

**ДИНАМИКА СИСТЕМЫ ДВУХ НЕЛИНЕЙНО СВЯЗАННЫХ МАЯТНИКОВ**

С. О. Хрисанфова, Е. Ю. Кадина, Е. В. Губина, Л. В. Коган, Г. В. Осипов

Институт информационных технологий, математики и механики,
Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского
Россия, 603950 Нижний Новгород, проспект Гагарина, 23

E-mail: svetlana.khrisanfova@gmail.com, gubinael@mail.ru, elena.kadina@itmm.unn.ru,
lyudmila.kogan@itmm.unn.ru, grosipov@gmail.com

В работе исследовалась динамика двух упруго связанных между собой маятников одинаковой массы, находящихся под действием разных постоянно действующих внешних вращательных моментов. Исследование мотивировано многочисленными физическими и биологическими приложениями рассматриваемой модели. Такие системы входят в число базовых физических моделей и представляют широкий научный интерес. На сегодняшний день существует немало работ, изучающих маятниковые ансамбли более высокого порядка. Представляется важным подробно и полно изучить динамику системы двух маятников, нелинейно связанных друг с другом, как базу для понимания поведения более сложных ансамблей фазовых осцилляторов. При изучении динамики двух нелинейно связанных маятников наибольший интерес представляет рассмотрение режима синхронизации, являющегося одним из основных режимов, наблюдаемых при взаимодействии нескольких осцилляторов в природе. Также в работе описываются и другие режимы, характеризующие динамику системы. Цель исследования состоит в изучении динамики системы в зависимости от параметров. Рассмотрены периодический и квазипериодический режимы колебаний, синхронизация и режим отсутствия колебаний. В работе получены оригинальные результаты, касающиеся аналитической оценки границы области синхронизации в плоскости $\{d, \alpha\}$, где d – сила связи между осцилляторами, а α – параметр синхронизации. Для получения вышеуказанной оценки были проведены элементы качественного анализа систем нелинейно связанных уравнений Адлера. Аналитическая оценка была подтверждена результатами прямого численного моделирования системы. В работе использовался метод Рунге–Кутты четвертого порядка с контролем локальной погрешности. Были построены бифуркационные диаграммы в плоскости $\{\gamma_1, \gamma_2\}$ для различных значений параметра связи. Исследовано влияние параметров системы на существующие в ней режимы.

Ключевые слова: Синхронизация, осциллятор, нелинейная динамика.

DOI: 10.18500/0869-6632-2016-24-3-4-20

Ссылка на статью: Хрисанфова С.О., Кадина Е.Ю., Губина Е.В., Коган Л.В., Осипов Г.В. Динамика системы двух нелинейно связанных маятников // Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2016. Т. 24, № 3. С. 4–20.

Введение

Изучение динамики систем связанных маятников является важной задачей, имеющей множество практических приложений. Такие системы входят в число базовых физических моделей и представляют широкий научный интерес. На сегодняшний день существует немало работ, посвящённых исследованию осцилляторов, связанных друг с другом разнообразно устроенными связями [1–9]. Следует отметить тот факт, что, кроме стандартного приложения маятниковых систем, в таком разделе физики, как механика, системы связанных осциллирующих элементов маятникового типа позволяют адекватно описывать процессы в электрических цепях, полупроводниковых структурах, в молекулярной биологии [10–12]. Они активно используются при изучении явления сверхпроводимости. К примеру, при теоретическом рассмотрении связанных джозефсоновских контактов [13–18] и гранулированных сверхпроводников [19]. Не меньшую важность представляет приложение результатов исследования динамики систем связанных осциллирующих объектов к объектам живых систем. Так, можно провести аналогию между движением маятников и вращательными колебаниями оснований молекул ДНК [12] при изучении так называемых открытых состояний [20–22], являющихся важным и необходимым элементом функционирования такой молекулы [23].

Представляется важным подробно и полно изучить динамику системы двух маятников, нелинейно связанных друг с другом, как базу для понимания поведения более сложных ансамблей фазовых осцилляторов, интерес к которым вызван большим количеством физических приложений, использующих, в том числе, модель Френкеля–Конторовой и ее модификации [11, 24, 25]. Рассмотрение цепочек взаимодействующих спинов в ферромагнетиках [26–28] и исследование процесса скручивания цепочек в полимерных кристаллах [29–31], к примеру, можно назвать в числе областей, использующих результаты, полученные в ходе изучения динамики маятниковых ансамблей. При изучении динамики двух нелинейно связанных маятников наибольший интерес представляет рассмотрение режима синхронизации, являющегося одним из основных режимов, наблюдаемых при взаимодействии нескольких осцилляторов в природе [10]. Поэтому в данной работе наше внимание будет уделяться рассмотрению синхронизации. Также будут освещены и другие режимы, характеризующие динамику системы.

1. Модель

В работе рассматривается система уравнений, описывающая динамику двух упруго связанных между собой математических маятников одинаковой массы, находящихся под действием разных внешних вращательных моментов

$$\begin{cases} \ddot{\phi}_1 + \lambda \dot{\phi}_1 + \beta \sin \phi_1 = \gamma_1 + d \sin(\phi_2 - \phi_1), \\ \ddot{\phi}_2 + \lambda \dot{\phi}_2 + \beta \sin \phi_2 = \gamma_2 + d \sin(\phi_1 - \phi_2). \end{cases} \quad (1)$$

Предполагается, что осцилляция маятников в поле силы тяжести происходит лишь в одной плоскости, перпендикулярной линии подвеса. Колебания маятников происходят в сильно вязкой среде (коэффициент затухания $\lambda \gg 1$, то есть диссипация

сильна). Здесь ϕ_1 и ϕ_2 отвечают за фазы, $\gamma_1, \gamma_2 \in [-2, 2]$ и отражают действие вращательных моментов на каждый маятник, а d – величина связи между маятниками. Коэффициент β влияет на динамику каждого маятника в отдельности, внося асинхронность в их вращения. Сделав замену времени $t = \tau/\lambda$ и вводя малый параметр $\mu = 1/\lambda^2$, получим следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} \frac{d\phi_1}{dt} = y_1, \\ \frac{d\phi_2}{dt} = y_2, \\ \mu \frac{dy_1}{dt} = \gamma_1 - \beta \sin \phi_1 - y_1 + d \sin(\phi_2 - \phi_1), \\ \mu \frac{dy_2}{dt} = \gamma_2 - \beta \sin \phi_2 - y_2 + d \sin(\phi_1 - \phi_2). \end{cases} \quad (2)$$

Система медленных движений имеет следующий вид:

$$\begin{cases} \dot{\phi}_1 = y_1, \\ \dot{\phi}_2 = y_2, \\ -f(\phi_1, y_1) = y_1 - \gamma_1 + \beta \sin \phi_1 - d \sin(\phi_2 - \phi_1) = 0, \\ -f(\phi_2, y_2) = y_2 - \gamma_2 + \beta \sin \phi_2 - d \sin(\phi_1 - \phi_2) = 0. \end{cases} \quad (3)$$

Легко показать, что медленные движения являются устойчивыми по отношению к быстрым. Действительно, записывая систему быстрых движений

$$\begin{cases} \mu \frac{dy_1}{dt} = \gamma_1 - \beta \sin \phi_1 - y_1 + d \sin(\phi_2 - \phi_1), \\ \mu \frac{dy_2}{dt} = \gamma_2 - \beta \sin \phi_2 - y_2 + d \sin(\phi_1 - \phi_2), \\ \phi_1 = \phi_1^0 = \text{const}, \\ \phi_2 = \phi_2^0 = \text{const}, \end{cases} \quad (4)$$

можно увидеть, что $f'_y < 0$. Таким образом, будем рассматривать лишь устойчивые, медленные, движения системы. Поскольку $\phi_{1,2} \in [0; 2\pi]$, можно рассмотреть систему на торе $T = S^1 \times S^1$

$$\begin{cases} \dot{\phi}_1 = \gamma_1 - \beta \sin \phi_1 + d \sin(\phi_2 - \phi_1), \\ \dot{\phi}_2 = \gamma_2 - \beta \sin \phi_2 + d \sin(\phi_1 - \phi_2). \end{cases} \quad (5)$$

2. Динамика независимо колеблющихся маятников

При нулевой связи d каждое из уравнений системы легко сводится к классическому уравнению Адлера [32] при помощи замены времени $\tilde{t} = t/\beta$ и введения нового параметра $\tilde{\gamma} = \gamma/\beta$

$$\dot{\phi} = \tilde{\gamma} - \sin \phi. \quad (6)$$

Существует несколько режимов поведения решения в зависимости от $\tilde{\gamma}$.

1. При $\tilde{\gamma} > 1$ в системе может существовать периодический режим. Решение в этом случае записывается следующим образом:

$$\phi(t) = 2 \arctan \left(\frac{1}{\tilde{\gamma}} \left(1 + \sqrt{\tilde{\gamma}^2 - 1} \tan \left(C + \frac{\sqrt{\tilde{\gamma}^2 - 1}}{2} t \right) \right) \right).$$

2. При $\tilde{\gamma} = 1$ появляется полуустойчивое состояние равновесия. В этом случае решением уравнения Адлера является функция $\phi(t) = 2 \operatorname{arccot} (2/(t + C) + 1)$.
3. При $\tilde{\gamma} < 1$ наблюдается режим отсутствия осцилляций. В уравнении существует два состояния равновесия: устойчивое и неустойчивое, соответственно. Координаты этих состояний

$$\phi^1 = \arcsin \tilde{\gamma},$$

$$\phi^2 = \pi - \arcsin \tilde{\gamma}.$$

3. Режим синхронизации

Итак, в данной работе исследовалась система двух связанных фазовых осцилляторов (5). Наличие параметра β не позволяет ожидать постоянной разницы фаз при синхронизации маятников [33].

На рис. 1 показаны диаграммы различных режимов, наблюдаемых в системе. Так, существует область S_{11} , где наблюдается синхронизация 1:1, то есть выполняется условие $|\phi_1 * 1 - \phi_2 * 1| < \text{const}$. Также в зависимости от величины параметра β возникает различное число других областей синхронизации. В сравнительно небольших областях S_{nm} наблюдается синхронизация $n : m - |\phi_1 * m - \phi_2 * n| < \text{const}$.

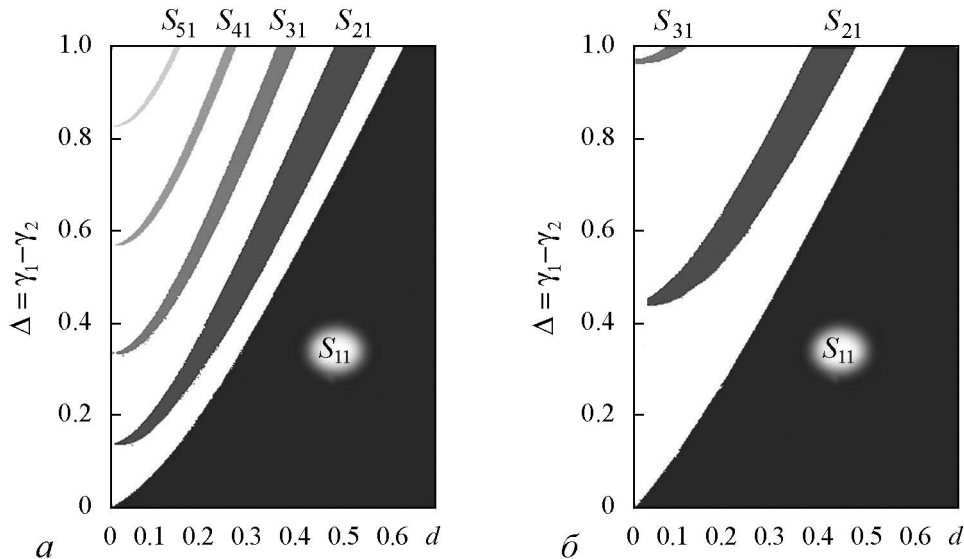


Рис. 1. Диаграммы различных режимов синхронизации при $\gamma_2 = 1$ и различных значениях β : $a - 0.95$; $\bar{b} - 0.80$. Здесь: d – сила связи между маятниками; S_{11} – область синхронизации 1:1; S_{nm} – область синхронизации $n : m$

С увеличением β область синхронизации $1:1$ уменьшается, в то время как появляется больше областей синхронизации $n:m$.

На рис. 1 видно, что область S_{11} является наибольшей областью синхронизации. К тому же, она представляется единственной областью синхронных движений, стабильно наблюдаемой на фазовых диаграммах при изменении β . Крайне узкие области синхронизации $n:m$ трудны для физической реализации. Прогнозирование поведения системы в таких режимах становится менее полезным. Таким образом, сосредоточимся в дальнейшем именно на синхронизации $1:1$.

Оценим границы области этой синхронизации. Поскольку ненулевой коэффициент β не позволяет получить стабильную разность фаз при синхронизации, воспользуемся критерием ограниченности разности фаз константой: $|\Theta| = |1 * \phi_1 - 1 * \phi_2| \leq \text{const}$. Введём *параметр синхронизации* α , $|\Theta| \leq \alpha$. Данный параметр должен быть сравнительно небольшим (в работе считаем его не превышающим полрадиана), что представляется довольно естественным. Запишем разность двух уравнений системы (5)

$$\dot{\phi}_2 - \dot{\phi}_1 = \gamma_2 - \gamma_1 - \beta(\sin \phi_2 - \sin \phi_1) - 2d \sin(\phi_2 - \phi_1). \quad (7)$$

Обозначая $\Theta = \phi_2 - \phi_1$, $\Delta = \gamma_2 - \gamma_1$, получим

$$\dot{\Theta} = \Delta - 2\beta \sin \frac{\Theta}{2} \cos \frac{\phi_2 + \phi_1}{2} - 4d \sin \frac{\Theta}{2} \cos \frac{\Theta}{2}, \quad (8)$$

или

$$\dot{\Theta} = \Delta - 2 \sin \frac{\Theta}{2} \left(\beta \cos \frac{\phi_2 + \phi_1}{2} + 2d \cos \frac{\Theta}{2} \right). \quad (9)$$

Поскольку рассматривается оценка границ синхронизации, полагаем $\dot{\Theta} = 0$. Получим

$$\Delta - 2 \sin \frac{\Theta}{2} \left(\beta \cos \frac{\phi_2 + \phi_1}{2} + 2d \cos \frac{\Theta}{2} \right) = 0, \quad (10)$$

$$\frac{\Delta}{2 \sin(\Theta/2)} = \beta \cos \frac{\phi_2 + \phi_1}{2} + 2d \cos \frac{\Theta}{2}, \quad (11)$$

$$\cos \frac{\Theta}{2} = \frac{\Delta}{4d \sin(\Theta/2)} - \frac{\beta}{2d} \cos \frac{\phi_2 + \phi_1}{2}. \quad (12)$$

Так как $|\cos(\Theta/2)| \leq 1$, то необходимо, чтобы выполнялось условие

$$\left| \frac{1}{d} \left(\frac{\Delta}{4 \sin(\Theta/2)} - \frac{\beta}{2} \cos \frac{\phi_2 + \phi_1}{2} \right) \right| \leq 1. \quad (13)$$

Считая коэффициент d положительным, получим следующее неравенство:

$$-d \leq \frac{\Delta}{4 \sin(\Theta/2)} - \frac{\beta}{2} \cos \frac{\phi_2 + \phi_1}{2} \leq d. \quad (14)$$

Тогда имеем

$$\begin{cases} d \geq \frac{\beta}{2} + \frac{\Delta}{4 \sin(\Theta/2)}, \\ d \geq \frac{\beta}{2} - \frac{\Delta}{4 \sin(\Theta/2)}. \end{cases} \quad (15)$$

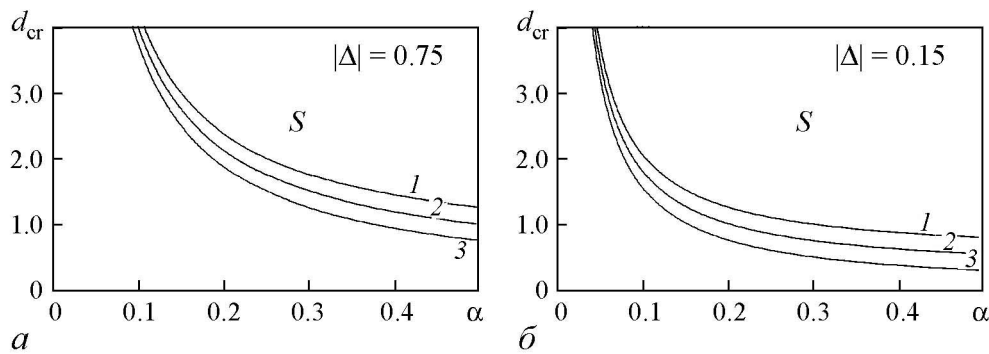


Рис. 2. Зависимость от параметра синхронизации α минимального значения параметра связи d_{cr} , необходимого для установления синхронизации для различных значений параметра β : 1 – 1.0, 2 – 0.5, 3 – 0 и $\gamma_{1,2}$: $a - \gamma_1 = 1.75, \gamma_2 = 1.0$; $b - \gamma_1 = 1.75, \gamma_2 = 1.60$. Здесь S – область синхронизации

Неравенства (15) должны выполняться при любой расстройке фаз в пределах указанного диапазона $|\Theta| \leq \alpha$, определяемого параметром синхронизации. Соответственно они должны выполняться и при наибольшей расстройке $|\Theta| = \alpha$

$$d \geq \frac{\beta}{2} + \frac{|\Delta|}{4 \sin(\alpha/2)}. \quad (16)$$

Таким образом, в плоскости (α, d) можно нарисовать оценку границы синхронизации (рис. 2) для различных значений параметров β и Δ . В области S , то есть выше кривой

$$d = \frac{|\beta|}{2} + \frac{\Delta}{4 \sin(\alpha/2)}, \quad (17)$$

осцилляторы гарантированно находятся в синхронном режиме с параметром синхронизации α . Можно проследить, как меняется оценка этой границы в зависимости от параметра β . Такое сравнение проиллюстрировано кривыми 1–3. Заметим, что чем более точную синхронизацию осцилляторов необходимо получить, тем большее значение параметра связи d требуется для этого. Это представляется довольно естественным. Проанализируем зависимость величины области синхронизации S от параметра β . Увеличение β приводит к большей асинхронности поведения отдельных элементов системы. Таким образом, площадь области синхронизации уменьшается при увеличении параметра β . Зависимость величины области синхронизации от Δ будет рассмотрена позднее.

Для подтверждения полученных закономерностей было проведено прямое численное интегрирование системы при различных значениях параметров $\gamma_{1,2}$ и d . Сравнение результатов, полученных численно и аналитически, показано на рис. 3. Численная граница

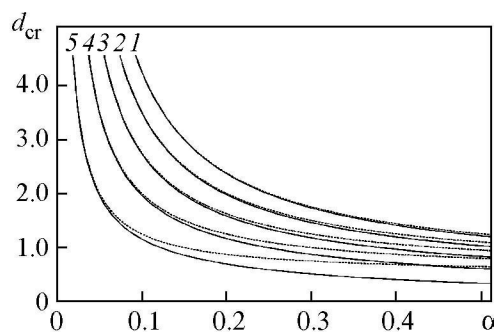


Рис. 3. Зависимость от параметра синхронизации α минимального значения параметра связи d_{cr} , необходимого для установления синхронизации при $|\phi_1 - \phi_2| < \alpha, \beta = 1.0$: 1 – $\gamma_1 = 1.75, \gamma_2 = 1.0$; 2 – $\gamma_1 = 1.75, \gamma_2 = 1.15$; 3 – $\gamma_1 = 1.75, \gamma_2 = 1.30$; 4 – $\gamma_1 = 1.75, \gamma_2 = 1.45$; 5 – $\gamma_1 = 1.75, \gamma_2 = 1.60$. Сплошные линии – численные результаты, пунктирные линии – аналитическая оценка (17)

области синхронизации получена путём нахождения минимального значения α , $|\phi_1 - \phi_2| < \alpha$ для точек пространства параметров $\gamma_{1,2}$, d , удовлетворяющих критерию синхронизации $|\phi_1 - \phi_2| < \text{const}$. В расчётах использовался эквивалентный критерий $\langle \dot{\phi}_1 \rangle / \langle \dot{\phi}_2 \rangle = 1$. Аналитическая оценка довольно точно аппроксимирует границу области синхронизации, полученную в результате численных экспериментов. Наибольшую точность оценка достигает при небольших значениях параметра синхронизации α . Наблюдается увеличение разницы между аналитическими и численными результатами при уменьшении величины $\Delta = \gamma_1 - \gamma_2$. Это происходит вследствие того, что при получении аналитического приближения границы области синхронизации S оценки проводились по наихудшему случаю. Однако небольшая разница между вращательными моментами благоприятствует синхронизации. Поэтому, реальная граница области S в этом случае оказывается ниже прогнозируемой.

Для более полного и подробного изучения области синхронизации были построены бифуркационные диаграммы данной системы в плоскости (γ_1, γ_2) при различных значениях параметра связи d (рис. 4). В областях D_s происходят вращательные движения по обоим переменным. Эти области соответствуют синхронизации, а фазовый портрет системы в этом случае представлен на рис. 5, *г*. На рис. 4 видно, что увеличение связи d между маятниками приводит к расширению ряда областей, в том числе и области синхронизации. Влияние параметра связи на другие области бифуркационной диаграммы будет рассмотрено ниже.

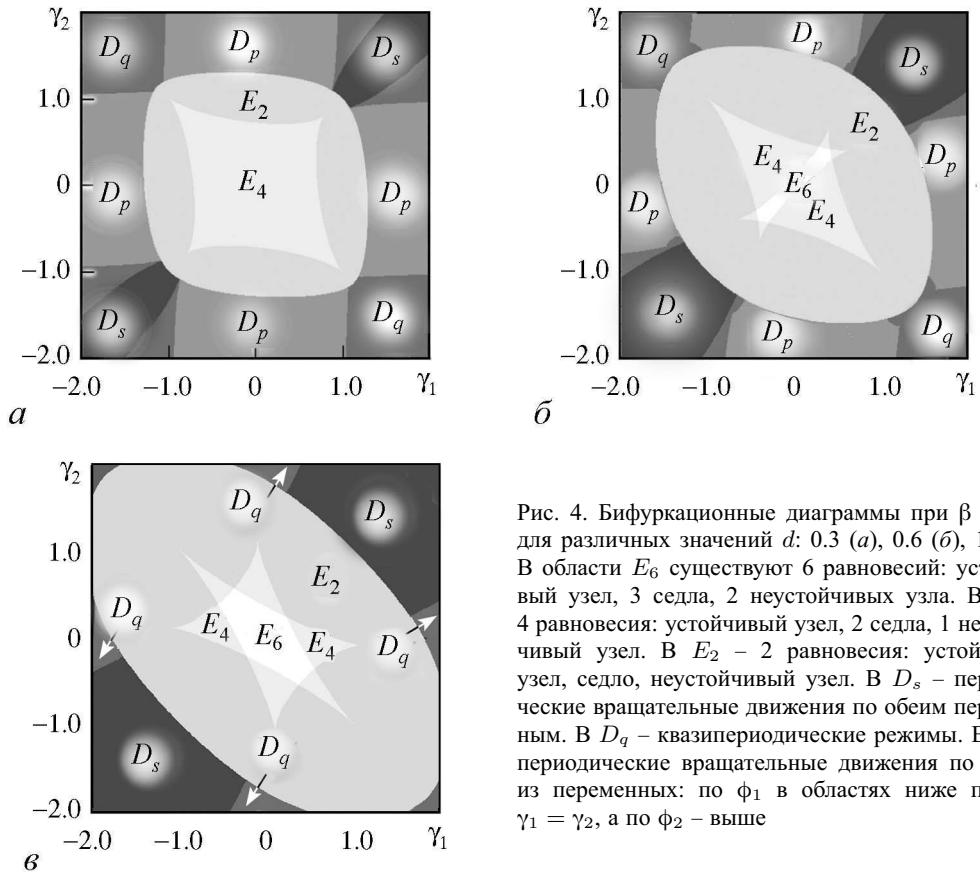


Рис. 4. Бифуркационные диаграммы при $\beta = 1.0$ для различных значений d : 0.3 (*а*), 0.6 (*б*), 1.1 (*в*). В области E_6 существуют 6 равновесий: устойчивый узел, 3 седла, 2 неустойчивых узла. В E_4 – 4 равновесия: устойчивый узел, 2 седла, 1 неустойчивый узел. В E_2 – 2 равновесия: устойчивый узел, седло, неустойчивый узел. В D_s – периодические вращательные движения по обоим переменным. В D_q – квазипериодические режимы. В D_p – периодические вращательные движения по одной из переменных: по ϕ_1 в областях ниже прямой $\gamma_1 = \gamma_2$, а по ϕ_2 – выше

3.1. Другие режимы активности, наблюдаемые в системе

3.1.1. Квазипериодические режимы. С областями синхронизации на бифуркационных диаграммах в плоскости (γ_1, γ_2) непосредственно граничат области D_q (см. рис. 4), где наблюдаются квазипериодические режимы. Типичный фазовый портрет показан на рис. 5, *e*. Следует отметить, что внутри этих областей существуют небольшие подобласти, где происходит синхронизация $n:m$. Однако они крайне малы и не рассматривались в данной работе подробно.

3.1.2. Периодические движения. В системе наблюдаются вращательные периодические движения разных типов. В областях D_s (см. рис. 4) происходят вращательные движения по обоим переменным, соответствующие синхронизации. В областях D_p бифуркационных диаграмм происходит вращательное периодическое движение лишь по одной переменной. Соответствующий фазовый портрет представлен на рис. 5, *d*. Для областей D_p , находящихся выше оси симметрии $\gamma_1 = \gamma_2$, вращательное периодическое движение соответствует вращениям по переменной ϕ_1 ; в областях D_p , находящихся ниже оси симметрии $\gamma_1 = \gamma_2$, происходит вращательное периодическое движение по переменной ϕ_2 .

3.1.3. Режим отсутствия колебаний. Основную часть бифуркационных диаграмм занимают области $E_i, i \in \{2, 4, 6\}$, соответствующие режиму отсутствия осцилляций. Данный режим наблюдается в системе довольно часто, поэтому представляется важным рассмотреть эти области подробнее. Для этого была сделана замена временной переменной $\tilde{t} = t/\beta$ и введены новые параметры $\gamma_{1,2}/\beta$. Полученная система имеет следующий вид:

$$\begin{cases} \dot{\phi}_1 = \gamma_1 - \sin \phi_1 + d(\sin \phi_2 \cos \phi_1 - \sin \phi_1 \cos \phi_2), \\ \dot{\phi}_2 = \gamma_2 - \sin \phi_2 + d(\sin \phi_1 \cos \phi_2 - \sin \phi_2 \cos \phi_1). \end{cases} \quad (18)$$

Запишем систему уравнений, из которой находятся координаты состояний равновесия,

$$\begin{cases} \gamma_1 - \sin \phi_1^* + d(\sin \phi_2^* \cos \phi_1^* - \sin \phi_1^* \cos \phi_2^*) = 0, \\ \gamma_2 - \sin \phi_2^* + d(\sin \phi_1^* \cos \phi_2^* - \sin \phi_2^* \cos \phi_1^*) = 0. \end{cases} \quad (19)$$

Приведем значения собственных чисел, соответствующих возможным состояниям равновесия,

$$\begin{aligned} D &= 4d^2 \cos(\phi_2^* - \phi_1^*)^2 + (\cos \phi_1^* - \cos \phi_2^*)^2, \\ \lambda_{1,2} &= -d \cos(\phi_2^* - \phi_1^*) - \frac{\cos \phi_1^* + \cos \phi_2^*}{2} \pm \frac{\sqrt{D}}{2}, \end{aligned} \quad (20)$$

здесь D – дискриминант характеристического уравнения системы (19)). Заметим, что дискриминант D не может быть отрицательным. Значит, если в системе (18) существует состояние равновесия, и $\lambda_{1,2}$ суть собственные числа, соответствующие

ему, то $\lambda_{1,2} \in \text{Re}$. Таким образом, состояний равновесия типа фокус не может быть в данной системе.

Проведём в (19) стандартную тригонометрическую замену переменных $\tan(\phi_1/2) = x_1$, $\tan(\phi_2/2) = x_2$, $\phi_1, \phi_2 \in [-\pi/2, \pi/2]$, получим

$$\begin{cases} \gamma_1 - \frac{2x_1}{1+x_1^2} + d \frac{2x_2}{1+x_2^2} \frac{1-x_1^2}{1+x_1^2} - d \frac{2x_1}{1+x_1^2} \frac{1-x_2^2}{1+x_2^2} = 0, \\ \gamma_2 - \frac{2x_2}{1+x_2^2} - d \frac{2x_2}{1+x_2^2} \frac{1-x_1^2}{1+x_1^2} + d \frac{2x_1}{1+x_1^2} \frac{1-x_2^2}{1+x_2^2} = 0. \end{cases} \quad (21)$$

Эквивалентная система имеет следующий вид:

$$\begin{cases} \gamma_1(1+x_1^2)(1+x_2^2) - 2x_1(1+x_2^2) + 2dx_2(1-x_1^2) - 2dx_1(1-x_2^2) = 0, \\ \gamma_2(1+x_1^2)(1+x_2^2) - 2x_2(1+x_1^2) - 2dx_2(1-x_1^2) + 2dx_1(1-x_2^2) = 0. \end{cases} \quad (22)$$

Для решения данной системы уравнений, запишем результат полиномиальных выражений, стоящих в левых частях. Результат есть многочлен от коэффициентов двух полиномов, равный нулю в том и только в том случае, когда у этих полиномов имеется общий корень. Приравнявая результат к нулю и решая это уравнение относительно переменной x_2 , можно найти решения системы (22)

$$\begin{aligned} & (\gamma_2 + d(\gamma_1 + \gamma_2))^2 - 4(1+d)(\gamma_2 + d(\gamma_1 + \gamma_2))x_2 + \\ & + (4 + 3\gamma_2^2 + 3d^2(\gamma_1 + \gamma_2)^2 + 2d(4 + \gamma_1\gamma_2 + \gamma_2^2))x_2^2 - \\ & - 8(\gamma_2 + d^2(\gamma_1 + \gamma_2))x_2^3 + (4 + 3\gamma_2^2 + 3d^2(\gamma_1 + \gamma_2)^2 - \\ & - 2d(4 + \gamma_1\gamma_2 + \gamma_2^2))x_2^4 - 4(-1+d)(-\gamma_2 + \\ & + d(\gamma_1 + \gamma_2))x_2^5 + (\gamma_2 - d(\gamma_1 + \gamma_2))^2 x_2^6 = 0. \end{aligned} \quad (23)$$

Обобщающие диаграммы по исследованию состояний равновесия системы (18) в зависимости от параметра связи d представлены на рис. 4. Рассмотрим диаграмму с наибольшим числом областей (рис. 4, б). Состояния равновесия существуют во всех областях E . В областях D их нет. В области E_6 существует шесть состояний равновесия: глобально устойчивый узел, три седла и два неустойчивых узла (рис. 5, а). При переходе в область E_4 (рис. 5, б) вместо неустойчивых узлов и одного из седел остаётся неустойчивое состояние равновесия типа узел и остаётся четыре состояния равновесия. При переходе в область E_2 (рис. 5, в), где существует лишь два равновесия – устойчивый узел и седло, слияние седла и неустойчивого узла рождает неустойчивое периодическое движение. При выходе из области E_2 равновесия сливаются через седлоузловую бифуркацию, образуя устойчивое движение.

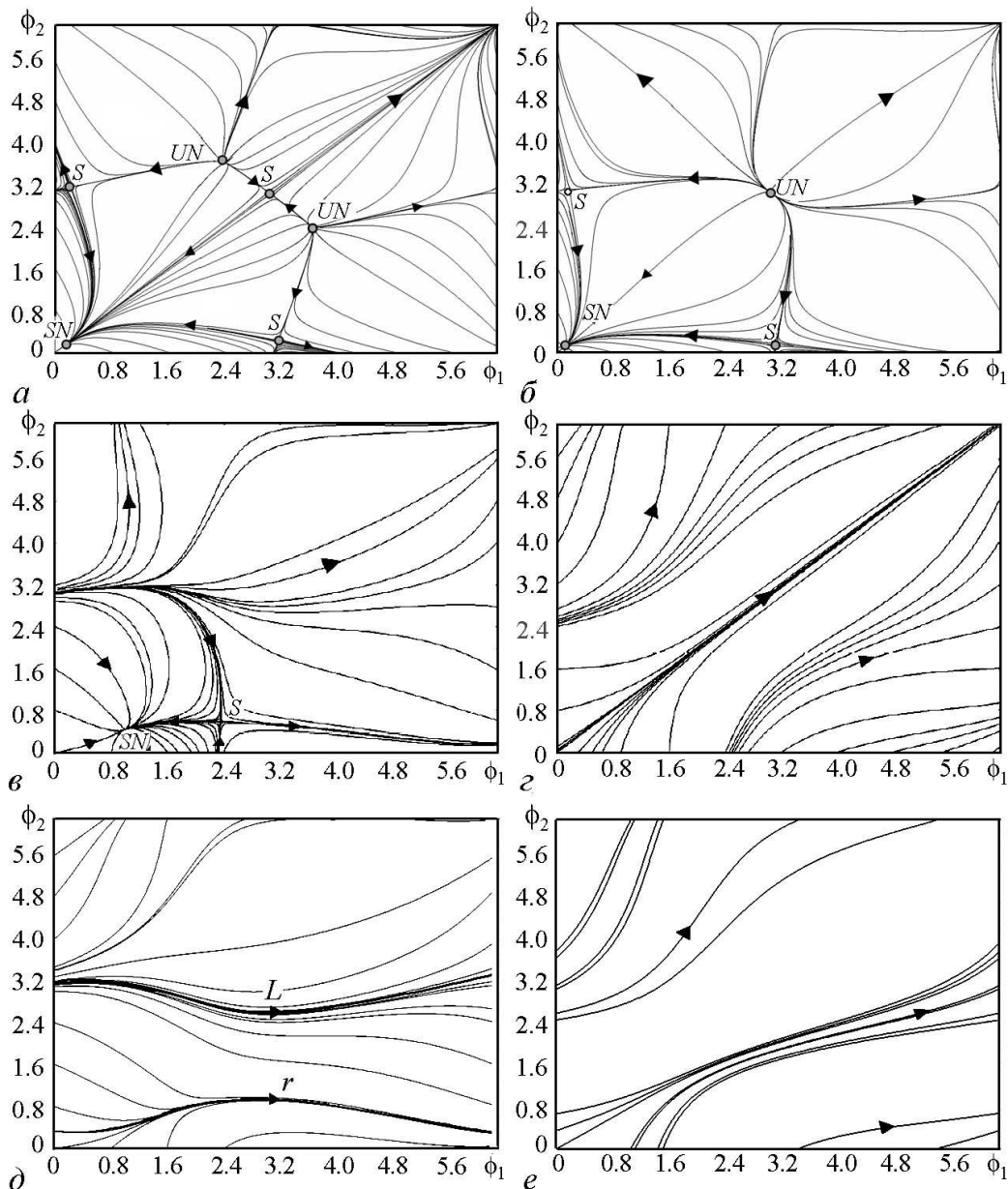


Рис. 5. Фазовые портреты системы (18) при $d = 0.6$ и $\gamma_{1,2}$ из различных областей пространства параметров: $a - E_6$, $b - E_4$, $v - E_2$, $z - D_s$, $d - D_p$, $e - D_q$

Исследуем аналитически границу, отделяющую область E_2 от областей без состояний равновесия. Рассмотрим случай $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma$. Координаты состояния равновесия находятся из уравнения

$$\sin \phi_1 + \sin \phi_2 = 2\gamma. \quad (24)$$

Рассмотрим симметричный случай, когда система полностью симметрична относительно фаз. В этом случае решение будет лежать на прямой $\phi_1^* = \phi_2^* = \phi$, а собственные числа характеристического уравнения системы имеют вид

$$\lambda_{1,2} = -d - \cos \phi \pm d. \quad (25)$$

Легко видеть, что при $\gamma > 0$ существует лишь один симметричный случай, когда состояния равновесия одно. Это происходит на внешней границе области E_2 в точке $\gamma_1 = \gamma_2 = 1$ при этом $\phi = \pi/2$. Одно из собственных чисел, соответствующих данному состоянию равновесия, нулевое, другое – отрицательное. Таким образом, состояние равновесия, найденное нами аналитически, действительно образовалось путём седлоузловой бифуркации из седла и устойчивого узла, что подтверждает численные результаты.

Остановимся более подробно на влиянии параметра связи d на области бифуркационных диаграмм на рис. 4. При увеличении связи между элементами системы область E_2 заметно расширяется. Таким образом, при сильной связи d режим отсутствия колебаний становится преобладающим в системе. В то же время область E_4 заметно уменьшается. Появившаяся область E_6 не достигает больших размеров по сравнению с доминирующей E_2 . Это означает, что относительно непростое поведение системы при переходе в единственное устойчивое равновесное состояние наблюдается всё реже по мере увеличения параметра связи d .

Заключение

В рамках данного исследования была рассмотрена система уравнений, описывающая динамику двух упруго связанных между собой математических маятников одинаковой массы в сильно вязкой среде, находящихся под действием внешнего вращательного момента.

- Исследовано влияние параметров системы на существующие в ней режимы активности. Так, возрастание параметра β , вносящего асинхронность во вращения маятников, приводит, с одной стороны, к уменьшению области синхронизации $1 : 1$ (основной области синхронизации), а с другой – к появлению большого количества полос в плоскости (Δ, d) , в которых наблюдается синхронизация $n : m$.

- Получена аналитическая оценка границы основной области синхронизации в плоскости (d, α) , где α – параметр синхронизации, ограничивающий разность фаз осцилляторов.

- Кроме непосредственного вывода об уменьшении области синхронизации при увеличении β , было отмечено расширение этой области при меньшем расхождении вращательных моментов, действующих на маятники. При помощи прямого численного моделирования была показана адекватность аналитической оценки.

- Построены бифуркационные диаграммы системы в плоскости (γ_1, γ_2) для различных значений параметра связи d . Таким образом, была получена зависимость областей, в которых наблюдаются квазипериодический, периодический режимы и режим отсутствия осцилляций, от действия вращательных моментов на каждый из маятников и величины связи между ними.

Исследование выполнено при поддержке Российского научного фонда (проект № 14-12-00811).

Библиографический список

1. *Матросов В.В.* Динамика двух фазоуправляемых генераторов с малоинерционными цепями управления, связанных через нелинейный элемент // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2007. Т. 15, № 3. С. 15.
2. *Bhansali P., Roychowdhury J.* Gen-Adler: The generalized Adler's equation for injection locking analysis in oscillators // Proceedings of the Design Automation Conference. 2009. P. 522–527.
3. *Perlikowski P., Yanchuk S., Popovych O.V., Tass P.A.* Periodic patterns in a ring of delay-coupled oscillators // Phys. Rev. E. 2010. Vol. 82, № 3. P. 036208. <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevE.82.036208>
4. *Maistrenko Y., Penkovsky B., Rosenblum M.* Solitary state at the edge of synchrony in ensembles with attractive and repulsive interactions // Phys. Rev. E. 2014. Vol. 89, № 6. P. 060901. <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevE.89.060901>
5. *Burylko O., Kazanovich Y., Borisyyuk R.* Bifurcation study of phase oscillator systems with attractive and repulsive interaction // Phys. Rev. E. 2014. Vol. 90, № 2. P. 022911. <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevE.90.022911>
6. *Xie J., Knobloch E., Kao Hsien-Ching.* Multicluster and traveling chimera states in nonlocal phase-coupled oscillators // Phys. Rev. E. 2014. Vol. 90, № 2. P. 022919. <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevE.90.022919>
7. *Смирнов Л.А., Крюков А.К., Кадина Е.Ю., Губина Е.В., Осипов Г.В.* Вращательная динамика системы из двух связанных маятников // Проблемы прочности и пластичности. 2015. Т. 77, № 4. С. 425.
8. *Khibnik A.I., Braiman Y., Kennedy T.A.B., Wiesenfeld K.* Phase model analysis of two lasers with injected field // Physica D. 1998. Vol. 111, № 1–4. P. 295–310.
9. *Guckenheimer J., Khibnik A.* Torus maps from weak coupling of strong resonances / In book: «Methods of qualitative theory of differential equations and related topics» // American Mathematical Society. 2000. P. 205–218.
10. *Pikovsky A., Rosenblum M., Kurths J.* Synchronization: A Universal Concept in Nonlinear Sciences / Series «The Cambridge nonlinear science series». Cambridge: Cambridge University Press, 2001. 411 p.
11. *Braun O., Kivshar Yu.S.* The Frenkel–Kontorova Model: Concepts, Methods and Applications. Berlin: Springer, 2004. P. 491.
12. *Yakushevich L.V.* Nonlinear Physics of DNA. Wiley-VCH, 2004. P. 207.
13. *Leeman C., Lereh P., Racine G.A., Martinoli P.* Vortex dynamics and phase transitions in a two-dimensional array of Josephson junctions // Phys. Rev. Lett. 1986. Vol. 56, № 12. P. 1291–1294.
14. *Ryu S., Yu W., Stroud D.* Dynamics of an underdamped Josephson-junction ladders // Phys. Rev. E. 1996. Vol. 53, № 3. P. 2190–2195.
15. *Kim B.J., Kim S., Lee S.J.* Defect motions and smearing of Shapiro steps in Josephson-junction ladders under magnetic frustration // Phys. Rev. B. 1995. Vol. 51, № 13. P. 8462–8466.
16. *Kim J., Choe W.G., Kim S., Lee H.J.* Dynamics of Josephson junction ladders // Phys. Rev. B. 1994. Vol. 49, № 1. P. 459–464.

17. *Denniston C., Tang C.* Phases of Josephson junction ladders // *Phys. Rev. Lett.* 1995. Vol. 75, № 21. P. 3930-3933.
18. *Qjan M., Weng J.-Z.* Transitions in two sinusoidally coupled Josephson junction rotators // *Annals of Physics.* 2008. Vol. 323. P. 1956-1962.
19. *Fishman R.S., Stroud D.* Role of long-range Coulomb interactions in granular superconductors // *Phys. Rev. B.* 1988. Vol. 38, № 1. P. 290-296.
20. *Yakushevich L.V., Gapa S., Awrejcewicz J.* Mechanical analog of the DNA base pair oscillations // *Dynamical Systems. Theory and Applications.* 2009. P. 879-886.
21. *Якушевич Л.В.* Биомеханика ДНК: Вращательные колебания оснований // *Компьютерные исследования и моделирование.* 2011. Т. 3, № 3. С. 319-328.
22. *Аврейцевич Я., Млынарска С., Якушевич Л.* О нелинейных колебаниях пар оснований ДНК // *Прикладная математика и механика.* 2013. Т. 77, № 4. P. 392-400.
23. *Krueger A., Protozanova E., Frank-Kamenetskii M.* Sequence-dependent basepair opening in DNA double helix // *Biophys. J.* 2006. Vol. 90. P. 3091-3099.
24. *Takeno S., Peyrard M.* Nonlinear modes in coupled rotator models // *Physica D.* 1996. Vol. 92. P. 140-163.
25. *Zhang F.* Kink shape modes and resonant dynamics in sine-lattices // *Physica D.* 1997. Vol. 110. P. 51-61.
26. *Kosterlitz J.M., Thouless D.J.* Ordering, metastability and phase transitions in two-dimensional systems // *J. Phys. C. Solid State Phys.* 1973. Vol. 6. P. 181-1203.
27. *Antoni M., Ruffo S.* Clustering and relaxation in Hamiltonian long-range dynamics // *Phys. Rev. E.* 1995. Vol. 52, № 3. P. 2361-2374.
28. *Wang X.Y., Taylor P.L.* Devil's staircase, critical thickness, and propagating fingers in antiferroelectric liquid crystals // *Phys. Rev. Lett.* 1996. Vol. 76, № 4. P. 640-643.
29. *Fillaux F., Carlile C.J.* Inelastic-neutron-scattering study of methyl tunneling and the quantum sine-Gordon breather in isotopic mixtures of 4-methyl-pyridine at low temperature // *Phys. Rev. B.* 1990. Vol. 42, № 10. P. 5990-6006.
30. *Zhang F., Collins M.A., Kivshar Yu.S.* Kinks and conformational defects in nonlinear chains // *Phys. Rev. E.* 1995. Vol. 51, № 4. P. 3774.
31. *Fillaux F., Carlile C.J., Kearley G.J.* Inelastic-neutron-scattering study at low temperature of the quantum sine-Gordon breather in 4-methyl-pyridine with partially deuterated methyl groups // *Phys. Rev. B.* 1991. Vol. 44, № 22. P. 12280-12293.
32. *Adler R.* A study of locking phenomena in oscillators // *Proceedings of the IRE.* 1946. Vol. 34, № 6. P. 351-357.
33. *Osipov G., Kurths J., Zhou Ch.* Synchronization in Oscillatory Networks. Berlin: Springer, 2007.

Поступила в редакцию 14.04.2016
После доработки 17.05.2016

THE DYNAMICS OF TWO NONLINEARLY COUPLED OSCILLATORS

S. Khrisanfova, E. Kadina, E. Gubina, L. Kogan, G. Osipov

Lobachevsky State University of Nizhny Novgorod – National Research University

Prospect Gagarina, 23, 603950 Nizhny Novgorod, Russia

E-mail: svetlana.khrisanfova@gmail.com, gubinael@mail.ru, elena.kadina@itmm.unn.ru,

lyudmila.kogan@itmm.unn.ru, grosipov@gmail.com

In this paper the dynamics of two elastically coupled pendulums is studied. The pendulums oscillate under the influence of external rotational moments, their masses are considered to be equal. The current work is motivated by multiple applications in physics and biology that the model has. Due to the fact that most of the previous studies focused on similar systems of higher order, we believe that the current research can serve as a basis for understanding the functioning of more complex oscillatory ensembles. It is, therefore, vital to provide a complete study of the system dynamics for different parameter values. Throughout the study different regimes of the system activity are examined. Thus, non-oscillatory mode, synchronization, periodic and quasi-periodic regimes are discussed in the paper. Synchronization is often considered to be one of the most important forms of interaction between oscillatory elements of various nature. For this reason the synchronization domain is thoroughly investigated in this paper. The main results of the current research are as follow. An analytical approximation of the synchronization domain border is obtained in (d, α) parameter plane. Here d denotes the coupling strength, whereas α is the synchronization parameter. By means of numerical integration methods the approximation is also shown to be accurate. In order to provide better understanding of the regimes that exist in the system for various parameter values, bifurcation diagrams for several values of the coupling parameter in (γ_1, γ_2) plane are drawn.

Keywords: Coupled pendulums, nonlinear coupling, synchronization.

DOI: 10.18500/0869-6632-2016-24-3-4-20

Paper reference: Khrisanfova S., Kadina E., Gubina E., Kogan L., Osipov G. The dynamics of the two nonlinearly coupled oscillators // *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*. 2016. Vol. 24, № 3. P. 4–20.

References

1. *Matrosov V.V.* Dynamics of two phase locked loop system coupled through the phase discriminator // *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*. 2007. Vol. 15, № 3. P. 15 (in Russian).
2. *Bhansali P., Roychowdhury J.* Gen-Adler: The generalized Adler's equation for injection locking analysis in oscillators // *Proceedings of the Design Automation Conference*. 2009. P. 522–527.
3. *Perlikowski P., Yanchuk S., Popovych O.V., Tass P.A.* Periodic patterns in a ring of delay-coupled oscillators // *Phys. Rev. E*. 2010. Vol. 82, № 3. P. 036208. <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevE.82.036208>
4. *Maistrenko Y., Penkovsky B., Rosenblum M.* Solitary state at the edge of synchrony in ensembles with attractive and repulsive interactions // *Phys. Rev. E*. 2014. Vol. 89, № 6. P. 060901. <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevE.89.060901>
5. *Burylko O., Kazanovich Y., Borisjuk R.* Bifurcation study of phase oscillator systems with attractive and repulsive interaction // *Phys. Rev. E*. 2014. Vol. 90, № 2. P. 022911. <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevE.90.022911>

6. Xie J., Knobloch E., Kao Hsien-Ching. Multicluster and traveling chimera states in nonlocal phase-coupled oscillators // *Phys. Rev. E*. 2014. Vol. 90, № 2. P. 022919. <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevE.90.022919>
7. Smirnov L.A., Kryukov A.K., Kadina E.Yu., Gubina E.V., Osipov G.V. Rotational dynamics in a pair of coupled // *J. The Problems of Strength and Plasticity*. 2015. Vol. 77, № 4. P. 425 (in Russian).
8. Khibnik A.I., Braimanc Y., Kennedy T.A.B., Wiesenfeld K. Phase model analysis of two lasers with injected field // *Physica D*. 1998. Vol. 111, № 1–4. P. 295–310.
9. Guckenheimer J., Khibnik A. Torus maps from weak coupling of strong resonances / In book: «Methods of Qualitative Theory of Differential Equations and Related Topics» // American Mathematical Society. 2000. P. 205–218.
10. Pikovsky A., Rosenblum M., Kurths J. Synchronization: A Universal Concept in Nonlinear Sciences / Series «The Cambridge nonlinear science series». Cambridge: Cambridge University Press, 2001. 411 p.
11. Braun O., Kivshar Yu.S. The Frenkel–Kontorova Model: Concepts, Methods, and Applications. Berlin: Springer, 2004. P. 491.
12. Yakushevich L.V. Nonlinear Physics of DNA. Wiley-VCH, 2004. P. 207.
13. Leeman C., Lereh P., Racine G.A., Martinoli P. Vortex dynamics and phase transitions in a two-dimensional array of Josephson junctions // *Phys. Rev. Lett.* 1986. Vol. 56, № 12. P. 1291–1294.
14. Ryu S., Yu W., Stroud D. Dynamics of an underdamped Josephson junction ladders // *Phys. Rev. E*. 1996. Vol. 53, № 3. P. 2190–2195.
15. Kim B.J., Kim S., Lee S.J. Defect motions and smearing of Shapiro steps in Josephson junction ladders under magnetic frustration // *Phys. Rev. B*. 1995. Vol. 51, № 13. P. 8462–8466.
16. Kim J., Choe W.G., Kim S., Lee H.J. Dynamics of Josephson junction ladders // *Phys. Rev. B*. 1994. Vol. 49, № 1. P. 459–464.
17. Denniston C., Tang C. Phases of Josephson junction ladders // *Phys. Rev. Lett.* 1995. Vol. 75, № 21. P. 3930–3933.
18. Qjan M., Weng J.-Z. Transitions in two sinusoidally coupled Josephson junction rotators // *Annals of Physics*. 2008. Vol. 323. P. 1956–1962.
19. Fishman R.S., Stroud D. Role of long-range Coulomb interactions in granular superconductors // *Phys. Rev. B*. 1988. Vol. 38, № 1. P. 290–296.
20. Yakushevich L.V., Gapa S., Awrejcewicz J. Mechanical analog of the DNA base pair oscillations // *Dynamical Systems. Theory and Applications*. 2009. P. 879–886.
21. Yakushevich L.V. Biomechanics of DNA: Rotational oscillations of bases // *J. Computer Research and Modeling*. 2011. Vol. 3, № 3. P. 319 (in Russian).
22. Awrejcewicz J., Mlynarska S., Yakushevich L.V. Non-linear oscillations of DNA base pairs // *J. Appl. Math. Mech.* 2013. Vol. 77, № 4. P. 392 (in Russian).
23. Krueger A., Protozanova E., Frank-Kamenetskii M. Sequence-dependent basepair opening in DNA double helix // *Biophys. J.* 2006. Vol. 90. P. 3091–3099.

24. *Takeo S., Peyrard M.* Nonlinear modes in coupled rotator models // *Physica D.* 1996. Vol. 92. P. 140–163.
25. *Zhang F.* Kink shape modes and resonant dynamics in sine-lattices // *Physica D.* 1997. Vol. 110. P. 51–61.
26. *Kosterlitz J.M., Thouless D.J.* Ordering, metastability and phase transitions in two-dimensional systems // *J. Phys. C. Solid State Phys.* 1973. Vol. 6. P. 1181–1203.
27. *Antoni M., Ruffo S.* Clustering and relaxation in Hamiltonian long-range dynamics // *Phys. Rev. E.* 1995. Vol. 52, № 3. P. 2361–2374.
28. *Wang X.Y., Taylor P.L.* Devil's staircase, critical thickness, and propagating fingers in antiferroelectric liquid crystals // *Phys. Rev. Lett.* 1996. Vol. 76, № 4. P. 640–643.
29. *Fillaux F., Carlile C.J.* Inelastic-neutron-scattering study of methyl tunneling and the quantum sine-Gordon breather in isotopic mixtures of 4-methyl-pyridine at low temperature // *Phys. Rev. B.* 1990. Vol. 42, №10. P. 5990–6006.
30. *Zhang F., Collins M.A., Kivshar Yu.S.* Kinks and conformational defects in nonlinear chains // *Phys. Rev. E.* 1995. Vol. 51, № 4. P. 3774.
31. *Fillaux F., Carlile C.J., Kearley G.J.* Inelastic-neutron-scattering study at low temperature of the quantum sine-Gordon breather in 4-methyl-pyridine with partially deuterated methyl groups // *Phys. Rev. B.* 1991. Vol. 44, № 22. P. 12280–12293.
32. *Adler R.* A study of locking phenomena in oscillators // *Proceedings of the IRE.* 1946. Vol. 34, № 6. P. 351–357.
33. *Osipov G., Kurths J., Zhou Ch.* Synchronization in Oscillatory Networks. Berlin: Springer, 2007.



Хрисанфова Светлана Олеговна – родилась в Нижнем Новгороде (1993). В 2014 году получила диплом бакалавра прикладной математики и информатики в Нижегородском государственном университете им. Н.И. Лобачевского. С 2014 года проходит обучение в магистратуре по специальности «Прикладная математика и информатика» в Институте информационных технологий, математики и механики ННГУ. Выполняет исследования по проекту «Фазовая динамика осцилляторных сред». Полученные результаты были представлены на Всероссийских и Международных конференциях, опубликовано 4 тезиса.

603950 Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23
 Нижегородский государственный университет им. Н.И.Лобачевского
 E-mail: svetlana.khrisanfova@gmail.com



Губина Елена Васильевна – родилась в Горьком (1952). Окончила механико-математический факультет Горьковского государственного университета им. Н.И. Лобачевского (1970), кандидат физико-математических наук. Доцент кафедры теории управления и динамики систем Нижегородского государственного университета им. Н.И. Лобачевского.

603950 Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23
 Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского
 E-mail: gubinael@mail.ru



Кадина Елена Юрьевна – родилась в Горьком (1973). Окончила факультет вычислительной математики и кибернетики Нижегородского государственного университета им. Н. И. Лобачевского (1996), ассистент кафедры теории управления и динамики систем Нижегородского государственного университета им. Н.И. Лобачевского.

603950 Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23
Нижегородский государственный университет им. Н.И.Лобачевского
E-mail: elena.kadina@itmm.unn.ru



Коган Людмила Владимировна – родилась в Горьком (1941). Окончила Горьковский государственный университет им. Н.И. Лобачевского (1963), кандидат физико-математических наук, доцент кафедры теории управления и динамики систем Нижегородского государственного университета им. Н.И. Лобачевского.

603950 Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23
Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского
E-mail: lyudmila.kogan@itmm.unn.ru



Осипов Григорий Владимирович – родился в 1960 году. Заведующий кафедрой теории управления и динамики машин- доктор с 2006 года Нижегородского государственного университета им. Н.И. Лобачевского. Читал лекции по общим курсам «Классическая механика» и «Теория колебаний», ведет практические и лабораторные занятия, руководит курсовыми и дипломными работами студентов. Разработал специальные курсы «Синхронизация, структуры и хаос в нелинейных дискретных средах», «Численные методы в исследовании нелинейных систем» и «Возбудимые среды: динамика и управление». Опубликовал более 120 научных работ, а за последние 5 лет – 30 работ в ведущих отечественных и зарубежных журналах и в сборниках материалов нескольких международных конференций, на которых выступал с докладами в качестве приглашенного лектора. В 2004 году защитил докторскую диссертацию по теме «Синхронизация в неоднородных ансамблях локально диффузионно связанных регулярных и хаотических осцилляторов». За последние пять лет участвовал в выполнении двух международных (INTAS) и пяти российских (РФФИ) научных проектов (в трех из них – в качестве руководителя). Работал по приглашениям, в том числе как приглашенный профессор, зарубежных университетов в Дармштадте, Леувене, Тайбее, Потсдаме, Вене, Гонконге, Ланкастере и Бостоне.

603950 Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23
Нижегородский государственный университет имени Н.И. Лобачевского
E-mail: grosipov@gmail.com



**ВОССТАНОВЛЕНИЕ ПО ВРЕМЕННЫМ РЯДАМ
АРХИТЕКТУРЫ СВЯЗЕЙ И ПАРАМЕТРОВ ЭЛЕМЕНТОВ
В АНСАМБЛЯХ СВЯЗАННЫХ ОСЦИЛЛЯТОРОВ С ЗАДЕРЖКОЙ**

И. В. Сысоев^{1,2}, Д. Д. Кульминский^{2,1}, В. И. Пономаренко^{2,1}, М. Д. Прохоров²

¹Национальный исследовательский
Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского
Россия, 410012 Саратов, Астраханская, 83

²Саратовский филиал Института радиотехники и электроники им. В. А. Котельникова РАН
Россия, 410019 Саратов, Зеленая, 38

E-mail: ivssci@gmail.com; kulminskydd@gmail.com; ponomarenkovi@gmail.com;
mdprokhorov@yandex.ru

Цель. Предложить новый подход к восстановлению архитектуры связей и параметров элементов в ансамблях связанных осцилляторов, описываемых дифференциальными уравнениями первого порядка с запаздыванием, по временным рядам их колебаний.

Метод. Метод основан на минимизации целевой функции, характеризующей расстояние между точками реконструируемой нелинейной функции данного элемента, и разделении восстановленных коэффициентов связи на значимые и незначимые. Минимизация целевой функции осуществляется методом наименьших квадратов. Время запаздывания определяется как соответствующее минимуму целевой функции по всем пробным временам запаздывания.

Результаты. Эффективность предложенного метода продемонстрирована в численном эксперименте на примере хаотических временных рядов ансамбля, состоящего из диффузионно связанных неидентичных уравнений Маккея–Гласса в присутствии шума, а также в натурном эксперименте на примере временных рядов резистивно связанных радиотехнических генераторов с запаздывающей обратной связью. Метод обеспечивает более высокую, чем ранее предложенные подходы, вычислительную эффективность за счёт использования неитерационных алгоритмов минимизации целевой функции и отбора значимых коэффициентов. При этом оценки коэффициентов связи и параметра инерционности являются несмещёнными.

Обсуждение. Метод может быть полезен для восстановления параметров элементов и архитектуры связей в системах различной природы: радиотехнических, биологических и иных, описываемых уравнениями первого порядка с запаздыванием.

Ключевые слова: Анализ временных рядов, реконструкция уравнений, ансамбли осцилляторов, системы с запаздыванием.

DOI: 10.18500/0869-6632-2016-24-3-21-37

Ссылка на статью: Сысоев И.В., Кульминский Д.Д., Пономаренко В.И., Прохоров М.Д. Восстановление по временным рядам архитектуры связей и параметров элементов в ансамблях связанных осцилляторов с задержкой // Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2016. Т. 24, № 3. С. 21–37.

Введение

В последние годы большое внимание исследователей привлекает задача определения структуры и количественной оценки связей в ансамблях, состоящих из большого числа взаимодействующих между собой элементов, по временным рядам их колебаний. Важность этой задачи определяется тем, что архитектура и интенсивность связей во многом определяют особенности коллективной динамики элементов ансамбля и возможность их синхронизации [1–3]. Для реконструкции связей в многоэлементных системах используются методы, основанные на моделировании фазовой динамики [4–6], анализе причинности по Грейнджеру [7, 8], методы адаптивного управления [9–11] и другие методы [12–14]. Однако в большинстве описанных случаев элементы исследуемых ансамблей либо не имеют запаздывающей обратной связи, либо ее величина предполагается известной. Вместе с тем, системы с запаздыванием чрезвычайно широко распространены в природе и технике. Их повсеместность обусловлена такими фундаментальными свойствами, как конечная скорость распространения сигнала и наличие запаздывающей обратной связи, присущими многим физическим, химическим, климатическим и биологическим системам и процессам [15, 16]. Ансамбли, состоящие из уравнений с запаздыванием, широко используются для моделирования и описания процессов в различных многоэлементных системах с задержкой [17–19].

Методы, позволяющие восстановить архитектуру и величину связей и одновременно оценить собственные параметры элементов в ансамблях систем с запаздыванием, были предложены в [20, 21]. Наряду с рядом достоинств, эти методы имеют и недостатки. Например, для реализации метода [20] требуется обратимость функций, описывающих собственную динамику элементов ансамбля, отсутствие шума и задание стартовых догадок для времен запаздывания вблизи их истинных значений, что не всегда оказывается возможным. В методе, предложенном нами в [21], для восстановления времени запаздывания элементов используется отдельная процедура [22–24], а использование итерационного алгоритма для реконструкции архитектуры связей приводит к относительно большому времени работы, при этом полученный результат может зависеть от стартовых догадок архитектуры связей.

В настоящей работе предлагается новый метод восстановления ансамблей, состоящих из систем с запаздыванием, свободный от указанных недостатков. Метод основан на минимизации целевой функции для каждого элемента ансамбля, характеризующей расстояние между точками реконструируемой нелинейной функции, отсортированными по величине абсциссы, и использовании различных алгоритмов для разделения восстановленных коэффициентов связи на значимые и незначимые.

1. Метод

Рассмотрим ансамбль, состоящий из диффузионно связанных систем с запаздыванием, каждая из которых описывается уравнением следующего вида:

$$\varepsilon_i \dot{x}_i(t) = -x_i(t) + f(x_i(t - \tau_i)) + \sum_{j=1, j \neq i}^D k_{i,j} (x_j(t) - x_i(t)), \quad (1)$$

где $i = 1 \dots D$, D – число элементов в ансамбле; ε_i – параметр, характеризующий инерционные свойства i -го элемента ансамбля; τ_i – время запаздывания; f_i – нелинейная функция; $k_{i,j}$ – коэффициенты связи, характеризующие воздействие j -го элемента на i -й. В наиболее общем случае между любыми двумя элементами ансамбля существует взаимная связь.

Пусть у нас имеются временные ряды $\mathbf{x}_i = \{x_i\}_{i=1}^N$ длиной N точек всех D осцилляторов, измеренные с шагом выборки Δt . Пусть также все функции f_i непрерывны, а длина временного ряда N достаточна для того, чтобы даже участкам самого быстрого на всём отрезке $[\min(x_i); \max(x_i)]$ изменения $f_i(x_i)$ во временном ряде $\{x_i\}_{i=1}^N$ соответствовало несколько десятков точек.

Введем дискретное время запаздывания $\theta_i = \tau_i/\Delta t$ и перепишем уравнение (1) в виде

$$f_i(x_i(n)) = \varepsilon_i \dot{x}_i(n + \theta_i) + x_i(n + \theta_i) - \sum_{j=1, j \neq i}^D k_{i,j} (x_j(n + \theta_i) - x_i(n + \theta_i)), \quad (2)$$

где $n = 1 \dots n - \theta_i$. Величины $\dot{x}_i(n + \theta_i)$ могут быть найдены численным дифференцированием исходного ряда. Для этого необходимо, чтобы шаг выборки Δt был достаточно мал, чтобы позволить разрешить все существенные временные масштабы. Для каждого осциллятора отсортируем значения $x_i(n)$ по возрастанию, обозначив такую сортировку как преобразование Q , сопоставляющее точке с номером n в исходном ряде точку с номером $Q(x_i, n)$ в отсортированном ряде. Обратное преобразование, сопоставляющее точке с номером $Q(x_i, n)$ в отсортированном ряде точку с номером n в исходном, обозначим Q^{-1} . Тогда $n = Q^{-1}(Q(n))$. Для краткости обозначений здесь и далее зависимость Q и Q^{-1} от \mathbf{x}_i указывать не будем.

Пусть некоторая точка имеет номер n в исходном ряде и номер $Q(n)$ в отсортированном ряде. Тогда её сосед справа в отсортированном ряде будет иметь номер $Q(n) + 1$, а в исходном ряде его номер будет $p_n = Q^{-1}(Q(n) + 1)$, причем номера n и p_n в общем случае не будут близки. Так как точки с номерами $Q(n)$ и $Q(n) + 1$ являются соседними в отсортированном ряде, значения динамической переменной в этих точках будут близки. А значит, будут близки и значения функции f_i от этих переменных поскольку все функции f_i , как уже было сказано выше, изначально предполагаются непрерывными. Обозначим разность значений функции f_i в этих точках как $\delta_i(n)$

$$\delta_i(n) = f_i(x_i(p_n)) - f_i(x_i(n)). \quad (3)$$

Используя уравнение (2), запишем уравнение (3) как

$$\begin{aligned} \delta_i(n) = & \left(x_i(p_n + \theta_i) - \sum_{j=1, j \neq i}^D k_{i,j} (x_j(p_n + \theta_i) - x_i(p_n + \theta_i)) + \varepsilon_i \dot{x}_i(p_n + \theta_i) \right) - \\ & - \left(x_i(n + \theta_i) - \sum_{j=1, j \neq i}^D k_{i,j} (x_j(n + \theta_i) - x_i(n + \theta_i)) + \varepsilon_i \dot{x}_i(n + \theta_i) \right). \end{aligned} \quad (4)$$

Введём новые обозначения и перепишем выражение (4) в следующем виде:

$$\delta_i(n) = \Delta x_i(n) - \sum_{j=1, j \neq i}^D k_{i,j} (\Delta x_j(n) - \Delta x_i(n)) + \varepsilon_i \Delta \dot{x}_i(n), \quad (5)$$

$$\Delta x_i(n) = x_i(p_n + \theta_i) - x_i(n + \theta_i), \quad (6)$$

$$\Delta \dot{x}_i(n) = \dot{x}_i(p_n + \theta_i) - \dot{x}_i(n + \theta_i). \quad (7)$$

Обозначим через L_i^2 сумму $\delta_i^2(n)$

$$L_i^2 = \sum_{n=1}^{N-\theta_i-1} \delta_i^2(n) = \sum_{n=1}^{N-\theta_i-1} \left(\Delta x_i(n) - \sum_{j=1, j \neq i}^D k_{i,j} (\Delta x_j(n) - \Delta x_i(n)) - (-\varepsilon_i) \Delta \dot{x}_i(n) \right)^2. \quad (8)$$

Величину L_i^2 можно рассматривать как функцию от параметров θ_i , $k_{i,j}$ и ε_i , величина которых заранее не известна. При правильном выборе этих параметров L_i^2 будет меньше, чем при ошибочном. Это объясняется тем, что при неправильном выборе θ_i , $k_{i,j}$ и ε_i расстояния (4) не будут малы даже для соседних точек в отсортированном ряде.

Заметим, что предложенная мера в некотором смысле характеризует длину восстановленной нелинейной функции, а именно, представляет собою сумму квадратов только вертикальных компонент расстояний между точками нелинейной функции, в то время как горизонтальные компоненты $(x_i(p_n) - x_i(n))$ не поддаются оптимизации по параметрам θ_i , $k_{i,j}$ и ε_i и потому не включены в целевую функцию (8).

Поскольку (6) и (7) зависят только от θ_i , ε_i и $k_{i,j}$ при данном фиксированном i и не зависят от иных θ_m , ε_m или $k_{m,j}$, для которых $m \neq i$, минимизацию целевой функции (8) возможно проводить отдельно для каждого осциллятора. При этом фактически решается задача реконструкции неавтономной системы по векторному ряду $\{x_i(n + \theta_i), x_i(n), \dot{x}_i(n + \theta_i)\}_{n=1}^{N-\theta_i}$, одна компонента которого измеряется, другая восстанавливается методом задержек, а третья – методом дифференцирования. Временные ряды внешнего воздействия вычисляются явно по известным рядам переменных $\{x_m(n)\}_{n=\theta_i+1}^N$. Таким образом, нет необходимости восстанавливать фазовое пространство большой размерности, пропорциональной числу осцилляторов в ансамбле.

Если зафиксировать θ_i , то задачу минимизации (8) можно рассматривать как линейную задачу о наименьших квадратах, где $k_{i,j}$ и $(-\varepsilon_i)$ суть искомые коэффициенты (их всего D штук для каждого i -го элемента), $\Delta x_i(n)$ – аппроксимируемые величины, а матрица значений базисных функций состоит из $(\Delta x_j(n) - \Delta x_i(n))$ и $\Delta \dot{x}_i(n)$. В такой постановке L_i^2 представляет собою целевую функцию. Поиск её экстремума является стандартной задачей, которая может быть решена нерекурсивно.

Поскольку время запаздывания θ_i заранее не известно, минимизацию целевой функции (8) можно провести для различных пробных дискретных времен запазды-

вания θ'_i , перебираемых из некоторого интервала. Минимум зависимости $L_i^2(\tau'_i)$, где $\tau'_i = \theta'_i \Delta t$, будет наблюдаться при истинном времени запаздывания τ_i .

С увеличением числа N точек во временном ряде x_i число членов суммы (8) будет расти пропорционально N . Вместе с тем, с ростом N будут уменьшаться расстояния между точками в отсортированном ряде и, как следствие, будут уменьшаться величины $|\delta_i(n)|$. В среднем это уменьшение пропорционально $1/N$. То есть каждый член $\delta_i^2(n)$ суммы (8) будет убывать пропорционально $1/N$ с ростом N . Следовательно, $L_i^2 \rightarrow 0$ при $N \rightarrow \infty$. Значит, при $N \rightarrow \infty$ предложенный метод является асимптотически точным, а полученные с его помощью оценки параметров являются асимптотически несмещенными.

Предложенный подход сформулирован для систем, описываемых уравнениями с запаздыванием, содержащими только непрерывные нелинейные функции. Однако если такие функции будут содержать на всём отрезке изменений аргумента небольшое число разрывов первого рода и сумма квадратов скачков функции будет много меньше общей суммы квадратов вертикальных расстояний (8), метод, по всей видимости, сохранит свою работоспособность при конечном N , несколько потеряв в точности. При этом свойства асимптотической несмещённости оценок будут утеряны.

Предложенный нами алгоритм описан для общего случая, при котором между любыми двумя элементами ансамбля существует двунаправленная связь, что редко бывает на практике. Если в действительности воздействие j -го элемента на i -й отсутствует, то соответствующий коэффициент связи $k_{i,j}$ в модельном уравнении (1) следует положить равным нулю. Однако в результате описанной выше процедуры реконструкции мы всегда получаем для каждого элемента ансамбля $D - 1$ ненулевых коэффициентов связи $k'_{i,j}$; некоторые из них при отсутствии соответствующих связей являются лишними. Разделить восстановленные коэффициенты связи на значимые и незначимые и, таким образом, отбросить лишние связи можно с помощью метода K -средних [25].

Проведем для этого кластеризацию восстановленных коэффициентов $k'_{i,j}$ в одномерном пространстве, поделив их на 2 кластера: значимых и незначимых коэффициентов. В качестве начальных положений центров кластеров зададим максимальное и минимальное из восстановленных значений $k'_{i,j}$. Так как в общем случае значимые коэффициенты по абсолютной величине много больше незначимых, кластеризацию удобно проводить в логарифмическом масштабе. Определив незначимые коэффициенты связи, положим их равными нулю и повторно восстановим все $k_{i,j}$ для повышения точности реконструкции.

Такой подход позволяет восстановить архитектуру связей в ансамбле. Следует отметить, что рассмотренный метод имеет существенно более высокое быстродействие по сравнению с методом реконструкции модельных уравнений элементов ансамбля и диагностики значимости связей с помощью последовательного пробного исключения или добавления коэффициентов связи в модель, предложенном нами в [21], поскольку в отличие от итерационного метода [21] реконструкция параметров проводится лишь дважды.

Подход к определению лишних связей, основанный на методе K -средних, хорошо работает в отсутствие шумов и соизмеримом количестве как значимых, так и незначимых коэффициентов связи. Однако при невыполнении этих условий границы

соседних кластеров оказываются близки друг к другу. В результате точность метода снижается, и он может находить ложные связи или пропускать часть имеющихся связей. В таких случаях для точной реконструкции архитектуры связей требуется использовать более двух кластеров в методе K -средних. К сожалению, при анализе экспериментальных данных, когда число связей между элементами ансамбля заранее не известно, дать точные рекомендации по выбору количества кластеров оказывается затруднительно.

Для разделения восстановленных коэффициенты связи $k_{i,j}$ полной модели на значимые и незначимые можно использовать другой подход. Отсортируем все коэффициенты $k_{i,j}$ по абсолютной величине в порядке убывания. Затем рассчитаем величину

$$\Lambda = \sum_{i=1}^D L_i^2 / (N - \theta_i - 1) \quad (9)$$

при введении в ансамбль, состоящий из D модельных уравнений (1), только одного коэффициента связи, самого большого по абсолютной величине. Нормировка компонент, входящих в Λ , на величину $(N - \theta_i - 1)$ необходима, поскольку иначе разные осцилляторы внесут разный вклад в меру (9) из-за отличающихся времен запаздывания θ_i и, как следствие, разного числа слагаемых в формуле для целевой функции (8). Далее будем добавлять в модель по одному коэффициенту связи в порядке уменьшения их абсолютного значения и снова рассчитывать Λ . Наконец, построим зависимость Λ от числа M коэффициентов связи в модели, где $M = 1, \dots, D(D - 1)$.

По мере учета в модели все большего числа реально существующих связей она будет становиться все более точной. При этом величины (5), характеризующие расстояние между точками реконструируемых нелинейных функций элементов, а вместе с ними и величины (8) и (9) будут уменьшаться. Уменьшение величины Λ на графике $\Lambda(M)$ практически остановится при $M = M_{\text{real}}$, где M_{real} – число реальных связей. Последующее добавление в модель незначимых коэффициентов, соответствующих отсутствующим связям, почти не повлияет на величину Λ . При этом, для $M \geq M_{\text{real}}$ зависимость $\Lambda(M)$ будет оставаться почти постоянной. Графики, наглядно иллюстрирующие такой подход, приведены в следующем разделе. Отметим, что этот метод требует существенно больше вычислительных затрат, чем способ разделения восстановленных коэффициентов связи на значимые и незначимые на основе метода K -средних.

На практике для контроля точности восстановления априорно неизвестной архитектуры связей в ансамбле можно использовать оба рассмотренных подхода, которые в идеале должны дать одинаковые результаты.

2. Восстановление ансамбля, состоящего из связанных уравнений Маккея–Гласса

В качестве первого примера восстановим параметры элементов и архитектуру связей в ансамбле диффузионно связанных систем Маккея–Гласса [26], описываемых

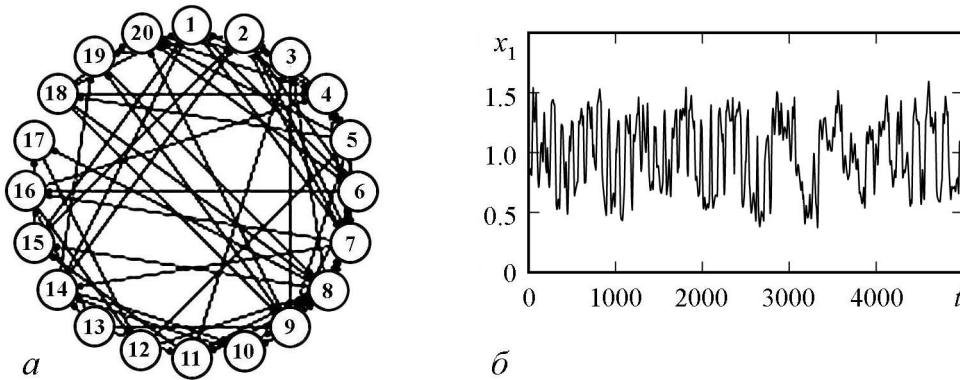


Рис. 1. *a* – архитектура связей в ансамбле из 20 элементов вида (10); *б* – временной ряд переменной $x_1(t)$ ансамбля из уравнений Маккея–Гласса в присутствии нормального белого шума со среднеквадратичным отклонением $\sigma_i = 0.004$

уравнением (1) с функцией

$$f_i(x_i(t - \tau_i)) = \frac{a_i x_i(t - \tau_i)}{b_i (1 + x_i^{10}(t - \tau_i))} \quad (10)$$

и $\varepsilon_i = 1/b_i$. Уравнение Маккея–Гласса, описывающее процесс выработки организмом красных кровяных клеток, является эталонным уравнением с запаздыванием, широко используемым при численных исследованиях систем с задержкой. На рис. 1, *a* приведена архитектура случайно выбранных связей в ансамбле из 20 элементов. Из 380 возможных связей между элементами ансамбля имеется 60 связей, среди которых есть как однонаправленные, так и взаимные. Все элементы ансамбля являются неидентичными. Их параметры принимают случайные значения в следующих интервалах: $\tau_i \in [250; 400]$, $\varepsilon_i \in [7.5; 12.5]$, $a_i \in [0.20; 0.25]$, $k_{i,j} \in [0.02; 0.06]$. При этом все элементы колеблются хаотически. Длина временных рядов $N = 10^4$ при шаге выборки $\Delta t = 0.5$. Рассмотрим случай отсутствия шума и случай, когда к временному ряду каждого элемента добавлен некоррелированный нормальный шум $\xi_i(t)$ с нулевым средним и среднеквадратичным отклонением $\sigma_i = 0.004$. На рис. 1, *б* приведен зашумленный хаотический временной ряд колебаний первого элемента при $\tau_1 = 263$, $\varepsilon_1 = 12.32$, $a_1 = 0.218$, $k_{1,4} = 0.0475$, $k_{1,15} = 0.0294$, $k_{1,18} = 0.0292$.

На рис. 2 приведены зависимости $L_i^2(\tau_i')$ для всех 20 элементов ансамбля для случаев отсутствия и присутствия шумов. Глобальные минимумы всех $L_i^2(\tau_i')$ наблюдаются в точности при истинных временах запаздывания. Величины L_i^2 нормированы на величину $(N - \theta_i - 1)$ для удобства сравнения. Отметим, что для оценки временного ряда производных $\{\dot{x}_i(n)\}$ временному ряду $\{x_i(n)\}$ использовалась аппроксимация со сглаживанием параболой.

При реконструкции модельного уравнения (1) для каждого элемента ансамбля получаются 19 ненулевых коэффициентов связи $k'_{i,j}$, часть из которых являются лишними. Лишние коэффициенты по модулю гораздо на несколько порядков меньше действительных и поэтому их можно выявить с помощью кластеризации в логариф-

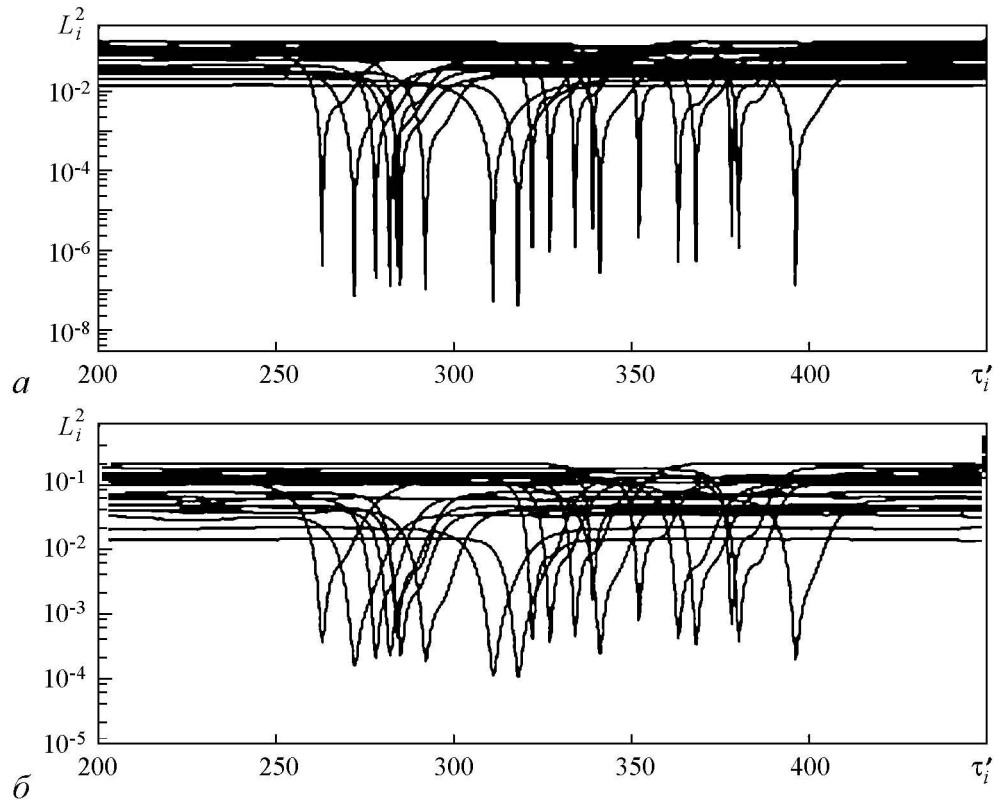


Рис. 2. Зависимости $L_i^2(\tau_i')$ для каждого из 20 элементов ансамбля из уравнений Маккея–Гласса в отсутствие шума (а) и в присутствии нормального шума с $\sigma_i = 0.004$ (б)

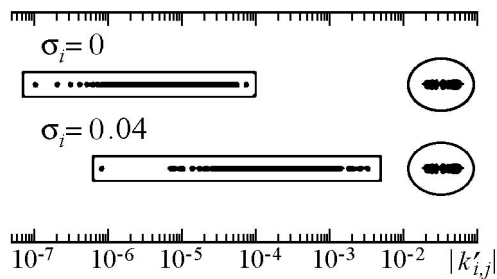


Рис. 3. Распределение значений модулей оценок коэффициентов связи для всех элементов ансамбля из уравнений Маккея–Гласса в отсутствие шума (сверху) и в присутствии шума (снизу). Значимые коэффициенты показаны крестиками, расположенными внутри окружности, а незначимые коэффициенты показаны точками, расположенными внутри прямоугольника

мическом масштабе, как это показано на рис. 3. Видно, что модули всех значений $k'_{i,j}$ хорошо делятся на 2 кластера, состоящие из действительных (справа) и лишних (слева) коэффициентов. Наличие шума приводит к сближению кластеров. Очевидно, что, начиная с некоторого критического уровня шума, метод начинает выдавать ошибки, пропуская часть имеющихся связей или находя ложные.

Члены суммы в (5), соответствующие лишним коэффициентам связи, были удалены из модели и реконструкция была проведена повторно уже без них.

В результате архитектура связей в ансамбле оказалась восстановленной правильно, в точном соответствии с рис. 1, а, как для случая отсутствия шумов, так и при их наличии. В отсутствие шума точность реконструкции коэффициентов модели составила 4 значащих цифры. Неидеальная точность в таком случае объясняется конечной длиной ряда и необходимостью численной оценки производной. При наличии шума значения коэффициентов

также были восстановлены с удовлетворительной точностью. В частности, для первого осциллятора они составили $k'_{1,4} = 0.0467$ при истинном значении $k_{1,4} = 0.0475$, $k'_{1,15} = 0.0288$ при истинном значении $k_{1,15} = 0.0294$, $k'_{1,18} = 0.0287$ при истинном значении $k_{1,18} = 0.0292$.

Чтобы охарактеризовать точность восстановления коэффициентов связи в среднем по ансамблю, была рассчитана средняя относительная погрешность коэффициентов по формуле (11)

$$E_k = \left\langle \left| \frac{k'_{i,j} - k_{i,j}}{k_{i,j}} \right| \right\rangle_{i,j}, \quad (11)$$

где усреднение проводилось только для действительных коэффициентов. Величина E_k составила 0.023, колеблясь от 0.002 до 0.058. Параметры инерционности были восстановлены с ещё большей точностью, так, для первого осциллятора $\varepsilon'_1 = 12.29$ при истинном значении $\varepsilon_1 = 12.32$, аналогичным образом рассчитанная средняя относительная погрешность реконструкции составила 0.007 от абсолютной величины. Большая точность реконструкции параметров ε_i является, скорее всего, следствием того, что они вносят более уникальный вклад в целевую функцию (8), будучи домножены на базисные функции $\Delta \dot{x}_i(n)$, в то время как параметры связи $k_{i,j}$ стоят перед однотипными базисными функциями вида $(\Delta x_j(n) - \Delta x_i(n))$, вклад которых может частично взаимно компенсироваться, особенно при частичной синхронизации в ансамбле.

На рис. 4, *а* приведена восстановленная нелинейная функция f_1 первого элемента для случая отсутствия шума. Она очень точно совпадает с истинной функцией уравнения Маккея–Гласса (настолько, что на одном графике их невозможно различить в использованном масштабе), поэтому приводить исходную функцию мы не стали. На рис. 4, *б* приведена та же нелинейная функция f_1 , построенная при указанных выше восстановленных значениях и при наличии шума. Точность восстановления параметров и нелинейных функций для остальных элементов ансамбля примерно такая же.

Очевидно, что лишние и действительные связи вносят различный по абсолютной величине вклад в целевую функцию (8). На этом основании нами был апробиро-

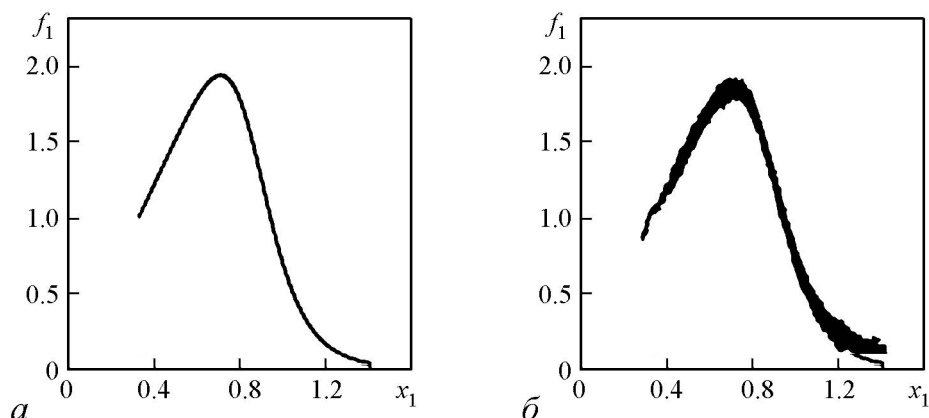


Рис. 4. Восстановленная функция $f_1(x_1)$ в отсутствие шума (*а*) и в присутствии нормального шума со среднеквадратичным отклонением $\sigma_i = 0.004$ (*б*)

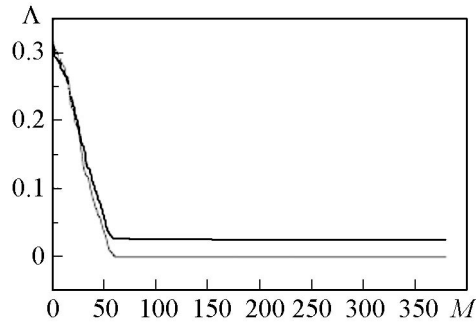


Рис. 5. Зависимости $\Lambda(M)$ для ансамбля из уравнений Маккея–Гласа в отсутствие шума (серый цвет) и в присутствии нормального шума со среднеквадратичным отклонением $\sigma_i = 0.004$ (чёрный цвет)

ван альтернативный кластеризации методом K -средних алгоритм разделения действительных и лишних коэффициентов среди всех оценок $k'_{i,j}$, основанный на построении зависимости (9) (рис. 5). При $M = M_{\text{real}}$ величина $\Lambda(M)$ практически достигает своего минимального значения и с увеличением M меняется очень слабо (менее чем на 1%), что видно на графике. В отсутствие шума $\Lambda(M_{\text{real}})$ очень близка к нулю и составляет $1.3 \cdot 10^{-5}$, в то время как потеря даже одного коэффициента приводит к её резкому росту: $\Lambda(M_{\text{real}} - 1) = 55.7 \cdot 10^{-5}$, то есть примерно в 43 раза. Таким образом, оба предложенных подхода дали в рассмотренном примере одинаковый результат и позволили точно реконструировать архитектуру связей.

3. Восстановление цепочки экспериментальных радиотехнических генераторов с запаздывающей обратной связью

Мы применили метод к экспериментальным временным рядам цепочки, состоящей из $D = 10$ однонаправленно связанных радиотехнических генераторов с запаздывающей обратной связью. Каждый генератор представляет собой кольцевую систему, состоящую из линии задержки, нелинейного элемента и низкочастотного RC -фильтра первого порядка (рис. 6, а). Нелинейные элементы и линии задержки генераторов выполнены на микроконтроллерах, а фильтры – на аналоговых элементах. Аналоговые и цифровые элементы схемы сопрягались с помощью аналого-цифровых и цифро-аналоговых преобразователей. Связь генераторов осуществлялась с помощью резисторов R_{ci} . Модельное уравнение, которым описывается i -й элемент такой цепочки, имеет вид

$$R_i C_i \dot{V}_i(t) = -V_i(t) + f_i(V_i(t - \tau_i)) + \sum_{j=1, j \neq i}^D k_{i,j} (V_j - V_i), \quad (12)$$

где $V_i(t)$ и $V_i(t - \tau_i)$ суть напряжения на входе и выходе линии задержки; τ_i – время запаздывания; R_i и C_i – сопротивление и ёмкость элементов фильтра; f_i – передаточная характеристика нелинейного элемента. Уравнение (12) сводится к виду (1), если положить $\varepsilon_i = R_i C_i$.

Цепочка состоит из неидентичных элементов, параметры которых принимают значения в следующих интервалах: $\tau_i \in [2.50; 4.75]$ мс, $\varepsilon_i \in [0.203; 0.536]$ мс, $k_{i,i+1} \in [0.10; 0.23]$, $k_{i,j} = 0 \forall j \neq i + 1$. Все нелинейные элементы имели квадратичную передаточную характеристику. Хаотические сигналы $V_i(t)$ записывались с помощью 10-канального аналого-цифрового преобразователя с частотой выборки $f_s = 100$ кГц. На рис. 6, б приведен фрагмент временной реализации сигнала $V_1(t)$ в первом генераторе, имеющем параметры $\tau_1 = 2.5$ мс, $\varepsilon_1 = 0.203$ мс, $k_{1,2} = R_1/R_{c1} = 0.21$.

На рис. 7 приведены зависимости $L_i^2(\tau'_i)$ для всех 10 элементов цепочки. Глобальные минимумы девяти зависимостей $L_i^2(\tau'_i)$ наблюдаются при истинных временах запаздывания генераторов. Лишь для одного из генераторов минимум оказался смещён относительно истинного времени запаздывание на время, равное одному интервалу выборки.

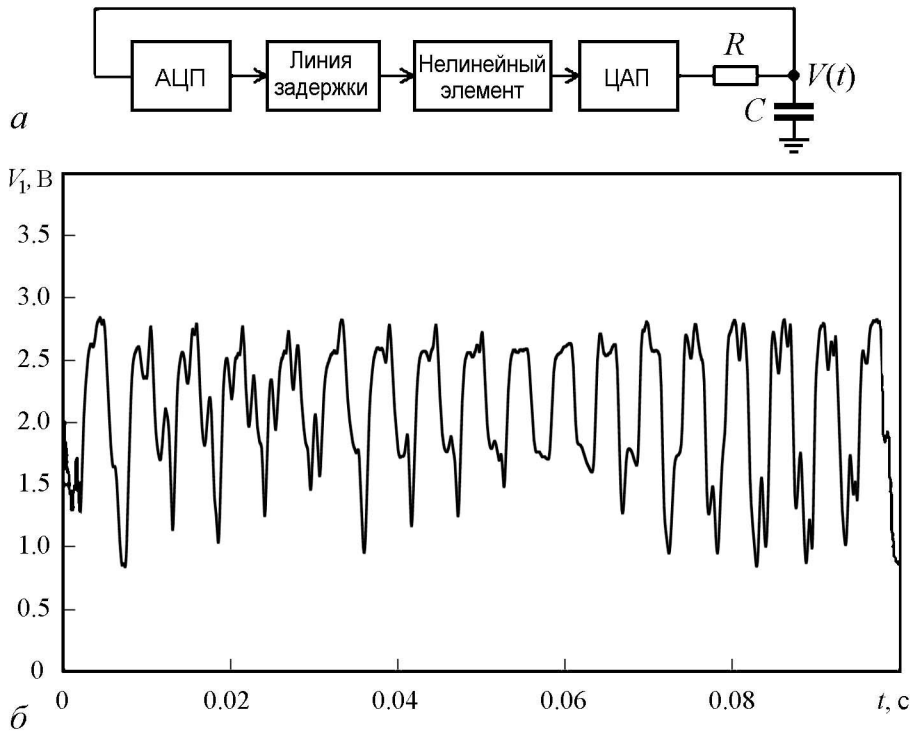


Рис. 6. *a* – блок-схема кольцевого генератора с запаздывающей обратной связью, где «АЦП» – аналого-цифровой преобразователь, «ЦАП» – цифро-аналоговый преобразователь. *б* – хаотическая временная реализация $V_1(t)$ первого генератора

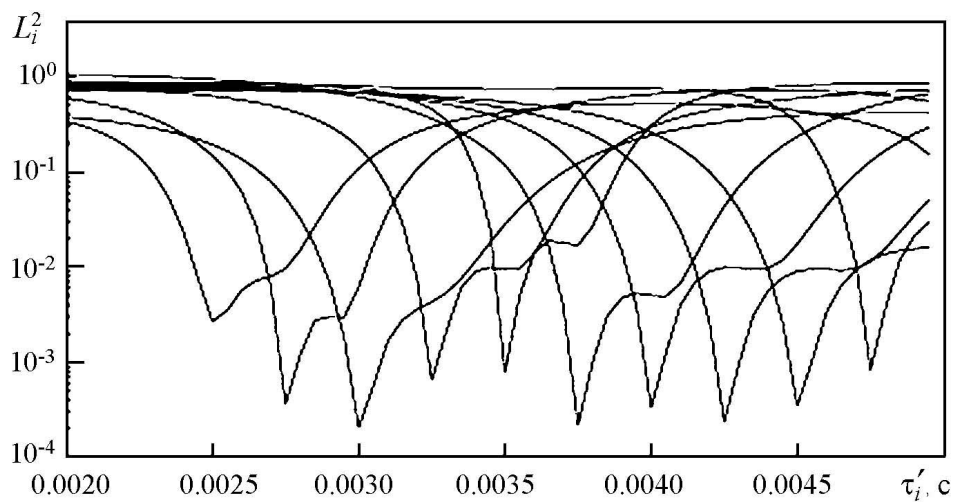


Рис. 7. Зависимости $L_i^2(\tau'_i)$ для всех экспериментальных генераторов в цепочке

Для каждого генератора цепочки мы получаем 9 восстановленных коэффициентов связи $k'_{i,j}$. Из этих 9 коэффициентов для 9 элементов цепочки только один коэффициент является значимым, а для элемента на краю цепочки, на который не действуют другие генераторы, вообще не должно быть $k'_{i,j}$. Поскольку число действительных коэффициентов на порядок меньше числа лишних коэффициентов, использование метода K -средних для разделения восстановленных коэффициентов связи на значимые и незначимые оказывается не столь эффективным, как в рассмотренном выше примере. Для успеха алгоритма потребовалось разделить всё множество полученных $k'_{i,j}$ на четыре кластера, считая значимыми только $k'_{i,j}$, принадлежащие верхнему из четырёх. При использовании двух кластеров в архитектуре связей оставались несколько лишних коэффициентов связи.

Метод, основанный на использовании меры (9), оказался более эффективным. На рис. 8, *а* построена зависимость $\Lambda(M)$. Видно, что при $M = 9$ зависимость $\Lambda(M)$ практически достигает минимума и с дальнейшим увеличением M почти не меняется. Оставив только 9 самых больших по модулю восстановленных коэффициентов связи и удалив все остальные незначимые, удалось получить оценки коэффициентов связи и параметров инерционности, близкие к номиналам. Например, для первого генератора восстановленные параметры инерционности и связи имеют следующие значения: $\varepsilon'_1 = 0.204$ мс, $k'_{1,2} = 0.22$. Восстановленная при этих значениях нелинейная функция f_1 приведена на рис. 8 *б*. Она достаточно хорошо совпадает с истинной передаточной характеристикой нелинейного элемента первого генератора. Аналогичные результаты были получены для остальных элементов.

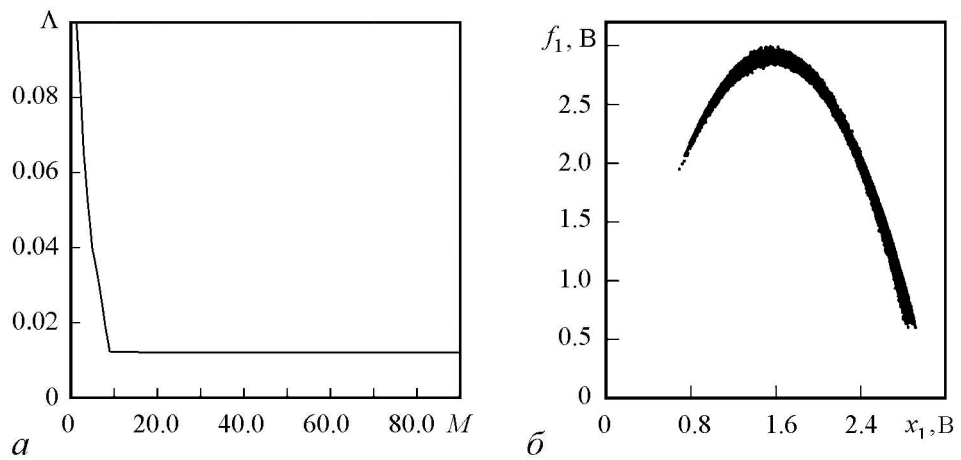


Рис. 8. Зависимость $\Lambda(M)$ для цепочки экспериментальных генераторов с запаздывающей обратной связью (*а*). Восстановленная нелинейная функция первого генератора $f_1(x_1)$ (*б*)

Заключение

Нами предложен новый эффективный метод, позволяющий определить значения параметров элементов и архитектуру связей в ансамблях связанных систем, описываемых дифференциальными уравнениями с запаздыванием, по временным рядам их колебаний. Метод основан на минимизации методом наименьших квадра-

тов целевой функции, характеризующей расстояние между точками реконструируемой нелинейной функции, отсортированными по величине абсциссы, для каждого элемента ансамбля. Предложенный подход позволяет с высокой точностью восстановить времена запаздывания, параметры инерционности, нелинейные функции и коэффициенты связи всех элементов ансамбля. Отказ от использованного нами ранее итерационного алгоритма для реконструкции архитектуры связей [21] позволяет на порядок увеличить скорость работы метода.

Для разделения восстановленных коэффициентов связи на значимые и незначимые предложено использовать два алгоритма. Один из них основан на кластеризации восстановленных коэффициентов связи с помощью метода K -средних, а другой – на построении зависимости суммы целевых функций всех элементов от количества коэффициентов связи в модельных уравнениях.

Предложенный подход можно применять к ансамблям, состоящим из неидентичных систем с запаздыванием с произвольным числом однонаправленных и взаимных связей между ними. Эффективность метода продемонстрирована на примере хаотических временных рядов ансамблей диффузионно связанных модельных систем Маккея–Гласса, в том числе при наличии шума, а также на примере хаотических экспериментальных временных рядов резистивно связанных радиотехнических генераторов с запаздывающей обратной связью. Предложенный метод может быть также применён для реконструкции ансамблей с другими типами связи элементов, например, для ансамблей, состоящих из систем с запаздыванием, связанных через производную или общим полем.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант № 16-02-00091.

Библиографический список

1. *Afraimovich V.S., Nekorkin V.I., Osipov G.V., Shalfeev V.D.* Stability, Structures, and Chaos in Nonlinear Synchronization Networks. Singapore: World Scientific, 1995.
2. *Пиковский А., Розенблюм М., Куртс Ю.* Синхронизация: Фундаментальное нелинейное явление. М: Техносфера, 2003. 496 с.
3. *Voccaletti S., Latora V., Moreno Y., Chavez M., Hwang D.U.* // Phys. Rep. 2006. Vol. 424. P. 175.
4. *Безручко Б.П., Смирнов Д.А.* Математическое моделирование и хаотические временные ряды. Саратов: ГосУНЦ «Колледж», 2005.
5. *Timme M.* Revealing network connectivity from response dynamics // Phys. Rev. Lett. 2007. Vol. 98. 224101.
6. *Smirnov D.A., Bezruchko B.P.* Detection of couplings in ensembles of stochastic oscillators // Phys. Rev. E. 2009. Vol. 79. 046204.
7. *Kamiński M., Ding M., Truccolo W.A., Bressler S.L.* Evaluating causal relations in neural systems: Granger causality, directed transfer function and statistical assessment of significance // Biol. Cybern. 2001. Vol. 85. P. 145.
8. *Sysoev I.V., Sysoeva M.V.* Detecting changes in coupling with Granger causality method from time series with fast transient processes // Physica D. 2015. Vol. 309. P. 9.
9. *Liu H., Lu J.-A., Lü J., Hill D.J.* Structure identification of uncertain general complex dynamical networks with time delay // Automatica. 2009. Vol. 45. P. 1799.

10. Xu Y., Zhou W., Fang J. Topology identification of the modified complex dynamical network with non-delayed and delayed coupling // *Nonlinear Dynamics*. 2012. Vol. 68. P. 195.
11. Yang X.L., Wei T. Revealing network topology and dynamical parameters in delay-coupled complex network subjected to random noise // *Nonlinear Dynamics*. 2015. Vol. 82. P. 319
12. Chen J., Lu J., Zhou J. Topology identification of complex networks from noisy time series using ROC curve analysis // *Nonlinear Dynamics*. 2014. Vol. 75. P. 761.
13. Zhang Z., Zheng Z., Niu H., Mi Y., Wu S., Hu G. Solving the inverse problem of noise-driven dynamic networks // *Phys. Rev. E*. 2015. Vol. 91. 012814.
14. Wens V. Investigating complex networks with inverse models: Analytical aspects of spatial leakage and connectivity estimation // *Phys. Rev. E*. 2015. Vol. 91. 012823.
15. Hale J.K., Lunel S.M.V. *Introduction to Functional Differential Equations*. New York: Springer, 1993.
16. Kuang Y. *Delay Differential Equations with Applications in Population Dynamics*. Boston: Academic Press, 1993.
17. Bocharov G.A., Rihan F.A. Numerical modelling in biosciences using delay differential equations // *J. Comp. Appl. Math.* 2000. Vol. 125. P. 183.
18. Mincheva M., Roussel M.R. Graph-theoretic methods for the analysis of chemical and biochemical networks. II. Oscillations in networks with delays // *J. Math. Biol.* 2007. Vol. 55. P. 87.
19. Heiligenthal S., Jüngling T., D'Huys O., Arroyo-Almanza D.A., Soriano M.C., Fischer I., Kanter I., Kinzel W. Strong and weak chaos in networks of semiconductor lasers with time-delayed couplings // *Phys. Rev. E*. 2013. Vol. 88. 012902.
20. Wu X., Sun Z., Liang F., Yu C. Online estimation of unknown delays and parameters in uncertain time delayed dynamical complex networks via adaptive observer // *Nonlinear Dynamics*. 2013. Vol. 73. P. 1753.
21. Сысоев И.В., Прохоров М.Д., Пономаренко В.И., Безручко Б.П. Определение параметров элементов и архитектуры связей в ансамблях связанных систем с запаздыванием по временным рядам // *ЖТФ*. 2014. Т. 84, вып. 10. С. 16.
22. Пономаренко В.И., Прохоров М.Д., Караваев А.С., Безручко Б.П. Определение параметров систем с запаздывающей обратной связью по хаотическим временным реализациям // *ЖЭТФ*. 2005. Т. 127, вып. 3. С. 515.
23. Prokhorov M.D., Ponomarenko V.I. Estimation of coupling between time-delay systems from time series // *Phys. Rev. E*. 2005. Vol. 72. 016210.
24. Prokhorov M.D., Ponomarenko V.I. Reconstruction of time-delay systems using small impulsive disturbances // *Phys. Rev. E*. 2009. Vol. 80. 066206.
25. Мандель И.Д. *Кластерный анализ*. М: Финансы и статистика, 1988. 176 с.
26. Mackey M.C., Glass L. Oscillations and chaos in physiological control systems // *Science*. 1977. Vol. 197 P. 287.

Поступила в редакцию 29.04.2016
После доработки 13.05.2016

RECONSTRUCTION OF COUPLING ARCHITECTURE AND PARAMETERS OF TIME-DELAYED OSCILLATORS IN ENSEMBLES FROM TIME SERIES

I. V. Sysoev^{1,2}, *D. D. Kulminskiy*^{2,1}, *V. I. Ponomarenko*^{2,1}, *M. D. Prokhorov*²

¹ National Research Saratov State University
Astrahanskaya, 83, 410012 Saratov, Russia

²Kotel'nikov Institute of Radio-Engineering and Electronics of RAS, Saratov Branch
Zelenaya, 38, 410019 Saratov, Russia

E-mail: ivssci@gmail.com; kulminskydd@gmail.com; ponomarenkovi@gmail.com;
mdprokhorov@yandex.ru

Purpose. To suggest a new approach to reconstruction of coupling architecture and individual parameters of first-order time-delayed oscillators from experimental series of their oscillations.

Method. The method is based on minimization of target function, which characterizes a distance between points of nonlinear function of a current oscillator, which is to be reconstructed. Then estimated coupling coefficients are split into significant and insignificant. Minimization of target function is processed with least squares routine. Delay time is estimated as a trial delay corresponding to a minimum of target function over all trial delays.

Results. Efficiency of the proposed method was demonstrated in numerical experiment from time series of an ensemble of diffusively coupled nonidentical Mackey–Glass oscillators in presence of noise. Also a hardware experiment was considered in which resistively coupled generators with delay line were studied. The method demonstrated higher computational efficiency than previously suggested approaches due to use of not iterative algorithms for target function minimization and significant coefficient selection. Herewith estimates of coupling coefficients and inductance parameter are asymptotically unbiased.

Discussion. The proposed approach may be useful for reconstruction of parameters of elements and coupling architecture in systems of different nature: radioengineering, biological or others, which can be described using first-order time-delay equations.

Keywords: Time-series analyses, reconstruction of equations, ensembles of oscillators, time-delayed systems.

DOI: 10.18500/0869-6632-2016-24-3-21-37

Paper reference: Sysoev I.V., Kulminskiy D.D., Ponomarenko V.I., Prokhorov M.D. Reconstruction of coupling architecture and parameters of time-delayed oscillators in ensembles from time series // *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*. 2016. Vol. 24. Issue 3. P. 21–37.

References

1. *Afraimovich V.S., Nekorkin V.I., Osipov G.V., Shalfeev V.D.* Stability, Structures, and Chaos in Nonlinear Synchronization Networks. Singapore: World Scientific, 1995.
2. *Pikovsky A., Rosenblum M., Kurths J.* Synchronization: A Universal Concept in Nonlinear Sciences. Cambridge University Press, United Kingdom, 2003.
3. *Boccaletti S., Latora V., Moreno Y., Chavez M., Hwang D.U.* // *Phys. Rep.* 2006. Vol. 424. P. 175.
4. *Bezruchko B., Smirnov D.* Extracting Knowledge From Time Series. Springer: Complexity, 2010.
5. *Timme M.* Revealing network connectivity from response dynamics // *Phys. Rev. Lett.* 2007. Vol. 98. 224101.

6. *Smirnov D.A., Bezruchko B.P.* Detection of couplings in ensembles of stochastic oscillators // *Phys. Rev. E.* 2009. Vol. 79. 046204.
7. *Kamiński M., Ding M., Truccolo W.A., Bressler S.L.* Evaluating causal relations in neural systems: Granger causality, directed transfer function and statistical assessment of significance // *Biol. Cybern.* 2001. Vol. 85. P. 145.
8. *Sysoev I.V., Sysoeva M.V.* Detecting changes in coupling with Granger causality method from time series with fast transient processes // *Physica D.* 2015. Vol. 309. P. 9.
9. *Liu H., Lu J.-A., Lü J., Hill D.J.* Structure identification of uncertain general complex dynamical networks with time delay // *Automatica.* 2009. Vol. 45. P. 1799.
10. *Xu Y., Zhou W., Fang J.* Topology identification of the modified complex dynamical network with non-delayed and delayed coupling // *Nonlinear Dynamics.* 2012. Vol. 68. P. 195.
11. *Yang X.L., Wei T.* Revealing network topology and dynamical parameters in delay-coupled complex network subjected to random noise // *Nonlinear Dynamics.* 2015. Vol. 82. P. 319.
12. *Chen J., Lu J., Zhou J.* Topology identification of complex networks from noisy time series using ROC curve analysis // *Nonlinear Dynamics.* 2014. Vol. 75. P. 761.
13. *Zhang Z., Zheng Z., Niu H., Mi Y., Wu S., Hu G.* Solving the inverse problem of noise-driven dynamic networks // *Phys. Rev. E.* 2015. Vol. 91. 012814.
14. *Wens V.* Investigating complex networks with inverse models: Analytical aspects of spatial leakage and connectivity estimation // *Phys. Rev. E.* 2015. Vol. 91. 012823.
15. *Hale J.K., Lunel S.M.V.* Introduction to Functional Differential Equations. New York: Springer, 1993.
16. *Kuang Y.* Delay Differential Equations with Applications in Population Dynamics. Boston: Academic Press, 1993.
17. *Bocharov G.A., Rihan F.A.* Numerical modelling in biosciences using delay differential equations // *J. Comp. Appl. Math.* 2000. Vol. 125. P. 183.
18. *Mincheva M., Roussel M.R.* Graph-theoretic methods for the analysis of chemical and biochemical networks. II. Oscillations in networks with delays // *J. Math. Biol.* 2007. Vol. 55. P. 87.
19. *Heiligenthal S., Jüngling T., D'Huys O., Arroyo-Almanza D.A., Soriano M.C., Fischer I., Kanter I., Kinzel W.* Strong and weak chaos in networks of semiconductor lasers with time-delayed couplings // *Phys. Rev. E.* 2013. Vol. 88. 012902.
20. *Wu X., Sun Z., Liang F., Yu C.* Online estimation of unknown delays and parameters in uncertain time delayed dynamical complex networks via adaptive observer // *Nonlinear Dynamics.* 2013. Vol. 73. P. 1753.
21. *Sysoev I.V., Prokhorov M.D., Ponomarenko V.I., Bezruchko B.P.* // *Tech. Phys.* 2014. Vol. 59. P. 1434.
22. *Ponomarenko V. I., Prokhorov M. D., Karavaev A. S., Bezruchko B. P.* Recovery of parameters of delayed-feedback systems from chaotic time series // *Journal of Experimental and Theoretical Physics.* 2005. Vol. 100. Issue 3. P. 457.
23. *Prokhorov M.D., Ponomarenko V.I.* Estimation of coupling between time-delay systems from time series // *Phys. Rev. E.* 2005. Vol. 72. 016210.
24. *Prokhorov M.D., Ponomarenko V.I.* Reconstruction of time-delay systems using small impulsive disturbances // *Phys. Rev. E.* 2009. Vol. 80. 066206.

25. *Mandel I.D.* Cluster Analysis. Moscow: Finance and Statistics, 1988. 176 p. (in Russian).
26. *Mackey M.C., Glass L.* Oscillations and chaos in physiological control systems // Science. 1977. Vol. 197. P. 287.

Сысоев Илья Вячеславович – родился в Саратове (1983), окончил факультет нелинейных процессов СГУ (2004), защитил диссертацию на соискание учёной степени кандидата физико-математических наук (2007). Доцент базовой кафедры динамического моделирования и биомедицинской инженерии, ответственный секретарь редакционной коллегии журнала «Известия вузов. ПНД». Научные интересы – исследование сигналов биологической природы методами нелинейной динамики, исследование эффективности и модернизация подходов к анализу сигналов. Автор более 40 публикаций.



410012 Саратов, Астраханская, 83
Саратовский государственный университет имени Н.Г. Чернышевского
410019 Саратов, ул. Зеленая, 38
Саратовский филиал Института радиотехники и электроники РАН
E-mail: ivssci@gmail.com

Кульминский Данил Дмитриевич – родился в 1991 году в Саратове, окончил Саратовский государственный университет в 2014 году. После окончания СГУ работает в СФ ИРЭ им. В.А. Котельникова РАН младшим научным сотрудником. Аспирант и инженер кафедры динамического моделирования и биомедицинской инженерии СГУ им. Н.Г. Чернышевского. Автор 10 научных статей в отечественных и зарубежных изданиях. Стипендиат фонда «Династия».



410019 Саратов, ул. Зеленая, 38
Саратовский филиал ИРЭ им. В.А. Котельникова РАН
410012 Саратов, ул. Астраханская, 83
Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского
E-mail: kulminskydd@gmail.com

Пономаренко Владимир Иванович – родился в Саратове (1960). Окончил Саратовский государственный университет (1982). Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук (1992) и доктора физико-математических наук (2008). Ведущий научный сотрудник Саратовского филиала Института радиотехники и электроники РАН. Профессор кафедры динамических систем СГУ. Область научных интересов – статистическая радиофизика, анализ временных рядов, нелинейная динамика и ее приложения. Автор более 200 научных публикаций.



410019 Саратов, ул. Зеленая, 38
Саратовский филиал ИРЭ им. В.А. Котельникова РАН
410012 Саратов, ул. Астраханская, 83
Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского
E-mail: ponomarenkovi@gmail.com

Прохоров Михаил Дмитриевич – родился в Саратове (1968). Окончил Саратовский государственный университет (1992). Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук (1997) и доктора физико-математических наук (2008). Заведующий лабораторией Саратовского филиала Института радиотехники и электроники им. В.А. Котельникова РАН. Область научных интересов – нелинейная динамика и ее приложения, математическое моделирование, анализ временных рядов. Имеет более 200 научных публикаций.



410019 Саратов, ул. Зеленая, 38
Саратовский филиал ИРЭ им. В.А. Котельникова РАН
E-mail: mdprokhorov@yandex.ru



МУЛЬТИСТАБИЛЬНОСТЬ В АНСАМБЛЕ ФАЗОВЫХ ОСЦИЛЛЯТОРОВ С ДАЛЬНОДЕЙСТВУЮЩИМИ СВЯЗЯМИ

А.В. Шабунин

Национальный исследовательский Саратовский государственный университет
Россия, 410012 Саратов, Астраханская, 83
E-mail: shabuninav@info.sgu.ru

Работа посвящена исследованию мультистабильности бегущих волн в кольце периодических осцилляторов с диффузионными нелокальными связями. В ней проводится анализ влияния дальнего действия связей и характера изменения их интенсивности с расстоянием на устойчивость пространственно периодических режимов с разными значениями волновых чисел.

Исследования проводятся методом численного (компьютерного) эксперимента. В качестве модели выбрана система идентичных фазовых осцилляторов. Она является, с одной стороны, максимально простой, что открывает возможности для аналитического исследования, с другой стороны, позволяет исследовать на своем примере динамику произвольных автоколебательных систем с почти гармоническими колебаниями.

Проведенные исследования показали, что в ансамбле фазовых осцилляторов наблюдается мультистабильность в виде набора сосуществующих режимов бегущих вдоль кольца волн, каждая из которых характеризуется своим значением разности фаз между соседними осцилляторами. В случае стационарных связей, либо связей, медленно меняющихся с расстоянием, колебательный режим будет устойчивым пока суммарный набег фазы на интервале взаимодействия не превышает значения $\pi/2$. При быстро изменяющихся с расстоянием связях наблюдается стабилизация максимального значения разности фаз, при котором увеличение дальнего действия больше не влияет на число сосуществующих режимов. При этом, в ансамбле со сколь угодно большой дальностью связей сохраняется мультистабильность. Исследование бассейнов притяжения показало, что с ростом дальнего действия происходит уменьшение размеров бассейнов для коротковолновых режимов с одновременным ростом бассейна притяжения синфазных колебаний.

Ключевые слова: Синхронизация, мультистабильность, бегущие волны, фазовые осцилляторы.

DOI:10.18500/0869-6632-2016-24-3-38-53

Ссылка на статью: Шабунин А.В. Мультистабильность в ансамбле фазовых осцилляторов с дальнедействующими связями // Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2016. Т. 24, № 3. С. 38–53.

Введение

Колебательные и волновые процессы, наблюдаемые в системах, состоящих из большого числа взаимодействующих осцилляторов, являются предметом пристального внимания специалистов в различных областях математики, физики, химии, биологии и других наук, так как они демонстрируют множество интересных и важных для практического применения явлений, таких как синхронизация, самоорганизация и формирование пространственных структур. Одним из наиболее фундаментальных явлений в таких системах является синхронизация колебаний [1–3]. Синхронизация в ансамблях осцилляторов – одна из традиционных областей исследований для нелинейной динамики. Первые работы по изучению синхронизации в ансамблях рассматривали задачу частотной синхронизации в цепочке осцилляторов с гармоническим поведением [4–7]. В работе [6] было обращено внимание, что в подобных системах возможны режимы с разными фазовыми сдвигами между осцилляторами – то есть сосуществуют разные пространственные моды, названные позднее режимами *бегущих волн* (running waves, travelling waves). В дальнейшем режимы бегущих волн наблюдались и были исследованы как для ансамблей с периодическими колебаниями [8, 9], так и для ансамблей с хаотической динамикой [10–12]. Детальное описание динамики пространственно однородных и неоднородных волн, возникновение пространственно разупорядоченных колебательных режимов и особенности переходов между режимами с разными длинами волн для ансамбля автогенераторов с жестким возбуждением можно найти в работе [13].

Общие закономерности режимов бегущих волн удобно исследовать на самых простых моделях, например, в ансамбле фазовых осцилляторов [14]. Устойчивость различных сосуществующих режимов в цепочках фазовых осцилляторов с локальными связями исследовалась в работах [15, 16]. Динамике ансамблей осцилляторов с глобальными связями были посвящены статьи [17, 18] и множество последующих работ. В настоящем исследовании рассматривается промежуточный случай – кольцо осцилляторов с нелокальными связями, интенсивность которых зависит от расстояния между осцилляторами. Теоретический анализ таких систем был проведен в работе [19], где были определены достаточные условия устойчивости режимов бегущих волн в зависимости от величины дальнего действия связей, в том случае, когда их интенсивности являются монотонно невозрастающими с расстоянием (то есть либо остаются постоянными, либо монотонно убывают). Являются ли эти условия также и необходимыми? Иными словами, существуют ли в ансамбле фазовых осцилляторов аттракторы, не удовлетворяющие им? Будут ли обнаруженные в работе [19] условия справедливы за пределами ограничения на характер изменения силы связей? Ответам на эти вопросы посвящена первая часть данного исследования.

Существование тех или иных пространственных структур зависит не только от их устойчивости, но также и от размеров соответствующих бассейнов притяжения. Если размер бассейна непропорционально мал, либо он располагается в удаленных областях фазового пространства, соответствующие режимы оказываются практически нереализуемыми. Бассейны притяжения аттракторов многомерных систем – сравнительно мало изученная область в нелинейной динамике. В случае системы из двух осцилляторов с удвоениями периода подробный анализ был проведен в работах [20, 21]. В статье [9] рассматривалась эволюция бассейнов притя-

жения для квазигармонических генераторов при локальных связях. В данной работе мы рассматриваем изменения в бассейнах притяжения сосуществующих режимов в ансамбле с нелокальными связями при росте их дальности действия. Этому вопросу посвящена вторая часть статьи.

1. Бегущие волны в ансамблях с дальнедействующими связями

Рассмотрим ансамбль из N одинаковых автогенераторов, в виде замкнутой в кольцо цепочки, где между отдельными осцилляторами существуют взаимные диффузионные связи, интенсивность которых зависит от расстояния

$$\dot{\mathbf{x}}_i = \mathbf{f}(\mathbf{x}_i) + \sum_{d=1}^L \gamma(d) [\mathbf{h}(\mathbf{x}_{i+d} - \mathbf{x}_i) + \mathbf{h}(\mathbf{x}_{i-d} - \mathbf{x}_i)]. \quad (1)$$

Здесь \mathbf{x} – N -вектор динамических переменных; \mathbf{f} – N -мерная вектор-функция, определяющая уравнения одиночного генератора; нижний индекс задает положение (номер) осциллятора в ансамбле; L – максимальная длина действия связей. Структура связей определяется с помощью вида функции связи \mathbf{h} и неотрицательных коэффициентов связи $\gamma(d)$, меняющихся в зависимости от расстояния d между осцилляторами. В силу периодических граничных условий все арифметические операции с индексами осцилляторов осуществляются по модулю N и дальность связей L не может превышать $N/2$. В частном случае, при $L = 1$ получаем кольцо из локально связанных автогенераторов; при $L = N/2$ и $\gamma(1) = \gamma(2) = \dots = \gamma(L)$ – полносвязную сеть. В нашем исследовании мы будем рассматривать, как меняются свойства системы при переходе между этими граничными случаями.

Предположим, что колебания в системе (1) являются периодическими, то есть $\mathbf{x}_i(t + T) = \mathbf{x}_i(t)$ для всех i . В силу трансляционной симметрии уравнений системы (1) в ней существуют решения в виде бегущих вдоль кольца волн $\mathbf{x}_i(t) = \mathbf{x}_1(t - (i - 1)\Delta t)$. Здесь Δt – разность фаз между колебаниями в соседних элементах ансамбля, которая может принимать лишь конечное число эквидистантных значений

$$\Delta t^{(K)} = \frac{KT}{N}, \quad (2)$$

где $K = 0, \pm 1, \dots, \pm(N - 1)$. Будем обозначать режим бегущей волны как $RW^{(K)}$ (Running Wave), где K – индекс, который, в соответствии с формулой (2), определяет величину временного сдвига между колебаниями соседних осцилляторов; в дальнейшем будем называть его «индексом бегущей волны». Волны с положительными индексами распространяются в сторону возрастания порядковых номеров осцилляторов, волны с отрицательными индексами – в противоположном направлении. Поскольку по всем остальным характеристикам «правые» и «левые» волны совершенно одинаковы, в дальнейшем будем рассматривать только неотрицательные значения K .

2. Волны в ансамбле фазовых осцилляторов

Многие характерные закономерности поведения ансамблей автогенераторов периодических колебаний можно определить, исследуя наиболее упрощенную фор-

му парциальной системы в виде фазового осциллятора: $\dot{x} = \Omega$, $h(x) = \sin(x)$. Система (1) в этом случае приобретает вид

$$\dot{x}_i = \Omega + \sum_{d=1}^L \gamma(d) [\sin(x_{i+d} - x_i) + \sin(x_{i-d} - x_i)]$$

и при переходе в движущуюся систему координат посредством замены переменных $x_i = \Omega t + \theta_i$ преобразуется к уравнениям

$$\dot{\theta}_i = \sum_{d=1}^L \gamma(d) [\sin(\theta_{i+d} - \theta_i) + \sin(\theta_{i-d} - \theta_i)], \quad (3)$$

где θ_i – 2π -периодические функции времени. Поскольку коэффициенты связи входят в уравнение (3) в виде сомножителей, мы можем перенормировать параметры связей, разделив их на $\gamma(1)$ и, соответственно, изменив масштаб по времени в $\gamma(1)$ раз

$$\theta'_i = \sum_{d=1}^L c(d) [\sin(\theta_{i+d} - \theta_i) + \sin(\theta_{i-d} - \theta_i)], \quad (4)$$

где $c(d) = \gamma(d)/\gamma(1)$. Возможность перенормировки связей демонстрирует, что колебания системы (3) не зависят от абсолютных значений связей, а определяются лишь характером их зависимости от d и параметром дальнего действия L .

Стационарные решения уравнений (4), $\theta_i(t) = \theta_{i0}$ соответствуют гармоническим колебаниям исходной «полномасштабной» системы: $X_i(t) = \cos(\Omega t + \theta_i(t))$. Если константы θ_{i0} линейно меняются вдоль цепочки осцилляторов, $\theta_{i0} = i\Delta\theta$ ($\Delta\theta$ – разность фаз между колебаниями соседних осцилляторов), то такой режим можно назвать режимом бегущих волн в ансамбле фазовых осцилляторов. Условие (2) в этом случае трансформируется в условие для разностей фаз в бегущей волне:

$$\Delta\theta^{(K)} = \frac{2\pi K}{N}. \quad (5)$$

3. Зависимость устойчивости бегущих волн от дальнего действия связей

Бегущие волны в ансамблях фазовых осцилляторов исследовались в ряде работ [8, 19]. Основное внимание было обращено на условие устойчивости для таких режимов в зависимости от параметров. В случае локальных связей было показано [8, 22], что эта устойчивость определяется фазовым сдвигом между соседними осцилляторами, то есть значением $\Delta\theta^{(K)}$: при $|\Delta\theta^{(K)}| < \pi/2$ волны устойчивы, а при $|\Delta\theta^{(K)}| > \pi/2$ – нет. В работе [19] теоретически определено *достаточное* условие для устойчивости режимов бегущих волн при дальнедействующих связях, монотонно убывающих с расстоянием: $c(1) \geq c(2) \geq \dots \geq c(L) > 0$. Данное условия полностью определяется суммарным набегом фазы на интервале дальнего действия L : при $|\sum_{d=1}^L \Delta\theta_i| < \pi/2$ соответствующий режим бегущей волны является устойчивым. В соответствии с формулой (5) можно установить верхнюю границу значения $\Delta\theta$, при

котором волна остается устойчивой

$$\Delta\theta_{\max} = \frac{\pi}{2L}, \quad (6)$$

соответствующее максимальному индексу волны

$$K_{\max} = \left[\frac{N}{4L} \right], \quad (7)$$

где скобки обозначают целую часть числа.

Установленное в работе Г. Эрментроута и Л. Рена [19] условие (6) является достаточным, то есть гарантирует устойчивость волн с $K < K_{\max}$. Является ли оно также необходимым, подобно условию устойчивости для локально связанных фазовых осцилляторов? Данный вопрос представляется важным и интересным для исследования. Кроме того, как известно, критерий (6) не зависит от конкретного закона спада силы связей с расстоянием и выполняется даже при постоянных связях. Поэтому, существует возможность, что он является более универсальным, чем это установлено в статье [19]. Будет ли данное условие определять также устойчивость при неспадающем характере связей, например, возрастающим, периодическом или случайном? Данный вопрос также является задачей настоящего исследования.

3.1. Стационарные или монотонно уменьшающиеся с расстоянием связи. Рассмотрим, является ли соотношение (7) необходимым условием устойчивости бегущей волны для стационарных или монотонно спадающих с расстоянием функций $c(d)$. Для этого методом численного эксперимента проинтегрируем систему (4), определив в каждом случае наиболее коротковолновый режим, остающийся устойчивым, и соотнесем этот режим с условием (7).

Будем использовать следующие виды зависимостей интенсивностей коэффициентов связи с расстоянием:

- (а) постоянные связи: $c(d) = 1$;
- (б) затухание по степенному закону: $c(d) = d^{-M}$;
- (с) экспоненциальное затухание: $c(d) = \exp(-a(d-1))$,

где $d \in [1 : L]$, $M = 1, 2, 3$ – положительная целочисленная константа, a – положительная вещественная константа. Графики $c(d)$ приведены на рис. 1, a в виде линий l_i , где буква нижнего индекса $i = a, b, c$ соответствует одной из указанных зависимостей.

Численное интегрирование проводилось для ансамбля из ста осцилляторов на интервале $0 \leq t \leq 1000$ при задании начальных условий в малой окрестности ($\sim 10^{-5}$) анализируемых стационарных решений: $\theta_i^{(K)} = 2\pi(i-1)K/N$. Результаты расчетов представлены на рис. 1, б в виде графиков $l_a - l_{c2}$; там же отображена теоретическая зависимость, полученная по формуле (6). Анализ результатов показывает, что для постоянных связей (кривая l_a) и связей, спадающих с расстоянием по обратному закону (кривая l_{b1}), формула Эрментроута дает весьма точную оценку для верхней границы $\Delta\theta$, выше которой режимы бегущих волн теряют устойчивость. Линия l_{b1} идет чуть выше линии l_a , но и в том и в другом случае при больших длинах единственным устойчивым режимом остается синфазный режим, переход к которому наблюдается при постоянных связях при $L = 34$, а при уменьшающихся

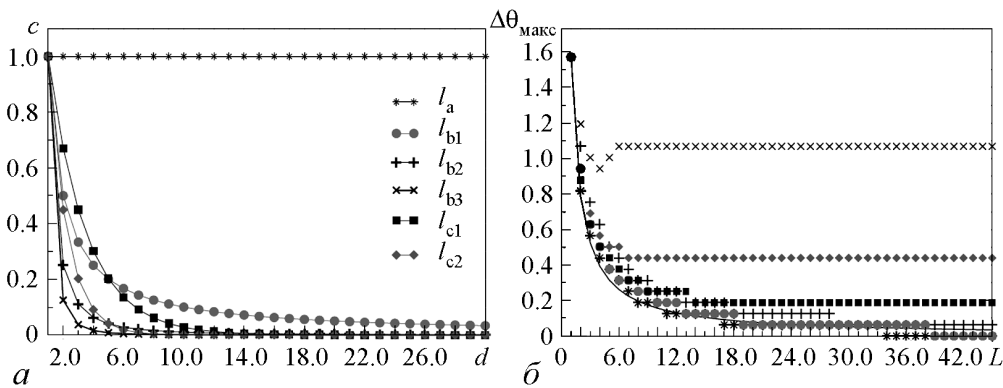


Рис. 1. *a* – графики $c(d)$, буквенный индекс линии соответствует виду зависимости: линии l_{b1} , l_{b2} , l_{b3} построены для $M = 1, 2, 3$, соответственно; линии l_{c1} и l_{c2} – для декрементов затухания $a = 0.4$ и $a = 0.8$, соответственно; *b* – зависимость максимального значения разности фаз между соседними осцилляторами ансамбля от дальнего действия связей L , обозначения линий совпадают с соответствующими на под-рисунке (*a*); сплошная линия отображает теоретическую оценку l_t (6)

связях – при $L = 39$. В то же время, при более быстром спадании $c(d)$ наблюдается иное поведение. При уменьшении коэффициентов связи по степенному закону с показателем $M = 2, 3$, а также по экспоненциальному закону, график на начальном этапе соответствует формуле (6), однако, при росте L начинает заметно отдаляться от нее. Например, при $L \geq 10$ кривая l_{c1} идет уже существенно выше линии l_t и, при $L \geq 15$, величина максимального фазового сдвига стабилизируется на уровне $\Delta\theta \simeq 0.19$. Аналогичное поведение характерно и для случая $a = 0.8$ (кривая l_{c2}), а также – для спада по кубическому закону (линия l_{b3}). В последнем случае наблюдается небольшой участок аномальной зависимости $\Delta\theta_{\max}$ от L , когда увеличение дальнего действия от $L = 4$ до $L = 6$ приводит к росту $\Delta\theta_{\max}$.

Таким образом, при быстром затухании коэффициентов связи с расстоянием численные исследования демонстрируют существование устойчивых режимов бегущих волн с индексами, значительно превосходящими величину (7). Данный результат не противоречит закономерностям, установленным в работе [19], поскольку, как уже было отмечено выше, они устанавливают достаточные, а не необходимые условия устойчивости. Однако нужно отметить, что замеченное расхождение наблюдается только в области малых значений коэффициентов связей. Получается, что в численном эксперименте система «не замечает» слишком слабых связей, что может определяться динамикой системы (4), но может быть вызвано конечной точностью расчетов. Для того чтобы выяснить, не обусловлена ли выявленная зависимость недостаточной точностью вычислений, эксперименты были повторены с измененными параметрами расчетной схемы. Как оказалось, ни изменение шага интегрирования, ни увеличение времени счета, ни увеличение точности представления вещественного числа в компьютере за счет увеличения его разрядной сетки не приводят к сколь-нибудь существенным изменениям полученных данных.

Как показывает анализ экспериментальных результатов, при экспоненциальном затухании интенсивностей связей величина декремента затухания определяет максимальную величину разности фаз между осцилляторами, которая возможна в ансамбле. Если построить зависимость $\Delta\theta_{\max}$ от a , то можно обнаружить, что она близка к линейной в широкой области значений параметров. График такой зависи-

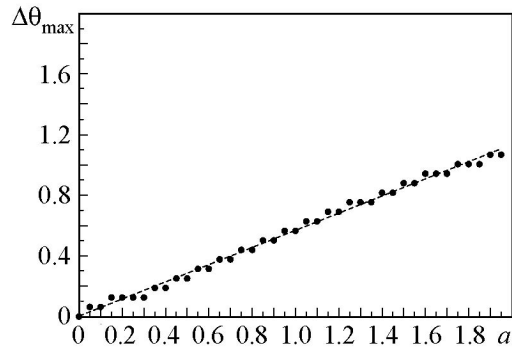


Рис. 2. Зависимость максимального значения разности фаз устойчивых режимов от декремента затухания a при экспоненциальном спадении коэффициентов связи с расстоянием

мости приведен на рис. 2. Видно, что экспериментальные точки достаточно точно ложатся на прямую $\Delta\theta_{\max} = 0.56a$, которая отображена на том же рисунке штриховой линией. Таким образом, в ансамбле с экспоненциальным затуханием коэффициентов связи можно ожидать колебательные режимы с фазовым сдвигом в пределах $-0.56a \leq \Delta\theta \leq 0.56a$. Данная закономерность не зависит от числа осцилляторов в ансамбле и воспроизводится для цепочек разной длины.

3.2. Немонотонные связи. Про-

ведем исследования устойчивости бегущих волн при зависимостях $c(d)$, свободных от ограничений, используемых в работе [19]. Помимо рассмотренных выше монотонно спадающих связей, таковыми будут осциллирующие или возрастающие с расстоянием связи. Выберем следующие виды осциллирующих зависимостей:

- (d) периодическая модуляция: $c(d) = 1 + a \sin\left(\frac{2\pi(d-1)}{M}\right)$;
- (e) случайное распределение: $c(d) = \xi(d)$;
- (f) меандр: $c(d) = 0.5 \left(1 + \text{sign}\left[\cos\left(\frac{2\pi(d-1)}{M}\right)\right]\right)$,

где a – вещественная положительная константа, M – целочисленная положительная константа, $\xi(d)$ – генератор шума с равномерным распределением в диапазоне $[0 : 1]$, $d \in [1 : L]$; при расчетах использовались значения $a = 0.2$, $M = 5$. Вид функций $c(d)$ приведен на рис. 3, а, а результаты расчетов максимальной разности фаз, при которой колебания сохраняют устойчивость, – на рис. 3, б.

Как видно из рисунка, все графики располагаются рядом с теоретической кривой (б). Из сопоставления кривых l_d и l_e с линией l_a , представленной на рис. 1, б, как периодическая так и случайная модуляция силы связей, происходящая

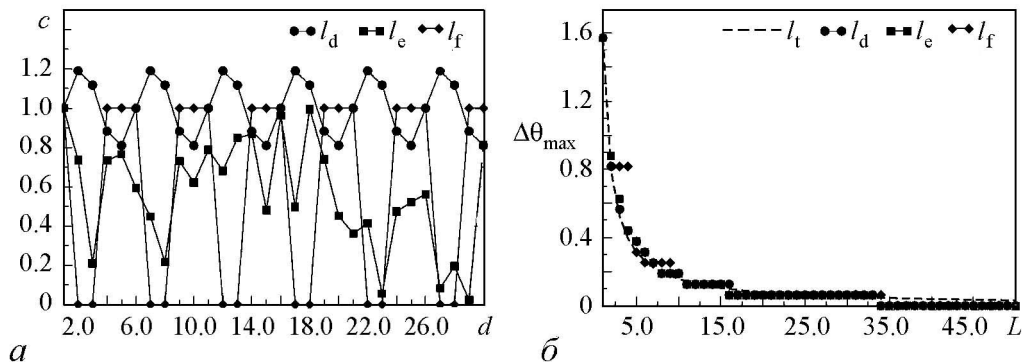


Рис. 3. а – графики $c(d)$; индекс линии соответствует виду зависимости; б – зависимость максимального значения разности фаз между соседними осцилляторами ансамбля от дальности связей L ; буквенный индекс линии соответствует виду зависимости $c(d)$, показанной на под-рисунке (а); штриховая линия l_t соответствует теоретической оценке (б)

в пределах интервала $[0 : 1]$, почти не влияет на устойчивость сосуществующих бегущих волн. Определенное расхождение между экспериментальными результатами и теоретическим предсказанием (6) наблюдается лишь для меандровой зависимости (f), при которой часть значений d «выключается» из интервала взаимодействия L . Для таких «слепых зон» кривая l_f представляет собой горизонтальную ступеньку, что обуславливает расхождение между l_d и l_t . После выхода из «слепой зоны» линия l_f скачком возвращается к теоретическому предсказанию (6). При больших дальностях, когда $L \gg M$, кривые практически перестают отличаться друг от друга.

Таким образом, мы видим, что флуктуации интенсивностей силы связей, ограниченные сверху единицей, слабо влияют на характер устойчивости режимов бегущих волн в системе (4) и на практике могут не приниматься во внимание. Как и в случае стационарных связей, устойчивость режима $RW^{(K)}$ определяется суммарным набегом фазы на интервале дальности действия L . Даже в том случае, когда отдельные диапазоны длин оказываются «выключенными» из интервала взаимодействия, набег фазы в этих «слепых зонах» должны учитываться при расчете устойчивости режима.

3.3. Возрастающие с расстоянием связи. Еще одним видом зависимости $c(d)$, выходящим за рамки ограничений, используемых в работе [19], является монотонный рост силы связей с расстоянием между осцилляторами. Несмотря на то, что подобный характер связей представляется аномальным для типичных природных или технических систем, он, тем не менее, может иметь интерес для каких-то специальных случаев. Рассмотрим два вида таких зависимостей (рис. 4, а):

- (г) линейный рост: $c(d) = 1 + a(d - 1)$;
- (h) экспоненциальный рост: $c(d) = \exp(a(d - 1))$.

Полученные в ходе численного исследования графики $\Delta\theta_{\max}(L)$ представлены на рис. 4, б. В расчетах использовались значения коэффициентов линейного роста: $a = 0.15$ (кривая l_{g1}), $a = 0.4$ (кривая l_{g2}), $a = 0.8$ (кривая l_{g3}) и значение инкремента экспоненты $a = 0.15$ (кривая l_h). Во всех рассмотренных случаях наблюдается качественно одинаковый характер зависимостей: сначала, при небольших L ,

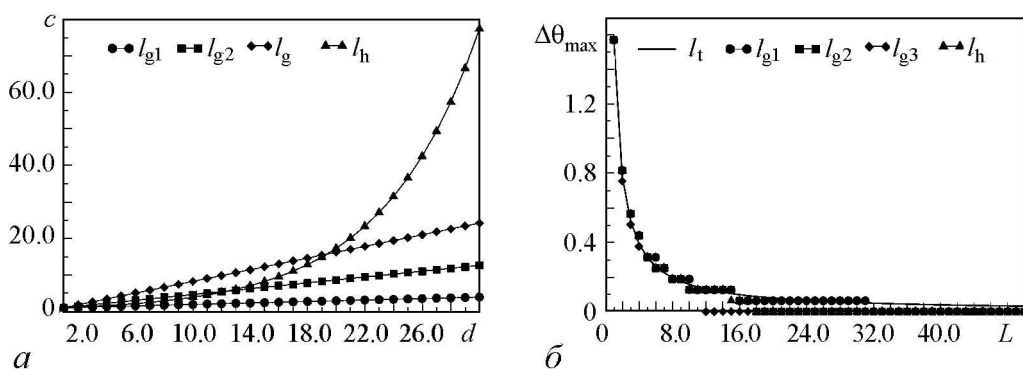


Рис. 4. а – графики $c(d)$, буквенный индекс линии соответствует виду зависимости: линии l_{g1} , l_{g2} , l_{g3} построены для $a = 0.1$, 0.4 , 0.8 , соответственно; линия l_h – для инкремента $a = 0.15$; б – зависимость максимального значения разности фаз между соседними осцилляторами ансамбля от дальности действия связей L , обозначения линий совпадают с соответствующими на под-рисунке (а)

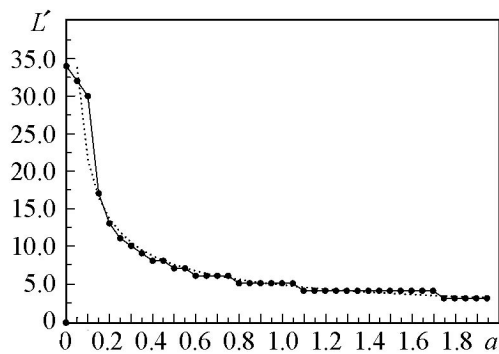


Рис. 5. Зависимость максимального дальности, при котором существуют устойчивые несинфазные режимы, от инкремента a при экспоненциальном возрастании коэффициентов связи с расстоянием

возрастания коэффициентов связи с расстоянием по экспоненциальному закону приведена на рис. 5. Для $a \geq 0.1$ она достаточно хорошо аппроксимируется степенной функцией $L'(a) = 4.76a^{-0.65}$, график которой построен на том же рисунке пунктирной линией.

4. Эволюция бассейнов притяжения аттракторов при росте дальности связей

Возможность реализации того или иного колебательного режима в эксперименте определяется не только его устойчивостью, но и размером области притяжения соответствующего аттрактора. В работе [9] было показано, что в ансамбле генераторов ван дер Поля с локальными связями коротковолновые режимы имеют существенно меньшие бассейны притяжения по сравнению с бассейнами аттракторов длинноволновых режимов. В связи с этим коротковолновые режимы практически не имеют шанса быть обнаруженными в системе при произвольном задании начальных условий. Каково соотношение между размерами бассейнов притяжения аттракторов при нелокальном характере связей? Как меняются бассейны притяжения волн разной длины с увеличением интервала взаимодействия L ?

Проведем оценку размеров бассейнов притяжения бегущих волн $RW^{(K)}$ в зависимости от дальности L . В силу высокой размерности фазового пространства системы (4) построение бассейнов притяжения прямым перебором начальных значений не представляется возможным. Поэтому, будем оценивать относительные размеры бассейнов притяжения разных режимов по вероятностям их появления при случайном задании начальных условий с равномерным распределением: $\theta_i(0) = \xi(i)$, где $\xi(i)$ – случайная функция целочисленного аргумента. По результатам численного интегрирования уравнений (4) с указанных начальных условий определяются вероятности появления бегущих волн с индексом K :

$$P^{(K)} = \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{M_K}{M},$$

где M – число наборов начальных условий, M_K – число появлений устойчивого режима с индексом K .

графики идут вдоль теоретической зависимости l_t , затем, при достижении определенного критического значения дальности действия L' , происходит «срыв» к нулю. В результате, в ансамбле с монотонно растущими с расстоянием связями переход к моностабильному состоянию, при котором в фазовом пространстве исчезают все режимы бегущих волн и остаются лишь синфазные колебания, происходит при существенно меньших значениях L , чем в ансамбле со стационарными связями. Зависимость критического значения L' от параметра a для

Результаты численного счета для постоянных связей $c(d) = 1$, полученные при переборе 100000 начальных условий, представлены на рис. 6. При локальной связи (рис. 6, а) в эксперименте наблюдались лишь бегущие волны с $K = 0$ до $K = 8$. Более коротковолновые режимы за время счета не были обнаружены. Как следует из диаграммы, наиболее вероятно появление волны $RW^{(1)}$. При этом синфазный режим $RW^{(0)}$ и волна $RW^{(2)}$ имеют близкие значения вероятностей появления, которые существенно превосходят эти значения для остальных режимов. При $K \geq 3$ вероятность появления волны меньше одного процента и быстро убывает с ростом индекса волны.

Рост дальности действия связей приводит к дальнейшему «вымыванию» коротковолновых режимов, вероятность появления которых уменьшается с ростом L за счет перераспределения вероятностей в пользу синфазного режима. В результате, при $L = 10$ (рис. 6, д) волны с $K > 3$ перестают наблюдаться в системе (4), хотя и сохраняют устойчивость; при $L = 16$ наблюдаются только режимы с $K = 0, 1$; при $L = 24$ – вероятность возникновения последнего несинфазного режима становится порядка 1% (рис. 6, е).

На рис. 7 построены графики зависимости вероятности появления волны с индексом K от интервала дальности действия связей L . Результаты приведены для четырех режимов: для синфазных колебаний (линия l_0), для волны

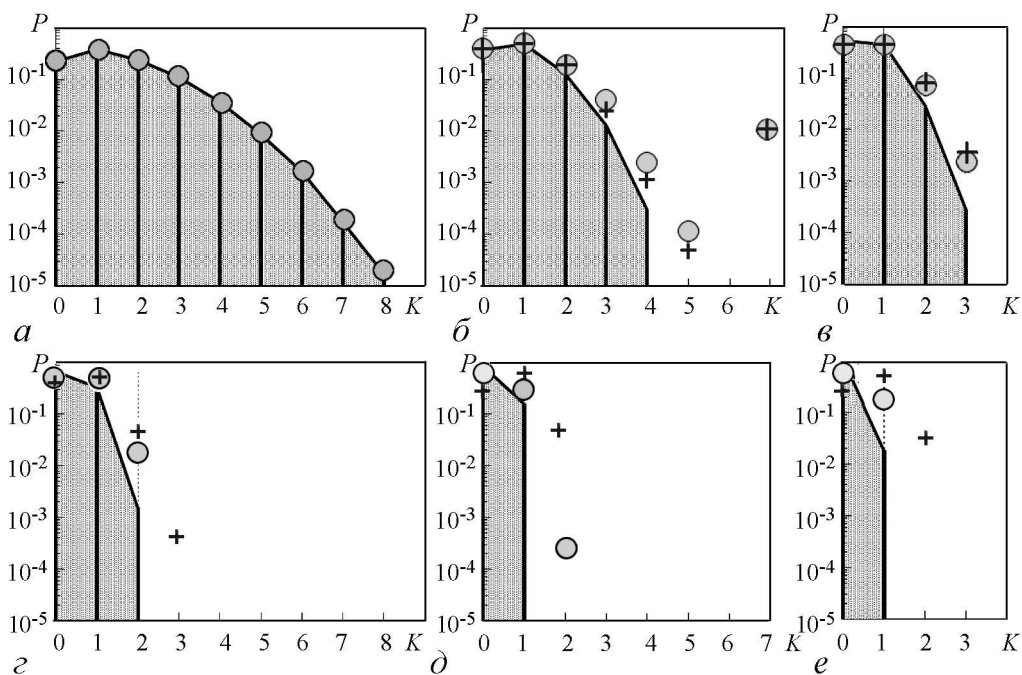


Рис. 6. Диаграммы вероятностей установления различных мод при увеличении дальности действия связей в ансамбле: при $L = 1$ (а); 3 (б); 6 (в); 10 (г); 16 (д); 24 (е). Сплошные линии соответствуют постоянным связям $c(d) = 1$, кружки – связям, убывающим обратно расстоянию $c(d) = 1/d$, крестики – связям, убывающим по экспоненциальному закону $c(d) = \exp(-0.4d)$; вертикальная пунктирная линия на под-рисунках (б)–(е) отмечает границу устойчивости бегущих волн, согласно формуле (7)

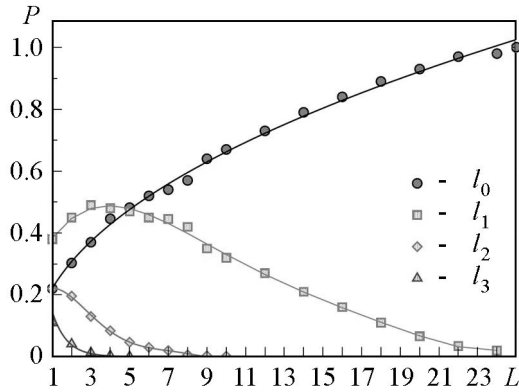


Рис. 7. Зависимости вероятностей появления различных мод от дальности действия L при случайном задании начальных условий; нижний индекс в обозначении линий соответствует индексу моды

вая мода бегущих волн $RW^{(1)}$ (кривая l_1) имеет большую вероятность возникновения, чем синфазный режим при коротких связях $L \leq 5$, достигая своего максимума при $L = 3$, а затем вероятность монотонно падает до нуля при росте дальности действия. Все остальные моды монотонно уменьшаются с ростом дальности действия, демонстрируя чрезвычайно малую вероятность появления соответствующих режимов при дальнедействующих связях.

При связях, интенсивности которых уменьшаются с расстоянием, качественный вид зависимостей вероятностей от L сохраняется, однако, сами величины $P^{(K)}$ меняются. На рис. 6 помимо случая постоянных связей построены также графики $P^{(K)}$ для связей уменьшающихся обратно расстоянию: $c(d) = 1/d$ (значения вероятностей отображаются кружками) и связей, уменьшающихся по экспоненциальному закону: $c(d) = \exp(-ad)$ при $a = 0.4$ (значения вероятностей отображаются крестиками). И в том и в другом случаях характерно увеличение вероятностей появления более коротковолновых режимов, по сравнению со случаем постоянных связей. В некоторых случаях (см. например, рис. 6, г, д, е) наблюдаются режимы, находящиеся за границей устойчивости, определяемой формулой (7).

Таким образом, ансамбли с большим радиусом действия связей при случайном задании начальных условий практически всегда демонстрируют синфазные колебания. Наиболее длинноволновые режимы могут встретиться лишь при малых интервалах действия связей; коротковолновые же режимы не имеют шансов быть обнаруженными вовсе. Тем не менее, все устойчивые волновые режимы $RW^{(K)}$ могут быть реализованы в системе (4), если начальные условия задавать специальным образом. Например, задавая $\theta_i(0)$ равномерно вдоль ансамбля с фиксированным шагом $\Delta\theta$: $\theta_i(0) = i\Delta\theta$. Результаты расчетов результирующих режимов для данного способа выбора начальных условий приведены на рис. 8. При $L = 1$ зависимость K от величины шага $\Delta\theta$ представляет собой лестничную структуру (линия l_1), «ступеньки» которой имеют почти равную ширину. При увеличении дальности действия уменьшается число «ступенек» (линии $l_2 - l_5$), поскольку с ростом L меньшее число волн остаются устойчивыми, однако, размеры «ступенек» практически не претерпевают изменения. Наблюдается лишь незначительное смещение их в сторону больших $\Delta\theta$.

с $K = 1$ (линия l_1), волны с $K = 2$ (линия l_2) и волны с $K = 3$ (линия l_3). Графики для более коротковолновых мод располагаются существенно ниже кривой l_3 и качественно схожи с ней. Как видно из графиков, вероятность возникновения синфазных колебаний монотонно возрастает при росте дальности действия связей от $P^{(0)} \simeq 0.22$ в кольце локальных фазовых осцилляторов до $P^{(0)} = 1$ при $L = 25$ (при $L \geq N/4$ синфазные колебания – глобально устойчивый режим). Характер зависимости хорошо аппроксимируется зависимостью $P^{(0)}(L) \sim \sqrt{L}$. Наиболее длинновол-

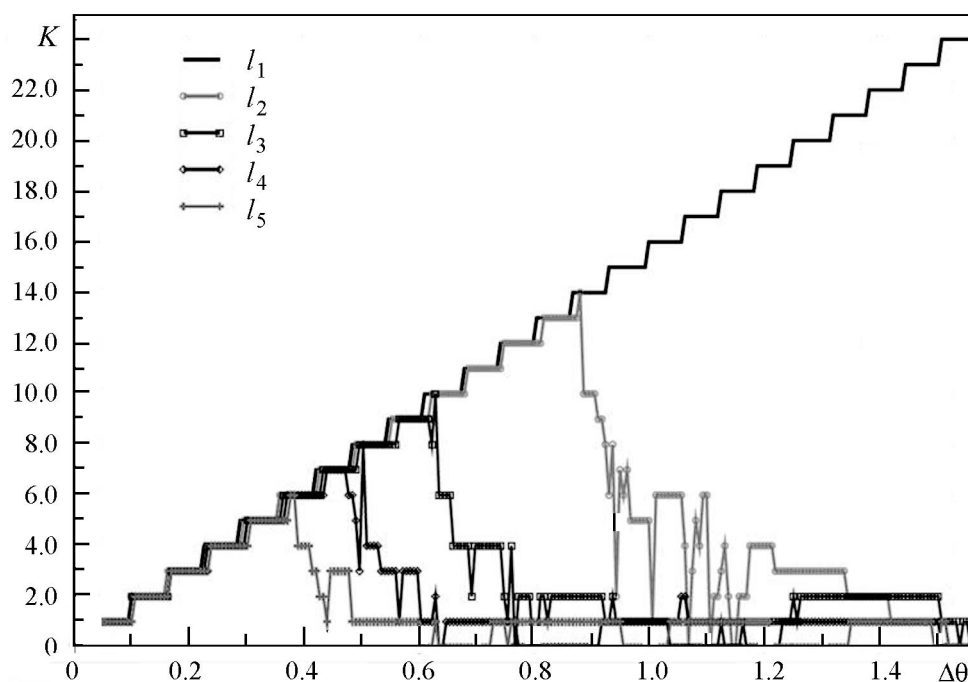


Рис. 8. Зависимости индекса моды K от выбора шага задания начальных условий $\Delta\theta$ для ансамблей с разным дальностью действия; нижний индекс в обозначении линий – параметр дальности действия связей L

Заключение

Проведены численные исследования и получены эмпирические закономерности зависимости устойчивости мультистабильных состояний и их бассейнов притяжения от параметра дальности действия L в кольце фазовых осцилляторов с нелокальными связями. Полученные результаты были сопоставлены с аналитической формулой из работы [19]. Исследование показало, что в ансамбле фазовых осцилляторов наблюдается мультистабильность в виде набора сосуществующих режимов бегущих вдоль кольца волн, каждая из которых характеризуется своим значением разности фаз $\Delta\theta$ между соседними осцилляторами. В случае стационарных связей, либо связей не слишком быстро меняющихся с расстоянием, хорошей оценкой «сверху» для $\Delta\theta$ будет «критерий Эрментроута»: суммарный набег фазы на интервале взаимодействия не должен превосходить значения $\pi/2$. Данная оценка остается справедливой даже при наличии «слепых зон» в интервале взаимодействия, то есть в том случае, когда связи оказываются выключенными для определенных дистанций внутри интервала. Увеличение L ведет к «вымыванию» коротковолновых режимов и при большой дальности взаимодействия – к установлению глобально устойчивого режима синфазных колебаний.

При быстро изменяющихся с расстоянием связях формула из работы [19] не является более необходимым условием устойчивости бегущих волн в ансамбле. Если сила связи уменьшается с расстоянием по экспоненциальному или обратному степенному закону с показателем два и выше, наблюдается «стабилизация» значе-

ния $\Delta\theta_{\max}$, при которой дальнейший рост L не влияет на число сосуществующих режимов. При этом, в ансамбле со сколь угодно большой дальностью связей сохраняется мультистабильность. При связях, интенсивность которых растет с расстоянием, критерий Эрментаура более не является достаточным условием устойчивости бегущих волн. Переход к глобально устойчивому синфазному режиму происходит тем быстрее, чем быстрее растут коэффициенты связи с расстоянием.

Исследование бассейнов притяжения показало, что с ростом дальности действия происходит уменьшение размеров бассейнов для коротковолновых режимов с одновременным ростом бассейна притяжения синфазных колебаний. При случайном задании начальных условий лишь синфазные колебания и несколько самых длинноволновых режимов реализуются в ансамбле; коротковолновые режимы, даже будучи устойчивыми, имеют слишком малую вероятность к появлению, особенно при увеличении дальности действия связей.

Все результаты численных исследований, представленные в работе, получены для фиксированного значения размеров ансамбля: $N = 100$. Сопоставление экспериментальных значений $\Delta\theta_{\max}$, рассчитанных для других N ($N = 50$ и $N = 200$), показало, что величина максимального фазового сдвига, как этого и следовало ожидать, инвариантна к длине кольца. Однако подобной инвариантностью не обладают закономерности эволюции бассейнов притяжения, полученные в последнем разделе. Здесь при изменении N сохраняется лишь качественный вид зависимостей, в то же время сами значения вероятностей выхода на тот или иной режим изменятся.

Работа выполнена при поддержке Министерства образования и науки РФ (проект 1008).

Библиографический список

1. *Blekhman I.I., Landa P.S., Rosenblum M.G.* Synchronization and chaotization in interacting dynamical systems // *Appl. Mech. Rev.* 1995. Vol. 11, part 1. P. 733–752.
2. *Анищенко В.С., Вадивасова Т.Е.* Синхронизация автоколебаний и колебаний, индуцированных шумом // *Радиотехника и электроника.* 2002. Т. 47. С. 133–165.
3. *Пиковский А., Розенблюм М., Куртс Ю.* Синхронизация. Фундаментальное нелинейное явление. Москва: Техносфера, 2003.
4. *Малафеев В.М., Полякова М.С., Романовский Ю.М.* О процессе синхронизации автогенераторов, связанных через проводимость // *Известия вузов. Радиофизика.* 1970. Т. 13. С. 936.
5. *Мынбаев Д.К., Шиленков М.И.* Взаимная фазовая синхронизация генераторов, соединенных по кольцевой схеме // *Радиотехника и электроника.* 1981. № 2. С. 361.
6. *Мальцев А.А., Силаев А.М.* Режимы работы цепочки автогенераторов с «жесткими» предельными циклами, связанных с помощью реактивных элементов // *Известия вузов. Радиофизика.* 1979. Т. 22. С. 826.

7. Дворников А.А., Уткин Г.М., Чуков А.М. О взаимной синхронизации цепочки резистивно связанных автогенераторов // Известия вузов. Радиофизика. 1984. Т. 27. С. 1388.
8. Ermentrout G.B. The behaviour of rings of coupled oscillators // J. of Math. Biol. 1985. Vol. 23. P. 55.
9. Шабунин А.В., Акопов А.А., Астахов В.В., Вадивасова Т.Е. Бегущие волны в дискретной ангармонической автоколебательной среде // Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2005. Т. 13, № 4. С. 37–54.
10. Matias M.A., Guemez J., Perez-Munuzuri V., Marino I.P., Lorenzo M.N., Perez-Villar V. Observation of a fast rotating wave in rings of coupled chaotic oscillators // Phys. Rev. Lett. 1997. Vol. 78, № 2. P. 219–222.
11. Marino I.P., Perez-Munuzuri V., Perez-Villar V., Sanchez E., Matias M.A. Interaction of chaotic rotating waves in coupled rings of chaotic cells // Physica D. 2000. Vol. 128. 224–235.
12. Shabunin A., Astakhov V., Anishchenko V. Developing chaos on base of traveling waves in a chain of coupled oscillators with period-doubling. Synchronization and hierarchy of multistability formation // Int. J. of Bifurcation and Chaos. 2002. Vol. 12, № 8. P. 1895–1908.
13. Nekorkin V.I., Makarov V.A., Velarde M.G. Spatial disorder and waves in a ring chain of bistable oscillators // Int. J. Bifurcation and Chaos. 1996. Vol. 6. P. 1845.
14. Kuramoto Y. Chemical Oscillations Waves and Turbulence. Berlin: Springer, 1984.
15. Ermentrout G.B., Kopell N. Symmetry and phase locking in chains of weakly coupled oscillators // Comm. Pure Appl. Math. 1986. Vol. 49. P. 623–660.
16. Ermentrout G.B., Kopell N. Phase transitions and other phenomena in chains of coupled oscillators // SIAM J. of Appl. Math. 1990. Vol. 50. P. 1014–1052.
17. Ermentrout G.B. Synchronization in a pool of mutually coupled oscillators with random frequencies // J. of Math. Biol. 1985. Vol. 22. P. 1–9.
18. Crawford J.D., Davies K.T.R. Synchronization of globally coupled phase oscillators: singularities and scaling for general couplings // Physica D. 1990. Vol. 125. P. 1–46.
19. Ren L., Ermentrout G.B. Phase locking in chains of multiple-coupled oscillators // Physica D. 2000. Vol. 143. P. 56.
20. Astakhov V., Shabunin A., Uhm W., Kim S. Multistability formation and synchronization loss in coupled Hennon maps: Two sides of the single bifurcational mechanism // Phys. Rev. E. 2001. Vol. 63. P. 056212.
21. Bezruchko B.P., Prokhorov M.D., Seleznev E.P. Oscillation types, multistability, and basins of attractors in symmetrically coupled period-doubling systems // Chaos, Solitons and Fractals. 2003. Vol. 15. P. 695–711.
22. Гуртовник А.С., Неймарк Ю.И. Синхронизмы в системе циклически слабосвязанных осцилляторов // Динамические системы: Межвузовский сборник научных трудов. Изд. Нижегородского университета. 1991. С. 84.

Поступила в редакцию 16.05.2016
После доработки 29.06.2016

MULTISTABILITY IN AN ENSEMBLE OF PHASE OSCILLATORS WITH LONG-DISTANCE COUPLINGS

A. V. Shabunin

National Research Saratov State University,
Astrakhanskaya, 83, 410012 Saratov, Russia
E-mail: shabuninav@info.sgu.ru

The work is devoted to investigation of multistability of running waves in a ring of periodic oscillators with diffusive non-local couplings. It analyzes the influence of long-range couplings and their change with distance on the stability of spatially-periodic regimes with different wave numbers.

The research are carried out by numerical (computer) experiments. The system under study is an ensemble of identical phase oscillators. It is, on the one hand the most simple model providing opportunities for analytical studies; on the other hand its properties can be generalized to an arbitrary ensemble of almost harmonic self sustained oscillators.

The studies have shown that multistability is observed in the ensemble of phase oscillators as a set of coexisting modes of waves running along the ring, the every of which characterizing by its own phase-shift between oscillations in the neighboring sites. In the case of stationary or slowly varying couplings a running wave mode remains stable while the total phase shift on the interval of interaction keeps to be less than $\pi/2$. When the couplings are decreased sufficiently fast, the stabilization of the maximum value of the phase shift is observed, so the further increase of range of interaction no longer affects the number of coexisting modes. Thus, the multistability keeps to exist in an ensemble with an arbitrarily distance of interconnection. The study the basins of attraction of the running waves have demonstrated that basins of long-wavelength modes are increased and simultaneously basins of short-wavelength modes are decreased while the range of interconnection grows.

Keywords: Synchronization, multistability, running waves, phase oscillators.

DOI:10.18500/0869-6632-2016-24-3-38-53

Paper reference: Shabunin A.V. Multistability in an ensemble of phase oscillators with long-distance couplings // *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*. 2016. Vol. 24. Issue 3. P. 38–53.

References

1. *Blekhman I.I., Landa P.S., Rosenblum M.G.* // *Appl. Mech. Rev.* 1995. Vol. 11, part 1. P. 733–752.
2. *Anishchenko V.S., Vadivasova T.E.* // *Journal of Communications Technology and Electronics*, 2002. Vol. 47, № 2. P. 117–148.
3. *Pikovsky A., Rosenblum M., Kurths J.* *Synchronization: A Universal Concept in Nonlinear Sciences*. Cambridge University Press, 2003.
4. *Malafeev V.M., Polyakova M.S., Romanovsky Yu.M.* // *Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved., Radiofizika*. 1970. Vol. 13. P. 936 (in Russian).
5. *Mynbaev D.K., Shilenkov M.I.* // *Radiotekhnika i elektronika*. 1981. № 2. P. 361 (in Russian).
6. *Maltzev A.A., Silaev A.M.* // *Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved., Radiofizika*. 1979. Vol. 22. P. 826 (in Russian).
7. *Dvornikov A.A., Utkin G.M., Chukov A.M.* // *Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved., Radiofizika*, 1984. Vol. 27. P. 1388 (in Russian).
8. *Ermentrout G.B.* // *J. of Math. Biol.* 1985. Vol. 23. P. 55.

9. *Shabunin A.V., Akopov A.A., Astakhov V.V., Vadivasova T.E.* // *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*. 2005. Vol. 13, № 4. P. 37–54 (in Russian).
10. *Matias M.A., Guemez J., Perez-Munuzuri V., Marino I.P., Lorenzo M.N., Perez-Villar V.* // *Phys. Rev. Lett.* 1997. Vol. 78, N 2. P. 219–222.
11. *Marino I.P., Perez-Munuzuri V., Perez-Villar V., Sanchez E., Matias M.A.* // *Physica D*. 2000. Vol. 128. 224–235.
12. *Shabunin A., Astakhov V., Anishchenko V.* // *Int. J. of Bifurcation and Chaos*. 2002. Vol. 12, N 8. P. 1895–1908.
13. *Nekorkin V.I., Makarov V.A., Velarde M.G.* // *Int. J. Bifurcation and Chaos*. 1996. Vol. 6. P. 1845.
14. *Kuramoto Y.* *Chemical Oscillations Waves and Turbulence*. Berlin: Springer, 1984.
15. *Ermentrout G.B., Kopell N.* // *Comm. Pure Appl. Math.* 1986. Vol. 49. P. 623–660.
16. *Ermentrout G.B., Kopell N.* // *SIAM J. of Appl. Math.* 1990. Vol. 50. P. 1014–1052.
17. *Ermentrout G.B.* // *J. of Math. Biol.* 1985. Vol. 22. P. 1–9.
18. *Crawford J.D., Davies K.T.R.* // *Physica D*. 1990. Vol. 125. P. 1–46.
19. *Ren L., Ermentrout G.B.* // *Physica D*. 2000. Vol. 143. P. 56.
20. *Astakhov V., Shabunin A., Uhm W., Kim S.* // *Phys. Rev. E*. 2001. Vol. 63. P. 056212.
21. *Bezruchko B.P., Prokhorov M.D., Seleznev E.P.* // *Chaos, Solitons and Fractals*. 2003. Vol. 15. P. 695–711.
22. *Gurtovnik A.S., Neimark Yu.I.* // *Dinamicheskie sistemy: Mezhvuzovskiy sbornik nauchnyh trudov*. Nizhegorodskiy Universitet. 1991. P. 84 (in Russian).



Шабунин Алексей Владимирович – окончил Саратовский государственный университет (1990). Доктор физико-математических наук (2008), профессор кафедры радиофизики и нелинейной динамики СГУ. Научные интересы – нелинейная динамика, теория колебаний, синхронизация и управление хаосом. Автор более 75 научных публикаций.

410012 Саратов, ул. Астраханская, 83
 Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского
 E-mail: shabuninav@info.sgu.ru



КВАНТОВЫЙ ОСЦИЛЛЯТОР МАТЬЁ С КУБИЧЕСКОЙ СИЛОЙ, ТРЕНИЕМ И ШУМОМ

А. Л. Санин¹, А. А. Смирновский²

¹ Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого, Россия
195251 С.-Петербург, Политехническая, 29, E-mail: andreylsanin@yandex.ru

² Физико-технический институт им. А.Ф. Иоффе РАН, Россия
194021 С.-Петербург, Политехническая, 26, E-mail: smirnovskysaha@gmail.com

Предложено обобщение на квантовую область движения классического дифференциального уравнения Матьё с кубической нелинейностью, диссипативным и ланжевеновским слагаемыми. Проблема перехода от классического поведения к квантовому имеет не только фундаментальное, но и прикладное значение. В качестве примера можно отметить осцилляторную динамику материальных объектов с малой массой при понижении температуры. Уравнение, описывающее квантовый осциллятор Матьё, представляет собой уравнение Шрёдингера–Ланжевена–Костина с потенциалом четвёртой степени, логарифмическим диссипативным и ланжевеновским слагаемыми. Численное интегрирование этого уравнения проведено при заданных начальном и граничных условиях с использованием конечно-разностного итерационного метода. Впервые в рамках предложенной модели детально анализируется временная эволюция динамических средних для координаты и скорости, стандартных отклонений и частотных спектров при разных условиях и параметрах системы. При слабом параметрическом воздействии колебания квантового осциллятора Матьё содержат одну или две спектральные компоненты на частотах перехода между соседними состояниями и на комбинационных частотах, обусловленных состояниями Флоке. Если амплитуда параметрического воздействия возрастает, то число спектральных компонент также увеличивается. Трение ведёт к затуханию колебаний. Многочастотный режим квантового осциллятора Матьё возникает, если амплитуда параметрического воздействия равна или превышает единицу, при этом параметрическая частота рационально не связана с частотами спектра. Разности частот соседних спектральных компонент могут равняться одной из двух частот спектра, либо их удвоенной сумме. Гауссов белый шум изменяет картину реализаций: при малом коэффициенте трения и умеренной интенсивности шума спектральные компоненты на комбинационных частотах становятся неразличимыми, остаётся заметной только одна компонента на частоте перехода из основного состояния в возбуждённое. Таким образом, проведённые исследования показывают существенную зависимость режима колебаний от параметров модели. Увеличение амплитуды внешнего воздействия приводит к усложнению спектров.

Ключевые слова: Квантовый осциллятор Матьё, кубическая сила, квазипериодичность, возбуждение шумом.

DOI:10.18500/0869-6632-2016-24-3-54-67

Ссылка на статью: Санин А.Л., Смирновский А.А. Квантовый осциллятор Матьё с кубической силой, трением и шумом // Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2016. Т. 24, № 3. С. 54–67.

Введение

Проблема перехода от классического поведения к квантовому является важной, она имеет не только фундаментальное, но и прикладное значение. В качестве примера можно отметить осцилляторную динамику материальных объектов с малой массой при понижении температуры, которая обсуждалась, например, в статьях [1,2]. В этих работах исследуется классический вынужденный осциллятор Дуффинга и переход его в квантовый осциллятор; проводится моделирование динамических закономерностей, когда энергия кванта колебаний $\hbar\Omega$ становится соизмеримой с тепловой энергией $k_B T_T$ термостата; частота Ω в этих работах находится в диапазоне сверхвысоких частот. Здесь \hbar , k_B , T_T – редуцированная постоянная Планка, постоянная Больцмана и температура термостата, соответственно.

Другая осцилляторная модель [3] нашла обширные приложения, она описывается классическим нелинейным уравнением Матьё в виде

$$\ddot{\zeta} + k\dot{\zeta} + (1 + \mu \cos \tau)\zeta^3 = 0, \quad (1)$$

где безразмерные величины k , μ , ζ , τ обозначают коэффициент трения, параметр внешней силы, координату и время, соответственно.

Если $k = 0$, $\mu = 0$, то уравнение (1) описывает автономный осциллятор с кубической «восстанавливающей» силой $-\zeta^3$, в этом случае его решениями являются эллиптические функции Якоби. При $k \neq 0$, $\mu \neq 0$ осциллятор испытывает воздействие параметрической внешней силы $-\mu \cos \tau \cdot \zeta^3$ с частотой $\Omega_{\text{ext}} = 1$ и силы трения $-k\dot{\zeta}$. В статье [3] детально исследовались субгармонические колебания при очень малых величинах k , μ . Кроме того, в этой работе обсуждаются условия возбуждения квазипериодических колебаний при $k = 0$ и затухание колебаний, если k превышает некоторое пороговое значение $k_0 = k_0(\Omega, \mu)$. Квантовое обобщение классического уравнения Матьё с кубической силой (как внутренней восстанавливающей, так и параметрической внешней), предлагаемое в настоящей работе, можно рассматривать как следующий шаг по отношению к задаче обобщения классического линейного уравнения Матьё. Это обобщение необходимо для развития теории квантовых осцилляторов, самоорганизации и может оказаться полезным при объяснении квантовых динамических закономерностей в других приложениях.

Чтобы обобщить классический нелинейный осциллятор Матьё (1) на квантовую область движения, используем простую модель на основе уравнения Шрёдингера–Ланжевена–Костина (ШЛК) [4, 5], которая используется в литературе и обобщалась также для более детального описания квантового движения (см., например, [6]). Помимо введения и заключения статья содержит три раздела, включающие описание уравнений квантового осциллятора Матьё с трением и случайной ланжевенновской силой и метода решения, а также результаты численного интегрирования уравнений ШЛК как без, так и с учетом ланжевенновской случайной силы.

1. Основные уравнения и численное интегрирование

Классическое уравнение Матьё (1) может быть обобщено на квантовую область движения через уравнение ШЛК [4, 5], которое в безразмерном виде для одно-

мерного случая записывается следующим образом:

$$i \frac{\partial \psi}{\partial \tau} = -\frac{1}{2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \zeta^2} + U_{\Sigma} \psi - \frac{ik}{2} \left(\ln \frac{\psi}{\psi^*} - \left\langle \ln \frac{\psi}{\psi^*} \right\rangle \right) \psi + U_{\text{rand}} \psi. \quad (2)$$

Уравнение (2) формулируется как уравнение движения, включающее омическое трение, внешний потенциал и ланжевеновский случайный источник U_{rand} . Данное уравнение анализировалось для квадратичных осцилляторов и для осциллятора Дуффинга во многих работах [7–11] как при $U_{\text{rand}} = 0$, так и с $U_{\text{rand}} \neq 0$. Оно определяет временную эволюцию волновой функции $\psi(\zeta, \tau)$, зависящей от координаты и времени и удовлетворяющей условию нормировки

$$\int_{-\zeta_L}^{\zeta_L} \psi^* \psi d\zeta = 1.$$

Рассматриваемая квантовая система ограничена непроницаемыми стенками в точках $\pm \zeta_L$ (ζ_L – полуширина системы). Символ $\langle \rangle$ означает усреднение в пространстве

$$\left\langle \ln \frac{\psi}{\psi^*} \right\rangle = \int \psi^* \ln \frac{\psi}{\psi^*} \psi d\zeta.$$

Полный потенциал U_{Σ} состоит из двух слагаемых

$$U_{\Sigma} = \zeta^4 + U_{\text{ext}}, \quad U_{\text{ext}} = U_0 \zeta^4 \sin(\Omega_{\text{ext}} \tau), \quad (3)$$

где U_0, Ω_{ext} – амплитуда и частота параметрического внешнего воздействия. В (3) мы полагаем $U_0 \leq 1$. Если $U_0 > 1$, то потенциал U_{Σ} становится знакопеременным. Для сохранения знака U_{Σ} при вариациях U_0 в формуле (3) с U_{ext} можно заменить временной множитель на $\sin^2 \Omega_{\text{ext}} \tau$, тогда выражение для полного потенциала можно представить в виде

$$U_{\Sigma} = \left(1 + \frac{U_0}{2} \right) \zeta^4 - \frac{1}{2} U_0 \zeta^4 \cos(2\Omega_{\text{ext}} \tau). \quad (4)$$

Теперь величина U_0 играет двоякую роль: как дополнение к единице в стационарном слагаемом (4), так и в качестве параметрического амплитудного множителя в произведении с косинусоидальным временным множителем. В соответствии с (3), (4) классическая сила $f_{\text{кл}} = -\partial U_{\Sigma} / \partial \zeta$ состоит из двух слагаемых (стационарного и нестационарного), пропорциональных кубу координаты ζ , как в работе [3].

Диссипативные свойства рассматриваемой системы зависят от коэффициента трения k , а величина $\ln(\psi/\psi^*)$ может быть представлена в виде

$$\ln \left(\frac{\psi}{\psi^*} \right) = i (2 \arg(\psi) + 2n\pi),$$

где $\arg(\psi) = \arctg(\text{Im } \psi / \text{Re } \psi)$ – главное значение фазы. Следует отметить, что физически корректные решения имеют место, когда фаза является непрерывной функцией координаты ζ .

Если $k = 0$, $U_{\text{ext}} = 0$, то из уравнения (2) можно получить уравнение для собственных функций ϕ_n и собственных значений ε_n

$$\left(-\frac{1}{2} \frac{d^2}{d\zeta^2} + \zeta^4\right) \phi_n = \varepsilon_n \phi_n, \quad (5)$$

n – номер состояния.

Граничные условия на стенках системы и начальное условие задавались в виде

$$\psi(\pm\zeta_L, \tau) = 0, \quad \psi(\zeta, \tau = 0) = \psi_0(\zeta).$$

Здесь $\psi_0(\zeta)$ есть решение стационарного уравнения (5) для основного состояния. Колебания из основного состояния могут возбуждаться посредством отдельного кратковременного импульса с потенциалом

$$U = -\mathcal{F}_0 \zeta, \quad \tau \in (0; \Delta\tau),$$

где \mathcal{F}_0 – сила, которая действует в течение короткого времени $\Delta\tau$, много меньшего времени наблюдения (расчёта) T .

Потенциал ланжевеновского источника U_{rand} определяется как

$$U_{\text{rand}} = -\mathcal{F}_{\text{rand}} \zeta,$$

где $\mathcal{F}_{\text{rand}}$ – случайная сила, зависящая от времени. Эта функция представляет собой дельта-коррелированный гауссов шум с нулевым средним значением, а среднее от его квадрата является задаваемой величиной и характеризует дисперсию случайной силы. В расчётах эта сила задавалась в каждый момент времени следующим образом:

$$\mathcal{F}_{\text{rand}} = D\sqrt{2} \text{erf}^{-1}(2r - 1),$$

где D – величина дисперсии случайной силы; erf^{-1} – обратная функция ошибок; r – случайное число из диапазона $[0; 1]$, получаемое при помощи генератора случайных чисел.

Численное интегрирование нестационарного уравнения (2) было проведено при заданных начальном и граничных условиях при помощи итерационного конечно-разностного метода установления по псевдовремени, являющегося разновидностью метода простых итераций. Производные по координате аппроксимировались со вторым порядком точности, временная производная также вычислялась со вторым порядком точности (по методу Кранка–Николсон). В процессе вычислений контролировалось условие нормировки, которое сохранялось с точностью до 10^{-6} . Реализованный численный метод тестировался на различных задачах (в частности, на задачах для гармонического осциллятора).

Динамика квантового волнового пакета была исследована на основе эволюции плотности вероятности $N = \psi^* \psi$, а также средних значений динамических переменных: координаты $\langle \zeta \rangle$, скорости $\langle V \rangle$ и стандартных отклонений $\sigma_\zeta = \sqrt{\langle (\Delta\zeta)^2 \rangle}$, $\sigma_V = \sqrt{\langle (\Delta V)^2 \rangle}$ (под знаком радикала стоят средне-квадратичные отклонения координаты и скорости). Произведение $\sigma_\zeta \sigma_V$ определяет соотношение неопределённостей. С помощью метода быстрого преобразования Фурье проведён анализ квадратов модулей $|\Phi_{\langle \zeta \rangle}(\Omega)|^2$, зависящих от частоты Ω и отражающих функциональную зависимость $\langle \zeta \rangle$ от времени. В дальнейшем используется обозначение $F_{\langle \zeta \rangle}(\Omega) = |\Phi_{\langle \zeta \rangle}(\Omega)|^2$.

2. Квантовый осциллятор Матъё с кубической силой

2.1. Слабое параметрическое воздействие. Ранее нами был исследован одномерный квантовый осциллятор с одночленным потенциалом четвёртой степени, ограниченный стенками непроницаемой ямы [11]. В рамках стационарного уравнения Шрёдингера (5) с $U = \zeta^4$, $\zeta_L = 3$ проанализированы энергетические уровни и частоты переходов между соседними уровнями. Результаты приведены в табл. 1.

Таблица 1
Спектр и разности энергий между соседними уровнями (частоты переходов)

n	1	2	3	4	5	6	7	8
ε_n	0.6680	2.3936	4.6968	7.3357	10.2443	13.3793	16.7119	20.2208
$\Delta\varepsilon_n$	1.7257	2.3032	2.6389	2.9086	3.1350	3.3326	3.5090	3.6692

Разница между соседними уровнями $\Delta\varepsilon_n$, как функция номера состояния n , имеет излом. Если $\zeta_L = 7$, то излом исчезает и зависимость $\Delta\varepsilon_n$ от n аппроксимируется кривой $1.84n^{1/3}$.

Для динамического режима при $U_0 > 1$, рассматриваемого ниже, спектр энергий и частоты перехода могут существенно отличаться от данных табл. 1.

Если параметрические слагаемые с временными множителями в формулах (3), (4) для U_Σ отсутствуют и $k = 0$, то при $\mathcal{F}_0 \neq 0$ возбуждаются свободные колебания плотности вероятности и соответствующие им колебания средней координаты $\langle \zeta \rangle$. В этом случае система представляет квантовый автономный осциллятор с одночленным потенциалом четвёртой степени, свойства которого при разных значениях \mathcal{F}_0 , k обсуждались нами ранее в [11]. Воздействие параметрической внешней силы на него определяет квантовый осциллятор Матъё.

Наиболее простые режимы колебаний реализуются при $U_0 < 1$ и слабых кратковременных импульсах \mathcal{F}_0 . В частности, такой простой режим имеет место при $U_0 = 0.1$, $\mathcal{F}_0 = -0.1$, $\Omega_{\text{ext}} = \Omega_1 = 1.7257$, $k = 0$ (рис. 1).

Как показано на рисунке, колебания средней координаты $\langle \zeta \rangle$ характеризуются основным временным масштабом $2\pi/\Omega_{\text{ext}}$, слабая модуляция по амплитуде зависит от разности частот $\Omega_2 - \Omega_1$. Наибольшая фурье-компонента находится на частоте перехода Ω_1 . Здесь также присутствует спектральная компонента на комбинационной частоте $\Omega = \Omega_1 + \Omega_{\text{ext}}$. Как показано в [3], при введении диссипации с коэффициентом трения $k > k_0$ уравнение Матъё описывает затухающие колебания. Аналогичные

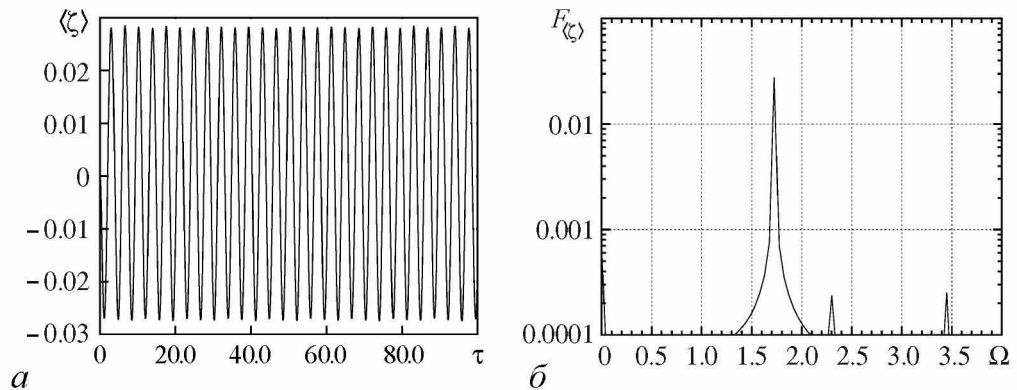


Рис. 1. Средняя координата (а) и частотный спектр (б) для малых \mathcal{F}_0 , U_0

процессы происходят для рассматриваемого квантового осциллятора Матьё с кубической силой и трением.

Результаты сравнения двух режимов колебаний (без трения и с его учётом) представлены на (рис. 2).

В обоих случаях колебания происходят выше некоторого уровня, обусловленного соотношением неопределённостей. Сравнение фрагментов *a* и *b* на рис. 2 позволяет продемонстрировать следующие различия: в системе с трением возникает переходный участок и установившиеся колебания с размахом амплитуды на порядок меньше, чем в случае без трения. Как и следовало ожидать, квантовый осциллятор Матьё с параметрической внешней силой также подчиняется соотношению неопределённостей.

Обсудим осцилляторные режимы при вариациях Ω_{ext} , однако, снова при малых величинах \mathcal{F}_0 и U_0 . Будем рассматривать варианты с $\mathcal{F}_0 = -0.1$, $U_0 = 0.1$, $k = 0$ и $\Omega_{\text{ext}} = 0.13 + 0.1n$, где $n = 1, 2, \dots, 8$. Как показывают расчёты, получающиеся комбинационные частоты спектра колебаний средней координаты удовлетворяют формуле $\Omega = \Omega_1 + l\Omega_{\text{ext}}$, где l являются положительными и отрицательными числами. Наиболее интенсивная спектральная компонента также имеет место на частоте $\Omega_1 = 1.7257$ (это частота перехода из основного в первое возбуждённое состояние). Если $n = 1$, то имеются три спектральные компоненты на комбинационных частотах с $l = -2, -1, 1$. При последующем увеличении n картина частотных спектров в целом сохраняется, либо из спектра пропадает одна из спектральных компонент, но возникает компонента на частоте перехода Ω_2 . Однако компонента на частоте Ω_1 по-прежнему является наиболее интенсивной в спектре. В целом, режимы колебаний являются достаточно простыми.

Более детально обсудим динамические закономерности при фиксированной величине Ω_{ext} и вариациях амплитуды U_0 . Полагаем $\Omega_{\text{ext}} = 0.25\Omega_1$, $k = 0$, $\mathcal{F}_0 = -0.1$. Если $U_0 = 0.1$, то получается простая эволюционная картина квантового осциллятора Матьё (рис. 3).

Плотность вероятности N на плоскости (ζ, τ) описывает локализацию квантового волнового пакета, который в основном распределён на интервале $\zeta \in [-1, 1]$

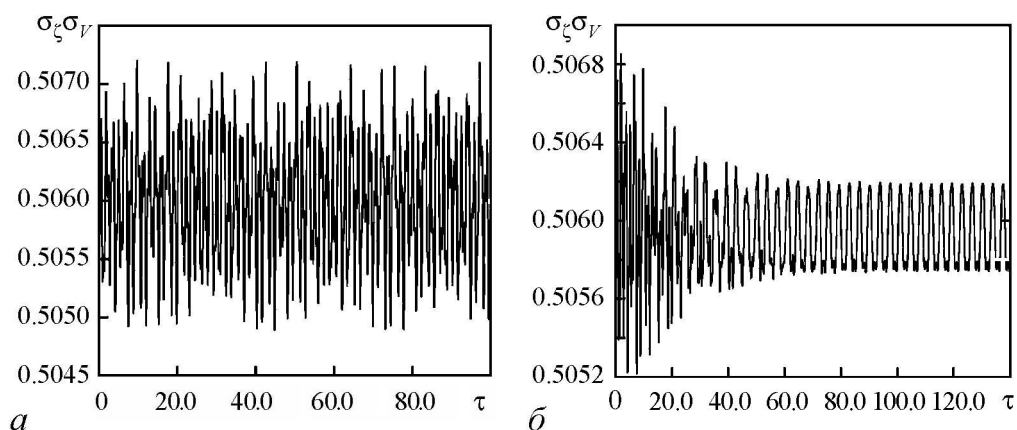


Рис. 2. Произведение стандартных отклонений для различных значений коэффициента трения k : *a* – 0, *b* – 0.1. Здесь $\mathcal{F}_0 = -0.1$, $U_0 = 0.1$, $\Omega_{\text{ext}} = 1.7257$, $k = 0$ и $k = 0.1$

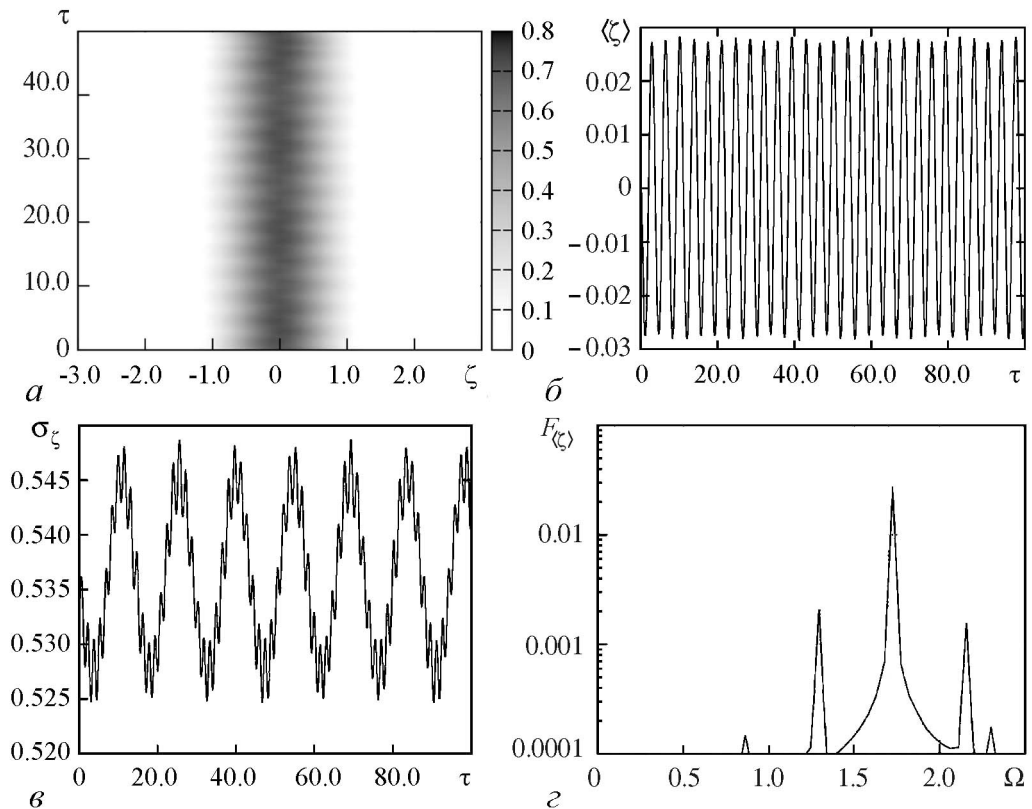


Рис. 3. Динамические свойства осциллятора Матьё при малых U_0 : a – плотность вероятности N ; b – средняя координата $\langle \zeta(\tau) \rangle$; v – стандартное отклонение σ_ζ ; z – частотный спектр $F_{\langle \zeta \rangle}$

(тёмный цвет на рис. 3, a); он формирует зависимость $\langle \zeta(\tau) \rangle$ и $\sigma_\zeta(\tau)$ (рис. 3, b , v). Из рис. 3, v можно установить, что крупномасштабная огибающая колебаний повторяется через интервал $T \approx 14.286$ с частотой $\Omega \approx 0.4396$. Эта частота близка к величине $\Omega_{\text{ext}} = 0.25\Omega_1$. Фурье-спектр временной реализации $\langle \zeta(\tau) \rangle$ представлен на рис. 3, z , где компонента $F_{\langle \zeta \rangle}(\Omega_1)$ является наиболее интенсивной. В дополнение к основной спектральной компоненте также достаточно сильно выражены компоненты на комбинационных частотах $\Omega_1 \pm \Omega_{\text{ext}}$, спектральные компоненты $F_{\langle \zeta \rangle}(\Omega_2)$ и $F_{\langle \zeta \rangle}(\Omega_1 - 2\Omega_{\text{ext}})$ являются слабыми. Такой режим колебаний квантового осциллятора Матьё на комбинационных частотах обусловлен состояниями Флоке, которые генерируются периодическим во времени потенциалом U_{ext} . Как и ранее, в рассматриваемом режиме введение трения приводит к затуханию колебаний.

По мере того как амплитуда U_0 увеличивается, временные реализации $\langle \zeta(\tau) \rangle$ и их частотные спектры подвергаются некоторым преобразованиям. Если амплитуду U_0 удвоить (то есть $U_0 = 0.2$), то заметно возрастут спектральные компоненты $F_{\langle \zeta \rangle}(\Omega_1 \pm \Omega_{\text{ext}})$, амплитуды которых приблизятся к $F_{\langle \zeta \rangle}(\Omega_1)$.

2.2. Многочастотные колебания. Последующие изменения динамических свойств можно проиллюстрировать путём сравнения частотных спектров для двух значений U_0 : $U_0 = 0.5$ и $U_0 = 1$, когда $\Omega_{\text{ext}} = 0.25\Omega_1$, $k = 0$, $\mathcal{F}_0 = -0.1$ (рис. 4).

Если $U_0 = 0.5$, то наиболее мощная спектральная компонента возникает на частоте $\Omega^* < \Omega_1$; другие спектральные пики имеют место на частотах $\Omega = \Omega^* + l\Omega_{\text{ext}}$, где $l = -3, -2, -1, 1, 2$.

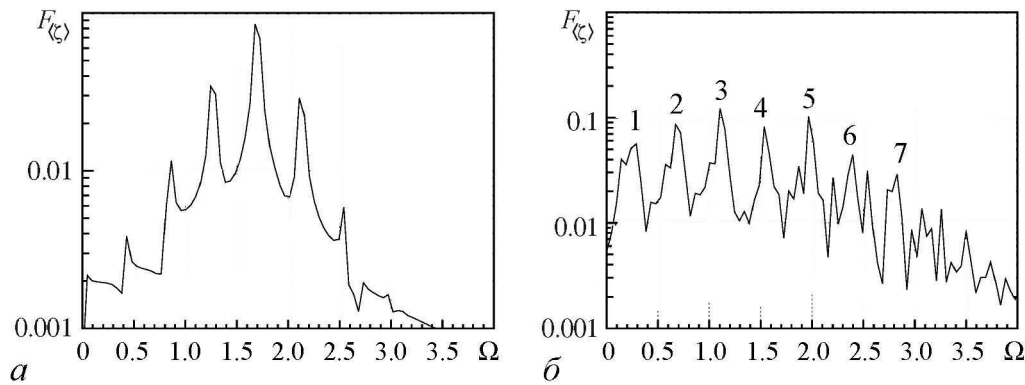


Рис. 4. Частотный отклик при различных амплитудах параметрического воздействия U_0 : $a - 0.5$, $b - 1.0$; время наблюдения $T = 200$

Если в (3) амплитуда $U_0 = 1$, аргумент $\Omega_{\text{ext}}\tau = \pi/2 + m\pi$, то при m чётных $\Omega_m = 2\zeta^2$, а при нечётных – равна нулю. В отличие от режимов с $0.1 \leq U_0 \leq 0.5$ временные реализации $\langle \zeta(\tau) \rangle$ и их частотные спектры $F_{\langle \zeta \rangle}(\Omega)$ заметно усложняются, возрастает как общее число спектральных дискретных компонент, так и число компонент на начальном участке спектра $0 \leq \Omega \leq \Omega_{\text{ext}}/3$, оказывающих влияние на общую картину функциональной зависимости $F_{\langle \zeta \rangle}(\Omega)$. Наиболее интенсивные спектральные фурье-компоненты реализуются на комбинационных частотах: $\Omega_m = \Omega_0 + m\Omega_{\text{ext}}$, $m = -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4$; на рис. 4, b они обозначены числами 1, 2, ..., 7. Более конкретные результаты приведены в табл. 2.

Таблица 2

Наиболее интенсивные компоненты $F_{\langle \zeta \rangle}(\Omega_m)$ при $U_0 = 1$

m	-2	-1	0	1	2	3	4
Ω_m	0.2397	0.6711	1.1026	1.5340	1.9654	2.3969	2.8283
$F_{\langle \zeta \rangle}(\Omega_m)$	0.0515	0.0863	0.1220	0.0816	0.1025	0.0445	0.0289

Такая картина распределения мощности по комбинационным частотам является типичной для квантовых динамических систем с периодическим временным потенциалом. Для частоты Ω_0 величина $F_{\langle \zeta \rangle}(\Omega_0)$ является максимальной. Малые частоты $\Omega_\alpha = 0.5\Omega_\beta$, $\Omega_\beta = 0.0959$, $\Omega_\gamma = \Omega_{\text{ext}}/3$ являются составными структурными элементами других частот. Временной масштаб $T_\gamma = 2\pi/\Omega_\gamma$ представляет утроение периода внешнего воздействия. Генерация колебаний с T_γ рассматривалась в классической задаче с уравнением (2) в [3]. В рассматриваемом нами квантовом аналоге имеет место группа частот с $\Omega_l = l\Omega_\gamma$, где $l = 1, 2, \dots$. Среди множества спектральных компонент $F_{\langle \zeta \rangle}(\Omega_l)$ часть из них характеризуется локальными максимумами. Другая часть с частотами Ω_l , близкими к Ω_m , не имеет локальных максимальных значений, амплитуды их не обязательно малы.

Эти вычисления были проведены для $\langle \zeta(\tau) \rangle$, $F_{\langle \zeta \rangle}(\Omega)$, когда длина временной реализации составляла $T = 200$. При увеличении её в несколько раз можно улучшить разрешение малых частот Ω на участке $0 \leq \Omega \leq \Omega_{\text{ext}}/3$. Если взять длину временной реализации $T = 800$, то возрастает число разрешённых дискретных компонент на малых частотах. Отметим роль спектральной компоненты на частоте $\Omega_\delta = 0.1198$ в формировании структуры спектра вблизи комбинационных частот, рассмотренных выше (см. табл. 2). Спектральные линии $F_{\langle \zeta \rangle}(\Omega_m)$ окружены сател-

литами с частотами $\Omega_m - \Omega_\beta$, $\Omega_m + \Omega_\delta$ и $\Omega_m \pm (\Omega_\beta + \Omega_\delta)$, причём $\Omega_\beta + \Omega_\delta = \Omega_{\text{ext}}/2$, а порядок расположения индексов β, δ отражает симметрию. В диапазоне частот $\Omega \in [0, 2.8]$ спектральные компоненты расположены на широкополосном «пьедестале». С увеличением частоты Ω амплитуды основных спектральных линий и спутников уменьшаются. В диапазоне $2.8 \leq \Omega \leq 3.8$ они становятся малыми по величине, а расстояния между ними по шкале частот соответствует малым частотам на участке $0 \leq \Omega \leq \Omega_{\text{ext}}/3$. Для параметров рассматриваемого режима с $U_0 = 1$ отношение частоты Ω_0 к $\Omega_{\text{ext}}/3$ наверняка не является рациональным числом. Фазовая траектория на плоскости $(\langle \zeta \rangle, \langle V \rangle)$ не является изолированной и замкнутой, а в большей части располагается на торе. Оставшаяся (меньшая) часть заполняет область поперёк тора. Рассматриваемые многочастотные колебания относим к квазипериодическим. Более детальный анализ в стиле работ [12–15] предполагаем провести в дальнейшем.

Если амплитуда $U_0 > 1$ в выражении для потенциала (4), то генерируются более сложные многочастотные колебания. Для этого случая: во-первых, реконструируется спектр энергий и изменяются частоты переходов, обусловленные добавкой U_0 в коэффициенте стационарного слагаемого (4); во-вторых, увеличение U_0 во временном слагаемом приведёт к дополнительному изменению частотных спектров в динамике осциллятора. Если временное слагаемое удалить в выражении для U_Σ в формуле (4), тогда можно описать свободные колебания квантового осциллятора с одночленным потенциалом четвёртой степени $(1 + U_0/2)\zeta^4$. Если $U_0 = 5$, то коэффициент в стационарном слагаемом (4) равен $7/2$, а во временном – $5/2$. Решение стационарного уравнения Шрёдингера определяет спектр энергий и частоты переходов (табл. 3). По сравнению с данными для $U = \zeta^4$ (см. табл. 1) частоты переходов смещены в сторону более высоких значений.

Таблица 3

Спектр энергий, разности между уровнями (частоты переходов) для потенциала (4), $U_0 = 5$, $\zeta_L = 3$

n	1	2	3	4	5	6	7
ε_n	1.0142	3.6343	7.1311	11.1378	15.5533	20.3138	25.3736
$\Delta\varepsilon_n$	2.6200	3.4969	4.0067	4.4161	4.7599	5.0598	5.3276

Как и раньше, осцилляторный режим возбуждался при помощи начального кратковременного импульса с $\mathcal{F}_0 = -0.1$, $\Omega_{\text{ext}} = 1.7257$. Если трение отсутствует, временная реализация $\langle \zeta(\tau) \rangle$ и частотный спектр $F_{\langle \zeta \rangle}(\Omega)$ имеют вид, как на рис. 5.

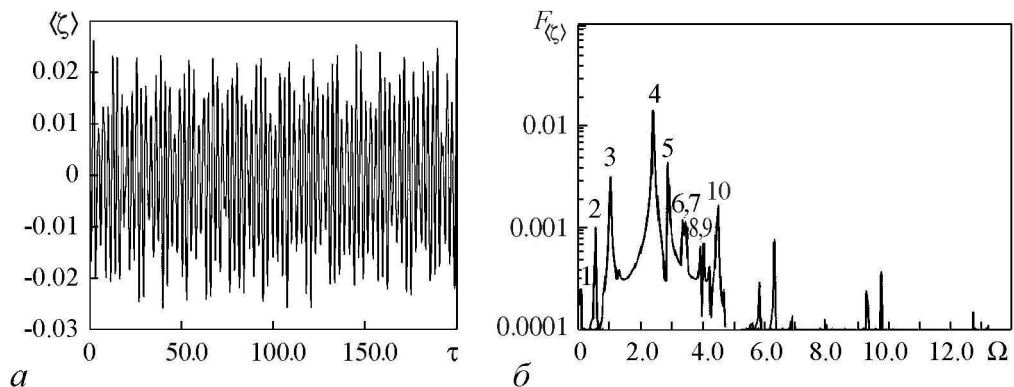


Рис. 5. Временная реализация $\langle \zeta(\tau) \rangle$ (а) и частотный спектр $F_{\langle \zeta \rangle}(\Omega)$ (б) в режиме $U_0 > 1$

Компьютерные расчёты средней координаты $\langle \zeta \rangle$ и спектральной функции $F_{\langle \zeta \rangle}(\Omega)$ были проведены на длине временной реализации $T = 200$, дополнительный контроль спектра проводился на длине $T = 2000$. Для заданной амплитуды $U_0 = 5$ частотный спектр (рис. 5, б) становится более сложным, чем в рассмотренных ранее режимах. Спектральная компонента на частоте $2\Omega_{\text{ext}}$ хорошо прослеживается. В этом режиме исследовано около 20 достаточно интенсивных спектральных компонент. Наиболее интенсивная спектральная компонента с номером 4 реализуется при $\Omega = 2.3969$, то есть при частоте меньшей, чем первая частота перехода 2.6200. Значения Ω близко распределены в интервале $[1, 4.6]$. Некоторые из них, отмеченные числами на рис. 5, б, связаны между собой простыми соотношениями. Эти соотношения линейно зависят от малого числа основных частот. Отметим, что разности $\Omega_3 - \Omega_2$, $\Omega_5 - \Omega_4$, $\Omega_6 - \Omega_5$, $\Omega_{10} - \Omega_9$ равны одному и тому же значению $\Omega_2 - \Omega_1$; $\Omega_7 - \Omega_6$ и $\Omega_9 - \Omega_8$ равны Ω_1 ; $\Omega_{10} - \Omega_8 = \Omega_2$ и $\Omega_4 - \Omega_3 = 2(\Omega_1 + \Omega_2)$. Таким образом, наблюдаются более сложные свойства сигнала, чем при $U_0 < 1$. Здесь уже частоты перехода явно не обнаруживаются. Влияние внешнего периодического потенциала (как его амплитуды, так и частоты) на динамику является определяющим.

2.3. Влияние гауссова шума на квантовый осциллятор Матъё. Динамические закономерности квантового осциллятора Матъё при одновременном воздействии регулярной кубической и случайной ланжевеновской сил проводились для режима с параметрами $U_0 = 0.1$, $\Omega_{\text{ext}} = \Omega_1/4$, $\Omega_1 = 1.7257$, $k = 0$ и $k = 0.1$. Ланжевеновская сила характеризуется дисперсией $D = 1$. Временная реализация для средней координаты дана на рис. 6, а. Она отражает сложный процесс, включающий мелкомасштабные осцилляции во времени относительно $\langle \zeta \rangle = 0$ и крупномасштабную огибающую. С одной стороны, воздействие случайной силы преобразует исходный регулярный процесс на комбинационных частотах и частотах, кратных $\Omega_{\text{ext}}/3$. С другой стороны, сложный сигнал можно рассматривать как трансформацию заданной случайной силы. Воздействие гауссова белого шума приводит к тому, что большинство спектральных компонент становится неразличимыми в шуме. Однако спектральная компонента $F_{\langle \zeta \rangle}(\Omega_1) \approx 0.3$ на частоте $\Omega_1 = 1.7257$ усиливается действием шума; кроме того, спектральные компоненты на частотах $\Omega_1 \pm \Omega_{\text{ext}}$ достаточно сильно выражены.

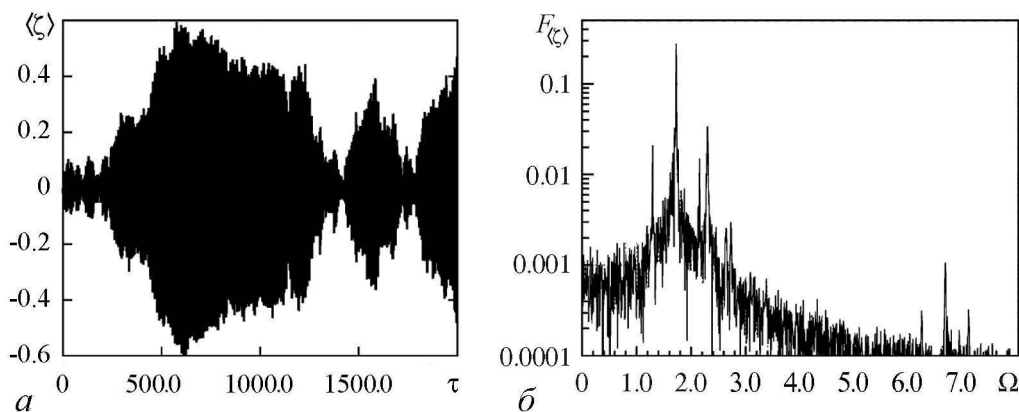


Рис. 6. Временная реализация $\langle \zeta(\tau) \rangle$ (а) и частотный спектр $F_{\langle \zeta \rangle}(\Omega)$ (б) при наличии гауссова шума ($k = 0$)

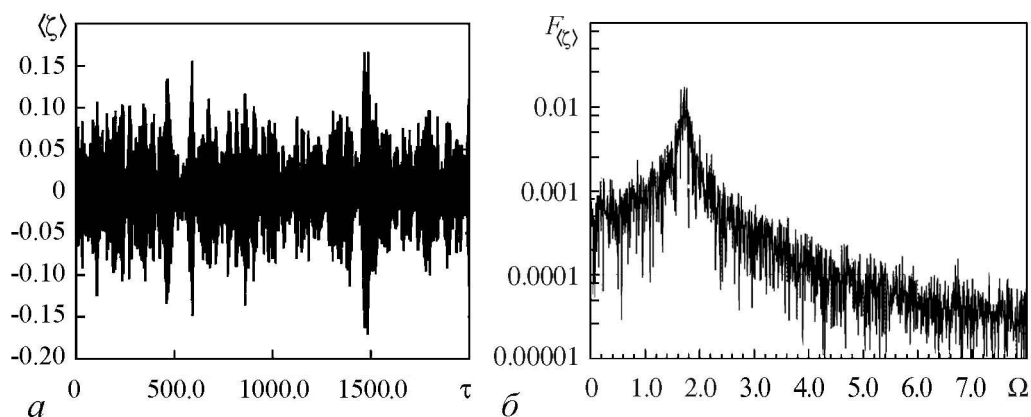


Рис. 7. Влияние трения на квантовый осциллятор Матьё (при наличии шума): a – реализация $\langle \zeta(\tau) \rangle$; b – частотный спектр

Включение силы трения (даже с относительно малым коэффициентом трения $k = 0.1$) изменяет картину временной реализации $\langle \zeta(t) \rangle$ и частотного спектра (рис. 7).

Основная спектральная компонента на частоте Ω_1 ослабевает по амплитуде почти на порядок. Спектральные компоненты на всех остальных комбинационных частотах становятся неразличимыми. Здесь мы ограничились изучением простых примеров, как ланжевеновская сила влияет на квантовый осциллятор Матьё.

Закключение

Классический параметрический осциллятор, описываемый уравнением Матьё с кубической силой, омическим трением и гауссовым шумом, обобщён на квантовую область движения. Как результат перехода, предложен квантовый осциллятор в контексте уравнения Шрёдингера–Ланжевена–Костина, названный квантовым осциллятором Матьё. Проведено численное моделирование квантовых динамических закономерностей осциллятора, включающих изучение временных реализаций средней координаты волнового пакета и их частотных спектров.

При слабой параметрической внешней силе, являющейся гармонической во времени и кубической по координате, осцилляторные режимы с комбинационными частотами отражают типичное поведение квантовой системы, обусловленные состояниями Флоке. Для этих режимов спектры частот имеют простую структуру – они состоят из нескольких основных частот и кратных гармоник частоты внешнего воздействия. Основная частота спектральной линии может совпадать с частотой перехода между осцилляторными состояниями или отличаться от неё. С увеличением амплитуды параметрического внешнего воздействия, например, при $U_0 = 1$ появляются дополнительные спектральные компоненты на субгармониках частоты внешнего воздействия. Если сила возрастает, например, до $U_0 = 5$, временные реализации для средней координаты и их частотные спектры становятся более сложными: частоты спектральных компонент подчиняются определённым соотношениям. Эти соотношения показывают, что все (или большинство) комбинационных частот зависят от

линейной комбинации первых двух частот. Трение в исследуемой квантовой системе вызывает затухание колебаний, как и для классического осциллятора Матьё с кубической силой и трением. Влияние гауссова белого шума на квантовый осциллятор Матьё моделируется для частных случаев.

Библиографический список

1. *Katz I., Retzker A., Straub R., Lifshitz R.* Signatures for a classical to quantum transition of a driven nanomechanical resonator // *Phys. Rev. Lett.* 2007. Vol. 99. P. 040404.
2. *Katz I., Lifshitz R., Retzker A., Straub R.* Classical to quantum transition of a driven nonlinear nanomechanical resonator // *New J.Phys.* 2008. Vol. 10. P. 125023.
3. *Bartuccelli M.V., Berretti A., Deane J.H.B., Gentile G., Gourley S.A.* Selection rules for periodic orbits and scaling laws for a driven damped quartic oscillator // *Nonlinear analysis: Real world applications.* Elsevier, 2008. Vol. 9. P. 1966.
4. *Kostin M.D.* On the Schrödinger–Langevin equation // *J. Chem. Phys.* 1972. Vol. 57, № 9. P. 3589.
5. *Kostin M.D.* Friction in dissipative phenomena in quantum mechanics // *J. St. Phys.* 1975. Vol. 12, № 2. P. 145–151.
6. *Doebner H.-D., Goldin G.A., Nattermann P.* Gauge transformation in quantum mechanics and the unification of nonlinear Schrödinger equations // *J. Math. Phys.* 1999. Vol. 40, № 1. P. 49–63.
7. *Ván P., Fülöp T.* Stability of stationary solutions of the Schrödinger–Langevin equation // *Phys. Lett. A.* 2004. Vol. 323. P. 374–381.
8. *Sanin A.L., Smirnovsky A.A.* Oscillatory motion in confined potential systems with dissipation in the context of the Schrödinger–Langevin–Kostin equation // *Phys. Lett. A.* 2007. Vol. 372, № 1. P. 21–27.
9. *Санин А.Л., Смирновский А.А.* Физика. Квантовая динамика. Санкт-Петербург: Изд-во Политехн. ун-та, 2012. 280 с.
10. *de Falco D., Tamascelli D.* Quantum annealing and the Schrödinger–Langevin–Kostin equation // *J. Phys. Rev. A.* 2009. Vol. 79. P. 012315.
11. *Санин А.Л., Смирновский А.А.* Квантовый ангармонический осциллятор с одночленным потенциалом, трением и внешним воздействием // *Изв. вузов. ПНД.* 2014. Т. 22, № 2. С. 103.
12. *Рабинович М.И., Трубецков Д.И.* Введение в теорию колебаний и волн. М.: Наука, 1984. 432 с.
13. *Берже П., Помо И., Видаль К.* Порядок в хаосе. М.: Мир, 1991. 368 с.
14. *Кузнецов А.П., Сатаев И.Р., Станкевич Н.В., Тюрюкина Л.В.* Физика квазипериодических колебаний. Саратов: ИЦ «Наука», 2013. 252 с.
15. *Анищенко В.С., Николаев С.М.* Синхронизация квазипериодических колебаний с двумя частотами // *Изв. вузов. ПНД.* 2008. Т. 16, № 2. С. 87.

Поступила в редакцию 17.06.2016

MATHIEU QUANTUM OSCILLATOR WITH CUBIC FORCE, FRICTION AND NOISE

*A. L. Sanin*¹, *A. A. Smirnovsky*²

¹Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University
Russia, 195251 St. Petersburg, Polytechnicheskaya, 29
E-mail: andreylsanin@yandex.ru

²Ioffe Physical-Technical Institute of the RAS
Russia, 194021 St. Petersburg, Polytechnicheskaya, 26
E-mail: smirnovskysaha@gmail.com

Mathieu quantum oscillator as a generalization of the classical one with cubic force, friction and noise has been proposed. The problem of the transition from classical to quantum behavior is of importance not only for fundamental knowledge but also for applications. As an example one can mention the oscillatory motion of low mass objects at decreasing temperature. The equation describing Mathieu quantum oscillator is Schrodinger–Lanfevin–Kostin equation with the quartic potential, logarithmic dissipative and Langevin terms. The numerical integration of this equation was performed at specified initial and boundary conditions by using the iterative finite-difference method. At weak parametric external action, one or two spectral components on transition frequencies are generated as well as components on combined frequencies caused by the Floquet states. If the parametric amplitude increases then the number of spectral components is also grown. The friction causes damping as in the classic Mathieu oscillator. Multi-frequency regime of Mathieu quantum oscillator occurs if the parametric action amplitude is equal to or exceeds unity wherein the parametric frequency is not coupled rationally with spectrum frequencies. The frequency differences of neighboring spectral components can be equal to one of two frequencies in spectrum or its combination. The Gaussian white noise changes the realizations: at small friction coefficient and moderate noise intensity, the spectral components on combined frequencies become hidden, only component on transition frequency from ground state into first excited remains noticeable. Thus, the research shows a significant dependence of the oscillations on the model parameters. Increasing the amplitude of the external action leads to complication of the spectra.

Keywords: Quantum Mathieu oscillator, cubic force, quasiperiodicity, noise excitation.

DOI:10.18500/0869-6632-2016-24-3-54-67

Paper reference: Sanin A.L., Smirnovsky A.A. Mathieu quantum oscillator with cubic force, friction and noise // *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*. 2016. Vol. 24, № 3. P. 54–67.

References

1. *Katz I., Retzker A., Straub R., Lifshitz R.* // *Phys. Rev. Lett.* 2007. Vol. 99. P. 040404.
2. *Katz I., Lifshitz R., Retzker A., Straub R.* // *New J. Phys.* 2008. Vol. 10. P. 125023.
3. *Bartuccelli M.V., Berretti A., Deane J.H.B., Gentile G., Gourley S.A.* // *Nonlinear analysis: Real world applications*. Elsevier, 2008. Vol. 9. P. 1966.
4. *Kostin M.D.J.* // *Chem. Phys.* 1972. Vol. 57, № 9. P. 3589.
5. *Kostin M.D.J.* // *St. Phys.* 1975. Vol. 12, № 2. P.145.
6. *Doebner H.-D., Goldin G.A., Nattermann P.J.* // *Math. Phys.* 1999. Vol. 40, № 1. P. 49.
7. *Ván P., Fülöp T.* // *Phys. Lett. A.* 2004. Vol. 323. P. 374.
8. *Sanin A.L., Smirnovsky A.A.* // *Phys. Lett. A.* 2007. Vol. 372, № 1. P. 21.
9. *Sanin A.L., Smirnovsky A.A.* *Physics. Quantum dynamics*. St. Petersburg: Polytechnical University Press, 2012. 280 p. (in Russian).

10. *de Falco D., Tamascelli D.J.* // Phys. Rev. A. 2009. Vol. 79. P. 012315.
11. *Sanin A.L., Smirnovsky A.A.* // Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics. 2014. Vol. 22, № 2. P. 103 (in Russian).
12. *Rabinovich M.I., Trubetskov D.I.* Introduction in the theory of oscillations and waves. Moscow: Nauka, 1984. 432 p. (in Russian).
13. *Bergé P., Pomeau Y., Vidal C.* L'ordre dans le chaos. Paris: Hermann, 1984. 353 p. (in French).
14. *Kuznetsov A.P., Sataev I.R., Stankevich N.V., Turukina L.V.* Physics of quasiperiodic oscillations. Saratov: Nauka, 2013. 252 p. (in Russian).
15. *Anischenko V.S., Nikolaev S.M.* // Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics. 2008. Vol. 16, № 2. P. 87 (in Russian).



Санин Андрей Леонардович – родился в Ленинграде (1935). Окончил Ленинградский политехнический институт (1963) (инженер-физик). В настоящее время работает на кафедре «Теоретическая физика» Санкт-Петербургского политехнического университета Петра Великого, доктор физико-математических наук, профессор кафедры. Область научных интересов: динамика квантовых осцилляторных систем с нелинейным классическим пределом, шредингеровско-ланжевеновский формализм, фундаментальное образование. Автор более 200 научных публикаций и нескольких монографий.

Россия, 195251 С.-Петербург, Политехническая, 29
 Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого
 E-mail: andreylsanin@yandex.ru



Смирновский Александр Андреевич – родился в Ленинграде (1982). Окончил магистратуру Санкт-Петербургского государственного политехнического университета (2005) по направлению «Прикладные математика и физика», кандидат физико-математических наук. В настоящее время работает научным сотрудником в Физико-техническом институте им. А.Ф. Иоффе РАН и доцентом в Санкт-Петербургском политехническом университете Петра Великого. Область научных интересов: квантовая механика, гидроаэродинамика, численное моделирование. Опубликовал более 20 статей.

Россия, 194021 С.-Петербург, Политехническая, 26
 Физико-технический институт им. А.Ф. Иоффе РАН
 E-mail: smirnovskysaha@gmail.com



АТТРАКТОР ТИПА ЛОРЕНЦА В ЭЛЕКТРОННОМ ПАРАМЕТРИЧЕСКОМ ГЕНЕРАТОРЕ И ЕГО ТРАНСФОРМАЦИЯ ПРИ НАРУШЕНИИ ТОЧНЫХ УСЛОВИЙ ПАРАМЕТРИЧЕСКОГО РЕЗОНАНСА

С. П. Кузнецов

Удмуртский государственный университет
Россия, 426034 Ижевск, Университетская, 1

Национальный исследовательский Саратовский государственный университет
Россия, 410012 Саратов, Астраханская, 83

Институт радиотехники и электроники им. В.А. Котельникова РАН, Саратовский филиал
Россия, 410019 Саратов, Зеленая, 38

e-mail: spkuz@yandex.ru

В работе рассматривается параметрический генератор, схема которого содержит три колебательных контура и квадратичный нелинейный реактивный элемент на основе операционного усилителя и аналогового умножителя, получены уравнения для амплитуд взаимодействующих мод.

Обращение к данной задаче имеет целью реализовать механизм параметрического взаимодействия колебательных мод, приводящий к возникновению странного аттрактора типа Лоренца, без искажений вносимых нелинейностями порядка три и выше, отвечающих за переход от квазигиперболического аттрактора к квазиаттрактору.

Исследование основано на сочетании схемотехнического моделирования с использованием программного продукта Multisim и численного решения сформулированных уравнений динамики системы в исходной форме и в виде редуцированных уравнений для медленно меняющихся комплексных амплитуд.

Предложенная схема является новой и впервые позволяет в чистом виде наблюдать в радиотехническом устройстве распадный механизм генерации хаоса, описанный в свое время Пиковским, Рабиновичем и Трахтенгерцем применительно к параметрическому взаимодействию волн в магнитоактивной плазме.

Помимо демонстрации аттрактора типа Лоренца и характерных для него особенностей динамики в рамках схемотехнического моделирования и на основе численного решения уравнений в условиях точного выполнения условий параметрического резонанса, проведено исследование трансформации аттрактора при введении отстройки частот и представлена соответствующая карта режимов на плоскости параметров.

Показано, что при отклонении по частотам от точного параметрического резонанса вместо квазигиперболического аттрактора типа Лоренца реализуются аттракторы, хотя и обладающие с ним внешним сходством, но отличающиеся отсутствием робастности – при вариации параметров возможно разрушение хаоса с возникновением регулярных режимов.

Ключевые слова: Параметрический генератор, аттрактор Лоренца, аналоговое моделирование.

DOI:10.18500/0869-6632-2016-24-3-68-87

Ссылка на статью: Кузнецов С.П. Аттрактор типа Лоренца в электронном параметрическом генераторе и его трансформация при нарушении точных условий параметрического резонанса // Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2016. Т. 24, № 3. С. 68–87.

Введение

При параметрическом возбуждении двух мод посредством накачки на суммарной частоте и отборе энергии третьей модой на разностной частоте возможна хаотическая динамика, рассмотренная в свое время применительно к взаимодействию волн в магнитоактивной плазме Пиковским, Рабиновичем и Трахтенгерцем [1]. Полагая нелинейность квадратичной, авторы сформулировали систему амплитудных уравнений, которая в случае фиксированного соотношения фаз сводилась к системе трех дифференциальных уравнений первого порядка с аттрактором типа Лоренца. Такой же механизм генерации хаоса может реализоваться при параметрическом взаимодействии волновых или колебательных мод в системах различной физической природы, например, механических, радиотехнических, оптических, акустических [2–5].

Аттрактор Лоренца – известный пример странного хаотического аттрактора [6–8], изначально обнаруженный в модельной системе трех дифференциальных уравнений первого порядка для задачи о конвекции жидкости в подогреваемом снизу слое. Он относится к классу сингулярно гиперболических (квазигиперболических) аттракторов [9,10] и отвечает грубому (робастному) хаосу [11,12] в том смысле, что хаос не разрушается при малом смещении по параметрам¹. За время после публикации статьи Лоренца стало ясно, что этот тип аттрактора имеет отношение к описанию многих систем различной природы, включая динамику лазера [13–15], задачи о механических системах на основе вращающегося твердого тела [16–19] и другие [20–24].

Во многих случаях интересны также более общие ситуации, когда при рассмотрении динамического поведения систем модель Лоренца привлекается как объект для сравнения. Например, речь может идти об уравнениях в комплексных переменных, полученных в работе [1] или иных версиях уравнений [25–27].

Ряд аспектов динамики модели Пиковского–Рабиновича–Трахтенгерца анализировался позднее другими авторами. В частности, рассмотрена динамика, сопровождающаяся нарушением захвата фаз [28], проведено сопоставление модели с 10-мерной системой для задачи о взаимодействии волн в плазме [29], предпринят математический анализ глобальной динамики [30]. В работе [31] был рассмотрен радиотехнический параметрический генератор хаоса на основе трех колебательных контуров, функционирование которого обусловлено механизмом распадного ограничения неустойчивости, где параметрическое возбуждение и взаимодействие мод обеспечивалось присутствием варакторного диода. Было обнаружено, что при аккуратном описании нелинейности диода уравнения для медленных амплитуд получаются принципиально комплексными, так что динамика фаз возбуждающихся колебательных мод оказывается существенной, а аттрактор перестает быть квазигиперболическим. Это выражается, в частности, в появлении в пространстве параметров областей регулярности, где динамика периодическая, то есть вместо хаотического аттрактора реализуются предельные циклы.

¹Аттрактор Лоренца, однако, не является структурно устойчивым в том смысле, что для него не имеет места эквивалентность топологического устройства при смещении по параметрам, свойственная равномерно гиперболическим аттракторам, таким как соленоид Смейла–Вильямса и аттрактор Плыкина [10, 33].

В настоящей работе анализируется схема трехконтурного параметрического генератора, аналогичного [31], но использующего специально сконструированный реактивный нелинейный элемент на основе операционного усилителя и аналогового умножителя с характеристикой, практически точно даваемой квадратичной функцией. Благодаря этому, теоретическое описание схемы оказывается намного проще, чем для устройства с варакторным диодом, и в ней удается в чистом виде реализовать динамику модели Пиковского–Рабиновича–Трахтенгерца, где при выполнении условий параметрического резонанса реализуется аттрактор типа Лоренца. В то же время, при нарушении точного соотношения частот обнаруживается ситуация, аналогичная отмеченной в [31]. А именно, динамика фаз становится существенной, аттрактор перестает быть квазигиперболическим, а в пространстве параметров наряду с хаосом появляются области регулярной динамики.

1. Схема параметрического генератора и основные уравнения

Рассмотрим схему на рис. 1, а, составленную из трех колебательных контуров L_1-C_1 , L_2-C_2 и L_3-C_3 . Параметрическое возбуждение обеспечивается присутствием источника переменного напряжения накачки V_1 и нелинейного реактивного квадратичного элемента \tilde{C} .

Схема нелинейного элемента показана отдельно на рис. 1, б. При подаче напряжения U на вход этого элемента потенциал U относительно земли имеет место на обеих входных клеммах операционного усилителя ОА. Поскольку входное сопротивление операционного усилителя в идеале бесконечно, наличие тока U/R через резистор R , имеющий заземленный отвод, подразумевает наличие такого же тока

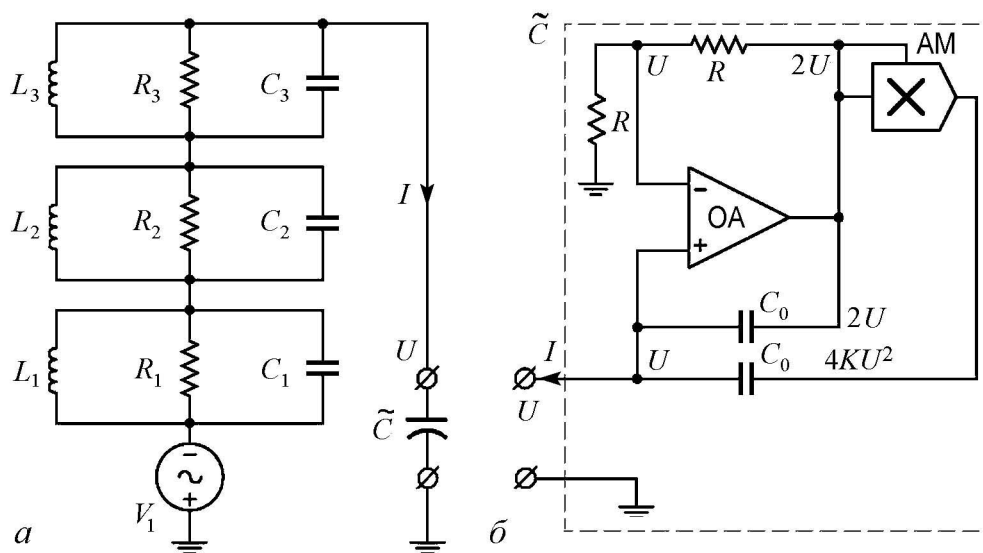


Рис. 1. Схема параметрического генератора хаоса (а). Накачка осуществляется источником напряжения V_1 . Символом \tilde{C} обозначен реактивный элемент – двухполюсник с квадратичной нелинейностью, схема которого представлена отдельно, на панели (б)

через соединенный с ним второй резистор R , поэтому напряжение на входе аналогового умножителя АМ обязано быть равным $2U$. Следовательно, на его выходе имеем напряжение $4KU^2$. Токи, протекающие через один и другой конденсаторы C_0 , составляют $C_0(dU/dt)$ и $(d/dt)(4KU^2 - C_0U)$, давая в сумме ток через нелинейный элемент \tilde{C} .

Собственные частоты колебательных контуров без учета диссипации полагаем удовлетворяющими, по крайней мере приближенно, условиям параметрического резонанса

$$\Omega_0 \approx \Omega_1 + \Omega_2, \quad \Omega_3 \approx \Omega_1 - \Omega_2. \quad (1)$$

На рис. 2 представлены графики реализаций напряжения на конденсаторах C_1, C_2, C_3 , полученные с помощью виртуального осциллографа при моделировании схемы в среде Multisim с номиналами компонентов, указанными в подписи к рисунку. После переходного процесса возникает режим нелинейных колебаний. В приведенном масштабе неразличимо высокочастотное заполнение, но хорошо видна нерегулярная, очевидно, хаотическая, динамика амплитуд.

В рамках схмотехнического моделирования в среде Multisim затруднительно выявить некоторые существенные особенности динамики, включая ожидаемое присутствие аттрактора типа Лоренца, и определить такие характеристики, как показатели Ляпунова, поэтому в следующих разделах рассматриваются уравнения, описывающие систему, и анализируются результаты их численного решения.

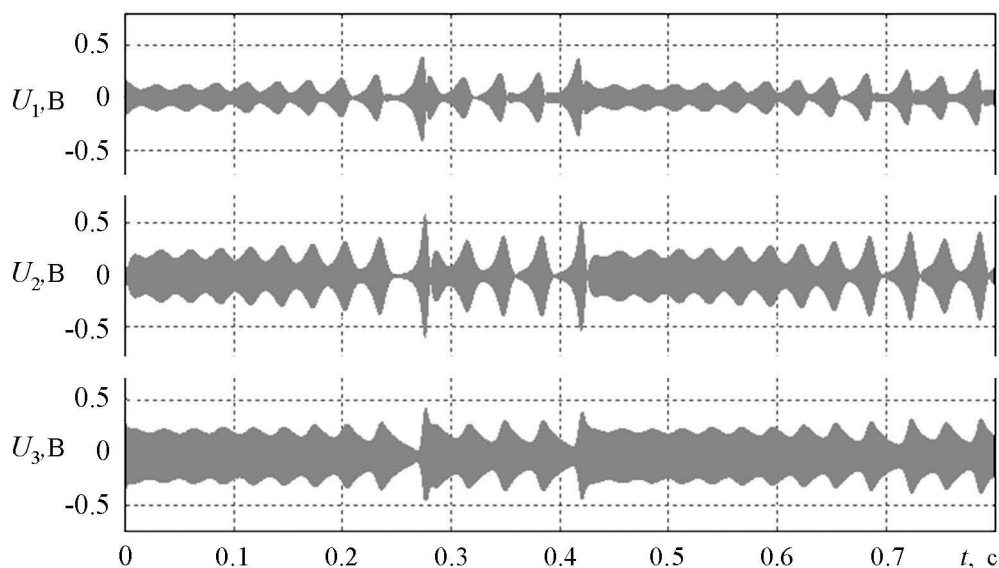


Рис. 2. Типичный вид временных зависимостей напряжений на конденсаторах C_1, C_2, C_3 при моделировании схемы на рис. 1 в среде Multisim с номиналами компонентов: $C_1 = C_2 = C_3 = 40$ нФ, $L_1 = 1.583$ мГн, $L_2 = 4.398$ мГн, $L_3 = 9.895$ мГн, $R_1 = 250$ кОм, $R_2 = 62.5$ кОм, $R_3 = 250$ кОм. Собственные частоты колебательных контуров, кГц: $f_1 = 200$, $f_2 = 120$, $f_3 = 80$. Накачка осуществляется источником напряжения V_1 с амплитудой 0.245 В на частоте $f_0 = 325$ кГц. Конденсаторы в схеме реактивного нелинейного элемента имеют емкость $C_0 = 2$ нФ, коэффициент передачи умножителя АМ составляет $K = 1/8$ В $^{-1}$

2. Основные уравнения параметрического генератора

Пусть U_1, U_2, U_3 – напряжения на конденсаторах C_1, C_2, C_3 , а I_1, I_2, I_3 – токи через катушки индуктивности L_1, L_2, L_3 . Приняв для простоты равенство емкостей $C = C_1 = C_2 = C_3$, запишем уравнения Кирхгофа в виде

$$\begin{aligned} L_1 \dot{I}_1 &= U_1, \\ L_2 \dot{I}_2 &= U_2, \\ L_3 \dot{I}_3 &= U_3, \\ C \dot{U}_1 + U_1/R_1 + I_1 &= -I, \\ C \dot{U}_2 + U_2/R_2 + I_2 &= -I, \\ C \dot{U}_3 + U_3/R_3 + I_3 &= -I. \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь I – ток через нелинейный элемент, определяемый выражением

$$I = \frac{d}{dt} 4KC_0 U^2 = \varepsilon \frac{d U^2}{dt}, \quad (3)$$

где

$$\varepsilon = 8KC_0/C, \quad U = U_1 + U_2 + U_3 + U_0, \quad U_0 = -\kappa \sin \omega_0 t, \quad (4)$$

и величины κ и ω_0 задают амплитуду и частоту сигнала накачки. Если ввести нормированное безразмерное время $t' = t/(2R_3C)$, то уравнения переписутся в виде

$$\ddot{X}_k + 2\nu_k \dot{X}_k + \Omega_k^2 X_k = 0, \quad X_k = U_k + \frac{1}{2} \varepsilon U^2, \quad k = 1, 2, 3, \quad (5)$$

где

$$\nu_{1,2} = \frac{R_3}{R_{1,2}}, \quad \nu_3 = 1, \quad \Omega_{1,2,3} = 2R_3 \sqrt{\frac{C}{L_{1,2,3}}}. \quad (6)$$

Для численного решения удобно переформулировать задачу, представив ее системой уравнений первого порядка

$$\begin{aligned} \dot{Y}_k &= -\Omega_k (X_k - \frac{1}{2} \varepsilon U^2), \quad \dot{X}_k = \Omega_k Y_k - 2\nu_k, \quad k = 1, 2, 3, \\ U &= \frac{-1 + \sqrt{6\varepsilon(X_1 + X_2 + X_3 - \kappa \sin \Omega_0 t') + 1}}{3\varepsilon}, \quad U_i = X_k - \frac{1}{2} \varepsilon U^2. \end{aligned} \quad (7)$$

На рис. 3 показаны временные зависимости величин U_1, U_2, U_3 , полученные при численном решении уравнений (7) с указанными в подписи к рис. 2 номиналами компонентов. Сравнивая графики на рис. 2 и рис. 3, можно видеть хорошее соответствие наблюдаемой динамики. В обоих случаях имеем хаотические по виду реализации, содержащие похожие по форме фрагменты сигналов, и соответствие по характерным масштабам времен и напряжений. (Точного совпадения зависимостей ожидать не приходится из-за присущей хаосу чувствительности динамики к малым возмущениям начальных условий.)

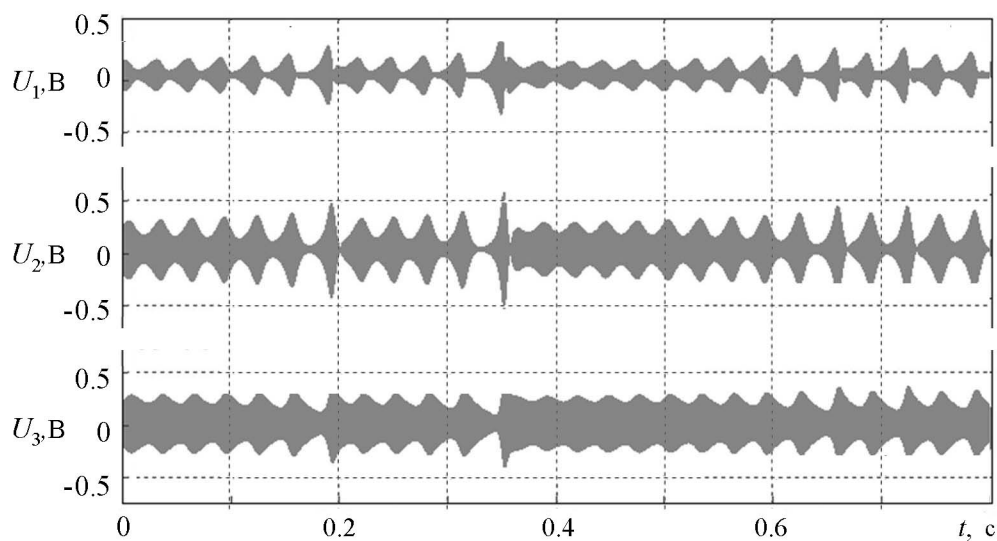


Рис. 3. Типичный вид временных зависимостей напряжений на конденсаторах C_1, C_2, C_3 , полученных при численном решении уравнений (7) для схемы на рис. 1 с номиналами компонентов, указанными в подписи к рис. 2

3. Уравнения для медленных амплитуд

Для получения уравнений в форме, допускающей сравнение с моделями Лоренца и Пиковского–Рабиновича–Трахтенгерца, необходимо привлечь метод медленных комплексных амплитуд. Предварительно имеет смысл переписать уравнения еще раз, учитывая только те члены, которые при предполагаемом соотношении частот (1) могут вносить вклад в резонансные взаимодействия мод. В первом, втором и третьем уравнениях (5) положим, соответственно,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}U^2 &\approx U_0U_2 + U_2U_3, \\ \frac{1}{2}U^2 &\approx U_0U_1 + U_1U_3, \\ \frac{1}{2}U^2 &\approx U_1U_2. \end{aligned} \quad (8)$$

Кроме того, заменим операцию взятия второй производной в правых частях уравнений множителем $(-\Omega_k^2)$. В результате имеем

$$\begin{aligned} \ddot{U}_1 + 2\nu_1\dot{U}_1 + \Omega_1^2U_1 &= \varepsilon \Omega_1^2(U_0U_2 + U_2U_3), \\ \ddot{U}_2 + 2\nu_2\dot{U}_2 + \Omega_2^2U_2 &= \varepsilon \Omega_2^2(U_0U_1 + U_1U_3), \\ \ddot{U}_3 + 2\nu_3\dot{U}_3 + \Omega_3^2U_3 &= \varepsilon \Omega_3^2U_1U_2. \end{aligned} \quad (9)$$

Опуская для краткости здесь и далее штрихи у временной переменной, будем искать

решение в виде

$$\begin{aligned} U_1 &= A_1 e^{i\omega_1 t} + A_1^* e^{-i\omega_1 t}, & \dot{U}_1 &= i\omega_1 A_1 e^{i\omega_1 t} - i\omega_1 A_1^* e^{-i\omega_1 t}, \\ U_2 &= A_2 e^{i\omega_2 t} + A_2^* e^{-i\omega_2 t}, & \dot{U}_2 &= i\omega_2 A_2 e^{i\omega_2 t} - i\omega_2 A_2^* e^{-i\omega_2 t}, \\ U_3 &= -iA_3 e^{i\omega_3 t} + iA_3^* e^{-i\omega_3 t}, & \dot{U}_3 &= \omega_3 A_3 e^{i\omega_3 t} + \omega_3 A_3^* e^{-i\omega_3 t}, \end{aligned} \quad (10)$$

где опорные частоты $\omega_{1,2,3}$ определены соотношениями

$$\omega_1 = \frac{\Omega_1 - \Omega_2 + \Omega_0}{2}, \quad \omega_2 = \frac{-\Omega_1 + \Omega_2 + \Omega_0}{2}, \quad \omega_3 = \Omega_1 - \Omega_2. \quad (11)$$

Будучи близкими к величинам $\Omega_{1,2,3}$, они удовлетворяют условиям параметрического резонанса не приближенно, а точно:

$$\omega_3 = \omega_1 - \omega_2, \quad \Omega_0 = \omega_1 + \omega_2. \quad (12)$$

Использование формул (10) подразумевает выполнение дополнительных условий на введенные амплитудные переменные

$$\dot{A}_1 e^{i\omega_1 t} + \dot{A}_1^* e^{-i\omega_1 t} = 0, \quad \dot{A}_2 e^{i\omega_2 t} + \dot{A}_2^* e^{-i\omega_2 t} = 0, \quad \dot{A}_3 e^{i\omega_3 t} - \dot{A}_3^* e^{-i\omega_3 t} = 0. \quad (13)$$

Кроме того, согласно (4), имеем

$$U_0 = -\kappa \sin \Omega_0 t = \frac{1}{2} i\kappa e^{i\Omega_0 t} - \frac{1}{2} i\kappa e^{-i\Omega_0 t}. \quad (14)$$

Подстановка (10) в уравнения (9) дает²

$$\begin{aligned} \dot{A}_1 + \nu_1 A_1 - i\Delta A_1 &= \frac{1}{2} \varepsilon \Omega_1 \left(\frac{1}{2} \kappa A_2^* - A_2 A_3 \right), \\ \dot{A}_2 + \nu_2 A_2 - i\Delta A_2 &= \frac{1}{2} \varepsilon \Omega_2 \left(\frac{1}{2} \kappa A_1^* + A_1 A_3^* \right), \\ \dot{A}_3 + A_3 - i\delta A_3 &= \frac{1}{2} \varepsilon \Omega_3 A_1 A_2^*, \end{aligned} \quad (15)$$

где

$$\Delta \approx \Omega_1 - \omega_1 = \Omega_2 - \omega_2 = \frac{\Omega_1 + \Omega_2 - \Omega_0}{2}, \quad \delta \approx \Omega_3 - \omega_3 = \Omega_3 - \Omega_1 + \Omega_2.$$

Выполнив перенормировку

$$A_1 = \frac{2}{\varepsilon \sqrt{\Omega_2 \Omega_3}} a_1, \quad A_2 = \frac{2}{\varepsilon \sqrt{\Omega_3 \Omega_1}} a_2, \quad A_3 = \frac{2}{\varepsilon \sqrt{\Omega_1 \Omega_2}} a_3, \quad h = \frac{\varepsilon \kappa \sqrt{\Omega_1 \Omega_2}}{4}, \quad (16)$$

получаем уравнения, соответствующие работе [1]:

$$\dot{a}_1 + \nu_1 a_1 - i\Delta a_1 = h a_2^* - a_2 a_3, \quad \dot{a}_2 + \nu_2 a_2 - i\Delta a_2 = h a_1^* + a_1 a_3^*, \quad \dot{a}_3 + a_3 - i\delta a_3 = a_1 a_2^*. \quad (17)$$

Присутствующий здесь параметр κ управляется в исходной системе заданием амплитуды накачки, величину Δ можно регулировать, варьируя частоту накачки, а параметр δ – посредством изменения индуктивности L_3 .

²Отличие параметров $\Omega_{1,2,3}$ от величин $\omega_{1,2,3}$ мало, и учет его принципиален только в тех членах в уравнениях, которые отвечают за фазы колебаний; в амплитудных коэффициентах их можно считать совпадающими, как это и сделано при записи (2).

4. Случай точного параметрического резонанса: аттрактор типа Лоренца

При отсутствии расстройки, $\Delta = 0$, $\delta = 0$, с использованием подстановки

$$a_1 = xe^{i\varphi}, \quad a_2 = ye^{-i\varphi}, \quad a_3 = ze^{2i\varphi} \quad (18)$$

в предположении $\varphi = \text{const}$ приходим к уравнениям, которые можно рассматривать в области действительных переменных

$$\dot{x} = hy - v_1x - yz, \quad \dot{y} = hx - v_2y + xz, \quad \dot{z} = -z + xy. \quad (19)$$

Согласно [1], модель (19) имеет аттрактор типа Лоренца в трехмерном фазовом пространстве переменных x, y, z , что, в частности, справедливо в случае $v_1 = 1$, $v_2 = 4$, $h = 5.962$. На рис. 4 показан портрет аттрактора, построенный по результатам численного решения уравнений (19). Также приводится график отображения, полученный в соответствии с процедурой, примененной в работе Лоренца: по осям координат отложены значения максимумов переменной z , достигаемых последовательно по ходу временной эволюции системы. Вид графика с острым максимумом, напоминающий классическое отображение «зуб пилы» [6–8,1], свидетельствует, что аттрактор квазигиперболический, как и классический аттрактор Лоренца.

Расчет показателей Ляпунова путем совместного численного решения уравнений (19) и соответствующих уравнений в вариациях на основе известного алгоритма с ортогонализацией векторов возмущения по Граму–Шмидту [35,8] дает³

$$\lambda_1 = 0.394 \pm 0.001, \quad \lambda_2 = 0.0000 \pm 0.0001, \quad \lambda_3 = -6.394 \pm 0.001. \quad (20)$$

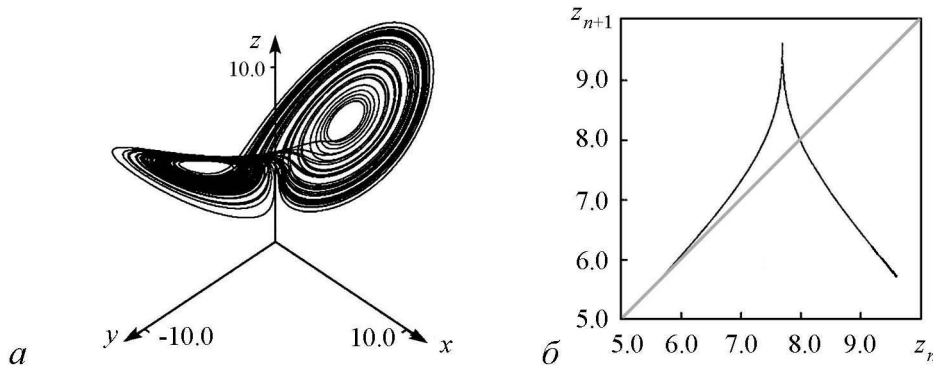


Рис. 4. Портрет аттрактора в трехмерном пространстве состояний системы (19) (а) и отображение для последовательных максимумов переменной z в процессе временной эволюции (б) с параметрами $v_1 = 1$, $v_2 = 4$, $h = 5.962$

³Вычисления показателей Ляпунова проводились на интервалах нормированного времени длительности 50000 с подсчетом среднего значения и среднеквадратичного отклонения по 20 реализациям. В качестве погрешности указывается оценка среднеквадратичного отклонения.

Присутствие положительного показателя говорит о наличии хаоса, характеризуемого экспоненциальным ростом отклонения от опорной траектории на аттракторе при малом возмущении начальных условий. Второй показатель, равный нулю с точностью до ошибки вычисления, ассоциируется с возмущением типа сдвига вдоль траектории. Третий показатель отрицательный и отвечает за приближение траекторий к аттрактору. Тот факт, что сумма показателей отрицательна, свидетельствует о сжатии фазового объема в трехмерном фазовом пространстве. Она согласуется с аналитическим вычислением дивергенции векторного поля, заданного правыми частями уравнений (19): $\operatorname{div} \mathbf{F} = \partial_x f_x + \partial_y f_y + \partial_z f_z = -v_1 - v_2 - 1 = -6$. Оценка размерности аттрактора по известной формуле Каплана-Йорке дает $D = 2 + \lambda_1/|\lambda_3| \approx 2.06$.

На рис. 4 приводится зависимость трех показателей Ляпунова модели (19) от параметра h . Плавный характер зависимости и отсутствие на графике старшего показателя провалов (окон регулярности) свидетельствует о робастности хаоса в трехмерной системе (19) и соответствует заключению о квазигиперболической природе аттрактора, сделанному на основе графика отображения на рис. 4, б.

Интересно сравнить показатели Ляпунова, вычисленные при одних и тех же параметрах $v_1 = 1$, $v_2 = 4$, $h = 5.962$ для уравнений с действительными и с комплексными амплитудами. Для системы (17) при $\Delta = 0$, $\delta = 0$ имеем

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= 0.394 \pm 0.001, & \lambda_2 &= 0.0000 \pm 0.0002, & \lambda_3 &= 0.0000 \pm 0.0003, \\ \lambda_4 &= -0.618 \pm 0.05, & \lambda_5 &= -5.381 \pm 0.05, & \lambda_6 &= -6.394 \pm 0.003. \end{aligned} \quad (21)$$

В списке присутствует два нулевых показателя, один из которых связан с возмущением сдвига вдоль траектории, а второй – со сдвигом по фазовой переменной φ (см. (18)). Показатели $\lambda_{1,2,6}$ находятся в хорошем соответствии с показателями $\lambda_{1,2,3}$ из списка (20). Дополнительные показатели $\lambda_{4,5}$ отвечают, очевидно, за релаксацию фаз к ситуации, описываемой уравнениями для действительных амплитуд. На рис. 5 приводится зависимость от параметра h шести показателей Ляпунова модели (17), три из которых неотличимы от показателей модели (19).

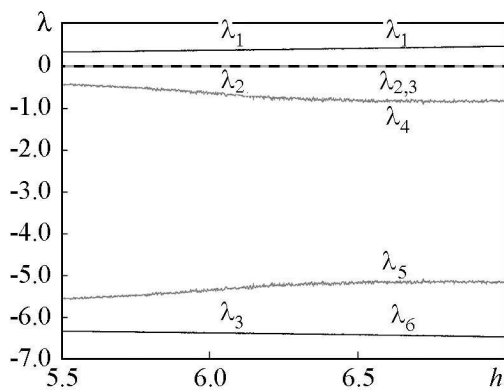


Рис. 5. Зависимость от параметра h показателей Ляпунова модели (19), помеченных как λ_{1-3} в левой части рисунка, и показателей модели (17) для $\Delta = 0$, $\delta = 0$, помеченных как λ_{1-6} в правой части рисунка. Остальные параметры: $v_1 = 1$, $v_2 = 4$

Если говорить о системе без редукиции к медленным амплитудам (26) и о модели с комплексными амплитудами (17), то безоговорочно переносить на них вывод о грубости (робастности) аттрактора Лоренца трехмерной модели (19) некорректно. Формальным признаком, указывающим на возможное нарушение грубости в этом смысле, служит наличие у комплексной системы (17) дополнительного нулевого показателя Ляпунова. В частности, введение отстройки частот приводит к нарушению фазовых соотношений (18) и к изменению природы аттрактора.

5. Хаотическая и регулярная динамика параметрического генератора при наличии отстройки частот

Перейдем к ситуации, когда условия параметрического резонанса выполнены неточно, и нужно учитывать отстройку частоты накачки от суммы, а частоты третьего колебательного контура от разности частот первого и второго контуров. Это отвечает отличным от нуля параметрам Δ , δ в комплексных амплитудных уравнениях (17), которые к трехмерной системе для действительных амплитуд теперь не сводятся.

В данной ситуации возникает проблема представления портретов аттракторов в виде, допускающем наглядное сравнение с аттрактором Лоренца. Будем исходить из того, что приблизительное соответствие мгновенной фазы комплексных переменных a_1 и a_2 формулам (18) по большей части сохраняется, хотя постоянной во времени величина φ теперь, вообще говоря, не будет. Для графического представления естественно использовать переменные $x = \operatorname{Re} a_1 e^{-i\varphi}$, $y = \operatorname{Re} a_2 e^{i\varphi}$, где φ выбирается каждый раз при выводе точки на график так, чтобы минимизировать величину $(\operatorname{Im} a_1 e^{-i\varphi})^2 + (\operatorname{Im} a_2 e^{i\varphi})^2$. В качестве третьей переменной используем $z = |a_3|$.

Заметим, что такой же метод можно использовать для обработки данных численного решения исходных уравнений Кирхгофа (7), если пересчитать вектор, определенный напряжениями $\mathbf{U} = (U_1, U_2, U_3)^T$, к комплексным амплитудам:

$$a_{1,2,3} = 1/2 (U_{1,2,3} - i\omega_{1,2,3}^{-1} \dot{U}_{1,2,3}). \quad (22)$$

На рис. 6, *a* показан портрет аттрактора, построенный по результатам численного решения уравнений (17) в режиме, реализующемся при небольшом сдвиге частоты накачки от точного условия параметрического резонанса для $h = 5.962$, $\nu_1 = 1$, $\nu_2 = 4$, $\Delta = 0.3$, $\delta = 0$. (В исходной системе это соответствует накачке на частоте 32001.2 Гц при амплитуде 62.25 мВ и задании сопротивлений $R_1 = 1$ МОм, $R_2 = 250$ кОм, $R_3 = 1$ МОм; остальные номиналы соответствуют подписи к рис. 2.) Аттрактор выглядит похожим на аттрактор типа Лоренца: он имеет два «крыла»,

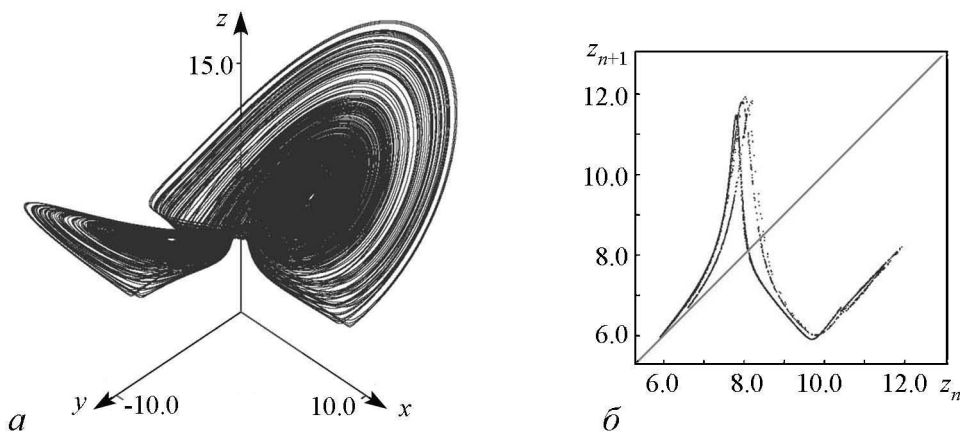


Рис. 6. Трехмерный портрет аттрактора, построенный с использованием описанной в тексте методики (*a*), и отображение для последовательных максимумов переменной $z = |a_3|$ для системы (17) при $h = 5.962$, $\nu_1 = 1$, $\nu_2 = 4$, $\Delta = 0.3$, $\delta = 0$

на каждом из которых траектории раскручиваются по спирали от центральной пустой области, с переходами с одного крыла на другое, причем совершаемое число оборотов меняется раз от разу хаотически.

На рис. 6, б приведен график отображения, где по осям координат отложены максимумы переменной $z = |A_3|$, достигаемые по ходу временной эволюции системы. Вид его существенно отличается от отображения, отвечающего аттрактору типа Лоренца на рис. 4. Во-первых, график выглядит составленным не из одной кривой, а из набора линий, то есть поперечная фрактальная структура выражена намного сильнее, чем у аттрактора типа Лоренца, где она визуально вообще неразличима. Во-вторых, у представляющих отображение кривых вместо острия на вершине наблюдаются квадратичные максимумы. В связи с этим, в данном случае не приходится говорить о робастном квазигиперболическом аттракторе. Скорее, свойства хаотической динамики должны быть сходными с ситуациями типа аттракторов в отображении Эно [36] и модели Рёсслера [37], которые в математических работах интерпретируются в рамках представлений о квазиаттракторе [38, 39].

На рис. 7 показаны зависимости шести показателей Ляпунова модели (17) от параметров отстройки частот Δ и δ . Отметим симметрию одного и другого графика на рис. 7, обусловленную тем, что уравнения переходят в себя при применении операции комплексного сопряжения с изменением знака параметров Δ и δ .

В отличие от случая точного резонанса, на графике старшего показателя Ляпунова можно видеть провалы (окна регулярности), которые сопровождаются также выбросами или провалами на графиках остальных показателей. Как можно убедиться, проведя численное интегрирование уравнений, этим окнам соответствует появление притягивающих предельных циклов в фазовом пространстве системы (17), то есть вместо хаоса здесь реализуются режимы периодических колебаний амплитудных переменных. Именно такой вид графиков показателей Ляпунова в зависимости от параметра характерен для одномерных отображений с квадратичным экстремумом и многих других диссипативных систем, включая отображение Эно и модель Рёсслера, которые ассоциируются с концепцией квазиаттрактора [36–39].

Обратимся к построению карты динамических режимов на плоскости параметров Δ , δ . Процедура состоит в сканировании путем перебора узлов сетки с некоторым шагом по двум параметрам. В каждой точке выполняется порядка 10^3 ите-

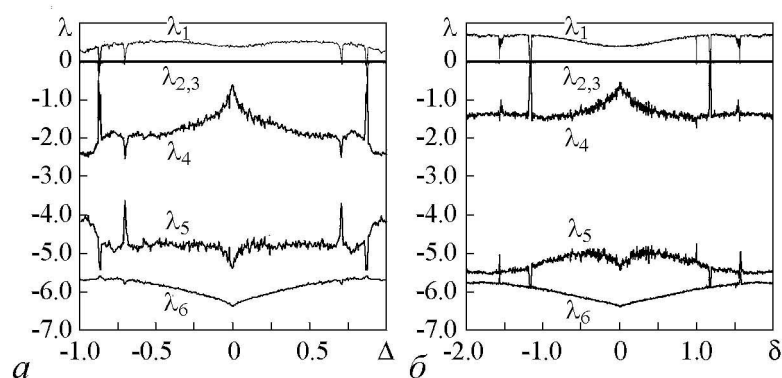


Рис. 7. Зависимость показателей Ляпунова модели (17) от параметра Δ при $\delta = 0$ и от параметра δ при $\Delta = 0$. Остальные параметры: $\nu_1 = 1$, $\nu_2 = 4$

раций отображения Пуанкаре, определенного для системы (17) с помощью секущей поверхности в фазовом пространстве $S = |a_3| - h + \sqrt{v_1 v_2} = 0$ (с проходом в направлении убывания S). По результатам последних шагов итераций проводится анализ присутствия или отсутствия периода повторения состояний в сечении Пуанкаре от 1 до 14 с некоторым заданным изначально уровнем допустимой погрешности. При обнаружении периодичности соответствующий пиксель на диаграмме обозначается некоторым тоном серого цвета, определяемым периодом повторения состояний, и производится переход к анализу следующей точки на плоскости параметров. При этом в качестве начальных условий в новой точке разумно задавать состояние, полученное в итоге итераций в предыдущей точке («сканирование с наследованием»), что способствует ускорению сходимости к установившемуся режиму динамики.

На рис. 8 в центре показана карта режимов системы (17) на плоскости параметров Δ и δ , а по периферии – портреты аттракторов, отвечающие представительным точкам на плоскости параметров. Аттракторы на панелях (а), (в), (з), (д) отвечают предельным циклам, то есть периодическим режимам колебаний ампли-

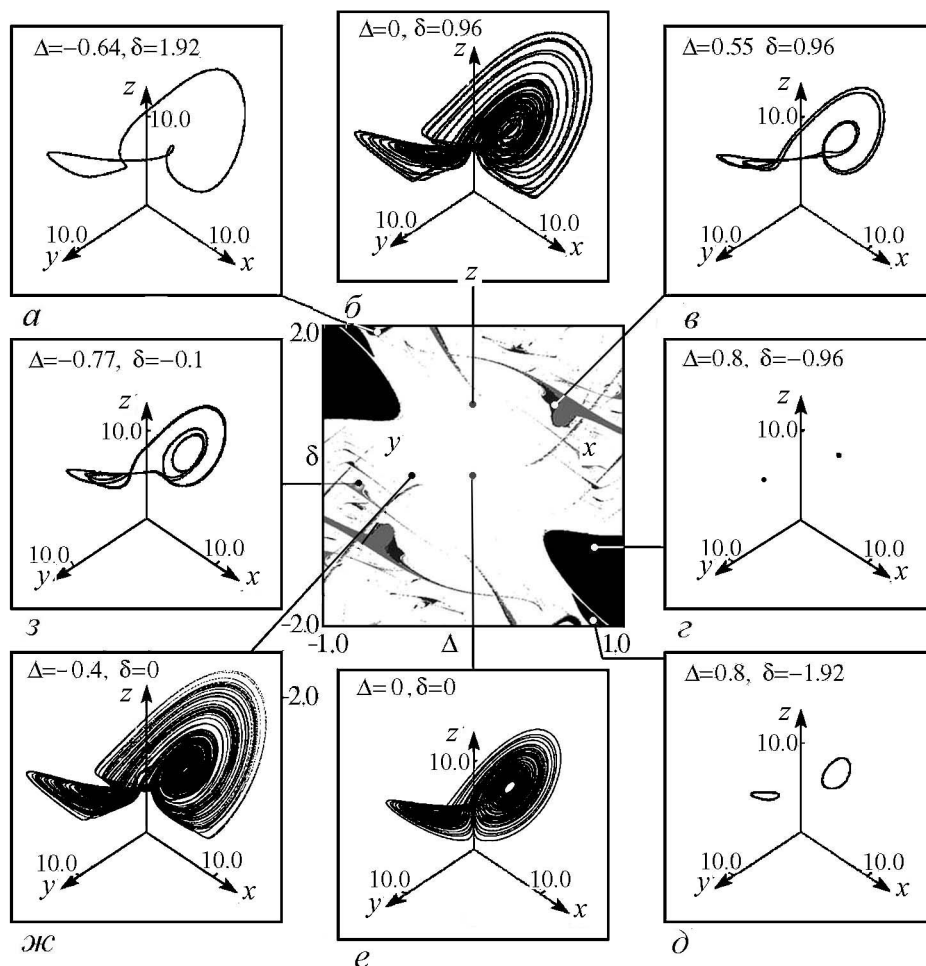


Рис. 8. Карта режимов системы (2) на плоскости параметров Δ и δ и портреты аттракторов, отвечающие представительным точкам на плоскости параметров. Остальные параметры: $h = 5.962$, $v_1 = 1$, $v_2 = 4$

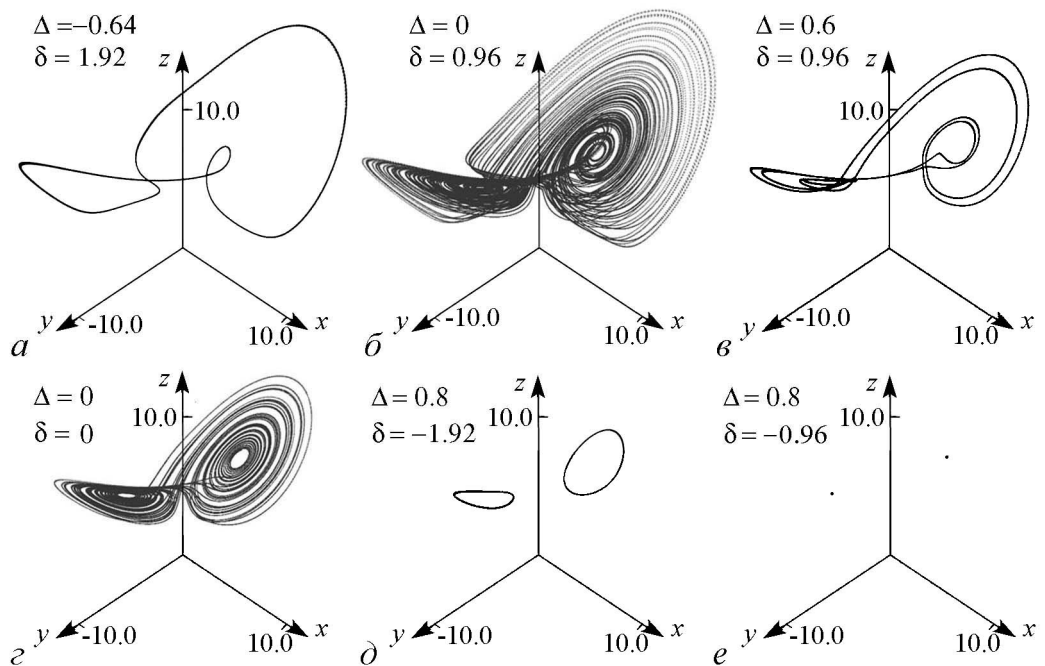


Рис. 9. Портреты аттракторов исходной системы уравнений Кирхгофа (3) при величинах сопротивлений $R_1 = 1$ МОм, $R_2 = 250$ кОм, $R_3 = 1$ МОм и амплитуде накачки 62.25 мВ. Частота накачки и индуктивность L_3 задавались так, чтобы обеспечить указанные в надписях значения параметров Δ и δ . Остальные номиналы схемы соответствуют подписи к рис. 2.

туд в областях на плоскости параметров, окрашенных серыми тонами. С другой стороны, аттракторы на диаграммах (б), (ж), (е) хаотические, что отвечает незакрашенным областям, где периодичность не обнаружена. Диаграмма (е) относится к началу координат на карте, где реализуется аттрактор Лоренца, обсуждавшийся в предыдущем разделе. Темно-серые области в «северо-западной» и «юго-восточной» части карты соответствуют аттрактору системы (2) в виде неподвижной точки (панель (д)), что отвечает устойчивому режиму стационарных колебаний постоянной амплитуды в исходных уравнениях. Аналогичные режимы наблюдаются также при численном моделировании исходной системы на основе уравнений Кирхгофа (7). На рис. 9 показаны портреты аттракторов, относящиеся к системе с накачкой при амплитуде 62.25 мВ и величинах сопротивлений $R_1 = 1$ МОм, $R_2 = 250$ кОм, $R_3 = 1$ МОм. Частота накачки и индуктивность L_3 задавались так, чтобы обеспечить указанные в надписях значения параметров Δ и δ , а остальные номиналы соответствуют подписи к рис. 2. Изображения демонстрируют очевидное сходство с диаграммами по периферии рис. 8 с той разницей, что траектории на аттракторах выглядят слегка «распущенными», что связано, очевидно, с наличием относительно малых по амплитуде нерезонансных составляющих, вносящих вклад в мгновенные значения динамических переменных, которые оказываются исключенными при переходе к усредненному описанию⁴.

⁴Отсутствие идеального соответствия по параметрам, обеспечивающим предельные циклы определенной структуры, отвечающие раскрашенным областям на рис. 8, обусловлено приближенным характером описания динамики уравнениями (2) в рамках метода медленных амплитуд.

Заключение

В работе проанализирована схема параметрического генератора хаоса на базе трех связанных колебательных контуров с накачкой, обеспечиваемой периодическим изменением напряжения на квадратичном нелинейном элементе. Как представляется, методическое значение рассмотренной модели состоит в том, что она позволяет в чистом виде реализовать и исследовать распадный механизм параметрической генерации хаоса, когда две моды возбуждаются в присутствии накачки на суммарной частоте, а отбор энергии осуществляется модой на разностной частоте.

В случае точного выполнения условий параметрического резонанса данная схема может быть интересна с точки зрения аналогового моделирования движения тела в виде пластины в вязкой жидкости под действием приложенного момента силы. В самом деле, в предположении линейной зависимости сил сопротивления от скорости (большая вязкость) уравнения для продольной и поперечной скоростей и для угловой скорости, записанные для нулевой плавучести, в точности совпадают с уравнениями (19) [40,41].

При отклонении по частотам от точного параметрического резонанса, вместо квазигиперболического аттрактора типа Лоренца реализуются аттракторы, хотя и обладающие с ним внешним сходством, но отличающиеся отсутствием робастности – при вариации параметров возможно разрушение хаоса с возникновением регулярных режимов. Это заключение иллюстрируется представленной картой на плоскости параметров отстройки частот, дающей наглядное представление о расположении областей хаотической и регулярной динамики.

Часть исследования, относящаяся к разработке схемы параметрического генератора с реактивным нелинейным элементом и ее рассмотрению в условиях точного параметрического резонанса (разделы 1,2,3,4), выполнена при поддержке гранта РФФ № 15-12-20035. Анализ динамики при отстройке от параметрического резонанса (раздел 5) проведен при поддержке гранта РФФИ № 15-02-02893.

Библиографический список

1. Пиковский А.С., Рабинович М.И., Трахтенгерц В.Ю. Возникновение стохастичности при распадном ограничении параметрической неустойчивости // ЖЭТФ. 1978. Т. 74. С. 1366–1374.
2. Люиселл У. Связанные и параметрические колебания в электронике. М.: ИЛ, 1963. 352 с.
3. Ахманов С.А., Хохлов Р.В. Параметрические усилители и генераторы света // УФН. 1966. Т. 88, № 3. С. 439–460.
4. Островский Л.А., Папилова И.А., Сутин А.М. Параметрический генератор ультразвука // Письма в ЖЭТФ. 1972. Т. 15, № 8. С. 456–458.
5. Акуленко Л.Д. Параметрическое управление колебаниями и вращениями физического маятника (качели) // ПММ. 1993. Т. 57. Вып. 2. С. 82–91.
6. Lorenz E.N. Deterministic nonperiodic flow // Journal of the Atmospheric Sciences. 1963. Vol. 20, № 2. P. 130–141.

7. *Sparrow C.* The Lorenz Equations: Bifurcations, Chaos, and Strange Attractors. NY, Heidelberg, Berlin: Springer-Verlag, 1982. 270 p.
8. *Кузнецов С.П.* Динамический хаос. Москва: Физматлит, 2001. 296 с.
9. *Анищенко В.С.* Аттракторы динамических систем //Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 1997. Т. 5, № 1. С. 109–127.
10. *Bonatti C., Diaz L.J., Viana M.* Dynamics Beyond Uniform Hyperbolicity. A Global Geometric and Probobalistic Perspective. Encyclopedia of Mathematical Sciences. Vol. 102. Springer: Berlin, Heidelberg, New-York, 2005. 384 p.
11. *Banerjee S., Yorke J.A., Grebogi C.* Robust chaos // Phys. Rev. Lett. 1998. Vol. 80. P. 3049–3052.
12. *Elhadj Z. and Sprott J.C.* Robust Chaos and its Applications. Singapore: World Scientific, 2011. 454 p.
13. *Ораевский А.Н.* Мазеры, лазеры и странные аттракторы // Квантовая электроника. 1981. Т. 8, № 1. С. 130–142.
14. *Ораевский А.Н.* Динамика одномодовых лазеров и динамический хаос // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 1996. Т. 4, № 1. С. 3–13.
15. *Haken H.* Analogy between higher instabilities in fluids and lasers // Physics Letters A. 1975. Vol. 53, № 1. P. 77–78.
16. *Kolář M., Gumbs G.* Theory for the experimental observation of chaos in a rotating waterwheel // Physical Review A. 1992. Vol. 45, № 2. P. 626–637.
17. *Глуховский А.Б.* Нелинейные системы, являющиеся суперпозициями гиростатов // ДАН СССР. 1982. Т. 266. № 4. С. 816–820.
18. *Doroshin A.V.* Modeling of chaotic motion of gyrostats in resistant environment on the base of dynamical systems with strange attractors // Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation. 2011. Vol. 16, № 8. P. 3188–3202.
19. *Chen H.K., Lee C.I.* Anti-control of chaos in rigid body motion // Chaos, Solitons & Fractals. 2004. Vol. 21, № 4. P. 957–965.
20. *Poland D.* Cooperative catalysis and chemical chaos: a chemical model for the Lorenz equations// Physica D: Nonlinear Phenomena. 1993. Vol. 65, № 1. P. 86–99.
21. *Cuomo K.M., Oppenheim A.V.* Circuit implementation of synchronized chaos with applications to communications // Phys. Rev. Lett. 1993. Vol. 71, № 1. P. 65–68.
22. *Peters F., Lobry L., Lemaire E.* Experimental observation of Lorenz chaos in the Quincke rotor dynamics // Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science. 2005. Vol. 15, № 1. P. 013102.
23. *Rucklidge A.M.* Chaos in magnetoconvection // Nonlinearity. 1994. Vol. 7, № 6. P. 1565–1591.
24. *Hemai N.* Strange attractors in brushless DC motor // IEEE Transactions on Circuits and System-I: Fundamental Theory and Application. 1994. Vol. 41, № 1. P. 40-45.
25. *Gibbon J.D., McGuinness M.J.* The real and complex Lorenz equations in rotating fluids and lasers // Physica D: Nonlinear Phenomena. 1982. Vol. 5, № 1. P. 108–122.

26. *Fowler A.C., Gibbon J.D., McGuinness M.J.* The complex Lorenz equations // *Physica D: Nonlinear Phenomena*. 1982. Vol. 4, № 2. P. 139.
27. *Mahmoud G.M., Ahmed M.E., Mahmoud E.E.* Analysis of hyperchaotic complex Lorenz systems // *International Journal of Modern Physics C*. 2008. Vol. 19, № 10. P. 1477–1494.
28. *Wang P.K.C., Masui K.* Intermittent phase unlocking in a resonant three-wave interaction with parametric excitation // *Physics Letters A*. 1981. Vol. 81, № 2. P. 97–101.
29. *Letellier C., Aguirre L.A., Maquet J., Lefebvre B.* Analogy between a 10D model for nonlinear wave–wave interaction in a plasma and the 3D Lorenz dynamics // *Physica D: Nonlinear Phenomena*. 2003. Vol. 179, № 1. P. 33–52.
30. *Llibre J., Messias M., da Silva P.R.* On the global dynamics of the Rabinovich system // *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*. 2008. Vol. 41, № 27. P. 275210.
31. *Кузнецов С.П.* Параметрический генератор хаоса на варакторном диоде с распадным механизмом ограничения неустойчивости // *Журнал технической физики*. 2016. Т. 86, № 3. С. 118–127.
32. *Liu Y., Yang Q., Pang G.* A hyperchaotic system from the Rabinovich system // *Journal of Computational and Applied Mathematics*. 2010. Vol. 234, № 1. P. 101–113.
33. *Кузнецов С.П.* Динамический хаос и однородно гиперболические аттракторы: от математики к физике // *УФН*. 2011. Т. 181. Вып. 2. С. 121–149.
34. *Tucker W.* A rigorous ODE solver and Smale’s 14th problem // *Comp. Math*. 2002. Vol. 2. P. 53–117.
35. *Benettin G., Galgani L., Giorgilli A., Strelcyn J.-M.* Lyapunov characteristic exponents for smooth dynamical systems and for Hamiltonian systems: A method for computing all of them // *Meccanica*. 1980. Vol. 15. P. 9–20.
36. *Hénon M.* A two-dimensional mapping with a strange attractor // *Commun. Math. Phys*. 1976. Vol. 50. P. 69–77.
37. *Rössler O.E.* Continuous chaos: four prototype equations // *Ann. New York Academy of Sciences*. 1979. Vol. 316. P. 376–392.
38. *Afraimovich V.S.* Strange attractors and quasiattractors // *Nonlinear and turbulent processes in physics*. 1984. Vol. 1. P. 1133–1138.
39. *Шильников Л.П.* Бифуркации и странные аттракторы // *Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского*. 2011, № 4(2). С. 364–366.
40. *Козлов В.В.* К задаче о падении тяжелого твердого тела в сопротивляющейся среде // *Вестник МГУ, сер. 1, Математика, механика*. 1990. № 1. С. 79–86.
41. *Кузнецов С.П.* Движение падающей пластины в жидкости: конечномерные модели и феномены сложной нелинейной динамики // *Нелинейная динамика*. 2015. Т. 11, № 1. С. 3–49.

Поступила в редакцию 30.06.2016

LORENZ TYPE ATTRACTOR IN ELECTRONIC PARAMETRIC GENERATOR AND ITS TRANSFORMATION OUTSIDE THE ACCURATE PARAMETRIC RESONANCE

S. P. Kuznetsov

Udmurt State University
Universitetskaya, 1, 426034 Izhevsk, Russia
National Research Saratov State University,
Astrakhanskaya, 83, 410012 Saratov, Russia

Kotel'nikov's Institute of Radio-Engineering and Electronics of RAS, Saratov Branch,
Zelenaya, 38, 410019 Saratov, Russia

E-mail: spkuz@yandex.ru

The paper deals with a parametric oscillator composed of three LC -circuits and a quadratic nonlinear reactive element built on the basis of an operational amplifier and an analog multiplier; the equations for amplitudes of the interacting modes are derived.

Motivation is a desire to implement the mechanism of parametric interaction of oscillatory modes giving rise to emergence of a strange attractor of Lorenz type without distortions introduced by nonlinearities of order three and higher.

The study is based on a combination of circuit simulation using Multisim software and numerical integration of the dynamic equations of the system both in its original form and in the form of reduced equations for the slowly varying complex amplitudes.

The proposed scheme for the first time allows demonstrating the decay mechanism of chaos generation described earlier by Pikovsky, Rabinovich and Trahtengerts in concern to the waves in magnetized plasma, in an electronic device in purified form.

In addition to observation of the Lorenz-type attractor and characteristic features of the respective dynamics by means of the circuit simulation and on the basis of numerical integration of equations in the case of precise parametric resonance conditions, a study of transformation of the attractors is carried out with detuning frequencies, and the corresponding chart of dynamical regimes on the parameter plane is presented.

It is shown that instead of the quasi-hyperbolic Lorenz-type attractor, with frequencies deviating from the exact parametric resonance, distinct types of attractors arise, although similar in shape to the original one, but lacking robustness: under variations of the parameters chaos may disappear with emergence of regular oscillatory regimes.

Keywords: Parametric oscillator, the Lorenz attractor, analog simulation.

DOI:10.18500/0869-6632-2016-24-3-68-87

Paper reference: Kuznetsov S.P. Lorenz type attractor in electronic parametric generator and its transformation outside the accurate parametric resonance // *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*. 2016. Vol. 24, № 3. P. 68–87.

References

1. *Pikovski A.S., Rabinovich M.I., Trakhtengerts V.Y.* Appearance of chaos at decay saturation of parametric instability // *Sov. Phys. JETP*. 1978. Vol. 47. P. 715–719.
2. *Louisell W.H.* Coupled Mode and Parametric Electronics. Wiley: New York, 1960. 268 p.
3. *Akhmanov S.A., Khokhlov R.V.* Parametric amplifiers and generators of light // *Physics-Usppekhi*. 1966. Vol. 9, № 2. P. 210–222.

4. *Ostrovskii L.A., Papilova I.A., Sutin A.M.* Parametric ultrasound generator // Soviet Journal of Experimental and Theoretical Physics Letters. 1972. Vol. 15. P. 322–323 (in Russian).
5. *Akulenko L.D.* Parametric control of the oscillations and rotations of a physical pendulum (swing) // Prikladnaya Matematika i Mekhanika. 1993. Vol. 57, № 2. P. 82–91 (in Russian).
6. *Lorenz E.N.* Deterministic nonperiodic flow // Journal of the Atmospheric Sciences. 1963. Vol. 20, № 2. P. 130–141.
7. *Sparrow C.* The Lorenz Equations: Bifurcations, Chaos, and Strange Attractors. NY, Heidelberg, Berlin: Springer-Verlag, 1982. 270 p.
8. *Kuznetsov S.P.* Dynamic Chaos. 2nd ed. Fizmatlit: Moscow, 2006. 356 p. (in Russian).
9. *Anishchenko V.S.* Attractors of Dynamical Systems // Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics. 1997. Vol. 5, № 1. P. 109–127 (in Russian).
10. *Bonatti C., Diaz L.J., Viana M.* Dynamics Beyond Uniform Hyperbolicity. A Global Geometric and Probobalistic Perspective. Encyclopedia of Mathematical Sciences. Vol. 102. Springer: Berlin, Heidelberg, New-York, 2005. 384 p.
11. *Banerjee S., Yorke J.A., Grebogi C.* Robust chaos // Phys. Rev. Lett. 1998. Vol. 80. P. 3049–3052.
12. *Elhadj Z. and Sprott J.C.* Robust Chaos and its Applications. Singapore: World Scientific, 2011. 454 p.
13. *Oraevskii A.N.* Masers, lasers, and strange attractors // Quantum Electronics. 1981. Vol. 11, № 1. P. 71–78.
14. *Oraevsky A.N.* Dynamics of single-mode lasers and dynamical chaos // Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics. 1996. Vol. 4, № 1. P. 3–13 (in Russian).
15. *Haken H.* Analogy between higher instabilities in fluids and lasers // Physics Letters A. 1975. Vol. 53, № 1. P. 77–78.
16. *Kolář M., Gumbs G.* Theory for the experimental observation of chaos in a rotating waterwheel // Physical Review A. 1992. Vol. 45, № 2. P. 626–637.
17. *Glukhovskii A.B.* Nonlinear systems that are superpositions of gyrostats // Soviet Physics Doklady. 1982. Vol. 27. P. 823.
18. *Doroshin A.V.* Modeling of chaotic motion of gyrostats in resistant environment on the base of dynamical systems with strange attractors // Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation. 2011. Vol. 16, № 8. P. 3188–3202.
19. *Chen H.K., Lee C.I.* Anti-control of chaos in rigid body motion // Chaos, Solitons & Fractals. 2004. Vol. 21, № 4. P. 957–965.
20. *Poland D.* Cooperative catalysis and chemical chaos: a chemical model for the Lorenz equations // Physica D: Nonlinear Phenomena. 1993. Vol. 65, № 1. P. 86–99.
21. *Cuomo K.M., Oppenheim A.V.* Circuit implementation of synchronized chaos with applications to communications // Phys. Rev. Lett. 1993. Vol. 71, № 1. P. 65–68.
22. *Peters F., Lobry L., Lemaire E.* Experimental observation of Lorenz chaos in the

- Quincke rotor dynamics // *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*. 2005. Vol. 15, № 1. P. 013102.
23. *Rucklidge A.M.* Chaos in magnetoconvection // *Nonlinearity*. 1994. Vol. 7, № 6. P. 1565–1591.
 24. *Hemai N.* Strange attractors in brushless DC motor // *IEEE Transactions on Circuits and System-I: Fundamental Theory and Application*. 1994. Vol. 41, № 1. P. 40–45.
 25. *Gibbon J.D., McGuinness M.J.* The real and complex Lorenz equations in rotating fluids and lasers // *Physica D: Nonlinear Phenomena*. 1982. Vol. 5, № 1. P. 108–122.
 26. *Fowler A.C., Gibbon J.D., McGuinness M.J.* The complex Lorenz equations // *Physica D: Nonlinear Phenomena*. 1982. Vol. 4, № 2. P. 139–163.
 27. *Mahmoud G.M., Ahmed M.E., Mahmoud E.E.* Analysis of hyperchaotic complex Lorenz systems // *International Journal of Modern Physics C*. 2008. Vol. 19, № 10. P. 1477–1494.
 28. *Wang P.K.C., Masui K.* Intermittent phase unlocking in a resonant three-wave interaction with parametric excitation // *Physics Letters A*. 1981. Vol. 81, № 2. P. 97–101.
 29. *Letellier C., Aguirre L.A., Maquet J., Lefebvre B.* Analogy between a 10D model for nonlinear wave-wave interaction in a plasma and the 3D Lorenz dynamics // *Physica D: Nonlinear Phenomena*. 2003. Vol. 179, № 1. P. 33–52.
 30. *Llibre J., Messias M., da Silva P.R.* On the global dynamics of the Rabinovich system // *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*. 2008. Vol. 41, № 27. P. 275210.
 31. *Kuznetsov S.P.* Parametric chaos generator operating on a varactor diode with the instability limitation decay mechanism // *Technical Physics*. 2016. Vol. 61, № 3. P. 436–445.
 32. *Liu Y., Yang Q., Pang G.* A hyperchaotic system from the Rabinovich system // *Journal of Computational and Applied Mathematics*. 2010. Vol. 234, № 1. P. 101–113.
 33. *Kuznetsov S.P.* Dynamical chaos and uniformly hyperbolic attractors: from mathematics to physics // *Physics-Uspekhi*. 2011. Vol. 54, № 2. P. 119–144.
 34. *Tucker W.* A rigorous ODE solver and Smale's 14th problem // *Comp. Math*. 2002. Vol. 2. P. 53–117.
 35. *Benettin G., Galgani L., Giorgilli A., Strelcyn J.-M.* Lyapunov characteristic exponents for smooth dynamical systems and for Hamiltonian systems: A method for computing all of them // *Meccanica*. 1980. Vol. 15. P. 9–20.
 36. *Hénon M.* A two-dimensional mapping with a strange attractor // *Commun. Math. Phys.* 1976. Vol. 50. P. 69–77.
 37. *Rössler O.E.* Continuous chaos: four prototype equations // *Ann. New York Academy of Sciences*. 1979. Vol. 316. P. 376–392.
 38. *Afraimovich V.S.* Strange attractors and quasiattractors // *Nonlinear and turbulent processes in physics*. 1984. Vol. 1. P. 1133–1138.
 39. *Shilnikov L.P.* Bifurcations and strange attractors // *Vestnik Nizhegorodskogo Universiteta*. 2011, № 4(2). P. 364–366.

40. *Kozlov V.V.* On the problem of fall of a rigid body in a resisting medium // *Moscow University Mechanics Bulletin*. 1990. Vol. 45, № 1. P. 30–35.
41. *Kuznetsov S.P.* Plate falling in a fluid: Regular and chaotic dynamics of finite-dimensional models // *Regular and Chaotic Dynamics*. 2015. Vol. 20, № 3. P. 345–382.

Кузнецов Сергей Петрович – родился в Москве (1951). Окончил Саратовский государственный университет (1973). Сотрудник Саратовского филиала Института радиотехники и электроники им. В.А. Котельникова РАН (с 1988). Руководит лабораторией теоретической нелинейной динамики. Главный научный сотрудник лаборатории нелинейного анализа и конструирования новых средств передвижения Удмуртского государственного университета. Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук в СГУ (1977) и доктора наук (1987) по специальности радиофизика. Профессор базовой кафедры динамических систем СГУ. Автор монографии «Динамический хаос и гиперболические аттракторы: От математики к физике», монографии «Hyperbolic Chaos. A Physicist's View», монографии «Strange Nonchaotic Attractors» (совместно с А. Пиковским и У. Фойдель), а также учебно-научных монографий «Динамический хаос» и «Нелинейные колебания» (в соавторстве с А.П. Кузнецовым и Н.М. Рыскиным). Опубликовал свыше 200 научных статей по нелинейной динамике, радиофизике и электронике. Под его руководством защищены двенадцать кандидатских диссертаций. Лауреат государственной научной стипендии для ученых России (1994–1996), Соросовский доцент (1998), Соросовский профессор (2000, 2001). Член редакционной коллегии журнала «Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика».



410019 Саратов, ул. Зеленая, 38
 Саратовский филиал ИРЭ имени В.А. Котельникова РАН
 410012, Саратов, Астраханская, 83
 Национальный исследовательский Саратовский государственный университет
 426034 Ижевск, ул. Университетская, 1
 Удмуртский государственный университет
 E-mail: spkuz@yandex.ru