

К 20-летию журнала «Известия вузов.
Прикладная нелинейная динамика»

ISSN 0869-6632

ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

Прикладная Нелинейная Динамика

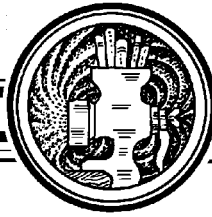


3-4
1993

ИЗДАНИЕ САРАТОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

СО Д Е Р Ж А Н И Е

ОБЗОРЫ АКТУАЛЬНЫХ ПРОБЛЕМ НЕЛИНЕЙНОЙ ДИНАМИКИ	
<i>Леон О. Чуа</i> . Генезис схемы Чуа	4
БИФУРКАЦИИ В ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ РАЗЛИЧНОЙ ПРИРОДЫ	
<i>Кузнецов А.П., Кузнецов С.П., Сатаев И.Р.</i> Критическая динамика одномерных отображений. Часть 2. Двухпараметрический переход к хаосу	17
ПРИКЛАДНЫЕ ЗАДАЧИ НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ КОЛЕБАНИЙ И ВОЛН	
<i>Климов В.И., Ланда П.С.</i> Простейшая динамическая модель экономического развития общества	36
<i>Анищенко В.С., Постнов Д.Э.</i> Синхронизация хаотических колебаний и электрическая активность человеческого мозга	45
<i>Анищенко В.С., Сапарин П.И.</i> Нормированная энтропия как диагностический признак реакции сердечно-сосудистой системы человека на внешнее воздействие	7
<i>Рыскин Н.М., Трубецков Д.И.</i> Модель Лоренца для описания конвекции в магнитной жидкости	65
СОЛИТОНЫ	
<i>Елеонский В.М., Королев В.Г., Кулагин Н.Е.</i> О динамической системе, порожденной уравнением Уизема с осциллирующим ядром	72
АВТОВОЛНЫ. САМООРГАНИЗАЦИЯ	
<i>Завершинский И.П., Коган Е.Я., Молевич Н.Е.</i> Формирование диссипативных структур в акустическом поле	87
НЕЛИНЕЙНАЯ ДИНАМИКА В ЛИЦАХ. ИСТОРИЯ. PERSONALIA	
<i>Пойзнер Б.Н.</i> Хаос, порядок, время в древних картинах мира	97
ИЗ КНИГ И ЖУРНАЛОВ	
<i>Пригожин И.</i> Новое открытие времени	110
ДЕБЮТЫ	
<i>Мчедлова Е.С.</i> Аналитическое исследование сложной динамики параметрического осциллятора	125
МЕТОДИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ ПО НЕЛИНЕЙНОЙ ДИНАМИКЕ	
<i>Кузнецов А.П., Кузнецов С.П.</i> Ответ на задачу	129
КНИЖНАЯ ПОЛКА СТУДЕНТА	131



ГЕНЕЗИС СХЕМЫ ЧУА

Леон О. Чуа

Статья представляет собой систематическое изложение последовательности технических этапов, пройденных автором при разработке схемы, генерирующей хаос. Процедура разработки, хотя и ясная по своей природе, не могла быть изобретена без использования некоторых важных свойств нелинейных схем и их физических реализаций.

1. Воспоминания: экскурс в историю

Событие, которое привело к открытию схемы Чуа, произошло в лаборатории профессора Т. Матсумото в университете Васеда поздним октябрьским днем 1983 года, на следующий день после моего приезда в Токио по приглашению JSPS (Японское общество содействия науке). Здесь, в хорошо оснащенном и заставленном приборами углу в лаборатории Матсумото, я должен был стать свидетелем живой демонстрации предположительно первой в мире удачной электротехнической реализации уравнений Лоренца, над которой исследовательская группа профессора Матсумото трудилась больше года. Это был действительно замечательный образец электронной схемотехники. Он был тщательно, почти идеально смонтирован, включал более чем дюжину интегральных схем и был украшен приблизительно таким же количеством потенциометров и других подстроечных элементов для тонкой перестройки и точной настройки. Не было бы необходимости придумывать более ясную хаотическую схему, если бы схема Лоренца–Матсумото работала. Но она не работала. Виной тому был не недостаток мастерства экспериментатора у Матсумото, а скорее нехватка интегральных компонентов с хорошими характеристиками и достаточно большим динамическим диапазоном, а именно, интегральных умножителей. К несчастью, именно этот компонент был ключевым при построении автономной электронной хаотической схемы в 1983 году. В то время общепризнанными были только две автономные системы обыкновенных дифференциальных уравнений, демонстрирующие хаос. Это были уравнения Лоренца

$$\begin{aligned}x &= -\alpha(x - y), \\y &= \beta x - y - xz, \\z &= xy - yz\end{aligned}$$

и уравнения Ресслера

$$\begin{aligned}x &= -y - z, \\y &= x + \alpha y, \\z &= \beta + z(x - \gamma),\end{aligned}$$

где α , β и γ – параметры. Заметим, что нелинейность в обеих системах является функцией двух переменных, точнее, произведением этих переменных.

К 1983 году, бросающееся в глаза отсутствие воспроизводимости в работе хаотических схем или систем вело, казалось, к предположению, что хаос является патологическим явлением, которое может существовать лишь в математических абстракциях и в компьютерных экспериментах с придуманными уравнениями. Поэтому радиоэлектронщики вообще и теоретики, занимающиеся нелинейными цепями, в частности, уделяли мало внимания феноменам, которые многими рассматривались как мистическая Диковина. Таким было состояние умов в среде теоретиков нелинейной схемотехники в 1983 году. Схема Лоренца–Матсумото должна была изменить это состояние равнодушия, царившее среди теоретиков.

Увиденное в такой исторической перспективе, полное разочарование, постигшее нас в тот октябрьский день, выглядит совершенно понятным. Неудача была настолько велика, что это отвратительное ощущение сохранялось в моем подсознании до самого вечера, когда я уже собирался лечь спать. Внезапно до меня дошло, что, поскольку основным механизмом, приводящим к появлению хаоса и в уравнениях Лоренца, и в уравнениях Ресслера, является наличие в них как минимум двух *неустойчивых* положений равновесия (трех для Лоренца и двух для Ресслера), то разумно придумать более простую и ясную схему, которая обладала бы этими свойствами.

После того, как этот альтернативный подход и стратегия были осознаны, систематический перебор всех подобных возможных схем был уже простым упражнением в элементарной теории нелинейных цепей [2]. Из выявленных восьми типов затем были исключены схемы, которые по той или иной причине не могли быть хаотическими. Это простое упражнение быстро привело к двум подходящим вариантам, из которых я, после применения некоторой интуиции, выработанной за два десятилетия ежедневного общения с нелинейными явлениями в электрических цепях, остановился, в конце концов, на схеме, приведенной на рис. 1. Весь процесс перечисления и исключения занял меньше часа и заключался в серии почти

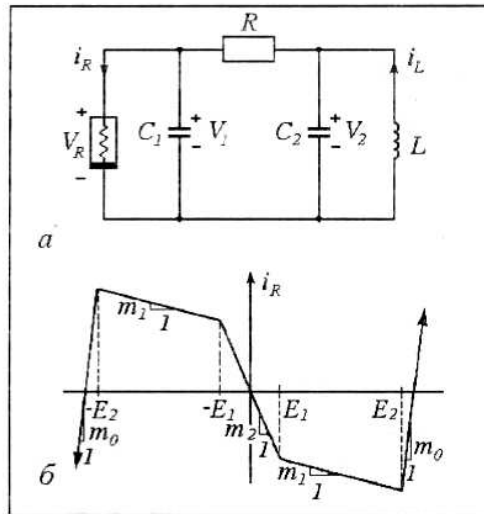


Рис. 1. Схема Чуа (а) и пятиsegmentная вольт-амперная характеристика $v_R - i_R$ (б) для нелинейного резистора r . При компьютерном моделировании хаос может наблюдаться и при наличии только трех внутренних сегментов с отрицательной крутизной. Эквивалентная схема в приближении малого параметра в точке равновесия, лежащей на любом из этих трех сегментов, представляет собой отрицательное сопротивление

неразборчивых схемных диаграмм, которые я цапал на салфетках и чистых сторонах использованных конвертов. Я был вынужден прибегнуть к подручным материалам, поскольку не мог в столь поздний час найти другой бумаги в общежитии, где поселился днем раньше.

На следующее утро я показал предполагаемую схему Матсумото, указав, что значение R нужно выбирать таким образом, чтобы его нагрузочная прямая пересекала внутренние три сегмента, имеющие *отрицательную крутизну* на рис. 1, б.

Матсумото немедленно запрограммировал уравнения цепи на своем компьютере. Вскоре он прибежал ко мне, сильно возбужденный, и ликующе объявил, что обнаружил странный аттрактор. Его чрезвычайное волнение в это мгновение не отличалось от волнения ребенка, впервые прыгнувшего в бассейн, поскольку он никогда не сталкивался ни с кусочно-линейными цепями, ни с нелинейными колебаниями, не говоря уж о странных аттракторах.

В течение нескольких месяцев после этого эпизода Матсумото продолжал вычислительные эксперименты с моей схемой в широком диапазоне параметров, подвергая двойной проверке свои компьютерные данные. Он хотел убедиться, что наблюдаемый им странный аттрактор не является в действительности артефактом, порожденным его достаточно незамысловатой программой, написанной на Бэйсике. Несмотря на мои многочисленные подталкивания, он воздерживался от макетирования моей схемы, поскольку его исследовательская группа никогда ранее не занималась синтезом заданных немонотонных вольтамперных характеристик. Поэтому я написал Зонгу Гуо Кину (Zhong Guo Qin) и Фархаду Айрому (Farhad Augom), которые были членами моей Лаборатории Нелинейной Электроники в Беркли, и предложил им применить разработанную нами ранее процедуру синтеза для реализации этой схемы. Их макет работал практически без точной подстройки. Итак, Зонг и Айром стали первыми исследователями, которые документально зафиксировали экспериментально наблюдаемый хаос в системе Чуа [17].

Следующий раздел посвящен технической версии эпизода разработки схемы, упоминаемого в предшествующем повествовании.

* * *

P.S. **Схема Чуа. Десять лет спустя**

С большим удовольствием и смущением я принял приглашение журнала прокомментировать простую хаотическую схему, придуманную мной в 1983 году в качестве предмета исследования для профессора Т. Матсумото из университета Васеда, после его двухлетних бесплодных попыток создать схему, которая демонстрировала бы хаотическое поведение.

Благодаря творческим усилиям многих известных ученых из России и Украины было собрано огромное количество новых сведений о схеме Чуа. Об этом свидетельствует содержание двух специальных номеров журнала «Цепи, системы и компьютеры» (март, июнь 1993 г.), озаглавленных «Схема Чуа: парадигма хаоса» (расширенную версию можно найти в книге под редакцией доктора Р.Н. Мадан, опубликованной издательством «Мир науки» в 1993 году). Вклад российских и украинских ученых за последние два года был столь значителен, что почти затмил многолетнюю самоотверженную работу профессора Т. Матсумото, который использовал достаточно грубые методы и продвигался в своих поисках как бы наощупь, не подозревая о многих мощных аналитических и концептуальных подходах, развитых в бывшем СССР.

Исследования нелинейной динамики в схеме Чуа носят всеобъемлющий характер и в них достигнут значительный прогресс, тем не менее остается еще большее поле для разработок в области управления, синхронизации и использования хаоса, а также пространственно-временных структур и волн в решетках из схем Чуа, которые теперь могут быть изготовлены в виде одного кристалла СБИС. Именно в связи с новыми сложными проблемами и грядущими прорывами я приветствую редакционную коллегию замечательно задуманного журнала за научную убежденность в перспективности исследований в области нелинейной динамики. Я не сомневаюсь, что, несмотря на трудные для России времена, научное творчество восторжествует, а годы спустя ученые оглянутся назад и согласятся – издание в 1993 году нового журнала было и своевременным, и прозорливым.

июнь, 1993

Леон О. Чуа
Перевод И.Р. Сатаева



"...В тот день поразит Господь мечем Своим тяжелым, и большим, и крепким Левиафана, змея прямобегущего, и Левиафана, змея изгибающегося, и убьет чудовище морское..." (Ветх. Завет, Исайя, гл. XXVII, стих 1).

В Библии Левиафан (рыба?, змей?, дракон? - Густав Доре, чей рисунок здесь приведен, явно склоняется к последнему), так вот Левиафан, равно как и Океан, порождением которого он является, отождествляются с первобытным Хаосом*, грядущая победа над которым предвдвывает и открывает путь к царству Божьему на Земле. Но пытливые ученые не хотят и не могут ждать. Бесстрашным скальпелем анализа снимая покровы с непознанного, они хотят уже сейчас заставить Хаос работать на удовлетворение насущных потребностей человечества.

* См. об этом статью Б.Пойзнера на стр.97



Впрочем, об удовлетворении этих потребностей провидчески писал Генрих Гейне более 150 лет назад:

А у Бога рыба есть –	Ну а мясо у нее –	Всем, кто шел его стезею,
Слышал о Левиафане?	Это просто обьеденье!	С ним совместно отобедать.
Каждый день по часу с ней	В день восстания из мертвых	И его любимой рыбы,
Бог играет в Океане.	Бог отправит приглашенье.	Рыбы Господа, отведать.

СО Д Е Р Ж А Н И Е

Страницы из прошлого	1
ПРИКЛАДНЫЕ ЗАДАЧИ НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ КОЛЕБАНИЙ И ВОЛН	
<i>Хуторян Э.М., Пономаренко С.С., Кишко С.А., Лукин К.А., Кулешов А.Н., Ефимов Б.П.</i> Колебания в генераторе О-типа при возбуждении объемно-поверхностной моды резонатора с периодически неоднородной гребенкой	9
<i>Шабунин А.В.</i> Действие случайных дальних связей на систему с фазовой мультистабильностью	20
<i>Щербинин С.А., Гончаров П.П., Чечин Г.М.</i> Исследование устойчивости нелинейных нормальных мод в электрических цепях	34
<i>Хорев В.С.</i> Оценка направления взаимодействия между модельными системами связанных осцилляторов при сильной связи	52
<i>Смирнов Д.А., Безручко Б.П.</i> Эффект редкой выборки при оценке направленных связей по временным рядам	61
<i>Корнилов М.В., Сысоев И.В.</i> Влияние выбора структуры модели на работоспособность метода нелинейной причинности по Грейнджеру	74
<i>Вакуленко Н.В., Иващенко Н.Н., Котляков В.М., Сонечкин Д.М.</i> О бифуркациях умножения периода ледниковых циклов в плиоцене – плейстоцене	88
БИФУРКАЦИИ В ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ РАЗЛИЧНОЙ ПРИРОДЫ	
<i>Вадивасова Т.Е., Маляев В.С.</i> Бифуркации в генераторе ван дер Поля с жестким возбуждением в присутствии параметрического шума: Квазигармонический анализ и численный эксперимент	113
<i>Кузнецов А.П., Тюрюкина Л.В.</i> Эффект «гибели колебаний» и квазипериодические бифуркации в низкоразмерном ансамбле осцилляторов ван дер Поля	135
<i>Судаков И.А., Вакуленко С.А., Сукачева Т.Г.</i> Новый тип бифуркаций в модифицированной задаче о конвекции Рэлея–Бенара	145
ДЕТЕРМИНИРОВАННЫЙ ХАОС	
<i>Аржанухина Д.С., Кузнецов С.П.</i> Система трех неавтономных осцилляторов с гиперболическим хаосом. Часть 2. Модель с DA-аттрактором	163
<i>Зинченко А.Ю.</i> Исследование регулярной и хаотической динамики одной финансовой системы	173
НЕЛИНЕЙНАЯ ДИНАМИКА И НЕЙРОНАУКА	
<i>Крюков А.К., Осипов Г.В.</i> Влияние свойств осцилляторной среды на распространение возбуждения	188
АВТОВОЛНЫ. САМООРГАНИЗАЦИЯ	
<i>Кияшко С.В., Афенченко В.О., Назаровский А.В.</i> Спиральные структуры из тяжелых частиц при параметрическом возбуждении стоячих капиллярных волн	201
ИСТОРИЯ	
<i>Андрушкевич В.С.</i> Дети, опаленные войной: Пестрые заметки памяти	209
Правила для авторов	218
Письмо в редакцию	219

C O N T E N T S

The pages from the past	1
APPLIED PROBLEMS OF NONLINEAR OSCILLATION AND WAVE THEORY	
<i>Khutoryan E.M., Ponomarenko S.S., Kishko S.A., Lukin K.A., Kuleshov A.N., Yefimov B.P.</i> Autooscillations in O-type oscillator at excitation of space-surface mode in resonator with a periodically inhomogeneous grating.....	9
<i>Shabunin A.V.</i> Random distant couplings influence to a system with phase multistability	20
<i>Shcherbinin S.A., Goncharov P.P., Chechin G.M.</i> Investigation of stability of nonlinear normal modes in electrical lattices	34
<i>Khorev V.S.</i> Estimation of interaction direction between oscillatory model systems in case of close coupling	52
<i>Smirnov D.A., Bezruchko B.P.</i> Effect of rare sampling on estimation of directional couplings from time series	61
<i>Kornilov Maxim V., Sysoev Ilya V.</i> Influence of the choice of the model structure for working capacity of nonlinear Granger causality approach	74
<i>Vakulenko N.V., Ivashchenko N.N., Kotlyakov V.M., Sonechkin D.M.</i> On the period-multiplying bifurcation of glacial cycles in the pliocene – pleistocene.....	88
BIFURCATION IN DYNAMICAL SYSTEMS	
<i>Vadivasova T.E., Malyaev V.S.</i> Bifurcations in van der Pol oscillator with a hard excitation in a presence of parametrical noise: Quasi-harmonic analyzes and the numerical simulations	113
<i>Kuznetsov A.P., Turukina L.V.</i> «Oscillator death» and quasiperiodic bifurcations in low-dimensional ensemble of van der Pol oscillators	135
<i>Sudakov I.A., Vakulenko S.A., Sukacheva T.G.</i> New type of bifurcations in the modified Rayleigh-Bénard convection problem	145
DETERMINISTIC CHAOS	
<i>Arzhanukhina D.S., Kuznetsov S.P.</i> System of three non-autonomous oscillators with hyperbolic chaos. Chapter 2. The model with DA-attractor.....	163
<i>Zinchenko A.Yu.</i> Investigation of regular and chaotic dynamics of one financial system	173
NONLINEAR DYNAMICS AND NEUROSCIENCE	
<i>Kryukov A.K., Osipov G.V.</i> Oscillatory media properties influence on excitation propagation.....	188
AUTOWAVES. SELF-ORGANIZATION	
<i>Kiyashko S.V., Afenchenko V.O., Nazarovskiy A.V.</i> Spiral structures from heavy particles at parametrical excitement of standing capillary waves.....	201
HISTORY	
<i>Andrushkevich V.S.</i> War-scorched kids: Mixed notes of memory.....	209
Author's rules	218
The Letter to the Journal Department	219



КОЛЕБАНИЯ В ГЕНЕРАТОРЕ О-ТИПА ПРИ ВОЗБУЖДЕНИИ ОБЪЕМНО-ПОВЕРХНОСТНОЙ МОДЫ РЕЗОНАТОРА С ПЕРИОДИЧЕСКИ НЕОДНОРОДНОЙ ГРЕБЕНКОЙ

*Э. М. Хуторян, С. С. Пономаренко, С. А. Кишко,
К. А. Лукин, А. Н. Кулешов, Б. П. Ефимов*

Рассмотрен режим одновременного существования объемной и поверхностной волны в генераторе О-типа с периодически неоднородной гребенкой. Проведено сравнение зависимостей сопротивления связи и добротности колебаний для режимов существования объемных волн, поверхностных и гибридного режима.

Ключевые слова: Лампа обратной волны, клинотрон, электронный поток, ладертрон, неоднородная решетка, поверхностная волна, объемная волна.

Введение

В настоящее время существует дефицит компактных приборов в терагерцовом (ТГц) диапазоне с высокими КПД [1]. Одним из путей освоения этого диапазона является использование приборов, успешно зарекомендовавших себя в соседних диапазонах. Одним из таких приборов является лампа обратной волны (ЛОВ) [2–6]. Частота генерации в ЛОВ перестраивается ускоряющим напряжением в широких пределах. Резонансные ЛОВ характеризуются малой длиной замедляющей системы, пониженным пусковым током, повышенной мощностью и КПД, а также большей стабильностью частоты [4–6]. В диапазоне перестройки частоты ускоряющим напряжением может нарушаться непрерывность генерации, однако, при последовательном возбуждении резонансных мод резонатора поверхностной волны диапазон частотной перестройки является достаточно широким. Наиболее удачной модификацией резонансной ЛОВ является клинотрон, в котором электронный поток (ЭП) наклонен по отношению к поверхности «гребенки» [7–9]. В миллиметровом диапазоне клинотрон является резонансным прибором с добротностью, достигающей сотен единиц, а полоса непрерывной перестройки клинотрона может достигать 20% [7,10].

При применении ЛОВ в ТГц-диапазоне возникает ряд проблем, таких как уменьшение локализации высокочастотного (ВЧ) поля над гребенкой, и, следовательно, возникает необходимость применения высокоинтенсивных ЭП и больших

магнитных полей [7,11]. Также с увеличением частоты омические потери замедляющей системы (ЗС) увеличиваются. При этом прямая поверхностная волна, не взаимодействующая с ЭП, сильно затухает при распространении от пушечного конца к коллекторному, вследствие чего ухудшается добротность резонатора поверхностной волны, увеличивается стартовый ток и падает выходная мощность. В отличие от поверхностных волн, объемные волны обладают значительно меньшими омическими потерями, однако у них сопротивление связи с ЭП также значительно меньше. Приборы, работающие на объемных волнах, такие как ладертрон, генератор дифракционного излучения (ГДИ) и оротрон, в миллиметровом диапазоне имеют примерно такую же мощность, как и клинотрон [12,13].

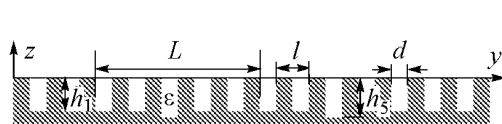
Для снижения омических потерь при высоком сопротивлении связи в данной работе предлагается использовать волновод с периодически неоднородной гребенкой (в [14] такая ЗС предлагалась для вывода мощности), в спектре которой возникают объемные волны. Наличие верхней стенки обеспечивает обратную связь (ОС) по объемной волне. Такой режим работы описанного прибора может быть отнесен к гибриду клинотрона и ладертрона. Как будет показано ниже, в такой системе возможно управление сопротивлением связи и затуханием в широких пределах, что позволит выбирать оптимальные режимы работы в зависимости от параметров прибора (скорость и ток ЭП, длина ЗС и др.). Кроме того, в таком режиме возможна оптимизация связи с нагрузкой за счет отверстия в верхней стенке, подобно тому, как это реализуется в ГДИ и оротроне [12,13]. Также в такой системе спектр пространственных гармоник уплотняется, и при определенных условиях становится возможным взаимодействие ЭП как с прямой, так и с обратной волной, что также может привести к дополнительной резонансной ОС и, следовательно, к снижению стартового тока.

1. Свойство холодной структуры и метод заданного тока

Решение задачи дифракции плоской волны над неоднородно-периодическими структурами проводилось в [15–17]. Проведем решение задачи дифракции волны тока: пусть над структурой, показанной на рис. 1, движется модулированный ЭП с плотностью тока: $j = I_0 \delta(z) e^{i(\frac{\omega}{v_e} y - \omega t)}$ (при этом связь I_0 с током пучка I_e дается выражением $I_0 = I_e e^{h_e a_0} \int_{a_0}^{a+a_0} e^{-h_e z} dz$). В канавках гребенки находится диэлектрик с проницаемостью ε . Разлагая полное поле над гребенкой в ряд Фурье по пространственным гармоникам с периодом L

$$H_x = e^{ik_0 y} \sum_{r=-\infty}^{\infty} A_r e^{ir \frac{2\pi}{L} y} e^{iq_r z},$$

в канавках представляя в виде ряда по волноводным модам



$$H_x = \sum_{n=0}^{\infty} D_{nq} \cos \sqrt{k^2 - \left(\frac{n\pi}{d}\right)^2} (z + h_p),$$

$$y = ql \div ql + d$$

Рис. 1. Неоднородная гребенка с периодом неоднородности $L = 5l$, где l – малый период решетки

и используя метод перерасложений, в длинноволновом приближении ($d \ll \lambda$)

получаем следующую систему уравнений для определения коэффициентов разложения поля [18]:

$$\sum_{p_0=1}^5 D_{p_0} \left[\delta_{p_0} \cos(\sqrt{\varepsilon} k h_p) + i \frac{k d}{L} \sin(\sqrt{\varepsilon} k h_p) \sum_{r=-\infty}^{\infty} \left(\frac{\sin(k_r d/2)}{k_r d/2} \right)^2 \frac{e^{i k_r (p-p_0) l}}{q_r} \right] = j_0 e^{i p l},$$

$$p = 1, \dots, 5, \quad (1)$$

где v – скорость электронов; $k_0 = \omega/v$; $q_r = \sqrt{k^2 - k_r^2}$; $k_r = k_0 + r 2\pi/L$; $k = \omega/c$.

При нулевой правой части уравнение (1) переходит в дисперсионное уравнение для неоднородной гребенки. Дисперсионная характеристика открытой системы показана на рис. 2 и разбивается на 5 ветвей. Как видно, в области существования объемных (вытекающих) волн ($k_0 < k$) волновое число комплексное и волна при распространении вдоль гребенки теряет энергию на излучение.

Интенсивность (в дальней зоне) излучения модулированного ЭП, движущегося над гребенкой, полученная из решения (1), в зависимости от частоты и скорости показана на рис. 3. Известно, что ЭП может возбуждать излучение Смита–Парселла (ИСП) на частотах $\frac{c}{l(1+1/\beta)} < f < \frac{c}{l(1-1/\beta)}$, где $\beta = v/c$. Из рис. 3 видно, что кроме ИСП (при $l = 0.28$ мм и $\beta = 0.12$, 114 ГГц $< f_{\text{ИСП}} < 146$ ГГц) в такой системе существует излучение, связанное с собственными вытекающими волнами неоднородной гребенки, которое может быть намного больше ИСП по интенсивности, что указывает на возможность применения неоднородных гребенок для диагностики ЭП. Если в канавках гребенки поместить диэлектрик с потерями, то, как видно, интенсивность ИСП практически не меняется, тогда как интенсивность излучения, возникающего из-за собственных вытекающих волн, существенно снижается из-за их высокой чувствительности к потерям.

Рассмотрим волновод с гребенкой и верхней стенкой на расстоянии D от гребенки. Объемные гармоники гребенки будут отражаться от верхней стенки, и волна не будет излучаться в свободное пространство. При этом волновые числа становятся действительными, а верхняя стенка образует ОС по объемной волне. В поле над гребенкой появляется волна, отраженная от верхней стенки. Дисперсионное уравнение, так же, как и в случае открытой гребенки получается методом перерасложения и

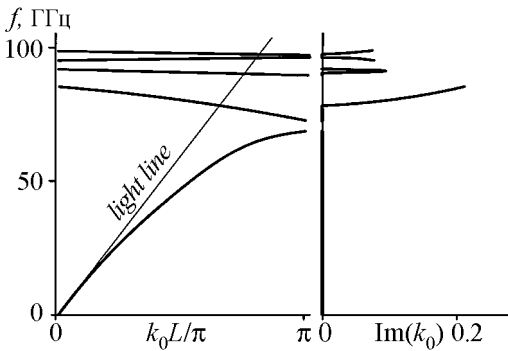


Рис. 2. Дисперсия неоднородной гребенки; $l = 0.28$ мм, $h_1 = 0.66$ мм, $h_5 = 1.4h_1$

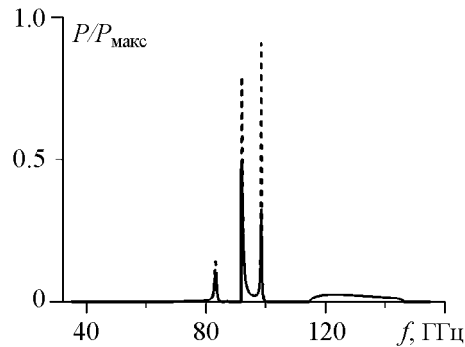


Рис. 3. Интенсивность излучения модулированного ЭП, полученная из решения (1), $\beta = 0.12$. Штриховые кривые $\text{Im } \varepsilon = 0$, сплошные – $\text{Im } \varepsilon = 0.002$

имеет вид

$$\sum_{p_0=1}^5 D_{p_0} \left[\delta_p^{p_0} \cos(kh_p) + \frac{kd}{L} \sin(kh_{p_0}) \sum_{r=-\infty}^{\infty} \left(\frac{\sin(k_r d/2)}{k_r d/2} \right)^2 \frac{e^{ik_r(p-p_0)l}}{\tan(q_r D) q_r} \right] = 0, \quad (2)$$

$$p = 1, \dots, 5.$$

Дисперсия такой структуры показана на рис. 4. Для такой структуры появляются области с нулевой групповой скоростью не на концах зоны Бриллюэна. В этих точках энергия, переносимая объемной гармоникой, равна энергии, переносимой поверхностными гармониками. При этом для односкоростного ЭП возможно взаимодействие с несколькими модами такой структуры.

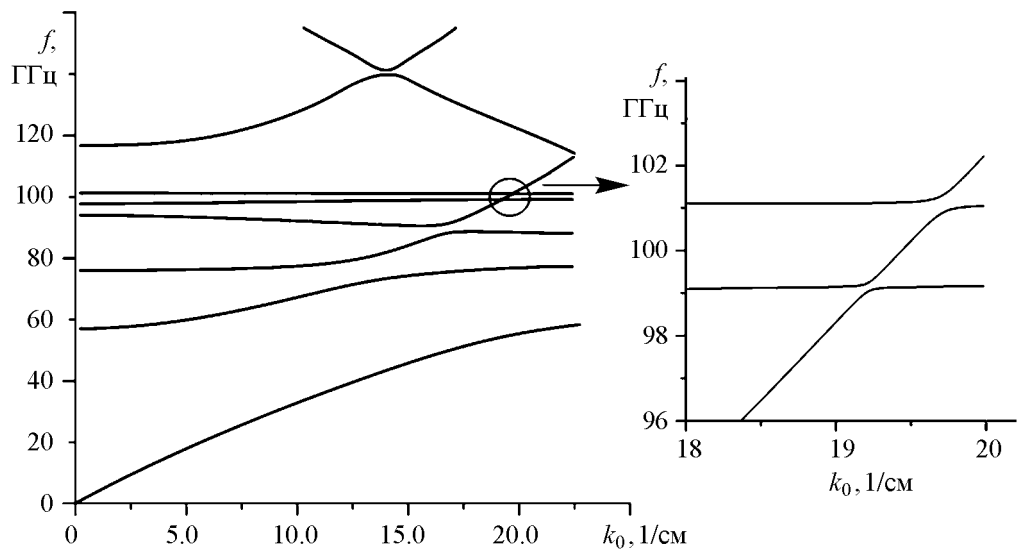


Рис. 4. Дисперсия волновода с неоднородной гребенкой без потерь

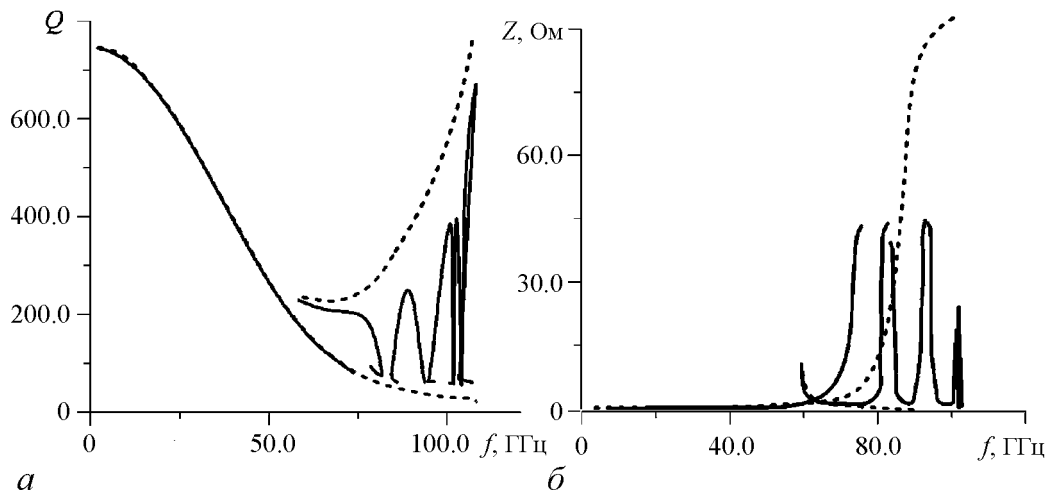


Рис. 5. Зависимость от частоты добротности (а) и сопротивления связи (б) для волновода с однородной (штриховая линия) и неоднородной (сплошная) гребенкой

Как известно, омические потери гребенки сильно увеличиваются при приближении к л-виду, главным образом, из-за потерь в канавке. Для простоты, вместо омических потерь рассмотрим затухание волны при введении в канавки гребенки диэлектрика с потерями ($\text{Re } \varepsilon = 1, \text{Im } \varepsilon \neq 0$). При этом волновое число станет комплексным. В точках дисперсии, где появляется загиб дисперсионной кривой (междутиповая связь мод [17]), увеличивается сопротивление связи, но также увеличиваются потери и соответственно уменьшается добротность данной моды. При этом перемещением верхней стенки можно менять сопротивление связи и добротность в широких пределах. Следует отметить, что, переходя к спектральному параметру частоты в уравнении (1), мы считаем постоянную распространения действительной, что эквивалентно тому, что в резонаторе, образованном отрезком волновода с идеальными отражателями на концах, структура моды фиксирована [16]. Тогда сопротивление связи Z и омическая добротность Q вычисляются следующим образом:

$$Z_r = |E_{yr}|^2 / (2k_r P), \quad Q = f' / (2f''),$$

и в зависимости от частоты показаны на рис. 5 для однородной и неоднородной гребенки (f', f'' – действительная и мнимая части частоты при действительной постоянной распространения, P – поток мощности волны). Как видно из рис. 5, в волноводе с однородной гребенкой существуют два режима: режим поверхностных волн (ЛОВ) с нулевой частотой отсечки и режим объемных волн (ГДИ, оротрон, ледатрон), частота отсечки которого для данных параметров волновода составляет около 58 ГГц. В неоднородной гребенке кроме этого существует гибридный режим, когда мощность, переносимая объемной волной, и мощность, переносимая поверхностной волной, сравнимы. Из данных зависимостей видно, что в случае неоднородной гребенки возможен режим с высокой добротностью и относительно высоким сопротивлением связи. Исследуем физическую причину существования этого режима.

Так как у неоднородной гребенки есть собственные вытекающие волны, то следует ожидать, что они будут возбуждаться при падении объемной волны. Рассмотрим дифракцию плоской волны на неоднородной гребенке: волна единичной амплитуды падает под углом α к гребенке: $H_x = e^{i(ky \sin \alpha - kz \cos \alpha - \omega t)}$. Отличие данной задачи от (1), где решалась задача о дифракции собственного поля ЭП, состоит в правой части [18]. Если материал гребенки не диссипативный, то коэффициент отражения будет равен единице. При малых диссипациях, объемная волна их почти не «замечает», тогда как поверхностная волна сильно чувствительна к ним. В результате, если падающая волна возбуждает поверхностные вытекающие волны, то коэффициент отражения будет меньше единицы из-за потерь энергии поверхностной волны, и таким образом можно судить о преобразовании объемной волны в поверхностную. Угол падения и частота, при которых происходит эффективное возбуждение вытекающей волны, можно найти из пересечения дисперсионной кривой

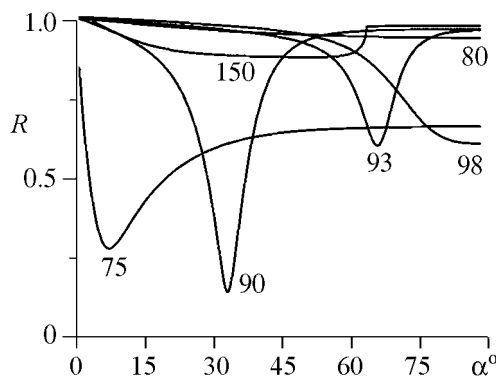


Рис. 6. Коэффициент отражения нулевой гармоники в зависимости от угла падения α плоской волны (цифрами обозначена частота волны)

открытой гребенки (см. рис. 2) и пересечения прямой $f = \frac{c \sin \alpha}{2L} \frac{k_0 L}{\pi}$, соответствующей падающей волне. Зависимость отраженной нулевой гармоники от угла падения (при разных частотах) показана на рис. 6. Видно, что существует резонансный угол (частота), при котором объемная волна эффективно возбуждает поверхностную. Заметим, что подобная интерпретация преобразования энергии падающей волны в энергию собственных волн была проведена в [20].

В волноводе с гребенкой существуют ветви дисперсии, соответствующие объемным волнам волновода и вытекающим волнам гребенки. При распространении объемной волны в волноводе с волновым числом, далеким от волнового числа собственной волны гребенки, поверхностная волна не возбуждается. При сближении волновых чисел объемной волны волновода и собственной волны гребенки возникает резонансное преобразование объемной волны в поверхностную, в результате чего существует объемная гармоника и поверхностные волны, и резкий перегиб дисперсионной кривой. В точке перегиба часть мощности переносится объемными гармониками, а часть – поверхностными, и такую моду уже нельзя считать чисто объемной или поверхностной. В этой точке наличие объемной волны приводит к уменьшению затухания, а большие амплитуды поверхностных гармоник приводят к относительно большому сопротивлению связи. В результате такой режим может быть более выгодным, чем режим чисто объемных волн (ладертрон) или режим чисто поверхностных волн (ЛОВ). Следует отметить, что, в силу резонансности, такой режим реализуется в очень узком диапазоне по частоте. Как видно из дисперсионных кривых, частота такого режима зависит от расстояния между стенками волновода (резонансное условие определяется расстоянием между отражателями), то есть подобно ГДИ (ладертрону) возможна механическая перестройка частоты. При этом, несмотря на многомодовость (объемной волны по продольному индексу), связь ЭП будет только с одной модой. Групповая скорость равна нулю в случае, если энергии объемной и поверхностной волны равны и распространяются в разные стороны. Также видно, что в области многоволновой дифракции групповая скорость равна нулю, когда вышесказанное относится к двум гармоникам объемных волн.

В режимах существования объемных волн вывод энергии возможен через отверстие в верхней стенке, что улучшает связь с нагрузкой по сравнению со стандартным волноводным выводом [7]. Обратим внимание на еще одно схожее свойство ГДИ и клинотрона с неоднородной гребенкой: существование низкочастотных границ зоны Бриллюэна (в клинотроне с однородной гребенкой существует только высокочастотная граница). То есть возможно резонансное возбуждение колебаний при больших потерях – ЭП взаимодействует как с обратной, так и с прямой волной [19]. Как видно из дисперсии, такой режим является узкополосным (слабо перестраивается верхней стенкой), а резонансное условие определяется расстоянием между отражателями на концах гребенки.

2. Взаимодействие ЭП с полями неоднородной гребенки

Рассмотрим стартовые условия при взаимодействии ЭП с «холодными» модами отдельно для каждой ветви дисперсионной характеристики. Рассмотрим резонансный случай, то есть наличие идеально отражающих стенок при $y = 0$ и $y = L$. Запишем уравнения возбуждения для лампы обратной волны с отражениями от гра-

ниц. Электрическое поле представляется суммой прямой и обратной волны

$$\vec{E} = C^+(y, t)\vec{E}_p(y, z, k)e^{i(ky-\omega t)} + C^-(y, t)\vec{E}_{-p}(y, z, k)e^{i(-ky-\omega t)}.$$

Преобразования обратной волны в прямую и наоборот описываются с помощью коэффициентов отражения от начала и конца гребенки R_1 и R_2 :

$$\begin{aligned} C^+(0, t) &= R_1 C^-(0, t), \\ C^-(L_1, t) &= R_2 C^+(L_1, t)e^{i2k_0 L_1} + C_0. \end{aligned}$$

Распространение обратной и прямой волны подчиняется нестационарным уравнениям [2, 4, 20]

$$\begin{aligned} v_{\text{gr}}^{-1} \frac{\partial \tilde{N}^-}{\partial t} - \frac{\partial \tilde{N}^-}{\partial y} + \gamma C^- &= \frac{2}{N_{-p}} \int_S \overline{\vec{j}(t) \vec{E}_{-p}^*} e^{i\omega t} dS, \\ v_{\text{gr}}^{-1} \frac{\partial \tilde{N}^+}{\partial t} - \frac{\partial \tilde{N}^+}{\partial y} + \gamma C^+ &= 0, \end{aligned} \quad (3)$$

где γ постоянная затухания, v_{gr} – групповая скорость волны, E_p – электрическое поле p -й моды. В случае, когда групповая скорость волны стремится к нулю, следует использовать уравнения взаимодействия ЭП с полями вблизи границы зоны Бриллюэна [19].

Ток ЭП $\vec{j}(r, t)$ находится из решения системы трехмерных уравнений для N крупных частиц с правой частью, состоящей из электрического ВЧ-поля, синхронного с ЭП, и фокусирующего магнитного поля:

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{v}_i}{dt} &= -\frac{e}{m} \left\{ \text{Re} \vec{E} + \frac{[\vec{v}_i \cdot (\vec{y}B \cos \alpha - \vec{z}B \sin \alpha)]}{c} \right\}, \\ |\vec{v}_i|_{(y=0)} &= v_e = \beta c, \\ \vec{j}(r, t) &= \frac{2\pi J}{\omega N} \sum_{i=1}^N \vec{v}_i(r, t) \delta(r - r_i). \end{aligned} \quad (4)$$

Стартовый ток определяется в стационарном режиме из условия бесконечности коэффициента усиления: $C^-(0)/C_0 = \infty$ и в безразмерном виде показан на рис. 7 в зависимости от частоты (скорость ЭП менялась до $\beta = 0.15$) для каждой ветви дисперсии отдельно. Уравнения (4) численно решались в предположении бесконечного магнитного поля, с учетом пространственного заряда. Длина системы была выбрана $L_1 = 30$ мм, период $l = 0.28$ мм, ЭП толщиной 0.15 мм, с прицельным расстоянием 0.05 мм и углом наклона 0.3° , диэлектрические потери $\text{Im} \varepsilon = 0.005$. Для сравнения показан стартовый ток

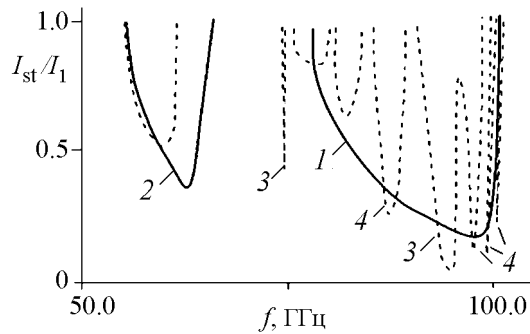


Рис. 7. Зависимость стартового тока от частоты. Сплошная кривая – однородная гребенка, штриховая – неоднородная. Скорость ЭП $\beta = 0.08 \dots 0.15$

для стандартного клинотрона с однородной гребенкой. Отметим, что нашей целью было качественно рассмотреть различные режимы клинотрона с неоднородной гребенкой и, соответственно, оптимизация параметров ЭП и электродинамической системы проведена не была. Зоны, обозначенные 1, соответствуют режиму «ЛОВ». За счет сильного затухания прямой волны, такой режим не резонансный. Зоны 2 соответствуют режиму ладертрона. Зоны 3 – взаимодействию ЭП с обратной и прямой волной вблизи низкочастотной полосы отсечки; 4 – резонансному рассеянию волноводной волны на гребенке. Видно, что, действительно, в клинотроне с неоднородной гребенкой в узкой полосе частот стартовый ток может быть меньше, чем в обычном клинотроне. Частота генерации может перестраиваться механически изменением расстояния между гребенкой и верхней стенкой, а также длиной гребенки (подстроечным поршнем [7]). В режиме 3 разность между скоростями обратной и прямой волны $\Delta v/v = [\omega/(2\pi n/L - k_0) - \omega/(2\pi n/L + k_0)]/v \approx L/nL_1 \ll 1$ при $k_0 = \pi/L_1$. Стоит отметить, что этот режим, когда ЭП взаимодействует с обратной и прямой волнами, более выгоден для клинотрона, а не для ЛОВ, из-за различия мощности пространственного спектра при взаимодействии волны с прямым и наклонным ЭП [8]. В результате в клинотроне происходит эффективное взаимодействие как с прямой, так и с обратной волной, тогда как в ЛОВ, из-за узости пространственного спектра, взаимодействие с прямой волной менее эффективно.

Теоретическое рассмотрение процессов генерации в таком приборе имеет ряд особенностей. Самосогласованные уравнения возбуждения для клинотрона с неоднородной гребенкой намного сложнее, чем с однородной, по следующим причинам.

- Взаимодействие ЭП возможно с несколькими модами, соответствующими различным ветвям дисперсии, то есть возможны конкуренция колебаний и многочастотный режим.

- Дисперсионная зависимость при междутиповой связи объемной волноводной волны и собственной волны гребенки имеет резкие перегибы и изменения сопротивления связи и постоянной затухания, в результате чего в уравнениях возбуждения надо учитывать несколько членов разложения в ряд Тейлора по волновому числу. В перегибах поверхностная волна переходит в объемную и наоборот, то есть меняется распределение поля, что также необходимо учитывать при выводе уравнений возбуждения.

- В силу более сгущенного пространственного спектра, при некоторых условиях ЭП может взаимодействовать с несколькими гармониками одной моды.

В связи с этим при теоретическом рассмотрении следует модернизировать существующую теорию. Полезными при этом могут оказаться такие солверы, как MAGIC, CST и др.

Заключение

Показано, что в терагерцовом клинотроне с неоднородной гребенкой существует «гибридный» режим поверхностной-объемной волны (ЛОВ-ладертрон). В таком режиме появляется возможность регулировать добротность и сопротивление связи в широких пределах, обеспечивая оптимальные условия для стартового тока и вывода ВЧ-мощности в нагрузку. Преимущества этого режима проявляются при уве-

личении частоты генерации, когда омические потери возрастают пропорционально \sqrt{f} , а также увеличивается число периодов ЗС.

В клинотроне с многоступенчатой гребенкой спектр пространственных гармоник уплотняется и при определенных условиях становится возможным взаимодействие ЭП как с прямой, так и с обратной волной, что также может привести к снижению стартового тока.

В системе с многоступенчатой гребенкой возможно взаимодействие электронного потока с несколькими модами (соответствующими различным ветвям дисперсии), то есть возможны конкуренция колебаний и многочастотный режим.

По результатам расчетов готовится эксперимент на 100-гигагерцовом клинотроне с неоднородной гребенкой.

Библиографический список

1. *Yun-Shik Lee*. Principles of Terahertz Science and Technology. Springer, 2009.
2. *Шевчик В.Н., Трубецков Д.И.* Электроника лампы обратной волны. Саратов: Саратовский университет, 1975.
3. *Mineo M. and Paoloni C.* Double corrugation rectangular waveguide slow-wave structure for THz vacuum devices // IEEE Trans. Electron Devices. 2010. Vol. 57, № 11. P. 3169.
4. *Levush B., Antonsen T.M., Bromborsky A., Lou W.R., Carmel Y.* //IEEE on Plasma Science. 1992. Vol. 20, № 3.
5. *Nusinovich G. S., Bliokh Yu.P.* // Physics of Plasmas. 2000. Vol. 7, № 4. P. 1294.
6. *Efimov B.P., Lukin K.A., Rakityanskiy V.A.* Transformation of chaotic oscillation spectrum by reflection // J. of Tech. Physics. 1988. Vol. 58, № 12. P. 2398.
7. *Левин Г.Я., Бородкин А.И., Кириченко А.Я., Усиков А.Я., Чурилова С.А.* Клинотрон / Под. ред. А.Я. Усикова. Киев: Наук. думка, 1992. С. 200.
8. *Schunemann K. and Vavriv D.M.* // IEEE Trans. Electron Devices. 1999. Vol. 46. 2245.
9. *Мильчо М.В., Ефимов Б.П., Завертанный В.В., Гончаров В.В.* Особенности режимов работы генераторов типа клинотрон // Радиофизика и электроника. Харьков: ИРЭ НАН Украины. 2005. Т. 10, № 3. С. 435.
10. *Лысенко Е.Е., Пишко О.Ф., Чумак В.Г., Чурилова С.А.* Добротность резонансной линии клинотронов миллиметрового диапазона // Радиофизика и радиоастрономия. 2001. Т. 6, № 4. С. 317-322.
11. *Завертанный В.В., Кишко С.А., Пономаренко С.С., Ефимов Б.П., Забродский А.Ф., Кириченко Л.А., Кудинова Т.В., Кулешов А.Н.* Магнитная фокусирующая система интенсивных электронных пучков для клинотронов субмиллиметрового диапазона // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2012. Т. 20, № 5. С. 112.
12. *Шестопалов В.П., Вертий А.А., Ермак Г.П. и др.* Генераторы дифракционного излучения. Киев: Наук. Думка, 1991. 317 с.
13. *Bratman V.L., Dumesh B.S., Fedotov A.E., Grishin Yu. A., and Rusin F.S.* Broad band orotron operation at millimeter and submillimeter waves // International Journal of Infrared and Millimeter Waves. Vol. 23, № 11. November 2002.
14. *Лысенко Е.Е., Пишко О.Ф., Чурилова С.А.* Экспериментальное исследование

- клиноотрона с распределенным квазиоптическим выводом энергии // Радиофизика и Радиоастрономия. 1999. Т. 4, № 1. С. 13.
15. *Кравченко В.Ф., Сук А.Ф.* Дифракционные свойства многоэлементных периодических структур из металлических идеально проводящих брусьев // ДАН УССР. 1974, сер. А, № 10. С. 3.
 16. *Шестопалов В.П., Сиренко Ю.К.* Динамическая теория решеток. Киев: Наук. думка, 1989. 216 с.
 17. *Колмакова Н.Г., Перов А.О., Сенкевич С.Л., Кириленко А.А.* Аномальное прохождение ЭМВ сквозь запердельные отверстия и собственные колебания волноводных объектов и периодических структур // Изв. вузов. Радиоэлектроника. 2011, Т. 54, № 3.
 18. *Шестопалов В.П., Литвиненко Л.Н., Масалов С.А., Сологуб В.Г.* Дифракция волн на решетках. Харьков: Изд-во Харьк. ун-та, 1973. 288 с.
 19. *Кузнецов А.П., Кузнецов С.П.* Нелинейные нестационарные уравнения взаимодействия электронного потока с электромагнитными полями вблизи границы зоны Бриллюэна // Изв. вузов. Радиофизика. 1984. Т. 17, № 12. С. 1575.
 20. *Трубецков Д.И., Храмов А.Е.* Лекции по сверхвысокочастотной электронике для физиков. В 2 т. Т. 1. М.: Физматлит, 2003. 496 с.

*ИРЭ им. А.Я. Усикова
НАН Украины, Харьков*

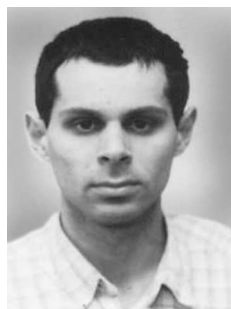
*Поступила в редакцию 12.08.2012
После доработки 1.04.2013*

AUTOOSCILLATIONS IN O-TYPE OSCILLATOR AT EXCITATION OF SPACE-SURFACE MODE IN RESONATOR WITH A PERIODICALLY INHOMOGENEOUS GRATING

*E. M. Khutoryan, S. S. Ponomarenko, S. A. Kishko,
K. A. Lukin, A. N. Kuleshov, B. P. Yefimov*

The regime of the simultaneous existence of space and surface waves in the O-type oscillator with a periodically inhomogeneous comb has been considered. The impedance and quality factor dependences for space waves, surface waves and hybrid mode have been compared.

Keywords: Backward wave oscillator, clinotron, electron beam, ledatron, inhomogeneous grating, surface waves, space waves.



Хуторян Эдуард Михайлович родился в 1979 году в Харькове, окончил Харьковский национальный университет им. В.Н. Каразина (2000). После окончания ХНУ работает в ИРЭ НАНУ научным сотрудником. Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук в ИРЭ НАНУ (2011) по специальности физическая электроника. Опубликовал 20 научных статей.

61085 Украина, Харьков, ул. Академика Проскуры, 12
Институт радиофизики и электроники им. А.Я. Усикова НАН Украины
E-mail: edkhut@gmail.com



Кишко Сергей Александрович родился в городе Горловка Донецкой области Украины (1989). Окончил Харьковский национальный университет им. В.Н. Каразина (2011). После окончания ХНУ им. В.Н. Каразина поступил в аспирантуру ИРЭ НАНУ. Опубликовал 2 научные статьи.

61085 Украина, Харьков, ул. Академика Проскуры, 12
Институт радиофизики и электроники им. А.Я. Усикова НАН Украины
E-mail: sergeykishko@gmail.com



Пономаренко Сергей Станиславович родился в Феодосии (1989). Окончил Харьковский национальный университет им. В.Н. Каразина (2011). После окончания ХНУ им. В.Н. Каразина поступил в аспирантуру ИРЭ НАНУ. Опубликовал 3 научные статьи.

61085 Украина, Харьков, ул. Академика Проскуры, 12
Институт радиофизики и электроники им. А.Я. Усикова НАН Украины
E-mail: sergyponomarenko@gmail.com



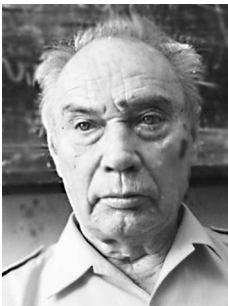
Лукин Константин Александрович родился в 1951 году, получил диплом радиофизики и электроники в Харьковском государственном университете (1973). Работает в Институте радиофизики и электроники, ИРЭ НАНУ, Харьков. Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук в Московском государственном университете (МГУ, 1980). Докторскую диссертацию по физической электронике защитил в Харьковском государственном университете (1989). Работал и сделал заметный вклад в области вакуумной электроники миллиметрового диапазона волн, обработки случайных сигналов, динамическому хаосу и шумовой радиолокации. Является автором и соавтором более 100 публикаций в журналах и монографии в области радиофизики и электроники.

61085 Украина, Харьков, ул. Академика Проскуры, 12
Институт радиофизики и электроники им. А.Я. Усикова НАН Украины
E-mail: lukin.konstantin@gmail.com



Кулешов Алексей Николаевич родился в Харькове (1978), окончил Харьковский национальный университет им. В.Н. Каразина (2000). После окончания ХНУ работает в ИРЭ НАНУ научным сотрудником. Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук в ИРЭ НАНУ (2010) в области формирования и транспортировки электронных потоков для приборов на магнитотормозном излучении. Опубликовал 20 научных статей.

61085 Украина, Харьков, ул. Академика Проскуры, 12
Институт радиофизики и электроники им. А.Я. Усикова НАН Украины
E-mail: jeanalexkh@gmail.com



Ефимов Борис Петрович родился в Томске (1933), окончил Харьковский авиационный институт (1959). После окончания ХАИ работает в ИРЭ НАНУ ведущим научным сотрудником. Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата технических наук в ХИРЭ (1970) и доктора технических наук (1988) в области генерации когерентных и стохастических колебаний в миллиметровом и субмиллиметровом диапазонах, радиофизика и электроника. Автор 25 авторских свидетельств и более 150 научных статей.

61085 Украина, Харьков, ул. Академика Проскуры, 12
Институт радиофизики и электроники им. А.Я. Усикова НАН Украины
E-mail: yefimov@ire.kharkov.ua



ДЕЙСТВИЕ СЛУЧАЙНЫХ ДАЛЬНИХ СВЯЗЕЙ НА СИСТЕМУ С ФАЗОВОЙ МУЛЬТИСТАБИЛЬНОСТЬЮ

А. В. Шабунин

Рассматриваются закономерности разрушения фазовой мультистабильности в ансамблях осцилляторов с удвоениями периода под действием дальних связей, возникающих случайным образом между произвольными ячейками. Исследования проводятся на примере ансамбля осцилляторов Ресслера с периодическими граничными условиями, в которой наряду с локальными связями между элементами действуют дальнедействующие глобальные связи. Определяется последовательность бифуркационных переходов, происходящих при увеличении силы глобальных связей, которая завершается установлением пространственно-однородных синфазных колебаний.

Ключевые слова: Фазовая мультистабильность, синхронизация, сети.

Введение

В последние годы, наряду с изучением распределенных систем с простой структурой связей между элементами, все больший интерес привлекают к себе сети со сложной топологией. Один из видов таких сетей – системы «малых миров» (small world networks), в которых наряду с регулярными локальными связями возникают спонтанные дальнедействующие связи между элементами. Интерес к подобным системам спровоцирован революцией в сфере информационных технологий, поскольку, наряду с возможностью их использования для биофизики, моделирования химических реакций, электронных цепей, модели «малых миров» очень хорошо описывают информационные системы и социальные сети. Первые исследования систем «малых миров» начались с конца 1990-х годов [1] и были посвящены, как правило, изучению процессов синхронизации и самоорганизации [2–4]. Общий обзор свойств динамики подобных систем в зависимости от топологии связей приводится в работе [5].

Наличие дальнедействующих связей может существенно влиять не только на синхронизацию, но и на другие явления, характерные для взаимодействующих систем. Одним из таких феноменов является фазовая мультистабильность [6], при ко-

торой в ансамбле осцилляторов сосуществует несколько аттракторов, соответствующих разным значениям установившихся разностей фаз между колебаниями подсистем. Фазовая мультистабильность достаточно хорошо изучена в цепочках осцилляторов с простым поведением, где она реализуется в виде иерархии режимов бегущих волн [7–11]. В системах с более сложным поведением фазовая мультистабильность может приводить к неограниченному росту числа сосуществующих колебательных режимов, как это происходит в связанных системах с бифуркациями удвоения периода [12–17]. Развитие фазовой мультистабильности в ансамблях с большим числом автогенераторов со сложной динамикой исследовано в ряде работ [18–20]. В работе [21] рассматривался постепенный переход от регулярных бегущих волн к хаотическим в ходе каскада бифуркаций удвоения периода.

Известные на сегодняшний день работы по фазовой мультистабильности рассматривают это явление в ансамблях осцилляторов с локальными связями. Возможно ли это явление при других типах связей, например, дальнедействующих? Какое влияние такие связи оказывают на мультистабильность при действии наряду с локальными? Каковы результаты конкуренции между двумя типами связи? Эти вопросы пока не исследованы.

В настоящей работе на примере ансамбля осцилляторов Ресслера рассматривается явление фазовой мультистабильности при сосуществующих локальных и дальнедействующих связях. Локальные связи постоянны во времени и регулярны в пространстве, в то время как глобальные связи периодически меняют свою конфигурацию, создавая в каждый момент времени случайную сеть из осцилляторов. Методом компьютерного эксперимента исследуется, к каким эффектам приводит постепенное увеличение силы дальних связей при фиксированных локальных связях. Исследования проводятся как для регулярных периодических колебаний, так и для хаотических режимов.

1. Фазовая мультистабильность в ансамбле осцилляторов Ресслера

Рассмотрим ансамбль из N ($N > 1$) идентичных осцилляторов Ресслера с периодическими граничными условиями, в котором наряду с локальной диффузионной связью присутствуют дальнедействующие связи между элементами, структура которых меняется во времени

$$\begin{aligned} \dot{x}_i &= -y_i - z_i + \gamma(x_{i+1} - 2x_i + x_{i-1}) + \varepsilon(x_I - x_i), \\ \dot{y}_i &= x_i + 0.2y_i, \\ \dot{z}_i &= 0.2 + z_i(x_i - c). \end{aligned} \tag{1}$$

Здесь x_i , y_i и z_i – динамические переменные i -го осциллятора ($i = 1, \dots, N$), c – управляющий параметр, ответственный за бифуркации удвоения периода, $\gamma > 0$ – параметр локальной связи, ε – параметр дальнедействующей связи, которая устанавливается между текущим осциллятором и осциллятором с номером I (правило выбора I будет описано в разделе 2).

Динамика системы (1) при отсутствии дальнедействующих связей ($\varepsilon = 0$) была исследована в работе [22]. При слабой связи в ансамбле наблюдается множество сосуществующих режимов, характеризуемых одинаковой формой колебаний в каж-

дом из осцилляторов, но отличающихся от своих соседей на величину текущей фазы, то есть наблюдается явление фазовой мультистабильности. Под текущей фазой здесь и далее понимается 2π -периодическая величина, пропорциональная текущему времени t в соответствии с формулой, предложенной А. Пиковским [23]

$$\varphi_i(t) = 2\pi \frac{t - t_n^{(i)}}{t_{n+1}^{(i)} - t_n^{(i)}} - \pi. \quad (2)$$

Здесь $t_n^{(i)}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) – момент времени n -го (предыдущего), а $t_{n+1}^{(i)}$ – $n+1$ -го (последующего) пересечения траекторией i -й подсистемы некоторой гиперплоскости.

В работе [11] было показано, что при случайном выборе начальных условий в кольце диффузионно связанных генераторов реализуются только такие режимы, для которых разность фаз между колебаниями соседних осцилляторов $\Delta\varphi_i(t) = \varphi_{i+1}(t) - \varphi_i(t)$ постоянна и не зависит от положения в цепочке

$$\Delta\varphi_i = \Delta\varphi_j = \text{const}. \quad (3)$$

Их можно рассматривать как автоволны с длиной волны $\Lambda = 2\pi/\Delta\varphi$, бегущие вдоль цепочки с постоянной фазовой скоростью $v = 2\pi/(\Delta\varphi T)$. Если число осцилляторов в ансамбле (N) конечно, то и число возможных бегущих волн также конечно и равно N . Значение фазового сдвига для каждой волны рассчитывается по формуле

$$\Delta\varphi^{(k)} = \frac{2\pi k}{N} \pmod{2\pi}. \quad (4)$$

Индекс $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm N/2$ определяет пространственную структуру колебаний цепочки осцилляторов и может использоваться как индекс волны. Значению $k = 0$ соответствует пространственно-однородное состояние, когда колебания в каждом из осцилляторов синфазны, $k = \pm N/2$ относятся к одному и тому же режиму, при котором колебания в соседних осцилляторах противофазны. В остальных случаях каждое положительное значение k соответствует прямой волне, а отрицательное – обратной. Поскольку прямые и обратные волны отличаются только направлением распространения, в дальнейшем будут рассматриваться только прямые волны: $k \geq 0$.

Из анализа устойчивости бегущих волн в квазигармоническом приближении [11, 24] известно, что при положительных значениях диффузионной связи могут быть устойчивыми только те волны, для которых разность фаз между соседними осцилляторами не превосходит $\pi/2$. Это означает, что только волны с $|k| \leq N/4$ могут быть устойчивыми, а с $N/4 < |k| \leq N/2$ – нет. В данной работе для определенности выбрано число осцилляторов, равное тридцати: $N = 30$. В этом случае устойчивыми могут быть режимы с $k = 0, \pm 1, \dots, \pm 7$. Проведенные численные исследования поведения ансамбля

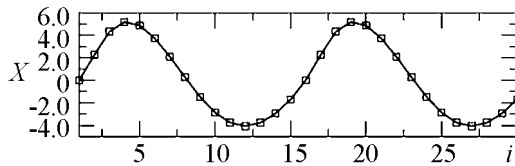


Рис. 1. «Пространственный снимок» бегущей волны с $k = 2$

показали, что при достаточно слабой связи ($\gamma = 0.005$), выбирая специальным образом начальные условия, можно получить каждый из волновых режимов со значениями индекса k из данного диапазона. На рис.1 изображено сечение

Пуанкаре колебаний в каждом из осцилляторов для волны с $k = 2$, которое дает визуальную картину пространственного распределения – «пространственный снимок» режима. Чтобы его получить, использовалась следующая методика:

- строилось сечение Пуанкаре траектории гиперплоскостью $y_1 = 0$, для чего отслеживались моменты времени t_n , в которые переменная y_1 меняет знак с положительного на отрицательный;
- строился график зависимости значений $x_i(t_n)$ от номера осциллятора i : $X(i) = x_i(t_n)$.

Таким образом получался «мгновенный снимок» волны, привязанный к определенному значению фазы одного из генераторов (в данном случае – первого). Полученная картина является стационарной, то есть она воспроизводится во времени. Характер пространственного профиля волн полностью определяется значением индекса k ; последний равен числу максимумов или минимумов на длине цепочки. Например, для изображенного на рис. 1 случая $k = 2$, на длине цепочки укладывается два минимума и два максимума.

Каждая из k -волн является родоначальником семейства колебательных режимов, для которых набег фазы вдоль ансамбля равен $2\pi k$. При увеличении параметра c на базе каждой такой волны происходят бифуркации рождения двумерных торов, синхронизация на торе, и каскад бифуркаций удвоения периода, ведущий к колебаниям более сложной формы, а затем – к хаотическим колебаниям. Например, для волны с $k = 2$ последовательность усложнения колебательных режимов показана на рис.2. Вначале, при $c = 2.85$ наблюдается мягкий переход к квазипериодическим колебаниям в каждом из осцилляторов (рис. 2, *a*). Данный режим, в результате синхронизации на торе сменяется периодическими колебаниями удвоенного периода (рис. 2, *б*), на базе которых через каскад бифуркаций удвоения периода (рис. 2, *в*) развиваются хаотические колебания (рис. 2, *г*).

Семейства пространственно-периодических режимов, образованных на базе бегущих волн с разным индексом k , сосуществуют в фазовом пространстве при слабой, стремящейся к нулю, связи. При конечной силе связи область существования у каждого из режимов своя и зависит от параметра c . Как показывают исследования, чем больше k (или чем короче длина волны) – тем меньше оказывается область существования для данного семейства и тем ближе она «прижимается»

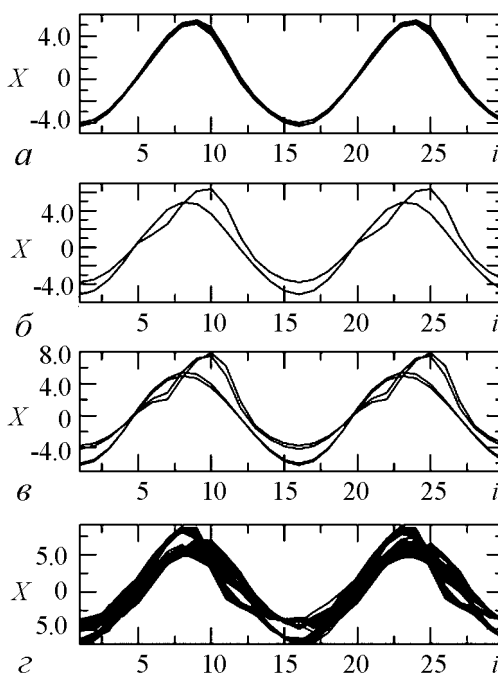


Рис. 2. Пространственные профили колебательных режимов, образованных на базе волны с $k = 2$ при увеличении параметра c : $c = 2.85$ (*a*), 3.05 (*б*), 4.1 (*в*), 4.4 (*г*)

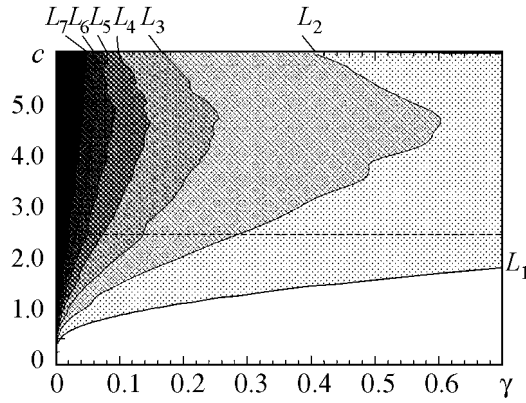


Рис. 3. Расположение режимов с разным набегом фазы (разным значением индекса волны k) вдоль ансамбля на плоскости параметров γ - c . Области с разными k отмечены разными оттенками серого цвета: от белого для $k = 0$ до черного для $k = 7$

к оси $\gamma = 0$. В совокупности, области устойчивости для разных фазовых мод составляют вложенную структуру: области для более коротковолновых режимов располагаются внутри областей для более длинноволновых. Для рассматриваемой системы (1) расположение таких зон устойчивости показано на рис. 3. На нем области устойчивости семейства режимов, образованных на базе каждой из k -волн, ограничены: слева – осью $\gamma = 0$, справа – кривой L_k . Цвет области маркирует длину волны – области более коротковолновых режимов выделены более темным цветом.

2. Разрушение мультистабильности и переход к пространственно-однородным колебаниям под действием «дальних» связей

Рассмотрим теперь, к каким эффектам приводит появление «дальних» связей, действующих наряду с существующими локальными связями в системе (1). Для этого предусмотрим возможность для каждого из N осцилляторов цепочки (1) устанавливать связь с любым другим элементом ансамбля. Сила таких далекодействующих связей определяется параметром ε . Связь устанавливается между текущим осциллятором с номером $i \in [1 : N]$ и осциллятором со случайно выбранным номером $I \neq i$. Составленная таким образом случайная сеть существует в течение фиксированного времени τ , после которого происходит обновление системы связей. Соответственно, индекс I в уравнении (1) – функция времени, принимающая случайные целочисленные значения, изменения которых происходят с периодом τ .

Для начала оценим влияние интервала τ на поведение системы (1) и выберем подходящее значение этого параметра. Его естественно сопоставить с характерным временным масштабом системы, которым является период колебаний в режиме однооборотного предельного цикла (T). Например, условие $\tau \ll T$ соответствует случаю быстроменяющихся связей, когда в течение одного периода функция $I(t)$ может поменять значение несколько раз. Другой крайностью является случай «замороженных связей»: $\tau \rightarrow \infty$, при котором переходные процессы успевают закончиться до перестройки системы связей и I можно рассматривать как постоянную величину. Поскольку при замороженных связях структура сети случайна и постоянна, динамика такой системы будет определяться конкретным выбором структуры связей и не будет воспроизводиться при следующих экспериментах. Соответственно, по одной временной реализации, даже очень длительной, нельзя судить о динамике такой системы. Между этими двумя крайними вариантами располагается случай, когда интервал стационарности принимает значения, близкие к характерному временному масштабу: $\tau \approx T$.

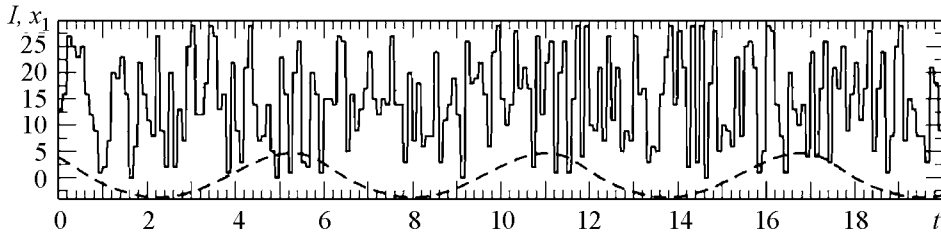


Рис. 4. Зависимость номера осциллятора, связанного с 1-м осциллятором ансамбля, от времени при $\tau = 0.1$. Для сопоставления на графике штриховой линией приведена временная реализация колебаний $x_1(t)$

Для того чтобы оценить влияние интервала τ , были проведены численные исследования с последовательно увеличивающимися значениями данного параметра. Они показали, что величина τ вплоть до очень больших, но конечных значений, практически не влияет на поведение системы (1). Поэтому в дальнейшем τ было фиксировано на значении 0.1, которое удобнее для численного эксперимента. Зависимость индекса I от времени для данного случая отобразена на рис. 4.

Итак, будем исследовать поведение системы (1) в зависимости от ε при фиксированном значении $\tau = 0.1$. Рассмотрим, к каким эффектам приводит введение глобальных связей, когда колебания в каждом из осцилляторов имеют простейший вид – периодические колебания с периодом T . Из анализа уравнений (1) ясно, что при синфазных колебаниях ($k = 0$) динамика системы не зависит от величины связи. Поэтому в качестве исходного режима нужно выбрать одну из пространственно-периодических мод с $k > 0$. Выберем в качестве исходного режима моду с длиной волны $\Lambda = N/2$, что соответствует $k = 2$ (см. рис. 1). Для этого установим значения параметров $c = 2.5$ и $\gamma = 0.005$, и выберем начальные условия из бассейна притяжения данной моды (способ выбора начальных условий приведен в работе [11]). Будем постепенно увеличивать коэффициент дальних связей ε , следя за происходящими изменениями в динамике системы. При малых ε , вплоть до $\varepsilon \simeq 0.0017$ никаких видимых изменений с данным режимом не происходит. Колебания остаются периодическими и пространственно-однородными. При $\varepsilon \simeq 0.0017$ пространственно-периодическая структура нарушается (рис. 5, а). Расчет текущих фаз колебаний показывает, что разность фаз между соседними осцилляторами для данного режима уже не является постоянной величиной: она флуктуирует вокруг среднего значения $\Delta\varphi = 4\pi/N$, как это показано на правой части рис. 5, а. Таким образом, появляется пространственная модуляция разности фаз вдоль цепочки. Изображенное на рисунке распределение разностей фаз не является стационарным, оно движется вокруг ансамбля с постоянной скоростью $v \simeq 0.005$. Это легко заметить, если построить зависимость $\Delta\varphi_i$ для двух разных моментов времени, отстоящих друг от друга на интервал $\Delta t = 500$ (отмечено штриховой линией на рис. 5, а). Соответственно, колебания характеризуются двумя временными масштабами: квазипериодом колебаний в каждом из осцилляторов и временем обхода фазового профиля вдоль кольца – то есть они становятся квазипериодическими.

Дальнейший рост параметра связи ведет к увеличению неоднородности в распределении фазы (увеличению глубины модуляции), что сопровождается выстраиванием осцилляторов в кластеры с синфазным поведением. При $\varepsilon = 0.00237$ колебания

в бóльшей части ансамбля становятся почти синфазными, а вся цепочка распадается на два кластера, границей между которыми являются «фазовые дефекты» – осцилляторы ансамбля, в которых значение разности фаз существенно отличается от разностей фаз между основной частью осцилляторов. Эта граница является подвижной, она вращается вдоль кольца с постоянной фазовой скоростью. Несмотря на то, что бóльшая часть осцилляторов ансамбля колеблется синфазно, за счет наличия дефектов суммарный набег фазы вдоль кольца сохраняется тем же, что и в исходном режиме, то есть равным 4π . Наконец, при $\varepsilon \simeq 0.0024$ происходит необратимый переход на колебательный режим с меньшим значением k : либо на синфазный режим с $k = 0$ (как правило), либо на режим с длиной волны, равной длине цепочки (достаточно редко). Последний случай представлен на рис. 5, *в*.

Описанная выше последовательность качественных изменений в динамике ансамбля воспроизводится и для других пространственных мод: $k = 1, 2, \dots, 7$. В каждом из случаев мы наблюдаем два перехода, каждый из которых происходит при определенном значении ε . При $\varepsilon < \varepsilon_t^{(k)}$ ($\varepsilon_t^{(k)}$ – пороговое значение ε для k -волны) наличие глобальных связей никак не проявляется на видимой динамике ансамбля. При $\varepsilon = \varepsilon_t^{(k)}$ происходит переход к квазипериодическим колебаниям, сопровождающийся модуляцией разности фаз, глубина которой растет с ростом ε . Рост неоднородности в распределении разности фаз вдоль цепочки сопровождается постепенным выравниванием фаз соседних осцилляторов и формированием кластеров синфазного поведения, границами между которыми являются «фазовые дефекты». Число кластеров и дефектов совпадает с индексом k . Наконец, при достижении еще одного порогового

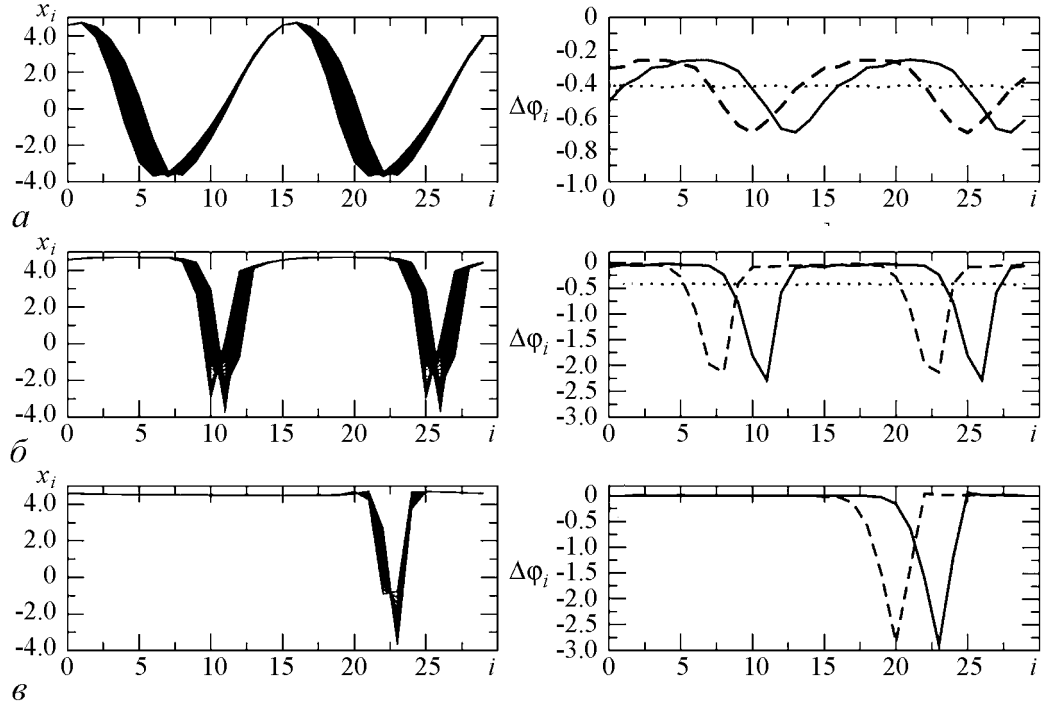


Рис. 5. Профиль бегущей волны (слева) и распределение разностей фаз вдоль цепочки при различных ε : 0.0017 (*а*), 0.00237 (*б*), 0.0024 (*в*). Штриховой линией отмечено распределение разности фаз вдоль ансамбля при $\Delta t = 500$

значения $\varepsilon = \varepsilon_c^{(k)}$ волна с данным k теряет устойчивость и траектория переходит на более длинноволновый режим, чаще всего на пространственно-однородный, при котором колебания во всех осцилляторах синфазны. Далее глобальные связи не оказывают никакого влияния на динамику системы, поскольку при $x_i = x_j$ все слагаемые, соответствующие связям в (1), обнуляются.

Для того чтобы количественно характеризовать глубину модуляции фазы вдоль цепочки, будем использовать величину среднеквадратичного отклонения разности фаз от ее среднего значения $\sigma = \sqrt{\langle \Delta\varphi_i^2 - \langle \Delta\varphi_i^2 \rangle \rangle}$ ($\langle \rangle$ – среднее по ансамблю осцилляторов). Графики зависимости σ от коэффициента глобальных связей для режимов с разными k построены на рис. 6. Из них ясно виден пороговый характер фазовой динамики: для каждого из типов колебаний существует свое значение $\varepsilon_t^{(k)}$, отмеченное на рисунке стрелкой, после которого начинается резкий рост σ . Последовательность критических значений $\varepsilon_t^{(k)}$ возрастает с ростом индекса k . От пространственного периода волны также зависит интервал значений ε , в котором наблюдаются квазипериодические колебания с данным k . При достижении следующего критического значения $\varepsilon = \varepsilon_c^{(k)}$ волна с данным индексом теряет устойчивость, и траектория необратимо переходит на другой режим, чаще всего на пространственно-однородный. На рис. 6 значения $\varepsilon_c^{(k)}$ отмечены стрелками со штриховыми линиями. Для волны с $k = 1$ этот интервал достаточно протяженный, а зависимость $\sigma(\varepsilon)$ плавная, в то время как для режимов с $k = 3$ или $k = 4$ система очень быстро переходит от пространственно-периодического к пространственно-однородному состоянию.

Рассмотрим теперь динамику системы в зависимости от соотношения между коэффициентами локальных и глобальных связей. Как показывают исследования, все описанные переходы наблюдаются и при других, отличных от $\gamma = 0.005$ значениях параметра связи, однако бифуркационные значения $\varepsilon_t^{(k)}$ и $\varepsilon_c^{(k)}$ при этом, естественно, меняются. На рис. 7 построены графические зависимости $\varepsilon_t^{(k)}(\gamma)$ и $\varepsilon_c^{(k)}(\gamma)$ для $k = 2, 3, 4$. Из рисунка видно, что область существования пространственно-периодического режима с заданным k ограничена линией l_k , которая представляет собой график зависимости критического значения $\varepsilon_t^{(k)}$ от γ . Кроме этого, на рисунке представлены линии L_k , ограничивающие области, где существует колебательный режим с набегом фазы вдоль кольца, равным $2\pi k$. Данные линии представляют

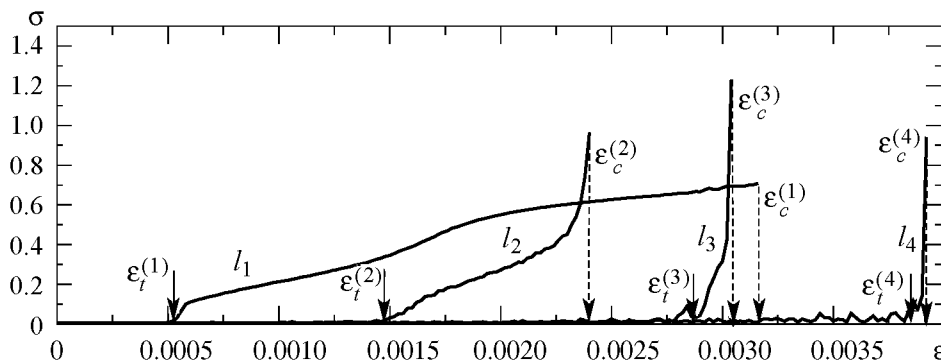


Рис. 6. Зависимость среднеквадратичного отклонения разности фаз от ε

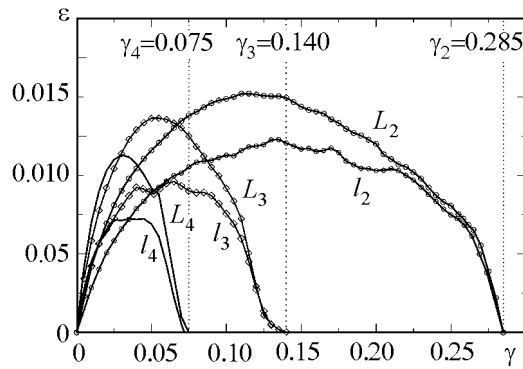


Рис. 7. Области существования различных пространственных мод на плоскости параметров $\gamma - \varepsilon$

собой графики $\varepsilon_c^{(k)}(\gamma)$. Все линии начинаются из точки с координатами $(0 : 0)$ и каждая из пар линий l_k, L_k сходится к точке с координатами $(\gamma_k : 0)$. Значения γ_k ($k = 2, 3, 4$) отмечены на рисунке вертикальными пунктирными линиями. Если сопоставить рис. 7 и рис. 3, то можно заметить, что значения γ_k представляют собой точки границы области существования режима $1C^k$ при заданном $c = 2.5$.

3. Влияние дальних связей на режимы с более сложными пространственными структурами

Представленные в предыдущем разделе результаты относятся к простейшим пространственным структурам, существующим в цепочке осцилляторов с периодическими граничными условиями – бегущим волнам. При усложнении временной динамики осцилляторов, которая происходит с ростом параметра c , в ансамбле возникают сложные неупорядоченные структуры. Эти структуры существуют на базе каждой из бегущих волн с заданным $k = 0, \pm 1, \dots, \pm 7$. Рассмотрим, как спонтанные дальнедействующие взаимодействия осцилляторов влияют на данную пространственную организацию.

Рассмотрим систему (1) при $c = 3.05$, $\gamma = 0.005$, что соответствует предельному циклу удвоенного периода в каждом осцилляторе. Выберем в качестве примера одну из волн с $k = 2$, профиль которой показан на рис. 8, а. Как видно из рисунка, разность фаз между колебаниями соседних осцилляторов более не является постоянной. Она «флуктуирует» вокруг среднего уровня в $\Delta\varphi^{(2)} = (4\pi)/N$, который отмечен на правом рисунке пунктирной линией. При «включении» дальнедействующих связей пространственное распределение в цепочке сохраняется, пока интенсивность связей не превышает пороговое значение $\varepsilon \simeq 0.0018$, после чего колебания становятся квазипериодическими (рис. 8, б). В распределении разности фаз появляется пространственная модуляция, которая накладывается на существующую ранее картину. На правой части рис. 8, б видны два характерных глобальных минимума, положение которых смещается вдоль ансамбля с постоянной скоростью. Как и в предыдущем случае, распределение разности фаз приведено на рисунке в два разных момента времени, различающихся на $\Delta t = 500$. При увеличении ε до $\varepsilon \simeq 0.002$ происходит необратимый переход на пространственный режим с набегом фазы вдоль цепочки, равным нулю. Однако данный режим также не является пространственно-однородным (рис. 8, в). Данная пространственная структура является чрезвычайно устойчивой. Она существует вплоть до $\varepsilon = 0.295$, то есть до значений величины глобальных связей, многократно превосходящих величину локальной связи $\gamma = 0.005$. Наконец, при $\varepsilon > 0.295$ происходит жесткий переход к пространственно-однородному состоянию (рис. 8, г).

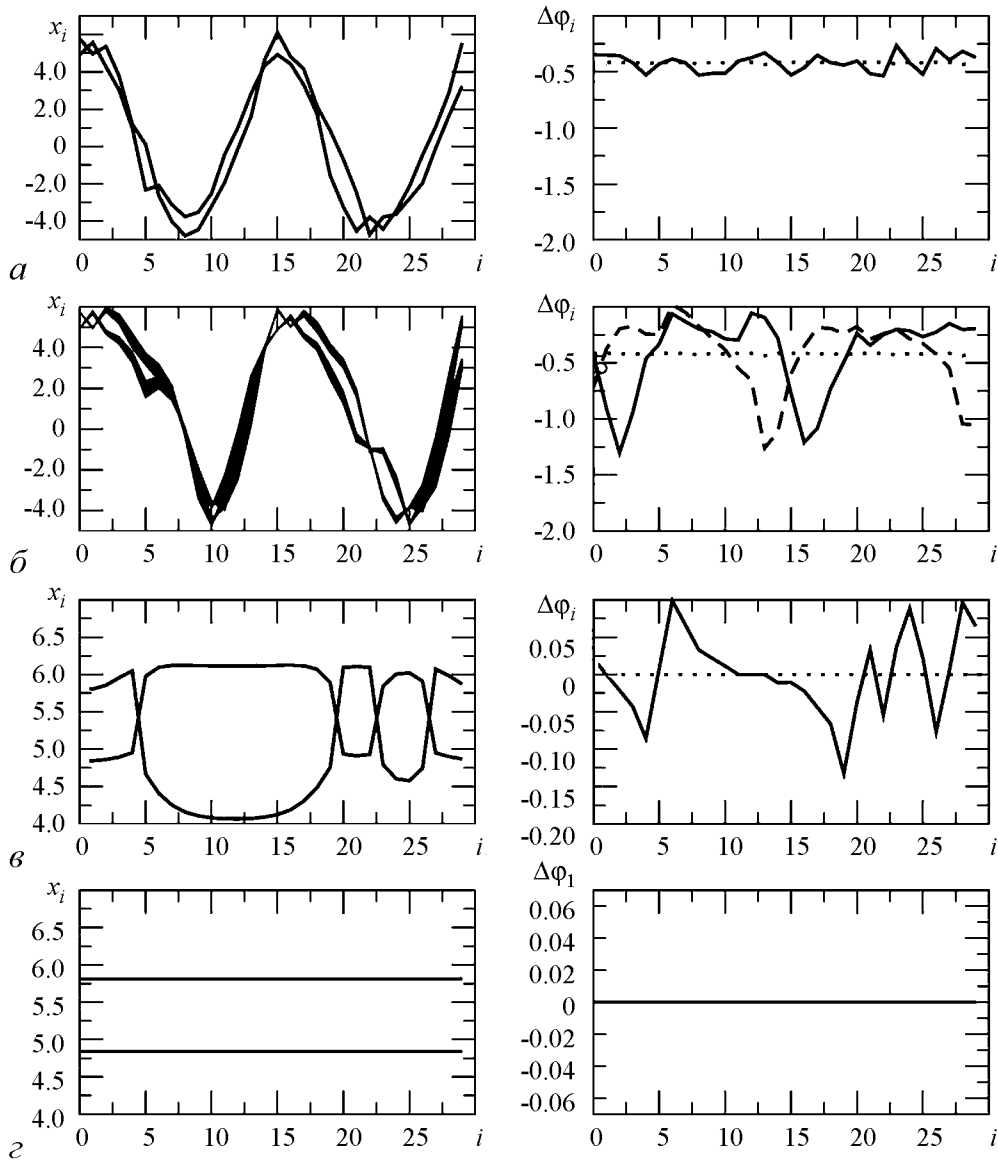


Рис. 8. Профиль бегущей волны (слева) и распределение разностей фаз вдоль цепочки при различных ε : 0.0017 (а); 0.0022 (б); 0.003 (в); 0.295 (г)

4. Влияние дальнедействующих связей на мультистабильность хаотических аттракторов

Рассмотрим теперь, что произойдет, если колебания в элементах ансамбля являются хаотическими. Выберем, например, режим развитого одноленточного хаоса. Для этого установим значения параметров $c = 4.6$, $\gamma = 0.005$.

При данных значениях параметров в фазовом пространстве сосуществует $N/2$ хаотических аттракторов, каждый из которых возник на базе одного из предельных циклов: $1C^0, 1C^{\pm 1}, \dots, 1C^{\pm 7}$. Соответственно, обозначим их $1A^0, 1A^{\pm 1}, \dots, 1A^{\pm 7}$. Здесь, как и для периодических режимов, верхний индекс в обозначении $1A^k$ ра-

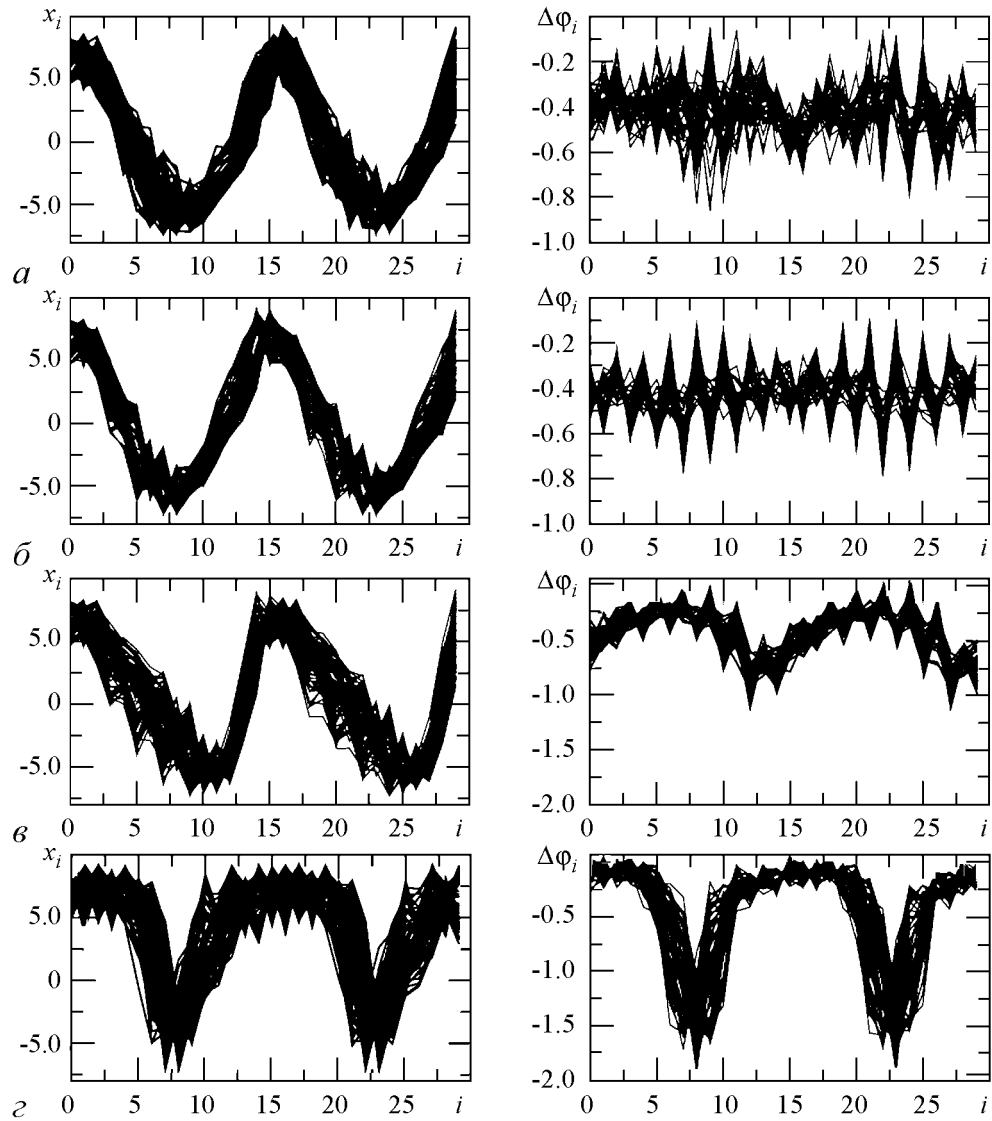


Рис. 9. Профиль бегущей волны (слева) и распределение разностей фаз вдоль цепочки (справа) для хаотического режима $1A^2$ при различных ε : 0 (*a*), 0.0015 (*б*), 0.0019 (*в*), 0.0026 (*г*)

вен суммарному набегу фазы вдоль цепочки осцилляторов, деленному на 2π . Выбор конкретного режима определяется начальными условиями. Для определенности выберем режим с $k = 2$, пространственный профиль которого и распределение разности фаз вдоль пространственной координаты показаны на рис. 9, *a*. Из рисунка видно, что значение разности фаз является случайной величиной, флуктуирующей относительно среднего значения $(4\pi)/N$.

Будем постепенно увеличивать коэффициент дальних связей. Включение дальнедействующих связей приводит, вначале, к периодической модуляции значения разности фаз вдоль цепочки (рис. 9, *б*). Затем, при $\varepsilon \simeq 0.0018$ возникает длинноволновая пространственная модуляция разностей фаз, сходная с аналогичной модуляцией

для случая периодических колебаний. На эту длинноволновую модуляцию «накладываются» случайные флуктуации. Рост силы дальнедействующих связей ведет к увеличению глубины модуляции. При этом колебания в большинстве осцилляторов выравниваются по фазе: в цепочке появляется два кластера, внутри которых разность фаз флуктуирует вокруг нулевого значения, между которыми располагаются два «фазовых дефекта» (рис. 9, z). Наконец, при $\varepsilon > 0.0036$ происходит жесткий переход на пространственный режим с $k = 0$. Данный вид колебаний существует в достаточно широком диапазоне величин глобальной связи, до $\varepsilon \simeq 0.2$, после чего возникает режим пространственно-однородных хаотических колебаний, когда колебания во всех точках ансамбля происходят синфазно. Данный режим можно считать режимом полной синхронизации хаоса в ансамбле.

Заключение

В результате проведенных исследований обнаружено, что дальнедействующие случайные связи между элементами ансамбля разрушают мультистабильность и ведут к установлению в системе единственного режима пространственно-однородных колебаний. Данный эффект носит пороговый характер и имеет общие черты для колебаний с разной временной динамикой, как периодической, так и хаотической. Последовательность наблюдаемых переходов и бифуркационные значения параметров практически не зависят от интервала стационарности связей τ и определяются только силой связей ε . Общий сценарий наблюдаемых изменений в динамике системы следующий. Вначале, при достижении некоторого критического значения параметра связи появляется пространственная модуляция фазы колебаний, глубина которой растет с ростом параметра связи. В результате в цепочке возникает несколько кластеров с синфазными колебаниями, между которыми располагаются «фазовые дефекты». Данное распределение разности фаз движется вдоль цепочки с постоянной скоростью. Наконец, при достижении следующего критического значения происходит жесткий переход на пространственный режим с большей длиной волны (обычно с $\Lambda = N$ или $\Lambda = \infty$). При больших значениях коэффициента дальнедействующей связи в фазовом пространстве остается единственный пространственно-однородный режим, при котором колебания всех элементов являются синфазными.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 12-02-01298-а).

Библиографический список

1. *Watt D.J., Strogatz S.H.* Collective dynamics of «small-world» networks // *Nature*. 1998. Vol. 393. P. 440.
2. *Lago-Fernandes L.F., Huerta R., Corbacho F., Siguenza J.A.* Fast response and temporal coherent oscillations in small-world networks // *Phys. Rev. Lett.* 2000. Vol. 84. P. 2758.
3. *Barahona M., Pecora L.M.* Synchronization in small-world systems // *Phys. Rev. Lett.* 2002. Vol. 89. 054101.

4. *Mori F., Odagaki T.* Synchronization of coupled oscillators on small-world networks // *Physica D.* 2009. Vol. 238. P. 1180.
5. *Wang X., Chen G.* Synchronization in small-world dynamical networks // *Int. J. Bifurcation and Chaos.* 2002. Vol. 12. P. 187.
6. *Астахов В.В., Безручко Б.П., Пудовочкин О.Б., Селезнев Е.П.* Фазовая мультистабильность и установление колебаний в нелинейных системах с удвоением периода // *Радиотехника и электроника.* 1993. Т. 38, № 2. С. 291.
7. *Ланда П.С.* Автоколебания в системах с конечным числом степеней свободы. Москва: Наука, 1980.
8. *Дворников А.А., Уткин Г.М., Чуков А.М.* О взаимной синхронизации цепочки резистивно связанных автогенераторов // *Известия вузов. Радиофизика.* 1984. Т. 27, № 11. С. 1388.
9. *Ermentrout G.B.* The behaviour of rings of coupled oscillators // *J. of Math. Biol.* 1985. Vol. 23, № 1. P. 55.
10. *Ermentrout G.B.* Stable periodic solutions to discrete and continuum arrays of weakly coupled nonlinear oscillators // *SIAM J. of Appl. Math.* 1992. Vol. 52, № 6. P. 1664.
11. *Шабунин А.В., Акопов А.А., Астахов В.В., Вадивасова Т.Е.* Бегущие волны в дискретной ангармонической автоколебательной среде // *Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика.* 2005. Т. 13, № 4. С. 37.
12. *Астахов В.В., Безручко Б.П., Ерастова Е.Н., Селезнев Е.П.* Формы колебаний и их эволюция в диссипативно связанных фейгенбаумовских системах // *Журнал Технической Физики.* 1990. Т. 60, № 10. С. 19.
13. *Астахов В.В., Безручко Б.П., Гуляев Ю.П., Селезнев Е.П.* Мультистабильные состояния в диссипативно связанных фейгенбаумовских системах // *Письма в ЖТФ.* 1989. Т. 15, № 3. С. 60.
14. *Астахов В.В., Безручко Б.П., Пономаренко В.И., Селезнев Е.П.* Мультистабильность в системе радиотехнических генераторов с емкостной связью // *Радиотехника и Электроника.* 1991. Т. 36, № 11. С. 2167.
15. *Астахов В.В., Безручко Б.П., Пономаренко В.И.* Формирование мультистабильности, классификация изомеров и их эволюция в связанных фейгенбаумовских системах // *Известия вузов. Радиофизика.* 1991. Т. 34, № 1. С. 35.
16. *Anishchenko V.S., Astakhov V.V., Vadivasova T.E., Sosnovtseva O.V., Wu C.W., Chua L.* Dynamics of two coupled Chua's circuits // *Int. J. of Bifurcation and Chaos.* 1995. Vol. 5, № 6. P. 1677.
17. *Bezruchko B.P., Prokhorov M.D., Seleznev E.P.* Oscillation types, multistability, and basins of attractors in symmetrically coupled period-doubling systems // *Chaos, Solitons and Fractals.* 2003. Vol. 15. P. 695.
18. *Matias M.A., Perez-Munuzuri V., Marino I.P., Lorenzo M.N., Perez-Villa V.* Size instabilities in ring of chaotic synchronized systems // *Europhys. Lett.* 1997. Vol. 37. P. 379.
19. *Matias M.A., Guemez J., Perez-Munuzuri V., Marino I.P., Lorenzo M.N., Perez-Villar V.* Observation of a fast rotating wave in rings of coupled chaotic oscillators // *Phys. Rev. Lett.* 1997. Vol. 78. P. 219.

20. *Marino I.P., Perez-Munuzuri V., Perez-Villar V., Sanchez E., Matias M.A.* Interaction of chaotic rotating waves in coupled rings of chaotic cells // *Physica D*. 2000. Vol. 128. P. 224.
21. *Shabunin A., Astakhov V., Anishchenko V.* Developing chaos on base of traveling waves in a chain of coupled oscillators with period-doubling. Synchronization and hierarchy of multistability formation // *Int. J. of Bifurcation and Chaos*. 2002. Vol. 12, № 8. P. 1895.
22. *Шабунин А.В., Астахов В.В.* Фазовая мультистабильность в ансамбле генераторов с удвоениями периода // *Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика*. 2009. Т. 17, № 6. С. 99.
23. *Пиковский А., Розенблюм М., Куртс Ю.* Синхронизация. Фундаментальное нелинейное явление. М.: Техносфера, 2003.
24. *Гуртовник А.С., Неймарк Ю.И.* Синхронизмы в системе циклически слабосвязанных осцилляторов // *Динамические системы: Межвузовский сборник научных трудов*. Изд. Нижегородского университета, 1991. С. 84.

*Саратовский государственный
университет им. Н.Г. Чернышевского*

*Поступила в редакцию
После доработки*

*12.11.2012
31.01.2013*

RANDOM DISTANT COUPLINGS INFLUENCE TO A SYSTEM WITH PHASE MULTISTABILITY

A. V. Shabunin

We explore the destruction of phase multistability which takes place in an ensemble of period doubling oscillators under the action of long-distance couplings, which appear randomly between the arbitrary cells. The investigation is carried out on the example of a chain of Rossler's oscillators with periodic boundary conditions, where alongside with local couplings between the elements exist long-range interconnections. The sequence of bifurcations, which accompany increasing of the strength of the global coupling is determined.

Keywords: Phase multistability, synchronization, networks.



Шабунин Алексей Владимирович – окончил Саратовский государственный университет (1990). Профессор кафедры радиофизики и нелинейной динамики СГУ, доктор физико-математических наук (2008). Научные интересы – нелинейная динамика, теория колебаний, синхронизация и управление хаосом. Автор более 60 научных публикаций.

410012 Саратов, ул. Астраханская, 83
Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского
E-mail: shabuninav@info.sgu.ru



ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ НЕЛИНЕЙНЫХ НОРМАЛЬНЫХ МОД В ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЯХ

С. А. Щербинин, П. П. Гончаров, Г. М. Чечин

Исследуются проблемы существования и устойчивости симметрично-обусловленных нелинейных нормальных мод в электрической цепочке из нелинейных конденсаторов, связанных линейными индуктивностями (модель описана в *Physica D* 238 (2009) 1228). Для всех мод этого типа определена верхняя граница области устойчивости по амплитуде колебаний напряжения на конденсаторах в зависимости от числа ячеек цепочки. Найдены асимптотические формулы при стремящемся к бесконечности числе ячеек.

Ключевые слова: Нелинейная динамика, решеточные модели, нелинейные нормальные моды, инвариантные многообразия, теоретико-групповые методы.

Введение

В последние годы существенно повысился интерес к исследованию нелинейных колебаний в мезоскопических системах различной физической природы. В частности, активно изучались дискретные бризеры и солитоноподобные возбуждения в системах контактов Джозефсона [1, 2], кантилеверных массивах [3, 4], гранулированных кристаллах [5], электрических цепях, выполненных на кремниевой подложке с помощью CMOS-технологии [6–9] и т.д.

Работа [9] посвящена анализу устойчивости так называемой π -моды в электрической цепи, изображенной на рис. 1, *а* и представляющей собой цепочку N нелинейных конденсаторов, которые связаны друг с другом линейными индуктивностями. При этом предполагается наличие периодических граничных условий, что позволяет считать рассматриваемую цепочку замкнутой в кольцо. В качестве примера такое кольцо для случая $N = 4$ показано на рис. 1, *б*.

В статье [9] анализируется случай следующей нелинейной зависимости емкости конденсаторов C от напряжения V

$$C(V) = C_0(1 - bV^2), \quad (1)$$

где C_0 и b представляют собой некоторые положительные константы. Применяя законы Кирхгофа для квазипостоянного тока к схеме, изображенной на рис. 1, можно получить следующую систему уравнений [9]:

$$L_j \frac{dI_j}{dt} = V_j - V_{j+1}, \quad \frac{d}{dt}Q(V_j) = I_{j-1} - I_j. \quad (2)$$

Здесь $Q(V_j)$ – заряд j -го конденсатора в тот момент времени t , когда напряжение на нем равно $V_j(t)$, а $I_j = I_j(t)$ – ток, протекающий через индуктивность L_j .

Исключая из этих уравнений $Q_j(t)$ с помощью соотношения $Q_j(t) = C_0(1 - bV_j^2)V_j$, приходим к следующей нелинейной динамической модели, которая и будет исследоваться в настоящей работе:

$$\ddot{V}_j(1 - bV_j^2) - 2bV_j(\dot{V}_j)^2 = \gamma(V_{j-1} - 2V_j + V_{j+1}), \quad (3)$$

где $\gamma = 1/(L_0C_0)$ (предполагается, что $L_j = L_0$ для всех j), $j = 1..N$, причем $V_0(t) \equiv V_N(t)$, $V_{N+1}(t) \equiv V_1(t)$ в силу периодических граничных условий. С помощью обезразмеривания уравнения (3) параметр b можно исключить, поэтому далее считаем его равным единице.

Для модели (3) π -мода Φ_1 в произвольный момент времени t определяется выражением

$$\Phi_1 = \{V(t), -V(t)|V(t), -V(t)|V(t), -V(t)|\dots\}. \quad (4)$$

Таким образом, в режиме π -моды напряжения на любых двух соседних конденсаторах имеют противоположные знаки. Для существования такого периодического режима необходимо, чтобы число N ячеек рассматриваемой электрической цепи было четным.

Существует весьма большое число работ по исследованию π -моды в моноатомных цепочках типа Ферми–Пасты–Улама (ФПУ) [10–14], однако модель (3) существенным образом отличается от модели ФПУ. Следует отметить, что в приложении к [9] авторы в некотором приближении сводят модель (3) к обобщенной модели ФПУ, однако мы предпочитаем работать непосредственно с уравнениями в форме (3).

В общем случае, устойчивость π -моды в моноатомной цепочке зависит от количества N образующих ее частиц. Поскольку π -мода представляет собой периодический режим, ее устойчивость можно исследовать с помощью метода Флоке. Размерность возникающей при этом вариационной системы (системы уравнений, линеаризованных в окрестности изучаемого периодического режима), равна N ,

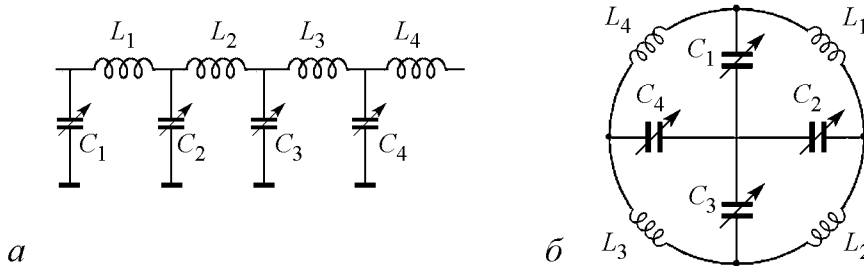


Рис. 1. Цепочка нелинейных конденсаторов, связанных линейными индуктивностями

в связи с чем при $N \gg 1$, особенно при исследовании асимптотического поведения устойчивости при $N \rightarrow \infty$, возникают большие вычислительные трудности. В работе [9] для преодоления этих трудностей предложен некоторый метод расщепления вариационной системы на независимые двумерные подсистемы, для которых анализ устойчивости в рамках метода Флоке проводится относительно просто. Этот метод расщепления вариационной системы существенным образом использует особенности структуры динамических уравнений (3) и является, с нашей точки зрения, достаточно сложным.

С другой стороны, в работах [15, 16] был разработан общий теоретико-групповой метод, позволяющий проводить аналогичное расщепление вариационной системы на основе свойств симметрии исследуемой динамической модели. Этот метод опирается не на специфику изучаемой модели, а лишь на ее симметрию и базируется на теории представлений конечных групп. В работах [17, 18] данный теоретико-групповой метод был нами использован для анализа устойчивости всех симметрично-обусловленных нелинейных нормальных мод (ННМ) Розенберга в цепочках ФПУ, а в работах [19, 20] – для исследования локализованных нелинейных колебаний (дискретных бризеров и квазibriзеров) в двумерных скалярных моделях на плоской квадратной решетке.

В настоящей работе вышеуказанный теоретико-групповой метод для исследования устойчивости применяется не только для π -моды, но и для других четырех возможных в модели (3) ННМ.

Настоящая статья имеет следующую структуру. В разделе 1 обсуждаются все возможные в системе (3) симметрично-обусловленные делокализованные ННМ, а в разделе 2 описывается применяемый нами метод исследования устойчивости этих мод. Анализ устойчивости π -моды посвящен раздел 3, а в разделе 4 проведено исследование устойчивости всех других ННМ. В Заключении подводятся итоги настоящей работы и намечаются пути дальнейшего исследования нелинейных колебаний в модели (3).

1. Симметрично-обусловленные нелинейные нормальные моды

Концепция нелинейных нормальных мод была разработана Розенбергом в [21]. Суть этого понятия заключается в том, что в режиме данной ННМ все элементы системы совершают согласованные колебания, временная зависимость которых определяется одной и той же функцией $f(t)$. В приложении к динамической модели (3) это значит, что

$$V_j(t) = c_j f(t), j = 1..n, \quad (5)$$

где c_j – некоторые постоянные коэффициенты.

Обычные линейные нормальные моды также удовлетворяют определению (5), причем в этом случае $f(t) = \sin(\omega t + \phi_0)$, где ω – частота данной моды, ϕ_0 – начальная фаза, а c_j – амплитуда колебаний различных элементов рассматриваемой системы.

ННМ Розенберга существуют только в нелинейных гамильтоновых системах с весьма специфическими типами взаимодействий, например, в тех случаях, когда потенциальная энергия является однородной функцией всех своих аргументов.

Однако даже при достаточно общем виде взаимодействий существование ННМ может быть обеспечено наличием у системы некоторой группы дискретной симметрии [13, 18, 22]. Эти ННМ принято называть симметрично-обусловленными. Количество всех мод такого типа в любой пространственно-периодической структуре (в частности, одномерной) ограничено некоторым небольшим числом, что можно установить с помощью теоретико-групповых методов. Причина этого явления неоднократно обсуждалась нами в различных работах (см., например, [18, 23, 24]). Дело в том, что попытка построить периодический динамический режим с большой мультипликацией (см. ниже) элементарной ячейки в колебательном состоянии рассматриваемой решеточной модели приводит к возникновению *бушей* ННМ с размерностью $m > 1$, которые описывают уже непериодические колебания – им отвечают m различных базисных частот в спектре Фурье (теория бушей мод была развита в работах [26–28]).

В математической модели, уравнения которой инвариантны относительно группы дискретной симметрии G_0 , все возможные динамические режимы, в частности ННМ, можно классифицировать по подгруппам этой группы [26, 28].

Нетрудно убедиться в том, что уравнения модели (3) инвариантны относительно той же самой группы преобразований $G_0 = D_N$, что и динамические уравнения известной модели Ферми–Пасты–Улама β -типа [18]. Эта группа имеет три генератора a, i, u , которые можно определить их действием на вектор состояния

$$\mathbf{V} = \{V_1(t), V_2(t), \dots, V_N(t)\},$$

представляющий собой упорядоченную совокупность всех динамических переменных $V_j(t)$ модели (3).

Трансляционное преобразование a осуществляет циклическую перестановку компонент вектора \mathbf{V}

$$a\mathbf{V} = \{V_2(t), V_3(t), \dots, V_N(t), V_1(t)\}. \quad (6)$$

Преобразование i соответствует инверсии относительно произвольно выбранной «середины» рассматриваемой цепочки конденсаторов

$$i\mathbf{V} = \{V_N(t), V_{N-1}(t), \dots, V_2(t), V_1(t)\},$$

а преобразование u изменяет знаки всех компонент вектора \mathbf{V} без их перестановки

$$u\mathbf{V} = \{-V_1(t), -V_2(t), \dots, -V_N(t)\}.$$

Можно убедиться, что под действием каждого из этих генераторов система (3) преобразуется в себя и, стало быть, a, i, u являются преобразованиями инвариантности рассматриваемой нами динамической модели.

Генераторы a, i, u имеют порядки $N, 2, 2$, соответственно, то есть $a^N = e, i^2 = e, u^2 = e$, где e – единичный элемент группы G_0 (тождественное преобразование). Таким образом, группа G_0 состоит из $4N$ элементов, представляющих собой различные произведения указанных трех генераторов, причем является неабелевой (например, $ia \neq ai$).

Каждая подгруппа G_j группы G_0 определяет соответствующий ей специфический динамический режим, который может реализоваться в модели (3), и называется

его группой симметрии, поскольку под действием всех ее элементов вектор \mathbf{V} преобразуется сам в себя: $G_j \mathbf{V} = \mathbf{V}$.

Рассмотрим подгруппу G_1 группы G_0 , в которую входят только единичное преобразование e и преобразование a^2 , в силу чего она является подгруппой второго порядка. Из условия инвариантности вектора \mathbf{V} относительно группы G_1 для случая цепочки из $N = 6$ элементов имеем

$$a^2 \mathbf{V} = \mathbf{V}. \quad (7)$$

Поскольку

$$a^2 \mathbf{V} = \{V_3, V_4, V_5, V_6, V_1, V_2\}, \quad (8)$$

из уравнения (7) следует:

$$V_3 = V_1, \quad V_4 = V_2, \quad V_5 = V_3, \quad V_6 = V_4, \quad V_1 = V_5, \quad V_2 = V_6. \quad (9)$$

Таким образом, $V_1 = V_5 = V_3$, $V_2 = V_4 = V_6$ и шестимерный вектор \mathbf{V} определяется только двумя независимыми переменными $V_1(t)$ и $V_2(t)$

$$\mathbf{V} = \{V_1, V_2 | V_1, V_2 | V_1, V_2\} \quad (10)$$

Учитывая соотношения (9) между динамическими переменными $V_j(t)$, из уравнений (3) получим систему двух дифференциальных уравнений относительно $V_1(t)$ и $V_2(t)$ (все другие уравнения системы (3) им эквивалентны). В таком случае мы говорим, что имеем двухпараметрический динамический режим (10): в его спектре Фурье будут присутствовать две разные базовые частоты, соответствующие переменным $V_1(t)$ и $V_2(t)$, и разные их целочисленные линейные комбинации.

Поскольку в настоящей работе мы исследуем *периодические* динамические режимы, нам необходимо отобрать из всех возможных симметрично-обусловленных режимов только *однопараметрические*, которые и представляют собой ННМ Розенберга. Эта проблема может быть решена с помощью определенных теоретико-групповых методов, которые подробно описаны в работе [18]. Ниже приведены лишь окончательные результаты такого отбора подгрупп $G_j \subset G_0$ и соответствующих им динамических режимов.

Оказывается, что в модели (3) могут существовать только следующие 5 симметрично-обусловленных ННМ:

$$G_1 = [a^2, iu] : \Phi_1 = V(t)\{1, -1|1, -1|1, -1|\dots|1, -1\}. \quad (11)$$

Это уже упоминавшаяся π -мода.

$$G_2 = [a^4, iu] : \Phi_2 = V(t)\{1, 1, -1, -1|1, 1, -1, -1|\dots\}. \quad (12)$$

$$G_3 = [a^4, ai] : \Phi_3 = V(t)\{1, 0, -1, 0|1, 0, -1, 0|\dots\}. \quad (13)$$

$$G_4 = [a^3, iu] : \Phi_4 = V(t)\{1, 0, -1|1, 0, -1|\dots\}. \quad (14)$$

$$G_5 = [a^3 u, ai u] : \Phi_5 = V(t)\{1, 1, 0, -1, -1, 0|1, 1, 0, -1, -1, 0|\dots\}. \quad (15)$$

Поясним использованные здесь обозначения. Каждая подгруппа задается набором своих генераторов, заключенных в квадратные скобки. При этом исходная группа $G_0 = [a, i, u]$ определяется тремя генераторами, а перечисленные выше ее подгруппы – двумя генераторами. Например, подгруппа $G_1 = [a^2, iu]$ имеет два генератора, одним из которых является квадрат элемента a , действие которого на вектор состояния \mathbf{V} определяется формулой (8). Из требования инвариантности вектора \mathbf{V} относительно этого генератора мы получили динамический режим (10). Наличие в группе G_1 второго генератора iu приводит к условию $iu\mathbf{V} = \mathbf{V}$, которое порождает дополнительную связь между переменными $V_1(t)$ и $V_2(t)$ в формуле (10): $V_2(t) = -V_1(t)$, что, в свою очередь, дает однопараметрический режим, представляющий собой π -моду (4). В вышеприведенных формулах вертикальной черточкой отделяются друг от друга «ячейки» изучаемой нами электрической цепочки в ее колебательном состоянии.

Модам (12) и (13) соответствуют ячейки, образованные четырьмя соседними конденсаторами. Моде (14) отвечают ячейки из трех, а моде (15) – из шести конденсаторов.

Существенно, что нелинейных мод с ячейками большего размера не существует – при попытке их построения мы приходим к непериодическим динамическим режимам – уже упоминавшимся бушам нелинейных нормальных мод.

При подстановке каждой из мод (11–15) в систему (3) последняя сводится к одному дифференциальному уравнению относительно переменной $V(t)$ (все остальные уравнения этой системы ему идентичны!). Такое уравнение называется *ведущим уравнением*, и определяет временную эволюцию рассматриваемой электрической цепочки. Для всех ННМ (11–15) оно имеет вид

$$\ddot{V}(t)[1 - V^2(t)] - 2V(t)[\dot{V}(t)]^2 + \mu V(t) = 0, \quad (16)$$

причем разным модам соответствуют разные, перечисленные ниже, значения параметра μ :

1. $G_1 = [a^2, iu] : \mu = 4,$
2. $G_2 = [a^4, iu] : \mu = 2,$
3. $G_3 = [a^4, ai] : \mu = 2,$
4. $G_4 = [a^3, iu] : \mu = 3,$
5. $G_5 = [a^3u, aiu] : \mu = 1.$

2. Метод исследования устойчивости нелинейной нормальной моды

Поскольку каждая ННМ представляет собой периодический динамический режим, исследование ее устойчивости можно осуществить стандартным методом Флорке, линеаризуя около этой моды систему нелинейных дифференциальных уравнений (3). В результате получается вариационная система уравнений, размерность которой равна числу элементов N рассматриваемой электрической цепи. При $N \gg 1$, особенно при $N \rightarrow \infty$, исследование такой системы линейных дифференциальных

уравнений с переменными коэффициентами представляет большие вычислительные трудности. Эти трудности можно в значительной степени нивелировать с помощью специфического теоретико-группового метода, развитого в работах [15, 16]. Ниже приведен краткий обзор основных идей этого метода.

Рассмотрим группу инвариантности G_0 динамических уравнений (3). Под действием каждого элемента g этой группы происходит определенная перестановка динамических переменных V_j , возможно, сопровождаемая изменением знаков некоторых из них. В результате осуществления такой перестановки имеет место точно такая же перестановка уравнений системы (3) с точно такими же изменениями их знаков.

Разумеется, не всякая перестановка переменных V_j является преобразованием инвариантности системы (3). Например, если переставить только две переменные V_2 и V_3 без каких-либо перестановок других переменных, система (3) не перейдет в себе эквивалентную. Действительно, в результате такого преобразования уравнения с номерами 2 и 3, имевшие в системе (3) вид

$$\ddot{V}_2(1 - V_2^2) - 2V_2(\dot{V}_2)^2 = \gamma(V_1 - 2V_2 + V_3),$$

$$\ddot{V}_3(1 - V_3^2) - 2V_3(\dot{V}_3)^2 = \gamma(V_2 - 2V_3 + V_4),$$

перейдут в уравнения

$$\ddot{V}_3(1 - V_3^2) - 2V_3(\dot{V}_3)^2 = \gamma(V_1 - 2V_3 + V_2),$$

$$\ddot{V}_2(1 - V_2^2) - 2V_2(\dot{V}_2)^2 = \gamma(V_3 - 2V_2 + V_4).$$

Таким образом, уравнения 2 и 3 после преобразования $V_2 \leftrightarrow V_3$ не переходят друг в друга (а перейти в какие-либо другие уравнения системы (3) они, очевидно, не могут!) и, следовательно, преобразование $V_2 \leftrightarrow V_3$ не является преобразованием инвариантности рассматриваемой нами математической модели.

На методике поиска группы инвариантности G_0 системы динамических уравнений мы здесь не останавливаемся, отсылая читателя к нашей работе [18]. Заметим только, что все преобразования симметрии в ее равновесном состоянии заведомо должны входить в эту группу.

Рассмотрим теперь некоторый динамический режим, описываемый вектором состояния $\mathbf{V} = \{V_1, V_2, \dots, V_N\}$. Действуя на него последовательно всеми элементами группы G_0 , отберем те из них, которые оставляют этот вектор неизменным, то есть те $g \in G_0$, для которых имеет место соотношение $g\mathbf{V} = \mathbf{V}$. Очевидно, что полученная совокупность таких элементов образует некоторую группу G , которая является подгруппой группы G_0 : $G \subset G_0$. Группу G естественно назвать группой симметрии рассматриваемого динамического режима.

В работе [15] доказана теорема, утверждающая, что вариационная система $\ddot{\delta} = J(t)\delta$, получаемая в результате линеаризации системы уравнений (3) около данного динамического режима \mathbf{V} , инвариантна именно по отношению к группе G (таким образом, некоторые элементы $g \in G_0$, которые были преобразованиями инвариантности системы (3), не являются таковыми для вариационной системы $\ddot{\delta} = J(t)\delta$).

Действие любого оператора $g \in G$ на произвольный вектор \mathbf{V} можно заменить действием на него некоторой квадратной N -мерной матрицы. В этом смысле будем

говорить, что каждому элементу $g \in G$ сопоставляется $N \times N$ матрица, действующая в N -мерном пространстве всех возможных векторов состояний. Совокупность таких матриц, соответствующих всем элементам $g \in G$, образует некоторое матричное представление Γ группы G .

Как уже отмечалось, G является группой инвариантности (группой симметрии) вариационной системы $\ddot{\mathbf{d}} = J(t)\mathbf{d}$. Математически этот факт выражается в том, что матрица $J(t)$ коммутирует со всеми матрицами представления Γ , в силу чего к ней можно применить известную теорему Вигнера [29].

Из этой теоремы следует, что если разложить представление Γ на неприводимые представления (НП) группы G , то есть привести его подходящим преобразованием базиса в пространстве всех возможных векторов состояния \mathbf{V} к виду

$$\Gamma = \sum_j^{\oplus} m_j \Gamma_j, \quad (17)$$

то матрица $J(t)$ приобретает блочно-диагональную форму, причем каждому НП Γ_i размерности n_i будет отвечать некоторый блок D_i являющийся квадратной матрицей размерности $m_i n_i$. Более того, любой блок D_i имеет весьма специфическую структуру – он состоит из различных, кратных единичной, матриц размерности n_i , которые m_i раз повторяются вдоль строк и столбцов этого блока [15, 16].

Следствием такой структуры блоков D_i является расщепление N -мерной вариационной системы $\ddot{\mathbf{d}} = J(t)\mathbf{d}$ на независимые подсистемы значительно меньшей размерности. А именно, каждому блоку D_i отвечает n_i идентичных подсистем размерности m_i . Множители m_i , появляющиеся в формуле (17), называются кратностями вхождения НП Γ_i в состав приводимого представления Γ . Их можно найти с помощью следующей формулы теории характеров представлений конечных групп [29]:

$$m_i = \frac{1}{\|G\|} \sum_{g \in G} \chi_{\Gamma}(g) \bar{\chi}_{\Gamma_i}(g), \quad (18)$$

где $\|G\|$ – порядок группы G (число ее элементов), а $\chi_{\Gamma}(g)$ и $\bar{\chi}_{\Gamma_i}(g)$ суть следы матриц, которые соответствуют элементу $g \in G$ в представлениях Γ и Γ_i , соответственно. Черта над символом $\bar{\chi}_{\Gamma_i}(g)$ означает комплексное сопряжение.

Явный вид вариационной системы, расщепленной на независимые подсистемы, можно получить с помощью перехода к новому базису в пространстве инфинитезимальных векторов \mathbf{d} в соответствии с формулой

$$\mathbf{y} = S\mathbf{d}. \quad (19)$$

Столбцы ортогональной матрицы S в формуле (19) являются базисными векторами всех НП Γ_i , входящих в разложение (17) приводимого представления Γ .

В работах [13, 15, 16, 19, 20] приведен целый ряд различных примеров расщепления вариационной системы, достигаемого с помощью вышеописанного теоретико-группового метода. В настоящей работе мы используем этот метод для исследования устойчивости ННМ Розенберга в математической модели (3).

3. Устойчивость π -моды

Использование в вышеописанном теоретико-групповом подходе полной группы симметрии G данной ННМ приводит, в общем случае, к расщеплению соответствующей ей вариационной системы на подсистемы *разной* размерности [15, 16]. Такой способ расщепления не всегда удобен, поскольку далее необходимо применять метод Флоке для исследования устойчивости нулевого решения каждой из подсистем. В нашем случае было целесообразно производить расщепление вариационной системы лишь по *трансляционной* подгруппе исследуемой ННМ, поскольку тогда все указанные подсистемы будут иметь одинаковую размерность. Приводимые далее подсистемы, на которые расщепляется вариационная система для каждой из ННМ (11–15) построены именно таким способом. Разумеется, для разных ННМ размерности указанных подсистем могут быть различными. Наиболее простым оказывается характер расщепления N -мерной вариационной системы для π -моды (11) – она распадается на N независимых скалярных уравнений вида

$$\ddot{\delta} = -4\delta c(t) \cos^2 \frac{k}{2}. \quad (20)$$

Поясним использованные здесь обозначения. При малых амплитудах ННМ переходят в линейные нормальные моды, которые в пределе $N \rightarrow \infty$ принято нумеровать волновым вектором (в нашем случае одномерным) $k = (2\pi/N)j$, где $j = 1, \dots, N$ – номер моды. Периодическая во времени функция $c(t) = 1/[1 - V^2(t)]$ определяется решением ведущего дифференциального уравнения (16) при $\mu = 4$, которое мы будем решать при начальных условиях

$$V(0) = A, \dot{V}(0) = 0. \quad (21)$$

Таким образом, A является амплитудой колебаний напряжения на конденсаторах.

Как показано в работе [9], при $A < 1$ уравнения (20) описывают периодический колебательный режим. При $A = 1$ это уравнение имеет особую точку, выше которой движение становится инфинитным. На рис. 2 приведены графики $V(t)$ как функции времени t при трех различных значениях амплитуды напряжения: $A = 0.1, 0.8, 0.999$. Из этого рисунка видно, что при малых амплитудах ($A = 0.1$) мы имеем практически гармонические колебания. При $A = 0.8$ уже отчетливо видна нелинейность рассматриваемого динамического режима, а при $A \rightarrow 1$ осцилляции $V(t)$ приобретают характерную «треугольную» форму.

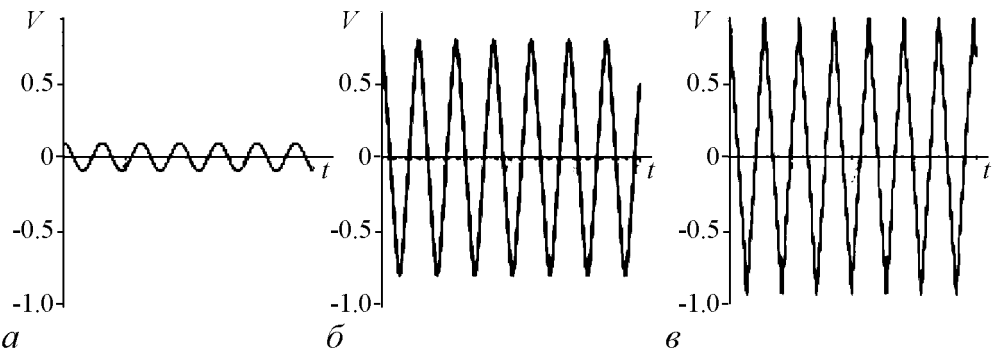


Рис. 2. График решения уравнения для π -моды при разных значениях ее амплитуды A : 0.1 (а); 0.8 (б); 0.999 (в)

Физической причиной потери устойчивости π -моды (как и всех других ННМ!) является *параметрический резонанс*. Рассмотрим этот вопрос на примере колебаний с достаточно малыми амплитудами. В случае $A \rightarrow 0$ можно пренебречь всеми нелинейными членами в уравнении (16), в результате чего оно превратится для π -моды в уравнение гармонического осциллятора с собственной частотой $\omega = 2$

$$\ddot{V} + 4V = 0. \quad (22)$$

Решение этого уравнения можно записать в виде

$$V(t) = A \sin(2t + \phi_0), \quad (23)$$

где ϕ_0 – некоторая начальная фаза. Рассмотрим теперь скалярные уравнения (20), на которые распадается вариационная система для π -моды. В принятом выше приближении $A \rightarrow 0$ можно считать, что $|V(t)| \ll 1$, и разложить входящую в (20) функцию $c(t) = 1/[1 - V^2(t)]$ в ряд по $V(t)$. Ограничившись лишь членами второго порядка, получим

$$\ddot{\delta} + 4\gamma[1 + V^2(t)]\delta = 0, \quad (24)$$

где $\gamma = \cos^2(k/2)$.

Полученное уравнение с учетом (23) и с заменой временной переменной $\tau = 2t + \phi_0$ преобразуется в уравнение Матье [30]

$$y'' + \{a - 2q \cos(2\tau)\}y = 0. \quad (25)$$

Здесь $y(\tau) = \delta(\tau - \phi_0)/2$, $a = (1 + A^2/2)\gamma$, $q = (A^2/4)\gamma$, а штрихами обозначено дифференцирование по новому временному аргументу τ .

Из приведенных соотношений следует линейная связь между параметрами a и q уравнения Матье

$$a = \gamma + 2q. \quad (26)$$

Хорошо известно, что в плоскости параметров $(a - q)$ уравнение Матье имеет бесконечное число зон устойчивости и неустойчивости нулевого решения. Последние суть области *параметрического резонанса*.

Для исследования устойчивости π -моды нам будет достаточно рассмотреть лишь первую зону неустойчивости уравнения Матье, которая на рис. 3 изображена серым цветом. На этом же рисунке показаны прямые линии $a = \gamma + 2q$ (см. уравнение (26)) для разных значений параметра γ , который, в свою очередь, связан с номером нормальной моды j формулой

$$\gamma = \cos^2\left(\frac{\pi j}{N}\right), \quad (27)$$

где N – количество элементов рассматриваемой электрической цепочки.

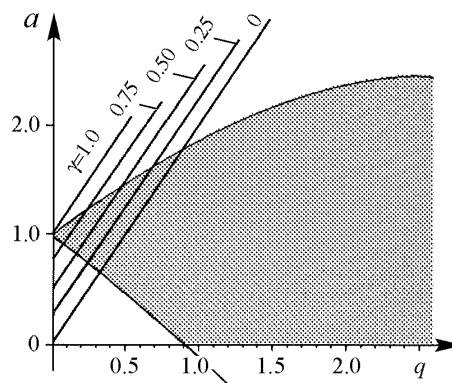


Рис. 3. Первая зона неустойчивости уравнения Матье и семейство прямых, определяемых уравнением (26)

При $A = 0$ коэффициент $c(t)$ в уравнениях (20) обращается в единицу, в силу чего они описывают набор гармонических осцилляторов с собственными частотами

$$\omega_j = \cos\left(\frac{k}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi j}{N}\right), \quad j = 1, \dots, N. \quad (28)$$

При $A \neq 0$ эти уравнения превращаются в уравнения Матье с параметрами, зависящими от номеров мод j . В силу периодической зависимости коэффициентов уравнений (20) от t , при определенных значениях параметров для некоторых из них может возникнуть явление параметрического резонанса: соответствующие переменные $\delta_j(t)$ начинают экспоненциально нарастать в процессе временной эволюции, что и приводит к потере устойчивости π -моды (для ее устойчивости необходимо, чтобы все возмущения $\delta_j(t)$ оставались бесконечно малыми на любом временном интервале).

Рассмотрим взаимодействие π -моды со «спящей» (равной нулю в начальный момент времени) j -й линейной нормальной модой $\delta_j(t)$. Будем постепенно увеличивать амплитуду π -моды A от значения $A = 0$. При этом из уравнения (26) с учетом $q = \gamma A^2/4$ видно, что точка с координатами (a, q) смещается в плоскости параметров уравнения Матье вдоль одной из изображенных на рисунке прямых вверх от своего начального положения $(\gamma, 0)$, причем вплоть до пересечения ею *нижней* границы заштрихованной области π -мода остается устойчивой. Этому пересечению отвечает максимальное значение амплитуды π -моды, A_c^j , при котором еще не происходит возбуждение спящей моды $\delta_j(t)$. Величину A_c^j можно найти, решая совместно уравнения

$$a = 1 - q - \frac{q^2}{8} \dots, \quad (29a)$$

$$a = \gamma + 2q, \quad (29b)$$

откуда имеем (уравнение (29a) определяет нижнюю границу серой области на рис. 3):

$$q = \frac{1 - \gamma}{3}. \quad (30)$$

С другой стороны, $q = \gamma A^2/4$, в силу чего окончательно получим, с учетом соотношения (27),

$$A_c^j = \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{tg}\left(\frac{\pi j}{N}\right). \quad (31)$$

Очевидно, потеря устойчивости π -моды будет определяться «самым слабым звеном», то есть той спящей нормальной модой $\delta_j(t)$, которой отвечает *минимальное значение* A_c^j . Из уравнения (31) следует, что это минимальное значение, A_c , достигается при $j = 1$, то есть нормальная мода $\delta_1(t)$ возбуждается первой при увеличении амплитуды π -моды A .

Тогда из формулы (31) следует, что при $N \rightarrow \infty$ критическое значение амплитуды π -моды, при которой теряется устойчивость, стремится к нулю: $A_c \rightarrow 0$.

На рис. 4 изображен график зависимости $A_c(N)$, который дает возможность судить об устойчивости π -моды для исследуемых электрических цепочек разной длины (N).

На этом рисунке сплошной линией изображен график функции $A_c(N)$, построенной на основе формулы (31) при $j = 1$ и вытекающей из анализа уравнения Матье. Штрихпунктирной линией показан график той же самой функции $A_c(N)$, которая была найдена с помощью вычисления и анализа показателей Флоке для уравнения (20). π -мода считалась неустойчивой при заданной амплитуде $V(0) = A$, если хотя бы один из этих показателей, вычисленный для всех значений γ из уравнения (27), отклонялся от единицы более, чем на $\varepsilon = 10^{-5}$. Видно, что оба графика на рис. 4 достаточно хорошо совпадают друг с другом для больших значений N . Отклонения являются существенными только для малых N (они связаны со сделанными приближениями при переходе от уравнения (20) к уравнению (25)).

Из рис. 4 также видно, что с ростом N критическая амплитуда A_c уменьшается и стремится к нулю при $N \rightarrow \infty$. С другой стороны, из уравнения (31) при $j = 1$ можно получить следующую асимптотическую зависимость A_c от N :

$$A_c(N) = \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{N} \right) = \frac{2\pi}{\sqrt{3}} \frac{1}{N} + O \left(\frac{1}{N^3} \right). \quad (32)$$

Таким образом, убывание $A_c(N)$ при $N \rightarrow \infty$ определяется степенной зависимостью вида

$$A_c(N) = CN^{-\beta}, \quad (33)$$

где $C \approx 3.628$, $\beta = -1$.

4. Исследование устойчивости других нелинейных нормальных мод

Приведенный выше анализ устойчивости π -моды (11) базировался на том факте, что вариационную систему можно расщепить на независимые скалярные уравнения (20). Исследование устойчивости других нелинейных нормальных мод (12–15) представляет собой значительно более сложную задачу, поскольку в результате расщепления с помощью теоретико-группового метода N -мерной вариационной системы мы получим уже системы второго или третьего порядка связанных дифференциальных уравнений с периодически зависящими от времени коэффициентами. Поскольку нам не известны какие-либо аналитические результаты, касающиеся устойчивости таких систем, наш дальнейший анализ сводится к применению к ним метода Флоке.

Исследование устойчивости ННМ ϕ_2 (12) сводится к анализу устойчивости нулевого решения следующей системы двух дифференциальных уравнений при раз-

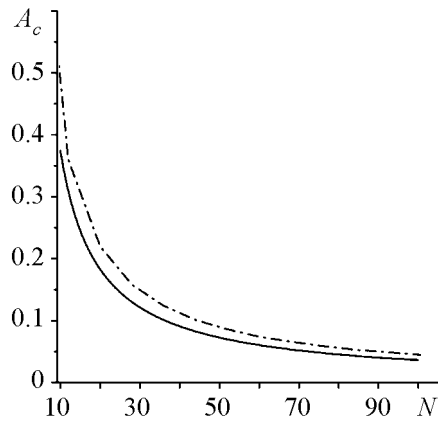


Рис. 4. Устойчивость π -моды для электрических цепочек разной длины (N): показана максимальная амплитуда (A_c) π -моды, при которой она является устойчивой. Пунктирная линия соответствует результатам вычислительного эксперимента, а сплошная — результатам приближенного анализа на основе уравнения Матье

Анализ устойчивости ННМ Φ_4 и Φ_5 сводится к исследованию устойчивости нулевого решения одной и той же трехмерной системы уравнений

$$\begin{cases} \ddot{\delta}_1 = g(t)c(t)\dot{\delta}_1 + p(t)c(t)\delta_1 + c(t)\delta_2 + c(t)e^{ik}\delta_3, \\ \ddot{\delta}_2 = \delta_1 - 2\delta_2 + \delta_3, \\ \ddot{\delta}_3 = g(t)c(t)\dot{\delta}_3 + c(t)e^{-ik}\delta_1 + c(t)\delta_2 + p(t)c(t)\delta_3, \end{cases} \quad (37)$$

где функции $p(t)$ и $g(t)$ также определяются уравнениями (35).

Графики зависимости критической амплитуды $A_c(N)$ для всех ННМ (11–15) приведены на рис. 3. Любопытно, что эти графики для мод Φ_4 и Φ_5 оказываются *идентичными*, несмотря на различие входящих в (37) функций $V(t)$, которые определяются ведущим уравнением (16) с различными значениями μ .

При $N \rightarrow \infty$ критические амплитуды $A_c(N)$ стремятся к нулю для всех ННМ (11–15). Выше был найден закон этого убывания (33) для π -моды Φ_1 . Представляется естественным поиск аналогичных асимптотических формул и для других ННМ на основе данных вычислительных экспериментов. С этой целью на рис. 6 для больших значений N ($N > 100$) нами построены в логарифмическом масштабе функции $A_c(N)$ для всех, определенных уравнениями (11–15), нелинейных нормальных мод.

Из рис. 6 хорошо видно, что $A_c(N)$ для всех ННМ являются степенными функциями вида (33), в силу чего графики зависимости $\ln A_c(N)$ от $\ln N$ представляют собой *прямые линии*. При этом коэффициент β определяется углом наклона соответствующей прямой к оси абсцисс.

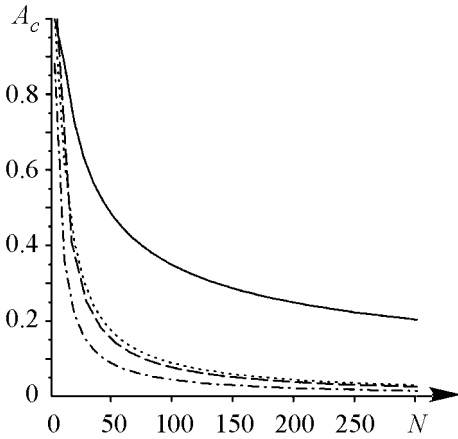


Рис. 5. Устойчивость нелинейных нормальных мод (11–15) для электрических цепочек разной длины (N): показана максимальная амплитуда (A_c) каждой из этих мод, при которой она еще является устойчивой. Сплошная линия соответствует моде Φ_2 (12), пунктирная – моде Φ_3 (13), штрих-пунктирная – π -моду Φ_1 (11), штриховая – модам Φ_4 (14) и Φ_5 (15)

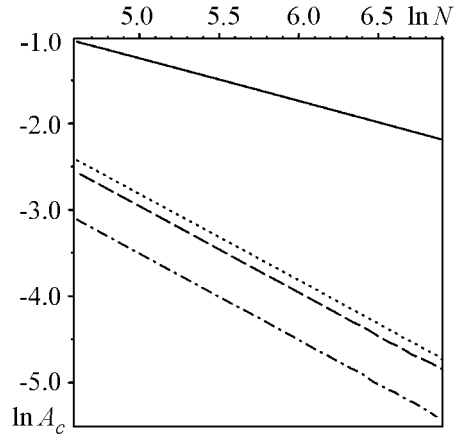


Рис. 6. Зависимость критической амплитуды A_c от длины цепочки N для нелинейных нормальных мод (11–15) в логарифмическом масштабе. Сплошная линия соответствует моде Φ_2 (12), пунктирная – моде Φ_3 (13), штрих-пунктирная – π -моду Φ_1 (11), штриховая – модам Φ_4 (14) и Φ_5 (15)

Нами были получены следующие приближенные значения постоянных C и β , входящих в формулу (33):

$\Phi_1 [a^2, iu]$ – π -мода (уравнение (11)): $\beta = 0.99, C = 4.28$;

$\Phi_2 [a^4, iu]$ (уравнение (12)): $\beta = 0.49, C = 3.41$;

$\Phi_3 [a^4, ai]$ (уравнение (13)): $\beta = 0.99, C = 8.57$;

$\Phi_4 [a^3, iu]$ и $\Phi_5 [a^3u, aiu]$ (уравнения (14) и (15)): $\beta = 0.99, C = 7.54$.

Исходя из приведенных результатов, можно с достаточной степенью достоверности утверждать, что для всех ННМ, кроме моды Φ_2 , коэффициент β , характеризующий убывание критической амплитуды A_c с ростом N , равен 1. Отклонение $\beta = 0.99$ от значения $\beta = 1$ можно объяснить погрешностью вычислений. Действительно, для π -моды (Φ_1) коэффициент β , найденный на основе данных вычислительного эксперимента, также оказался равным 0.99, в то время как теоретический анализ, проведенный в разделе 3, дает значение $\beta = 1$. Аналогично, с большой степенью уверенности можно предположить, что для моды Φ_2 точное значение коэффициента β равно не 0.49, а 0.5. Можно надеяться, что уточнение наших численных результатов даст именно такое значение β .

Заключение

В настоящей работе проведено исследование проблем существования и устойчивости всех делокализованных симметрично-обусловленных нелинейных нормальных мод в электрической цепочке, описываемой уравнением (3). Получены зависимости критической амплитуды A_c , определяющей верхнюю границу области устойчивости каждой из этих мод как функции числа ячеек цепочки N , и установлено асимптотическое поведение функции $A_c(N)$ при $N \rightarrow \infty$.

Заметим, что рассматриваемая математическая модель допускает существование не только делокализованных нелинейных нормальных мод, но и дискретных бризеров, представляющих собой периодические во времени и локализованные в пространстве динамические объекты, а также различного типа бушей ННМ. Этим вопросам будет посвящена отдельная публикация.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (гранты № 12-02-31507, № 12-02-31229) и ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» (госконтракт № П1467).

Библиографический список

1. *Trias E., Mazo J.J., Orlando T.P.* Discrete breathers in nonlinear lattices: Experimental detection in a Josephson array // *Physical Review Letters*. 2000. Vol. 84. P.741.
2. *Binder P., Abraimov D., Ustinov A.V., Flach S., Zolotaryuk Y.* Observation of breathers in Josephson ladders//*Physical Review Letters*. 2000. Vol. 84. P. 745.
3. *Sato M., Hubbard B.E., Sievers A.J., Ilic B., Czaplewski D.A., Craighead H.G.* Observation of locked intrinsic localized vibrational modes in a micromechanical oscillator array//*Physical Review Letters*. 2003. Vol. 90. P. 1.

4. *Sato M., Hubbard B.E., Sievers A.T.* Nonlinear energy localization and its manipulation in micromechanical oscillator arrays//Reviews of Modern Physics. 2006. Vol. 78. P. 137.
5. *Boechler N., Theocharis G., Job S., Kevrekidis P.G., Porter M.A., Daraio C.* Discrete breathers in one-dimensional diatomic granular crystals//Physical Review Letters. 2010. Vol. 104. P. 244302-4.
6. *Afshari E., Hajimiri A.* Nonlinear transmission lines for pulse shaping in silicon // Journal of Solid-state Circuits. 2005. Vol. 40. P. 744.
7. *Afshari E., Bhat H.S., Hajimiri A., Marsden J.E.* Extremely wideband signal shaping using one- and two-dimensional nonuniform nonlinear transmission lines//Journal of Applied Physics. 2006. Vol. 99. P. 054901.
8. *Bhat H.S., Afshari E.* Nonlinear constructive interference in electrical lattices // Physical Review E. 2008. Vol. 77. P. 066602.
9. *Bhat H. S., Osting B.* The zone boundary mode in periodic nonlinear electrical lattices//Physica D. 2009. Vol. 238. P. 1228.
10. *Budinsky N., Bountis T.* Stability of nonlinear models and chaotic properties of 1D Fermi-Pasta-Ulam lattices//Physica D. 1983. Vol. 8. P. 445.
11. *Sandusky K.W., Page J.B.* Interrelation between stability of extended normal modes and the existence of intrinsic localized modes in nonlinear lattices with realistic potentials//Physical Review B. 1994. Vol. 50. P. 866.
12. *Poggi P., Ruffo S.* Exact solution in the FPU oscillator chain//Physica D. 1997. Vol. 103. P. 251.
13. *Chechin G.M., Ryabov D.S.* Stability of nonlinear normal modes in the FPU- β chain in the thermodynamic Limit//Physical Review E. 2012. Vol. 85. P. 056601.
14. *Yoshimura K.* Modulational instability of zone boundary mode in non-linear lattices: rigorous result//Physical Review E. 2004. Vol. 70. P. 1661.
15. *Chechin G.M., Zhukov K.G.* Stability analysis of dynamical regimes in nonlinear systems with discrete symmetries//Phys. Rev. E. 2006. Vol. 73. P. 36216.
16. *Жуков К. Г., Чечин Г.М.* Теоретико-групповые методы при анализе устойчивости динамических режимов в нелинейных системах с дискретной симметрией//Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2008. Т. 16, № 4. С. 147.
17. *Chechin G.M., Novikova N.V., and Abramenko A.A.* Bushes of vibrational modes for Fermi–Pasta–Ulam chains//Physica D. 2002. Vol. 166. P. 208.
18. *Chechin G.M., Ryabov D.S., and Zhukov K.G.* Stability of low dimensional bushes of vibrational modes in the Fermi–Pasta–Ulam chains//Physica D. 2005. Vol. 203. P. 121.
19. *Безуглова Г.С., Гончаров П.П., Гуров Ю.В., Чечин Г.М.* Дискретные бризеры в скалярных динамических моделях на плоской квадратной решетке//Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2011. Т. 19, № 3. С. 89.
20. *Bezuglova G.S., Chechin G.M., Goncharov P.P.* Discrete breathers on symmetry-determined invariant manifolds for scalar models on the plane square lattice//Physical Review E. 2011. Vol. 84. P. 036606.

21. *Rosenberg R.M.* The normal modes of nonlinear n -degree-of-freedom systems // J. Appl. Mech. 1962. Vol. 29. P. 7.
 22. *Rink B.* Symmetric invariant manifolds in the Fermi–Pasta–Ulam lattice//Physica D. 2003. Vol. 175. P. 31.
 23. *Chechin G.M., Ryabov D.S., Sakhnenko V.P.* Bushes of normal modes as exact excitations in nonlinear dynamical systems with discrete symmetry//Nonlinear phenomena research perspectives / Ed. by C. W. Wang. NY.: Nova Science Publishers, 2007. P. 225.
 24. *Bountis T., Chechin C.M., Sakhnenko V.P.* Discrete symmetries and stability in Hamiltonian dynamics//International J. of Bifurc. Chaos. 2011. Vol. 21. P. 1539.
 25. *Chechin G.M., Sakhnenko V.P., Stokes H.T., Smith A.D., and Hatch D.M.* Non-linear normal modes for systems with discrete symmetry//Int. J. Non-Linear Mech. 2000. Vol. 35. P. 497.
 26. *Сахненко В.П., Чечин Г.М.* Симметричные правила отбора в нелинейной динамике автономных систем//ДАН. 1993. Т. 330. С. 308.
 27. *Сахненко В.П., Чечин Г.М.* Кусты мод и нормальные колебания для нелинейных динамических систем с дискретной симметрией//ДАН. 1994. Т. 338. С. 42.
 28. *Chechin G.M. and Sakhnenko V.P.* Interaction between normal modes in nonlinear dynamical systems with discrete symmetry. Exact results//Physica D. 1998. Vol. 117. P. 43.
 29. *Петрашень М.И., Трифонов Е.Д.* Применение теории групп в квантовой механике. М.: Наука, 1967.
 30. *Абрамовиц М., Стиган И.* Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами. М.: Наука, 1979.
- Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону* *Поступила в редакцию 19.07.2012*

INVESTIGATION OF STABILITY OF NONLINEAR NORMAL MODES IN ELECTRICAL LATTICES

S. A. Shcherbinin, P. P. Goncharov, G. M. Chechin

The problems of existence and stability of the symmetry-induced nonlinear normal modes in the electric chain of non-linear capacitors, connected to each other with linear inductors (the model described in Physica D238 (2009) 1228) are investigated. For all modes of this type, the upper limit of the stability region (in amplitude of voltage oscillations on capacitors) as a function of the chain cell number were found. Asymptotic formulas were determined at cell number tends to infinity.

Keywords: Nonlinear dynamics, lattice models, nonlinear normal modes, invariant manifolds, group-theoretical methods.



Щербинин Степан Александрович – родился в Ростове-на-Дону (1986). В настоящее время – аспирант физического факультета Южного федерального университета. Специализируется на кафедре теоретической и вычислительной физики. Область научных интересов – нелинейная динамика и вычислительная физика.

344006 Ростов-на-Дону, ул. Б. Садовая, 105/42
Южный федеральный университет
E-mail: step_scherbinin@list.ru



Гончаров Петр Петрович – родился в Донецке Ростовской области (1986). В настоящее время – аспирант физического факультета Южного федерального университета. Специализируется на кафедре теоретической и вычислительной физики. Область научных интересов – нелинейная динамика и вычислительная физика. Автор четырех научных работ.

344006 Ростов-на-Дону, ул. Б. Садовая, 105/42
Южный федеральный университет
E-mail: petro_zzz@rambler.ru



Чечин Георгий Михайлович – родился в Новочеркасске (1937), окончил РГУ (1960), кандидат физико-математических наук, доцент кафедры теоретической и вычислительной физики Южного федерального университета. Научный руководитель студенческой «Лаборатории нелинейной кристаллофизики» при НИИ физики ЮФУ, Соросовский доцент. Читает лекции по численным методам, вычислительной и нелинейной физике, теории групп. Область научных интересов – теоретико-групповые методы в физике, теория фазовых переходов, нелинейная динамика и вычислительная физика. Автор более 100 научных публикаций.

344006 Ростов-на-Дону, ул. Б. Садовая, 105/42
Южный федеральный университет
E-mail: gchechin@gmail.com



ОЦЕНКА НАПРАВЛЕНИЯ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ МЕЖДУ МОДЕЛЬНЫМИ СИСТЕМАМИ СВЯЗАННЫХ ОСЦИЛЛЯТОРОВ ПРИ СИЛЬНОЙ СВЯЗИ

В. С. Хорев

С помощью метода моделирования фазовой динамики исследована задача выявления по временным рядам значимого взаимодействия двух колебательных систем, а также преимущественного направления и времени задержки в связи для случая сильной связи систем. Рассмотрены модельные системы связанных осцилляторов с различными видами функций связи.

Ключевые слова: Сильная связь, взаимодействие, направление связи, задержка связи, колебательные системы.

Введение

Задача определения характера связи между двумя колебательными системами по временным рядам, которые могут быть зашумлены и хаотичны, возникает в различных приложениях [1, 2]. Особенно сложно выявить направленность достаточно сильной связи, вызывающей синхронизацию систем, по коротким временным рядам – порядка нескольких десятков характерных периодов колебаний [3]. Для достижения успеха в этой сложной ситуации требуется высокая чувствительность метода диагностики связи, которую обеспечивает слежение за фазами колебаний [4], так как фаза является характеристикой процесса, чувствительной к внешним воздействиям на систему [5].

Один из наиболее чувствительных методов оценки связи между двумя осцилляторами был предложен в [6]. Он основан на моделировании фазовой динамики и применим в случае достаточно длинных временных рядов (несколько сотен характерных периодов) и малых шумов. В работе [7] метод обобщен на случай более коротких временных рядов и существенных шумов за счет специальных поправок и эмпирически найденного порогового значения характеристики связи, соответствующего 95%-й доверительной вероятности вывода о наличии связи. Метод нашел

применения в нейрофизиологии [8] и климатологии [9]. Он был развит далее в работе [10], где предложены модифицированные характеристики связи и получено аналитическое выражение для доверительной вероятности, с которой можно сделать вывод о наличии связи. Однако оба упомянутых улучшения метода ориентированы на случай систем со слабой связью, описываемой в моделях членами невысокого порядка в уравнениях фазовой динамики, в связи с чем возникает вопрос о применимости метода в случае сильной связи.

1. Метод моделирования фазовой динамики

Для оценки направления взаимодействия между двумя осцилляторными системами по их временным рядам использован метод, основанный на моделировании фазовой динамики. Основная идея метода – оценить, насколько сильно зависят будущие значения фазы одной системы от текущего значения фазы другой системы. Для этого по исходным временным рядам $\{x_1(t_1), \dots, x_1(t_N)\}$ и $\{x_2(t_1), \dots, x_2(t_N)\}$ от двух систем (где $t_i = i\Delta t$ – интервал выборки, $i = 1, \dots, N$, N – длина ряда) рассчитываются временные ряды фаз колебаний $\{\varphi_1(t_1), \dots, \varphi_1(t_N)\}$ и $\{\varphi_2(t_1), \dots, \varphi_2(t_N)\}$. На основе последних строится эмпирическая математическая модель [6], по коэффициентам которой оцениваются характеристики связанности. По временным рядам фаз построим модель динамики в виде

$$\begin{aligned}\Delta\varphi_1(t) &= F_1(\varphi_1(t), \varphi_2(t) + \varepsilon_1(t)), \\ \Delta\varphi_2(t) &= F_2(\varphi_2(t), \varphi_1(t) + \varepsilon_2(t)),\end{aligned}\tag{1}$$

где $\Delta\varphi_k(t) = \varphi_k(t + \tau) - \varphi_k(t)$, $k = 1, 2$, τ – конечный временной интервал; $\varepsilon_k(t)$ – шумы с нулевым средним; F_k – тригонометрические многочлены следующего вида:

$$\begin{aligned}F_1(\varphi_1, \varphi_2, \mathbf{a}_1) &= \alpha_0^{(1)} + \sum_{m,n} \left(\alpha_{m,n}^{(1)} \cos(m\varphi_1 - n\varphi_2) + \beta_{m,n}^{(1)} \sin(m\varphi_1 - n\varphi_2) \right), \\ F_2(\varphi_2, \varphi_1, \mathbf{a}_2) &= \alpha_0^{(2)} + \sum_{m,n} \left(\alpha_{m,n}^{(2)} \cos(m\varphi_2 - n\varphi_1) + \beta_{m,n}^{(2)} \sin(m\varphi_2 - n\varphi_1) \right),\end{aligned}\tag{2}$$

где $\mathbf{a}_k \equiv (\alpha_0^{(k)}, \{\alpha_{m,n}^{(k)}\}, \{\beta_{m,n}^{(k)}\})$ – векторы коэффициентов, $k = 1, 2$. Диапазон суммирования, то есть набор значений индексов m и n , определяющих, какие слагаемые присутствуют в многочлене, может быть свой для каждого осциллятора [11]. А сами оценки силы воздействия $y_{1,2}$ рассчитываются следующим образом:

$$y_{1,2} = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} (\partial F(\varphi_{1,2}, \varphi_{2,1}, \mathbf{a}_{1,2}) / \partial \varphi_{2,1})^2 d\varphi_1 d\varphi_2.\tag{3}$$

Данные оценки выводились для случая слабой связи, когда стационарное вероятностное распределение циклических фаз ($\varphi_1 \bmod 2\pi, \varphi_2 \bmod 2\pi$) является равномерным в квадрате $[0, 2\pi) \times [0, 2\pi)$, а слагаемые в многочлене F_k при равномерной плотности распределения являются взаимно ортогональными функциями в этой области [11]. Вопрос о работоспособности данной методики в случае сильной связи остаётся открытым и требует дальнейшего исследования.

2. Тестовые модели

В качестве тестовых моделей выступали:

- фазовые осцилляторы;
- однонаправленно связанные осцилляторы ван дер Поля.

Для широкого круга ситуаций фазовая динамика осцилляторов, имеющих ярко выраженный ритм, адекватно описывается стохастическими дифференциальными уравнениями [12], поэтому в качестве наиболее простой и универсальной модели взаимодействующих систем были выбраны однонаправленно связанные фазовые осцилляторы следующего вида:

$$\begin{aligned}d\varphi_1/dt &= f_1 + \xi_1(t), \\d\varphi_2/dt &= f_2 + \kappa \sin(\varphi_1(t - \Delta) - \varphi_2(t)) + \xi_2(t),\end{aligned}\tag{4}$$

где $f_{1,2}$ – частоты осцилляторов, $\xi_{1,2}(t)$ – белые шумы с нулевым средним, κ – коэффициент связи между осцилляторами, Δ – задержка в связи между системами.

Для качественного описания динамики автоколебательных систем в ряде случаев хорошо подходит модель в виде осциллятора ван дер Поля [13, 14]. Поэтому в качестве второй исследуемой модели рассмотрим однонаправленно связанные осцилляторы ван дер Поля

$$\begin{aligned}\frac{d^2 x_1}{dt^2} - (\lambda - x_1^2) + f_1 x_1 + \xi_1 &= 0, \\ \frac{d^2 x_2}{dt^2} - (\lambda - x_2^2) + f_2 x_2 + \kappa \left(\frac{dx_2}{dt} - \frac{dx_{1,\Delta}}{dt} \right) + \xi_2 &= 0,\end{aligned}\tag{5}$$

где $f_{1,2}$ – собственные частоты, λ – коэффициент нелинейности, $\xi_{1,2}$ – белые шумы с нулевым средним, κ – коэффициент связи между осцилляторами, Δ – задержка в связи между системами.

3. Результаты

3.1. Два однонаправленно связанных фазовых осциллятора. Рассмотрим зависимости оценки направления воздействия и времени запаздывания в связи от вариации различных параметров осцилляторов. При этом ответим на следующие вопросы:

- при каких условиях оценка времени задержки в связи остается несмещенной;
- при каких условиях вероятность ошибочных выводов о направлении связи не превышает 5%?

Кроме оценки количества ошибочных выводов важен вопрос и о том, при каких условиях достаточно высока вероятность правильных выводов о направлении связи. Для ответа на эти вопросы рассчитываем зависимости оценок сил связи от пробного времени задержки по временному ряду. Смещение оценки определяется разницей между значением, заданным в уравнениях модели, и значением, полученным по временному ряду. 95%-й уровень значимости рассчитывался по 100 реализациям суррогатных рядов, полученных из исходных временных рядов фаз осцилляторов путём случайной перестановки участков ряда длительностью 2π . При таком

способе приготовления суррогатных данных происходит разрушение связи между исследуемыми временными рядами при сохранении их основных свойств.

3.1.1. Влияние силы связи между осцилляторами на оценку времени задержки в связи. Используемые в эксперименте временные ряды систем (4) были получены путём численного интегрирования уравнений методом Эйлера с шагом 0.02π при частотах $f_{1,2} \approx 0.1$. Каждое из начальных условий выбиралось случайно из отрезка $[0..2\pi]$ (использовалось равномерное распределение).

На рис. 1 представлены зависимости оценок сил связи от пробного времени задержки. Видно, что максимум y_{12} – оценки воздействия со стороны первого осциллятора на второй – соответствует реальному времени задержки в связи и превышает уровень значимости, рассчитанный по суррогатным данным. Оценки воздействия со стороны второго осциллятора на первый (y_{21}) не превышают 95%-й уровень значимости. Это свидетельствует об отсутствии значимого взаимодействия.

На рис. 2, а представлена зависимость оценки времени задержки в связи от коэффициента связи между системами. Видно, что оценки времени задержки в связи имеют меньший разброс и практически не смещены, когда коэффициент связи принимает значения выше 0.4. На рис. 2, б представлена зависимость индекса фазовой синхронизации от коэффициента связи между системами. Из графика видно, что с увеличением коэффициента связи уровень синхронизации между осцилляторами растёт по линейному закону. Однако высокий уровень синхронизации не мешает получению правильной оценки времени задержки в связи (см. рис. 2, а).

3.1.2. Влияние расстройки частот на оценку времени задержки в связи. На рис. 2, в представлена зависимость оценки времени задержки в связи от расстройки частот. Видно, что большая расстройка частот приводит к ухудшению оценок времени задержки в связи, что отражено на графике значительными отклонениями от значения реального времени задержки в связи между системами. На рис. 2, г представлена зависимость индекса фазовой синхронизации от расстройки частот. Видно, что с увеличением расстройки значения индекса фазовой синхронизации немного уменьшаются.

3.1.3. Влияние шума на оценку времени задержки в связи. На рис. 2, д и е представлены зависимости оценок времени задержки в связи от уровня шума при одинаковом коэффициенте связи и разной длине ряда. Из рис. 2, д видно, что график оценки времени задержки имеет пологий вид. Можно сделать вывод, что значение оценки времени задержки в связи слабо зависит от уровня шума в случае достаточно длинного временного ряда при большом уровне связи. Из рис. 2, е, построенного для случая коротких временных рядов, видно, что при слабых уровнях шума оценки времени задержки определяются хуже и имеют тенденцию к смещению и увеличению разброса. Кроме того, увеличивается риск получения ложного вывода о преимущественном направлении воздействия, поскольку для случая очень слабых шумов при сильной синхронизации можно получить значения оценок сил связи, превышающие 95%-й уровень значимости, рассчитанный с помощью суррогатных данных.

3.2. Два однонаправленно связанных осциллятора ван дер Поля. Рассмотрим зависимости оценки направления воздействия и времени запаздывания в связи от шума в случае сильной связи. При этом ответим на следующие вопросы:

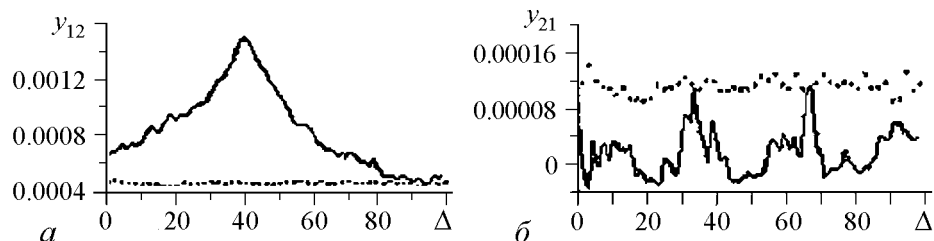


Рис. 1. Зависимости оценок сил связи от пробного времени задержки при $\kappa = 0.7$, $\Delta_{\text{ист}} = 40$, расстройке частот $\delta f = 0.02$, длине ряда 350 характерных периодов и дисперсии шума $\sigma = 0.8$. Пунктирной линией показан 95%-й уровень значимости, рассчитанный по суррогатным рядам

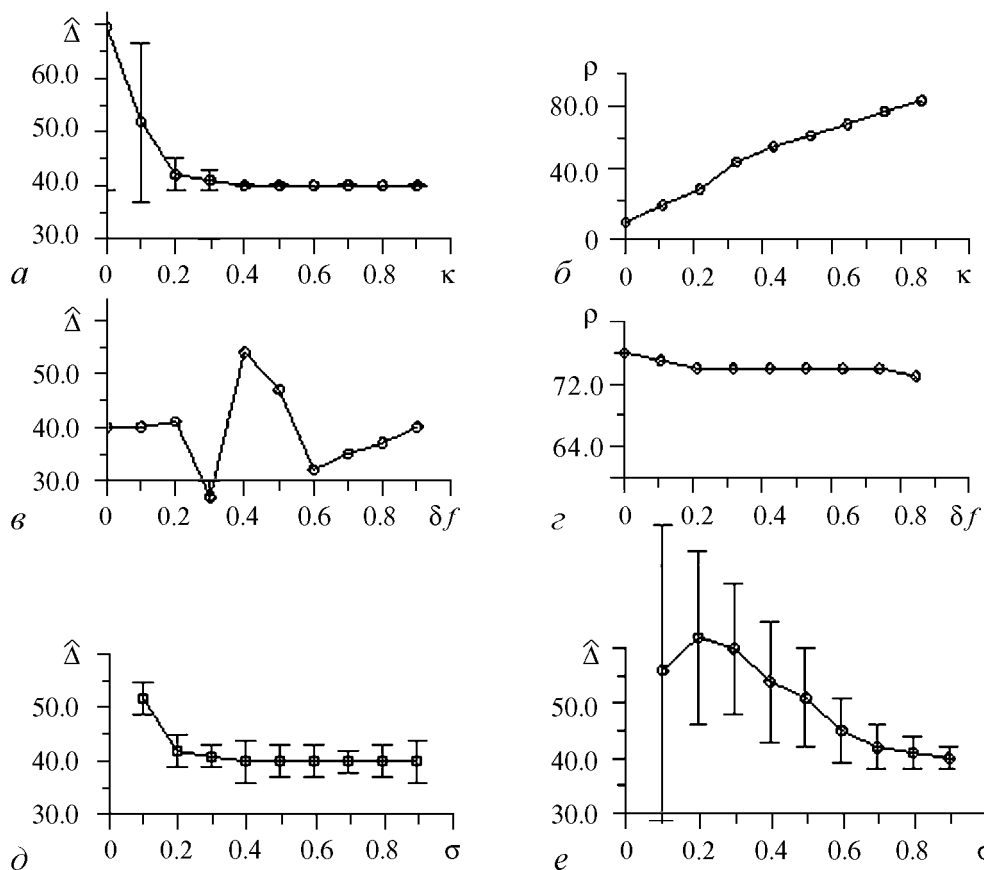


Рис. 2. Зависимости от коэффициента силы связи оценки времени задержки (а) и индекса фазовой синхронизации (б) при $\sigma = 0.6$, $\Delta = 40$, расстройке частот $\delta f = 0.02$ и длине ряда 350 характерных периодов. Зависимости от расстройки частот оценки времени задержки (в) и индекса фазовой синхронизации (г) при $\kappa = 0.7$, $\sigma = 0.3$, $\Delta = 40$, длине ряда 350 характерных периодов. Зависимости оценки времени задержки от уровня шума при $\kappa = 0.7$, $\Delta = 40$, $\delta f = 0.02$, длине ряда 350 характерных периодов (д) и 70 (е). Вертикальными ограничителями показан разброс относительно среднего

- возможно ли получение несмещенных оценок запаздывания при большом уровне шума;
- существует ли зависимость смещения оценок задержки в связи от силы связи;
- какой вклад вносит динамический и измерительный шум в динамику фазы осциллятора ван дер Поля?

Для ответа на эти вопросы рассчитывались зависимости оценок сил связи от пробного времени задержки по временному ряду, а также автокорреляционная функция и распределение свернутой фазы.

3.2.1. Зависимость оценки времени задержки в связи от длины ряда.

Используемые в эксперименте временные ряды систем (5) были получены путём численного интегрирования уравнений методом Эйлера с шагом 0.01 при частотах $f_{1,2} \approx 0.1$. Участок, содержащий переходный процесс (50 характерных периодов), во временной ряд не записывался. Ошибка определения времени задержки в связи систем рассчитывалась следующим образом:

$$\varepsilon = \frac{\hat{\Delta} - \Delta}{\Delta} \cdot 100\%, \quad (6)$$

где Δ – истинное время задержки в связи, а $\hat{\Delta}$ – оценка, полученная из анализа временных рядов.

На рис. 3 представлена зависимость ошибки определения времени задержки в связи от длины ряда и уровня шума при большом значении коэффициента связи. Видно, что области, в которых ошибка мала, расположены в правой верхней части рисунка, то есть при высоких значениях уровня шума и длины ряда. Таким образом, увеличение длины ряда позволяет более точно определить время запаздывания в связи систем. Кроме того, более точно определить задержку в связи позволяет увеличение уровня шума.

3.2.2. Влияние измерительного шума на оценку времени задержки в связи.

На рис. 4 показаны распределения циклической фазы ψ временных рядов осцилляторов (5) при различных уровнях нелинейности и дисперсии измерительного шума.

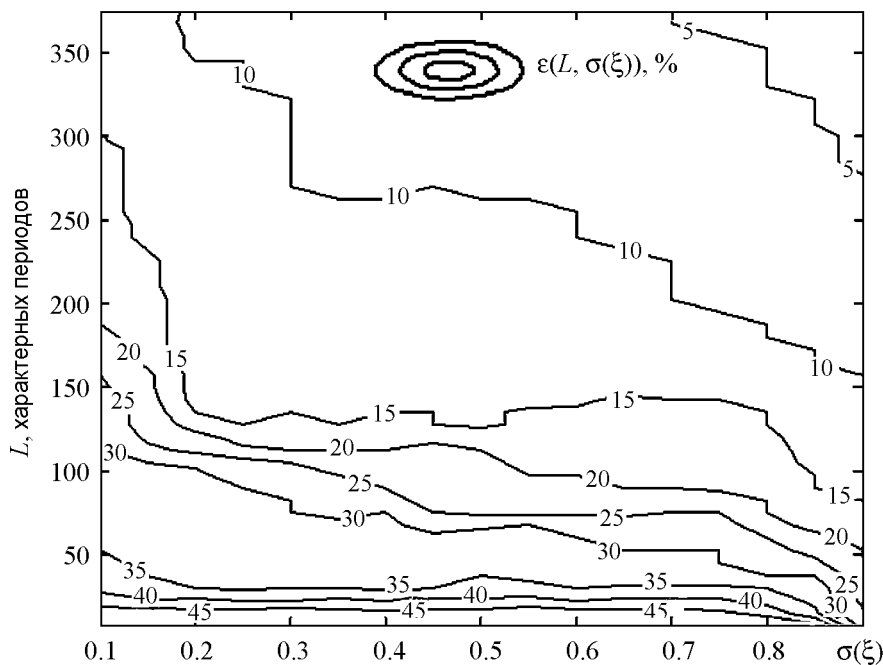


Рис. 3. Ошибка оценки времени задержки в зависимости от длины ряда и уровня шума при $\kappa = 0.7$, $\Delta = 40$

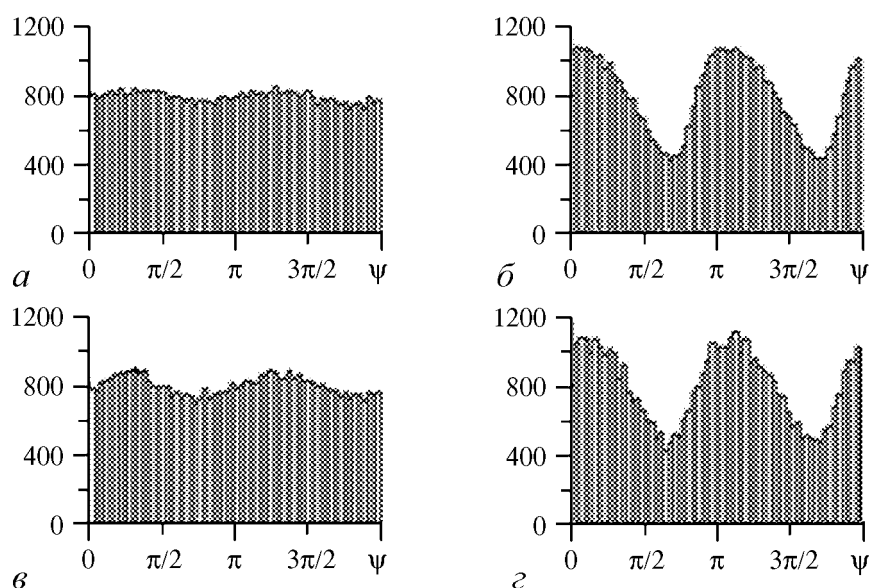


Рис. 4. Распределения циклической фазы при $\kappa = 0.9$ и длине ряда 50 характерных периодов. Дисперсии измерительного шума σ : 0.2 (a, \bar{b}), 0.9 (v, z). Уровень нелинейности $\lambda_{1,2}$: 0.1 (a, v), 1.0 (\bar{b}, z)

Рис. 4, a и v , соответствующие фазам сигналов систем в случае слабой нелинейности ($\lambda = 0.1$), демонстрируют более равномерный характер распределения ψ и, как следствие, дают возможность более точно рассчитать фазу [15], чем в случае сильной нелинейности $\lambda = 1.0$, рис. 4, \bar{b} и z . Распределения ψ , представленные на рис. 4, v и z (для $\sigma = 0.9$) носят менее плавный характер, чем представленные на рис. 4, a и \bar{b} (для $\sigma = 0.3$), соответственно, что объясняется более высоким уровнем измерительного шума в системах. Однако существенной зависимости распределения ψ от измерительного шума в широких пределах не наблюдается. Эти результаты указывают на то, что точность определения оценки запаздывания в связи в большей степени зависит от нелинейности взаимодействующих систем, чем от уровня шума.

Заключение

На практике, когда приходится иметь дело с сигналами различной природы, в случае сильной связи между системами, велика вероятность получения неточной оценки времени задержки в связи и её ошибочного толкования. В этом случае следует принимать во внимание зависимости оценки времени задержки от значения управляющих параметров исследуемых систем.

В работе на простых эталонных моделях связанных автоколебательных систем исследованы свойства оценки времени задержки в связи с помощью метода моделирования фазовой динамики для случая сильной связи. Показано, что при больших значениях коэффициента связи может быть получена точная оценка времени задержки в связи между системами. Однако при больших значениях расстройки частот, слабом уровне шума и малой длине ряда точность оценки снижается. Уменьшение уровня шума также увеличивает количество ложных выводов о преимущественном

направлении взаимодействия между системами. Соответственно, увеличение длины ряда, уровня шума и коэффициента связи способствует более точному определению направления и времени задержки в связи между осцилляторами.

Автор выражает благодарность В.И. Пономаренко и М.Д. Прохорову за плодотворные обсуждения.

Работа выполнена при поддержке грантов РФФИ № 12-02-00377 и 13-02-00227, гранта президента РФ для молодых ученых МК-4435.2012.8

Библиографический список

1. *Arnhold J., Grassberger P., Lehnertz K., Elger C.E.* A robust method for detecting interdependences: Application to intracranially recorded EEG // *Physica D: Nonlinear Phenomena*. 1999. Vol. 134. P. 419.
2. *Quiñan Quiroga R., Kraskov A., Kreuz T., Grassberger P.* Performance of different synchronization measures in real data: A case study on electroencephalographic signals // *Phys. Rev. E*. 2002. Vol. 65. 041903.
3. *Smirnov D.A., Bodrov M.B., Perez Velazquez J.L., Wenneberg R.A., Bezruchko B.P.* Estimation of coupling between oscillators from short time series via phase dynamics modeling: Limitations and application to EEG data // *Chaos*. 2005. Vol. 15. 024102.
4. *Smirnov D.A., Andrzejak R.G.* Detection of weak directional coupling: Phase dynamics approach versus state space approach // *Phys. Rev. E*. 2005. Vol. 71. 036207.
5. *Пиковский А.С., Розенблюм М.Г., Куртс Ю.* Синхронизация: фундаментальное нелинейное явление. М.: Техносфера, 2002.
6. *Rosenblum M.G., Pikovsky A.S.* Detecting direction of coupling in interacting oscillators // *Phys. Rev. E*. 2001. Vol. 64. 045202.
7. *Smirnov D.A., Bezruchko B.P.* Estimation of interaction strength and direction from short and noisy time series // *Phys. Rev. E*. 2003. Vol. 68. 046209.
8. *Smirnov D.A., Barnikol U.B., Barnikol T.T., Bezruchko B.P., Hauptmann C., Buehrle C., Maarouf M., Sturm V., Freund H.-J., Tass P.A.* The generation of Parkinsonian tremor as revealed by directional coupling analysis // *Europhys. Lett*. 2008. Vol. 83. 20003.
9. *Mokhov I.I., Smirnov D.A.* El Nino Southern Oscillation drives North Atlantic Oscillation as revealed with nonlinear techniques from climatic indices // *Geophysical Research Letters*. 2006. Vol. 33. 024557.
10. *Smirnov D.A., Bezruchko B.P.* Detection of couplings in ensembles of stochastic oscillators // *Phys. Rev. E*. 2009. Vol. 79. 046204.
11. *Смирнов Д.А., Карпеев И.А., Безручко Б.П.* Выявление связи между осцилляторами по коротким временным рядам: условие применимости метода моделирования фазовой динамики // *Письма в ЖТФ*. 2007. Т. 33, вып. 4. С. 19.
12. *Pikovsky A.S., Rosenblum M.G., Kurths J.* Phase synchronization in regular and chaotic systems // *Int. J. Bifurc. Chaos*. 2000. Vol. 10. P. 2291.

13. Schäfer C., Rosenblum M.G., Abel H.-H., Kurths J. Synchronization in the human cardiorespiratory system //Phys. Rev. E. 1999. Vol. 60. P. 857.
14. Janson N.B., Balanov A.G., Anishchenko V.S., McClintock P.V.E. Coherence resonance versus synchronization in a periodically forced self-sustained system // Phys. Rev. E. 2002. Vol. 65. 036212.
15. Kralemann B., Cimponeriu L., Rosenblum M.G., Pikovsky A.S., and Mrowka R. Phase dynamics of coupled oscillators reconstructed from data // Physical Rev E. 2008. Vol. 77. 066205.

Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского

Поступила в редакцию 12.11.2012

ESTIMATION OF INTERACTION DIRECTION BETWEEN OSCILLATORY MODEL SYSTEMS IN CASE OF CLOSE COUPLING

V. S. Khorev

The task of detection statistically significant interaction, its direction and delay between time data series of two oscillatory systems in case of close coupling is investigated with nonlinear modeling approach. Numerical experiments on oscillatory model systems with different coupling function variants are used to study main dependences.

Keywords: Close coupling, interaction, coupling direction, time delay, oscillatory systems.



Хорев Владимир Сергеевич – родился в Гомеле (1987), окончил магистратуру в Саратовском государственном университете им. Н.Г. Чернышевского по специальности «биомедицинская инженерия» (2011). Аспирант кафедры динамического моделирования и биомедицинской инженерии СГУ. Принимал участие в 10 международных и всероссийских конференциях. Область научных интересов – нелинейная динамика, анализ временных рядов, математическое моделирование, приложение методов нелинейного анализа к задачам биофизики и медицины.

410012 Саратов, ул. Астраханская, 83
Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского
E-mail: zergs@inbox.ru



ЭФФЕКТ РЕДКОЙ ВЫБОРКИ ПРИ ОЦЕНКЕ НАПРАВЛЕННЫХ СВЯЗЕЙ ПО ВРЕМЕННЫМ РЯДАМ

Д. А. Смирнов, Б. П. Безручко

В различных областях исследований возникает задача обнаружения и количественной оценки направленных связей (взаимных воздействий) между системами по дискретным записям их колебаний – временным рядам. В данной работе показано, что при использовании для ее решения традиционных характеристик «причинности по Грейнджеру» результаты существенно зависят от интервала выборки (шага дискретизации по времени). Выявлены причины и характер влияния интервала выборки на численные значения оценок связи и объяснено, почему при большом интервале (редкой выборке) могут быть получены ошибочные выводы о двунаправленной связи в случае однонаправленно связанных систем. Такой эффект редкой выборки продемонстрирован как для линейных, так и для нелинейных систем в различных режимах динамики.

Ключевые слова: Связанные нелинейные системы, временные ряды, однонаправленная связь, двунаправленная связь, причинность по Грейнджеру.

Введение

Исследования связанных колебательных систем – традиционная проблематика теории колебаний и нелинейной динамики. Многочисленные работы посвящены изучению условий синхронизации различных систем (см., например, [1–4]) и соответствующей обратной задаче – оценке степени синхронности колебаний по временным рядам, то есть дискретным последовательностям значений наблюдаемых величин (см., например, [5–9]). В последние годы среди обратных задач нелинейной динамики все большее внимание уделяется задаче выявления «направленных связей» (взаимных воздействий) по наблюдаемым данным, что актуально в механике [10], радиофизике [11,12], геофизике [13–15] и биофизике [16–21]. В ряде постановок фундаментально важен вопрос о том, является ли связь одно- или двунаправленной [14,16–21]. Для решения таких задач оказалось полезным понятие «причинности по Грейнджеру», предложенное в эконометрике [22,23] и становящееся все более популярным в физических науках [14–16].

Говорят, что система Y влияет на систему X «по Грейнджеру», если прогноз будущего поведения X улучшается при учете данных об Y по сравнению с прогнозом, основанным только на данных об X . Ненулевое улучшение прогноза (УП) ассоциируют с наличием физического воздействия Y на X , а ненулевые УП «в обе стороны» обычно интерпретируются как признак двунаправленной связи. Прогноз осуществляется на один временной шаг Δt – интервал выборки, который определяется процедурой измерений, например, частотой дискретизации аналого-цифрового преобразователя. При этом в физических исследованиях обычно не принимают во внимание возможность сложной зависимости УП от Δt . В математической литературе отмечалось, что при достаточно редкой выборке (большом Δt) даже в случае *однонаправленно* связанных систем могут наблюдаться ненулевые УП *в обе стороны*, то есть «ложные связи» [24,25]. Это принципиальное обстоятельство остается недооцененным в работах по анализу временных рядов, возможно, потому что не проводился анализ количественных значений «ложных связей» и не было показано, насколько значителен может быть эффект ложных связей из-за редкой выборки на практике.

В данной работе проводится такой количественный анализ, и на примере эталонных колебательных систем с однонаправленной связью демонстрируется типичность больших значений УП в «ложном» направлении. Показаны условия, когда этот эффект наиболее силен, так что УП в «ложном» направлении могут даже превосходить УП в «правильном» направлении. Ниже, в п. 1 вводится формальное определение причинности по Грейнджеру. Затем демонстрируется эффект редкой выборки на линейных осцилляторах (п. 2) и нелинейных отображениях (п. 3). Выводы представлены в Заключение.

1. Причинность по Грейнджеру

Здесь мы рассматриваем лишь такую постановку задачи, в которой есть две исследуемых системы и отсутствует любая третья система, которая влияла бы на них. Наличие «скрытой» третьей системы сильно осложняло бы выводы о характере взаимосвязей [23]. Но и в этой элементарной постановке двух систем, с которой необходимо уметь справляться для решения более сложных задач, возникают непростые вопросы. Итак, пусть $(X(t), Y(t))$ – двухмерный случайный процесс. Наблюдаются значения в дискретные моменты времени с интервалом выборки Δt : $x_n = X(n\Delta t)$, $y_n = Y(n\Delta t)$, где n – целое число, которое обычно называют дискретным временем. Обозначим $x_n^- = \{x_{n-k}\}_{k=1}^\infty$ и $y_n^- = \{y_{n-k}\}_{k=1}^\infty$ – последовательности значений x_n и y_n , предшествующие n -му моменту времени. Из всех способов индивидуального (без учета Y) прогноза x_n наименьший средний квадрат ошибки имеет место в случае $x_n^{\text{ind}} = M[x_n | x_n^-]$, где $M[x_n | x_n^-]$ – математическое ожидание x_n при условии x_n^- . Обозначим средний квадрат ошибки $\sigma_{x,\text{ind}}^2 = M[(x_n - x_n^{\text{ind}})^2]$. Наилучший совместный (с учетом Y) прогноз x_n^{jo} = $M[x_n | x_n^-, y_n^-]$ дает ошибку $\sigma_{x,\text{jo}}^2 = M[(x_n - x_n^{\text{jo}})^2]$. Нормированная величина УП $G_{y \rightarrow x} = (\sigma_{x,\text{ind}}^2 - \sigma_{x,\text{jo}}^2) / \sigma_{x,\text{ind}}^2$ характеризует причинность (влияние) по Грейнджеру в направлении $Y \rightarrow X$ [23]. Аналогично определяется влияние $X \rightarrow Y$.

Эта идея была впервые реализована [22] для стационарных гауссовских процессов (x_n, y_n) . Было использовано то обстоятельство, что такой процесс единственным образом описывается двухмерным линейным уравнением авторегрессии (АР) вида

$$\begin{aligned} x_n &= \sum_{k=1}^{\infty} a_{x,k} x_{n-k} + \sum_{k=1}^{\infty} b_{x,k} y_{n-k} + \xi_n, \\ y_n &= \sum_{k=1}^{\infty} a_{y,k} y_{n-k} + \sum_{k=1}^{\infty} b_{y,k} x_{n-k} + \psi_n, \end{aligned} \quad (1)$$

где (ξ_n, ψ_n) – двухмерный гауссовский белый шум с нулевым средним, дисперсиями $(\sigma_{\xi}^2, \sigma_{\psi}^2)$ и ковариацией $M[\xi_n \psi_n] = \gamma$. Условие, что шум «белый», эквивалентно минимуму ошибки прогноза [26], так что имеет место $\sigma_{\xi}^2 = \sigma_{x,\text{joi}}^2$ и $\sigma_{\psi}^2 = \sigma_{y,\text{joi}}^2$. Далее, процесс x_n подчиняется и одномерному уравнению АР, то есть первому уравнению (1) с нулевыми $b_{x,k}$ и белым шумом ξ'_n , дисперсия которого $\sigma_{\xi'}^2 = \sigma_{x,\text{ind}}^2$. Теперь по дисперсиям шумов $\sigma_{\xi}^2, \sigma_{\xi'}^2$ рассчитывается величина $G_{y \rightarrow x}$. Аналогично рассчитывается $G_{x \rightarrow y}$.

Чтобы оценить теоретические величины $G_{y \rightarrow x}$ и $G_{x \rightarrow y}$ по конечному временному ряду $\{x_n, y_n\}_{n=1}^N$, все суммы в уравнениях (1) ограничивают p -м членом (вместо ∞) и оценивают коэффициенты и дисперсии шумов в АР-моделях порядка p с помощью стандартного метода наименьших квадратов. Ниже в численных экспериментах длина ряда N велика, так что величина p выбирается просто настолько большой, чтобы результаты оценивания практически перестали меняться с ее дальнейшим увеличением (а именно, $p = 10$ оказалось достаточным во всех примерах). Статистическая значимость отличия оценок $G_{y \rightarrow x}$ и $G_{x \rightarrow y}$ от нуля проверяется с помощью F -теста Фишера [27].

Уравнения (1) при любом Δt – это вполне допустимое представление исходной системы (X, Y) , верно отражающее свойства ее временных реализаций с шагом выборки Δt . Но при этом важен вопрос: как величины $G_{y \rightarrow x}$ и $G_{x \rightarrow y}$ зависят от Δt ? Если нет реального воздействия $Y \rightarrow X$, то естественно было бы ожидать $G_{y \rightarrow x} = 0$ при любом Δt или, по меньшей мере, $G_{y \rightarrow x} \ll 1$ и $G_{y \rightarrow x} < G_{x \rightarrow y}$. Однако ниже показано, что эти ожидания не оправдываются и, более того, относительная мера «ложной связи» $r = G_{y \rightarrow x} / G_{x \rightarrow y}$ может даже существенно превышать единицу.

2. Эффект редкой выборки в линейных системах

В качестве наглядного примера рассмотрим достаточно «физичную» модельную систему – стохастические диссипативные осцилляторы с дискретным временем

$$\begin{aligned} X(t) &= A_{X,1} X(t-1) + A_{X,2} X(t-2) + \Xi(t), \\ Y(t) &= A_{Y,1} Y(t-1) + A_{Y,2} Y(t-2) + kX(t-1) + \Psi(t), \end{aligned} \quad (2)$$

где Ξ, Ψ – независимые гауссовские белые шумы с нулевым средним и дисперсиями σ_{Ξ}^2 и σ_{Ψ}^2 , k – коэффициент связи, а собственный период колебаний X (положение пика в спектре мощности) и его время релаксации (определяет ширину пика) даются выражениями $A_{X,1} = 2 \cos(2\pi/T_X) \exp(-1/\tau_X)$ и $A_{X,2} = -\exp(-2/\tau_X)$ [28]. Все

аналогично для осциллятора Y . Система (2) может быть получена как приближенная разностная схема или результат интегрирования некоторых дифференциальных уравнений для колебательных систем. Она также может быть и в точности реализована на практике с помощью электронных [29,30] или оптических [31,32] систем с запаздывающими обратными связями, где параметр k представлял бы собой интенсивность физического воздействия.

В качестве стартовых значений для анализа были приняты небольшие значения периодов колебаний $T_X = T_Y = 5.0$ и времен релаксации $\tau_X = \tau_Y = 4.0$, дисперсии шумов $\sigma_\Xi^2 = \sigma_\Psi^2 = 1$. Сила однонаправленной связи $X \rightarrow Y$ определялась значением $k = 0.3$. Величины $G_{y \rightarrow x}$ и $G_{x \rightarrow y}$ оценивались по временным рядам достаточно большой длины $N = 10^5$, чтобы сделать пренебрежимо малыми статистические флуктуации. Рис. 1, *a-в* показывают, что однонаправленная связь адекватно отражается величинами $G_{y \rightarrow x}$ и $G_{x \rightarrow y}$ при $\Delta t = 1$: $G_{y \rightarrow x} = 0$ и $G_{x \rightarrow y} > 0$. Однако с ростом Δt положительными становятся и значения $G_{y \rightarrow x}$, то есть обнаруживается «ложная связь», что мы назовем эффектом редкой выборки. Так, $G_{y \rightarrow x}$ максимально при $\Delta t = 3$, где $r = 0.08$ достаточно велико – «нефизичное» улучшение прогноза составляет почти 10% от «правильного», то есть ложные связи весьма заметны. При дальнейшем росте Δt обе величины $G_{y \rightarrow x}$ и $G_{x \rightarrow y}$ уменьшаются, а в пределе $\Delta t \rightarrow \infty$ имеем $G_{y \rightarrow x} = G_{x \rightarrow y} = 0$, так как зависимость между значениями x, y в сильно удаленные последовательные моменты n и $n - 1$ пропадает, то есть процесс (x_n, y_n) становится белым шумом (см. $\Delta t = 15$ на рис. 1, *a, б*).

Наглядное пояснение эффекта ненулевых $G_{y \rightarrow x}$ при $\Delta t > 1$ дано на рис. 2. Заметим сначала, что в данном примере двумерный вектор $X(t), X(t - 1)$ содержит *полную* информацию о распределении X во все будущие моменты времени, в частности, об $X(t + 1)$ (то есть X – марковский процесс второго порядка [26]). Учет каких-либо более давних значений X и любых прошлых значений Y бесполезен для улучшения прогноза будущих значений X . Сплошные линии и кружки иллюстрируют это на рис. 2, *a* для $\Delta t = 1$. В терминах моделей с пространствами состояний вектор $X(t), X(t - 1)$ определяет *состояние* процесса X .

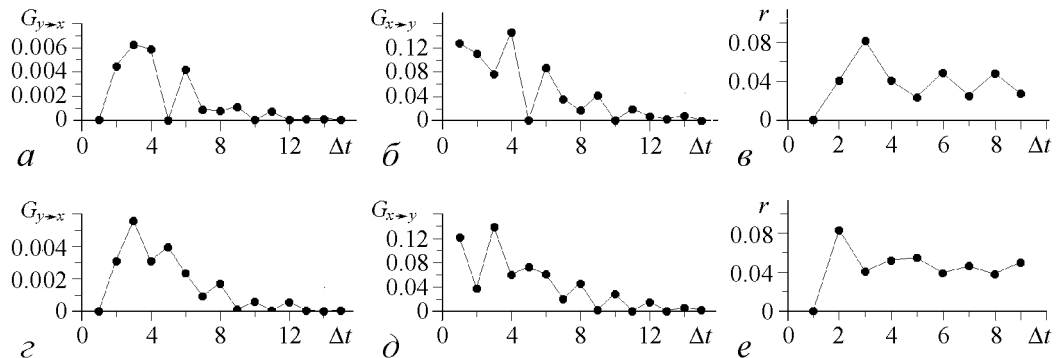


Рис. 1. Характеристики причинности по Грейнджеру для однонаправленно связанных осцилляторов (2) при $T_X = T_Y = 5.0$ (*a-в*) и $T_X = T_Y = 4.4$ (*г-е*)

Напротив, при $\Delta t = 2$ *неполная* информация о векторе $X(t), X(t - 1)$ содержится в наблюдаемом *прореженном* ряде $X(t), X(t - 2), X(t - 4), \dots$ (неполноту и означают пунктирные стрелки на рис. 2, б), так что прогноз X на основе этих данных не является наилучшим из возможных. При учете данных из ряда Y может быть получена дополнительная информация о «скрытом» значении $X(t - 1)$ (крестик на рис. 2, б) за счет корреляции между $X(t - 1)$ и $Y(t)$. Таким образом, необходимым условием «ложной связи» (УП «в обратную сторону») является то, что при редкой выборке состояние ведущего процесса *не полностью* определяется по наблюдаемым данным.

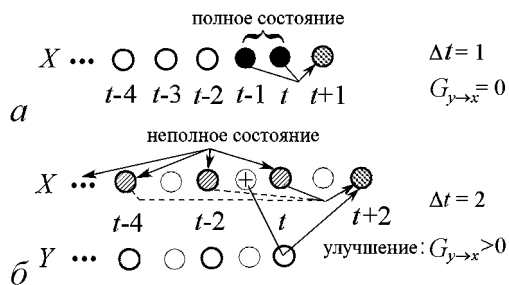


Рис. 2. Иллюстрации к оценке причинности по Грейнджеру для однонаправленно связанных осцилляторов (2): а – нет улучшения прогноза в «неправильном» направлении при $\Delta t = 1$; б – эффект редкой выборки при $\Delta t = 2$

Иллюстрацией этого утверждения является и «стробоскопический эффект» на рис. 1, а, б, где оба УП малы при $\Delta t = 5$: $G_{y \rightarrow x} \approx 2 \cdot 10^{-5}$, $G_{x \rightarrow y} = 1 \cdot 10^{-3}$. Причина этого состоит в том, что при $\Delta t = T_X = T_Y$ оба осциллятора представляют собой практически процессы авторегрессии *первого* порядка. Конкретно, представление (1) при $\Delta t = 5$ дает $a_{x,1} = 0.29$ и остальные $|a_{x,k}| < 0.002$ для осциллятора X . Если же ведущая система – АР-процесс первого порядка, то ненулевое УП в его направлении невозможно, так как его состояние – скаляр, то есть *полностью* определяется наблюдаемыми данными. Действительно, при нарушении равенства $\Delta t = T_X = T_Y$, а именно, при $T_X = T_Y = 4.4$ и $\Delta t = 5$ значения УП становятся значительно большими (рис. 1, з–е).

Положительные $G_{y \rightarrow x}$ и r наблюдаются в широких диапазонах значений параметров, как показано на рис. 3 при $\Delta t = 2$. Так, при малых шумах в ведомой системе σ_{Ψ}^2 лучше восстанавливаются состояния ведущей системы по данным об Y , а поэтому оказываются большими значения $G_{y \rightarrow x} > 0.06$, и $r > 0.1$ (рис. 3, а, б). Отношение r превышает единицу при $T_X = 3.0$ (рис. 3, з) или при $T_Y = 3.5$ (рис. 3, е). Отметим, что r столь велико только для неидентичных осцилляторов, тогда как для идентичных оно остается в пределах $r < 1$. Рис. 3, ж–к показывают, что r поразному зависит от двух времен релаксации. Это отношение растет с ростом τ_X и падает с ростом τ_Y (последнее обусловлено тем, что информация о состоянии X хуже восстанавливается по данным от Y). Следовательно, большие значения $G_{y \rightarrow x}$ должны наблюдаться, если время релаксации ведущей системы сравнительно велико, а ведомой – мало. Действительно, при $\tau_X = 10$, $\tau_Y = 1$, $\sigma_{\Psi}^2 = 0.01$ и $T_X = T_Y = 5.0$ было получено значение $G_{y \rightarrow x} = 0.14$, что превышает все значения, показанные на рис. 3.

Осцилляторы с непрерывным временем, задаваемые дифференциальными уравнениями, демонстрируют тот же эффект редкой выборки с вполне аналогичными зависимостями УП от параметров. Такие примеры не представлены здесь для краткости. Для уточнения терминологии заметим, что наблюдающиеся «нефизичные» положительные значения $G_{y \rightarrow x}$ не являются ложными, ведь улучшение прогноза дей-

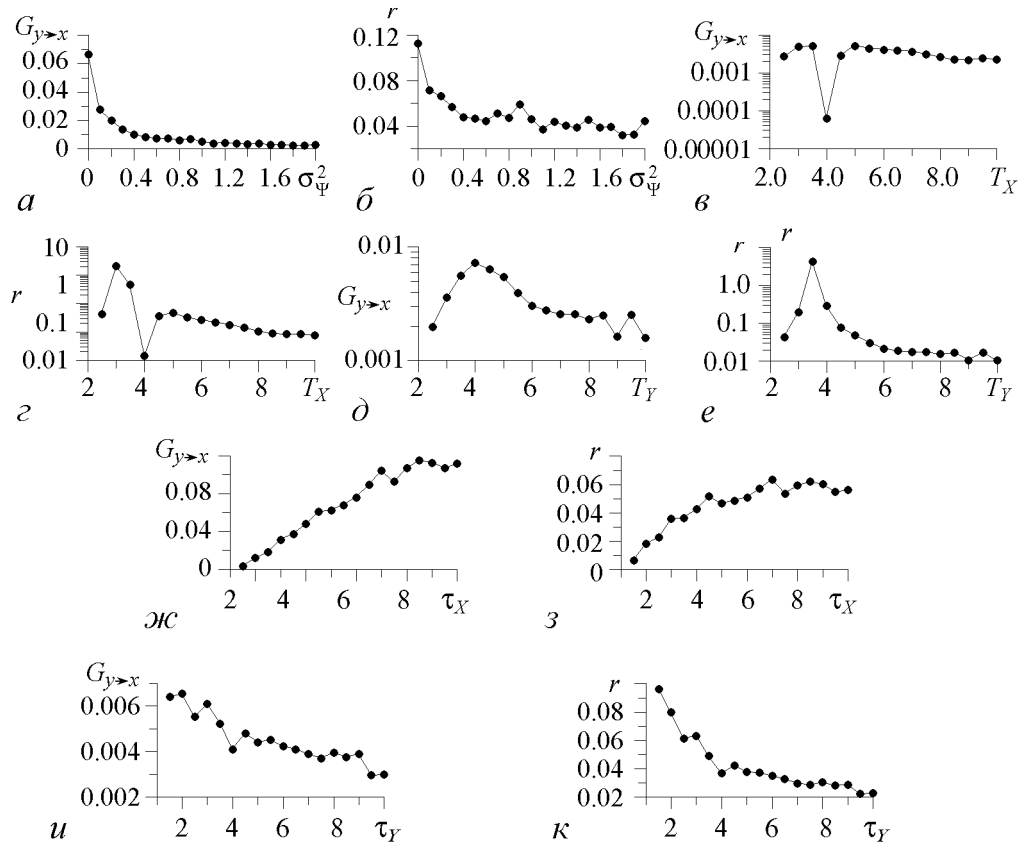


Рис. 3. Характеристики причинности по Грейнджеру для осцилляторов (2) при $\Delta t = 2$ в зависимости от параметров, указанных на осях абсцисс, при $T_X = T_Y = 5.0$, $\tau_X = \tau_Y = 4$, $\sigma_{\Xi}^2 = \sigma_{\Psi}^2 = 1$, $k = 0.3$

ствительно имеет место. Ошибочны лишь выводы о наличии воздействия $Y \rightarrow X$, сделанные из неравенства $G_{y \rightarrow x} > 0$. Поэтому мы не используем термин «ложные УП», а говорим о «ложных связях».

3. Эффект редкой выборки в нелинейных системах

При наличии нелинейности в динамике исследуемых систем эффект редкой выборки полностью сохраняется, так как его принципиальной причиной является не конкретная форма уравнений, а неполнота информации о состояниях систем в наблюдаемых данных. Изучение нелинейного случая лишь более сложно технически. Рассмотрим стохастически возмущенное отображение Спротта [33] – двухмерное квадратичное отображение вида

$$X(t) = 1 + a_X X(t-1) - b_X X^2(t-2) + \Xi(t), \quad (3)$$

где $\Xi(t)$ – последовательность независимых случайных величин, равномерно распределенных на отрезке $[-\varepsilon_{\Xi}/2, \varepsilon_{\Xi}/2]$. При $a_X = 0.4$, $b_X = 1$, $\varepsilon_{\Xi} = 0$ оно демонстрирует хаотический режим с ляпуновским показателем $\lambda = 0.08$ (рис. 4, а). Будем рассматривать ниже только интервал выборки $\Delta t = 2$. Запишем первое уравнение (3) для

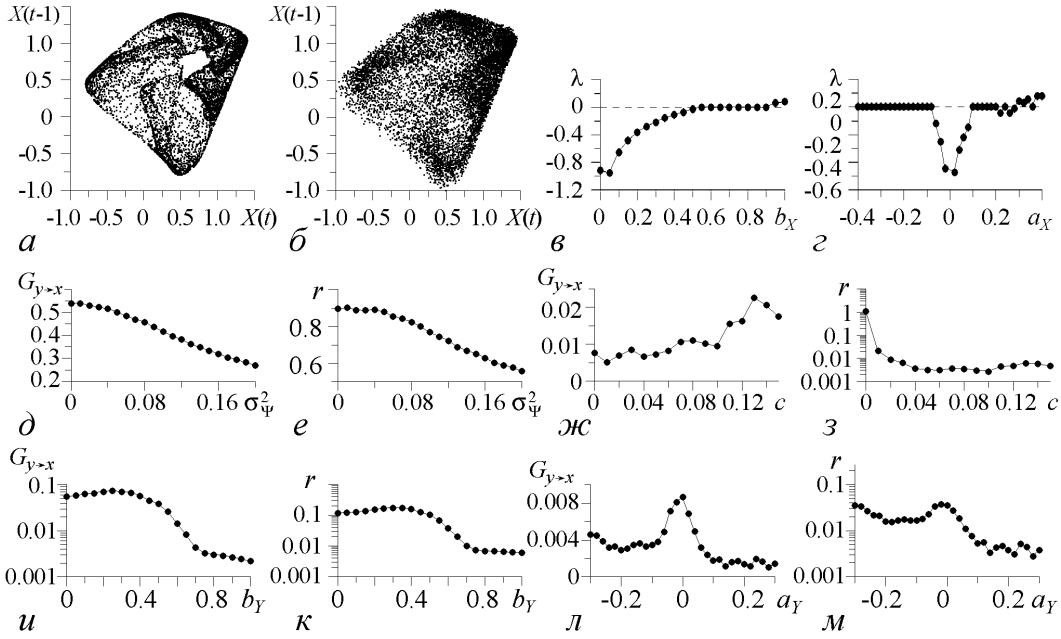


Рис. 4. Результаты для отображений Спротта (4): a – фазовая траектория X при нулевом шуме, b – при $\varepsilon_{\Xi} = 0.1$; v, z – показатель Ляпунова при $\varepsilon_{\Xi} = 0$; d – m – характеристики причинности по Грейнджеру в зависимости от параметров, указанных по осям абсцисс, при прочих фиксированных; d, e – системы (3) и (4) ($a_X = 0.4, b_X = 1, \varepsilon_{\Xi} = 0.1$); $ж$ – $м$ – системы (3) и (5) ($a_X = 0.4, a_Y = 0.3, b_X = b_Y = 1, \varepsilon_{\Xi} = \varepsilon_{\Psi} = 0.1, c = 0.13$)

моментов времени $t, t - 1$ и $t - 2$ и выразим $X(t)$ через $X(t - 2)$ и $X(t - 4)$. Получим при достаточно малом ε_{Ξ} (например, $\varepsilon_{\Xi} < 0.1$) приближенное описание X в виде нелинейного АР-процесса второго порядка с многочленом четвертой степени и дисперсией ошибки прогноза $\sigma_{x,ind}^2 \approx \sigma_{\Xi}^2(1 + a_X^2 + 4b_X^2(M[X^2])^2)$.

Пусть ведомая система описывается простым соотношением

$$Y(t) = X(t - 1) + \Psi(t), \quad (4)$$

где $\Psi(t)$ – последовательность независимых случайных величин, равномерно распределенных на отрезке $[-\varepsilon_{\Psi}/2, \varepsilon_{\Psi}/2]$. При $\varepsilon_{\Psi} = 0$ АР-модель с двумя переменными X, Y дает прогноз $X(t)$ на основе $X(t - 2), Y(t - 2), X(t - 4), Y(t - 4), \dots$ с дисперсией ошибки $\sigma_{x,join}^2 = \sigma_{\Xi}^2(1 + a_X^2)$. Отсюда $G_{y \rightarrow x} = \frac{4b_X^2(M[X^2])^2}{1 + a_X^2 + 4b_X^2(M[X^2])^2} > 0$ и, в частности, при $a_X = 0.4, b_X = 1$ и $\varepsilon_{\Xi} = 0.1$ (рис. 4, b) получим весьма большую величину $G_{y \rightarrow x} = 0.6$. Близки и численные оценки (рис. 4, e), которые получены по временным рядам системы (3) и (4) с помощью подгонки АР-моделей четвертого порядка с многочленом четвертой степени (нелинейные оценки причинности по Грейнджеру [34–36]). С помощью таких моделей получены и оценки УП во всех примерах ниже, так как при указанных значениях порядка и степени АР-моделей стабилизировались результаты оценивания.

Если система Y задается аналогичным отображением

$$Y(t) = 1 + a_Y Y(t - 1) - b_Y Y^2(t - 2) + \Psi(t) + cX(t - 1), \quad (5)$$

то нелинейные оценки УП демонстрируют меньшие, но тоже значимо отличные от нуля $G_{y \rightarrow x}$ в широком диапазоне значений параметров (рис. 4, ж-м). При этом эффект ложных связей из-за редкой выборки наблюдается как для возмущенных хаотических, так и для возмущенных регулярных режимов ведомой системы (показатели Ляпунова представлены на рис. 4, в, з), например, для неподвижной точки при $b_Y = 0$ и хаотического режима при $b_Y = 1$ (рис. 4, и, к). Судя по величине r , эффект наиболее силен при умеренных силах связи, а по $G_{y \rightarrow x}$ – при более сильных связях (рис. 4, ж, з), но в любом случае – при таких a_Y, b_Y , которые соответствуют регулярным режимам (рис. 4, и-м). Последнее имеет место по той причине, что регулярные режимы ведомой системы обеспечивают наиболее точное следование ее состояния за состояниями ведущей системы и, значит, лучшее восстановление информации о скрытых состояниях ведущей системы. Собственная же хаотическая динамика ведомой системы снижает степень взаимозависимости состояний двух систем и возможности восстановления информации об X по Y .

Рассмотрим также более известную нелинейную систему – отображение Эно –

$$X(t) = 1 - a_X X^2(t-1) + b_X X(t-2) + \Xi(t), \quad (6)$$

где $\Xi(t)$ – то же, что в предыдущем примере. При $a_X = 1, b_X = 0.4, \varepsilon_\Xi = 0$ отображение демонстрирует хаотический режим с показателем Ляпунова $\lambda = 0.1$ (рис. 5, а, в), а шум приводит к некоторому его «размыванию» (рис. 5, б). Пусть Y задается уравнением (4) при $\varepsilon_\Psi = 0$. Тогда, аналогично предыдущему примеру, работая с более сложными алгебраическими выражениями, при условии малых шумов получим $G_{y \rightarrow x} \approx b_X^2 / (1 + 4a_X^2 M[X^2] + b_X^2) > 0$. Эта величина вновь положительна, но ее численные значения гораздо меньше, чем для отображения Спротта, даже для качественно схожих режимов динамики. Это подтверждается и численными оценками на рис. 5, з, д. Разница между двумя примерами имеет место за счет разных нелинейных функций, связывающих последовательные значения переменных, и, следовательно, разных потерь информации при прореживании и разных возможностей

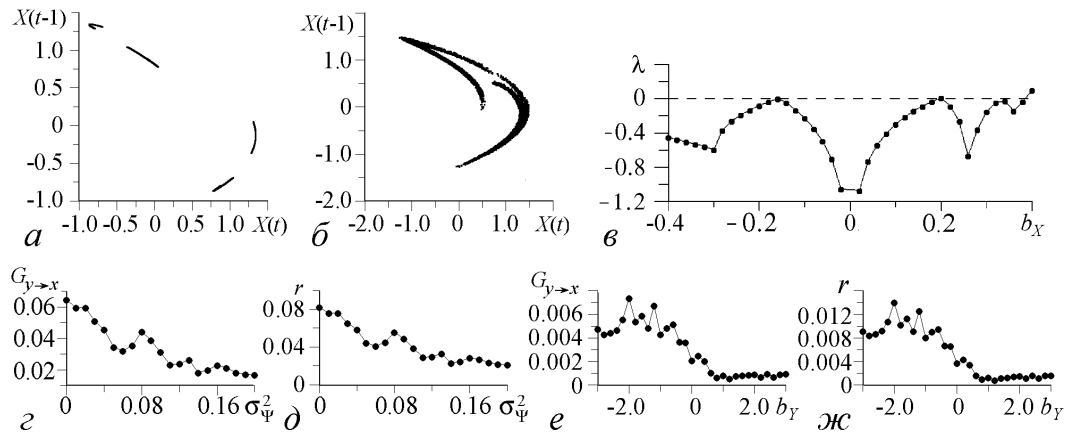


Рис. 5. Результаты для отображений Эно (6): а – фазовая траектория X при нулевом шуме, б – при $\varepsilon_\Xi = 0.1$; в – показатель Ляпунова при $\varepsilon_\Xi = 0$; г-ж – характеристики причинности по Грейнджеру в зависимости от параметров, указанных на осях абсцисс при прочих фиксированных; з, д – системы (6) и (4) ($a_X = 1, b_X = 0.4, \varepsilon_\Xi = 0.1$); е, ж – системы (6) и (7) ($b_X = 0.4, a_X = a_Y = 1, \varepsilon_\Xi = \varepsilon_\Psi = 0.1, c = 0.1$)

ее восстановления при учете Y . В основном, различаются, как показывает более детальный анализ, эти последние возможности.

Для системы Y , заданной отображением Эно

$$Y(t) = 1 - a_Y Y^2(t-1) + b_Y Y(t-2) + \Psi(t) + cX(t-1), \quad (7)$$

оценки УП показаны на рис. 5, *e, ж*. Эффект ложной связи вновь наблюдается как для возмущенных хаотических, так и для возмущенных регулярных режимов ведомой системы (показатели Ляпунова даны на рис. 5, *в*). Однако, в отличие от отображений Спротта, количественные значения «ложных связей» заметно меньше.

Таким образом, эффект ложных связей из-за редкой выборки в случае нелинейных систем также имеет место, как и для линейных примеров. При этом важно отметить, что численные значения УП могут сильно различаться даже для систем, схожих по динамике и «формулам» в уравнениях динамики. Эти значения зависят от детального характера нелинейных функций, связывающих последовательные значения переменных.

Наконец, отметим, что непременным условием эффекта редкой выборки является наличие стохастического возмущения (шума) в исследуемых системах: в строго детерминированных системах улучшения прогноза в обе стороны теоретически равны нулю из-за того, что согласно теореме Такенса [37] индивидуальный прогноз абсолютно точен при использовании вектора временных задержек (индивидуальной предыстории процесса) достаточно большой размерности. Таким образом, роль шумов в данной задаче существенная, как и во многих других задачах анализа временных рядов, см. например, работы, посвященные собственно вопросам моделирования и прогноза [38,39]. С практической точки зрения приведенное утверждение о случае детерминированных систем справедливо для систем невысокой размерности. При их высокой размерности и недостаточно богатой статистике индивидуальный прогноз может быть далеко не точным, что может вести к аналогичным ложным выводам о наличии связи, то есть различие между стохастическими и высокоразмерными детерминированными системами должно быть практически не заметно.

Заключение

При анализе направленных связей по временным рядам с помощью характеристик причинности по Грейнджеру следует учитывать, что интервал выборки, обусловленный процедурой измерений, может существенно влиять на результаты оценивания. Игнорирование этого фактора может приводить к ошибочным выводам о характере взаимодействия исследуемых систем, если они имеют меньший «собственный временной шаг». Как показано в данной работе, при достаточно большом интервале выборки характеристики связи (улучшения прогноза) могут оказаться положительными «в обе стороны» для систем с однонаправленной связью, то есть ошибочно свидетельствовать о двунаправленной связи. Причем эти значения могут быть достаточно большими, а в случае неидентичных систем УП в «ложном» направлении может даже существенно превосходить УП в «правильном» направлении. Показано также, что этот эффект редкой выборки проявляется как для линейных, так и для нелинейных систем, а для последних – в режимах как регулярной, так и

хаотической динамики. Причина такой универсальности состоит в том, что эффект определяется неполнотой информации о векторе состояния ведущей системы в наблюдаемых данных, а не видом оператора эволюции и даже не режимом динамики.

Отсюда следует, в частности, что активно развиваемая идея выбора оптимальных (не малых) временных лагов при оценке нелинейной причинности по Грейнджеру [40,41] также может вести к ложным выводам о двунаправленной связи, так что ее применение требует осторожности и учета эффекта редкой выборки. Таким образом, надежные выводы о двунаправленной связи на практике должны делаться на основе специального теста с учетом конечной величины интервала выборки. Вариант такого теста представлен в параллельной работе [42].

Работа выполнена при поддержке РФФИ (гранты 11-02-00599, 11-05-01139, 12-02-00377), программ РАН и ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России на 2009-2013 годы» (контракт № 14.В37.21.0247).

Библиографический список

1. *Блехман И.И.* Синхронизация динамических систем. М.: Наука, 1971.
2. *Пиковский А.С., Розенблюм М.Г., Куртс Ю.* Синхронизация. Фундаментальное нелинейное явление. М.: Техносфера, 2003.
3. *Анищенко В.С., Астахов В.В., Вадивасова Т.Е., Нейман А.Б., Стрелкова Г.И., Шиманский-Гайер Л.* Нелинейные эффекты в хаотических и стохастических системах. Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2003.
4. *Кузнецов А.П., Емельянова Ю.П., Сатаев И.Р., Тюрюкина Л.В.* Синхронизация в задачах. Саратов: ООО издательский центр «Наука», 2010.
5. *Rosenblum M.G., Pikovsky A.S., Kurths J., Schafer C., Tass P.A.* Phase synchronization: from theory to data analysis // in Moss F., Gielen S (eds). Neuro-informatics. Handbook of Biological Physics (v. 4). New York, Elsevier Science, 2000. P. 279.
6. *Вадивасова Т.Е., Анищенко В.С.* Взаимосвязь частотных и фазовых характеристик хаоса. Два критерия синхронизации // Радиотехника и электроника. 2004. Т. 49, № 1. С.1.
7. *Hramov A.Ye., Koronovskii A.A.* An approach to chaotic synchronization // Chaos. 2004. Vol. 14, № 3. P. 603.
8. *Hramov A.E., Koronovskii A.A., Ponomarenko V.I., Prokhorov M.D.* Detection of synchronization from univariate data using wavelet transform // Phys. Rev. E. 2007. Vol. 75, № 5. 056207.
9. *Pavlov A.N., Sosnovtseva O.V., Pavlova O.N., Mosekilde E., Holstein-Rathlou N.-H.* Characterizing multimode interaction in renal autoregulation // Physiological Measurement. 2008. Vol. 29. P. 945.
10. *Kralemann B., Cimponeriu L., Rosenblum M., Pikovsky A., Mrowka R.* Uncovering interaction of coupled oscillators from data // Phys. Rev. E. 2007. Vol. 76, № 5. 055201(R).
11. *Bezruchko B., Ponomarenko V., Rosenblum M.G., Pikovsky A.S.* Characterizing direction of coupling from experimental observations // Chaos. 2003. Vol.13, № 1. P. 179.

12. *Hung Y.-C., Hu C.-K.* Chaotic communication via temporal transfer entropy // *Phys. Rev. Lett.* 2008. Vol. 101. 244102.
13. *Palus M., Novotna D.* Quasi-biennial oscillations extracted from the monthly NAO index and temperature records are phase-synchronized // *Nonlinear Processes in Geophysics.* 2006. Vol.13, № 3. P.287.
14. *Мохов И.И., Смирнов Д.А.* Исследование взаимного влияния процессов Эль-Ниньо – Южное колебание и Северо-Атлантического и Арктического колебаний нелинейными методами // *Изв. РАН. Физика атмосферы и океана.* 2006. Т. 42, № 5. С.650.
15. *Мохов И.И., Смирнов Д.А., Карпенко А.А.* Оценки связи изменений глобальной приповерхностной температуры с разными естественными и антропогенными факторами на основе данных наблюдений // *Доклады академии наук.* 2012. Т. 443, № 2. С. 225.
16. *Pereda E., Quian Quiroga R., Bhattacharya J.* Nonlinear multivariate analysis of neurophysiological signals // *Progr. in Neurobiology.* 2005. Vol.77. P. 1.
17. *Brea J., Russell D.F., Neiman A.B.* Measuring direction in the coupling of biological oscillators: A case study for electroreceptors of paddlefish // *Chaos.* 2006. Vol. 16, № 2. 026111.
18. *Безручко Б.П., Пономаренко В.И., Прохоров М.Д., Смирнов Д.А., Тасс П.А.* Моделирование и диагностика взаимодействия нелинейных колебательных систем по хаотическим временным рядам (приложения в нейрофизиологии) // *Успехи физических наук.* 2008. Т. 178. № 3. С. 323.
19. *Smirnov D., Barnikol T., Barnikol U., Bezruchko B.P., Hauptmann C., Buehrle C., Maarouf M., Sturm V., Freund H.-J., Tass P.A.* The generation of parkinsonian tremor as revealed by directional coupling analysis // *Europhysics Letters.* 2008. Vol. 83. 20003.
20. *Сысоева М.В., Сысоев И.В.* Математическое моделирование динамики энцефалограммы во время эпилептического припадка // *Письма в ЖТФ.* 2012. Т. 38. Вып. 3. С. 103.
21. *Филина Е.В.* Динамика локальных потенциалов мозга при абсанс-эпилепсии: эмпирическое моделирование // *Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика.* 2011. Т. 19, № 4. С.109.
22. *Granger C.W.J.* Investigating causal relations by econometric models and cross-spectral methods // *Econometrica.* 1969. Vol. 37, № 3. P. 424.
23. *Granger C.W.J.* Testing for causality. A personal viewpoint // *J. Economic Dynamics and Control.* 1980. Vol. 2. P. 329.
24. *Sims C.A.* Discrete approximations to continuous time distributed lags in econometrics // *Econometrica.* 1971. Vol. 39. P. 545.
25. *Marcellino M.* Some consequences of temporal aggregation in empirical analysis // *J. Business and Economic Statistics.* 1999. Vol. 17. P. 129.
26. *Бокс Дж., Дженкинс Г.* Анализ временных рядов. Прогноз и управление. Ч. 1, 2. М.: Мир, 1974.

27. Себер Дж. Линейный регрессионный анализ. М.: Мир, 1974.
28. Timmer J., Lauk M., Pfleger W., Deuschl G. Cross-spectral analysis of physiological tremor and muscle activity: I. Theory and application to unsynchronized electromyogram // Biol. Cybern. 1998. Vol. 78. P. 349.
29. Кузнецов С.П. Бифуркации удвоения в простой модели распределенной системы // Изв. вузов. Радиофизика. 1982. Т. 25, № 11. С. 1364.
30. Кузнецов С.П. Универсальность и подобие в поведении связанных систем Фейгенбаума // Изв. вузов. Радиофизика. 1985. Т. 28, № 8. С. 991.
31. Ikeda K. Multiple-valued stationary state and its instability of the transmitted light by a ring cavity system // Opt. Commun. 1979. Vol. 30. P. 257.
32. Lang R., Kobayashi K. External optical feedback effects on semiconductor injection laser properties // IEEE J. Quantum Electron. 1980. Vol. 16, № 1. P. 347.
33. Elhadj Z., Sprott J.C. A minimal 2-D quadratic map with quasi-periodic route to chaos // Int. J. Bifurcation Chaos. 2008. Vol. 18, № 5. P. 1567.
34. Ancona N., Marinazzo D., Stramaglia S. Radial basis function approach to nonlinear Granger causality of time series // Phys. Rev. E. 2004. Vol. 70, № 5. 056221.
35. Marinazzo D., Pellicoro M., Stramaglia S. Kernel method for nonlinear Granger causality // Phys. Rev. Lett. 2008. Vol. 100. 144103.
36. Hlavackova-Schindler K., Palus M., Vejmelka M., Bhattacharya J. Causality detection based on information-theoretic approaches in time series analysis // Physics Reports. 2007. Vol. 441, № 1. P. 1.
37. Takens F. Detecting strange attractors in turbulence // Lec. Notes in Math. 1981. Vol. 898. P. 366.
38. Molkov Ya.A., Mukhin D.N., Loskutov E.M., Feigin A.M., Fidelin G.A. Using the minimum description length principle for global reconstruction of dynamic systems from noisy time series // Phys. Rev. E. 2009. Vol. 80, № 4. 046207
39. Яхно Ю.В., Мольков Я.И., Мухин Д.Н., Лоскутов Е.М., Фейгин А.М. Реконструкция оператора эволюции как способ анализа электрической активности мозга при эпилепсии // Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2011. Т. 19, № 6. С. 156.
40. Vlachos I., Kugiumtzis D. Nonuniform state-space reconstruction and coupling detection // Phys. Rev. E. 2010. Vol. 82. № 1. 016207.
41. Faes L., Nollo G., Porta A. Information-based detection of nonlinear Granger causality in multivariate processes via a nonuniform embedding technique // Phys. Rev. E. 2011. V. 83, № 5. 051112.
42. Smirnov D.A., Bezruchko B.P. Spurious causalities due to low temporal resolution: Towards detection of bidirectional coupling from time series // Europhys. Lett. 2012. Vol. 100. P. 10005.

Саратовский государственный
университет им. Н.Г. Чернышевского
Саратовский филиал ИРЭ
им. В.А. Котельникова РАН

Поступила в редакцию 3.10.2012
После доработки 29.04.2013

EFFECT OF RARE SAMPLING ON ESTIMATION OF DIRECTIONAL COUPLINGS FROM TIME SERIES

D. A. Smirnov, B. P. Bezruchko

The problem of detection and quantitative estimation of directional couplings (mutual influences) between systems from discrete records of their oscillations (time series) arises in different fields of research. This work shows that results of the traditional «Granger causality» approach depend essentially on a sampling interval (a time step). We have revealed the causes and character of the influence of a sampling interval on numerical values of coupling estimates. As well, we have explained why one can get erroneous conclusions about bidirectional coupling for unidirectionally coupled systems in the case of a large sampling interval (rare sampling). The rare sampling effect is demonstrated both for linear and nonlinear systems in different dynamical regimes.

Keywords: Coupled nonlinear systems, time series, unidirectional coupling, bidirectional coupling, Granger causality.

Смирнов Дмитрий Алексеевич – родился в Саратовской обл. (1977), окончил факультет нелинейных процессов Саратовского государственного университета (1999). Работает в Саратовском филиале Института радиотехники и электроники им. В.А. Котельникова РАН ведущим научным сотрудником. Защитил диссертации на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук (2001) и доктора физико-математических наук (2010) в СГУ в области теории колебаний, нелинейной динамики и их приложений для анализа временных рядов в биофизике и геофизике. Автор монографий (в соавторстве с Б.П. Безручко) «Математическое моделирование и хаотические временные ряды» (Саратов, изд-во ГосУНЦ «Колледж» 2005) и «Extracting knowledge from time series: An introduction to nonlinear empirical modeling» (Berlin, Heigelberg, Springer-Verlag 2010). Опубликовал более 50 научных статей в рецензируемых отечественных и международных журналах.



410019 Саратов, ул. Зеленая, 38
Саратовский филиал Института радиотехники и электроники
имени В.А. Котельникова РАН
E-mail: smirnovda@yandex.ru

Безручко Борис Петрович – родился в Саратовской обл. (1946), окончил физический факультет Саратовского государственного университета (1969). Работает заведующим кафедрой динамического моделирования и биомедицинской инженерии СГУ и заведующим лабораторией моделирования в нелинейной динамике в Саратовском филиале Института радиотехники и электроники им. В.А. Котельникова РАН. Защитил диссертации на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук в (1980) и доктора физико-математических наук (1994) в СГУ в области теории колебаний и радиофизики. Автор монографий (в соавторстве с Д.А. Смирновым) «Математическое моделирование и хаотические временные ряды» (Саратов, изд-во ГосУНЦ «Колледж» 2005) и «Extracting knowledge from time series: An introduction to nonlinear empirical modeling» (Berlin, Heigelberg, Springer-Verlag 2010). Опубликовал более 100 научных статей в рецензируемых отечественных и международных журналах.



410012 Саратов, ул. Астраханская, 83
Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского
E-mail: bezruchkobp@gmail.com



ВЛИЯНИЕ ВЫБОРА СТРУКТУРЫ МОДЕЛИ НА РАБОТОСПОСОБНОСТЬ МЕТОДА НЕЛИНЕЙНОЙ ПРИЧИННОСТИ ПО ГРЕЙНДЖЕРУ

М. В. Корнилов, И. В. Сысоев

В настоящее время метод нелинейной причинности по Грейнджеру активно используется в ряде приложений медицины, биологии, физики для выявления направленной связанности между объектами по записям их колебаний (временным рядам) с помощью предсказательных моделей. В работе исследуется влияние выбора структуры модели на работоспособность метода. Численно на примере связанных эталонных уравнений продемонстрирована возможность получения достоверных оценок, даже если структура предсказательной модели отличается от структуры эталонной системы.

Ключевые слова: Метод нелинейной причинности по Грейнджеру, реконструкция по временным рядам, нелинейные динамические системы.

Введение

Причинность по Грейнджеру – известный способ оценки влияния одной системы на другую по записям их колебаний (временным рядам), впервые предложенный нобелевским лауреатом по экономике К. Грейнджером [1]. Согласно данному методу степень влияния одной системы на другую оценивается по изменению точности прогноза поведения первой системы при введении в прогностическую математическую модель данных о колебаниях второй системы. Уменьшение ошибки прогноза истолковывается как признак влияния второй системы на первую. Метод неоднократно применялся для оценки связанности экспериментальных систем, например, между различными отведениями энцефалограммы головного мозга [2–4], процессами в климатологии [5, 6]. В указанных случаях результаты получались с помощью авторегрессионных моделей с полиномиальными [7, 8] или радиальными [9] базисными функциями, выбор которых опирался на физиологические и физические соображения, а их достоверность подтверждалась анализом характеристик остатков и с помощью суррогатных данных.

Но не случаен ли успех? Остаётся открытым вопрос влияния вида предсказательной модели на оценку причинно-следственных связей методом причинности

по Грейнджеру. Ответ на него целесообразно искать, используя в качестве объектов эталонные связанные уравнения, так как модели реальных объектов, как правило, не единственны и вопрос их адекватности требует доказательств. При таком выборе объекта нам известна его структура, включая наличие и характер связей, что позволяет проверить правильность оценок с помощью метода причинности по Грейнджеру.

Целью данной работы является проверка на тестовых примерах (связанных эталонных динамических системах) работоспособности метода при различных уровнях связи и значимости результатов причинности по Грейнджеру в случае, когда структура модели отлична от структуры объекта. Рассматривается модификация метода с полиномиальными нелинейными функциями.

1. Описание метода

Пусть имеются два временных ряда: ряд $\{x_n\}_{n=1}^N$ от системы X и ряд $\{y_n\}_{n=1}^N$ от системы Y , где n – дискретное время, N – длина временного ряда. На основе анализа реализаций $\{x_n\}_{n=1}^N$ и $\{y_n\}_{n=1}^N$, которые в общем случае содержат и шумы, требуется определить, влияет ли система Y на систему X или нет.

На первом шаге строится индивидуальная модель

$$x'_n = f(x_{n-l}, x_{n-2l}, \dots, x_{n-D_S l}, \mathbf{c}^S), \quad (1)$$

где f – аппроксимирующая функция, l – лаг модели, D_S – собственная размерность модели, \mathbf{c}^S – неизвестный вектор коэффициентов. В качестве функции f можно использовать разложение по некоторому базису, например, степенной многочлен общего вида. В основополагающей работе [1] используются линейные функции. Коэффициенты \mathbf{c}^S подбираются методом наименьших квадратов по временному ряду $\{x_n\}_{n=1}^N$. Среднеквадратичная ошибка аппроксимации построенной модели определяется по формуле $\varepsilon_S^2 = \frac{1}{N} \sum (x'_n - x_n)^2$.

На втором шаге строится совместная модель

$$x''_n = g(x_{n-l}, x_{n-2l}, \dots, x_{n-D_S l}, y_{n-l-\tau}, \dots, y_{n-D_a l-\tau}, \mathbf{c}^j), \quad (2)$$

где для оценки коэффициентов аппроксимирующей функции g используется также реализация системы Y ; D_a – размерность добавки (число учитываемых значений из ряда $\{y_n\}_{n=1}^N$); \mathbf{c}^j – коэффициенты совместной модели; τ – возможная задержка, обусловленная конечным временем распространения сигнала (на практике часто неизвестна и должна быть определена).

Построив совместную модель, рассчитывают среднеквадратичную ошибку прогноза совместной модели $\varepsilon_j^2 = \frac{1}{N} \sum (x''_n - x_n)^2$. При $\varepsilon_j^2 < \varepsilon_S^2$ говорят, что Y действует на X (системы связаны).

В качестве меры связанности используется показатель *улучшения прогноза*

$$PI = 1 - \frac{\varepsilon_j^2}{\varepsilon_S^2}. \quad (3)$$

Если $PI = 0$ (учёт сигнала Y не помог в предсказании X), считают, что Y не воздействует на X . Если же $PI \rightarrow 1$ (учёт сигнала Y существенно улучшил предсказание X), считают, что Y воздействует на X .

В реальной ситуации всегда присутствуют шумы, длина временного ряда ограничена, точность вычислений конечна и т.п., поэтому требуется проводить проверку значимости выводов – оценку вероятности, что полученный результат не случаен. Известны различные виды такого тестирования: теоретические оценки [10], использование суррогатных данных [8, 11, 12]. Ниже ограничимся одним видом суррогатов, сгенерированных из временных рядов тех же систем, что использовались в качестве объектов моделирования, но без связи, и оценим статистическую значимость полученных значений показателя PI каждый раз с новыми начальными условиями и добавлением новой реализации динамического шума. Переходный процесс отсекаем.

2. Тестирование на эталонных примерах

В качестве аппроксимирующих функций в совместной и индивидуальной модели использовались полиномы произвольной степени со всевозможными перекрестными слагаемыми, как это делалось в [7]. Степень полинома варьировала от 1 до 6, размерность индивидуальной модели изменялась от 1 до 4, а размерность добавки – от 1 до 2. Такой подход нельзя назвать наилучшим во всех случаях, так как вполне возможно, что для тех или иных объектов предпочтительнее использовать иной базис, например, радиальные базисные функции [9]. Тем не менее, полиномиальный базис является самым распространенным и простым в использовании, требует меньшего объема данных, чем радиальные базисные или вейвлетные функции вследствие отсутствия локализации в фазовом пространстве. Рассматривалась ситуация, когда системы были связаны без запаздывания, то есть в формуле (2) $\tau = 0$.

Для оценки значимости использовались ансамбли из 100 рядов суррогатных данных и оценивалась 95% квантиль.

2.1. Связанные отображения окружности. В качестве объекта использовались два однонаправленно связанных отображения окружности (4) со связью вида $k \sin y_n$, поскольку переменная в отображении окружности имеет смысл фазы колебаний. Коэффициент связи k варьировал в пределах от 0.01 до 0.08 с шагом 0.002. В каждое отображение добавлялся нормально распределённый динамический шум с дисперсией, равной 0.001. Численным решением получались временные ряды длиной в 4096 точек, переходный процесс предварительно отсекался. Параметры для обоих отображений выбирались таким образом, чтобы при нулевой связи и отсутствии шума они соответствовали хаотическому поведению: $\Delta_x = 0.001$, $\Delta_y = 0$, $\kappa_x = 3.98$, $\kappa_y = 3.88$.

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n + \Delta_x + \kappa_x \sin x_n + k \sin y_n + \xi_n, \\ y_{n+1} &= y_n + \Delta_y + \kappa_y \sin y_n + \eta_n. \end{aligned} \quad (4)$$

В состав отображения окружности входит непрерывная неполиномиальная функция $\sin(x_n)$. Поскольку данная функция может быть разложена в бесконечный степенной ряд, можно ожидать, что результат работы метода нелинейной причинности по Грейнджеру будет зависеть от степени полиномиальной функции, используемой в модели.

На рис. 1 представлены результаты применения метода причинности по Грейнджеру – значения показателя улучшения прогноза в зависимости от уровня связи k . В качестве аппроксимирующих функций использовались полиномы различной степени от 1 до 6, размерность совместной модели равнялась 2 ($D_s = 1$, $D_a = 1$).

Видно, что при использовании в качестве аппроксимирующей функции полиномов первой и второй степени серая и черная линии на графике зависимости $PI(k)$ (определение наличия связи в верном и неверном направлении) принимают приблизительно одинаковые значения и лежат выше штриховой линии (95% суррогатного уровня).

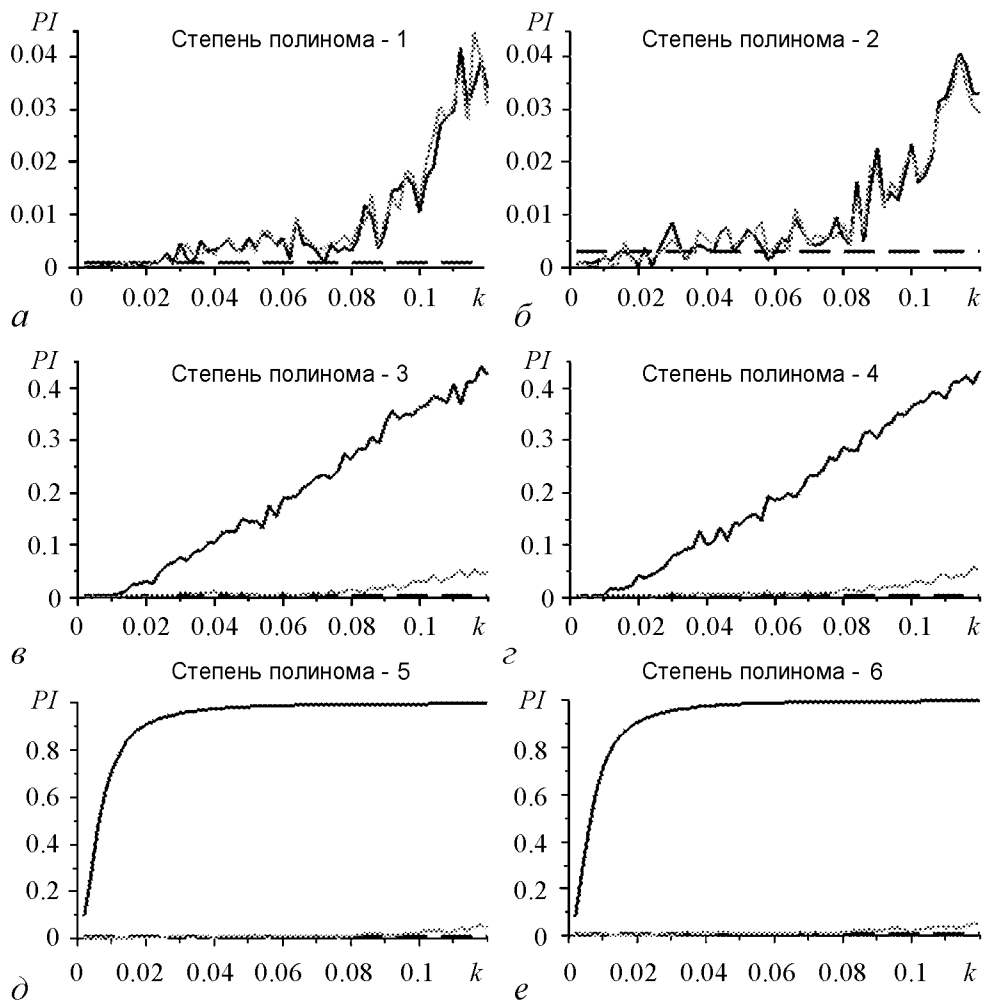


Рис. 1. Зависимость показателя улучшения прогноза PI от величины коэффициента связи k при исследовании чувствительности метода на связанных отображениях окружности: непрерывной черной линией показаны значения PI при поиске связанности в верном направлении; серой линией – значения, полученные при поиске связи в заведомо ложном направлении (оценка воздействия системы X на Y); штриховой линией – 95% суррогатный уровень

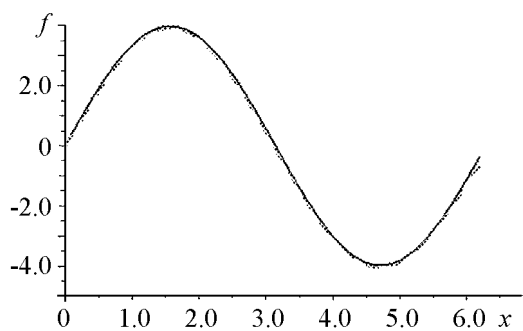


Рис. 2. Качественная проверка построенной модели: непрерывной черной линией показаны значения нелинейной функции отображения окружности, а штриховой серой – значения, полученные при её аппроксимации совместной моделью. Функция совместной модели $g(x_n, y_n)$ рассчитывалась для всех пар значений (x_n, y_n) из экспериментального ряда, получался набор трёхмерных векторов (точек в трёхмерном пространстве) $(x_n, y_n, g(x_n, y_n))$, затем строилась проекция этого набора на плоскость $(x_n, g(x_n, y_n))$, при этом точки сортировались по возрастанию x_n

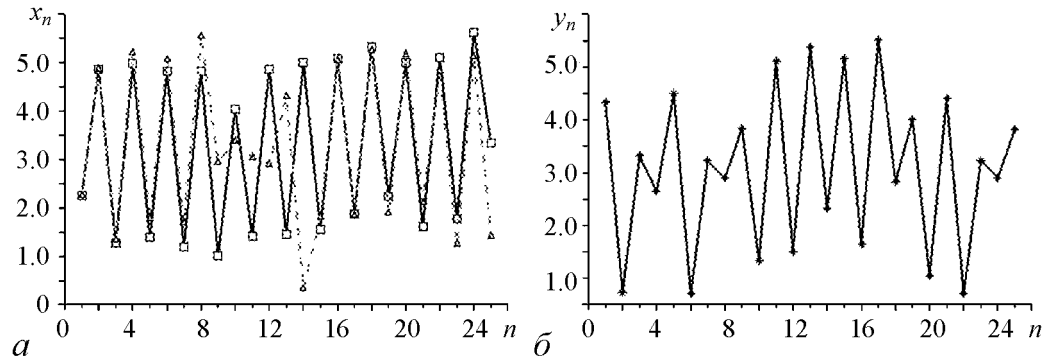


Рис. 3. Качественная проверка построенной модели. *a* – черной линией показаны значения наблюдаемого временного ряда отображения окружности (4); штриховой – значения временного ряда, восстановленного с помощью совместной модели вида (2); модель итерруется с начальными условиями, взятыми из исходного ряда (при построении предсказательной модели использовался полином степени 3 размерности 3). *б* – сплошной линией показаны значения наблюдаемого временного ряда воздействующей системы (ряд значений Y)

Это говорит о том, что метод не может различить связь в верном и неверном направлении. Использование полиномов более высоких степеней позволяет диагностировать направленную связь в верном направлении, так как значения PI возрастают с ростом коэффициента связи k , оказываются значимыми и, более того, стремятся к 1. Это можно объяснить тем, что с увеличением степени полиномиальной функции происходит все более точная аппроксимация синусоидальных нелинейностей, включая нелинейность в связи.

В случаях, когда метод демонстрирует хорошую работоспособность, нелинейная функция исходной эталонной системы хорошо аппроксимируется входящим в предсказательную модель полиномом, что видно на рис. 2. Также можно сравнить динамику построенной совместной модели и исходной системы, временной ряд которой получен при значении коэффициента связи $k = 0.05$ (рис. 3, *a*). Для этого исходная временная реализация $\{x_n\}$ была наложена на реализацию, полученную путем итерирования реконструированного отображения (2) с начальными условиями, взятыми также из исходного ряда при использовании реализации $\{y_n\}$ (рис. 3, *б*) в качестве внешнего воздействия. Видно, что полученная в результате работы метода совместная модель достаточно хорошо качественно описывает динамику поведения исходной системы.

2.2. Связанные отображения Икеды. В качестве второго примера были взяты два отображения Икеды

$$\begin{cases} x_{n+1} = A_x + B_x[x_n \cos(x_n^2 + u_n^2 + \phi_x) - u_n \sin(x_n^2 + u_n^2 + \phi_x)] + k \cos(y_n^2 - x_n^2) + \xi_n, \\ u_{n+1} = B_x[x_n \sin(x_n^2 + u_n^2 + \phi_x) + u_n \cos(x_n^2 + u_n^2 + \phi_x)], \\ y_{n+1} = A_y + B_y[y_n \cos(y_n^2 + v_n^2 + \phi_y) - v_n \sin(y_n^2 + v_n^2 + \phi_y)] + \eta_n, \\ v_{n+1} = B_y[y_n \sin(y_n^2 + v_n^2 + \phi_y) + v_n \cos(y_n^2 + v_n^2 + \phi_y)], \end{cases} \quad (5)$$

связанные однонаправленной нелинейной связью вида $k \cos(y_n^2 - x_n^2)$, где y – первая переменная воздействующего отображения. Связь вносилась таким образом, потому что переменная в отображении Икеды имеет смысл фазы колебаний. Коэффициент связи k варьировал в пределах от 0.005 до 0.5 с шагом 0.005, к обоим отображениям добавлялся динамический шум ξ_n и η_n с дисперсией, равной 0.001.

Данная система сложнее для аппроксимации моделями вида (1), (2), поскольку кроме непрерывной неполиномиальной функции, разложимой в бесконечный степенной ряд, имеется также скрытая* переменная u_n (ряд u_n считался ненаблюдаемым, то есть не использовался при построении прогностической модели). Это делает невозможным точную или асимптотически точную аппроксимацию исходных эталонных уравнений, таким образом затрудняя решение задачи о поиске связанности.

От каждого отображения получали временной ряд длиной в 4096 точек, переходный процесс предварительно отсекался. По карте режимов выбирались параметры для обоих отображений такими, чтобы при нулевой связи и в отсутствие шума они соответствовали хаотическому поведению: $A_x = 4$, $B_x = 0.2$, $\phi_x = 0.5$, $A_y = 6$, $B_y = 0.13$, $\phi_y = 0.4$.

На графиках, представленных на рис. 4, показаны зависимости показателя улучшения прогноза от силы связи в случае использования в качестве аппроксимирующей модели полиномов разной степени (степень варьировала от 1 до 6), размерность совместной модели бралась равной 3 ($D_s = 2$, $D_a = 1$). Из графиков видно, что использование в качестве аппроксимирующей функции полинома первой степени не позволяет выявить направленную связь, так как значения показателя улучшения прогноза как в верном, так и в заведомо ложном направлении оказываются незначимыми, как и для случая связанных отображений окружности. Увеличение степени полинома позволяет выявить наличие связи. Значения показателя улучшения прогноза при поиске связи в ложном направлении не возрастают с ростом связи во всех случаях. Однако при больших степенях полинома, используемого в качестве аппроксимирующей функции, они оказываются значимыми, что может говорить о ненадёжности подхода, использующего слишком большие модели. Значения PI при поиске связи в верном направлении растут с ростом коэффициента связи k .

Отдельно следует отметить, что при использовании полиномов 5 и 6 степени показатели улучшения прогноза при малых значениях коэффициента связи принимают отрицательные значения. Теоретически это невозможно, но происходит на практике вследствие недостаточной точности вычислений. На наш взгляд, одним из факторов, приводящих к этому, является то, что использование полиномов большой степени при аппроксимации синусоидальной нелинейности приводит к большим ошибкам в определении минимума целевой функции. Используемая нами модель допускает применение линейного метода наименьших квадратов, то есть проблема не может быть обусловлена попаданием в локальный минимум и лежит, главным образом, в точности вычислений. В работах [15, 16] показано, что при реализации метода наименьших квадратов с помощью QR-разложения, ортогонализации Грамма–Шмидта или в форме вращения Хаусхолдера ошибка в решении пропорциональна норме матрицы базисных функций. При использовании полиномов высоких степеней эта норма больше. Этот недостаток начинает сказываться, когда число коэффициентов оказывается слишком велико (сам размер матрицы возрастает), поэтому для совместной модели ошибка больше, чем для индивидуальной.

Поскольку не все переменные модели наблюдались, восстановить нелинейную функцию, как это было сделано для отображения окружности (см. рис. 2), невозможно. Потому были построены только временные ряды исходной системы при значении коэффициента связи $k = 0.5$ и реконструированной (рис. 5). Видно, что динами-

*Скрытыми называют переменные, входящие в уравнения модели, но недоступные измерению или наблюдению [13, 14].

ка эталонной системы и предсказательной модели различны: неплохо аппроксимируя непосредственно следующее значение, модель в перспективе не повторяет качественно динамику объекта, а вместо хаотического ряда демонстрирует устойчивое положение равновесия, возмущаемое сигналом второго отображения. Тем не менее, метод нелинейной грейнджеровской причинности демонстрирует хорошие чувствительность и специфичность.

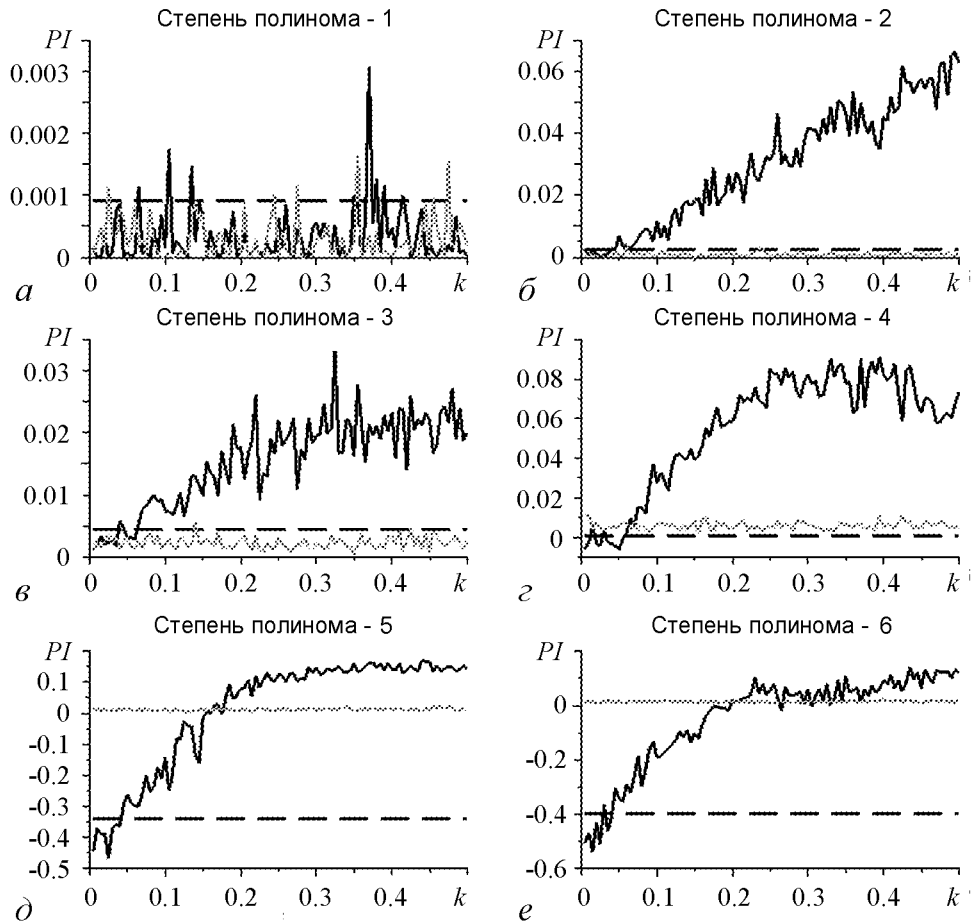


Рис. 4. Зависимость показателя улучшения прогноза PI от величины коэффициента связи k при исследовании чувствительности метода на связанных отображениях Икеды. Черной линией показаны значения PI при поиске связанности в верном направлении; серой линией – значения, полученные при поиске связи в заведомо ложном направлении (оценка воздействия системы X на Y); штриховой линией – 95% суррогатный уровень

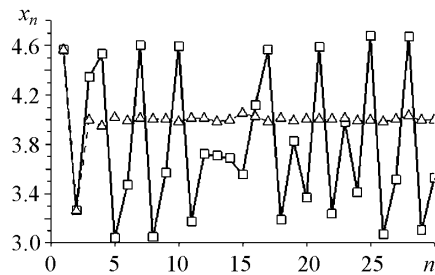


Рис. 5. Качественная проверка построенной модели: черной линией показаны значения наблюдаемого временного ряд отображения Икеды (5); штриховой серой – значения временного ряда, восстановленного с помощью совместной модели вида (2). Модель итерруется с начальными условиями, взятыми из исходного ряда. При построении предсказательной модели использовался полином степени 3 размерности 3

В приведённом на рис. 4 примере рассмотрен случай $D_s = 2$. Поскольку вектор состояния в данной ситуации нельзя восстановить точно, можно предполагать, что результаты могут различаться при различных D_s : например, ожидать, что оптимальные результаты могут быть достигнуты при размерности $D_s = 5$, согласно теореме Такенса [17]. Однако проведённые численные эксперименты показывают: размерности $D_s = 2$, как правило, достаточно для выявления существующей связи и признания связи в заведомо ложном направлении незначимой; при увеличении размерности результаты качественно не меняются.

2.3. Связанные отображения Заславского. Следующим объектом для исследования были выбраны два отображения Заславского [18] связанные односторонней линейной связью вида ky_n , где y – первая переменная воздействующего отображения.

$$\begin{cases} x_{n+1} = (x_n + \Delta_x + \kappa_x \sin x_n + a_x u_n + ky_n + \xi_n) \bmod 2\pi, \\ u_{n+1} = a u_n + \kappa_x \sin x_n. \\ y_{n+1} = (y_n + \Delta_y + \kappa_y \sin y_n + a_y v_n + \eta_n) \bmod 2\pi, \\ v_{n+1} = a v_n + \kappa_y \sin y_n. \end{cases} \quad (6)$$

Коэффициент связи варьировал в пределах от 0.01 до 1.0 с шагом 0.01, к обоим отображениям добавлялся динамический шум с дисперсией 0.001. Нелинейные функции отображения Заславского являются более трудными для аппроксимации, чем функции отображений окружности и Икеды (наличие скрытой переменной и неполиномиальных функций, одна из которых является разрывной за счёт взятия остатка от деления на 2π). От каждого отображения получался временной ряд первой координаты длиной в 4096 точек, переходный процесс предварительно отсекался. Для того, чтобы получить хаотические режимы для систем X и Y , выбирались следующие значения параметров: $\Delta_x = \pi$, $\Delta_y = 4$, $\kappa_x = 4.59$, $\kappa_y = 4.9$, $a_x = 0.78$, $a_y = 0.58$.

Результаты работы метода причинности по Грейнджеру в случае использования в качестве аппроксимирующих функций полиномов 1...6 степени представлены на рис 6 (размерность совместной модели равнялась трем ($D_s = 2$, $D_a = 1$)). В случае использования полинома 1 степени результаты оказываются значимы, в то время как для отображения Икеды подобная модель была неспособна обнаружить связь. На наш взгляд, это есть следствие введения линейной связи. Тем не менее, использование в качестве аппроксимирующих функций полиномов более высокой степени позволяет достигнуть лучшей специфичности – число неверных обнаружений связи в заведомо ложном направлении для них заметно меньше. Также при использовании полиномов степени 2 и выше показатель улучшения прогноза растет с увеличением значения коэффициента связи, в то время как при использовании полиномов степени 1 наблюдается уменьшение значения PI при больших коэффициентах k . Таким образом, даже при рассмотрении линейно связанных систем использование нелинейных моделей может давать некоторые преимущества.

Сравнивая временной ряд объекта, построенный при значении коэффициента связи $k = 0.5$, и ряд, сгенерированный восстановленной совместной моделью, можно видеть (рис. 7), что динамика модели и объекта существенно различна. Как и для

отображения Икеды, воспроизвести наблюдаемый режим качественно не удастся. Это не удивительно, поскольку вектор состояния наблюдался не полностью, а тригонометрические нелинейные функции с разрывами аппроксимировались полиномами низких степеней. Несмотря на это метод причинности по Грейнджеру демонстрирует разумные результаты.

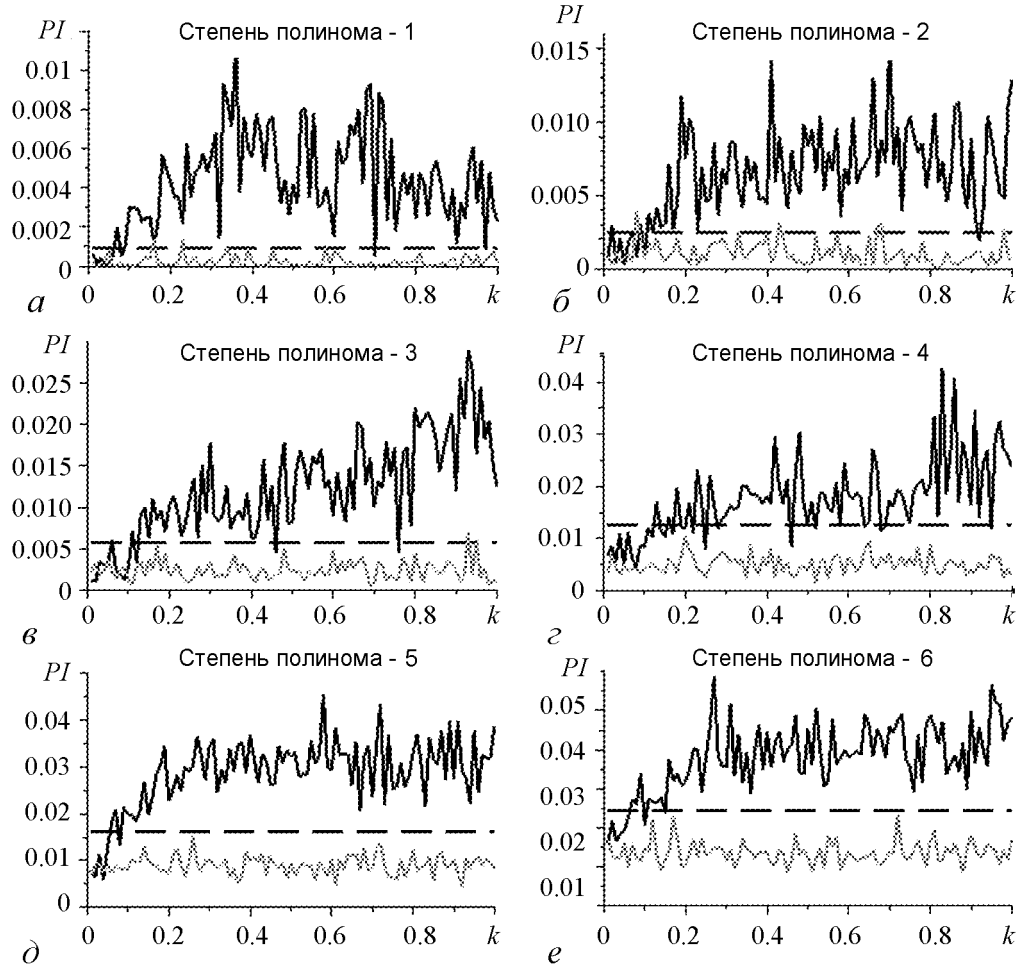


Рис. 6. Зависимость показателя улучшения прогноза PI от величины коэффициента связи k при исследовании чувствительности метода на связанных отображениях Заславского. Сплошной черной линией показаны значения PI при поиске связанности в верном направлении; серой линией – значения, полученные при поиске связи в заведомо ложном направлении (оценка воздействия системы X на Y); штриховой линией – 95% суррогатный уровень

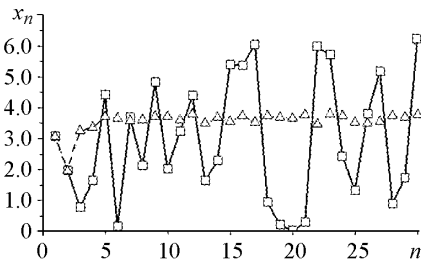


Рис. 7. Качественная проверка построенной модели: черной линией показаны значения наблюдаемого временного ряда отображения Заславского (6); штриховой серой – значения временного ряда, восстановленного с помощью совместной модели вида (2). Модель итерируется с начальными условиями, взятыми из исходного ряда. При построении предсказательной модели использовался полином степени 3 размерности 3

2.4. Связанные системы Лоренца. В предыдущих разделах метод причинности по Грейнджеру применяли для определения связанности по рядам эталонных систем с дискретным временем. Рассмотрим в качестве объекта две связанные однонаправленной связью системы с непрерывным временем – системы Лоренца

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \sigma_1(x_2 - x_1), \\ \dot{x}_2 = x_1(r_1 - x_3) - x_2, \\ \dot{x}_3 = x_1x_2 - b_1x_3 + ky_3, \end{cases} \quad (7)$$

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = \sigma_2(y_2 - y_1), \\ \dot{y}_2 = y_1(r_2 - y_3) - y_2, \\ \dot{y}_3 = y_1y_2 - b_2y_3. \end{cases}$$

Следует отметить, что в принципе такая постановка задачи не слишком отличается от ранее рассмотренных, поскольку аппроксимация дифференциальных уравнений разностной схемой возможна (требуется проверить также условие сходимости). Однако в рассмотренном случае две из трёх переменных каждой подсистемы в (7) считались ненаблюдаемыми, что существенно усложняет построение модели. Ситуация аналогична рассмотренной для двух связанных отображений Икеды. Более того, дополнительно присутствует специфика, связанная с тем, что временные ряды получены от системы с непрерывным временем: большие времена корреляции, спектр с выраженными максимумами, большое расстояние между экстремумами в реализации. Эти особенности отличают данную ситуацию от ранее рассмотренных случаев.

Линейная аддитивная связь вида ky_3 вносилась в уравнение для третьей координаты x_3 , коэффициент связи k варьировал в пределах от 0.01 до 1 с шагом 0.01, шаг интегрирования 0.001. От каждой системы получали временные ряды длиной в 20480 точек на аттракторе. Хаотические режимы реализовывались в системах с параметрами: $\sigma_1 = 10$, $\sigma_2 = 10.5$, $r_1 = 30$, $r_2 = 31$, $b_1 = 8/3$, $b_2 = 8/3$.

Для графиков, представленных на рис. 8, в качестве моделей использовались полиномы степени 1 и 2 с индивидуальной и совместной размерностями, равными 1 (а, б) и 2 (в, г). Лаг $l = 1.0$. В случае использования в качестве линейной модели полинома степени 1 (рис. 8, а, б) результаты оказываются значимы только при больших размерностях (см. рис. 8, б) и при значениях коэффициента связи $k \approx 0.8$. Нелинейная модель (см. рис. 8, в, г) с полиномом степени 2 в качестве аппроксимирующей функции позволяет выявить связь (см. рис. 8, г), начиная с вдвое меньших значений коэффициента связи $k \approx 0.5$, а значения показателя улучшения прогноза PI оказываются больше, чем при использовании линейной модели.

При поиске связи в заведомо ложном направлении присутствует небольшой рост значений PI , однако результаты оказываются незначимы, с точки зрения суррогатов, для всех рассмотренных коэффициентов связи.

На рис. 9 представлено сравнение исходного временного ряда, построенного при значении коэффициента связи $k = 0.6$, и ряда, полученного с помощью совместной модели. Видно, что уравнения (1), (2) полностью не описывают динамику системы. Однако метод нелинейной причинности по Грейнджеру и в этом случае позволяет получить значимые результаты в заведомо верном направлении и незначимые – в заведомо ложном, то есть проходит проверку как на чувствительность, так и на специфичность, начиная с некоторого значения коэффициента связи.

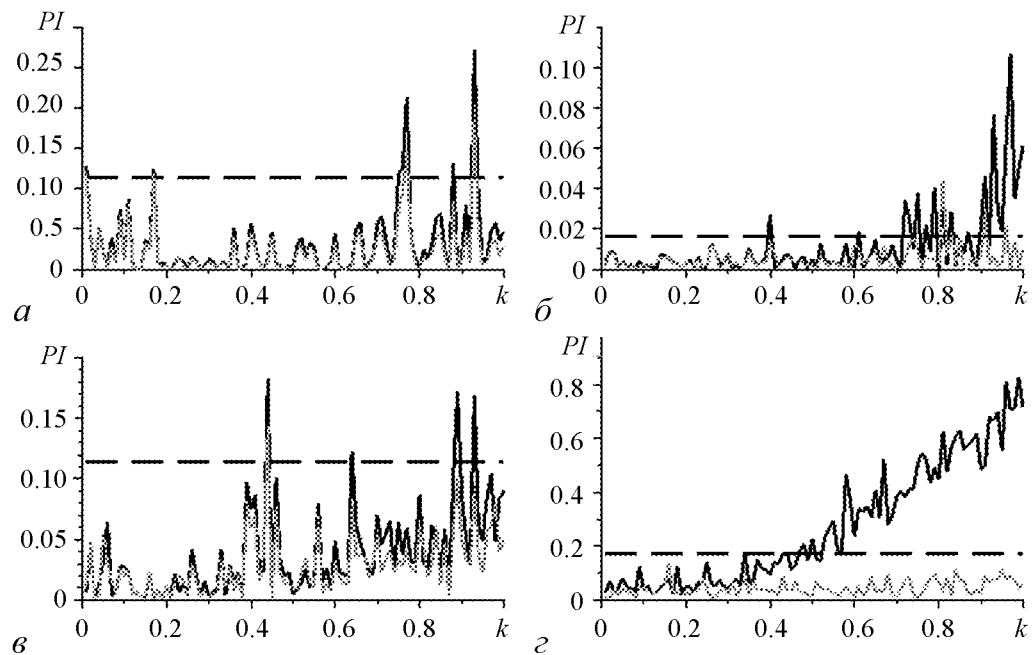


Рис. 8. Зависимость показателя улучшения прогноза PI от величины коэффициента связи k при исследовании чувствительности метода на связанных однонаправленной связью системах Лоренца при использовании: $a, б$ – линейной модели (размерность совместной модели 2 и 4, соответственно); $в, г$ – нелинейной модели со степенью полинома 2 (размерность совместной модели 2 и 4, соответственно). Непрерывной черной линией показаны значения PI при поиске связанности в верном направлении; серой линией – значения, полученные при поиске связи в заведомо ложном направлении (оценка воздействия системы X на Y); штриховой линией – 95% суррогатный уровень

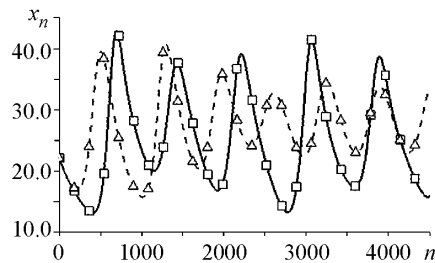


Рис. 9. Качественная проверка сходства временных рядов: наблюдаемый временной ряд третьей координаты системы Лоренца (черная линия) и временной ряд, восстановленный совместной моделью вида (серая штриховая линия); модель интегрируется с начальными условиями, взятыми из исходного ряда. При построении предсказательной модели использовался полином степени 2, размерности 4

Заключение

На примере ряда последовательно усложняющихся эталонных однонаправленно связанных систем (системы, содержащие неполиномиальные функции, скрытые переменные, разрывные функции, описываемые дифференциальными уравнениями) изучалась работоспособность метода причинности по Грейнджеру. В качестве аппроксимирующих функций использовались полиномы общего вида. Метод в таком виде уже неоднократно применялся для различных реальных объектов, в частности, нейрофизиологических и климатологических. Целью исследования было уточнение границ его применения: насколько несоответствие структуры прогностической модели структуре породившего временные ряды объекта существенно сказывается на чувствительности и специфичности метода.

На ряде численных примеров было показано следующее.

- Работоспособность метода зависит от качества аппроксимации как собственных нелинейных функций модели, так и внешнего воздействия. Слишком сильное упрощение этих функций в предсказательной модели может привести к падению специфичности: метод перестаёт различать связь в верном и ложном направлениях. Лучшая аппроксимация нелинейных функций приводит к возможности выявления связи при меньших ее величинах.

- При достаточно высоких степенях и размерностях полинома метод верно диагностирует связь даже в случаях, когда прогностическая модель существенно отличается от эталонных уравнений из-за наличия скрытых переменных. Работоспособность метода сохраняется для временных рядов с различными статистическими характеристиками, типичными как для систем с дискретным временем, так и с непрерывным. Анализ аттрактора реконструированной прогностической модели показывает, что ее временной ряд имеет поведение принципиально непохожее на поведение ряда эталонной системы: вместо хаотического режима демонстрирует устойчивое равновесие или периодический режим, возмущаемый воздействием другой подсистемы. Таким образом, оказывается, что работоспособность метода напрямую не зависит от способности прогностической модели воспроизводить режим поведения наблюдаемой системы, хотя и может быть с нею связана; детальное прояснение этого момента требует отдельного исследования.

- Большое число коэффициентов полиномиальной модели приводит к нежелательным последствиям. Во-первых, предсказательная модель начинает описывать не процесс, а конкретные особенности измеренного ряда, в том числе, конкретную реализацию шума. Это является одной из причин того, что метод начинает показывать значимую связь в заведомо ложном направлении. Во-вторых, возрастают ошибки определения коэффициентов, поэтому минимум целевой функции определяется неточно и, как следствие, рассчитанное улучшение прогноза может принимать произвольные, в том числе, отрицательные значения.

По результатам работы можно сделать общие выводы и рекомендации.

- Использование нелинейных моделей в целом повышают специфичность и чувствительность метода.

- Можно рассчитывать на работоспособность подхода даже в случае, когда добиться качественного воспроизведения динамики наблюдаемого процесса не удаётся, то есть добиваться соответствия топологических характеристик аттракторов объекта и модели не всегда необходимо, хотя данный вопрос заслуживает отдельного исследования.

- Нужно следить за точностью вычислений и числом коэффициентов полиномиальной модели, поскольку возможность переобучения модели и рост влияния численных ошибок могут привести к неверным и даже нефизичным выводам. Одним из индикаторов такого поведения является получение отрицательных значений улучшения прогноза PI , теоретически невозможных.

Авторы выражают благодарность профессору Б.П. Безручко, с которым неоднократно обсуждались результаты работы и чьи замечания и предложения помогли существенно улучшить ее.

Работа выполнена при поддержке грантов РФФИ: № 11-02-00599 и № 12-02-00377.

Библиографический список

1. *Granger C.W.J.* Investigating causal relations by econometric models and cross-spectral methods // *Econometrica*. 1969. Vol. 37, № 3. P. 424.
2. *Andrea Brovelli, Mingzhou Ding, Anders Ledberg, Yonghong Chen, Richard Nakamura, and Steven L. Bressler.* Beta oscillations in a large-scale sensorimotor cortical network: Directional influences revealed by Granger causality // *PNAS*. 2004. Vol. 101. P. 9849.
3. *L.A. Baccala, K. Sameshima, G. Ballester, A.C. Do Valle and C. Timo-Laria.* Studing the interactions between brain structures via directed coherence and Granger causality // *Applied sig. processing*. 1998. Vol. 5. P. 40.
4. *P. Tass, D. Smirnov, A. Karavaev, U. Barnikol, T. Barnikol, I. Adamchic, C. Hauptmann, N. Pawelczyk, M. Maarouf, V. Sturm, H.-J. Freund, and B. Bezruchko.* The causal relationship between subcortical local field potential oscillations and parkinsonian resting tremor // *J. Neural Eng.* 2010. Vol. 7. 016009.
5. *И.И. Мохов, Д.А. Смирнов, П.И. Наконечный, С.С. Козленко, Ю. Куртс.* Оценка взаимного воздействия Эль-Ниньо – Южного колебания и Индийского муссона // в «Современные проблемы динамики океана и атмосферы» / Ред. А.В. Фролов и Ю.Д. Реснянский. М.: ТРИАДА ЛТД, 2010. С. 251.
6. *С.С. Козленко, И.И. Мохов, Д.А. Смирнов.* Анализ причинно-следственных связей между Эль-Ниньо в Тихом океане и его аналогом в экваториальной Атлантике // *Известия РАН. Физика атмосферы и океана*. 2009. Т. 42, № 6. С. 754.
7. *Yonghong Chen, Govindan Rangarajan, Jianfeng Feng, Mingzhou Ding.* Analyzing Multiple Nonlinear Time Series with Extended Granger Causality // *Physics Letters A*. Vol. 324, Issue 1. P. 26.
8. *И.В. Сысоев, А.С. Караваев, П.И. Наконечный.* Роль нелинейности модели в диагностике связей при патологическом треморе методом грейнджеровской причинности // *Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика*. 2010. Т. 18, № 4. С. 81.
9. *Marinazzo Daniele, Pellicoro Mario, and Stramaglia Sebastiano.* Nonlinear parametric model for Granger causality of time series// *Phys. Rev. E*. 2006. Vol. 73. 066216.
10. *Смирнов Д.А.* Выявление нелинейных связей между стохастическими осцилляторами по временным рядам // *Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика*, 2010. Т. 18, в. 2. С. 16.
11. *Schreiber T. and Schmitz A.* Surrogate time series // *Physica D*. 2000. Vol. 142. 346.
12. *Kevin T. Dolan and Alexander Neiman.* Surrogate analysis of multichannel data with frequency dependant time lag // *Physical review E*. Vol 65. 026108.
13. *Baake E., Baake M., Bock H.G., and Briggs K.M.* Fitting ordinary differential equations to chaotic data // *Phys. Rev. A*. 1992. Vol. 45, № 8. P. 5524.
14. *Boris P. Bezruchko, Dmitry A. Smirnov and Ilya V. Sysoev.* Identification of chaotic systems with hidden variables (modified Bock's algorithm) // *Chaos, Solitons & Fractals*. 2006. Vol. 29. P. 82.
15. *Vjork A.* Solving Linear Squares Problem by Gram-Schmidt Orthogonalization // *Math. Сопм*. 1976. Vol. 20. P. 325.
16. *Дж. Голуб, Ч. Ван Лоун.* Матричные вычисления: Пер. с англ. М.: Мир, 1999. 548 с.

17. *Takens F.* Detecting strange attractors in turbulence // *Lecture Notes in Math.* 1981. Vol. 898. P. 366.

18. *Заславский Г.М., Сагдеев Р.З., Усиков Д.А., Черников А.А.* Слабый хаос и квазирегулярные структуры. М.: Наука, 1991. 236 с.

Саратовский госуниверситет

СФ ИРЭ им. В.А. Котельникова РАН

Поступила в редакцию

После доработки

7.11.2011

28.03.2013

INFLUENCE OF THE CHOICE OF THE MODEL STRUCTURE FOR WORKING CAPACITY OF NONLINEAR GRANGER CAUSALITY APPROACH

Maxim V. Kornilov, Ilya V. Sysoev

Currently, the method of nonlinear Granger causality is actively used in many applications in medicine, biology, physics, to identify the coupling between objects from the records of their oscillations (time series) using forecasting models. In this paper the impact of choosing the model structure on the method performance is investigated. The possibility of obtaining reliable estimates of coupling is numerically demonstrated, even if the structure of the constructed forecasting model differs from that of the reference system.

Keywords: The method of nonlinear Granger causality, the reconstruction of the time series, nonlinear dynamical systems.

Корнилов Максим Вячеславович – родился в 1988 году в Саратове, окончил Лицей математики и информатики (2005), механико-математический факультет Саратовского государственного университета имени Н.Г. Чернышевского (2009, присуждена степень бакалавра математики), факультет нано- и биомедицинских технологий (2011, присуждена степень магистра техники и технологии по направлению биомедицинская инженерия). В настоящее время аспирант кафедры динамического моделирования и биомедицинской инженерии. Научные интересы: анализ временных рядов, математическое моделирование биологических процессов, автоматическое распознавание изображений, компьютерное зрение.



410012 Саратов, ул. Астраханская, 83
Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского
E-mail: kornilovmv@gmail.com

Сысоев Илья Вячеславович – родился в Саратове (1983). Окончил Лицей прикладных наук (1999) и факультет нелинейных процессов СГУ (2004). Защитил диссертацию на соискание учёной степени кандидата физико-математических наук (2007). Работал на кафедре электроники, колебаний и волн (2005–2007). В настоящее время – доцент базовой кафедры динамического моделирования и биомедицинской инженерии. Научные интересы – исследование сигналов биологической природы методами нелинейной динамики, исследование эффективности и модернизация подходов к анализу сигналов. Автор более 40 публикаций.



410019 Саратов, ул. Зелёная, 38
Саратовский филиал Института радиотехники и электроники
им. В.А. Котельникова РАН
E-mail: ivssci@gmail.com



О БИФУРКАЦИЯХ УМНОЖЕНИЯ ПЕРИОДА ЛЕДНИКОВЫХ ЦИКЛОВ В ПЛИОЦЕНЕ – ПЛЕЙСТОЦЕНЕ

Н. В. Вакуленко, Н. Н. Иващенко, В. М. Котляков, Д. М. Сонечкин

В плиоцене (примерно 5–2 млн. лет до настоящего времени) глобальный климат колебался с периодом, хорошо соответствующим 41-тысячелетнему циклу изменений наклона оси вращения Земли к плоскости эклиптики. Затем этот период исчез, несмотря на то, что 41-тысячелетний цикл наклона даже немного увеличил свой размах и, следовательно, отклик на него должен был бы только усилиться. Анализируя палеоклиматический ряд, покрывающий плиоцен и последующий плейстоцен, мы показываем, что этот отклик климатической системы просто стал неустойчивым и, следовательно, ненаблюдаемым. Одновременно, посредством бифуркации удвоения периода, хорошо известной в теории нелинейных динамических систем, возникли новые устойчивые и наблюдаемые климатические колебания. В дальнейшем они испытали несколько вторичных бифуркаций, при которых их периоды поочередно утраивались, удваивались и снова утраивались.

Ключевые слова: Палеоклиматология, ледниковые циклы плиоцена/плейстоцена, вейвлетный анализ, бифуркации умножения периода.

Введение

Со времен пионерских исследований Л. Агассиза, Дж. Адемара, Дж. Кролля и М. Миланковича палеоклиматологами принято объяснение, обычно называемое теорией ледниковых циклов Миланковича. Теория относит весьма регулярное чередование холодных (ледниковых) и теплых (межледниковых) климатических условий в течение последних 5 млн. лет (в плиоцене и плейстоцене) на счет изменений и перераспределений между разными широтными поясами Земли приходящей солнечной радиации (инсоляции). Эти изменения и перераспределения, в свою очередь, обязаны квазипериодическим вариациям прецессии и наклона оси вращения Земли к плоскости эклиптики [1]. Примерно за один млн. лет до настоящего времени климатические колебания, явно следовавшие наиболее мощному циклу наклона с периодом в 41 тыс. лет, внезапно исчезли, несмотря на то, что размах этого цикла тогда не только не уменьшился, но даже немного увеличился. Взамен них появились климатические колебания с периодами около 100 тыс. лет, что неплохо совпадает с преобладающей цикличностью эксцентриситета земной орбиты. Циклы эксцентриситета не приводят к перераспределению инсоляции по широтам и лишь несколько

(на сотую долю процента) меняют годовую сумму инсоляции, получаемую Землей в целом. Поэтому большинство палеоклиматологов считает невероятным, что столь малые изменения инсоляционного воздействия могли вызывать столь существенную трансформацию климатических колебаний. Выяснение причин этой трансформации является сейчас основной нерешенной проблемой в теории Миланковича.

Настоящее исследование было стимулировано попытками западных палеоклиматологов решить эту проблему [2–9]. Хотя в целом эти попытки остались безуспешными, западные ученые существенно детализовали теорию Миланковича, особенно в том, что касается оценки сравнительной роли циклов прецессии и наклона. Напомним в связи с этим, что Дж. Кролль отводил главную роль циклам наклона, а М. Миланкович считал наиболее важными циклы прецессии, происходящие с периодами в 19 и 23 тыс. лет, поскольку известные ему стадии наиболее недавних европейских оледенений (Вюрм, Рисс) хорошо укладывались именно в эти последние.

Однако при этом возник новый вопрос. Изменения инсоляции за счет прецессии происходят противофазно в северном и южном полушариях. Между тем, хотя и с некоторыми сомнениями (см. перечень пяти возможных альтернатив в [10]), сейчас принято интерпретировать палеоклиматические данные как свидетельствующие о том, что относительно теплые и относительно холодные условия наступали в обоих полушариях синхронно. Именно это заставило палеоклиматологов вернуться к вопросу о важности наклона, изначально предполагавшейся Кроллем. Решающую роль тут сыграла недавняя работа П. Хайберса [11]. Он предположил, что для таяния снега и льда в высоких широтах важна сумма инсоляции за теплый период года, превышающая некоторое пороговое значение. Эта инсоляция колеблется в зависимости и от прецессии и от наклона, но главным для нее является 41-тысячелетний цикл наклона.

Таким образом, в современном прочтении, теория Миланковича склоняется к тому, что 41-тысячелетний цикл наклона является главной причиной чередования относительно теплых и относительно холодных климатических условий, и объясняет, почему климатические циклы были синхронными в северном и южном полушариях. Однако эта теория все еще не отвечает на вопрос, почему примерно за один млн. лет до нашего времени произошло существенное увеличение длительности климатических циклов, то есть разрешить основную вышеуказанную проблему теории Миланковича.

Здесь для решения этой проблемы мы используем понятия и методы современной математической теории нелинейных динамических систем, находящихся под воздействием квазипериодических внешних сил, то есть сил, чьи периоды несоизмеримы друг с другом. Наше внимание именно к таким динамическим системам объясняется тем, что энергетические спектры подобных систем содержат очень большое (в принципе, бесконечно большое) число пиков на комбинационных гармониках внешних сил.

Сейчас имеются весьма надежные расчеты [12–17] вариаций инсоляции на разных широтах Земли для последних 20 млн. лет, и даны экстраполяции этих колебаний в далекое будущее. Впервые такие расчеты (долгое время остававшиеся наиболее точными) были проведены советскими учеными Ш.Г. Шараф и Н.А. Будниковой (см. подробные ссылки на их публикации в книге А.С. Моница [18]). Однако упоминания об этих пионерских работах в западных публикациях или отсутствуют, или, как в наиболее известной из этих публикаций – работе известного бельгий-

ского геофизика А. Берже [12], работы Шараф и Будниковой упоминаются мельком как нечто незначительное. В этой работе был дан перечень энергетически наиболее мощных периодичностей в вариациях орбитальных элементов Земли (прецессии, наклонения и эксцентриситета), которые определяют вариации инсоляции, но никак не было прокомментировано их происхождение. Однако уместно упомянуть, что колебания орбитальных элементов Земли являются модулированными по амплитуде и частоте (читатель, не знакомый с теорией модуляции временных колебаний, может ознакомиться с ее азами в [19, гл. 9]), поскольку Земля в своем движении вокруг Солнца подвергается гравитационным воздействиям других планет.

Именно в результате этих модуляций получается огромное количество периодов в фурье-представлении временных вариаций прецессии, наклонения и эксцентриситета. Например, вторая по мощности фурье-гармоника в вариациях эксцентриситета, имеющая период 94945 лет, модулируется гармониками с много большими периодами 2035441 (6-я по мощности), 1306618 (8-я), 1282495 (13-я) и 3466974 (15-я) лет, соответственно. Причем последняя из этих модулирующих гармоник (15-я) сама является комбинационной гармоникой 6-й и 13-й гармоник. Заметим, что в [12] период 6-й гармоники в 2035441 лет был ошибочно указан как 2305441, вероятно, из-за типографской ошибки. Эту ошибку не замечали авторы многих публикаций, цитировавшие работу [12]. Например, эта ошибка перепечатана в весьма содержательной в других отношениях работе М. Гила [20] (см. его табл. IV на стр. 383).

В результате этих модуляций появляются довольно мощные комбинационные гармоники на весьма близких частотах $1/94945 - 1/2035441 = 1/99590$ (4-я), $1/94945 - 1/1306618 = 1/102384$ (12-я), $1/94945 - 1/1282495 = 1/102536$ (7-я), $1/94945 + 1/3466974 = 1/92414$ (16-я) обратных лет. В скобках указаны номера этих гармоник, как они упорядочены в [12] по убыванию их мощности. Комбинационная гармоника $1/94945 - 1/3466974 = 1/97618$ находится уже за пределами указанного там списка 42-х гармоник эксцентриситета, как и много других еще менее мощных гармоник с периодами менее 90 тыс. лет. Из их числа, как пример, приведем гармонику $1/94945 + 1/1306618 = 1/88513$. При частотной модуляции появляются также комбинационные гармоники следующих порядков с периодами до примерно 160-ти тыс. лет. Из их числа приведем только гармоники $1/99590 - 1/1306618 = 1/107807$ и $1/99590 - 1/1282495 = 1/107975$, которые являются 14-й и 26-й в списке Берже. Они встретятся нам ниже в разделе 2 при рассмотрении конкретных климатических циклов плейстоцена. Заметим, что подобные же модуляции присущи основному 41-тысячелетнему колебанию наклонения.

Диапазон более долгих периодов до примерно 300 тыс. лет остается свободным от комбинационных гармоник вышеуказанного типа. Однако затем фурье-гармоника с периодом 412885 тыс. лет (самая первая в списке Берже) начинает новую серию комбинационных гармоник эксцентриситета с существенно более длинными периодами (несколько сотен тыс. лет). Чередование диапазонов временных масштабов, внутри которых имеется много гармоник с близкими периодами, и диапазонов, почти свободных от гармоник, составляет своеобразную «полифонию» (многоголосие) инсоляционных воздействий на климатическую систему.

В палеоклиматических рядах также обнаруживается очень много периодичностей, которым соответствуют дельта-пики в энергетических спектрах этих рядов.

Правда, известный американский геофизик К. Вунш [21], начиная заниматься проблемой удлинения климатических циклов, высказывал сомнение в их статистической значимости против гипотезы «красного шума». Но затем он перестал настаивать на этом, убедившись, что палеоклиматические периодичности все же реальны. С другой стороны, уже упомянутый М. Гил с самого начала своих занятий палеоклиматом хорошо понимал важность существования многих гармоник в вариациях инсоляции. Он, вероятно, первым со своими учениками аккуратно с математической точки зрения показал (см., например, [22]), что именно эти гармоники возбуждают множество пиков в энергетических спектрах палеоклиматических колебаний.

«Полифония» инсоляционных воздействий на климатическую систему делает палеоклиматические колебания чрезвычайно сложными. Это сильно затрудняет понимание механизмов их формирования. Так, пионеры развития теории Миланковича в XX веке Дж. Имбри и др. [23,24] посчитали, что отклики климатической системы на инсоляционные воздействия, включая их примерно 100-тысячелетнее колебание за счет эксцентриситета, были в плиоцене и плейстоцене почти линейными. Действительно, эти исследователи показали, что амплитуды откликов были пропорциональными амплитудам воздействия, а фазы откликов несколько запаздывали по сравнению с фазами воздействующих колебаний инсоляции. Но эти исследователи не нашли [23] никаких следов отклика на самое мощное из колебаний эксцентриситета с периодом 412885 лет. Такой отклик должен был бы наблюдаться, если климатическая система откликалась на инсоляционные воздействия действительно линейно.

Только к концу XX века было понято [25–28], что 412885-летнее колебание эксцентриситета может проявлять себя как модулятор вышеуказанных примерно 100-тысячелетних гармоник эксцентриситета. При этом должны рождаться новые комбинационные гармоники – новые «октавы» инсоляционных и, следовательно, палеоклиматических колебаний. Например, получаются гармоники $1/92414 + 1/412885 = 1/75512$ (33-я), $1/94945 + 1/412885 = 1/77194$ (27-я), которые встретятся нам ниже при рассмотрении конкретных климатических циклов. Также ниже встретятся гармоники $1/102385 + 1/412885 = 1/82041$, $1/92414 - 1/412885 = 1/119063$ (20-я) и $1/94945 - 1/412885 = 1/123298$ (3-я), периоды которых практически равны удвоенному и утроенному периоду главного цикла наклонения.

Ясно, что отклики климатической системы на квазипериодические инсоляционные воздействия могут продуцировать пики в энергетических климатических спектрах на периодах комбинационных гармоник только, если климатическая система является нелинейной. Однако, если период внешней силы много больше любого периода, присущего самой климатической системе (собственного периода), то климатическая система будет «пассивно воспроизводить» изменение этой силы с некоторым запаздыванием по фазе. Это – как раз тот случай, когда система ведет себя как линейная, что и обнаружили авторы работ [23,24]. Если же период силы и какой-либо из собственных периодов климатической системы одного порядка величины, то амплитуда климатического отклика существенно зависит от их близости (резонанса). При сильном резонансе амплитуда отклика очень велика, даже если размах колебаний внешней силы очень мал. Такой высокоамплитудный отклик может оказаться неустойчивым, и будут наблюдаться климатические колебания, возникающие как результат разрешения этой неустойчивости. Рассмотрение того, как и когда

в плиоцене/плейстоцене возникала неустойчивость отклика климатической системы на инсоляционное внешнее воздействие, составляет суть нашего исследования.

Уже довольно давно было наблюдеено [29–32], и снова подчеркнута в недавней статье [6], что длительности плейстоценовых циклов лишь в среднем были близки к 100 тыс. лет. Каждый же конкретный цикл имел длительность, близкую к длительности удвоенного или утроенного главного цикла наклонения. Из сказанного выше следует, что фактические длительности плейстоценовых циклов, взятые по отдельности, близки к длительностям некоторых из комбинационных гармоник эксцентриситета. Так что вполне возможно, что удлиненные климатические циклы плейстоцена имеют резонансную природу.

Помимо инсоляционной «полифонии» вторым определяющим для климатической системы внешним фактором был общий тренд похолодания. Палеоклиматические ряды ясно демонстрируют этот тренд для последних нескольких десятков млн. лет истории Земли [33]. Параллельно с этим трендом увеличивалась высокочастотная изменчивость климата, что косвенно свидетельствует об уменьшении устойчивости климата со временем.

Сам тренд похолодания климата мог быть обусловлен изменениями способности Земли аккумулировать приходящую коротковолновую солнечную радиацию, излучать длинноволновую радиацию в космос и обмениваться теплом с глубокими слоями океана. Вероятно, что альbedo Земли было небольшим и почти постоянным в течение очень теплого раннего плиоцена. Вероятно также, что собственное излучение Земли было мало изменчиво из-за более или менее постоянного уровня концентрации парниковых газов в атмосфере того времени [34]. Зато, в согласии с [35–39] и многими другими публикациями, можно полагать, что реорганизация общей циркуляции океана, связанная с появлением Панамского перешейка и разрастанием ледниковых щитов в северном полушарии, существенно повлияла на теплообмен между атмосферой и океаном и, тем самым, как-то способствовала общему похолоданию климата. Уместно упомянуть в связи с этим наши работы [40,41], в которых было показано, что в масштабах порядка 100 тыс. лет океаническая подсистема глобальной климатической системы лидировала по сравнению с континентальной подсистемой. В данной работе мы, однако, не будем детально обсуждать вопрос о роли океана, а ограничимся только констатацией важности общего похолодания глобального климата для трансформации ледниковых циклов на границе плиоцена и плейстоцена.

1. Метод исследования

Чтобы проследить, какие из комбинационных гармоник были наиболее выражены в климатических колебаниях в тот или иной конкретный отрезок времени, используем технику вейвлетного преобразования (ВП) палеоклиматических временных рядов, полностью покрывающих эпохи плиоцена и плейстоцена. Насколько известно, впервые ВП почти столь же длинных рядов было рассмотрено в статье [42]. Ее авторы показали, что ВП более четко, чем скользящее преобразование Фурье, выявляет смену длительности ледниковых циклов. Они нашли, что эта смена уже завершилась примерно за 900–800 тыс. лет до настоящего времени, но детали ее совсем не рассматривали. Сейчас техника ВП весьма популярна в палеоклиматоло-

гии, но часто она используется просто как «красивая иллюстрация» без какого-либо анализа получающихся картин ВП (см.такие примеры в [14,43]).

В данной работе, как и в [42], использовано комплексное ВП вещественного временного ряда $T(t)$, $t \in \theta$

$$\begin{aligned} WT(b, a) &= WT_{re}(b, a) + iWT_{im}(b, a) = \\ &= a^{-1/2} \int_{\theta} T(t) MOR^* ((t - b)/a) dt, \quad a > 0 \end{aligned} \quad (1)$$

с хорошо известной «материнской» вейвлетной функцией, предложенной французским математиком Ж. Морле,

$$MOR(\tau) = \pi^{-1/4} \exp \{iC\tau\} \exp \{-\tau^2/2\}, \quad (2)$$

вычисленной для всевозможных временных сдвигов $(t - b)$ и вейвлетных масштабов a . Значок «*» в (1) означает комплексное сопряжение.

Выбор частотной характеристики этой функции $C = 6.2035$ обеспечивает строгое равенство вейвлетного масштаба обычному фурье-масштабу, то есть амплитуда ВП гармонического временного ряда $T(t) = A \cos(2\pi\omega t + \phi)$ получается максимальной в вейвлетном масштабе $a = 2\pi/\omega$, а передаточная функция ВП как полосового фильтра, получаемая путем преобразования Фурье функции Морле, имеет вид гауссиана для положительных a

$$\overline{MOR}(a) \cong \exp \{-(a - C)^2/2\}, \quad a^{-1} > 0. \quad (3)$$

Значения передаточной функции, соответствующие отрицательным a , которые формально появляются в преобразовании Фурье, обнуляются. Амплитуда ВП в масштабе a оказывается равна взвешенному среднему амплитуд фурье-гармоник преобразуемого ряда в некотором диапазоне вокруг этого масштаба (см. [19, гл. 8]). Заметим, что в [42] также была использована функция Морле, но с несколько иным значением C , а также иной нормировкой интеграла свертки. Впрочем, эти различия совершенно несущественны для суждения о качественных изменениях в картине ВП, о которых будет говориться ниже.

Заметим, что любой доступный для анализа палеоклиматический ряд не только конечен, но и задан своими значениями на сетке неравно отстоящих точек. Поэтому обычно производят интерполяцию этих значений на точки, равномерно отстоящие друг от друга, а уже затем делают ВП по формуле (1), в которой интегрирование заменяется суммированием

$$WT(b, a) = WT_{re}(b, a) + iWT_{im}(b, a) = a^{-1/2} \sum_{n=1}^N T(t_n) MOR^* (\delta t(n - b)/a), \quad (4)$$

где δt – шаг по времени между последовательными точками ряда.

Однако в палеоклиматических рядах расстояние между соседними точками обычно экспоненциально возрастает со временем, поэтому такая интерполяция может исказить спектральный состав анализируемых колебаний. Например, если интересуются временными вариациями в палеоклиматическом ряду, периоды которых

близки к среднему временному сдвигу между последовательными точками, то для тех отрезков рассматриваемого ряда, где сдвиг больше среднего, использование (4) приводит к ложной перекачке энергии колебаний из области высоких частот, не разрешаемых фактически имеющимися данными, в более низкие частоты. Такая перекачка хорошо известна в задаче оценки энергетических спектров дискретных временных рядов [44]. Чтобы ее избежать, сравнительно недавно зарубежными палеоклиматологами была разработана техника прямого оценивания палеоклиматических энергетических спектров по рядам неэквидистантных точек (см., например, [45]). Практически такая же техника еще раньше была разработана одним из авторов статьи (см. [46] и последующие публикации в Трудах Гидрометцентра СССР) для целей спектрального объективного анализа метеорологических полей по данным станционных и спутниковых наблюдений, неравномерно распределенных в пространстве и времени. Разумеется, авторы [45] об этих работах не знали. Мы также не знали о статье [45], когда на основе идеи, высказанной в [46], писали свою специальную Фортран-программу ВП, использующую следующее нормированное суммирование:

$$\begin{aligned} WT(b, a) &= WT_{re}(b, a) + iWT_{im}(b, a) = \\ &= a^{-1/2} \sum_{n=1}^N T(t_n) MOR^*(t_n - b)/a / \sum_{n=1}^N [MOR^*(t_n - b)/a]^2. \end{aligned} \quad (5)$$

Проверка на тестах показала, что в случае равномерно отстоящих точек эта программа дает тот же результат, что и стандартная программа, использующая (4). Если же точки ряда неэквидистантны, результат получается менее чувствительным к спектральному перетеканию энергии в сторону низких частот.

Для нашей работы было также существенно использовать обратное вейвлетное преобразование (ОВП), чтобы реконструировать колебания разных временных масштабов, содержащиеся в рассматриваемых палеоклиматических рядах. Подобно обратному преобразованию Фурье, ОВП определяется как взвешенная сумма базисных функций. У преобразования Фурье ими являются синусы и косинусы, периоды которых кратны длине преобразуемого ряда, а у ОВП базис строится на основе «материнской» вейвлетной функции, не обязательно той, что была использована в (1). В частности, Морле предложил использовать для этого дельта-функцию. Тогда формула для вычисления ОВП принимает особенно простой вид

$$\hat{T}(t) = \int_{a_{\min}}^{a_{\max}} WT_{re}(t, a) da. \quad (6)$$

В нем пределы интегрирования a_{\min} и a_{\max} определяют диапазон масштабов, внутри которого по вещественной компоненте ($\hat{T}(t) \equiv \hat{T}_{re}(t)$) реконструируются колебания исходного ряда. Для нас оказалось важным реконструировать не только такие колебания, что обычно делается в приложениях ВП, но и так называемое преобразование Гильберта $H[T(t)] = \pi^{-1} P \int_{-\infty}^{\infty} T(s)/(t-s) ds$ исходного (фильтрованного) ряда (здесь P – главное значение рассматриваемого несобственного интеграла). Оно вычисляется по формуле, аналогичной (6), но с заменой $WT_{re}(t, a)$ на $WT_{im}(t, a)$ ($\hat{T}(t) \equiv \hat{T}_{im}(t) = \hat{H}[T(t)]$). Насколько известно ВП для подсчета

преобразования Гильберта временных рядов не применялось. Такая комплексная реконструкция позволила увидеть «фазовый портрет» рассматриваемых палеоклиматических колебаний: как они выглядят в некотором двумерном подпространстве. Конечно, палеоклиматические колебания многомасштабны и, следовательно, требуется фазовое пространство большей размерности, чтобы изобразить их со всеми деталями. Однако для наших целей было важно наглядное представление только тех особенностей палеоклиматических колебаний, которые относятся к основным масштабам ледниковых циклов (10-100 тыс. лет), поэтому предположим, что двумерное фазовое подпространство будет достаточным.

2. Полученные результаты

2.1. Циклы плиоцена и раннего плейстоцена. Напомним, что в [47] уже выполнен качественный анализ фазового портрета климатической системы в двумерном подпространстве, построенном по (6). Был использован изотопный палеоклиматический ряд «Композит», составленный почти двадцать лет назад из данных всего трех бурений дна Тихого океана [48,49]. К настоящему времени выполнено несравненно больше бурений дна океанов и существенно усовершенствована техника первичной обработки, получаемых данных. В результате, американские палеоклиматологи Л.Е. Лисецки и М.Е. Раймо [50] опубликовали ряд «LR04», составленный из данных о содержании изотопа $\delta^{18}O$ в донных отложениях останков *Bentic foraminifera*, полученных при 57 бурениях дна Тихого, Атлантического и Индийского океанов. Этот уникальный ряд содержит информацию о вариациях глобального климата (глобальной средней температуре и, одновременно, о суммарном объеме ледников) за 5.3 млн. лет до настоящего времени. Временное разрешение ряда LR04 меняется от 1 тыс. лет в позднем плейстоцене (0–0.6 млн. лет назад) до двух тыс. лет в позднем плиоцене (1.5 млн. лет назад) и падает до пяти тыс. лет в начале плиоцена (3.0–5.3 млн. лет назад), что достаточно для анализа климатических колебаний с периодами в десятки и сотни тыс. лет.

На рис. 1, *a* показана картина амплитуд ВП ряда LR04 в диапазоне веивлетных масштабов от 10 до 1312 тыс. лет. Видно, что в раннем и среднем плиоцене (период последних пяти - трех млн. лет до настоящего времени) размах климатических колебаний был сравнительно невелик, в том числе и вблизи веивлетного масштаба в 41 тыс. лет, соответствующего главному периоду колебаний наклона, хотя колебания все же имели относительный максимум вблизи масштаба в 41 тыс. лет. В позднем плиоцене размах примерно сорока тысячелетних климатических колебаний начал заметно расти, а колебания в диапазонах масштабов прецессии и эксцентриситета продолжали оставаться сравнительно небольшими. Не сомневаясь, что эти последние колебания были реальны (хотя они, наверняка, сильно искажены наблюдательными «шумами»), мы исключили их из дальнейшего рассмотрения с помощью комплексной реконструкции ряда LR04 по формуле (6) с $a_{\max} = 58$ и $a_{\min} = 29$ тыс. лет. Обе (вещественная и мнимая) части этой реконструкции показаны на рис. 1, *a*, а над ними – график колебаний самого наклона. Видно, что в реконструированных колебаниях преобладает главный (41-тысячелетний) цикл наклона. Это констатировалось многими нашими западными предшественника-

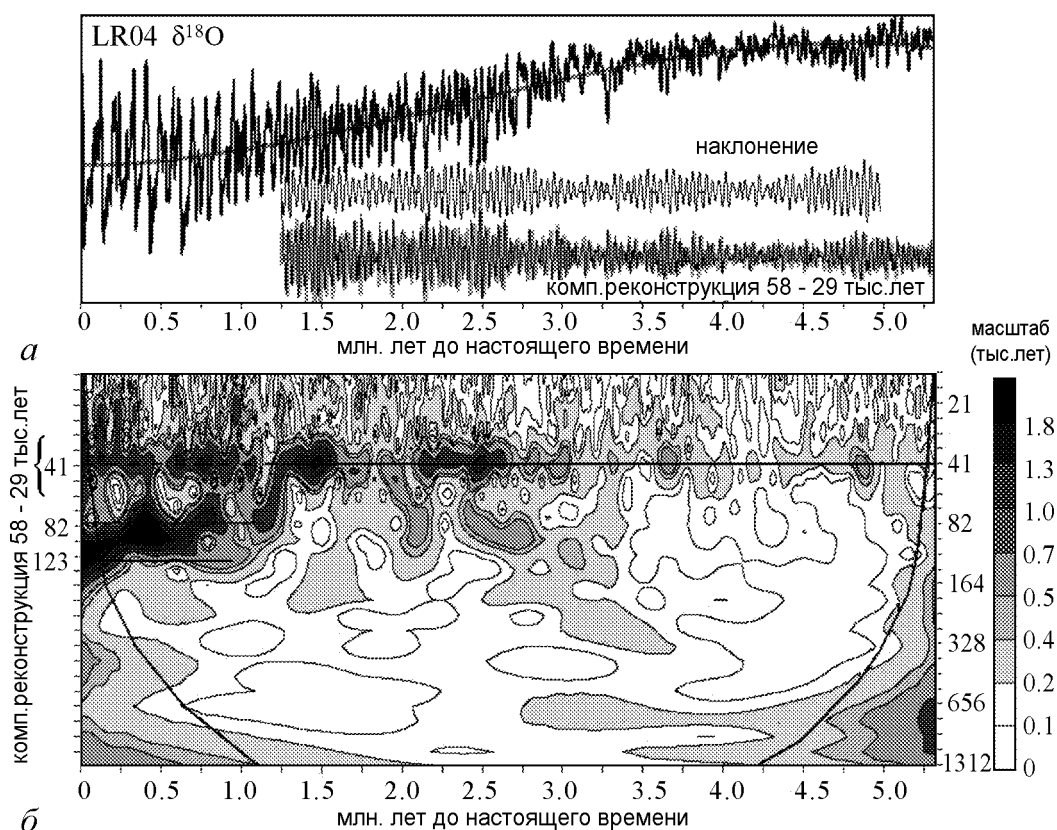


Рис. 1. Картина амплитуд вейвлетного преобразования ряда LR04 содержания изотопа кислорода $\delta^{18}O$ в донных отложениях останков бентосных фораминифер [50]: *a* – исходный ряд и его полиномиальный тренд (ось ординат перевернута, чтобы минимумы соответствовали наиболее холодному климату); *б* – ряды наклонения и комплексная реконструкция ряда LR04 в диапазоне вейвлетных масштабов от 58 до 29 тыс. лет

ми, начиная с пионеров количественного исследования климатической цикличности в плиоцене и плейстоцене Дж.Д. Хейса, Дж. Имбри, Н.Дж. Шеклтона и других [1,23]. Причина этого в том, что в условиях очень теплого глобального климата раннего плиоцена покровные ледниковые щиты в северном полушарии не возникли даже при наиболее существенных временных похолоданиях и, следовательно, эффекты обратных климатических связей за счет изменений альбедо были слабы. Из-за практической неизменности альбедо характерные частоты собственных колебаний климатической системы должны были быть тогда существенно выше, чем частоты воздействующих на систему колебаний инсоляции, так что отклик климатической системы на очень долгопериодное (по сравнению с периодами возможных собственных колебаний) инсоляционное воздействие был почти линейным. Согласно недавней работе Хайберса [11], основной вклад в колебания самого инсоляционного воздействия делал 41-тысячелетний цикл наклонения, а вклады прецессии и эксцентриситета были много менее существенными. Именно поэтому в плиоцене установились примерно 40-тысячелетние климатические колебания.

Предлагаем теоретико-динамическую формализацию описания этого почти линейного отклика. Положим, что практически единственным движителем климата в раннем и среднем плиоцене действительно был 41-тысячелетний цикл наклонения,

и будем описывать отклик на него только наиболее мощными климатическими колебаниями, полученными при вышеупомянутой комплексной реконструкции ряда LR04. Обратим внимание на биение, хорошо видимое в графиках обеих частей этой реконструкции. Заметим, что образующие это биение периоды колебаний наклонения (порядка одного-двух млн. лет) были указаны во Введении. Видно, что размах биения климатических колебаний заметно возрос около трех-двух с половиной млн. лет до настоящего времени, в то время как размах биения наклонения остался неизменным. Поэтому мы полагаем, что здесь вступил в игру другой влияющий на климатические колебания фактор – общий тренд похолодания климата, сделавший актуальными обратные связи в климатической системе за счет изменений альбедо земной поверхности.

Аппроксимируем этот тренд, как он представлен в исходном ряду LR04, полиномом третьего порядка (серая линия, наложенная на график ряда LR04, см. рис. 1, а). Построим двухпараметрическую диаграмму зависимости амплитуды биения реконструированной компоненты от размаха биения колебаний наклонения и от тренда похолодания одновременно (рис. 2). Диаграмма использует 15 оценок (помечены черными кружками) одновременных значений всех трех сравниваемых величин в интервале от 4.5 до 1.5 млн. лет до настоящего времени. Она ясно показывает, что амплитуда биений рассматриваемых климатических колебаний зависела от обоих факторов.

Примерно 2.5 млн. лет назад амплитуда биения реконструированных климатических колебаний (соответствующая точка данных отмечена светло серой звездочкой на диаграмме) стала в 2-3 раза больше, чем в начале плиоцена (четыре точки данных у верхнего края диаграммы). Возвращаясь к картине амплитуд ВП (см. рис. 1, а), можно видеть, что этому эпизоду существенного увеличения амплитуды климатического биения соответствует небольшая область весьма больших амплитуд ВП точно на веивлетном масштабе в 41 тыс. лет. Интерпретируем этот эпизод как первую, но неудавшуюся, попытку дестабилизации климатического отклика на инсоляционное воздействие главного цикла наклонения. После этого, в соответствии с затуханием размаха биения наклонения, амплитуда реконструированных климатических колебаний снова уменьшилась и оставалась таковой в течение примерно 1 млн. лет. Затем она снова и еще более резко возросла в начале плейстоцена (примерно за 1.5 млн. лет до настоящего времени – соответствующая точка данных помечена второй светло серой звездочкой на рис. 2). Интерпретируем этот эпизод как вторую, и снова неудачную, попытку дестабилизации климатического отклика, поскольку сразу после рез-

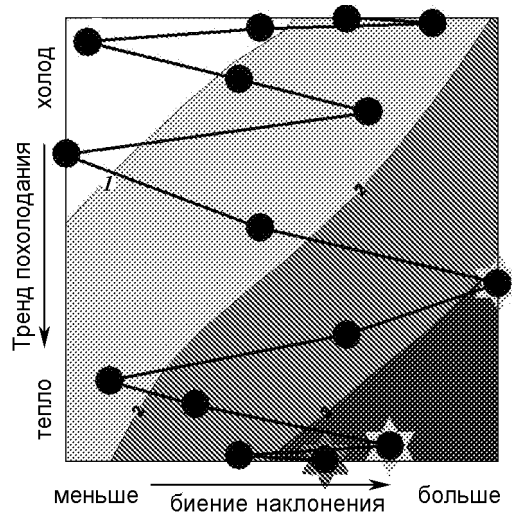


Рис. 2. Двухпараметрическая диаграмма зависимости амплитуды биения у комплексной реконструкции ряда LR04 в диапазоне веивлетных масштабов 58–29 тыс. лет от размаха биения у колебаний наклонения и от тренда похолодания одновременно. Диаграмма построена по 15 точкам (точки помечены черными кружками) одновременных значений всех трех сравниваемых величин в интервале от 4.5 до 1.5 млн. лет до настоящего времени. Два момента времени, когда рассматриваемые климатические колебания могли потерять свою устойчивость, помечены светло-серыми звездочками, а момент фактической потери устойчивости помечен темно-серой звездочкой

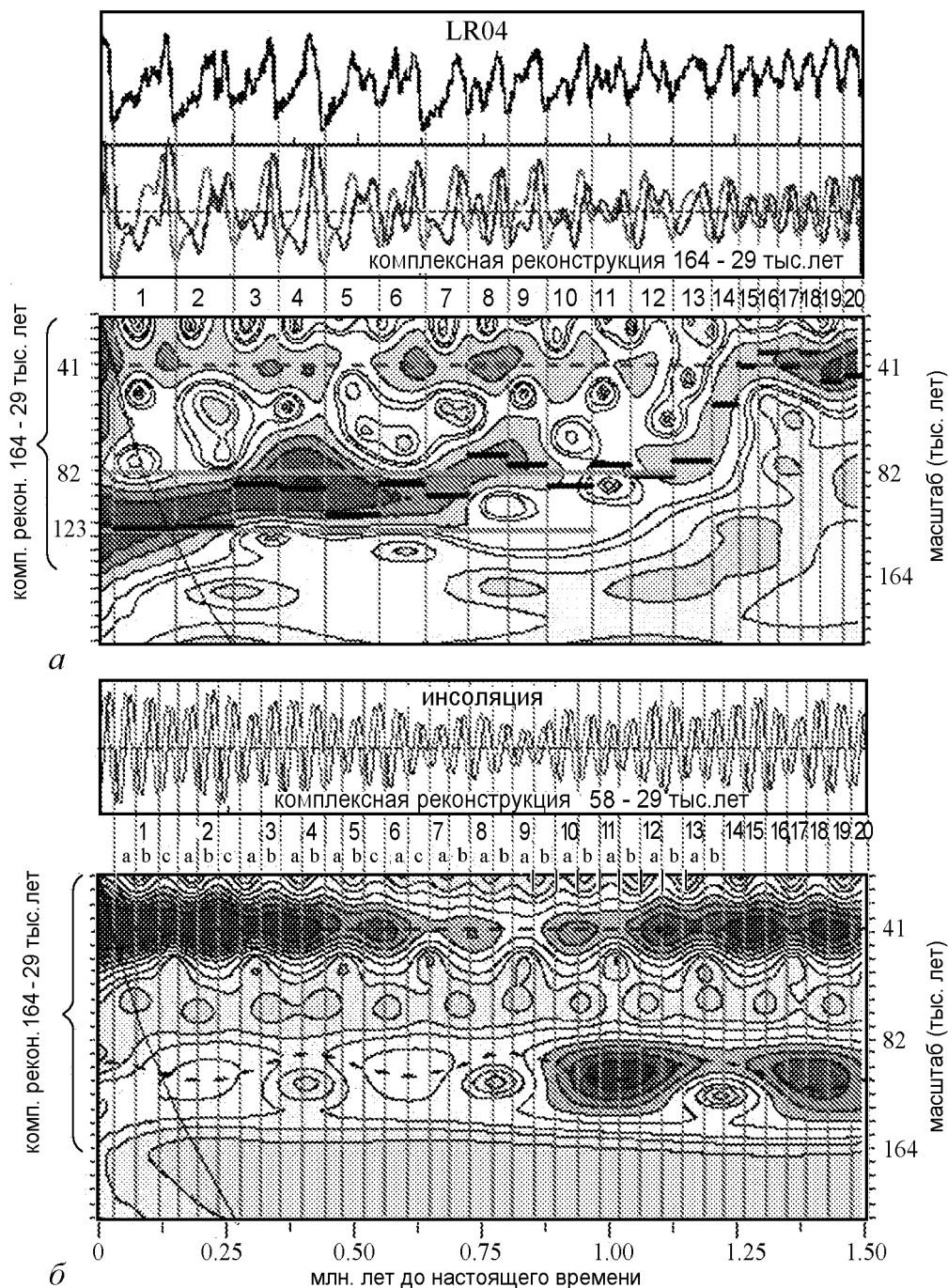


Рис. 3. *a* – увеличенная картина амплитуд ВП для части ряда LR04 и его комплексная реконструкция в диапазоне вейвлетных масштабов от 164 до 29 тыс. лет. Тонкие вертикальные линии проведены через главные минимумы вещественной части реконструкции и разделяют ряд на 20 климатических циклов. Толстые горизонтальные полосы между последовательными вертикальными линиями отмечают положение каждого климатического цикла на плоскости «время–масштаб вейвлетной картины». *б* – соответствующая картина амплитуд вейвлетного преобразования и комплексная реконструкция ряда годичной инсоляции на экваторе [11]. Тонкие вертикальные линии проведены через минимумы вещественной части реконструкции, а все интервалы между последовательными линиями помечены буквами *a*, *b*, *c*, указывающими на удвоение и утроение периода климатического цикла. Пунктирные линии на вейвлетной картине проведены через масштаб главного 41-тысячелетнего колебания наклона и через диапазон 100-тысячелетних масштабов главных колебаний эксцентриситета

кого возрастания амплитуда ВП уменьшилась до почти первоначального значения. Только при третьем возрастании размаха, отмеченном темно серой звездочкой внизу диаграммы, дестабилизация действительно произошла, о чем будет говориться в следующем подразделе. Сейчас только отметим, что размах биения наклона в этом эпизоде был не больше, а даже меньше, чем в предшествующих эпизодах. Тем не менее, дестабилизация произошла из-за прогрессирующего общего похолодания климата.

2.2. Основная бифуркация удвоения периода в начале плейстоцена.

Чтобы более тщательно рассмотреть эпизод возникшей дестабилизации плейстоценового климата (и последующую эволюцию климата в плейстоцене) на рис. 3, а показана более подробная картина амплитуд ВП последней части ряда LR04, а также комплексная реконструкция этой части ряда в расширенном диапазоне вейвлетных масштабов от 164 до 29 тыс. лет. Расширение диапазона реконструируемых масштабов осуществлено путем добавления к выше рассмотренному диапазону масштабов, типичных для вариаций эксцентриситета земной орбиты. Ниже покажем, что плейстоценовые климатические циклы зависели не только от наклона, но и от эксцентриситета. Через главные минимумы вещественной части комплексной реконструкции на этом рисунке, которые отлично совпадают с главными минимумами (максимумами оледенений) самого исходного ряда LR04, проведены тонкие вертикальные линии, которые делят всю рассматриваемую часть ряда LR04 на 20 периодов, соответствующих 20 климатическим циклам плейстоцена. Толстые горизонтальные линии между последовательными вертикалями отмечают положение каждого климатического цикла на плоскости «время–масштаб» вейвлетной картины.

На рис. 4 изображены фазовые портреты всех двадцати климатических циклов плейстоцена в двумерном подпространстве, осями которого служат вещественная и мнимая части комплексной реконструкции ряда LR04 в диапазоне вейвлетных мас-

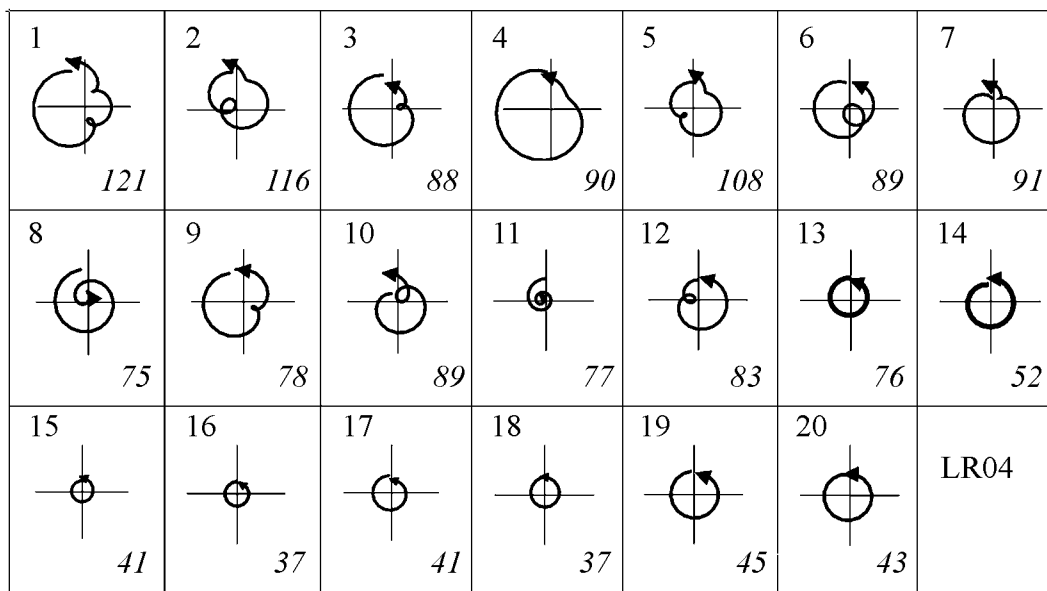


Рис. 4. Формы всех плейстоценовых климатических циклов, как они видны в двумерном подпространстве, осями которого являются вещественная и мнимая части комплексной реконструкции части ряда LR04 в диапазоне вейвлетных масштабов от 164 до 29 тыс. лет. Длины циклов указаны в тысячах лет

штабов от 164 до 29 тыс. лет. Все фазовые траектории в этом подпространстве движутся против часовой стрелки и у циклов 20–15 образуют почти идеальные окружности, практически замыкаясь по окончании каждого цикла. Отсюда следует, что эти траектории описывают гармонический (значит, практически линейный) отклик климатической системы на периодическое внешнее воздействие. Указанные на рисунке длительности этих циклов (43, 45, 37, 41, 37 и 41 тыс. лет, соответственно) отклоняются не более чем на 4 тыс. лет от главного периода наклона (41 тыс. лет). Это вполне можно отнести за счет наблюдательных шумов в первичных изотопных рядах, использованных для конструирования ряда LR04, и считать периоды климатических циклов 20–15 точно равными главному периоду воздействующей внешней силы.

Чтобы окончательно убедиться, что именно 41-тысячелетний цикл наклона являлся главным двигателем 20-15 циклов, надо еще сравнить начальные фазы этих циклов с соответствующими фазами колебаний инсоляции. Для этого на рис. 3, б показана картина амплитуд ряда годичной инсоляции на экваторе (исходные данные заимствованы из [11]). Заметим, что в теории Миланковича принято ориентироваться на суточную инсоляцию 21 июня на 65° с.ш. В частности, подгонка временной шкалы ряда LR04 делалась в [50] именно по этой инсоляции. Несмотря на это, мы использовали годичную инсоляцию на экваторе. Обоснование в данном случае служило предположение Хайберса [11]: сумма суточной инсоляции за теплое полугодие на любой приполярной широте является физически более вероятным двигателем климатических колебаний, чем суточная инсоляция за любой отдельный летний день как таковая. Эта суммарная инсоляция определяется, в первую очередь, наклоном. Также учтено, что имеется взаимно однозначное соответствие между одновременными вариациями инсоляции на любой широте за счет изменений наклона. Поэтому с равным успехом можно ориентироваться на суммарную инсоляцию на любой широте, в частности, на экваторе. В недавних же работах [3,14,35–38] были приведены разнообразные аргументы в пользу того, что именно процессы вблизи экватора важны для инициации климатической цикличности. В этом контексте сошлемся также на работу авторов [51].

На рис. 3, б начальные фазы инсоляционных циклов указаны тонкими вертикалями, проведенными через минимумы вещественной компоненты комплексной реконструкции этой инсоляции в том же диапазоне веивлетных масштабов от 58 до 29 тыс. лет, который использован для комплексной реконструкции климатических циклов. Видно, что начальные фазы инсоляционных циклов предшествуют по времени начальным фазам 20–15 климатических циклов примерно на четверть – треть периода. Считая отклик климатической системы строго линейным, можно было бы ожидать запаздывания в четверть периода. Полученные запаздывания хорошо этому соответствуют, что подтверждает роль 41-тысячелетнего цикла наклона как главного двигателя климатических циклов в раннем плейстоцене.

Однако заметим, что Лисецки и Раймо использовали при конструировании ряда LR04 подгонку временных шкал исходных изотопных рядов к вариациям инсоляции 21 июня на 65° с.ш. (исходные инсоляционные данные были взяты ими из [16]), как это всегда делалось после вышеупомянутых пионерских работ западных палеоклиматологов. По этой причине можно усомниться в правомерности построения нашей двухпараметрической диаграммы: ведь зависимость от биения наклона может быть заложена упомянутой подгонкой изначально. Чтобы исключить основания для подобного сомнения, мы проанализировали совсем недавно опубликован-

ные Хайберсом [11] ряды данных о содержании изотопа $\delta^{18}\text{O}$ в донных отложениях останков бентосных и планктонных фораминифер, при конструировании которых никакой подгонки к инсоляционным данным не делалось. Поскольку картина амплитуд ВП и фазовые соотношения колебаний в ряду планктонных фораминифер оказались практически такими же, что у ряда бентосных фораминифер, на рис. 5, *a* показана картина только для первого ряда. Она выглядит вполне аналогично картине, приведенной на рис. 3, *a*. Также аналогичны ее фазовые соотношения с рядом инсоляции, картина амплитуд ВП которого повторена на рис. 5, *б*. Небольшие отличия оказались только в длительностях отдельных климатических циклов. Но эти отличия являются непринципиальными, так как они не повлекли изменений в фазовых портретах циклов 20–15. Эти портреты для обеих фораминифер показаны на рис. 6 и могут быть сравнены с соответствующими портретами, показанными на рис. 4 для ряда LR04. Также не произошло каких-либо качественных изменений в фазовых соотношениях климатических циклов 20–15 с циклами инсоляции: во всех шести случаях инсоляционные циклы были первыми. Поэтому можно заключить, что подгонка временной шкалы ряда LR04 не повлияла на сделанный выше вывод о роли 41-тысячелетнего цикла наклонения как главного движителя климатических циклов в раннем плейстоцене.

Рассматривая увеличенную часть картины амплитуд ВП ряда LR04 (см. рис. 1, *a*), как она представлена на рис. 3, *a*, и рассматривая соответствующую часть картины ВП на рис. 5, *a*, обратим внимание на поведение полосы относительно больших амплитуд вблизи вейвлетного масштаба в 41 тыс. лет после второй неудачной попытки дестабилизации климатического отклика на инсоляционное возбуждение. Видно, что около 1.25 млн. лет до настоящего времени эта полоса начала смещаться в сторону больших масштабов и примерно через 130 тыс. лет достигла вейвлетного масштаба в 82 тыс. лет. Судя по показанным на рис. 3, *a* и рис. 5, *a* горизонтальным полоскам, за это время имели место всего два климатических цикла. Они отмечены на рисунках номерами 14 и 13. Длительность 14 цикла составила 52 тыс. лет, что существенно больше, чем период главного цикла наклонения. Длительность же 13-го цикла составила целых 76 тыс. лет. На рис. 3, *б* можно также видеть, что этим двум климатическим циклам соответствуют три инсоляционных цикла, так что невозможно установить линейную связь этих циклов с инсоляционным воздействием. Хотя фазовые портреты климатических циклов 14–13 на рис. 4 выглядят неотличимыми от портретов 20–15 циклов, то есть представляют собой замкнутые окружности, периоды этих циклов существенно больше, чем предшествующих циклов 20–15. Это свидетельствует о качественном отличии природы циклов 14 и 13 от природы предшествующих циклов. Изменение природы климатических циклов мы истолковываем в терминах математической теории динамических систем как бифуркацию. Бифуркация – это приобретение нового качества в движениях динамической системы при малом изменении ее параметров. Бифуркации в автономных (с неизменными параметрами) и возбуждаемых периодически меняющейся внешней силой нелинейных динамических системах в настоящее время хорошо изучены. Их исчерпывающий обзор содержится, например, в [52]. Однако читателю-климатологу, может быть, будет более понятно вполне строгое, но ориентированное именно на него, описание этих бифуркаций в [53].

В рассматриваемом случае длительности всех климатических циклов, следовавших за 13 циклом, примерно в два (циклы 12–6, 4 и 3) или даже в три (циклы 5, 2 и 1) раза превышали длительности климатических циклов плиоцена и раннего

плейстоцена, а их фазовые портреты претерпели качественное изменение. Как видно на рис. 4 и рис. 6, траектории новых циклов, в двумерном фазовом подпространстве отличны от простой окружности. До своего приближенного замыкания они делали одну петлю, если период цикла был примерно равен 80 тыс. лет (циклы 12, 10, 9, 7, 6, 4 и 3 у ряда LR04 и дополнительно цикл 8 у рядов Хайберса). Траектории делали

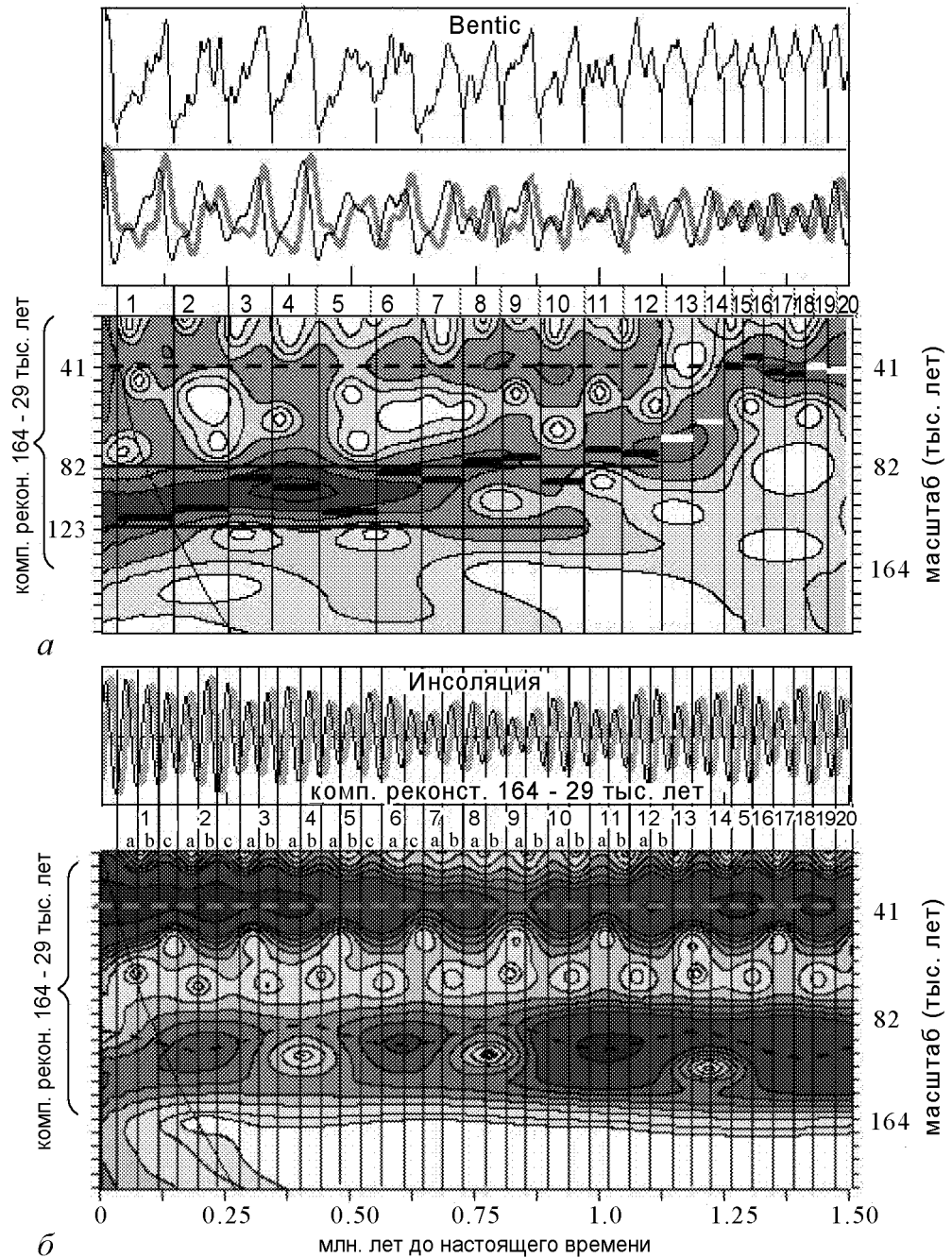


Рис. 5. То же самое, что на рис. 3, но для ряда содержания изотопа кислорода $\delta^{18}O$ в донных отложениях останков бентосных фораминифер *Bentic foraminiferas*, построенного без привязки его временной шкалы к ряду колебаний инсоляции [11]

даже две петли, если период цикла превышал 100 тыс. лет (циклы 5, 2 и 1 у всех рядов). В соответствующем фазовом подпространстве можно было бы увидеть, что траектории этих циклов замыкаются после одного или двух оборотов, причем каждый оборот длится примерно 40 тыс. лет. На основании этого можно заключить, что примерно за 1.250 миллион лет до настоящего времени произошла бифуркация удвоения (в последующем и утроения) периода ранее существовавшего климатического цикла. О механизмах этих бифуркаций будет сказано далее. Заметим, что в двух случаях у ряда LR04 (циклы 11 и 8) и в одном случае у рядов Хайберса (цикл 11) траектории оказались похожи на скручивающиеся спирали, что, возможно, является следствием неточностей в исходных данных. Но может быть, что это отражает реальность, то есть тут происходила более сложная бифуркация.

Математическая конструкция бифуркации удвоения периода состоит в следующем (см. [52] и [53, §3.2.]). Пусть до бифуркации в фазовом пространстве нелинейной динамической системы существует периодически повторяющаяся последовательность состояний, называемая предельным циклом, к которой со временем сходятся все соседние последовательности состояний (траектории рассматриваемой динамической системы), то есть этот цикл – аттрактор динамической системы. Предельный цикл может возникнуть даже в динамической системе, внешнее воздействия на которую постоянно и достаточно велико, чтобы дестабилизировать простейший возможный в таких системах аттрактор – стационарное состояние. Такой предельный цикл был впервые обнаружен горьковским математиком А.А. Андроным и назван им автоколебанием [54]. Но предельный цикл может существовать даже в динамической системе, находящейся под воздействием периодической внешней силы. Тогда он – вынужденный (с тем же периодом и некоторым запаздыванием по фазе) отклик на изменение этой силы. Это, по-видимому, тот случай динамики климата, который

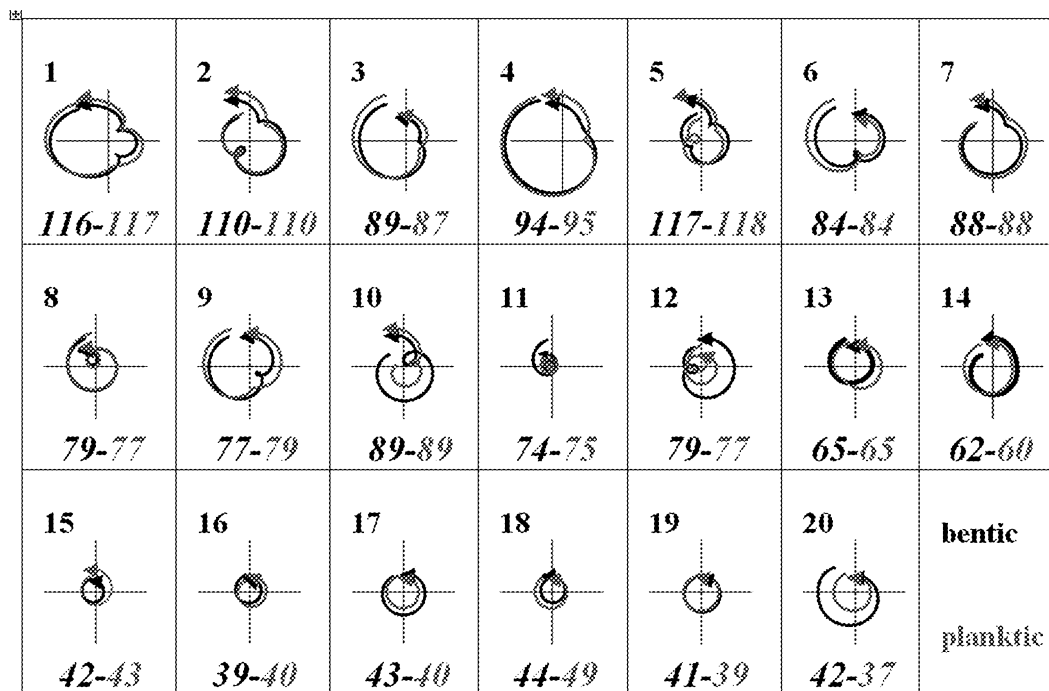


Рис. 6. То же самое, что на рис. 4, но по данным комплексных реконструкций рядов содержания изотопа кислорода $\delta^{18}O$ в донных отложениях останков бентосных и планктонных фораминифер, построенных без привязки их временных шкал к ряду колебаний инсоляции [11]

реализовался в плиоцене и раннем плейстоцене как примерно 40-тысячелетняя цикличность смен относительно теплого и относительно холодного климата.

Мультипликаторы (собственные числа) линеаризации динамической системы в малой окрестности предельного цикла меньше 1 по модулю, что и обеспечивает устойчивость этого аттрактора. Но они меняются при изменении воздействующей на систему силы. Бифуркации (качественные изменения этого аттрактора) происходят, когда один из вещественных мультипликаторов становится равен ± 1 или модуль пары комплексно сопряженных мультипликаторов оказывается равен 1. Если один вещественный мультипликатор становится равным $+1$, предельный цикл исчезает. Однако в двух других случаях он продолжает существовать, но теряет свою устойчивость, а потому становится ненаблюдаемым, ибо всякая реально осуществившаяся последовательность состояний динамической системы уходит от него в фазовом пространстве, даже если она начиналась в его близкой окрестности. Взамен будет наблюдаться новый аттрактор. Им будет квазипериодическая последовательность состояний (двухчастотное биение), если бифуркация происходила по достижении модулем комплексно сопряженной пары мультипликаторов единичного значения. Возможно, что спиральная форма траектории цикла 11 (и цикла 8 в ряду LR04) отражает эту бифуркацию. Если же один вещественный мультипликатор оказался равен -1 , то будет наблюдаться чисто периодическая последовательность, которая вначале (при очень малом отклонении воздействующей силы от критического значения) копирует старый цикл, но замыкается только после двух оборотов, то есть период нового аттрактора – предельного цикла будет удвоенным по сравнению с периодом старого аттрактора. Это, по-видимому, именно та бифуркация, которая реализовалась примерно 1.250 тыс. лет назад.

Что касается утроения периода, присущего 5, 2 и 1 климатическим циклам, то математическая конструкция подобной бифуркации описана в работе В.С. Афраймовича и Л.П. Шильникова [55]. Она предполагает существование в фазовом пространстве системы аттрактора – инвариантного двумерного тора. В рассматриваемом нами случае такой тор мог возникать из-за квазипериодичности (не только цикл наклонения, но также циклы эксцентриситета и прецессии) инсоляционного внешнего воздействия на климатическую систему. На этом торе при каких-то значениях параметров могла возникать резонансная обмотка, то есть тот же предельный цикл. Во время бифуркации разрушения инвариантного тора период этого цикла мог, согласно [55], не только удваиваться, но утраиваться и даже учетверяться.

Довольно долго после бифуркации петли нового (с удвоенным или утроенным периодом) предельного цикла располагаются в фазовом пространстве достаточно близко к старому потерявшему устойчивость, но все же продолжающему существовать предельному циклу. Поэтому в энергетических спектрах установившихся после бифуркации колебаний (на рисунках не показаны) видны пики не только на удвоенном (утроенном) периоде, но и на периоде цикла, бывшего устойчивым до бифуркации. Это объясняет, почему в картинах амплитуд ВП на рис. 1, рис. 3, *a* и рис. 5, *a* полоса относительно больших амплитуд ВП сохраняется вблизи масштаба главного цикла наклонения в 41 тыс. лет в среднем и позднем плейстоцене, несмотря на то, что главный максимум амплитуды ВП смещается после бифуркации в диапазон удвоенного и утроенного масштабов. Заметим, что математически всякая бифуркация происходит мгновенно при монотонном изменении внешней силы. В реальной же климатической системе переход от 40-тысячелетних к 80-тысячелетним колебаниям занял примерно 130 тыс. лет (циклы 14 и 13).

2.3. Вторичные бифуркации климатических циклов в среднем и позднем плейстоцене. Как уже было упомянуто в предыдущем подразделе, длительности и фазовые портреты плейстоценовых климатических циклов сильно отличались друг от друга. Сразу после основной бифуркации и до примерно 600 тыс. лет до нашего времени, то есть для циклов 12–6 периоды были примерно удвоенными по сравнению с главным циклом инсоляции, возникающим за счет изменений наклона оси вращения Земли к плоскости эклиптики. В пределах точности рассматриваемых палеоклиматических рядов, период каждого из этих циклов совпадал с периодом одной из комбинационных гармоник эксцентриситета, указанных во Введении. Поэтому можно предположить, что после основной бифуркации динамика климата оказалась очень чувствительна к тем небольшим вариациям суммарной инсоляции Земли в целом, которые были обусловлены циклическими эксцентриситетами земной орбиты.

Чтобы более тщательно рассмотреть эту возможность, на рис. 7 представлены вещественные реконструкции рядов Хайберса для бентосных и планктонных фораминифер в диапазоне веивлетных масштабов от 29 до 164 тыс. лет. В параллель показаны вещественные части реконструкций годичной инсоляции на экваторе в диапазонах масштабов от 29 до 58 тыс. лет (диапазон колебаний за счет наклона) и от 58 до 164 тыс. лет (диапазон колебаний за счет эксцентриситета). Фазовые запаздывания климатических циклов по сравнению с инсоляционными циклами наклона показаны положительными (если климатический цикл запаздывал) или отрицательными (в противном случае запаздывания инсоляционного цикла) числами. Видно, что главные минимумы климатических циклов всегда следовали за минимумами инсоляционных циклов, обусловленных вариациями наклона.

К вышеизложенному добавим следующее. Запаздывание климатического цикла 1 оказалось равно 11 тыс. лет, а запаздывание перехода к голоцену было равно

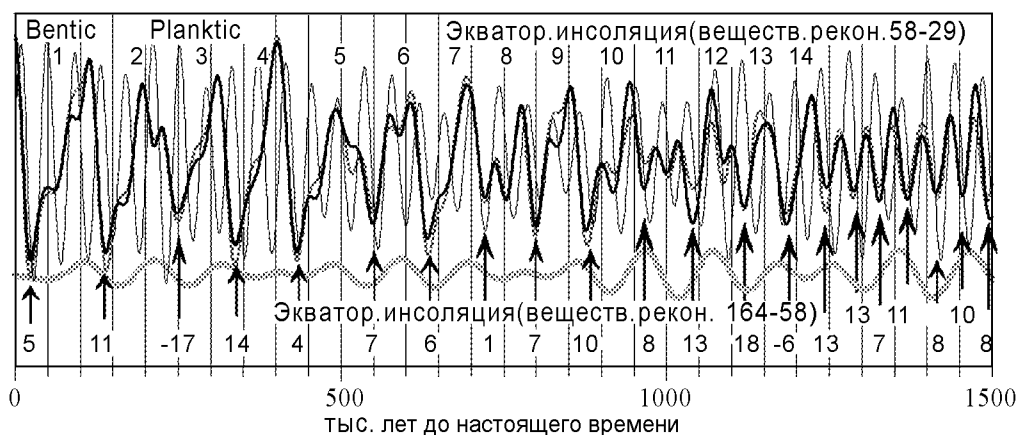


Рис. 7. Вещественные части реконструкций рядов содержания изотопа кислорода $\delta^{18}O$ в донных отложениях останков бентосных и планктонных фораминифер, построенных [11] без привязки их временных шкал к ряду колебаний инсоляции в диапазоне веивлетных масштабов от 164 до 29 тыс. лет (толстые черная и серая линии). Вещественные части реконструкций ряда годичной инсоляции на экваторе в диапазоне веивлетных масштабов от 58 до 29 тыс. лет (тонкая серая линия) и в диапазоне веивлетных масштабов от 164 до 58 тыс. лет (толстая серая линия, смещенная вниз для лучшей читаемости рисунка). Положительные (отрицательные) числа внизу рисунка указывают опережение (запаздывание) инсоляционного цикла по сравнению с соответствующим климатическим циклом (номера климатических циклов указаны сверху рисунка)

5 тыс. лет в хорошем соответствии с недавними, тщательными оценками этих запаздываний в работе [5]. Климатическому циклу 2 оказалось свойственно отрицательное запаздывание в 17 тыс. лет, то есть в почти половину периода наклонения. Зато начальный минимум этого цикла хорошо следовал инсоляционному минимуму, обусловленному вариациями эксцентриситета. Более того, у всех четырех последних климатических циклов, а также более ранних циклов 12–6 начальные минимумы хорошо последовали инсоляционным минимумам за счет эксцентриситета. Более того, сами длительности этих климатических и инсоляционных циклов хорошо совпадали друг с другом.

Это делает весьма правдоподобным предположение, что каждый из этих климатических циклов захватывался в фазу текущей комбинационной гармонике колебаний инсоляции за счет эксцентриситета. Зададимся вопросом: были ли увеличены амплитуды колебаний плейстоценовых климатических циклов за счет резонансов с рассматриваемыми инсоляционными гармониками эксцентриситета, коль скоро захват фазы имел место для каждого климатического цикла и, следовательно, длительности климатических циклов совпадали с периодами соответствующих гармоник эксцентриситета? Из рис. 6 не следует ясного ответа на этот вопрос. Так самые мощные и длительные климатические циклы 2 и 1 последовали мощным и длительным инсоляционным гармоникам, но не менее мощный (в нашей реконструкции) климатический цикл 4 последовал весьма маломощной гармонике.

Заключение

За последнее десятилетие достигнут консенсус по причинам изменения климата в плиоцене, а именно: вариации инсоляции, вызванные 41-тысячелетним циклом наклонения оси вращения Земли к плоскости эклиптики, были главным движителем изменений климата в плиоцене и даже плейстоцене. В данном исследовании показано, что вторым важным фактором изменений климата был общий тренд похолодания. Для доказательства:

- впервые сформулирована проблема динамики климатических колебаний в плиоцене и плейстоцене как проблема качественного изменения свойств текущего климатического состояния (аттрактора);
- использованы идеи современной математической теории нелинейных динамических систем для определения моментов возникновения этих изменений;
- разработана специальная, основанная на вейвлетах, методика анализа палеоклиматических временных рядов.

Основными предпосылками исследования является следующее.

- В пионерских работах последователей М. Миланковича в конце XX века установлено, что собственные частоты колебаний, возможно присущие очень теплomu климату плиоцена, существенно превышали частоту главного широтного перераспределения инсоляции, обязанного, в свою очередь, 41-тысячелетнему циклу наклонения. Климатический отклик на это инсоляционное воздействие должен был быть почти линейным. Этот отклик происходил на частоте самого воздействия и с запаздыванием по фазе примерно в четверть периода. Грубо говоря, существенно осредненное по времени (в масштабе десятка тыс. лет) состояние климатической системы менялось в плиоцене периодически, подобно

аттрактору – устойчивому предельному циклу в фазовом пространстве какой-либо периодически форсированной нелинейной динамической системы.

- Из-за тренда общего похолодания климата, чьи конкретные физические причины и механизмы еще предстоит выяснить, с середины плиоцена стали разрастаться, сокращаться и снова разрастаться покровные оледенения в дополнение к уже давно существовавшему оледенению Антарктики. Это должно было активизировать обратные связи в климатической системе за счет изменений альбедо. Возникшие обратные связи расширили спектр возможных собственных колебаний климатической системы, в итоге способствовав дестабилизации 40-тысячелетнего предельного цикла, бывшего климатическим аттрактором в плиоцене.

Конкретные результаты данной работы состоят в следующем.

- Анализ палеоклиматических временных рядов с помощью специально разработанной в данной статье методики показал, что дестабилизация аттрактора плиоцена (его бифуркация) произошла, когда размах долгопериодного (порядка одного млн. лет) биения инсоляционного воздействия на климат Земли превысил некоторый порог, а тренд похолодания стал существенным. В результате этой бифуркации климатический примерно 40-тысячелетний предельный цикл не исчез, но стал ненаблюдаемым. Вместо него в плейстоцене возникли и стали наблюдаться совсем новые, грубо говоря, 100-тысячелетние, климатические колебания. Установлено точное время этой бифуркации – примерно за 1.250 млн. лет до настоящего времени. За время перехода от старых к новым климатическим колебаниям имели место два климатических цикла, свойства которых качественно отличались от свойств как предыдущих, так и последующих циклов. По форме это были еще гармонические колебания, как и им предшествовавшие в плиоцене, а по длительности эти циклы уже приближались к длительностям более поздних циклов плейстоцена.
- Реконструкция фазовых портретов осредненных по времени климатических колебаний, наблюдаемых после завершения бифуркации, показала, что их математическим образом можно считать предельный цикл, период которого был вдвое больше, чем период потерявшего устойчивость предельного цикла – аттрактора климата в плиоцене. Переход к этому новому аттрактору можно понимать как бифуркацию удвоения периода, хорошо известную в математической теории нелинейных динамических систем.
- В течение плейстоцена климатический аттрактор непрерывно эволюционировал. Сопоставление изменения этого аттрактора с одновременными изменениями инсоляции, показало, что, по крайней мере, одной из причин эволюции климатического аттрактора в плейстоцене были многомасштабные колебания инсоляции, получаемой Землей в целом за счет вариаций эксцентриситета земной орбиты. Они приводили к захвату фазы каждого текущего климатического цикла с той из комбинационных гармоник эксцентриситета, которая в это время доминировала. Поскольку периоды доминировавших гармоник эксцентриситета были близки или к удвоенному (примерно 70...90 тыс. лет) или к утроенному (примерно 110...130 тыс. лет) периоду главного цикла наклонения, то в результате климатический цикл поочередно удваивал, утраивал и снова удваивал свой период. Энергетически вариации инсоляции за счет эксцентри-

ситета, как хорошо известно, были очень невелики. Вероятно, по этой причине, несмотря на захват фазы, заметного резонансного усиления размаха плейстоценовых климатических циклов не происходило.

Работа выполнена при финансовой поддержке по грантам РФФИ 09-05-00155, 12-05-00136 и по Программе Президиума РАН «Фундаментальные исследования в области океанологии».

Библиографический список

1. *Hays J.D., Imbrie J., Shackelton N.J.* Variations in the Earth's orbit: Pacemaker of the Ice Ages? *Science*. 1976. Vol. 194. P. 1121.
2. *Ashkenazy Y.* The role of phase locking in a simple model for glacial dynamics // *Climate Dynamics*. 2006. Vol. 27. doi:10.1007/s00382-006-0145-5.
3. *Ashkenazy Y., Tziperman E.* Are the 41 kyr glacial oscillations a linear response to Milankovitch forcing? *Quat. Sci. Rev.* 2004. Vol. 23. doi:10.1016/j.quascirev.2004.04.008.
4. *Crowley T.J., Hyde W.T.* Transient nature of late Pleistocene climate variability // *Nature*. 2009. Vol. 456. P. 226.
5. *Drysdale R.N., Hellstrom J.C., Zanchetta G. et al.* Evidence for obliquity forcing of glacial termination II // *Science*. 2009. Vol. 325. P. 1527.
6. *Huybers P., Wunsch C.* Obliquity pacing of the late Pleistocene glacial terminations // *Nature*. 2005. Vol. 434. P. 491.
7. *Raymo M.E., Huybers P.* Unlocking the mysteries of the ice ages // *Nature*. 2008. Vol. 451. P. 284.
8. *Raymo M.E., Nisancioglu K.* The 41 kyr world: Milankovitch's other unsolved mystery // *Paleoceanology*. 2003. Vol. 18. doi: 10.1029/2002PA000791.
9. *Tziperman E., Raymo M.E., Huybers P. et al.* Consequences of pacing the Pleistocene 100 kyr ice ages by nonlinear phase locking to Milankovitch forcing // *Paleoceanology*. 2006. Vol. 21. P. PA4206. doi:10.1029/2005PA001241.
10. *Huybers P.* Antartics's orbital beat // *Science*. 2009. Vol. 325. P. 1085.
11. *Huybers P.* Early Pleistocene glacial cycles and the integrated summer insolation forcing. *Science*. 2006. Vol. 313. P. 508.
12. *Berger A.* Long-term variations of daily insolation and Quaternary climatic changes // *J. Atmos. Sci.* 1978. Vol. 35. P. 2362.
13. *Berger A., Loutre M.F.* Insolation values for the climate of the last 10 million years // *Quat. Sci. Rev.* 1991. Vol. 10. № 4. P. 297.
14. *Berger A., Melice J.L., Loutre M.F.* On the origin of the 100-kyr cycles in the astronomical forcing // *Paleoceanology*. 2005. Vol. 20. PA4019. doi:10.1029/2005PA001173.
15. *Laskar J., Joutel F., Boudin F.* Orbital, precessional, and insolation quantities for the earth from -20 myr to +10 myr // *Astronomy and Astrophysics*. 1993. Vol. 270. P. 522.
16. *Laskar J., Robutel P., Joutel F. et al.* A long-term numerical solution for the insolation quantities of the Earth // *Astronomy and Astrophysics*. 2004. Vol. 428. P. 261.

17. *Vernekar A.D.* Long-term global variations of incoming solar radiation // *Meteorol. Monogr.* 1972. Vol. 34. 21 p.
18. *Монин А.С.* Вращение Земли и климат. Л.: Гидрометеиздат, 1972.
19. *Монин А.С., Сонечкин Д.М.* Колебания климата по данным наблюдений. Тройной солнечный и другие циклы. М.: Наука, 2005.
20. *Ghil M.* Theoretical climate dynamics: an introduction. In: *Turbulence and Predictability in Geophysical Fluid Dynamics and Climate Dynamics*. M. Ghil, R. Benzi and G. Parisi (eds.). New York, North Holland, 1985, 347.
21. *Wunsch C.* The spectral description of climate change including the 100 ky energy // *Climate Dynamics*. 2003. Vol. 20. P. 353.
22. *Le Treut H., Ghil M.* Orbital forcing, climatic interactions, and glacial cycles // *J. Geophys. Res.* 1983. Vol. 88 (C9). 5167.
23. *Imbrie J., Boyle E.A., Clemens S.C. et al.* On the structure and origin of major glacial cycles. 1. linear responses to Milankovitch forcing // *Paleoceanography*. 1992. Vol. 7. P. 701.
24. *Imbrie J., Berger A., Boyle E.A. et al.* On the structure and origin of major glacial cycles. 2. The 100 000-year cycle // *Paleoceanography*. 1993. Vol. 8. P. 699.
25. *Yiou P., Genthon C., Ghil M. et al.* High-frequency paleovariability in climate and CO₂ levels from Vostok ice core records // *J. Geophys. Res.* 1991. Vol. B12996. P. 20365.
25. *Ghil M.* Cryothermodynamics: the chaotic dynamics of paleoclimate // *Physica D*. 1994. Vol. 77. P. 130.
26. *Rial J.A.* Pacemaking the Ice ages by frequency modulation of Earth's orbital eccentricity // *Science*. 1999. Vol. 285. P. 564.
27. *Rial J.A., Anaclerio C.A.* Understanding nonlinear responses of the climate system to orbital forcing // *Quaternary Science reviews*. 2000. Vol. 19. P. 1709.
28. *Winograd I.J., Copen C., Landwehr J.M. et al.* Continuous 500000-year climate record from vein calcite in Devils Hole, Nevada // *Science*. 1992. Vol. 258. P. 255.
29. *Raymo M.E.* The timing of major climate terminations // *Paleoceanography*. 1997. Vol. 1294. P. 577.
30. *Petit J.R., Jouzel J. Raynaud D. et al.* Climate and atmospheric history of the past 420,000 years from the Vostok ice core, Antarctica // *Nature*. 1999. Vol. 399. P. 429.
31. *Котляков В.М.* Гляциология Антарктиды. М.: Наука, 2000.
32. *Zachos J., Pagani M., Sloan L., Thomas E., Billups K.* Trends, rhythms, and aberrations in global climate 65 ma to present // *Science*. 2001. Vol. 292. P. 686.
33. *Lowenstein T.K., Demicco R.V.* Elevated Eocene atmospheric CO₂ and its subsequent decline // *Science*. 2006. Vol. 313. P. 1928.
34. *Filander S.G., Fedorov A.V.* Role of tropics in changing the response to Milankovitch forcing some three million years ago // *Paleoceanology*. 2003. Vol. 18. doi:10.1029/2002PA000837.
35. *Lawrence K.T., Zhonghui Liu, Herbert T.D.* Evolution of the Eastern Tropical Pacific through Plio-Pleistocene glaciation // *Science*. 2006. Vol. 312. P. 79.
36. *Lunt D.J., Valdes P.J., Haywood A., Rutt I.C.* Closure of the Panama seaway during

- the Pliocene: implications for climate and Northern Hemisphere glaciation // *Climate Dynamics*. 2007. Vol. 30. doi:10.1007/s00382-007-0265-6.
37. *Ravelo A.C., Andreasen D.H., Lyle M., Lyle A.O., Wara M.W.* Regional climate shifts caused by gradual global cooling in the Pliocene epoch // *Nature*. 2004. Vol. 429. P. 263.
 38. *Sosdian S., Rosenthal Y.* Deep-sea temperature and ice volume changes across the Pliocene-Pleistocene climate transitions. *Science*. 2009. Vol. 325. P. 306.
 39. *Вакуленко Н.В., Котляков В.М., Сонечкин Д.М.* Свидетельство упрещающей роли океана в цикличности ледниковых эпох позднего плейстоцена // *Доклады АН*. 2008. Т. 421, № 3. С. 402.
 40. *Вакуленко Н.В., Котляков В.М., Ламберт Ф., Сонечкин Д.М.* О роли океана в изменениях климата плейстоцена // *Доклады АН*. 2010. Т. 432, № 2. С. 260.
 41. *Bolton E.W., Maasch K.A., Lilly J.M.* A wavelet analysis of Plio-Pleistocene climate indicators: A new view of periodicity evolution // *Geoph. Res. Lett.* 1995. Vol. 22: 20. P. 2753.
 42. *Han-Shou Liu, Chao B.F.* Wavelet spectral analysis of the Earth's orbital variations and paleoclimatic cycles // *J. Atmos. Sci.* 1998. Vol. 55 P. 227.
 43. *Press W.H., Teukolsky S.A., Vetterling W.T. et al.* Numerical Recipes in FORTRAN, 2nded. Cambridge: Cambridge University Press, 1992.
 44. *Schulz M., Stattegger K.* Spectrum: Spectral analysis of unevenly spaced paleoclimatic time series *Computers & Geosciences*. 1997. Vol. 23. P. 929.
 45. *Сонечкин Д.М.* Обоснование четырехмерного (непрерывного) усвоения данных метеорологических наблюдений на основе динамико-стохастического подхода // *Метеорология и Гидрология*. 1973. № 4. С. 13.
 46. *Вакуленко Н.В., Иващенко Н.Н., Котляков В.М., Сонечкин Д.М.* О бифуркации умножения периода ледниковых циклов в начале плейстоцена // *Доклады АН*. 2011. Т.436. № 4. С. 541.
 47. *Shackleton N.J., Hall M.A., Pate D.* Pliocene stable isotope stratigraphy of ODP site 846 // *Proc. Ocean Drill. Program Sci. Results*. 1995. Vol. 138. P. 337.
 48. *Shackleton N.J., Crowhurst S., Hagelberg T., Pias N.G., Schneider D.A.* A new late Neogene time scale: Application to Leg 138 sites // *Proc. Ocean Drill. Program Sci. Results*. 1995. Vol. 138. P. 73.
 49. *Lisiecki L.E., Raymo M.E.* A Pliocene-Pleistocene stack of 57 globally distributed benthic $\delta^{18}O$ records // *Paleoceanology*. 2005. Vol. 20. PA1003: doi:10.1029/2004PA001071.
 50. *Вакуленко Н.В., Котляков В.М., Монин А.С., Сонечкин Д.М.* Особенности календаря ледниковых циклов позднего плейстоцена // *Известия АН, физика атмосферы и океана*. 2007. Т. 43, № 6. С. 713.
 51. *Арнольд В.И., Афраймович В.С., Ильяшенко Ю.С., Шильников Л.П.* Теория бифуркаций. Динамические системы. 5. Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. М.: ВИНТИ, 1986.
 52. *Сонечкин Д.М.* Стохастичность в моделях общей циркуляции атмосферы. Л.: Гидрометеиздат, 1984.
 53. *Андронов А.А., Витт А.А., Хайкин С.Э.* Теория колебаний. М.: Физматгиз, 1959.

54. *Афраймович В.С., Шильников Л.П.* Инвариантные двумерные торы, их разрушение и стохастичность. Сб.: Методы качественной теории дифференциальных уравнений. Горький: Изд. ГГУ, 1983. С. 3.

*Институт океанологии РАН
Гидрометцентр России
Институт географии РАН*

Поступила в редакцию 23.11.2012

ON THE PERIOD-MULTIPLYING BIFURCATION OF GLACIAL CYCLES IN THE PLIOCENE – PLEISTOCENE

N. V. Vakulenko, N. N. Ivashchenko, V. M. Kotlyakov, D. M. Sonechkin

In the Pliocene (about five – two million years before present) global climate fluctuated with a period corresponding well 41-thousand-year cycle of changes in the Earth's axis inclination to the ecliptic plane. Then, this period has disappeared, despite the fact that the 41-thousand-year cycle even slightly increased its scope and, therefore, the response to it would have only strengthened. By analyzing paleoclimatic series covering the Pliocene and subsequent Pleistocene, we show that the response of the climate system simply became unstable and therefore unobservable. At the same time, through period-doubling bifurcation, a well-known in the theory of nonlinear dynamical systems, new stable and observable climatic oscillations have been excited. Further, they experienced several secondary bifurcations, at which their periods alternately tripled and doubled again.

Keywords: Paleoclimatology, Pliocene – Pleistocene glacial cycles, wavelet analysis, period-multiplying bifurcations.



Вакуленко Надежда Викторовна – родилась в Москве (1955), окончила МВТУ им. Баумана (1978), после чего работала программистом в нескольких вычислительных центрах. С 1993 года работает в институте океанологии им. П.П. Ширшова РАН старшим научным сотрудником. Защитила диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук (2004). Научные интересы: исследование динамики климата, палеоклиматология. Имеет более 20 научных публикаций.

117997 Москва, Нахимовский проспект, 36
Институт океанологии им. П.П. Ширшова РАН
E-mail: vanava139@rambler.ru



Иващенко Надежда Назаровна – родилась в Москве (1938), окончила Московский институт электронного машиностроения, после чего занималась экспериментальной работой по полупроводниковой электронике, а с 1980-х годов – вопросами автоматизации проектирования химических производств. С 1991 года работает как научный сотрудник в лаборатории динамико-стохастических методов долгосрочных прогнозов погоды Гидрометеорологического научно-исследовательского центра России. Научные интересы: разработка программ для многомасштабного анализа нестационарных хаотических процессов и временных рядов с приложениями к динамике погоды и климата. Имеет около 30 научных публикаций.

123242 Москва, Большой Предтеченский пер., 11-13
Гидрометеорологический научно-исследовательский центр России
E-mail: nnivach@mecom.ru

Котляков Владимир Михайлович – родился в 1931 году в подмосковном посёлке Красная Поляна (ныне город Лобня). Окончил географический факультет МГУ по специальности «физическая география» (1954), после чего поступил на работу в Институт географии АН СССР, где прошел путь от должности младшего научного сотрудника до директора института в настоящее время. Участник и руководитель экспедиций в Антарктиде, на Новой Земле, Эльбрусе, Заилийском Алатау и Памире. Исследовал современный режим и динамику полярных и горных оледенений, дал интерпретацию материалов глубокого бурения антарктических льдов, высказал и реализовал идею бурения и изучения ледяного ядра Антарктического ледникового щита. Доктор географических наук (1967), академик РАН (1991), член и почетный член многих зарубежных академий и научных обществ. Почетный президент Русского географического общества. Председатель Российских национальных комитетов по Международной геосферно-биосферной программе и по исследованиям Антарктиды. Главный редактор журнала «Известия РАН, серия географическая», академического периодического издания «Материалы гляциологических исследований». Член редколлегии журналов «Доклады Академии наук», «Наука в России», «Земля и Вселенная», «Известия Русского географического общества», «Криосфера Земли» «Environment», «Geo Journal», «Ocean and Coastal Management». Опубликовал 25 книг и около тысячи статей. Основные сочинения: «Снежный покров Антарктиды и его роль в современном оледенении материка» (1961), «Мы живем в ледниковый период?» (1966), «Снежный покров Земли и ледники» (1968), «Горы, льды и гипотезы» (1977), «Изотопная и геохимическая гляциология» (с соавтором, 1982), «Гляциологический словарь» (1984), «Проблемы экологии России» (с соавторами, 1993), «Мир снега и льда» (1994), «Экологические проблемы: что происходит, кто виноват и что делать?» (с соавторами, 1997), «Наука, общество, окружающая среда» (1997), «Основы изотопной геохронологии и гляциологии» (с соавтором, 2000), Избранные сочинения в 6 книгах (2000–2004), «География: Понятия и термины. Пятиязычный академический словарь» (с соавтором, 2007).

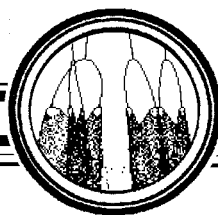


119017 Москва, Старомонетный пер., 29
Институт географии РАН
E-mail: direct@igras.ru

Сонечкин Дмитрий Михайлович – родился в Москве (1937), окончил географический факультет МГУ по кафедре метеорологии и климатологии, после чего работал как синоптик-прогнозист в Центральном институте прогнозов Гидрометеорологической службы СССР, а с начала 1960-х годов участвовал в работах по созданию метеорологической космической системы «Метеор». В 1970-х годах организовал в Гидрометеорологическом научно-исследовательском центре СССР лабораторию динамико-стохастических методов для применения идей и методов современной теории нелинейных динамических систем к задачам численного долгосрочного прогноза погоды и динамики климата. В начале 2000-х годов перешел на работу в Институт океанологии им. П.П. Ширшова РАН, продолжая участвовать в работах лаборатории динамико-стохастических методов в Гидрометцентре России. В настоящее время является также приглашенным профессором в Институте исследований окружающей среды холодных и засушливых регионов Китайской академии наук. Доктор физико-математических наук, профессор, академик РАН. Научные интересы: теоретические проблемы долгопериодных колебаний в климатической системе; численный долгосрочный прогноз погоды; современное изменение климата; реконструкции и исследования динамики климатов прошлого. Автор монографий: Метеорологическое дешифрирование космических снимков Земли (количественные методы). Л.: Гидрометеоиздат, 1979; Стохастичность в моделях общей циркуляции атмосферы. Л.: Гидрометеоиздат, 1984; Колебания климата по данным наблюдений. Тройной солнечный и другие циклы. М.: Наука, 2005 (в соавторстве с А.С. Мониным); Хаос и порядок в динамике погоды и климата. Водный и тепловой балансы тропосферы. С.-Пб.: Гидрометеоиздат, 2005 (в соавторстве с Р.Ф. Бурлуцким). Общее количество публикаций – более 200.



117997 Москва, Нахимовский проспект, 36
Институт океанологии им. П.П. Ширшова РАН
123242 Москва, Большой Предтеченский пер., 11-13
Гидрометеорологический научно-исследовательский центр России
E-mail: dsonech@ocean.ru



БИФУРКАЦИИ В ГЕНЕРАТОРЕ ВАН ДЕР ПОЛЯ С ЖЕСТКИМ ВОЗБУЖДЕНИЕМ В ПРИСУТСТВИИ ПАРАМЕТРИЧЕСКОГО ШУМА: КВАЗИГАРМОНИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ И ЧИСЛЕННЫЙ ЭКСПЕРИМЕНТ

Т. Е. Вадивасова, В. С. Маляев

В работе рассматривается поведение генератора ван дер Поля с жестким возбуждением у порога генерации при действии на него параметрического (мультипликативного) гауссова белого шума, а также при наличии двух независимых источников шума – параметрического и аддитивного. Исследуется эволюция вероятностного распределения при изменении управляющего параметра и интенсивности шума. Проводится сравнение теоретических результатов, полученных в рамках квазигармонического приближения с результатами численных исследований стохастических уравнений генератора.

Ключевые слова: Шум, флуктуации, автоколебательная система, стохастические бифуркации, субкритическая бифуркация Андронова–Хопфа.

Введение

Реальная система любой природы неизбежно находится под воздействием внутренних и внешних случайных сил. Хотя чаще всего такие воздействия являются очень слабыми, они могут играть существенную роль в поведении системы и должны учитываться при ее математическом моделировании. Фундаментальные основы теории динамических систем в присутствии случайных воздействий (то есть шума) изложены в известных монографиях [1–7]. Особое место занимает вопрос о влиянии шума на динамические системы вблизи точек бифуркаций, где система является особенно чувствительной к малым возмущениям. Бифуркации в системах с шумом называют стохастическими. Среди работ в данном направлении можно назвать известную монографию В. Хорстнемке и Р. Лефевра [8], а также книгу Л. Арнольда [9], одна из глав которой посвящена стохастическим бифуркациям. В [9] выделяются два типа стохастических бифуркаций: феноменологические бифуркации (Р-бифуркации), состоящие в качественном изменении формы стационарного вероятностного распределения, и динамические бифуркации (D-бифуркации), связанные с изменением устойчивости траекторий по отношению к малым возмущениям. В настоящее время имеется ряд теоретических и экспериментальных работ, посвященных изучению влияния шума на бифуркационные переходы [10–18].

Однако достаточно полная общая теория до настоящего времени отсутствует. Это во многом связано с тем фактом, что стохастические бифуркации не обладают универсальностью локальных бифуркаций динамических систем, которые не зависят от конкретного вида уравнений, описывающих систему, и функций, задающих нелинейности. Влияние шума на одну и ту же бифуркацию в различных системах может быть существенно различно. Кроме того, важную роль играют характеристики шума, которые также могут быть разными.

Одной из широко распространенных и важнейших бифуркаций динамических систем является бифуркация рождения предельного цикла (бифуркация Андронова–Хопфа). С этой бифуркацией связано возникновение режима автоколебаний в генераторах. Она может носить мягкий (суперкритический) и жесткий (субкритический) характер. В субкритическом случае автогенерация предшествует бифуркации и в системе наблюдается бистабильность. Исследование влияния шума на переход к автоколебательному режиму представляет собой классическую задачу статистической радиофизики. Эффекты, связанные с влиянием аддитивного и мультипликативного (параметрического) шума на бифуркацию Андронова–Хопфа, изучались в ряде работ (например, в [12–15, 19–24]). При этом использовались как приближенные аналитические методы [12, 14, 19–22], так и компьютерное моделирование [15, 23], а также натурный эксперимент [13]. В большинстве отмеченных работ исследуются системы с суперкритической бифуркацией Андронова–Хопфа. Показаны различия в бифуркационных сценариях при аддитивном и мультипликативном гауссовом шуме [15, 20]. Установлено, что шум вызывает запаздывание бифуркации по сравнению с детерминированным случаем и может приводить к возникновению бифуркационного интервала, то есть вместо точки бифуркации наблюдается интервал значений управляющего параметра, соответствующий постепенной эволюции стационарного вероятностного распределения [12, 13, 15, 19, 21]. Для этого случая исследовано влияние корреляционных свойств цветного шума на границы бифуркационного интервала [19, 21]. В связи с вопросом о влиянии параметрического шума на автогенератор можно также указать теоретическую работу [25], в которой получены выражения для стационарного распределения амплитуды колебаний в генераторе с суперкритической бифуркацией Андронова–Хопфа при шумовой модуляции различных параметров генератора. Авторы используют квазигармоническое приближение, но метод получения амплитудного распределения отличается от применяемого нами в настоящей статье. В меньшей степени исследовано влияние шума на системы с субкритической бифуркацией Андронова–Хопфа. В [22] рассматривается генератор ван дер Поля с субкритической бифуркацией, находящийся под воздействием аддитивного белого шума, а в [23] исследуется влияние на аналогичный генератор двух источников – аддитивного и параметрического цветного гауссова шума. Таким образом, из рассмотрения выпал генератор ван дер Поля с жестким возбуждением в присутствии белого параметрического шума. Кроме того, в обеих указанных работах применен квазигармонический анализ, основанный на методе усреднения. Известно, что метод усреднения не показывает всех деталей бифуркационного перехода [12, 21], а при значительном шуме может сильно исказить истинную картину режимов системы. Таких проблем не возникает в случае гармонического осциллятора Хопфа, который допускает точное описание в терминах мгновенной амплитуды и фазы. В [24] строгими теоретическими методами анализируется влияние аддитивного и параметрического белого шума на осциллятор Хопфа с суперкритической

бифуркацией Андронова–Хопфа, а в [26] аналогичное исследование проведено для осциллятора Хопфа с субкритической бифуркацией. В обоих случаях установлен запаздывающий характер бифуркаций, при этом бифуркационный интервал отсутствует. Однако, в силу специфического характера осциллятора Хопфа, эффекты шумового воздействия в этой системе могут не отражать эффектов, характерных для других автогенераторов. Кроме того, в отличие от осциллятора ван дер Поля, осциллятор Хопфа не является моделью реальных автоколебательных систем.

В предлагаемой работе проведен детальный анализ влияния белого гауссова шума на генератор ван дер Поля с субкритической бифуркацией Андронова–Хопфа. Рассмотрено совместное воздействие аддитивного и параметрического шума, а также случай чисто параметрического шумового воздействия. Проведены аналитические исследования в рамках квазигармонического приближения с использованием укороченных (усредненных) уравнений для амплитуды и фазы генератора. Теоретические результаты сопоставляются с результатами численного интегрирования полных стохастических дифференциальных уравнений (СДУ) генератора. В работе подробно изложен вывод укороченных уравнений, приведены математические выкладки для получения и анализа стационарной плотности вероятности, изложен алгоритм численного интегрирования СДУ. Эти, может быть излишние, подробности позволяют использовать данную работу в учебно-методических целях для ознакомления студентов и аспирантов с методами анализа стохастических систем.

1. Модели генератора с шумом и вывод укороченных стохастических уравнений

Будем рассматривать генератор ван дер Поля с жестким возбуждением в присутствии шумовой модуляции одного из параметров, а также источника аддитивного шума. Рассмотрим отдельно случаи, когда шум модулирует частоту генератора (точнее, ее квадрат) и параметр возбуждения ε . Соответственно мы имеем две математические модели, задаваемые следующими СДУ Стратоновича:

$$\ddot{x} + [\omega_0^2 + \sqrt{2D_1}n_1(t)]x = (\varepsilon + x^2 - x^4)\dot{x} + \sqrt{2D_2}n_2(t), \quad (1)$$

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = [\varepsilon + \sqrt{2D_1}n_1(t) + x^2 - x^4]\dot{x} + \sqrt{2D_2}n_2(t). \quad (2)$$

Уравнения (1) и (2) записаны для безразмерной переменной x и безразмерного времени t . Случайные процессы $n_1(t)$ и $n_2(t)$ представляют собой независимые источники нормированного гауссова белого шума: $\langle n_{1,2}(t) \rangle \equiv 0$, $\langle n_i(t)n_j(t+\tau) \rangle = \delta_{ij}\delta(\tau)$, $i, j = 1, 2$, где δ_{ij} – символ Кронеккера, $\delta(\tau)$ – функция Дирака. Константы D_1 и D_2 задают интенсивность параметрического и аддитивного шума, соответственно. Параметр возбуждения ε управляет режимом генерации, а параметр ω_0 определяет собственную частоту, которая в квазигармоническом режиме достаточно точно совпадает со значением ω_0 . Уравнения всегда можно нормировать таким образом, что $\omega_0 = 1$. В дальнейшем всюду полагаем выполнение этого равенства.

Будем описывать поведение генератора динамическими переменными x , $y = \dot{x}$. В отсутствие шума в генераторе имеют место следующие режимы и бифуркации. При $\varepsilon > 0$ наблюдается режим генерации, которому соответствует устойчивый предельный цикл. В начале координат имеется неустойчивая точка равновесия (фокус).

При $\varepsilon = 0$ происходит субкритическая бифуркация Андронова–Хопфа, в результате которой при переходе в область отрицательных значений ε из неустойчивого фокуса рождается неустойчивый предельный цикл. При этом фокус становится устойчивым. При $-1/8 < \varepsilon < 0$ имеет место режим бистабильности, соответствующий сосуществованию двух аттракторов – устойчивого предельного цикла и устойчивого фокуса в начале координат. Бассейны их притяжения разделены неустойчивым предельным циклом. При $\varepsilon = -1/8$ происходит касательная бифуркация устойчивого и неустойчивого циклов, в результате которой они сливаются и исчезают. При $\varepsilon < -1/8$ единственным аттрактором системы является точка равновесия.

Для проведения приближенного теоретического анализа генератора с шумом будем предполагать квазигармонический характер колебаний. Тогда можно воспользоваться следующим представлением колебаний:

$$\begin{aligned} x(t) &= a(t) \cos \Phi(t), \\ y(t) &= -a(t) \sin \Phi(t), \quad \Phi(t) = t + \varphi(t), \end{aligned} \quad (3)$$

где $a(t)$ – мгновенная амплитуда колебаний, а $\varphi(t)$ – флуктуация фазы. С помощью метода усреднения получим стохастические укороченные уравнения для $a(t)$ и $\varphi(t)$. Новые переменные $a(t)$ и $\varphi(t)$ не являются независимыми, что учитывается дополнительным условием

$$\dot{a} \cos \Phi - a \dot{\varphi} \sin \Phi = 0 \quad (4)$$

Вывод укороченных СДУ из уравнения (1) осуществим, используя замену переменных (3) и условие (4):

$$\begin{aligned} \dot{a} &= (\varepsilon + a^2 \cos^2 \Phi - a^4 \cos^4 \Phi) a \sin^2 \Phi + \sqrt{2D_1} a n_1(t) \sin \Phi \cos \Phi - \\ &\quad - \sqrt{2D_2} n_2(t) \sin \Phi, \\ \dot{\varphi} &= (\varepsilon + a^2 \cos^2 \Phi - a^4 \cos^4 \Phi) \sin \Phi \cos \Phi + \sqrt{2D_1} n_1(t) \cos^2 \Phi - \\ &\quad - (\sqrt{2D_2}/a) n_2(t) \cos \Phi. \end{aligned} \quad (5)$$

Далее производим преобразование тригонометрических функций и усредняем выражения (5) почленно за период $T_0 = 2\pi/\omega_0 = 2\pi$. При этом учитывается «медленность» функций $a(t)$, $\varphi(t)$ по сравнению с периодом колебаний. При усреднении уравнения для фазы пренебрегаем возникающим после тригонометрических преобразований слагаемым

$$\frac{\sqrt{2D_1}}{4\pi} \int_t^{t+2\pi} n_1(\theta) d\theta,$$

средний квадрат которого равен $D_1/4\pi$. Таким образом, при $D_1 \ll 4\pi$ это слагаемое можно считать несущественным. В результате усреднения приходим к следующим

уравнениям:

$$\begin{aligned}\dot{a} &= \frac{a}{2} \left(\varepsilon + \frac{a^2}{4} - \frac{a^4}{8} \right) + \frac{a}{2} \sqrt{2D_1} \xi_1(t, \varphi) - \sqrt{2D_2} \kappa_1(t, \varphi), \\ \dot{\varphi} &= \frac{\sqrt{2D_1}}{2} \xi_2(t, \varphi) - \frac{\sqrt{2D_2}}{a} \kappa_2(t, \varphi).\end{aligned}\quad (6)$$

Здесь новые источники шума определяются следующими выражениями:

$$\begin{aligned}\xi_1(t, \varphi) &= \frac{1}{2\pi} \int_t^{t+2\pi} n_1(\theta) \sin 2\Phi(\theta) d\theta, \\ \xi_2(t, \varphi) &= \frac{1}{2\pi} \int_t^{t+2\pi} n_1(\theta) \cos 2\Phi(\theta) d\theta, \\ \kappa_1(t, \varphi) &= \frac{1}{2\pi} \int_t^{t+2\pi} n_2(\theta) \sin \Phi(\theta) d\theta, \\ \kappa_2(t, \varphi) &= \frac{1}{2\pi} \int_t^{t+2\pi} n_2(\theta) \cos \Phi(\theta) d\theta.\end{aligned}\quad (7)$$

Они характеризуются наличием двух масштабов времени – «быстрого» и «медленного». «Быстрый масштаб» задается присутствием сомножителей $n_{1,2}(\theta)$, описывающих некоррелированные случайные толчки, которые испытывает система. «Медленный масштаб» определяется сомножителями $\sin 2\Phi(\theta)$, $\cos 2\Phi(\theta)$, $\sin \Phi(\theta)$ и $\cos \Phi(\theta)$, представляющими собой квазигармонический шум в силу того, что случайная компонента фазы $\varphi(t)$ является «медленным» случайным процессом.

Преобразование источников шума осуществим в соответствии с методами, изложенными в [1, 27]. Выражения (7) можно представить в виде

$$\begin{aligned}\xi_1(t, \varphi) &= N_{11}(t) \sin 2\varphi(t) + N_{21}(t) \cos 2\varphi(t), \\ \xi_2(t, \varphi) &= N_{11}(t) \cos 2\varphi(t) - N_{21}(t) \sin 2\varphi(t), \\ \kappa_1(t, \varphi) &= N_{12}(t) \sin \varphi(t) + N_{22}(t) \cos \varphi(t), \\ \kappa_2(t, \varphi) &= N_{12}(t) \cos \varphi(t) - N_{22}(t) \sin \varphi(t),\end{aligned}\quad (8)$$

где введены следующие случайные функции:

$$\begin{aligned}N_{11}(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_t^{t+2\pi} n_1(\theta) \cos 2\theta d\theta, & N_{21}(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_t^{t+2\pi} n_1(\theta) \sin 2\theta d\theta, \\ N_{12}(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_t^{t+2\pi} n_2(\theta) \cos \theta d\theta, & N_{22}(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_t^{t+2\pi} n_2(\theta) \sin \theta d\theta.\end{aligned}$$

Из определения следует, что $N_{11}(t)$, $N_{21}(t)$, $N_{12}(t)$ и $N_{22}(t)$ представляют собой совместно гауссовы процессы с нулевыми средними значениями. Здесь $N_{i1}(t)$ и $N_{j2}(t)$

$(i, j = 1, 2)$, статистически независимы. Несложно найти следующие корреляционные функции:

$$\begin{aligned}\Psi_{N_{11}}(t, t + \tau) &= \langle N_{11}(t)N_{11}(t + \tau) \rangle = \\ &= \begin{cases} \frac{1}{2(4\pi)^2}(8\pi + 4\tau - \sin 4t + \sin(4t + 4\tau)) & \text{при } -2\pi \leq \tau \leq 0, \\ \frac{1}{2(4\pi)^2}(8\pi - 4\tau + \sin 4t - \sin(4t + 4\tau)) & \text{при } 0 < \tau \leq 2\pi, \\ 0 & \text{при } |\tau| > 2\pi, \end{cases}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Psi_{N_{21}}(t, t + \tau) &= \langle N_{21}(t)N_{21}(t + \tau) \rangle = \\ &= \begin{cases} \frac{1}{2(4\pi)^2}(8\pi + 4\tau + \sin 4t - \sin(4t + 4\tau)) & \text{при } -2\pi \leq \tau \leq 0, \\ \frac{1}{2(4\pi)^2}(8\pi - 4\tau - \sin 4t + \sin(4t + 4\tau)) & \text{при } 0 < \tau \leq 2\pi, \\ 0 & \text{при } |\tau| > 2\pi, \end{cases}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Psi_{N_{12}}(t, t + \tau) &= \langle N_{12}(t)N_{12}(t + \tau) \rangle = \\ &= \begin{cases} \frac{1}{2(4\pi)^2}(4\pi + 2\tau - \sin 2t + \sin(2t + 2\tau)) & \text{при } -2\pi \leq \tau \leq 0, \\ \frac{1}{2(4\pi)^2}(4\pi - 2\tau + \sin 2t - \sin(2t + 2\tau)) & \text{при } 0 < \tau \leq 2\pi, \\ 0 & \text{при } |\tau| > 2\pi, \end{cases}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Psi_{N_{22}}(t, t + \tau) &= \langle N_{22}(t)N_{22}(t + \tau) \rangle = \\ &= \begin{cases} \frac{1}{2(4\pi)^2}(4\pi + 2\tau + \sin 2t - \sin(2t + 2\tau)) & \text{при } -2\pi \leq \tau \leq 0, \\ \frac{1}{2(4\pi)^2}(4\pi - 2\tau - \sin 2t + \sin(2t + 2\tau)) & \text{при } 0 < \tau \leq 2\pi, \\ 0 & \text{при } |\tau| > 2\pi. \end{cases}\end{aligned}$$

А также следующие взаимные корреляционные функции

$$\begin{aligned}\Psi_{N_{11}N_{21}}(t, t + \tau) &= \langle N_{11}(t)N_{21}(t + \tau) \rangle = \\ &= \begin{cases} \frac{1}{2(4\pi)^2}(\cos(4t + 4\tau) - \cos 4t) & \text{при } -2\pi \leq \tau \leq 0, \\ \frac{1}{2(4\pi)^2}(\cos 4t - \cos(4t + 4\tau)) & \text{при } 0 < \tau \leq 2\pi, \\ 0 & \text{при } |\tau| > 2\pi, \end{cases}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Psi_{N_{12}N_{22}}(t, t + \tau) &= \langle N_{12}(t)N_{22}(t + \tau) \rangle = \\ &= \begin{cases} \frac{1}{(4\pi)^2}(\cos(2t + 2\tau) - \cos 2t) & \text{при } -2\pi \leq \tau \leq 0, \\ \frac{1}{(4\pi)^2}(\cos 2t - \cos(2t + 2\tau)) & \text{при } 0 < \tau \leq 2\pi, \\ 0 & \text{при } |\tau| > 2\pi. \end{cases}\end{aligned}$$

Интегралы от корреляционных функций по всем возможным значениям τ в любой момент времени t имеют одни и те же значения

$$\begin{aligned}\int_{-2\pi}^{2\pi} \Psi_{N_{11}}(t, t + \tau) d\tau &\equiv \int_{-2\pi}^{2\pi} \Psi_{N_{21}}(t, t + \tau) d\tau \equiv \int_{-2\pi}^{2\pi} \Psi_{N_{12}}(t, t + \tau) d\tau \equiv \\ &\equiv \int_{-2\pi}^{2\pi} \Psi_{N_{22}}(t, t + \tau) d\tau \equiv \frac{1}{2}, \quad (9)\end{aligned}$$

$$\int_{-2\pi}^{2\pi} \Psi_{N_{11}N_{21}}(t, t + \tau) d\tau \equiv \int_{-2\pi}^{2\pi} \Psi_{N_{12}N_{22}}(t, t + \tau) d\tau \equiv 0.$$

При рассмотрении медленно меняющихся процессов $\varphi(t)$ и $a(t)$, для которых изменения существенны только на интервалах времени, значительно превосходящих период T_0 , можно заменить, источники $N_{ij}(t)$, $i, j = 1, 2$ на эквивалентные гауссовы источники белого шума с тем же значением интеграла от корреляционной функции: $N_{ij}(t) \rightarrow N_{ij}^3(t)$, где

$$\langle N_{ij}^3(t) \rangle \equiv 0, \quad \langle N_{ik}^3(t)N_{jk}^3(t + \tau) \rangle = \frac{1}{2}\delta_{ij}\delta(\tau), \quad \langle N_{i1}^3(t)N_{j2}^3(t + \tau) \rangle \equiv 0 \quad i, j, k = 1, 2. \quad (10)$$

Тогда вместо (8) можно записать

$$\begin{aligned}\xi_1(t, \varphi) &= N_{11}^3(t) \sin 2\varphi(t) + N_{21}^3(t) \cos 2\varphi(t), \\ \xi_2(t, \varphi) &= N_{11}^3(t) \cos 2\varphi(t) - N_{21}^3(t) \sin 2\varphi(t), \\ \kappa_1(t, \varphi) &= N_{12}^3(t) \sin \varphi(t) + N_{22}^3(t) \cos \varphi(t), \\ \kappa_2(t, \varphi) &= N_{12}^3(t) \cos \varphi(t) - N_{22}^3(t) \sin \varphi(t).\end{aligned} \quad (11)$$

Разделим «медленные» и «быстрые» компоненты случайных источников $\xi_{1,2}(t, \varphi)$ и $\kappa_{1,2}(t, \varphi)$

$$\begin{aligned}\xi_i(t, \varphi) &= \langle \xi_i(t, \varphi) / a, \varphi \rangle + \tilde{\xi}_i(t), \\ \kappa_i(t, \varphi) &= \langle \kappa_i(t, \varphi) / a, \varphi \rangle + \tilde{\kappa}_i(t), \quad i = 1, 2,\end{aligned} \quad (12)$$

где $\langle \xi_i(t, \varphi) / a, \varphi \rangle$, $\langle \kappa_i(t, \varphi) / a, \varphi \rangle$ – условные средние, полученные при усреднении значений ξ_i и κ_i по ансамблю случайных воздействий $N_{ij}^3(t)$ при выбранных реализациях $a(t)$ и $\varphi(t)$, а $\tilde{\xi}_i(t)$ и $\tilde{\kappa}_i(t)$ – отклонения от условных средних. Условные средние

являются медленно меняющимися случайными функциями, так как их зависимость от времени определяется через медленные функции $a(t)$ и $\varphi(t)$. Флуктуации $\tilde{\xi}_i(t)$ и $\tilde{\kappa}_i(t)$ отражают действие «случайных толчков», отклоняющих фазовую траекторию от заданного направления и представляют собой быстро меняющиеся компоненты случайных воздействий.

Найдем условные средние $\langle \tilde{\xi}_i(t, \varphi)/a, \varphi \rangle$ и $\langle \tilde{\kappa}_i(t, \varphi)/a, \varphi \rangle$, $i = 1, 2$. Для этого представим $\varphi(t)$ в виде: $\varphi(t) = \varphi(t') + \Delta\varphi$, где $t' = t - \Delta t$. Интервал времени Δt предполагается малым по сравнению с характерным временем медленных процессов $a(t)$ и $\varphi(t)$, так, что $\Delta\varphi$ – малое приращение фазы (при этом на интервале Δt могут укладываться много периодов T_0). Тогда для $\xi_1(t, \varphi)$, например, имеем

$$\begin{aligned} \xi_1(t, \varphi) &= N_{11}^3(t) \sin 2(\varphi(t') + \Delta\varphi) + N_{21}^3(t) \cos 2(\varphi(t') + \Delta\varphi) \approx \\ &\approx N_{11}^3(t) \sin 2\varphi(t') + 2N_{11}^3(t)\Delta\varphi \cos 2\varphi(t') + N_{21}^3(t) \cos 2\varphi(t') - 2N_{21}^3(t)\Delta\varphi \sin 2\varphi(t'). \end{aligned}$$

Учитывая, что $\varphi(t')$ не зависит от $N_{11}^3(t)$ и $N_{21}^3(t)$, так как предшествует им по времени, получаем

$$\langle \xi_1(t, \varphi)/a, \varphi \rangle \approx 2 \langle N_{11}^3(t)\Delta\varphi/a, \varphi \rangle \cos 2\varphi(t') - 2 \langle N_{21}^3(t)\Delta\varphi/a, \varphi \rangle \sin 2\varphi(t'). \quad (13)$$

Из второго уравнения системы (6) находим выражение для приращения фазы

$$\begin{aligned} \Delta\varphi &= \frac{\sqrt{2D_1}}{2} \int_{t'}^t [N_{11}^3(\theta) \cos 2\varphi(\theta) - N_{21}^3(\theta) \sin 2\varphi(\theta)] d\theta - \\ &- \sqrt{2D_2} \int_{t'}^t \frac{[N_{12}^3(\theta) \cos \varphi(\theta) - N_{22}^3(\theta) \sin \varphi(\theta)]}{a(\theta)} d\theta. \end{aligned} \quad (14)$$

Из (13), (14) и (10) с учетом свойств функции Дирака имеем

$$\langle \xi_1(t, \varphi)/a, \varphi \rangle \approx \frac{\sqrt{2D_1}}{4} \sin^2 2\varphi(t) + \frac{\sqrt{2D_1}}{4} \cos^2 2\varphi(t) = \frac{\sqrt{2D_1}}{4}.$$

Аналогично можно получить

$$\begin{aligned} \langle \xi_2(t, \varphi)/a, \varphi \rangle &\approx 0, \\ \langle \kappa_1(t, \varphi)/a, \varphi \rangle &\approx -\frac{\sqrt{2D_2}}{4a} \sin^2 \varphi(t) - \frac{\sqrt{2D_2}}{4a} \cos^2 \varphi(t) = -\frac{\sqrt{2D_2}}{4a}, \\ \langle \kappa_2(t, \varphi)/a, \varphi \rangle &\approx 0. \end{aligned} \quad (15)$$

Подставляя найденные условные средние в выражения (12) и вводя нормированные источники

$$n_{11}(t) = \sqrt{2}\tilde{\xi}_1(t), \quad n_{21}(t) = \sqrt{2}\tilde{\xi}_2(t), \quad n_{12}(t) = -\sqrt{2}\tilde{\kappa}_1(t), \quad n_{22}(t) = -\sqrt{2}\tilde{\kappa}_2(t),$$

приходим к представлению

$$\begin{aligned} \xi_1(t, \varphi) &= \frac{\sqrt{2D_1}}{4} + \frac{1}{\sqrt{2}}n_{11}(t), \quad \xi_2(t, \varphi) = \frac{1}{\sqrt{2}}n_{21}(t), \\ \kappa_1(t, \varphi) &= -\frac{\sqrt{2D_2}}{4a} - \frac{1}{\sqrt{2}}n_{12}(t), \quad \kappa_2(t, \varphi) = -\frac{1}{\sqrt{2}}n_{22}(t). \end{aligned} \quad (16)$$

Из (6) и (16) окончательно получаем следующие укороченные СДУ генератора:

$$\begin{aligned}\dot{a} &= \frac{a}{2} \left(\varepsilon + \frac{D_1}{2} + \frac{a^2}{4} - \frac{a^4}{8} \right) + \frac{D_2}{2a} + \frac{a}{2} \sqrt{D_1} n_{11}(t) + \sqrt{D_2} n_{12}(t), \\ \dot{\varphi} &= \frac{\sqrt{D_1}}{2} n_{21}(t) + \frac{\sqrt{D_2}}{a} n_{22}(t).\end{aligned}\quad (17)$$

В первом приближении можно считать, что $n_{ij}(t)$, $i, j = 1, 2$ – независимые источники нормированного гауссова белого шума.

Проведя аналогичные выкладки для (2), приходим к той же самой системе укороченных стохастических уравнений (17). Отметим, что в данном случае при усреднении мы пренебрегли слагаемым

$$\frac{\sqrt{2D_1}}{4\pi} a \int_t^{t+2\pi} n_1(\theta) d\theta$$

в уравнении для амплитуды. Для модели (1) подобное слагаемое (только без множителя a) возникало в уравнении для фазы. Возможно, пренебрежение этими слагаемыми как раз и приводит к тому, что две изначально различные модели генератора описываются одними и теми же укороченными уравнениями. Вторая причина – нормировка времени, в результате которой собственная частота ω_0 в обеих моделях равна единице. При переходе к размерному времени параметр ω_0 по-разному войдет в укороченные уравнения для двух моделей. Таким образом, в квазигармоническом приближении для безразмерной модели генератора модуляция гауссовым белым шумом как параметра возбуждения, так и квадрата собственной частоты приводит к одним и тем же результатам. Различия в поведении двух моделей будут существенны в области значений параметра ε и интенсивностей источников шума D_1 и D_2 , для которых будет сильно сказываться ангармоничность сигнала.

Отметим, что уравнение для амплитуды не зависит от переменной φ и может рассматриваться независимо от уравнения для фазы. Кроме того, нужно отметить, что уравнение для амплитуды включает мультипликативный шум, модулирующий параметр ε . Будем понимать это уравнение, как СДУ Стратоновича, так же как и исходное уравнение генератора.

2. Теоретический анализ стохастических бифуркаций в рамках квазигармонического приближения

Теоретический анализ генератора с шумом основан на рассмотрении системы укороченных уравнений (17) и является приближенным. Однако, в некоторых пределах, он может обладать хорошей точностью с точки зрения количественных характеристик, а в смысле качественного описания явлений границы его применимости могут быть достаточно широки. Кроме того, только теоретический анализ может дать полную картину бифуркационных явлений, связанных с качественными перестройками закона распределения, поскольку при численных исследованиях эти перестройки не всегда легко диагностировать.

2.1. Аналитическое выражение для стационарной плотности вероятности $p(x, y)$. Для анализа феноменологических бифуркаций, состоящих в качественном изменении формы вероятностного распределения, найдем аналитическое выражение для плотности вероятности $p(x, y)$, используя усредненные уравнения (17).

Стохастическое уравнение Стратоновича для амплитуды колебаний описывает диффузионный процесс $a(t)$, характеризующийся коэффициентом сноса $A_a(a) = (a/2)(\varepsilon + 3D_1/4 + a^2/4 - a^4/8) + D_2/(2a)$ и коэффициентом диффузии $B_a(a) = (D_1a^2 + 4D_2)/8$. Используя известное выражение для стационарной плотности вероятности однокомпонентного диффузионного процесса, получаем

$$p(a) = \frac{C_0}{B_a} \exp \left\{ \int_{a_1}^a \frac{A_a(a)}{B_a(a)} da \right\} = \\ = Ca(D_1a^2 + 4D_2)^{\nu} \exp \left\{ -\frac{a^2}{8D_1} \left(a^2 - 4 - \frac{8D_2}{D_1} \right) \right\}, \quad (18)$$

где $\nu = 2\varepsilon/D_1 - 2D_2/D_1 - 4D_2^2/D_1^3$, C_0 и C – нормировочные константы, зависящие от некоторого фиксированного значения амплитуды a_1 , причем константа C зависит также от параметра ε и интенсивностей шума D_1 и D_2 .

Можно представить $p(x, y) = (1/a)p(a, \varphi)$, где $1/a$ – якобиан преобразования переменных. В случае отсутствия аддитивного шума ($D_2 = 0$) первое и второе уравнения системы (17) независимы. Соответственно имеем $p(a, \varphi) = p(a)p(\varphi)$. Уравнение для фазы при $D_2 = 0$ описывает винеровский процесс. В этом случае можно перейти к ограниченной фазе $\varphi(t) = \varphi(t) \pm 2\pi k$, $k = 0, 1, 2, \dots$, $\varphi(t) \in [0, 2\pi]$, которая имеет равномерное стационарное распределение в интервале $[0, 2\pi]$ [27,28]. С учетом этого получаем

$$p(x, y) = \frac{1}{2\pi a} p(a). \quad (19)$$

Если учесть слабый аддитивный шум, то в уравнение для фазы войдет зависимость от амплитуды. Фаза $\varphi(t)$ уже не будет, строго говоря, винеровским процессом. Однако при условии медленности процесса $a(t)$ на больших интервалах времени можно полагать значение амплитуды неизменным. В этом случае имеет место локальный линейный рост дисперсии фазы φ , и выражение (19) будет достаточно хорошо выполняться. Действительно, численные исследования системы (17) показывают, что распределение приведенной фазы $\varphi(t)$ практически равномерное. С учетом (18) и (19) имеем

$$p(x, y) = N[D_1(x^2 + y^2) + 4D_2]^{\nu} \exp \left\{ -\frac{x^2 + y^2}{8D_1} \left(x^2 + y^2 - 4 - \frac{8D_2}{D_1} \right) \right\}, \quad (20)$$

где $N = C/2\pi$ – нормировочная константа.

Положив $D_2 = 0$ легко получить распределение в системе, содержащей только параметрический шум. Однако прямой предельный переход от (20) к распределению, соответствующему только аддитивному шуму ($D_1 = 0$), осуществить затруднительно из-за возникающей неопределенности типа $\infty : \infty$. Получить выражение для $p(x, y)$ в этом случае легче, исходя непосредственно из СДУ (17) при $D_1 = 0$ (см., например, [22]).

2.2. Стохастические бифуркации в генераторе в присутствии только параметрического шума. Если аддитивный шум отсутствует, то в системе помимо феноменологических бифуркаций наблюдается также динамическая бифуркация. Действительно, при $D_2 = 0$ начало координат $x = 0$, $y = 0$ является неподвижной

точкой СДУ (1) и (2). Для анализа ее устойчивости достаточно рассмотреть уравнение для амплитуды и проанализировать устойчивость решения $a = 0$, которая определяется ляпуновским показателем

$$\lambda(a = 0) = \left\langle \frac{\partial \dot{a}}{\partial a} \Big|_{a=0} \right\rangle,$$

где угловые скобки означают статистическое усреднение. С учетом (17), получаем

$$\lambda(a = 0) = \frac{1}{2} \left(\varepsilon + \frac{D_1}{2} \right).$$

Соответственно условие бифуркации есть

$$D_1 = -2\varepsilon. \quad (21)$$

При $D_1 < -2\varepsilon$ точка равновесия в начале координат является устойчивой, при $D_1 > -2\varepsilon$ она неустойчива и наблюдаются стохастические колебания. Аналогичные результаты получены и в случае генератора с мягким возбуждением [9, 20]. Эта бифуркация точки равновесия связана с потерей устойчивости и относится к D-бифуркациям [9]. Она наблюдается в линейных и нелинейных осцилляторах с шумовой модуляцией параметров (см., например, [16, 29, 30]). Следует отметить, что линейный анализ устойчивости, основанный на расчете ляпуновских показателей, даже в детерминированных системах не всегда является надежным критерием устойчивости траекторий [31]. В рассматриваемом нами случае поведение фазовых траекторий в системах (1) и (2) при численном интегрировании в целом подтверждает сделанный вывод. Однако на конечном времени интегрирования поведение траектории сильно зависит от начальной точки и реализации случайной силы. При сравнительно большом шуме уже в области $D_1 < -2\varepsilon$ траектория может уйти из окрестности точки равновесия и не вернуться обратно даже на очень большом интервале наблюдения.

Чтобы исследовать P-бифуркации, обратимся к вероятностному распределению $p(x, y)$. При $D_2 = 0$ оно описывается следующим выражением:

$$p(x, y) = N'(x^2 + y^2)^{\nu} \exp \left\{ -\frac{x^2 + y^2}{8D_1} (x^2 + y^2 - 4) \right\}, \quad N' = ND_1^{\nu}. \quad (22)$$

Частные производные функции $p(x, y)$ имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial p(x, y)}{\partial x} &= -\frac{N'}{2D_1} x(x^2 + y^2)^{\nu-1} [(x^2 + y^2)^2 - 2(x^2 + y^2) - 8\varepsilon] e^{q(x, y)}, \\ \frac{\partial p(x, y)}{\partial y} &= -\frac{N'}{2D_1} y(x^2 + y^2)^{\nu-1} [(x^2 + y^2)^2 - 2(x^2 + y^2) - 8\varepsilon] e^{q(x, y)}, \quad (23) \\ q(x, y) &= \left\{ -\frac{x^2 + y^2}{8D_1} (x^2 + y^2 - 4) \right\}. \end{aligned}$$

Из анализа выражений (22) и (23) получаем следующую картину перестроек стационарной плотности вероятности $p(x, y)$ в области существования стохастических колебаний ($D_1 > -2\varepsilon$).

1. При выполнении условий $\varepsilon > -1/8$ независимо от интенсивности шума существует максимум плотности вероятности в точках устойчивого предельного цикла невозмущенной системы $x^2 + y^2 = a_0^2 = 1 + \sqrt{1 + 8\varepsilon}$.

2. В области $-1/8 < \varepsilon < 0$ существует минимум плотности вероятности в точках неустойчивого предельного цикла $x^2 + y^2 = a_1^2 = 1 - \sqrt{1 + 8\varepsilon}$. Значение $\varepsilon = -1/8$ соответствует стохастической касательной бифуркации циклов, состоящей в возникновении минимума и максимума плотности вероятности в точках $x^2 + y^2 = a_{0,1}^2$.

3. При $\varepsilon < 0$ в начале координат $x = 0, y = 0$ плотность вероятности обращается в бесконечность. Значение $\varepsilon = 0$ является бифуркационным. В этой точке амплитуда неустойчивого цикла a_1 обращается в ноль, минимум при $x^2 + y^2 = a_1^2$ исчезает, а поведение функции $p(x, y)$ в начале координат качественно меняется, что соответствует первой Р-бифуркации. Её можно считать стохастической субкритической бифуркацией Андронова-Хопфа. Отметим, что бифуркационные значения параметра ε , соответствующие касательной бифуркации и бифуркации Андронова-Хопфа, не зависят от интенсивности шума D_1 и совпадают с бифуркационными точками детерминированной системы.

4. При $0 < \varepsilon < D_1/4$ в начале координат значение $p(x, y)$ обращается в ноль, но производные терпят разрыв и гладкий минимум отсутствует. При $\varepsilon = D_1/4$ на-

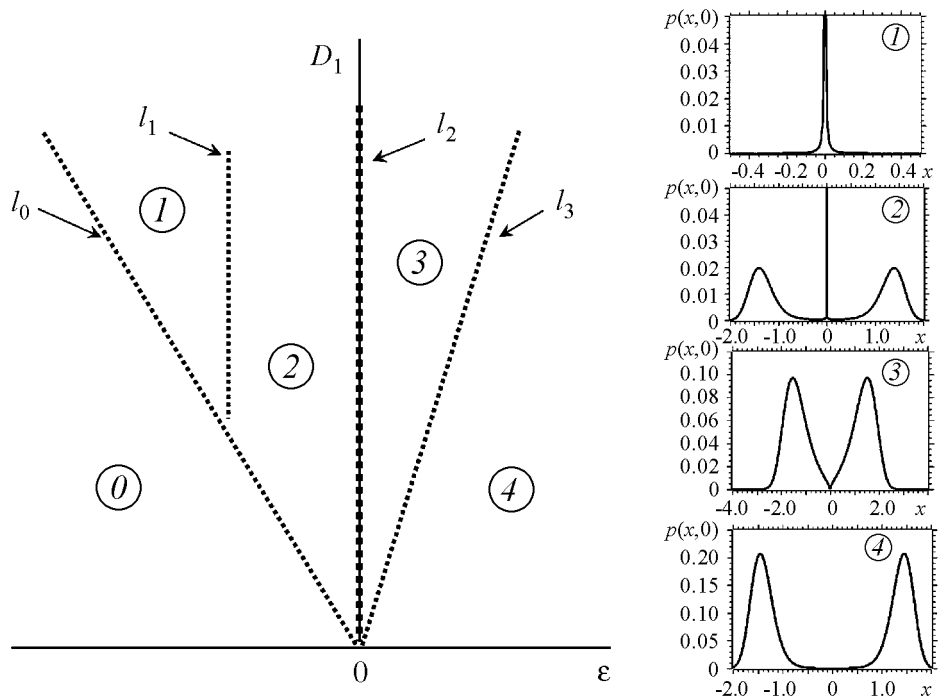


Рис. 1. Бифуркационная диаграмма генератора с жестким возбуждением при наличии мультипликативного гауссова белого шума. Диаграмма получена аналитически в рамках квазигармонического приближения. На линии l_0 ($D_1 = -2\varepsilon$) точка равновесия в начале координат теряет устойчивость и возникают стохастические колебания. Линия l_1 ($\varepsilon = -1/8$) соответствует стохастической касательной бифуркации, а линия l_2 ($\varepsilon = 0$) – стохастической субкритической бифуркации Андронова-Хопфа. Линия l_3 ($D_1 = 4\varepsilon$) связана с качественным изменением поведения функции $p(x, y)$ в начале координат. В области 0 система имеет устойчивую точку равновесия в начале координат и стохастические колебания затухают. Области 1–4 соответствуют стохастическим колебаниям с различным характером вероятностного распределения. Типичный вид функции $p(x, y = 0)$ в различных областях представлен на диаграммах справа

блюдается вторая Р-бифуркация, приводящая к возникновению гладкого минимума плотности вероятности в нуле координат. В результате этой бифуркации $p(x, y)$ окончательно приобретает вид распределения, соответствующего режиму зашумленной генерации.

Бифуркационная диаграмма генератора, соответствующая квазигармоническому приближению, представлена на рис. 1. На ней изображены линии рассмотренных выше бифуркаций и отмечены области с различным характером стационарной плотности вероятности. В области 0 система имеет устойчивую точку равновесия в начале координат и стохастические колебания затухают. Стационарная плотность вероятности есть функция Дирака $\delta(x, y)$. В областях 1–4 существуют стационарные стохастические колебания, которым соответствует качественно различный вид функции $p(x, y)$. На диаграмме представлены срезы двумерной плотности вероятности в плоскости $y = 0$, рассчитанные по формуле (22) и дающие представление о форме распределения, соответствующей различным отмеченным областям. Нормировка (вычисление коэффициента N') проводилась численно.

2.3. Совместное влияние аддитивного и параметрического шума на стохастические бифуркации. Рассмотрим поведение генератора в квазигармоническом приближении, учитывая наличие не только параметрического, но также и аддитивного шума (то есть $D_1 \neq 0$ и $D_2 \neq 0$). В этом случае у системы отсутствует неподвижная точка в начале координат и при любых значениях параметра ε существует единственная стационарная плотность вероятности во всем фазовом пространстве. Таким образом, добавление сколь угодно малого аддитивного шума приводит к исчезновению D-бифуркации.

Для анализа Р-бифуркаций обратимся к выражению (20). Частные производные от распределения в этом случае будут

$$\begin{aligned}\frac{\partial p(x, y)}{\partial x} &= -\frac{N}{2}x(D_1x^2 + y^2)^{\nu-1} [(x^2 + y^2)^2 - 2(x^2 + y^2) - 8\varepsilon] e^{q(x, y)}, \\ \frac{\partial p(x, y)}{\partial y} &= -\frac{N}{2}y(D_1x^2 + y^2)^{\nu-1} [(x^2 + y^2)^2 - 2(x^2 + y^2) - 8\varepsilon] e^{q(x, y)}, \quad (24) \\ q(x, y) &= \left\{ -\frac{x^2 + y^2}{8D_1} \left(x^2 + y^2 - 4 - \frac{8D_2}{D_1} \right) \right\}.\end{aligned}$$

Как следует из (20) и (24), в точке $x = 0, y = 0$ всегда имеет место гладкий экстремум, который будет максимумом при $\varepsilon < 0$ и минимумом при $\varepsilon > 0$. Другие экстремумы распределения имеют место в точках устойчивого и неустойчивого циклов детерминированной системы, аналогично вышерассмотренному случаю $D_2 = 0$. В системе наблюдаются стохастические Р-бифуркации, соответствующие касательной бифуркации и бифуркации Андронова–Хопфа, причем бифуркационные значения параметра ε не зависят от интенсивностей источников шума D_1 и D_2 . Бифуркация, связанная с изменением характера минимума в начале координат, отсутствует.

Бифуркационная диаграмма в присутствии аддитивного шума упрощается и приобретает вид, представленный на рис. 2. Бифуркационным параметром в системе в присутствии аддитивного шума является только ε , при этом шумовая модуляция параметра не влияет на характер бифуркаций.

Полученные результаты свидетельствуют, что при наличии в системе как параметрического, так и аддитивного шума стохастические бифуркации в генераторе

будут полностью аналогичны бифуркациям в присутствии только аддитивного шума. Присутствие параметрического шума влияет на форму распределения $p(x, y)$, не приводя к её качественному изменению. Так, с ростом интенсивности параметрического шума в области бистабильности наблюдается только перераспределение высоты максимумов: максимум в начале координат увеличивается по отношению к максимуму в точках устойчивого цикла (рис. 3, а), чего не происходит при увеличении интенсивности аддитивного шума (рис. 3, б).

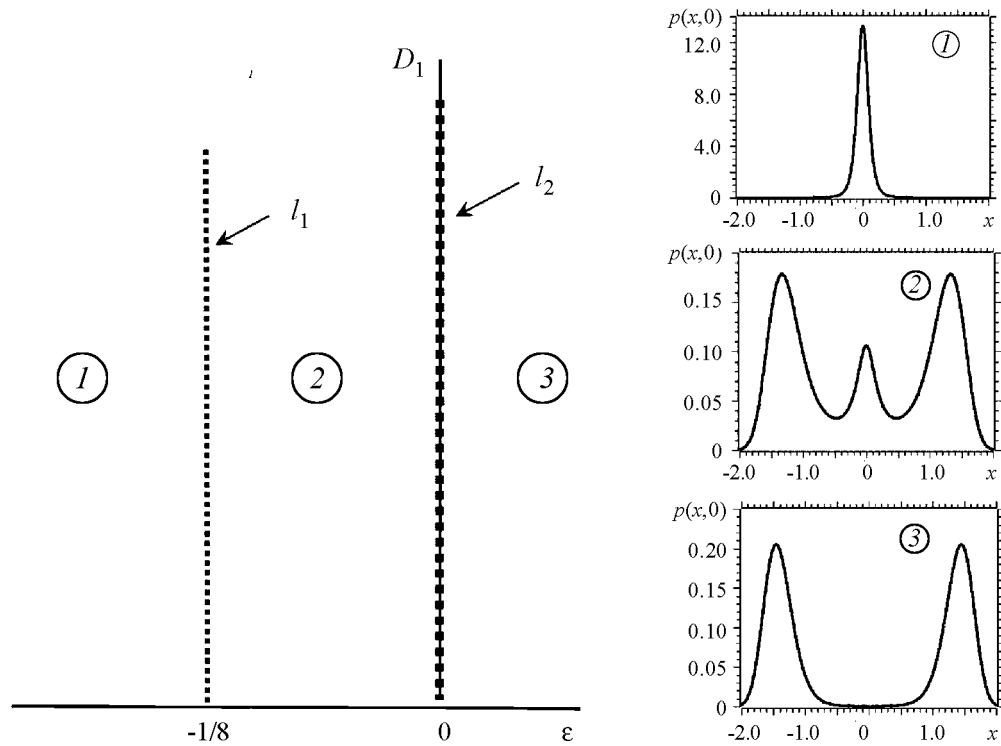


Рис. 2. Бифуркационная диаграмма генератора с жестким возбуждением на плоскости параметров ϵ , D_1 в присутствии аддитивного гауссова белого шума с интенсивностью $D_2 = 0.001$. Диаграмма получена аналитически в рамках квазигармонического приближения. Обозначения соответствуют рис.1. Типичный вид функции $p(x, y = 0)$ в различных областях представлен на диаграммах справа

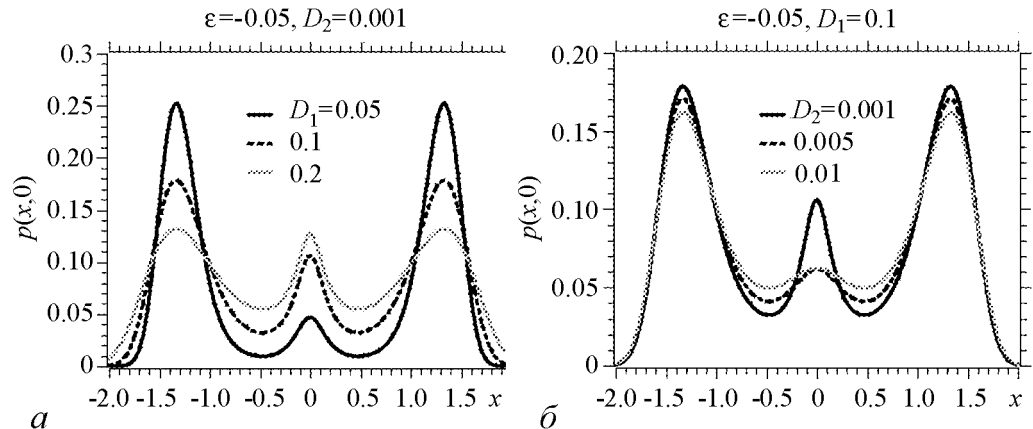


Рис. 3. Эволюция распределения в области бистабильности: а – с ростом интенсивности параметрического шума; б – с ростом интенсивности аддитивного шума

3. Численное исследование генератора и сравнение результатов

В силу ограничений квазигармонического анализа и приближенного характера найденных теоретических выражений для плотности вероятности, полученная картина стохастических бифуркаций может не вполне соответствовать реальности. Для установления степени соответствия и уточнения истинной картины бифуркаций требуется провести численное исследование генератора с жестким возбуждением в присутствии источников шума.

Модель (1) может быть представлена в виде следующей системы СДУ Стратоновича:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= (\varepsilon + x^2 - x^4)y - [\omega_0^2 + \sqrt{2D_1}n_1(t)]x + \sqrt{2D_2}n_2(t).\end{aligned}\quad (25)$$

Соответственно модель (2) можно переписать в виде

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= (\varepsilon + \sqrt{2D_1}n_1(t) + x^2 - x^4)y - \omega_0^2x + \sqrt{2D_2}n_2(t).\end{aligned}\quad (26)$$

Для интегрирования стохастических уравнений использовался модифицированный метод Эйлера [32]. Поясним разностную схему на примере следующего стохастического уравнения первого порядка:

$$\dot{x} = f(x, t) + g(x, t)\sqrt{2D_1}n_1(t) + \sqrt{2D_2}n_2(t),$$

где $f(x, t)$ и $g(x, t)$ – детерминированные непрерывные функции своих аргументов; $n_1(t)$ и $n_2(t)$ – независимые нормированные источники гауссова белого шума; D_1 и D_2 – константы, задающие интенсивности шума. Если данное СДУ является уравнением Стратоновича, то разностная схема имеет вид:

$$\begin{aligned}x(t+h) &= x + \frac{1}{2}(\Delta x + \Delta x'), \\ \Delta x &= f(x, t)h + g(x, t)\sqrt{2D_1h}\eta_1 + \sqrt{2D_2h}\eta_2, \\ \Delta x' &= f(x + \Delta x, t+h)h + g(x + \Delta x, t+h)\sqrt{2D_1h}\eta_1 + \sqrt{2D_2h}\eta_2,\end{aligned}\quad (27)$$

где x – значение переменной в момент времени t ; h – шаг интегрирования; η_1 и η_2 – некоррелированные величины, создаваемые генератором некоррелированных случайных чисел со стандартным гауссовым распределением. В [32] доказана сходимость данной разностной схемы со скоростью h^2 . При расчетах выбирался малый шаг интегрирования $h = 0.001$, что обеспечивало достаточную точность интегрирования.

Численно исследовалась устойчивость точки равновесия систем (25) и (26) в начале координат при $D_2 = 0$. Для этого рассчитывался старший ляпуновский показатель траектории $x = 0$, $y = 0$. Полученные результаты полностью соответствуют условию D-бифуркации, найденному при квазигармоническом анализе, что свидетельствует о корректности метода интегрирования.

Для дополнительной проверки надежности численной схемы исследовалось первое уравнение укороченной системы (17), описывающее мгновенную амплитуду стохастических колебаний. По данным интегрирования в установившемся режиме и с учетом соотношения (19) строилась стационарная плотность вероятности $p(x, y = 0)$. Результаты сравнения полученного таким образом распределения с расчетом по формуле (20) для двух областей бифуркационной диаграммы (области 2 и 3 на рис. 2) приведены на рис. 4. Можно видеть, что в области 2 наблюдаются лишь незначительные расхождения теории и численного расчета в окрестности нуля координат, а в области 3 соответствие является практически идеальным. Данные результаты свидетельствуют о двух важных вещах: вывод формулы (20) на основе СДУ (17) проведен корректно; метод численного интегрирования СДУ Стратоновича при выбранном шаге интегрирования ($h \leq 0.001$) является достаточно точным.

Теперь обратимся к исходным уравнениям генератора (1) и (2). По массиву данных, получаемому в результате численного интегрирования строилось распределение $p(x, y)$. Как и раньше для удобства представления используем сечение двумерной поверхности $p(x, y = 0)$. На рис. 5 представлены результаты, полученные для генератора с шумовой модуляцией квадрата частоты (система (1)) и параметра ε (система (2)) в двух режимах, которые сравниваются с расчетом по формуле (20). СДУ (1) дают результаты качественно соответствующие теоретическим (рис. 5, а, б). Заметные количественные расхождения наблюдаются только в области устойчивого предельного цикла. В то же время распределения, полученные для СДУ (2), выглядят совсем иначе. Они очень сильно отличаются от теоретических распределений и распределений, построенных численно для (1). Распределение, полученное для области 3 теоретической диаграммы (см. рис. 2), кроме максимума в точках устойчивого цикла (два боковых горба на графике функции $p(x, 0)$), имеет максимум в начале координат, и, таким образом, должно соответствовать области 2.

Из укороченных уравнений (17) следует независимость амплитуды от фазы Φ и аксиальная симметрия распределения: любое сечение поверхности $p(x, y)$ вертикальной плоскостью, проходящей через начало координат будет выглядеть одинаково. В исходных СДУ (1) и (2) такая симметрия нарушается: сечения вертикальными плоскостями, сделанные в разных направлениях могут сильно различаться, то есть поведение функции $p(x, y)$ будет зависеть от направления, задаваемого углом поворота секущей плоскости. Качественные различия в поведении функции $p(x, y)$ при

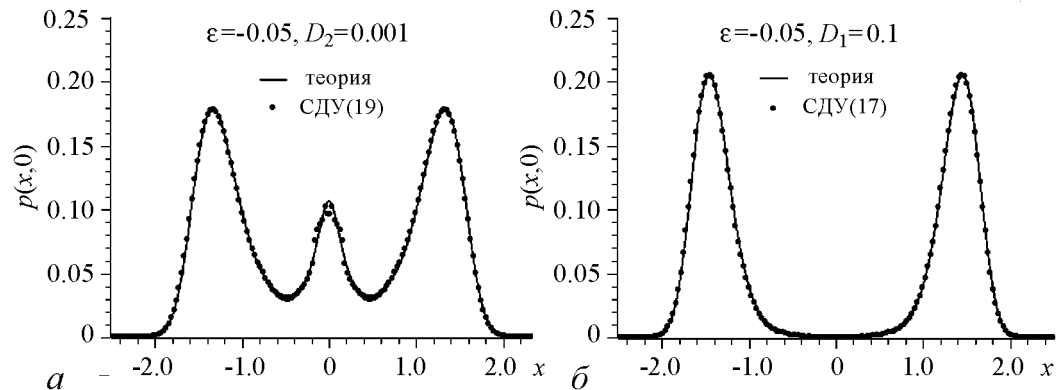


Рис. 4. Сравнение распределения $p(x, y)$, построенного с использованием первого уравнения системы (17), и теоретического распределения (20) при $D_1 = 0.1$, $D_2 = 0.001$ и двух значениях ε (соответствующих областям 2 и 3 на рис. 2): а – -0.05 ; б – 0.03

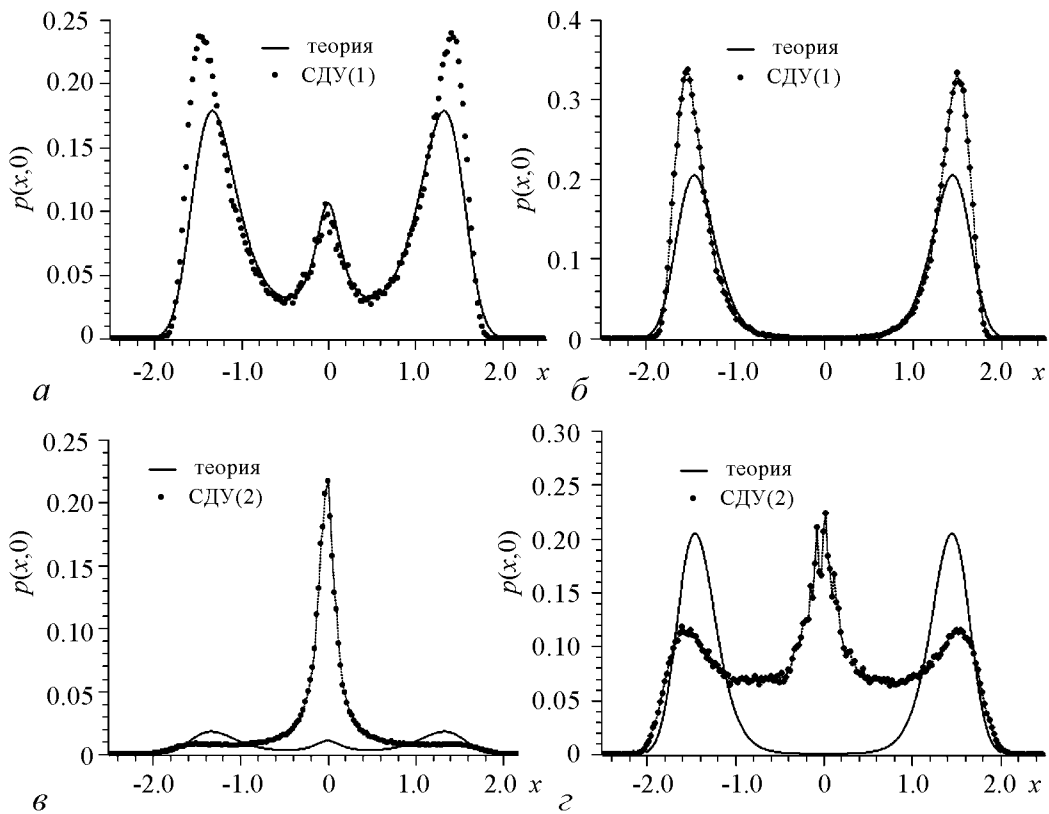


Рис. 5. Сравнение с теорией распределений в областях 2 и 3 (см. рис. 2), построенных численно для СДУ (1) и (2): а – СДУ (1), $\varepsilon = -0.05$; б – СДУ (1), $\varepsilon = 0.03$; в – СДУ (2), $\varepsilon = -0.05$; г – СДУ (2), $\varepsilon = 0.03$. Значения интенсивностей шума: $D_1 = 0.1$, $D_2 = 0.001$

различных углах поворота определяют существование бифуркационного интервала [12, 19, 21]. Грубо говоря, это означает, что Р-бифуркация не происходит одновременно по всем направлениям (углам поворота), а возникает сначала для некоторых направлений и постепенно распространяется на все. В качестве бифуркационного значения параметра в этом случае берется конечная точка бифуркационного интервала. Таким образом, чтобы получить полную картину перестройки распределения, необходимо рассмотреть двумерные поверхности $p(x, y)$. Соответствующие графики, построенные для (1) и (2) при одних и тех же значениях параметров $\varepsilon = 0.03$, $D_1 = 0.1$ и $D_2 = 0.001$, приведены на рис. 6. На рис. 6, а, иллюстрирующем вероятностное распределение в системе (1), виден замкнутый со всех сторон кратер с углублением в центре (в начале координат). Стенка кратера соответствует устойчивому предельному циклу детерминированной системы. В начале координат имеется минимум распределения, соответствующий неустойчивой точке равновесия. Плотность вероятности на цикле распределена неравномерно, однако, везде в точках цикла $p(x, y)$ имеет локальный максимум. Данная форма распределения соответствует области 3. Поверхность $p(x, y)$, построенная для (2) и приведенная на рис. 6, б, существенно отличается от предыдущей. Кратер не является замкнутым. Следовательно, нельзя говорить о стохастическом устойчивом предельном цикле. В начале координат имеется локальный максимум, соответствующий устойчивому равновесию, однако, канавка на дне кратера, окружающая максимум, не замкнута со всех сторон. Эта канавка соответствует неустойчивому предельному циклу. Таким образом, распределение, полученное для системы (2), отвечает незавершенному бифур-

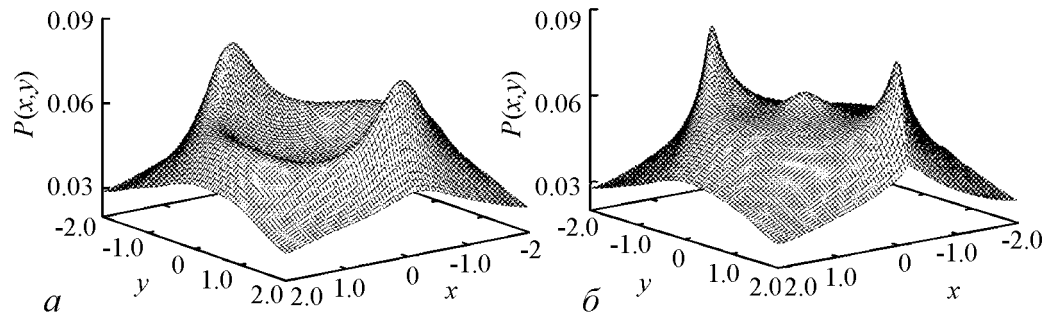


Рис. 6. Поверхности $p(x, y)$, построенные для (1) (а) и (2) (б) при $\varepsilon = 0.03$, $D_1 = 0.1$, $D_2 = 0.001$

кационному переходу, то есть точке в пределах бифуркационного интервала. Причем незавершенной является не только субкритическая бифуркация Андронова–Хопфа, приводящая к исчезновению канавки, но и стохастическая касательная бифуркация, в результате которой образуется кратер и канавка.

Таким образом, имеется значительное различие в бифуркационных явлениях в генераторе при случайной модуляции двух различных параметров: параметра возбуждения и квадрата частоты. Однако метод усреднения, приводящий в обоих случаях к одной и той же амплитудно-фазовой модели, не позволяет обнаружить этого различия. Эта модель демонстрирует качественное расхождение наблюдаемых явлений по сравнению с полными СДУ (2). Расхождения в поведении укороченной модели с системой (1) менее заметны. Представленные результаты расчетов плотности вероятности $p(x, y)$ относятся к случаю сравнительно сильного шумового воздействия. Однако, как показали численные эксперименты, существенные отличия от теории для модели (2) могут наблюдаться и при значительно более слабом параметрическом шуме.

Рассмотрим, как ведет себя во времени мгновенная амплитуда колебаний $a(t) = \sqrt{x^2(t) + y^2(t)}$ для моделей (1) и (2) в режимах, соответствующих рис. 6. Как видно из данных, приведенных на рис. 7, ни для модели (1), ни для модели (2) мгновенная амплитуда, строго говоря, не является медленно меняющейся функцией по сравнению с периодом $T_0 = 2\pi/\omega_0 = 2\pi$. При этом именно для модели (2) значения амплитуды имеют больший разброс и претерпевают более резкие изменения на малых интервалах времен (рис. 7, б).

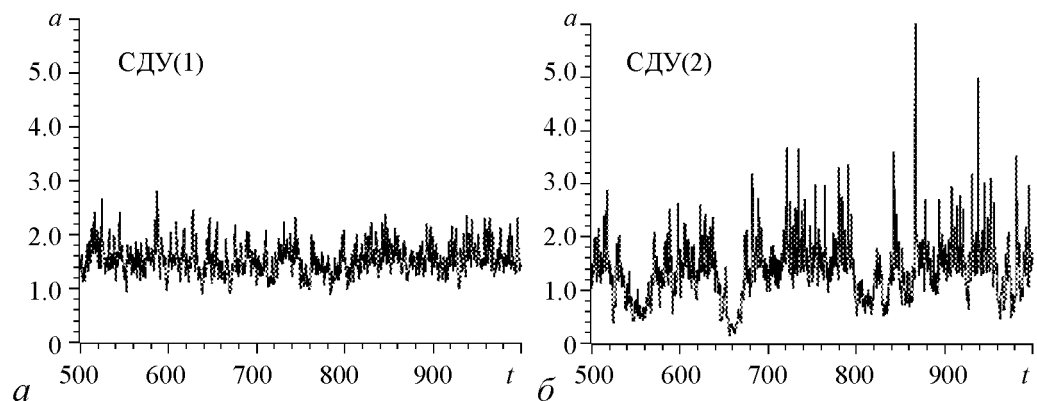


Рис. 7. Зависимость мгновенной амплитуды от времени для СДУ (1) (а) и (2) (б) при $\varepsilon = 0.03$, $D_1 = 0.1$, $D_2 = 0.001$

Выводы

В рамках квазигармонического приближения с использованием метода усреднения был осуществлен полный теоретический анализ стохастических бифуркаций в генераторе ван дер Поля с жестким возбуждением, содержащем источники параметрического и аддитивного шума. В отсутствие аддитивного шума он выявил наличие динамической бифуркации, связанной с потерей устойчивости точкой равновесия в нуле и возникновению стохастических колебаний, а также трех феноменологических бифуркаций, состоящих в перестройке вероятностного распределения $p(x, y)$. Бифуркация потери устойчивости точкой равновесия и две Р-бифуркации подобны аналогичным бифуркациям, наблюдаемым в укороченной модели генератора ван дер Поля с мягким возбуждением [20]. В обоих случаях гладкий минимум в начале координат возникает при $\varepsilon = D_1/4$, где D_1 – интенсивность параметрического шума. Различие состоит в том, что в случае суперкритической бифуркации при увеличении параметра ε в точке $\varepsilon = 0$ возникает максимум распределения в точках устойчивого предельного цикла, а при субкритической бифуркации – исчезает минимум в точках неустойчивого цикла. Установленные бифуркационные значения параметра ε , соответствующие стохастической касательной бифуркации и стохастической бифуркации Андронова–Хопфа, совпадают с бифуркационными значениями для детерминированной системы и не зависят от интенсивности шума, то есть шум в квазигармоническом приближении не смещает бифуркаций. Наиболее существенным следствием воздействия параметрического шума является отсутствие автоколебаний в области бистабильности при $\varepsilon < -D_1/2$. В этой области сохраняется устойчивая точка равновесия в начале координат и сколь угодно слабый параметрический шум, «выталкивая» траекторию с предельного цикла, рано или поздно приводит ее в точку равновесия. Однако на конечных интервалах времени могут наблюдаться метастабильные стохастические колебания с вероятностным распределением, характерным для зашумленного предельного цикла.

Добавление в систему аддитивного шума упрощает картину бифуркаций, приводя к исчезновению точки равновесия и устраняя негладкость плотности вероятности в начале координат. Остаются только две стохастические бифуркации, соответствующие касательной бифуркации и бифуркации Андронова–Хопфа детерминированной системы. Параметрический шум не приводит к каким-то качественным изменениям и, с точки зрения наблюдаемых бифуркаций, система ведет себя так же, как если бы на нее воздействовал только аддитивный шум. Полученные для рассматриваемой системы результаты отличаются от результатов, изложенных в [26]. В [26] для осциллятора Хопфа с субкритической бифуркацией рождения цикла было показано, что стохастическая бифуркация носит запаздывающий характер, то есть сдвигается в сторону увеличения управляющего параметра. Аналогичное поведение отмечалось в [13, 19, 21, 24]. Отсутствие зависимости бифуркационных перестроек от интенсивности шума при квазигармоническом анализе систем (1) и (2), также как совпадение результатов для двух моделей шума, связано с приближенным характером усредненных уравнений для амплитуды и фазы.

Важным результатом работы является установление определенного несоответствия квазигармонической теории с данными численных экспериментов. Если параметрический шум представляет собой случайную модуляцию параметра ω_0^2 , то, несмотря на количественные расхождения, при исследованных значениях интенсивностей шума можно говорить о качественном соответствии результатов численного моделирования и квазигармонической теории. При шумовой модуляции управ-

ляющего параметра ε между теорией и численными расчетами не обнаруживается даже качественного соответствия. При этом установлено наличие бифуркационного интервала, для которого характерно отсутствие замкнутого кратера в вероятностном распределении $p(x, y)$ и наличие трех локальных максимумов плотности вероятности.

Работа выполнена при поддержке Министерства образования и науки РФ, гос. контракт № 14.740.11.0074.

Библиографический список

1. *Стратонович Р.Л.* Избранные вопросы теории флуктуаций в радиотехнике. М.: Сов. радио, 1961.
2. *Малахов А.Н.* Флуктуации в автоколебательных системах. М.: Наука, 1968.
3. *Вентцель А.Д., Фрейдлин М.И.* Флуктуации в динамических системах под действием малых случайных возмущений. М.: Наука, 1979.
4. *Гардинер К.В.* Стохастические методы в естественных науках. М.: Мир, 1986.
5. *Risken Z.* The Fokker-Planck Equation. Berlin: Springer, 1989.
6. *Ван Кампен Н.Г.* Стохастические процессы в физике и химии. М.: Высшая школа, 1990.
7. *Кляцкин В.И.* Статистическое описание динамических систем с флуктуирующими параметрами. М.: Наука, 1975.
8. *Хорстнемке В., Лефевр Р.* Индуцированные шумом переходы. М.: Мир, 1987.
9. *Arnold L.* Random dynamical systems. Berlin, Spriger, 2003.
10. *Kabashima S., Kawakubo T.* Observation of a noise induced phase transition in a parametric oscillator // Phys. Lett. A. 1979. Vol. 70. P. 375.
11. *Wiesenfeld K.* Noisy precursors of nonlinear instabilities // J. Stat. Phys. 1985. Vol. 58. P. 1071.
12. *Ebeling W., Herzel H., Richert W., Schimansky-Geier L.* Influence of noise on Duffing–van der Pol oscillator // Zeitschrift f. Angew. Math. U. Mechanik. 1986. Vol. 66. P. 141.
13. *Franzoni L., Mannella R., McClintock P., Moss F.* Postponement of Hopf bifurcations by multiplicative colored noise // Phys. Rev. F. 1987. Vol. 36. P. 834.
14. *Namachshivaya N.S.* Stochastic bifurcation // Apl. Math. and Computation. 1990. Vol. 38. P. 101.
15. *Schenk-Yoppé K.R.* Bifurcation scenarios of the noisy Duffing–van der Pol oscillator // Nonlinear Dynamics. 1996. Vol. 11. P. 255.
16. *Landa P.S., Zaikin A.A.* Noise-induced phase transitions in a pendulum with a randomly vibrating suspension axis. // Phys. Rev. E. 1996. Vol. 54, № 4. P. 3535.
17. *Crauel H., Flandol F.* Additive noise destroys a pitchfork bifurcation // Journal of Dynamics and Differential Equations. 1998. Vol. 10. P. 259.
18. *Вадивасова Т.Е., Анищенко В.С.* Стохастические бифуркации // Изв. Вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2009. Т. 17, № 5. С. 3.
19. *Lefever R., Turner J.* Sensitivity of a Hopf bifurcation to multiplicative colored noise // Phys. Rev. Lett. 1986. Vol. 56. P. 1631.
20. *Arnold L., Sri Namachshivaya N., Schenk-Yoppé K.R.* Toward an understanding of

parameter and a noise intensity are changed. A comparison of the theoretical results, obtained in the quasi-harmonic approach with the results of numerical solutions of the oscillator stochastic equations is fulfilled.

Keywords: Noise, fluctuations, self-sustained oscillator, stochastic bifurcations, subcritical Andronov–Hopf bifurcation.



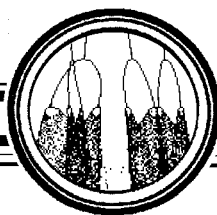
Вадивасова Татьяна Евгеньевна – родилась в 1958 году. Окончила физический факультет Саратовского государственного университета (1981), доктор физико-математических наук. В настоящее время – профессор кафедры радиофизики и нелинейной динамики физического факультета СГУ. Научные интересы сосредоточены в области нелинейной динамики: эффекты синхронизации в ансамблях хаотических осцилляторов, явление фазовой мультистабильности взаимодействующих хаотических систем, свойства различных типов нерегулярных аттракторов, статистические характеристики динамического хаоса, роль флуктуаций в нелинейных системах и др. Автор более 60 публикаций в отечественной и зарубежной печати, включая 3 монографии.

410026 Саратов, Астраханская, 83
Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского
E-mail: VadivasovaTE@yandex.ru



Маляев Владимир Сергеевич – родился в ноябре 1980 года в Саратове. Окончил Саратовский государственный университет по специальности радиофизика (2002) и аспирантуру. Является заведующим учебной лабораторией радиофизики (с 2003) физического факультета СГУ. Основные научные интересы – стохастические процессы. Автор нескольких научных публикаций.

410012 Саратов, Астраханская, 83
Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского
E-mail: val@chaos.ssu.runnet.ru



**ЭФФЕКТ «ГИБЕЛИ КОЛЕБАНИЙ»
И КВАЗИПЕРИОДИЧЕСКИЕ БИФУРКАЦИИ
В НИЗКОРАЗМЕРНОМ АНСАМБЛЕ ОСЦИЛЛЯТОРОВ ВАН ДЕР ПОЛЯ**

А. П. Кузнецов, Л. В. Тюрюкина

Рассматривается динамика четырех диссипативно связанных осциллятора ван дер Поля. Представлена ляпуновская карта на плоскости параметров и обсуждается ее устройство. Обнаружен эффект повышения порога режима «гибели колебаний» и возможность полной и частичной широкополосной синхронизации. Обсуждаются бифуркации торов в системе при большой частотной расстройке осцилляторов, в частности, седло-узловая квазипериодическая бифуркация и квазипериодическая бифуркация Хопфа.

Ключевые слова: Синхронизация, эффект гибели колебаний, квазипериодические бифуркации.

Введение

Синхронизация ансамблей осцилляторов является важной проблемой, представляющей как общетеоретический интерес, так и интерес с точки зрения приложений в радиофизике, лазерной физике, биофизики и т.д. [1–6]. Картина возможных типов режимов взаимодействующих осцилляторов достаточно хорошо изучена для малого их числа, или, наоборот, для больших массивов осцилляторов. Здесь мы обратимся к случаю ансамбля, содержащего четыре осциллятора ван дер Поля, и обсудим основные характерные типы режимов. Оказывается, что увеличение числа осцилляторов до четырех приводит к ряду новых моментов, которые и являются предметом настоящей работы. Будем рассматривать случай диссипативной связи, величина которой определяется относительной скоростью осцилляторов. Будем обсуждать традиционную для таких задач плоскость параметров частотная расстройка – величина связи осцилляторов. Как известно, для случая двух осцилляторов на этой плоскости выделяются следующие характерные области [1–6]. Во-первых, это основная область синхронизации с соотношением захваченных частот 1 : 1. Далее, область квазипериодических режимов со встроенной системой языков синхронизации с другими рациональными соотношениями частот. Еще одна характерная область – об-

ласть «гибели колебаний» (*oscillator death*). Она располагается при достаточно больших частотных расстройках при выполнении условия на величину связи μ и параметр отрицательного трения $\lambda < \mu$ [1]. Интересный режим наблюдается для неидентичных по параметрам отрицательного трения осцилляторов, когда $\lambda_1 \neq \lambda_2$ [7–9]. В этом случае между областями гибели колебаний и квазипериодических режимов возникает область периодических режимов $\lambda_1 > \mu > \lambda_2$, простирающаяся в сторону больших частотных расстроек. Причина ее появления состоит в том, что при выполнении условий $\lambda_1 > \mu > \lambda_2$ первый осциллятор доминирует над вторым, который подавлен диссипативной связью. Такие режимы в [8,9] названы *широкополосной синхронизацией*.

Для трех идентичных осцилляторов в дополнение к указанной картине возникает возможность двух типов квазипериодических колебаний, отвечающих двум и трем несоизмеримым частотам [1,2,10]. На плоскости параметров они очень просто разделены при большом рассинхронизме осцилляторов: трехчастотной квазипериодичности отвечают меньшие значения связи. При малом рассинхронизме наблюдаются резонансы, и возникает картина языков двухчастотных торов, погруженных в область трехмерных торов [10,11]. Полная широкополосная синхронизация для идентичных по параметру возбуждения таких осцилляторов не наблюдается, она возможна только, если есть отличия в параметрах отрицательного трения. Однако в области $\lambda/2 < \mu < \lambda$ возникает широкополосный квазипериодический двухчастотный режим (подробности см. в [11] и ниже).

В настоящей работе, как отмечалось, обсуждается случай четырех осцилляторов. Будем использовать метод ляпуновских карт [10,11], в рамках которого выбирается точка на плоскости параметров и вычисляется спектр ляпуновских показателей системы L_i . В зависимости от знаков и числа нулевых старших показателей¹, определяется тип режима (аттрактора) в системе.

- P – предельный цикл, $L_1 = 0, L_2 < 0, L_3 < 0, L_4 < 0, L_5 < 0$,
- T_2 – двухчастотный тор, $L_1 = L_2 = 0, L_3 < 0, L_4 < 0, L_5 < 0$,
- T_3 – трехчастотный тор, $L_1 = L_2 = L_3 = 0, L_4 < 0, L_5 < 0$,
- T_4 – четырехчастотный тор, $L_1 = L_2 = L_3 = L_4 = 0, L_5 < 0$,
- C – хаос, $L_1 > 0, L_2 < 0, L_3 < 0, L_4 < 0, L_5 < 0$.

Выбранная точка на плоскости параметров окрашивается в определенный цвет, в соответствии с типом режима. Затем выполняется сканирование всей плоскости. В результате получается двухпараметрический «портрет» различных колебательных режимов.

Следует отметить, что наличие торов разной размерности приводит к возможности *квазипериодических бифуркаций*. Мы обсудим основные типы таких бифуркаций в анализируемой системе. К сожалению, численные алгоритмы поиска квазипериодических бифуркаций очень трудоемки и находятся, во многом, в стадии разработки [12]. Однако поведение ляпуновских показателей в ряде случаев позволяет идентифицировать тип бифуркации, что мы и используем.

¹Заметим, что остальные показатели всегда остаются отрицательными и не сказываются на картине наблюдаемых режимов. Пятый показатель тоже всегда отрицательный, но он необходим для идентификации типа квазипериодической бифуркации, см. далее рис. 4 и его обсуждение.

1. Случай трех осцилляторов

Для дальнейшего понадобятся более детальные сведения о случае трех диссипативно связанных осцилляторов [11]. Цепочка таких осцилляторов описывается уравнениями

$$\begin{aligned} \ddot{x} - (\lambda - x^2)\dot{x} + x + \mu(\dot{x} - \dot{y}) &= 0, \\ \ddot{y} - (\lambda - y^2)\dot{y} + (1 + \Delta_1)y + \mu(\dot{y} - \dot{x}) + \mu(\dot{y} - \dot{z}) &= 0, \\ \ddot{z} - (\lambda - z^2)\dot{z} + (1 + \Delta_2)z + \mu(\dot{z} - \dot{y}) &= 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь λ – параметр возбуждения автономных осцилляторов, характеризующий отрицательное трение; Δ_1 – частотная расстройка второго осциллятора относительно первого; Δ_2 – третьего относительно первого; μ – коэффициент диссипативной связи.

Карта ляпуновских показателей системы (1) на плоскости (Δ_1, μ) для $\lambda = 0.1$ и $\Delta_2 = 0.05$ показана на рис. 1. На ней располагается область полной синхронизации трех осцилляторов P , а также области двухчастотных торов T_2 и трехчастотных торов T_3 . Хаотические режимы при данном наборе параметров не выявляются. Еще одна характерная область показана серым цветом и обозначена OD. Она отвечает режиму «гибели колебаний». Такой эффект имеет место при условии $\mu > \lambda$, когда трение между осцилляторами превышает отрицательное трение, свойственное автоколебательным элементам. Для удобства восприятия значение $\mu = \lambda$ отмечено стрелкой на правой границе карты. Можно видеть, что оно является асимптотической границей области гибели колебаний при возрастании частотной расстройки Δ_1 .

При уменьшении параметра связи в области $\lambda/2 < \mu < \lambda$ появляется широкая по частоте полоса области двухчастотной квазипериодичности, обозначенная на рис. 1 PBS. Этот режим в [11] назван *частичной широкополосной синхронизацией*. Его природа состоит в том, что связь по-разному возмущает осцилляторы в цепочке, даже если их параметры возбуждения одинаковы. Действительно, центральный осциллятор испытывает трение со стороны двух соседей, и эффективный коэффициент трения для него повышается в два раза. Поэтому при условии $\lambda > \mu > \lambda/2$ второй осциллятор подавлен соседями, которые все еще достаточно возбуждены [11].

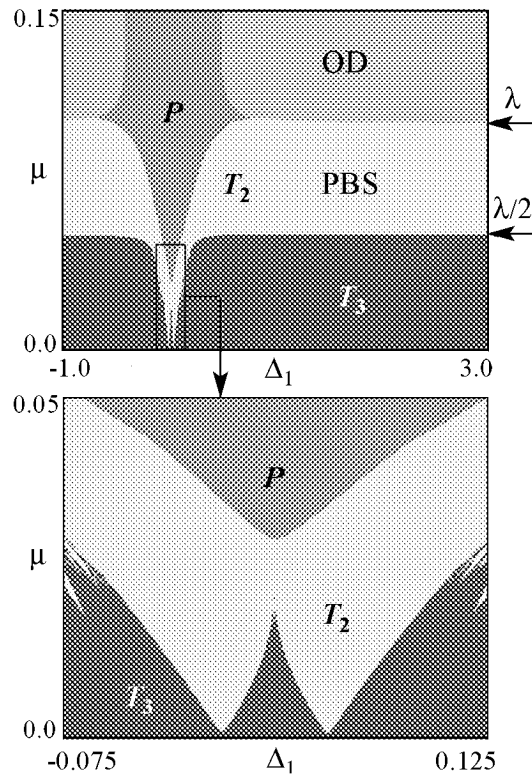


Рис. 1. Ляпуновская карта системы трех связанных осцилляторов ван дер Поля (1), OD – область гибели колебаний, PBS – область частичной широкополосной синхронизации. Значения параметров $\lambda = 0.1$, $\Delta_2 = 0.05$

2. Случай четырех осцилляторов. Эффект повышения порога области гибели колебаний

Перейдем теперь к системе из четырех диссипативно связанных осцилляторов ван дер Поля

$$\begin{aligned}
 \ddot{x} - (\lambda - x^2)\dot{x} + x + \mu(\dot{x} - \dot{y}) &= 0, \\
 \ddot{y} - (\lambda - y^2)\dot{y} + (1 + \Delta_1)y + \mu(\dot{y} - \dot{x}) + \mu(\dot{y} - \dot{z}) &= 0, \\
 \ddot{z} - (\lambda - z^2)\dot{z} + (1 + \Delta_2)z + \mu(\dot{z} - \dot{y}) + \mu(\dot{z} - \dot{w}) &= 0, \\
 \ddot{w} - (\lambda - w^2)\dot{w} + (1 + \Delta_3)w + \mu(\dot{w} - \dot{z}) &= 0.
 \end{aligned}
 \tag{2}$$

Карта ляпуновских показателей для $\lambda = 0.1$ на плоскости (Δ_1, μ) в разных масштабах показана на рис. 2. Остальные параметры выбраны так, чтобы частоты первого, третьего и четвертого осцилляторов были достаточно близки: $\Delta_2 = 0.03$, $\Delta_3 = 0.1$. Частота же второго осциллятора Δ_1 является варьируемым параметром.

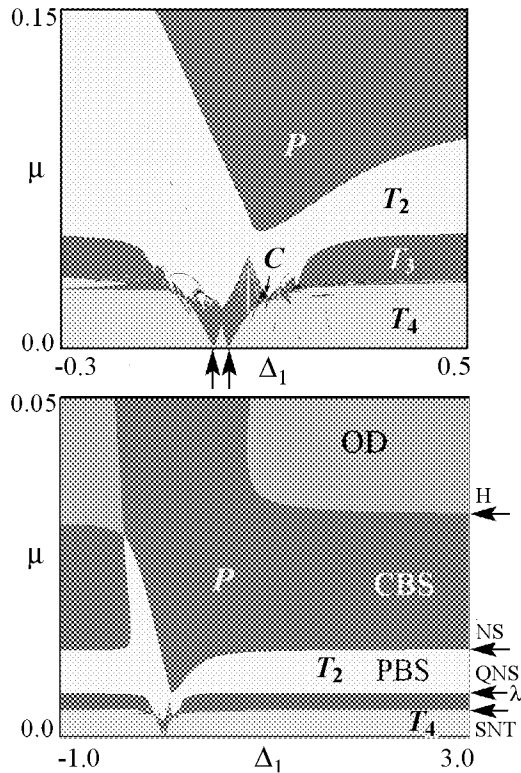


Рис. 2. Карта динамических режимов четырех диссипативно связанных осцилляторов ван дер Поля (2) в разных масштабах, $\lambda = 0.1$, $\Delta_2 = 0.03$, $\Delta_3 = 0.1$. Вертикальными стрелками на рис. *a* обозначены значения резонансных условий $\Delta_1 = 0$ и $\Delta_1 = \Delta_2$. Горизонтальные стрелки на рис. *б* отвечают различным бифуркациям (см. пояснения в тексте)

При небольших уровнях связи на рис. 2, *a* в окрестности нулевой расстройки Δ_1 можно видеть проявление резонансных эффектов для торов разной размерности. Так, наблюдаются два характерных языка трехмерных торов, погруженных в область четырехмерных. Эти языки имеют основания на оси абсцисс, которые отвечают двум резонансным условиям $\Delta_1 = 0$ и $\Delta_1 = \Delta_2$. Физически, согласно (1), они соответствуют резонансам, когда частота второго осциллятора совпадает с частотой первого ($\Delta_1 = 0$) или с частотой третьего ($\Delta_1 = \Delta_2$). Резонансные значения отмечены стрелочками на рис. 2, *a*. В свою очередь, области двухчастотных торов также имеют вид языков, однако, все они имеют порог по величине связи. Основания некоторых языков разрушены с возникновением областей хаоса *C*. Отметим, что в целом картина на рис. 2, *a* при небольшой связи качественно близка к результатам фазового приближения [10].

Обратимся теперь к рис. 2, *б*, отвечающему более широкому диапазонам изменения параметров. Теперь в «поле

зрения» попадает область «гибели колебаний» OD. Однако нижняя граница этой области при большой частотной расстройке Δ_1 не стремится к значению $\mu = \lambda$, как это было в случае двух и трех осцилляторов, а довольно значительно превышает этот порог. Таким образом, для четырех осцилляторов наблюдается *эффект повышения порога гибели колебаний*. Из рис. 2, б можно видеть, что это превышение значительное: граница области гибели колебаний (точка H на рисунке) отвечает примерно $\mu \approx 2.6\lambda = 0.26$.

Обсудим этот эффект подробнее и выясним, почему он проявляется именно в системе из четырех осцилляторов. Причина состоит в том, что в случае трех осцилляторов увеличение частоты центрального Δ_1 приводит к существенной рассинхронизации, как пары первый–второй, так и пары второй–третий осцилляторы. В результате граница области гибели колебаний в асимптотике $\Delta_1 \rightarrow \infty$ определяется очень просто, как условие компенсации отрицательного трения диссипацией, то есть $\mu = \lambda$. В случае четырех осцилляторов ситуация усложняется. Действительно, третий и четвертый осциллятор при фиксированных собственных частотах могут эффективно взаимодействовать в режимах, близких к синхронным. В результате пара этих осцилляторов образует, в определенном смысле, более существенно возбужденную автоколебательную подсистему. А значит пороговое значение уровня связи, обеспечивающие эффект гибели колебаний в цепочке в целом, может повышаться.

Проиллюстрируем сказанное некоторыми оценками. Запишем укороченные уравнения (уравнения Ландау–Стюарта)²:

$$\begin{aligned} 2\dot{a} &= \lambda a - |a|^2 a - \mu(a - b), \\ 2\dot{b} &= \lambda b - |b|^2 b + i\Delta_1 b - \mu(2b - a - c), \\ 2\dot{c} &= \lambda c - |c|^2 c + i\Delta_2 c - \mu(2c - b - d). \\ 2\dot{d} &= \lambda d - |d|^2 d + i\Delta_3 d - \mu(d - c). \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь a, b, c, d – медленные комплексные амплитуды. Для определения области гибели колебаний, как известно, достаточно линейного приближения. Кроме того, полагаем $\Delta_1 \rightarrow \infty$, а собственные частоты первого, третьего и четвертого осцилляторов малыми (по сравнению с Δ_1). Для оценок положим, что они просто совпадают, и $\Delta_2 = \Delta_3 = 0$. Тогда

$$\begin{aligned} 2\dot{a} &= \lambda a - \mu(a - b), \\ 2\dot{b} &= \lambda b + i\Delta_1 b - \mu(2b - a - c), \\ 2\dot{c} &= \lambda c - \mu(2c - b - d). \\ 2\dot{d} &= \lambda d - \mu(d - c). \end{aligned} \quad (4)$$

²Их вывод является стандартным для метода медленно меняющихся амплитуд [1,2] и поэтому здесь не приводится.

Ищем решение этой линейной системы в виде экспоненциальной подстановки $\exp(at/2)$. Тогда получаем

$$\begin{aligned}(\alpha - \lambda + \mu)a &= \mu b, \\(\alpha - \lambda + 2\mu - i\Delta_1)b &= \mu(a + c), \\(\alpha - \lambda + 2\mu)c &= \mu(b + d), \\(\alpha - \lambda + \mu)d &= \mu c.\end{aligned}\tag{5}$$

Условие рассинхронизма второго осциллятора $\Delta_1 \rightarrow \infty$ в соответствии со вторым уравнением (5) требует, чтобы $a/b \rightarrow \infty$, либо $c/b \rightarrow \infty$. Физически это отвечает тому, что либо первый, либо третий осциллятор доминируют над вторым. (Напомним, что переменные a , b , c отвечают комплексным амплитудам соответствующих осцилляторов.)

Оценим первое отношение. Из первого уравнения (5) получаем

$$a/b = \frac{\mu}{\alpha - \lambda + \mu}.\tag{6}$$

Отсюда видим, что $a/b \rightarrow \infty$, если $\alpha = \lambda - \mu$. Условие гашения колебаний определяется отрицательным декрементом затухания $\alpha < 0$, так что получаем $\mu > \lambda$, то есть точно такое условие, как для двух или трех осцилляторов.

Оценим теперь второе отношение, связанное с доминированием третьего осциллятора. Из второго и третьего уравнений (5) получаем

$$c/b = \frac{\mu}{\alpha - \lambda + 2\mu - \frac{\mu^2}{\alpha - \lambda + \mu}}.\tag{7}$$

Условие $c/b \rightarrow \infty$ выполняется при обращении в нуль знаменателя, что приводит к квадратному уравнению относительно декремента затухания α , которое легко решается

$$\alpha = \lambda - \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}\mu.\tag{8}$$

Для возникновения режима гашения колебаний должно быть $\alpha < 0$ для обоих корней, что приводит к условию

$$\mu > \frac{2}{3 - \sqrt{5}}\lambda \approx 2.618 \cdot \lambda.\tag{9}$$

Таким образом, ситуация доминирования третьего осциллятора при условии его эффективного взаимодействия с четвертым значительно повышает порог эффекта гибели колебаний – более чем в два раза.

Заметим, что если $\Delta_2 \neq 0$, $\Delta_3 \neq 0$ можно провести аналогичное рассмотрение, только получаются громоздкие выражения. При этом оценка (9) довольно эффективна и для случая, представленного на рис. 2, б. Действительно, при $\lambda = 0.1$ она дает $\mu \approx 0.26$, что очень близко к асимптотической границе области гибели колебаний на рис. 2, б. Это не удивительно, так как соответствующие частотные параметры малы: $\Delta_2 = 0.03$, $\Delta_3 = 0.1$.

На рис. 3 показаны фазовые портреты всех четырех осцилляторов для разного уровня связи при достаточно большой частотной расстройке второго осциллятора $\Delta_1 = 2.0$. (Обращаем внимание на разные масштабы по осям координат на фазовых портретах различных фрагментов.) Рис. 3, *a* отвечает случаю, когда $\mu < \lambda$, но близко к этому значению. На карте это соответствует области частичной широкополосной синхронизации PBS. Видно, что второй осциллятор, выведенный из условий синхронизации, достаточно сильно подавлен связью. При этом его траектория сильно возмущена квазипериодическим образом по сравнению с автономным случаем. Все остальные осцилляторы возбуждены примерно равноценно. Причем это относится и к третьему осциллятору, испытывающему двойное трение со стороны соседей и для которого порог $\mu = \lambda/2$ для выбранного значения параметра связи превышен.

Рис. 3, *b* относится к области периодических режимов. При этом выбрано значение $\mu = 0.2$, когда заметно превышен соответствующий порог $\mu = \lambda$, отвечающий компенсации диссипативной связью отрицательного трения отдельного осциллятора. Можно видеть, что квазипериодический режим сменился периодическим. Теперь сильно подавлены связью как второй, так и первый осцилляторы. Несмотря на сильную диссипацию $\mu > \lambda$, третий и четвертый осциллятор достаточно сильно возбуждены. Их орбиты примерно одинакового (по порядку) радиуса и не отличаются существенно от случая, приведенного на рис. 3, *a*. Таким образом, действительно возникла заметная синхронизация третьего и четвертого осцилляторов, которая и «затягивает» возникновение режима гибели колебаний.

Описанный механизм приводит также еще к одному эффекту, а именно к возможности *полной широкополосной синхронизации* CBS четырех осцилляторов для случая *идентичных* управляющих параметров λ . Действительно, на рис. 2, *a* можно видеть характерную полосу CBS в диапазоне уровня связи $0.1 < \mu < 0.27$ (между точками *H* и *NS* на карте). В случае трех идентичных осцилляторов такой режим не возникает (ср. рис. 2, *b* и рис. 1). Для его реализации для трех (как и для двух) осцилляторов необходима неидентичность по управляющим параметрам [11].

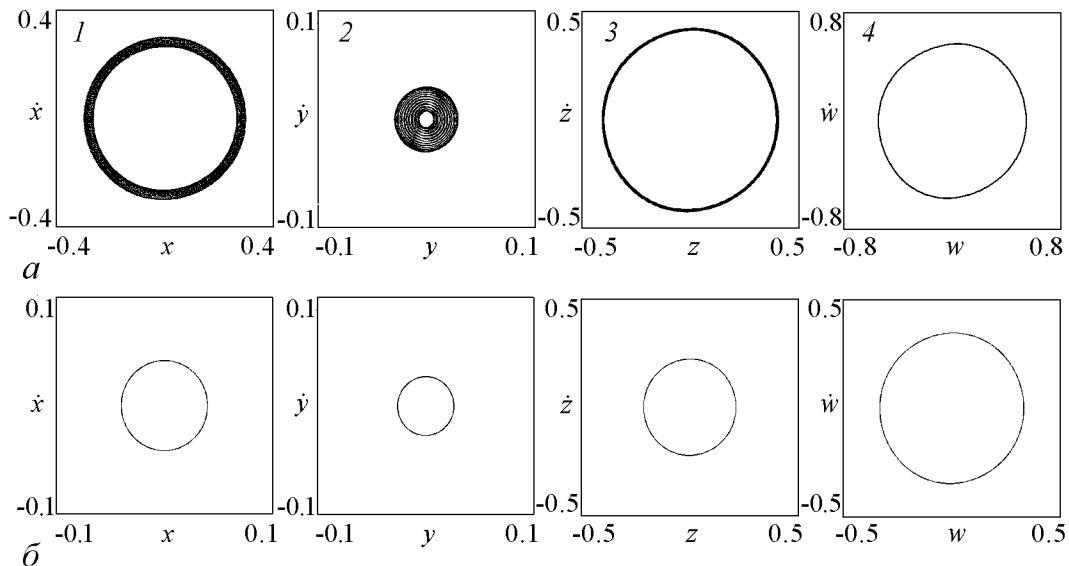


Рис. 3. Фазовые портреты четырех осцилляторов: *a* – режим частичной широкополосной синхронизации, $\mu = 0.08$; *b* – режим полной широкополосной синхронизации, $\mu = 0.2$. Цифры отвечают номеру осциллятора. Значения параметров $\lambda = 0.1$, $\Delta_1 = 2.0$, $\Delta_2 = 0.03$, $\Delta_3 = 0.1$

3. Квазипериодические бифуркации в системе четырех осцилляторов

Продолжим обсуждение рис. 2, б. При больших частотных расстройках Δ_1 с уменьшением параметра связи наблюдается каскад бифуркаций рождения инвариантных торов все более высокой размерности. Обсудим картину бифуркаций, сопровождающих наблюдаемый эффект. Для этого обратимся к графику зависимости пяти старших ляпуновских показателей Λ_i от величины связи (рис. 4). Параметр частоты второго осциллятора выберем достаточно большим ($\Delta_1 = 2.0$), чтобы наблюдалась существенная рассинхронизация этого осциллятора с остальными.

При большой связи реализуется эффект гибели колебаний, и все показатели на рис. 4 отрицательны. В точке $\mu \approx 0.27$ первый показатель обращается в ноль, и происходит бифуркация Андронова–Хопфа H рождения устойчивого (многомерного) предельного цикла.

При дальнейшем уменьшении связи в точке NS происходит бифуркация Неймарка–Сакера, и рождается устойчивый двухчастотный тор. При этом в ноль обращаются уже два показателя: первый и второй.

Затем в точке QNS в ноль обращается и третий показатель Λ_3 . При этом наблюдается характерное поведение: до точки бифуркации третий и четвертый показатели равны друг другу ($\Lambda_3 = \Lambda_4$). За точкой бифуркации показатель Λ_3 обращается в ноль, а четвертый показатель Λ_4 , коснувшись горизонтальной оси, снова уходит в отрицательную область. Это характерная картина квазипериодической бифуркации, приводящей к мягкому возникновению трехчастотного тора из двухчастотного [12]. В [12] такую бифуркацию называют квазипериодической бифуркацией Хопфа (*quasi-periodic Hopf bifurcation*), хотя более логичным было бы говорить о квазипериодической бифуркации Неймарка–Сакера QNS³.

В точке SNT размерность тора вновь повышается. Однако это бифуркация другого типа – теперь четвертый показатель просто обращается в ноль, а пятый показатель все время остается отрицательным. Это означает, что имеет место седло-

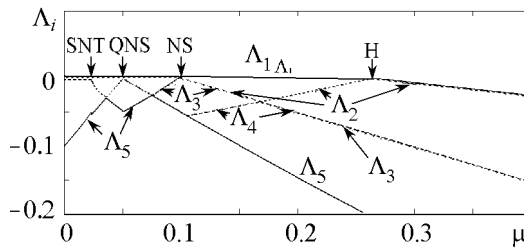


Рис. 4. Графики пяти старших ляпуновских показателей системы четырех связанных осцилляторов ван дер Поля, $\lambda = 0.1$, $\Delta_1 = 2$, $\Delta_2 = 0.03$, $\Delta_3 = 0.1$. Здесь H – точка бифуркации Андронова–Хопфа, NS – точка бифуркации Неймарка–Сакера, QNS – точка квазипериодической бифуркации Неймарка–Сакера двухчастотного тора, SNT – точка седло-узловой бифуркации трехчастотного тора

узловая бифуркация торов [12]: устойчивый трехмерный тор сливается с седловым, исчезает, и возникает четырехмерный устойчивый тор. Отметим, что аналогичная бифуркация реализуется и в фазовом приближении [10]. Остальные бифуркации в фазовой модели невозможны.

Для удобства восприятия тип бифуркаций указан по правому обрезу карты на рис. 2, б. Можно видеть, что описанные бифуркации приводят, фактически, к картине режимов широкополосной синхронизации на базе квазипериодичности разной размерности.

³Поскольку именно бифуркация Неймарка–Сакера отвечает за рождение тора.

Заключение

В системе четырех диссипативно связанных осцилляторов ван дер Поля наблюдаются определенные особенности в устройстве характерных областей на плоскости параметров. Так, режим «гибели колебаний» возникает при значительном превышении величины связи значения параметра отрицательного трения, что объясняется взаимодействием подсистемы из двух осцилляторов. При большой частотной расстройке наблюдаются последовательно бифуркация Андронова–Хопфа, Неймарка–Сакера, мягкая квазипериодическая бифуркация Неймарка–Сакера и жесткая седлоузловая квазипериодическая бифуркация. При этом их линии являются асимптотическими границами областей широкополосной синхронизации (полной и частичной) для квазипериодических режимов разной размерности.

Авторы выражают благодарность И.Р. Сатаеву за полезное обсуждение.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, проект 12-02-00541-а.

Библиографический список

1. Пиковский А., Розенблюм М., Куртс Ю. Синхронизация. Фундаментальное нелинейное явление. М.: Техносфера, 2003. 494 с.
2. Ланда П.С. Автоколебания в системах с конечным числом степеней свободы. М.: Наука, 1980. 360 с.
3. Анищенко В.С., Астахов В.В., Вадивасова Т.Е. Регулярные и хаотические автоколебания. Синхронизация и влияние флуктуаций: Учебник-монография. Долгопрудный: Издательский Дом «Интеллект», 2009. 312 с.
4. Блехман И.И. Синхронизация в природе и технике. М.: Наука, 1981. 351 с.
5. Glass L. and Mackey M.C. From Clocks to Chaos. Princeton University Press, 1988. 272 p.
6. Balanov A.G., Janson N.B., Postnov D.E., Sosnovtseva O. Synchronization: From simple to complex. Springer, 2009. 426 p.
7. Ivanchenko M., Osipov G., Shalfeev V., Kurths J. Synchronization of two non-scalar-coupled limit-cycle oscillators // Physica D. 2004. Vol. 189. № 1–2. P. 8.
8. Кузнецов А.П., Паксютов В.И., Роман Ю.П. Особенности синхронизации в системе неидентичных связанных осцилляторов ван дер Поля и ван дер Поля–Дуффинга. Широкополосная синхронизация // Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2007. Т. 15, № 4. С. 3.
9. Kuznetsov A.P., Roman Ju.P. Properties of synchronization in the systems of non-identical coupled van der Pol and van der Pol–Duffing oscillators. Broadband synchronization // Physica D. 2009. Vol. 238, № 16. P. 1499.
10. Кузнецов А.П., Сатаев И.Р., Тюрюкина Л.В. Синхронизация и многочастотные колебания в цепочке фазовых осцилляторов // Нелинейная динамика. 2010. Т. 6, № 4. С. 693.
11. Емельянова Ю.П., Кузнецов А.П., Тюрюкина Л.В. Динамика трех неидентичных по управляющим параметрам связанных осцилляторов ван дер Поля // Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2011. Т. 19, № 5. С. 76.

12. Broer H., Simó C., Vitolo R. Quasi-periodic bifurcations of invariant circles in low-dimensional dissipative dynamical systems // Regular and Chaotic Dynamics. 2011. Vol. 16, № 1–2. P. 154.

Саратовский государственный
университет им. Н.Г. Чернышевского

Поступила в редакцию 21.09.2012
После доработки 19.12.2012

«OSCILLATOR DEATH» AND QUASIPERIODIC BIFURCATIONS IN LOW-DIMENSIONAL ENSEMBLE OF VAN DER POL OSCILLATORS

A. P. Kuznetsov, L. V. Turukina

The dynamics of the four dissipatively coupled van der Pol oscillator is considered. Lyapunov chart is presented in the parameter plane and its arrangement is discussed. The effect of increase of the threshold for the «oscillator death» regime and the possibility of complete and partial broadband synchronization are revealed. We discuss the bifurcations of tori in the system at large frequency detuning of the oscillators, in particular, quasi-periodic saddle-node and Hopf bifurcations.

Keyword: Synchronization, oscillator death, quasi-periodic bifurcations.

Кузнецов Александр Петрович – родился в 1957 году. Доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник Саратовского филиала Института радиотехники и электроники РАН, профессор Саратовского государственного университета, заведующий базовой кафедрой динамических систем СГУ в СФ ИРЭ РАН. Специалист по нелинейной динамике, теории динамического хаоса и теории критических явлений. Занимается использованием идей теории катастроф и теории бифуркаций, а также развитием концепции сценариев перехода к хаосу применительно к многопараметрическим модельным и физическим нелинейным системам. Лауреат гранта Президента Российской Федерации для молодых российских ученых – докторов наук. Лауреат персонального гранта Фонда содействия отечественной науки. Соросовский профессор (2000, 2001), научный руководитель студенческой лаборатории «Теоретическая нелинейная динамика». Опубликовал более 100 научных работ. Автор нескольких оригинальных учебных курсов для факультета нелинейных процессов и Лицея прикладных наук СГУ, 10 учебных пособий и монографии «Нелинейные колебания» (совместно с С.П. Кузнецовым и Н.М. Рыскиным. М.: Физматлит, 2002).

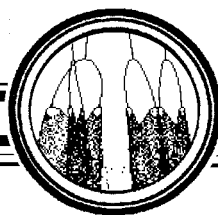


410012 Саратов, ул. Астраханская, 83
Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского
E-mail: apkuz@rambler.ru

Тюрюкина Людмила Владимировна – родилась в 1977 году. Окончила факультет нелинейных процессов в Саратовском государственном университете (2000). Кандидат физико-математических наук (2003, СГУ), имеет звание доцента по специальности радиофизика (2009). В настоящее время старший научный сотрудник Саратовского филиала Института радиотехники и электроники РАН, доцент базовой кафедры динамических систем СГУ в СФ ИРЭ РАН. Область научных интересов – новые аспекты явления синхронизации в системах различной физической природы (радиофизические системы, модели турбулентности, модели биофизических систем и др.); контроль (управление) неустойчивыми режимами; динамический хаос; физические системы с гиперболическими аттракторами. Автор более 80 публикаций, в том числе 30 статей в российских и зарубежных журналах и 3 учебно-методических пособия.



410019 Саратов, ул. Зеленая, д. 38
Саратовский филиал Института радиотехники
и электроники им. В.А. Котельникова РАН
E-mail: lvtur@rambler.ru



НОВЫЙ ТИП БИФУРКАЦИЙ В МОДИФИЦИРОВАННОЙ ЗАДАЧЕ О КОНВЕКЦИИ РЭЛЕЯ–БЕНАРА

И. А. Судаков, С. А. Вакуленко, Т. Г. Сукачева

Классическая конвекция Рэля–Бенара является стандартным примером системы, в которой при изменении управляющего параметра возникают бифуркации. В данной статье рассматривается модифицированная задача о конвекции Рэля–Бенара, включающая радиационные эффекты и источник газа на поверхности. В такой формулировке в указанной задаче возникает новый тип бифуркаций, помимо хорошо известных ячеек Бенара. Данная задача имеет большое значение для математической теории климата, так как обосновывает возникновение «критической точки» климатической системы, связанной с эмиссией парниковых газов в атмосферу Земли.

Ключевые слова: Конвекция Рэля–Бенара, бифуркации, радиация, эмиссия газа, критическая точка, климат.

Введение

Явлению термогравитационной конвекции обязаны многие атмосферные и климатические процессы, поэтому развитие теории конвекции является важной задачей, широко востребованной в математической теории климата. Современная точка зрения на климатическую систему как на динамическую систему [1], а на климат – как на статистический ансамбль состояний, проходимых климатической системой за промежутки времени в несколько десятилетий [2], способствует применению различных методов математического анализа и математического моделирования для описания эволюции климатической системы.

Применение идей теории динамических систем к климатическим задачам началось после работ Э. Лоренца (1963) [3]. Исследуя конвективное движение газа в атмосфере, и применив метод Галеркина к системе типа Буссинеска, он ввел систему трех обыкновенных дифференциальных уравнений, известную теперь как система Лоренца. Далее им был изучен так называемый странный аттрактор Лоренца – компактное инвариантное множество L в трехмерном фазовом пространстве гладкого потока, которое имеет определённую сложную топологическую структуру и является асимптотически устойчивым [4]. Система Лоренца привлекла внимание крупных

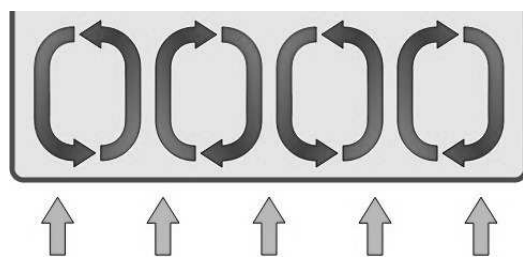


Рис. Ячейки Бенара в гравитационном поле – возникновение упорядоченности в виде конвективных ячеек в форме правильных шести-гранных структур в слое вязкой жидкости с вертикальным градиентом температуры

С 50-х годов XX века интерес к изучению климата методами теории динамических систем несколько упал вследствие перехода от аналитических моделей климата к достаточно сложным комплексным численным моделям всей земной системы. Из работ этого периода можно выделить работу Р. Гуди (1956), предложившего радиационно-конвективную модель атмосферы [6], устойчивость которой в последующем изучал В. Ларсон (1999) и подтвердил существование в ней ячеек Бенара [7] (см. рисунок).

Радиационно-конвективная модель Гуди моделирует конвекцию Рэлея–Бенара в пограничном слое атмосферы с учетом теплового переноса излучения, при этом учитывается основной температурный профиль в вертикальном направлении, а также радиационное затухание. Как известно, возникновение конвекции Рэлея–Бенара служит простым примером механической неустойчивости и турбулентности газа. Однако в моделировании климата моделям атмосферы на основе конвекции Рэлея–Бенара уделяется достаточно мало внимания, потому что такие модели не включают описание теплового переноса излучения, тогда как в реальной радиационно-конвективной атмосфере радиационное излучение в значительной степени определяет основное её состояние, а также затухание температурных возмущений.

В основополагающих работах [6, 8, 9] исследовался слой газа, который заключен между параллельными пластинами при заданных температурах, конвекция в котором происходит по типу Рэлея–Бенара. Кроме того, учтен тепловой перенос излучения, однако температура верхней пластины фиксирована. Отметим, что данная модель имеет некоторые преимущества над комплексными моделями атмосферы. Во-первых, работоспособность данной модели была проверена путем лабораторных экспериментов, о чем свидетельствует работа [8]. Во-вторых, результаты моделирования можно сравнить непосредственно с подобными моделями конвекции Рэлея–Бенара, выделяя таким образом эффект влияния теплового переноса излучения на конвективную устойчивость. В работах [10–12] отмечено, что введение в модель радиации оказывает два стабилизирующих воздействия на возникновение конвекции Рэлея–Бенара. Во-первых, радиационное затухание ведет к уменьшению малых температурных возмущений. Во-вторых, радиация приводит к более устойчивому температурному градиенту для основных состояний профиля температуры в исследуемой области.

Гуди [6, 8, 9] использовал вариационные методы и двухпотокую радиационную модель, чтобы найти критические условия линейной устойчивости. Он рассматривал пределы оптически тонких и толстых газов и свободное скольжение, оптиче-

специалистов по теории динамических систем, что способствовало её детальному изучению (например, Дж. Гукенхаймер, 1976), однако строгое доказательство существования хаоса в этой модели было получено лишь в 1999 году В. Такером [5].

С 50-х годов XX века интерес к изучению климата методами теории динамических систем несколько упал вследствие перехода от аналитических моделей климата к достаточно сложным

ски черные границы. В следующих работах рассматриваются более реалистичные системы, и делаются дальнейшие расчеты. В [13,14] был рассчитан полный спектр оптических толщин, доказана смена устойчивости для линейного состояния основного профиля температуры и представлен приблизительный критерий устойчивости в форме радиационного числа Рэлея. Некоторыми авторами [7] были изучены отдельные вклады основного состояния профиля температуры и радиационного затухания в конвективную устойчивость и сделаны расчеты для вертикального потока тепла при возникновении конвекции. Например, некоторые авторы рассчитывали граничные коэффициенты излучения. В [7,15] была изучена модель Гуди в пределе почти прозрачного газа. В этой работе получены два основных результата: во-первых, модель Гуди упрощена в пределе, когда коэффициент тепловой диффузии стремится к нулю, и было получено полное аналитическое решение задачи линейной стабильности. Линейный порог стабильности в точности определяется единственным параметром (радиационным числом Рэлея), который напоминает число Рэлея, используемое для характеристики конвекции Рэлея–Бенара [16–18]. Во-вторых, изучена нелинейная устойчивость решений для модели Гуди.

В настоящем исследовании предлагается распространить радиационно-конвективную модель атмосферы на случай существования постоянного динамического источника на земной поверхности, из которого эмитирует парниковый газ, и провести её бифуркационный анализ. В такой постановке это, прежде всего, позволит выявить новый тип бифуркаций в модифицированной задаче о конвекции Рэлея–Бенара, помимо ячеек Бенара. Кроме того, данное исследование имеет важное прикладное значение: модифицированная модель может быть применена для изучения эмиссии метана из вечной мерзлоты в атмосферу [19]. Метан – опасный парниковый газ; его влияние на дополнительный разогрев атмосферы в двадцать один раз больше, чем у углекислого газа. Огромный метановый пул захоронен в виде газогидратов в вечной мерзлоте. В связи с изменением климата вечная мерзлота оттаивает, и метан поступает в атмосферу, где влияет на ее разогрев. Это еще больше усиливает оттаивание мерзлоты, благодаря явлению положительной обратной связи. Таким образом, это явление ведет климатическую систему к прохождению точки бифуркации, идентификация которой является на сегодняшний день достаточно актуальной задачей.

1. Классическая модель Гуди и её обобщение

Модель, которая исследована в настоящей работе, рассматривает атмосферу в области типа бесконечной пластины, ограниченной верхней и нижней твердыми, свободными от скольжения границами. Ненулевой адиабатический градиент скорости $\Gamma_* = g_*/c_{P_*}$ (здесь обозначаем звездочками размерные величины) входит в уравнения, так как вертикальный градиент имеет большое значение для моделирования процессов в атмосфере. Тепловое излучение поглощается, но не рассеивается в газе. Предположим, что рассматриваемая система – радиационно-серое тело, то есть ее оптические свойства считаются независимыми от длины волны излучения. Рассмотрим только прозрачные слои газа, то есть слои газа с малой оптической глубиной.

Следуя [7,15], запишем в аппроксимации Обербека–Буссинеска уравнение движения:

$$\mathbf{v}_{*t} + (\mathbf{v}_* \nabla_*) \mathbf{v}_* = -\frac{1}{\rho_*} \nabla_* P_*' + g_* \alpha_{\theta_*} \theta_*' \mathbf{z} + \nu_* \nabla_*^2 \mathbf{v}_*, \quad (1)$$

где \mathbf{v}_* – скорость, θ_*' – отклонения температуры от некоторого основного уровня $\bar{\theta}_*$, P_* – давление, t_* – время, ρ_* – постоянная, относящаяся к плотности, α_{θ_*} – постоянный коэффициент объемного расширения, z – компонента вертикального вектора, ν_* – кинематическая вязкость и g_* – гравитационная постоянная.

Уравнение теплопроводности:

$$\theta_{*t} + (\mathbf{v}_* \nabla_*) \theta_* + \omega_* \Gamma_* = -\frac{1}{\rho_* c_{P_*}} \nabla_* \mathbf{F}_* + k_* \nabla_*^2 \theta_*. \quad (2)$$

Здесь $\theta = \bar{\theta}_* + \theta_*'$ – общая температура, полученная путем сложения температуры в равновесном состоянии и температуры после перехода из этого состояния, ω_* – вертикальная компонента скорости \mathbf{v}_* , \mathbf{F}_* – радиационный поток, c_{P_*} – удельная теплоемкость при постоянном давлении, адиабатический градиент скорости $\Gamma_* = g_*/c_{P_*}$, k_* – коэффициент теплопроводности.

В приближении Обербека–Буссинеска уравнение неразрывности имеет вид

$$\nabla_* \mathbf{v}_* = 0. \quad (3)$$

Следуя [15], введем новые безразмерные переменные и перепишем уравнения (1)–(3) для модели Гуди в безразмерной стандартной форме в приближении Обербека–Буссинеска с учетом действия внешней периодической силы и записи некоторых физических констант для удобства проведения последующих вычислений

$$\mathbf{v}_t + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} = \sigma \Delta \mathbf{v} - \gamma \nabla P + f(x, y, z, t) + \sigma_1 (\theta - \Theta_0) \mathbf{z}, \quad (4)$$

$$\theta_t + (\mathbf{v} \nabla) \theta + \omega \Gamma = \Delta \theta - \nabla \mathbf{F} + Q, \quad (5)$$

$$\nabla \mathbf{v} = 0. \quad (6)$$

Здесь $\mathbf{v} = (u(x, y, z, t), v(x, y, z, t), \omega(x, y, z, t))$ – скорость потока газа с вертикальной компонентой ω , $\theta(x, y, z, t)$ – температура потока, P – давление, C – концентрация эмитирующего газа (фактически, примесей), Γ – безразмерный адиабатический градиент, σ – число Прандтля, σ_1 – параметр плавучести, \mathbf{z} – единичный вектор в вертикальном направлении, $\Theta_0 = \theta_{m*}$ – основное температурное состояние $\bar{\theta}$, вычисленное в средних точках слоя, f – внешняя сила, γ – коэффициент, подобный числу Рэлея, который умножается на член, описывающий плавучесть в уравнении движения, \mathbf{F} – радиационный поток и Q – тепловой источник. Для простоты предположим, что движение происходит в тонком слое Ω , определенном как $0 < z < h$, $(x, y) \in \Pi$, здесь Π – плоский прямоугольник с размерами l_1, l_2 .

Уравнение радиационного потока \mathbf{F} может быть получено путем аппроксимации Эддингтона для уравнения Шварцшильда [20–23]. В результате

$$\nabla(\alpha^{-1} \nabla \mathbf{F}) - 3\alpha \nabla \mathbf{F} = 3\nabla \theta, \quad (7)$$

где предполагается, что α является достаточно малой постоянной, пропорциональной коэффициенту поглощения излучения в единицу объема. Тогда (7) может быть упрощено

$$-\nabla \mathbf{F} = 3\alpha\theta. \quad (8)$$

В самом деле, подстановка (8) в (7) дает, что (7) удовлетворяется с точностью до слагаемых порядка $o(\alpha^2)$. Тогда (5) примет вид

$$\theta_t + (\mathbf{v}\nabla)\theta + \omega\Gamma = \Delta\theta - 3\alpha\theta + Q. \quad (9)$$

Это уравнение уже не содержит радиационный поток. Таким образом, основные уравнения для модели даются формулами (4), (6) и (9). Расширим эту модель, включая уравнение для конвекции, деградации и диффузии газа, поступающего с поверхности (фактически этими процессами моделируется поведение любого парникового газа, поступающего с земной поверхности в атмосферу)

$$C_t + (\mathbf{v}\nabla)C = d\Delta C - b_0^2 C, \quad (10)$$

где $C(x, y, z, t)$ является концентрацией эмитирующего газа, b_0^2 – положительная постоянная (член $-b_0^2 C$ описывает деградацию молекул газа в атмосфере в результате химических реакций), d – коэффициент диффузии эмитирующего газа.

Уравнение (10) может быть решено, если известна скорость потока в сплошной среде \mathbf{v} и уравнения θ , \mathbf{v} и C независимы [24,25]. Для описания влияния газа на циркуляцию в рассматриваемой системе, предполагается, что коэффициент α в (9) зависит от C : $\alpha = \alpha(C)$. Так как концентрация газа C очень мала (исходя из физических соображений), естественно предположить, что эта зависимость линейная. Тогда, используя ряд Тейлора для α , получим

$$\alpha \approx \alpha_0 + \alpha_1 C, \quad (11)$$

где α_0, α_1 – постоянные; α_1 – феноменологический коэффициент, который может быть определен путем анализа экспериментальных данных. Тогда уравнения (4), (6), (9) и (10) становятся взаимосвязанными и, следовательно, эта система может описывать обратную связь между сплошной средой (скорость потока, температурные поля) и концентрацией газа.

Рассмотрим граничные условия. Условия для \mathbf{v} – это стандартные условия отсутствия скольжения

$$\mathbf{v}(x, y, z, t)|_{z=0} = \mathbf{v}(x, y, z, t)|_{z=h} = 0. \quad (12)$$

Граничные условия для температуры θ имеют вид

$$\theta_z(x, y, z, t)|_{z=0} = \theta_z(x, y, z, t)|_{z=h} = 0 \quad (13)$$

и означают отсутствие потока на границе.

Граничные условия для C описывают отсутствие потока газа при $z = h$ и задают поток газа с поверхности $z = 0$:

$$\begin{aligned} C_z(x, y, z, t)|_{z=h} &= 0, \\ C_z(x, y, z, t)|_{z=0} &= -\mu(x, y, \theta(x, y, 0, t)), \end{aligned} \quad (14)$$

где μ –функция, которая описывает интенсивность потока газа с поверхности. Предполагается, что этот поток, вообще говоря, неоднороден в пространстве и зависит от температуры. Для упрощения математического анализа используем периодические граничные условия по x, y . Если $\Pi = \{(x, y) : 0 < x < l_1, 0 < y < l_2\}$, следовательно, имеем:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}(x, y, z, t) &= \mathbf{v}(x + l_1, y, z, t) = \mathbf{v}(x, y + l_2, z, t), \\ P(x, y, z, t) &= P(x + l_1, y, z, t) = P(x, y + l_2, z, t), \\ \theta(x, y, z, t) &= \theta(x + l_1, y, z, t) = \theta(x + l_2, y, z, t). \end{aligned} \quad (15)$$

В зависимости от вида функции μ возможны различные ситуации. Можно предположить, следуя реальным физическим ситуациям (например, парниковый газ, поступающий в атмосферу, образовывается за счет биохимических процессов), что имеет место соотношение типа Аррениуса

$$\mu(x, y, t) = g(x, y) \exp\left(-\frac{V_0}{k_B \theta}\right), \quad (16)$$

где V_0 является потенциальным барьером для химической реакции образования газа, k_B – постоянная Больцмана. Здесь будем считать, что газ с поверхности поступает не сплошным потоком, а из динамических отверстий (подобно тому, как метан поступает в атмосферу из мерзлотных озер [26]), тогда можно предположить, что

$$g(x, y, t) = c_g \sum_{i=1}^N \chi_V \Omega_i(t),$$

где c_g – константа, Ω_i – двумерная область, занятая i -м отверстием, и χ_V является характеристической функцией множества V : $\chi_V = 1$, если $(x, y) \in V$ и $\chi_V = 0$ в противном случае. Обратим внимание, что области Ω_i могут медленно меняться, тогда необходимо рассматривать случай, когда g зависит от времени. Основываясь на физических соображениях, будем считать, что изменение формы отверстий (по аналогии с мерзлотными озерами) идет медленно [26]: $\Omega_i = \Omega_i(\tau)$, где τ является медленным временем $\tau = \varepsilon_1 t$, $\varepsilon_1 \ll 1$, и возможно предположить, что в первом приближении Ω_i – фиксированные области.

2. Существование и единственность решения краевой задачи

Опишем общий подход, который позволяет доказать существование и единственность решения для системы дифференциальных уравнений (4), (6), (9)–(11) с краевыми условиями (12)–(16). Этот подход хорошо известен – см. [27,28].

Функциональные пространства. Определим некоторые функциональные пространства. Обозначим через $B_{\alpha,p}$ стандартные интерполяционные пространства

$$B_{\alpha,p} = \left\{ \omega : \|\omega\|_{\alpha,p} = \|(I - \Delta_D)^\alpha \omega\|_p < \infty \right\},$$

где Δ_D – оператор Лапласа при нулевых граничных условиях Дирихле и символ $\|\dots\|$ обозначает норму функции. Интерполяционные пространства $B_{\alpha,p}$ тесно связаны со стандартными пространствами Соболева. Их теория подробно изложена в [27,29].

Краевая задача как абстрактное эволюционное уравнение. Обозначим через u тройку (v, θ, C) и $\mathbf{V}_{\alpha, p}$ – пространство векторных полей (v_1, v_2, v_3) . Предполагается, что каждый компонент лежит в соответствующем функциональном пространстве: $v \in \mathbf{V}_{\alpha, p}$ и θ, C лежат в $B_{\alpha, p}$. Для реализации стандартной схемы доказательства существования решений уравнения (4) скорости потока будем применять определенный для данной задачи оператор Лере \mathbf{P} [27, 30]. Обратим внимание, что $\mathbf{P}\nabla P = 0$, поэтому этот метод исключает давление [27, 31]. В результате можно переписать всю систему как эволюционное уравнение:

$$u_t = Au + F(u) + f(t), \quad (17)$$

где A – некоторый самосопряженный отрицательно определенный оператор $A = (\sigma \mathbf{P} \Delta, \Delta, d\Delta)^{\text{tr}}$, F определяет другие нелинейные и линейные члены, которые не входят в A , $\text{tr}(u)$ – след функции на нижней границе s , подчиняющийся следующему вложению [31]: $\|\text{tr}(u)\|_{L_p(s)} \leq c \|u\|_{\alpha, p}$, $\alpha > 1/2p$.

Локальное существование. Чтобы показать локальное существование решений во времени, применим стандартный подход [27]. Выберем такие p, α , что

$$C^s(\Omega) \subset B_{\alpha, p}, \quad 0 \leq s < 2(\alpha - 1/p).$$

Тогда $\sup |\nabla \theta| < C \|\theta\|_{\alpha, p}$, если $\theta \in B_{\alpha, p}$. Это показывает, что отображение $\theta \rightarrow (v \nabla) \theta$ является C^1 -отображением из $B_{\alpha, p}$ в L_p . Аналогично, для отображения $C \rightarrow (v \nabla) C$. Таким образом, F является C^1 -отображением из $\mathbf{V}_{\alpha, p} \times B_{\alpha, p}^2$ в $\mathbf{V}_{0, p} \times L_p^2$. Это доказывает существование локальных (по времени) решений (17).

Априорные оценки. Описанная выше конструкция позволяет доказать существование решений краевой задачи на ограниченном интервале времени. Чтобы показать, что на самом деле решения краевой задачи существуют для всех t , необходимо получить априорную оценку решений. Допустим, что имеет место

Лемма. Пусть функция $\mu \geq 0$, $\mu \in C^1$ ограничена в θ :

$$\sup_{x, y \in \Omega, \theta \in (0, +\infty)} \mu(x, y, \theta) < c_0 < \infty$$

и внешние источники и силы $Q, f \in C^0$ определены так, что

$$\begin{aligned} \sup_{x, y \in \Omega, t > 0} Q(x, y, z, t) &= q_0 < \infty, \quad Q \geq 0, \\ \sup_{x, y \in \Omega, t > 0} |f(x, y, z, t)| &= f_0 < \infty. \end{aligned}$$

Тогда поля концентрации эмитирующего газа C и температуры θ равномерно ограничены.

Доказательство. Учитывая, что $\sup_{x, y, z} \theta(x, y, z, 0) = M_0$, при помощи верхних и нижних решений [32] можно легко доказать, что

$$0 < \theta(x, y, z, t) \leq \max \{M_0, q_0(3\alpha_0)^{-1}\} = M_1 \quad \text{и} \quad 0 < C(x, y, z, t) < c_0 z,$$

если начальные поля $\theta, C(x, y, z, t)$ положительны при всех $(x, y, z) \in \Omega$. Если температура θ равномерно ограничена, тогда уравнение для скорости потока дает стандартную оценку

$$\frac{d \|\mathbf{v}\|^2}{2dt} \leq -\sigma \|\nabla \mathbf{v}\|^2 + c_0 M_0 \|\mathbf{v}\| + \sup |f(x, y, z, t)| \|\mathbf{v}\|,$$

что в соответствии с рассуждениями [32] доказывает, что норма $\|\mathbf{v}(t)\|$ ограничена по t .

Таким образом, предложенная модель является корректной, и соответствующая краевая задача хорошо поставлена. Сформулируем теорему, которая является итоговым результатом данного раздела и следует из рассуждений, приведенных выше.

Теорема. Пусть выполнены условия Леммы. Тогда решение краевой задачи (4)–(16) существует и единственно при всех $t \in (0, \infty)$ и лежит в пространстве $B_{\alpha,p}^3 B_{\alpha,p} B_{\alpha,p}$ (то есть $\forall t > 0, \theta \in B_{\alpha,p}, C \in B_{\alpha,p}, v_j^{(t)} \in B_{\alpha,p}, j = 1, 2, 3$), $\alpha > 1/p$.

Соотношение для средней температуры. Сначала получим некоторые интегральные соотношения для средней температуры $\langle\langle\theta\rangle\rangle$, где $\langle\langle f \rangle\rangle$ обозначает значения функции f , усредненной по всей области Ω : $\langle\langle f \rangle\rangle = |\Omega|^{-1} \int_{\Omega} f$ и $|\Omega| = hl_1 l_2$ – объем элементарной периодической ячейки. Проинтегрируем уравнение теплопроводности (9) по Ω . Предполагая, что нет источников на границах, проинтегрируем по частям, и, учитывая граничные условия, получаем

$$\frac{d \langle\langle\theta\rangle\rangle}{dt} = -3 \langle\langle(\alpha_0 + \alpha_1 C)\theta\rangle\rangle + \langle\langle Q \rangle\rangle.$$

Тогда вклад эмитирующего газа определяется как

$$R_{\text{met}} = -3\alpha_1 \langle\langle C\theta \rangle\rangle. \quad (18)$$

Используя эти балансовые соотношения и имеющиеся экспериментальные данные, можно найти коэффициент α_1 .

3. Бифуркационный анализ обобщенной модели Гуди

Здесь возможны несколько различных ситуаций. Для их описания введем безразмерный параметр

$$k = \frac{V_0}{k_B \theta_0},$$

который определяет типичные скорости эмиссии газа, когда выполняется соотношение типа Аррениуса. Здесь θ_0 является температурой на поверхности. Будем считать, что $\alpha_1 = \varepsilon$ – малый параметр в теории возмущений, что позволяет оценить R_{met} .

Существует три основных возможных случая.

I. Параметр k ограничен, и система находится далеко от точки бифуркации.

II. Параметр k ограничен, и система близка к точке бифуркации.

III. Параметр k имеет достаточно большие значения, и система близка к точке бифуркации.

Случай I (система вдали от точки бифуркации). Фактически, цель этого раздела состоит в построении теории возмущений, что позволяет получить систему уравнений для некоторого X_i и вычислить X_i , оценивая влияние эмитирующего газа на динамику системы. Это подход из теории возмущений, основан на том, что концентрация этого газа мала (как и в реальных физических ситуациях).

Пусть отверстия, из которых эмитирует газ, имеют относительно малый диаметр r_i по отношению к размерам l_1, l_2 области П. Таким образом, можно предположить, что температура $\theta(x, y, 0, t)$ является постоянной внутри всей области отверстия. Обозначим усредненное значение через $\theta(x, y, 0, t)$ для i -го отверстия $W_i(t)$, тогда формально получим

$$W_i = \text{area}(\Omega_i)^{-1} \iint_{\Omega_i} \theta(x, y, 0, t) \chi_{\Omega_i}(x, y) dx dy.$$

Кроме того, представим неизвестные функции в виде суммы основного вклада (переменные с индексом «0») и малых поправок, тогда основные условия для \mathbf{v}_0 могут быть найдены из (4), (6) и (9) и из уравнения переноса тепла при $\alpha = \alpha_0$:

$$\theta_{0t} + (\mathbf{v}_0 \nabla) \theta_0 + \omega_0 \Gamma = \Delta \theta_0 - 3\alpha_0 \theta_0.$$

Следующим шагом является решение краевой задачи для C :

$$C_t + (\mathbf{v}_0 \nabla) C = d\Delta C - b_0^2 C, \quad (19)$$

$$C_z(x, y, z, t)|_{z=h} = 0, \quad (20)$$

$$C_z(x, y, z, t)|_{z=0} = \exp\left(-\frac{V_0}{k_B W_i(t)}\right) \sum_{i=1}^N \chi_{\Omega_i}. \quad (21)$$

Явные решения (19)–(21) можно найти только в некоторых частных случаях. Рассмотрим случай, когда невозмущенный поток газа стационарен во времени и внешняя сила отсутствует. Тогда вспомогательная краевая задача запишется так:

$$G_{it} + (\mathbf{v}_0 \nabla) G_i = d\Delta G_i - b_0^2 G_i,$$

$$G_{iz}(x, y, z, t)|_{z=h} = 0,$$

$$G_{iz}(x, y, z, t)|_{z=0} = \delta(t) \chi_{\Omega_i}(x, y).$$

Здесь решение для C может быть выражено через G_j :

$$C(x, y, z, t) = \sum_{i=1}^N \int_0^t G_i(x, y, z, t - t') \exp\left(-\frac{V_0}{k_B W_i(t')}\right) dt'. \quad (22)$$

Подставляя соотношение (22) в (18), получаем

$$R_{\text{met}}(t) = -3\alpha_1 \sum_{i=1}^N \int_0^t \langle\langle G_i(x, y, z, t - t') \theta_0(x, y, z, t) \rangle\rangle \exp\left(-\frac{V_0}{k_B W_i(t')}\right) dt'.$$

В следующем пункте рассмотрим ситуацию вблизи бифуркации, когда данный подход нуждается в модификации.

Случай II. Система около точки бифуркации. Фундаментальные вариационные соотношения, полученные В.С. Сорокиным в 1954 году [33], а также в работах [34–36], могут быть применены в данном исследовании, что позволяет оценить влияние эмиссии газа с поверхности на бифуркацию в рассматриваемой системе. Положим $\mathbf{F}, Q = 0$ и удалим нелинейные члены из основных уравнений Навье–Стокса (4), (6) и (9). Постулируем, что основное состояние системы дано соотношениями $\mathbf{v}_0 = 0$, температура $\theta_0 = \bar{T}(z) = \bar{b}z + \bar{a}$, радиационный поток $\mathbf{F} = F(z)\mathbf{z}$, и радиационный коэффициент поглощения α является постоянным, $\alpha = \alpha_0$. Получим уравнения, линеаризованные вблизи основного решения

$$\mathbf{v}_t = \sigma \Delta \mathbf{v} - \nabla P + \sigma_1 \theta \mathbf{z}, \quad (23)$$

$$\theta_t = \Delta \theta + \omega(\gamma - \Gamma) - 3\alpha_0 \theta, \quad (24)$$

$$\nabla \mathbf{v} = 0. \quad (25)$$

При этих предположениях скорость потока и тепловых полей можно определить с точностью до малых значений при помощи нормальных мод [15, 34], при этом $\mathbf{V}(x, y, z)$, $\theta = T(x, y, z)$ являются собственными функциями некоторого линейного оператора L [7, 34], действующего на малые поправки \mathbf{v} , θ . Если рассмотреть линеаризованные уравнения (предполагаем, что внешняя сила равна нулю, тепловой источник тоже ноль и члены $\alpha_1 C$ пренебрежимо малы), то $X(t) = X(0) \exp(-\lambda t)$, где $X(t)$ является неизвестной функцией времени, определяющей временную эволюцию, λ – в общем случае, комплексное собственное значение $\lambda = \beta + i\omega$, где $i = \sqrt{-1}$. Точки бифуркации определяются условием $\beta = 0$.

Теперь можно получить некоторые важные вариационные отношения для λ , повторяя известные расчеты В.С. Сорокина [33, 34] применительно к (23)–(25), и тогда для скорости потока $\mathbf{V} = (\mathbf{V}_1, \mathbf{V}_2, \mathbf{V}_3)$ и температуры T имеют место соотношения:

$$-\lambda \mathbf{V} = \sigma \Delta \mathbf{V} - \nabla P + \sigma_1 T \mathbf{z}, \quad (26)$$

$$-\lambda T = \Delta T + V_3(\gamma - \Gamma) - 3\alpha T, \quad (27)$$

$$\nabla \mathbf{v} = 0. \quad (28)$$

Умножим (26) на комплексно-сопряженную V^* и (27) на T^* . Тогда получим два соотношения, обобщающие известные соотношения для конвекции Рэлея–Бенара [33]:

$$\begin{aligned} -\lambda \int_{\Omega} |\mathbf{V}|^2 dv &= -\sigma \int_{\Omega} |\text{rot } \mathbf{V}|^2 dv + \sigma_1 \int_{\Omega} T \mathbf{z} \mathbf{V}^* dv, \\ -\lambda \int_{\Omega} T^2 dv &= - \int_{\Omega} (|\nabla T|^2 + 3\alpha T^2) dv + \gamma' \int_{\Omega} T^* \mathbf{z} \mathbf{V} dv, \end{aligned}$$

где $dv = dx dy dz$ и $\gamma' = \gamma - \Gamma$. Комбинируя эти соотношения, при некоторых условиях получаем $\text{Im } \lambda = 0$ (следовательно, здесь нет колебаний по времени). Далее, следуя

В.С. Сорокину [33], можно получить, что

$$-\lambda \int_{\Omega} (|\mathbf{V}|^2 - \gamma'^{-1} \sigma_1 |\nabla T|^2) dv = \int_{\Omega} -\sigma |\text{rot } \mathbf{V}|^2 + \gamma'^{-1} \sigma_1 (3\alpha_0 |T|^2 + |\nabla T|^2) dv + H_0,$$

$$H_0 = 3\gamma'^{-1} \sigma_1 \alpha_1 \int_{\Omega} \bar{C} |T|^2 dv.$$

Для малых α_1 этот вклад описывает сдвиг собственного значения линейного оператора задачи благодаря эмиссии газа с поверхности. Заметим, что этот сдвиг имеет довольно простую форму и может иметь любой знак. Следовательно, он описывает либо ускорение, либо замедление релаксационного процесса вблизи точки бифуркации. Это соотношение также позволяет найти небольшой сдвиг значений бифуркационного параметра.

Величина H_0 может быть вычислена в ряде случаев, когда возможно получить некоторые выражения для \bar{C} . При условии, что конвективный член мал, можно это выражение найти из уравнения

$$d\Delta \bar{C} - b_0^2 \bar{C} = 0$$

при граничном условии

$$\bar{C}_z(x, y, z, t)|_{z=0} = \mu(x, y, \theta_0),$$

где функция μ определена в (16).

Если параметр b_0 мал по отношению к \sqrt{d} , то концентрация газа достаточно однородна и возможно получить новое соотношение для

$$H_0 = 3\gamma'^{-1} \sigma_1 \alpha_1 \langle\langle \bar{C} \rangle\rangle \int_{\Omega} |T|^2 dv, \quad (29)$$

где $\langle\langle \bar{C} \rangle\rangle$ является усредненной концентрацией примесей газа в системе. Для малых возмущений $\delta_{\text{met}} \lambda$ параметра релаксации λ , связанных с воздействием эмитирующего газа, получаем

$$-\delta_{\text{met}} \lambda = H_0 K^{-1}, \quad K = \int_{\Omega} (|\mathbf{V}|^2 - \gamma'^{-1} \sigma_1 |T|^2) dv^{-1}.$$

В заключение этой части обратим внимание, что интеграл в (29) всегда положителен. Таким образом, видно, что, если состояние системы близко к точке бифуркации, в обоих случаях ячейки Бенара будут сохраняться, а эмиссия газа может влиять на процесс по-разному в зависимости от параметра $\gamma' K$. С одной стороны, это может приводить к усилению демпфирования основных режимов, и тогда эмиссия газа создает препятствие для бифуркации, и бифуркации могут исчезать (отрицательная обратная связь). С другой стороны, это может привести к уменьшению скорости затухания возмущений, и бифуркации могут появиться раньше (положительная обратная связь). Важно отметить, что в реальных задачах это будет зависеть от динамики атмосферы, поскольку скорость газа и температурные поля нетривиально входят в основные функционалы.

Случай III. Система около точки бифуркации: взрывообразные выбросы. Третий случай описывает ситуацию, когда переходные процессы связаны с эмиссией газа, которая происходит взрывообразно с очень большой скоростью. Например, в реальности, для некоторых температур (зимой, когда поверхность мерзлого озера заморожена) эмиссия метана практически отсутствует; однако, если температура становится достаточно высокой, то эмиссия начинает происходить (когда озеро тает). Возьмем μ как «сигмоидальную» функцию в граничном условии (16)

$$\mu(x, y, t) = g(x, y)S(\beta_0\theta),$$

где $u_0 = \beta_0\theta$, S – монотонно возрастающая функция, такая что $\lim_{u \rightarrow +\infty} S(u_0) = 1$ и $\lim_{u \rightarrow -\infty} S(u_0) = 0$.

Параметр β_0 характеризует скорость переходного процесса (чем больше β_0 , тем быстрее возрастает μ как функция от θ). Круто возрастающая $\mu(\theta)$ может описывать взрывообразный выброс газа с поверхности. В качестве простейшего приближения можно взять кусочно-линейную функцию S :

$$S(u_0) = 0, \quad u_0 < 0, \quad S = u_0, \quad 0 < u_0 < 1, \quad S(u_0) = 1 \quad u_0 > 1.$$

Получим здесь уравнения для амплитуд мод $X_i(t)$, $i = 1, \dots, N$, где N представляет собой число бифуркационных мод, участвующих в медленной динамике, в точке бифуркации. Например, для *случая II*, такие уравнения достаточно просты и напоминают известные модели Лоренца [3]. Кроме того, для *случая III* и $N = 1$ уравнение эволюции является относительно простым. Наиболее интересный случай – это *случай III* с $N > 1$, где уравнения могут быть более сложными. Остановимся на нем более детально. Рассмотрим случай, когда $N \geq 1$ – некоторые основные режимы могут сосуществовать. Представим здесь температуры и скорость потока как

$$\theta = \theta_0 + \sum_{n=1}^N X_n(t)T_n(x, y, z),$$

$$\mathbf{v} = \sum_{n=1}^N X_n(t)\mathbf{V}_n(x, y, z),$$

где \mathbf{V}_n, T_n – заданные функции (которые обычно выбирают в качестве собственных функций линейной части), X_n являются неизвестными функциями времени. Рассмотрим сначала обычный случай для α_1 . Тогда, применяя стандартную процедуру Галеркина, получаем

$$\frac{dX_n}{dt} = \sum_{ij} M_{nij}X_iX_j - \lambda_n X_n + f_n \quad (30)$$

где M – матрица, $\lambda_n > 0$ – коэффициенты, f_n – определяет внешний эффект силы, $-\lambda_n X_n$ является диссипативным членом, а первый член нелинейно связан с конвекцией. Если M_{nij} антисимметрична для n, i, j , то (30) является случаем известной системы Колмогорова. К тому же, известную систему Лоренца можно рассматривать как частный случай (30).

В рассматриваемом случае, получаем (учитывая, что $3\alpha_1 C\theta$ достаточно мало):

$$\frac{dX_n}{dt} = \sum_{i,j=1}^N M_{nij} X_i X_j - \sum_{j=1}^N \lambda_{nj} X_j + f_n + \alpha_1 F_n(X),$$

где Λ является положительной матрицей с элементом λ_{nj} , который отвечает за диссипацию в системе,

$$F_n = \sum_{j=1}^N B_{nj} X_j S(\rho_j(X)).$$

Здесь $\rho_j(X) = \theta_0(x_i, y_j, t) + \sum_{m=1}^N \sum_m a_{jm} X_m$, а a_{jm}, B_{nj} – матрицы, (x_j, y_j) – координаты, которые определяют центр j -го отверстия. Теперь опишем, как получить вклад F . Применяя стандартную процедуру Галеркина, имеем

$$F_n = 3 \langle \bar{C} \langle X \rangle \theta, T_n \rangle,$$

где $\langle f, g \rangle$ обозначает стандартное скалярное произведение в $L_2(\Omega)$. Чтобы найти \bar{C} , необходимо использовать приближения, где можно пренебречь эффектами, связанными с конвекцией и распадом примесей газа в уравнении (19) для C . Тогда можно искать для плотности квазистационарных потоков газа решение краевой задачи

$$\Delta \bar{C} = 0, \quad (31)$$

$$\bar{C}_z(x, y, z, t)|_{z=h} = 0, \quad (32)$$

$$\bar{C}_z(x, y, z, t)|_{z=0} = \chi_{\Omega_i}(x, y) S(\theta(X)). \quad (33)$$

Тогда решение (31)–(33) для \bar{C} может быть выражено через функцию Грина, и здесь получается (с учетом того, что отверстия достаточно малы по размерам) следующее соотношение:

$$\bar{C}(x, y, z, X) \approx \sum_{i=1}^{N_{\text{lakes}}} G_i(x, y, z, x_i, y_i) S(\theta_0 + \sum_j T_j(x_i, y_i) X_j).$$

В результате,

$$a_{jm} = T_j(x_m, y_m),$$

$$B_{nm} \approx \sum_{i=1}^{N_{\text{lakes}}} \langle G_i(x, y, z, x_i, y_i) T_m, T_n \rangle.$$

Рассмотрим теперь возможный механизм хаоса, связанного с взрывообразными выбросами газа с поверхности. Даже для $\alpha_1 = 0$, то есть без эмитирующего газа, влияние динамики может быть сложным (частный случай этих систем – система Лоренца, может порождать динамику со сложными бифуркациями и хаосом). Рассмотрим некоторые дополнительные хаотические эффекты, связанные с учетом эмиссии газа

в модели Гуди. Эти эффекты возможны даже в *случае II*. Удалим все нелинейные члены из (30), кроме членов, отвечающих за эмиссию газа, а также удалим член с $\sum_m a_{jm} X_m$. Получим систему

$$\frac{dX_n}{dt} = - \sum_{j=1}^N \lambda_{nj} X_j + f_n + \alpha_1 B_{nj} X_j S(\theta_0(x_j, y_j, \tau)). \quad (34)$$

Исследуем теперь динамику системы (34). Будем рассматривать $\eta_j = S(\theta_0(x_j, y_j, \tau))$ как сезонный длительный фактор времени (так как в реальном случае озера, из которых эмитирует метан, то тают, то замерзают), включающийся или выключающийся в случайные моменты времени (из-за сигмоидального характера S). Динамика системы (34) при $\alpha_1 = 0$ вполне тривиальна, поскольку все траектории сходятся к состоянию равновесия, а динамика системы при $\alpha_1 \neq 0$ может генерировать фрактальные аттракторы.

Чтобы показать это, рассмотрим отображение Пуанкаре $P : X(t) \rightarrow X(t + \Delta T)$ для (34), где ΔT является длительным промежутком времени (например, год). С учетом рассуждений, сделанных выше, ясно, что за год интервал $(n\Delta T, (n+1)\Delta T)$ этого отображения P определяется линейным отображением

$$P_n X = (A + \alpha_1 \tilde{B}_n) X + f, \quad (35)$$

где A есть фиксированная матрица ($A = \exp(-\Lambda \Delta T)$), \tilde{B}_n – случайная матрица в зависимости от n . Эта случайность возникает из-за сезонного фактора $\eta_j = S(\theta_0(x_j, y_j, \tau))$. Отображение, подобное (35), детально изучено в [31]. Оно определяет так называемые системы итерируемых функций (IFS) [37]. К тому же, хорошо известны аттракторы этих случайных отображений, в общем случае это – фрактальные множества.

В заключение этого раздела отметим, что эмиссия газа приводит к медленной модификации аттрактора системы. Это нетривиальный процесс, в котором может появиться фрактальная структура в фазовом пространстве, даже если динамика системы очень проста и зависит единственным образом от эволюции основной моды X_1 (которая имеет место для модели Гуди в некоторых самых простых ситуациях).

Заключение

В данном исследовании рассматривалась радиационно-конвективная модель Гуди, в основу которой легла модифицированная задача о конвекции Рэлея–Бенара. В оригинальной модели Гуди помимо классической конвекции были введены радиационные эффекты, описывающие поведение солнечного излучения в атмосфере. Однако бифуркационный анализ этой модели показал наличие в ней всё тех же ячеек Бенара, что и в классической задаче о конвекции Рэлея–Бенара. Для нужд математической теории климата (задачи об эмиссии парниковых газов в атмосферу) нами была расширена оригинальная модель Гуди: введен поток эмитирующего газа с поверхности из отверстий, которые имеют собственную динамику, и предполагается в дальнейшем, что примеси эмитирующего газа подвержены конвекции, диффузии и

распаду (фактически, такое поведение в атмосфере наблюдается у любого парникового газа).

Далее была сформулирована краевая задача для такой системы и показано существование и единственность решений этой задачи на основе построения оператора Лере и метода верхних и нижних решений.

После этого был введен параметр, зависящий от скорости эмиссии и температуры поверхности, на основании которого проводился бифуркационный анализ данной задачи. Были рассмотрены три случая поведения системы. Первый случай – когда система находилась далеко от точки бифуркации. В этом случае новых особенностей системы, по сравнению с классической задачей, не выявлено; кроме того была найдена формула для расчета скорости эмиссии газа. Второй случай – система вблизи точки бифуркации. Показано существование как ячеек Бенара, так и новых бифуркаций (по сравнению с классической задачей) и описана динамика системы возле точки бифуркации. Третий случай подобен второму, однако здесь эмиссия газа с поверхности происходит взрывным образом. В этом случае эмиссия газа приводит к медленной модификации аттрактора системы, который должен представлять собой фрактальное множество.

Таким образом, применение данной задачи в математической теории климата позволит изучить «критические точки» (точки бифуркации) в климатической системе, что является, несомненно, важным для прогнозирования будущих изменений климата.

Работа выполнена в рамках государственного задания НовГУ (проект «Исследование моделей, методов и алгоритмов многопараметрических систем», № 438/АиГ-с (2011–2013)), программы стратегического развития НовГУ (проект «Исследование обобщенных решений нелинейных интегро-дифференциальных и разностных уравнений», № 456/АиГ-с (2012–2016)) и при поддержке РФФИ (грант 12-01-90803-мол_рф_нр).

Библиографический список

1. *Thompson J.M.T., Sieber J.* Predicting climate tipping as a noisy bifurcation: A review // *Int J. Bif. Chaos.* 2011. Vol. 21, № 2. P. 399.
2. *Монин А.С., Шликов Ю.А.* Климат как проблема физики // *Успехи физических наук.* 2000. № 4. С. 419.
3. *Lorenz E.N.* Deterministic nonperiodic flow // *Journal of the Atmospheric Sciences.* 1963. Vol. 20, № 2. P. 130.
4. *Чуличков А.И.* Математические модели нелинейной динамики. М.: Физматлит, 2000.
5. *Tucker W.* The Lorenz attractor exists // *C. R. Acad. Sci. Paris.* 1999. Vol. 328. P. 1197.
6. *Goody R.M.* The influence of radiative transfer on cellular convection // *J. Fluid Mech.* 1956. V. 1. P. 424.

7. *Larson V.E.* The effects of thermal radiation on dry convective instability // *Dynamics of Atmospheres and Oceans*. 2001. Vol. 34. P. 45.
8. *Goody R.M.* Atmospheric Radiation. I. Theoretical Basis. Oxford University Press, New York, 1964.
9. *Goody R.M.* Corrigendum // *J. Fluid Mech.* 1956. Vol. 1. P. 670.
10. *Goody R.M., Yung Y.L.* Atmospheric Radiation: Theoretical Basis, 2nd Edition. Oxford University Press, New York, 1989.
11. *Gille J., Goody R.M.* Convection in a radiating gas // *J. Fluid Mech.* 1964. Vol. 20. P. 47.
12. *Goody R.M.* Principles of Atmospheric Physics and Chemistry. Oxford University Press, New York, 1995.
13. *Spiegel E.A.* The convective instability of a radiating fluid layer // *Astrophys. J.V.* 1960. Vol. 132. P. 716.
14. *Spiegel E.A., Veronis G.* On the Boussinesq approximation for a compressible fluid // *Astrophys. J.* 1960. Vol. 131. P. 442.
15. *Larson V.E.* Stability properties of and scaling laws for a dry radiative-convective atmosphere // *Q. J. R. Meteorol. Soc.* 2000. Vol. 126. P. 145.
16. *Murgai M.P., Khosla P.K.* A study of the combined effect of thermal radiative transfer and a magnetic field on the gravitational convection of an ionized fluid // *J. Fluid Mech.* 1962. Vol. 14. P. 433.
17. *Narasimha R., Vasudeva Murthy A.S.* The energy balance in the Ramdas layer // *Bound. Layer Meteorol.* 1995. Vol. 76. P. 307.
18. *Vasudeva Murthy A.S., Srinivasan J., Narasimha R.* A theory of the lifted temperature minimum on calm clear nights // *Phil. Trans. R. Soc. London A.* 1993. Vol. 344. P. 183.
19. *Sudakov I., Vakulenko S.* Bifurcations of the climate system and greenhouse gas emissions // *Philos. Trans. A Math. Phys. Eng. Sci.* 2013: 371(1991):20110473.
20. *Bledoui F., Soufani A.* The onset of Rayleigh–Benard instability in molecular radiating gases // *Phys. Fluids A.* 1997. Vol. 9. P. 3858.
21. *Getling A.V.* On the scales of convection flows in a horizontal layer with radiative energy transfer // *Atmos. Oceanic Phys.* 1980. Vol. 16. P. 63.
22. *Veronis G.* Penetrative convection // *Astrophys. J.* 1963. Vol. 137. P. 641.
23. *Vincenti W.G., Traugott S.C.* The coupling of radiative transfer and gas motion // *Annu. Rev. Fluid Mech.* 1971. Vol. 3. P. 89.
24. *Полежаев В.И., Яремчук В.П.* Численное моделирование двумерной нестационарной конвекции в горизонтальной слое конечной длины, подогреваемом снизу // *Механика жидкости и газа*. 2001. № 4. С. 34.
25. *Joseph D.D.* Nonlinear stability of the Boussinesq equations by the method of energy // *Arch. Ration. Mech. Anal.* 1965. Vol. 22. P.163.
26. *Судаков И.А.* Динамика протаивания мерзлотных озер и изменения климата // *Научно-технические ведомости Санкт-Петербургского государственного поли-*

- технического университета. Физико-математические науки. 2011. № 2. С. 74.
27. *Генри Д.* Геометрическая теория полулинейных параболических уравнений. М.: Мир, 1984.
 28. *Drazin P.G., Reid W.H.* Hydrodynamic Stability. Cambridge University Press, New York, 1981.
 29. *Бесов О.В., Ильин В.П., Никольский С.М.* Интегральные представления функций и теоремы вложения. М.: Наука, 1975.
 30. *Ладыженская О.А.* Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости. М.: Наука, 1970.
 31. *Стейн И.М.* Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций. М.: Мир, 1973.
 32. *Фридман А.* Уравнения с частными производными параболического типа. М.: Мир, 1968.
 33. *Сорокин В.С.* О стационарных движениях жидкости, подогреваемой снизу // ПММ. 1954. № 18, вып. 2. С. 197.
 34. *Гершуни Г.З., Жуховицкий Е.М.* Конвективная устойчивость несжимаемой жидкости. М.: Наука, 1972.
 35. *Гершуни Г.З., Жуховицкий Е.М.* Конвективная устойчивость // Итоги науки и техники. Серия «Механика жидкости и газа». 1978. Т. 11. С. 66.
 36. *Straughan B.* The Energy Method, Stability, and Nonlinear Convection. Springer, New York, 1992.
 37. *Barnsley M.F., Demko S.* Iterated function systems and the global construction of fractals// Proc. Roy. Soc. London Ser. A. 1978. Vol. 399. 1817. P. 243.

Университет Юты, США

Поступила в редакцию

16.10.2012

Институт проблем машиноведения РАН

После доработки

1.05.2013

Новгородский госуниверситет

NEW TYPE OF BIFURCATIONS IN THE MODIFIED RAYLEIGH–BÉNARD CONVECTION PROBLEM

I. A. Sudakov, S. A. Vakulenko, T. G. Sukacheva

The original Rayleigh–Bénard convection is a standard example of the system where bifurcations occur with changing of a control parameter. In this paper we consider the modified Rayleigh–Bénard convection problem including radiative effects as well as gas sources on a surface. Such formulation leads to the identification of new type of bifurcations in the problem besides the well-known Bénard cells. This problem is very important for mathematics of climate because it proves the occurrence of the climate system tipping point related to greenhouse gas emission into the atmosphere.

Keywords: Rayleigh–Bénard convection, bifurcations, radiation, gas emission, tipping point, climate.



Судаков Иван Алексеевич – родился в Свердловской области (1985), окончил физический факультет Уральского государственного университета им. А.М. Горького (2008). После окончания университета обучался в аспирантуре Санкт-Петербургского государственного университета по специальности «Климатология», а также Новгородского государственного университета им. Ярослава Мудрого по специальности «Математическое моделирование». Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук в НовГУ (2012) в области прикладной математики. В настоящее время занимает должность профессора, ассистирующего в исследованиях, математического департамента Университета Юты (США). Награжден именными стипендиями: имени Фридьофа Нансена (2008), имени Отто Шмидта (2011), имени Эдварда Лоренца (2012). Лауреат премии правительства СПб в области научно-педагогической деятельности за 2010 год.

University of Utah, 155 S 1400 E, Room 233
Salt Lake City, UT 84112-0090 USA
E-mail: sudakov@math.utah.edu



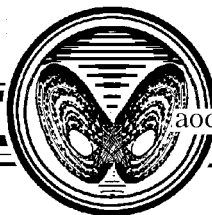
Вакуленко Сергей Августович – родился в Ленинграде (1953), окончил математико-механический факультет Ленинградского государственного университета (1976), защитил кандидатскую диссертацию в 1981, докторскую диссертацию (по теоретической и математической физике) в 1993 в Санкт-Петербургском государственном университете. Являлся приглашенным профессором в Лионском Университете (1998–2003), университетах г. Ренна и г. Монпелье (2004–2012). С 2006–2011 заведовал кафедрой высшей математики и информатики Санкт-Петербургского государственного университета технологии и дизайна. Соавтор двух книг и автор свыше 70 работ по математической и теоретической физике, математической биологии и механике, опубликованных в ведущих журналах. Был одним из ведущих организаторов международной конференции «Patterns and Waves» (Пушкин, 2002). В настоящее время работает в должности ведущего научного сотрудника Института проблем машиноведения РАН.

199178 Санкт-Петербург, Большой проспект В.О., д. 61
Институт проблем машиноведения РАН
E-mail: vakulenfr@mail.ru



Сукачева Тамара Геннадьевна – родилась в Новгороде (1955), окончила физико-математический факультет Новгородского государственного педагогического института (1977). Защитила диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности «дифференциальные уравнения» в Воронежском государственном университете (1990) и доктора физико-математических наук по специальности «математическое моделирование, численные методы и комплексы программ» в Новгородском государственном университете (2004). Автор монографии «Расширенные фазовые пространства моделей Осколкова». Имеет более 100 различных публикаций. В настоящее время работает в должности профессора кафедры алгебры и геометрии Института Электронных и Информационных Систем Новгородского государственного университета имени Ярослава Мудрого.

173003 Великий Новгород, ул. Большая Санкт-Петербургская, д. 41
Новгородский государственный университет им. Ярослава Мудрого,
Институт электронных и информационных систем
E-mail: tamara.sukacheva@novsu.ru



СИСТЕМА ТРЕХ НЕАВТОНОМНЫХ ОСЦИЛЛЯТОРОВ С ГИПЕРБОЛИЧЕСКИМ ХАОСОМ

Часть 2

Модель с DA-аттрактором

Д. С. Аржанухина, С. П. Кузнецов

Рассматривается система трех связанных неавтономных осцилляторов ван дер Поля, в которой поведение фаз осцилляторов за характерный период приближенно описывается отображением Фибоначчи с модификацией типа «хирургии Смейла», приводящей к возникновению DA-аттрактора («Derived from Anosov»). Согласно численным результатам, аттрактор стробоскопического отображения системы представляет собой объект, расположенный приблизительно на вложенном в шестимерное фазовое пространство двумерном торе, и обладает характерной для DA-аттракторов поперечной канторовой структурой.

Ключевые слова: Гиперболический хаос, отображение Аносова, кот Арнольда, отображение Фибоначчи, DA-аттрактор.

Введение

Среди динамических систем со структурно-устойчивым хаосом [1–8] выделяют специальный класс систем Аносова [9,10], в частности, к ним относятся гиперболические автоморфизмы тора. Динамика таких систем хаотическая, причем типичная траектория покрывает плотно поверхность тора, выступающую в качестве фазового пространства системы. Примером может служить отображение «кот Арнольда» [11–13]:

$$\begin{aligned} X_{n+1} &= X_n + Y_n \pmod{1}, \\ Y_{n+1} &= X_n + 2Y_n \pmod{1}, \end{aligned} \tag{1}$$

которое было положено в основу рассмотрения в первой части нашей статьи [14]. Заметим, что его можно представить также как двукратную итерацию отображения Фибоначчи

$$\varphi_{n+1} = \varphi_n + \varphi_{n-1} \pmod{1}. \tag{2}$$

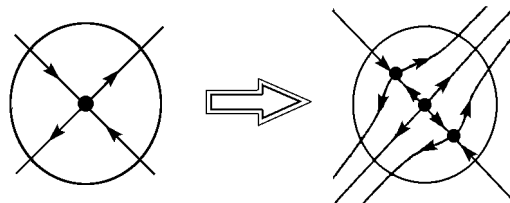


Рис. 1. Иллюстрация модификации отображения в окрестности неподвижной точки (рисунок из статьи [5])

предложенной Смейлом [9]. Модификация должна быть выполнена так, чтобы вдоль неустойчивого направления характер движения не изменился, а вдоль ортогонального к нему направления неподвижная точка стала отталкивающей, и в ее окрестности возникли две седловые точки, тогда как сама она превратилась бы в неустойчивый узел (рис. 1) [5]. Смейл называет эту процедуру «хирургией», а возникающий в результате гиперболический аттрактор – DA-аттрактором. (Это означает «Derived from Anosov», то есть полученный из системы Аносова.)

В первой части нашей работы [14] была предложена и исследовалась система трех связанных неавтономных осцилляторов ван дер Поля, в которой изменение фаз за период модуляции параметров описывается отображением Фибоначчи, демонстрирующим гиперболическую динамику. В настоящей, второй части сначала строится определенное конкретное отображение, в котором реализуется DA-аттрактор, а затем рассматривается система трех неавтономных связанных осцилляторов ван дер Поля, в которой динамика фаз за характерный период приближенно описывается таким отображением. Представлены численные результаты исследования динамики системы, свидетельствующие в пользу предположения о гиперболической природе наблюдаемого аттрактора.

1. Модифицированное отображение Фибоначчи

Процедуру, имеющую результатом построение DA-аттрактора, можно применить к отображению (2), причем модификацию удастся выполнить с использованием гладких функций. Следуя работе [5], для этого добавим к правой части отображения слагаемое $f(\varphi_{n-1})$, вид которого выбирается из следующих соображений. Поскольку речь идет об отображении на торе, функция должна иметь период 2π . Чтобы сохранялась неподвижная точка в начале координат, полагаем функцию нечетной. Учитывая в разложении в ряд Фурье только два первых слагаемых, выберем коэффициенты так, чтобы вблизи точки $\varphi = 0$ добавка обращалась в нуль с точностью до второго порядка малости. Это приводит к функции вида $f(\varphi) = \varepsilon(\sin \varphi + (1/2) \sin 2\varphi)$, где ε характеризует относительную величину добавки. На рис. 2, а показан портрет аттрактора отображения

$$\varphi_{n+1} = \varphi_n + \varphi_{n-1} + f(\varphi_{n-1}) \pmod{2\pi} \quad (3)$$

при $\varepsilon = 0.7$ в единичном квадрате на плоскости переменных $(\varphi_{n-1}, \varphi_n)$, на котором хорошо прослеживается характерная поперечная канторова структура.

Рассмотрим теперь систему, состояние которой определяется комплексной переменной z , причем преобразование состояния за шаг дискретного времени таково, что модуль остается постоянным, а аргумент $\varphi = \arg z$ изменяется в соответствии с отображением (3).

Для этого полагаем

$$z_{n+1} = \frac{z_n z_{n-1} \exp(iff(\arg z_{n-1}))}{|z_n z_{n-1}|}. \quad (4)$$

Воспользуемся разложением функции $\exp(iff(\varphi))$ в ряд Фурье, что эквивалентно разложению правой части (4) по степеням z и z^* . При $\varepsilon = 0.7$ имеем

$$e^{iff(\varphi)} \cong 0.055e^{-3i\varphi} - 0.094e^{-2i\varphi} - 0.377e^{-i\varphi} + 0.854 + 0.261e^{i\varphi} + 0.209e^{2i\varphi} + 0.058e^{3i\varphi} \quad (5)$$

или

$$z_{n+1} = \frac{z_n z_{n-1} (0.055z_{n-1}^{*3} - 0.094z_{n-1}^{*2} - 0.377z_{n-1}^* + 0.854 + 0.261z_{n-1} + 0.209z_{n-1}^2 + 0.058z_{n-1}^3)}{|z_{n+1}|}. \quad (6)$$

Отклонение отображения (6) от формы (4) невелико и, как показывают численные расчеты, не приводит к изменению структуры аттрактора. Это имеет в качестве фундаментальной основы присущее гиперболическому аттрактору свойство структурной устойчивости. Учитывая данный момент, можно попробовать оставить в разложении (6) вообще всего лишь два члена с самыми большими коэффициентами, в результате чего получается очень простое отображение

$$z_{n+1} = z_n(z_{n-1} + \kappa) / |z_n(z_{n-1} + \kappa)|, \quad (7)$$

где $\kappa = -0.441$. Хотя характер динамики при этом нарушается, его удастся восстановить, увеличивая параметр κ . На рис. 2, б показан аттрактор для отображения (7) при $\kappa = -0.65$, вид которого находится в качественном соответствии с аттрактором отображения (3) на рис. 2, а.

Как нетрудно заметить, отображение (7) можно представить в виде (3), но с другой функцией $f(\varphi)$. В самом деле, записывая

$$e^{i\varphi_{n+1}} = e^{i(\varphi_n + \varphi_{n-1})} (1 + \kappa e^{-i\varphi_{n-1}}), \quad (8)$$

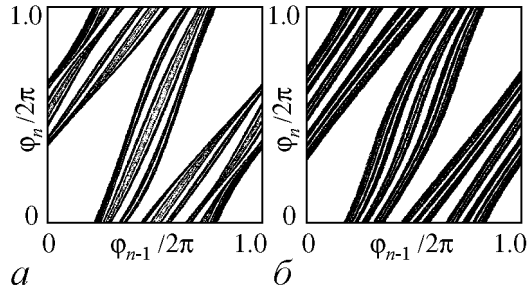


Рис. 2. Портрет аттрактора отображения (3) при $\varepsilon = 0.7$ (а) и отображения (7) при $\kappa = -0.65$ (б)

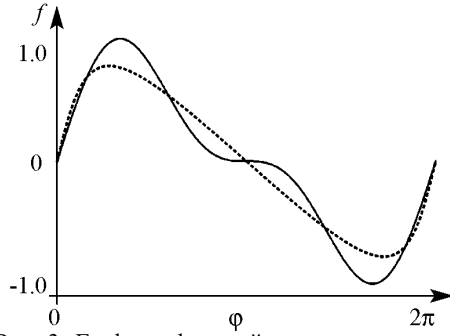


Рис. 3. Графики функций, используемых при модификации отображения Фибоначчи для получения DA-аттрактора

получаем

$$\varphi_{n+1} = \varphi_n + \varphi_{n-1} - \arctg \frac{\kappa \sin \varphi_{n-1}}{1 + \kappa \cos \varphi_{n-1}} \pmod{2\pi}. \quad (9)$$

На рис. 3. приведены для сравнения графики функций $f(\varphi) = \varepsilon(\sin \varphi + (1/2) \sin 2\varphi)$ при $\varepsilon = 0.7$ (сплошная кривая) и $f(\varphi) = -\arctg(\kappa \sin \varphi / (1 + \kappa \cos \varphi))$ при $\kappa = -0.65$ (пунктирная кривая).

2. Основные уравнения и механизм функционирования модели

Сконструируем систему, состоящую из трех автоколебательных элементов, в которой фазы колебаний описывались бы отображением Фибоначчи с DA-модификацией аналогичного вида, как в отображении (9). Модель задается системой дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x &= [B + A \cos(\frac{2\pi t}{T}) - x^2] \frac{dx}{dt} + [\varepsilon \frac{d(yz)}{dt} \cos \omega_0 t + \alpha \frac{dz}{dt}], \\ \frac{d^2y}{dt^2} + \omega_0^2 y &= [B + A \cos 2\pi(\frac{t}{T} - \frac{1}{3}) - y^2] \frac{dy}{dt} + [\varepsilon \frac{d(xz)}{dt} \cos \omega_0 t + \alpha \frac{dx}{dt}], \\ \frac{d^2z}{dt^2} + \omega_0^2 z &= [B + A \cos 2\pi(\frac{t}{T} - \frac{2}{3}) - z^2] \frac{dz}{dt} + [\varepsilon \frac{d(xy)}{dt} \cos \omega_0 t + \alpha \frac{dy}{dt}]. \end{aligned} \quad (10)$$

Здесь x , y и z – динамические переменные (обобщенные координаты), относящиеся к первому, второму и третьему осцилляторам, ω_0 – их собственная частота, равная частоте вспомогательного сигнала, присутствующего в виде множителя при последнем члене каждого уравнения. Параметр A характеризует глубину модуляции бифуркационного параметра, а B – постоянную составляющую, выбор которой определяет, какую часть периода осцилляторы проводят выше и ниже порога возбуждения, ε – параметр связи, T – период модуляции. Дополнительный параметр связи α , как будет видно из дальнейшего, отвечает за DA-модификацию.

Модуляция параметров осуществляется таким образом, что каждый из осцилляторов находится в возбужденном состоянии приблизительно одну треть часть периода. Благодаря фазовому сдвигу, осцилляторы возбуждаются по очереди: $\dots \rightarrow 1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 1 \rightarrow \dots$, и за один период модуляции возбуждение передается следующему осциллятору от двух его партнеров в циклическом порядке.

Предположим, что второй и третий осциллятор совершают колебания, фазы которых φ_y и φ_z , то есть $y \sim \sin(\omega_0 t + \varphi_y)$, $z \sim \sin(\omega_0 t + \varphi_z)$. Передача возбуждения от них первому осциллятору осуществляется через слагаемое в первом уравнении

$$\begin{aligned} (\frac{d(yz)}{dt} \cos \omega_0 t + \alpha \frac{dz}{dt}) &\sim -\sin(2\omega_0 t + \varphi_y + \varphi_z) \cos \omega_0 t - \alpha \sin(\omega_0 t + \varphi_z) = \\ &= -\frac{1}{2} \sin(\omega_0 t + \varphi_y + \varphi_z) - \alpha \sin(\omega_0 t + \varphi_z) + \dots, \end{aligned} \quad (11)$$

где многоточием обозначен нерезонансный член на третьей гармонике. Правую часть (11) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} \sin(\omega_0 t + \varphi_y + \varphi_z) + 2\alpha \sin(\omega_0 t + \varphi_z) &= \text{Im} [(e^{i(\varphi_y + \varphi_z)} + 2\alpha e^{i\varphi_z}) e^{i\omega_0 t}] = \\ &= \text{Im} [e^{i(\varphi_y + \varphi_z)} (1 + 2\alpha e^{-i\varphi_y}) e^{i\omega_0 t}] \sim \text{Im} [e^{i(\varphi_y + \varphi_z + f(\varphi_y))} e^{i\omega_0 t}], \end{aligned} \quad (12)$$

где

$$f(\varphi) = \arg(1 + 2\alpha e^{-i\varphi}) = -\text{arctg} \frac{2\alpha \sin \varphi}{1 + 2\alpha \cos \varphi}. \quad (13)$$

Таким образом, фаза возбуждаемых колебаний первого осциллятора будет определяться соотношением

$$\varphi_x = \varphi_z + \varphi_y + f(\varphi_y) \pmod{2\pi}, \quad (14)$$

то есть за один шаг передачи возбуждения для фаз имеет место соотношение, совпадающее при $\alpha = \kappa/2$ с отображением (9). На следующих стадиях передачи возбуждения изменение фаз дается циклической перестановкой ($x \rightarrow y \rightarrow z \rightarrow x \rightarrow \dots$) в формуле (14).

3. Численные результаты

Результаты численного решения системы (10) методом Рунге–Кутты четвертого порядка подтверждают, что динамика системы согласуется с приведенными выше качественными рассуждениями, так что можно сделать заключение о присутствии ДА-аттрактора в фазовом пространстве соответствующего стробоскопического отображения.

На рис. 4. приводятся временные зависимости для динамических переменных x, y, z при значениях параметров $A = 2.2, B = 1, \varepsilon = 0.05, \omega_0 = 2\pi, T = 30, \alpha = -0.45$. Как можно видеть, каждый осциллятор генерирует последовательность цугов колебаний, следующих друг за другом через интервал времени T . На каждом графике представлено наложение нескольких реализаций, позволяющее продемонстрировать присутствие хаоса в данной системе: фаза высокочастотного заполнения относительно огибающей хаотически меняется от одного периода активности к другому.

На рис. 5 представлены фазовые портреты аттрактора в стробоскопическом сечении, построенном в моменты времени $t_n = nT$ в проекции на плоскость обобщенная координата – обобщенная скорость для трех осцилляторов. Как можно видеть, при указанном выборе положения стробоскопического сечения амплитуда осциллятора x самая большая, амплитуда осциллятора z меньше, а для осциллятора y – самая малая.

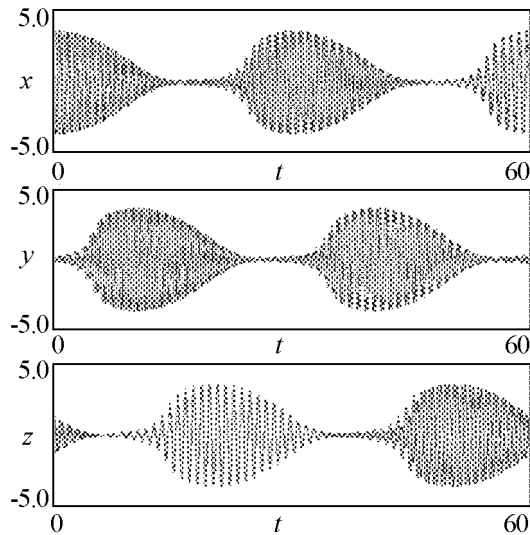


Рис. 4. Результат наложения нескольких временных реализаций для переменных x, y, z

На рис. 6, *a* представлен график, отражающий стробоскопическую динамику фаз при значениях параметров, приведенных выше. Фазы φ_n определяются в моменты времени $t = nT/3$, то есть на каждой трети периода модуляции, в циклическом порядке соотношениями

$$\varphi_x = \arg(x + i\dot{x}/\omega_0), \quad \varphi_y = \arg(y + iy/\omega_0), \quad \varphi_z = \arg(z + iz/\omega_0) \quad (15)$$

и представляются на графике в координатах $(\varphi_{n-1}, \varphi_n)$. На диаграммах можно наблюдать поперечную канторову структуру, соответствующую DA-аттрактору, как на рис. 2. Подобную структуру можно видеть также на фазовом портрете аттрактора в стробоскопическом сечении (рис. 6, *б*). Таким образом, можно сделать предположение, что аттрактор системы располагается, по крайней мере в некотором приближении, на вложенном в шестимерное фазовое пространство двумерном торе, динамика на котором определяется отображением Фибоначчи с DA-модификацией (9).

Для того чтобы количественно подтвердить присутствие хаоса, были рассчитаны показатели Ляпунова. Для этого использовался стандартный алгоритм Бенеттина [11,13]. Проводилось совместное решение уравнений (10) и шести комплектов

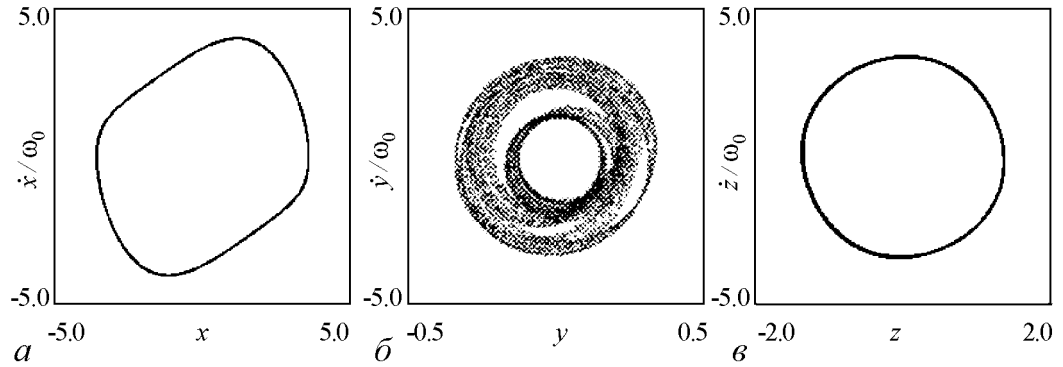


Рис. 5. Фазовые портреты аттракторов в стробоскопическом сечении в проекции на плоскости $x, \dot{x}/\omega_0$ (*a*), $y, \dot{y}/\omega_0$ (*б*), $z, \dot{z}/\omega_0$ (*в*)

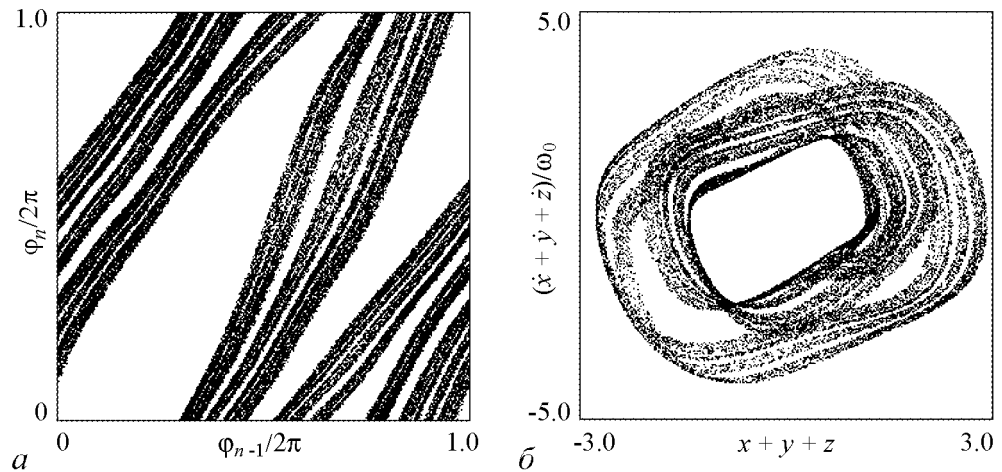


Рис. 6. График отображения фазы (*a*) и фазовый портрет (*б*) для системы (10)

уравнений в вариациях

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \tilde{x}}{dt^2} + \omega_0^2 \tilde{x} &= [B + A \cos(\frac{2\pi t}{T}) - x^2] \frac{d\tilde{x}}{dt} - 2x\tilde{x} \frac{dx}{dt} + \varepsilon [\frac{d(\tilde{y}z + y\tilde{z})}{dt} \cos \omega_0 t + \alpha \frac{d\tilde{z}}{dt}], \\ \frac{d^2 \tilde{y}}{dt^2} + \omega_0^2 \tilde{y} &= [B + A \cos 2\pi(\frac{t}{T} - \frac{1}{3}) - y^2] \frac{d\tilde{y}}{dt} - 2y\tilde{y} \frac{dy}{dt} + \varepsilon [\frac{d(\tilde{x}z + x\tilde{z})}{dt} \cos \omega_0 t + \alpha \frac{d\tilde{x}}{dt}], \\ \frac{d^2 \tilde{z}}{dt^2} + \omega_0^2 \tilde{z} &= [B + A \cos 2\pi(\frac{t}{T} - \frac{2}{3}) - z^2] \frac{d\tilde{z}}{dt} - 2z\tilde{z} \frac{dz}{dt} + \varepsilon [\frac{d(\tilde{x}y + x\tilde{y})}{dt} \cos \omega_0 t + \alpha \frac{d\tilde{y}}{dt}]. \end{aligned} \quad (16)$$

Каждый раз после определенного числа шагов разностной схемы при решении уравнений выполнялась ортогонализация Грама–Шмидта и нормализация для векторов возмущения $\{\tilde{x}, \dot{\tilde{x}}, \tilde{y}, \dot{\tilde{y}}, \tilde{z}, \dot{\tilde{z}}\}$. Показатели Ляпунова определяются при этом как средние скорости роста или уменьшения накапливающихся сумм логарифмов от норм векторов возмущения (после ортогонализации, но перед нормализацией). Полный спектр показателей Ляпунова, рассчитанный численно для аттрактора стробоскопического отображения Пуанкаре при значениях параметров $A = 2.2$, $B = 1$, $\varepsilon = 0.05$, $\omega_0 = 2\pi$, $T = 30$, $\alpha = -0.45$, приводится ниже:

$$\begin{aligned} \Lambda_1 &= 1.439, & \Lambda_2 &= -1.841, & \Lambda_3 &= -9.890, \\ \Lambda_4 &= -11.560, & \Lambda_5 &= -21.050, & \Lambda_6 &= -30.122. \end{aligned}$$

Значения двух старших показателей Ляпунова являются близкими по модулю и противоположными по знаку величинами. Остальные показатели даются большими по модулю отрицательными числами, что соответствует сильному сжатию фазового объема по четырем из шести направлений в фазовом пространстве. Как можно полагать, в шестимерном пространстве состояний системы (10) аттрактор располагается, по крайней мере в определенном приближении, на двумерном торе, динамика на котором описывается модифицированным отображением Фибоначчи, а сжатие по оставшимся четырем направлениям соответствует тому, что траектории в фазовом пространстве сходятся к данному объекту. На рис. 6, б аттрактор показан в проекции из шестимерного пространства состояний отображения Пуанкаре на плоскость.

На рис. 7 приведены графики показателей Ляпунова для системы (10) в зависимости от параметров A , α и ε при фиксированных остальных параметрах. Как можно видеть, значения двух старших показателей примерно постоянны в широком интервале изменения параметров, что также может рассматриваться как свидетельство в пользу присутствия в данной области грубого гиперболического хаоса.

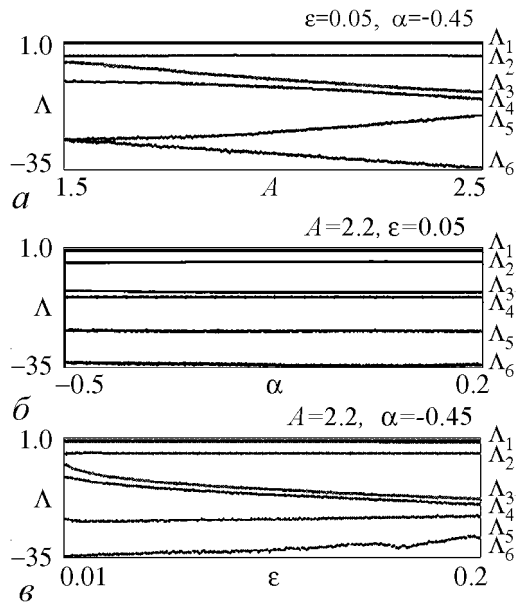


Рис. 7. Графики показателей Ляпунова системы (10) в зависимости от параметров A (а), α (б) и ε (в) при $B = 1$, $\omega_0 = 2\pi$, $T = 30$. Значения остальных параметров указаны в надписи для каждой диаграммы

4. Метод медленно меняющихся амплитуд

Перейдем от системы (10) к уравнениям для комплексных амплитуд. Для этого будем искать решение в виде

$$x = ae^{i\omega_0 t} + a^* e^{-i\omega_0 t}, \quad y = be^{i\omega_0 t} + b^* e^{-i\omega_0 t}, \quad z = ce^{i\omega_0 t} + c^* e^{-i\omega_0 t}, \quad (17)$$

где a, b, c – комплексные медленно меняющиеся функции времени. Также введем дополнительные условия

$$\dot{a}e^{i\omega_0 t} + \dot{a}^* e^{-i\omega_0 t} = 0, \quad \dot{b}e^{i\omega_0 t} + \dot{b}^* e^{-i\omega_0 t} = 0, \quad \dot{c}e^{i\omega_0 t} + \dot{c}^* e^{-i\omega_0 t} = 0. \quad (18)$$

Подставляя выражения в новых переменных в (10) и проводя усреднение по периоду внешнего воздействия, получим

$$\begin{aligned} \dot{a} &= \frac{1}{2} [B + A \cos(\frac{2\pi t}{T}) - |a|^2]a + \frac{1}{2} \varepsilon(b + \alpha)c, \\ \dot{b} &= \frac{1}{2} [B + A \cos 2\pi(\frac{t}{T} - \frac{1}{3}) - |b|^2]b + \frac{1}{2} \varepsilon(c + \alpha)a, \\ \dot{c} &= \frac{1}{2} [B + A \cos 2\pi(\frac{t}{T} - \frac{2}{3}) - |c|^2]c + \frac{1}{2} \varepsilon(a + \alpha)b. \end{aligned} \quad (19)$$

Отображения, описывающие поведение фаз колебаний, получаются так же как для системы (10), то есть фазы в циклическом порядке на каждой трети периода модуляции определяются как $\arg a, \arg b$ и $\arg c$, и представляются на графике в координатах $(\varphi_{n-1}, \varphi_n)$. Соответствующие диаграммы приведены на рис. 8, *a*, где хорошо видна поперечная структура, характерная для DA-аттрактора. На рис. 8, *b* представлен портрет аттрактора в стробоскопическом сечении на плоскости комплексной переменной, усредненной по трем осцилляторам.

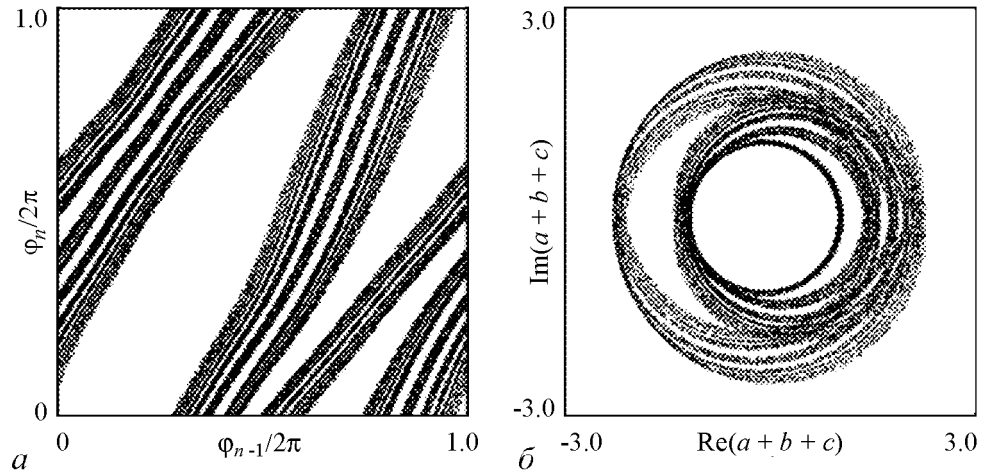


Рис. 8. График отображения фазы (*a*) и фазовый портрет (*b*) для системы (19)

Заключение

В настоящей работе рассмотрена система трех связанных поочередно возбуждающихся осцилляторов ван дер Поля, поведение фаз которых в некотором приближении описывается модифицированным отображением Фибоначчи, которое получается в результате введения диссипативной добавки, приводящей к возникновению

ДА-аттрактора. Также была получена система уравнений для комплексных медленно меняющихся амплитуд. На качественном уровне отображение, описывающее динамику фаз такой системы, также соответствует модифицированному отображению Фибоначчи.

Для данной системы были численно рассчитаны показатели Ляпунова для стробоскопического отображения. Два старших показателя Ляпунова остаются примерно постоянными в достаточно широком диапазоне изменения параметра.

Насколько нам известно, это первый пример физически реализуемой системы, аттрактор которой предположительно имеет отношение к предложенной в свое время Смейлом конструкции ДА-аттрактора. Конечно, желательно иметь математическое доказательство присутствия в данной ситуации гиперболического аттрактора. Такое строгое обоснование выходит за рамки настоящей работы: проведение доказательства на базе существующего математического инструментария для конкретной исследуемой системы дифференциальных уравнений представляется весьма трудной проблемой.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант № 12-02-00342.

Библиографический список

1. *Afraimovich V. and Hsu S.-B.* Lectures on chaotic dynamical systems. AMS/IP Studies in Advanced Mathematics, Vol. 28. American Mathematical Society, Providence RI, International Press, Somerville, MA, 2003.
2. *Гукенхеймер Дж., Холмс П.* Нелинейные колебания, динамические системы и бифуркации векторных полей. М.; Ижевск: Ин-т компьютерных исследований, 2002. 559 с.
3. *Devaney R.L.* An Introduction to Chaotic Dynamical Systems. NY: Addison–Wesley, 1989.
4. *Shilnikov L.* Mathematical problems of nonlinear dynamics: a tutorial // Int. J. of Bif. & Chaos. 1997. Vol. 7, № 9. P. 1353.
5. *Кузнецов С.П.* Гиперболические странные аттракторы систем, допускающих физическую реализацию // Изв. вузов. ПНД. 2009. Т. 17, № 4. С. 5.
6. *Кузнецов С.П.* Пример неавтономной системы с непрерывным временем, имеющей аттрактор типа Плыкина в отображении Пуанкаре // Нелинейная динамика. 2009. Т. 5, № 3. С. 403.
7. *Кузнецов С.П.* Динамический хаос и однородно гиперболические аттракторы: от математики к физике // Успехи физических наук. 2011. Т. 181, № 2. С. 121.
8. *Кузнецов С.П., Селезнев Е.П.* Хаотическая динамика в физической системе со странным аттрактором типа Смейла–Вильямса // ЖЭТФ. 2006. Т. 129, вып. 2. С. 400.
9. *Каток А.Б., Хасселблат Б.* Введение в современную теорию динамических систем / Пер. с англ. М.: Изд. «Факториал», 1999. 768 с.
10. *Coudene Y.* Pictures of hyperbolic dynamical systems // Notices of the American Mathematical Society. 2006. Vol. 53, № 1. P. 8.
11. *Кузнецов С.П.* Динамический хаос. М.: Физматлит, 2001. 296 с.
12. *Берже П., Помо И., Видаль К.* Порядок в хаосе. О детерминистском подходе к турбулентности. М.: Мир, 1991. 368 с.
13. *Шустер Г.* Детерминированный хаос. М.: Мир, 1988, 240 с.
14. *Аржанухина Д.С., Кузнецов С.П.* Система трех неавтономных осцилляторов с гиперболическим хаосом. Часть 1. Модель с динамикой на аттракторе, опи-

сываемой отображением на торе «кот Арнольда» // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2012. Т.20, №6. С.56.

Саратовский госуниверситет
СФ ИРЭ им. В.А. Котельникова РАН

Поступила в редакцию 6.09.2012
После доработки 15.01.2013

SYSTEM OF THREE NON-AUTONOMOUS OSCILLATORS WITH HYPERBOLIC CHAOS

Chapter 2

The model with DA-attractor

D. S. Arzhanukhina, S. P. Kuznetsov

We consider a system of three coupled non-autonomous van der Pol oscillators, in which the behavior of the phases over a characteristic period is described approximately by the Fibonacci map with modification of the «Smale surgery», which leads to the appearance of DA-attractor («Derived from Anosov»). According to the numerical results, the attractor of the stroboscopic map is placed approximately on a two-dimensional torus embedded in the six-dimensional phase space and has transverse Cantor-like structure typical for this kind of attractors.

Keywords: Hyperbolic chaos, Anosov map, Arnold's cat map, Fibonacci map, DA-attractor.



Аржанухина Дарья Сергеевна – родилась в Саратове (1988). Окончила факультет нелинейных процессов Саратовского государственного университета (2011). Защитила дипломную работу на тему «Сложная динамика и разрушение гиперболического хаоса в отображении «кот Арнольда» с диссипативным возмущением». В настоящее время является аспирантом базовой кафедры динамических систем факультета нелинейных процессов СГУ. Имеет 3 публикации.
410012 Саратов, ул. Астраханская, 83
Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского
E-mail: arzhanukhinadarja@rambler.ru



Кузнецов Сергей Петрович – родился в Москве (1951). Окончил Саратовский государственный университет (1973). С 1988 – сотрудник Саратовского филиала Института радиотехники и электроники им. В.А. Котельникова РАН, в настоящее время – заведующий лабораторией теоретической нелинейной динамики. Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук (1977) и доктора наук (1987) в СГУ по специальности радиофизика. Профессор кафедры динамических систем. Автор монографии «Hyperbolic Chaos. A Physicist's View», опубликованной в 2012 г., монографии «Strange Nonchaotic Attractors» (совместно с А. Пиковским и У. Фойдель), а также учебно-научных монографий «Динамический хаос» и «Нелинейные колебания» (в соавторстве с А.П. Кузнецовым и Н.М. Рыскиным). Опубликовал более 200 научных статей по нелинейной динамике, радиофизике и электронике. Под руководством С.П. Кузнецова защищены десять кандидатских диссертаций. Лауреат государственной научной стипендии для ученых России (1994-1996), Соросовский доцент (1998), Соросовский профессор (2000, 2001). Член редакционной коллегии журнала «Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика».
410019 Саратов, ул. Зеленая, 38
Саратовский филиал ИРЭ им. В.А. Котельникова РАН
E-mail: spkuz@rambler.ru



ИССЛЕДОВАНИЕ РЕГУЛЯРНОЙ И ХАОТИЧЕСКОЙ ДИНАМИКИ ОДНОЙ ФИНАНСОВОЙ СИСТЕМЫ

А. Ю. Зинченко

На основе комплексного численного исследования для нелинейной финансовой системы Чена построен атлас карт динамических режимов в зависимости от бифуркационных параметров и выявлены все основные сценарии перехода к детерминированному хаосу. Доказаны теоремы существования глобального аттрактора системы, периодических решений системы, наличие бифуркаций Пуанкаре–Андропова–Хопфа, а также теоремы из области управления аттракторами.

Ключевые слова: Детерминированный хаос, странный аттрактор, бифуркация, характеристические показатели Ляпунова, сечение и отображение Пуанкаре, хаотическая синхронизация.

Введение

Основной задачей исследования нелинейных динамических систем разной природы, которые, как правило, не имеют точных аналитических решений, есть задача выявления областей хаотических, регулярных и установившихся режимов, а также закономерности перехода от одного режима к другому. Сложность такого исследования обуславливается экспоненциальной чувствительностью системы к малым возмущениям ее параметров, делающим невозможным предсказание состояний на временах, превышающих некоторый временной масштаб, логарифмически зависящий от неточности задания начальных условий. Однако динамика хаотического режима системы является детерминированной и в ней можно установить ряд закономерностей и свойств, которые отличают ее от классических случайных процессов.

Для численного исследования нелинейных динамических систем, заданных дифференциальными уравнениями первого порядка, а также реконструкции их математических моделей по временной реализации предложена информационная технология и разработана многопоточная автоматизированная система*. Составлены

* Система внедрена на кафедре математических методов системного анализа Национального технического университета Украины «Киевский политехнический институт».

программы для реализации девятнадцати методов, две программы сделаны автором. В частности, для исследований были использованы методы [1]: для вычисления спектра ляпуновских характеристических показателей (ЛХП) – метод Бенеттина и др.; для построения сечения и отображения Пуанкаре – метод Эно; для построения спектральной плотности аттракторов – метод Филона; для построения инвариантной меры и численного решения систем – метод Рунге–Кутты с постоянным и переменным шагом численного интегрирования (с использованием корректирующей процедуры Дорманда–Принса).

В данной работе исследуется финансовая система Г. Чена [2]

$$\begin{aligned}\dot{x} &= z + (y - a)x, \\ \dot{y} &= 1 - by - x^2, \\ \dot{z} &= -x - cz,\end{aligned}\tag{1}$$

где $a \geq 0$ – параметр сохранения суммы процентной ставки, $b \geq 0$ – стоимость инвестиций, $c \geq 0$ – эластичность спроса на коммерческих рынках. Первое уравнение этой системы описывает изменение во времени процентной ставки, второе – инвестиционного спроса и третье – индекса цен.

1. Существование глобального аттрактора системы и оценка области, которой он ограничен

Пусть вектор X зависит от (x, y, z) и положим $X(t, t_0, X(t_0))$ – решение системы (1).

Определение 1. Будем называть глобальным притягивающим предельным множеством (глобальным аттрактором) системы (1) множество $\Omega_\lambda = \{X | V_\lambda(X(t)) \leq L_\lambda\}$, если существует такая константа $L_\lambda > 0$, что для любого $V_\lambda(X(t_0)) > L_\lambda$, $V_\lambda(X(t)) > L_\lambda$ выполняется $\lim_{t \rightarrow +\infty} V_\lambda(X(t)) \leq L_\lambda$.

Определение 2. Если для любого начального значения $X(t_0) \in \Omega_\lambda$ и для любого $t > t_0$ выполняется условие $X(t, t_0, X(t_0)) \in \Omega_\lambda$, тогда $\Omega_\lambda = \{X | V_\lambda(X(t)) \leq L_\lambda\}$ будем называть положительным инвариантом.

Определение 3. Если существует такая константа $L_\lambda > 0$, фиксированное число $r_\lambda > 0$ и некоторое $X(t_0) \in R^3$, что для любого $V_\lambda(X(t_0)) > L_\lambda$, $V_\lambda(X(t)) > L_\lambda$ выполняется следующее экспоненциальное оценивание разницы: $V_\lambda(X(t)) - L_\lambda \leq (V_\lambda(X(t_0)) - L_\lambda)e^{-r_\lambda(t-t_0)}$, тогда множество $\Omega_\lambda = \{X | V_\lambda(X(t)) \leq L_\lambda\}$ называется глобальным «экспоненциальным» аттрактором.

Теорема 1. Система (1) имеет глобальный «экспоненциальный» аттрактор и положительный инвариант, причём ограниченный семейством функций Ляпунова $V_\lambda(\lambda > 0)$ вида

$$V_\lambda = \frac{\lambda}{2}(x^2 + y^2 + z^2).$$

Доказательство.

$$\begin{aligned} \dot{V}_\lambda &= \lambda x(z + (y - a)x) + \lambda y(1 - by - x^2) + \lambda z(-x - cz) = \lambda xz + \lambda yx^2 - \lambda ax^2 + \lambda y - \\ &- \lambda by^2 - \lambda yx^2 - \lambda xz - c\lambda z^2 = -\lambda ax^2 + \lambda y - \lambda by^2 - c\lambda z^2 + (\lambda x^2)/2 + (\lambda y^2)/2 + \\ &+ (\lambda z^2)/2 - V_\lambda = -V_\lambda + F(x, y, z), \end{aligned}$$

$$\frac{\partial F(x, y, z)}{\partial x} = \frac{\partial F(X)}{\partial x} = -2\lambda ax + \lambda x = 0 \Rightarrow (x = 0), \quad (a = 1/2, x \neq 0),$$

$$\frac{\partial F(X)}{\partial z} = -2\lambda cz + \lambda z = 0 \Rightarrow (z = 0), \quad (c = 1/2, z \neq 0),$$

$$\frac{\partial^2 F(X)}{\partial x^2} = -2\lambda a + \lambda < 0 \Rightarrow a > 1/2,$$

$$\frac{\partial^2 F(X)}{\partial y^2} = -2\lambda b + \lambda < 0 \Rightarrow b > 1/2,$$

$$\frac{\partial^2 F(X)}{\partial z^2} = -2\lambda c + \lambda < 0 \Rightarrow c > 1/2,$$

$$\frac{\partial^2 F(X)}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 F(X)}{\partial y \partial z} = \frac{\partial^2 F(X)}{\partial z \partial x} = 0.$$

Следовательно, точка $(0; 1/(2b - 1); 0)$ есть точка локального максимума. Функция вогнутая, а значит, это глобальный максимум, поэтому

$$\begin{aligned} SUP_{X \in R^3} F(X) &= F(X) \Big|_{(0; 1/(2b-1); 0)} = \frac{\lambda}{2b - 1} - \frac{\lambda b}{(2b - 1)^2} + \frac{\lambda}{2(2b - 1)^2} = \\ &= \frac{\lambda(2b - 1)}{2(2b - 1)^2} = L_\lambda, \quad L_\lambda > 0 \Rightarrow b > 1/2. \end{aligned}$$

Учитывая последнее, имеем оценку сверху производной: $dV_\lambda/dt \leq -V_\lambda + L_\lambda$. По определению 1, имеем

$$V_\lambda > L_\lambda \Rightarrow -V_\lambda + L_\lambda < 0 \Rightarrow \frac{dV_\lambda}{-V_\lambda + L_\lambda} \geq dt.$$

Решив неравенство, получаем

$$V_\lambda - L_\lambda \leq e^{-t} C_1,$$

$$V_\lambda(X(t_0)) - L_\lambda = e^{-t_0} C_1 \Rightarrow C_1 = e^{t_0} (V_\lambda(X(t_0)) - L_\lambda).$$

Отсюда следует, что

$$V_\lambda - L_\lambda \leq e^{-t} e^{t_0} (V_\lambda(X(t_0)) - L_\lambda) = (V_\lambda(X(t_0)) - L_\lambda) e^{-(t-t_0)},$$

$$V_\lambda(X(t)) - L_\lambda \leq (V_\lambda(X(t_0)) - L_\lambda) e^{-(t-t_0)},$$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} V_\lambda(X(t)) \leq L_\lambda.$$

Таким образом, множество $\Omega_\lambda = \{X | V_\lambda(X(t)) \leq L_\lambda\}$ является глобальным «экспоненциальным» аттрактором и положительным инвариантом системы (1). ■

Для оценки области, которой ограничен аттрактор, умножим каждое уравнение системы (1) соответственно на x , y , z и сложим. В итоге получим

$$\frac{d(x^2 + y^2 + z^2)}{2dt} = zx + yx^2 - ax^2 + y - by^2 - x^2y - xz - cz^2 = -ax^2 + y - by^2 - cz^2.$$

Представим $-by^2$ как $-y^2 - (b-1)y^2$, тогда $y - by^2$ запишется, как $y - y^2 - (b-1)y^2$.

$$\begin{aligned} y - (b-1)y^2 &= -(b-1) \left[y^2 - 2\frac{y}{2(b-1)} + \left(\frac{1}{2(b-1)}\right)^2 - \left(\frac{1}{2(b-1)}\right)^2 \right] = \\ &= -(b-1) \left(y - \frac{1}{2(b-1)} \right)^2 + \frac{b-1}{4(b-1)^2} \leq \frac{1}{4(b-1)^2}, \quad b \neq 1. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\frac{d(x^2 + y^2 + z^2)}{2dt} = -ax^2 + y - by^2 - cz^2 \leq -ax^2 - cz^2 - y^2 + \frac{1}{4(b-1)^2}.$$

Пусть $l = \min\{a, c, 1\}$, тогда $\frac{d(x^2 + y^2 + z^2)}{2dt} \leq -l(x^2 + y^2 + z^2) + \frac{1}{4(b-1)^2}$ или $\frac{d(R^2)}{2dt} \leq -lR^2 + \frac{1}{4(b-1)^2}$. Обозначая $\gamma^2 \equiv \frac{1}{4(b-1)^2}$, получим $\frac{d(R^2)}{dt} + 2lR^2 = e^{-2lt} \frac{d(e^{2lt} R^2)}{dt} \leq \gamma^2$. Интегрируя это неравенство от 0 до t , получаем

$$R^2 = Ce^{-2lt}, \quad C'e^{-2lt} - 2lCe^{-2lt} + 2lCe^{-2lt} = \gamma^2 \Rightarrow C' = \gamma^2 e^{2lt},$$

$$C = \frac{\gamma^2}{2l} e^{2lt} + C_1, \quad R^2(t) = \left(\frac{\gamma^2}{2l} e^{2lt} + C_1 \right) e^{-2lt},$$

$$R^2(0) = \frac{\gamma^2}{2l} e^{2l \cdot 0} + C_1 \Rightarrow C_1 = R^2(0) - \frac{\gamma^2}{2l},$$

$$R^2(t) = \frac{\gamma^2}{2l} e^{2lt} + R^2(0) e^{-2lt} - \frac{\gamma^2}{2l} e^{-2lt} = \frac{\gamma^2}{2l} (1 - e^{-2lt}) + R^2(0) e^{-2lt}.$$

Тогда $R^2(t) \leq R^2(0) e^{-2lt} + \gamma^2 / (2l) (1 - e^{-2lt})$. Обозначив $R^2(0) e^{-2lt_0} + \gamma^2 / (2l) - \gamma^2 / (2l) e^{-2lt_0}$ как R_0 , можно сделать заключение: если притягивающим множеством выбрать шар, радиуса $R_0 > \gamma \equiv 1/(4(b-1))$, то траектория войдет в него за время, не превышающее

$$t_0 = \frac{1}{2l} \ln \left(\frac{R^2(0) - \frac{\gamma^2}{2l}}{R_0^2 - \frac{\gamma^2}{2l}} \right) = \frac{1}{2l} \ln \left(\frac{R^2(0) - \frac{1}{32l(b-1)^2}}{R_0^2 - \frac{1}{32l(b-1)^2}} \right),$$

после чего $R(t) < R_0$.

Действительно, если рассмотреть в 3-х мерном пространстве область, ограниченную неравенством $-ax^2 - cz^2 - y^2 + \frac{1}{4(b-1)^2} \geq 0$, то она ограничена поверхностью эллипсоида с центром в точке $(0; y - 1/b; 0)$. Вне этой области правая

часть этого неравенства отрицательная. Определим семейство эллипсоидов уравнением $x^2 + y^2 + z^2 = \text{const}$, где присутствует данная комбинация, полученная от производной левой части. Выберем значение константы максимально большим, чтобы получить эллипсоид, целиком ограничивающим рассмотренную область. Тогда на данной поверхности эллипсоида всюду выполняется двойное неравенство $d(x^2 + y^2 + z^2)/dt \leq -1/(2(b-1)^2) \leq 0$. То есть величина $x^2 + y^2 + z^2$ убывает с течением времени, а это означает, что все траектории, пересекающие эллипсоид, стремятся только внутрь ограниченной эллипсоидом области.

2. Исследование устойчивости положений равновесия

Система (1) имеет три стационарные точки:

$$S_0 = (0; \frac{1}{b}; 0), \quad S_2 = \left(-\sqrt{1 - ba - \frac{b}{c}}; \quad a + \frac{1}{c}; \quad \sqrt{\frac{1 - ba}{c^2} - \frac{b}{c^3}} \right),$$

$$S_3 = \left(\sqrt{1 - ba - \frac{b}{c}}; \quad a + \frac{1}{c}; \quad -\sqrt{\frac{1 - ba}{c^2} - \frac{b}{c^3}} \right)$$

при $b \neq 0$ и $c \neq 0$. Запишем теперь условие диссипативности для динамической системы (1)

$$\text{div } X(x, y, z) = \frac{\partial \dot{x}}{\partial x} + \frac{\partial \dot{y}}{\partial y} + \frac{\partial \dot{z}}{\partial z} = y - a - b - c < 0, \quad \text{то есть} \quad a + b + c > y.$$

Теорема 2. Если в системе (1) выполняются следующие условия:

$1 - ba - b/c > 0$, $bc \neq 1$, $b \neq 0$, $b \neq 1/c - c$, $c \neq 0$, $c \neq -b/2 \pm \sqrt{b^2/4 + 1}$ и $c(b + c - 1/c)^2 + bc^2 + 2c - 2abc - 3b \neq 0$, то существуют зависящие от параметра ε непрерывные функции $a = a(\varepsilon)$ и $T = T(\varepsilon)$, $a(0) = a_0$, $T(0) = -2\pi\beta^{-1}$ (где β – мнимое собственное значение линеаризованной матрицы векторного поля системы (1) в стационарной точке) такие, что в системе (1) существуют периодические решения $x(t, \varepsilon)$ периода $T(\varepsilon)$, которые влипают в точку $(0, 1/b, 0)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$. При этом имеет место бифуркация Андронова–Хопфа рождения предельного цикла, которая происходит при бифуркационных значениях параметра $a_0 = (c^4b + c^3b^2 - 3b^2c - 2c + 3b)/(2c^2b^2 - 2cb)$.

Доказательство. Сместим систему (1) линейным преобразованием $x(t) = x(t)$, $y(t) = y(t) + 1/b$, $z(t) = z(t)$ в начало координат так, чтобы она допускала нулевое состояние равновесия, то есть $X(\vec{0}) = 0$. Получим

$$\begin{aligned} \dot{x} &= (1/b - a)x + z + xy, \\ \dot{y} &= -by - x^2, \\ \dot{z} &= -x - cz. \end{aligned} \tag{2}$$

Состояния равновесия данной динамической системы будут следующие: $(0,0,0)$, $(-\sqrt{1-ba-b/c}; a + 1/c - 1/b; \sqrt{(1-ba)/c^2 - b/c^3})$ и $(\sqrt{1-ba-b/c}; a + 1/c - 1/b; -\sqrt{(1-ba)/c^2 - b/c^3})$ при $b \neq 0, c \neq 0$. Легко заметить, что при $1 - ba - b/c > 0$ система (2), а также и система (1) (что следует из данного линейного преобразования) имеют две особые точки. Линеаризация векторного поля в третьей стационарной точке имеет вид

$$M = \begin{pmatrix} a + 1/c - 1/b + 1/b - a & \sqrt{1-ba-b/c} & 1 \\ -2\sqrt{1-ba-b/c} & -b & 0 \\ -1 & 0 & -c \end{pmatrix} = \\ = \begin{pmatrix} 1/c & \sqrt{1-ba-b/c} & 1 \\ -2\sqrt{1-ba-b/c} & -b & 0 \\ -1 & 0 & -c \end{pmatrix}.$$

Характеристический полином этой матрицы имеет вид

$$\lambda^3 + (b + c - 1/c)\lambda^2 + (bc + 2 - 2ab - 3b/c)\lambda + 2(c - abc - b) = 0. \quad (3)$$

Предположим, что $\lambda, \bar{\lambda}, \alpha$ – корни этого уравнения, где $\lambda = \lambda_1 + i\lambda_2$ и α – действительный корень. Тогда для произвольного полинома, зависящего от x , можем записать $(x - \lambda)(x - \bar{\lambda})(x - \alpha) = 0$. Раскрывая скобки, получим

$$x^3 - (2\lambda_1 + \alpha)x^2 + (|\lambda|^2 + 2\lambda_1\alpha)x - \alpha|\lambda|^2 = 0. \quad (4)$$

Очевидно, что данный полином имеет два чисто мнимых корня тогда и только тогда, когда произведение коэффициентов при x^2 и x равно свободному члену. Действительно, пусть $\pm bi$ – чисто мнимые корни этого полинома, тогда $(x - bi)(x + bi) \times (x - \alpha) = 0$. Раскрывая скобки, получим $x^3 - ax^2 + b^2x - ab^2 = 0$. Следовательно, уравнение (3) имеет чисто мнимые корни тогда и только тогда, когда $\text{Im}(\lambda) = \lambda_2 \neq 0$ и выполняется соотношение

$$(b + c - 1/c)(bc + 2 - 2ab - 3b/c) = 2(c - abc - b).$$

Выбирая произвольные параметры b и c , будем предполагать, что бифуркация рождения предельного цикла происходит при определенном значении параметра a (обозначим его как a_0). Тогда, раскрывая скобки и приведя подобные члены, получаем $a_0 = (c^4b + c^3b^2 - 3b^2c - 2c + 3b)/(2c^2b^2 - 2cb)$, при этом $bc \neq 1$. Таким образом получили бифуркационное значение. Покажем теперь, что при бифуркационных значениях a_0 в системе (2) происходит бифуркация рождения предельного цикла. Для этого, пользуясь бифуркационной теоремой Хопфа [3], достаточно показать, что $\text{Re}\lambda'(a_0) \neq 0$, $\text{Im}\lambda(a_0) \neq 0$, $\text{Im}\bar{\lambda}(a_0) \neq 0$, $\alpha(a_0) < 0$.

1. Найдем $\operatorname{Re} \lambda'(a_0)$, то есть $\lambda'_1(a_0)$. Для этого приравняем коэффициенты при одинаковых степенях x в уравнениях (3) и (4). Получим

$$\begin{cases} -(b+c-1/c) = 2\lambda_1 + \alpha, \\ bc+2-2ab-3b/c = |\lambda|^2 + 2\lambda_1\alpha, \\ 2abc+2b-2c = |\lambda|^2\alpha \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} \alpha = -(b+c-1/c+2\lambda_1), \\ |\lambda|^2\alpha = 2abc+2b-2c, \\ \alpha(|\lambda|^2+2\lambda_1\alpha) = -(b+c-1/c+2\lambda_1)(bc+2-2ab-3b/c) = \\ = 2abc+2b-2c+2\lambda_1(b+c-1/c+2\lambda_1)^2. \end{cases} \quad (5)$$

Дифференцируя последнее уравнение по a , полагая $a = a_0$ и учитывая, что $\lambda_1(a_0) = 0$, получаем $-2\lambda'_1(a_0)(bc+2-2a_0b-3b/c) + (b+c-1/c)2b = 2bc+2\lambda'_1(a_0)(b+c-1/c)^2$. Тогда

$$\lambda'_1(a_0) = \frac{b^2c-b}{c(b+c-1/c)^2+bc^2+2c-2a_0bc-3b}.$$

Следовательно, $\operatorname{Re} \lambda'(a_0) \neq 0$ при $bc \neq 1$.

2. Найдем $\operatorname{Im} \lambda(a_0) = \lambda_2(a_0)$ и $\operatorname{Im} \bar{\lambda}(a_0) = -\lambda_2(a_0)$ из системы (5). Для этого перепишем второе уравнение: $2abc+2b-2c = |\lambda|^2\alpha = (\lambda_1^2+\lambda_2^2)(-b-c+1/c)$. Отсюда $\lambda_2^2(a_0) = \frac{2a_0bc+2b-2c}{1/c-b-c}$ и $\lambda_2(a_0) = \pm \sqrt{\frac{2(a_0bc+b-c)}{1/c-b-c}}$, $-\lambda_2(a_0) = \mp \sqrt{\frac{2(a_0bc+b-c)}{1/c-b-c}}$.

Найдем значения, при которых $\operatorname{Im} \lambda(a_0) \neq 0$ и $\operatorname{Im} \bar{\lambda}(a_0) \neq 0$. Запишем

$$\begin{cases} a_0bc+b-c=0, \\ 1-ba_0-b/c > 0 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} a_0bc+b-c=0, \\ a_0bc+b-c < 0. \end{cases}$$

Следовательно, $\operatorname{Im} \lambda(a_0) \neq 0$ и $\operatorname{Im} \bar{\lambda}(a_0) \neq 0$ при всех a, b, c таких, что $1/c-b-c \neq 0$, то есть, когда $b \neq 1/c-c$ и $c \neq -b/2 \pm \sqrt{b^2/4+1}$.

3. Найдем теперь $\alpha(a_0)$ (α – действительный корень уравнения (3)). Из системы (5) имеем $|\lambda|^2\alpha = 2abc+2b-2c$, то есть $\alpha(a_0) = 2(abc+b-c)/|\lambda|^2$. Поскольку система (2) имеет комплексные стационарные точки при $1-ba-b/c > 0$, то есть при $abc+b-c < 0$, то для всех значений параметров, удовлетворяющих выше наложенным условиям, будет справедливо $\alpha(a_0) = 2(abc+b-c)/|\lambda|^2 < 0$.

Таким образом, собственные числа линеаризованной матрицы M пересекают мнимую ось с ненулевой скоростью, поэтому при бифуркационном значении a_0 происходит бифуркация рождения предельного цикла – бифуркация Андронова–Хопфа. А значит, пользуясь теоремой Хопфа [3], в системе (2), а следовательно, и в системе (1), что вытекает из данного линейного преобразования, существуют непрерывные функции $a = a(\varepsilon)$ и $T = T(\varepsilon)$, зависящие от параметра ε , $a(0) = a_0$, (для системы (2) $a(0) = 0$), $T(0) = -2\pi\beta^{-1}$ (где β – мнимое собственное значение линеаризованной матрицы в стационарной точке) и такие, что в системе (1) существуют периодические решения $x(t, \varepsilon)$ периода $T(\varepsilon)$, что влипают в точку $(0, 1/b, 0)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$, а для системы (2) – в начало координат при $\varepsilon \rightarrow 0$. ■

3. Адаптивный контроль и глобальная экспоненциальная синхронизация

В данном разделе рассматривается управление детерминированным хаосом нелинейной финансовой хаотичной системы Чена с параметрами $a = 3.0$, $b = 0.1$, $c = 1.0$ с использованием адаптивного управления и хаотической синхронизации.

Теорема 3. *Финансовая система Чена в хаотическом режиме с управлением по второй координате $k\varphi(x, y, z)$ описывается системой уравнений*

$$\begin{aligned}\dot{x} &= z + (y - a)x, \\ \dot{y} &= 1 - by - x^2 + k\varphi(x, y, z), \\ \dot{z} &= -x - cz,\end{aligned}$$

где $y(1 + k\varphi(x, y, z)) \leq 0$, $\varphi(x, y, z) \in L_2 \cup L_\infty$ и $\dot{\varphi}(x, y, z) \in L_2 \cup L_\infty$ стремится к точке $(0; h; 0)$, где h есть корень уравнения $by - k\varphi(y) - 1 = 0$, $a \geq 0$, $b > 0$, $c > 0$, $a + b + c > y$. При этом динамический режим станет регулярным.

Доказательство. Рассмотрим семейство функций Ляпунова вида $V_\lambda = \lambda/2(x^2 + y^2 + z^2)$, $\lambda > 0$. Тогда $\dot{V}_\lambda = \lambda x(z + (y - a)x) + \lambda y(1 - by - x^2 + k\varphi(x, y, z)) + \lambda z(-x - cz) = -\lambda(ax^2 + by^2 + cz^2 - y(1 + k\varphi(x, y, z))) < 0$.

Лемма. *Если $f(t) \in (L_2 \cup L_\infty)$ и $\dot{f}(t) \in L_\infty$, тогда $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = 0$.*

Поскольку $\dot{V} < 0$, $x, y, z, \varphi(x, y, z) \in L_\infty$, $\int_0^t \dot{V} \leq 0$ и $x, y, z, \varphi(x, y, z) \in L_2$, $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, \dot{\varphi}(x, y, z) \in L_\infty$, то, согласно лемме, соответствующие функции равняются 0, а x и z стремятся к 0, то есть $by - k\varphi(y) - 1 = 0$. С учетом условий теоремы, налагаемых на параметры и на саму функцию φ , решение является единственным. Тогда, на основании теоремы Ляпунова об устойчивости, траектории данной системы асимптотически устойчивы в точке $(0; h; 0)$. ■

На рис. 1 приведено численное моделирование системы (1), иллюстрирующее применение теоремы, с выбранным управлением по координате 2. Параметры системы и начальные условия: $a = 3.0$, $b = 0.1$, $c = 1.0$ и $x(t_0) = 2.0$, $y(t_0) = 3.0$, $z(t_0) = 2.0$, соответственно. При этом система сходится к точке $(0; 0, 1; 0)$. Шаг дискретизации метода Рунге–Кутты 0.001.

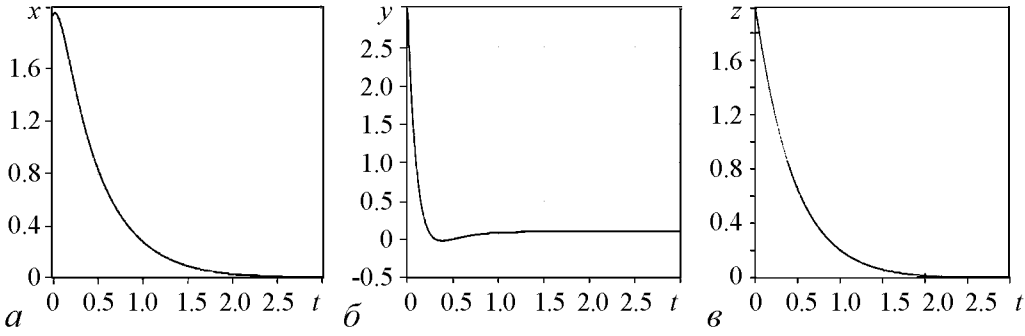


Рис. 1. Графики временных реализаций финансовой системы (1): a – координаты 1, \bar{b} – координаты 2, \bar{c} – координаты 3 при $k\varphi(x, y, z) = -9.9y$

Определение 4. Две нелинейные динамические системы

$$\dot{X} = F(t, X) \quad \text{и} \quad \dot{Y} = F(t, Y) + \mu(X, Y)$$

(где $X, Y \in \mathbb{R}^n$ – векторы состояния соответствующих систем, F – n -мерная нелинейная функция, μ – n -мерная функция управления) называются полностью синхронизированными (экспоненциально синхронизированными), если $\lim_{t \rightarrow \infty} \|Y(t) - X(t)\| = 0$. При этом система \dot{X} называется ведущей, а \dot{Y} – ведомой.

Определение 5. Если существует такое $\alpha > 0$, что для любого $t > t_0$ выполняется соотношение $V_\lambda(X(t)) \leq V_\lambda(X(t_0))e^{-\alpha(t-t_0)}$, то ведущая система является экспоненциально устойчивой.

Рассмотрим ведомую систему для финансовой системы Чена (1) с выбранным управлением $\mu(X, Y) = \mu(X(t) - Y(t))$, тогда система запишется как

$$\begin{aligned} \dot{x}_2 &= z_2 + (y_2 - a)x_2 + \mu_1(x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1), \\ \dot{y}_2 &= 1 - by_2 - x_2^2 + \mu_2(x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1), \\ \dot{z}_2 &= -x_2 - cz_2 + \mu_3(x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1). \end{aligned} \quad (6)$$

Введем ошибки синхронизации $e_x = x_2 - x_1$, $e_y = y_2 - y_1$, $e_z = z_2 - z_1$ и вычтем из (6) начальную систему (1). Тогда получим систему ошибок вида

$$\begin{cases} \dot{e}_x = z_2 + x_2 y_2 - a x_2 + \mu_1(x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1) - z_1 + x_1 y_1 - a x_1, \\ \dot{e}_y = 1 - b y_2 - x_2^2 + \mu_2(x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1) - 1 + b y_1 - x_1^2, \\ \dot{e}_z = -x_2 - c z_2 + \mu_3(x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1) + x_1 + c z_1. \end{cases} \quad (7)$$

Поскольку динамика хаотической системы ограничена, можно предположить, что $|y| \leq M_y$, $|x| \leq M_x$.

Теорема 4. Если существует такое управление, что $\mu_1 = -k e_x$, $\mu_2 = 0$, $\mu_3 = e_x(y_2 - a)$, $k > M_y - a + \frac{M_x^2}{4b} + \frac{(a - M_y)^2}{4c}$, то система (7) будет экспоненциально устойчивой, а системы (1) и (6) полностью синхронизированными.

Доказательство. Рассмотрим семейство функций Ляпунова вида

$$V_\lambda = \frac{\lambda}{2}(x^2 + y^2 + z^2), \quad \lambda > 0.$$

Тогда

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{e}_x = e_z - ae_x + x_2(y_2 - y_1) + y_2(x_2 - x_1) - (y_2 - y_1)(x_2 - x_1) + \mu_1(e_x, e_y, e_z) = \\ = e_z - ae_x + x_2e_y + y_2e_x - e_ye_x + \mu_1(e_x, e_y, e_z) = \\ = e_z - ae_x + x_2e_y + y_2e_x - e_ye_x - ke_x, \\ \dot{e}_y = -by_2 - e_x(x_2 + x_1) + \mu_2(e_x, e_y, e_z) = -by_2 - e_x(x_2 + x_1), \\ \dot{e}_z = -e_x - ce_z + \mu_3(e_x, e_y, e_z) = -e_x - ce_z + e_x(y_2 - a), \end{array} \right.$$

$$\begin{aligned} \dot{V} &= e_x(e_z - ae_x + x_2e_y + y_2e_x - e_ye_x - ke_x) + e_y(-by_2 - e_x(x_2 + x_1)) + e_z(-e_x - ce_z + e_x(y_2 - a)) = \\ &= e_xe_z - e_x^2a + x_2e_xe_y + y_2e_x^2 - e_x^2e_y - ke_x^2 - be_y^2 - e_xe_yx_2 - \\ &- e_xe_yx_1 - e_xe_z - ce_z^2 + e_xe_z(y_2 - a) = \\ &= e_x^2(y_2 - a - k) - be_y^2 - ce_z^2 - x_2e_xe_y + e_xe_z(y_2 - a) \leq \\ &\leq e_x^2(M_y - a - k) - be_y^2 - ce_z^2 - M_x|e_xe_y| + |e_xe_z|(M_y - a) = \\ &= -(|e_x||e_y||e_z|) \begin{pmatrix} a + k - M_y & \frac{1}{2}M_x & \frac{a - M_y}{2} \\ \frac{1}{2}M_x & b & 0 \\ \frac{a - M_y}{2} & 0 & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} |e_x| \\ |e_y| \\ |e_z| \end{pmatrix} = -E^T A E, \end{aligned}$$

$$\text{где } A = \begin{pmatrix} a + k - M_y & \frac{1}{2}M_x & \frac{a - M_y}{2} \\ \frac{1}{2}M_x & b & 0 \\ (a - M_y)/2 & 0 & c \end{pmatrix}.$$

Очевидно, что для обеспечения экспоненциальной устойчивости системы ошибок (7) необходимо, чтобы матрица A была положительно определенной. А это возможно тогда и только тогда, когда

$$\left\{ \begin{array}{l} a + k - M_y > 0 \Rightarrow k > M_y - a, \\ ba - bM_y + bk - \frac{1}{4}M_x^2 > 0 \Rightarrow k > M_y - a + \frac{M_x^2}{4b}, \\ \frac{a - M_y}{2} \frac{M_y b - ba}{2} + c(ba - bM_y + bk - \frac{1}{4}M_x^2) > 0 \Rightarrow k > M_y - a + \frac{M_x^2}{4b} + \frac{(a - M_y)^2}{4c}. \end{array} \right.$$

Итак, когда $k > M_y - a + \frac{M_x^2}{4b} + \frac{(a - M_y)^2}{4c}$, матрица A является положительно определенной, а значит \dot{V} отрицательное. То есть $\dot{V} \leq -\lambda_{\min}(A)V$ и $V(X(t)) \leq V(X(t_0))e^{-\lambda_{\min}(A)(t-t_0)}$, $t \geq t_0$. ■

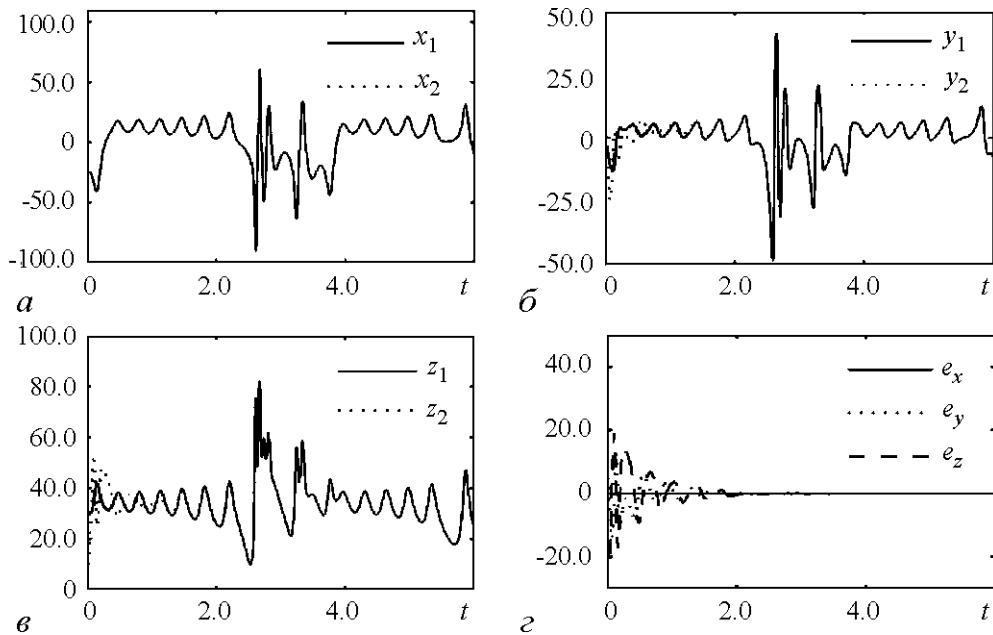


Рис. 2. Графики полной синхронизации временных реализаций финансовой системы Чена и экспоненциальной устойчивости системы ошибок (3) при $k = 20$

На рис. 2 приведено численное моделирование данной теоремы с выбранным $k = 20$. Параметры системы и начальные условия: $a = 3.0$, $b = 0.1$, $c = 1.0$ и $x(t_0) = 2.0$, $y(t_0) = 3.0$, $z(t_0) = 2.0$, соответственно. Шаг дискретизации метода Рунге–Кутты 10^{-3} .

4. Численное исследование регулярной и хаотической динамики

На рис. 3. приведена карта динамических режимов системы (1) относительно бифуркационных параметров a и c . Исследование финансовой системы Чена было проведено в окрестности рассчитанных стационарных точек системы при постоянном значении параметра $b = 0.1$ и начальных условиях $x(t_0) = 2.0$, $y(t_0) = 3.0$, $z(t_0) = 2.0$, соответственно. Шаг дискретизации метода Рунге–Кутты был выбран 0.001 на промежутке безразмерного времени от 0 до 100. Во избежание расчетов в переходном процессе (траектория еще не на аттракторе) вычисления спектра ЛХП происходило на временном интервале от 40 до 100 с шагом 0.04 по алгоритму Беннеттини и др. Параметр c изменялся в пределах от 0 до 9.525 включительно с шагом дискретизации 0.015, параметр a – в пределах от 0 до 3.28 включительно с шагом дискретизации 0.02. При вычислении спектра ЛХП было использовано свойство естественного параллелизма, присущего этой задаче, что позволило воспользоваться разработанной распределенной многопоточной автоматизированной системой. Построение всей карты динамических режимов при изменении двух вышеуказанных бифуркационных параметров на процессоре Pentium (R) Dual-Core CPU T4300 с тактовой частотой 2.10 GHz заняло 6 дней. Построение одного спектра и сечения Пуанкаре при тех же условиях на том же компьютере заняло около 6 часов.

На рис. 4 представлены зависимости параметра a от фазовой координаты z сечения Пуанкаре плоскостью $y = 2.6$ (а) и от фазовой координаты x сечения Пуанкаре

плоскостью $z = 1.0$ (*б*). Начальные условия: $x(t_0) = 2.0, y(t_0) = 3.0, z(t_0) = 2.0$; значения параметров – $b = 0.1, c = 1.0$. Параметр a менялся от 1 до 1.5 с шагом 0.001 (*а*) и от 7 до 7.2 с шагом 0.00001 (*б*). Переход от регулярных аттракторов к хаотическим осуществляется через каскад бифуркаций удвоения периода – сценарий Фейгенбаума (*а*) и через перемежаемость первого типа по Полю–Манневиллю (*б*). При перемежаемости к точке бифуркации двигаются навстречу устойчивый предельный цикл и неустойчивый. После их слияния происходит процесс реинжекции, то есть возвращения траекторий в область исчезнувшего предельного цикла, затем вновь уход и возвращение и т.д. Характер поведения системы в точке бифуркации определяется ее устойчивостью по Лагранжу (наличие диссипации) и по Пуассону (режим установившийся) и неустойчивостью по Ляпунову (наличие положительного показателя).

На рис. 5 представлены проекции фазовых портретов, иллюстрирующих каскад бифуркаций устойчивого цикла при тех же начальных условиях, что и на рис. 4, с шагом численного интегрирования 0.001, при бифуркационных значениях $a = 3.0$,

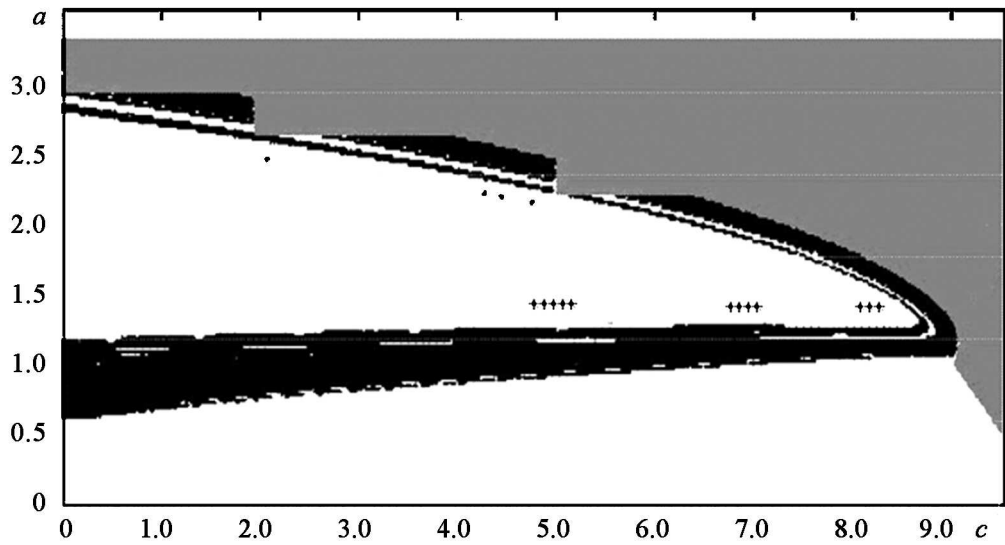


Рис. 3. Карта динамических режимов системы (1): черный цвет – хаотический режим, серый – положения равновесия, белый – периодический режим, «звездочки» – торы

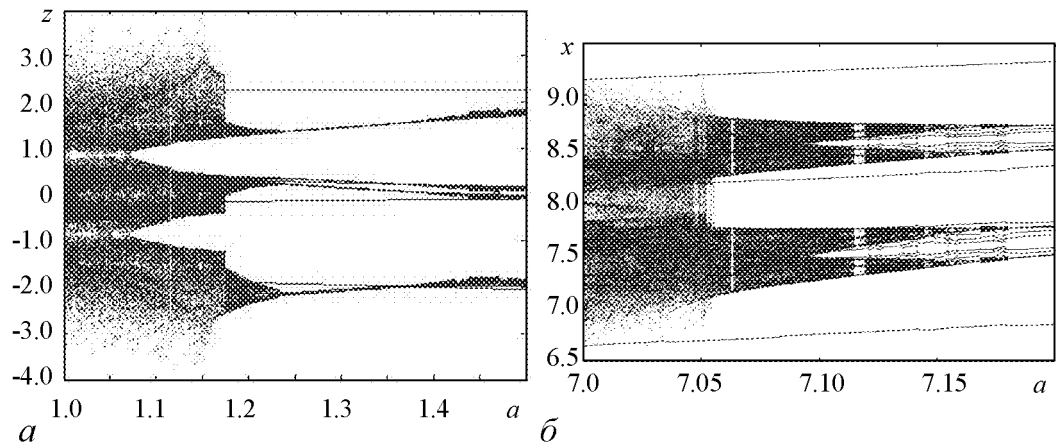


Рис. 4. Фазопараметрические характеристики системы (1). По оси абсцисс – параметр a , по оси ординат – сечение Пуанкаре плоскостью $y = 2.6$ (*а*) и $z = 1.0$ (*б*)

$b = 0.25, c = 1.0$. Изменение параметра b до 0.2 порождает хаос (z). Из рисунка можно сделать предположения, что для каскада бифуркаций устойчивых циклов имеет место порядок Шарковского (исследования для нелинейных систем см., например, в [4]), так как наличие цикла периода 3 (a) означает существование цикла любого периода из последовательности Шарковского, например цикла периода 5 ($б$). Субгармонический каскад бифуркаций устойчивых циклов порождает бесконечное число циклических субгармонических сингулярных аттракторов, которые являются значительно более сложными аттракторами – каждый из таких аттракторов порождается каскадом бифуркаций удвоения периода некоторого устойчивого цикла из ряда Шарковского, родившегося в результате соответствующей седло-узловой бифуркации, и является неполным циклическим субгармоническим аттрактором. Полный циклический субгармонический сингулярный аттрактор (z) возникает после каскада бифуркаций удвоения периода цикла периода три.

В заключение приведем сценарий Рюэля–Такенса – переход к хаосу через несколько бифуркаций Андронова–Хопфа. Исследования проводились в окрестно-

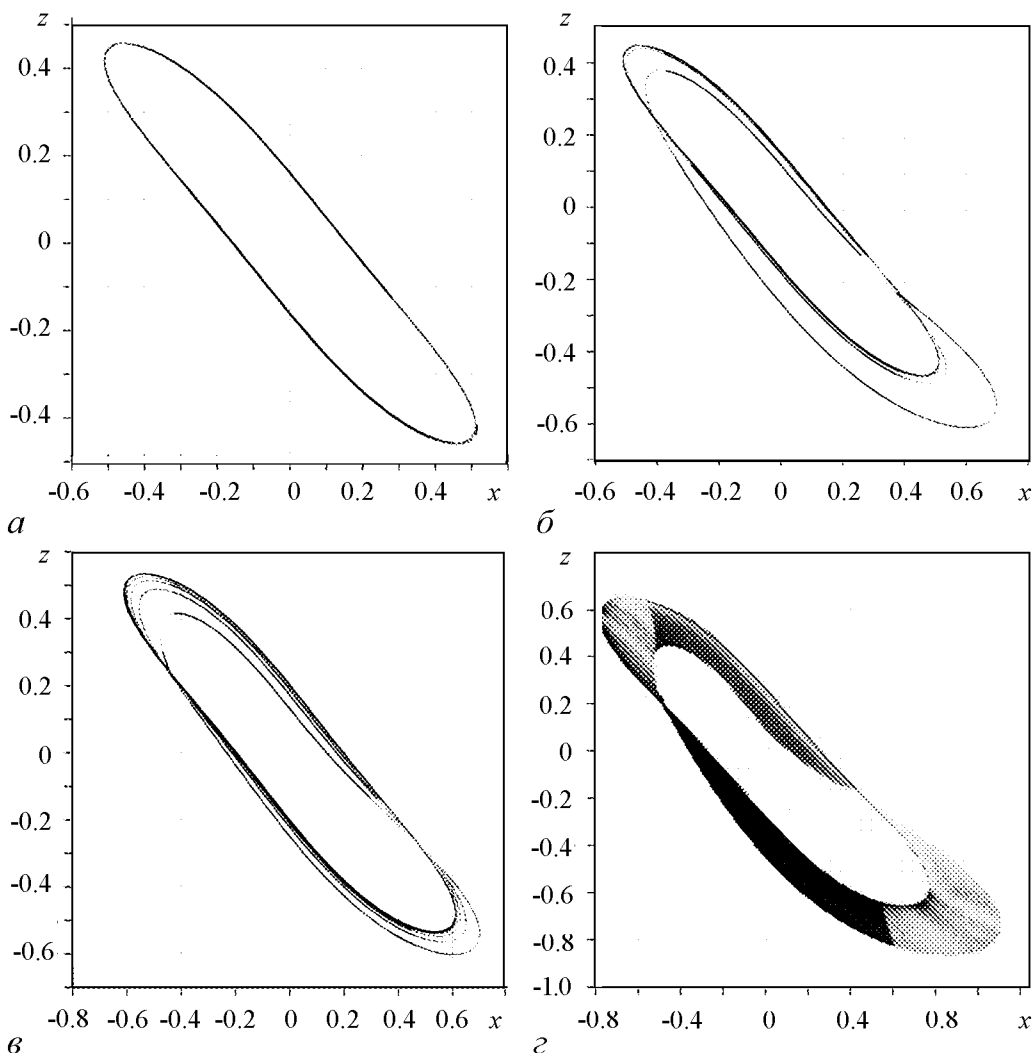


Рис. 5. Проекция каскада бифуркаций устойчивого цикла

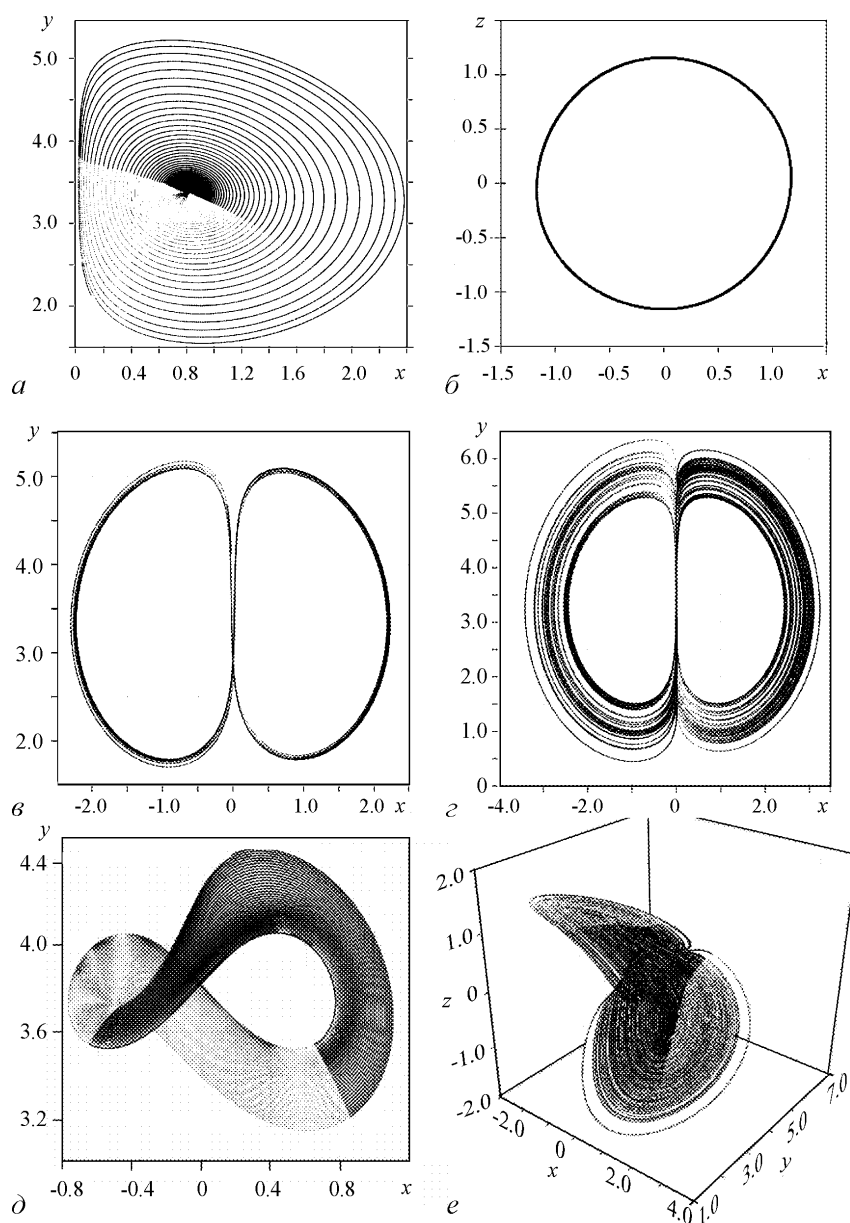


Рис. 6. Переход к хаосу через бифуркации Андронова–Хопфа (фокус теряет устойчивость)

сти полученных по теореме 2 бифуркационных точек a_0 . Как видно из рис. 6, особая точка-фокус теряет устойчивость. При этом из нее рождается небольшой устойчивый предельный цикл – мягкая потеря устойчивости, который при уменьшении параметра a_0 превращается в хаотический аттрактор системы.

Заключение

Доказаны теоремы: существования аттракторов в системе, существования периодических решений системы (регулярных режимов); найдены управления детерминированным хаосом, переводящие систему из хаотического режима в регулярный;

найлены управления для ведомой системы общего вида, при которых она полностью синхронизируется с ведущей системой. Построена карта динамических режимов системы и найдены основные три сценария перехода к хаосу: за сценарием Фейгенбаума, Рюэля–Такенса и Помо–Манневила.

Библиографический список

1. Данилов В.Я., Зинченко А.Ю. Синергетические методы анализа // Киев: НТУУ «КПИ» ВПИ ВПК «Политехника», 2011. 340 с.
2. Ma J.H., Chen Y.S. Study for the bifurcation topological structure and the global complicated character of a kind of nonlinear finance system. I // Applied Mathematics and Mechanics. 2001. Vol. 22, № 11. P. 1240.
3. Марсден Дж., Мак-Кракен М. Бифуркация рождения цикла и ее приложения. М.: Мир, 1980. 368 с.
4. Магницкий Н.А., Сидоров С.В. Новые методы хаотической динамики. М.: УРСС, 2004. 320 с.
5. Кузнецов С.П. Динамический хаос. М.: Физматлит, 2001. 296 с.
6. Малинецкий Г.Г., Потапов А.Б. Нелинейная динамика и хаос. Основные понятия: Уч. пособие. Изд. 2-е. М.: КомКнига, 2009. 240с.

Национальный технический
университет Украины «КПИ»

Поступила в редакцию 31.01.2013
После доработки 22.03.2013

INVESTIGATION OF REGULAR AND CHAOTIC DYNAMICS OF ONE FINANCIAL SYSTEM

A. Yu. Zinchenko

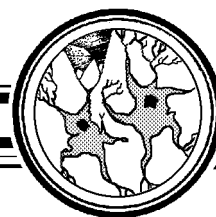
Based on complex numerical investigation for the nonlinear financial system introduced by Chen a map of dynamic regimes has been built, depending on the bifurcation parameters. All the major scenarios of transition to deterministic chaos have been found. Theorems of the existence of the globally exponentially attractive set and positive invariant, of periodic solutions, of Poincare–Andronov–Hopf bifurcation existence and theorems in the field of control of attractors are proved.

Keywords: Deterministic chaos, strange attractor, bifurcation, Lyapunov characteristic exponent, Poincare section and map, chaotic synchronization.



Зинченко Артём Юрьевич – родился в Киеве (1986), окончил Национальный технический университет Украины «Киевский политехнический институт» (2009). После окончания КПИ работает на кафедре математических методов системного анализа. В настоящее время аспирант этой кафедры. Автор пособия «Синергетические методы анализа» и методических указаний и задания к выполнению самостоятельных работ «Синергетические методы анализа» (в соавторстве с научным руководителем). Опубликовал 24 научных статьи и зарегистрировал авторское право на 2 компьютерные программы по направлениям, указанным выше.

Украина, 03056, Киев-56, проспект Победы, 37
Национальный технический университет Украины
«Киевский политехнический институт»
E-mail: arttem@yandex.ru



ВЛИЯНИЕ СВОЙСТВ ОСЦИЛЛЯТОРНОЙ СРЕДЫ НА РАСПРОСТРАНЕНИЕ ВОЗБУЖДЕНИЯ

А. К. Крюков, Г. В. Осипов

Изучается синхронизация локально диффузионно связанных осцилляторов Бонхоффера–ван дер Поля. Исследуется влияние индивидуальных частот элементов в одно- и двумерных осцилляторных средах на распространение возбуждения. Показывается, что скорость распространения возбуждения зависит от расстройки между частотой синхронизации и индивидуальными частотами элементов в ансамбле. Качественные и количественные зависимости, описывающие данный эффект, представлены результатами численного моделирования и объяснены теоретически.

Ключевые слова: Синхронизация, численное моделирование, пространственно-временные структуры.

Введение

В современных исследованиях распределенных систем большое внимание уделяется коллективным эффектам, таким как образование пространственно-временных структур и синхронизация [1–5]. В то же время многие эффекты, связанные с синхронным поведением и механизмы ряда коллективных эффектов в дву- и многомерных средах остаются не до конца понятными.

В данной работе исследуются эффекты при распространении волн в решетках неидентичных локально диффузионно связанных осцилляторов. В частности, исследуется влияние неидентичности элементов на формирование волн и пространственно-временных структур. Иллюстрируется общность механизмов коллективного поведения на примере двух связанных элементов, цепочек и решеток осцилляторов.

В работе показывается, что изменение неоднородности в одной части ансамбля может принципиально изменять характер колебаний и образующихся структур в другой части ансамбля, параметры которой были неизменны. Дается определение «быстрого» и «медленного» распространения возбуждения в ансамблях элементов с релаксационной динамикой.

1. Модель

В качестве модели рассматривается система Бонхоффера–ван дер Поля [6]:

$$\begin{cases} \dot{x}_{i,j} = F(x_{i,j}, y_{i,j}) + d(x_{i,j+1} + x_{i,j-1} + x_{i+1,j} + x_{i-1,j} - 4x_{i,j}), \\ \dot{y}_{i,j} = G_{i,j}(x_{i,j}), \\ i = 1, \dots, M, \\ j = 1, \dots, N, \end{cases} \quad (1)$$

где $F(x_{i,j}, y_{i,j}) = x_{i,j} - x_{i,j}^3/3 - y_{i,j}$, $G_{i,j}(x_{i,j}) = \varepsilon(x_{i,j} + a_{i,j})$, M и N количество элементов вдоль соответствующих измерений решетки, d – сила связи между элементами, значения параметров $\varepsilon \ll 1$, $0 < a_{i,j} < 1$ обеспечивают асимметричные релаксационные колебания. Неидентичность индивидуальных частот элементов обуславливается различными значениями $a_{i,j}$. Граничные условия – «свободные концы». Каждый элемент, будучи изолированным, имеет неустойчивое состояние равновесия $(-a_{i,j}, a_{i,j}^3/3 - a_{i,j})$ и устойчивый предельный цикл.

2. Распространение возбуждения при различных условиях

Известно, что в двумерной среде могут реализоваться концентрические и спиральные волны. Типичные распределения x_{ij} для концентрической и спиральной волн показаны на рис. 1. В обоих случаях в решетке присутствует один генератор ритма. В случае с концентрической волной это самый высокочастотный элемент ансамбля. В случае спиральной волны ритм определяется радиусом кривизны фронта в окрестности ядра волны и удовлетворяет эйкональному уравнению [7].

Времена активации элементов в случаях спиральной и концентрической волны сравнимы и пропорциональны соотношению периодов колебаний элементов. Пространственные масштабы (ширина фронта возбуждения) отличаются значительно сильнее. Таким образом, фронт возбуждения концентрической волны распространяется быстрее, чем фронт спиральной. Однако для элементов, находящихся далеко от ядра спиральной волны и центра концентрической единственное отличие состоит

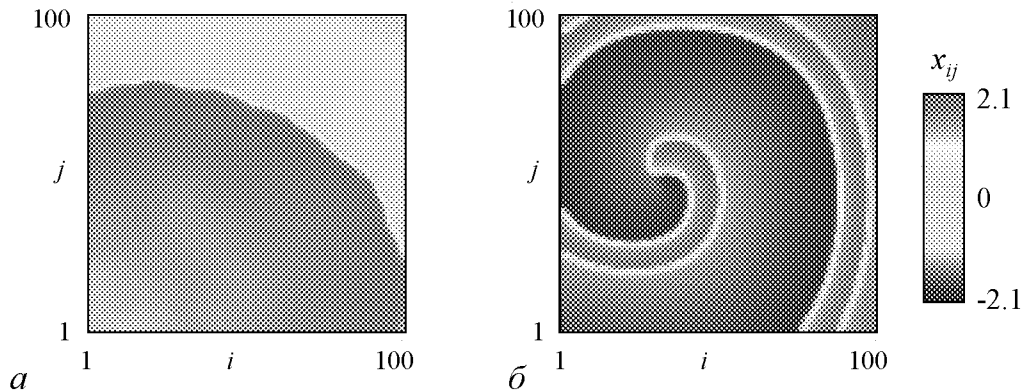


Рис. 1. Характерное мгновенное значение x_{ij} в решетке связанных неидентичных осцилляторов в синхронном режиме с одной (а) концентрической и (б) спиральной волнами

в том, с какой частотой приходят фронты возбуждения. На основании этих рассуждений можно предположить, что существует зависимость скорости распространения возбуждения от расстройки между частотой синхронизации и индивидуальными частотами элементов ансамбля.

3. Два связанных элемента

Для качественного объяснения зависимости скорости распространения возбуждения от расстройки между частотой синхронизации и индивидуальными частотами элементов рассмотрим систему двух связанных слабо неидентичных осцилляторов

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = F_1(x_1, y_1) + d(x_2 - x_1), \\ \dot{y}_1 = G_1(x_1), \\ \dot{x}_2 = F_2(x_2, y_2) + d(x_1 - x_2), \\ \dot{y}_2 = G_2(x_2). \end{cases} \quad (2)$$

Неидентичность элементов определяется разностью параметров $\Delta a = a_2 - a_1$, входящих в $G_{1,2}$. Фазовый портрет несвязанного элемента показан на рис. 2, *a*.

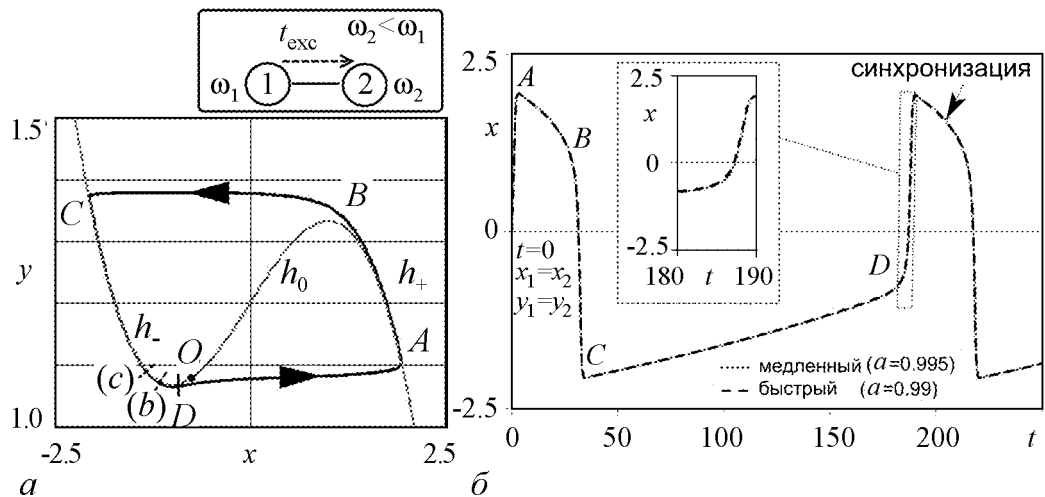
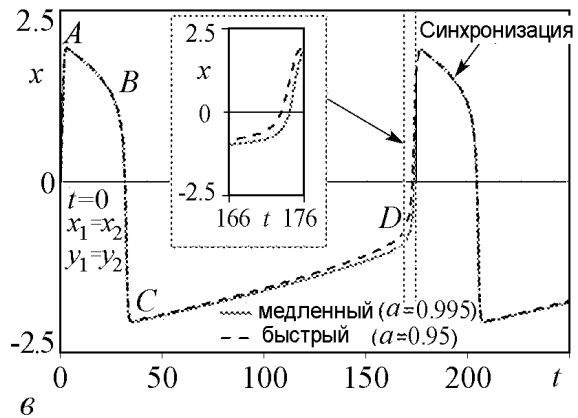


Рис. 2. *a* – Фазовый портрет одного автоколебательного элемента: *ABCD* – устойчивый предельный цикл, *O* – неустойчивое состояние равновесия, *h₋* и *h₊* – устойчивые ветви кривой медленных движений, *h₀* – неустойчивая ветвь кривой медленных движений; *б* – осциллограммы двух связанных осцилляторов (высокочастотный элемент показан штриховой линией) в случае малой расстройки Δa ; *в* – осциллограммы двух связанных элементов в случае большой расстройки Δa . Значения параметров: $d = 0.003$, $\varepsilon = 0.02$



Здесь $ABCD$ – устойчивый предельный цикл, O – неустойчивое состояние равновесия (координаты состояний равновесия для рассматриваемых элементов различны). Разница периодов элементов обуславливается различными временами прохождения участка предельного цикла, близкого к их состоянию равновесия. Пусть изначально оба элемента находятся в точке D . В следующий момент времени по быстрым движениям они оба переходят в точку A . Далее вместе проходят устойчивую ветвь кривой медленных движений h_+ до точки B и практически одновременно приходят в точку C . Ветвь h_- элементы будут проходить с разными скоростями из-за влияния положения состояния равновесия. Поэтому когда «быстрый» (высокочастотный) элемент вновь достигнет точки D , медленный элемент достигнет некой координаты на h_- . Рассмотрим случаи слабо неидентичных рис. 2, б и сильно неидентичных рис. 2, в элементов. Как только «быстрый» элемент перешел в точку A , «медленный» элемент станет подстраиваться под ритм «быстрого». Очевидно, что чем выше разница индивидуальных частот, тем больше времени необходимо для возбуждения «медленного» элемента, что полностью подтверждается осциллограммами, приведенными на рис. 2, б и в. Когда подстройка компенсирует разность, возникающую в ходе движения элементов по h_- , можно говорить о режиме синфазной синхронизации. Частота синфазной синхронизации близка к индивидуальной частоте «быстрого» элемента [8].

4. Цепочка связанных элементов

Для определения зависимости скорости распространения фронта от разницы между частотой синхронизации и индивидуальными частотами рассмотрим цепочку связанных осцилляторных элементов. Распределение параметра a было случайным равномерным в заданном интервале, что приблизительно соответствует случайному равномерному распределению индивидуальных частот элементов [9,10].

Принимая во внимание анализ, приведенный в предыдущем разделе для двух связанных элементов, можно предположить, что в цепочке будет выполняться следующее.

i) Чем больше неидентичность элементов, тем больше разность между средней $\langle \omega \rangle$ и максимальной индивидуальной частотой колебаний элементов ω_{\max} и тем ниже скорость распространения возбуждения.

ii) При $\omega_{\max} - \langle \omega \rangle \rightarrow 0, V \rightarrow +\infty$.

Заметим, если $\omega_{\max} - \langle \omega \rangle$ становится больше некоего критического значения, синхронизация разрушается, и не имеет смысла говорить о скорости распространения возбуждения V .

Было проведено три серии экспериментов. В первой серии экспериментов (рис. 3) нижняя граница распределения индивидуальных частот оставалась неизменной (самый медленный элемент), а наибольшая частота (частота синхронизации) увеличивалась от первого эксперимента (рис. 3, а) к последующим (рис. 3, б–д). Таким образом, увеличивалась и неидентичность, так как использовалось случайное равномерное распределение индивидуальных частот в цепочке. Положение генераторов ритма (самых высокочастотных элементов) соответствует нижним изломам волновых фронтов (буквой «V») на пространственно-временной диаграмме, а места встречи волновых фронтов – верхним изломам.

Во второй серии экспериментов (рис. 4) постоянной оставалась наибольшая частота (равная частоте синхронизации), а наименьшая и средняя снижались от первого эксперимента (рис. 4, а) к последующим (рис. 4, б–д).

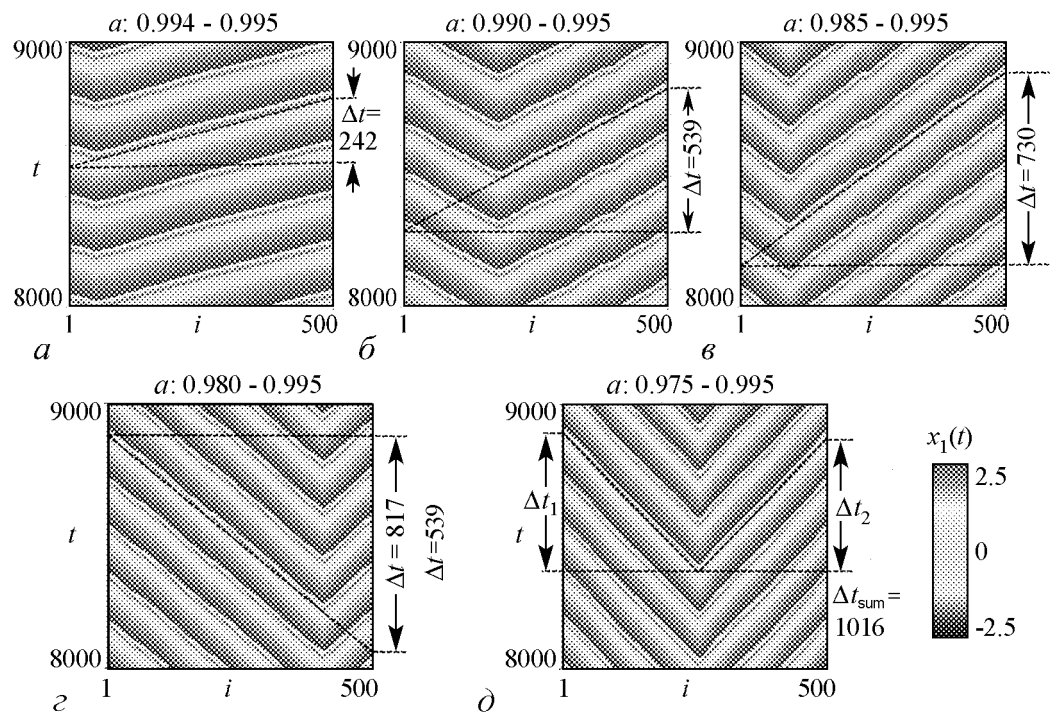


Рис. 3. Пространственно-временные диаграммы синхронного режима в цепочке при различной степени неоднородности параметра a_i . Нижняя граница частоты неизменна $\omega_{\min} = \text{const}$, верхняя граница увеличивается от a к δ . $d = 0.06$, $\varepsilon = 0.02$, свободные граничные условия

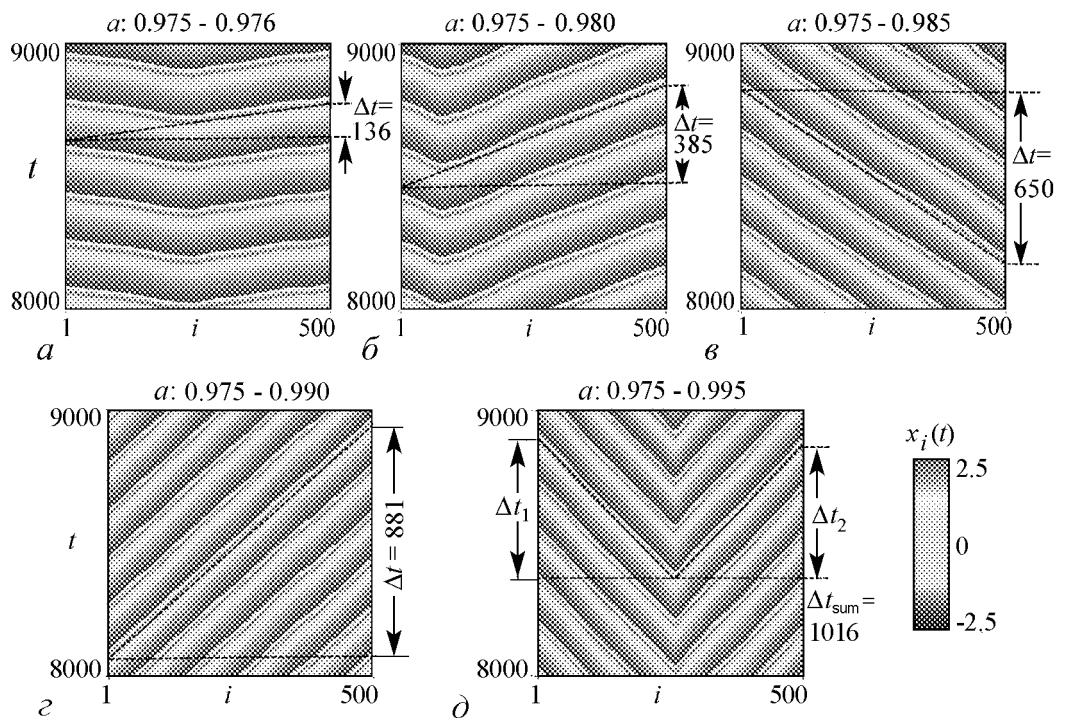


Рис. 4. Пространственно-временные диаграммы синхронного режима в цепочке при различной степени неоднородности параметра a_i . Верхняя граница частоты неизменна $\omega_{\max} = \text{const}$, нижняя граница уменьшается от a к δ . $d = 0.06$, $\varepsilon = 0.02$, свободные граничные условия

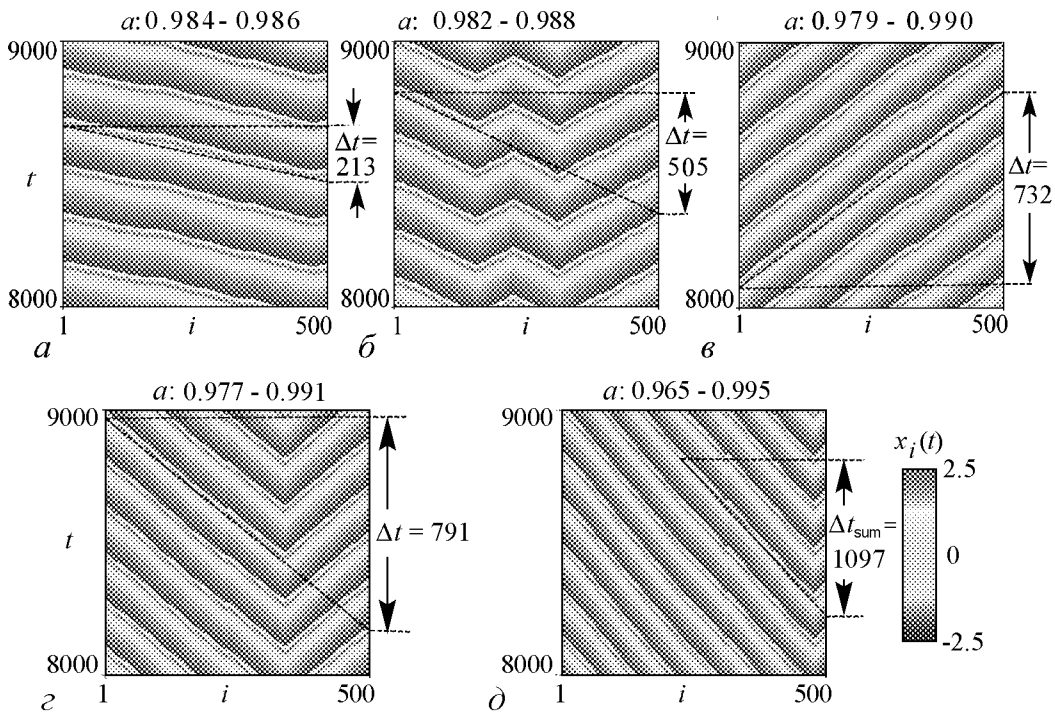


Рис. 5. Пространственно-временные диаграммы синхронного режима в цепочке при различной степени неоднородности параметра a_i . Верхняя граница частоты увеличивается от a к d , нижняя граница уменьшается от a к d , но среднее значение частоты индивидуальных элементов в цепочке сохраняется $\langle \omega \rangle = \text{const}$. $d = 0.06$, $\varepsilon = 0.02$, свободные граничные условия

В третьей серии экспериментов (рис. 5) верхняя граница частоты увеличивалась, а нижняя – уменьшалась таким образом, чтобы средняя частота оставалась неизменной, но увеличивалась неидентичность от первого эксперимента (рис. 5, a) к последующим (рис. 5, $б$ – $д$).

Скорость распространения волны обратно пропорциональна Δt_{sum} – времени прохождения волны по цепочке, которая приведена на каждой пространственно-временной диаграмме. Во всех экспериментах эта скорость убывает с увеличением неоднородности. Зависимость скорости распространения возбуждения от соотношения между максимальным и минимальным индивидуальными периодами в цепочке из 500 элементов показана на рис. 6

Во всех экспериментах было получено, что скорость распространения возбуждения практически не зависит отдельно от средней частоты ансамбля или частоты синхронизации, а зависит от их разности.

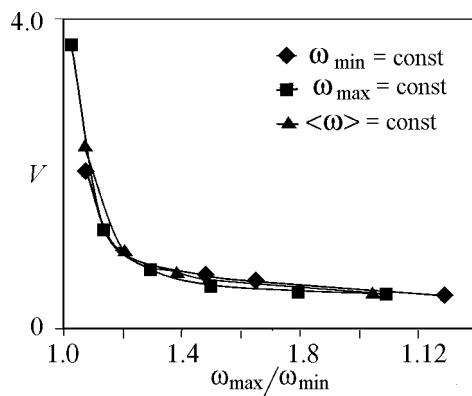


Рис. 6. Зависимости скорости распространения возбуждения для каждой из поставленных серий экспериментов (см. рис. 3–5)

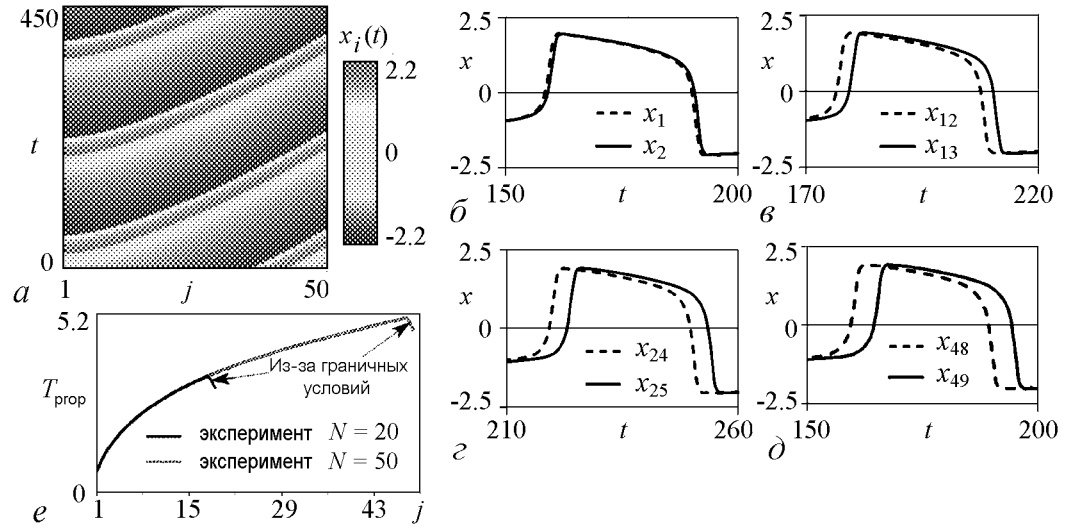


Рис. 7. *a* – пространственно-временная диаграмма динамики цепочки из 50 элементов с монотонным распределением a_j (наиболее высокочастотные элементы слева); *б–д* – участки осциллограмм пар соседних элементов, показывающие подстройку более медленного элемента под общую частоту; *е* – время передачи возбуждения от $(j - 1)$ -го к j -му элементу для цепочек из $N = 20$ и 50 элементов. $d = 0.03$, $\varepsilon = 0.02$, свободные граничные условия

Также был проведен эксперимент с цепочкой, в которой параметр a был распределен линейно. Пространственно-временная диаграмма, показывающая распространение возбуждения, приведена на рис. 7, *a*. На рис. 7, *б–д* показаны участки осциллограмм некоторых соседних элементов, иллюстрирующие временные задержки при передаче возбуждения между элементами. Зависимость времени передачи возбуждения от номера элемента показана на рис. 7, *е*. Видно, что при малых расстройках зависимость времени распространения носит нелинейный характер, при больших расстройках зависимость становится близкой к линейной.

5. Распространение возбуждения в релаксационных осцилляторах

Для теоретического исследования полученных выше закономерностей упростим модель [8], заменив нелинейную функцию в правой части на ее кусочно-линейную аппроксимацию

$$F_i = \begin{cases} \frac{-4}{3} x_i - 2 - y_i, & \text{при } x_i \leq -1, \\ \frac{2}{3} x_i - y_i, & \text{при } -1 < x_i < 1, \\ \frac{-4}{3} x_i + 2 - y_i, & \text{при } x_i \geq 1. \end{cases} \quad (3)$$

Положим также малый параметр $\varepsilon = 0$ и таким образом понизим порядок системы. Рассмотрим два связанных элемента. Предельный цикл и возможный вариант взаимного расположения элементов показан на рис. 8.

Полученная система двух элементов – это кусочно-линейная система второго порядка, которую можно решить аналитически [8] для каждого из возможных случаев:

i) оба элемента находятся на правой ветви $h_+(x)$;

ii) оба элемента находятся на левой ветви $h_-(x)$;

iii) первый элемент находится на $h_+(x)$, а второй – на $h_-(x)$;

iv) первый элемент находится на $h_-(x)$, а второй – на $h_+(x)$.

В частности решения для случая (ii) выглядят следующим образом:

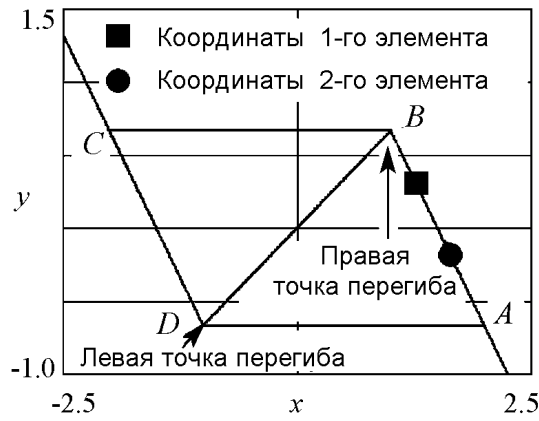


Рис. 8. Кусочно линейная аппроксимация правой части (3) и один из возможных случаев взаимного расположения элементов (оба в активной фазе)

$$\left\{ \begin{array}{l} y_1^{--}(\tau) = \left[\frac{1}{2}y_1^{--}(\tau_0) - \frac{1}{2}y_2^{--}(\tau_0) - a_1\left(\frac{2}{3} + d\right) + a_2\left(\frac{2}{3} + d\right) \right] \exp\left(-\frac{\tau - \tau_0}{4/3 + 2d}\right) + \\ + \left[\frac{1}{2}y_1^{--}(\tau_0) + \frac{1}{2}y_2^{--}(\tau_0) + 2 - \frac{2}{3}a_1 - \frac{2}{3}a_2 \right] \exp\left(-\frac{3}{4}(\tau - \tau_0)\right) - 2 - da_2 + \left(\frac{4}{3} + d\right)a_1, \\ y_2^{--}(\tau) = \left[\frac{1}{2}y_2^{--}(\tau_0) - \frac{1}{2}y_1^{--}(\tau_0) + a_1\left(\frac{2}{3} + d\right) - a_2\left(\frac{2}{3} + d\right) \right] \exp\left(-\frac{\tau - \tau_0}{4/3 + 2d}\right) + \\ + \left[\frac{1}{2}y_1^{--}(\tau_0) + \frac{1}{2}y_2^{--}(\tau_0) + 2 - \frac{2}{3}a_1 - \frac{2}{3}a_2 \right] \exp\left(-\frac{3}{4}(\tau - \tau_0)\right) - 2 - da_1 + \left(\frac{4}{3} + d\right)a_2, \end{array} \right. \quad (4)$$

решения для (iii):

$$\left\{ \begin{array}{l} y_1^{+-}(\tau) = \left[\frac{1}{2}y_1^{+-}(\tau_0) - \frac{1}{2}y_2^{+-}(\tau_0) - 2 - a_1\left(\frac{2}{3} + d\right) + a_2\left(\frac{2}{3} + d\right) \right] \exp\left(-\frac{\tau - \tau_0}{4/3 + 2d}\right) + \\ + \left[\frac{1}{2}y_1^{+-}(\tau_0) + \frac{1}{2}y_2^{+-}(\tau_0) - \frac{2}{3}a_1 - \frac{2}{3}a_2 \right] \exp\left(-\frac{3}{4}(\tau - \tau_0)\right) + 2 - da_2 + \left(\frac{4}{3} + d\right)a_1, \\ y_2^{+-}(\tau) = \left[\frac{1}{2}y_2^{+-}(\tau_0) - \frac{1}{2}y_1^{+-}(\tau_0) + 2 + a_1\left(\frac{2}{3} + d\right) - a_2\left(\frac{2}{3} + d\right) \right] \exp\left(-\frac{\tau - \tau_0}{4/3 + 2d}\right) + \\ + \left[\frac{1}{2}y_1^{+-}(\tau_0) + \frac{1}{2}y_2^{+-}(\tau_0) - \frac{2}{3}a_1 - \frac{2}{3}a_2 \right] \exp\left(-\frac{3}{4}(\tau - \tau_0)\right) - 2 - da_1 + \left(\frac{4}{3} + d\right)a_2. \end{array} \right. \quad (5)$$

Таким образом, есть возможность аналитически просчитать, как будет происходить набег разности фаз и подстройка в системе двух связанных осцилляторов Бонхоффера–ван дер Поля. Получим зависимость времени передачи возбуждения от

более «быстрого» элемента к более «медленному» в зависимости от расстройки параметра a_i между ними. Следуя рассуждениям из раздела 3, оба элемента придут в точку C практически одновременно, это случай (ii). В момент времени t_1 «быстрый» элемент достигнет точки D ($y_1 = -2/3$).

В момент времени t_1 второй элемент будет находиться на ветви h_- , его координата может быть вычислена по формуле

$$y_2^{--}(\tau) = \left[\frac{1}{2} y_2^{--}(\tau_0) - \frac{1}{2} y_1^{--}(\tau_0) + a_1 \left(\frac{2}{3} + d \right) - a_2 \left(\frac{2}{3} + d \right) \right] \exp\left(-\frac{t_1 - \tau_0}{4/3 + 2d} \right) + \left[\frac{1}{2} y_1^{--}(\tau_0) + \frac{1}{2} y_2^{--}(\tau_0) + 2 - \frac{2}{3} a_1 - \frac{2}{3} a_2 \right] \exp\left(-\frac{3}{4}(t_1 - \tau_0) \right) - 2 - da_1 + \left(\frac{4}{3} + d \right) a_2. \quad (6)$$

Поскольку время движения из точки D в точку A происходит мгновенно, начиная с t_1 первый элемент будет уже на ветви h_+ . В момент времени t_2 , который получается решением (5), «медленный» элемент достигнет точки D .

Разность $t_2 - t_1$ и будет временем передачи возбуждения, которое будет зависеть от параметров a_1, a_2 . Данная зависимость представлена на рис. 9. Весь коридор расстройек соответствует синхронизации в системе. Видно, что механизм подстройки может происходить в соответствии с двумя различными механизмами: при малых расстройках ($\Delta a < \Delta a^*$) и при больших расстройках ($\Delta a > \Delta a^*$). Действительно, переход первого элемента на h_+ как бы приподнимает точку перегиба y_2^{extr} для другого элемента за счет слагаемого $d(x_2 - x_1)$ в правой части уравнений. Если в этот момент координата второго элемента $y_2 < y_2^{\text{extr}}$, то второй элемент оказывается уже в области притяжения активной фазы. Из-за особенностей упрощенной модели, переключение осуществляется мгновенно. В исходной модели в рассматриваемом коридоре a время быстрых движений составляет порядка $t = 4$ счетных единиц.

Возможен и другой вариант переключения. Переход первого элемента на h_+ поднимает точку перегиба y_2^{extr} для другого элемента, но из-за $y_2 > y_2^{\text{extr}}$ второй

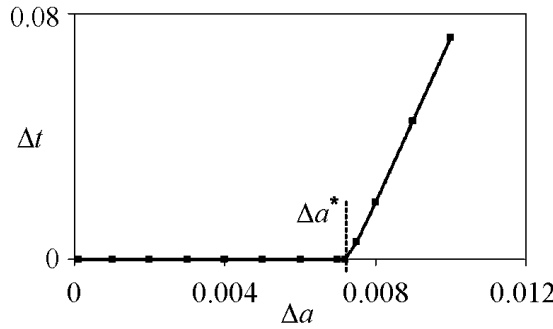


Рис. 9. Зависимость разности времен перехода элементов из пассивной фазы h_- в активную фазу h_+ от расстройки параметра a . При $\Delta a < \Delta a^*$ подстройка частоты «медленного» элемента осуществляется только за счет быстрых движений, при $\Delta a > \Delta a^*$ для синхронизации «медленному» элементу необходимо пройти некоторый участок по медленным движениям

элемент продолжает движение по пассивной фазе и лишь спустя некоторое время переходит на h_+ . Такое движение и формирует время передачи возбуждения между элементами. Аналитически показано, что эта зависимость линейна.

Аналогичное поведение наблюдается и в исходной модели (см. рис. 7, *e*): до некоторой величины частотной расстройки зависимость времени передачи возбуждения от Δa нелинейна и определяется неким ненулевым временем нахождения элементов на участках быстрых движений. При больших расстройках время передачи возбуждения нарастает по закону, близкому к линейному.

6. Двумерные ансамбли

Описанный выше эффект имеет ряд важных следствий. Рассмотрим две соединенные решетки элементов (рис. 10). Левая решетка состоит из низкочастотных элементов, правая – из высокочастотных. Этот пример реализуется в живых системах [11]. Рассмотрим случай, когда разница средних частот между решетками значительно превышает разброс индивидуальных частот внутри каждой из них (каждая из решеток в отдельности является слабо неоднородной). То есть $\Delta\Omega = \Omega_1 - \Omega_2 \gg \sigma(\Omega_{1,2})$, где Ω_i – средняя индивидуальная частота элементов в i -й части решетки, а $\sigma(\Omega_i)$, среднеквадратичное отклонение индивидуальных частот элементов в i -й части решетки.

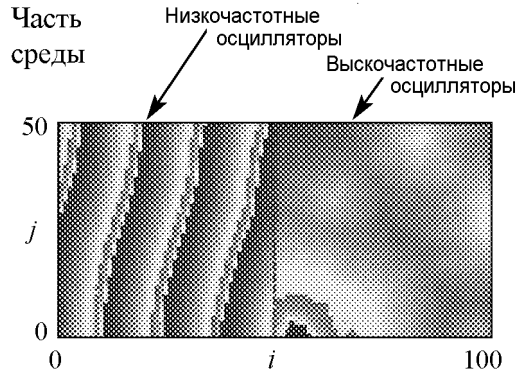


Рис. 10. Характерное мгновенное распределение x_{ij} в решетке, представляющей из себя соединение двух слабо неоднородных высокочастотной и низкочастотной решеток. $d = 0.007$, $\varepsilon = 0.02$, свободные граничные условия

Пусть сила связи достаточна для синхронизации всего ансамбля. В следствие случайного распределения индивидуальных частот генератор ритма находится в произвольной точке правой решетки. Численное моделирование показало, что в правой части решетки возбуждение распространяется быстро, и на масштабе 50 элементов укладывается не более одной пространственной длины волны. В левой же решетке распространение идет медленнее, и на масштабе 50 элементов укладывается более трех длин волн, что соответствует падению скорости распространения более чем в 3 раза и это при том, что элементы в левой части решетки являются слабо неоднородными. Замедление происходит именно из-за большой разницы между частотой синхронизации и индивидуальными частотами элементов. Таким образом, данный эффект оказывает влияние на формирование пространственно-временных структур.

Рассмотрим еще один пример. Он показывает, что скорость распространения возбуждения в одной части ансамбля оказывает влияние не только на скорость распространения волн, но и на общий характер динамики в ансамбле. Пусть решетка 50×50 осцилляторных элементов окружена возбудимыми элементами: в результате получаем решетку 150×150 (рис. 11).

Одним из примеров такой среды, где соседствуют осцилляторные и возбудимые элементы является синусный узел (ансамбль осцилляторных элементов) в сердце, находящийся между соединением верхней полой вены с правым предсердием [12].

В случае (а) осцилляторные элементы слабо неидентичны, в результате скорость распространения возбуждения высокая, и пространственный период волны в решетке автоколебательных элементов значительно больше характерного размера решетки. Поэтому практически все время решетка автоколебательных элементов либо вся находится в покое, либо вся в возбужденном состоянии. Подобная динамика означает, что практически в каждый момент времени на периметре решетки значение x_{ij} близки. Это вызывает регулярные концентрические волны в возбудимой

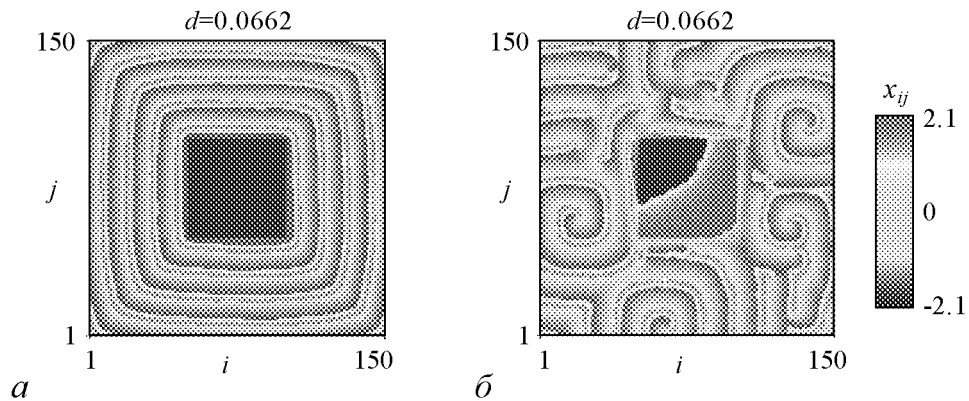


Рис. 11. Характерные мгновенные распределения x_{ij} в решетке автоколебательных и возбудимых элементов при малой (а) большой (б) степени неоднородности внутри осцилляторной решетки. Остальные параметры и начальные условия в (а) и (б) идентичны. $\varepsilon = 0.02$, свободные граничные условия

среде (рис. 11, а), что можно интерпретировать как нормальную сердечную деятельность.

В случае (б) осцилляторные элементы сильно неидентичны, в результате скорость распространения возбуждения низкая, и пространственный период волны в решетке автоколебательных элементов сравним с масштабами решетки осцилляторных элементов. Это означает формирование волновой структуры в осцилляторной решетке и соответствует сосуществованию пассивных и активных областей в ней (рис. 11, б). Таким образом, в каждый момент времени на периметре автоколебательной решетки значение x_{ij} претерпевает сильные перепады (так как осцилляторы релаксационные), что способствует формированию волн со свободными концами в возбудимой решетке. Такая динамика приводит к образованию множества спиральных волн. Подчеркнем, что индивидуальные параметры возбудимой решетки, сила связи d и начальные условия в (а) и (б), брались одинаковыми. Поэтому данный эксперимент, возможно, представляет собой не рассматривавшийся ранее способ формирования аритмий в сердце, в частности, тахикардии и фибрилляции.

Заключение

Таким образом, установлено, что скорость распространения возбуждения обратно пропорционально зависит от разности частоты возбуждения и индивидуальных частот осцилляторов. Проиллюстрированы механизмы, определяющие данную зависимость. Рассмотрены случаи «быстрого» и «медленного» распространения возбуждения между релаксационными осцилляторами. Получен эффект, при котором возникновение или изменение характера неоднородности в одном из участков ансамбля вызывает сильное изменение динамики всей системы и формирование сложных пространственно-временных структур.

Данное исследование выполнено при финансовой поддержке Федеральной программы «Исследования и разработки по приоритетным направлениям развития научно-технологического комплекса России на 2007–2013 годы» (контракты № 11.519.11.2022 и № 11.519.11.2015)740.11.0919) и РФФИ (контракт 11-02-92003).

Библиографический список

1. *Osipov G.V., Kurths J., and Zhou Ch.* Synchronization in Oscillatory Networks. Berlin: Springer Verlag, 2007.
2. *Пиковский А.С., Розенблюм М.Г., Куртс Ю.* Синхронизация. Фундаментальное нелинейное явление. М.: Техносфера, 2003.
3. *Osipov G.V. and Sushchik M.M.* Synchronized clusters and multistability in arrays of oscillators with different natural frequencies // *Phys. Rev. E.* 1998. Vol. 58. 7198.
4. *Torre V.* A theory of synchronization of heart pace-maker cells // *J. Theor. Biol.* 1976. Vol. 61. P. 55.
5. *Kryukov A.K., Petrov V.S., Averyanova L.S., Osipov G.V., Chen W., Drugova O. and Chan C.K.* Synchronization phenomena in mixed media of passive, excitable and oscillatory cells // *Chaos.* 2008. Vol. 18. 037129.
6. *Bonhoeffer K.F.* Models of nerve excitation // *Naturwissenschaften.* 1953. Vol. 40. P. 301.
7. *Зыков В.С.* Аналитическая зависимость скорости волны возбуждения в двумерной возбудимой среде от кривизны ее фронта // *Биофизика.* 1980. Vol. 25.
8. *Kryukov A.K., Osipov G.V., Polovinkin A.V., Kurths Jurgen* Synchronous regimes in ensembles of coupled Bonhoeffer–van der Pol oscillators // *Phys. Rev. E.* 2009. Vol. 79. 046209.
9. *Крюков А.К., Осипов Г.В., Половинкин А.В.* Мультистабильность синхронных режимов в ансамблях неидентичных осцилляторов: два элемента // *Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика.* 2009. Т. 17, № 2. С. 16.
10. *Крюков А.К., Осипов Г.В., Половинкин А.В.* Мультистабильность синхронных режимов в ансамблях неидентичных осцилляторов: цепочка и решетка связанных элементов // *Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика.* 2009. Т. 17, № 2. С. 29.
11. *Diamant N.E., Rose P.K., and Davidson E.J.* Computer simulation of intestinal slow-wave frequency gradient // *Am. J. Physiol.* 1970. Vol. 219. P. 1684.
12. *Фундаментальная и клиническая физиология / Под ред. А. Камкина и А. Каменского.* М.: Издательский центр «Академия», 2004. 1072 с.

*Нижегородский государственный
университет
Национальный исследовательский
университет*

*Поступила в редакцию 6.08.2012
После доработки 11.12.2012*

OSCILLATORY MEDIA PROPERTIES INFLUENCE ON EXCITATION PROPAGATION

A. K. Kryukov, G. V. Osipov

We study synchronization in ensembles of locally diffusive coupled Bonhoeffer–van der Pol oscillators. Individual elements frequencies influence on excitation propagation in one- and two-dimensional media is investigated. We show that excitation propagation

speed depends on frequency mismatch between synchronization frequency and elements' individual frequencies. Qualitative and quantitative results describing this effect are numerical modeling data and analytical research.

Keywords: Synchronization, numerical modeling, spatio-temporal structures.



Крюков Алексей Константинович – родился в 1984 году, окончил Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского (2007). Окончил аспирантуру кафедры теории управления и динамики машин ННГУ (2010). Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по радиофизике (2010). Старший преподаватель кафедры теории управления и динамики машин ННГУ. Область научных интересов: структуры синхронизации в нелинейных системах, моделирование динамики биологических сред. Соавтор 19 публикаций.

603950 Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23
Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского
Национальный исследовательский университет
E-mail: alkryukov@gmail.com



Осипов Григорий Владимирович – родился в 1960 году в Нижнем Новгороде, окончил Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского (1982). В 1986–1988 годах учился в аспирантуре Научного совета по комплексной проблеме «Кибернетика» (НСК) АН СССР. Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук (НСК, 1988) по математическому моделированию и доктора физико-математических наук (ННГУ, 2004) по радиофизике. С 1988 года работает в ННГУ, с 2007 года в качестве заведующего кафедрой «Теории управления и динамики машин». Соавтор монографий «Устойчивость, структуры и хаос в нелинейных сетях синхронизации» и «Synchronization in oscillatory networks». Опубликовал 120 научных статей (в том числе 2 обзора) по теории колебаний и волн и математическому моделированию.

603950 Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23
Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского
Национальный исследовательский университет
E-mail: osipov@vmk.unn.ru



СПИРАЛЬНЫЕ СТРУКТУРЫ ИЗ ТЯЖЕЛЫХ ЧАСТИЦ ПРИ ПАРАМЕТРИЧЕСКОМ ВОЗБУЖДЕНИИ СТОЯЧИХ КАПИЛЛЯРНЫХ ВОЛН

С. В. Кияшко, В. О. Афенченко, А. В. Назаровский

В работе представлены экспериментальные исследования по образованию спиральных структур из тяжелых частиц под действием поля параметрически возбуждаемых стоячих спиральных волн. Частицы двигаются под действием поля средних течений, возникающих вблизи дна в вязкой жидкости под действием стоячих волн. Эффект образования структур имеет пороговый характер и зависит от интенсивности поля стоячих волн. Обнаружено образование многозаходных спиральных структур.

Ключевые слова: Формообразование, капиллярные волны, транспорт частиц, топологические дефекты.

Введение

При исследованиях в океанологии, биофизике, астрофизике, а также при решении прикладных проблем, связанных с разработкой технологии, часто возникают задачи о движении частиц в поле гидродинамических течений [1]. Существенный интерес представляет выяснение механизма транспорта тяжелых частиц в гидродинамических системах, когда они находятся вдали от состояния равновесия. В результате процессов самоорганизации в таких системах могут возникать пространственные структуры, и движение частиц может дать дополнительную информацию о самих структурах. Движение частиц в параметрически возбуждаемой капиллярной ряби исследовалось в ряде работ [2–5] в условиях возникновения взаимно ортогональных стоячих волн на поверхности слоя вязкой жидкости, колеблющейся в вертикальном направлении. Исследовались траектории отдельных частиц и диффузия облака частиц в такой тетрагональной структуре волн.

При увеличении вязкости в параметрически возбуждаемой ряби на фоне регулярной структуры могут возникать топологические дефекты [6]. Они обладают свойствами квазичастиц, могут взаимодействовать, образовывать цепочки в виде доменных стенок и аннигилировать. С ростом амплитуды колебаний слоя жидкости

число возникающих дефектов увеличивается, а образом пространственного беспорядка при этом является ансамбль взаимодействующих дефектов [7,8].

Известно, что в поле поверхностных стоячих волн плавающие частицы собираются в узлах стоячих волн. При этом частицы расположены на линиях, повторяющих структуру стоячих волн, а тяжелые частицы остаются лежать на дне, так как при малой вязкости сил вязкого трения, возникающих при обтекании частиц, еще не достаточно, чтобы сдвинуть их с места. При увеличении вязкости эти силы возрастают и течение жидкости вблизи дна способно передвигать частицы. Именно такая ситуация рассматривается в данной работе. В жидкости большой вязкости из-за сильной конкуренции выживает только одна пара стоячих волн, и на поверхности жидкости при параметрическом возбуждении образуются роликовые (линейчатые) структуры. Обычно в кюветах прямоугольной формы прямые роликовые структуры расположены параллельно одной из сторон кюветы. В круглой кювете обычно наблюдаются круговые стоячие волны.

В работе [9] исследовалось образование круговых пространственных структур из суспензии биологических клеток. Так как параметрически возбуждаемая рябь при сильной конкуренции представляет собой типичную автоколебательную систему, то в ней может быть мультистабильность. В зависимости от начальных условий при неизменных параметрах среды возможны различные устойчивые состояния, различающиеся пространственной структурой поля. Недавно в работе [10] было показано существование многозаходных спиральных волн, которые различались числом заходов спирали и направлением их закрученности.

В настоящей работе исследуется образование спиральных структур из тяжелых частиц под действием поля параметрически возбуждаемых спиральных волн.

1. Описание эксперимента

Эксперимент проводился следующим образом. В круглую кювету диаметром 150 мм, выполненную из алюминия, помещался слой жидкости толщиной 3.5...4.5 мм. В качестве жидкости использовалось силиконовое масло ПМС-100 с динамической вязкостью $\eta = 0.886$ г/(см·сек), коэффициентом поверхностного натяжения $\sigma = 19.7$ дин/см, плотностью $\rho = 0.963$ г/см³ (при температуре 25°C). Затем на дно кюветы помещался слой частиц меди толщиной 0.15...0.25 мм (размер частиц порядка 50 микрон). Частицы распределялись равномерно по всей плоскости дна. Для этого с помощью кончика мягкой кисточки делались случайным образом круговые движения, а результат контролировался по равномерному окрашиванию дна за счет красного цвета частиц, которые были видны сквозь прозрачный слой силиконового масла. Толщина слоя частиц оценивалась по предварительному взвешиванию массы частиц в заданном объеме, учитывая их насыпную плотность. Эксперимент проводился для различных частот накачки из диапазона 41...91 Гц.

Особое внимание уделялось юстировке кюветы в горизонтальной плоскости, так как при наклоне кюветы глубина становится различной в разных частях кюветы, что приводит к неоднородному распределению воздействия стоячих волн на частицы. Поэтому для юстировки по горизонтали кювета с жидкостью предварительно помещалась на вибростол вибростенда фирмы TIRAVIB, на усилитель кото-

рого подавался управляющий сигнал с кварцевого генератора. Амплитуда ускорения вибростола контролировалась с помощью пьезоакселерометра. Под действием вертикальных осцилляций кюветы на поверхности слоя жидкости возникали роликовые структуры стоячих волн. В случае неоднородной глубины, вблизи порога генерации волны возбуждаются вначале в более глубоком месте, а в более мелком не возбуждаются, таким образом однородная генерация по всей площади кюветы соответствует равномерной глубине слоя жидкости. Поэтому юстировку кюветы проводили вблизи порога возбуждения волн, добиваясь однородности волнового поля. Мерой превышения порога возбуждения волн является надкритичность, определяемая формулой $\varepsilon = A/A_{кр} - 1$ (здесь A , $A_{кр}$ – текущая и пороговая амплитуды внешней силы, соответственно). После юстировки на дно кюветы помещались частицы меди. Подробнее схема установки описана в работах [11,12]. После включения вибростенда при увеличении амплитуды выше некоторой критической величины на поверхности жидкости возбуждалась роликовая структура, содержащая одну пару стоячих волн.

Однако в обычных условиях спиральные волны не возбуждаются, а наблюдаются только круговые волны и изогнутые ролики. Существование параметрически возбуждаемых спиральных волн предсказано не было; многозаходные спиральные волны недавно были обнаружены экспериментально [10]. Спиральная волна возбуждалась с помощью создания дефекта на краю кюветы, который далее начинал притягиваться к центру, что создавало спиральную волну. Так как спиральная волна вращается вокруг своего центра, это мешает образованию неподвижного, относительно дна, спирального рельефа из частиц. Поэтому для замедления скорости вращения спирали борта кюветы были выполнены с наклоном. Далее при фиксированной глубине и толщине слоя частиц проводились серии экспериментов для различных частот накачки и разных значений надкритичности.

Находились условия существования процесса образования спиральных структур в зависимости от надкритичности. Одновременно проводилась запись на видеокамеру процесса во времени для дальнейшей обработки на компьютере.

2. Результаты эксперимента

Эксперименты показали, что образование спиральных структур происходит в широкой области параметров. Выяснилось, что процесс носит пороговый характер по величине надкритичности и если надкритичность меньше некоторой пороговой величины, то частицы неподвижны, хотя стоячие спиральные волны уже существуют. Установлено, что основными параметрами, которые влияют на качественно различное поведение системы, являются надкритичность ε и частота вынуждающей силы F . На рис. 1 представлены экспе-

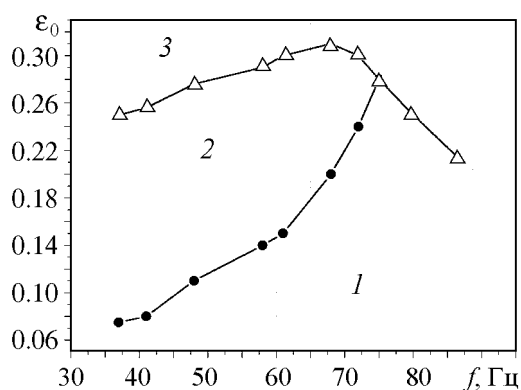


Рис. 1. Экспериментально найденные области параметров с различным поведением системы

риментально найденные области параметров на плоскости (ε, F) с различным поведением системы. В области 1 устойчиво существуют стоячие спиральные волны на поверхности жидкости, но частицы покоятся на дне кюветы. Очевидно, что скорости средних течений недостаточно велики, чтобы сдвинуть частицы (скорости средних течений пропорциональны квадрату амплитуды поля стоячих волн). В области 2 уже возникают и формируются спиральные структуры из частиц. При этом на дне возникает периодический рельеф из частиц с распределением частиц по радиусу, близким к синусоидальной функции. Линия, разделяющая области 1 и 2, задает критическую величину надкритичности, при превышении которой начинается эффект образования структур на дне. В области 3 спиральные стоячие волны становятся неустойчивыми. Возникают хаотические волны модуляции и дефекты, поэтому процесс образования регулярных структур из частиц нарушается. Типичные картины образовавшихся на дне спиральных структур представлены на рис. 2, 3. На рис. 2 представлена двухзаходная спиральная структура, установившаяся под действием стоячего поля однозаходной спиральной стоячей волны. Заметим, что число заходов удваивается по сравнению с однозаходной спиральной поверхностной волной и совпадает с усредненной картиной стоячего поля. Соответственно на рис. 3 представлена четырехзаходная спиральная структура, полученная под воздействием двухзаходной спиральной стоячей волны. Для исследования процесса формирования структур из частиц во времени мы получили записи роста структур в виде последовательности кадров, однако непосредственное измерение роста амплитуды слоя частиц было затруднительно. Для качественной оценки толщины слоя частиц использовалась покадровая обработка яркостной картины периодического распределения частиц в пространстве с учетом нормирования яркости на единицу. Интенсивность яркости после нормировки менялась от 0 (белый цвет, отсутствие частиц) до 1 (черный цвет, максимальная плотность частиц). На рис. 4 представлена типичная картина распределения интенсивности яркости частиц в структуре в радиальном сечении в начальный и конечный момент времени. Видно, что из начального

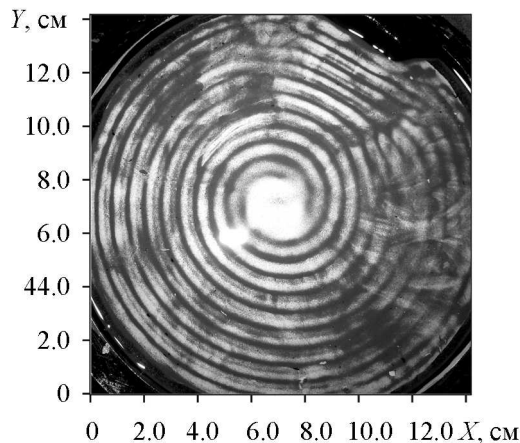


Рис. 2. Двухзаходная спиральная структура примеси, образованная спиральной волной при частоте $f = 68$, глубине $h = 3.6$, амплитуде ускорения $4g$

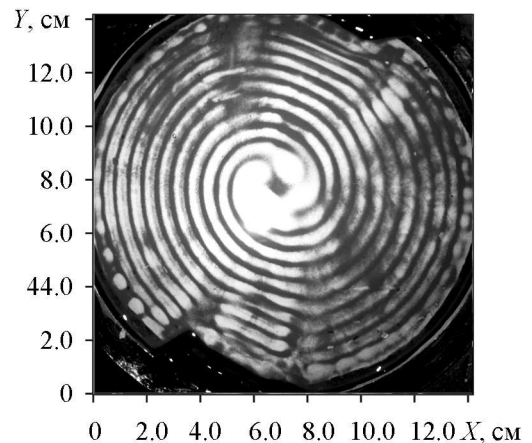


Рис. 3. Четырехзаходная спиральная структура примеси, образованная двухзаходной спиральной волной при частоте $f = 68$, глубине $h = 3.6$, амплитуде ускорения $4g$

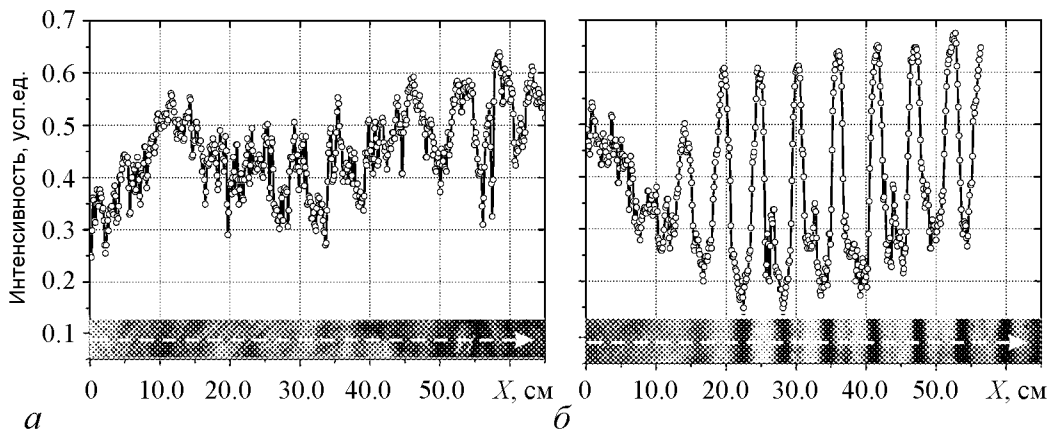


Рис. 4. Картина распределения интенсивности яркости частиц в структуре в радиальном сечении (реальные фото обрабатываемых секторов показаны под графиками) под действием спиральной волны в начальный (а) и конечный (б) момент времени (через 21 с)

случайного распределения (рис. 4, а) под действием стоячих волн частицы формируют в пространстве структуру, близкую к периодической (рис. 4, б), при этом период структуры вдвое меньше длины волны. На рис. 5 представлен график зависимости нормированной на единицу амплитуды квазипериодической функции распределения частиц в пространстве от времени, полученный вычислением усредненной разницы между максимумами и минимумами в яркостной картине структуры частиц.

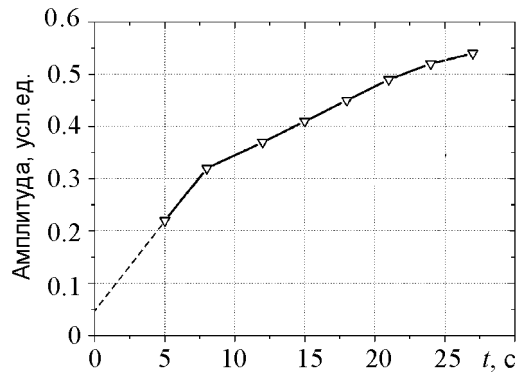


Рис. 5. Зависимость амплитуды периодической функции распределения частиц в пространстве от времени

3. Обсуждение результатов эксперимента

Оценим параметры переноса тяжелой частицы течением вязкой жидкости. Известно [12], что в вязкой жидкости частицы малого размера тонут со скоростью

$$V = \frac{2}{9} R^2 \frac{\rho_1 - \rho_2 g}{\rho_2 \nu}, \quad (1)$$

где ρ_1 и R – плотность и радиус частицы, ρ_2 и ν – плотность и кинематическая вязкость жидкости, соответственно. Если размер частицы δ порядка 10^{-3} см, вязкость в 10 раз больше вязкости воды, а плотность частицы в 5 раз превышает плотность жидкости, то скорость осаждения частиц будет приблизительно 0.5 см/сек.

Если скорость внешнего потока направлена против силы тяжести и превышает эту величину, то частица будет передвигаться под действием потока жидкости.

Оценим колебательную скорость потока, создаваемую в волне. Вертикальная скорость V_2 порядка $A\omega$; тогда при частоте вибраций экспериментальной установки

$F = 30$ Гц и амплитуде волны 0.5 мм ее величина составит примерно 7.5 см/сек. Если вертикальная компонента скорости V_2 будет превышать 0.5 см/сек, то частица будет отрываться от остальных частиц и перемещаться потоком.

Так как при уменьшении надкритичности амплитуда стоячей волны уменьшается, то эффект образования периодической структуры поля будет иметь пороговый характер, как это и наблюдалось в эксперименте (рис. 2, 3). В цилиндрических координатах $\{r, \varphi\}$ переменную в пространстве часть высоты слоя частиц можно представить в виде: $\tilde{h} = A(r, t) \cdot f(kr, \varphi)$, где A – огибающая амплитуды для известной периодической по r функции $f(kr, \varphi)$, возникающей в процессе неустойчивости, а k – волновое число, описывающее период изменения высоты слоя частиц.

Учитывая то, что у нас в эксперименте наблюдается рост спиральной структуры из частиц в течение 15...20 с, а затем наступает ограничение, можно предложить модельные уравнения для описания этого процесса. Так как исходная толщина слоя одинакова во всем пространстве пятна, а неустойчивость так же однородна в пространстве, то в уравнении будет только зависимость от времени

$$\frac{dA}{dt} = \gamma - \alpha A^2, \quad (2)$$

где постоянные коэффициенты γ и α находятся из эксперимента. Например, для слоя жидкости толщиной 4 мм, при толщине слоя частиц меньше критической и коэффициентах, равных 1 и 3, соответственно, уравнение (2) качественно хорошо описывает результаты эксперимента.

Таким образом, исходя из результатов эксперимента, выяснилось, что под действием поля параметрически возбуждаемых стоячих спиральных волн в жидкости большой вязкости возможно образование спиральных структур из тяжелых частиц, находящихся на дне кюветы. Процесс образования спиральных структур наблюдается в широкой области параметров. Эффект имеет пороговый характер и зависит от интенсивности поля стоячих волн. Обнаружено образование многозаходных спиральных структур из частиц. Установлено, что основными параметрами, изменение которых вызывает качественно различное поведение системы, являются надкритичность и частота вынуждающей силы. Предложенные модельные уравнения качественно хорошо описывают поведение в системе.

Библиографический список

1. *Ottino J.M.* The kinematics of mixing: Stretching, chaos, and turbulence. Cambridge University press, Cambridge, 1989.
2. *Gollub J.P.* Nonlinear waves: Dynamics and transport // *Physica D*. 1991. Vol. 51. P. 501.
3. *Mesquita O.N., Kane S., Gollub J.P.* Transport by capillary waves: Fluctuating Stokes drift // *Phys. Rev. A*. 1992. Vol. 45, № 6. P. 3700.
4. *Ramshankar R., Berlin D., Gollub J.P.* Transport by capillary waves. Part I. Particle trajectories // *Phys. Fluids A* 2. 1990. P. 1955.
5. *Ramshankar R., Gollub J.P.* Transport by capillary waves. Part II: Scalar dispersion and the structure of the concentration field // *Phys. Fluids A* 3. 1991. P. 1344.
6. *Ezersky A.B., Kiyashko S.V., Matusov P.A., Rabinovich M.I.* Domains, domain walls and dislocations in capillary ripples // *Europhys. Lett.* 1994. Vol. 26, № 3. P. 183.

7. *Ezersky A.B., Kiyashko S.V., Nazarovsky A.V.* Bound states of topological defects in parametrically excited capillary ripples // *Physica D*. 2001. Vol. 152–153. P. 310.
8. *Езерский А.Б., Кияшко С.В., Назаровский А.В.* Перенос примеси топологическими дефектами поля параметрически возбуждаемой капиллярной ряби // Препринт №506 ИПФРАН, 1999.
9. *Takagi S., Krinsky V., Pumir A., Frelin C.* The use of Faraday instability to produce defined topological organization in cultures of mammalian cells // *I. J. Bifurcation and Chaos*. 2002. Vol. 12, № 9. P. 2009.
10. *Kiyashko S.V., Korzinov L.N., Rabinovich M.I., Tsimring L.Sh.* Rotating spirals in a Faraday experiment // *Phys. Rev. E*. 1996. Vol. 54, № 5. P. 5037.
11. *Афенченко В.О., Езерский А.Б., Кияшко С.В., Назаровский А.В.* Новые типы топологических дефектов и возможности управления хаосом дефектов в паттернах поверхностных капиллярных волн // *Нелинейный Мир*. 2008. Т. 6, № 5–6. С. 304.
12. *Afenchenko V.O., Ezersky A.B., Kaverin B.S., Kiyashko S.V., and Chesnokov S.A.* Production of materials with periodically arranged microparticles by photopolymerization of patterns formed at parametric excitation of capillary surface waves // *Physics of Wave Phenomena*. 2011. Vol. 19, № 1. P. 68.

ИПФ РАН, Н. Новгород

Поступила в редакцию 25.01.2013
После доработки 11.03.2013

SPIRAL STRUCTURES FROM HEAVY PARTICLES AT PARAMETRICAL EXCITEMENT OF STANDING CAPILLARY WAVES

S. V. Kiyashko, V. O. Afenchenko, A. V. Nazarovsky

The paper presents experimental studies on the formation of spiral structures of heavy particles by the field of parametrically excited standing spiral waves. Particles move under the influence of the average currents field generated near the bottom in a viscous liquid by standing waves. The formation of structures has a threshold character and depends on the intensity of the field of standing waves. Formation of multi-armed structures revealed.

Keywords: Pattern formation, capillary waves, transport of particles, topological defects.



Кияшко Сергей Васильевич – родился в 1942 г., окончил Горьковский государственный университет (1969). После окончания ГГУ работает в Институте прикладной физики РАН ведущим научным сотрудником. Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук в НИРФИ (1980) и доктора физико-математических наук по специальности механика жидкости и плазмы (2004). Область научных интересов – теоретическое и экспериментальное исследование динамики волновых процессов в нелинейных средах с неустойчивостью. Опубликовал более 50 статей в отечественных и иностранных журналах.

603950 Нижний Новгород, ул. Ульянова, д. 46
 Институт прикладной физики РАН
 E-mail: kiyashko@appl.sci-nnov.ru



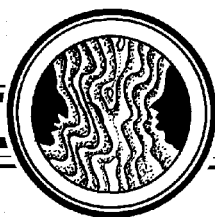
Афенченко Владимир Олегович – родился в 1973 г., окончил Нижегородский государственный университет (1995) по специальности радиофизика, защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук в НГТУ (2002). Научный сотрудник Института прикладной физики РАН. Область научных интересов – волновые процессы, структурообразование в неравновесных средах, динамика вязкой жидкости. Имеет более 30 публикаций в отечественных и иностранных журналах.

603950 Нижний Новгород, ул. Ульянова, д. 46
Институт прикладной физики РАН
E-mail: afen@appl.sci-nnov.ru



Назаровский Александр Владимирович – родился в 1974 г., окончил радиофизический факультет Нижегородского государственного университета им. Н.И. Лобачевского (1998), кандидат физико-математических наук, младший научный сотрудник Института прикладной физики РАН. Область научных интересов – волновые процессы, хаос и формирование структур в неравновесных средах. Имеет более 30 публикаций в отечественных и иностранных журналах.

603950 Нижний Новгород, ул. Ульянова, д. 46
Институт прикладной физики РАН
E-mail: nazarovskiy@appl.sci-nnov.ru



ДЕТИ, ОПАЛЕННЫЕ ВОЙНОЙ

Пестрые заметки памяти

В. С. Андрушкевич

Автор рассказывает историю своего детства в годы Великой Отечественной войны.

Ключевые слова: Великая Отечественная война, дети, немецкий плен.

Я и моя сестра, Галина, родились в Саратове. Я – в 1929 году 12 августа, а Галина – в 1937 году 10 марта. Моя мать, Евдокия Ивановна, родом из села Лысье Горы Саратовской Губернии, женщина смелая и красивая. Она хлебнула «прелести» Октябрьской революции и гражданской войны. Отец мой, Степан Осипович Андрушкевич, родом из Западной Белоруссии, из деревни Мацейкова гора Волковыского уезда Гродненской губернии. В 1914 году был призван во флот. Служил на дредноуте «Андрей Первозванный», затем комиссаром казначейства Кронштадта. По состоянию здоровья был выведен из рядов флота. В Саратове встретил мою мать и они образовали семью. Отец был членом партии большевиков и в Саратове работал руководителем ряда предприятий.

После подписания пакта Молотова–Риббентропа заметная часть Западной Белоруссии отошла к территории СССР. Мой отец обратился в Обком партии с желанием поехать на свою родину и там поработать. Из переписки выяснилось, что в деревне Мацейкова Гора живет сводный брат отца по матери. В начале 1940 года мы всей семьей выехали в Западную Белоруссию и определились в поселке Михайлово, который находился приблизительно в сорока км от города Белосток. Отца быстро утвердили директором текстильного комбината, в который входило двенадцать текстильных фабрик, принадлежавших раньше частным хозяевам. Он был избран секретарем партийного комитета комбината и депутатом поселкового Совета.

До начала войны я успел в Саратове закончить лишь четыре класса. Поселок Михайлово находился на границе Беловежской Пущи. А деревня Мацейкова Гора практически была окраиной Беловежской Пущи. Расстояние от поселка до Пущи было двенадцать км. Я часто на велосипеде ездил из поселка в деревню, где с сыном

брата моего отца занимался рыбалкой на реке Нарев. Это очень интересная река. Летом можно было ее перейти в большей части ее русла. Весной же по ней сплавляли длинные плоты из сосны и ели. Крутые берега реки содержали множество нор, в которых селились налим и раки. И когда своей рукой лезешь в нору, то не знаешь: коснешься ли нежной шкуры налима или тебя крепко клешнями схватит рак. Азарт охоты брал свое. Сама же деревня Мацейкова Гора также своеобразна. В ней всего двенадцать хат, крытых соломой. Семьи десяти хат носили фамилию Андрушкевич. И это не потому, что все были родственниками. Поляки насильственно наделяли фамилиями польского происхождения. Отец мне рассказал предание об истории Мацейковой Горы. Когда-то на крутом берегу реки Нарев была пещера, а в этой пещере жил праведник Мацей. У него висел колокол, и Мацей каждое утро три раза звонил в этот колокол и ждал ответа, так как ниже по реке в трех верстах жил другой инок. Если первый инок слышал ответные три звона, значит второй инок жив. Если же прекращался перезвон, то кто-то из них умер. После смерти Мацея на пологой части берега этого места вдоль реки стала образовываться деревня, которую называли Мацейкова Гора.

В мае 1941 года отец поехал в Саратов, чтобы решить вопросы, связанные с квартирой. И тут грянула война. Отца она застала в Саратове, а нас – в поселке Михайлово. Поскольку отца как коммуниста и руководителя хорошо знали в поселке (а следовательно, и членов его семьи), то мать незамедлительно договорилась с владельцем лошади и он, погрузив наш небольшой скарб, перевез нас из поселка в деревню Мацейкова Гора, где я устроился работать пастухом.

Первая встреча с немецкой армией

Буквально уже днем 22 июня 1941 года немецкие самолеты на бреющем полете с нахально низкой скоростью пролетали над скоплением людей, выискивая для себя цели. Некоторые летчики, лица которых мы отчетливо видели, показывали нам свой язык и махали кулаком. Через два дня на деревне стали говорить, что на шляху (так называлась мощеная камнем дорога) движутся танки и бронетранспортеры. Собралось несколько ребят-пастухов. Среди них выделялся Миша Тарасевич. Он независимо от погоды, всегда носил замызганный плащ. Он был высокого роста. На голове носил настолько засаленную шляпу, что на солнце она блестела как круглая зеркальная поверхность. Миша предложил после водопоя животных и лежки их на отдых, сходить на шлях и посмотреть на немцев. Расстояние до шляха было около полутора км. Нашлись четыре пастуха: Миша, я и еще два пацана (имен их не помню). Мы почти все расстояние пробежали, и когда до шляха оставалось метров сто, вдруг вокруг нас стали врываться в землю пули. Мы как раз попали на участок, где рос сочный и довольно высокий лен. Мы все легли. Я был одет в толстовку, которая подпиралась льном. Я, не поднимаясь, снял толстовку и отбросил ее в сторону. Вскоре послышались крики: «Aufstehen, Hande hoch!» (встать, руки вверх). Мы поднялись. Нас окружали пять-шесть автоматчиков в касках. Не поднялся только Миша Тарасевич. Когда немцы подошли к нему, то стали страшно ругаться. Глядя на нас, они поняли, что расстреливали 11–12-летних ребят, у которых кроме пастушьих кнутов ничего не было. Я поднял свою толстовку, в ней было множество дырок. Подойдя

к Мише, я увидел, что вся его спина возле почек разворочена пулями. Он умирал. Немцы еще раз чертыхнулись и пошли к шляху. Мы уже мертвого Мишу положили в его же плащ и понесли в деревню. По дороге мы поняли, что «амуницию» Миши немцы приняли за солдатскую. На этом всякое желание посмотреть на немцев у нас отпало.

Моя мудрая мать, чтобы соседи не смотрели на нас как на чужаков, попросила в церкви регента взять меня в хор мальчиков при церкви, и я стал регулярно ходить на воскресные службы с хором. Вскоре священник заметил мой голос и посоветовал оформить меня как первый голос в хоре мальчиков. В основном я работал пастухом. В свободное время ловил рыбу и раков в реке Нарев. До сих пор с дрожью вспоминаю нашу безалаберность, когда разбирали снаряды от зенитных орудий и вытаскивали из гильз пороховые заряды в виде вермишели, относили их домой и там в плите сжигали. Эти горы ящиков снарядов были брошены нашей Армией.

Арест и тюрьма Белостока

Осенью 1942 года в деревню приехала грузовая открытая машина с командой солдат СС и офицером СС. Нам дали несколько минут на погрузку. Когда я спросил, куда нас везут, то офицер ответил, что в Белосток. Немцы забрали себе часть наших вещей, в том числе патефон с пластинками. По пути они два раза останавливались, выпивали и закусывали. И для забавы имитировали наш расстрел. Ставили нас к вертикальной стенке песчаного карьера и открывали стрельбу. От ударов пуль песок сыпался, забивал рот, глаза, нос. Мы ждали смертельных пуль, но немцы, прекратив стрельбу, хохотали. Затем заводили наш патефон и с удовольствием слушали. Офицер подошел к моей матери и спросил: «Юде?». Я собрал все знания немецких слов и закричал: «Найн, майне муттер ист руссиш!». Я попросил мать показать офицеру свой паспорт. Он полистал паспорт, фыркнул и вернул его обратно. Нас от всего перенесенного трясло.

Наконец нас привезли в пригород Белостока. Это была довольно большая территория, огороженная колючей проволокой, за которой под открытым небом находились гражданские лица. В этом лагере мы провели около недели. За это время жена брата моего отца приехала из деревни к лагерю и привезла нам мешочек сухарей, который впоследствии нам очень помог. Скоро нас посадили в закрытую машину и привезли в белостокскую тюрьму. Камеры на втором этаже, где нас поместили, были просторные. В каждой из камер помещалось около ста человек. Нужно отметить элементарную гуманную акцию со стороны немцев: они не отделили детей от матерей. Хотя все страдали, но страдали вместе. Взрослый состав камеры – это жены командиров Красной Армии, жены политработников и прочие. Женщины были разных национальностей: русские, белоруски, польки и т.п. Кроме одного исключения, о котором я расскажу позже. Кровати были железные, двухъярусные. Никаких спальных принадлежностей не было. Иногда попадалось какое-то тряпье. Каждое утро начиналось с громкого крика: «Appel!» (поверка), и гулкие по цементному полу шаги возвещали утреннюю поверку заключенных камеры. Открывалась железная дверь, и медленно переваливаясь, появлялась фигура коменданта тюрьмы. Это был высокий плотный мужчина с ярко рыжими волосами, одетый в голубой жандармский

костюм. Его громоздкую фигуру дополняла толстая желтого цвета плеть с набалдашником из свинца, зашитого в кожаный мешочек. Если в одной руке он держал плеть, то второй рукой он удерживал поводком громадную овчарку, готовую рвануться на жертву по сигналу хозяина. Каждому заключенному присваивался номер. При проверке зачитывалась фамилия каждого заключенного, а он, в свою очередь, должен был назвать свой номер. После проверки объявляли завтрак. В баках приносили так называемый кофе, заваренный неизвестно чем с отвратным запахом и кусочек хлеба, также неизвестно из чего испеченного. В обед приносили баланду, сваренную из отрубей, обильно «сдобренную» крысиным пометом. Отруби хранились в сарае, где крысы свободно пользовались отрубями. Есть такую баланду, не зажав нос, практически было невозможно. Вечером опять «кофе» с кусочком хлеба. Вот и все питание. Через один-два месяца после этой еды у людей на теле появлялись здоровенные фурункулы и общее недомогание.

Я хочу рассказать об одной особенности состава заключенных. Среди них была одна еврейская девушка. У нее ничего, кроме легкого платья, не было. Многие женщины дарили ей кусочки тряпья, чтобы можно было что-то постелить и чем-то укрыться. Ей было лет пятнадцать-шестнадцать. Голову ее украшали светлые волосы. Ее глаза всегда излучали радость жизни. Я никогда не видел ее хмурой или грустной. Мы, пацаны, украдкой дарили ей маленькие кусочки сухарей, которые давали нам наши матери. Звали эту девушку Хайка Кадыш. Мы часто играли в камере в известную игру «куча мала». И когда в общей свалке на полу оказывалась Хайка и у нее задиралось платье, то мы с удивлением смотрели на ее рыжий пучок волос в области схождения ног, так как у нее не было даже трусиков. Хайка быстро вставала, поправляла платье и снова быстро включалась в игру. Мы никогда от нее не слышали ни жалоб, ни обид. Хайка заметила у меня проблески музыкального слуха и голоса и стала учить меня еврейским песням. Но вот в начале декабря открылась дверь и прозвучали слова: «Хайка Кадыш!». Хайка смиренно слезла с кровати (была ночь) и пошла за вызвавшим ее офицером. Мы, пацаны, уже приспособились посматривать в окошко с решеткой. Для этого самый сильный вставал около стены. Другой пацан (с нашей помощью) залазил ему на плечи. Наконец, третьему пацану мы общими усилиями помогли взобраться второму на плечи. Третий пацан уже мог свободно смотреть во двор тюрьмы. На этот раз мы снова проделали такой трюк. Двор освещали прожектором, и смотрящий все видел отчетливо. Он доложил, что Хайку вывели и посадили в закрытую машину с трубой. Мы, ничего друг другу не говоря, поняли, что ее посадили в машину с газовой камерой. Я до сих пор не пойму: зачем фашистам понадобился этот фарс? Сначала удивительное дитя природы смешать с людьми других национальностей, дать надежду жить и затем демонстративно убить.

В тюрьме из-за вшивости свирепствовал тиф. Через некоторое время я заболел сыпным тифом, и меня поместили в тюремный лазарет. Дощатый одноэтажный барак можно лишь условно назвать лазаретом, так как никаких лекарств в нем не было. Функции врача в нем выполнял военнопленный, военный врач. В его аптечке был лишь градусник и некоторые сушеные травы, которые он собирал в границах тюремной ограды. Врач присел ко мне на табуретку и стал расспрашивать про меня, про мою пока еще короткую жизнь. Врач сказал, что надеется на мой молодой организм и я преодолею тиф. Похоже, он как-то привязался ко мне. Если он входил в палату, то обязательно подходил ко мне, спрашивал о моем состоянии и давал вы-

пить приготовленную микстуру. Как-то его срочно направили в другой барак, и он несколько дней не появлялся. Я чувствовал, что у меня быстро поднимается температура и попросил у санитаря градусник. Температура была 41°С. Меня стало рвать запекшейся кровью. Затем я потерял сознание. Когда очнулся, то увидел, что около меня сидит врач и говорит, что я уже успел побывать на небесах. А произошло следующее. После того, как прекратилась рвота, санитары не смогли прослушать дыхание, решили, что я умер, и понесли меня в морг. Но морг был уже переполнен и меня положили в коридоре морга. Было начало марта. Когда же наш врач вошел в палату, то сразу заметил, что меня нет. Узнав, что санитары уже отнесли меня в морг, он пошел туда и увидел меня лежащего в коридоре. Пощупав пульс, обнаружил, что сердце еще бьется. Меня срочно возвратили в палату, где я пролежал дней десять. Мое нахождение в коридоре морга не прошло даром: я подморозил ноги. Они приняли коричневый цвет. Когда врач увидел это, то сказал, что срочно выписывает меня в камеру, где я должен до изнеможения каждый день ползать по полу камеры, шевеля ногами. Через месяц таких занятий я заметил, что цвет моих ног стал светлеть. Правда, до сих пор у меня начинают мерзнуть обутые ноги уже при температуре ноль-минус два градуса.

В 1943 году немцы поняли, что им недостает рабочих рук в разных сферах хозяйства. Поэтому нас в конце марта погрузили в закрытые товарные вагоны и направили в Восточную Пруссию на торфоразработки. Они сравнительно недалеко находились от города Ландсберг (Landsberg). В этом месте сосредоточились три лагеря: лагерь пленных красноармейцев, лагерь французских военнопленных и лагерь гражданских лиц. Первые два лагеря были окружены колючей проволокой, оснащены прожекторами и охранялись автоматчиками. У гражданского лагеря не было постоянной охраны. Моя работа заключалась в спуске вагонеток с торфом. Рельсовый путь был с наклоном. В верхней части торфяных разработок накапливали торф, а спускать его нужно было в вагонетках по наклонному рельсовому пути. Работа по спуску вагонетки была опасной. Никакой техники безопасности. Вставляешь чурку или кусок дерева между рамой и колесами и тормозишь путем трения с одним из четырех колес тележки. Чуть не так нажмешь, то разгонишь или опрокинешь тележку с торфом. Мне как-то удавалось работать без аварий. Кормили нас плохо: суп из одной брюквы (коровий корм). Поскольку охраны мы не видели, то после работы вечером с сестренкой отправлялись в ближайшие хутора и просили там милостыню. Некоторые хозяева давали попить снятого молока, а другие отвязывали собаку. Я знал, что если нападает собака, то нельзя бежать и махать руками. Поэтому я прижимал к себе сестренку и стоял смирно, давая собаке обнюхать меня и дожидаясь, когда хозяин отзовет ее.

Советские и французские военнопленные находились в совершенно разных условиях. Благодаря жестокой политике Сталина, Родина нашим военнопленным ничем не помогала. Французы же через Красный Крест регулярно получали посылки. Случилось так, что я как-то приглянулся французам. И когда они получали посылки, всегда звали меня и угощали шоколадом. Звали меня они Вольдемаром. Поскольку я уже немного овладел разговорным немецким языком, а французы знали его уже сносно, то мы разговаривали на разные темы. Я им рассказывал про своего отца, и как попал на торфоразработки. Однажды один из них спросил меня, могу ли я хранить тайну. Я ответил, что смогу, если она связана с добрым делом. Он сказал, что

это только доброе дело – несколько человек попытаются бежать на родину, во Францию. Сколько человек, кто именно и когда, об этом он мне ничего не сказал, сказал только, что для побега им нужна карта Пруссии и Европы, и спросил, не смогу ли я им помочь в этом деле. Я обещал подумать и сообщить в ближайшее время. У меня уже мелькнула мысль, где я могу это достать.

Недалеко от гражданского лагеря находился хутор фермера. В нем проживали хозяин, хозяйка и их сын, которого звали Эрвин. Эрвин на один год был старше меня и регулярно ходил в школу, которая находилась приблизительно в четырех км от хутора. Сверстников-немцев, близких к его дому, у Эрвина не было, а затевать всякие игры ему хотелось. Он неоднократно приглашал меня, и я иногда соглашался. Хотя каждое приглашение у меня вызывало неприятие, а иногда и страх. Дело в том, что он постоянно носил с собой револьвер с полным барабаном мелкокалиберных патронов. Иногда он бросал фразу: «Если будешь играть не по правилам, то одна пуля будет в тебе!» Я понимал, что это не просто шуточная фраза, поскольку для него я был лишь игрушкой. И если он и пристрелит меня, то никто его судить не будет. Кроме того, я не знал, все ли у него в голове в норме.

Ему, как властолюбивому пацану, часто хотелось похвалиться. Для этого он открывал дверь дома и показывал свои игрушки, школьный инвентарь, в том числе географические карты и альбом географических карт. У меня в голове засела мысль: узнать время, когда в доме не будет ни хозяина, ни хозяйки, ни Эрвина. Я сообщил об этом французам. Он сказал, что это очень опасно, но иного выхода нет. Я стал выслеживать, когда хозяин уходит в поле пахать и когда он возвращается. Зафиксировал, когда хозяйка уходит на луг для дойки коровы. Наконец, выяснил уход и приход Эрвина из школы. Естественно, матери своей ничего не сказал. В выбранное время подошел к окну дома. К счастью, оно не было закрыто на засов. Железкой осторожно открыл окно и влез в дом. Подошел к картам. Многие из них были расчерчены карандашом. Значит, ими Эрвин уже пользовался и вряд ли будет к ним в ближайшее время возвращаться. Я выбрал карту Пруссии и карту Европы. Аккуратно свернул их в заготовленный ранее плакат, осторожно вылез из окна и закрыл его.

Я понимал, что если кто-нибудь заметит меня, или кто-нибудь из хозяев вернется, то мне будет «крышка». Меня повесят или растерзают собаками. Я осторожно огляделся и пошел к французам. Там я передал пакет с картами. Француз крепко-крепко пожал мои руки и поблагодарил. На следующее утро я услышал, что французами совершен побег и объявлена тревога. Я надеялся, что если их поймают, то они не выдадут меня как соучастника. Побег происходил и раньше как из русского, так и французского лагерей. Если беглецов ловили, то возвращали в лагерь и прилюдно избивали до смертного конца, чтобы неповадно было. На сей раз никаких известий не пришло. Это означало, что побег удался или беглецы погибли при схватке с карателями.

Когда настали холода, сезон добычи торфа окончился, и нашу семью перебросили в селение Дульцен, расположенное в 6 км от города Эйлау (Eylau). Ранее здесь было чье-то имение с полуразрушенным большим домом с колоннадами. Затем по неизвестным причинам земли и дом этого имения перешли в военное ведомство, где проводились испытания орудий и танков. Об этом свидетельствовало множество дзотов со смотровыми щелями. Здесь уже жило и работало на полях гражданское население. Размещались люди в одноэтажных дощатых бараках. Так как для нас сво-

бодного места не было, то я решил переоборудовать бывшую голубятню под хижину. Натаскал листов фанеры, картона и досок. Обложил ими стены. Достал топорик для сбора дровишек и печурку «буржуйку», чем обеспечил примитивное тепло в голубятне. С питанием стало относительно лучше. Я по ночам лазил на подложку сарая, где хранилась овсяная мука. Из нее мать варила кисель. Приправленный сахаринром он представлял лакомство. Меня определили обслуживать овец: летом я должен их пасти, а в зиму и непогоду кормить нарубленной мною на специальном барабане свеклой. Уход в овчарне тоже приходилось делать мне. Командовал мною шеф, который был специалистом по содержанию и поддержанию породистой отары овец. Он был строгий, но справедливый хозяин. Если я где-то оплошал, то он мог меня кнутом или лозой хлестнуть. Шеф каждое утро в овчарне делал обход отары овец. Если замечал, что какой-то ягненок не резвый, хилый, то брал ягненка за задние ноги и с размаху бил головой его о стену. Потом приказывал мне таким образом отбракованных ягнят относить в овраг. Я забирал их и по пути отбирал двух-трех наиболее приемлемых и укрывал под куском шифера. Вечером же я забирал их, приносил матери, которая варила из них суп.

Общее руководство всем гражданским населением лагеря было предоставлено двум офицерам-инвалидам. У одного из них не было ноги, и он ходил с протезом. Фамилия его была Кирхштейн (Kirchstein). У другого офицера был протез одной руки. Фамилия его была Мартенц (Martenz). Все бы ничего, если бы у некоторых гражданских лиц не было ненависти к людям из России. Особенно к тем, у которых родственники были коммунистами. Лично меня ненавидел один поляк по фамилии Гарабурда. Он откуда-то узнал, что отец мой был в Западной Белоруссии, где возглавлял партийный комитет текстильного комбината. Уже по ночам слышался отдаленный грохот тяжелых орудий, и Гарабурда спешил сделать мне какую-нибудь пакость. Он как раз получил посылку, в которой были два круглых хлеба, в которых были запечены бутылки самогона. Это все мне рассказал его сосед по бараку. Гарабурда взял бутылку самогона, закуску и пошел к Мартенцу. Во время трапезы Гарабурда стал говорить, что вот уже слышен грохот фронта, русские придут сюда, и отец Вольдемара (мой отец) в поисках семьи может прийти сюда. Нужно, мол, наказать Вольдемара, чтобы он сидел, как мышь. Мартенцу пришла мысль, он послал за мной. Когда я подошел к нему, он сказал: «Освободи дерьмо из всех туалетов, и, когда освободишь, доложишь мне». У немцев туалеты строились так. Для фекалий ям не было, а двигались прочные открытые ящики с кольцом в наружной боковой части ящика. Когда ящик наполнялся фекалиями, то подводили двух быков с прочной деревянной тягой с крюком. Крюк вставлялся в кольцо, и быками ящик вытаскивался наружу. Сам я ранее не выполнял такую работу, а лишь наблюдал за работой не менее двух мужиков. Я понял, что за день не справлюсь ни с одним туалетом. А их было четыре. Меня охватила злость, отчаяние и обида. Не понимая, что я делаю, я просто побежал в поле прочь от лагеря. Пробежал я около трех км, как услышал стук копыт лошади. Я обернулся и увидел, что меня нагоняет взъяренный Мартенц. Он слез с лошади и спросил: «Что, решил бежать из лагеря?» Одной рукой (точнее протезом) он держал поводком лошадь, а другой (здоровой) рукой стал бить меня, подталкивая к лагерю. Он поочередно бил то по спине, то по голове своим подошком. От непрерывных ударов по спине у меня изо рта шла кровь, а от ударов по голове стоял непрерывный гул и жуткая боль. Я падал. Он поднимал меня

и снова бил. Когда мы подошли к лагерю, я увидел толпу женщин, глядя на меня, они плакали. Мартенц прокричал: «Руссиш швайн!» и ушел. Женщины помогли мне добраться до моей «голубятни», отмyli лицо и грудь от крови. Мать была в поле и не видела этой картины. Я кое-как добрался до своего лежака и потерял сознание. Когда я очнулся, около меня сидела мать и плакала. Через сутки у меня поднялась температура. Я все же с трудом выполз и пошел по направлению к оврагу. Немцы отступали и нередко бросали оружие. Я нашел карабин с магазином патронов. Им я хотел убить Мартенца, но Мартенц уже исчез.

Я заметил, что плохо стал засыпать или рано просыпаться. Я связываю это с множеством ударов по голове. С тех пор и по настоящее время я страдаю бессонницей.

Вскоре вошли части Красной Армии. По просьбе моей матери, командир батальона выделил нам двух бракованных лошадей, а повозку и упряжь для лошадей мы нашли сами. Я не буду описывать, как мы добрались до границы. По пути в одном из городков Пруссии меня положили в госпиталь, где лечили раненых солдат и офицеров. Я пролежал там около двух недель. На лошадях и телеге мы, наконец, добрались до пограничного города Кирбартай, который принадлежал уже Литве и где находился фильтрационный пункт. Там проводилась проверка всех гражданских лиц, желающих покинуть Пруссию и направиться в СССР. Мы на поезде приехали в белорусский город Волковыск, который ближе всего находился к деревне Мацейкова Гора. Мать по сохранившемуся блокноту стала слать телеграммы в Саратов старым знакомым, чтобы найти отца. В Волковыске она заболела брюшным тифом, и я взял на себя все заботы о больной матери (она лежала в больнице) и сестренке. Вскоре от отца в Волковыск пришла телеграмма, и он сам приехал. Мать надеялась хоть часть вещей забрать из Мацейковой Горы. Мы с отцом пытались пройти в Мацейкову Гору, но она по новым границам отошла к Польше, и нас без специальных документов туда не пропустили. Тогда мы из Волковыска всей семьей поехали в Озинский район Саратовской области, где отец работал заместителем директора сланцевых рудников. Отец мой был скрупулезно честным человеком и мешал проворачивать незаконные дела всяким проходимцам. Они его любыми способами вытесняли, и он не мог долго работать на одном месте. Из сланцевых рудников мы переехали в село Советское, где отец стал работать директором мукомольного комбината. Село Советское Саратовской области было районным центром. И запомнился он мне тем, этот районный центр, что мою мать каждую неделю вызывали в НКВД, где задавали один и тот же вопрос: «Почему вы из Пруссии не пробирались в Советский Союз?» Спрашивающий из НКВД, наверное, знал, как женщина с пятилетней дочерью и двенадцатилетним пацаном могла без помех, без еды пройти Пруссию, Польшу, часть Белоруссии и, наконец, «прогулкой» перейти линию фронта. Мне становилось страшно, что в органах НКВД сидят такие безмозглые люди. Поэтому я ни в школе, ни в университете никому не рассказывал мою историю детства.

Поскольку до начала войны я успел закончить четыре класса, в школе, которая была в сланцевых рудниках, я за один год прошел программу пятого, шестого и седьмого классов. Седьмой класс я закончил с отличием. Учился я остервенело. В селе Советское я окончил восьмой класс. Из Советского мы перебрались в город Энгельс. В Энгельсе я закончил девятый и десятый классы. Жили мы очень бедно. Я хотел было устроиться на работу, но мать настояла, чтобы я поступил в вуз. Я по-

ступил в Саратовский университет на физический факультет. У меня была мысль послать во французскую газету краткую заметку про историю побега, но страх, что меня заподозрят в надуманных грехах, остановил. На третьем курсе всех студентов обязали заполнить анкеты для допуска к секретным работам. Я, прежде чем ее заполнять, пошел к начальнику отдела кадров университета. Это была женщина, и ей первой кратко рассказал историю моего детства. Она спросила меня: «Сколько Вам было лет?» Я ответил. Тогда она мне сказала, что на детей такого возраста понятие плена и т.д. вообще не распространяются. И посоветовала спокойно заполнить анкету, кратко ответив на все вопросы. Дальнейшая моя жизнь, научная работа – это совсем другая история. На этом я заканчиваю «пестрые заметки» моей жизни в военные годы. Я 46 лет проработал на кафедре электроники (ее первое название), защитил кандидатскую, потом докторскую диссертации. Руководил коллективом по выполнению важных для нашей обороны задач. Опубликовал более 100 печатных работ, соавтор более 20 авторских свидетельств. По состоянию здоровья вынужден оставить работу. Сейчас я пенсионер, инвалид.

Желаю молодому поколению чаще обращаться к истории Великой Отечественной войны.

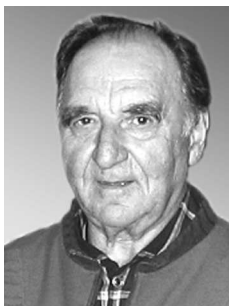
WAR-SCORCHED KIDS

Mixed notes of memory

V. S. Andrushkevich

Memory notes about childhood at the time of the Great Patriotic war.

Keywords: Great Patriotic war, children, captivity.



Андрушкевич Владимир Степанович – родился в Саратове (1929), окончил Саратовский государственный университет (1954). После окончания университета работал в СГУ. Защитил диссертации на соискание ученой степени кандидата (1964) и доктора физико-математических наук (1987) в области вакуумной и плазменной электроники. Опубликовал более 100 работ по указанным направлениям.

410012 Саратов, ул. Астраханская, 83
Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского

ПРАВИЛА ПРЕДСТАВЛЕНИЯ РУКОПИСЕЙ

Рукописи, объемом не более 16 стр. и 8 рис. принимаются в редакцию в 2 вариантах: бумажном и электронном.

1. **Бумажный вариант (2 экз.)** должен быть напечатан шрифтом размера 12 pt, через 1,5 интервала при ширине рабочего поля не менее 16 см. Если рисунки (только черно-белые!) не вставлены в текст, то они выполняются на отдельных страницах также в 2-х экз. Под рисунком указывается его номер, фамилии авторов, название статьи; подрисуночные подписи печатаются на отдельном листе и не должны дублировать внутритекстовое описание рисунка.

Требования к оформлению текста. На первой странице перед текстом статьи должны быть напечатаны: индекс УДК, название статьи, инициалы и фамилии авторов, краткая аннотация статьи с ключевыми словами, составленная по форме удобной для непосредственного включения ее в РЖ, издаваемые ВИНИТИ.

К статье прилагаются в 1 экз.:

- перевод на английский язык названия статьи, инициалов и фамилий авторов, аннотации, **ключевых слов**.

- краткие сведения об авторах с фотографиями в графических форматах JPG, GIF и т.д., или сканированные с разрешением не менее 300dpi без дополнительной компьютерной обработки, **e-mail каждого автора и почтовый адрес организации**.

- *Краткие сведения об авторах составляются по следующей форме:*

Сидоров Петр Иванович – родился в 1938 году в Москве, окончил Московский физико-технический институт в 1961 году. После окончания МФТИ работает в ФИАН заведующим отделом. Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук в МГУ (1964) и доктора физико-математических наук (1977) в области теории колебаний и волн. Автор монографии «Детерминированный хаос и экономика» и учебника «Волны в экологии» (в соавторстве с...). Опубликовал 120 научных статей по направлениям, указанным выше. Лауреат Государственной премии СССР. Редактор журнала International Journal of Chaos Theory и член редакционной коллегии журнала «Физика и жизнь».

В библиографическом списке нумерация источников должна соответствовать очередности ссылок на них в тексте. В списке указываются:

а) для книг – фамилия автора, инициалы, название книги, город, издательство, год издания, том;

б) для журнальных статей – фамилия автора, инициалы, название статьи, название журнала, серия, год, том, номер, выпуск, первая страница статьи;

в) для депонированных статей – название статьи, инициалы, фамилия автора, название организации, в которой выполнена работа, город, год, объем статьи, название депонирующей организации, дата депонирования, регистрационный номер;

г) для препринта – фамилия автора, инициалы, название издания, полное название издающей организации, год, количество страниц;

д) для материалов конференций, школ, семинаров – фамилия автора, инициалы, название статьи, название издания, время и место проведения конференции, город, издательство, год, первая страница статьи.

В конце статьи авторы должны указать наименование программы, в рамках которой выполнена работа, или наименование фонда поддержки.

2. Электронный вариант. Статья оформляется с использованием макропакета $\text{L}^{\text{A}}\text{T}_{\text{E}}\text{X}$ 2e. Рекомендуется пользоваться компилятором $\text{M}\text{i}\text{K}\text{T}\text{E}\text{X}$ ($\text{M}\text{i}\text{K}\text{T}\text{e}\text{X}2.4$), так как именно им пользуются в редакции. В редакцию присылать только TEX -файл (с англ. аннотацией и ав. сведениями) без стилевых файлов и PDF статьи. Все иллюстрации, включенные в оригинал-макет, предоставляются в виде отдельных файлов, записанных в любом из форматов: $\text{T}\text{I}\text{F}\text{F}$, GIF , $\text{J}\text{P}\text{E}\text{G}$, EPS . Название файла должно соответствовать номеру рисунка в тексте.

В виде исключения принимаются статьи, подготовленные с помощью текстового редактора Microsoft Word (все формулы должны быть набраны при помощи Equation или MathType).

Все публикации в журнале, в том числе и публикации аспирантов, бесплатные.

ПИСЬМО В РЕДАКЦИЮ

От авторов статьи Д.И. Трубецкова, Г.М. Красновой «О современном состоянии сверхвысокочастотных вакуумных электронных и микроэлектронных приборов с управляемой эмиссией» (Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2013. Т. 21, № 1. С. 35–66)

На с. 60 указанного выпуска после окончания текста статьи следует читать:

Работа выполнена при поддержке грантов РФФИ (№ 11-02-00047-а) и Президентской программы поддержки ведущих научных школ Российской Федерации (проект НШ-1430.2012.2).

Авторы

Зав. редакцией *Н.Н. Левина*
Редакторы *Л.А. Сидорова, Н.Н. Левина*
Оформление художника *Д.В. Соколова*
Оригинал-макет подготовлен
И.А. Пономаревой, О.Н. Строгановой,
в пакете *L^AT_EX*

Подписка на 2013 год осуществляется
по каталогу Агентства Роспечать
«Газеты. Журналы», индекс 73498
и по договору между Подписчиком
(юридическим или физическим лицом)
и Издателем (Саратовским государственным университетом)

Стоимость подписки на 2013 год 1080 руб. (6 номеров)
Заявки на заключение договора принимаются
по почте, по телефону редакции, по эл. почте редакции

Адрес редакции: 410012, Саратов, Астраханская, 83
Тел./факс: (845-2) 52-38-64
E-mail: and@nonlin.sgu.ru

Распространение журнала осуществляется
редакцией журнала по адресной системе

**Условия подписки на электронную версию журнала на сайте
Научной электронной библиотеки <http://elibrary.ru>**

Сдано в набор 1.05.2013. Подписано к печати 9.07.2013
Формат 70x108/16. Бумага «Снегурочка». Печать трафаретная
Усл. печ. л. 19,25 (13,75). Уч.-изд. л. 19,0. Заказ 446

Отпечатано на ризографе GR 3750 редакции журнала

© Редакция журнала
«Известия вузов. ПНД», 2013
© Оформление художника
Д.В. Соколова, 2013