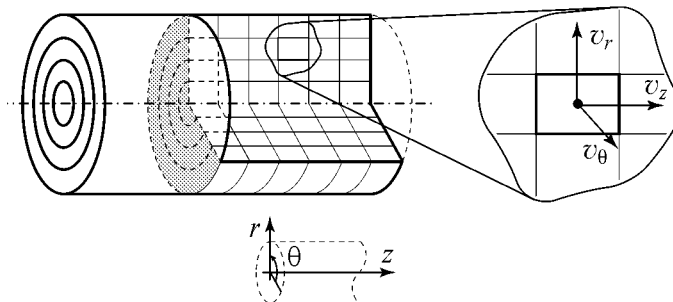


Рис. 2. Схематическое представление электронного потока с помощью набора крупных частиц (заряженных колец) в цилиндрической геометрии

ных условия для уравнений движения в (3) принимают следующий вид:

$$\dot{z}_i = (v_0 + \tilde{v}) \cos(\tilde{\alpha}), \quad \dot{r}_i = (v_0 + \tilde{v}) \sin(\tilde{\alpha}). \quad (4)$$

Здесь $\tilde{\alpha}$ и \tilde{v} – случайные величины, плотности распределения вероятности которых задаются в программе в соответствии с моделируемой системой. Данные случайные величины определяют распределения инжектируемых электронов по скоростям и углам влета.

Теперь остановимся подробнее на задаче нахождения самосогласованного электромагнитного поля в исследуемой системе. В рассматриваемом случае нерелятивистских и слаборелятивистских электронных потоков ($\beta_0 = v_0/c \leq 0.5$) для нахождения самосогласованного поля пространственного заряда достаточным является решение уравнения Пуассона, то есть нахождение самосогласованного поля пространственного заряда в квазистатическом приближении. Обоснованность такого описания в данном случае следует из того, что в исследуемой системе не выполняются условия для возникновения квадратичной пространственной группировки в пучке электронов [42], то есть в исследуемой системе не выполняется условие синхронизма бегущей электромагнитной волны и электронного потока. Таким образом, в данном случае можно пренебречь обратным влиянием поля замедляющей системы на пучок. Также в случае слаборелятивистского электронного потока можно не учитывать волновые свойства поля пространственного заряда пучка вследствие низких скоростей движения частиц. Учитывая нерелятивистские энергии потока, можно также пренебречь собственным магнитным полем электронного пучка и связанными с ним эффектами пинчевания потока [17]. Действительно, для характерных параметров исследуемого слаборелятивистского потока ларморовская сила, определяемая собственным магнитным полем пучка, $F_{r1} = \mu_0 e r v_0^2 / 2\pi R_b^2 \sim 10^{-4}$ Н оказывается значительно меньше фокусирующей (дефокусирующей) силы $F_{r2} = r B_0 \dot{\theta}_i \sim 10^4$ Н, определяемой внешним магнитным полем, скоростью и направлением орбитального движения частиц. Из вышесказанного следует, что для рассматриваемого случая слаборелятивистских электронных потоков использование уравнения Пуассона для вычисления самосогласованного электромагнитного поля является справедливым и обоснованным.

Уравнение Пуассона в цилиндрической системе координат имеет следующий вид:

$$\frac{1}{r} \frac{d\varphi}{dr} + \frac{d^2\varphi}{dr^2} + \frac{d^2\varphi}{dz^2} = \alpha^2 \rho, \quad (5)$$

где

$$\alpha = L \left(\frac{|\rho_0|}{V_0 \varepsilon_0} \right)^{1/2} \quad (6)$$

– безразмерный управляющий параметр (критерий подобия задачи [10]), пропорциональный току пучка ($\alpha \sim \sqrt{I}$), V_0 – ускоряющее напряжение. Уравнение Пуассона решается при следующих граничных условиях:

$$\varphi(z = 0, r) = 0, \quad \varphi(z = 1, r) = 0, \quad \varphi(z, r = R) = 0, \quad (7)$$

$$\left. \frac{d\varphi}{dr} \right|_{r=0} = 0. \quad (8)$$

Условие (7) означает, что пучок инжектируется в пространство, ограниченное идеально проводящей поверхностью под нулевым потенциалом, условие (8) на оси симметрии $r = 0$ определяется аксиальной симметрией пространства взаимодействия.

2. Самосогласованная двумерная численная модель генератора с электронной обратной связью

На основе описанной в разделе 1 математической модели построена численная модель для исследования генераторов с электронной обратной связью, которая реализует численные алгоритмы решения уравнений математической модели.

2.1. Численное интегрирование уравнения Пуассона и взвешивание частиц на сетке. Введем функции плотности заряда $\rho_{k,m}$ и потенциала $\varphi_{k,m}$, заданные в дискретном времени и в дискретном пространстве. Для этого используем дискретное разбиение пространства (двумерную равномерную вычислительную сетку) с шагами $\Delta z = 1/(N_z - 1)$ и $\Delta r = 1/(N_r - 1)$ по продольному и радиальному направлениям. N_z и N_r – число узлов пространственной сетки в продольном и радиальном направлениях, соответственно, причём $k = 0, \dots, N_z$, а $m = 0, \dots, N_r$. На сетке будем определять введенные выше дискретные функции; также зададим шаг во времени Δt .

Таким образом, в численной схеме моделирования рассматриваемой системы напряженность и потенциал поля пространственного заряда, а также плотность заряда вычисляются на введенной пространственной сетке с шагами Δz и Δr . Уравнение Пуассона (5) для нахождения самосогласованного электрического поля в системе при этом также записывается в конечно-разностном виде

$$\begin{aligned} & \frac{1}{m\Delta r} \frac{\varphi_{k,m+1} - \varphi_{k,m-1}}{2\Delta r} + \frac{\varphi_{k,m+1} - 2\varphi_{k,m} + \varphi_{k,m-1}}{\Delta r^2} + \\ & + \frac{\varphi_{k+1,m} - 2\varphi_{k,m} + \varphi_{k-1,m}}{\Delta z^2} = \alpha^2(\rho_{k,m} - \rho_{\text{ion}}), \end{aligned} \quad (9)$$

$$k = 1, \dots, N_z - 1, \quad m = 1, \dots, N_r - 1,$$

$$\varphi_{0,m} = 0, \quad \varphi_{N_z,m} = 0, \quad \varphi_{k,N_r} = 0, \quad \varphi_{k,0} = \varphi_{k,1},$$

где ρ_{ion} – плотность заряда ионного фона. Соотношение (9) представляет собой систему линейных алгебраических уравнений, которые решаются методом прогонки, подробно описанным применительно к уравнению Пуассона в монографиях [28, 43].

Для вычисления плотности пространственного заряда $\rho_{k,m}$ на пространственной сетке, входящей в правую часть уравнения (9), используется снижающая сеточный шум процедура билинейного взвешивания частиц (колец) на пространственной сетке (метод «частиц в ячейке» или PIC-метод) [28]. В этом методе плотность пространственного заряда в узле (k, m) пространственной сетки, то есть в точке с координатами $(z_k, r_m) = (k\Delta z, m\Delta r)$, выражается как

$$\rho(z_k, r_m) = \frac{1}{n_0} \sum_{i=1}^{N_0} q_i \Theta(z_i - z_k, r_i - r_m), \quad (10)$$

где (z_i, r_i) – координаты i -й частицы, $q_i = \mp 1$ – заряд i -й частицы («электрона» пучка, «иона» или «вторичного электрона», возникающего при ионизации), N_0 – полное число крупных частиц, находящихся в пространстве дрейфа, n_0 – параметр вычислительной схемы, равный числу частиц на ячейку в невозмущенном состоянии, Θ – функция формы в двумерном пространстве, определяющая процедуру «взвешивания» крупной частицы на пространственной сетке с шагами Δz и Δr , которая может быть как кусочно-линейной, так и более высокого порядка [28].

2.2. Численное интегрирование уравнений движения заряженных частиц.

Рассмотрим алгоритм численного решения уравнений движения крупных частиц в системе. Как показали предварительные оценки, классическая схема интегрирования уравнений движения разностным методом Эйлера непригодна для рассматриваемого класса систем. Это объясняется тем, что данная схема обладает большой погрешностью из-за высоких осцилляторных скоростей частиц в системе, что, в свою очередь, приводит к нарушению закона сохранения импульса системы «частица+поле». При этом уменьшение шагов разбиения по пространству и времени сопряжено с неоправданно высокими затратами машинного времени при проведении расчётов. Вследствие этого численное интегрирование уравнений движения в рассматриваемой модели проводится методом Бóриса [44], который значительно превосходит метод Эйлера по точности и скорости вычислений: этот метод обладает нулевой амплитудной ошибкой и фазовой ошибкой менее 1%.

В методе Бóриса уравнение движения (2) с учетом введения вспомогательных переменных, применение которых сокращает количество выполняемых операций, записывается в следующем виде:

$$\frac{\mathbf{P}_i^{n+1/2} - \mathbf{P}_i^{n-1/2}}{\Delta t} = \mathbf{E}_i^n + \left[\left(\frac{\mathbf{P}_i^{n+1/2} + \mathbf{P}_i^{n-1/2}}{2} \right), \left(\frac{\mathbf{B}_i^n}{\gamma_i^n} + \frac{\mathbf{P}_{\theta_i}^{n+1/2} + \mathbf{P}_{\theta_i}^{n-1/2}}{2\gamma r} \mathbf{e}_z \right) \right], \quad (11)$$

где индекс n – означает шаг по времени, а i – номер крупной частицы. Здесь релятивистский фактор γ выражен через импульс частицы и имеет вид $\gamma^2 = 1 + \mathbf{P}^2/c^2$. Величины вспомогательных переменных $\mathbf{P}_i^{n+1/2}$ и $\mathbf{P}_i^{n-1/2}$ определяются следующим образом:

$$\mathbf{P}_i^{n-1/2} = \mathbf{P}^- - \frac{\mathbf{E}_i^n \Delta t}{2}, \quad \mathbf{P}_i^{n+1/2} = \mathbf{P}^+ + \frac{\mathbf{E}_i^n \Delta t}{2}. \quad (12)$$

Подставляя выражения (12) в (11), получаем

$$\frac{\mathbf{P}_i^+ - \mathbf{P}_i^-}{\Delta t} = \left[(\mathbf{P}_i^+ + \mathbf{P}_i^-), \left(\frac{\mathbf{B}_i^n}{2\gamma_i^n} + \frac{P_{\theta_i}^+ + P_{\theta_i}^-}{4\gamma r} \mathbf{e}_z \right) \right]. \quad (13)$$

Последнее выражение описывает вращение вектора \mathbf{P} в пространстве вокруг параллельной вектору \mathbf{B} прямой на угол $\vartheta = -2 \arctan((\mathbf{B}/\gamma + \Omega)\Delta t/2)$. Численная реализация вращения (13) выполняется с помощью следующих преобразований:

$$\mathbf{P}' = \mathbf{P}^- + [\mathbf{P}^-, \mathbf{t}] \quad \mathbf{P}^+ = \mathbf{P}^- + [\mathbf{P}', \mathbf{s}], \quad (14)$$

где $\mathbf{t} = (\mathbf{B}/\gamma + \Omega)\Delta t/2$ и $\mathbf{s} = 2\mathbf{t}/(1 + t^2)$ – вспомогательные промежуточные переменные – векторы.

Координаты вектора импульса на очередном временном шаге определяются как

$$\mathbf{x}^{n+1} = \mathbf{x}^n + \mathbf{u}^{n+1/2} \Delta t = \mathbf{x}^n + \frac{\mathbf{P}^{n+1/2} \Delta t}{\gamma^{n+1/2}}. \quad (15)$$

Обсудим более подробно последовательность действий в алгоритме Бóриса. Идея схемы состоит в том, что на каждом временном шаге моделирования разделяются действующие на частицу электрические и магнитные силы или, иными словами, по отдельности вычисляются поступательная и вращательная компоненты движения. При численном интегрировании методом Бóриса на каждом временном шаге необходимо проделать следующую последовательность действий. Во-первых, по формуле (12) необходимо вычислить компоненты промежуточного вектора импульса \mathbf{P}^- по значению импульса на предыдущем шаге $\mathbf{P}^{n-1/2}$. Таким образом совершается так называемое первое смещение вектора импульса в фазовом пространстве системы. Далее следует выполнить вращение (13). Для этого вводятся вспомогательные векторы \mathbf{t} и \mathbf{s} , и используется преобразование (14). Результатом выполнения преобразования (13) является вектор \mathbf{P}^+ , с помощью которого осуществляется последний шаг алгоритма Бóриса – нахождение вектора $\mathbf{P}^{n+1/2}$. С помощью вектора $\mathbf{P}^{n+1/2}$, полученного в результате указанных процедур, определяются скорость частицы $\mathbf{u}_{n+1/2}$ и пространственная координата \mathbf{x}^{n+1} заряженной частицы на $(n + 1)$ -м временном шаге.

Отметим, что в случае системы с неоднородным внешним магнитным полем для корректного анализа особенностей движения заряженных частиц вблизи оси аксиальной симметрии осуществлялся переход в декартову систему координат. Это обеспечивало более аккуратное и точное решение уравнений движения согласно алгоритму, изложенному в монографии [28].

Для моделирования инжекции электронного пучка с произвольно заданным начальным разбросом продольных скоростей использовалась модификация методики, рассмотренной в монографиях [25, 28] в применении к воспроизведению начальных распределений частиц в плазменных системах. В этом случае в качестве начальных распределений электронов по скоростям, которые задавались при инжекции пучка в диодный промежуток, использовались экспериментально измеренные функции распределения $f(v)$ (см., например, статью [18]). В каждом сечении пучка задавалась своя функция распределения $f(v, r)$, представляющая собой усредненное распределение по всем точкам $\Delta r/r_b$ поперечного сечения пучка r_i , в которых проводились измерения.

Далее, для инжекции частиц со скоростями, распределенными по $f(v)$, строилась интегральная функция распределения

$$F(v) = \frac{\int_0^v f(v') dv'}{\int_0^{v_{\max}} f(v') dv'}, \quad (16)$$

где $F(v = 0) = 0$, $F(v = v_{\max}) = 1$, v_{\max} – некоторая максимальная скорость инжектируемых электронов,

$$\frac{dF(v)}{dv} = f(v) \left(\int_0^{v_{\max}} f(v') dv' \right)^{-1}. \quad (17)$$

Если функцию $F(v_s)$ приравнять некоторому распределению чисел R_s ($R_s \in (0, 1)$), то распределение v_s , как нетрудно видеть, будет соответствовать $f(v)$. Тогда, выбирая набор чисел R_s (в нашем моделировании рассматривался набор из M чисел ($s = 0, \dots, M - 1$), распределенных от 0 до 1) и численно малыми шагами интегрируя (16), задаем скорости v_s инжектируемых частиц, определяемые равенством $F(v_s) = R_s$. Как было показано в работе [18], с помощью описанной методики можно задать любое экспериментальное распределение электронов по скоростям на входе в пространство взаимодействия.

2.3. Учет ионизации нейтрального газа, заполняющего пространство дрейфа. Рассмотрим теперь процесс ионизации газов в исследуемой системе, который может быть задан параметрами моделирования. Численная схема, предложенная нами в работе [23] для моделирования процессов ионизации газа, заполняющего пространство дрейфа, и учёта влияния положительных ионов на колебательные процессы в исследуемой системе, схожа со схемой, описанной в [45], однако, дает более точное описание процессов ионизации газа малоэнергетичными электронами, то есть более корректна в случае рассмотрения электронного потока с виртуальным катодом. Сталкиваясь с молекулами остаточных газов, первичные электроны могут производить ударную ионизацию, в результате которой образуется положительный ион и вторичный электрон. Такие процессы, как многократная ионизация или образование отрицательного иона за счет захвата электрона нейтральной молекулой, не учитываются, так как их вероятность мала по сравнению с вероятностью образования пары положительный ион – медленный электрон [46]. Положительные ионы вводились путём расчета коэффициента ионизации ε , который определяется как количество ионов, образуемых одним электроном в газе на пути в 1 см при давлении $p_0 = 1$ мм рт. ст. и температуре 20 градусов Цельсия, и зависит от энергии ионизирующего электрона и рода газа [46]. На рис. 3 приведены типичные зависимости коэффициента ионизации от энергии \mathcal{E} ионизирующего электрона для двух газов (азота и водорода). Из рисунка хорошо видно, что максимум коэффициента ионизации приходится на электроны с малой энергией, порядка 100 эВ. Последнее говорит о том, что роль ионизации остаточного газа в пучке с виртуальным катодом очень велика, так как именно в подобной системе наблюдается большое число заряженных частиц с малой энергией – электронов, затормозившихся в области виртуального катода.

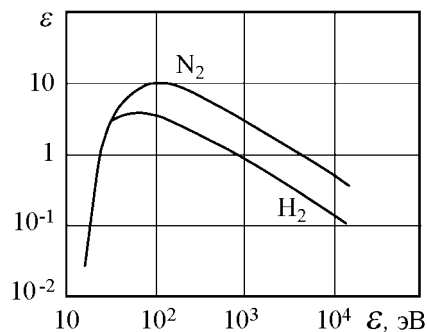


Рис. 3. Примеры зависимостей коэффициента ионизации ε от энергии ионизирующего электрона \mathcal{E} для азота N_2 и водорода H_2 (из работы [46])

В соответствии с определением коэффициента ионизации количество пар N «положительный ион – вторичный электрон», образующихся в единице объёма за время Δt , выражается соотношением

$$N = n_b \varepsilon_p(\bar{v}) \Delta t, \quad (18)$$

где $\varepsilon_p = \varepsilon(\bar{v})p/p_0$ – нормированный коэффициент ионизации остаточного газа, зависящий от давления в рабочей камере и от средней по модулю скорости

$\bar{v} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \|\mathbf{v}_k\|$ всех n_b частиц, пролетевших за время Δt через единичный объем, $p_0 = 1$ мм рт. ст. Произведение $\bar{v}\Delta t$ в выражении (18) определяет средний путь, пройденный этими частицами. Все рождающиеся в результате ионизации в единице объема заряженные частицы объединяются в две крупные частицы – «ион» и «вторичный электрон», которые и участвуют в дальнейшем расчете.

Для введенных таким образом частиц, описывающих ионы и вторичные электроны, рассчитываются соответствующие уравнения движения, а сами частицы взвешиваются на пространственной сетке с помощью описанной выше процедуры для учета их вклада в пространственный заряд системы. Уравнение движения для ионов отличается от уравнения движения для электронов (2) лишь наличием множителей $(-m_e/M_{\text{ion}})$ в правых частях уравнений, где M_{ion} – масса положительного иона. Данные множители отражают меньший удельный заряд ионов, возникающих в системе благодаря ионизации газа, заполняющего пространство дрейфа.

2.4. Особенности численного моделирования генератора с электронной обратной связью с магнетронно-инжекторной пушкой. Рассмотрим особенности численного моделирования генератора с электронной обратной связью, источником электронов в котором является магнетронно-инжекторная пушка (МИП). Для того чтобы на входе в систему корректно учесть разброс электронного потока, формируемого МИП, по скоростям, начальная скорость частиц задается таким образом, чтобы закон распределения полных тепловых скоростей электронов подчинялся распределению Максвелла. В этом случае компоненты скорости подчиняются распределению Гаусса. В рассматриваемой модели электроны будут иметь две компоненты скорости v_z и v_r , при этом полная скорость частицы направлена по отношению к нормали плоскости эмиттера (полоска) под углом φ , меняющимся в диапазоне $\varphi \in [-\pi/2; \pi/2]$. Необходимо учитывать, что сама плоскость эмиттера (полоска) в выбранной геометрии магнетронно-инжекторной пушки наклонена к оси системы под некоторым углом ψ .

Для корректного задания начальных скоростей частиц в рассмотрение вводится локальная система координат $X'Y'$ таким образом, что ось OY' является касательной к поверхности эмиттера. Тогда распределения компонент скорости в новой локальной системе координат в нормированном виде могут быть записаны как

$$dn_{v_{x'}} = \frac{n}{v_{\max}\sqrt{\pi}} e^{-\left(\frac{2v_{x'}}{v_{\max}}\right)^2} dv_{x'}, \quad dn_{v_{y'}} = \frac{2n}{v_{\max}\sqrt{\pi}} e^{-\left(\frac{2v_{y'}}{v_{\max}}\right)^2} dv_{y'}. \quad (19)$$

Здесь $v_{x'}$ и $v_{y'}$ – нормальная и тангенциальная составляющие скорости, соответственно, которые меняются в диапазоне $0 \leq v_{x'} \leq v_{\max}$ и $-v_{\max} \leq v_{y'} \leq v_{\max}$, $v_{\max} = 2\sqrt{2kT/m_e}$ – максимальная тепловая скорость, k – постоянная Больцмана, T – абсолютная температура, m_e – масса электрона. При этом функция распределения электронов по скоростям задаётся в следующем виде:

$$F(v_{x'}, v_{y'}) = \frac{dn_{v_{x'}, y'}}{n dv_{x'}, y'}. \quad (20)$$

Вид соответствующих функций распределения приведен на рис. 4, из которого видно, что распределение для тангенциальной составляющей скорости имеет вид клас-

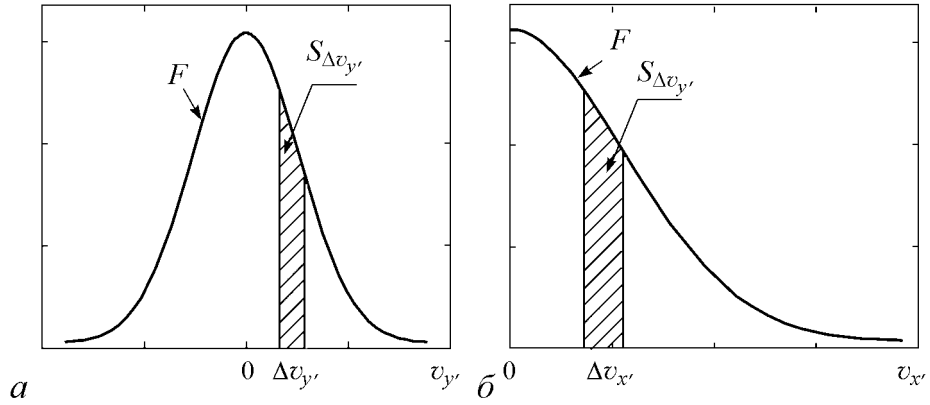


Рис. 4. Функции распределения электронов по скоростям для тангенциальной (а) и нормальной (б) составляющих скорости

сического распределения Гаусса, и появление положительных и отрицательных значений тангенциальной компоненты скорости частицы равновероятно. Распределение для нормальной скорости представляет собой правую (положительную) половину кривой Гаусса, так как значение нормальной составляющей компоненты скорости может быть только неотрицательным.

Для нахождения радиальной и продольной компонент скорости (азимутальная компонента скорости принята равной нулю из-за аксиальной симметрии пространства дрейфа) в исходной системе координат, связанной с осью симметрии системы, необходимо воспользоваться преобразованием

$$v_r = v_{y'} \cos(\psi) + v_{x'} \sin(\psi), \quad v_z = -v_{y'} \sin(\psi) + v_{x'} \cos(\psi), \quad (21)$$

где v_r и v_z – соответствующие компоненты скорости заряженных частиц в исходной системе координат. Согласно (21), каждая инжектируемая частица получает в качестве компонент скорости пару случайных чисел (v_z, v_r) , вероятность выбора которых будет определяться функцией распределения (20). В этом случае начальные условия для частиц электронного пучка запишутся в виде:

$$\dot{r}_i = v_r, \quad \dot{\theta}_i = 0, \quad \dot{z}_i = v_z, \quad r_i = r_k + v_r \cdot \Delta t / 2, \quad \theta_i = 0, \quad z_i = z_k + v_z \cdot \Delta t / 2. \quad (22)$$

Последние три выражения задают координаты $(r_i, \theta_i$ и $z_i)$ частиц над поверхностью эмитирующего полоска МИП $(r_k$ и $z_k)$.

При численной реализации алгоритма электроны вводятся в пространство катод–анод следующим образом. Эмитирующий полосок делится на N эмитирующих зон (колец), каждая из которых независимо от других эмитирует в пространство дрейфа заряженные частицы. На каждом временном шаге в систему вводятся K заряженных частиц. Случайно выбирается номер эмитирующей зоны, с которой вводится очередная частица, ей присваивается пара значений (v_r, v_z) . Набор из N пар компонент скорости $\{v_r, v_z\}_N$ задаётся с помощью распределения Максвелла (20). При этом распределения компонент скорости подчиняются распределению Гаусса (19). В численной схеме реализация этого распределения осуществляется следующим образом. Диапазон изменения скоростей частиц $v_{x'}$ и $v_{y'}$ ($0 \leq v_{x'} \leq v_{\max}$ и $-v_{\max} \leq v_{y'} \leq v_{\max}$ в локальной системе координат, связанной с

эмитурующим полоском катода) делится на M скоростных классов, шириной $\Delta v_{x'}$ и $\Delta v_{y'}$ каждый. Тогда количество частиц, имеющих компоненты скорости в диапазоне $[v_{x',y'}, v_{x',y'} + \Delta v_{x',y'}]$, определяется как $\Delta N = S_{\Delta v_{x',y'}} N$, где $S_{\Delta v_{x',y'}}$ – площадь под кривой Гаусса, соответствующая скоростному классу $v_{x',y'}$ (см. рис. 4). Далее с помощью преобразования (21) производится переход в систему отсчета, связанную с осью системы.

Начальные условия для крупных частиц в численной схеме задаются согласно уравнениям (22). Пространственная координата крупной частицы при инжекции её в пространство дрейфа отстоит от плоскости эмиссии на величину $\mathbf{v} \cdot \Delta t / 2$ (см. уравнения (22)). Это связано с требованием численной схемы метода с перешагиванием, при котором начальная скорость и координата частицы задаются в разные моменты времени, отстоящие друг от друга на величину $\Delta t / 2$.

2.5. Моделирование широкополосного вывода мощности с использованием метода эквивалентных схем. Для моделирования вывода мощности в системе рассматривается отрезок спиральной замедляющей системы (ОСЗС), используемый в качестве вывода энергии СВЧ-колебаний. Следуя [42, 47], ОСЗС представляется в виде эквивалентной длинной линии, состоящей из последовательно соединенных индуктивностей L_0 [Гн/м] и шунтирующих емкостей C_0 [Ф/м]. Если считать, что электронный пучок движется параллельно длинной линии в непосредственной близости от нее, так что все силовые линии, соответствующие отдельным частям заряда $q(x)$ пучка, заканчиваются на ОСЗС и начинаются при одном и том же значении продольной координаты x , то заряд пучка $q(x)$ может рассматриваться как индуцированный в ОСЗС [22, 48]. Тогда ОСЗС описывается телеграфными уравнениями, дополненными слагаемым, описывающим возбуждение электромагнитных волн пучком

$$\frac{\partial I}{\partial t} = -\frac{1}{L} \frac{\partial U}{\partial x}, \quad \frac{\partial U}{\partial t} = -\frac{1}{C} \frac{\partial I}{\partial x} + \frac{1}{C} \frac{\partial q}{\partial t}. \quad (23)$$

Обратным влиянием возбуждаемого поля ОСЗС на динамику заряда пренебрегаем, ограничиваясь приближением заданного тока. Последнее предположение справедливо, так как в рассматриваемом случае отсутствует синхронизм между электронным потоком и бегущей электромагнитной волной в длинной линии.

Телеграфные уравнения (23) решаются численно методом конечных разностей в предположении согласования линии передачи на левом $x = 0$ и правом $x = l$ концах ОСЗС. Предполагается, что длина отрезка спиральной замедляющей системы l по величине меньше или равна длине пространства взаимодействия L . Распределение величины заряда пучка $q(x, t)$, возбуждающего электромагнитные волны в линии передачи, берется из решения задачи методом частиц.

Колебания в интенсивном электронном потоке обычно далеки от гармонических, поэтому интегральная выходная мощность генерации системы определяется следующим выражением:

$$P = \frac{1}{TK} \int_0^T U^2(t, x = l) dt, \quad (24)$$

где интеграл означает усреднение по времени мгновенной мощности $P_m(t) = U^2(t, l) / K$ на правом конце (выходе) линии передачи, l – длина линии передачи, K – волновое сопротивление ОСЗС.

Таким образом, на основе описанных выше численных алгоритмов для решения уравнений математической модели генератора с электронной обратной связью при известных начальных условиях возможно проведение моделирования динамики слабoreлятивистского электронного потока в самосогласованном поле пространственного заряда в исследуемом классе приборов.

2.6. Программа для моделирования нестационарных нелинейных процессов в генераторах с электронной обратной связью. На основе вышеописанных аналитической и построенной на ее основе численной моделей был разработан пакет программ для численного моделирования нестационарных нелинейных процессов в электронных генераторах с электронной обратной связью. Особый акцент в разработанном программном пакете сделан на возможность моделирования и оптимизации хаотических процессов и их характеристик в различных конфигурациях генераторов с электронной обратной связью.

Пакет прикладных программ включает в себя следующие подпрограммы: подпрограмму MOVE решения уравнений движения заряженных частиц (как ионов, так и электронов); подпрограмму CHARGE для взвешивания плотности пространственного заряда на пространственно-временной вычислительной сетке; подпрограмму PUASSON интегрирования конечно-разностным методом уравнения Пуассона; подпрограмму SPIRAL моделирования широкополосного вывода электромагнитной мощности; подпрограмму IONIZATION моделирования ионизации газа в пространстве дрейфа; подпрограмму INJECTION инъекции частиц в пространство дрейфа с возможностью выбора различных типов катодов, функций распределения заряженных частиц на входе в пространство взаимодействия и конфигураций внешних магнитных полей; подпрограмму FIELD для нахождения полей, действующих на частицы, при известных распределениях полей на пространственной сетке; базу данных BDATA, содержащую сведения о зависимостях коэффициента ионизации от энергии ионизирующих электронов и типичные распределения внешних магнитных полей; базу данных DBOUT для хранения расчетных материалов и подпрограмму OUTPUT для их обработки, вывода различных характеристик физических процессов в электронно-волновой системе и для работы с базой данных DBOUT; подпрограмму OPTIM, выполняющую функции оптимизации параметров генератора для достижения оптимальных значений какой-либо определенной выходной характеристикой прибора (например, мощностью хаотического сигнала, электронным КПД или др.); управляющую подпрограмму MAIN, которая обеспечивает инициализацию всех модулей пакета программ, взаимодействие между различными модулями, ввод данных и конфигурации системы, а также контроль за работой программного пакета. Функциональная схема взаимодействия перечисленных выше подпрограмм представлена на рис. 5.

Первым шагом при моделировании генератора с электронной обратной связью с помощью разработанного программного пакета запускается управляющая подпрограмма MAIN, которая вызывает процедуру инициализации численной модели (см. рис. 5). Данная процедура определяет начальные безразмерные значения всех физических величин и переменных, используемых в программе, считывает входные данные, задающие параметры и характеристики исследуемой модели, распределение величины внешнего магнитного поля в пространстве дрейфа, параметры газа, заполняющего пространство дрейфа пучка, а также основные параметры численной схемы. При задании внешнего магнитного поля в системе и параметров газа (зависи-

мости коэффициента ионизации от энергии ионизирующих электронов) процедура инициализации подпрограммы MAIN использует внутреннюю базу данных BDATA, содержащую необходимые зависимости (линия 1 на рис. 5).

Далее на каждом дискретном временном шаге управляющая подпрограмма MAIN вызывает модули пакета в следующей последовательности. В начале нового временного шага вызывается подпрограмма INJECTION инжекции новых частиц в систему с заданного источника (линия 2 на рис. 5). Затем вызывается подпрограмма FIELD интерполяции полей, определяющая поля, действующие на частицы с учетом заданного распределения поля в пространстве взаимодействия на вычислительной сетке (линия 3). Далее с помощью подпрограммы MOVE производится расчет уравнений движения крупных частиц (линия 4). После этого, если это задано параметрами моделирования, последовательно выполняются подпрограммы ионизации остаточных газов IONIZATION и расчета уравнений движения для ионов и вторичных электронов MOVE (линия 5). Результатом их работы является появление новых частиц в системе с заданными характеристиками (вторичных электронов и ионов). По полученным значениям координат заряженных частиц в текущий дискретный момент времени выполняется подпрограмма CHARGE взвешивания зарядов частиц на пространственной сетке PIC-методом (линия 6), в результате чего определяется распределение пространственного заряда на вычислительной сетке. На следующем этапе выполняется подпрограмма PUASSON для решения уравнения Пуассона (9) с учетом полученного подпрограммой CHARGE распределения плотности пространственного заряда (линия 7). Далее производится вызов подпрограммы SPIRAL с целью моделирования широкополосного вывода мощности (линия 8).

Результаты работы подпрограмм пакета и полученные данные следующим шагом передаются подпрограмме OUTPUT (линия 9), которая рассчитывает выходные характеристики системы (энергии частиц, электромагнитных полей, баланс мощностей) и производит обработку, вывод и первичную визуализацию данных. Результаты работы подпрограмм модуль OUTPUT сохраняет в БД DBOUT для возможности их дальнейшей обработки и анализа (линия 10 на рис. 5).

На данном этапе управление передается подпрограмме MAIN, которая выполняет процедуру удаления из системы вылетевших за границы пространства взаимодействия частиц (линия 11 на рис. 5). Далее управляющая подпрограмма MAIN

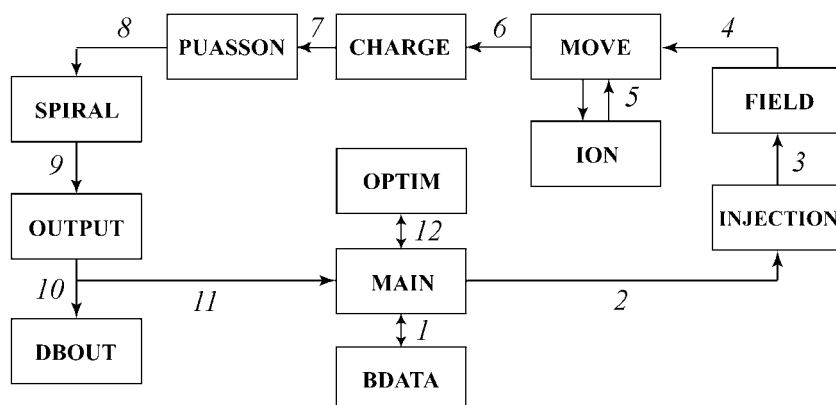


Рис. 5. Блок-схема программного пакета

увеличивает дискретное время на единицу и вновь запускает описанную выше последовательность подпрограмм. Данный процесс повторяется до тех пор, пока не будет достигнуто максимальное время моделирования, заданное параметрами моделирования. Если в параметрах моделирования задана опция оптимизации прибора по какой-либо выходной характеристике излучения, то следующим этапом подпрограмма MAIN передает управление модулю ОПТИМ (линия 12 на рис. 5). Данная подпрограмма с помощью выбранного метода оптимизации определяет новый набор параметров генератора, для которых затем будет произведен расчет системы и вычислена оптимизируемая выходная характеристика. В подпрограмме ОПТИМ заложены возможности математической оптимизации с помощью квазиьютоновского метода, метода Пауэлла или генетического алгоритма [49]. Таким образом, следующим шагом после определения модулем ОПТИМ новых параметров модели управление вновь передается подпрограмме MAIN, которая, в свою очередь, запускает описанную выше последовательность подпрограмм уже для нового набора параметров. При достижении интересующей выходной характеристикой оптимального значения процесс оптимизации завершается.

3. Результаты моделирования и оптимизации различных конфигураций электронных систем с электронной обратной связью

Остановимся в данном разделе на ряде важных результатах моделирования и оптимизации, полученных при численных расчетах различных конфигураций генераторов с электронной обратной связью [20] с помощью разработанного программного пакета.

3.1. Физические процессы и оптимизация процессов взаимодействия в низковольтном электронном генераторе с электронной обратной связью. Рассмотрим сначала физические процессы и нелинейную динамику моноскоростного трубчатого электронного потока во внешнем однородном магнитном поле, формируемом соленоидом. Известно, что нестационарный ВК формируется при превышении током пучка критического значения [13], являющегося стартовым током для генераторов с электронной обратной связью. Критический ток – экспериментально легко измеряемая и практически важная величина, определяющая пусковые условия генератора.

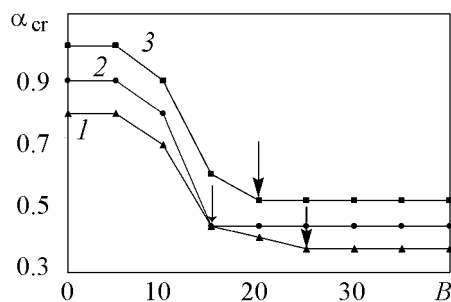


Рис. 6. Зависимости нормированной величины критического тока трубчатого электронного пучка от величины B внешнего магнитного поля при $\beta=0.1, 0.3$ и 0.5 (кривые 1, 2 и 3, соответственно)

Рассмотрим зависимость нормированной величины критического тока трубчатого электронного потока $\alpha_{кр}$ от амплитуды внешнего магнитного поля B . На рис. 6 приведены данные зависимости при различных скоростях потока $\beta = v_0/c$. Видно, что все три кривые имеют схожий характерный вид. Анализируя зависимость критического тока $\alpha_{кр}$ от магнитного поля B , можно ввести характерную величину внешнего магнитного поля B_{min} , соответствующую опти-

мальному магнитному полю, при котором критический ток принимает минимальное значение. Соответствующие безразмерные величины отмечены на рис. 6 стрелками. Величины B_{\min} разделяют зависимости $\alpha_{\text{cr}}(B)$ на две характерные области с различным поведением: при малых магнитных полях $B < B_{\min}$ наблюдается быстрое уменьшение величины критического тока с ростом внешнего магнитного поля, в то время как при больших магнитных полях $B > B_{\min}$ наблюдается насыщение величины критического тока, и его значение перестает меняться с ростом внешнего магнитного поля. Аналогичные зависимости были ранее обнаружены и для сплошных электронных потоков в подобной конфигурации системы [50–53].

Рассмотрим теперь подробнее механизмы формирования ВК в трубчатом электронном потоке при различных величинах внешнего магнитного поля, объясняющие поведение зависимостей критического тока $\alpha_{\text{cr}}(B)$ от магнитного поля. Для этого на рис. 7 представлены конфигурационные портреты электронного потока в координатах (r, z) при магнитных полях $B < B_{\min}$ (рис. 7, а) и $B > B_{\min}$ (рис. 7, б) для нескольких моментов времени в течение характерного периода колебаний ВК. Каждая точка на конфигурационном портрете соответствует координате одной из заряженных частиц, моделирующих электронный пучок, в заданный момент времени t_i .

В случае малого внешнего магнитного поля $B < B_{\min}$ (см. рис. 7, а) в системе преобладает поперечная динамика заряженных частиц по направлению к боковой стенке пространства дрейфа и к оси симметрии системы. Это обусловлено

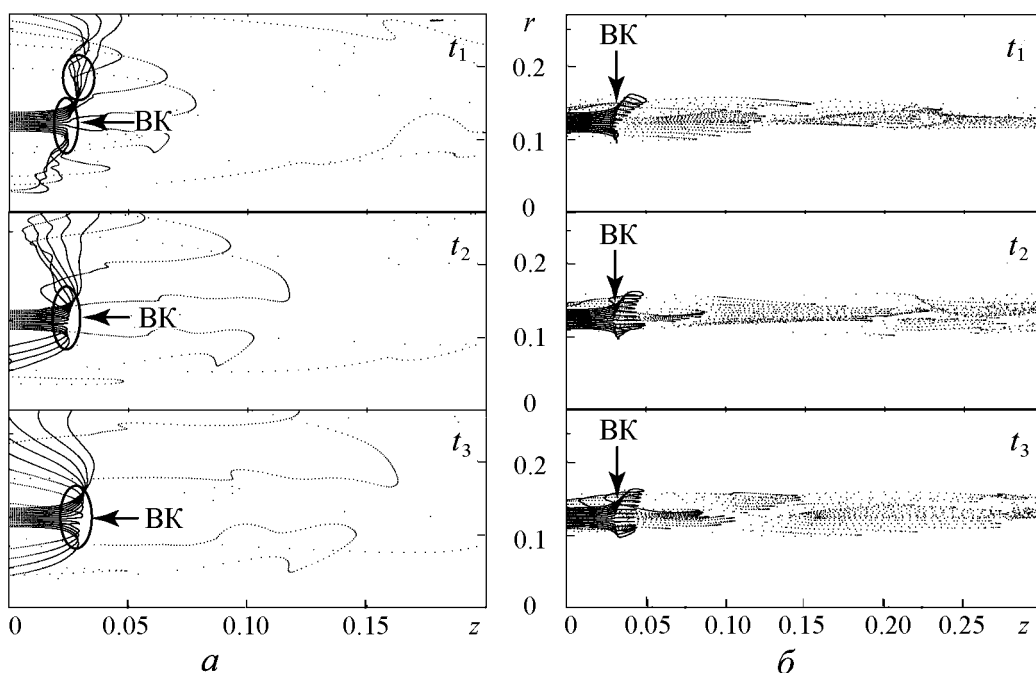


Рис. 7. Серии конфигурационных портретов трубчатого электронного потока в безразмерных координатах (r, z) в последовательные моменты времени при $B = 5, \alpha = 32$ (а) и $B = 35, \alpha = 23$ (б). Интервал времени между соседними конфигурационными портретами $t_{i+1} - t_i = \Delta t \approx T_{\text{BK}}/4$, где T_{BK} – характерное время колебаний ВК

превосходством расталкивающих сил пространственного заряда над фокусирующей силой относительно слабого внешнего магнитного поля. Такая поперечная динамика слабофокусируемых магнитным полем заряженных частиц приводит к растяжению области ВК вдоль радиальной оси и значительному токооседанию пучка на боковую стенку пространства дрейфа. С увеличением величины внешнего магнитного поля поперечная динамика пространственного заряда ограничивается возрастающим фокусирующим магнитным полем. При $B > B_{\min}$ (см. рис. 7, б) существенные поперечные смещения частиц в потоке практически отсутствуют, и динамика пространственного заряда протекает преимущественно в продольном направлении. Следовательно, ВК в случае большого внешнего магнитного поля ($B > B_{\min}$) локализован в области, поперечные размеры которой практически не превышают толщину трубчатого пучка d при инжекции его в пространство дрейфа.

Таким образом, с увеличением внешнего магнитного поля до величины B_{\min} поперечная динамика заряженных частиц ограничивается, что приводит к росту плотности пространственного заряда в области ВК при фиксированном токе α инжектируемого пучка и, соответственно, к росту глубины потенциальной ямы, формирующейся в системе благодаря силам пространственного заряда. Следовательно, величина критического тока α_{cr} с ростом внешнего магнитного поля в диапазоне $B \in [0, B_{\min})$ должна уменьшаться, что соответствует первому падающему участку зависимости $\alpha_{\text{cr}}(B)$ (см. рис. 6). При больших магнитных полях $B > B_{\min}$ поперечная динамика частиц в системе практически отсутствует, и плотность пространственного заряда в области ВК при фиксированном токе пучка при $B \approx B_{\min}$ достигает максимально возможной величины. Поэтому величина критического тока при дальнейшем увеличении магнитного поля остаётся минимальной и неизменной. Это соответствует второй области (области насыщения) на зависимости $\alpha_{\text{cr}}(B)$.

Таким образом, минимум критической величины тока пучка, то есть оптимальные условия для формирования ВК в системе обеспечиваются при условии ограничения в системе поперечной динамики электронов и, как следствие, достижения максимальной величины плотности пространственного заряда в области минимума потенциала (в области ВК) [54].

Была проведена оптимизация параметров низковольтного виркатора с целью достижения требуемых выходных характеристик прибора. В результате использования возможностей по оптимизации параметров прибора, заложенных в разработанный программный пакет, были предложены оптимальные конфигурации и величины внешнего магнитного поля в генераторе, при которых мощность выходного излучения максимальна. На рис. 8 приведены зависимости мощности генерации в низковольтном виркаторе от амплитуды внешнего магнитного поля (рис. 8, а) и от положения магнитной системы (МПФС) (рис. 8, б) при различных токах инжектируемого электронного потока. Данные зависимости демонстрируют существование оптимальных параметров магнитной системы B_{opt} и z_{opt} , определенных с помощью разработанной подпрограммы оптимизации, при которых мощность выходного излучения максимальна. При параметрах магнитной системы, меньших оптимального значения, выходная мощность монотонно увеличивается с их ростом. Напротив, если $B > B_{\text{opt}}$ или $z > z_{\text{opt}}$, наблюдается монотонное уменьшение, а затем – насыщение мощности выходного излучения с ростом B или z .

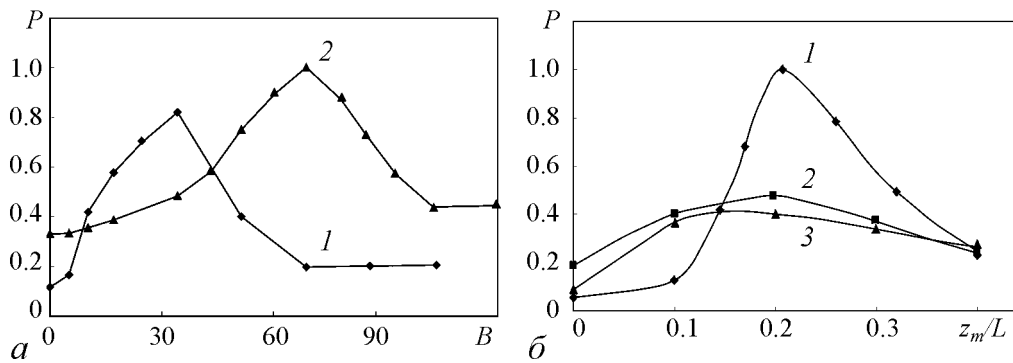


Рис. 8. Зависимости нормированной интегральной мощности выходного СВЧ-излучения в низковольтном виркаторе от амплитуды внешнего магнитного поля B (а) при безразмерных токах пучка $\alpha = 20$ (кривая 1) и $\alpha = 30$ (кривая 2), а также от положения магнитной системы z_m (б) при $\alpha = 10$ (кривая 1), $\alpha = 20$ (кривая 2) и $\alpha = 30$ (кривая 3)

Обнаруженное поведение зависимостей мощности выходного излучения от параметров магнитной системы, а также наличие оптимальных значений, является следствием физических процессов, происходящих в системе при изменении внешнего магнитного поля. Рассмотрим данные физические процессы только при изменении амплитуды внешнего магнитного поля, так как изменение положения магнитной системы с точки зрения действующего на ВК магнитного поля аналогично изменению амплитуды. При $B < B_{\text{opt}}$ вследствие значительных сил кулоновского расталкивания в области ВК в пучке преобладает поперечная динамика заряженных частиц к боковой стенке пространства дрейфа, поэтому главная электронная структура (ВК) в данном случае оказывается сильно растянутой вдоль радиального направления и характеризуется малой плотностью пространственного заряда. Мощность выходного излучения пропорциональна плотности пространственного заряда электронного сгустка, возбуждающего систему, и в рассматриваемом случае она также будет невелика. С ростом величины магнитного поля поперечная динамика заряженных частиц в системе ограничивается, и плотность пространственного заряда в области ВК возрастает. Как следствие, увеличивается величина мощности выходного излучения (см. рис. 8). При $B \sim B_{\text{opt}}$ поперечная динамика в системе оказывается практически подавленной фокусирующим магнитным полем, и выходная мощность достигает максимального значения. С дальнейшим ростом величины внешнего магнитного поля ($B > B_{\text{opt}}$) часть заряженных частиц (в основном, из внешних слоев) оказывается захваченной магнитной ловушкой. Данные частицы формируют вторичный электронный сгусток и перестают участвовать в осцилляциях ВК, не возбуждая выходную электродинамическую систему. Это приводит к уменьшению мощности выходного излучения в системе. Количество таких частиц увеличивается с ростом амплитуды внешнего магнитного поля и, следовательно, выходная мощность уменьшается (см. рис. 8).

Скоростной разброс на входе системы приводит к снижению изрезанности и расширению спектра генерируемых частот, однако одновременно ведет к снижению СВЧ-мощности выходного хаотического излучения [55]. На рис. 9 пред-

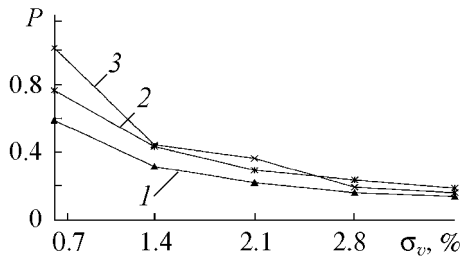


Рис. 9. Зависимости нормированной интегральной мощности выходного СВЧ-излучения от σ_v (при дисперсии плотности распределения электронов по углам влёта $\sigma_\alpha = 0.016$) при различных безразмерных токах пучка: $\alpha = 20$ (кривая 1), $\alpha = 25$ (кривая 2), $\alpha = 30$ (кривая 3)

соответствует мощности шумовой генерации прибора при подавлении регулярных колебаний ВК как единого целого в системе [55]. В режиме большого скоростного разброса пучка по скоростям и углам влёта генератор с электронной обратной связью может использоваться как источник мощных шумоподобных сигналов в СВЧ-диапазоне. Отметим, что последний результат находится в хорошем соответствии с известными экспериментальными данными по исследованию виркатора с разбросом пучка по скоростям [18].

3.2. Ионизация газа электронным потоком с виртуальным катодом. Низковольтный виркатор – генератор хаотических радиоимпульсов. Рассмотрим теперь результаты исследования влияния ионизации нейтрального газа на колебания в электронном потоке с ВК, полученные при помощи разработанного программного пакета. Исследования проводились для нерелятивистского генератора с электронной обратной связью, в котором ВК возникает за счет дополнительного торможения электронов в пространстве взаимодействия. Предполагалось, что пространство дрейфа равномерно заполнено однородным по составу нейтральным газом низкого давления. Данное исследование актуально для изучения влияния вакуумных условий на генерацию в подобной системе. Кроме того, оно обнаруживает ряд новых эффектов, связанных с влиянием положительных ионов на процессы в электронном потоке с ВК [23, 56].

На рис. 10 представлены конфигурационные портреты электронного потока ($a-d$) и положительных ионов ($e-k$) в пространстве (r, z) , соответствующие различным моментам безразмерного времени t . На рис. 10 приведена верхняя плоскость сечения пространства дрейфа плоскостью (r, z) . Координата $z = 0$ соответствует положению первой (входной) сетки, $z = 1$ – второй (выходной) сетки, ограничивающих пространство дрейфа, координата $r = 0.5$ соответствует боковой стенке трубы дрейфа. Каждая точка на конфигурационном портрете отвечает координате одной крупной частицы электрона ($a-d$) или положительного иона ($e-k$) на плоскости координат (r, z) .

Как показывает анализ мгновенных конфигурационных портретов электронного потока в пространстве дрейфа с тормозящим электроны потенциалом, через некоторое время после начала инжекции в пространстве дрейфа электроны (за счет внешнего электростатического поля и полей пространственного заряда) замедляют-

ставлены зависимости выходной мощности в низковольтном виркаторе от величины дисперсии плотности распределения электронов по скоростям σ_v для различных величин тока пучка. Из рисунка следует, что величина выходной мощности генерации прибора монотонно уменьшается с увеличением степени разброса электронов по скоростям, асимптотически приближаясь к постоянному значению. Постоянное значение мощности при достаточно большой дисперсии скоростного разброса соответ-

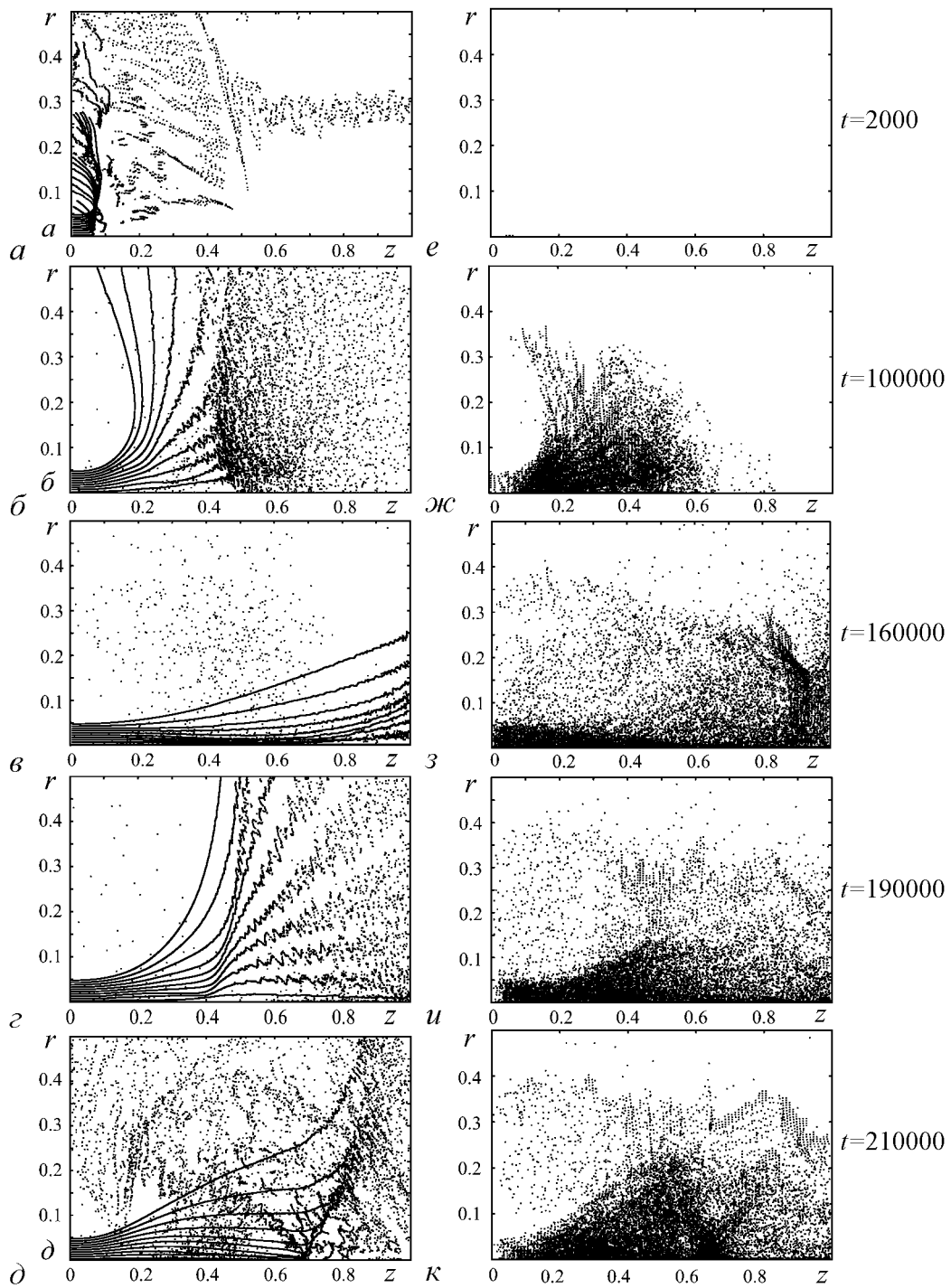


Рис. 10. Конфигурационный портрет электронного потока (а-д) и положительных ионов (е-к) в пространстве $(r; z)$ в различные моменты безразмерного времени t при давлении нейтрального газа $p = 2 \times 10^{-3}$ мм рт.ст. и тормозящем потенциале $\Delta V_r = 0.4$

ся и разворачиваются обратно к плоскости инжекции. В результате возникает ВК, и устанавливается двухпотокное состояние электронного потока. ВК на конфигурационных портретах электронного потока соответствует области с высокой плотностью заряженных частиц, так как он представляет собой область, в которой электроны пучка замедляются и отражаются обратно к плоскости инжекции.

После образования ВК в его области начинается интенсивная ионизация нейтрального газа (так как скорости электронов малы, а плотность достаточно велика), в результате чего в ней образуются положительные ионы. Положительные ионы нейтрализуют пространственный заряд ВК, вследствие чего ВК смещается по направлению движения пролетных электронов (рис. 10, б, ж). Ионизация в области ВК по-прежнему интенсивна и приводит к дальнейшему росту величины полного положительного пространственного заряда в пространстве дрейфа и снижению амплитуды выходного сигнала вследствие затухания колебательных движений ВК. На рис. 11 представлена временная реализация выходного сигнала системы $U(t)$ при давлении нейтрального газа $p = 2 \cdot 10^{-3}$ мм рт.ст. и величине тормозящего потенциала $\Delta V_r = 0.4$.

В дальнейшем в системе происходит накопление положительного пространственного заряда вплоть до вытеснения ВК из пространства дрейфа. В результате реализуется ламинарное состояние электронного потока, когда все электроны достигают выходной сетки системы (рис. 10, в). Это приводит к срыву высокочастотной генерации (см. рис. 11). Интенсивность ионизации в результате резко снижается, и полный положительный пространственный заряд в системе начинает уменьшаться за счет дрейфа положительных ионов из пространства взаимодействия.

Когда полный положительный пространственный заряд в пространстве взаимодействия снижается до определенной величины, в системе нарушается ламинарное состояние электронного потока, и вновь возникают отражения электронов (рис. 10, з). Однако следует отметить, что сначала возникающий ВК является стационарным и не вызывает высокочастотной генерации (см. рис. 11). Лишь через некоторый промежуток времени в системе вновь возникает нестационарный ВК, вызывающий генерацию высокочастотного излучения. На конфигурационном портрете электронного потока в пространстве взаимодействия в момент времени после образования второго ВК (рис. 10, д), можно видеть, что траектории электронов значительно возмущены наличием положительных ионов в пространстве дрейфа. Затем процесс вытеснения ВК из пространства дрейфа вновь повторяется. Как следствие, выходной сигнал генератора представляет собой последовательность импульсов хаотических СВЧ-колебаний, возникающих за счет самосогласованности процессов ионизации, динамики ионов и электронов потока.

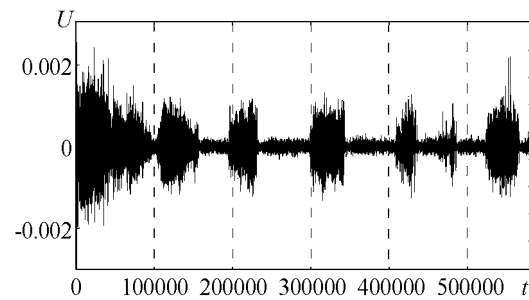


Рис. 11. Выходной сигнал системы в режиме импульсной высокочастотной генерации при давлении $p = 2 \cdot 10^{-3}$ и тормозящем потенциале $\Delta V_r = 0.4$. На рисунке хорошо видны импульсы высокочастотной генерации с приблизительно постоянной частотой следования

Таким образом, в ходе проведенных исследований был обнаружен эффект импульсной СВЧ-генерации в автономной системе с виртуальным катодом. Как следствие, в таком режиме микроволновый генератор с электронной обратной связью в присутствии положительных ионов может рассматриваться как эффективный генератор хаотических радиоимпульсов [23]. Интерес к такой системе связан с возможностью использования подобных генераторов в современных прямохаотических системах передачи данных [1, 4, 57]. С помощью разработанного программного пакета была осуществлена оптимизация параметров хаотической генерации, в пространстве параметров были выявлены области устойчивой импульсной генерации низковольтного виркатора – генератора хаотических радиоимпульсов. Следует отметить, что полученные численные результаты были подтверждены в ходе экспериментального исследования низковольтного генератора с виртуальным катодом [58].

3.3. Моделирование динамики виртуального катода в системе с магнетронно-инжекторной пушкой. Обсудим результаты численного моделирования динамики интенсивного винтового электронного потока в системе с магнетронно-инжекторной пушкой, полученные с помощью описываемого программного пакета.

На рис. 12, *а* и *б* изображены две характерные траектории заряженных частиц в исследуемой системе. На рис. 12, *а* приведена траектория заряженной частицы, которая проходит через пространство дрейфа, не испытывая отражения. В магнетронно-инжекторной пушке продольная составляющая B_z магнитного поля плавно нарастает от области катода к выходному концу пушки. Таким образом, в скрещенных статических магнитном и анодном электрическом полях частица движется по спирали вокруг линии магнитного поля. При этом её траектория имеет монотонно уменьшающийся радиус и медленно увеличивающуюся частоту вращения.

На рис. 12, *б* представлена траектория частицы, отражающейся в некоторой области пространства в сторону катода, а затем – от катода к выходному концу МИП. Отражение частиц определяется двумя причинами. Распределение магнитного поля в МИП таково, что движущиеся от катода частицы попадают в магнитную ловушку. Поэтому частицы, имеющие недостаточно большую продольную кинетическую энергию, в результате дополнительной «перекачки» энергии из продольного движения в поперечное (в результате уве-

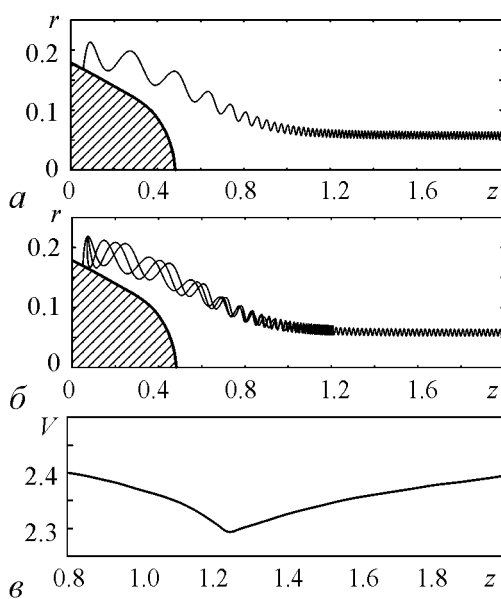


Рис. 12. Траектории заряженных частиц в пространстве дрейфа: *а* – траектория частицы, проходящей через пространство дрейфа без отражения; *б* – траектория частицы, испытывающей двукратное отражение от виртуального катода. По осям отложены нормированные величины. Толстой черной линией обозначен катод; *в* – распределение потенциала на оси системы в области отражения частиц (в нормированных единицах измерения)

личения частоты вращения), могут отразиться от магнитной «пробки» в обратную сторону. При этом на характер движения частицы значительное влияние оказывает начальный скоростной разброс: частицы, вылетевшие с катода в одно и то же время из близко расположенных точек, но с разными продольными компонентами начальных тепловых скоростей, могут двигаться по существенно различающимся траекториям. Другим фактором, влияющим на отражение частиц, является собственное поле пространственного заряда пучка, которое, вызывая провисание потенциала в пространстве дрейфа, может привести к образованию виртуального катода и, как следствие, к частичному или полному отражению частиц потока.

Второе отражение частицы (см. рис. 12, б) происходит в поле катода. При этом возможна ситуация, при которой отраженная от ВК частица возвращается на катод, вызывая его дополнительный нагрев и вторичную эмиссию электронов. Таким образом, отразившись от катода, частица продолжает движение в пространстве дрейфа к выходному концу пушки. При этом она может снова отразиться от области пониженного потенциала (ВК) либо, разогнавшись в ускоряющем поле анода и потенциальной ямы, приобрести достаточную продольную скорость для преодоления потенциального барьера и магнитной ловушки и покинуть пространство дрейфа. Именно эту ситуацию демонстрирует рис. 12, б.

На рис. 12, в изображено распределение потенциала на оси системы в области удаленной от катода пушки. Видно, что потенциал на оси системы провисает, при этом минимум формирующейся потенциальной ямы соответствует области, в которой частицы потока испытывают отражение, и в которой формируется виртуальный катод.

На рис. 13 показан характерный конфигурационный портрет электронного потока в координатах (z, v_z) для генератора с электронной обратной связью и с винтовым электронным потоком, формируемым МИП. На портрете хорошо видно образование виртуального катода и формирование двухпоточкового состояния, обеспечивающего наличие распределенной электронной обратной связи в системе. Интересной особенностью поведения системы с винтовым электронным потоком является сильная распределенность виртуального катода (плоскостей отражения

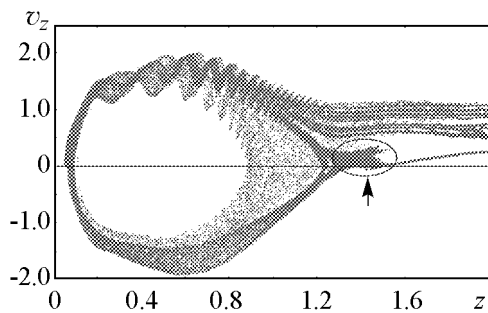


Рис. 13. Диаграмма распределения продольной скорости v_z заряженных частиц от продольной координаты z в нормированных единицах. Стрелкой показан вторичный электронный сгусток, формирующийся за плоскостью виртуального катода

частиц) в области пространства взаимодействия, а также формирование вторичного электронного сгустка за плоскостью виртуального катода.

Проведена оптимизация конструкции генератора с магнетронно-инжекционной пушкой для получения шумоподобного сигнала со слабой изрезанностью спектра. Были определены оптимальные значения ускоряющих напряжений пучка и параметров магнитного поля для достижения оптимальных характеристик генерируемого сигнала.

Заключение

В работе подробно рассмотрены аналитическая и численная модели для исследования широкополосных хаотических колебаний и оптимизации физических процессов в электронных потоках с виртуальным катодом в различных схемах генераторов с электронной обратной связью. Разработан программный пакет, позволяющий проводить численное моделирование нелинейных нестационарных процессов в различных модификациях генераторов с электронной обратной связью. Приведены результаты проведенной оптимизации характеристик генерации низковольтного виркатора, численного моделирования сверхкритического электронного потока, инжектируемого в газонаполненную камеру с учетом ионизации, а также виркатора с источником электронов в виде магнетронно-инжекторной пушки. Полученные результаты демонстрируют сложную динамику ВК в рассмотренных системах, характер которой существенно зависит от параметров систем. Таким образом, разработанные модели и пакет программ на их основе являются эффективным инструментом для исследования процессов, происходящих в системах с интенсивными электронными потоками, а также для оптимизации выходных характеристик генераторов с электронной обратной связью.

Авторы выражают благодарность чл.-корр. РАН, профессору, зав. кафедрой электроники, колебаний и волн Д.И. Трубецкову и профессору, д.т.н., зав. отделением физики нелинейных систем Ю.А. Калинину за поддержку данных исследований, многочисленные полезные критические замечания и предложения, которые использовались при проведении совместных исследований и подготовке данной работы. Авторы также хотят выразить большую благодарность профессорам Ю.П. Блюху, И.И. Магде, А.Е. Дубинову, М.И. Петелину, В.Л. Братману, А.А. Кураеву за обсуждение на протяжении многих лет различных аспектов данной работы.

Работа поддержана федеральной целевой программой «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 годы и грантами РФФИ (проекты №№ 09-02-00255, 10-02-90002).

Библиографический список

1. *Дмитриев А.С., Панас А.И.* Динамический хаос: новые носители информации для систем связи. М.: Физматлит, 2002.
2. *Dronov V., Hendrey M.R., Antonsen T.M., Ott E.* Communication with a chaotic traveling wave tube microwave generator // *Chaos*. 2004. Vol. 14, №1. P. 30.
3. *Dmitriev B.S., Hramov A.E., Koronovskii A.A., Starodubov A.V., Trubetskov D.I., Zharkov Y.D.* First experimental observation of generalized synchronization phenomena in microwave oscillators // *Physical Review Letters*. 2009. Vol. 102, № 7. 074101.
4. *Короновский А.А., Москаленко О.И., Храмов А.Е.* О применении хаотической синхронизации для скрытой передачи информации // *Успехи физических наук*. 2009. Т. 179, № 12. С. 1281.
5. *Narayanan R.M., Dawood M.* Doppler estimation using a coherent ultrawide-band random noise radar // *IEEE Trans. Antennas and Propagation*. 2000. Vol. 48. P. 868.

6. *Залогин Н.Н., Кислов В.В.* Широкополосные хаотические сигналы в радиотехнических и информационных системах. М.: Радиотехника, 2006.
7. *Meadows B.K., Heath T.H., Ne J.D. et al.* Nonlinear antenna technology // Proceedings IEEE. 2002. Vol. 90, № 5. P. 882.
8. *Шалфеев В.Д., Матросов В.В., Корзинова М.В.* Динамический хаос в ансамблях связанных фазовых систем // Зарубежная радиоэлектроника. Успехи современной радиоэлектроники. 1998. Т. 11. С. 44.
9. *Диденко А.Н., Красик Я.Е., Перельгин С.Ф., Фоменко Г.П.* Генерация мощного СВЧ-излучения релятивистским электронным пучком в триодной системе // Письма в ЖТФ. 1979. Т. 5, № 6. С. 321.
10. *Трубецков Д.И., Храмов А.Е.* Лекции по сверхвысокочастотной электронике для физиков. Т. 2. М.: Физматлит, 2004.
11. *Дубинов А.Е., Селемир В.Д.* Электронные приборы с виртуальным катодом, Радиотехника и электроника. 2002. Т. 47, № 6. С. 575.
12. *Granatstein V.L., Alexeff I.* High Power Microwave Sources. Artech House Microwave Library, 1987.
13. *Benford J., Swegle J.A., Schamiloglu E.* High Power Microwaves. CRC Press, Taylor and Francis, 2007.
14. *Шевчик В.Н., Шведов Г.Н., Соболева А.Н.* Волновые и колебательные явления в электронных потоках на сверхвысоких частотах. Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 1962.
15. *Калинин Ю.А., Короновский А.А., Храмов А.Е., Егоров Е.Н., Филатов Р.А.* Экспериментальное и теоретическое исследование хаотических колебательных явлений в нерелятивистском электронном потоке с виртуальным катодом // Физика плазмы. 2005. Т. 31, № 11. С. 1009.
16. *Егоров Е.Н., Калинин Ю.А., Левин Ю.И., Трубецков Д.И., Храмов А.Е.* Вакуумные генераторы широкополосных хаотических колебаний на основе нерелятивистских электронных пучков с виртуальным катодом // Изв. РАН. Сер. физич. 2005. Т. 69, № 12. С. 1724.
17. *Gursharn S., Shashank C.* Secondary virtual-cathode formation in a low-voltage vircator: Pic simulations // IEEE Transactions on Plasma Science. 2008. Vol. 36, № 3. С. 694.
18. *Калинин Ю.А., Храмов А.Е.* Экспериментальное и теоретическое исследование влияния распределения электронов по скоростям на хаотические колебания в электронном потоке в режиме образования виртуального катода // ЖТФ. 2006. Т. 76, № 5. С. 25.
19. *Филатов Р.А., Храмов А.Е., Калинин Ю.А.* СВЧ-генератор хаотического широкополосного сигнала на виртуальных катодах. Патент № 59323. Tech. гер. Изобретения. Полезные модели: Официальный бюллетень Федеральной службы по интеллектуальной собственности, патентам и товарным знакам. Москва: ФИПС. 2006. № 34.
20. *Калинин Ю.А., Куркин С.А., Трубецков Д.И., Храмов А.Е.* СВЧ-генераторы хаотических колебаний на основе электронных пучков с виртуальным катодом // Успехи современной радиоэлектроники. 2008. № 9. С. 53.

21. *Егоров Е.Н., Калинин Ю.А., Короновский А.А., Левин Ю.И., Храмов А.Е.* Исследование образования структур и хаотической динамики в нерелятивистском электронном пучке с виртуальным катодом в тормозящем поле // Радиотехника и электроника. 2006. Т. 51, № 11. С. 51.
22. *Егоров Е.Н., Калинин Ю.А., Короновский А.А., Храмов А.Е.* Исследование зависимости мощности СВЧ-генерации низковольтного виркатора от управляющих параметров // ЖТФ. 2007. Т. 77, № 10. С. 139.
23. *Filatov R.A., Hramov A.E., Bliokh Y.P., Koronovskii A.A., Felsteiner J.* Influence of background gas ionization on oscillations in a virtual cathode with a retarding potential // Physics of Plasmas. 2009. Vol. 16, № 3. 033106.
24. *Калинин Ю.А., Стародубов А.В., Волкова Л.Н.* Сверхширокополосные генераторы шумоподобных высокочастотных и сверхвысокочастотных колебаний с электронной обратной связью // Письма в ЖТФ. 2010. Т. 36, № 3. С. 39.
25. *Рошаль А.С.* Моделирование заряженных пучков. М.: Атомиздат, 1979.
26. *Свешников А.Г., Якунин С.А.* Численные модели бесстолкновительной плазмодинамики // Математическое моделирование. 1989. Т. 1, № 4. С. 1.
27. *Anderson T.M., Mondelli A.A., Levush B., Verboncoeur J.P., Birdsall C.K.* Advances in modelling and simulation of vacuum electron devices // Proceedings IEEE. 1999. Vol. 87, № 5. P. 804.
28. *Birdsall C.K., Langdon A.B.* Plasma physics, via computer simulation. NY: McGraw-Hill, 1985.
29. *Warren G., Ludeking L., Nguyen K., Smithe D., Goplen B.* Advances/applications of MAGIC and SOS // Computational Accelerator Physics. AIP Conf. Proc. 1994. Vol. 297. P. 313.
30. User's manual for code KARAT. Springfield, VA: BRA, 1992.
31. A software suite with total synergy // Microwave Journal. 2006. Т. 49, № 1. С. 19.
32. *Verboncoeur J.P., Langdon A.B., Gladd N.T.* An object-oriented electromagnetic pic code // Comput. Phys. Commun. 1991. Vol. 64. P. 252.
33. *Антошкин М.Ю., Григорьев В.П., Коваль Т.В., Саблин Н.И.* Электромагнитный код в полярной системе координат для математического моделирования излучения в коаксиальном триоде с виртуальным катодом // Математическое моделирование. 1995. Т. 7, № 8. P. 25.
34. *Алимовский И.В.* Электронные пучки и электронные пушки. М.: Сов. радио, 1966.
35. *Короновский А.А., Трубецков Д.И., Храмов А.Е.* Методы нелинейной динамики и хаоса в задачах электроники сверхвысоких частот. Т. 2. Нестационарные и хаотические процессы. М.: Физматлит, 2009.
36. *Калинин Ю.А., Кожевников В.Н., Лазерсон А.Г., Александров Г.И., Железковский Е.Е.* Сложная динамика и явление динамического хаоса в потоке заряженных частиц, формируемых магнетронно-инжекторной пушкой (численный и физический эксперимент) // ЖТФ. 2000. Т. 70, № 7. С. 83.

37. Калинин Ю.А., Кузнецов Н.Н., Украинская Т.Н. Исследование широкополосных шумоподобных колебаний в интенсивных пучках заряженных частиц в режиме образования виртуального катода // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2002. Т. 10, № 5. С. 32.
38. Tsimring S.E. Electron beams and microwave vacuum electronics // John Wiley and Sons, Inc., Hoboken, New Jersey, 2007.
39. Калинин Ю.А., Короновский А.А., Храмов А.Е. Исследование широкополосных хаотических СВЧ-колебаний в гибридной системе «лампа бегущей волны – коллектор-генератор» // ЖТФ. 2008. Т. 78, № 5. С. 83.
40. Калинин Ю.А., Есин А.Д. Методы и средства физического эксперимента в вакуумной СВЧ-электронике. Саратов: Изд-во СГУ, 1991.
41. Калинин Ю.А., Панин А.Ф., Украинская Т.Н. Экспериментальное исследование спектра продольных составляющих скорости электронов в течение периода ВЧ поля // Электронная техника. Сер. 1. 1976. № 2. С. 111.
42. Трубецков Д.И., Храмов А.Е. Лекции по сверхвысокочастотной электронике для физиков. Т. 1. М.: Физматлит, 2003.
43. Роуч П. Вычислительная гидродинамика. М.: Мир, 1980.
44. Boris J.P., Lee R. Optimization of particle calculations in 2 and 3 dimensions // Commun. Math. Phys. 1969. № 12. P. 131.
45. Yao R.L., Striffler C.D. Numerical simulation of collective ion acceleration in an intense electron beam-localized gas cloud system // J. Appl. Phys. 1990. Vol. 67, № 4. 1650.
46. Сена Л.А. Столкновения электронов и ионов с атомами газа. Л.: ОГИЗ, 1948.
47. Morey I.J., Birdsall C.K. Travelling-wave-tube simulation: the IBC code // IEEE Trans. Plasma Sci. 1990. Vol. 18, № 3. С. 482.
48. Егоров Е.Н., Калинин Ю.А., Короновский А.А., Храмов А.Е., Морозов М.Ю. Исследование мощности СВЧ-генерации в нерелятивистском электронном пучке с виртуальным катодом в тормозящем поле // Письма в ЖТФ. 2006. Т. 32, №9. P. 71.
49. Батура М.П., Құраев А.А., Синицын А.К. Основы теории, расчета и оптимизации современных электронных приборов СВЧ. Минск: БГУИР, 2007.
50. Морозов М.Ю., Храмов А.Е. Влияние внешнего магнитного поля на величину критического тока электронного пучка, при котором формируется виртуальный катод // Физика плазмы. 2007. Т. 33, № 7. С. 610.
51. Hramov A.E., Koronovskii A.A., Morozov M., Mushtakov A.V. Effect of external magnetic field on critical current for the onset of virtual cathode oscillations in relativistic electron beams // Phys. Lett. A. 2008. Vol. 372. P. 876.
52. Куркин С.А., Храмов А.Е. Формирование виртуального катода в трубчатом электронном потоке во внешнем магнитном поле // Письма в ЖТФ. 2009. Т. 35, № 1. С. 48.

53. Куркин С.А., Короновский А.А., Храмов А.Е. Влияние внешнего магнитного поля на формирование и динамику виртуального катода // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2008. Т. 16, № 4. С. 182.
54. Куркин С.А., Короновский А.А., Храмов А.Е. Нелинейная динамика и хаотизация колебаний виртуального катода в трубчатом электронном потоке во внешнем магнитном поле // Физика плазмы. 2009. Т. 35, № 8. С. 684.
55. Куркин С.А. Влияние шумового разброса электронов по скоростям на динамику электронного потока с виртуальным катодом // Радиотехника и электроника. 2010. Т. 55, № 4. С. 1.
56. Филатов Р.А., Калинин Ю.А., Храмов А.Е., Трубецков Д.И. Влияние положительных ионов на колебательные процессы в электронном пучке с виртуальным катодом // Изв. вузов. Радиофизика. 2006. Т. 49, № 10. С. 853.
57. Атанов Н.В., Дмитриев А.С., Ефремова Е.В., Максимов Н.А. Формирование хаотических радиоимпульсов в генераторе с внешним периодическим воздействием // Письма в ЖТФ. 2006. Т. 32, № 15. С. 1.
58. Филатов Р.А., Калинин Ю.А., Храмов А.Е. Исследование влияния положительных ионов на СВЧ-генерацию в низковольтном виркаторе // Письма в ЖТФ. 2006. Т. 32, № 11. С. 61.

*Саратовский государственный
университет им. Н.Г. Чернышевского*

*Поступила в редакцию
После доработки*

*15.06.2009
4.09.2009*

**MATHEMATICAL MODEL AND ITS NUMERICAL REALIZATION
FOR THE INVESTIGATION AND OPTIMIZATION
OF GENERATORS WITH ELECTRON FEEDBACK**

*S.A. Kurkin, A.A. Koronovskii, E.N. Egorov,
Yu.I. Levin, R.A. Filatov, A.E. Hramov*

It was stated in the paper the mathematical model and its numerical realization for the investigation of wideband chaotic oscillations and of physical processes in the electron beams with virtual cathode at the generators with electron feedback. Also it was briefly described the developed program package for the modeling of non-stationary nonlinear physical processes at the electron generators with virtual cathode and for calculating of output characteristics of devices. It was described the numerical methods and its features used in the program package. Results of some calculations and optimizations of various configurations of the systems with virtual cathode were presented in the paper.

Keywords: Numerical model, numerical simulation, particle method, microwave generator, intensive electron beam, virtual cathode, nonlinear dynamics, microwave electronics, vircator, non-uniform magnetic field, ions.



Куркин Семён Андреевич – родился в Саратове (1986). Окончил с отличием факультет нелинейных процессов Саратовского государственного университета им. Н.Г. Чернышевского по специальности радиофизика и электроника (2008). В данный момент является аспирантом и ассистентом кафедры электроники, колебаний и волн СГУ. Имеет 8 публикаций в центральных реферируемых журналах, участник Всероссийских и Международных конференций. Область научных интересов - исследование электронно-волновых систем с интенсивными пучками заряженных частиц, изучение нелинейной динамики виртуального катода, а также генераторов, основанных на колебаниях виртуального катода (виркаторов).

410012 Саратов, ул. Астраханская, 83
Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского
E-mail: KurkinSA@gmail.com



Короновский Алексей Александрович – родился в Саратове (1972). Окончил физический факультет Саратовского государственного университета (1995), доктор физико-математических наук (2007), профессор кафедры электроники, колебаний и волн СГУ. Область научных интересов – нелинейная динамика и ее проявления в различных сферах человеческой деятельности, в том числе нелинейная динамика социально-экономических процессов. Автор ряда статей в центральной печати, а также монографий (в соавторстве) «Нелинейная динамика в действии» и «Непрерывный вейвлетный анализ», вышедших в Издательстве ГосУНЦ «Колледж», двухтомной монографии «Методы нелинейной динамики и теории хаоса в задачах электроники сверхвысоких частот» (М.: Физматлит, 2009, под редакцией А.А. Короновского, А.А. Кураева, Д.И. Трубецкова и А.Е. Храмова), монографии «Моделирование нелинейной динамики глобальных процессов» (М.: Изд-во МГУ, 2010, под редакцией С.И. Ильина и Д.И. Трубецкова) и др.

410012 Саратов, ул. Астраханская, 83
Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского
E-mail: alkor@nonlin.sgu.ru



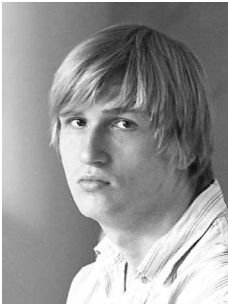
Егоров Евгений Николаевич – родился в Саратове (1980). Окончил факультет нелинейных процессов Саратовского государственного университета (2002). Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук (СГУ, 2007). Доцент кафедры электроники колебаний и волн СГУ (с 2008). Область научных интересов – нелинейная динамика СВЧ-устройств. Опубликовал 17 статей в отечественных и зарубежных журналах по данной тематике.

410012 Саратов, ул. Астраханская, 83
Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского
E-mail: egoroven@nonlin.sgu.ru



Левин Юрий Иванович – родился в Саратове (1942), окончил физический факультет Саратовского государственного университета (1965), защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук (1974). В настоящее время является профессором кафедры нелинейной физики СГУ, деканом факультета нелинейных процессов. Автор более 100 научных статей, научно-методических пособий и руководств.

410012 Саратов, ул. Астраханская, 83
Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского
E-mail: levin@nonlin.sgu.ru



Филатов Роман Андреевич – родился в 1986 году в Саратове, окончил Саратовский государственный университет в 2009 году. Аспирант кафедры электроники, колебаний и волн, младший научный сотрудник отделения физики нелинейных систем НИИ ЕН СГУ. Научные интересы – физика плазмы, нелинейная динамика пучково-плазменных систем. Опубликовал 13 научных статей в центральных реферируемых журналах, участник всероссийских и международных конференций.

410012 Саратов, ул. Астраханская, 83
Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского
E-mail: filatovra@gmail.com



Храмов Александр Евгеньевич – окончил физический факультет Саратовского госуниверситета (1996). Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата (1999) и доктора (2006) физ.-мат. наук. Профессор, заместитель заведующего кафедрой электроники, колебаний и волн факультета нелинейных процессов СГУ. Область научных интересов – радиофизика в той ее части, которая связана со взаимодействием свободных электронов с электромагнитными полями, нелинейная динамика распределенных активных сред, методы анализа и моделирования динамических систем. Опубликовал (в соавторстве) книгу «Лекции по сверхвысокочастотной электронике для физиков» (Т. 1, М.: Физматлит, 2003; Т. 2, М.: Физматлит, 2004), монографию «Непрерывный вейвлетный анализ и его приложения» (Москва: Наука, Физматлит, 2003), двухтомную коллективную монографию «Методы нелинейной динамики и теории хаоса в задачах электроники сверхвысоких частот» (М.: Физматлит, 2009), коллективную монографию «Моделирование нелинейной динамики глобальных процессов» (М.: Изд.-во МГУ, 2010) и др.

410012 Саратов, ул. Астраханская, 83
Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского
E-mail: aeh@nonlin.sgu.ru



ОТРАЖАТЕЛЬНЫЙ КЛИСТРОН КАК ПРИМЕР АВТОКОЛЕБАТЕЛЬНОЙ СИСТЕМЫ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

В.Н. Титов, Д.В. Волков, А.В. Яковлев, Н.М. Рыскин

Развита нестационарная теория отражательного клистрона на основе дифференциального уравнения с запаздыванием. Представлен анализ условий самовозбуждения, стационарных режимов генерации и условий их устойчивости. Демонстрируется применение теории для расчета выходных характеристик миниатюрного отражательного клистрона субмиллиметрового диапазона. Проводится сопоставление теории с результатами численного моделирования с помощью метода «частиц в ячейке».

Ключевые слова: Автоколебания, запаздывающая обратная связь, отражательный клистрон, метод «частиц в ячейке».

Введение

Важную роль в нелинейной динамике играют распределенные системы с запаздывающей обратной связью (ЗОС), которые широко распространены в самых разных областях физики, таких как радиофизика и электроника [1,2], нелинейная оптика [3,4], физика атмосферы [5], а также в моделях биологии [6], медицины [7], экономики, экологии и социальных наук [8]. Хорошо известно, что для систем с запаздыванием характерны различные сложные, нестационарные режимы генерации, в том числе хаотические [1,2].

К системам с ЗОС относятся многие приборы вакуумной электроники сверхвысокочастотного (СВЧ) диапазона, например, генераторы на основе ламп бегущей волны [9–11] и клистронов [12–16]. Естественным математическим аппаратом для построения нестационарной теории подобных систем представляются дифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом. В частности, в серии работ [12–16] построена нестационарная теория клистронов-генераторов с ЗОС, подробно исследована (в том числе экспериментально) картина динамических режимов в этих приборах.

В настоящей работе подробно описана методика построения нестационарной теории на основе уравнений с запаздыванием и демонстрируются возможности теории для расчета основных характеристик конкретного прибора на примере отражательного клистрона (ОК). ОК является, пожалуй, простейшим примером генератора

клистронного типа и широко применяется для генерирования СВЧ-колебаний малой мощности [17–21]. В то же время он является характерным примером системы с запаздыванием, которое возникает, очевидно, вследствие конечного времени движения электронов в пространстве резонатор–отражатель. На возможность построения теории ОК на основе уравнения с запаздыванием указывалось ранее [22,23], однако в основном анализировались процессы самовозбуждения генератора.

В данной работе представлен вывод уравнения с запаздыванием, описывающего динамику ОК (раздел 1). Далее последовательно рассматриваются условия самовозбуждения, стационарные режимы генерации и условия их устойчивости (разделы 2–4). В разделе 5 проводится расчет выходных характеристик для миниатюрного ОК субмиллиметрового диапазона. Проекты создания подобных приборов появились в последнее время в связи с развитием технологий вакуумной микроэлектроники [24–29]. Также в разделе 5 проведено сопоставление с результатами численного моделирования на основе традиционного для СВЧ-электроники метода крупных частиц, что позволило оценить пределы применимости упрощенной теоретической модели и дать достаточно реалистичные оценки важных с практической точки зрения параметров, таких как выходная мощность, КПД, время установления колебаний и т.д.

1. Математическая модель отражательного клистрона в виде уравнения с запаздыванием

На рис. 1 приведена схема распределения постоянного потенциала в ОК. Электронный поток ускоряется в пространстве катод–резонатор постоянным ускоряющим напряжением V_0 , после чего проходит сквозь емкостной зазор объемного резонатора. Высокочастотное поле резонатора осуществляет модуляцию потока по скорости. Далее электроны попадают в тормозящее поле, которое создается отражателем с отрицательным потенциалом V_r . Во время возвратного движения в тормозящем поле происходит группировка пучка. Сгруппированный пучок отдает энергию высокочастотному полю резонатора, поддерживая в нем колебания.

Нестационарную модель отражательного клистрона построим аналогично моделям генераторов на основе пролетных клистронов с запаздывающей обратной связью, развитым в работах [12–15]. Используем нестационарную теорию возбуждения резонатора током медленно меняющейся амплитуды, разработанную Л.А. Вайнштейном [17]. Считается, что плотность тока можно представить в виде $\mathbf{j}(\mathbf{r}, t) = \text{Re}[\mathbf{j}_\omega(\mathbf{r}, t) \exp(i\omega_0 t)]$, где \mathbf{j}_ω – медленно меняющаяся по сравнению с экспонентой комплексная амплитуда. Поле представим в виде разложения по собственным типам колебаний «холодного» резонатора

$$\mathbf{E}(x, t) = \text{Re} \sum_s C_s(t) \mathbf{E}_s(x) e^{i\omega_s t},$$

где $C_s(t)$ – безразмерные комплексные амплитуды, ω_s – собственные частоты. Если несущая частота ω_0 близка только

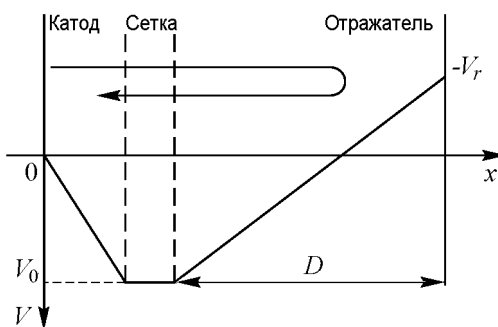


Рис. 1. Схема отражательного клистрона

к одной из собственных частот, достаточно учитывать только один тип собственных колебаний резонатора. Амплитуда C_s подчиняется нестационарному уравнению возбуждения [17,21]

$$\frac{dC_s}{dt} + i(\omega_0 - \omega_s)C_s + \frac{\omega_s C_s}{2Q_s} = -\frac{1}{2N_s} \int_V \mathbf{j}_\omega \mathbf{E}_s dV. \quad (1)$$

Здесь Q_s и N_s – нагруженная добротность и норма рабочего типа колебаний, соответственно.

Далее будем считать задачу одномерной, а несущую частоту ω_0 без ограничения общности выберем равной частоте ω_s . Тогда уравнение (1) принимает вид

$$\frac{dC_s}{dt} + \frac{\omega_0 C_s}{2Q_s} = -\frac{1}{2N_s} \int I_\omega(x, t) E_s(x) dx. \quad (2)$$

Предполагается, что функция $E_s(x)$, описывающая распределение поля в зазоре, удовлетворяет следующему условию нормировки:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |E_s(x)| dx = V_0, \quad (3)$$

где V_0 – ускоряющее напряжение пучка. Норму N_s можно выразить через волновое (характеристическое) сопротивление резонатора Z_0

$$N_s = \frac{V_0^2}{\omega_0 Z_0}.$$

Если зазор резонатора достаточно узкий, его можно заменить эквивалентным бесконечно тонким зазором, напряжение на котором представляется в виде

$$V(t) = \text{Re} [MV_0 C_s(t) e^{i\omega_0 t}] = MV_0 \xi(t) \cos(\omega_0 t + \varphi(t)),$$

где $M = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \text{Re} [E_s(x) \exp(i\omega_0 x/v_0)] dx}{\int_{-\infty}^{\infty} |E_s(x)| dx}$ – коэффициент эффективности модуляции,

$\xi(t) = |C_s(t)|$, $\varphi(t) = \text{Arg} [C_s(t)]$, $v_0 = \sqrt{2eV_0/m}$ – скорость пучка. Тогда уравнение (2) упрощается

$$\frac{dC_s}{dt} + \frac{\omega_0 C_s}{2Q_s} = -\frac{\omega_0 Z_0 M}{2V_0} I_\omega(x, t). \quad (4)$$

Для прямоугольного распределения поля в зазоре, что соответствует случаю резонатора с сетками, $E_s(x) = V_0/d$, где d – ширина зазора. При этом коэффициент эффективности модуляции M определяется известным соотношением [17–21]

$$M = \frac{\sin(\varphi_0/2)}{\varphi_0/2}, \quad (5)$$

где угол пролета электрона в зазоре φ_0 определяется формулой

$$\varphi_0 = \frac{\omega_0 d}{v_0}. \quad (6)$$

Будем полагать, что движение электронов одномерное. Тогда, решая уравнения движения электрона, получим известное выражение [17–21]

$$\omega_0 t_1 = \omega_0 t_0 + \varphi_0 + \theta_0 + X \cos(\omega_0 t_0 + \varphi), \quad (7)$$

где t_0 и t_1 – времена влета электрона в зазор в прямом и обратном направлениях, соответственно; $X = M\xi\theta_0/2$ – параметр группировки; θ_0 – невозмущенный угол пролета в пространстве резонатор–отражатель

$$\theta_0 = \frac{4\omega_0 D}{v_0(1 + V_r/V_0)}. \quad (8)$$

Данные соотношения получены в приближении малости скоростной модуляции. Пользуясь соотношением (7), можно вычислить первую гармонику сгруппированного тока

$$I_\omega = \frac{I_0}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-i\omega_0 t_1} d(\omega t_0) = -2iI_0 J_1(X) e^{i(\varphi - \theta_0 - \varphi_0)}. \quad (9)$$

Здесь J_1 – функция Бесселя первого рода 1-го порядка, I_0 – постоянный ток пучка. При проведении интегрирования в уравнении (9) пренебрегаем медленным изменением X и φ за один период несущей частоты.

Подставив выражение для сгруппированного тока (9) в (4), получим

$$\frac{dC_s}{dt} + \frac{\omega_0 C_s}{2Q_s} = -i \frac{\omega_0 Z_0 M I_0}{V_0} J_1 \left(\frac{M\theta_0}{2} \left| C_s \left(t - \frac{\theta_0 + \varphi_0}{\omega_0} \right) \right| \right) e^{i[\varphi(t - \frac{\theta_0 + \varphi_0}{\omega_0}) - \theta_0]}. \quad (10)$$

Нужно отметить, что левая часть уравнения (10) записана для момента времени t , в то время как правая – для момента времени $t - (\theta_0 + \varphi_0)/\omega_0$, то есть динамика системы описывается уравнением с запаздыванием. Время запаздывания равно усредненному времени пролета для отдельных электронов и в приближении малой скоростной модуляции совпадает со временем пролета для невозмущенного электрона, около которого формируется сгусток.

Если ввести безразмерные переменные

$$t' = \frac{\omega_0 t}{2Q_s}, \quad (11)$$

$$F(t) = \frac{M\theta_0 C_s(t)}{2}, \quad (12)$$

уравнение (10) примет вид (штрих у безразмерного времени для краткости опускаем)

$$\frac{dF}{dt} + F = -2i\alpha e^{-i(\theta_0 + \varphi_0)} J_1(|F(t - \tau)|) \frac{F(t - \tau)}{|F(t - \tau)|}. \quad (13)$$

Здесь τ – безразмерное время запаздывания

$$\tau = \frac{\theta_0 + \varphi_0}{2Q_s},$$

α – параметр возбуждения

$$\alpha = \frac{Z_0 M^2 I_0 \theta_0 Q_s}{2V_0}. \quad (14)$$

Таким образом, для описания динамики отражательного клистрона получено дифференциальное уравнение с запаздыванием (13). Отметим, что оно, вообще говоря, демонстрирует богатую картину динамических режимов, включая хаотические [30], так же как и другие аналогичные модели клистронных генераторов [12–15]. В то же время развитая модель допускает далеко идущий теоретический анализ: позволяет найти условия самовозбуждения, рассчитать основные свойства режимов стационарной генерации и определить условия их устойчивости.

2. Условия самовозбуждения

Проведем анализ условий самовозбуждения. Линеаризуя уравнение (13), получим

$$\frac{dF}{dt} + F = -i\alpha e^{-i(\theta_0 + \varphi_0)} F(t - \tau). \quad (15)$$

Отыскивая решение (15) в виде $F \sim \exp(i\omega t)$, приходим к характеристическому уравнению

$$i\omega + 1 = \alpha e^{-i(\theta_0 + \varphi_0 + \omega\tau + \frac{\pi}{2})}. \quad (16)$$

Нетрудно убедиться в том, что оно имеет бесконечно много комплексных корней, следовательно, существует бесконечное число собственных мод. Это обусловлено тем, что системы с запаздыванием относятся к классу распределенных систем, имеющих бесконечное число степеней свободы. Действительно, состояние системы (13) задается значениями функции $F(t)$ на непрерывном интервале длительностью τ , а не конечным набором значений переменных.

Перепишем (16) в виде двух вещественных уравнений

$$\begin{aligned} 1 &= -\alpha \sin(\omega\tau + \theta_0 + \varphi_0), \\ \omega &= -\alpha \cos(\omega\tau + \theta_0 + \varphi_0). \end{aligned} \quad (17)$$

Разделив одно из уравнений (17) на другое, получим

$$\omega = \operatorname{ctg}(\omega\tau + \theta_0 + \varphi_0). \quad (18)$$

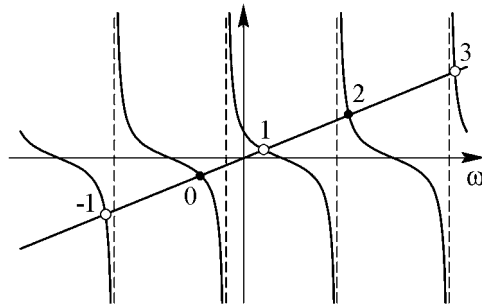


Рис. 2. К решению уравнения для собственных частот (18)

Это уравнение удобно решать графически (рис. 2). Будем нумеровать его корни так, как показано на рисунке. Причем, поскольку α – положительный параметр, из первого уравнения (17) следует, что необходимо учитывать только корни, для которых $\sin(\omega\tau + \theta_0 + \varphi_0) < 0$, то есть корни с четными номерами, $n = 2k$, показанные на рис. 2 темными кружками.

Отметим, что если $\tau \ll 1$, то есть резонатор высокодобротный, корни можно приближенно записать в следующем виде:

$$\omega_{2k}\tau \approx 2\pi k - \frac{\pi}{2} - \varphi_0 - \theta_0.$$

Напротив, при $\tau \gg 1$ имеем

$$\omega_{2k}\tau \approx 2\pi k - \varphi_0 - \theta_0.$$

Из уравнений (17) можно также выразить стартовое значение параметра α , при котором происходит возбуждение колебаний,

$$\alpha_{st}^{(k)} = \sqrt{1 + \omega_{2k}^2(\theta_0, \tau)}, \quad (19)$$

где ω_{2k} – соответствующий корень уравнения (18). Порог возбуждения будет минимален ($\alpha_{st} = 1$) в случае, когда генерация происходит точно на собственной частоте резонатора ($\omega_{2k} = 0$). При этом

$$\theta_0 = 2\pi k - \pi/2 - \varphi_0. \quad (20)$$

И, наоборот, когда $\theta_0 = 2\pi k \pm \pi - \varphi_0$, порог самовозбуждения максимален. При этом ω_0 и одна из частот $\omega_{\pm 2}$ почти равноудалены от собственной частоты резонатора.

Используя соотношения (18), (19), можно построить зависимость частоты генерации ω от θ_0 и границу самовозбуждения на плоскости параметров α и θ_0 . Соответствующие зависимости приведены на рис. 3. Граница самовозбуждения представляет собой набор периодически расположенных зон генерации, положение центров которых определяется соотношением (20). Подобная картина типична для систем, описываемых дифференциальными уравнениями с запаздыванием [12–15,30].

3. Стационарные режимы генерации

Обратимся к режимам стационарной одночастотной генерации. В этом случае решение следует искать в виде

$$F = F_0 \exp [i(\omega t + \varphi)], \quad (21)$$

где амплитуда F_0 и фаза φ постоянны. Подставляя (21) в уравнение (13) и разделяя вещественную и мнимую части, получим

$$\begin{aligned} F_0 &= -2\alpha J_1(F_0) \sin(\omega\tau + \theta_0 + \varphi_0), \\ \omega F_0 &= -2\alpha J_1(F_0) \cos(\omega\tau + \theta_0 + \varphi_0). \end{aligned} \quad (22)$$

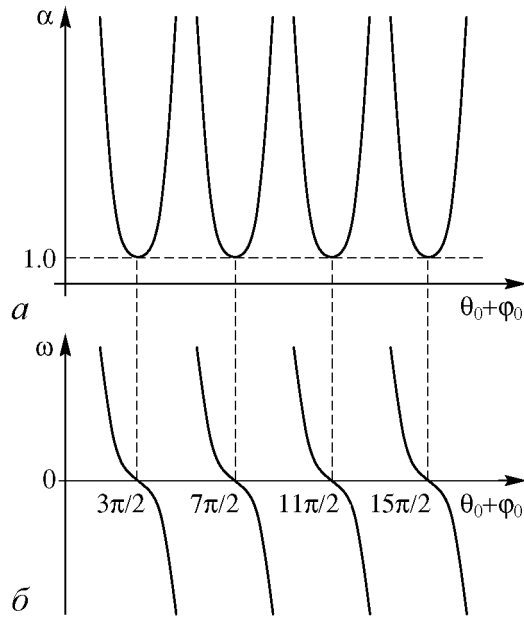


Рис. 3. Пороговое значение параметра α (а) и частота генерации (б) в зависимости от невозмущенного угла пролета $\theta_0 + \varphi_0$

Поделив одно из этих уравнений на другое, приходим к соотношению (18). Это означает, что частота стационарной генерации равна одной из собственных частот ω_{2k} и не изменяется с ростом амплитуды колебаний (в рамках сделанных приближений).

Из уравнений (22) нетрудно также найти следующее выражение для амплитуды F_0 :

$$F_0 = \frac{2\alpha J_1(F_0)}{\sqrt{1+\omega^2}} = \frac{2\alpha J_1(F_0)}{\alpha_{st}}. \quad (23)$$

Это трансцендентное уравнение, которое не может быть решено аналитически. Аналогичное уравнение описывает стационарные решения в других автогенераторах клистронного типа [12–15,30]. Удобно решать уравнение (23) графически (рис. 4).

Видно, что с ростом α число корней увеличивается. Следовательно, появляются все новые и новые стационарные состояния, то есть даже для колебаний на основной собственной моде будет характерна мультистабильность. Физически появление новых стационарных режимов в клистроне обусловлено многократной перегруппировкой электронов в пространстве дрейфа, что является основным нелинейным эффектом в приборах О-типа. Будем обозначать эти решения как S_n и P_n , причем S_n соответствуют корням (23), расположенным на возрастающих участках функции Бесселя, а P_n – на падающих (см. рис. 4). В принятых обозначениях S_0 соответствует тривиальному решению с нулевой амплитудой. Высшие стационарные состояния возникают жестко, что нетрудно понять, анализируя рис. 4. Порог их появления можно найти аналитически. Соответствующие значения амплитуды F_0 находятся как корни уравнения

$$\frac{J_1(F_0)}{F_0} = J_1'(F_0),$$

где $J_1' = dJ_1(F_0)/dF_0$. Отсюда, например, для S_1 и P_1 находим, что $F_0 \approx 8.417$. Тогда из уравнения (23) получим

$$\alpha = \frac{\sqrt{\omega^2 + 1}}{2J_1(F_0)} F_0.$$

В центре зоны генерации, где $\omega = 0$, это уравнение дает $\alpha \approx 15.5\alpha_{st}$. Таким образом, высшие стационарные состояния возбуждаются при значениях параметра α (то есть фактически – тока пучка), значительно превышающих порог самовозбуждения генератора. При этом существенную роль будут играть эффекты пространственного заряда, которые в данной модели не учитываются. Известно,

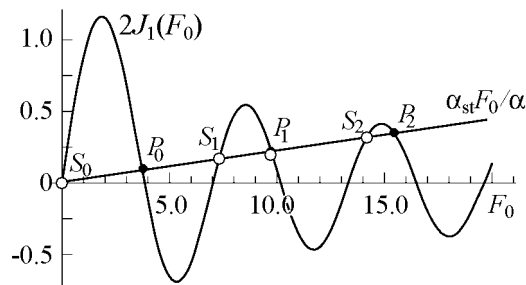


Рис. 4. Пример графического решения уравнения (23)

что в клистронных генераторах силы пространственного заряда могут существенно влиять на динамику генератора, в частности, могут приводить к срыву генерации [15]. Поэтому возможность возбуждения высших стационарных состояний на практике вызывает сомнения. В дальнейшем ограничимся рассмотрением только основного стационарного состояния P_0 .

Подсчитаем выходную мощность генератора. Для этого перепишем уравнение возбуждения (1) в виде закона сохранения энергии. Умножив (1) на комплексно сопряженную амплитуду C_s^* и сложив с комплексно сопряженным уравнением, получим [17]

$$\frac{dW}{dt} + \frac{\omega_0}{Q_s} W = -P_e,$$

где $W = N_s |C_s|^2 / 2$ – энергия колебаний в резонаторе, P_e – электронная мощность взаимодействия

$$P_e = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \int_V \mathbf{j}_\omega(\mathbf{r}, t) C_s^* \mathbf{E}_s^*(\mathbf{r}) dV.$$

Напомним, что мощность считается отрицательной, когда электронный поток отдает энергию полю. В режиме стационарной генерации, когда $dW/dt = 0$, получаем

$$-P_e = \frac{\omega_0 W}{Q_s} = \frac{\omega_0 N_s |C_s|^2}{2Q_s} = \frac{2V_0^2 F_0^2}{Z_0 M^2 \theta_0^2 Q_s}, \quad (24)$$

где F_0 удовлетворяет соотношению (23). Формула (24) определяет мощность, которую электронный поток отдает полю. Мощность, отдаваемая в нагрузку, равна

$$P_{\text{вых}} = -P_e \left(1 - \frac{Q_s}{Q_{s0}} \right), \quad (25)$$

где Q_{s0} – добротность ненагруженного резонатора. Максимальная мощность, отдаваемая в нагрузку, достигается при $Q_{s0} \approx 2Q_s$ [20], что соответствует условию согласования источника и нагрузки, известному из теории электрических цепей [31]. Тогда

$$P_{\text{вых}} = -\frac{P_e}{2} = \frac{V_0^2 F_0^2}{Z_0 M^2 \theta_0^2 Q_s}. \quad (26)$$

Полезно также получить соотношения для мощности насыщения $P_{\text{нас}}$, которая достигается при больших токах пучка. В случае, когда $\alpha \gg \alpha_{st}$, корень уравнения (23), обозначенный на рис. 4 как P_0 , всегда расположен вблизи нуля функции Бесселя, $F_0 \approx 3.83$. Тогда уравнение (26) принимает вид

$$P_{\text{нас}} \approx 14.67 \frac{V_0^2}{Z_0 M^2 \theta_0^2 Q_s}. \quad (27)$$

В центре зоны генерации $\theta_0 = 2\pi k - \pi/2 - \varphi_0$, и из уравнения (27) следует, что

$$P_{\text{нас}}^{(k)} \approx \frac{14.67}{(2\pi k - \pi/2 - \varphi_0)^2} \cdot \frac{V_0^2}{Z_0 M^2 Q_s}. \quad (28)$$

Таким образом, мощность насыщения с ростом номера зоны k убывает пропорционально $(2\pi k - \pi/2 - \varphi_0)^{-2}$.

Для электронного КПД, очевидно, имеем выражение

$$\eta = -\frac{P_e}{P_0} = \frac{2V_0 F_0^2}{I_0 Z_0 M^2 \theta_0^2 Q_s} = \frac{F_0^2}{\alpha \theta_0},$$

где $P_0 = I_0 V_0$ – мощность постоянного тока пучка. С учетом соотношения (23) это уравнение дает

$$\eta = \frac{F_0 J_1(F_0)}{\alpha_{st} \theta_0}. \quad (29)$$

Максимальное значение $F_0 J_1(F_0) \approx 1.248$ достигается при $F_0 \approx 2.405$. В центре зоны генерации, при $\theta_0 = 2\pi k - \pi/2 - \varphi_0$ и $\alpha_{st} = 1$, КПД насыщения выражается следующим образом:

$$\eta = \frac{1.248}{2\pi k - \pi/2 - \varphi_0}. \quad (30)$$

Очевидно, что эта величина уменьшается с ростом номера зоны генерации k . Отметим, что из (23) можно найти значение параметра α , при котором достигается максимальный КПД,

$$\frac{\alpha}{\alpha_{st}} \approx \frac{2.405}{2J_1(2.405)} \approx 2.316,$$

то есть ток пучка должен превышать стартовое значение в 2.316 раза.

4. Условия возникновения автомодуляции

Приведенные в разделах 2 и 3 результаты полностью согласуются с результатами элементарной теории ОК, которая широко представлена в литературе [17–21]. Однако теория, основанная на уравнении с запаздыванием, позволяет продвинуться дальше и выяснить условия устойчивости стационарных режимов. Зададим малое возмущение решения (21)

$$F = (F_0 + f(t)) \exp[i(\omega t + \varphi)], \quad (31)$$

подставим в уравнение (13) и линеаризуем с учетом соотношений (22). Получим

$$\begin{aligned} \dot{f} + (1 + i\omega) f = & -i\alpha e^{-i(\theta_0 + \varphi_0 + \omega\tau)} [J_1'(F_0) (f(t - \tau) + f^*(t - \tau)) + \\ & + \frac{J_1(F_0)}{F_0} (f(t - \tau) - f^*(t - \tau))] . \end{aligned} \quad (32)$$

Решение этого уравнения будем искать в виде пары сателлитов, симметрично отстоящих от основной частоты,

$$f = f_+ e^{i\Omega t} + f_- e^{-i\Omega t},$$

где Ω – частота модуляции. Подставив в (32) и разделив члены при $e^{\pm i\Omega t}$, получим

$$\begin{aligned} [1 + i(\omega + \Omega)] f_+ = & -i\alpha e^{-i(\theta_0 + \varphi_0 + (\omega + \Omega)\tau)} \left[J_1'(F_0) (f_+ + f_-^*) + \frac{J_1(F_0)}{F_0} (f_+ - f_-^*) \right], \\ [1 + i(\omega - \Omega)] f_- = & -i\alpha e^{-i(\theta_0 + \varphi_0 + (\omega - \Omega)\tau)} \left[J_1'(F_0) (f_- + f_+^*) + \frac{J_1(F_0)}{F_0} (f_- - f_+^*) \right]. \end{aligned} \quad (33)$$

Отсюда находим характеристическое уравнение

$$\begin{aligned} & \left[1 + i\Omega + \alpha e^{-i\Omega\tau} \left(J_1'(F_0) + \frac{J_1(F_0)}{F_0} \right) \sin(\theta_0 + \varphi_0 + \omega\tau) \right]^2 - \\ & - \left[i\omega + i\alpha e^{-i\Omega\tau} \left(J_1'(F_0) + \frac{J_1(F_0)}{F_0} \right) \cos(\theta_0 + \varphi_0 + \omega\tau) \right]^2 = \\ & = \alpha^2 e^{-2i\Omega\tau} \left(J_1'(F_0) - \frac{J_1(F_0)}{F_0} \right)^2. \end{aligned}$$

С учетом соотношений (17) это уравнение несколько упрощается

$$\begin{aligned} & \left[1 + i\Omega - \frac{\alpha e^{-i\Omega\tau}}{\alpha_{st}} \left(J_1'(F_0) + \frac{J_1(F_0)}{F_0} \right) \right]^2 + \\ & + \omega^2 \left[1 - \frac{\alpha e^{-i\Omega\tau}}{\alpha_{st}} e^{-i\Omega\tau} \left(J_1'(F_0) + \frac{J_1(F_0)}{F_0} \right) \right]^2 = \alpha^2 e^{-2i\Omega\tau} \left(J_1'(F_0) - \frac{J_1(F_0)}{F_0} \right)^2. \end{aligned} \quad (34)$$

Здесь α_{st} – порог самовозбуждения. Из уравнения (34) можно найти частоту автомодуляции Ω и пороговое значение параметра α .

Ограничимся далее анализом в центре зоны генерации, где основная частота $\omega_0 = 0$, $\alpha_{st} = 1$ и анализ устойчивости существенно упрощается. Уравнение (34) принимает вид

$$\left[1 + i\Omega - \alpha e^{-i\Omega\tau} \left(J_1'(F_0) + \frac{J_1(F_0)}{F_0} \right) \right]^2 = \alpha^2 e^{-2i\Omega\tau} \left(J_1'(F_0) - \frac{J_1(F_0)}{F_0} \right)^2.$$

Очевидно, что это уравнение распадается на два

$$1 + i\Omega - \alpha e^{-i\Omega\tau} \left(J_1'(F_0) + \frac{J_1(F_0)}{F_0} \right) = \pm \alpha e^{-i\Omega\tau} \left(J_1'(F_0) - \frac{J_1(F_0)}{F_0} \right),$$

из которых следует

$$1 + i\Omega = 2\alpha J_1'(F_0) e^{-i\Omega\tau}, \quad (35)$$

$$1 + i\Omega = \frac{2\alpha J_1(F_0)}{F_0} e^{-i\Omega\tau}. \quad (36)$$

Можно показать, что первое из этих уравнений отвечает за эволюцию амплитудных возмущений, второе – фазовых. Действительно, рассмотрим сигнал с комплексной амплитудой $A = A_0 \exp(i\varphi_0)$. Наложим малые возмущения амплитуды \tilde{a} и фазы $\tilde{\varphi}$. Поскольку

$$A = (A_0 + \tilde{a}) e^{i(\varphi_0 + \tilde{\varphi})} \approx (A_0 + \tilde{a} + i\tilde{\varphi}A_0) e^{i\varphi_0},$$

из сравнения этого выражения с (31) нетрудно понять, что вещественная часть величины $f(t)$ описывает возмущения амплитуды, а мнимая – фазы. Из уравнения (33) видно, что при $f_+ = f_-^*$, когда величина $f(t)$ чисто вещественна, члены с $J_1(F_0)/F_0$ обращаются в нуль. Наоборот, при $f_+ = -f_-^*$ величина $f(t)$ чисто мнимая и в нуль обращаются члены, содержащие $J_1'(F_0)$.

Обратимся к анализу амплитудных возмущений. Прежде всего заметим, что с учетом соотношения (23) уравнение (35) можно переписать в виде

$$1 + i\Omega = \frac{J_1'(F_0) F_0}{J_1(F_0)} e^{-i\Omega\tau}. \quad (37)$$

Отсюда видно, что если $J_1'(F_0) > 0$, имеется корень вида $i\Omega = \lambda$, где инкремент неустойчивости λ – вещественное положительное число. Таким образом, состояния равновесия S_n всегда неустойчивы, причем возмущение нарастает экспоненциально.

Перейдем к анализу состояний равновесия P_n , для которых $J_1'(F_0) < 0$. Разделим в уравнении (37) вещественную и мнимую части

$$1 = \frac{J_1'(F_0) F_0}{J_1(F_0)} \cos(\Omega\tau), \quad (38)$$

$$\Omega = -\frac{J_1'(F_0) F_0}{J_1(F_0)} \sin(\Omega\tau). \quad (39)$$

Поделив одно из этих соотношений на другое, получим уравнение

$$\Omega = -\operatorname{tg}(\Omega\tau), \quad (40)$$

в центре зоны генерации совпадающее с уравнением (18). Таким образом, частоты автомодуляции удовлетворяют тому же уравнению, что и собственные частоты генератора. Однако, поскольку $J_1'(F_0) < 0$, в отличие от раздела 2, теперь необходимо выбирать корни, для которых $\cos \Omega\tau < 0$. Если занумеровать их по мере удаления от нуля, как это показано на рис. 2, это будут корни ω_n с нечетными номерами $n = 2k + 1$. Минимальный порог автомодуляции, очевидно, имеют моды с номерами $n = \pm 1$, частоты которых наиболее близки к собственной частоте резонатора и по абсолютной величине лежат в пределах $\pi/2 < \Omega\tau < \pi$.

Из соотношений (38), (39) также получим

$$\frac{F_0 |J_1'(F_0)|}{J_1(F_0)} = \sqrt{1 + \Omega^2}, \quad (41)$$

откуда с учетом (23) можно найти значение параметра α , при котором возникает автомодуляция

$$\alpha_{sm} = \frac{\sqrt{1 + \Omega^2}}{2 |J_1'(F_0)|}. \quad (42)$$

Уравнение (42) показывает, что для неустойчивости необходимо, чтобы величина $J_1'(F_0)$ принимала достаточно большое по модулю отрицательное значение, то есть чтобы амплитудная характеристика усилителя имела падающий участок с достаточно большой крутизной. Такой механизм автомодуляции, следуя [11], будем называть *амплитудным*. Физическая причина появления падающего участка заключается в кинематической разгруппировке сгустков, которая происходит, когда амплитуда колебаний достаточно велика. Аналогичными причинами вызвана автомодуляция в двухрезонаторном пролетном клистроне с запаздыванием [12–15], в лампе обратной волны [32], в ЛБВ-генераторе с запаздыванием при наличии узкополосного фильтра в цепи обратной связи [10].

Что касается фазовых возмущений, то уравнение (36) с учетом (23) принимает вид

$$1 + i\Omega = e^{-i\Omega\tau}. \quad (43)$$

Это уравнение имеет очевидное решение $\Omega = 0$, что отражает нейтральную устойчивость решения относительно фазовых возмущений, являющуюся очевидным следствием инвариантности уравнения (13) относительно сдвига фазы на произвольную величину. Это общее свойство систем, описываемых в терминах медленно меняющихся комплексных амплитуд. Решений с положительной вещественной частью у уравнения (43) быть не может.

Результаты приведенного выше анализа аналогичны полученным в работах [12–15,30] для других генераторов клистронного типа. Как показывает численное моделирование, проведенное в этих работах, при превышении порога автомодуляции в окрестности потерявшего устойчивость стационарного состояния в фазовом пространстве образуется предельный цикл. Выходной сигнал начинает периодически осциллировать около стационарного значения. С ростом параметра α наблюдается последовательность бифуркаций удвоения периода автомодуляции и переход к хаосу.

Сделаем оценки порога автомодуляции для субмиллиметрового ОК, описанного в работе [29]. Для этого клистрона нагруженная добротность резонатора $Q_s = 227.6$, рабочие номера зон $n = 5 \div 8$. Из этого следует, что безразмерное время запаздывания $\tau \sim 0.06 \div 0.1$. Для $\tau = 0.1$ из уравнения (40) находим $\Omega \approx 16.32$. Подставив это значение в уравнение (41), найдем, что $F_0 \approx 3.61$ (анализируется устойчивость основного стационарного состояния P_0). Теперь из соотношения (42) находим порог автомодуляции

$$\alpha_{sm} \approx 19.55.$$

Поскольку стартовое значение этого параметра в центре зоны равно единице, получаем, что стартовый ток должен быть превышен почти в 20 раз. Это значительно больше, чем ток, при котором достигается максимальный КПД. Следует ожидать, что при таких токах существенным будет влияние пространственного заряда, которое приведет к подавлению автомодуляции. В целом при практически интересных значениях параметров отражательных клистронов наблюдение автомодуляционных колебаний представляется проблематичным.

5. Расчет основных характеристик отражательного клистрона субмиллиметрового диапазона. Сопоставление с результатами численного моделирования

В последнее время в связи с развитием технологий вакуумной микроэлектроники [24] появились интересные проекты создания сверхминиатюрных ОК коротковолновой части миллиметрового и субмиллиметрового диапазонов [25–29]. Предполагается, что в качестве источника электронов в таких приборах будет использован многоострый автоэмиссионный катод. Отметим, что на их работу существенное влияние могут оказывать нестационарные процессы [28,29]. Применим развитую теорию для расчета основных характеристик ОК, основные параметры которого приведены в таблице. Все они взяты из работы [29], за исключением волнового сопротивления резонатора, которое было рассчитано с учетом геометрии резонатора.

Таблица

Основные параметры отражательного клистрона

Ускоряющее напряжение V_0	1000 В
Нагруженная добротность Q_s	227.6
Волновое сопротивление Z_0	77.8 Ом
Расстояние резонатор – отражатель D	157 мкм
Ширина зазора	22 мкм
Ток пучка I_0	10–50 мА
Собственная частота резонатора	300 ГГц

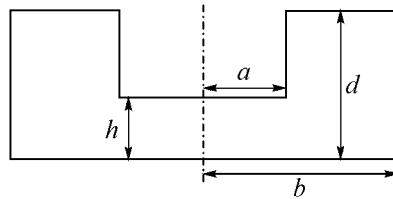


Рис. 5. Геометрия резонатора отражательного клистрона: $a = 70$ мкм, $b = 260$ мкм, $d = 157$ мкм, $h = 22$ мкм (по данным работы [29])

Хотя модели в виде уравнений с запаздыванием качественно верно описывают основные режимы колебаний клистронных генераторов, наблюдаемые в эксперименте, представляет интерес сопоставление с результатами численного моделирования на основе традиционных для СВЧ электроники методов крупных частиц. В данной работе для численного моделирования динамики электронного потока используется метод «частиц в ячейке», получивший широкое распространение в современной электронике СВЧ и физике плазмы [21,33,34]. Данный метод представляется исключительно удобным для моделирования отражательного клистрона, так как позволяет избежать трудностей при описании возвратного движения электронов. Особенностью данного подхода является то, что электронный поток представляется в виде набора макрочастиц с постоянными массой и зарядом. Координаты частиц при этом могут принимать любые значения в пределах системы, тогда как токи, плотности зарядов и электромагнитные поля определены лишь в узлах дискретной пространственной сетки.

Одномерные уравнения движения частицы в нерелятивистском случае запишем в виде

$$\begin{aligned} \frac{dx_m}{dt} &= v_m, \\ \frac{dv_m}{dt} &= -\eta(E(x_m) + E_{пз}(x_m)), \end{aligned} \quad (44)$$

где x_m, v_m – координата и скорость m -й частицы, $\eta = e/m$ – удельный заряд электрона, $E(x_m)$ и $E_{пз}(x_m)$ – высокочастотное поле резонатора и поле пространственного заряда в точке с координатой x_m , соответственно. Для численного интегрирования уравнений (44) использовалась известная схема с перешагиванием второго порядка точности, подробно описанная в [33].

Поле пространственного заряда вычисляется следующим образом. Для цилиндрического пучка радиуса r_b , движущегося вдоль оси цилиндрической трубы дрей-

Если представить резонатор в виде эквивалентного контура, то волновое сопротивление равно $Z_0 = \sqrt{L/C}$, причем эквивалентная емкость и индуктивность определяются соотношениями [20]

$$C = \frac{\pi \varepsilon_0 a^2}{h}, \quad L = \frac{\mu_0 d}{2\pi} \ln\left(\frac{b}{a}\right),$$

где ε_0 и μ_0 – диэлектрическая и магнитная постоянные, соответственно; размеры a, b, h и d указаны на рис. 5. Подставив в эти формулы соответствующие значения, получим $C \approx 6.81 \times 10^{-15}$ Ф, $L \approx 4.13 \times 10^{-11}$ Гн. Отсюда можно найти собственную частоту $f_0 = 1/(2\pi\sqrt{LC}) \approx 300$ ГГц и характеристическое сопротивление $Z_0 \approx 77.8$ Ом.

фа, хорошо известно приближенное соотношение для поля пространственного заряда [35], основанное на аппроксимации поля заряженного диска экспоненциально спадающей функцией,

$$E_{\text{пз}}(x) = \frac{1}{2\varepsilon_0} \int_{-\infty}^{\infty} \rho(x') e^{-k_{\perp}|x-x'|} \text{sign}(x-x') dx'. \quad (45)$$

Здесь ρ – плотность заряда, $k_{\perp} = \alpha/r_b$ – постоянная, которая характеризует скорость спада сил пространственного заряда. Параметр $\alpha \sim 1 \div 2$ в зависимости от соотношения между радиусами пучка и трубки дрейфа [35]. Таким образом, хотя движение частиц одномерное, численная модель учитывает ограниченность пучка в поперечном направлении. Подобные модели принято называть полуторамерными.

Программа численного моделирования осуществляет расчет движения электронов в пространстве резонатор–отражатель и их самосогласованного взаимодействия с полем резонатора. На рис. 6, а, б приведен пример результатов расчета: показаны так называемый фазовый портрет пучка (то есть зависимость скоростей частиц от координаты) и зависимость сгруппированного тока от координаты в некоторый фиксированный момент времени в установившемся режиме. Также показана зависимость выходной мощности от времени в процессе установления колебаний (рис. 6, в).

Начнем с изучения режимов самовозбуждения генератора, которые обсуждались в разделе 2. Разрешив уравнение (18) относительно θ_0 с учетом определения величины τ , получим

$$\theta_0 = \frac{\text{arcctg}(\omega) + 2\pi k}{1 + \omega/(2Q_s)} - \varphi_0. \quad (46)$$

Из уравнения (8) выразим V_r

$$V_r = V_0 \left(\frac{4\omega_0 D}{\theta_0 v_0} - 1 \right), \quad (47)$$

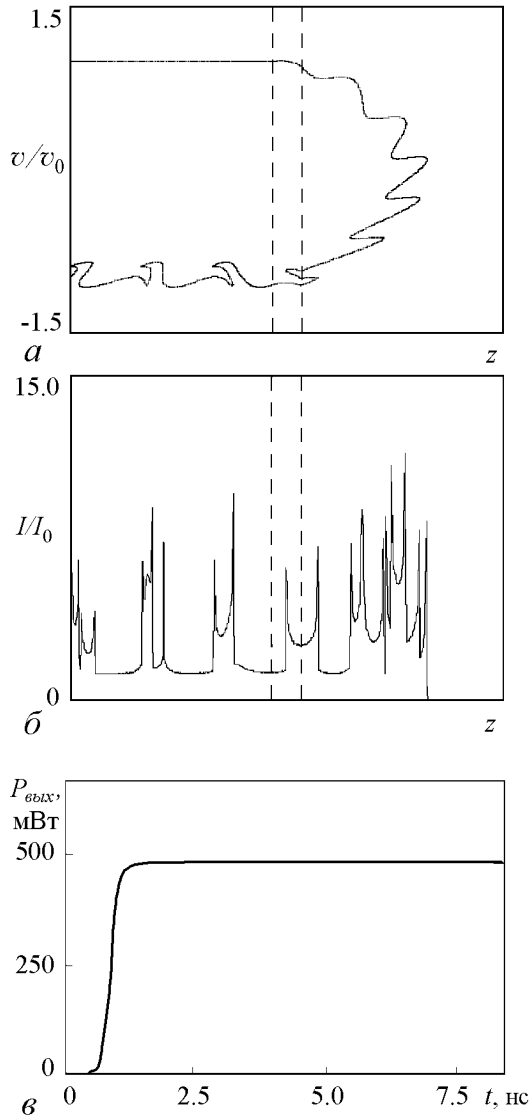


Рис. 6. Примеры фазового портрета пучка (а) и распределения тока (б) вдоль координаты в фиксированный момент времени в установившемся режиме. Зависимость выходной мощности от времени в процессе установления колебаний (в). Вертикальными штриховыми линиями показано положение сеток резонатора. Ток пучка 15 мА, напряжение на отражателе 850 В

а из уравнения (14) с учетом (19) – стартовый ток пучка

$$I_0 = \frac{2V_0\sqrt{1+\omega^2}}{Z_0 M^2 \theta_0 Q_s}. \quad (48)$$

Соотношения (46) и (47) позволяют построить зависимость частоты генерации от V_r , а соотношения (47) и (48) – границы самовозбуждения на плоскости параметров I_0 , V_r . Соответствующие графики приведены на рис. 7. Фактически, это кривые рис. 3, перестроенные в координатах I_0 , V_r .

Результаты численного моделирования без учета пространственного заряда (светлые кружки) хорошо согласуются с теоретическими расчетами (рис. 7, а). При учете сил пространственного заряда граница самовозбуждения незначительно смещается в область меньших токов. Этот эффект вызван изменением статического распределения потенциала в пространстве резонатор – отражатель (более подробное обсуждение данного вопроса можно найти в [19, 36]). Что касается значений частоты генерации, рассчитанных вдоль границы самовозбуждения, то они полностью совпадают с теоретическими значениями, как с учетом, так и без учета пространственного заряда (рис. 7, б).

Перейдем к анализу нелинейных характеристик генератора. Построим теоретические зависимости выходной мощности от тока пучка, для чего следует воспользоваться соотношениями (26) и (23). При этом необходимо из соотношения (23) выразить ток через амплитуду стационарной генерации F_0 . На рис. 8 приведены зависимости $P_{\text{вых}}(I_0)$ для центров зон генерации с номерами 5 и 8. Как видно из рисунка, стартовое значение тока пучка уменьшается с ростом номера зоны. С ростом тока значение выходной мощности растет, приближаясь к мощности насыщения $P_{\text{нас}}$.

Зависимости, полученные в результате численного моделирования без учета пространственного заряда, вначале хорошо согласуются с теоретическими, а затем начинают несколько отклоняться вниз. Это обусловлено тем, что теоретическая модель основана, по сути, на формулах возбуждения резонатора заданным током и не учитывает самосогласованный характер взаимодействия электронов с полем резонатора, а также влияние нелинейности скоростной модуляции в зазоре. При учете пространственного заряда насыщение выходной мощности происходит при гораздо более низком токе, после чего она начинает медленно уменьшаться с ростом I_0 .

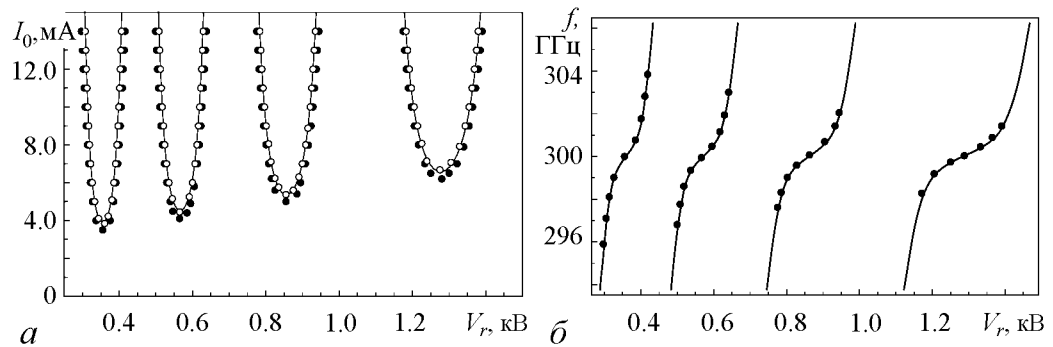


Рис. 7. Зависимости стартового тока I_0 (а) и частоты генерации f (б) от напряжения на отражателе V_r . Сплошные линии – результаты теоретического расчета, светлые кружки – результаты численного моделирования без учета пространственного заряда, темные кружки – с учетом пространственного заряда

Здесь сказывается влияние динамических эффектов пространственного заряда, то есть разгруппировывающее действие сил кулоновского отталкивания. Максимальная выходная мощность достигается при отношении тока пучка к стартовому $I_0/I_{st} \sim 3$.

На рис. 9 приведены зависимости выходной мощности генератора $P_{\text{вых}}$ от напряжения на отражателе V_r при токе пучка 30 мА. Сплошной линией показана теоретическая зависимость. Для построения ее численно решалось уравнение (23) относительно амплитуды F_0 при различных значениях частоты генерации. Затем полученное значение подставлялось в выражение (26) с учетом (46). Это давало зависимость выходной мощности от угла пролета θ_0 , а с учетом соотношения (47) – зависимость выходной мощности от V_r .

Также на рис. 9 приведены результаты численного расчета без учета и с учетом пространственного заряда (светлые и темные кружки, соответственно). Так же как и на рис. 8, результаты расчета без учета пространственного заряда хорошо согласуются с теоретическими в области небольших мощностей, однако в сильно нелинейных режимах теория дает завышенные значения. Учет пространственного заряда приводит к заметному уменьшению максимальной мощности.

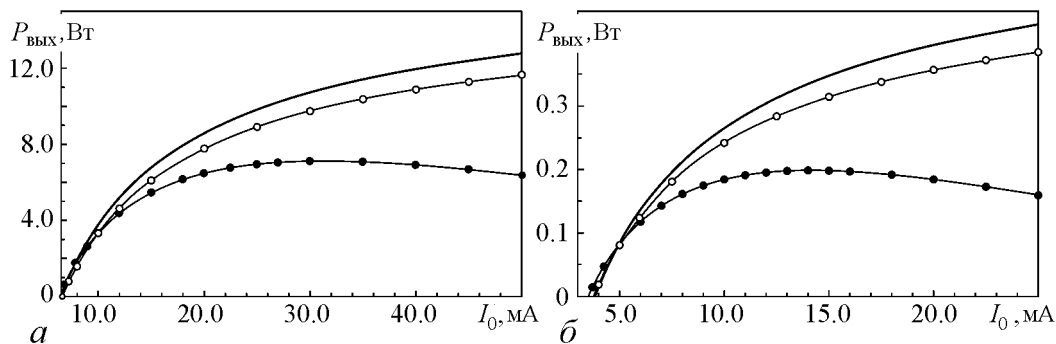


Рис. 8. Зависимость выходной мощности от тока пучка для зон с номерами 5 (а) и 8 (б). Сплошная жирная линия – результаты теоретического расчета, светлые кружки – результат численного моделирования без учета пространственного заряда, темные кружки – с учетом пространственного заряда

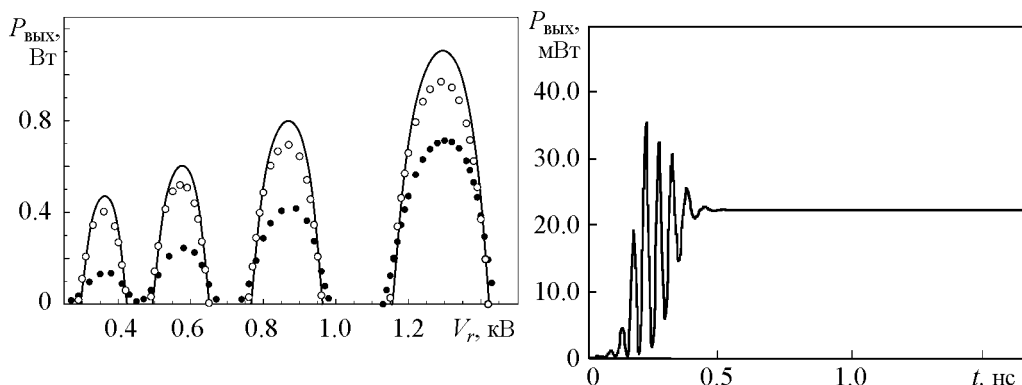


Рис. 9. Зависимость выходной мощности от напряжения на отражателе при токе пучка 30 мА. Сплошная линия – результаты теоретического расчета, светлые кружки – результаты численного моделирования без учета пространственного заряда, темные кружки – с учетом пространственного заряда

Рис. 10. Зависимость выходной мощности от времени в процессе установления колебаний напряжения на отражателе при токе пучка 40 мА и напряжении на отражателе 450 В

Можно отметить, что при учете пространственного заряда зоны генерации расширяются, что согласуется с результатами, приведенными на рис. 7, а. Более того, можно заметить, что 7 и 8-я зоны фактически сомкнулись друг с другом. На рис. 10 показана зависимость выходной мощности от времени в этой области, на которой хорошо виден длительный осциллирующий переходный процесс, связанный с эффектом конкуренции мод (ср. рис. 6, в). Такое поведение типично для систем с запаздыванием и, в частности, для генераторов клистронного типа, для которых с ростом параметра возбуждения зоны генерации расширяются и начинают перекрываться [13–16]. В области перекрытия имеет место бистабильность, то есть возможна генерация как одной, так и другой моды, в зависимости от начальных условий. При еще больших значениях тока пучка можно наблюдать аналогичное перекрытие других зон.

Заключение

Основная задача настоящей работы – продемонстрировать применение аппарата дифференциальных уравнений с запаздыванием для построения нестационарной теории генераторов СВЧ-диапазона. На основе развитой теоретической модели проведены расчеты основных выходных характеристик отражательных клистронов субмиллиметрового диапазона, а также проведено их сопоставление с результатами численного моделирования генератора с помощью метода «частиц в ячейке». Теоретическая модель достаточно хорошо согласуется с результатами численного моделирования без учета влияния сил пространственного заряда: при относительно небольших токах пучка численные результаты полностью совпадают с теоретическими; при значениях тока, превышающих стартовые в 2–3 раза, влияние нелинейных эффектов, не учитываемых в теоретической модели (нелинейность скоростной модуляции, самосогласованное взаимодействие в зазоре резонатора), приводит к снижению выходной мощности, хотя хорошее качественное согласование с теоретической моделью сохраняется.

Численное моделирование показало, что силы пространственного заряда оказывают существенное влияние на динамику генератора. Во-первых, пространственный заряд изменяет распределение статического потенциала тормозящего поля, что приводит к небольшому снижению стартовых токов. Кроме того, при больших значениях тока пучка динамические эффекты пространственного заряда ухудшают группировку, ограничивают рост выходной мощности и препятствуют возникновению автомодуляции. Следует все же заметить, что численное моделирование позволяет наблюдать автомодуляцию, если перейти к зонам с более высокими номерами, которые характеризуются более низкими стартовыми токами. Однако поскольку мощность падает с ростом номера зоны, эти режимы большого практического интереса не представляют. Нестационарные эффекты при определенных условиях проявляются также в виде конкуренции мод, приводящей к усложнению переходных процессов. Тем не менее возникновение автомодуляции и появление сложных колебательных режимов для рабочих режимов отражательных клистронов в целом нехарактерны.

Работа выполнена при финансовой поддержке грантов РФФИ (№ 08-02-00621) и АВЦП «Развитие научного потенциала высшей школы» (№ 2.1.1/1738). Работа Н.М. Рыскина также поддержана фондом некоммерческих программ «Династия».

Библиографический список

1. Кузнецов С.П. Сложная динамика генераторов с запаздывающей обратной связью // Изв. вузов. Радиофизика. 1982. Т. 25, № 12. С. 1410.
2. Дмитриев А.С., Кислов В.Я. Стохастические колебания в радиофизике и электронике. М.: Наука, 1989.
3. Ikeda K., Daido H., Akimoto O. Optical turbulence: Chaotic behavior of transmitted light from a ring cavity // Phys. Rev. Lett. 1980. Vol. 45, № 9. P. 709.
4. Розанов Н.Н. Оптическая бистабильность и гистерезис в распределенных нелинейных системах. М.: Наука, 1997.
5. Ghil M., Zaliapin I., Thompson S. A delay differential model of ENSO variability: parametric instability and the distribution of extremes // Nonlin. Processes Geophys. 2008. Vol. 15. P. 417.
6. Гласс Л., Мэки М. От часов к хаосу: Ритмы жизни. М.: Мир, 1991.
7. Марчук Г.И. Математические модели в иммунологии. М.: Наука, 1985.
8. Трубецков Д.И., Мчедлова Е.С., Красичков Л.В. Введение в теорию самоорганизации открытых систем. М.: Физматлит, 2002.
9. Кислов В.Я., Залогин Н.Н., Мясин Е.А. Исследование стохастических автоколебательных процессов в автогенераторах с запаздыванием // Радиотехника и электроника. 1979. Т. 24, № 6. С. 1118.
10. Кислов В.Я. Теоретический анализ шумоподобных колебаний в электронно-волновых системах и автогенераторах с запаздыванием и сильной нелинейностью // Радиотехника и электроника. 1980. Т. 25, № 8. С. 1683.
11. Блюх Ю.П., Бородкин А.В., Любарский М.Г., Онищенко И.Н., Файнберг Я.Б. Применение метода функционального отображения для исследования ЛБВ-генератора с запаздывающей обратной связью // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 1993. Т. 1, № 1–2. С. 34.
12. Дмитриев Б.С., Жарков Ю.Д., Рыскин Н.М., Шигаев А.М. Теоретическое и экспериментальное исследование хаотических колебаний клистронного автогенератора с запаздыванием // Радиотехника и электроника. 2001. Т. 46, № 5. С. 604.
13. Дмитриев Б.С., Жарков Ю.Д., Кижяева К.К., Клокотов Д.В., Рыскин Н.М., Шигаев А.М. Сложная динамика многорезонаторных клистронных автогенераторов с запаздывающей обратной связью // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2002. Т. 10, № 5. С. 37.
14. Shigaev A.M., Dmitriev B.S., Zharkov Y.D., Ryskin N.M. Chaotic dynamics of delayed feedback klystron oscillator and its control by external signal // IEEE Trans. Electron Devices. 2005. Vol. 52, № 5. P. 790.
15. Рыскин Н.М., Шигаев А.М. Сложная динамика двухрезонаторного клистронного генератора с запаздывающей обратной связью // ЖТФ. 2006. Т. 76, № 1. С. 72.
16. Дмитриев Б.С., Жарков Ю.Д., Клокотов Д.В., Рыскин Н.М. Экспериментальное исследование сложной динамики в многорезонаторном клистронном автогенераторе с запаздывающей обратной связью // ЖТФ. 2003. Т. 73, № 7. С. 105.

17. *Вайнштейн Л.А., Солнцев В.А.* Лекции по сверхвысокочастотной электронике. М.: Сов. радио, 1973.
18. *Шевчик В.Н.* Основы электроники сверхвысоких частот. М.: Сов. радио, 1959.
19. *Гайдук В.И., Палатов К.И., Петров Д.М.* Физические основы электроники сверхвысоких частот. М.: Сов. радио, 1971.
20. Электронные приборы сверхвысоких частот. Учебное пособие / Под ред. В.Н. Шевчика и М.А. Григорьева. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 1980.
21. *Трубецков Д.И., Храмов А.Е.* Лекции по СВЧ электронике для физиков. Т.1. М.: Физматлит, 2003.
22. *Конторович М.И.* Нелинейные колебания в радиотехнике. М.: Сов. радио, 1973.
23. *Кузнецов С.П.* Применение математического аппарата теории дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом к некоторым задачам электроники СВЧ // Лекции по электронике СВЧ. 3-я зимняя школа-семинар инженеров. Кн. 1. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 1974. С. 112.
24. *Ives R.L.* Microfabrication of high-frequency vacuum electron devices // IEEE Trans. Plasma Sci. 2004. Vol. 32, № 3. P. 1277.
25. *Garcia-Garcia J., Martin F., Miles R.E., Steenson D.P., Chamberlain J.M., Fletcher J.R., Thorpe J.R.* Parametric analysis of micromachined reflex klystrons for operation at millimeter and submillimeter wavelengths // J. Appl. Phys. 2002. Vol. 92, № 11. P. 6900.
26. *Fletcher J.R., Thorpe J.R., Huq E., Mann C., Steenson D.P., Chamberlain J.M.* Design considerations for submillimeter-wave reflex klystrons // IEEE Trans. Microwave Theory and Techniques. 2004. Vol. 52, № 10. P. 2344.
27. *Garcia-Garcia J., Martin F., Miles R.E.* Optimization of micromachined reflex klystrons for operation at terahertz frequencies // IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques. 2004. Vol. 52, № 10. P. 2366.
28. *Jang K.-H., Jeon S.-G., Kim J.-I., Won J.-H., So J.-K., Bak S.-H., Srivastava A., Jung S.-S., Park G.-S.* High order mode oscillation in a terahertz photonic-band-gap multibeam reflex klystron // Appl. Phys. Lett. 2008. Vol. 93. 211104.
29. *Jeon S.-G., Jin Y.-S., Kim J.-I., Kim G.-J., Shon C.-H.* Three-dimensional particle-in-cell simulations of 300 GHz reflex klystrons // J. Appl. Phys. 2007. Vol. 101, № 5. 0545519.
30. *Дмитриева Т.В., Рыскин Н.М., Титов В.Н., Шигаев А.М.* Сложная динамика простых моделей распределенных электронно-волновых систем // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 1999. Т. 7, № 6. С. 66.
31. *Атабеков Г.И.* Основы теории цепей. М.: Энергия, 1969.
32. *Кузнецов С.П.* Нелинейная динамика лампы обратной волны: автомодуляция, мультистабильность, контроль // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2006. Т. 14, № 4. С. 3.
33. *Бэдсел Ч., Ленгдон А.* Физика плазмы и численное моделирование. Пер. с англ. М.: Атомиздат, 1989.
34. *Хокни Р., Иствуд Дж.* Численное моделирование методом частиц. Пер. с англ. М.: Мир, 1987.

35. Роу Дж. Теория нелинейных явлений в приборах сверхвысоких частот. М.: Сов. радио, 1969.
36. Chodorow M., Westburg V.B. Space-charge effects in reflex klystrons // Proc. IRE. 1951. Vol. 39, № 12. P. 1548.

Саратовский государственный
университет им. Н.Г. Чернышевского

Поступила в редакцию 4.06.2010
После доработки 2.08.2010

REFLEX KLYSTRON AS AN EXAMPLE OF A SELF-OSCILLATING DELAYED FEEDBACK SYSTEM

V.N. Titov, D.V. Volkov, A.V. Yakovlev, N.M. Ryskin

Nonstationary theory of the reflex klystron oscillator based on differential equation with delay is developed. Analysis of self-excitation conditions, steady-state oscillation regimes and their stability is presented. Application of the developed theory for calculating of output characteristics of micromachined submillimetre-band reflex klystron is presented as well. Theoretical results are compared with the results of numerical simulation based on the particle-in-cell method.

Keywords: Self-oscillation, delayed feedback, reflex klystron, particle-in-cell method.



Титов Владимир Николаевич – родился в поселке Степное Саратовской области в 1974 году. Окончил с отличием физический факультет СГУ (1997). Защитил диссертацию на соискание степени кандидата физико-математических наук по специальности «Радиофизика» (2001). В 2002–2003 годах прошел стажировку в Сеульском национальном университете (Ю. Корея). Доцент кафедры электроники, колебаний и волн СГУ. Область научных интересов включает численное моделирование нестационарных процессов в приборах СВЧ-электроники, исследование нелинейной динамики в распределенных системах различной природы. Автор более 30 статей по данной тематике.

410012 Саратов, ул. Астраханская, 83
Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского
E-mail: TitovVN@info.sgu.ru



Волков Дмитрий Викторович родился в 1987 году. С 2002 по 2004 год обучался в Лицее №1 города Балаково. В 2004 году поступил в Саратовский государственный университет на факультет нелинейных процессов, который окончил в 2009 году. Принимал участие в студенческих научных конференциях. Область научных интересов – исследование нестационарных процессов в распределенных системах СВЧ-электроники с запаздывающей обратной связью.

410012 Саратов, ул. Астраханская, 83
Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского
E-mail: volkov-d-v@mail.ru



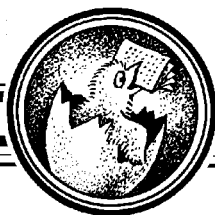
Яковлев Антон Валерьевич – родился в Чимкенте, Казахстан (1986). Окончил с отличием факультет нелинейных процессов СГУ (2009). Аспирант кафедры нелинейной физики СГУ. Область научных интересов – теоретический анализ и численное моделирование нестационарных процессов в приборах СВЧ-электроники. Автор ряда публикаций по данной тематике.

410012 Саратов, ул. Астраханская, 83
Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского
E-mail: YakovlevAV@yandex.ru



Рыскин Никита Михайлович – родился в 1966 году в Саратове. Окончил физический факультет Саратовского госуниверситета (1991). Защитил кандидатскую (1996) и докторскую (2005) диссертации. С 1997 года работает на факультете нелинейных процессов СГУ, в настоящее время – профессор кафедры нелинейной физики. Область научных интересов – нелинейная динамика распределенных систем, нелинейные волны и солитоны, вакуумная сверхвысокочастотная электроника и микроэлектроника. Имеет более 100 научных публикаций по указанным выше направлениям, в том числе учебные пособия «Нелинейные волны» (в соавторстве с Д.И. Трубецковым; М.: Физматлит, 2000) и «Нелинейные колебания» (в соавторстве с А.П. Кузнецовым и С.П. Кузнецовым; М.: Физматлит, 2002, 2005).

410012 Саратов, ул. Астраханская, 83
Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского
E-mail: RyskinNM@info.sgu.ru



РАДИАЛЬНЫЕ СТРУКТУРЫ В ВИБРИРУЕМОМ ГРАНУЛИРОВАННОМ СЛОЕ

И.А. Лазаревич

В работе изложены результаты экспериментального исследования возникновения динамических структур в гранулированном слое, подверженном вертикальной вибрации. Обнаружены радиальные структуры, экспериментальные наблюдения которых ранее не были описаны в научной литературе. Установлена зависимость формы и масштаба данных структур от толщины слоя, частоты и амплитуды колебаний контейнера.

Ключевые слова: Динамические структуры, гранулированная среда, нелинейность, вертикальная вибрация, радиальные структуры.

Гранулированные и сыпучие среды широко распространены в природе и промышленности (например, пищевая, аграрная и строительная промышленности). Подобные среды являются постоянным объектом исследования геологов, ведь именно гранулированные среды принимают участие во многих геологических и тектонических процессах. Таким образом, понимание динамического поведения вышеуказанных сред при различных воздействиях является важной задачей как для ученых, так и для инженеров. Гранулированные материалы способны проявлять свойства как твердых тел, так и жидкостей [1]. Интенсивные исследования свойств подобных материалов привели к открытию многих эффектов, таких как гранулированная конвекция [2], кластеризация и неупругий коллапс [3], формирование периодических и локализованных структур в вертикально вибрируемом слое [4–6]. Вибрируемые гранулированные среды часто проявляют поведение, аналогичное поведению жидкостей. Экспериментальные исследования в этой области продемонстрировали множество видов коллективного поведения частиц, например, формирование гексагональных и квадратных структур [5] и формирование локализованных объектов (так называемых «осциллонов» [4] и одномерных «червеобразных» структур, см. [1]). Теоретическое описание подобных структур в гранулированных средах является довольно сложным. Существуют феноменологические и гидродинамические модели, хорошо описывающие структуры, наблюдаемые в экспериментах [7–9]. Также довольно распространенным способом исследования подобных сред является моделирование множества взаимодействующих частиц в гравитационном поле [10,11]. Одна из феноменологических моделей [8], основанная на параметрическом уравнении

Гинзбурга–Ландау, показала множество мод, способных возникнуть из единичного осциллона. Одной из таких мод является множество «червеобразных» структур, радиально исходящих из единого центра. Таким образом, данная модель предсказала формирование локализованного объекта радиальной природы.

Целью данной работы является экспериментальное исследование условий, при которых происходит образование радиальных структур, а также динамики данных объектов.

1. Экспериментальная методика и результаты

Экспериментальная установка (рис. 1) состояла из вибрационного стенда Brüel&Kjær, анализатора сигналов, усилителя и акселерометров. Амплитуда A и частота f вибрации, а также форма входного сигнала регулировались. Эксперименты проводились в квадратном контейнере $12 \times 12 \text{ см}^2$ и округлом контейнере радиусом 15 см. В качестве сыпучей среды был использован речной песок (средний диаметр песчинки – 0.5 мм). Контейнер с песком подвергался вертикальной вибрации. Частота вибрации изменялась от 0 до 70 Гц; амплитуда – от 0 до 2 см. В качестве формы сигнала была использована синусоида (в импульсном и случайно-шумовом режимах структуры, полученные при использовании синусоидального сигнала, не наблюдались). Визуальные данные о поверхности вещества регистрировались с помощью цифровой видеокамеры (JVC Everio). Дно контейнеров укреплялось при помощи эпоксидной смолы слоем в 1 см, для того чтобы снизить влияние мод колебаний контейнера на общую картину поверхности. В противном случае при большом градиенте вибрационного давления частицы стремились бы переместиться из областей с большими флуктуациями в области с меньшими (то есть в системе произошло бы слияние двух проявившихся эффектов – фигур Хладни [12] и исследуемых структур). В ходе экспериментов было установлено, что при таком укреплении дна

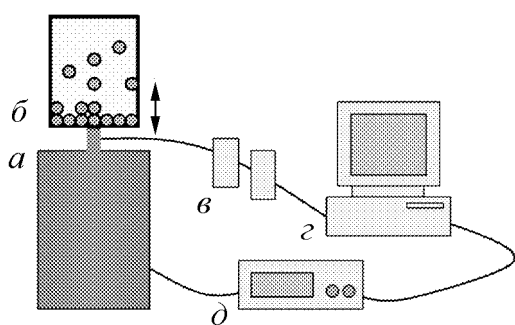


Рис. 1. Схема экспериментальной установки: *а* – вибрационный стенд, *б* – контейнер с материалом, *в* – акселерометры, *г* – анализатор сигналов, *д* – усилитель сигналов

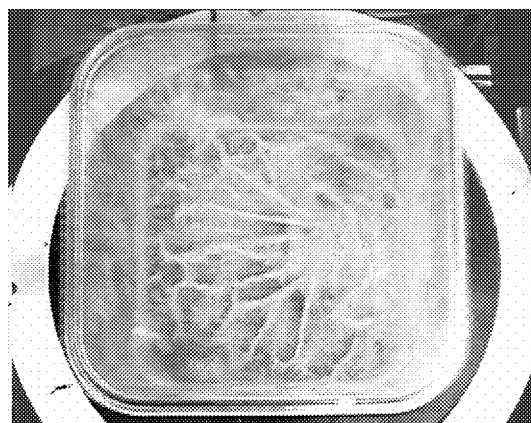


Рис. 2. Образование радиальной структуры (частота вибрации – 18 Гц, амплитуда – 6.0 мм). Толщина слоя – 2.3 см

отчетливая картина аксиальных мод колебаний контейнера видна лишь при частотах выше 75 Гц (с изменением частоты их характерные размеры изменяются). Таким образом, все наблюдаемые в экспериментах картины поверхности являются результатом коллективной динамики частиц.

При проведении экспериментов толщина слоя изменялась, чтобы исследовать зависимость формы возникающих структур от этого параметра. В экспериментах с толщиной слоя порядка 1–1.5 см при различных параметрах вибрации наблюдались исследованные ранее структуры (например, квадратные и лабиринтные структуры). Однако при увеличении толщины слоя до 2–2.5 см характер структур заметно менялся, в частности было обнаружено формирование не наблюдавшихся ранее локализованных радиальных структур (рис. 2). Их формирование происходило при частоте вибрации выше 12 Гц, причем при увеличении частоты масштаб данных структур уменьшался, при этом росло их количество (рис. 3). Постепенно рельеф материала становился неоднородным, на поверхности появлялись выпуклости и впадины, причем впадины имели лабиринтную структуру. Радиальные объекты покрывали образующиеся выпуклости, происходила «конкуренция» между структурами.

При увеличении частоты колебаний до 40 Гц радиальные структуры исчезали, на поверхности вещества оставался лишь лабиринтный рельеф (рис. 4). При увеличении частоты колебаний до 70–75 Гц данный рельеф сглаживался и на поверхности оставалась лишь аксиальная структура мод колебаний контейнера.

В рамках анализа экспериментальных результатов была построена фазовая диаграмма, демонстрирующая

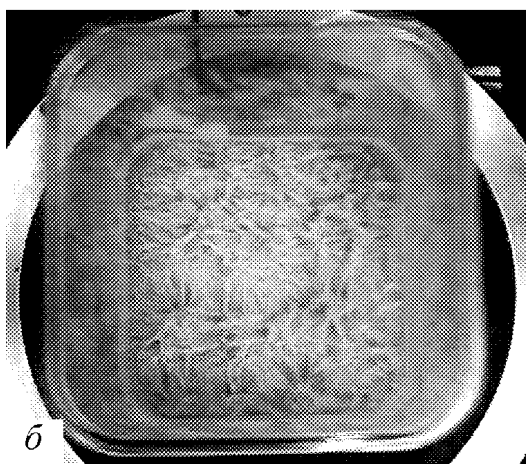
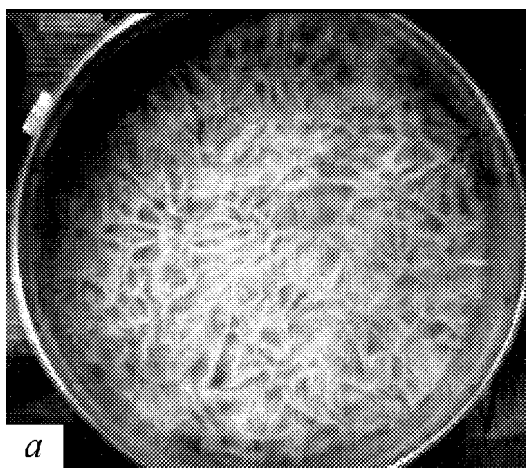


Рис. 3. Рост количества и уменьшение масштабов радиальных структур при увеличении частоты (*а*: частота – 28 Гц, амплитуда – 7.5 мм, толщина слоя – 2 см; *б*: частота – 30 Гц, амплитуда – 6.0 мм, толщина слоя – 2.3 см)

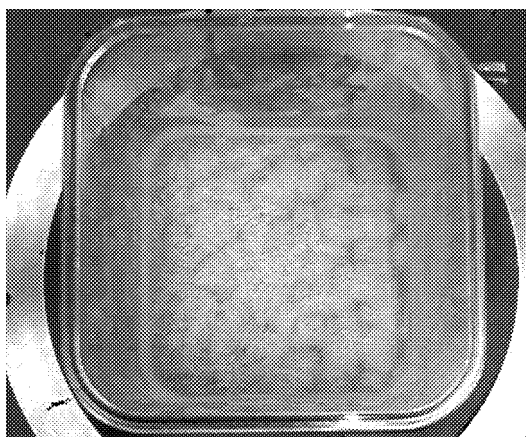


Рис. 4. Радиальные структуры исчезают, на поверхности вещества остается лишь лабиринтный рельеф (частота вибрации – 40 Гц, амплитуда – 6.0 мм) Толщина слоя – 2.3 см

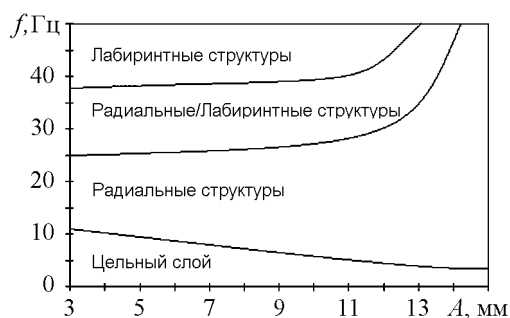


Рис. 5. Фазовая диаграмма, отражающая зависимость наблюдаемых структур от параметров вибрации. Толщина слоя – 2,3 см

характерные структуры, возникающие на поверхности вещества, в зависимости от параметров вибрации (рис. 5).

Фазовая диаграмма демонстрирует, что образование лабиринтного рельефа может происходить только при малых амплитудах. При больших амплитудах колебаний контейнера на поверхности вещества остаются лишь радиальные структуры. И наконец, при амплитуде в 2 см и более, коллективное поведение частиц становится хаотическим (рис. 6).

В некоторых экспериментах в контейнер с речным песком добавлялась пищевая крупа (диаметр частицы крупы – 1 мм) для наблюдения влияния образующихся структур на смешивание и сепарацию двухкомпонентной смеси. В областях фазовой диаграммы, где присутствуют радиальные структуры, процессы смешивания и сепарации проходят менее равномерно. Для более равномерного перемешивания или сепарации стоит использовать режимы с формированием лабиринтных структур (рис. 7). Такие результаты могут иметь прикладное значение, например в аграрной или пищевой промышленности.

В рамках проведенной работы было также выполнено компьютерное моделирование системы, которое продемонстрировало некоторые эффекты, наблюдавшиеся в экспериментах. Система моделировалась как множество сталкивающихся твердых частиц, находящихся на вибрирующей платформе (подобные моделирования были проведены в работах [10,11]). Координаты дна контейнера подчиняются синусоидальной зависимости. При столкновении частиц часть их механической энергии диссипирует, степень диссипации определяется коэффициентом диссипации α . Между частицами также присутствует кулоновское трение. Проведенные модельные эксперименты демонстрируют некоторые эффекты, например сепарацию частиц по площади поверхности вещества (в случае многокомпонентной смеси) и возникновение конвекционных потоков в объеме вещества. Моделирование также продемонстриро-

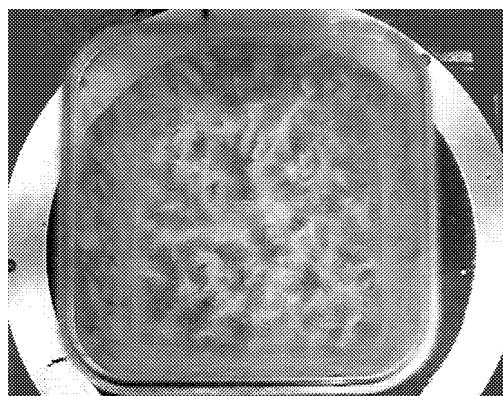


Рис. 6. Движение частиц песка становится хаотическим

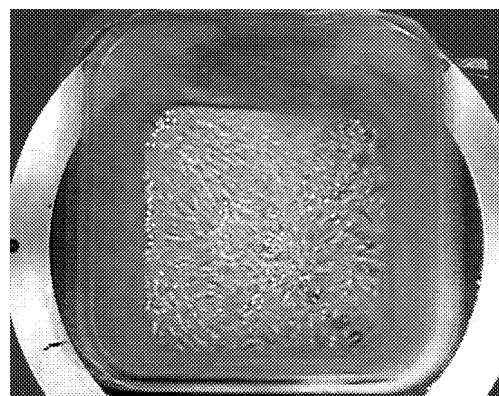


Рис. 7. Влияние лабиринтных структур на смешивание двухкомпонентной среды

вало формирование некоторых структур (аналогичные результаты получены в работе [5]), однако обнаруженные в экспериментах радиальные структуры в численном эксперименте не наблюдались. Возможно, радиальные моды колебаний можно пронаблюдать, изменяя характерные размеры моделируемой системы.

По мнению автора, наиболее действенным методом исследования таких структур может быть подбор феноменологических колебательных или гидродинамических моделей, которые могли бы давать решения, удовлетворяющие всем экспериментальным наблюдениям.

Заключение и выводы

В настоящей работе представлены результаты экспериментального исследования радиальных структур в вертикально вибрируемом гранулированном слое. Подобные структуры не были описаны ранее в научной литературе. Проведен анализ зависимости структурного рельефа вещества от толщины слоя и параметров вибрации. В настоящее время необходим поиск теоретической модели, которая полностью описывала бы множество обнаруженных в данной работе динамических структур.

Автор признателен А.М. Рейману, В.А. Рекшинскому и Е.М. Тиманину за поддержку и полезные обсуждения результатов работы.

Библиографический список

1. *Jaeger H.M., Nagel S.R., and Behringer R.P.* Granular solids, liquids, and gases // *Rev. Mod. Phys.* 1996. Vol. 68. P. 1259.
2. *Knight J.B., Jaeger H.M., and Nagel S.R.* Vibration-induced size separation in granular media: The convection connection // *Phys. Rev. Lett.* 1993. Vol. 70. 3728.
3. *Goldhirsh I. and Zanetti G.* Clustering instability in dissipative gases // *Phys. Rev. Lett.* 1993. Vol. 70. 1619; *Du Y., Hao L., and Kadanoff L.P.* Recent numerical studies of a one dimensional system of inelastic particles // *Phys. Rev. Lett.* 1995. Vol. 74. 1268.
4. *Umbanhowar P., Melo F., and Swinney H.L.* Localized excitations in a vertically vibrated granular layer // *Nature (London).* 1996. Vol. 382. 793.
5. *Bizon C., Shattuck M.D., Swift J.B., McCormick W.D., and Swinney H.L.* Patterns in 3D vertically oscillated granular layers: Simulation and experiment // *Phys. Rev. Lett.* 1998. Vol. 80. P. 57.
6. *Clement E. et al.* Pattern formation in a vibrated two-dimensional granular layer // *Phys. Rev. E.* 1996, Vol. 53. 2972.
7. *Shinbrot T.* Competition between randomizing impacts and inelastic collisions in granular pattern formation // *Nature (London).* 1997. Vol. 389. 574.
8. *Tsimring L.S. and Aranson I.S.* Cellular and localized structures in a vibrated granular layer // *Phys. Rev. Lett.* 1997. Vol. 79. 213.
9. *Crawford C. and Riecke H.* Oscillon-type structures and their interaction in a Swift-Hohenberg model // *Physica D.* 1999. Vol. 129. P. 83.

10. *Ristow G.H. and Herrmann H.J.* Density patterns in two-dimensional hoppers // *Phys. Rev. E.* 1994. Vol. 50. R5.
11. *Aoki K.M. and Akiyama T.* Spontaneous wave pattern formation in vibrated granular materials // *Phys. Rev. Lett.* 1996. Vol. 77. 4166.
12. *Rossing T.D.* Chladni's law for vibrating plates // *American Journal of Physics.* 1982. Vol. 50. P. 271.

*Нижегородский государственный
университет им. Н.И. Лобачевского*

*Поступила в редакцию 23.08.2010
После доработки 3.11.2010*

RADIAL PATTERNS IN A VIBRATED GRANULAR LAYER

I.A. Lazarevich

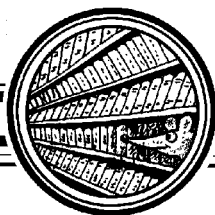
Laboratory experiments were conducted for a sand layer placed in the vertically-oscillated containers of various shapes. Radial patterns on the sand surface were observed; experimental investigations of such structures have never been described in scientific literature. The waveform, amplitude and frequency of vibrations and the depth of the vibrated layer could be varied, allowing study the dependence of the shape and scale of radial structures upon these parameters.

Keywords: Dynamic structures, granular matter, nonlinearity, vertical vibration, radial patterns.



Лазаревич Иван Александрович – родился в Нижнем Новгороде. Учился в средней общеобразовательной школе № 49, затем в физико-математическом лицее № 40 в профильном физическом классе при Институте прикладной физики РАН. В настоящее время учится на 1-м курсе факультета «Высшая школа общей и прикладной физики» Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского. В мае 2010 года участвовал с проектом по настоящей работе на Международной научно-инженерной ярмарке (Intel ISEF) в городе Сан-Хосе, Калифорния. Работа была поддержана грантами Общества геофизиков-исследователей (Society of Exploration Geophysicists), Американской ассоциации по патентам и торговым маркам (Patent and Trademark Office Society) и корпорации Intel.

603950 Россия, Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23
Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского
E-mail: vanya.lzr@gmail.com.



Изв. вузов «ПНД», т. 18, № 6, 2010

К юбилею лазера

2010 год – год пятидесятилетия лазера был объявлен Международным годом лазера. Эту дату отмечало все мировое сообщество. В России данному событию были посвящены общее собрание отделения физических наук РАН и научная сессия «Лазеры: 50 лет в науке, технологиях и медицине» общего собрания Российской академии наук, проходившие 13–15 декабря 2010 года в Москве.

Лазерная тема, несомненно, близка нашему журналу. Заметим, что Герман Хакен, который ввел термин «синергетика», отталкивался в создании нового научного направления от эффектов лазерной генерации. В частности, на одной из ранних конференций по синергетике им был представлен доклад «Лазер как источник новых идей в синергетике» (см. *Chaos and order in nature* / Ed. by H. Haken. В. etc. 1980. 271 p.).

Процесс генерации электромагнитного излучения в квантовых генераторах – пример самоорганизации. Напомним, что лазер непрерывного действия представляет собой сильно неравновесную открытую систему, образованную активными атомами (например, смесью атомов гелия и неона), взаимодействующими с электромагнитным полем резонатора (колебательной системы, состоящей, например, из двух зеркал, одно из которых полупрозрачное). Такая система выводится из равновесия благодаря постоянному притоку энергии от внешнего некогерентного источника оптической накачки. Поступающая энергия не накапливается в лазерной системе, а непрерывно покидает ее в виде электромагнитного излучения и теплового потока. Пока интенсивность накачки мала, генерируемое лазером излучение состоит из случайных, несфазированных между собой цугов волн. Однако при достижении некоторого значения мощности накачки лазерное излучение становится когерентным, то есть начинает представлять собой один волновой цуг, в котором фазы волн на макроскопических расстояниях жестко скоррелированы. Такой переход к когерентной генерации можно интерпретировать как самоорганизацию – установление порядка в лазерной системе.

Замечательным подарком к юбилею лазера был перевод на русский язык книги Теодора Гарольда Меймана «Лазерная одиссея» (*The Laser Odyssey*, by Theodore H. Maiman, Creator of the World's First Laser. Laser Press, Blaine, WA, 2000). Можно сказать: «О лазерах столько книг написано...». Да! Но эта книга особенная. Об этом написал сам Мейман в разделе «Пролог»: «16 мая 1960 года мне удалось создать первый в мире лазер. Это был дебют хорошо известного теперь ослепительного

луча света. Все чудесные применения лазеров в медицине, волоконной оптике, проигрывателях компакт-дисков и очень многих других областях возникли благодаря удачному рождению этого лазера...

...я не был достаточно подготовлен к встрече с теми дремучими джунглями, которая меня ожидала в период исследований после создания первого лазера.

В реальном мире науки существует жесткая конкуренция за признание, влияние и финансирование. По-видимому, не удивительно, что проигравшие соревнования часто начинают заниматься политическими интригами, а не наукой, и могут делать всяческие пакости. Возможно, большинство людей и не подозревают, что такие интриги существуют в науке, но такова реальность.

Мне пришлось пробираться через лабиринт минного поля. На своем пути я встретил живописных персонажей и столкнулся со многими необычными и даже возмутительными случаями.

История создания лазера описывалась во многих книгах, но все эти истории были не из первых рук, и авторы не достигли цели, оставив в стороне ключевые социологические и политические скрытые тенденции, игравшие роль в этой истории. В этой книге я впервые подробно рассказываю из своего личного опыта как и почему действительно был создан лазер.

Я надеюсь, что читатели с удовольствием прочитают историю моих приключений во время лазерной одиссеи».

Отметим особо, что Мейман подчеркивает обычно замалчиваемую роль Валентина Александровича Фабриканта, предложившего в 1951 году совместно с М.М. Вудынским и Ф.А. Бутаевой принцип усиления электромагнитного излучения при прохождении сред с инверсной заселенностью. В разделе книги «Нобелевские премии, связанные с лазером» Мейман пишет: «Но даже если Нобелевский комитет считает, что премии следует вручать за выдающиеся исследования только в области фундаментальной науки, я думаю, что члены комитета не справились в данном случае со своей работой. Было бы более разумно отдать должное русскому физики Фабриканту. Хотя он и не создал лазер, он предложил идею лазера раньше, чем появились первые работы по лазеру».

В фольклоре Московского энергетического института, одной из кафедр которого заведовал В.А. Фабрикант, сохранились строчки:

Гордится Франция Фабри,
Германия гордится Кантом,
А наше славное МЭИ
Гордится Валеи Фабрикантом.

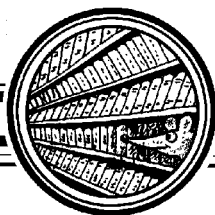
Ниже мы публикуем аннотацию к книге Теодора Меймана и два небольших раздела из главы 1 «Введение» – «Распространенность лазеров» и «Открытие», а также разделы «Лазерный процесс» из главы 10 и «Сделай это!» из главы 11.

Редакционная коллегия поздравляет всех читателей журнала
с Новым, 2011 годом и желает всего наилучшего!

Зам. главного редактора



Д.И. Трубецков



ЛАЗЕРНАЯ ОДИССЕЯ

Теодор.Г. Мейман

Пер. с англ. М.Н. Сапожникова / Предисл. Кэтлин Мейман

- © Теодор Мейман, 2000
 - © Кэтлин Мейман, предисловие к изданию на русском языке, 2010
 - © Сапожников М.Н., перевод на русский язык, 2010
 - © Издание на русском языке, оформление ООО «Печатные Традиции», 2010
- М.: Печатные Традиции, 2010. 224 с., ил.
ISBN 978-5-91561-050-6

16 мая 1960 года Теодор Мейман сделал первый в мире лазер, получив генерацию красного когерентного света в кристалле рубина.

Мейман выиграл лазерную гонку в соревновании с ведущими промышленными лабораториями и университетами США, стремившимися первыми получить когерентный свет после создания микроволнового усилителя – мазера. Сообщение Меймана о своем достижении на пресс-конференции в Нью-Йорке 7 июля 1960 года вызвало сенсацию и было встречено многими учеными сначала с недоверием. Однако конструкция рубинового лазера Меймана была настолько простой, элегантной и эффективной, что уже через несколько месяцев этот лазер смогли воспроизвести в других лабораториях и его конструкция была использована для создания других лазеров.

В своей автобиографической книге Теодор Мейман увлекательно описывает свое детство, годы учебы в университетах США и свои исследования в Лаборатории Хьюза в Калифорнии, которые привели к созданию лазера. Он откровенно рассказывает о действиях влиятельных ученых-конкурентов из лабораторий на Восточном побережье США, которые в течение многих лет пытались преуменьшить значение его выдающегося достижения.

2010 год объявлен Международным годом лазера, и научный мир празднует во многих странах пятидесятилетний юбилей этого замечательного научного и технологического достижения XX века. В связи с полувековым юбилеем создания первого лазера книга Теодора Меймана переведена на русский язык. Книга содержит предисловие Кэтлин Мейман, написанное специально для русского издания.

* * *

Введение

Распространенность лазеров

Количество лазеров разнообразных типов, используемых в наше время, поражает воображение. Кажется, что они вездесущи. И их применение в самых различ-

ных областях в медицине, науке и промышленности, для развлечений и в военных целях непрерывно расширяется.

Лазерные технологии проникли и в наши дома. Крошечный полупроводниковый лазерный диод, похожий на транзистор, является основным элементом проигрывателей компакт- и видеодисков, а также используется в дисководах для записи компакт- и видеодисков. И, как вы знаете, лазер также находится где-то внутри вашего лазерного принтера.

Лазерный свет поражает своим великолепием и очень эффектно используется для лазерной иллюминации в различных представлениях. Вспомните ослепительные лазерные мечи, которыми угрожающе размахивают герои «Звездных войн». Мигающий красный свет сканеров в кассах супермаркетов и сияющее световое пятно на стене от лазерной указки постоянно напоминают нам о существовании лазеров.

Телефонная связь, кабельное телевидение, связь через Интернет – всё это осуществляется, как правило, в результате передачи информации по очень тонким, толщиной с человеческий волос, стеклянным волокнам. Волоконно-оптическая связь основана на передаче по оптическим волокнам луча света от крошечного лазера размером с булавочную головку, который подобен лазерам, используемым в проигрывателях и дисководах компакт- и видеодисков.

Лазерные технологии фактически произвели революцию во многих методах лечения в медицине. Сейчас с помощью лазеров осуществляется почти бескровная хирургия, и разработаны новые, необычные методы лечения рака.

Лазеры применяются в офтальмологии для лечения катаракты, глаукомы и операций на сетчатке глаза. Недавно разработаны лазерные методы, позволяющие изменять форму хрусталика глаза, в результате чего многие пациенты избавились от очков.

Лазеры также используются для косметических операций по удалению морщин и бородавок, волос и татуировок. Они даже применяются для отбеливания зубов.

Лазеры нашли разнообразное применение и в производстве. Они используются для резки стали в автомобильной промышленности, очень точной обработки экзотических материалов в аэрокосмической промышленности и изготовления полупроводниковых и электронных элементов. Они даже применяются для кройки тканей в швейной промышленности.

В современных самолетах типа гражданского Боинга 767 используются лазерные гироскопы для навигации.

Лазеры используются в военных приложениях в оптических радарах для точных измерений расстояния до мишени и точного наведения так называемых управляемых бомб и ракет.

В настоящее время выпускаются лазеры самых разнообразных типов, которые имеют различную форму и размер и испускают лучи света, обладающие разными свойствами. В зависимости от конкретных приложений, это могут быть большие промышленные лазеры с выходной мощностью, достигающей много киловатт (1000 ватт), или лазеры для хирургии глаза с тщательно контролируемым световым пучком, или миниатюрные лазеры, которые используются в волоконной оптике и проигрывателях компакт- и видеодисков.

* * *

Открытие

Меня часто спрашивают, как мне удалось создать лазер. Многие думают, что это произошло в результате какого-то внезапного наития. Но это было совсем не так.

Конечно, если научное открытие вдруг происходит в результате видения, которое возникло неизвестно откуда, это выглядит весьма эффектно, но так бывает очень редко. На самом деле почти все научные открытия основаны на предыдущих научных работах.

Именно так было, когда братья Райт сначала стали исследовать планеры, которые изобрели не они, но они усовершенствовали их. Они использовали пропеллер, который изобрел Леонардо да Винчи, и, опираясь на законы аэродинамики, сделали легкий двигатель. Проработав последовательно всю эту работу, они сумели создать аэроплан, на котором осуществили впервые в мире полет.

Даже так называемые случайные открытия пластмассы или пенициллина были сделаны, потому что первооткрыватели видели цель своих поисков и понимали их важность. Они обладали творческим потенциалом, который помог им воплотить в действительность то, что они предвидели. Открытие сопутствует подготовленному уму!

Точно так же было в случае с лазером. В 1916 году Альберт Эйнштейн заложил фундаментальные основы принципа работы лазеров. Он сформулировал и объяснил законы поглощения и испускания излучения атомами и молекулами. Эйнштейн ввел понятие о вынужденном испускании излучения, которое является ключевым для работы лазера. Окончание *ser* в названии *laser* происходит от первых букв выражения *stimulated emission of radiation* (вынужденное испускание излучения).

Затем в 1920 году физики К.Г. Фюхтбауэр и Рудольф Ладенбург развили теорию Эйнштейна дальше, связав поглощение света в материальной среде с фундаментальными свойствами атомов этой среды. Но именно русский физик В.А. Фабрикант впервые предложил концепцию лазера в 1940 году [Валентин Фабрикант предложил идею усиления света в электрическом разряде в газе, создавая инверсию населенности за счет соударений второго рода между молекулами газа. Однако он не предлагал помещать газ в резонатор для получения генерации света. – *Примечание переводчика*].

В последующие годы было сделано много предложений и достигнуто много успехов в развитии технологий, которые послужили мостом для создания лазера. Благодаря тому, что я имел специальные технические знания и физическое образование, мне удалось подобрать ключи к двери на пути создания первого лазера.

* * *

Лазерный процесс

Я объясню особенности лазерного процесса на примере сконструированного мной рубинового лазера. Процесс начинается, когда кристалл рубина возбуждается лампой-вспышкой и ионы хрома переходят на метастабильный флуоресцентный уровень. Ионы теряют свою энергию, излучая случайным образом фотоны в красной области спектра. Это – хорошо известная красная флуоресценция (спонтанное излучение).

Если уровень возбуждения достаточно высок, то достигается требуемое условие инверсной населенности. В этом случае количество ионов хрома, находящихся на верхнем метастабильном флуоресцентном уровне, больше, чем их количество в основном состоянии. Поэтому ионы хрома могут испускать *вынужденное* излучение (вынужденное испускание излучения по Эйнштейну [stimulated emission of radiation – ser]) наряду с обычным спонтанным излучением.

Так как теперь метастабильный уровень опустошается гораздо быстрее, чем обычно, то время жизни флуоресценции уменьшается. Это сокращение времени жизни можно наблюдать, возбуждая красное свечение рубина лампой-вспышкой и регистрируя его затухание с помощью фотоэлемента, соединенного с осциллоскопом. Когда рубин находится в состоянии с инверсной населенностью, он становится усилителем. Красные фотоны *усиливаются* во время распространения в кристалле.

Начинается важный процесс селекции. Сначала красные фотоны испускаются в произвольных направлениях. Однако фотоны флуоресценции, испускаемые под большими углами к механической оси рубинового цилиндра, выходят через боковые стороны кристалла и теряются таким образом. С другой стороны, фотоны, испускаемые вдоль оси кристалла или под небольшими углами к его оси, оказываются фактически в ловушке. Они отражаются от противоположных зеркал на торцах кристалла и распространяются туда и обратно в кристалле. Аксиальные фотоны усиливаются во время их распространения в кристалле и генерируют новые фотоны в том же направлении. В результате *вынужденное* излучение с возбужденного метастабильного уровня быстро становится доминирующим.

Фотоны, распространяющиеся в кристалле, являются фотонами вынужденного излучения. Усиленные аксиальные фотоны распространяются вдоль оси кристалла. Поэтому фотоны, которые выходят из маленького отверстия выходного серебряного зеркала, концентрируются вдоль или почти вдоль оси кристалла.

Красное (спонтанное) излучение флуоресценции рубина испускается в диапазоне частот, распределение которых описывается колоколообразной кривой. Фотоны флуоресценции имеют наибольшую концентрацию в центре этой кривой. В состоянии инверсной населенности наибольшее усиление достигается в максимуме кривой распределения частот. В итоге (как в случае с углом распространения луча) фотоны с частотами вблизи центра распределения оказываются в более благоприятных условиях, так как они усиливаются сильнее во время распространения туда и обратно в результате многократных отражений от зеркал. Именно поэтому частотное распределение лазерного излучения является узким, т.е. *ширина лазерной линии* мала.

Я собирался наблюдать в экспериментах сокращение времени жизни флуоресценции рубина при высоком уровне возбуждения лампой-вспышкой. С повышением мощности возбуждения рубина, интенсивность его флуоресценции должна возрастать пропорционально до момента достижения порога. Но выше порога небольшое увеличение мощности возбуждения должно вызывать гораздо более сильное изменение интенсивности выходного излучения, так как монохроматор в сочетании с детектором более чувствителен к воздействию узкого луча света с небольшой спектральной шириной.

Я также планировал независимые измерения сужения спектральной ширины линии излучения рубина с помощью прибора, предназначенного специально для этой цели, который называется спектрографом.

* * *

Сделай это!

И вот наступил день 16 мая 1960 года – время подтвердить или опровергнуть все опасения, что «рубин не может работать» или что «вообще лазер нельзя сделать». Уже больше не требовалось никаких новых расчетов и никаких отвлекающих внимание экспериментов. Настал момент истины!

Лазерная головка была установлена на оптическую скамью. Лампа-вспышка была подключена к источнику питания. Поджигающий электрод был соединен с искровой катушкой, инициирующей вспышку стробоскопической лампы. Свет, выходящий из отверстия в зеркале на торце рубинового стержня, направлялся через монохроматор фирмы Vausch and Lomb на фотоумножитель (высокочувствительный фотоэлемент). Электрический сигнал с фотоумножителя подавался на вход мемоскопа производства Лаборатории Хьюза*.

Мы проводили эксперимент вдвоем с Ирри Д'Хененсом. Больше в лаборатории никого не было.

Сначала мы произвели пробное возбуждение флуоресценции рубина лампой-вспышкой для отладки системы детектирования.

Мы установили напряжение источника питания лампы, равное примерно 500 В, возбудили флуоресценцию вспышкой лампы и наблюдали развертку импульса на экране мемоскопа.

Этот импульс описывал изменение во времени интенсивности красной флуоресценции рубина. Импульс затухал в течение примерно трех миллисекунд. Это время равно времени жизни возможного лазерного уровня. Мы произвели необходимую настройку параметров, чтобы оптимизировать вид кривой на экране мемоскопа.

Теперь мы начали постепенно поднимать напряжение источника питания и каждый раз регистрировали импульсы флуоресценции рубина. При этом пиковая интенсивность импульса возрастала пропорционально энергии возбуждения, а время его затухания не менялось... Пока все шло, как обычно.

Но когда мы подняли напряжение источника питания лампы выше 950 В, все изменилось! Пиковая интенсивность импульса стала резко возрастать, а время его затухания быстро уменьшилось.

Отлично! Это было именно то, что нужно!

Лазер родился!

*Осциллоскоп специального типа для регистрации и хранения в памяти быстроменяющихся сигналов

Зав. редакцией *Н.Н. Левина*
Редакторы *Л.А. Сидорова, Н.Н. Левина*
Оформление художника *Д.В. Соколова*
Оригинал-макет подготовлен
И.А. Пономаревой, О.Н. Строгановой
в пакете *L^AT_EX*

Подписка на 2011 год осуществляется
по каталогу Агентства Роспечать
«Газеты. Журналы», индекс 73498,
и по договору между Подписчиком
(юридическим или физическим лицом)
и Издателем (Саратовским государственным университетом)

Стоимость подписки на 2011 год 720 руб. (6 номеров)
Заявки на заключение договора принимаются
по почте, по телефону редакции, по эл. почте редакции

Адрес редакции: 410012, Саратов, Астраханская, 83
Тел./факс: (845-2) 52-38-64
E-mail: and@nonlin.sgu.ru

Распространение журнала осуществляется
редакцией журнала по адресной системе

**Условия подписки на электронную версию журнала на сайте
Научной электронной библиотеки <http://elibrary.ru>**

Сдано в набор 14.01.2011. Подписано к печати 28.01.2011
Формат 70x108/16. Бумага «Снегурочка». Печать трафаретная
Усл. печ. л. 15,05(10,75). Уч.-изд. л. 15,0. Тираж 200. Заказ 428

Отпечатано на ризографе GR 3750 редакции журнала

© Редакция журнала
«Известия вузов. ПНД», 2011
© Оформление художника
Д.В. Соколова, 2011