



Он приобрел широчайшую известность и как математик, и как физик, и как переводчик, и как историк науки и т.д., не обременяя себя никакой степенью, никаким званием, никакими регалиями.

Взамен всего этого у него было имя – Юлий Данилов, абсолютно не нуждающееся в дальнейших эпитетах и пояснениях.

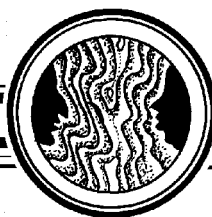
*Д.И.Трубецков, В.И.Санюк*

Настоящая статья соответствует содержанию лекций, прочитанных авторами на Международной школе-конференции ХАОС–2016, посвященной памяти Юлия Александровича Данилова, одной из любимых тем которого была фрактальная геометрия и фрактальное искусство. Лекции, как кажется, близки ему по духу и структуре.

Выбор темы лекций не случаен. Последний раз мы виделись с Юлием Александровичем на его любимых «Нелинейных днях в Саратове для молодых» 12 октября 2003 года. При этой встрече я подарил ему копию статьи из журнала «В мире науки» об исследовании с помощью фракталов картин известного американского художника-абстракциониста Джексона Поллока (1912–1952). Юлий Александрович очень обрадовался подарку. Договорились, что встретимся в «Волжских Далях» через год. Но 24-го октября его не стало, а 28-го октября мы проводили его в последний путь. Пролетело 13 лет, как его нет с нами.

В лекциях используются без ссылок отрывки из книги: Д.И. Трубецков. Введение в синергетику. Хаос и структуры (5 изд. М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2014). В статье сохранен лекционный стиль изложения, близкий к стилю Ю.А. Данилова.

*Д. И. Трубецков*



80-летию Ю.А. Данилова

### ФРАКТАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ В ЛИЦАХ И СУДЬБАХ\*

Д. И. Трубецков<sup>1,2</sup>, Е. Г. Трубецкова<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Национальный исследовательский  
Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского  
410012 Саратов, ул. Астраханская, 83

<sup>2</sup>Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ»  
115409 Москва, Каширское шоссе, 31

E-mail: dtrubetskov@yahoo.com, etrubetskova@gmail.com

Статья посвящена основам фрактальной геометрии и судьбам ее создателей. С возможной степенью детальности изложены биографии и открытия Феликса Хаусдорфа и Абрама Самойловича Безиковича – главных действующих лиц грандиозного спектакля под названием фрактальная геометрия. Несомненно, что автором, режиссером и постановщиком этого спектакля является Бенуа Мандельброт. В статье приводятся его биография и краткие описания жизни его гениальных предшественников – Анри Пуанкаре, Гастона Мориса Жюлиа и Пьера Жозе Гастона Фату. В частности, подробно описано открытие Пуанкаре гомоклинического пучка.

Изложена биография Льюиса Фрая Ричардсона, с посмертной публикации которого об измерении длины береговой линии Британии и начинается современная фрактальная геометрия. Кратко изложены результаты Ричардсона по теории турбулентности и возможные современные подходы к решению уравнения Навье–Стокса, на основе которых делается вывод, что турбулентность должна быть описана в рамках фрактальной геометрии.

Изложена эмпирическая теория Ричардсона применительно к измерению береговой линии. Приведено определение топологической размерности и дан вывод формулы размерности Хаусдорфа–Безиковича. Приведены два принадлежащих Мандельброту определения фракталов. В рамках этих определений проанализированы множество Кантора, триадная кривая Коха, салфетка и ковер Серпинского, губка Менгера, кривая Пеано, кривая Вейерштрасса.

Описано континуальное семейство размерностей Альфреда Реньи, частным случаем которых является размерность Хаусдорфа–Безиковича, и изложена биография ученого.

Дано описание линейных и нелинейных фракталов, основанное на лингвистической метафоре сравнения линейных фракталов с индоевропейскими языками, а нелинейных – с китайско-тибетскими. Качественно описаны основы нелинейного «диалекта», в котором выделяется квадратичный «диалект», созданный Жюлиа и Фату. Качественно описан механизм агрегации, ограниченной диффузией, которому соответствует модель фрактального роста.

\*Статья написана по материалам лекций, прочитанных авторами на XI международной школе «ХАОС–2016», 3–8.10.2016, Саратов, Россия.

Заканчивается статья биографией Жана Перрена и изложением его удивительного предвидения о практической ценности множеств, которые стали называться фракталами.

*Ключевые слова:* Фрактал, размерность Хаусдорфа–Безиковича, множества Мандельброта, турбулентность, хаос, линейные и нелинейные фракталы, агрегация, ограниченная диффузией.

DOI: 10.18500/0869-6632-2016-24-6-4-38

*Ссылка на статью:* Трубецков Д.И., Трубецкова Е.Г. Фрактальная геометрия в лицах и судьбах // Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2016. Т. 24, № 6. С. 4–38.

## FRACTAL GEOMETRY

*D. I. Trubetskov<sup>1,2</sup>, E. G. Trubetskova<sup>1</sup>*

<sup>1</sup>National Research Saratov State University  
Astrahanskaya, 83, 410012 Saratov, Russia

<sup>2</sup>National Research Nuclear University MEPhI  
115409, Moscow, Kashirskoe shosse, 31

E-mail: dtrubetskov@yahoo.com, etrubetskova@gmail.com

The article deals with the bases of fractal geometry and fates of its creators. The biographies and the discoveries of Felix Hausdorff and Abram Besicovitch – the main characters of the great play called fractal geometry – are presented with the possible degree of detail. There is no doubt that the author and director of this play was Benoit Mandelbrot. The article presents his biography and brief descriptions of the lives of his predecessors: Henri Poincaré, Maurice Gaston Julia and Pierre Gaston Jose Fatou. Special attention is paid to the Poincaré's discovery of homoclinic tangle bundle.

The biography of Lewis Fry Richardson, whose posthumous publication of the results of the length's measurement of the UK coastline laid the basis of modern fractal geometry, is presented. A brief presentation of Richardson's results on the turbulence's theory and possible contemporary approaches to the solution of the Navier–Stokes equations are given. It led to the conclusion that turbulence should be described in terms of fractal geometry.

There was presented Richardson's empirical theory, that was applied towards the measurement of the coastline. The definition of topological dimension and the derivation of the Hausdorff–Besicovitch dimension are given. Two definitions of fractals, offered by Mandelbrot, are provided. Within the framework of these definitions Cantor set, triadic Koch curve, Sierpinski carpet and cloth, Menger sponge, Peano curve, Weierstrass curve are analyzed.

The continual family of Alfred Renyi dimensions, a particular case of which is the Hausdorff–Besicovitch dimension, is described. The biography of the scientist is also given.

There was presented the description of linear and nonlinear fractals which is based on linguistic metaphor comparing the linear fractals with Indo-European family of languages, and non-linear – with the Sino-Tibetan one. The basics of nonlinear «dialect», which singles out a square «dialect», created by Julia and Fatou, is qualitatively described. The diffusion-limited aggregation, which corresponds to the model of fractal growth, is also given from the qualitative viewpoint.

The article ends with the biography of Jean Perrin and exposition of his amazing prediction of the practical value of the sets, which began to be known as fractals.

*Keywords:* Fractal, Hausdorff–Besicovitch dimension, Mandelbrot set, turbulence, chaos, linear and nonlinear fractals, diffusion limited aggregation.

DOI: 10.18500/0869-6632-2016-24-6-4-38

*Paper reference:* Trubetskov D.I., Trubetskova E.G. Fractal geometry. Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics. 2016. Vol. 24. Issue 6. P. 4–38.

В арсенале современной математики Мандельброт нашел удобную количественную меру неидеальности объектов – извилистости контура, морщинистости поверхности, трещиноватости и пористости объема. Ее предложили два математика – Феликс Хаусдорф (1868–1942) и Абрам Самойлович Безикович (1891–1970). Ныне она заслуженно носит славные имена своих создателей (размерность Хаусдорфа–Безиковича). <...> И Хаусдорф, и Безикович были бы немало удивлены, если бы узнали, какой интерес вызвали у потомков их работы по дробным размерностям.

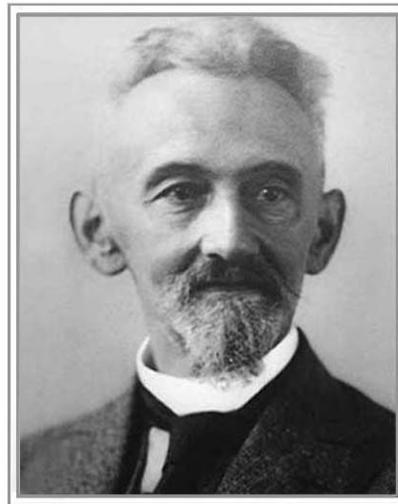
Ю.А. Данилов

### Главные действующие лица

**Феликс Хаусдорф** был одной из главных фигур в развитии идеи фрактальной размерности. Б. Мандельброт предложил использовать в качестве такой характеристики определение размерности, введенное Ф. Хаусдорфом в 1919 году. Хаусдорф не опубликовал в этом направлении больше ни одной работы. Его идеи были развиты в работах А.С. Безиковича, поэтому размерность носит имя Хаусдорфа–Безиковича.

Хаусдорф до 35 лет большую часть времени посвящал литературе и музыке, писал беллетристические произведения под псевдонимом Paul Mongre. Он был профессором Лейпцигского (1902–1910), Боннского (1910–1913, 1921–1931) и Грейфевальского (1913–1921) университетов. Ему принадлежит получение большого количества важных и глубоких результатов в топологии, теории непрерывных групп, в математическом анализе и других разделах математики. Как пишет Ю.А. Данилов, «он внес существенный вклад в разрешение кризиса в основаниях математики (Мандельброт датирует кризис периодом 1875–1925 годов), написав замечательную монографию “Основы теории множеств” (1914). Дробная размерность Хаусдорфа – лишь одна из искорок его блестящего таланта» [1, с. 184]. Трактат Хаусдорфа отличали ясность, точность и доведение каждого результата до полного понимания. Один из американских рецензентов книги, указывая, что способ доказательств в трактате близок к стилю Эвклида и едва ли вызовет активность читателя и даст волю его воображению, тем не менее, отмечал: протест против такого стиля изложения подобен спору с Бетховеном из-за того, что он писал симфонии вместо опер.

В 1935 году Хаусдорф был отстранен нацистами от преподавательской деятельности как «не ариец». Он был евреем и покончил с собой вместе с женой и ее сестрой 26 января 1942 года, чтобы избежать депортации в концлагерь.



Феликс Хаусдорф  
1868-1942



У входа в Математический институт Боннского университета висит мемориальная доска: «В этом университете с 1921 по 1935 год работал математик Феликс Хаусдорф (8.11.1868–26.01.1942). Он умер по вине национал-социалистов из-за того, что был евреем. В его лице мы чтим память всех жертв тирании. Пусть никогда не повторится диктатура и война!»

Долгое время Безикович являлся автором или соавтором почти всех публикуемых по данной теме работ. Если Хаусдорфа можно назвать отцом нестандартной размерности, то Безикович, несомненно, заслужил себе звание ее матери.

*Б. Мандельброт*



Абрам Самойлович  
Безикович (1891-1970)

**Абрам Самойлович Безикович**<sup>1</sup> родился 11 января 1891 года, 125 лет назад, в Бердянске (Украина). Он происходил из семьи караимских евреев. Безикович был четвертым ребенком в многодетной семье (всего было шесть детей) Самуила и Евы Безиковичей. Его отец владел собственным ювелирным магазином, и сам был ювелиром, но после ограбления стал работать кассиром. Братья и младшая сестра получили высшее образование, будучи очень способными детьми. У Безиковича необычные способности проявились уже в раннем детстве. Причем способность к математике он унаследовал от матери, а упорство и стремление к совершенству – от отца. После окончания в 1908 году Брянской гимназии А.С. Безикович поступил в Петербургский университет, где в 1912 году

окончил полный курс по математическому отделению физико-математического факультета с дипломом первой степени. Одним из его учителей был А.А. Марков. Уже в студенческие годы Безикович написал работу «Новый вывод предельного выражения вероятности для случая независимых испытаний», которая в 1915 году была опубликована в Известиях Академии Наук. После окончания университета А.С. Безикович был оставлен с 1 июня 1912 года на кафедре чистой математики для подготовки к профессорской деятельности на два года без назначения стипендии. Однако с 1 января 1913 года ему назначается стипендия в размере 1200 рублей в год на два года, а затем Департамент народного просвещения принял решение о выплате ежемесячной стипендии по 100 рублей по 1 июля 1916 года с перерывами.

А.С. Безикович вместе с выпускниками университета А.А. Фридманом и Я.Д. Тамаркиным был активным участником организованного ими математического кружка, где изучались не только классические работы, но и новые статьи по математическому анализу, лежащие вне круга интересов старшего поколения петербургских математиков. Он посещал также семинар Пауля Эренфеста. Именно на этом

<sup>1</sup>Использованы материалы книги [2].

семинаре Абрам Самойлович познакомился со своей будущей женой, физиком по образованию – Валентиной Витальевной Дойниковой (1888–1974). Для заключения брака он перешел в православие. После того как А.С. Безиковичу был продлен до 1 января 1918 года срок пребывания в Петроградском университете, он сдал экзамены на степень магистра чистой математики, удовлетворительно прочитал пробные лекции и был зачислен приват-доцентом Петроградского университета.

Последним университетом, открытым в России до революции, был Пермский университет, куда Безиковича направили с 1 июля 1917 года для чтения лекций в качестве исполняющего обязанности профессора по кафедре чистой математики.

В 1918 году группой молодых математиков из Петроградского университета, пополнивших Пермский университет, было организовано физико-математическое общество, которое стало издавать свой журнал. А.С. Безикович опубликовал в этом журнале четыре статьи.

Дальнейший послужной список А.С. Безиковича, основанный на его личном деле, таков (см. [2]).

- 17 ноября 1917 года – избрание членом библиотечной комиссии от физико-математического факультета.
- 30 января 1918 года – избрание заместителем представителей университета в Городской комитет по народному образованию.
- 23 мая 1918 года – избрание членом комиссии по выработке правил приема студентов в университет.
- 16 августа 1918 года – избрание членом комиссии для разработки вопроса об учреждении и организации просветительской ассоциации.
- 1 октября 1919 года – избрание собранием из 6 профессоров и преподавателей под руководством и.о. ректора деканом физико-математического факультета.
- 28 июня 1919 года в деле появляется следующий документ, связанный с отъездом профессорско-преподавательского состава ПГУ в Томск во время наступления Колчаковской армии.

«Уезжая из города Перми с личным составом Пермского университета по распоряжению военных властей, должность ректора сдаю профессору А.С. Безиковичу. Ректор. Подпись. Н.В. Култашев. 28 июня 1919 г., № 2435».

В должности ректора А.С. Безикович, которому было 28 лет, пробыл меньше года, но успел проявить себя хорошим организатором. Университет подвергся разрушениям при отступлении Колчака. А.С. Безикович занялся спасением книг и других научных ценностей.

В этом плане интересно письмо, написанное А.А. Фридманом В.А. Стеклову 12 августа 1919 года в Петроград.

«Единственный человек, здраво размышлявший и спасший оставшееся имущество, был А.С. Безикович, по-видимому, ученик Маркова не только специалист в области математики, но и в области решительных, точных и определенных действий».

- 18 июня 1920 года – командировка на 2 месяца в Москву, Петроград и для научных занятий за границу.
- 3 июня 1920 года – А.С. Безиковичу выдано удостоверение № 1620 для командировки в Петроград. Он везет с собой 100000 руб. казенных денег.
- 27 августа 1920 года – просьба ректора ПГУ – профессору А.С. Безиковичу, командированному в Петроград, выдать разрешение на проезд в отдельном

купе международного вагона, поскольку он везет 25 граммов радия, ценность которого исчислялась в 750000 рублей.

- 3 сентября 1920 года А.С. Безиковичу выдается удостоверение № 484 за подписью ректора и секретаря совета в том, что находящаяся при нем сумма в 2000000 рублей принадлежит ПГУ.
- 21 октября выдается еще одно удостоверение № 944, подтверждающее, что А.С. Безикович командирован Советом университета в Петроград и за границу с 1 июля 1920 г. по 1 июля 1921 г. с целью научных занятий и покупки оборудования для университета.

Далее в [2, с. 37] указано следующее: «На этом записи в личном деле А.С. Безиковича заканчиваются, и судить о том, куда были израсходованы деньги в сумме 2000000 рублей и радий в количестве 25 г на сумму 750000 руб., невозможно».

В октябре 1920 года А.С. Безикович выехал из Перми, но доехал только до Петрограда. Там он стал работать в должности профессора в Педагогическом институте и в должности приват-доцента в Петроградском университете.

Его талант высоко оценил П. Эренфест, который отправил работы А.С. Безиковича в Данию Х. Бору, в Англию Дж. Литлвуду и Г. Харди. Прекрасные отзывы привели к получению Рокфеллеровской стипендии для занятий за рубежом, но власти не дали разрешения на поездку.

В 1924 году А.С. Безикович принял решение нелегально покинуть Советскую Россию. Первоначально вместе с ним хотели это сделать А.А. Фридман и Я.Д. Тамаркин. Операция финансировалась отцом Фридмана – богатым нэпманом. В последний момент Фридман отказался от побега, а через несколько месяцев умер от тифа. В план Безиковича и Тамаркина входил переход через латвийскую границу, который включал переправу через замерзшую реку с не слишком твердым льдом. Для уменьшения давления нужно было перебираться ползком, что и сделал успешно Безикович. Однако Тамаркин – человек внушительных размеров – считал такой способ недостойным для человека и пошел пешком. Он успешно перешел реку, но заставил сопровождавших поволноваться.

Из Латвии А.С. Безикович перебрался в Копенгаген, где воспользовался Рокфеллеровской стипендией, чтобы заниматься под руководством Харальда Бора исследованиями в области квазипериодических функций. Из Копенгагена он отправился на несколько месяцев к Г. Харди, который в 1926–1927 годах предоставил ему доцентуру в Ливерпульском университете. В 1927 году он попал в Кембридж, где сначала читал лекции в университете, а с 1930 года стал штатным сотрудником в Тринити-Колледже. В течение многих лет в Кембридже он вел в газете еженедельную рубрику «спорных проблем» к удовольствию и для пользы студентов. Их решения он тщательно читал и аннотировал. Объявления типа «отличные решения проблемы 12 поданы М и N» вызывали желание молодых математиков и дальше совершенствовать свои аналитические способности.

Себя он называл знатоком «патологии математики». Если кто-либо выдвигал предположение, казавшееся Безиковичу неверным, он не успокаивался до тех пор, пока не находил контрдоводы. Слабым местом Безиковича был его «русский английский». Студенты в Кембридже стали было подсмеиваться над неправильными оборотами своего лектора (определенные или неопределенные артикли казались

ему лишними). Но одной шуткой он навсегда расположил к себе аудиторию, сказав: «Пятьдесят миллионов англичан говорят по-английски, как вы, но пятьсот миллионов русских говорят по-английски, как я».

В 1950 году А.С. Безикович в возрасте 59 лет стал преемником знаменитого Литлвуда на кафедре математики в Кембридже. В день своего 36-летия он, думая, что его собственные творческие силы иссякли, объявил: «Прошло четыре пятых моей жизни». Когда ему напомнили об этом при его назначении в 1950 году, он отправил открытку с текстом: «Числитель был правильным!» Он занимал кафедру до выхода на пенсию в 1958 году.

А.С. Безикович читал в Кембридже помимо обычного курса математического анализа теорию квазипериодических функций, топологию, меру Хаусдорфа. После выхода на пенсию он в течение нескольких лет читал лекции как приглашенный профессор в различных университетах США. За свою жизнь он опубликовал около 130 научных работ.

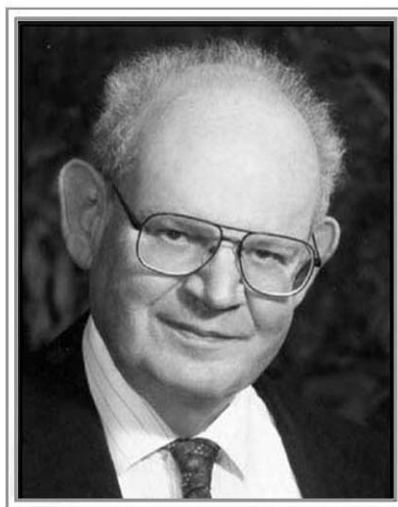
Абрам Самойлович не только обладал необычным математическим талантом, но был обаятельным и остроумным человеком, которого уважали и любили его коллеги и студенты. Одним из его близких друзей был Петр Леонидович Капица.

### **Бенуа Мандельброт и гениальные предшественники – Пуанкаре и Жюлиа**

Итак, главные действующие лица в грандиозном спектакле под названием «фрактальная геометрия» обозначены. Но автором сценария, режиссером и постановщиком несомненно является Бенуа Мандельброт.

Заметим, что он много раз подчеркивал заслуги обоих предшественников – Хаусдорфа и Безиковича – в создании понятия дробной размерности, важнейшего во всей фрактальной науке.

Родился он в Варшаве. В 1936 году семья Мандельбротов переехала в Париж, где Бенуа в 1947 году окончил Политехническую школу. В 1948 году в Калифорнийском технологическом институте (Калтех) в Пасадене он защитил магистерскую диссертацию по аэрокосмическим наукам, а высшую ученую степень доктора философии (по математике) он получил в 1952 году в Парижском университете. До 1958 года, когда Мандельброт окончательно переехал в США, он был приглашенным профессором в университетах Принстона, Женевы и Парижа. С 1974 года он стал членом совета по научным исследованиям фирмы ИВМ, а с 1984 – профессором математики Гарвардского университета.



Бенуа Мандельброт  
1924-2010

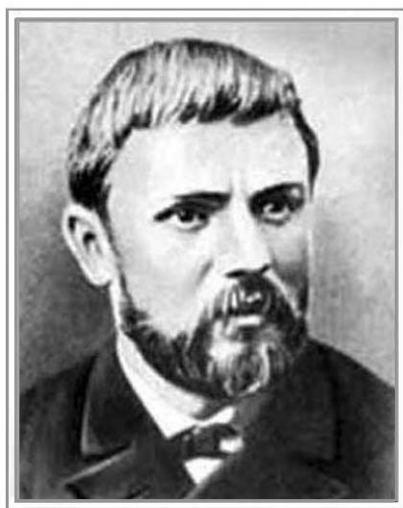
Перу Мандельброта принадлежит множество статей и три ставшие сегодня классическими монографии о фракталах и их важной роли в естественных и социальных науках, в математике: «Фрактальные объекты: форма, случайность и размерность» (1955), (1977); «Фрактальная геометрия природы» (1982). На русском языке есть перевод последней из указанных книг [3] и книги «Фракталы, случай и финансы (1959–1997)» [4].

В книге «Фракталы, случай и финансы» глава 1.1. начинается так:

«Почему унаследованная от Евклида геометрия так часто удостоивается определения “холодной” и “сухой”? Отчасти потому, что она неспособна описать форму финансовой хроники, облака, горы, морского берега или дерева. Финансовые хроники – это не периодические колебания, не восходящие или нисходящие прямые, изображающие “тенденции”; облака – не сферы; горы – не конусы; берега островов – не окружности, кора дерева отлична от поверхности цилиндра, а молния ударяет отнюдь не по прямой.

Лишь художники всегда это понимали, а Эжен Делакруа (1798–1863) однажды, говоря об архитектуре, очень удачно заметил: “Человек все идеализирует. Прямая линия – его изобретение, в природе прямых нет”» [4, с. 49].

Конечно, у Мандельброта были предшественники и до Хаусдорфа, и до Безиковича. Как указано в книге [5, с. 72], математическая линия развития идеи идет от Пуанкаре к Жюлиа и далее к Мандельброту.



Анри Пуанкаре  
1854 - 1912

Наследие Пуанкаре – несметные сокровища математики. Для увековечивания своего имени в науке Пуанкаре хватило бы качественной теории дифференциальных уравнений. Ведь именно он обнаружил существование четырех видов особых точек – седел, узлов, фокусов и центров (все названия принадлежат Пуанкаре), изучил их расположение на плоскости, ввел понятие предельного цикла, которое А.А. Андронов навсегда связал с автоколебаниями. Процитируем далее книгу [1, с. 175].

«Обнаружение сложных – хаотических и стохастических – режимов в детерминированной динамической системе также связано с именем Пуанкаре. Занимаясь изучением так называемой ограниченной задачи трех тел, он открыл существование особых фазовых кривых, отвечающих неустойчивым движениям.

Именно они являются тем механизмом, который хаотизирует, запутывает траектории в динамической системе. В знаменитых “Новых методах небесной механики” Пуанкаре так описывал гомоклиническую структуру:

“Если попытаться представить себе фигуру, образованную этими двумя кривыми – устойчивая и неустойчивая инвариантные кривые, проходящие через седловую особую точку, – и их бесконечными пересечениями, каждое из которых соответствует двояко-асимптотическому решению, то эти пересечения образуют нечто вроде решетки, ткани, сети с бесконечно тесными петлями; ни одна из двух кривых не должна пересечь самое себя, но она должна навиваться на самое себя самым сложным образом, чтобы пересечь бесконечно много раз все петли сети.

Поражаешься сложности этой фигуры, которую я даже не пытаюсь изобразить. Ничто не является более подходящим, чтобы дать нам представление о сложности задачи трех тел и вообще всех задач динамики, в которых нет однозначного интеграла...».

Как указано в [5, с. 73], первый рисунок гомоклинического пучка был сделан математиками Георгом Биркгофом и Полом Смитом в 1930-х годах.

Осознание этого открытия пришло много позже, похоронив лапласовский детерминизм<sup>2</sup>. Скорее всего, Пуанкаре понимал это. Он писал: «совершенно ничтожная причина, ускользающая от нас по своей малости, вызывает значительное действие, которое мы не можем предусмотреть, и тогда мы говорим, что это явление представляет собой результат случая. <...> Иногда небольшая разница в первоначальном состоянии вызывает большое различие в окончательном явлении. Небольшая погрешность в первом вызвала бы огромную ошибку в последнем. Предсказание становится невозможным, мы имеем перед собой явление случайное» (цит. по [1, с. 175]).

Еще одна линия, ведущая к фрактальной геометрии и теории хаоса, связана с именем Гастона Мориса Жюлиа, который уже после смерти Пуанкаре обнаружил гомоклинический пучок в квадратичном отображении плоскости на самое себя. Гастон Морис Жюлиа родился в Сиди-Бель Аббесе во французском Алжире. В Париже в 1914 году окончил Высшую нормальную школу. Он участвовал в Первой мировой войне, получил ранение и носил на лице кожаную повязку. В 1918 году опубликовал очень длинную статью о гомоклиническом пучке, используя анализ квадратичного отображения. Эта статья сделала его известным в математических кругах. В частности, в том же году он получил главную премию Французской академии. Впоследствии во фрактальной геометрии одним из самых известных его результатов стало множество Жюлиа. Будучи профессором в Высшей нормальной школе, Жюлиа преподавал в Парижском университете, в Политехнической школе в Париже.



Гастон Морис Жюлиа  
1893-1978

Как указано в [5, с. 74]: «Его версию сложного множества, как и в случае Пуанкаре, было очень сложно визуализировать... Дело практически не двигалось, пока компьютерная графика не попала в руки Бенуа Мандельброта».

<sup>2</sup>30 лет назад, в 1986 году, всемирно известный английский гидромеханик сэр Дж. Лайтхилл, бывший в то время президентом международного союза теоретической и прикладной механики, заявил:

«Тут я должен остановиться и снова выступить от имени широкого всемирного братства тех, кто занимается механикой. Мы все глубоко осознаем сегодня, что энтузиазм наших предшественников по поводу великолепных достижений ньютоновской механики побудил их к обобщениям в этой области предсказуемости, в которые до 1960 года мы все охотно верили, но которые, как мы теперь понимаем, были ложными. Нас не покидает коллективное желание признать свою вину за то, что мы вводили в заблуждение широкие круги образованных людей, распространяя идеи о детерминизме систем, удовлетворяющих закону Ньютона, – идеи, которые, как выяснилось после 1960 года, оказались неправильными» [6, с. 38].



Рис. 1. Гомоклинический пучок Анри Пуанкаре (рис. Й. Уэды) [5, с. 73]

Функция последования

$$x_k = S(x_{k-1})$$

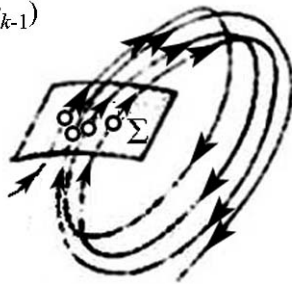


Рис. 2. Сечение Пуанкаре фазового потока в трехмерном пространстве:  $\Sigma$  – секущая поверхность, которой фазовые траектории не касаются

эту запутанность, используя качественную теорию дифференциальных уравнений, из которой выросла вся нелинейная динамика. Именно тогда он ввел то, что сегодня называется сечением Пуанкаре и снижает число переменных в задаче (рис. 2).

Этот метод, как известно, позволяет эффективно понизить размерность исследуемого фазового пространства с помощью функции последования  $S(x_{k-1}) = x_k$ , определяющей связь координат  $x_{k-1}$  пересечения траектории с поверхностью  $\Sigma$  с координатами  $x_k$  следующего пересечения.

Процитируем далее Стюарта [7, с. 213–215].

«Сечение Пуанкаре помогает распознать квазипериодические решения: когда они возвращаются к интересующей нас поверхности, то не попадают в точности в ту же точку, но точка, в которую они попадают, раз за разом, крохотными шажочками обходит на поверхности замкнутую кривую. <...> Проанализировав топологию отображения первого возвращения, Пуанкаре заметил, что все может быть куда сложнее. Две конкретные кривые, связанные динамикой, могут пересечься. Само по себе это не слишком плохо, но если вы пройдете по кривым до того места, где они вновь вернутся на вашу поверхность, то результирующие кривые вновь должны будут пересечься, но в другом месте. Проведите их еще круг, и они снова пересекутся. Мало того, эти новые кривые, полученные передвижением первоначальных кривых, на самом деле не новы. Они представляют собой части первоначальных кривых. <...> В результате получается очень сложная картина, напоминающая сеть, сплетенную каким-то безумцем: кривые в ней ходят зигзагами туда–обратно, пересекая друг друга, а зигзаги эти сами, в свою очередь, ходят зигзагами туда–обратно и т.д. до любого уровня сложности. В конце концов, Пуанкаре заявил,

Откуда и как появилось открытие Пуанкаре гомоклинического плетения (рис. 1)?

Для ответа обратимся к главе 8 «Орбитальный хаос. Задача трех тел» в книге [7, с. 211–216], следуя ее тексту.

Норвежский математик Геста Миттаг Леффлер в 1889 году убедил короля Норвегии и Швеции Оскара II объявить конкурс немалым призом на решение задачи о взаимодействии  $n$  тел. Конкурс был посвящен шестидесятилетию короля.

Решение должно было представлять некий сходящийся ряд, поскольку точную формулу вряд ли можно было найти. Пуанкаре не решил эту сложную задачу, но подвинулся в решении столь далеко, что приз получил. В 1900 году он опубликовал результаты исследования для нескольких отдельных случаев, в которых решение в виде ряда можно было получить. Но в одном случае орбита пылинки (модель пылинки, с которой взаимодействуют два массивных тела, а она на их движение не влияет) была чрезвычайно запутанной. Пуанкаре вывел

что зашел в тупик. <...> Сегодня мы называем его картину гомоклиным (“замкнутым на себя”) плетением.

<...> Мы уже не можем считать, что простые правила порождают простое поведение. Речь идет о том, что в обиходе часто называют теорией хаоса, и все это восходит непосредственно к Пуанкаре и его работе на приз короля Оскара».

Вот и почти все о гениальном открытии Пуанкаре. Но история – коварная дама. Примерно в 1990 году Джун Бэрроу-Грин обнаружила в Стокгольме в Институте Миттага-Леффлера печатный экземпляр работы Пуанкаре, отличающийся от общеизвестного. Вновь цитата из Стюарта:

«Это оказалась официальная пояснительная записка к заявке Пуанкаре на приз, и в ней была ошибка. Подавая работу на конкурс, Пуанкаре упустил из виду хаотические решения. Он заметил ошибку прежде, чем работа была опубликована, доработал ее, выведя все, что было необходимо, – а именно хаос, – и заплатил (надо сказать, больше, чем стоил приз) за то, чтобы оригинальная версия была уничтожена, а в печать пошел исправленный вариант. Но по какой-то причине в архиве Института Миттага-Леффлера сохранился экземпляр первоначальной ошибочной версии, хотя сама история забылась, пока Бэрроу-Грин не откопала ее и не опубликовала свое открытие в 1994 году» [7, с. 215].

### **О неизбежных вопросах, которые привели к появлению фрактальной геометрии, ответе на один из них, об определении фрактала и ряде примеров**

Глава 1.1. в книге [4, с.49–50] начинается с перечисления неизбежно возникающих вопросов, которые Мандельброт сводит к следующим.

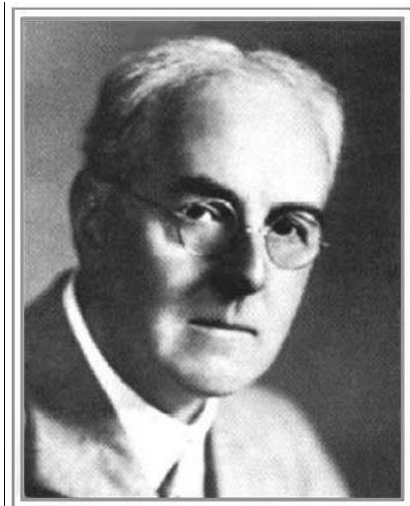
- «Как измерить изменчивость биржевых хроник – хотя бы для того, чтобы иметь возможность реалистично оценивать финансовый риск?»
- «Как измерить длину берега Британии?»
- «Как можно охарактеризовать форму речного берега, линии водораздела или границы области притяжения, причем не с гидравлической, но с динамической точки зрения?»
- «Как измерить и сравнить шероховатость самых обыкновенных объектов – таких, например, как расколотый камень, склон горы или кусок ржавого железа?»
- «Какова форма облака, языка пламени, сварного шва?»
- «Какова плотность распределения галактик во Вселенной?»

Давайте попробуем ответить на один из вопросов: «Какова протяженность береговой линии Британии?» Ответ на этот вопрос важен в связи с ролью наблюдателя и разрешающей способностью приборов для определения размерности.

Появляется новая важная для нашего изложения фигура – выдающийся специалист по гидродинамике Льюис Фрай Ричардсон.

Как пишет Мандельброт: «Ричардсон <...> был очень интересным и оригинальным человеком, который обо всем имел собственное мнение, почти никогда не совпадающее с общепринятым; часто люди просто не понимали его» [4, с. 553]. Ричардсон окончил Кембриджский университет, получив степень бакалавра по физике, математике, химии, биологии и зоологии, поскольку сомневался в выборе дальнейшего





Льюис Фрай Ричардсон  
1881-1953

В 1992 году вышла его монография о численных методах предсказания погоды [8]. «Через тридцать три года книга была переиздана как классическая, однако, в течение первых двадцати лет после выхода в свет она пользовалась весьма сомнительной репутацией. Оказалось, что, аппроксимируя дифференциальные уравнения атмосферы уравнениями в конечных разностях, Ричардсон выбрал для пространственных и временных шагов неподходящие значения. Поскольку о необходимости проявить осторожность при выборе значений таких шагов тогда еще никто не подозревал, этой ошибки едва ли можно было избежать» [4, с. 553–554].

Широкую известность Ричардсону принесло следующее описание физической картины турбулентности

Big whirls make little whirls  
Which feed on their velocity,  
Little whirls have smaller ones  
And so on into viscosity.

В журнале «Успехи математических наук», посвященном юбилею А.М. Обухова, одного из классиков турбулентности, есть стихотворный вариант перевода

В поток бурлящий бросив взгляд,  
Вихрей увидишь там каскад.  
Меньшой у большего энергию берет,  
Пока мельчайших вязкость не сотрет.

Со строчками Ричардсона связан один забавный эпизод, который описан М.И. Рабиновичем. «Однажды на зимней Горьковской школе по нелинейным волнам сразу после открытия (с обсуждением программы), во время которого я написал на доске известное выражение Ричардсона о делении вихрей в турбулентном потоке, М.Л. (Михаил Львович Левин) подарил мне стих:

Big whores make little whores  
Which feed on their velocity,  
Little whores have smaller ones  
And so on into viscosity.

пути. С кембриджской администрацией у него почему-то не сложились отношения, поэтому, когда, спустя много лет после окончания университета, ему понадобилась докторская степень, он отказался получать необходимую для этого степень магистра в Кембридже, что требовало от него лишь заплатить 10 фунтов. Вместо этого он на общих основаниях поступил в Лондонский университет, где преподавал, учился вместе со студентами и получил докторскую степень по математической психологии, когда ему было 47 лет.

Он начинал свою карьеру в Метеорологической службе, которая после Первой мировой войны вошла в состав созданного Министерства ВВС. Ричардсон был кватером и убежденным противником войны, поэтому ему пришлось уйти в отставку.

Дело в том, что на доске слово “whirl” (вихрь) в первой строчке было написано с ошибкой “whorl”. М.Л., конечно, не мог пройти мимо такой подставки. Тем более, что письменные  $l$  и  $e$  топологически эквивалентны. Вручение мне приведенного текста сопровождалось комментарием: “И в нашем замечательном обществе точно так же”» [9, с. 214–215].

Ричардсон был также изобретательным экспериментатором. Вот пример одного из его экспериментов по турбулентной диффузии. Ему нужно было большое количество буев, которые были бы заметны издали (то есть лучше всего белого цвета) и не слишком торчали бы в воде, чтобы их не сдувало ветром. Ричардсон купил большой мешок корнеплодов пастернака и сбросил их с одного из мостов через канал Кэйн-Код, а сам проводил наблюдения с другого моста ниже по течению.

Ричардсон преподавал и занимался административной работой многие годы. Получив наследство, он рано ушел в отставку и полностью посвятил себя любимой теме – изучению психологии вооруженных конфликтов.

В книге Мандельброта есть глава 11, которая начинается так: «Эта глава посвящена первому пересечению фрактальной геометрии природы с основным направлением математической физики» [4, 156]. Речь идет о теории турбулентности и уравнениях Эйлера и Навье–Стокса. Заметим, что задача об исследовании уравнения Навье–Стокса для вязкого потока жидкости отнесена Институтом Клэя к величайшим математическим задачам тысячелетия [7]. «Задача тысячелетия не просит математиков найти явные решения уравнения Навье–Стокса, поскольку это, по существу, невозможно. Не имеет она отношения и к численным методам решения этих уравнений, несмотря на всю их важность. Вместо этого в задаче требуется найти доказательство фундаментального теоретического свойства: существования решений. При заданном состоянии жидкости в определенный момент времени – при известных характеристиках ее движения – существует ли решение уравнения Навье–Стокса, верное для всего будущего времени, начиная с рассматриваемого момента?» [7, с. 308].

Для нас интересен конец цитируемой статьи из [7], поскольку с ним связаны некоторые предположения Мандельброта:

«...на сайте Института Клэя Чарльз Фефферман написал: “Существует множество интереснейших задач и гипотез о поведении решений уравнений Эйлера и Навье–Стокса.

<...> Поскольку мы не знаем даже, существуют ли эти решения, наши представления о них находятся на очень примитивном уровне. Стандартные методы (из теории дифференциальных уравнений в частных производных) представляются недостаточными для решения этой задачи. Вместо этого нам, вероятно, требуются новые глубокие идеи”».

Создается впечатление, что именно такие идеи и высказывает Мандельброт. Прочитав его: «Рассматривая... сложности, возникающие при описании турбулентности с помощью решений Эйлера и Навье–Стокса, я склонен считать их следствием того факта, что не существует стандартной особенности, которая объясняла бы воспринимаемые нами на интуитивном уровне характеристические признаки турбулентности. Исходя из этого, я заявляю, что турбулентные решения фундаментальных уравнений включают в себя особенности или “почти особенности” совершенно иного рода. Эти особенности представляют собой масштабно-инвариантные фрактальные множества, а почти особенности – приближения к ним» [7, с. 157].

Далее сформулированы два конкретных предположения.

Первое: особенности решений уравнения Эйлера представляют собой фрактальные множества.

Второе: особенности решений уравнения Навье–Стокса могут быть только фрактальными.

Наконец, в [4] в разделе «Однородная фрактальная турбулентность» Мандельброт пишет: «Глава 11 этого эссе написана исключительно с целью выразить мое основное предположение относительно турбулентности, которое заключается в том, что турбулентность в вещественном пространстве представляет собой феномен на несущем множестве размерности  $D \sim 2.5–2.6$ » [4, с. 595] (см. [10 и 11]). Он также указывает на работу [12], в которой развивается иной подход: удлинение и свертывание вихрей изучается с помощью методов, разработанных для исследования полимеров.

Вернемся к Ричардсону.

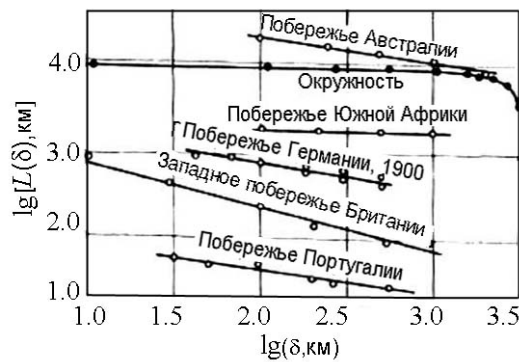


Рис. 3. Длина береговых линий как функция выбранного шага  $\delta$  (км) [5]

Уже после его смерти при разборке архива были обнаружены черновики удивительного исследования, которое было попыткой ответить на поставленный выше вопрос. Ричардсон заменил линию на подробной карте Британии замкнутой ломаной линией, составленных из отрезков некоторой длины  $\delta$ . Все вершины ломаной располагались на побережье. Он принимал длину  $L_\delta$  за приближенное значение длины побережья, соответствующее выбранному значению  $\delta$ . Естественно было думать, что при уменьшении значения  $\delta$  соответствующие значения длин аппроксимирующих ломаных будут стремиться к конечному пределу. Последний и нужно считать длиной морского побережья. Именно так получилось, когда описанный метод был применен к окружности, нарисованной на той же карте (рис. 3 из книги [5, с. 8]).

Однако для линии морского побережья величина  $L_\delta$  с уменьшением  $\delta$  неограниченно возрастала. Иными словами, линия побережья была настолько изрезанной, вплоть до самых малых масштабов карты, что с уменьшением  $\delta$  (длины звена аппроксимирующей ломаной) величина  $L_\delta$  не стремилась к конечному пределу, а напротив, возрастала. Причем во всем диапазоне изменения  $\delta$  возрастание подчинялось степенному закону

$$L_\delta = C\delta^{1-D},$$

где  $C = \text{const} > 0$ ,  $D = \text{const} > 1$ . Для измеренной таким же образом части того же побережья между некоторыми точками получалась формула того же вида с теми же  $D$ , но меньшими  $C$ . Для побережья Австралии степенной закон сохранился, но  $C$  и  $D$  были другими. Заметим, что постоянная  $D$  безразмерна, а постоянная  $C$  имеет необычную размерность длины в дробной степени. Формальный переход к  $\delta \rightarrow 0$  в приведенной формуле дает странный результат: определяемая изложенным способом длина морского побережья (и любого отрезка длины побережья) бесконечна.

Длины двух разных частей побережья, аппроксимированные ломаными с одной и той же длиной звена  $\delta$ , имеют вид

$$L_{\delta 1} = C_1 \delta^{1-D} \quad \text{и} \quad L_{\delta 2} = C_2 \delta^{1-D},$$

следовательно,

$$\frac{L_{\delta 1}}{L_{\delta 2}} = \frac{C_1}{C_2}.$$

То есть зависимость от длины звена исчезла. Таким образом, сравнивать отдельные участки побережья можно, но не по их длинам, а по коэффициентам  $C$ .

Иными словами, сам подход к определению длины морского побережья по той же методике, что и для гладких кривых, неприменим. Оказывается, что адекватным представлением для линии побережья является кривая, называемая фракталью (или фракталом; от латинского слова fractus – дробный, ломаный). Чтобы ввести это новое понятие, начнем с классического примера сложного множества, которое было предложено Георгом Кантором (канторово множество).

Возьмем отрезок  $[0,1]$ , имеющий единичную длину, разделим его на три части и выбросим открытый интервал  $(1/3;2/3)$ . Будем дальше поступать аналогично: отрезки  $[0;1/3]$  и  $[2/3;1]$  делим на три части и выбрасываем середины. На  $k$ -м шаге описываемой процедуры получим  $2^k$  оставшихся отрезков, не связанных друг с другом. Длина каждого отрезка равна  $(1/3)^k$ . В пределе, когда  $k \rightarrow \infty$ , число вырезанных отрезков неограниченно возрастает, а длина их стремится к нулю. Действительно, суммарная длина всех вырезанных отрезков представляет собой сумму геометрической прогрессии со знаменателем  $q = 2/3$  и первым членом  $a_1 = 1/3$ , то есть

$$s = \frac{a_1}{1 - q} = \frac{1}{3} + \frac{2}{9} + \frac{4}{27} + \dots = \frac{1/3}{1 - 2/3} = 1.$$

Поскольку исходная длина отрезка равна единице, то мера остатка равна нулю. Однако это не значит, что ничего нет – множество существует, но нужны другие понятия для его количественной характеристики. Какие это понятия?

Начнем с понятия топологической размерности. Ее определение основано на понятиях соприкосновения и рассечения. Топологическая размерность множества равна нулю, если его можно представить в виде объединения сколь угодно малых частей, не находящихся между собой попарно в соприкосновении. Примером такого множества может служить совокупность изолированных друг от друга, не соприкасающихся точек. Далее определения можно давать по индукции. Топологическая размерность  $D_T = n$ , если: (1) – это множество можно рассечь подмножествами размерности  $(n - 1)$  на сколь угодно большое число сколь угодно малых частей, не находящихся между собой попарно в соприкосновении; (2) – указанные в п. 1 рассечения нельзя произвести подмножествами размерности меньше  $(n - 1)$ . Пример: линию всегда можно разбить точками на сколь угодно большое число сколь угодно малых частей.

Топологическая размерность всегда целое число. Для канторова множества она равна нулю, поэтому это не то, что нам нужно. Обратимся теперь к размерности Хаусдорфа–Безиковича, введение которой основано на способе измерения площади

путем покрытия ее теми или иными элементами. При этом появляются два осложнения. Набор, например, квадратов или кругов (элементы покрытия) может не покрывать всю измеряемую площадь, и нужно уменьшать размер элементов. Квадраты или круги могут перекрываться, и площадь покрытия окажется больше покрываемой. И в этом случае следует изменять размер элементов.

Пусть  $M$  – некоторое множество в пространстве, на котором определено расстояние между двумя точками (метрическое пространство). Рассмотрим покрытие множества  $M$  шарами радиусами  $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_N$ , меньшими  $\rho$ , или кубами с ребрами  $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_N$ , меньшими  $\rho$ , и составим выражение

$$m_d(M) = \liminf_{\rho \rightarrow 0} \sum_{m=1}^{N(\rho)} \rho_m^d,$$

где  $d$  – вещественное неотрицательное число;  $\inf$  означает нижнюю по всем покрытиям грань этих сумм. Тогда  $m_d(M)$  называется Хаусдорфовой  $d$ -мерой множества  $M$ . В зависимости от  $d$   $d$ -мера может быть равна нулю ( $d$  – велико), бесконечности ( $d$  – близко к нулю) или при единственном значении  $d = D$  она может оказаться отличной от нуля и ограниченной. Число  $D$  называется размерностью Хаусдорфа–Безиковича данного множества, причем  $D$  не зависит от формы элементов покрытия – шары это, кубы или еще что.

Пусть в определении  $m_d(M)$  все радиусы одинаковы, то есть  $\rho_m = \rho$ , тогда

$$m_d(M) = \lim_{\rho \rightarrow 0} (N \rho^d).$$

Прологарифмируем последнее выражение

$$\ln m_d(M) = \lim_{\rho \rightarrow 0} \{ \ln N - d \ln(1/\rho) \}, \quad N = N(\rho)$$

или после простых преобразований

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \left\{ \frac{\ln m_d(M)}{\ln(1/\rho)} - \frac{\ln N}{\ln(1/\rho)} + d \right\} = 0.$$

Но  $\left\{ \lim_{\rho \rightarrow 0} m_d(M)/\ln(1/\rho) \right\} = 0$ , поскольку числитель выражения, по нашему предположению, отличен от нуля и ограничен, а знаменатель стремится к бесконечности. Поэтому для размерности Хаусдорфа–Безиковича находим

$$D = \lim_{\rho \rightarrow 0} \left[ \frac{\ln N(\rho)}{\ln(1/\rho)} \right]. \quad (1)$$

Вычислять  $D$  по формуле (1) удастся только для масштабно-инвариантного множества (имеет место инвариантность относительно параллельного переноса и изменения масштаба), когда каждая часть множества подобна целому, а  $N(\rho)$  – однородная функция. Мы уже указывали, что Бенуа Мандельброт придумал неологизм фрактал и назвал такие множества самоподобными. Величина  $D$ , определяемая (1), называется иногда размерностью подобия или фрактальной размерностью.

Предположим, что мы хотим определить фрактальную размерность для куба. Тогда  $N = c\rho^{-n}$ , где  $c = \text{const}$ , и

$$D = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\ln c - n \ln \rho}{\ln(1/\rho)} = n, \text{ так как } \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\ln c}{\ln(1/\rho)} = 0.$$

Для таких множеств размерность равна топологической  $D_T$ . Вернемся к канторову множеству. Ситуация меняется. Роль радиуса элемента заполнения будет играть длина отрезка, оставшегося на  $k$ -м этапе построения, то есть  $(1/3)^k$ ; число элементов покрытия равно числу отрезков,  $2^k$ . Тогда

$$D = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\ln 2^k}{\ln 3^k} = \frac{\ln 2}{\ln 3} \approx 0.6309.$$

Размерность получилась дробной!

Мандельброт, публикуя данные Ричардсона, привел свои оценки размерности Хаусдорфа–Безиковича для разных береговых линий. Для гладкого южного побережья Африки получилось почти 1, для западного побережья Британии – 1.3, для изрезанного фьордами побережья Норвегии – 1.52. Опять дробная размерность!

У Ю.А. Данилова в его эссе «Фрактальность» есть раздел «С точки зрения мухи» [1, с. 187–188], который начинается так: «Вопрос о том, является ли данный предмет гладким или фрактальным, сам по себе лишен смысла! Ответ на подобный вопрос зависит от остроты зрения наблюдателя или от разрешающей способности прибора, которым он пользуется, то есть от того, насколько мелкие детали различает наблюдатель. Гладкая поверхность высочайшего класса обработки при соответствующем увеличении будет выглядеть как горный ландшафт, подвергшийся интенсивной бомбардировке метеоритами».

Далее Ю.А. Данилов, ссылаясь на Мандельброта, приводит пример, демонстрирующий, что само понятие размерности относительно.

«Клубок ниток кажется мухе с большого расстояния точкой (топологическая размерность 0). Подлетев поближе, муха видит большую точку – диск (топологическая размерность 2). С более близкого расстояния муха видит, что перед ней шар (топологическая размерность 3). Во всех случаях все неровности сглаживаются из-за большого расстояния, и размерность Хаусдорфа–Безиковича совпадает с топологической размерностью. Подлетев совсем близко, муха видит перед собой клубок гладких ниток, то есть хитрым образом сложенную пространственную кривую (топологическая размерность 1). И лишь сев на клубок, муха видит пушинки, обрамляющие нить, то есть ощущает фрактальность шерстяной нити.

Какова же “истинная” размерность клубка шерсти? Да ее просто не существует: все зависит от точки зрения наблюдателя, разрешающей способности его глаз или прибора» [4, с. 188].

И еще одно замечательное наблюдение Ю.А. Данилова – разрешение загадки, которую он формулировал в виде вопроса: «Почему в большинстве эмпирических формул, в изобилии встречающихся в любом инженерном справочнике, показатели степеней в различных зависимостях такие некрасивые, то есть выражаются необъяснимо странными с точки зрения традиционной физики дробными числами типа 1.1378... или 2.9315...?» Он аккуратно пишет, что, по-видимому, дело в том, что «при разрешениях, достижимых в технике, в игру вступает фрактальность среды, поверхности и т.д., не принимавшаяся во внимание физиками, но вполне ощутимая на эмпирическом уровне для инженеров» [1, 188].



Роберт Кох

1843-1910

«... тальной размерностью среды» [1, 189].

Размерность Хаусдорфа–Безиковича (или ее частный случай – фрактальная размерность) есть именно та характеристика, которая позволяет отличать пустое множество, для которого  $m_d$  и  $D$  равны нулю, от канторова и ему подобных.

Б. Манедльброту принадлежат два следующих определения [4, с. 19].

- Фракталом называется множество, размерность Хаусдорфа–Безиковича которого больше его топологической размерности.
- Фракталом называется структура, состоящая из частей, которые в каком-то смысле подобны целому.

Первое определение весьма ограничительно, но строго. Второе подчеркивает важный признак фрактала: он выглядит одинаково, в каком бы масштабе его ни наблюдать.

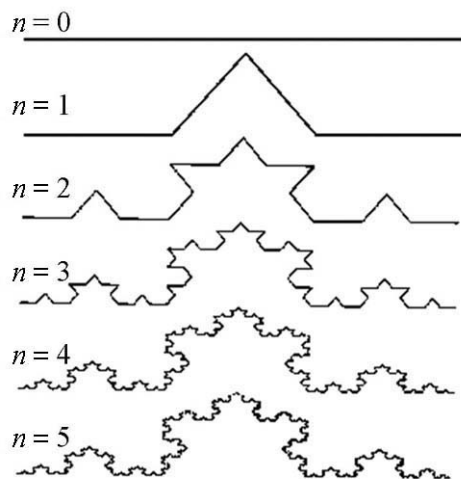


Рис. 4. Последовательность построения триадной кривой Коха

Физика фрактальной среды иногда сильно отличается от физики сплошной среды, в частности, диффузия во фрактальной среде происходит иначе, чем в обычной сплошной среде: из-за узких мест, крутых поворотов и тупиков движение частиц затрудняется и диффузия замедляется. По Ю.А. Данилову, «Лауреат Нобелевской премии де Жен сравнил частицу, блуждающую в фрактальной среде, с муравьем в лабиринте. Трудно придется муравью. Отсюда и дробные показатели в различных зависимостях. <...> Возникает новое, интегродифференциальное уравнение, содержащее новый необычный объект – производную (по времени) дробного порядка, связанного с фрактальной размерностью среды» [1, 189].

Хаотические (странные) аттракторы являются фракталами – объектами, которые при увеличении проявляют все большее число деталей. Хаос сам порождает фракталы.

Для иллюстрации второго определения рассмотрим так называемую триаду Коха. Чтобы построить триаду, возьмем прямолинейный отрезок единичной длины  $L(1) = 1$  ( $n = 0$  на рис. 4), разделим его на три равные части и заменим среднюю часть двумя другими сторонами построенного на ее базе равностороннего треугольника. Получится так называемый образующий элемент, которому на рис. 4 соответствует  $n = 1$ .

На следующем шаге ( $n = 2$ ) построения той же элементарной операции подвергается каждый отрезок длиной  $1/3$ . Иными словами, каждое прямолинейное звено заменяется уменьшенным образующим элементом и получается кривая, состоящая из 16 звеньев, длина которой  $L(1/9) = (4/3)^2 = 16/9$ . Действуя подобным образом, получаем кривые, показанные на рис. 4 для  $n = 3$ ,  $n = 4$  и  $n = 5$ .

Кривая на любом конечном шаге преобразования  $n$  называется предфракталом и имеет длину  $L(\delta) = (4/3)^n$ , где  $\delta = 3^{-n}$ . При  $n \rightarrow \infty$  длина звена  $\delta \rightarrow 0$ , а длина всей ломаной  $L(\delta) \rightarrow \infty$ . Из соотношения  $\delta = 3^{-n}$  следует, что  $n = \ln(1/\delta)/\ln 3$ , поэтому  $L(\delta) = (4/3)^{\ln(1/\delta)/\ln 3}$  или

$$L(\delta) = \exp \left\{ \frac{\ln(1/\delta) \ln 4 - \ln 3}{\ln 3} \right\} = \left( \frac{1}{\delta} \right)^{(\ln 4 - \ln 3)/\ln 3} = \delta^{1-D},$$

где  $D = \frac{\ln 4}{\ln 3} \cong 1.2628$ .

Последняя формула совпадает с эмпирическим уравнением Ричардсона. Число сегментов  $N(\delta) = 4^n = 4^{-\ln \delta / \ln 3}$  и может быть записано в виде

$$N(\delta) = \delta^{-D},$$

где  $D$  – фрактальная размерность. Вернемся к формуле (1). В нашем случае роль радиуса элемента заполнения будет играть длина отрезка на  $n$ -м этапе построения, то есть  $(1/3)^n$ , а число элементов –  $4^n$ .

Тогда, по формуле (1)

$$D = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{\ln 4^n}{\ln 3^n} \right) = \frac{\ln 4}{\ln 3} \approx 1.2628.$$

Очевидно, что на каждом этапе построения предфракталы Коха могут быть растянуты в прямую линию, поэтому топологическая размерность триады Коха  $D_T=1$ .

Таким образом, поскольку  $D > D_T$ , кривая Коха есть фрактальное множество с фрактальной размерностью  $D = 1.2628$ .

На рис. 5 представлен процесс построения фракталов, который носит название «салфетка» и «ковер» Серпинского. Поскольку способ построения фракталов ясен из рисунка, мы не останавливаемся на его описании.

Приведенное нами рассмотрение фрактальных кривых, вообще говоря, нетрудно перенести на поверхности, трехмерные тела и объекты любой топологической размерности (см., напр., [13]).

Пространственный аналог квадратного ковра Серпинского был предложен австрийским математиком Менгером (рис. 6) и получил название губки Менгера (см., напр., [14, с. 38–39]).



Вацлав Серпинский  
1882-1969



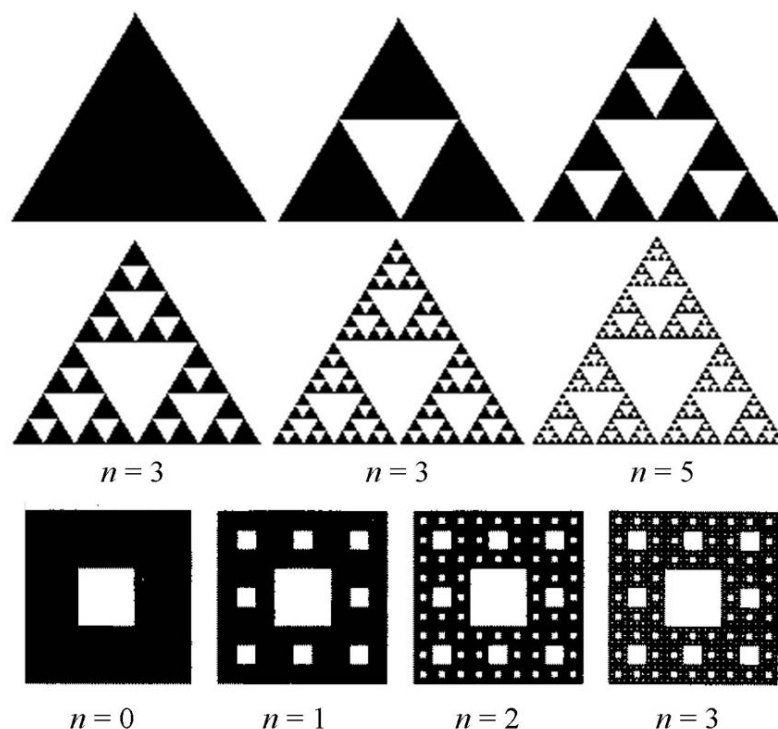


Рис. 5. Построение салфетки и ковра Серпинского

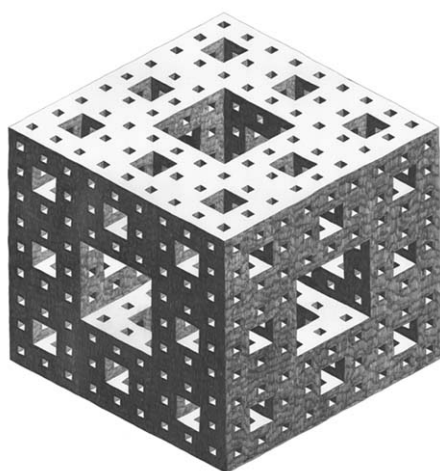


Рис. 6. Губка Менгера

кубика в 20 более мелких кубиков, размером в 3 раза меньше исходного, продолжается до бесконечности. Получается идеально самоподобный объект – губка Менгера.

Фрактальная размерность губки Менгера

$$D = \frac{\ln 20}{\ln 3} \approx 2.7268.$$

Так как  $2 < D < 3$ , то губка имеет нулевой объем, но как фрактальный объект обладает бесконечной площадью поверхности своих пор.

Существуют ли фракталы, у которых  $D = D_T$ ? Ответ: «да». Один из примеров – кривые итальянского математика Д. Пеано (1858–1932), открытые еще в 1890 году. Вот один из вариантов кривой Пеано. Пусть начальным элементом будет единичный квадрат, каждая из сторон которого заменяется на следующем шаге образующим элементом, изображенном на рис. 7.

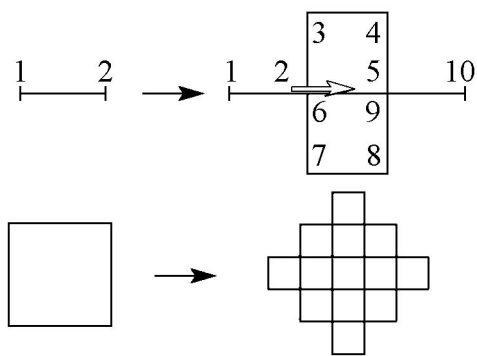


Рис. 7. Последовательность построения кривой Пеано

Он состоит из 9 отрезков длиной  $1/3$  каждый, соединенных друг с другом под прямым углом. Цифры показывают путь обхода данной кривой. Очевидно, что в этом случае неизбежны две точки самоконтакта 2–6 и 5–9. В результате исходный квадрат преобразуется так, как показано на рис. 7. Далее каждый из отрезков образовавшейся фигуры длины  $1/3$  преобразуется подобным образом, и так до бесконечности. Возникает самоподобная непрерывная кривая, плотно заполняющая квадратную область с площадью, равной 2. Тогда

$$D = -\frac{\ln 9}{\ln(1/3)} = 2.$$

Рассмотрим еще одну иллюстрацию второго определения Мандельброта – масштабно-инвариантную фрактальную кривую, выражаемую функцией К. Вейерштрасса (1815–1897), которая задается как [14, с. 44]

$$u(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a^n \cos(b^n \pi x). \quad (2)$$

Вейерштрасс доказал, что эта функция не имеет производной, если  $0 < a < 1$ ,  $ab > 1 + (3/2)\pi$ . Английский математик Г.Х. Харди в 1916 году доказал, что такая функция не является дифференцируемой ни в одной точке и при более слабом условии:  $a < 1$ ,  $b > 1$ ,  $ab > 1$ .

Рисунок, взятый из [14], соответствует  $a = 0.9$ ;  $b = 1.3$ . В [14, с. 44–45] предлагается следующее объяснение недифференцируемости. Согласно (2), построение  $u(x)$  начинается с гладкой функции  $u_1(x) = a \cos(b\pi x)$ . Затем на нее наклады-

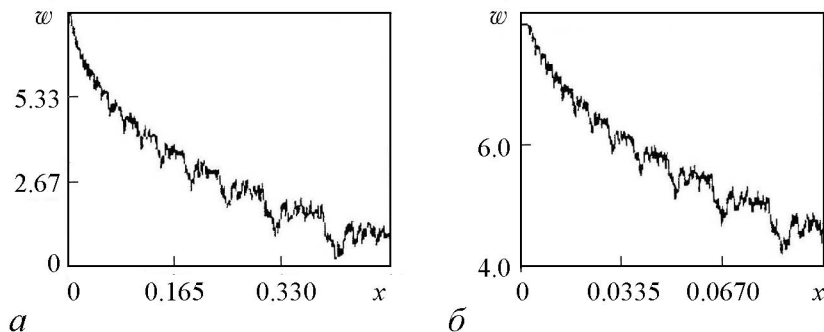


Рис. 8. Кривая Вейерштрасса



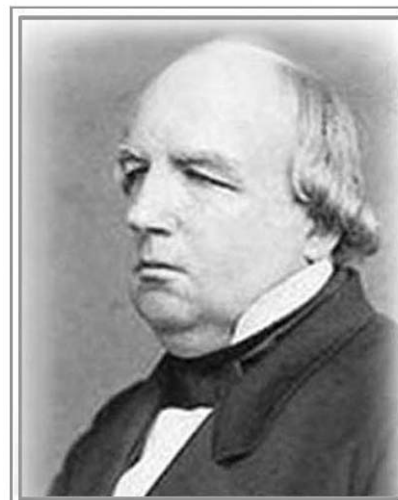
Алексей Николаевич  
Крылов (1863-1945)

известный кораблестроитель Алексей Николаевич Крылов (1863–1945) применил при моделировании процесса колебаний корабля [15].

Позволим некоторое историческое отступление. У российских ученых имя Вейерштрасса всегда связывается с именем Софьи Ковалевской, которая познакомилась с ним в 1870 году, когда ей было 20 лет, а Вейерштрассу 55, и он считался величайшим аналитиком своего времени. Вейерштрассу из-за плохого здоровья приходилось читать лекции сидя, а кто-нибудь из способных студентов делал записи на доске. Несмотря на это, на его лекциях аудитория была полна. Ковалевской не разрешили посещать его лекции из-за ограничения прав женщин. Однако Вейерштрасс, узнав об этой решительной и энергичной девушке, устроил для нее частные уроки. Их дружба продолжилась более двадцати лет. Ее оборвала лишь мучительная и преждевременная смерть этой замечательной женщины.



Софья Ковалевская  
1850-1891



Карл Вейерштрасс  
1815-1897

вается  $u_2(x) = a^2 \cos(b^2 \pi x)$ , имеющая меньшую амплитуду и большую частоту, чем  $u_1(x)$ . Далее добавляется еще более мелкая и густая «рябь»  $u_3(x) = a^3 \cos(b^3 \pi x)$  и так далее. На рис. 8, а приведен график для  $0 \leq x \leq 0.5$ . Если выделить диапазон изменения переменной  $0 \leq x \leq 0.1$  и затем увеличить эту область до размеров всего графика на рис. 8, а, то можно получить почти такую же исходную кривую (рис. 8, б). Повтор построения показывает, что кривая воспроизводится на любом сколь угодно малом масштабе, то есть имеется соответствие со вторым определением фрактала, данным Мандельбротом.

Любопытно заметить, что подобные кривые (их называют «монстрами») знамени-

Интересный аспект этой дружбы раскрывают в своей книге «Небесные встречи. Истоки хаоса и устойчивости» Ф. Диакю и Ф. Холмс [16]. Они пишут так: «Несмотря на всю важность вкладов, внесенных Ковалевской в механику, мы вспомнили историю Сони Ковалевской и Карла Вейерштрасса по другой причине. Дружба этих двух неординарных людей вылилась в длительную переписку, в которой можно найти корни многих математических идей. В частности, читая письма Вейерштрасса, начинаешь понимать образ его мышления и работы. Это совсем не похоже на чтение его математических статей. Научные статьи, особенно по математике, представляют собой только научный продукт. Они скрывают само создание, путь к конечному результату, надежды и сомнения, страсть, движение в ложном направлении и ошибки, разочарования. Все это присутствует в письмах. Они изображают человеческий разум, стоящий за абстрактными теоремами. Они показывают неудачные попытки, результаты которых никогда не публиковались. Они позволяют нам проследить не всегда гладкий процесс изобретения» [16, с. 233].

Заметим, что помимо размерности Хаусдорфа–Безиковича фракталы характеризуются и другими размерностями, например, размерностью венгерского математика Альфреда Реньи (1921–1970)

Реньи предложил континуальное семейство размерностей, включающее в себя многие известные размерности, в том числе размерность Хаусдорфа–Безиковича.

$q$ -ая размерность Реньи определяется по формуле

$$D_q = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{q-1} \frac{\log \sum_{i=1}^N p_i^q}{\log \varepsilon},$$

где  $p_i$  – вероятность попадания на  $i$ -ю компоненту фрактала,  $\varepsilon$  – радиус сферы покрытия.

При  $q = 0$   $D_q$  переходит в размерность Хаусдорфа–Безиковича

$$D_0 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{(-1)} \frac{\log \sum_{i=1}^N p_i^0}{\log \varepsilon} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\log \sum_{i=1}^N 1}{(-\log \varepsilon)} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\log N(\varepsilon)}{\log(1/\varepsilon)}.$$

Альфред Реньи родился 20 марта 1921 года в Будапеште в семье инженера. Его дед со стороны отца был известным литературным критиком и большим знатоком древнегреческой литературы. Отец будущего ученого свободно владел многими европейскими языками. Видимо, от них внук унаследовал и литературные способности. Реньи окончил в 1944 году университет в Будапеште и защитил первую диссертацию в Сегеде. Затем поступил в докторантуру к академику Ю.В. Линнику (Ленинградское отделение Математического института имени В.И. Стеклова). Он окончил докторантуру за год благодаря своей одаренности и трудолюбию.



Альфред Реньи  
1921-1970

Возвратившись после защиты диссертации в Венгерскую Народную Республику, Реньи приступил к научно-педагогической работе в Дебреценском университете.

В 1950 году при активном участии Реньи в Будапеште был создан Институт прикладной математики Венгерской Академии наук (позже он был переименован в Институт математики). Альфред Реньи стал первым и бессменным (на протяжении двадцати лет) директором этого института.

С 1952 года Реньи заведовал кафедрой теории вероятностей Будапештского университета имени Этвеша.

Русскому читателю известна его блестящая книга «Трилогия о математике. Диалоги о математике. Письма о вероятности. Дневник. Записки студента по теории информации» [17]<sup>3</sup>.

Форма диалогов позволила автору не только изложить собственные взгляды на предмет, но и противопоставить и иные точки зрения и привести доводы «за» и «против».

Обратимся далее к воспоминаниям академика АН УССР Б.В. Гнеденко из предисловия к «Трилогии о математике».

«Вслед за этой книгой (имеются в виду “Диалоги о математике”), принесшей Реньи широкую известность как популяризатору и ученому, занимающемуся философскими проблемами математики, он начал работать над другой популярной книгой – “Письмами о вероятности”. Замысли о ней поделился со мной в октябре 1966 года, когда я был гостем венгерских математиков в Будапеште. Как-то перед одной из своих лекций по телевидению, посвященной элементам теории вероятностей, он, рассказывая мне о том, что собирается публично выступить с демонстрацией игральные кости различных времен и народов, упомянул о замысле задуманной им книги. Надо полагать, идея написания такой книги и ее форма были навеяны его поездкой во Францию по случаю 300-летия со дня смерти Паскаля, когда он побывал не только в Париже, но и в Клермон-Ферране, неподалеку от которого Паскаль проводил свои опыты» [17].

«Дневник» посвящен выяснению основного понятия теории информации – количества передаваемой информации. Форма, к которой прибегнул автор, своеобразна и удивительно интересна. Преждевременная смерть не позволила Реньи завершить эту книгу. Его не стало 1 февраля 1970 года. Книгу закончили его ученики и друзья.

Альфред Реньи был тонким музыкантом и знатоком литературы. Он высоко ценил в Математике ее эстетическое начало, интересовался историей математики и размышлял над ее философскими проблемами.

Есть любопытная классификация фракталов, носящая лингвистический характер.

«Язык – это очень подходящая метафора для концепции, лежащей в основе фрактальной геометрии», – считают авторы статьи [18]. Далее они уточняют и расширяют этот тезис. «Как известно, индоевропейские языки базируются на алфавите с конечным числом букв (например, английском, включающем 26 букв). Буквы не несут в себе никакого смыслового значения, пока они не соединены в слова. Точно так же Евклидова геометрия состоит лишь из нескольких элементов (прямая, окружность и т.д.), из которых строятся сложные объекты, выражающие некий смысл.

<sup>3</sup>Первые две части трилогии издавались отдельными книгами: Реньи А. Диалоги о математике М.: Мир, 1969; Он же. Письма о вероятности. М.: Мир, 1970. Обе книги стали библиографической редкостью.

С другой стороны, азиатские языки, например, китайский, состоят из символов, которые уже сами по себе выражают смысловое значение. Количество возможных символов, или элементов этих языков, произвольно велико и может считаться бесконечным. Аналогично можно рассматривать и фрактальную геометрию. Она состоит из бесконечного количества элементов, каждый из которых является завершенным и единственным в своем роде. Геометрические элементы определяются алгоритмами, которые функционируют как единицы «смыслового значения» в рамках фрактального языка» [18].

Авторы статьи [18] выделяют два «диалекта» фрактального языка: линейный и нелинейный. О линейных фракталах уже говорилось выше, они весьма распространены. Линейными их называют потому, что их алгоритмы определяют линии на плоскости. Типичный линейный фрактал – кривая Коха.

В настоящее время специалисты весьма активно работают над созданием фрактальных методов кодирования для самоподобных изображений типа кривой Коха.

Что же представляет собой нелинейный «диалект» фрактального языка, в котором выделяют квадратичный «диалект»?

Теория, лежащая в основе этого «диалекта», была создана и изложена французским математиком Гастоном Жюлиа, когда он лечился в госпитале после ранений, полученных на фронте во время Первой мировой войны. Аналогичными вопросами занимался и другой французский математик – Пьер Фату.

Пьер Жозе Гастон Фату также занимался итерационным исследованием квадратичных отображений на комплексной плоскости. Он окончил Высшую нормальную школу в Париже и получил в 1901 году должность астронома в Парижской обсерватории. Во фрактальной геометрии самый известный его результат – нелинейный фрактал – пыль Фату.

Мандельброт в книге [4, с. 257–258] пишет следующее.



Пьер Жозе Гастон Фату  
1878 - 1929

«Хронологически изучение итераций можно разделить на три этапа, Первый, связанный с комплексной переменной  $Z$ , прошел под знаменами Пьера Фату <...> и Гастона Жюлиа <...>. Их публикации являются шедеврами классического комплексного анализа, ими восхищаются математики, однако, на их фундаменте трудно что-нибудь построить. В своей работе <...> я стараюсь придать большую наглядность их основным открытиям, объединяя анализ с физикой и подробными иллюстрациями, в результате чего обнаруживается великое множество неизвестных ранее фактов.

Последовавшее за этими открытиями возрождение помогло установить тесную связь свойств итерации с теорией фракталов. Из того факта, что находки Фату и Жюлиа оказались недостаточно проработанными для того, чтобы быть основой теории

фракталов, мы можем сделать вывод, что даже классический анализ нуждается иногда в наглядности и интуитивной понятности, причем компьютерное моделирование может оказать ему в этом смысле серьезную помощь».

Обоих математиков интересовал вопрос, как будет вести себя последовательность точек  $Z_k$  на комплексной плоскости, если они порождаются преобразованием  $f(Z) = Z^2 + C$ . Каждая последующая точка  $Z_{k+1}$  получается, если в приведенную формулу подставить предыдущую точку  $Z_k$ , то есть фактически речь шла об исследовании отображения  $Z_{k+1} = Z_k^2 + C$ . Комплексное число  $C$  играет роль управляющего параметра, который можно выбирать произвольно. Несложный итерационный процесс порождал многообразие форм на плоскости  $\text{Im } Z - \text{Re } Z$ . Работы Жюлиа и Фату выполнялись во времена, когда не было вычислительных машин, и поэтому визуализации их результатов не было.

Современников работы Жюлиа и Фату мало волновали. Как уже указывалось, новую жизнь им подарили исследования Мандельброта. С чем же связано упомянутое многообразие форм? Вот как образно отвечают на этот вопрос авторы статьи [18].

«Когда исходная точка  $Z_0$  подвергается преобразованию, то получающаяся последовательность демонстрирует поведение двух типов. Она либо свободно путешествует по плоскости, уходя в бесконечность, либо оказывается замкнутой в определенной области комплексной плоскости. Первые из них образуют множество “беглецов”, те же, что остаются в замкнутом пространстве, принадлежат множеству “пленников”. Исходная точка  $Z_0$ , выбранная из множества пленников, генерирует последовательность, которая остается в численной неволе, независимо от того, сколько поколений этой последовательности вычисляется. Форма этой тюрьмы зависит от выбранного значения параметра  $C$ . Для точки  $Z_0$ , лежащей вне замкнутой области, последовательность  $Z$  удаляется от центра плоскости и уходит в бесконечность. Множество пленников и беглецов отделены друг от друга бесконечно тонкой границей, известной как множество Жюлиа» (рис. 9).

Как видно из рис. 9, фрактальные границы множества Жюлиа принимают разнообразнейшие и удивительные формы, которые зависят только от числа  $C$ . При некоторых значениях числа  $C$  рождаются множества Жюлиа, имеющие одно связное тело (см. рис. 9, *a–в, д, ж*), при других значениях  $C$  эти множества распадаются, напоминая пыль (рис. 9, *г, е, з*). Если перебирать различные значения  $C$ , то на плоскости  $\text{Im } C - \text{Re } C$  мы приходим к множеству Мандельброта ( $M$ ) (закрашенная черным цветом часть плоскости  $\text{Im } C - \text{Re } C$  на рис. 10).

Понятно, что каждое комплексное значение  $C$  либо попадает в черную структуру  $M$ , либо нет, что соответствует различным множествам Жюлиа. Когда  $C$  лежит внутри  $M$ , множества Жюлиа – связные структуры, когда  $C$  лежит вне  $M$ , они рассыпаются на бесконечное число элементов, что находит отражение даже в их названиях: так, множество Жюлиа на рис. 9, *г* носит название пыли Фату. Наибольший интерес вызывает граница структуры  $M$ , поскольку переход через нее вызывает драматические качественные изменения в множестве Жюлиа. Иногда даже говорят, что граница  $M$  соответствует математическому фазовому переходу для множеств Жюлиа отображения  $Z_{n+1} = Z_n^2 + C$ . Итак, каждая из частей множества  $M$  характеризует соответствующее семейство множеств Жюлиа.

Строго говоря, множество  $M$  не является самоподобным, как триада Коха, но оно обладает похожим свойством: увеличение какого-либо фрагмента области демонстрирует бесконечное число крохотных копий множества. Как пишут

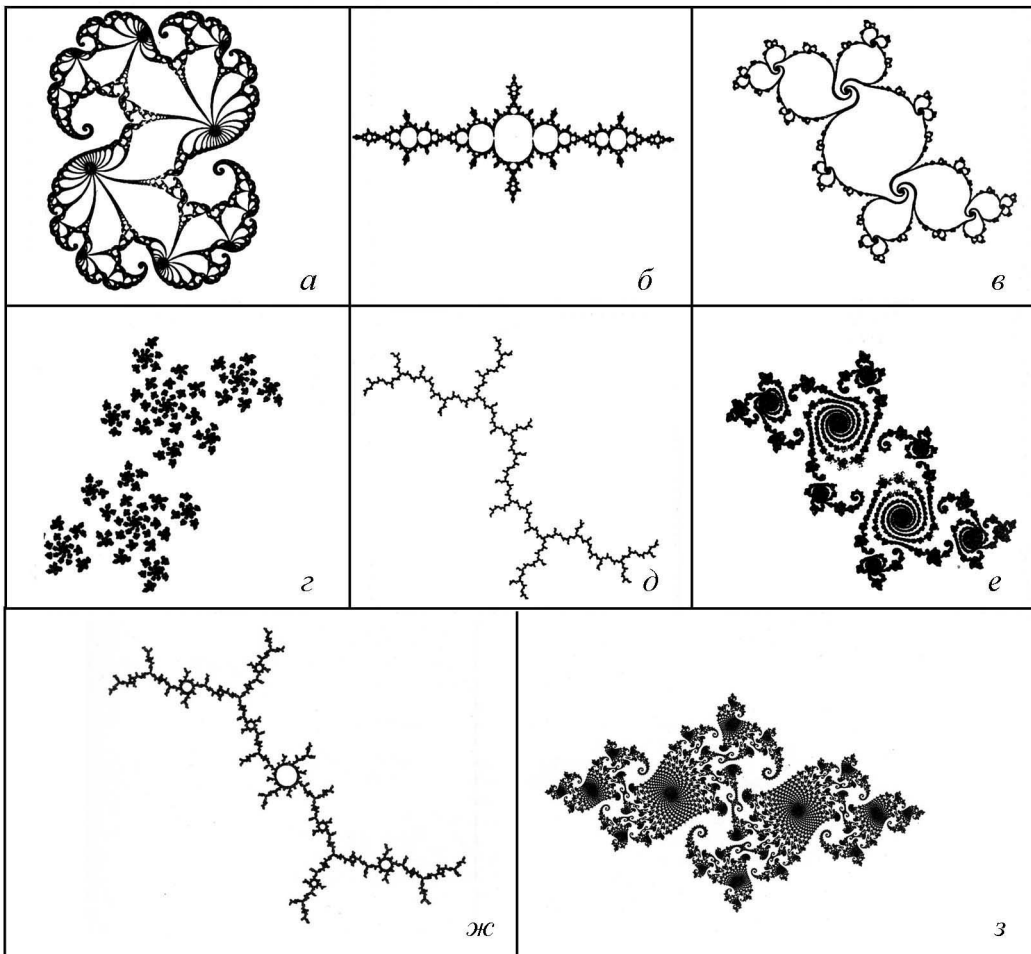


Рис. 9. Примеры множеств Жюлиа для процесса  $Z \rightarrow Z^2 + C$

авторы [18], «наиболее замечательная особенность множества Мандельброта заключается в том, что оно служит бесконечно эффективным хранилищем изображений. Помимо того, что оно классифицирует множества Жюлиа на связные и несвязные, множество Мандельброта выступает также в роли непосредственного графического оглавления множеств Жюлиа» [18,].

Рис. 11 иллюстрирует в качестве примера связь между множеством Мандельброта и сценарием перехода к хаосу через последовательность бифуркаций удвоения периода при  $-2.25 < \text{Re } C < 0.75$ .

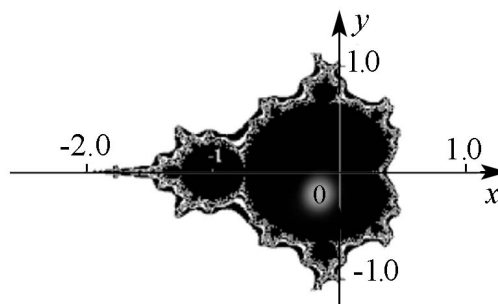


Рис. 10. Множество Мандельброта для отображения  $Z_{k+1} = Z_k^2 + C$  для части комплексной  $C$ -плоскости, где  $-2.25 < \text{Re } C < 0.7$ ;  $-1.5 < \text{Im } C < 1.5$



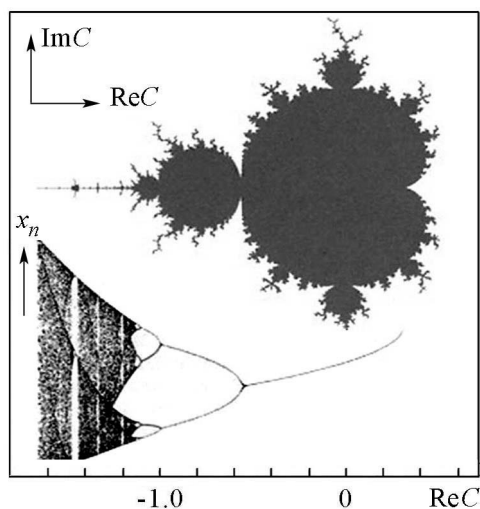


Рис. 11. Связь между множеством Мандельброта и бифуркационной диаграммой перехода к хаосу через бесконечную последовательность удвоения периода

Бифуркации соответствуют нарастанию «почек» в множестве  $M$ , периодические окна, разрывающие пелену хаоса, соответствуют малым копиям множества  $M$ , которые находятся на главной «антенне». Из рис. 11 видно, насколько более полную картину дает множество  $M$  по сравнению с обычной бифуркационной диаграммой.

Как известно, при описании в фазовом пространстве возникновения хаоса посредством простых операций растягивания и образования складок экспоненциально расходящиеся траектории через некоторое время снова проходят друг около друга, так что вытягивание и образование складок происходит вновь и вновь, создаются новые складки внутри складок, и так до бесконечности. Именно поэтому хаотические аттракторы являются фракталами, имеющими самоподобную структуру, и количественно их можно характеризовать фрактальной размерностью.

Благодаря Мандельброту и его последователям стало ясно, что фрактальными свойствами обладают многие природные объекты. Фрактальные структуры возникают при прохождении жидкости через твердые пористые тела, например, при просачивании воды через почву или кофе через кофейную гущу. Такие структуры называются перколяционными кластерами. Фракталы возникают также при росте некоторых кристаллов, при прохождении пузырьков воздуха через нефть, при образовании трещин, когда разрушаются твердые тела, при электрических разрядах, подобных молнии. Из этих перечислений можно заключить, что природа очень любит фрактальные формы.

Для объяснения фрактального роста популярна модель, в основе которой лежит механизм так называемой агрегации, ограниченной диффузией (см., например [19]). Смысл ее в следующем. Пусть существует некоторая поверхность, имеющая в момент времени  $t_1$  форму, представленную на рис. 12, *а*.

Около поверхности случайно движутся (диффундируют) частицы, которые могут оседать на нее (агрегировать) и изменять форму поверхности (рис. 12, *б*). Вероятность столкнуться с бугорком у частицы значительно выше, чем попасть в ямку. Из-за случайного движения частиц на поверхности образуются мелкие бугорки (ветви) и ямки. Возникает неустойчивость роста – появляются все новые и новые ветви, и формируется фрактальная структура (рис. 12, *в*). Ветви растут быстрее ямок, потому что, двигаясь по изломанным траекториям, частица имеет большую вероятность прилипнуть к

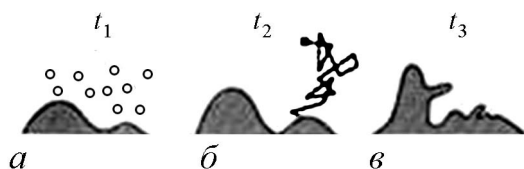


Рис. 12. Иллюстрация механизма агрегации, ограниченной диффузией, для трех моментов времени

вершине ветви или около нее. По пути вглубь ямки частица скорее прилипнет к стенке, чем попадет на дно. Появление ветвей делает заполнение ямок все менее вероятным.

Пожалуй, более всего впечатляют фракталы в человеческом организме. Количественный анализ ветвления дыхательных путей показал, что оно подчиняется законам фрактальной геометрии. Как самоподобные выглядят большие и малые детали в строении тонкого кишечника; кровеносные сосуды сердца также имеют фракталоподобное ветвление. Ярким примером фрактальной структуры является нейрон: от тела клетки отходят отростки – дендриты, которые ветвятся на все более и более мелкие волокна. В сердечном ритме здорового человека также наблюдается самоподобие: при регистрации ритма в разных временных интервалах – 3, 30 и 300 минут – быстрые изменения выглядят почти так же, как медленные (см., например, [20]).

Общее впечатление от фракталов хорошо описано в конце статьи [18].

«Даже сами ученые испытывают почти детский восторг, наблюдая за развитием нового языка – языка фракталов. Вот что пишет сам Мандельброт: “Ученые с немалым удивлением и восторгом <:> уясняют для себя, что многие и многие формы, которые они до сих пор вынуждены были характеризовать как зернистые, гидроподобные, похожие на морские водоросли, странные, запутанные, ветвистые, ворсистые, морщинистые и т.п., отныне могут изучаться и описываться в строгих количественных терминах. Математики <...> будут удивлены и обрадованы, узнав, что фрактальные множества, считавшиеся до сих пор чем-то исключительным <...>, в некотором смысле должны происходить единственным образом из очень конкретных задач и что изучение природы должно помочь решить старые задачи и поставить немало новых”» [18].

### Удивительное предвидение Жана Перрена

Жан Батист Перрен (1870–1942) – французский физик и физико-химик, член Парижской Академии наук с 1923 года, а в 1938-м – ее Президент. Он родился в Лилле, окончил Нормальную школу (1894), там же работал в 1894–1897 годах. В Парижском университете Перрен работал с 1897 года (с 1910 – профессор). С 1938 года он жил в США.

В 1895 году Перрен экспериментально доказал, что катодные лучи являются потоком отрицательно заряженных частиц.

В 1908–1913 годах он осуществил цикл экспериментальных исследований броуновского движения. В результате эти исследования подтвердили молекулярно-статистическую теорию Эйнштейна–Смолуховского и стали окончательным доказательством того, что броуновское движение является следствием теплового движения молекул среды. Кроме того, они убедили и в реальности самих молекул.



Жан Батист Перрен  
1870-1942

На основе своих опытов Перрен вычислил число Авагадро:  $6.8 \times 10^{23}$ . Его исследования броуновского движения в коллоидных растворах дали возможность вычислить размер атома.

Работы Перрена были посвящены строению мыльных плёнок, исследованию рентгеновских лучей, проводимости газов, флюоресценции, радиоактивности, атомной физике, акустике.

Он боролся против фашизма, был деятелем Народного Фронта Франции, иностранным членом АН СССР. В главе 2 монографии [4] есть раздел «Из-под пера Жана Перрена», в котором Мандельброт цитирует ранний философский манифест Перрена на основе его работ [21,22]. Причем он подчеркивает, что «заметили его, похоже, только тогда, когда я процитировал его в первом (французском) издании моего эссе».

Приведем часть этой удивительной цитаты.

«Общеизвестно, что хороший учитель, давая ученикам строгое определение непрерывности, покажет прежде, что лежащая в основе этого понятия идея хорошо им знакома. Он построит на доске какую-нибудь вполне непрерывную кривую и, перемещая вдоль нее линейку, скажет: “Как видите, касательная существует во всех точках кривой”. Или, например, для того чтобы ознакомить учеников с понятием истинной скорости движущегося объекта в некоторой точке его траектории, учитель говорит: “Вы, разумеется, понимаете, что среднее между значениями скорости в двух соседних точках не изменится сколько-нибудь существенно при приближении этих двух точек друг к другу на бесконечно малое расстояние”. И многие люди, полагая, что для некоторых всем знакомых движений такой взгляд достаточно точно отражает положение вещей, не желают замечать, что все не так просто.

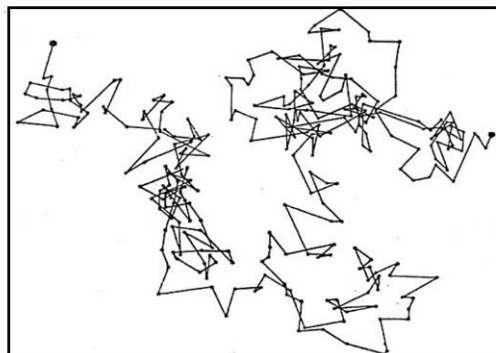
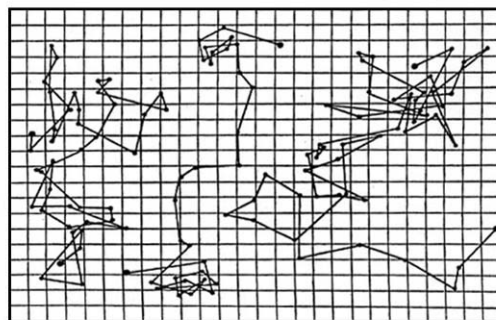


Рис. 13. Следы броуновских частиц

Математики, однако, прекрасно понимают, что попытка показать при помощи построения кривых, что каждая непрерывная функция имеет производную, по меньшей мере наивна. Хотя дифференцируемые функции и являются самыми простыми, они все же представляют собой исключение.

Говоря языком геометрии, кривые, не имеющие касательных, могут считаться правилом, в то время как правильные, такие, например, как окружность – любопытным, но весьма частным случаем <...>

Те, кто впервые слышит о кривых без касательных или о функциях без производных, часто склонны полагать, что в Природе не существует ни подобных сложных конструкций, ни даже намека на них.

Это, однако, неверно – математики со своей логикой оказываются ближе к реальности, чем физики с их практическими представлениями <...>

Не покидая экспериментально подтверждаемой реальности, мы наблюдаем под микроскопом проявление броуновского движения на примере малой частицы, взвешенной в толще жидкости (рис. 13).

Мы видим, что направление прямой, соединяющей точки, соответствующие двум очень близким по времени положениям частицы, изменятся по мере уменьшения временного промежутка между двумя измерениями совершенно беспорядочно. Беспристрастный наблюдатель заключит из этого, что имеет дело с функцией, не имеющей производной, а вовсе не с кривой, к которой в любой точке можно провести касательную. <...> Позволим себе высказать одно предположение, достаточно произвольное, но непротиворечивое. Наверняка мы скоро столкнемся с такими случаями, для описания которых проще использовать недифференцируемые функции, нежели те, что имеют производную. Когда такое произойдет, практическая ценность математических исследований нерегулярных континуумов станет очевидной всем».

И далее, подчеркивая мысль, с новой строки:

«Однако это лишь мечтания. Пока». [4, с. 20–24].

В книге Перрена [23] приводятся рисунки (см. рис. 13) четырех индивидуальных траекторий, иллюстрирующие движение коллоидной частицы радиуса 0.53 мк, полученные с помощью микроскопа. На координатной сетке (шаг сетки 3.2 мк) через каждые 30 секунд отмечались последовательные положения частицы, которые затем соединялись прямыми. Очевидно, что эти прямые не имеют физического смысла. Мандельброт вновь цитирует Перрена, но теперь работу [22]. «Может возникнуть искушение определить “среднюю скорость частицы”, как можно точнее последовав за ней по ее извилистому пути. Однако подобная оценка кажется в корне неверной. И величина, и направление видимой средней скорости частицы изменяются самым безумным образом. Рисунок дает лишь слабое представление об изумительной запутанности реальной траектории. Если бы положения частицы регистрировались в 100 раз чаще, то вместо каждого отрезка прямой мы получили бы ломаную, столь же сложную, как исходный рисунок, хотя и меньших размеров – и так далее. Нетрудно убедиться, что на практике понятие касательной в применении к таким кривым является полной бессмыслицей» [4].

Мандельброт далее подчеркивает главное: при последовательном увеличении разрешения микроскопа длина траектории броуновской частицы возрастает до бесконечности. Причем, топологически след броуновской частицы – кривая (размерность 1), но он способен заполнить всю плоскость, поэтому во фрактальном смысле его размерность равна 2. И Мандельброт заключает: «Расхождение между этими двумя величинами дает броуновскому движению право называться фракталом» [4].

Мир фракталов удивителен и огромен. В какой-то степени его необъятность раскрывает шутовское стихотворение Михаила Львовича Левина, написанное на нижегородской школе «Нелинейные волны–1987». Оно приводится в воспоминаниях Л.А. Островского «Немного о Левине» в книге [24, с. 219].

Фрактален Канторовский Дуст  
И с ним звезда Давида-Коха.  
Фрактален Кафка, Джойс и Пруст,  
Боюсь, фрактальна и эпоха.  
Весь Божий мир, что был так прост,  
Теперь запутан и фрактален.  
Везде разрывы в полный рост,  
И даже стал фрактален Сталин.  
Его третирует весь свет,  
Как шельму в яром нетерпеньи.  
По мере он сошел на нет,  
Но чертовы торчат ступени.

С тех пор, как Вечный Судия  
Мне дал понятие фрактала,  
Фрактальной стала жизнь моя,  
И новая пора настала:  
От побережий до мозгов,  
От Ричардсона до Перрена  
Веду фрактальный счет шагов:  
Фрактальны губка, сыр и пена...  
Фрактальны Библия, Коран,  
Собрание пестрых глав в Талмуде,  
Ряды (Маклорен и Лоран)  
И построенье Каца-Муди.

## Библиографический список

1. Данилов Ю.А. Прекрасный мир науки. Сб. статей памяти Ю.А. Данилова /Под ред. В.И. Санюка, Д.И. Трубецкова. М.: Прогресс-Традиция, 2008. 384 с.
2. Костицын В.Н. Ректоры Пермского университета. 1916–2006. 2 изд., перераб. и доп. Пермь: Пермский ун-т, 2006. С. 35–44.
3. Мандельброт Б. Фрактальная геометрия природы. М.: Институт компьютерных исследований, 2002. 656 с.
4. Мандельброт Б. Фракталы, случай и финансы. Москва; Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2004. 256 с.
5. Арт-фрактал. Сб. статей / Пер. с англ., фр. Е.В. Николаевой. СПб.: Страта, 2015. 156 с.
6. Lighthill J. The Recently Recognized Failure of Predictability in Newtonian Dynamics // Proceeding of the Royal Society. 1986. P. 35–50.
7. Стюарт И. Величайшие математические задачи. М.: Альпина нон-фикшн, 2015. 460 с.
8. Richardson L.F. Weather Prediction by Numerical Process. Cambridge University Press, 1922.
9. Рабинович М.И. Короткий рассказ о встречах с Михаилом Львовичем // Михаил Львович Левин. Жизнь, воспоминания, творчество: 2 изд., доп. Н. Новгород: ИПФ РАН, 1998. С. 36–44.
10. Chorin A. The Evolution of a Turbulent Vortex // Communication in Mathematical Physics. 1982. Vol. 83. P.517–535.
11. Chorin A. Numerical Estimates of Hausdorff Dimension // Journal of Computational Physics. 1982. Vol. 46. P. 1124–136.
12. Hentschel H.Y.E., Procaccia I. Intermittence Exponent in Fractally Homogeneous in Turbulent Diffusion // Physical Review Letters. 1982. 49. 1158–1161.
13. Федер Е. Фракталы. М.: Мир, 1991. 254 с.
14. Гринченко В.Т., Мацыпура В.Т., Снарский А.А. Введение в нелинейную динамику: Хаос и фракталы. М.: Изд-во ЛКИ, 2007. 264с.
15. Тарасенко В.Г. Фрактальная логика. М.: Прогресс-Традиция, 2002. 155 с.
16. Диаку Ф., Холмс Ф. Небесные встречи. Истоки хаоса и устойчивости. Москва-Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2004. 304 с.
17. Реньи А. Трилогия о математике. Диалоги о математике. Письма о вероятности. Дневник. Записки студента по теории информации» М.: Мир, 1980. 376 с.
18. Юргенс Х., Пайтген Х.О., Зауне Д. Язык фракталов // В мире науки. 1990. № 10. С. 36–44.
19. Сандер Л.М. Фрактальный рост // В мире науки. 1987. № 3. С. 62–69.
20. Голдберг Э.Л., Ригни Д.Р., Уэст Б.Дж. Хаос и фракталы в физиологии человека //В мире науки. 1990. № 4. С. 25–32.
21. Perrin J. La discontinuite de la matiere // Revue du Moris. 1906. № 1. P. 323–344.
22. Perrin J. Les atomes. Paris: Alcan, 1913.

23. *Perrin J.* Mouvement brownien et realite moleculaire // *Annales da Chemie et de physique.* 1909. Vol. VIII. 18. P. 5–114.
24. Михаил Львович Левин. Жизнь, воспоминания, творчество. Изд. 2-е доп. Н. Новгород: ИПФ РАН, 1998.

## References

1. *Danilov Yu.A.* A wonderful world of science. Coll. of articles dedicated to the memory of Yu.A. Danilov / Eds V.I. Sanyuk, D.I. Trubetskov. M.: Progress-Tradition, 2008. 384 p. (in Russian).
2. *Kostitsyn V.I.* Rectors of Perm University. 1916–2006. 2-nd Ed., revised. and ext. Perm: Perm State University Press, 2006. 352 p. (in Russian).
3. *Mandelbrot B.* The Fractal Geometry of Nature. Henry Holt and Company, 1982. 468 p.
4. *Mandelbrot B.* Fractals and Scaling in Finance. Springer, 1997. 558 p.
5. Art-fractal. Coll. articles. S-Pb: Strata, 2015. 156 p. (in Russian).
6. *Lighthill J.* The Recently Recognized Failure of Predictability in Newtonian Dynamics. Proceeding of the Royal Society. 1986. P. 35–50.
7. *Stewart I.* The Great Mathematical Problems. Basic Books, 2013. 353 p.
8. *Richardson L.F.* Weather Prediction by Numerical Process. Cambridge University Press, 1922.
9. *Rabinovich M.I.* A Short Story about Meeting with Michael L. Levin // Michael L. Levin. Life, Memories, Creativity: 2-nd Ed., revised. and ext. N. Novgorod: IAP RAS, 1998. P. 36–44.(in Russian)
10. *Chorin A.* The Evolution of a Turbulent Vortex. Communication in Mathematical Physics. 1982. Vol. 83. P.517–535.
11. *Chorin A.* Numerical Estimates of Hausdorff Dimension. Journal of Computational Physics. 1982. Vol. 46. P. 1124–136.
12. *Hentschel H.Y.E., Procaccia I.* Intermittence Exponent in Fractally Homogeneous in Turbulent Diffusion. Physical Review Letters. 1982. 49. 1158–1161.
13. *Feder E.* Fractals. M.: World, 1991. 254 p.(in Russian)
14. *Grinchenko V.T., Macypura V.T., Snarskij A.A.* Introduction to Nonlinear Dynamics: Chaos and Fractals. Moscow: LKI, 2007. 264 p. (in Russian).
15. *Tarasenko V.* Fractal Logic. M.: Progress-Tradition, 2002. 155 p. (in Russian).
16. *Diacu F., Holmes P.* Celestial Encounters: The Origins of Chaos and Stability. Princeton University Press, 1996. 233 p.
17. *Rényi A.* Dialogues on Mathematics. Holden-Day, 1967.  
*Rényi A.* Foundations of Probability. Holden-Day, Inc., San Francisco, 1970. 366 p.  
*Rényi A.* A Diary on Information Theory, Akadémia i Kiadó.
18. *Jürgens H., Pajtgen H., Saupe D.* The language of fractals. Scientific American. 1990. Issue 10. P. 36–44.
19. *Sander L.M.* Fractal Growth. Scientific American. 1987. Issue 3. P. 62–69.
20. *Goldberg A.L., Rigney D.R., West B.J.* Chaos and Fractals in Human Physiology. Scientific American. 1990. № 4. P. 36–44.

21. *Perrin J.* La discontinuite de la matiere. Revue du Moris. 1906. Issue 1. P. 323–344.
22. *Perrin J.* Les atomes. Paris: Alcan, 1913.
23. *Perrin J.* Mouvement brownien et realite moleculaire. Annales da Chemie et de physique. 1909. Vol. VIII. 18. P. 5–114.
24. *Michael L. Levin.* Life, Memories, Creativity: 2-nd Ed., revised. and ext. N. Novgorod: IAP RAS, 1998. (in Russian).

*Поступила в редакцию 10.11.2016*



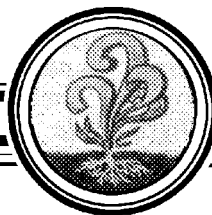
*Трубецков Дмитрий Иванович* – родился в Саратове (1938). Окончил физический факультет Саратовского государственного университета (1960). Защитил диссертации на соискание ученой степени кандидата (1965) и доктора физико-математических наук в СГУ (1978) в области радиофизики. Заведующий кафедрой электроники, колебаний и волн факультета нелинейных процессов СГУ, профессор кафедры прикладной математики НИЯУ МИФИ, член-корреспондент Российской академии наук, заслуженный деятель науки РФ, лауреат премии Президента РФ в области образования. Научный руководитель Лицея прикладных наук и факультета нелинейных процессов СГУ. Область научных интересов: вакуумная электроника и микроэлектроника сверхвысоких частот, теория колебаний и волн, нелинейная динамика, история науки. Автор более двадцати учебных пособий и монографий, а также более двухсот статей в периодической печати.

410012 Саратов, ул. Астраханская, 83  
 Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского  
 115409 Москва, Каширское шоссе, 31  
 Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ»  
 E-mail: dtrubetskov@yahoo.com



*Трубецкова Елена Геннадиевна* – родилась в Саратове (1973). Окончила Саратовский государственный университет (1995). Защитила кандидатскую диссертацию «“Текст в тексте” в русском романе 1930-х годов» (1998). Работает доцентом кафедры русской и зарубежной литературы Института филологии и журналистики Саратовского университета. Автор более 50 статей по истории романа XX века, творчеству В. Набокова, М. Булгакова, С. Кржижановского, М. Алданова, по смене научных и культурных парадигм.

410012 Саратов, Астраханская, 83  
 Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского  
 E-mail: etrubetskova@gmail.com

**ЭТАПЫ РАЗВИТИЯ РЕЛЯТИВИСТСКИХ МАГНЕТРОНОВ\****М. И. Фукс<sup>1</sup>, И. Шамильоглы<sup>1</sup>, Н. Ф. Ковалев<sup>2</sup>*<sup>1</sup>Department of Electrical & Computer Engineering, University of New Mexico  
Albuquerque, NM 87131-1 356, USA<sup>2</sup>Институт Прикладной физики РАН  
Россия, 603950 Нижний Новгород, БОКС-120, ул. Ульянова, 46  
E-mail: fuchs@unm.edu; edls@unm.edu; kovalev@appl.sci-nnov.ru

В статье отражены основные этапы развития релятивистских магнетронов. Описаны конструкции, устраняющие ряд недостатков, присущих традиционным магнетронам с радиальным выводом излучения через узкую щель из одного резонатора. К таким ограничениям относятся: работа только на невырожденных колебаниях, кратных  $\pi$ -моды, и низкий порог высокочастотного пробоя. Конструкция магнетрона, рассматриваемая в данной статье, имеет дифракционный вывод излучения, все резонаторы анодного блока продолжены в коническую антенну до сечения, превышающего сечение, соответствующее частоте отсечки излучаемой волны. Такой магнетрон с аксиальным симметричным выводом излучения может работать на любой моде, и перескок на вырожденный вид колебаний не приводит к катастрофе, как это иногда случается в традиционных магнетронах. Для резонаторов, продолженных с увеличивающейся глубиной в антенну, оптимизированный вывод позволил значительно увеличить эффективность релятивистского магнетрона. Так, в первом же эксперименте достигнут электронный КПД более 60%. Замена сплошного катода на «прозрачный» для азимутального электрического поля синхронной волны сократила фронт излучаемой волны до фронта приложенного напряжения. Такой катод состоит из отдельных эмиттеров, продолженных вдоль оси, периодически расположенных на окружности с радиусом катода. Высокая эффективность получена и для магнетрона с протяженным виртуальным катодом, что позволило устранить плазму, ограничивающую длительность генерируемого импульса, и электронную бомбардировку, сокращающую жизнь катода. Показана возможность преобразования непосредственно в антенне колебаний  $\pi$ -моды в излучение с более простой структурой, включая излучение со структурой, подобной гауссовой. При этом возможна реализация более компактной конструкции магнетрона. При быстром переключении мод внешним сигналом оценено влияние шумов, приводящее к размыванию граничных магнитных полей между областями, присущими различным модам. При работе магнетрона с магнитными полями в этих расширенных границах генерация конкретных соседних мод становится непредсказуемой. На карте режимов работы магнетрона наблюдаются чередующиеся области магнитных полей, соответствующие стабильным и нестабильным режимам генерации, что затрудняет переключение мод слабым внешним сигналом.

*Ключевые слова:* Релятивистский магнетрон, катод, дифракционный вывод излучения, скрещенные поля, дрейфовое движение электронов.

DOI: 10.18500/0869-6632-2016-24-6-39-53

*Ссылка на статью:* Фукс М.И., Шамильоглы И., Ковалев Н.Ф. Этапы развития релятивистских магнетронов // Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2016. Т. 24, № 6. Р. 39–53.

\*Статья написана по материалам доклада авторов на XI международной школе-конференции «ХАОС–2016», 3–8.10.2016, Саратов, Россия.



## RELATIVISTIC MAGNETRONS' DEVELOPMENT STAGES

M. I. Fuks<sup>1</sup>, E. Schamiloglu<sup>1</sup>, N. F. Kovalev<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Department of Electrical & Computer Engineering, University of New Mexico  
Albuquerque, NM 87131-1 356, USA

<sup>2</sup>Institute of Applied Physics of the RAS  
Ul'yanov St., 46, 603950 Nizhny Novgorod, Russia  
E-mail: fuchs@unm.edu; edls@unm.edu; kovalev@appl.sci-nnov.ru

A paper presents the main stages of relativistic magnetrons' development. We describe the designs eliminating conventional magnetrons' shortcomings and restrictions which are associated with a radial output of radiation through a narrow slot in one of the magnetron resonators. A low breakdown threshold and an operation in only nondegenerate modes are among these restrictions. In the paper we consider the design of the magnetron with a diffraction output of radiation, where all magnetron's resonators are extended into conical antenna to the cross-section where the cutoff frequency is lower than the frequency of generation. This magnetron with axial symmetrical output of radiation can operate in any mode and a switch to the degenerate oscillation does not lead to a catastrophe which may occur in conventional magnetrons. We managed to increase an efficiency of the magnetron by optimizing its diffraction output with a depth of resonators increasing in the antenna. In the first experiment the electron efficiency of the magnetron achieved the value exceeding 60%. The replacement of a solid cathode to the cathode transparent to azimuthal electric field of synchronous wave, allowed us to shorten the leading edge of radiated wave to the duration of leading edge of accelerating voltage. Transparent cathode consists of separate emitters oriented along the axis and periodically placed at the circle with a radius of the cathode. High efficiency was also achieved in the magnetron with a long virtual cathode, the use of which allowed us to eliminate both plasma responsible for a pulse shortening and an electron bombardment reducing a cathode's lifespan. We showed a possibility to transform the operating  $\pi$ -mode into the output radiation with a simplified structure including the radiation with the structure similar to Gaussian. This can be achieved in a compact design of the magnetron. In a regime of fast mode switching induced by external signal, we estimated the influence of noise leading to the blurring of the boundary magnetic fields intrinsic to different modes. In magnetic fields within these broaden boundaries the generation of neighboring magnetron operating modes becomes unpredictable. Alternate regions of magnetic fields with stable and unstable regimes of generation are observed on the map of generation regimes of the magnetron, which makes it difficult to switch the operating modes by small external signal.

*Keywords:* Relativistic magnetron, cathode, diffraction output of radiation, crossed fields, drift motion of electrons.

DOI: 10.18500/0869-6632-2016-24-6-39-53

*Paper reference:* Fuks M.I., Schamiloglu E., Kovalev N.F. Relativistic magnetrons' development stages. Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics. 2016. T. 24, № 6. P. 39–53.

### Введение

В релятивистских высокочастотных источниках О-типа в излучение преобразуется кинетическая энергия электронов, движущихся со скоростями, близкими к скорости света  $c$ . В приборах М-типа в скрещенных электрическом  $E$  и магнитном  $H$  полях преобразование потенциальной энергии электронов происходит с дрейфовыми, отнюдь не с релятивистскими, скоростями

$$\vec{v} = [\vec{E} \vec{H}] / H^2,$$

здесь  $H^2 = \sum_i H_i^2$ ,  $i = r, \theta, z$  – координаты трехмерного пространства. Правильнее было бы называть такие приборы высоковольтными, но первый такой прибор [1] был назван «релятивистским», и все последующие, по инерции, сохранили это название.

Конструкция первого релятивистского магнетрона [1] не отличалась от конструкции обычного нерелятивистского магнетрона с радиальным выводом излучения через узкую щель одного из резонаторов анодного блока, что и явилось причиной некоторых ограничений. Из-за такой азимутально-несимметричной конструкции вырожденные моды расщепляются на две стоячие моды: одна с синусоидальным распределением поля, другая – с косинусоидальным; одна с пучностью поля на резонаторе с выводом излучения, а другая – с узлом (рис. 1). Мода с пучностью на резонаторе слабо связана с выводом, поэтому ее  $Q$ -фактор выше; поле в такой системе нарастает быстрее, и магнетрон будет работать именно с этой модой практически без вывода излучения, нагревая электроды магнетрона до их разрушения при длительной работе. Поэтому перескок с  $\pi$ -моды на вырожденную моду, что иногда случается, крайне опасен.

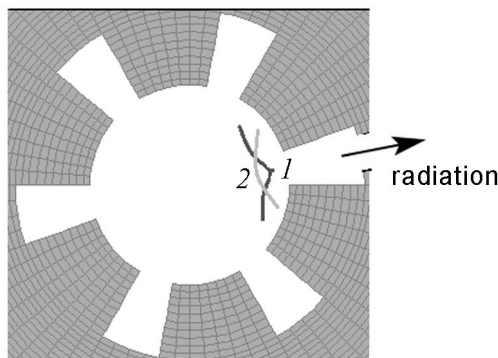


Рис. 1. Анодный блок традиционного магнетрона с излучением через узкую щель: 1 – мода с пучностью поля на резонаторе с выводом; 2 – мода с узлом на резонаторе с выводом

## 1. Концепция магнетрона с аксиальным азимутально-симметричным выводом излучения

Аксиальный азимутально-симметричный дифракционный вывод излучения через коническую антенну, в которую все резонаторы анодного блока продолжены до сечения, превышающего отсечку для излучаемой волны, представляется наиболее адекватным для релятивистских магнетронов. Первый такой магнетрон (рис. 2) с резонаторами с уменьшающейся глубиной, продолженных в антенну, был разработан в 1977 году [2]. Хотя эффективность таких магнетронов была небольшой (их электронный КПД  $\eta_e = P/UI_a \approx 13\%$  [2, 3], где  $P$  – мощность излучения,  $U$  – приложенное напряжение и  $I_a$  – анодный ток), но они обладали несомненными преимуществами: возмож-



Рис. 2. Первый релятивистский магнетрон с аксиальным выводом излучения через коническую антенну, содержащую резонаторы с уменьшающейся глубиной [2]

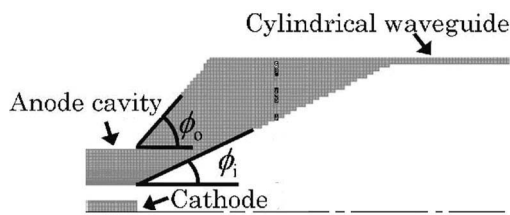


Рис. 3. Вид магнетрона с увеличивающейся глубиной резонаторов в конической антенне ( $\phi_0 > \phi_1$ ) [6]

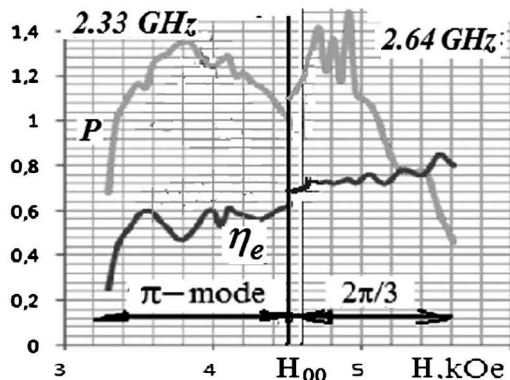


Рис. 4. Расчетные зависимости излучаемой мощности  $P$  и электронного КПД  $\eta_e$  для  $\pi$ -моды и для  $(-1)$ -й пространственной гармоники  $(2\pi/3)$ -моды

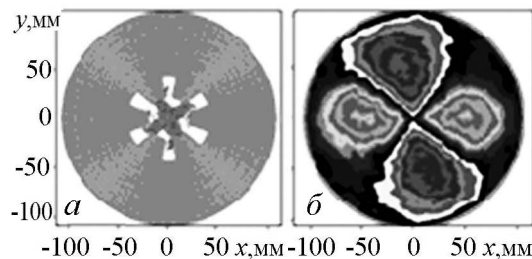


Рис. 5. *a* – электронные спицы; *b* – структура поля  $(2\pi/3)$ -моды



Рис. 6. Экспериментальный магнетрон с оптимизированным выводом излучения [9]

ность работы на любой моде, высокий порог для высокочастотного пробоя. Кроме того, такая конструкция автоматически обеспечивала селекцию продольных мод [4]; поскольку  $Q$ -фактор максимален, дифракционная добротность  $Q_{dif} \approx 30/n(L/\lambda)^2$  для простейшей продольной структуры поля с одной вариацией ( $n = 1$ ) при любых длинах  $L$  резонаторной системы и волны  $\lambda$ .

Конфигурация антенны сильно влияет на работу магнетрона. Используя компьютерные расчеты с ПИК-кодом по программе MAGIC [5], авторы [6] показали, что продолжение резонаторов с увеличивающейся глубиной в коническую антенну (рис. 3) повышает электронный КПД до 37%. Оптимизация углов такой антенны ( $\phi_0 = 32^\circ$ ,  $\phi_1 = 17.5^\circ$ ) с использованием «прозрачного» катода [7] увеличило КПД: свыше 70% для работы на  $(-1)$ -й пространственной гармонике  $(2\pi/3)$ -моды (результат компьютерного расчета [8] приведен на рис. 4 и рис. 5) и свыше 60% в эксперименте с оптимизированным магнетроном (рис. 6) [9], изготовленным из нержавеющей стали. Здесь указывается только электронный КПД  $\eta_e$ , так как полный КПД  $\eta$  учитывает также ток  $I_{end}$  электронов, покидающих магнетрон без взаимодействия с высокочастотным полем. Имеются несколько способов уменьшить этот ток, например, использовать сплошную насадку на конце катода [9], эмитирующую сплошной пучок с током, меньшим в  $2 \ln(R_a/R_b)/[1 + 2 \ln(R_a/R_b)]$  раз тока трубчатого тонкостенного электронного пучка (здесь  $R_a$  – радиус анода,  $R_b$  – радиус пучка) [10,11]. Низкая эффективность в экспериментах [2,3] объяснялась близостью размеров выходного цилиндрического волновода к его частоте отсечки, что приводило к слишком большому отражению.

## 2. Прозрачный катод для азимутального электрического поля синхронной волны как средство для быстрого старта генерации

Для многих гражданских и военных применений, например, для синхронизации магнетронов [12] необходимо обеспечить быстрый старт колебаний (генерации). Для этого предложено [7] использовать катод, прозрачный для азимутального синхронного электрического поля  $\tilde{E}_\theta$ , ответственного за скорость радиального дрейфа электронов  $v_r = c [\tilde{E}_\theta \times H_{0z}] / H^2$ . Практически это означает скорость передачи энергии электронов высокочастотному полю. Здесь  $H_{0z}$  – статическое аксиальное магнитное поле магнетрона,  $H^2 = H_{0z}^2 + H_\theta^2$ ,  $H_\theta = 2I_z / cR_c$ ,  $I_z$  – продольный ток катода и  $R_c$  – его радиус. Прозрачный катод состоит из отдельных продольных эмиттеров периодически расположенных на окружности с радиусом катода (рис. 7).

На поверхности сплошного катода тангенциальное поле  $\tilde{E}_\theta$  равно нулю (рис. 8, кривая 1), следовательно, оно довольно слабое и на электронной втулке  $\Delta$ , дрейфующей вокруг катода, что определяет медленное движение электронов к аноду. Последнее ведет к задержке начала генерации. Напротив, в конструкции с прозрачным катодом поле  $\tilde{E}_\theta$ , проникающее через катод, намного сильнее на электронной втулке  $\Delta$  (рис. 8, кривая 2), что обеспечивает быстрое движение электронов к аноду, то есть быстрый старт генерации.

Для магнетрона с прозрачным катодом [7], к которому приложено напряжение 400 кВ с фронтом 10 нс, расчет показывает практически столь же короткий фронт генерации (рис. 9).

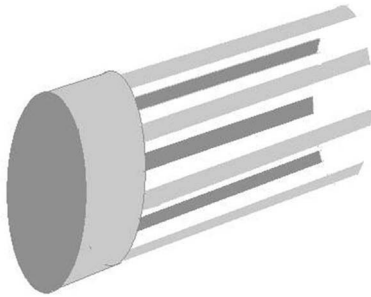


Рис. 7. Прозрачный катод [7]

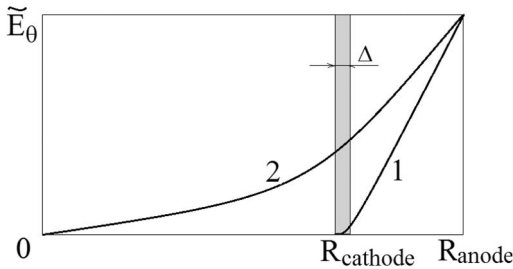


Рис. 8. Поле  $\tilde{E}_\theta$  в магнетроне со сплошным (1) и с прозрачным (2) катодом [7]

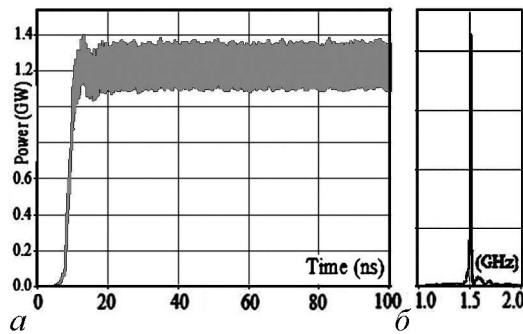


Рис. 9. Выходная мощность 1.2 ГВт (а) на частоте 1.5 ГГц (б) и фронтом генерации 10 нс магнетрона [8] с прозрачным катодом и приложенным напряжением в 400 кВ (со сплошным катодом фронт генерации свыше 40 нс)

## 3. Эффективный магнетрон с протяженным виртуальным катодом

Катоды в пространстве взаимодействия магнетрона подвержены бомбардировке электронами в неблагоприятных фазах рабочей волны. Чем сильнее поле, тем интенсивнее бомбардировка, что имеет место в релятивистских магнетронах. Кроме

того, как правило, в релятивистских высокочастотных источниках используются катоды с взрывной эмиссией. Эти катоды являются источниками не только электронов, но также прикатодной плазмы, которая быстро распространяется поперек приложенного аксиального магнитного поля со скоростью  $v_p \approx (2 - 3)$  см/мкс [13]. Наличие прикатодной плазмы сокращает межэлектродный промежуток  $d$  ( $d_{eff} = d - v_p t$ , здесь  $t$  – время), уменьшая тем самым электронный КПД  $\eta_e = 1 - \Delta/d_{eff}$ , что приводит к быстрому ограничению генерируемого импульса. Эти причины стимулируют устранение катода из пространства взаимодействия, заменив его на протяженный виртуальный катод (ВК) с потенциалом, близким к потенциалу реального катода. Для образования локального ВК, как известно [11], ток  $I$  трубчатого тонкостенного электронного пучка с радиусом  $R_b$  должен превысить предельный ток  $I_{max}$  в цилиндрическом канале с радиусом  $R$ , ограниченный собственным пространственным зарядом пучка,

$$I > I_{max} = \frac{mc^3 (\gamma_a^{2/3} - 1)^{3/2}}{e \cdot 2 \ln(R/R_b)}. \quad (1)$$

Здесь  $e$  и  $m$  – заряд и масса электрона,  $mc^3/e = 17.04$  кА,

$$\gamma_a = 1 + \frac{eU}{mc^2}, \quad (2)$$

$mc^2/e = 511$  кВ. Для образования протяженного ВК формируют два локальных ВК на концах пространства взаимодействия (рис. 10, а, область II) таким образом,

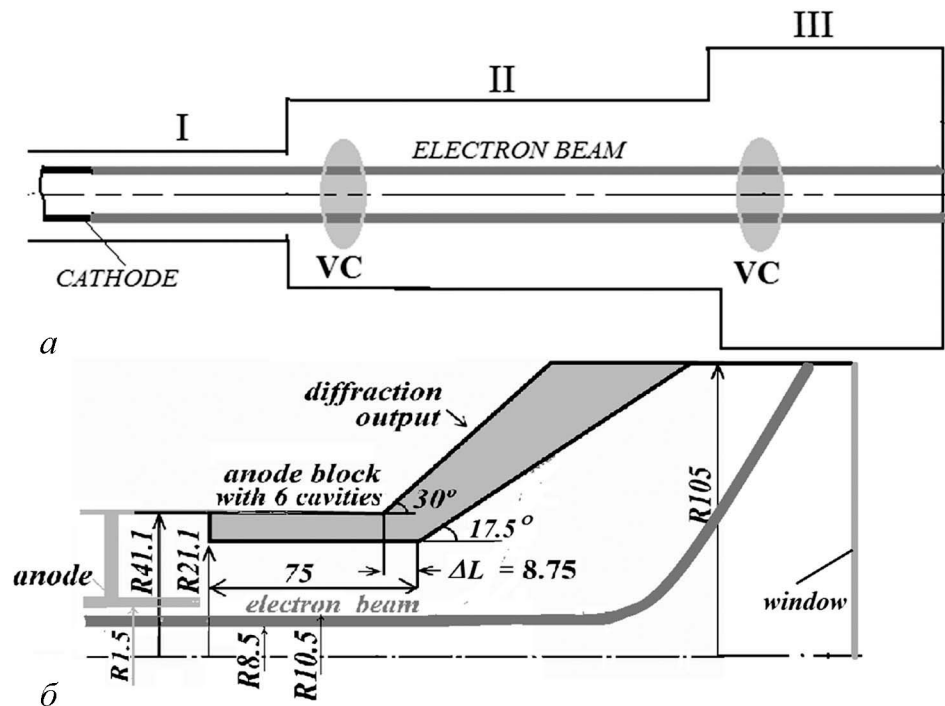


Рис. 10. а – области формирования локальных виртуальных катодов; б – магнетрон, рассчитанный с использованием программы MAGIC [5]. Рисунок из работы [14]

чтобы прямой пучок от первого ВК и отраженный от второго ВК образовали пространственный заряд с потенциалом, близким к потенциалу реального катода. Для этого перед анодным блоком устанавливается дополнительный анод (в области I) и после анодного блока пучок продолжается в широкую часть магнетрона (область III) [8]. Данная конструкция (рис. 10, б) предложена для демонстрации работы магнетрона с протяженным ВК на основе расчетов, приведенных в [14]. В натурном эксперименте предполагается использовать секционированную электронную пушку с магнитной компрессией для того, чтобы использовать катод с большой площадью эмиссии. В этом случае необходимый ток можно получить без взрывной эмиссии, то есть без образования плазмы.

В результате между локальными ВК (рис. 11, а, б) образуется протяженный ВК (рис. 11, в) с потенциалом  $U \approx 0$ , и расчетный электронный КПД  $\eta_e$  (рис. 12, а) [14] получается близким к КПД высокоэффективного магнетрона [8]. На рис. 12, б показаны структуры электронных пучков и высокочастотных полей для расчетных мод.

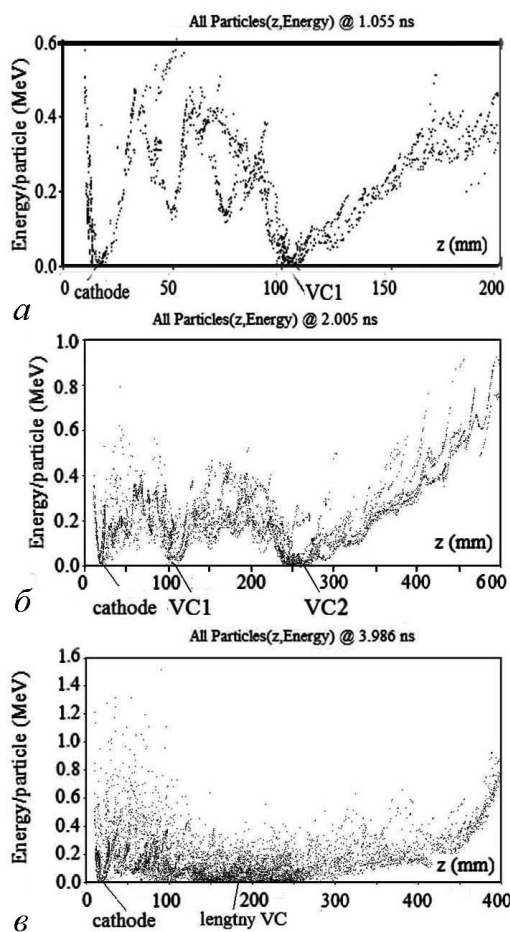


Рис. 11. а – образование первого ВК; б – первый и второй локальные ВК; в – процесс формирования протяженного ВК [14]

#### 4. Коническая антенна как преобразователь мод

Многочисленные примеры работы магнетронов показывают устойчивую работу на  $\pi$ -моды (рис. 12, б), когда в магнетроне число одинаковых резонаторов (без связей)  $N \leq 8$ . В данном случае возможно преобразование этого типа колебаний в излучение с более простой структурой непосредственно в конической антенне. Для этого достаточно продолжить в антенну только те резонаторы анодного блока, поляризация поля в которых соответствует структуре излучаемой волны [15]. При этом нарушается азимутальная симметрия, но для работы на  $\pi$ -моды это не является препятствием. Если, например, продолжить в антенну каждый второй резонатор (резонаторы с одинаковыми фазами поля), на выходе будет возбуждаться  $TE_{01}$ -мода (рис. 13). Если в 6-резонаторном магнетроне продлить только диаметрально противоположные резонаторы или 4 резонатора за исключением вышеуказанных диаметрально противоположных резонаторов, на выходе будет  $TE_{11}$ -мода (рис. 14),

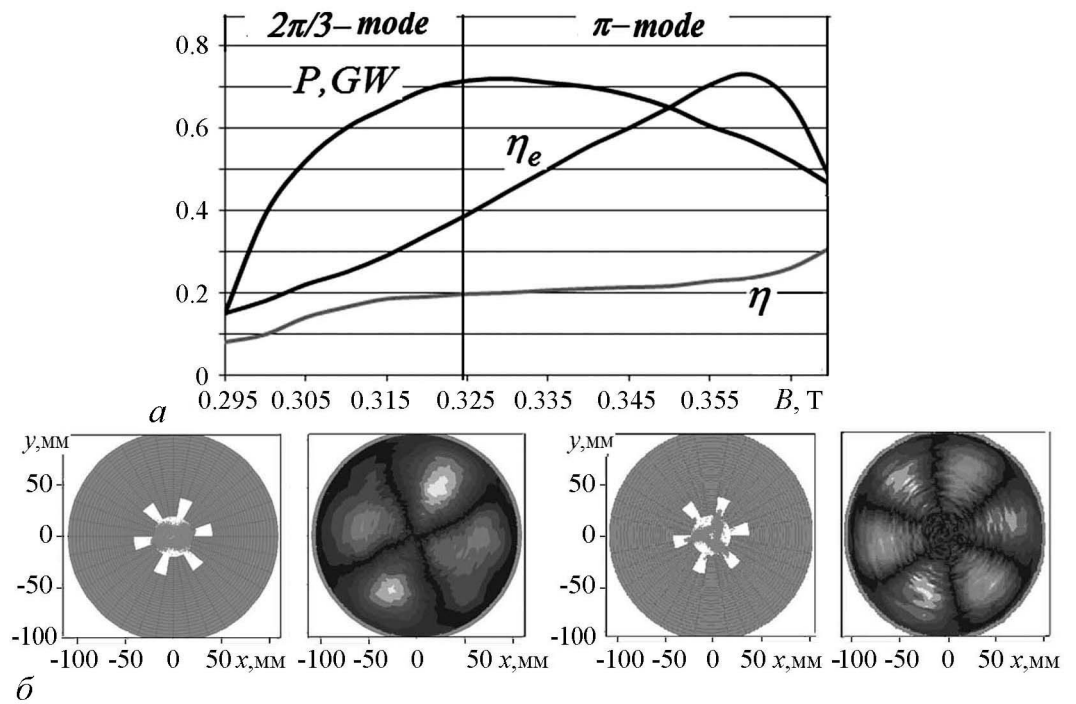


Рис. 12.  $a$  – характеристики рабочих мод: излучаемая мощность  $P$ , электронный КПД  $\eta_e$ , полный КПД  $\eta$ ;  $b$  – электронные спицы и структуры электрических полей расчетных мод [14]

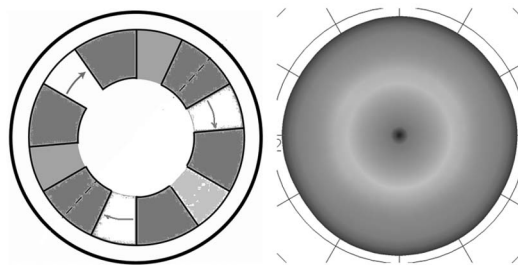


Рис. 13.  $a$  – сечения резонаторов, продолженных в антенну для возбуждения  $TE_{01}$ -моды на выходе;  $b$  – структура  $TE_{01}$ -моды

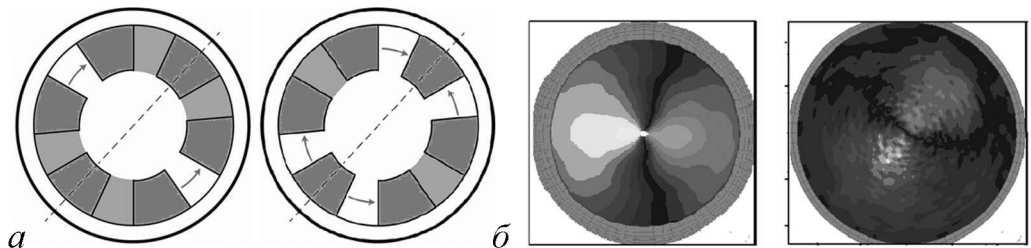


Рис. 14.  $a$  – сечения резонаторов в 6-резонаторном магнетроне, продолженных в антенну для возбуждения  $TE_{11}$ -моды на выходе;  $b$  – структуры радиального и азимутального поля  $TE_{11}$ -моды

структура которой близка к гауссовой. В последнем случае возможна реализация компактного магнетрона (рис. 15), так как максимальный радиус резонаторов магнетрона может превышать критический размер, соответствующий частоте отсечки для излучаемой волны [16].

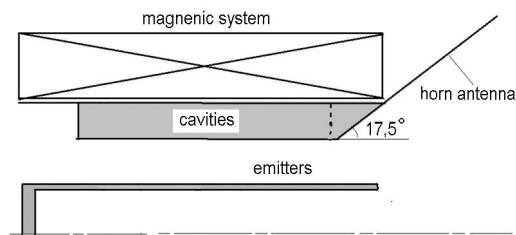


Рис. 15. Компактный магнетрон [16]

## 5. Быстрое переключение мод

Для некоторых применений как, например, для работы радаров и синхронизации магнетронов, необходимо быстрое переключение частоты излучения, что проще всего осуществить переключением излучаемой моды. Как реально можно быстро изменить рабочую моду магнетрона? Каждой моде соответствует своя область магнитных полей, однако, невозможно быстро изменить магнитное поле. Более реально использовать внешний сигнал, то есть режим захвата. Это можно осуществить коротким слабым сигналом, что видно из такой механической аналогии, как шар на гребне между двумя долинами. Такой шар находится в неустойчивой позиции, но если слегка сдвинуть его, например, влево, он неминуемо покатится в левую долину. Однако, когда шар еще находится близко к гребню, коротким слабым толчком его можно перекинуть через гребень вправо, и он покатится в правую долину. Аналогичная ситуация в магнетроне. Установив магнитное поле близко к граничному значению  $H_{00}$  между областями (см. рис. 4), соответствующими соседним модам, осуществляем переключение на соседнюю моду в 400 кВ магнетроне [8] коротким (15 нс) 400 кВ сигналом (рис. 16, а) с частотой соседней моды. На рис. 16, б видно, что мощность излучения переключенной моды продолжает нарастать несмотря на то, что внешнее воздействие закончилось. На рис. 17 показана эволюция спектра колебаний. После внешнего воздействия частота «старой» моды продолжает уменьшаться, пока не установится единственная частота переключенной моды.

Переключение мод невозможно осуществить очень малым сигналом, поскольку неизбежные шумы в магнетроне размывают граничное магнитное поле  $H_{00}$

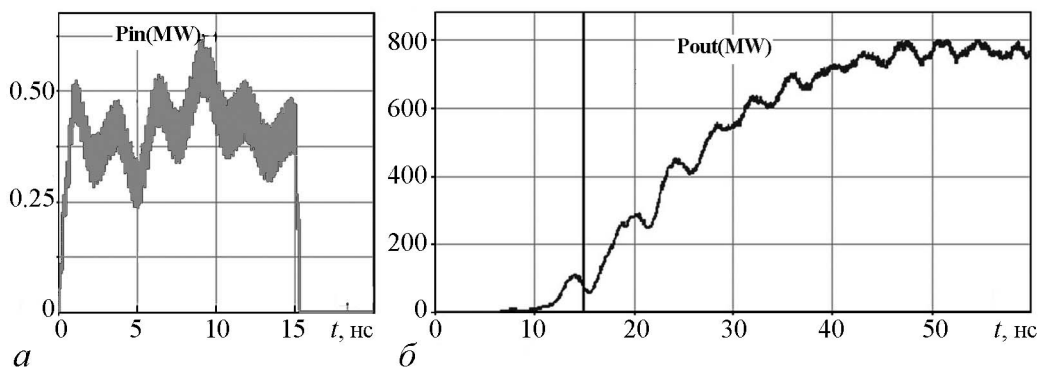


Рис. 16. а – короткий сигнал в 15 нс, переключающий моды; б – мощность излучаемой волны (вертикальная черта фиксирует время окончания внешнего воздействия) [17]



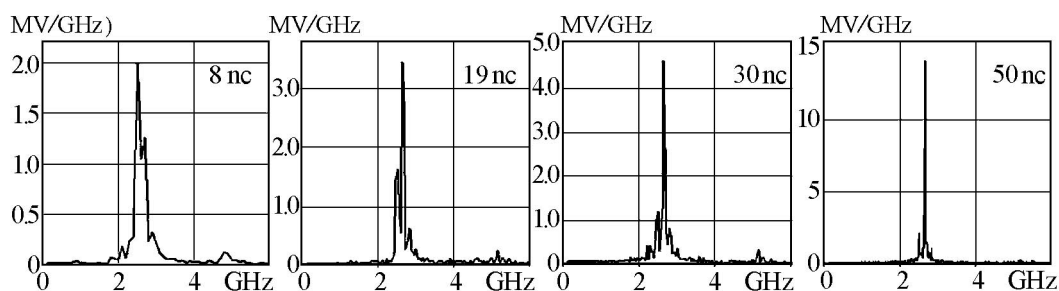


Рис. 17. Изменение спектра излучения во время внешнего воздействия и после него

(см. рис. 4) между областями, соответствующими соседним модам. Внутри такой уширенной граничной полосы при очередном включении магнетрона любая из соседних мод может быть реализована. Поскольку для каждого магнетрона уровень шумов сильно различается (от 40 дБ [18] до 20 дБ [19]) по отношению к генерируемой мощности, трудно прогнозировать насколько граничное поле уширится в том или ином случае. С одной стороны, представляется обоснованным, что устранение электронной бомбардировки катода и плазмы в пространстве взаимодействия путем замены реального катода протяженным ВК и заменой катода с взрывной эмиссией катодом без образования плазмы в электронной пушке, расположенной вне пространства взаимодействия, должно приводить к снижению уровня шумов. Тем не менее, из-за большого разброса по энергиям электронов в протяженном ВК (см. рис. 11, в) снижение уровня шумов не происходит. С другой стороны, в статье [20] показано, что снизить уровень шумов возможно азимутальной модуляцией аксиального магнитного поля. Применение прозрачного катода [7] в магнетроне также приводит к возникновению дополнительного азимутального магнитного поля  $H_\theta$  вокруг каждого эмиттера с радиусом  $r$  из-за продольного тока  $I_z$  в нем ( $H_\theta = 2I_z/cr$ ). Таким образом, электронная втулка, дрейфующая вокруг прозрачного катода, должна также азимутально модулировать аксиальное магнитное поле магнетрона. Однако влияние этого поля на работу релятивистского магнетрона требует отдельного изучения. Поэтому мы не приводим здесь конкретного примера, ограничиваясь общим замечанием.

### Заключение

Таким образом, мы привели наиболее, на наш взгляд, значимые этапы развития релятивистских магнетронов, хотя многие исследования не приняты во внимание, как например: развитие теории магнетронов, описанных в работах [12, 21–24]; переключение мод в различных магнетронах [25, 26] и разделение мод в них [27, 28]; уменьшение тока электронов, не взаимодействующих с синхронной волной, и другие. Коротко перечислим вышеприведенные достижения, отличающиеся, на наш взгляд, релятивистские магнетроны.

1. Аксиальный вывод излучения через азимутально-симметричный вывод, что позволяет использовать любую моду как рабочую волну; существенно увели-

чить электрическую изоляцию по отношению к высокочастотному пробую; улучшить селекцию продольных колебаний.

2. Оптимизация вывода позволила получить электронный КПД более 70% в расчетах и более 60% в эксперименте.
3. Предложен прозрачный катод для азимутального поля синхронной волны, что позволило осуществить быстрый старт генерации.
4. Реализация протяженного виртуального катода вместо реального катода, подверженного электронной бомбардировке, сокращает время жизни магнетрона. Кроме того, внешняя электронная пушка может, в принципе, использовать катод, не порождающий плазму, сокращающую длительность генерируемого импульса.
5. Возможность использования вывода в качестве преобразования рабочей  $\pi$ -моды в излучение с более простой структурой поля.
6. Возможность реализации компактного магнетрона со структурой излучения, подобной гауссовой.
7. Возможность быстрого переключения мод.

#### Библиографический список

1. *Bekefi G., Orzechowski J.J.* Giant microwave burst beam magnetron // *Phys. Rev. Lett.* 1976. Vol. 37, Issue 6. P. 379–382.
2. *Ковалев Н.Ф., Кольчугин Б.Д., Нечаев В.Т., Офицеров М.М., Солянов Е.И., Фукс М.И.* Релятивистский магнетрон с дифракционным выводом // *Письма в ЖТФ.* 1977. Вып. 3. С. 430431.
3. *Ковалев Н.Ф., Крастелев Е.Г., Кузнецов М.И., Майне А.М., Офицеров М.М., Пападичев В.А., Фукс М.И., Чеканова Л.Н.* Высокочастотный релятивистский 3-см магнетрон // *Письма в ЖТФ.* 1980. Вып. 6. С. 197–198.
4. *Власов С.Н., Жислин Г.М., Орлова И.М., Петелин М.И., Рогачева Г.Г.* Открытые резонаторы в форме волноводов с переменным сечением // *Изв.вузов. Радиофизика.* 1969. Vol. 12, Issue 8. С. 1236–1244.
5. *Goplen B., Ludeking L., Smith D., Warren G.* User-configurable MAGIC for electromagnetic PIC calculations // *Comput. Phys. Commun.* 1995. Vol. 87, Issue 1. P. 54-86.
6. *Daimon M., Jiang W.* Modified configuration of relativistic magnetron with diffraction output for efficiency improvement // *Appl. Phys. Lett.* 2007. Vol. 91, Issue 19. P. 191503–191505.
7. *Fuks M.I., Schamiloglu E.* Rapid start of oscillations in a magnetron with a «transparent» cathode // *Phys. Rev. Lett.* 2005. Vol. 95. 205101-1-4.
8. *Fuks M.I., Schamiloglu E.* 70% efficient relativistic magnetron with axial extraction of radiation through a horn antenna // *IEEE Trans. Plasma Sci.* 2010. Vol. 38, Issue 6. P. 1302–1312.
9. *Leach C., Prasad S., Fuks M., Schamiloglu E.* Suppression of leakage current in a relativistic magnetron using a novel cathode endcap design // *IEEE Trans. Plasma Sci.* 2011. Vol. 40, Issue 8. P. 819–822.

10. *Богданкевич Л.С., Рухадзе А.А.* Устойчивость РЭП и проблема предельных токов // УФН. 1971. Т. 103. С. 609–613.
11. *Брейзман Б.Н., Рютов Д.Д.* Атомная физика. 1974. Т. 14. С. 873–907.
12. *Пиковский А., Розенблюм М., Куртс Ю.* Синхронизация: Фундаментальное нелинейное явление. М.: Техносфера, 2003.
13. *Бугаев С.П., Ким А.А., Кошелев В.И.* Движение катодной плазмы и вакуумный пробой в коаксиальных диодах с магнитной изоляцией // Эмиссионная электроника высоких токов. Новосибирск: Наука, 1984.
14. *Fuks M., Prasad S., Schamiloglu E.* Efficient magnetron with virtual cathode // IEEE Trans. Plasma Sci. 2016. Vol. 44(1), Issue 8. P. 1298–1302.
15. *Fuks M.I., Kovalev N.F., Andreev A.D., Schamiloglu E.* Mode conversion in a magnetron with axial extraction of radiation // IEEE Trans. Plasma Sci. 2006. Vol. 34, Issue 3. P. 620–626.
16. *Prasad S., Leach C., Fuks M.I., Schamiloglu E.* Compact relativistic magnetron with Gaussian radiation pattern // IEEE Trans. Plasma Sci. 2012. Vol. 40, Issue 11. P. 3116–3120.
17. *Liu M., Michel C., Prasad S., Fuks M.I., Schamiloglu E., Liu C.-L.* RF mode switching in a relativistic magnetron with diffraction output // Appl. Phys. Lett. 2010. Vol. 97, Issue 1. P. 251501-11-3.
18. *Liu M., Liu C.-L., Galbreath D., Michel C., Prasad S., Fuks M.I., Schamiloglu E.* Frequency switching in a relativistic magnetron with diffraction output // J. Appl. Phys. 2011. Vol. 110, Issue 3. P. 039303-1-7.
19. *Liu M., Fuks M.I., Schamiloglu E., Liu C.-L.* Mode switching in a 12-cavity relativistic magnetron with axial extraction of radiation // IEEE Trans. Plasma Sci. 2012. Vol. 40, Issue 6. P. 1569–1574.
20. *Yamamoto K., Kuranuma H., Koinuma T., Tashiro T.* A study of magnetron noise // IEEE Trans. Electron Dev. 1987. Vol. ED-34, Issue 5. P. 1223–1226.
21. *Tahir I., Dexter A., Carter R.* Noise performance of frequency- and pulse-locked CW magnetrons operated as current-controlled oscillators // IEEE Trans. Electron Devices. 2005. Vol. 52, Issue 9. P. 2096–2103.
22. *Neculae V.B., Gilgenbach R.M., Lau Y.Y.* Low-noise microwave magnetrons by azimuthally varying axial magnetic field // Appl. Phys. Lett. 2003. Issue 83. P. 1938–1940.
23. *Нечаев В.Е., Петелин М.И., Фукс М.И.* О перспективах использования релятивистских электронных потоков в приборах магнетронного типа // Письма в ЖТФ. 1977. Т. 3, № 15. С. 763-767.
24. *Fuks M.I., Nechaev V.E.* Theoretical and experimental study of relativistic magnetrons // IEEE/MTT-s Int. Microwave Symp. Digest. Orlando. 1979. P. 79–84.
25. *Andreev A.D., Hendricks K.J., Fuks M.I., Schamiloglu E.* Analytic calculation of anode current in relativistic magnetron // Pulse Power Conference. 2009. P. 502–506.
26. *Andreev A.D., Hendricks K.J., Fuks M.I., Schamiloglu E.* Elementary theory of

a relativistic magnetron operation: Dispersion diagram // *J. Directed Energy*. 2013. Vol. 5, Issue 1. P. 1–41.

27. *Liu M., Liu C.-L., Fuks M.I., Schamiloglu E.* Hysteresis dependence of mode separation on time-varying applied voltage in a relativistic magnetron with diffraction output // *IEEE Trans. Plasma Sci.* 2012. Vol. 40, Issue 6. P. 1569–1574.
28. *Fuks M.I., Schamiloglu E., Prasad S., Galbreath D.* Mode separation in a magnetron with diffraction output driven by a transparent cathode // *IVEC*. 2010.

*Поступила в редакцию 7.11.2016*

## References

1. *Bekefi G., Orzechowski J.J.* Giant microwave burst beam magnetron // *Phys. Rev. Lett.* 1976. Vol. 37, Issue 6. P. 379–382.
2. *Kovalev N.F., Kol'chugin B.D., Nechaev V.T., Ofitserov M.M., Soluyanov E.I., Fuks M.I.* Relativistic magnetron with diffraction output // *Tech. Phys. Lett.* 1977. Issue 3. P. 430–431.
3. *Kovalev N.F., Krastelev E.G., Kuznetsov M.I., Maine A.M., Ofitserov M.M., Papadichev V.A., Fuks M.I., Chekanova L.N.* High power relativistic 3-cm magnetron // *Tech. Phys. Lett.* 1980. Issue 6. P. 197–198.,
4. *Vlasov S.N., Zhislin G.M., Orlova I.M., Petelin M.I., Rogacheva G.G.* Opened resonators as waveguides with varying cross sections // *Radiophysics and Quantum Electronics*. 1969. Vol. 12, Issue 8. P. 1236–1244,
5. *Goplen B., Ludeking L., Smithe D., Warren G.* User-configurable MAGIC for electromagnetic PIC calculations // *Comput. Phys. Commun.* 1995. Vol. 87, Issue 1. P. 54–86.
6. *Daimon M., Jiang W.* Modified configuration of relativistic magnetron with diffraction output for efficiency improvement // *Appl. Phys. Lett.* 2007. Vol. 91, Issue 19. P. 191503–191505.
7. *Fuks M.I., Schamiloglu E.* Rapid start of oscillations in a magnetron with a «transparent» cathode // *Phys. Rev. Lett.* 2005. Vol. 95. 205101-1-4.
8. *Fuks M.I., Schamiloglu E.* 70% efficient relativistic magnetron with axial extraction of radiation through a horn antenna // *IEEE Trans. Plasma Sci.* 2010. Vol. 38, Issue 6. P. 1302–1312.
9. *Leach C., Prasad S., Fuks M., Schamiloglu E.* Suppression of leakage current in a relativistic magnetron using a novel cathode endcap design // *IEEE Trans. Plasma Sci.* 2011. Vol. 40, Issue 8. P. 819–822.
10. *Bogdankevich L.S., Rukhadze A.A.* Stability REB and a problem of critical currents // *Achievements of Physical Sciences*. 1971. Vol. 103. P. 609–613.
11. *Breizman B.N., Rutov D.D.* // *Nuclear Physics*. 1974. Vol. 14. P. 873–907 (in Russian).
12. *Pikovskiy A., Rosenblum M., Kurths J.* Synchronization: A Universal Concept in Nonlinear Sciences. Cambridge University Press, 2003.
13. *Bugaev S.P., Kim A.A., Koshelev V.I.* Plasma motion and vacuum breakdown in coaxial diodes with magnetic insulation // *Emission High Current Electronics*. Novosibirsk: Science, 1984.

14. Fuks M., Prasad S., Schamiloglu E. Efficient magnetron with virtual cathode // IEEE Trans. Plasma Sci. 2016. Vol. 44(1), Issue 8. P. 1298–1302.
15. Fuks M.I., Kovalev N.F., Andreev A.D., Schamiloglu E. Mode conversion in a magnetron with axial extraction of radiation // IEEE Trans. Plasma Sci. 2006. Vol. 34, Issue 3. P. 620–626.
16. Prasad S., Leach C., Fuks M.I., Schamiloglu E. Compact relativistic magnetron with Gaussian radiation pattern // IEEE Trans. Plasma Sci. 2012. Vol. 40, Issue 11. P. 3116–3120.
17. Liu M., Michel C., Prasad S., Fuks M.I., Schamiloglu E., Liu C.-L. RF mode switching in a relativistic magnetron with diffraction output // Appl. Phys. Lett. 2010. Vol. 97, Issue 1. P. 251501-11-3.
18. Liu M., Liu C.-L., Galbreath D., Michel C., Prasad S., Fuks M.I., Schamiloglu E. Frequency switching in a relativistic magnetron with diffraction output // J. Appl. Phys. 2011. Vol. 110, Issue 3. P. 039303-1-7.
19. Liu M., Fuks M.I., Schamiloglu E., Liu C.-L. Mode switching in a 12-cavity relativistic magnetron with axial extraction of radiation // IEEE Trans. Plasma Sci. 2012. Vol. 40, Issue 6. P. 1569–1574.
20. Yamamoto K., Kuranuma H., Koinuma T., Tashiro T. A study of magnetron noise // IEEE Trans. Electron Dev. 1987. Vol. ED-34, Issue 5. P. 1223–1226.
21. Tahir I., Dexter A., Carter R. Noise performance of frequency- and pulse-locked CW magnetrons operated as current-controlled oscillators // IEEE Trans. Electron Devices. 2005. Vol. 52, Issue 9. P. 2096–2103.
22. Neculae V.B., Gilgenbach R.M., Lau Y.Y. Low-noise microwave magnetrons by azimuthally varying axial magnetic field // Appl. Phys. Lett. 2003. Issue 83. P. 1938–1940.
23. Nechaev V.E., Petelin M.I., Fuks M.I. Perspectives of relativistic electron beams in devices of magnetron types // Tech. Phys Lett. 1977. Vol. 3, Issue 15. P. 763–767.
24. Fuks M.I., Nechaev V.E. Theoretical and experimental study of relativistic magnetrons // IEEE/MTT-s Int. Microwave Symp. Digest. Orlando. 1979. P. 79–84.
25. Andreev A.D., Hendricks K.J., Fuks M.I., Schamiloglu E. Analytic calculation of anode current in relativistic magnetron // Pulse Power Conference. 2009. P. 502–506.
26. Andreev A.D., Hendricks K.J., Fuks M.I., Schamiloglu E. Elementary theory of a relativistic magnetron operation: Dispersion diagram // J. Directed Energy. 2013. Vol. 5, Issue 1. P. 1–41.
27. Liu M., Liu C.-L., Fuks M.I., Schamiloglu E. Hysteresis dependence of mode separation on time-varying applied voltage in a relativistic magnetron with diffraction output // IEEE Trans. Plasma Sci. 2012. Vol. 40, Issue 6. P. 1569–1574.
28. Fuks M.I., Schamiloglu E., Prasad S., Galbreath D. Mode separation in a magnetron with diffraction output driven by a transparent cathode. IVEC, 2010.

*Михаил Исаакович Фукс* родился в Горьком (ныне Нижний Новгород), Россия. Получил степень кандидата наук по физической электронике в Институте Прикладной физики РАН. С 1963 года поступил в Горьковский Радиофизический Институт, а с 1977 года – в Институт Прикладной физики РАН, где занимался мощной электроникой сверхвысоких частот как научный сотрудник, затем старший научный сотрудник и руководитель научной группы. С 1999 года работал в США по радарной технологии, в интересах предприятий противоракетной защиты. С 2000 года работает в Департаменте Электрической и компьютерной технологии Университета Новой Мексики в качестве профессора-исследователя. Область научных интересов: формирование и транспортировка электронных пучков, развитие и применение различных источников мощного излучения и электродинамических (в том числе метаматериальных) систем. Опубликовал более 80 статей (в том числе и в соавторстве) в реферируемых научных журналах и более 200 статей в Трудах конференций, имеет 3 американских и 5 российских патентов.

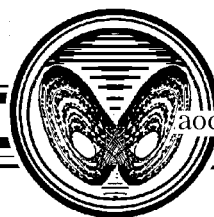
Albuquerque, NM 87131-1 356, USA  
Department of Electrical & Computer Engineering, University of New Mexico  
E-mail: fuchs@unm.edu

*Edl Schamiloglu* родился в Бронксе (штат New York, USA, 1959). Получил степени бакалавра (1979) и магистра (1981) в Школе технологии и прикладной науки в Колумбийском Университете (New York), а в 1988 году получил степень PhD по прикладной физике и математике в Корнельском Университете в Итаке (штат New York). В 1988 году начал работать как помощник профессора электрической и компьютерной технологии в Университете Новой Мексики (Albuquerque, США). В настоящее время профессор электрической и компьютерной технологии и руководитель Лаборатории импульсной мощности, пучков и микроволн. В 1990 году читал лекции в Школе американского ускорителя частиц Гарвардского Университета в Кембридже (штат Массачусетс, США), а в 1997 году – в Массачусетском Институте технологии (Кембридж, США). Соиздатель (вместе с R.J. Barker) книги по современным источникам мощных микроволн и технологиям (Piscataway, NJ: IEEE, 2001), соавтор (вместе с J. Benford и J. Swegle) книги «High-Power Microwaves» 2nd Ed. (New York, NY: Taylor & Francis, 2007). Соиздатель Трудов Института Электрических инженеров по мощным импульсным технологиям и применениям. Соавтор более 90 статей в реферируемых журналах и 150 статей в Трудах конференций. Имеет 4 патента. Является Старшим издателем Трудов IEEE Plasma Science. Область научных интересов: физика и технология заряженных частиц, мощные микроволновые источники, физика и диагностика плазмы, распространение электромагнитных волн, импульсные и сложные системы.

Albuquerque, NM 87131-1 356, USA  
Department of Electrical & Computer Engineering, University of New Mexico  
E-mail: edls@unm.edu

*Ковалев Николай Федорович* родился в 1943 году, окончил Горьковский политехнический институт (ныне Нижегородский технический университет) в 1966 году. После окончания ГПИ поступил на работу в НИРФИ и с 1977 года по настоящий день работает в ИПФ РАН заведующим лабораторией. Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата (1983) и доктора (1992) физико-математических наук в области релятивистской СВЧ-электроники. Опубликовал свыше 130 научных статей и докладов по направлениям: гигаваттная СВЧ-электроника, сильнозамагниченные релятивистские электронные пучки, электродинамика. Лауреат государственной премии СССР.

Россия, 603950 Нижний Новгород, БОКС-120, ул.Ульянова, 46  
Институт прикладной физики РАН  
E-mail: kovalev@appl.sci-nnov.ru



## ОДНОРОДНО ГИПЕРБОЛИЧЕСКИЙ АТТРАКТОР В СИСТЕМЕ НА ОСНОВЕ СВЯЗАННЫХ ОСЦИЛЛЯТОРОВ С СЕПАРАТРИСОЙ В ВИДЕ «ВОСЬМЕРКИ»

*В. П. Круглов<sup>1,2</sup>, Л. М.-Б. Хаджиева<sup>2,3</sup>*

<sup>1</sup>Институт радиотехники и электроники им. В.А. Котельникова РАН, Саратовский филиал  
Россия, 410019 Саратов, Зеленая, д. 38

<sup>2</sup>Национальный исследовательский  
Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского  
Россия, 410012 Саратов, Астраханская, 83

<sup>3</sup>Чеченский государственный университет  
Россия, 364093 Грозный, А. Шерипова, 32

E-mail: [kruglovyacheslav@gmail.com](mailto:kruglovyacheslav@gmail.com); [leyla.khadzhieva@gmail.com](mailto:leyla.khadzhieva@gmail.com)

В работе предложена и исследована новая автономная система с гиперболической хаотической динамикой, отвечающей аттрактору Смейла–Вильямса в отображении Пуанкаре, сконструированная на основе модели, рассмотренной в свое время Ю.И. Неймарком и имеющей на фазовой плоскости сепаратрису в форме восьмерки.

Предлагаемая модель составлена из двух подсистем Неймарка, характеризующихся обобщенными координатами  $x$  и  $y$ . В уравнения добавлены члены, придающие подсистемам автоколебательный характер. Кроме того, специальная связь между подсистемами обеспечивает утроение угла поворота вектора  $(x, y)$  при возвратах в окрестность начала координат на последовательных обходах сепаратрисы. Исследование подсистем основано на численном решении уравнений динамики с построением отображения Пуанкаре.

Результаты численного моделирования (итерационная диаграмма для угловой переменной, значения показателей Ляпунова) демонстрируют, что угловая переменная подвергается растягивающему отображению окружности, а по остальным направлениям происходит сильное сжатие элемента фазового объема. Построено распределение углов между устойчивым и неустойчивым многообразиями аттрактора и с его помощью показано, что выполняется свойство трансверсальности многообразий аттрактора. Структурная устойчивость аттрактора подтверждается гладкой зависимостью старшего показателя Ляпунова от параметров.

Проведенные исследования показали, что в фазовом пространстве предложенной системы в определенной области параметров наблюдается аттрактор типа Смейла–Вильямса.

*Ключевые слова:* Хаос, аттрактор, соленоид Смейла–Вильямса, показатель Ляпунова.

DOI: 10.18500/0869-6632-2016-24-6-

*Ссылка на статью:* Круглов В.П., Хаджиева Л.М.-Б. Однородно гиперболический аттрактор в системе на основе связанных осцилляторов с сепаратрисой в виде «восьмерки» // Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2016. Т. 24, № 6. С. .

# UNIFORMLY HYPERBOLIC ATTRACTOR IN A SYSTEM BASED ON COUPLED OSCILLATORS WITH «FIGURE-EIGHT» SEPARATRIX

*V. P. Kruglov*<sup>1,2</sup>, *L. M.-B. Khadzhieva*<sup>2,3</sup>

<sup>1</sup>V.A. Kotelnikov Institute of Radio Engineering and Electronics of RAS, Saratov Branch

Zelenaya str., 38, 410019 Saratov, Russia

<sup>2</sup>National Research Saratov State University

Astrakhanskaya str., 83, 410012 Saratov, Russia

<sup>3</sup>Chechen State University

Sheripova str. 32, 364093 Grozny, Russia

E-mail: kruglovyacheslav@gmail.com; leyla.khadzhieva@gmail.com

A new autonomous system with chaotic dynamics corresponding to Smale–Williams attractor in Poincaré map is introduced. The system is constructed on the basis of the model with «figure-eight» separatrix on the phase plane discussed in former times by Y.I. Neimark.

Our system is composed of two Neimark subsystems with generalized coordinates  $x$  and  $y$ . It is described by the equations with additional terms due to which the system becomes self-oscillating. Furthermore, a special coupling between subsystems provides the tripling of the angle of vector  $(x, y)$  rotation when returning to the neighborhood of the origin in successive rounds on separatrix. Study is based on the numerical solution of the dynamical equations with the construction of the Poincaré map.

Results of numerical simulation (iteration diagram for the angular variable, Lyapunov exponents) demonstrate that the angular variable undergoes expanding circle map, while in the other directions there is a strong compression of the phase volume element. Distribution of angles between stable and unstable manifolds of the attractor is obtained and it confirms the property of transversal manifolds of the attractor. Structural stability of the attractor is confirmed by the smooth dependence of the highest Lyapunov exponent on the parameters. With this we conclude that the attractor of the Smale–Williams type is observed in the phase space of the proposed system in a certain range of parameters.

*Keywords:* Chaos, attractor, Smale–Williams solenoid, Lyapunov exponent.

DOI: 10.18500/0869-6632-2016-24-6-

*Paper reference:* Kruglov V.P., Khadzhieva L.M.-B. Uniformly hyperbolic attractor in a system based on coupled oscillators with «figure-eight» separatrix. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*. 2016. Vol. 24. Issue 6. P. .

## Введение

До недавних пор примеры гиперболического хаоса, характеризующего свойством грубости (структурной устойчивости) были представлены лишь сконструированными математическими примерами [1–3]. На рис. 1 показано построение одного из вариантов соленоида Смейла–Вильямса, когда область в виде тора в трехмерном пространстве за один шаг эволюции претерпевает продольное растяжение, поперечное сжатие и складывание тройной петлей, оказываясь расположенной внутри исходного тора. С увеличением числа шагов количество витков трансформируемого объекта стремится к бесконечности, и возникает аттрактор – соленоид, имеющий в поперечном направлении структуру типа канторова множества. Такие аттракторы могут иметь место также и в пространстве размерности выше трех.

В последнее время указаны примеры физически реализуемых систем, описываемых дифференциальными уравнениями, с однородно гиперболическими аттракторами типа соленоида Смейла–Вильямса в сечении Пуанкаре [4–6]. Принцип



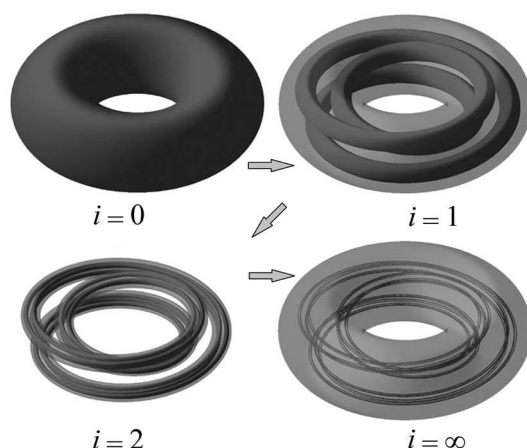


Рис. 1. Пример построения соленоида Смейла–Вильямса с утросением угловой переменной

работы этих систем основан на специально подобранном преобразовании угловой переменной (например, фазы колебаний) за некоторый характерный период. Чтобы в сечении Пуанкаре системы реализовался аттрактор типа Смейла–Вильямса, угловая переменная должна подвергаться растягивающему отображению окружности, по остальным переменным отображения Пуанкаре должно иметь место сжатие элемента фазового объема. Большинство рассматривавшихся систем с аттрактором типа Смейла–Вильямса неавтономные, хотя примеры автономных систем тоже известны. Один из них основан на модификации модели «хищник–жертва» с предельным циклом, проходящим в окрестности седла [4].

При этом коэффициенты роста в уравнениях зависят от переменных и изменяют знак по очереди. Благодаря комплексификации уравнений и добавлению определенным образом подобранной нелинейной связи между подсистемами, была получена четырехмерная автономная система с аттрактором Смейла–Вильямса в сечении Пуанкаре. В той же работе была рассмотрена шестимерная автономная система с аттрактором Смейла–Вильямса в сечении Пуанкаре, возникающим в окрестности возмущенного гетероклинического цикла. В работе [6] был введен в рассмотрение пример распределенной автономной системы с аттрактором типа Смейла–Вильямса.

В настоящей работе мы предлагаем новый пример автономной системы с аттрактором Смейла–Вильямса, построенной на основе двух подсистем, каждая из которых представляет собой осциллятор с сепаратрисой седла в виде «восьмерки» [7, 8]. Обобщенные координаты, относящиеся к этим подсистемам, могут рассматриваться как действительная и мнимая части комплексной переменной. Благодаря связи между подсистемами, установленной в некотором специальном виде, аргумент комплексной переменной подвергается растягивающему отображению окружности на каждом очередном цикле, когда траектория проходит рядом с седлом, лежащим в начале координат.

## 1. Основные уравнения

Исходной является система Неймарка [7,8]

$$\begin{aligned} \dot{X} &= U, \\ \dot{U} &= (1 - X^2)X + [L - (1 - X^2)^2]U, \end{aligned} \tag{1}$$

в которой при положительных значениях параметра надкритичности  $L$  возможны периодические автоколебания. Точка  $X = 0, U = 0$  является седловой. На рис. 2 представлены фазовые портреты системы (1) при некоторых положительных

значениях параметра  $L$ . При значении  $L \approx 0.3197$  происходит бифуркация «влипания» предельных циклов в петли, образованные асимптотическими траекториями седла (рис. 2, б). При этом периодические автоколебания наблюдаются при значениях  $L$  больше и меньше бифуркационного.

Рассмотрим теперь две связанные системы, характеризуемые обобщенными координатами  $x$  и  $y$ , и сконструируем уравнения так, чтобы переменная, определенная как сумма квадратов  $x^2 + y^2$ , демонстрировала такую же динамику, как величина  $X^2$  в уравнениях (1). А именно, полагаем

$$\begin{aligned} \dot{x} &= u, \\ \dot{u} &= (1 - x^2 - y^2)x + [L - (1 - x^2 - y^2)^2]u, \\ \dot{y} &= v, \\ \dot{v} &= (1 - x^2 - y^2)y + [L - (1 - x^2 - y^2)^2]v. \end{aligned} \quad (2)$$

Следующий шаг состоит в том, что мы вводим дополнительную связь так, чтобы при проходе траектории вблизи седловой точки происходило утроение угловой переменной, определенной как аргумент комплексного числа  $x + iy$ . А именно, полагаем

$$\begin{aligned} \dot{x} &= u, \\ \dot{u} &= (1 - x^2 - y^2)x + [L - (1 - x^2 - y^2)^2]u + \varepsilon(u^3 - 3uv^2), \\ \dot{y} &= v, \\ \dot{v} &= (1 - x^2 - y^2)y + [L - (1 - x^2 - y^2)^2]v + \varepsilon(3u^2v - v^3), \end{aligned} \quad (3)$$

где  $\varepsilon$  – параметр связи.

Уравнения можно переписать в комплексной форме:

$$\begin{aligned} \dot{z} &= w, \\ \dot{w} &= (1 - |z|^2)z + \left[ L - (1 - |z|^2)^2 \right] w + \varepsilon w^3, \end{aligned} \quad (4)$$

где  $z = x + iy$  и  $w = u + iv$ .

Функционирование системы можно пояснить следующим образом. Аргумент переменной  $z$  обозначим  $\theta$ , то есть  $z = C \exp(i\theta)$ . Когда абсолютная величина  $z$  близка к нулю (траектория близка к седлу в начале координат), угловая переменная  $\theta$  претерпевает утроение благодаря слагаемому  $\varepsilon w^3$  и кубической нелинейности  $(1 - |z|^2)z$ . Таким образом, угловая переменная подвергается растягивающему отображению окружности  $\theta_{n+1} = 3\theta_n + \text{const}(\text{mod } 2\pi)$  после каждого нового возвращения траектории к седлу.

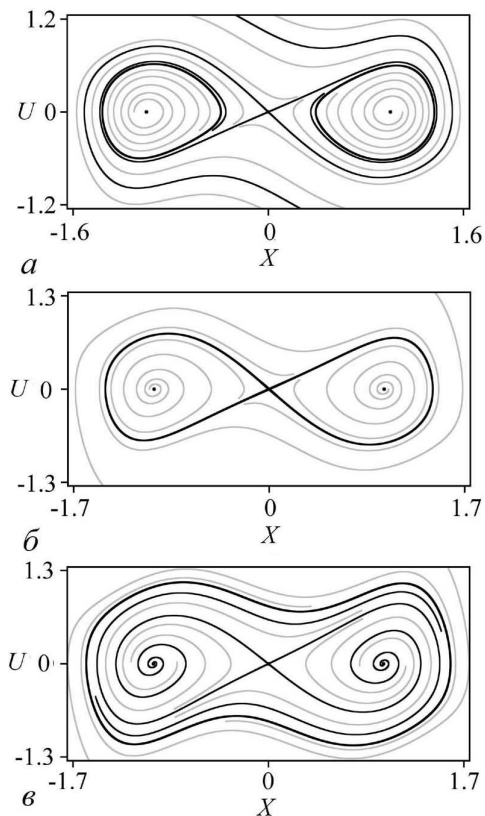


Рис. 2. Фазовые портреты системы (1) при  $L = 0.2$  (а),  $L \approx 0.3197$  (б) и  $L = 0.4$  (в). Предельные циклы изображены жирными линиями; отмечены неподвижные точки и асимптотические траектории

### Численные результаты

Система уравнений (3) решалась численно методом Рунге–Кутты четвертого порядка. На рис. 3 представлены примеры временных зависимостей динамических переменных системы (3) при значениях параметров  $L = 0.32$ ,  $\varepsilon = 0.02$ . Можно видеть, что динамические переменные меняются со временем нерегулярным образом. На рис. 4 изображен портрет аттрактора потоковой системы (3) в проекции на плоскость переменных  $(x, u)$  при значениях параметров  $L = 0.32$ ,  $\varepsilon = 0.02$ . Можно видеть, что фазовые траектории на аттракторе часто приближаются к седловой точке в начале координат.

Чтобы продемонстрировать устроение фазы, естественно обратиться к построению отображения Пуанкаре. Для этого в фазовом пространстве системы была выбрана секущая поверхность  $S = x^2 + y^2 = 1$ , причем пересечения ее фазовыми траекториями рассматриваются при движении в направлении увеличения  $S$ .

На рис. 5, а показана итерационная диаграмма для угловой переменной  $\theta$ , где по осям координат отложены ее значения, относящиеся к последовательным пе-

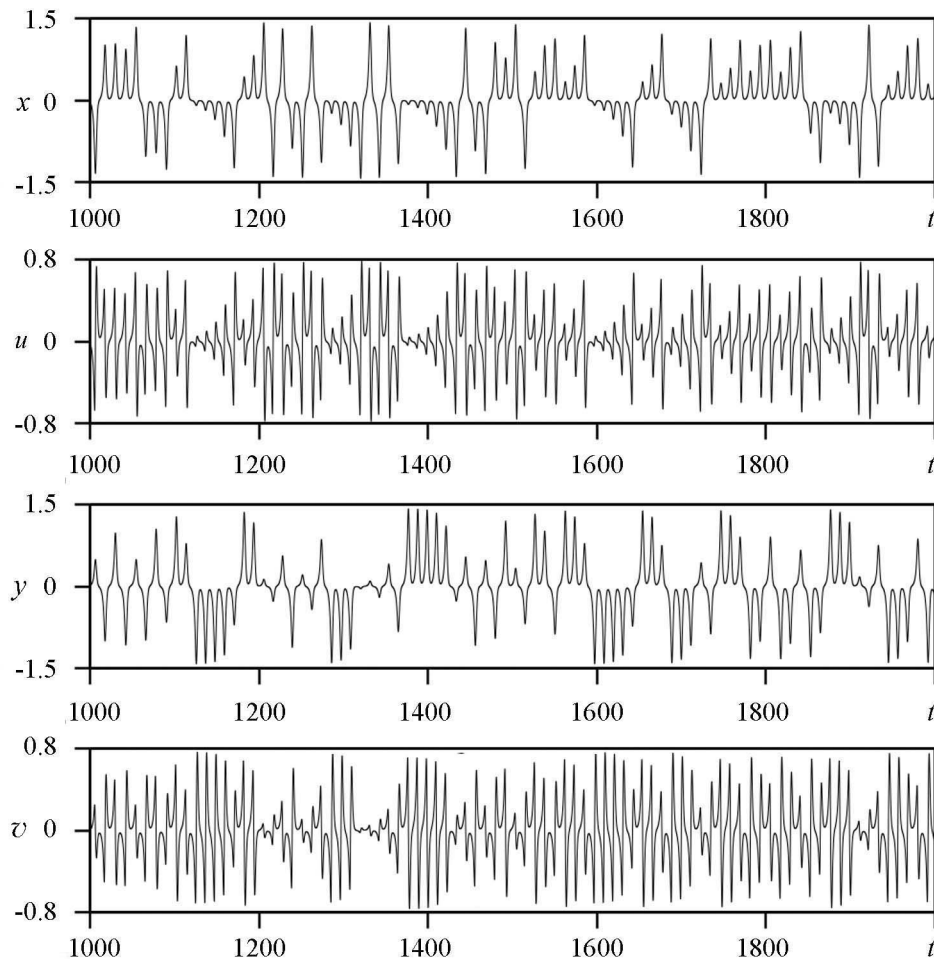


Рис. 3. Временные зависимости динамических переменных  $x, u, y, v$  системы (3) при значениях параметров  $L = 0.32$ ,  $\varepsilon = 0.02$

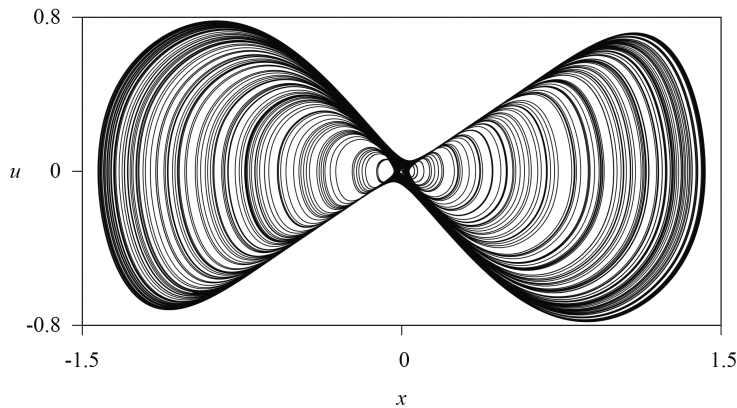


Рис. 4. Портрет аттрактора системы (3) в проекции на плоскость переменных  $(x, u)$  при значениях параметров  $L = 0.32, \varepsilon = 0.02$

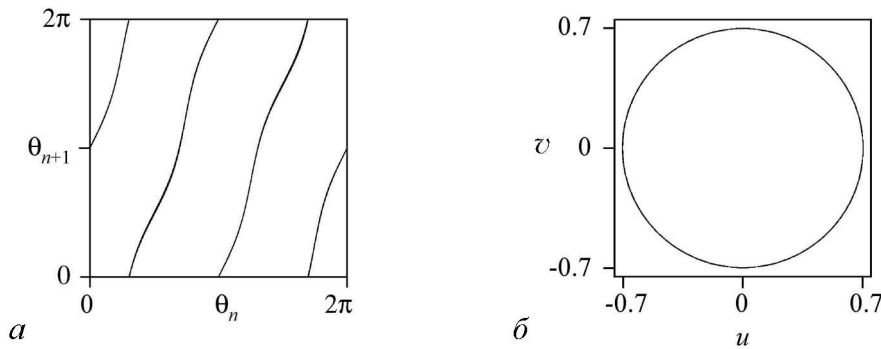


Рис. 5. *а* – Итерационная диаграмма для угловой переменной  $\theta$  при значениях параметров  $L = 0.32, \varepsilon = 0.02$ ; *б* – портрет аттрактора отображения Пуанкаре системы (3)

ресечениям поверхности  $S = x^2 + y^2 = 1$  при значениях параметров  $L = 0.32, \varepsilon = 0.02$ . Как можно видеть, она соответствует троекратно растягивающему отображению окружности. Можно заключить, что в системе реализуется преобразование угловой переменной, необходимое для возникновения соленоида Смейла–Вильямса. На рис. 5, *б* представлен портрет аттрактора отображения Пуанкаре, где по осям координат отложены переменные  $u$  и  $v$ .

Мы вычислили показатели Ляпунова отображения Пуанкаре системы (3) по алгоритму Бенеттина с ортогонализацией по Граму–Шмидту [9,10]. Уравнения (3) решались совместно с уравнениями в вариациях

$$\begin{aligned}
 \delta \dot{x} &= \delta u, \\
 \delta \dot{u} &= [(1 + 4xu)(1 - x^2 - y^2) - 2x^2]\delta x + \\
 &\quad + [L - (1 - x^2 - y^2)^2 + 3\varepsilon(u^2 - v^2)]\delta u + [4uy(1 - x^2 - y^2) - 2xy]\delta y - 6\varepsilon uv\delta v, \\
 \delta \dot{y} &= \delta v, \\
 \delta \dot{v} &= [4xv(1 - x^2 - y^2) - 2xy]\delta x + 6\varepsilon uv\delta u + \\
 &\quad + [(1 + 4yv)(1 - x^2 - y^2) - 2y^2]\delta y + [L - (1 - x^2 - y^2)^2 + 3\varepsilon(u^2 - v^2)]\delta v.
 \end{aligned} \tag{5}$$

Показатели Ляпунова для отображения Пуанкаре получаются, как нетрудно показать, умножением показателей потоковой системы на средний временной интервал между

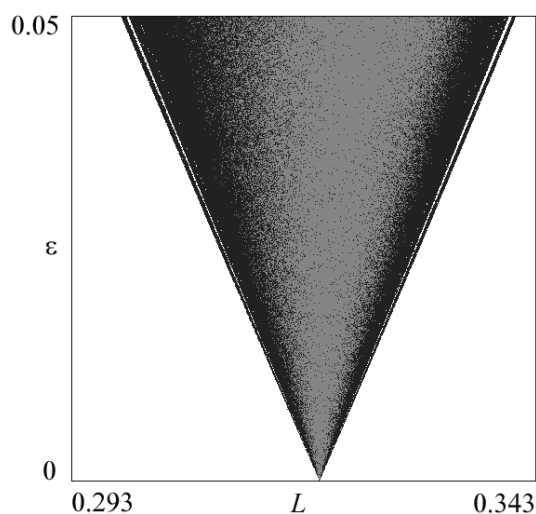


Рис. 6. Карта режимов системы (3) на плоскости параметров  $L$  и  $\varepsilon$ . Серым цветом помечены режимы, для которых показатели Ляпунова удовлетворяют условиям  $(\ln 3 - 0.1) < \lambda_1 < \ln 3$ ,  $\lambda_{2,3} < 0$ . Черным цветом представлены зоны, где положительный показатель Ляпунова не попадает в указанный интервал, а белым цветом – нехаотические режимы ( $\lambda_{1,2,3} < 0$ )

ет построению гиперболического аттрактора типа Смейла–Вильямса (если учесть, что растяжение происходит по угловой переменной) в трехмерном фазовом пространстве.

Известно, что однородно гиперболические аттракторы обладают свойством структурной устойчивости, то есть их устройство качественно не изменяется в некотором диапазоне параметров. Естественно полагать, что при этом старший показатель Ляпунова отображения Пуанкаре системы (3) остается близким к  $\ln 3$ .

На рис. 6 представлена карта режимов системы на плоскости параметров. Режимы, при которых старший показатель аттрактора близок к  $\ln 3$ , а именно,  $(\ln 3 - 0.1) < \lambda_1 < \ln 3$ , тогда как  $\lambda_{2,3} < 0$ , считаем ассоциирующимися с гиперболическим аттрактором типа Смейла–Вильямса, они помечены на карте серым цветом. Черным цветом показаны области, где положительный показатель Ляпунова не попадает в указанный интервал вблизи  $\ln 3$ . Белым цветом помечены нехаотические режимы ( $\lambda_{1,2,3} < 0$ ). Как и предполагалось, значения параметров, ассоциирующихся с гиперболическим аттрактором, образуют на карте режимов широкую область.

На рис. 7 изображены зависимости показателей Ляпунова отображения Пуанкаре от параметра  $L$  при фиксированном значении  $\varepsilon = 0.02$ . Старший показатель Ляпунова остается близким к  $\ln 3$  в широком интервале изменения параметра  $L$  в средней части диаграммы, остальные показатели при этом также почти не меняются. Это соответствует предположению о структурной устойчивости аттрактора.

Мы проверили гиперболическость аттрактора в сечении Пуанкаре с помощью численного теста, разработанного в работах [11–13]. Метод [13] основан на том, что устойчивые и неустойчивые многообразия гиперболического аттрактора могут пересекаться только трансверсально, то есть под ненулевым углом. Сначала мы получили

последовательными прохождением сечения Пуанкаре, причем нулевой показатель, имеющийся у потоковой системы, для отображения исключается.

При значениях параметров  $L = 0.32$ ,  $\varepsilon = 0.02$  показатели Ляпунова отображения Пуанкаре составили

$$\lambda_1 = 1.068, \quad \lambda_2 = -3.82, \quad \lambda_3 = -5.112.$$

Старший показатель оказывается положительным и близким к  $\ln 3 \approx 1.099$ , что соответствует показателю Ляпунова трехкратно растягивающего отображения окружности. Остальные два показателя отрицательные. Таким образом, элемент объема в фазовом пространстве отображения Пуанкаре испытывает за одну итерацию растяжение по одному направлению и сжатие по двум направлениям. Это соответствует

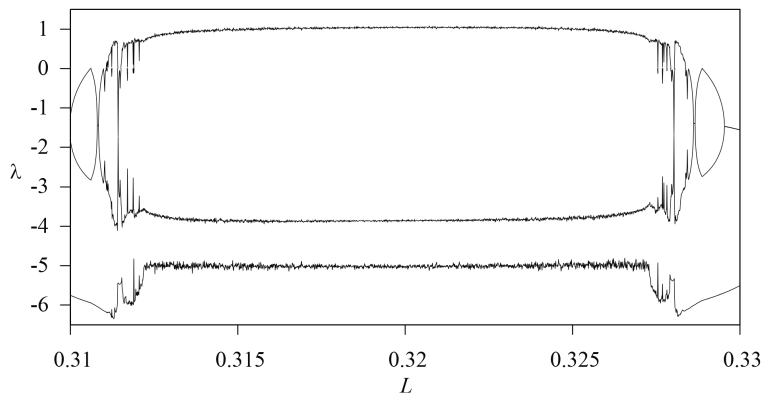


Рис. 7. Зависимости показателей Ляпунова отображения Пуанкаре от параметра  $L$  при фиксированном значении  $\varepsilon = 0.02$

достаточно длинную траекторию  $\{\mathbf{x}_n\}$ , принадлежащую трехмерному фазовому пространству отображения  $\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{F}(\mathbf{x}_n)$  (отображение было получено не в аналитическом виде, а как численные итерации отображения Пуанкаре системы (3)). Также мы вычислили последовательность возмущенных векторов  $\{\delta\mathbf{x}_n\}$  вдоль траектории  $\{\mathbf{x}_n\}$ , удовлетворяющих линеаризованному уравнению  $\delta\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{J}(\mathbf{x}_n) \delta\mathbf{x}_n$  и нормированных на каждом шаге. Отметим, что  $\mathbf{J}(\mathbf{x}_n)$  – это матрица Якоби отображения  $\mathbf{F}(\mathbf{x}_n)$ , а векторы  $\{\delta\mathbf{x}_n\}$  принадлежат одномерному неустойчивому подпространству. Затем вдоль той же опорной траектории  $\{\mathbf{x}_n\}$  мы получили последовательность нормированных векторов  $\{\delta\mathbf{u}_n\}$ , нормальных к двумерному устойчивому многообразию, итерируя обратно во времени сопряженное уравнение  $\delta\mathbf{u}_n = \mathbf{J}^T(\mathbf{x}_n) \delta\mathbf{u}_{n+1}$ , где  $\mathbf{J}^T(\mathbf{x}_n)$  – транспонированная матрица Якоби. Мы вычислили углы  $\beta_n \in [0, \pi/2]$  между векторами  $\{\delta\mathbf{x}_n\}$  и  $\{\delta\mathbf{u}_n\}$ :  $\cos \beta_n = |\delta\mathbf{u}_n \cdot \delta\mathbf{x}_n|$ , и углы между многообразиями  $\alpha_n = \pi/2 - \beta_n$ . Процедура повторялась для различных опорных траекторий. На гистограмме откладывались количества пересечений многообразий под углами  $\alpha_n$ .

Хотя описанный тест не может претендовать на строгое обоснование гиперболичности аттрактора, он позволяет на практике различать гиперболические и негиперболические аттракторы [14, 15]. На рис. 8 представлена гистограмма распределения углов между многообразиями аттрактора в сечении Пуанкаре при значениях параметров  $L = 0.32$ ,  $\varepsilon = 0.02$ , и ее увеличенный фрагмент. Касания между многообразиями не обнаружены.

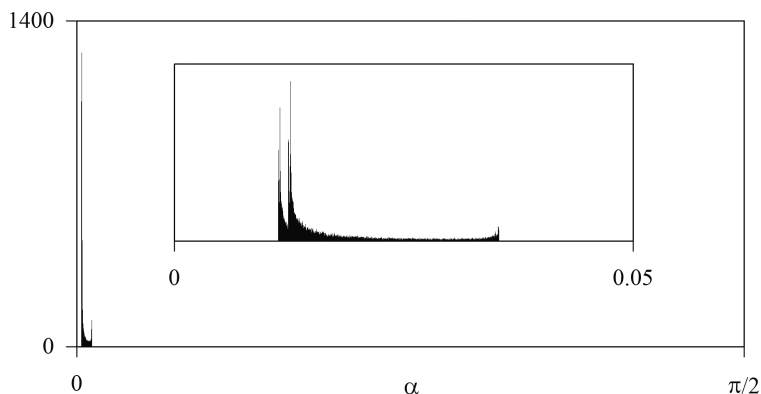


Рис. 8. Гистограмма распределения углов между многообразиями аттрактора в сечении Пуанкаре при значениях параметров  $L = 0.32$ ,  $\varepsilon = 0.02$ , и ее увеличенный фрагмент

## Заключение

В работе предложена автономная модель с аттрактором типа Смейла–Вильямса в сечении Пуанкаре. Модель описывается системой обыкновенных дифференциальных уравнений четвертого порядка, следовательно, сконструированное из нее отображение Пуанкаре обладает минимально необходимой размерностью для возникновения соленоида. Модель состоит из двух связанных подсистем, основанных на двумерной системе с сепаратрисой седла в форме «восьмерки», предложенной Ю.И. Неймарком. Подсистемы модифицированы так, что в них наблюдаются периодические автоколебания. Между подсистемами установлена связь, такая, что в отображении Пуанкаре осуществляется утроение специально определенной угловой переменной. По остальным независимым переменным происходит сильное сжатие.

В ходе численного моделирования были получены результаты (итерационная диаграмма для фаз, значения показателей Ляпунова), свидетельствующие о существовании аттрактора типа Смейла–Вильямса в фазовом пространстве предложенной системы в определенной области параметров. Продемонстрированы гладкая зависимость старшего показателя Ляпунова от параметров и дистанцированное от нуля распределение углов между многообразиями аттрактора, являющиеся характерными атрибутами гиперболической динамики.

*Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ № 16-32-00449. Авторы выражают благодарность С.П. Кузнецову и И.Р. Сатаеву за консультации и обсуждения.*

## Библиографический список

1. *Kuznetsov S.P.* Hyperbolic Chaos: A Physicist's View. Higher Education Press: Beijing and Springer-Verlag: Berlin, Heidelberg, 2012. 336 p.
2. *Kuznetsov S.P.* Example of a physical system with a hyperbolic attractor of the Smale–Williams type // *Phys. Rev. Lett.* 2005. Vol. 95. P. 144101.
3. *Kuznetsov S.P.* Some mechanical systems manifesting robust chaos // *Nonlinear Dynamics and Mobile Robotics.* 2013. Vol. 1, № 1. P. 3–22.
4. *Kuznetsov S.P., Pikovsky A.* Autonomous coupled oscillators with hyperbolic strange attractors // *Physica D: Nonlinear Phenomena.* 2007. Vol. 232. № 2. P. 87–102.
5. *Kruglov V.P., Kuznetsov S.P.* An autonomous system with attractor of Smale–Williams type with resonance transfer of excitation in a ring array of van der Pol oscillators // *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation.* 2011. Vol. 16. № 8. P. 3219–3223.
6. *Kruglov V.P., Kuznetsov S.P., Pikovsky A.* Attractor of Smale–Williams type in an autonomous distributed system // *Regular and Chaotic Dynamics.* 2014. Vol. 19, № 4. P. 483–494.
7. *Неймарк Ю.И.* Метод точечных отображений в теории нелинейных колебаний. М.: Наука, 1972. с.129–135.
8. *Бутенин Н.В., Неймарк Ю.И., Фуфаев Н.Л.* Введение в теорию нелинейных колебаний. М.: Наука, 1987. С. 303 и далее.
9. *Benettin G., Galgani L., Giorgilli A., Strelcyn J.M.* Lyapunov characteristic expo-

- nents for smooth dynamical systems and for Hamiltonian systems; a method for computing all of them. Part 1: Theory // *Meccanica*. 1980. Vol. 15. № 1. P. 9–20.
10. *Shimada I., Nagashima T.* A numerical approach to ergodic problem of dissipative dynamical systems // *Progress of Theoretical Physics*. 1979. Vol. 61. № 6. P. 1605–1616.
  11. *Lai Y.-C., Grebogi C., Yorke J.A., Kan I.* How often are chaotic saddles nonhyperbolic? // *Nonlinearity*. 1993. Vol. 6. P. 779–798.
  12. *Anishchenko V.S., Kopeikin A.S., Kurths J., Vadivasova T.E., Strelkova G.I.* Studying hyperbolicity in chaotic systems // *Physics Letters A*. 2000. Vol. 270. P. 301–307.
  13. *Kuptsov P.V.* Fast numerical test of hyperbolic chaos // *Phys. Rev. E*. 2012. Vol. 85, № 1. P. 015203.
  14. *Kuznetsov S.P., Kruglov V.P.* Verification of hyperbolicity for attractors of some mechanical systems with chaotic dynamics // *Regular and Chaotic Dynamics*. 2016. Vol. 21. № 2. P. 160–174.
  15. *Круглов В.П.* Методика и результаты численной проверки гиперболической природы аттракторов для редуцированных моделей распределенных систем // *Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика*. 2014. Т. 22. № 6. С. 79–93.

## References

1. *Kuznetsov S.P.* *Hyperbolic Chaos: A Physicist's View*, Higher Education Press, Beijing and Springer-Verlag GmbH Berlin Heidelberg, 2012. 320 p.
2. *Kuznetsov S.P.* Example of a physical system with a hyperbolic attractor of the Smale–Williams type. *Phys. Rev. Lett.* 2005. Vol. 95. P. 144101.
3. *Kuznetsov S.P.* Some mechanical systems manifesting robust chaos. *Nonlinear Dynamics and Mobile Robotics*. 2013. Vol. 1, N1. P. 3.
4. *Kuznetsov S.P., Pikovsky A.* Autonomous coupled oscillators with hyperbolic strange attractors. *Physica D: Nonlinear Phenomena*. 2007. Vol. 232. N2. P. 87–102.
5. *Kruglov V.P., Kuznetsov S.P.* An autonomous system with attractor of Smale–Williams type with resonance transfer of excitation in a ring array of van der Pol oscillators. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*. 2011. Vol. 16. N8. P. 3219–3223.
6. *Kruglov V.P., Kuznetsov S.P., Pikovsky A.* Attractor of Smale–Williams type in an autonomous distributed system // *Regular and Chaotic Dynamics*. 2014. Vol. 19, N4. P. 483.
7. *Neimark Y.I.* *The Point Mapping Method in the Theory of Nonlinear Oscillation*. Moscow: Nauka, 1972. P. 129–135 (in Russian).
8. *Butenin N.V., Neimark Y.I., Fufaev N.A.* *Introduction to the Theory of Nonlinear Oscillation*. Moscow: Nauka, 1987. P. 303 (in Russian).
9. *Benettin, G., Galgani, L., Giorgilli, A., Strelcyn, J.M.* Lyapunov characteristic exponents for smooth dynamical systems and for Hamiltonian systems; a method for computing all of them. Part 1: Theory. *Meccanica*. 1980. Vol. 15. N1. P. 9–20.
10. *Shimada I., Nagashima T.* A numerical approach to ergodic problem of dissipative



dynamical systems. Progress of Theoretical Physics. 1979. Vol. 61. N6. P. 1605–1616.

11. *Lai Y.-C., Grebogi C., Yorke J.A., Kan I.* How often are chaotic saddles nonhyperbolic? Nonlinearity. 1993. Vol. 6. P. 779–798.
12. *Anishchenko V.S., Kopeikin A.S., Kurths J., Vadivasova T.E., Strelkova G.I.* Studying hyperbolicity in chaotic systems. Physics Letters A. 2000. Vol. 270. P. 301.
13. *Kuptsov P.V.* Fast numerical test of hyperbolic chaos. Phys. Rev. E. 2012. Vol. 85, N1. P. 015203.
14. *Kuznetsov S.P., Kruglov V.P.* Verification of hyperbolicity for attractors of some mechanical systems with chaotic dynamics. Regular and Chaotic Dynamics. 2016. Vol. 21, N2. P. 160–174.
15. *Kruglov V.P.* Technique and results of numerical test for hyperbolic nature of attractors for reduced models of distributed systems. Izvestija VUZ. Applied Nonlinear Dynamics. 2014. Vol. 22. N6. P. 79–93 (in Russian).

*Поступила в редакцию 6.12.2016*

*Круглов Вячеслав Павлович* – родился в 1990 году. Окончил среднюю школу №8 Саратова (2007). Окончил факультет нелинейных процессов Саратовского государственного университета им. Н.Г. Чернышевского (2012). Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук (2016). Участвовал в научных конференциях «ХАОС», «Нелинейные волны», «Нелинейные дни для молодых», «Нанoeлектроника, нанофотоника и нелинейная физика», «Гамильтонова динамика, неавтономные системы и структуры в уравнениях с частными производными», «Динамика, бифуркации и странные аттракторы», «Geometry, Dynamics, Integrable Systems». Автор 7 статей в российских и международных научных журналах.

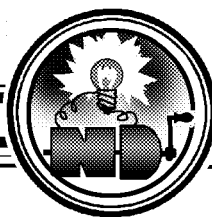


Россия, 410019 Саратов, Зеленая, д. 38  
Институт радиотехники и электроники  
им. В.А. Котельникова РАН, Саратовский филиал  
Россия, 410012 Саратов, Астраханская, 83  
Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского  
E-mail: [kruglovyacheslav@gmail.com](mailto:kruglovyacheslav@gmail.com)

*Хаджиева Лейла Мухамед-Бухараевна* – родилась в 1992 году. Окончила среднюю школу № 3 Красноармейска Саратовской области (2009). Окончила факультет нелинейных процессов Саратовского государственного университета им. Н.Г. Чернышевского (2014) и магистратуру по направлению «Прикладная математика и физика» (2016). В настоящее время работает в Чеченском государственном университете, в должности ассистента. Участвовала в научных конференциях «Нелинейные дни для молодых», «Нанoeлектроника, нанофотоника и нелинейная физика», «Geometry, Dynamics, Integrable Systems», «ХАОС».



Россия, 410012 Саратов, Астраханская, 83  
Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского  
Россия, 364093 Грозный, А. Шерипова, 32  
Чеченский государственный университет  
E-mail: [leyla.khadzhiyeva@gmail.com](mailto:leyla.khadzhiyeva@gmail.com)



## МОДЕЛИРОВАНИЕ КОНФЛИКТА В СОЦИАЛЬНОЙ СИСТЕМЕ С ПОМОЩЬЮ ДИФFUЗИОННЫХ УРАВНЕНИЙ

*А. Ю. Петухов, А. О. Мальханов, В. М. Сандалов, Ю. В. Петухов*

Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского  
Россия, 603950 Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23  
E-mail: Lectort@yandex.ru, alexey.malkhanov@gmail.com,  
granel09@gmail.com, yuvpetukhov@ya.ru

Обсуждается проблема моделирования социальных конфликтов различного типа с использованием диффузионных уравнений. Кратко рассмотрены основные подходы и методы к математическому моделированию в современных гуманитарных науках.

Обсуждаются основные концепции социальных конфликтов, способы их классификации, интерпретации, в том числе для этносоциальных, религиозных и др. конфликтов. Дано формализованное определение одного из параметров, приводящего к конфликту в социальной системе. Предложена модель, основанная на диффузионном уравнении Ланжевена. В основе модели лежит идея, что индивиды взаимодействуют в обществе посредством поля коммуникации  $h$ . Это поле создаётся каждым человеком в обществе, моделируя информационное взаимодействие между индивидами.

Приведено аналитическое решение системы полученных уравнений в первом приближении для расходящегося типа диффузии. Показано, что разработанная модель даже на простом примере двух взаимодействующих групп индивидов позволяет выявить характерные закономерности конфликта в социальной системе, определить влияние социальной дистанции в обществе на условия генерации подобных процессов с учётом внешнего влияния и случайного фактора.

Из анализа полученных в результате моделирования фазовых портретов сделан вывод о существовании области устойчивости для социальной системы, в рамках которой она стабильна и не подвержена конфликтам.

*Ключевые слова:* Социальный конфликт, социум, диффузионные уравнения, уравнение Ланжевена, поле коммуникации.

DOI: 10.18500/0869-6632-2016-24-6-65-83

*Ссылка на статью:* Петухов А.Ю., Мальханов А.О., Сандалов В.М., Петухов Ю.В. Моделирование конфликта в социальной системе с помощью диффузионных уравнений // Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2016. Т. 24, № 6. Р. 65–83.

## MODELING CONFLICT IN A SOCIAL SYSTEM USING DIFFUSION EQUATIONS

*Alexandr Y. Petukhov, Alexey O. Malhanov,  
Vladimir M. Sandalov, Yury V. Petukhov*

Nizhniy Novgorod Lobachevski State University  
Russia, 603950 Nizhniy Novgorod, Gagarin ave., 23  
E-mail: Lectorr@yandex.ru, alexey.malkhanov@gmail.com,  
granel09@gmail.com, yuvpetukhov@ya.ru

The issue of modeling various kinds of social conflicts using diffusion equations is discussed. The main approaches to and methods of mathematical modeling in contemporary humanitarian sciences.

The main concepts of social conflicts, ways of their classification, interpretation, including ethnic-social, religious and other conflicts are considered. The notion of a conflict in a social system is defined in terms of mathematical modeling. A model based on Langevin diffusion equation is introduced. The model is based on the idea that all individuals in a society interact by means of a communication field  $h$ . This field is induced by each individual in the society, modeling informational interaction between individuals.

An analytical solution of the system of thus obtained equations in the first approximation for a diverging type of diffusion is given. It is shown that even analyzing a simple example of the interaction of two groups of individuals the developed model makes it possible to discover characteristic laws of a conflict in a social system, to determine the effect of social distance in a society on the conditions of generation of such processes, accounting for external effects or a random factor.

Based on the analysis of the phase portraits obtained by modeling, it is concluded that there exists a stability region within which the social system is stable and non-conflictive.

*Keywords:* Social conflict, society, diffusion equations, Langevin equation, communication field.

DOI: 10.18500/0869-6632-2016-24-6-65-83

*Paper reference:* Petukhov A.Y., Malhanov A.O., Sandalov V.M., Petukhov Yu.V. Modeling conflict in a social system using diffusion equations // *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*. 2016. Vol. 24. Issue 6. P. 65–83.

### Введение

Социальный конфликт можно определить как пиковый этап развития противоречий в отношениях между индивидами, группами индивидов, социума в целом, который характеризуется наличием противоречащих интересов, целей, позиций субъектов взаимодействия. Конфликты могут быть скрытыми или явными, но в их основе всегда лежит отсутствие компромисса и иногда даже диалога между двумя или более сторонами [1].

Английский социолог Э. Гидденс дал такое определение конфликта: «Под социальным конфликтом я понимаю реальную борьбу между действующими людьми или группами, независимо от того, каковы источники этой борьбы, ее способы и средства, мобилизуемые каждой стороной».

В развитии общей конфликтологии на современном этапе важную роль сыграли труды зарубежных ученых, заложивших теоретический фундамент решения

конкретных задач сложной междисциплинарной науки. Это классические работы: Л. Козера, Р. Дарендорфа, Ю. Хабермаса, Г. Беккера, А.С. Ахиезера [2–3], обосновавших естественность, атрибутивный характер этнополитических конфликтов и их функции в жизни общества; К. Боулдинга, Л. Козера, П. Бурдые [4], заложивших основы построения общей теории конфликтов; Дж. Бертона [5] и его последователей, которые обратились к проблематике эффективных практических технологий урегулирования и принципиального разрешения конфликтов, как приоритетной для обеспечения действенности конфликтологического знания; П. Штомпки [6], абсолютизовавшего «западный магистральный» путь социального спасения; Ф. Глазла, предлагающего современные механизмы разрешения конфликтов [7].

Проблемы изучения, классификации, а самое важное – прогнозирования конфликтов, всегда занимали значительное место в фундаментальной социальной науке. Это теме посвящалось множество работ ведущих социологов и математиков: Дж. Бернанд, Р. Бейли, К. Боулдинг, Д. Бухер, Дж. Дьюк, Л. Козер, Л. Крисберг, Д. Лэйдис, Р. Макк, А. Рапопорт, Р. Снамаер, Р. Стагнер, Т. Шеллинг; Т. Боттомор, Дк. Рекс; Г. Бутуль, М. Крозье, А. Турен, К. Дарендорф; Е. Вятр, Я. Муха, Я. Штумски, Я. Рейковски, Л.А. Нечипоренко, И.И. Петрова, А.Л. Ручки, Л.А. Семеновой, В.Б. Танчер, Е.А. Ануфриева, В.Г. Афанасьева, В.В. Дружинина, П.Е. Кацделя, В.Ф. Крапивина, Д.С. Конторова, М.Д. Конторова, И.Г. Наконечно, В.С. Овчинникова, А.Ф. Проценте, Г.П. Предвечного, В.О. Рукавишникова, В.Б. Сверчкова, В.И. Сперанского, А.И. Ямскова и др. [5–7].

Действительно, учитывая значительное влияния подобных явлений на социум и все процессы в нём происходящие, способы предсказания и выявления характерных закономерностей социальных конфликтов являются чрезвычайно важными.

Одно из направлений по поиску решений данной задачи – прогнозирование и описание социального конфликта с помощью математики, то есть математического моделирования [8–13].

### **Математическое моделирование в социальной науке**

Математическое моделирование, основанное на нелинейной динамике, столь широко применяемое в естествознании, в социологических исследованиях всё ещё являются относительной редкостью.

В последние годы достигнуты существенные успехи в области создания моделей социальных и политических процессов [14]. Имеющиеся к настоящему времени модели можно условно разделить на три группы:

- 1) модели-концепции, основанные на выявлении и анализе общих исторических закономерностей и представлении их в виде когнитивных схем, описывающих логические связи между различными факторами, влияющими на исторические процессы (Дж. Голдстейн, И. Валлерстайн, Л.Н. Гумилев, Н.С. Розов и др.). Такие модели обладают высокой степенью обобщения, но имеют не математический, а чисто логический, концептуальный характер;
- 2) частные математические модели имитационного типа, посвященные описанию конкретных исторических событий и явлений (Ю.Н. Павловский, Л.И. Бород-

кин, Д. Медоуз, Дж. Форрестер и др.). В подобных моделях основное внимание уделяется тщательному учету и описанию факторов и процессов, оказывающих влияние на рассматриваемые явления. Применимость таких моделей, как правило, ограничена достаточно узким пространственно-временным интервалом; они «привязаны» к конкретному историческому событию и их невозможно экстраполировать на протяженные периоды времени;

- 3) математические модели, являющиеся промежуточными между двумя указанными типами. Эти модели описывают некоторый класс социальных процессов без претензии на детальное описание особенностей для каждого конкретно-исторического случая. Их задачей является выявление базовых закономерностей, характеризующих протекание процессов рассматриваемого вида. В соответствии с этим данные математические модели называются базовыми [15].

Моделирование динамики нелинейных систем в классических моделях [16–22] проводится на основе использования многомерных дифференциальных уравнений [20, 23, 24], разностных уравнений [25, 26], математического аппарата клеточных автоматов [25, 27], математического аппарата теории катастроф [28, 29], математического аппарата теории самоорганизованной критичности [30, 31], стохастических дифференциальных уравнений Ланжевена и Ито–Стратоновича [25, 30], анализа систем с хаосом и реконструкции устойчивых состояний (аттракторов) по временным рядам [25, 27].

Ж.А. Holyst, К. Casperski, F. Schweitzer предложили удобную модель общественного мнения на основе представления взаимодействия между индивидами в виде броуновского движения [31].

Также немало и других исследований в области моделирования социальных и политических процессов, которыми занимались: К. Troitzsch, R. Hegselmann, P. de Vries, D. Gernert, A. Nowak, R. Vallacher и E. Burnstein, H. Ader и I. Bramsen, Y.-F. Yung, W. Chan и P. Bentler, R. Geuze, R. van Ouwerkerk и L. Mulder, A. Klovdahl и многие другие [32–40].

### **Основные концепции социального конфликта**

В современной социологической литературе существует множество классификаций видов конфликтов по различным основаниям. Рассмотрим некоторые из них с точки зрения определения социального конфликта как математического понятия в нашей модели.

С точки зрения субъектов, вступающих в конфликт, можно выделить четыре типа конфликтов:

- 1) внутрличностный (может иметь следующие формы: ролевой – возникает, когда к одному человеку предъявляют противоречивые требования по поводу того, каким должен быть результат его работы; внутрличностный – может также возникнуть в результате того, что производственные требования не согласуются с личными потребностями или ценностями);
- 2) межличностный (может проявляться как столкновения личностей с различными чертами характера, взглядами, ценностями и является самым распространенным);

- 3) между личностью и группой (возникает, если личность занимает позицию, отличающуюся от позиции группы);
- 4) межгрупповой.

Конфликты также можно классифицировать по сферам жизнедеятельности на политические, социально-экономические, национально-этнические и другие [11]. Существует немало концепций теории социального конфликта, рассмотрим одни из наиболее известных.

*Концепции Л. Козера [2]:*

- обществу присуще неизбежное социальное неравенство, постоянная психологическая неудовлетворенность его членов, напряженность в отношениях между индивидами и группами (эмоциональное, психическое расстройство), что приводит к социальному конфликту;
- социальный конфликт как напряженность между тем, что есть, и что должно быть в соответствии с представлениями тех или иных социальных групп или индивидов;
- социальный конфликт как борьба за ценности и претензии на определенный статус, власть и ресурсы, борьбу, в которой целями противников являются нейтрализация, нанесение ущерба или уничтожение соперника.

*Конфликтная модель общества Р. Дарендорфа [3]:*

- постоянные социальные изменения в обществе, переживание социального конфликта;
- любое общество опирается на принуждение одних его членов другими, то есть возникает неравенство социальных позиций по отношению к распределению власти;
- разница в социальном положении различных социальных групп и индивидов вызывает взаимные трения, противоречия и, как результат, изменение социальной структуры самого общества.

*Общая теория конфликта К. Боулдинга [4]:*

- все конфликты имеют общие образцы развития, их подробное изучение и анализ предоставляет возможность создать обобщающую теорию – «общую теорию конфликта», которая позволит обществу контролировать конфликты, управлять ими, прогнозировать их последствия;
- Боулдинг утверждает, что конфликт неотделим от общественной жизни (в природе человека – стремление к борьбе с себе подобным);
- конфликт – ситуация, в которой каждая из сторон стремится занять позицию несовместимую и противоположную по отношению к интересам другой стороны;
- существует два аспекта социального конфликта: статический и динамический.

Статический аспект социального конфликта подразумевает анализ сторон (субъектов) конфликта (личности, организации, группы) и отношения между ними (этнические, религиозные, профессиональные). Динамический аспект подразумевает изучение интересов сторон как побудительных сил в конфликтном поведении людей. Динамика конфликта – совокупность ответных реакций сторон на внешние стимулы [1, 40].

Из вышеизложенного можно вывести следующие важные для нашей модели положения.

- 1) Крупный социальный конфликт, как правило, сопровождается информационной и социальной дистанцией между индивидами и группами индивидов. В качестве основы такой дистанции могут быть как межнациональные, культурные, религиозные, так и экономические отличия. Причинами такого конфликта могут быть самые разные основания: различные уровни агрессии социальных, этнических групп, противоречащие культурные и экономические устремления и т.д. То есть сама по себе социально-информационная дистанция не является причиной конфликта, но, как правило, сопутствует ему.
- 2) Данная дистанция увеличивается во время протекания конфликта, особенно в его крайних вариантах (революции, гражданские войны и т.д.), выводя противостоящие стороны на позиции «непримирения». В истории, к сожалению, очень мало примеров краткого и среднесрочного позитивного сценария для подобных ситуаций.
- 3) Следовательно, изучаемая точка «невозврата», как правило, лежит до возникновения конфликта, а этот переход социальной системы из одного состояния в другое и является определяющим.

### Математическая модель

Важным моментом для математического моделирования является то, что социальные и политические процессы не могут быть строго заданными. Они всегда подвержены малым изменениям и флуктуациям. Часто социальный процесс сравнивают с броуновской частицей, то есть частицей движущейся по вполне определённой траектории, но при близком рассмотрении сильно извилистой, с множеством мелких изломов [23, 31, 41-44]. Эти мелкие изменения (флуктуации) объясняются хаотическим движением других молекул. В социальных процессах флуктуации можно трактовать как проявления свободной воли его отдельных участников, а также другими случайными проявлениями внешней среды [41].

В физике данные процессы, как правило, описываются стохастическим диффузионным уравнением Ланжевена, которое является относительно апробированным и для моделирования некоторых социальных процессов. Так, например, J.A. Holyst, K. Kasprski и F. Schweitzer создали модель общественного мнения [31]. Подход, основанный на подобных уравнениях, имеет ряд преимуществ.

- 1) Данный подход даёт возможность учесть проявления свободной воли его отдельных участников, а также другие случайные проявления внешней среды для социальной системы.
- 2) Поведение социальной системы возможно рассчитать как для единого целого, так и для отдельных индивидов-частиц.
- 3) Данный подход позволяет выявить некие характерные устойчивые режимы функционирования социальных систем в зависимости от различных начальных условий.

- 4) Диффузионные уравнения, как математический аппарат, являются в достаточной степени апробированными и известными, с точки зрения проведения численного моделирования.

В основе модели лежит идея, заключающаяся в том, что индивиды взаимодействуют в обществе посредством поля коммуникации  $h$  (похожее понятие введено и в [31], но с другой параметризацией). Это поле создаётся каждым индивидом в обществе, моделируя информационное взаимодействие между ними. Однако следует иметь в виду, что здесь речь идёт о социуме, который сложно отнести как к объекту в классической физической пространственной топологии. Действительно, с точки зрения переноса информации от индивида к индивиду, пространство в обществе сочетается как классические пространственные координаты, так и дополнительные специфические особенности. Это связано с тем, что в современном информационном мире нет необходимости обязательно находиться рядом с объектом воздействия, чтобы передать ему информацию.

Таким образом, социум – это многомерное, социально-физическое пространство, отражающее возможность одного индивида «дотянуться» своим коммуникационным полем до другого, то есть повлиять на него, на его параметры и возможность перемещаться в данном пространстве. Соответственно положение индивида относительно других индивидов в таком пространстве моделирует и уровень взаимоотношений между ними и вовлечённость в информационный обмен. Близкое расположение индивидов в данной модели говорит о том, что между ними возникла социальная связь и идёт регулярный обмен информацией. Конфликтом же для такой постановки проблемы следует считать вариант взаимодействия индивидов, или групп индивидов, в результате которого расстояние, то есть социальная дистанция  $\Delta x = x_i - x_j$  (здесь  $x$  – координата в социально-физическом пространстве,  $i, j = [1, N]$ ,  $N$  – число индивидов или консолидированных групп индивидов) между ними резко растёт. Предполагая, что индивид подобен броуновской частице с определённым радиусом воздействия на других индивидов, поле коммуникации можно представить с помощью диффузионного уравнения

$$\frac{\partial}{\partial t} h(x_i, x_j) = \sum_{j=1}^N f(x_i, x_j) \vartheta(x_i, x_j) \bar{\delta}_{(k_s^j + k_c^j)(k_s^i + k_c^i)} + D(h(x_i, t) - h(x_i, t_0)), \quad (1)$$

в котором задан расходящийся тип диффузии. Здесь функция

$$\vartheta(x_i, x_j) = \frac{1}{\varepsilon \sqrt{\pi}} e^{-\frac{(x_i - x_j)^2}{\varepsilon^2}}$$

введена вместо дельта-функции. При  $\varepsilon \rightarrow 0$  она асимптотически стремится к дельта-функции, что существенно упрощает процесс компьютерного моделирования.

Функция  $f(x_i, x_j)$  характеризует взаимодействие между индивидами. Данное взаимодействие следует моделировать с помощью классического гауссова распреде-



ления, так как с точки зрения статической психологии оно является наиболее характерным для различных типов информационных взаимодействий индивидов [45,46]

$$f(x_i, x_j) = \frac{1}{u\sqrt{\pi}} e^{-\frac{(x_i-x_j)^2}{u^2}},$$

$$u = k_s^i k_c^i + k_s^j k_c^j,$$

достаточно широко встречаемым в различных социологических исследованиях. Здесь  $k_s^i$  – коэффициент научно-технологического прогресса и развития  $i$ -го индивида/группы индивидов;  $k_c^i$  – коэффициент социальной активности  $i$ -го индивида/группы индивидов;  $\bar{\delta}$  – обратный символ Кронекера.

Коэффициенты  $k_s$  и  $k_c$  существуют для каждого индивида или группы в системе по отдельности, и суммарные коэффициенты всей системы получаются путём фрактального преобразования всех значений индивидов и кластеров системы [42-44].

Перемещение индивида описывается уравнением Ланжевена

$$\frac{dx_i}{dt} = k_s^i k_c^i \left( \sum_{j=1, j \neq i}^N \frac{\partial}{\partial x_j} h(x_j, t) \right) + \sqrt{2D} \xi_i(t), \quad (2)$$

в котором введена стохастическая сила  $\xi_i(t)$ , моделирующая случайный фактор в обществе и в частных случаях – внешнее влияние на индивидов.

При решении уравнений (1) и (2) необходимо учитывать также дифференциальное равенство

$$\frac{dh}{dt} = \frac{\partial h}{\partial x_i} \frac{dx_i}{dt} + \frac{\partial h}{\partial t}.$$

В общем случае в качестве начальных условий для уравнений (1)–(3) можно выбрать следующее:

$$x_i|_{t=0} = x_{oi}, \quad h(x_i, t=0) = h_{oi}.$$

При этом следует задать область изменения характерных параметров  $0 < k_c, k_s, D < 1$  (распределение по индивидам).

### Приближенное решение системы

Для простейшей модели из двух взаимодействующих индивидов или двух консолидированных групп индивидов (то есть относящихся к одной социальной, религиозной, этнической и т.д. группе), предположительно находящихся в состоянии конфликта, с учётом внешнего влияния запишем уравнения (1) и (2) в следующем

виде:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial h(x_1, t)}{\partial t} = D[h(x_1, t) - h(x_1, 0)] + \alpha k_c^2 k_s^1 e^{-\frac{\psi^2+1}{\psi^2}(x_1-x_2)^2}, \\ \frac{\partial h(x_2, t)}{\partial t} = D[h(x_2, t) - h(x_2, 0)] + \alpha k_c^1 k_s^2 e^{-\frac{\psi^2+1}{\psi^2}(x_1-x_2)^2}, \\ \frac{dx_1}{dt} = k_c^1 k_s^1 \frac{\partial h(x_2, t)}{\partial x_2} + \sqrt{2D}\xi_1(t), \\ \frac{dx_2}{dt} = k_c^2 k_s^2 \frac{\partial h(x_1, t)}{\partial x_1} + \sqrt{2D}\xi_2(t), \end{array} \right. \quad (3)$$

где

$$\psi = k_c^1 + k_s^1 + k_c^2 + k_s^2, \quad \alpha = \frac{1}{\psi\sqrt{\pi}} \bar{\delta}_{k_c^1+k_s^1, k_c^2+k_s^2}.$$

С целью получения приближенных аналитических решений системы уравнений (3) воспользуемся разложением в ряд с точностью до величины первого порядка малости по  $\Delta x = x_i - x_{oi}$ ,  $\Delta t = t - t_o$  разности

$$h(x_i, t) - h(x_{oi}, t_o) \approx \left( \frac{\partial h}{\partial x_i} \right) \Big|_{t=0, x_i=x_{oi}} \Delta x + \left( \frac{\partial h}{\partial t} \right) \Big|_{t=0, x_i=x_{oi}} \Delta t. \quad (4)$$

Тогда, полагая, что имеют место следующие начальные условия:

$$x_{oi} = 0, h(x_{oi}, t_o) = \left( \frac{\partial h}{\partial x_i} \right) \Big|_{t=0, x_i=x_{oi}} = \left( \frac{\partial h}{\partial t} \right) \Big|_{t=0, x_i=x_{oi}} = 1, \quad (5)$$

с использованием (4), (5) проинтегрируем первые два уравнения системы (3) и получим следующее выражение:

$$h(x_i, t) = D \int_0^t x_i(u) du + D \frac{t^2}{2} + \alpha k_c^j k_s^i \int_0^t e^{-\frac{\psi^2+1}{\psi^2}(x_i(u)-x_j(u))^2} du, \quad (6)$$

$$j = 3 - i.$$

Используя выражение (6), последние два уравнения системы (3) можно, учитывая непрерывности всех функций, преобразовать к следующему виду:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dx_1}{dt} = k_c^1 k_s^1 \left[ Dt + 2\alpha k_c^1 k_s^2 \frac{\psi^2+1}{\psi^2} \int_0^t (x_1(u) - x_2(u)) e^{-\frac{\psi^2+1}{\psi^2}(x_1(u)-x_2(u))^2} du \right] + \sqrt{2D}\xi_1(t), \\ \frac{dx_2}{dt} = k_c^2 k_s^2 \left[ Dt + 2\alpha k_c^2 k_s^1 \frac{\psi^2+1}{\psi^2} \int_0^t (x_2(u) - x_1(u)) e^{-\frac{\psi^2+1}{\psi^2}(x_1(u)-x_2(u))^2} du \right] + \sqrt{2D}\xi_2(t). \end{array} \right. \quad (7)$$

Продифференцировав (7) по времени перейдем к дифференциальным уравнениям следующего вида:

$$\begin{cases} \frac{d^2 x_1}{dt^2} = k_c^1 k_s^1 D + \frac{2\alpha (\psi^2 + 1) k_c^1 k_s^1 k_c^1 k_s^2}{\psi^2} (x_1 - x_2) e^{-\frac{\psi^2 + 1}{\psi^2} (x_1 - x_2)^2} + \sqrt{2D} \frac{d\xi_1(t)}{dt}, \\ \frac{d^2 x_2}{dt^2} = k_c^2 k_s^2 D + \frac{2\alpha (\psi^2 + 1) k_c^2 k_s^2 k_c^2 k_s^1}{\psi^2} (x_2 - x_1) e^{-\frac{\psi^2 + 1}{\psi^2} (x_1 - x_2)^2} + \sqrt{2D} \frac{d\xi_2(t)}{dt}. \end{cases} \quad (8)$$

С целью дальнейшего упрощения решения поставленной задачи предположим, что выполняется равенство действующих стохастических сил для индивидов или различных групп  $\xi_1(t) = \xi_2(t)$ . Тогда, вводя новые обозначения

$$\begin{aligned} y &= x_1 - x_2, \\ A &= D (k_c^1 k_s^1 - k_c^2 k_s^2), \\ B &= 2\alpha \frac{(\psi^2 + 1)}{\psi^2} (k_c^1 k_s^1 k_c^1 k_s^2 + k_c^2 k_s^2 k_c^2 k_s^1), \\ C &= \frac{\psi^2 + 1}{\psi^2}, \end{aligned}$$

после нахождения разности уравнений (8) получим уравнение следующего вида:

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = A + B y e^{-C y^2}, \quad B > 0, \quad C > 0. \quad (9)$$

Перепишем теперь уравнение (9) в форме Коши

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = z, \\ \frac{dz}{dt} = A + B y e^{-C y^2}. \end{cases} \quad (10)$$

Уравнения (10) можно рассматривать как динамическую систему, которая описывает процесс взаимодействия двух индивидов или групп индивидов.

Как известно [47, 48], динамическая система описывает процесс перехода из одного состояния в другое. При этом фазовым портретом системы (10) будем называть совокупность всех ее состояний. Поиск ее состояний равновесия сводится к решению системы уравнений

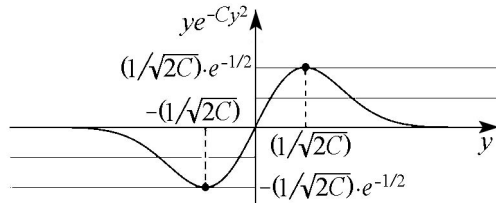


Рис. 1.

возможны: два состояния равновесия при выполнении условия

$$\begin{cases} z = 0, \\ y e^{-C y^2} = -\frac{A}{B}. \end{cases} \quad (11)$$

Решения системы (11) удобно представить графическим способом (рис. 1). Как следует из рисунка, воз-

$$-\sqrt{\frac{1}{2C}}e^{-\frac{1}{2}} < -\frac{A}{B} < \sqrt{\frac{1}{2C}}e^{-\frac{1}{2}}, \quad -\frac{A}{B} \neq 0, \quad (12)$$

одно состояние равновесия при выполнении одного из трёх равенств

$$-\frac{A}{B} = 0, \quad -\frac{A}{B} = \sqrt{\frac{1}{2C}}e^{-\frac{1}{2}}, \quad -\frac{A}{B} = -\sqrt{\frac{1}{2C}}e^{-\frac{1}{2}}, \quad (13)$$

состояния равновесия отсутствуют при выполнении условий, противоположных неравенствам (12),

$$-\frac{A}{B} < -\sqrt{\frac{1}{2C}}e^{-\frac{1}{2}}, \quad -\frac{A}{B} > \sqrt{\frac{1}{2C}}e^{-\frac{1}{2}}, \quad \frac{A}{B} \neq 0. \quad (14)$$

Поскольку система (10) консервативная, то имеет место закон сохранения энергии. В этом случае знание интеграла энергии системы позволит определить ее фазовые траектории. Как известно [10], в консервативной системе фазовые траектории являются линиями уровня функции потенциальной энергии, которая имеет вид

$$V = -\int_0^y (A + Bue^{-Cu^2}) du = -Ay + \frac{Be^{-Cy^2}}{2C}. \quad (15)$$

Для социальных систем понятие энергии или лишено смысла, или имеет иную трактовку. Между тем, их динамическое поведение качественно совпадает с поведением консервативных механических систем, и на фазовой плоскости имеет место одинаковое качественное поведение фазовых траекторий [46, с. 85]. Поскольку из параметров  $A, B, C$  только  $A$  может менять знак, то имеет смысл рассмотреть всего лишь две ситуации.

Ситуация 1: при выполнении условий

$$-\sqrt{\frac{1}{2C}}e^{-\frac{1}{2}} < -\frac{A}{B} < 0, \quad A > 0 \quad (16)$$

имеют место представленные на рис. 2 зависимости  $V(y)$  и соответствующие ей фазовые траектории (здесь  $\dot{y} = \partial y / \partial t$ ).

Ситуация 2: при выполнении условий

$$0 < -\frac{A}{B} < \sqrt{\frac{1}{2C}}e^{-\frac{1}{2}}, \quad A < 0 \quad (17)$$

имеет место представленная на рис. 3 зависимость  $V(y)$  и соответствующие ей фазовые траектории.

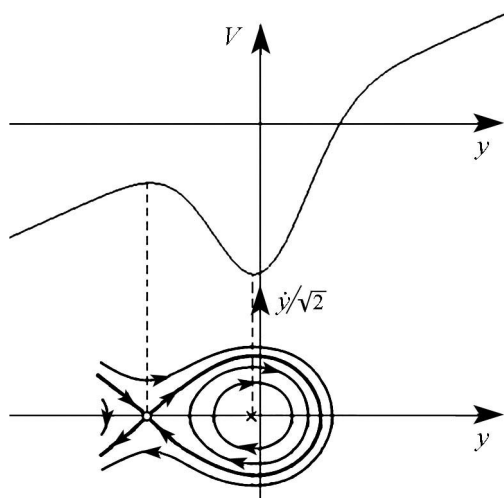


Рис. 2.

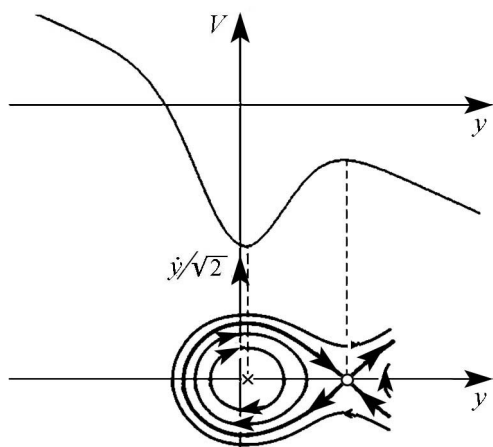


Рис. 3.

Из анализа полученных фазовых портретов можно сделать вывод, что существует определённая область устойчивости – область внутри замкнутой траектории, которой является устойчивая петля сепаратрисы. Границы данной области определяются значениями характерных параметров индивидов или их групп, а также социума в целом (параметры  $k_c, k_s, D$ ). Данные коэффициенты, строго говоря, с течением времени могут меняться в результате взаимодействия индивидов, тем самым влияя на размеры и положение области устойчивости. Однако в данном исследовании был рассмотрен краткосрочный сценарий, поэтому их возможные изменения во времени считались несущественными.

Индивиды или группы индивидов, обладающие необходимыми параметрами для попадания в область устойчивости в начальный момент времени, не удаляются друг от друга на относительно большую социальную дистанцию в результате взаимного влияния друг на друга. Они остаются на расстоянии, в пределах которого возможны социальные связи и активный информационный обмен. Это можно трактовать как существование области взаимодействия,

параметризация которой делает относительно резкое изменение социальных координат (то есть конфликтное состояние) маловероятным или невозможным. Действительно, в обществе, где социальное и информационное соприкосновение, взаимопроникновение различных культур и этносов достаточно, где отдельные группы населения не обособляются, создавая замкнутые подсистемы (где условия существенно отличаются от основной системы), возможности для возникновения этносоциальных, религиозных и т.д. конфликтов сведены к относительно минимуму.

Вне области устойчивости фазовые траектории расходятся и незамкнуты. Индивиды/группы индивидов, попавшие за пределы этой области в начальный момент, с течением времени окажутся на относительно большой социальной дистанции, что соответствует увеличению социального и информационного «разрыва» между индивидами и/или группами индивидов. Именно данное состояние социальной системы можно охарактеризовать как конфликт и проявление существующих противоречий между индивидами и группами индивидов. Например, для этносоциальных

конфликтов это проявляется в минимализации социальных и культурных контактов между разными этническими группами, увеличении социально-экономического разрыва, нарастании противоречий и, как следствие, переход в фазу открытого противостояния с дестабилизацией социальной и политической системы в целом.

### Заключение

Социальная гиперкластеризация общества, резкое разделение в информационной и социальной среде существования индивидов, культурная и межнациональная разобщённость создают идеальные условия для социального конфликта. Предупреждение же конфликтов в обществе, определение их граничных условий их возникновения и поиск наиболее эффективных сценариев пресечения является важной задачей для современных социальных наук.

- В данной статье были кратко рассмотрены основные подходы к моделированию в социальных науках, проблемы определения социального конфликта и основные его концепции. Дано формализованное определение одного из параметров, приводящего к конфликту в социальной системе.
- Предложена математическая модель, основанная на уравнении Ланжевена, приведено аналитическое решение в первом приближении для расходящегося типа диффузии.
- Показано, что разработанная модель даже на простом примере двух взаимодействующих групп индивидов позволяет выявить характерные закономерности конфликта в социальной системе, определить влияние социальной дистанции в обществе на условия генерации подобных процессов с учётом внешнего влияния и случайного фактора. В частности, выше были установлены конкретные граничные условия, определяемые параметрами социальной системы и внешним воздействием, при которых создаются основания для возникновения социального конфликта.
- В результате моделирования обнаружена характерная область устойчивости для социальной системы, определяемая фазовыми траекториями. В данной области между исследуемыми объектами сохраняется достаточно малая социальная дистанция, что характерно для активно взаимодействующих, находящихся в постоянном информационном контакте, групп населения.

Результаты проведённых исследований позволят в дальнейшем перейти к решению общих задач для множества индивидов.

*Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 15-18-00047).*

### Библиографический список

1. Петухов А.Ю. 2015. Концепция социального конфликта: Социально-энергетический подход // Вектор науки ТГУ. № 3–2 (33-2). С. 240–245.

2. *Козер Л.А.* Функции социального конфликта / Пер. с англ. О.Назаровой; Под общ. ред. Л.Г. Ионина. М.: Идея-пресс, Дом интеллектуальной книги, 2000. С. 340.
3. *Дарендорф Р.* Элементы теории социального конфликта // Социс (Социологические исследования). 1994. № 5. С. 142–147.
4. *Боулдинг К.* Общая теория систем – скелет науки // Исследования по общей теории систем. М.: Наука, 1969. С. 171–182.
5. *Давыдов С.А.* Социология. Конспект лекций. М.: Эксмо, 2008. 160 с.
6. *Перов Е.В.* Мониторинг социальной конфликтности общества // Национальная безопасность / nota bene. 2014. № 4. С. 574–583.
7. *Кравченко А.И.* Социология девиантности. М.: МГУ, 2003. 727 с.
8. *Кирилюк И.Л., Малков С.Ю., Малков А.С.* Экономическая динамика Мир-Системы: Взаимодействие стран с разным уровнем развития // История и математика: Модели и теории / Отв. ред. Л.Е. Гринин, А.В. Коротаев, С.Ю. Малков. М.: Издательство ЛКИ, 2008. С. 102–119.
9. *Шабров О.Ф.* Системный подход и компьютерное моделирование в политологическом исследовании // Общественные науки и современность. 1996. № 2. С. 100–110.
10. *Глушков В.М.* Гносеологическая природа информационного моделирования // Вопросы философии. 1963. № 10. С. 131–139.
11. *Блауберг И.В., Юдин Э.Г.* Становление и сущность системного подхода. М., 1973. С. 301.
12. *Саати Т.Л., Кернс К.К.* Аналитическое планирование: Организация систем. М., 1991. С. 259.
13. *Lincoln P. Bloomfield* Managing international conflict. From theory to policy: A teaching tool using CASCON. N.Y., 1997. С. 234.
14. *Плотинский Ю.М.* Модели социальных процессов: Учебное пособие для высших учебных заведений. М.: Логос, 2001.
15. *Малков С.Ю.* Математическое моделирование исторической динамики: Подходы и процессы / Ред. М. Г. Дмитриев. М.: РГСУ, 2004.
16. *Эбеллинг В.* Образование структур при необратимых процессах: Введение в теорию диссипативных структур. М.: Мир, 1979.
17. *Анатомия кризисов.* М.: Наука, 2000.
18. *Романовский Ю.М., Степанова Н.В., Чернавский Д.С.* Математическая биофизика. М.: Наука, 1984.
19. *Мелик-Гайказян И.В.* Информационные процессы и реальность. М.: Наука, Физматлит, 1998.
20. *Хакен Г.* Синергетика. Иерархия неустойчивостей в самоорганизующихся системах и устройствах. М.: Мир, 1985.
21. *Николис Г., Пригожин И.* Самоорганизация в неравновесных системах. М.: Мир, 1979.

22. *Николис Г., Пригожин И.* Познание сложного. М.: Мир, 1990.
23. *Малинецкий Г.Г., Потапов А.Б.* Современные проблемы нелинейной динамики. М.: Эдиториал УРСС, 2000.
24. *Малинецкий Г.Г.* Хаос, структуры, вычислительный эксперимент. Введение в нелинейную динамику. М.: Наука, 1997.
25. *Лоскутов А.Ю., Михайлов А.С.* Введение в синергетику. М.: Наука, 1990.
26. *Дмитриев А.С., Старков С.О., Широков М.Е.* Синхронизация ансамблей связанных отображений // Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика. 1996. Т. 4, № 4–5. С. 40.
27. Новое в синергетике. Загадки мира неравновесных структур/ Ред. С.П. Курдюмов, Г.Г. Малинецкий / Кибернетика: Неограниченные возможности и возможные ограничения. М.: Наука, 1996. 263 с.
28. *Алексеев Ю.К., Сухоруков А.П.* Введение в теорию катастроф. М.: Изд-во МГУ, 2000.
29. *Постон Т., Стюарт И.* Теория катастроф и ее приложения. М.: Мир, 1980.
30. Управление риском: Риск. Устойчивое развитие. Синергетика. М.: Наука, 2000.
31. *Holyst J.A., Kacperski K., Schweitzer F.* Phase transitions in social impact models of opinion formation // Physica. 2000. Vol. A285. P. 199–210.
32. *Михайлов А.П.* Моделирование системы «власть–общество». Нижний Тагил: Нижнетагильская гос. соц.-пед. академия [и др.], 2006.
33. *Михайлов А.П., Горбатилов Е.А.* Базовая модель дуумвирата в системе «власть–общество» // Матем. моделирование. 2012. Vol. 24, № 1. P. 33–45.
34. *Михайлов А.П., Петров А.П.* Поведенческие гипотезы и математическое моделирование в гуманитарных науках // Матем. моделирование. 2011. Vol. 23, № 6. P. 18–32.
35. *Bonabeau E.* Agent-based modeling: A revolution? // Proc. National Academy of Sciences 99. Suppl. 3. 2002. 7199–200.
36. *Casti J.* Agent-based modeling: Methods and techniques for simulating human systems // Proc. National Academy of Sciences 99. 1997. 7280–7.
37. *Wiley Gilbert N., Troitzsch K.G.* Would-Be Worlds: How Simulation is Changing the World of Science. New York, 1999.
38. *Charles M., North M.* Simulation for the Social Scientist. Tutorial on Agent-based Modeling and Simulation // Buckingham: Open University Press, Proc. 2005. Winter Simulation Conference, Orlando, FL, Dec. 2005, 4–7. Pp. 2–15. Available at <http://www.informssim.org/wsc05papers/002.pdf>.
39. *Charles M., North M.* Tutorial on Agent-based Modeling and Simulation. Part 2: How to Model with Agents // Proc. 2006 Winter Simulation Conference, L.F. Perrone, F.P. Wieland, J. Liu, B.G. Lawson, D.M. Nicol, and R.M. Fujimoto, eds., Monterey, CA, Dec 2006, 3–6.
40. *Prietula M.J., Carley K.M., Gasser L., eds.* Simulating Organizations: Computational Models of Institutions and Groups. Cambridge, MA: MIT Press, 1998.



41. Гуц А.К., Коробицын В.В. и др. Математические модели социальных систем: Учебное пособие. Омск: Омский гос. университет, 2000.
42. Петухов А.Ю. Моделирование социальных и политических процессов в условиях информационных войн. Социально-энергетический подход // *Fractal Simulation*. 2012. Т. 3, № 1. С. 16–32.
43. *Petukhov A.Y.* Modeling of branched chain reactions in political and social processes // *Global Journal of Pure and Applied Mathematics*. 2015. Vol. 11, Issue 5. P. 3401–3408.
44. *Petukhov A.Y., Polevaya S.A., Yakhno V.G.* The theory of information images: Modeling based on diffusion equations // *Int. J. Biomath.* 2016. 09. 1650087. DOI: <http://dx.doi.org/10.1142/S179352451650087X>
45. *Ермолаев О.Ю.* Математическая статистика для психологов. М.: МПСИ, Флинта, 2002. 325 с.
46. *Наследов А.Д.* Математические методы в психологическом исследовании: Анализ и интерпретация данных / СПб: Речь, 2004.
47. *Андронов А.А., Витт А.А., Хайкин С.Э.* Теория колебаний. 2-е изд., перераб. и испр. М.: Наука, 1981. 918 с.
48. *Горяченко В.Д.* Элементы теории колебаний: Учеб. пособие. 2-е изд., перераб. и доп. М.: Высшая школа, 2001. 395 с.

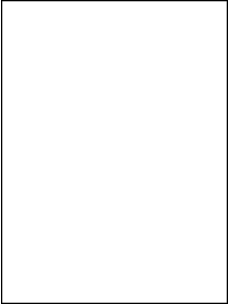
*Поступила в редакцию*      13.09.2016  
*После доработки*                14.11.2016

## References

1. *Petukhov A.Y.* The Concept of Social Conflict: A Social-energy approach // *Vector of Science TSU*. 2015. Issue 3–2 (33-2). С. 240–245 (in Russian).
2. *Coser L.A.* Functions of Social Conflict / Transl. From Engl. By O. Nazarova; Under Edit. L.G. Ionin. Moscow: Idea-Press, House of Intellectual Book, 2000. P. 340 (in Russian).
3. *Darendorf R.* Elements of the Theory of Social Conflict // *Socis (Sociological Studies)*. 1994. Issue 5. P. 142–147 (in Russian).
4. *Boulding K.* General Theory of Systems – The Skeleton of Science Studies on the General Theory of Systems. М.: Nauka, 1969. P. 171–182 (in Russian).
5. *Davydov S.A.* Sociology. Summary of the Lectures. М.: Eksmo, 2008. 160 p. (in Russian).
6. *Perov Y.V.* Monitoring social conflictogenity of society National Security // *Nota Bene*. 2014. Issue 4. P. 574–583 (in Russian).
7. *Kravchenko A.I.* Sociology of Deviantness. М.: MSU, 2003. 727 p. (in Russian).
8. *Malkov V.P.* Mathematical Modeling of Historical Dynamics: Approaches and Models. М., 2009 (in Russian).
9. *Shabrov O.F.* A system approach and computer modeling in political science research // *Social Sciences and Contemporaneity*. 1996. Issue 2. P. 100–110 (in Russian).

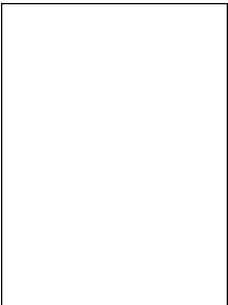
10. *Mason J.W.D.* Consciousness and the structuring property of typical data // *Complexity*. 2013. Vol. 18, Issue 3. P. 28–37, January/February. DOI: 10.1002/cplx.21431
11. *Blauberg I.V., Yudin E.G.* Establishing and Essence of the System Approach. M., 1973. P. 301 (in Russian).
12. *Saati T.L., Kerns K.K.* Analytical Planning: Organization of Systems. M., 1991. P. 259 (in Russian).
13. *Lincoln P. Bloomfield* Managing International Conflict. From Theory to Policy: A Teaching Tool Using CASCON. N.Y., 1997. P. 234.
14. *Plotnitskiy Yu.M.* Models of Social Processes: Textbook for Higher Education Institutions. M., Logos, 2001 (in Russian).
15. *Malkov S.Yu.* Mathematical Modeling of Historical Dynamics. Approaches and Processes. Edit. M. G. Dmitriyev. M.: RGSU, 2004 (in Russian).
16. *Ebeding V.* Formation of Structures under Irreversible Processes. Introduction into the Theory of Dissipative Structures. M.: Mir, 1979 (in Russian).
17. Anatomy of Crisis. M.: Nauka, 2000 (in Russian).
18. *Romanovskiy Yu.M., Stepanova N.V., Chernavskiy D.S.* Mathematical Biophysics. M.: Nauka, 1984 (in Russian).
19. *Melik-Gaykazyan I.V.* Informational Processes and Reality. M.: Nauka, Fizmatlit, 1998 (in Russian).
20. *Haken H.* Synergetics. Hierarchy of Instabilities in Self-Organizing Systems and Devices. M.: Mir, 1985 (in Russian).
21. Self-Organization in Non-Equilibrium Systems. M.: Mir, 1979 (in Russian).
22. *Nilolis G., Prigozhin I.* Cognition of the Complex. M.: Mir, 1990 (in Russian).
23. *Malinetskiy G.G., Potapov A.B.* Contemporary problems of Nonlinear Dynamics. M.: Editorial URSS, 2000 (in Russian).
24. *Malinetskiy G.G.* Chaos, Structures, Computation Experiment. Introduction into Nonlinear Dynamics. M.: Nauka, 1997 (in Russian).
25. *Loskutov A.Yu., Mikhailov A.S.* Introduction into Synergetics. M.: Nauka, 1990 (in Russian).
26. *Dmitriyev A.S., Starkov S.O., Shirokov M.E.* Synchronization of ensembles of couples mappings // *Izvestiya Vuzov. Applied Nonlinear Dynamics*. 1996. Vol. 4, Issue 4–5. P. 40 (in Russian).
27. The New in Synergetics. Mysteries of the World of Non-Equilibrium Systems. M.: Nauka, 1996 (in Russian).
28. *Alekseyev Yu.K., Sukhorukov A.P.* Introduction into the Catastrophe Theory. M.: MSU Publishers, 2000 (in Russian).
29. *Poston T., Stewart I.* The Catastrophe Theory and its Applications. M.: Mir, 1980 (in Russian).
30. Controlling Risk: Risk. Stable development. Synergetics. M.: Nauka, 2000 (in Russian).
31. *Holyst J.A., Kacperski K., Schweitzer F.* Phase transitions in social impact models of opinion formation // *Physica*. 2000. Vol. A285. P. 199–210.

32. *Mikhailov A.P.* Modeling the «Power–Society» System. Nizhniy Tagil: State Soc.-Ped. Academy [et al.], Nizhniy Tagil, 2006 (in Russian).
33. *Mikhailov A.P., Gorbatikov E.A.* A basic model of the duumvirate in the «Power-Society» system // *Mathematical Modeling*. 2012. Vol. 24, Issue 1. P. 33–45 (in Russian).
34. *Mikhailov A.P., Petrov A.P.* Behavioristic hypotheses and mathematical modeling in humanitarian sciences // *Math. Modeling*. 2011. Vol. 23, Issue 6. P. 18–32 (in Russian).
35. *Bonabeau E.* Agent-based modeling: A revolution? // *Proc. National Academy of Sciences* 99, Suppl. 3: 2002. 7199-200.
36. *Casti J.* Agent-based modeling: Methods and techniques for simulating human systems. *Proc. National Academy of Sciences* 99: 7280-7, 1997.
37. *Wiley Gilbert N., Troitzsch K.G.* Would-Be Worlds: How Simulation Is Changing the World of Science. New York, 1999.
38. *Charles M., North M.* Simulation for the Social Scientist. Tutorial on Agent-based Modeling and Simulation // Buckingham: Open University Press, Proc. 2005. Winter Simulation Conference, Orlando, FL, Dec. 2005, 4–7. P. 2–15. Available at <http://www.informssim.org/wsc05papers/002.pdf>.
39. *Charles M., North M.* Tutorial on Agent-based Modeling and Simulation. Part 2: How to Model with Agents // *Proc. 2006 Winter Simulation Conference*, L.F. Perrone, F.P. Wieland, J. Liu, B.G. Lawson, D.M. Nicol, and R.M. Fujimoto, eds., Monterey, CA, Dec 2006, 3–6.
40. *Prietula M.J., Carley K.M., Gasser L., eds.* Simulating Organizations: Computational Models of Institutions and Groups. Cambridge, MA: MIT Press, 1998.
41. *Gutz A.K., Korobitsyn V.V. et al.* Mathematical Models of Social Systems Textbook. Omsk: Omsk State University, 2000 (in Russian).
42. *Petukhov A.Y.* Modeling Social and Political Processes in the Conditions of Informational Wars // *Social-Energy Approach Fractal Simulation*. 2012. Vol. 3, Issue 1. P. 16–32 (in Russian).
43. *Petukhov A.Y.* Modeling of branched chain reactions in political and social processes // *Global Journal of Pure and Applied Mathematics*. 2015. Vol. 11, Issue 5. P. 3401–3408.
44. *Petukhov A.Y., Polevaya S.A., Yakhno V.G.* The theory of information images: Modeling based on diffusion equations // *Int. J. Biomath.* 2016. 09. 1650087. DOI: <http://dx.doi.org/10.1142/S179352451650087X>
45. *Ermolaev O.* Mathematical Statistics for Psychologists. M.: SAG, Flinta, 2002. 325 p. (in Russian).
46. *Heritage A.D.* Mathematical Methods in Psychological Research. Analysis and Interpretation of Data. SPb: Rech, 2004. (in Russian).
47. *Andronov A.A., Vitt A.A., Haykin S.E.* The Theory of Oscillations. 2-nd edition, revised and corrected. M.: Nauka, 1981. 918 p. (in Russian).
48. *Goryachenko V.D.* Elements of the Theory of Oscillations: Textbook. 2-nd edition, revised and added. M.: Higher School, 2001. 395 p. (in Russian).



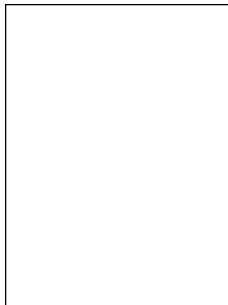
*Петухов Александр Юрьевич* родился в 1987 году в Горьком (Нижний Новгород). Закончил радиофизический факультет Нижегородского государственного университета им. Н.И. Лобачевского (2009). В 2011 году защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата политических наук в ННГУ в области моделирования процессов манипуляции сознанием в обществе. В 2015 году принял обязанности руководителя научно-исследовательской лаборатории «Моделирования социальных и политических процессов», также работает в ННГУ на должности доцента. Автор монографии на тему моделирования социальных и политических процессов. Опубликовал более 60 статей в рецензируемых научных изданиях.

Россия, 603950 Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23  
Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского  
E-mail: Lectortg@yandex.ru



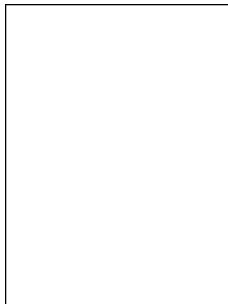
*Мальханов Алексей Олегович* родился в 1984 году в Кстово Горьковской области, окончил Нижегородский государственный университет (2007). После окончания работает старшим научным сотрудником в Институте Проблем Машиноведения РАН. Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук в ННГУ (2010) в области механики деформируемого твердого тела. Опубликовано более 50 статей в рецензируемых научных изданиях.

Россия, 603950 Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23  
Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского  
E-mail: alexey.malkhanov@gmail.com



*Сандалов Владимир Михайлович* родился в 1942 году в Кировской области, окончил Горьковский госуниверситет им.Н.И. Лобачевского (1965). После окончания университета работал в нем доцентом и старшим научным сотрудником. Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук (1983) в области теории колебаний, динамики и прочности турбомашин. Получил звание доцента (1987). Опубликовал свыше 60 научных статей по теории колебаний, устойчивости и теории управления динамических систем.

Россия, 603950 Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23  
Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского  
E-mail: granel09@gmail.com



*Петухов Юрий Васильевич* родился в 1952 году в Гусь-Хрустальном Владимирской области. Окончил физический факультет (1976). Защитил диссертацию на соискание научной степени кандидата физико-математических наук (1985, ИПФ РАН) на тему распространения волн в океане. Защитил диссертацию на соискание научной степени доктора физико-математических наук (1993, ИПФ РАН) на тему «Влияние нелинейности, стратификации и границ раздела сред на распространение акустических волн в океане и атмосфере». Работал и работает на должностях главный и ведущий научный сотрудник в Институте прикладной физики РАН, Нижегородском государственном университете им. Н.И. Лобачевского, Нижегородском радиофизическом институте. Руководил отделом теоретической физики ИПФ РАН. Автор и соавтор 3 монографий. Опубликовано более 150 статей в рецензируемых научных изданиях.

Россия, 603950 Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23  
Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского  
E-mail: yuvpetukhov@ya.ru



80-летию Ю.А. Данилова

УДК 7;514

## ФРАКТАЛЬНОЕ ИСКУССТВО\*

*Д. И. Трубецков<sup>1,2</sup>, Е. Г. Трубецкова<sup>1</sup>*

<sup>1</sup>Национальный исследовательский  
Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского  
410012 Саратов, ул. Астраханская, 83

<sup>2</sup>Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ»  
115409 Москва, Каширское шоссе, 31

E-mail: dtrubetskov@yahoo.com, etrubetskova@gmail.com

Статья посвящена рассмотрению различных сторон феномена фрактального искусства, прежде всего фракталов в живописи и литературе. Работы Б. Мандельброта, показавшие универсальность фрактальной геометрии и поставившие вопрос о ее эстетической ценности, оказали большое влияние на искусствоведческие и гуманитарные исследования. При этом, в большинстве случаев термин «фрактальное искусство» используется метафорически. Как правило, актуализируется то или иное свойство фракталов, чаще всего это – самоподобие, автореференция, возможная бесконечность итераций.

Изменяется не само искусство, а взгляд исследователя. Искусствоведы и математики находят «фракталы до фракталов» на картинах Вонга Зименга, Леонардо да Винчи, Кацусики Хокусая, которые стремились наиболее точно отобразить непостижимую красоту окружающего мира и, не зная того, воссоздавали фракталы. Богатый материал для предвосхищения открытия фракталов дают произведения художников XX века Франтишека Купки, Сальвадора Дали, Мориса Эшера.

Особое внимание уделено компьютерным исследованиям Р. Тейлором абстрактных картин Джексона Поллока, показавшим постоянство фрактальной размерности  $D$  в независимости от выбранного масштаба измерения на его полотнах. В результате чего «тест на фрактальность» был предложен как способ идентификации его полотен.

Описывается в статье и «фрактальное искусство» в прямом значении (искусство художников-фракталистов), которое началось с выставки фрактальных изображений, организованной группой бременских математиков во главе с Пайтгеном и Рихтером.

Продолжая исследования Ю. Степанова и Т. Бонч-Осмоловской, авторы рассматривают разные виды «фракталов» в литературе. Прежде всего, это структура «текст в тексте», в ряде случаев обладающая относительным самоподобием и автореференцией и создающая бесконечность смыслов (на примере произведений Х.-Л. Борхеса, В. Набокова,

\*Статья написана по материалам лекций, прочитанных авторами на XI международной школе «ХАОС–2016», 3–8.10.2016, Саратов, Россия.

М. Булгакова, Ю. Трифонова, поэзии Серебряного века – «венки сонетов»). Анализируются различные функции фрактальной структуры текстов.

*Ключевые слова:* Фрактальное искусство, фракталы в живописи, фракталы в литературе, М. Эшер, Х.-Л. Борхес, В. Набоков.

DOI: DOI: 10.18500/0869-6632-2016-24-6-84-102

*Ссылка на статью:* Трубецков Д.И., Трубецкова Е.Г. Фрактальное искусство // Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2016. Т. 24, № 6. С. 84–102.

## FRACTAL ART

*D. I. Trubetskov<sup>1,2</sup>, E. G. Trubetskova<sup>1</sup>*

<sup>1</sup>National Research Saratov State University  
Astrahanskaya, 83, 410012 Saratov, Russia

<sup>2</sup>National Research Nuclear University MEPhI  
115409, Moscow, Kashirskoe shosse, 31

E-mail: dtrubetskov@yahoo.com, etrubetskova@gmail.com

The article considers various aspects of fractal art phenomenon, especially fractals in painting and literature. The works by B. Mandelbrot, which demonstrated the versatility of fractal geometry and raised the question of its aesthetic value, had a great influence on art and humanities studies. But in most cases, the term «fractal art» is used metaphorically. As a rule, these properties of fractals properties are taken for comparison: self-similarity, autoreference and possible infinity of iterations.

It should be noted that what changes is not the art itself, but the view of the researcher. The art critics and mathematicians discover «fractals before fractals» in the paintings by Wang ZhiMeng, Leonardo da Vinci, Katsushika Hokusai - the artists who tried to display the incomprehensible beauty of the world, and, not knowing that, recreated the fractals. Rich material for the anticipation of the discovery of fractals is given in the works of the twentieth century artists, such as: Frantisek Kupka, Salvador Dali, Maurits Escher.

Particular attention is given to R. Taylor's computer studies of Pollock's abstract paintings, which showed permanence of fractal dimension  $D$  regardless the selected measurement scale in his canvases. As a result, «the fractal test» was proposed as a way to identify his paintings.

There described the «Fractal Art» ( in the literal sense), which started with the exhibition of fractal images organized by the researchers of the University of Bremen, headed by Heinz-Otto Peitgen and Michael M. Richter.

Continuing Yu.Stepanov's and T. Bonch-Osmolovskaya's researches, the authors examine the different types of «fractals» in literature. First of all, it is the structure «the text within the text», that, in some cases, has got a relatively self-similarity and autoreference and has created infinite meanings (as example the works by J.-L. Borges, V. Nabokov, M. Bulgakov, Yu. Trifonov are considered). Other example is the «crown of sonnets» in the poetry of Silver Age. The various functions of the fractal structure of texts are analyzed.

*Keywords:* Fractal art, fractals in the painting, fractals in the literature. M. Esher, J-L. Borges, V. Nabokov.

DOI: 10.18500/0869-6632-2016-24-6-84-102

*Paper reference:* Trubetskov D.I., Trubetskova E.G. Fractal art. Izvestiya VUZ. Applied Non-linear Dynamics. 2016. Vol. 24. Issue 6. P. 84–102.

Фрактальное «новое геометрическое искусство» демонстрирует родство с картинами старых мастеров или творений «изысканной» архитектуры. Одна из очевидных причин заключается в том, что и фракталы, и произведения классических визуальных жанров искусства включают в себя многие масштабы длины и элементы самоподобия. Вполне возможно, что именно по этим причинам, а также потому, что фрактальное искусство возникло из попыток постичь законы Природы, имитируя ее, мы принимаем его с такой готовностью – оно нам не чуждо. К фрактальной живописи у нас двойственное отношение: те картины, например, которые мне нравятся, близки к фрактальному геометрическому искусству, остальные же больше тяготеют к стандартной геометрии, что лично мне не доставляет никакого эстетического удовольствия.

*Б. Мандельброт*

Ю.А. Данилов в эссе «Фрактальность» писал о «неисчерпаемости приложений фрактальной геометрии в науке, технике, литературе и искусстве» [1, с. 190]. Действительно, после работ Бенуа Мандельброта исследователи увидели фракталы буквально везде: в разных видах искусства, в философии, семиотике. В 1993 году Мандельброт получил престижную премию Волюра – «за изменение нашего взгляда на мир посредством концепции фрактальной геометрии» (цит. по [2, с. 148]). Формулировка, на наш взгляд, отражает главную заслугу ученого: после его работ изменился сам взгляд на хорошо известные объекты и явления. С. Деменок в предисловии к книге «Суперфрактал» [3] определил главное достоинство «фрактальной интерпретации» в том, что «фрактал имеет три ипостаси: формальную (геометрическая форма), операциональную (алгоритм построения фрактала) и производную математического воображения – символический код (фрактальная размерность). Фрактальная аналогия тем самым объединяет в одно связное целое физическую реальность (вещественное и динамическое) и виртуальную (символическую) реальность» [3, с. 6].

При этом необходимо отметить, что во многих исследовательских статьях и монографиях термин «фрактальное искусство» понимается метафорически. Изменяется не столько само искусство, сколько взгляд исследователя. Как правило, актуализируется то или иное свойство фракталов, чаще всего это – самоподобие и автореференция.



Рис. 1. Леонардо да Винчи. Потоп. 1514–1518 (из собрания Виндзорского замка)

Обратимся к фракталам в живописи. На полотнах художников разных эпох современные исследователи, чья оптика сформирована работами Мандельброта, видят близость фрактальным множествам. Как яркий пример, можно привести интерпретацию картин Вонга Зименга «Тысяча ли рек и гор» (нач. 13 в.) или Леонардо да Винчи «Потоп» (рис. 1) [2, с. 80–82]. Б. Мандельброт писал: «Леонардо изображает водные потоки в виде наложения вихрей различных



размеров. Осознание этой вихревой структуры пришло к ученым с некоторым опозданием – в 20-е годы XX века Льюис Ричардсон частично формализовал его, предложив «масштабно-инвариантный» взгляд на природу турбулентности» [4, с. 3]. Вспомним строки самого Ричардсона:

Меньшой у большего энергию берет,  
Пока мельчайших вязкость не сотрет.

Подобие «фрактальных драконов можно видеть и в произведениях Кацусики Хокусая, например, на его знаменитой гравюре «Большая волна в Канагаве» (1823–1831), (рис. 2), ставшей первой работой в серии «Тридцать шесть видов Фудзи».

Конечно, художники прошлых веков не могли знать фрактальной геометрии, которой просто тогда не существовало. Они стремились наиболее точно отобразить непостижимую красоту окружающего мира и, не зная того, воссоздавали фракталы. Мандельброт прав: «Многие грани природы можно описать только с помощью фракталов» [4, с. 25]. Фракталы окружают нас. Изрезанность береговой линии и хребет волны, ледник в горах и лунная поверхность, венозная и артериальная системы легких человека и плоды капусты брокколи – все это фракталы. «Самоподобие – это ткань природы», – писал Мандельброт [4, с. 27].

В своей монографии исследователь приводит средневековый фронтиспис из библейского «Moralisee» (рис. 3), под которым была надпись: «Здесь творит Господь небо и землю солнце и луну и все стихии». Мандельброт обращает внимание читателей на любопытные «загогулины» внутри измеряемого Создателем круга: «Наиболее привлекательной чертой представленного рисунка является <...> то, что он красноречиво призывает ученого “снять мерку со Вселенной” <...> к окружностям и волнам применить измерительный циркуль несложно. Но что, если мы попытаемся измерить циркулем изображенные на рисунке “загогулины”?»



Рис. 2. Кацусики Хокусай «Большая волна в Канагаве» (1823–1831)



Рис. 3. Средневековый фронтиспис из книги «Moralisee»

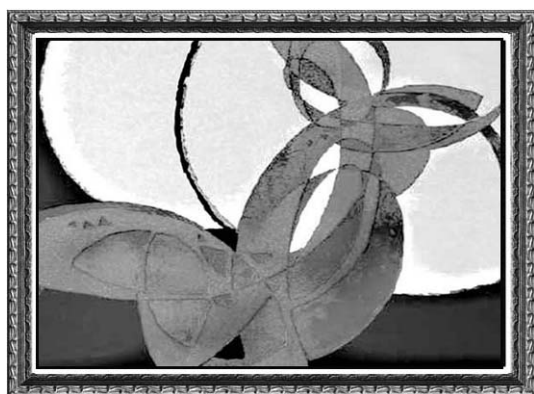


Рис. 4. Франтишек Купка «Амфора», 1912

рабoтoрии в Сорбонне и посещал лекции ряда профессoрoв. В эти же годы в Сорбонне читал лекции Анри Пуанкаре, чьи новаторские работы по алгебраической топологии и открытие гомоклинического пучка позднее легли в основу фрактальной геометрии. И, хотя нет прямых свидетельств, что Купка читал работы Пуанкаре и присутствовал на его лекциях, тем не менее, представляется возможным говорить об этом с определенной долей вероятности, так как работы Пуанкаре вызвали большой интерес в интеллектуальных и художественных кругах Парижа [5, с. 76–78].

Видят исследователи фракталы и на полотнах дадаистов и сюрреалистов – Гюстава Моро, Макса Эрнста, Мерет Оппенгейм, Роя Лихтенштейна, Сальвадора Дали [6]. Так, картина Дали «Лицо войны» (рис. 5), (изображающая искаженное от ужаса гигантское лицо, скорее, череп, обтянутый кожей, в глазницах и ротовой полости которого – уменьшенные копии таких же черепов, в них, в свою очередь, вписаны другие черепа и т.д.), по мнению исследователей, соответствует фрактальному множеству «Канторова пыль», полученному с помощью трех сжимающих отображений с коэффициентом сжатия около 0.21. Как пишет Л.М. Коцич, размерность Хаусдорфа–Безиковича картины Дали примерно 0.705 [6, с. 86–87].

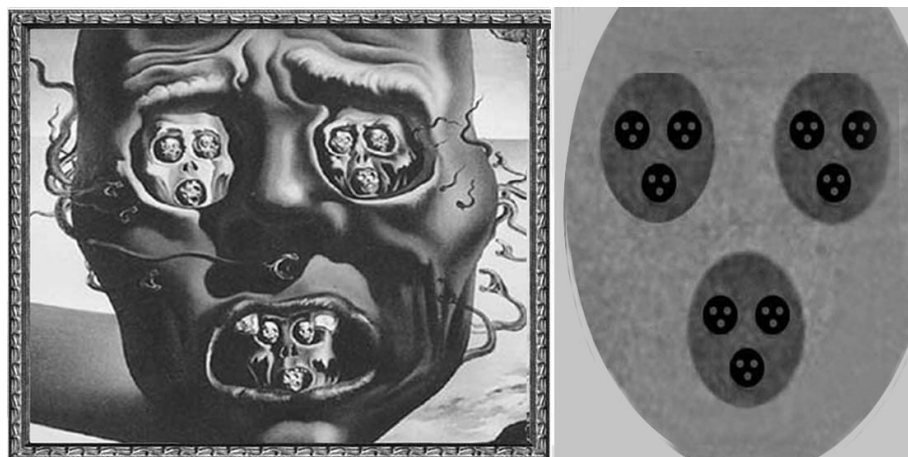


Рис. 5. Сальвадор Дали «Лицо войны», 1940 и соответствующее этой картине фрактальное множество «канторова пыль» [6]

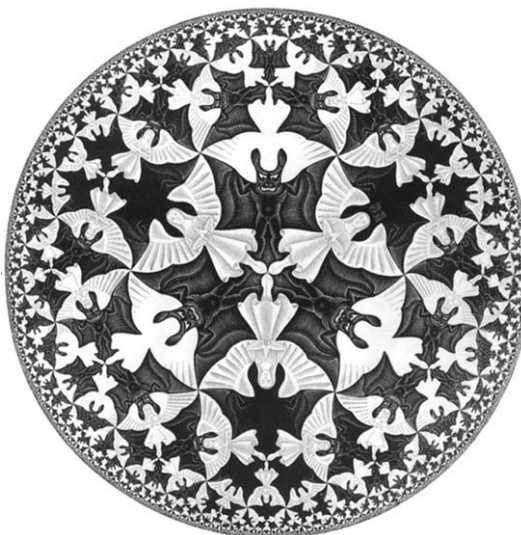
Исследователи часто говорят о фрактальности картин Мориса Эшера [7], однако, не разбирают его работы подробно. Надо отметить, что эксперименты с пространством, симметрией, попытка создания визуальной иллюзии бесконечности, обнажение условности традиционной перспективы на гравюрах и в графике Эшера оказались созвучными научным идеям конца XX в. Не случайно выходят десятки монографий по математике, нелинейной динамике с репродукциями его работ на обложке.

Экспериментируя с различными способами покрытия фигурами всей плоскости поверхности листа, Эшер во многих своих работах создает разные формы самоподобия. Обратимся к гравюрам «Smaller and smaller» и «Circle Limit» (рис. 6). Мы видим, что размер фигурок в первом случае уменьшается от периферии к центру, во втором случае – наоборот, увеличивается. Кроме того, на последней гравюре можно также видеть характерное для экспериментов Эшера двойное использование контура, когда, в отличие от традиционной графики, контур не отделяет изображенный объект от фона, а принадлежит двум фигурам одновременно: на черном фоне вырисовываются фигуры ангелов, на белом – чертей. Название работы получает второй смысл – это не только пространственное «ограничение круга», но и неизбежный круговорот жизни. Различные формы самоподобия можно видеть и на ксилографиях и литографиях «Butterflies» (1950), «Development» (1939), «Division» (1956), «Three Worlds» (1955), «Path of Life» (1966) и др. При этом на литографии «Three Worlds» Эшер избирает для изображения природные объекты, имеющие фрактальную структуру. Подчеркнем еще раз, сами фракталы еще не были открыты.

Также в работах Эшера можно видеть формы автореференции, создающие иллюзию бесконечности. Самый



а



б

Рис. 6. Морис Эшер. «Smaller and smaller», 1956 (а); «Circle Limit», 1960 (б)

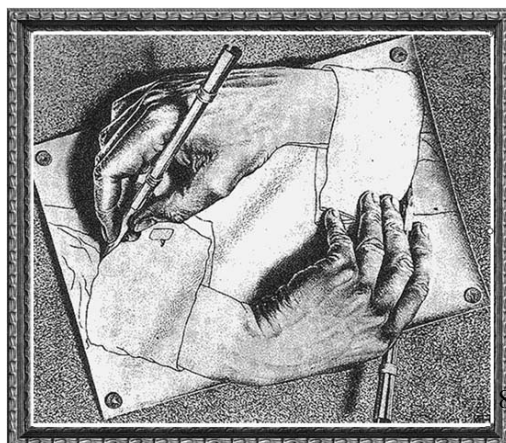


Рис. 7. Морис Эшер. «Drawing Hands», 1948

яркий пример здесь – «Drawing Hands» (рис. 7). На литографии «Drawing Hands» кисти рук трехмерны, движениями карандаша они как бы добавляют объем, оживляют двухмерные запястья.

На наш взгляд, здесь можно видеть аллюзию к знаменитому фрагменту Сикстинской капеллы Микельанджело – протянутым навстречу друг другу рукам Творца и его творения. Но у Эшера отсутствует однонаправленность действия: руки взаимно оживляют друг друга.

Упомянутая Д.И. Трубецковым статья из журнала «В мире науки» (см. стр. 4 данного выпуска), была статья Ричарда Тэйлора «Искусный хаос» [8]. Ричард Тэйлор заведовал кафедрой физики конденсированных сред в Университете Нового Южного Уэльса (Австралия), когда решил исследовать картины Джексона Поллока. В момент публикации статьи он был профессором физики в Орегонском университете (США), где продолжал изучать полотна Поллока, а также занимался исследованиями хаоса и фракталов в различных физических системах. Тэйлор получил степень магистра искусств в Университете Нового Южного Уэльса за исследование живописи Поллока, он – автор 250 научных работ, в том числе, книги «Chaos, Fractals, Nature. A New Look at Jackson Pollock», 2006. В книге [2] опубликованы две его работы с соавторами [9,10]. Вторая статья уже в названии содержит вопрос: «Может ли наука помочь в понимании искусства?».

Случайное событие в жизни самого Тэйлора натолкнуло его на мысль, что в картинах Поллока отражены природные ритмы. В 1994 году Тэйлор, обучаясь в Манчестерской школе искусств, проходил художественную практику на севере Англии, в торфяниках Йоркшира. Когда поднялась сильная метель, студенты решили вместо традиционных этюдов «заставить природу рисовать» за них. Из сломанных веток они изготовили нечто наподобие огромного паруса. К нему прикрепили емкости с краской, которая лилась на расстеленный холст, повинувшись воле ветра. Когда они утром вернулись, получившееся полотно как будто принадлежало руке Поллока. Тогда Тэйлор понял, «что кажущиеся случайными завихрения на картинах Поллока наверняка подчиняются строгой закономерности и, по сути, являются фракталами» [8, с. 71–72].

Тэйлор с соавторами [9,10] для вычисления фрактальной размерности  $D$  картин Поллока использовал метод подсчета по квадратам (рис. 8). Они сканировали картину и покрывали расчетной сеткой квадратов одного размера, созданной на компьютере. Затем они выделили одноцветные узоры и оценили статистическое качество узора, исходя из того, какие ячейки заняты краской  $N(L)$ , а какие остались пустыми. Постепенно авторы уменьшали шаг  $L$  сетки, что равноценно тому, что они как бы рассматривали рисунок со все большим увеличением. Выяснилось, что узор оставался фрактальным при любом масштабе. В работе [9] приведены конкретные цифровые данные для картины Поллока «Alhemy»<sup>1</sup>.

<sup>1</sup>Самый большой размер квадрата сетки был выбран соответствующим размеру полотна ( $L = 2.5$  м), самый маленький размер равен размеру мельчайшего окрашенного слоя ( $L = 1$  мм). Считается, что  $N(L)$  – количество квадратов, содержащих фрагмент узора картины, пропорционально  $L^{-D}$ , где  $1 < D < 2$ . Величина  $D$  находилась из наклона графика зависимости  $\log N(L)$  от  $\log L$ . Результаты получились следующими: имеются два различных значения  $D$ , близких к 1.5 в диапазонах  $1 \text{ мм} < L < 5 \text{ см}$  и  $5 \text{ см} < L < 2.5 \text{ м}$ . «Анализ видеосъемок Поллока за работой показал, что

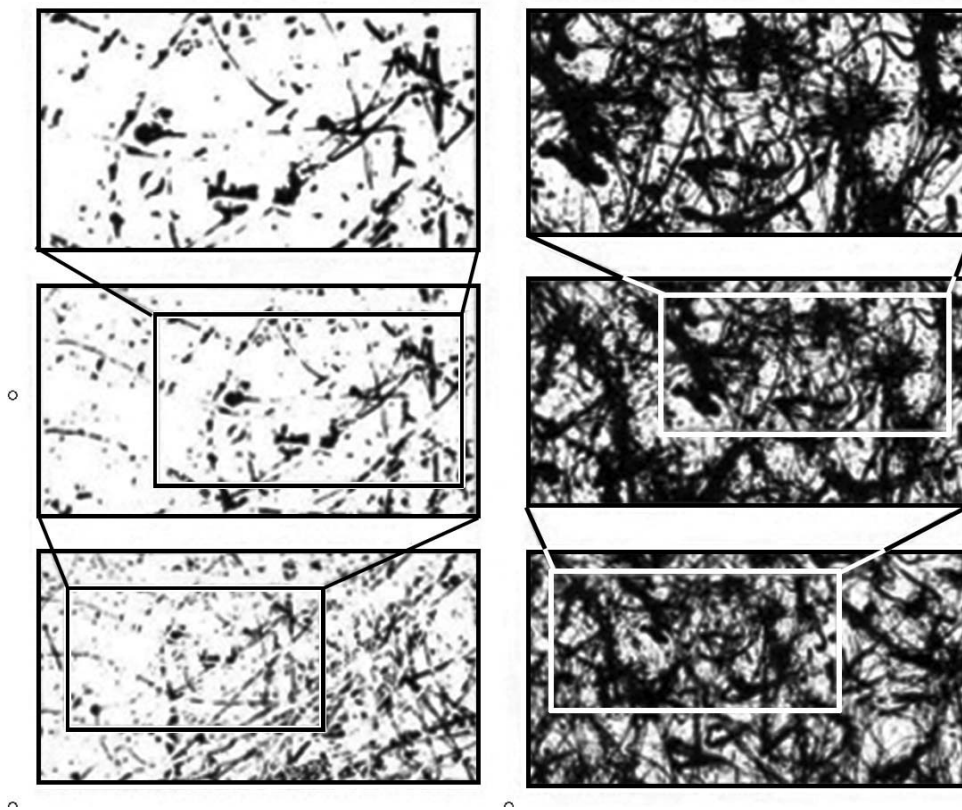


Рис. 8. К вычислению фрактальной размерности картины Поллока «Number 32», 1950 (правый столбец); слева – капельная картина, написанная не Поллоком [8]

Во всех трех статьях [8–10] подчеркивается, что изучение видео, фотографий и компьютерный анализ свидетельствуют о строго систематизированном и глубоко продуманном процессе рисования (рис. 9).

Обычно художник направлял на холст непрерывный поток краски и рисовал затейливые кривые. Обманчивая простота такой техники вызвала горячие споры в мире искусства: кто же автор



фрактальные паттерны, возникающие в нижнем диапазоне, обуславливаются процессом разорывания, в то время, как фрактальные паттерны в среднем диапазоне формируются в результате движений художника вокруг холста» [9, с. 96]. В работе [10], 1950, высказывается мысль о том, что, может быть, процесс рисования Поллоком был хаотичным: движения вокруг полотна, сочетающиеся со стремительными рывками, управление струей краски (переход от ламинарного течения струи к турбулентному). Приводится описание системы, состоящей из маятника, который записывает свои движения с помощью траектории, образуемой каплюющей краской на горизонтальном полотне, расположенном под ним. «Если маятнику предоставлена свобода колебаться самому по себе, маятник осуществляет предсказуемое хаотическое движение. Однако, толкая маятник с частотой несколько меньшей, чем он обычно раскачивается сам, система становится “подталкиваемым ротатором”» (в [10, с. 100] приведена ссылка на работы [11, 12]).

этого примитивного стиля – настоящий гений или насмехающийся над художественными традициями выскочка?

Художник начинал картину с маленьких островков, разбросанных по всему холсту. Любопытно, что некоторые природные формы также начинаются с маленьких образований, постепенно разрастающихся и сливающихся. Затем Поллок связывал островки более длинными, растянутыми линиями, и постепенно затоплял их плотной фрактальной сетью краски. Именно так формировался основной узор, определяющий дальнейшую динамику картины. Во время связывания величина  $D$ , характеризующая сложность картины, резко возрастала за минуту. «Мастер до предела увеличивал ее фрактальность, обрезая края, где качество фракталов, как правило, оставалось низким» [8, с. 73].

Исследователи пришли к выводу, что на картинах Поллока фрактальная размерность  $D$  остается одной и той же независимо от размеров и местоположения объекта, чего нет на картинах других художников. Тэйлор пишет: «Результаты цифровой обработки пяти частных капельных картин расстроили коллекционеров: несмотря на внешнее сходство с работами Поллока, ни одно из полотен не содержало фракталов, присущих творениям великого абстракциониста. Все его 20 работ, исследованных нами, имеют выраженную фрактальную структуру. Таким образом, тест на фрактальность – надежный способ идентификации шедевров Поллока. Более того, так как с годами значение  $D$  в работах гениального художника росло<sup>2</sup>, фрактальный анализ можно использовать и для датирования его произведений» [8, с. 74].

Закончим разговор о фрактальных картинах Поллока цитатой из статьи [10].

«Поллок умер в 1956 году до того, как были открыты хаос и фракталы. Следовательно, маловероятно, что Поллок осознавал, что он рисует фракталы. Тем не менее, производство фракталов у него было намеренным.

Он изобразил природу непосредственным образом. Вместо подражания Природе он заимствовал ее язык – фракталы, – для того чтобы строить свои собственные паттерны» [10, с. 107].

«Фрактальное искусство» уже не в метафорическом, а в прямом значении, началось с выставки фрактальных изображений, организованной группой бременских математиков во главе с Пайтгеном и Рихтером. Экспонаты этой выставки, обошедшей весь мир, вошли как иллюстрации в книгу «Красота фракталов» [13] (рис. 10).

Раздел «Границы хаоса» в этой книге содержит в пункте «Наука и/или искусство» следующий текст.

«Компьютер больше не является принадлежностью исключительно науки и техники; подрастает молодое поколение компьютерных автоматов, которые обязательно будут развивать свои художественные амбиции» [13, с. 35–37]. Под «фрактальным искусством» авторы понимают «вычисление значений фрактальных математических функций и преобразование результатов в цифровые картины или анимированные изображения в музыку» [13, с. 68].

В книге [13] есть статьи о фрактальном искусстве, которые можно отнести к его апологии [14,15]. Большая часть статьи [15] посвящена изложению мыслей автора о роли математики в описании природы, новой математики, основанной на теории хаоса и структур. Условно последняя часть статьи начинается так: «Но картины, представленные на этой “выставке”, можно рассматривать и с другой точки зрения

<sup>2</sup>Размерность фракталов на картинах Поллока возрастала с каждым годом от 1.12 в 1945 году до 1.7 в 1952 году. Художник по каким-то причинам уничтожил картину с  $D = 1.9$ .

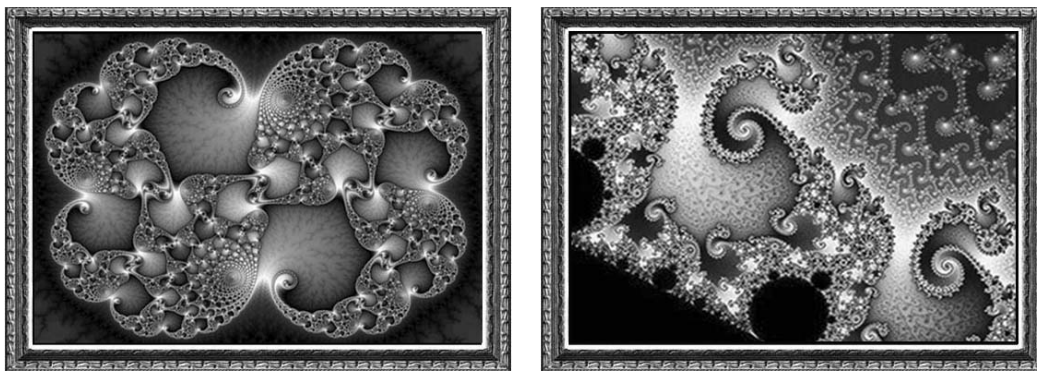


Рис. 10. Фракталы [13]

– они просто прекрасны!

Наше ощущение прекрасного возникает под влиянием гармонии порядка и беспорядка в объектах природы – тучах, деревьях, горных грядках или кристалликах снега. Их очертания – это динамические процессы, застывшие в физических формах, и определенное чередование порядка и беспорядка характерно для них» [15, с. 163].

Интересна и концовка статьи, показывающая, что можно «без труда установить внутреннюю связь, перебросить мост между рациональным научным познанием и эмоциональной эстетической привлекательностью».

В 2015 году вышел сборник статей под названием «Арт-фрактал», в аннотации к которому указано следующее.

Применительно к излагаемой теме представляет интерес статья в сборнике, написанная Б. Мандельбротом «Фракталы и искусство во имя науки» [4, с. 15–25]. В статье сравниваются и словесно, и визуально различные лики фрактального искусства на примере картин «Фрактальный дракон», «Фрактальный восход планеты», фрактальных ландшафтов, особенностей множества Мандельброта. Концовка статьи подобна манифесту фрактального искусства.

«Мы видим взаимодействие между строгим порядком и соразмерным изменением и неожиданным отклонением. Мое понимание значения искусства предполагает, что такая взаимосвязь является одной из базовых предпосылок пластической красоты.

Источник фрактального искусства находится в признании того факта, что очень простые математические формулы, которые кажутся совершенно бесплодными, могут в действительности быть, образно выражаясь, беременны огромным количеством графических структур. Эстетический вкус художника может повлиять на выбор формул для визуализации, обрезку рисунка и визуальное воспроизведение. Таким образом, фрактальное искусство, кажется, выпадает из обычных категорий “изобретения”, “открытия” и “творчества”» [4, с. 24–25].

Художники-фракталисты создали «Art and Complexity Group», и в 1997 году Карлсон Гинзбург выпустил «Манифест фракталистов», в котором, в частности, декларируется:

- «отказ от Евклидовой рациональности в пользу непрограммируемых и непредвиденных процессов»;
- ориентация на визуальный «потенциал безграничного построения в безграничном процессе» [16, с. 34].

Сюзан Конде, писательница, примыкающая к этой группе, констатировала: «Современные фрактальные художники стремятся отобразить состояние пространства

своего времени так, как они его воспринимают, с его фрактальными размерностями и свойствами» [16, с. 54].

Обратимся к другому виду искусства – литературе.

Ю.А. Данилов в своем замечательном эссе «Фрактальность», в разделе «Эстетика фракталов», писал: «Наконец, нельзя не упомянуть и об изящной словесности, ибо ей явно недостает свежей фрактальной струи. Какие захватывающие приключения ожидают Тезея в закоулках фрактального лабиринта, где за каждым поворотом его может поджидать роковая встреча с Минотавром! Какой длины должна бы быть в среднем спасательная нить Ариадны, чтобы Тезей мог благополучно выбраться из лабиринта? Смог бы Том Сойер вывести Бэки Тетчер из подземных фрактальных пещер, и сколько времени ему для этого потребовалось бы?» [1, с. 189–190].

Необходимо отметить, что по отношению к литературе термин «фрактальность» употребляется исследователями во многом метафорически. Здесь вновь для проведения аналогий оказываются очень привлекательными такие свойства фракталов, как автореференция, самоподобие, возможная бесконечность итераций. Это можно видеть на примере статьи Т. Бонч-Осмоловской «Фракталы в литературе» [17]. Она отмечает, что с древности люди мечтали создать бесконечную книгу, в которой была бы преодолена линейность природы чтения и его конечность. Это можно видеть и в «Сказках тысячи и одной ночи», и в литературе XX века. Именно об этом мечтал герой рассказа Х.-Л. Борхеса «Сад расходящихся тропок»: «...я спрашивал себя, как может книга быть бесконечной. В голову не приходит ничего, кроме цикличного, идущего по кругу тома, тома, в котором последняя страница повторяет первую, что и позволяет ему продолжаться сколько угодно» [18, с. 326]. Продолжая ряд примеров, приведенных в статье [16], мы можем вспомнить и слова героя романа Владимира Набокова «Дар», писателя Годунова-Чердынцева, который мечтал создать книгу «в виде кольца, замыкающегося апокрифическим сонетом так, чтобы получилась не столько форма книги, которая своей конечностью противна кругообразной природе всего сущего, сколько одна фраза, следующая по ободу, т. е. бесконечная...» [19, с. 204]. Надо отметить, что Набоков и Борхес – современники (оба родились в 1899 году), но когда они работали над указанными произведениями, авторы не знали о творчестве друг друга.

Т. Бонч-Осмоловская отмечает, что самым простым бесконечным текстом будет текст из дублирующих друг друга элементов или куплетов, повторяющейся частью которого является его «хвост» – тот же текст с любым количеством отброшенных начальных куплетов. Среди таких бесконечных произведений – стихи для детей или народные песенки, как, например, известный всем текст о попе и его собаке.

У попа была собака, он ее любил.  
Она съела кусок мяса, он ее убил.  
В землю закопал,  
Надпись написал,  
Что  
У попа была собака...

Или английская народная песенка, известная в переводе Маршака [20, с. 10].

Вот дом, Который построил Джек. А это пшеница,	А это весёлая птица-синица, Которая часто ворует пшеницу, Которая в тёмном чулане хранится
--	--



Которая в тёмном чулане хранится      В доме,  
В доме,      Который построил Джек...  
Который построил Джек.

Т. Бонч-Осмоловская вычленяет «фрактальность» на разных уровнях литературных текстов: структурные, семантические и нарративные.

Как пример структурных фракталов исследователь рассматривает венки сонетов – стихотворные циклы, состоящие из 14 сонетов – стихотворений, содержащих 14 строк со строгой структурой и ритмом. При этом последняя строка первого стихотворения цикла становится первой строкой второго, последняя строка второго – первой строкой третьего и т.д. Завершает (а иногда открывает) венок сонетов сонет-магистрал, состоящий из первых строк всех сонетов, входящих в цикл. Классический пример в русской литературе – венки сонетов «Corardens» Вяч. Иванова, «Corona astralis» М. Волошина, «Роковой ряд» В. Брюсова.

Рассмотрим венок сонетов М. Волошина. Вот сонет-магистрал из цикла «Corona astralis» [21].

В мирах любви, – неверные кометы, –      Тому, кто зряч, но светом дня ослеп,  
Закрыт нам путь проверенных орбит!      Тому, кто жив и брошен в темный склеп,  
Явь наших снов земля не истребит, –      Кому земля – священный край изгнания,  
Полночных Солнц к себе нас манят свету.

Ах, не крещен в глубоких водах Леты      Кто видит сны и помнит имена, –  
Наш горький дух, и память нас томит.      Тому в любви не радость встреч дана,  
В нас глеет боль внежизненных обид –      А темные восторги расставанья!  
Изгнанники, скитальцы и поэты!

А это первое стихотворение цикла, открывающая его строка становится первой строкой сонета-магистрала.

1

В мирах любви неверные кометы,      Но – странные, – его коснувшись, прочь  
Сквозь горних сфер мерцающий стоjar –      Стремим свой бег: от солнца снова в ночь –  
Клубы огня, мятущийся пожар,      Вдаль, по путям парабола безвозвратных...  
Вселенских бурь блуждающие свету

Мы вдаль несем... Пусть темные планеты      Слепой мятеж наш дерзкий дух стремится  
В нас видят меч грозящих миру кар, –      В багровой тьме закатов незакатных...  
Мы правим путь свой к солнцу, как Икар,      Закрыт нам путь проверенных орбит!  
Плащом ветров и пламенем одеты.

Последняя строка первого сонета становится первой строкой второго сонета

2

Закрыт нам путь проверенных орбит,  
Нарушен лад молитвенного строя...

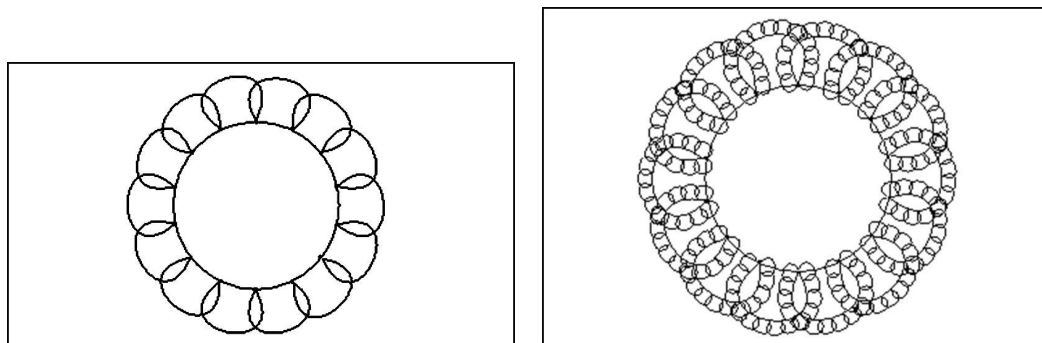


Рис. 11. Схема венка сонетов (а) и короны сонетов (б) на основе схемы Л.Г. Портера [22]

Земным богам земные храмы строя,  
Нас жрец земли земле не причастит.

Поэты серебряного века пытались усложнить эту структуру – создать венок венка сонетов. Так, чтобы каждый сонет из венка сонетов был магистральным для своего, второго порядка, венка сонетов, а все  $14 \cdot 14 + 14 + 1 = 211$  сонетов образуют венок венков сонетов (рис. 11, б). Эта конструкция настолько сложна, что она не имеет однозначного названия – различные исследователи именуют ее и венком в квадрате, и кружевом, и короной сонетов. На ней уже явно видна фрактальная природа такого цикла.

«Создать венок венков сонетов – чрезвычайно трудная задача. В. Шкловский выражал сомнение, что она может быть проведена без риска для психики автора. Однако таким стихотворным циклом нельзя отказать в наличии завораживающей красоты, настоятельно требующей полного в нее погружения и не дающего пустых обещаний относительно возвращения в реальный мир» [17].

В прозаическом тексте фрактальность на структурном уровне осуществляется благодаря использованию приема «текст в тексте»: «рассказа в рассказе», как в «Сказках тысячи и одной ночи», «пьесы в пьесе», как в «Гамлете» Шекспира, где заезжие актеры по просьбе Гамлета разыгрывают перед двором сцену, которая дублирует ключевые события оригинальной пьесы – убийство короля и брак цареубийцы с королевой; «романа в романе», как в «Мастере и Маргарите».

Писатели XX века неоднократно обращаются к данной структуре (ее называют «тексты-матрешки»), осмысляя ее как «систему зеркал», порождающую бесконечный смысл. К приведенным в статье Бонч-Осмоловской [17] примерам можем добавить следующие.

В романе В. Набокова «Дар» вставлены произведения главного героя – писателя Годунова-Чердынцева: его ранние стихи, задуманный, но так и недописанный роман об отце, его жизнеописание Чернышевского, а в финале сам роман «Дар», как образно выразился исследователь творчества Набокова Сергей Давыдов, «замыкается в ленту Мебиуса» и оказывается будущим произведением своего героя-писателя. В отличие от традиционного «удвоения смысла», как в «Гамлете», здесь самоподобие, «тексты-матрешки» не только акцентируют внимание читателя на важных моментах конфликта, но и выполняют автореферентную функцию – они обнажают приемы поэтики, которые лежат в основе самого романа «Дар».

Здесь возникает визуальная аналогия: гравюра еще одного современника Набокова – Мориса Эшера «Бельведер» (рис. 12). Художник обнажает условность традиционной перспективы: основания и капители колонн принадлежат разным сторонам здания. Внизу сидит человек в колпаке и конструирует куб, имеющий подобную структуру. И конструирует он его по чертежу, лежащему перед ним.

Бесконечную систему зеркал, порождаемую «текстами-матрешками», описывает и Юрий Трифонов в романе «Время и место». Там главный герой, писатель Антипов пишет роман «Синдром Никифорова» – «не просто роман о писателе, а роман о писателе, пишущем роман о писателе, <...> который тоже пишет роман о писателе, который, в свою очередь, что-то пишет о писателе, сочиняющем что-то вроде романа или эссе о полузабытом авторе начала девятнадцатого века...» [23, с. 324]. Мы видим, что количество итераций здесь увеличивается, но они, к сожалению, только описаны, а не воссозданы структурно. В этом случае мы имеем дело с семантическими фракталами.

Т. Бонч-Осмоловская справедливо отмечает, что своеобразным «текстом в тексте», текстом принципиально другой природы становится сон, вставленный в роман или поэму. («Сон во сне» Эдгара По, «Светлана» Жуковского», «Мастер и Маргарита» Булгакова...). В ряде случаев количество итераций увеличивается. Как пример, вспомним «Голема» Густава Майринка: «Когда люди поднимаются с ложа сна, они воображают, что они развеяли сон, и не знают, что становятся жертвой своих чувств, что делается добычей нового сна, более глубокого, чем тот, из которого они только что вышли» [24, с. 29]. Самоподобие и автореференцию мы видим не только в модернистских и постмодернистских текстах, но и в классических произведениях – например, в известном стихотворении Лермонтова «Сон» («В полдневный жар в долине Дагестана...») [25, с. 333].



Рис. 12. Морис Эшер. Бельведер (1958) и увеличенный фрагмент картины (см. [7])

В полдневный жар в долине Дагестана      И снился мне сияющий огнями

С свинцом в груди лежал недвижим я;      Вечерний пир в родимой стороне.  
Глубокая ещё дымилась рана,      Меж юных жён, увенчанных цветами,  
По капле кровь точилась моя.      Шёл разговор весёлый обо мне.

Лежал один я на песке долины;      Но в разговор весёлый не вступая,  
Уступы скал теснились кругом,      Сидела там задумчиво одна,  
И солнце жгло их жёлтые вершины      И в грустный сон душа её младая  
И жгло меня, но спал я мёртвым сном.      Бог знает чем была погружена;

И снилась ей долина Дагестана;  
Знакомый труп лежал в долине той;  
В его груди, дымясь, чернела рана,  
И кровь лилась хладеющей струёй.

Герой, получив смертельное ранение, погружается в сон, в котором видит любимую девушку, видящую сон о нем... Владимир Набоков, в предисловии к «Герою нашего времени», переведенного им на английский язык, провел параллель между запутанной композицией романа Лермонтова и этим стихотворением, назвав «В полдневный жар в долине Дагестана...» «Тройным сном»: «Некто (Лермонтов или, точнее, его лирический герой) видит во сне, будто он умирает в долине у восточных отрогов Кавказских гор. Это Сон 1, который снится Первому Лицу. Смертельно раненному человеку (Второму Лицу) снится в свою очередь молодая женщина, сидящая на пиру в петербургском, не то в московском особняке. Это Сон 2 внутри Сна 1.

Молодой женщине, сидящей на пиру, снится Второе Лицо (этот человек умирает в конце стихотворения), лежащее в долине далекого Дагестана. Это Сон 3 внутри Сна 2 внутри Сна 1, который, сделав замкнутую спираль, возвращает нас к начальной строфе.

Витки пяти этих четверостиший сродни переплетению пяти рассказов, составивших роман Лермонтова «Герой нашего времени»... Известный лингвист и семиотик Ю.С. Степанов в монографии «Протей: Очерки хаотической эволюции» [26] пишет, что фрактальная структура «Сна» Лермонтова не просто усложнение формы – это порождение тонко выстроенного смысла, особенно если рассматривать данный текст в проекции на трагическую биографию самого Лермонтова. В отношении искусства, по мнению исследователя, фракталы характеризуются не только «Симметрией, Динамикой, Красотой», они обладают «одухотворенной законосообразностью»: «Фракталы открывают нам, что она – есть. Так, я думаю, можно назвать это – ранее неназванное – свойство фракталов. Фракталы – это одухотворенные формы...

В. Кандинский обратил внимание мыслящих и видящих людей, художников прежде всего, на то, что абстрактные формы – треугольник, ромб, круг, квадрат и бесчисленное множество других, это существа в царстве форм (гл. II, разд. 5). Теперь к ним нужно присоединить существа высшего рода – фракталы. Фракталы – одухотворенные формы» [26, с. 217].

На наш взгляд, фрактальная структура художественного текста побуждает читателя задуматься над проблемой, насколько мы можем постичь окружающую нас реальность, ставит вопрос о неизбежном субъективизме ее восприятия. Подобно тому, как Мандельброт писал об относительности топологической размерности клубка ниток, которая меняется в зависимости от точки зрения мухи (от 0 до 3) [4, с. 188], писатели показывают относительность нашего постижения реальности. Владимир Набоков говорил в одном из интервью: «Реальность – очень субъективная штука. Я могу определить её только как некое постепенное накопление информации и как специализацию. Рассмотрим, к примеру, лилию или любой другой естественный объект: лилия более реальна для натуралиста, чем для обычного человека, но она еще более реальна для ботаника. Еще одна ступень реальности достигается ботаником, специализирующимся на лилиях. Вы можете, так сказать, подбираться к реальности всё ближе и

ближе; но никогда не подойдете достаточно близко, так как реальность – бесконечная последовательность шагов, уровней восприятия, ложных дниц, а потому она неутолима, недостижима. Вы можете узнавать о предмете всё больше и больше, но никогда не узнаете о нём всего: это безнадежно. Так мы и живем, окруженные более или менее прозрачными объектами» [27, с. 118].

Открытия фрактальной геометрии достаточно широко проецируются на гуманитарные науки. В. Тарасенко выпустил монографии «Фрактальная логика» [28] и «Фрактальная семиотика» [29]. В частности, автор проводит параллель между «математическими монстрами» и логическими парадоксами, известными со времен античных мыслителей (например, «Я лгу») или специально смоделированными фразами (вспомним фразу, приводимую Д. Хофштадтером в монографии «Гедель, Эшер, Бах», которую можно считать своеобразным аналогом масштабного преобразования: «БОГ, одолевающий гения», где слово «БОГ» – сокращение слов «БОГ», «Одолевающий», «Гения», таким образом, при последовательной расшифровке сокращений получается бесконечно разворачивающаяся последовательность суждений, в которых слово «БОГ» оказывается бесконечным сокращением самого себя. [28, с. 100–101]). Общим свойством логических парадоксов и фрактальных множеств является, по мнению автора, автореферентность, которая обуславливает бесконечность процесса преобразований [28, с. 69].

В книге «Фрактальная семиотика» В. Тарасенко предлагает отказаться от традиционного понимания знака, переосмыслить акт коммуникации в языке и культуре в свете открытий фрактальной геометрии: «Впервые со времен Ньютона, фрактальная динамика формирует принципиально новые способы описания природных, коммуникативных и мыслительных процессов, новый взгляд на онтологию процесса как такового» [29, с. 55]. Фрактал определяется автором как «процессуальный язык» [29, с. 30]. Основным фактором для новой интерпретации становится «фрактальная машина обратной связи», то есть автореференция.

И в заключение великолепный розыгрыш Ю.А. Даниловым редколлегии одного издания, в редакцию которого пришло письмо от ученика физико-математической школы Пети Васечкина о новой интерпретации сказки «Новое платье короля». Пете в школе замечательный учитель рассказывал о фракталах, и талантливый мальчик неожиданно понял, что события, изложенные Андерсеном, могут быть истолкованы совершенно иначе. Представьте себе, что в город, где жил король-щеголь, прибыли два искуснейших мастера, умевших вышивать по тончайшей ткани прекрасные фрактальные узоры. Ткань была тончайшая, узоры едва видимые, и у неискушенного наблюдателя вполне могло создаться впечатление, что нет ни ткани, ни узоров. А поскольку линии узоров имели бесконечную длину (ведь узоры были фрактальными), ясно, что никакого запаса шелка и золота в королевстве не могло хватить. Но не станешь же объяснять свою правоту всем профанам! Вот мастерам и пришлось попросту дать деру. Народ действительно видел сквозь тонкую ткань голого короля, потому что ничего не знал о фракталах. И со страху молчал. А мальчик, во всеуслышание заявивший, что король голый, тоже не подозревал о фракталах. Но он крикнул, потому что был смелый. «Мне кажется, что именно Андерсена мы должны считать первым человеком, осознавшим феномен фракталов, хоть это слово и придумал значительно позднее Бенуа Мандельброт.

Дорогая редакция! Как, по-вашему, имеет ли право на существование моя интерпретация? Жду ответа, как соловей лета. Петя Васечкин» [30].

Редколлегия, конечно, угадала в Пете Васечкине Юлия Александровича Данилова и откликнулась добрыми словами в его адрес, в которых главной была фраза: «Только Юлий Александрович Данилов знает все про фракталы».

Завершая разговор об эстетической привлекательности и универсальности язы-

ка фракталов, вспомним и о предостережении, которым завершил свое эссе «Фрактальность» Ю.А. Данилов.

«С появлением фракталов со всей очевидностью стала ясна ограниченность описания природы с помощью гладких кривых, поверхностей и гиперповерхностей. Окружающий нас мир гораздо разнообразнее, и в нем оказалось немало объектов, допускающих фрактальное описание и не укладывающихся в жесткие рамки евклидовых линий и поверхностей.

Не следует забывать, однако, о том, что и фракталы – не более чем упрощенная модель реальности, применимая к достаточно широкому, но всё же ограниченному кругу предметов и явлений, и не претендует и не может претендовать на роль своеобразного универсального ключа к описанию природы. Как сказал Дж. Б. С. Холдейн, «мир устроен не только причудливей, чем мы думаем, но и причудливей, чем мы можем предполагать» [1, с. 190].

### Библиографический список

1. Данилов Ю.А. Прекрасный мир науки. Сб. статей памяти Ю.А. Данилова / Под ред. В.И. Санюка, Д.И. Трубецкова. М.: Прогресс-Традиция, 2008. 384 с.
2. Арт-фрактал. Сб. статей / Пер. с англ., фр. Е.В. Николаевой. СПб.: Страта, 2015. 156 с.
3. Деменок С. Суперфрактал. СПб.: Страта, 2015. 191 с.
4. Мандельброт Б. Фрактальная геометрия природы. М.: Институт компьютерных исследований, 2002. 656 с.
5. Абрахам Р. Хаос и фракталы Парижа // Арт-фрактал. Сб. статей / Пер. с англ., фр. Е.В. Николаевой. СПб.: Страта, 2015. С. 71–77.
6. Коцич Л. Художественные элементы фрактальных конструкций // Арт-фрактал. Сб. статей / Пер. с англ., фр. Е.В. Николаевой. СПб.: Страта, 2015. С. 78–97.
7. The World of M.C. Escher / Ed. J.L. Locher. N.Y.: Abradale Press. 1988.
8. Тэйлор Р.П. Искусный хаос // В мире науки. 2003. № 4. С. 70–75.
9. Тэйлор Р.П., Миколич А.П., Джонас Д. Фрактальный анализ живописи Поллока // Арт-фрактал. СПб.: Страта, 2015. 156 с.
10. Тэйлор Р.П., Миколич А.П., Джонас Д. Фрактальный экспрессионизм. Может ли наука помочь в понимании искусства? // Арт-фрактал. СПб.: Страта, 2015. С. 99–107.
11. Taylor R.P. Splashdown // New Scientist. 1998. Vo 1.159. P. 30–31;
12. Trinton D. Ordered and Chaotic Motion of a Forced Spherical Pendulum // European Journal of Physics. 1986. N7. P. 162.
13. Пайтген Х.О., Рихтер П.Х. Красота фракталов. Образы комплексных динамических систем. М.: Мир, 1993. 176 с.
14. Айленбергер Г. Свобода, наука и эстетика // Красота фракталов. Образы комплексных динамических систем. М.: Мир, 1993. С. 155–160.
15. Франке Г.В. Преломление науки в искусстве // Красота фракталов. Образы комплексных динамических систем. М.: Мир, 1993. С. 161–167.
16. Манифест фракталистов: Сб. статей / Пер., сост. Е. Николаева. СПб.: Страта, 2016.
17. Бонч-Осмоловская Т. Фракталы в литературе. [Электронный ресурс]. Режим доступа: <http://www.ashtray.ru/main/texts/experlit/fractallit3.htm>
18. Борхес Х.Л. Соч. в 3 т. Т.1. М.: Издат. группа «Полярис», 1994.
19. Набоков В. Дар // Набоков В. Собр. соч. в 4 т. Т.3. М.: «Правда».
20. Маршак С. Дом, который построил Джек. М.: Детская литература, 1986. 52 с.
21. Волошин М. Собр. соч. в 10 т. Т. 1. М.: Эллис Лак. 2003.

22. *Портер Л.Г.* Симметрия – владычица стихов: Очерк начал общей теории поэтических структур. М.: Языки славянской культуры, 2003.
23. *Трифонов Ю.* Исчезновение. Время и место. Старик. М.: Современник. 1989.
24. *Майринк Г.* Голем. СПб.: Азбука-классика. 2004.
25. *Лермонтов М.Ю.* Собр. соч. в 4 т. Т. 1. М.: Правда, 1969.
26. *Степанов Ю.С.* Протей: Очерки хаотической эволюции: Языки славянской культуры. М., 2004. 264 с.
27. Набоков о Набокове и прочем: Интервью, рецензии, эссе / Ред.-составитель Н. Мельников. М.: Независимая газета, 2002. С. 117–128.
28. *Тарасенко В.Г.* Фрактальная логика. М.: Прогресс-Традиция, 2002. 155 с.
29. *Тарасенко В.Г.* Фрактальная семиотика: «Слепые пятна», перипетии и узнавания. М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2012. 312 с.
30. Госпожа Удача. 1999. № 3. С. 9.

## References

1. *Danilov Yu.A.* A Wonderful world of science. Coll. of articles dedicated to the memory of Yu.A. Danilov. Eds V.I. Sanyuk, D.I. Trubetskov. M.: Progress-Tradition, 2008. 384 p. (in Russian).
2. Art-fractal. Coll. articles. S-Pb: Strata, 2015. 156 p. (in Russian).
3. *Demnok S.* Superfraktal. S-Pb.: Strata. 2015. 191 p. (in Russian).
4. *Mandelbrot B.* The Fractal Geometry of Nature. Henry Holt and Company, 1982. 468 p.
5. *Abraham R.* Chaos and Fractals of Paris. In: Art-fractal. Coll. articles. S-Pb: Strata, 2015. P. 71–77. (in Russian).
6. *Kocich L.* Aartistic Elements of Fractal Structures. In: Art-fractal. Coll. articles. S-Pb: Strata, 2015. P. 78–97. (in Russian).
7. The World of M.C. Escher. Ed. J.L. Locher. N.Y.: Abradale Press. 1988.
8. *Taylor R.P.* Skillful chaos. Scientific American. 2003. N4. P. 70–75.
9. *Taylor R.P., Micolich A.P., Jonas D.* Fractal analysis of Pollock’s drip paintings. Nature. 1999. N 399.
10. *Taylor R.P., Micolich A.P., Jonas D.* Fractal Expressionism. Can Science be Used to Further our Understanding of Art? Physics World. 1999. N12. P. 25–28.
11. *Taylor R.P.* Splashdown. New Scientist. 1998. Vol. 159. P. 30–31.
12. *Trinton D.* Ordered and Chaotic Motion of a Forced Spherical Pendulum. European Journal of Physics. 1986. N7. P. 162.
13. *Peitgen P.O., Richter P.H.* The Beauty of Fractals: Images of Complex Dynamical Systems. Springer-Verlag. 1986.
14. *Eilenberger V.* Freedom, Science and Aesthetics. In: Peitgen P.O., Richter P.H. The Beauty of Fractals: Images of Complex Dynamical Systems. Springer-Verlag. 1986. P. 175–180
15. *Franke H.V.* Refractions of Science into Art. In: Peitgen P.O., Richter P.H. The Beauty of Fractals: Images of Complex Dynamical Systems. Springer-Verlag. 1986. P. 181–187.
16. Fractal Art Manifest. Coll. articles. S-Pb: Strata, 2015. 156 p. (in Russian).
17. *Bonch-Osmolovskaya T.V.* Fractals in literature. <http://www.ashtray.ru/main/texts/expertlit/fractallit3.htm> (in Russian).



18. *Borges J.L.* The Circular Ruins. In: *Borges J.L.* The Circular Ruins. Labyrinths: Selected Stories and Other Writings. New Directions. 1964. P. 45–50.
19. *Nabokov V.* The Gift .Vintage international, 1991. 344 p.
20. *Marshak S.* The House That Jack Built. M.: Detskaya Literatura. 1986. 52 p. (in Russian).
21. *Voloshin M.* Collected works in 10 v. V. 1. M.: Ellis Luck, 2003. (in Russian).
22. *Porter L.G.* Symmetry – Mistress of Poetry: an Essay on Beginning of General Theory of Poetic Structures. M.: Languages of Slavonic culture, 2003. (in Russian).
23. *Trifonov Yu'.* The Disappearance. Time and place. The Old Man. M.: Contemporary. 1989. (in Russian).
24. *Meyrink G.* The Golem. SPb.: Azbuka-klassica. 2004. (in Russian).
25. *Lermontov M.* Collected works in 10 v. Vol. 1. M.: Pravda, 1969. (in Russian).
26. *Stepanov Yu.* Proteus: Essays on chaotic evolution. M.: Languages of Slavic culture, 2004. (in Russian).
27. Nabokov about Nabokov and other things: Interviews, reviews, essays. Composed and commented by N. Melnikov. M.: Independent newspaper, 2002. P. 117–128. (in Russian).
28. *Tarasenko V.* Fractal logic. M.: Progress-Tradition, 2002. 155 p.(in Russian).
29. *Tarasenko V.* Fractal semiotics: «Blind Spots», Vicissitudes and Recognition. M.: Book House «LIBROKOM», 2012. 312 p. (in Russian).
30. *Gospozha Udacha (Lady Luck).* 1999. № 3. (in Russian).

*Поступила в редакцию 10.11.2016*

*Трубецков Дмитрий Иванович* – родился в Саратове (1938). Окончил физический факультет Саратовского государственного университета (1960). Защитил диссертации на соискание ученой степени кандидата (1965) и доктора физико-математических наук в СГУ (1978) в области радиофизики. Заведующий кафедрой электроники, колебаний и волн факультета нелинейных процессов СГУ, профессор кафедры прикладной математики НИЯУ МИФИ, член-корреспондент Российской академии наук, заслуженный деятель науки РФ, лауреат премии Президента РФ в области образования. Научный руководитель Лицея прикладных наук и факультета нелинейных процессов СГУ. Область научных интересов: вакуумная электроника и микроэлектроника сверхвысоких частот, теория колебаний и волн, нелинейная динамика, история науки. Автор более двадцати учебных пособий и монографий, а также более двухсот статей в периодической печати.



410012 Саратов, ул. Астраханская, 83  
 Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского  
 115409 Москва, Каширское шоссе, 31  
 Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ»  
 E-mail: dtrubetskov@yahoo.com

*Трубецкова Елена Геннадиевна* – родилась в Саратове (1973). Окончила Саратовский государственный университет (1995). Защитила кандидатскую диссертацию «“Текст в тексте” в русском романе 1930-х годов» (1998). Работает доцентом кафедры русской и зарубежной литературы Института филологии и журналистики Саратовского университета. Автор более 50 статей по истории романа XX века, творчеству В. Набокова, М. Булгакова, С. Кржижановского, М. Алданова, по смене научных и культурных парадигм.



410012 Саратов, Астраханская, 83  
 Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского  
 E-mail: etrubetskova@gmail.com