

*Журнал включен в «Перечень периодических научных и научно-технических изданий РФ,
рекомендованных для публикации основных результатов диссертаций
на соискание ученой степени доктора наук»*

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Известия высших учебных заведений

ПРИКЛАДНАЯ НЕЛИНЕЙНАЯ ДИНАМИКА

научно-технический журнал

издается с 1993 года

Выходит 6 раз в год

Том 26, № 4, 2018, Саратов

СО Д Е Р Ж А Н И Е

К 80-летию профессора Д.И. Трубецкого

От редактора. <i>Кузнецов С. П.</i>	3
ОБЗОРЫ АКТУАЛЬНЫХ ПРОБЛЕМ НЕЛИНЕЙНОЙ ДИНАМИКИ	
<i>Дмитричев А. С., Касаткин Д. В., Клиньшов В. В., Кириллов С. Ю., Масленников О. В., Щапин Д. С., Некоркин В. И.</i> Нелинейные динамические модели нейронов: Обзор	5
НОВОЕ В ПРИКЛАДНОЙ ФИЗИКЕ	
<i>Дмитриев А. С., Мохсени Т. И., Сьерра-Теран К. М.</i> Сверх- и гиперширокополосная относительная передача информации на основе хаотических радиоимпульсов	59
ПРИКЛАДНЫЕ ЗАДАЧИ НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ КОЛЕБАНИЙ И ВОЛН	
<i>Вакуленко Н. В., Серых И. В., Сонечкин Д. М.</i> Хаос и порядок в атмосферной динамике. Часть 3. Предсказуемость Эль-Ниньо	75
НЕЛИНЕЙНАЯ ДИНАМИКА В ЛИЦАХ. ИСТОРИЯ	
<i>Мухин Р. Р.</i> Наследие Александра Михайловича Ляпунова и нелинейная динамика	95

C O N T E N T S

To the 80th Birthday of professor D.I. Trubetskov

Editorial. <i>Kuznetsov S. P.</i>	3
REVIEWS OF ACTUAL PROBLEMS OF NONLINEAR DYNAMICS	
<i>Dmitrichev A. S., Kasatkin D. V., Klinshov V. V., Kirillov S. Yu., Maslennikov O. V., Shchapin D. S., Nekorkin V. I.</i> Nonlinear dynamical models of neurons: Review	5
INNOVATIONS IN APPLIED PHYSICS	
<i>Dmitriev A.S., Mokhseni T.I., Sierra-Teran C.M.</i> Differentially coherent information transmission based on chaotic radio pulses	59
APPLIED PROBLEMS OF NONLINEAR OSCILLATION AND WAVE THEORY	
<i>Vakulenko N.V., Serykh I.V., Sonechkin D.M.</i> Chaos and order in atmospheric dynamics. Part 3. Predictability of El Niño	75
HISTORY OF NONLINEAR DYNAMICS. PERSONALIA	
<i>Mukhin R.R.</i> Legacy of Alexander Mikhailovich Lyapunov and nonlinear dynamics	95

От редактора выпуска

В этом году мы отметили юбилей Дмитрия Ивановича Трубецкого, члена-корреспондента РАН, профессора, ведущего ученого Саратовского государственного университета, одного из главных инициаторов издания нашего журнала. Настоящий выпуск продолжает публикацию работ, посвященных этому юбилею. Авторы и редакция постарались, чтобы тематика статей отражала широкие и многогранные научные интересы Дмитрия Ивановича.

Выпуск открывает статья «Нелинейные динамические модели нейронов» группы авторов, представляющих Нижегородскую научную школу. Статья является обзором моделей, лежащих в основе нейродинамики. Это одно из главных современных научных направлений, которое нацелено на описание, понимание, использование процессов в естественных нейросистемах (мозг человека и животных) и их технических аналогах. Нижегородская группа, возглавляемая профессором В.И. Некоркиным, по праву считается одним из ведущих исследовательских коллективов, работающих в рамках этого направления. Авторы начинают с популярного описания физико-химических основ процессов в естественных нейросистемах, а затем переходят к рассмотрению предложенных за последние полвека модельных уравнений, описывающих с той или иной степенью полноты динамику нейронов. Это модели Ходжкина–Хаксли, Моррис–Лекара, ФитцХью–Нагумо, Хиндмарша–Роуза и другие. Обзор является прекрасным введением в нейродинамику и будет полезен как исследователям, желающим расширить область научных интересов и получить представление об одном из самых обещающих направлений развития нелинейной динамики, так и студентам и аспирантам, начинающим свое знакомство с современной наукой.

Статья Д.М. Сонечкина с соавторами представляет собой продолжение цикла работ, посвящённых проблеме хаотической и регулярной динамики процессов в атмосфере Земли. Конкретная направленность данной статьи – рассмотрение связи между временными вариациями глобальных атмосферных процессов, подверженных влиянию процесса Эль-Ниньо, как принято обозначать колебания температуры поверхностного слоя воды в экваториальной части Тихого океана. Рассматривается влияние внешних воздействий с несоизмеримыми друг с другом периодами применительно к материалам более чем 100-летних наблюдений, для чего привлекаются современные методы обработки данных (вейвлет-преобразования и специально разработанная авторами техника анализа кросскорреляций временных рядов).

Статья «Сверх- и гиперширокополосная относительная передача информации на основе хаотических радиоимпульсов» подана в юбилейный выпуск группой исследователей, представляющей Институт радиотехники и электроники имени В.А. Котельникова РАН и Московский физико-технический институт. Статья посвящена еще одному перспективному и вызывающему большой интерес направлению нелинейной динамики, а именно, разработке ее в прикладном аспекте применительно к информационно-коммуникационным задачам. В последнее время становятся актуальными всё новые аспекты этой проблематики, например, обеспечение высокоскоростных средств связи для компьютерных сетей, Интернета вещей, робототехники,

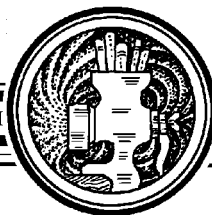
которые отличались бы низким энергопотреблением, помехоустойчивостью, взаимной совместимостью. Группа, возглавляемая профессором А.С. Дмитриевым, является признанным лидером в разработке новых подходов к решению этих проблем на основе широкополосных хаотических сигналов. Публикуемая статья содержит подробное рассмотрение одного из вариантов так называемой прямохаотической схемы относительной передачи. Схема используется в качестве носителя информации хаотические радиоимпульсы и представляется пригодной для создания сверхширокополосных средств беспроводной связи.

Завершает выпуск статья профессора Р.Р. Мухина, известного своими статьями и книгами в области истории нелинейной динамики и хаоса. Публикуемая в настоящем выпуске статья посвящена научному наследию Александра Михайловича Ляпунова – выдающегося русского математика. Любому, кто хотя бы немного знаком с нелинейной динамикой, известна та центральная роль, которую играют показатели Ляпунова, без упоминания которых не обходится ни одна научная работа в этой науке. Статья Р.Р. Мухина содержит обширный материал о деятельности А.М. Ляпунова и представляет несомненную ценность для читателей журнала, интересующихся историей науки.

Мы надеемся, что этот выпуск журнала, продолжающий серию публикаций, посвященных юбилею Д.И. Трубецкого, будет интересен как самому юбиляру, так и широкому кругу наших читателей.

Профессор, доктор
физико-математических наук

С.П. Кузнецов



УДК 621.373.1

Нелинейные динамические модели нейронов: Обзор

*А. С. Дмитричев, Д. В. Касаткин, В. В. Клиньшов, С. Ю. Кириллов,
О. В. Масленников, Д. С. Щапин, В. И. Некоркин*

Институт прикладной физики РАН

Россия, 603950 Нижний Новгород, БОКС-120, Ульянова, 46

E-mail: admity@neuron.appl.sci.nnov.ru, kasatkin@appl.sci.nnov.ru, vladimir.klinshov@gmail.com,
skirillov@ipfran.ru, olmaov@ipfran.ru, shapinds@mail.ru, vnekorkin@neuron.appl.sci.nnov.ru

Поступила в редакцию 01.06.2018, принята к публикации 28.06.2018

Тема исследования. Представлен обзор основных динамических моделей нейронной активности и обсуждаются индивидуальные особенности их поведения, которые могут быть в последующем использованы как основа при разработке и построении различных конфигураций нейронных сетей. Работа содержит как новые оригинальные результаты, так и обобщение уже известных, опубликованных ранее в разных журналах. **Цель** – познакомить читателя с базовыми динамическими свойствами нейронов, такими как наличие состояния покоя и генерация потенциала действия; сформировать у него общее представление о динамических механизмах, лежащих в основе отмеченных свойств и используемых при построении моделей нейронной активности различного уровня детализации. **Исследуемые модели.** С математической точки зрения модели нейронов делятся на два класса. Первый класс представлен моделями с непрерывным временем в форме систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Моделям этого класса посвящена вторая часть данного обзора. Открывает эту часть наиболее детализированная модель Ходжкина–Хаксли, являющаяся канонической моделью нейронной активности в нелинейной динамике. Затем приводятся упрощенные модели – двумерная модель Моррис–Лекара для спайкинга и трехмерная модель Хиндмарша–Роуза для бёрстинга. Наиболее подробно описана модель ФитцХью–Нагумо, для которой проведен детальный бифуркационный анализ. Также приведены модели, описывающие нейроны со специфическими свойствами – модель нейрона с постдеполяризацией и модель нейрона нижних олив. Завершает эту часть наиболее простая модель типа «накопление–сброс». Второй класс образуют модели с дискретным временем, представляющие собой точечные отображения. Такие модели в последнее время приобретают все большую популярность в виду богатства демонстрируемых динамических режимов и простоты численного моделирования. Моделям этого класса посвящена третья часть данного обзора. В частности, приведены такие модели как модель Киалво, модель Ижикевича, модель Рутькова и модель Курбажа–Некоркина. **Результаты.** Изложены базовые физические принципы построения математических моделей нейронной активности, основанные на ионном транспорте. На примере модели ФитцХью–Нагумо изучены основные свойства и механизмы возникновения режимов мультипорогового возбуждения в нейронах. Раскрыт механизм формирования бёрстовых колебаний в модели Хиндмарша–Роуза. Описан динамический механизм временного понижения порога возбуждения и возникновения периодических колебаний в модели нейрона с постдеполяризацией. Описано формирование в нейронах нижних олив (Ca²⁺)- и (Na²⁺)-зависимых спайков. Описаны динамические механизмы

формирования основных регулярных и хаотических режимов нейронной активности в дискретных моделях Киалво, Ижикевича, Рутькова и Курбажа–Некоркина. **Обсуждение.** В Заключении кратко резюмируется содержание обзора.

Ключевые слова: динамические системы, нейроны, бифуркации.

<https://doi.org/10.18500/0869-6632-2018-26-4-5-58>

Образец цитирования: Дмитричев А.С., Касаткин Д.В., Клиньшов В.В., Кириллов С.Ю., Масленников О.В., Щапин Д.С., Некоркин В.И. Нелинейные динамические модели нейронов // Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2018. Т. 26, № 4. С. 5–58. <https://doi.org/10.18500/0869-6632-2018-226-4-5-58>

Nonlinear dynamical models of neurons: Review

*A. S. Dmitrichev, D. V. Kasatkin, V. V. Klinshov, S. Yu. Kirillov,
O. V. Maslennikov, D. S. Shchapin, V. I. Nekorkin*

Institute of Applied Physics of RAS

46, Ul'yanov st., 603950 Nizhny Novgorod, Russia

E-mail: admitry@neuron.appl.sci-nnov.ru, kasatkin@appl.sci-nnov.ru, vladimir.klinshov@gmail.com,
skirillov@ipfran.ru, olmaov@ipfran.ru, shapinds@mail.ru, vnekorkin@neuron.appl.sci-nnov.ru

Received 01.06.2018, accepted for publication 28.06.2018

Topic. A review of the basic dynamical models of neural activity is presented and individual features of their behavior are discussed, which can be used as a basis for the subsequent development and construction of various configurations of neural networks. The work contains both new original results and generalization of already known ones published earlier in different journals. **Aim** is to familiarize the reader with the basic dynamical properties of neurons, such as the existence of a rest state and the generation of the action potential; to outline the dynamical mechanisms underlying these properties which are used in the development of neural models with various levels of detailing. **Investigated models.** From the mathematical point of view, neuron models are divided into two classes. The first class is represented by models with continuous time described by ordinary differential equations. The section devoted to continuous-time models starts from the most detailed Hodgkin–Huxley model, which is a canonical model for neural activity in nonlinear dynamics. Further we describe simplified models, such as a two-dimensional model of Morris–Lecar for spiking and a three-dimensional model of Hindmarsh–Rose for bursting. The FitzHugh–Nagumo model is described in detail, and detailed bifurcation analysis is presented. We also present models for neurons with specific properties, namely a neuron with afterdepolarization and an inferior olives neuron. The last and the simplest model is the «integrate–fire» model. The second class of neural models are systems with discrete time represented by discrete maps. Such models have recently gained increasing popularity due to the richness of the demonstrated dynamics and the ease of numerical simulations. We describe such models as the Chialvo model, the Izhikevich model, the Rulkov model, and the Courbage–Nekorkin model. **Results.** The basic physical principles underlying the construction of mathematical models of neural activity, based on ion transport, are outlined. Using the FitzHugh–Nagumo model as an example, the main properties and mechanisms of the emergence of multithreshold excitation regimes in neurons are described. The mechanism of formation of burst oscillations in the Hindmarsh–Rose model is outlined. A dynamic mechanism for temporal decline of the excitation threshold and the emergence of periodic oscillations in a neuron with afterdepolarization are described. The formation of (Ca²⁺)- and (Na²⁺)-dependent spikes in inferior olive neurons is described. Dynamic mechanisms of formation of the major regular and chaotic regimes of neural activity in discrete models of Chialvo, Izhikevich, Rulkov and Courbage–Nekorkin are described. **Discussion.** In the Conclusion we briefly summarize the content of the survey.

*A.С. Дмитричев, Д.В. Касаткин, В.В. Клиньшов, С.Ю. Кириллов,
О.В. Масленников, Д.С. Щапин, В.И. Некоркин*
Изв. вузов «ПНД», т. 26, № 4, 2018

Keywords: dynamical systems, neurons, bifurcations.

<https://doi.org/10.18500/0869-6632-2018-26-4-5-58>

References: Dmitrichev A.S., Kasatkin D.V., Klinshov V.V., Kirillov S.Yu., Maslennikov O.V., Shchapin D.S., Nekorkin V.I. Nonlinear dynamical models of neurons. *Izvestiya VUZ, Applied Nonlinear Dynamics*, 2018, vol. 26, iss. 4, pp. 5–58. <https://doi.org/10.18500/0869-6632-2018-26-4-5-58>

Введение

Нейроны (или нервные клетки) являются основными структурными и функциональными единицами нервной системы. Как и любая биологическая клетка, нейрон представляет собой клеточное тело размером порядка 10–100 μm , ограниченное снаружи мембраной – непроницаемым двойным слоем липидов. Отличительным свойством мембраны нервных клеток является наличие разности электрических потенциалов между внутренней и наружной поверхностями. Эта разность, называемая мембранным потенциалом, имеет в состоянии покоя некоторое постоянное отрицательное значение и может изменяться во времени. Генерируемые мембраной электрические импульсы служат для кодирования и передачи информации в нейронных сетях. Передача между нейронами электрических сигналов связана с их распространением по специальным отросткам, отходящим от тела клетки в виде тонких трубчатых волокон. Известно два вида таких отростков – аксон и дендриты. Аксон – длинный отросток, предназначенный для передачи электрических сигналов от тела нейрона к другим клеткам. Дендриты – обычно более короткие, разветвленные отростки, через которые на нейрон поступают входящие сигналы. Аксон заканчивается многочисленными терминальными волокнами, которые могут контактировать с дендритами, аксоном или телом другого нейрона. Этот контакт осуществляют специальные устройства – синапсы (рис. 1). Синапс состоит из двух мембран (пресинаптической и постсинаптической) контактирующих нейронов. Основными видами синапсов являются так называемые химические и электрические синапсы. В электрическом синапсе расстояние между мембранами пресинаптического и постсинаптического нейронов составляет порядка 2–4 nm, а их взаимодействие осуществляется с помощью особых белковых образований. Совершенно иначе происходит контакт между нейронами в случае химического синапса. Мембраны взаимодействующих нейронов в этом случае удалены друг от друга на расстояние порядка 20–40 nm и образуют так называемую синаптическую щель. Когда электрический сигнал достигает пресинаптического окончания из его мембраны высвобождается особое вещество – нейромедиатор. Нейромедиатор поступает в синаптическую щель, пройдя которую начинает действовать на рецепторы постсинаптической мембраны, изменяя её потенциал, и тем самым осуществляет связь между нейронами. Синапсы различаются как по типу используемого нейромедиатора, так и по функциональным свойствам. Если под действием нейромедиатора мембранный потенциал постсинаптического нейрона приближается к порогу, то есть происходит деполяризация его мембраны, то синапс называется возбуждающим. В противном случае, когда мембранный потенциал постсинаптического нейрона удаляется от порога и происходит гиперполяризация его мембраны, синапс называется тормозным или подавляющим.

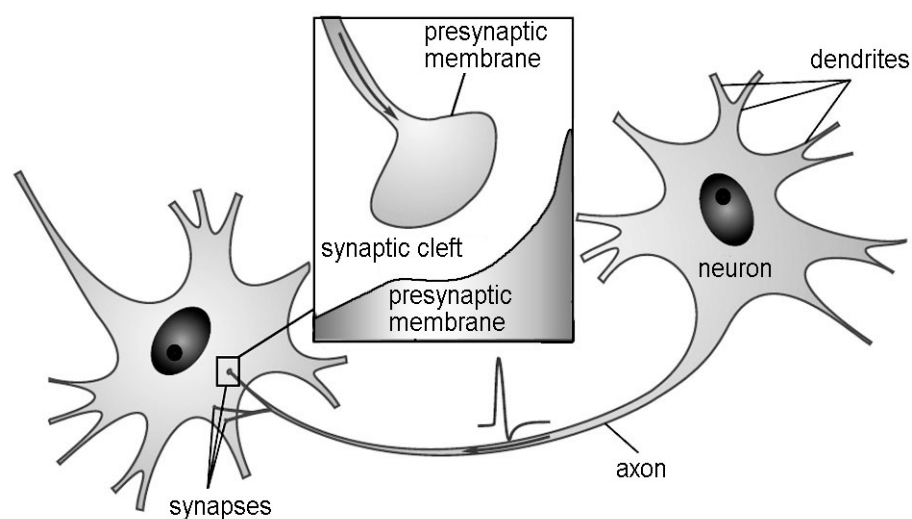


Рис. 1. Схематическое изображение нейрона и синапса
 Fig. 1. Schematic representation of a neuron and a synapse

Основной формой электрической активности нейрона является так называемый потенциал действия – электрический импульс или спайк. В невозбужденном состоянии мембрана нейрона поляризована – её внутренняя поверхность имеет отрицательный потенциал по отношению к наружной. Это так называемый потенциал покоя, равный обычно (-70) – (-90) mV. При возникновении потенциала действия сначала наблюдается фаза нарастания, во время которой мембранный потенциал достаточно резко нарастает до пикового значения $(+20)$ – $(+40)$ mV, после чего некоторое время наблюдается пик возбуждения. Затем наступает фаза реполяризации, когда мембранный потенциал вновь снижается до значения, чуть меньшего, чем исходное. Суммарная длительность потенциала действия в нервных клетках составляет порядка 1 ms, после чего ещё в течение 1–3 ms в мембране наблюдаются некоторые остаточные явления. Это так называемый период рефрактерности, во время которого мембрана невозбудима. Характеристики потенциалов действия практически идентичны во всех нервных клетках организма и являются универсальными носителями информации в нейронной сети.

Потенциал действия возникает под влиянием различных стимулов – как правило, при деполяризации, то есть смещении мембранного потенциала в положительную сторону. Возникновение потенциала действия подчиняется закону «все или ничего». То есть существует порог возбуждения и мембрана клетки при слишком слабом стимуле (не превышающем порог) на него не отвечает, а при сильном стимуле (превышающем порог) отвечает импульсом фиксированной амплитуды, который не зависит от амплитуды стимула.

Кроме индуцированной генерации потенциалов действия в различных нервных клетках наблюдаются также другие формы электрической активности. Например, у некоторых клеток генерация электрических импульсов происходит спонтанно без внешнего возбуждения. Это так называемые пейсмекеры – клетки, задающие ритм и лежащие в основе собственной ритмическую активности нейронных сетей. Внешняя стимуляция такой клетки может приводить к подстройке ритма, измене-

нию амплитуды или частоты генерируемых импульсов. Другим распространенным видом электрической активности является спонтанная или индуцированная генерация бёрстов, то есть целых пачек импульсов. Периоды генерации импульсов при этом чередуются с периодами затишья. Наблюдается как регулярная, так и хаотическая генерация бёрстов. Нейронный бёрстинг играет важную роль в процессах передачи информации, генерации и синхронизации ритмов нейронных сетей.

Перечисленные виды нейронной активности относятся к возбужденным состояниям нейрона. Однако часто имеет значение динамика мембранного потенциала ниже порога возбуждения. Например, в некоторых типах нейронов могут наблюдаться спонтанные подпороговые колебания мембранного потенциала. При стимуляции таких нейронов на пиках подпороговых колебаний могут возникать спайки различной амплитуды. Также за счет подпороговой динамики мембранного потенциала может изменяться возбудимость нервной клетки. Например, после генерации потенциала действия мембранный потенциал может испытывать временные отклонения от равновесного значения. Данное отклонение может быть как положительным (постдеполяризация), так и отрицательным (постгиперполяризация). В первом случае последующее возбуждение нейрона облегчено, во втором – напротив, затруднено.

Моделирование активности нейронов имеет давнюю историю. Существующие в настоящее время в нейронауке модели нейронов можно разделить условно на два класса. Один из них образуют так называемые формальные нейроны или нейроподобные элементы, а второй – модели в форме нелинейных динамических систем.

Впервые понятие формального нейрона было сформулировано в статье МакКаллока и Питса [1]. Формальные нейроны представляют собой пороговые элементы, осуществляющие преобразование вход-выход. Такой нейрон получает на входе вектор входных сигналов, предварительно умноженный на вектор весовых коэффициентов, имитирующих действие синапсов. Затем происходит суммирование координат входного вектора и над полученной суммой выполняется нелинейное преобразование. В результате на выходе формального нейрона получается сигнал, который может быть как скалярной переменной, так и вектором. Далее этот сигнал посылается на входы других нейронов, формируя тем самым искусственную нейронную сеть. В настоящее время такие сети широко используются для решения научных и инженерных задач. Однако для моделирования процессов активности мозга, возникающих, в частности, при выполнении когнитивных функций, требуются модели нейронов более адекватные с нейрофизиологической точки зрения. Мы придём к таким моделям, например, если учтём наличие у нейронов ионных каналов, благодаря которым возникают ионные токи и происходит изменение мембранного потенциала. Поскольку эти процессы являются эволюционными, соответствующие им математические модели имеют форму нелинейных динамических систем. В данном обзоре рассматриваются нейронные модели именно этого класса, начиная с известной модели Ходжкина–Хаксли.

Статья организована следующим образом. В Разделе 1 описаны физические принципы, лежащие в основе возбудимости нервных клеток. Раздел 2 посвящен моделям с непрерывным временем. В нем приведены основные сведения о модели Ходжкина–Хаксли. Далее рассмотрены модели Моррис–Лекара, ФитцХью–Нагумо, Хиндмарша–Роуза, модели нейрона с последеполяризацией, модели нейрона

нижних олив и модели типа «накопление–сброс». В Разделе 3 изложены подходы к описанию динамики нейронов с использованием систем с дискретным временем. Рассмотрены различные моды нейронной активности, воспроизводимые в модели Киалво, модели Ижикевича, модели Рулькова и модели Курбажа–Некоркина. В Заключении кратко обсуждаются математические аспекты представленных в обзоре моделей.

1. Физические основы нейронной возбудимости

Физико-химическую основу возбуждения нервных клеток составляют процессы ионного транспорта через клеточную мембрану. В данном транспорте участвуют в основном четыре вида ионов: K^+ , Na^+ , Ca^{2+} , Cl^- . Несмотря на то, что мембрана клетки представляет собой непроницаемый для этих ионов липидный бислой, в нее встроены специализированные белковые системы, которые обеспечивают транспорт ионов через клеточную мембрану. Существует два типа таких систем – ионные насосы и ионные каналы. Ионные насосы (помпы) – интегральные белки, которые обеспечивают активный перенос ионов против градиента концентрации. В результате работы ионных насосов создаются и поддерживаются трансмембранные ионные градиенты: концентрация натрия, кальция и хлора внутри клетки ниже, чем снаружи (в межклеточной жидкости); концентрация калия внутри клетки выше, чем снаружи. Разность ионных концентраций внутри и снаружи клетки приводит к возникновению ненулевых потенциалов реверсии для данных типов нейронов и, следовательно, отличного от нуля мембранного потенциала.

Ионные каналы – интегральные белки, которые обеспечивают пассивный транспорт ионов по градиенту электрохимического потенциала. Различают неселективные каналы, которые пропускают все типы ионов и характеризуются постоянной проводимостью, и селективные каналы, которые пропускают только один определенный вид ионов. Для каждого вида ионов существуют свои виды каналов, которые могут изменять свою проводимость динамически, открываться и закрываться. Изменение состояния селективного канала обеспечивается работой так называемых ворот – особых белковых молекул, изменяющих свою конформацию в ответ на сигналы различного типа.

По типу сигнала, вызывающего открытие и закрытие селективных каналов, их можно разделить на несколько основных классов. Наиболее важные классы селективных каналов образуют потенциалзависимые и хемочувствительные ионные каналы. Состояние первых зависит от величины трансмембранного потенциала. Каналы данного вида играют важную роль в процессах генерации потенциалов действия. Состояние каналов второго класса меняется в результате присоединения к ассоциированному с каналом белку-рецептору молекулы лиганда, например, нейротрансмиттера. Каналы этого вида играют существенную роль в процессах химической синаптической передачи. Существуют также селективные каналы, свойства которых меняются под действием механических сил, света, при изменении температуры или давления и др. Каналы этих видов крайне важны в процессах получения сенсорной информации, например, в сенсорных нейронах.

*А.С. Дмитричев, Д.В. Касаткин, В.В. Клиньшов, С.Ю. Кириллов,
О.В. Масленников, Д.С. Щапин, В.И. Некоркин*
Изв. вузов «ПНД», т. 26, № 4, 2018

Свойство клеточной мембраны накапливать на своей внутренней поверхности заряд позволяет рассматривать её как электрический конденсатор определённой емкости. Ионные токи, протекающие через мембрану, приводят к зарядке или разрядке данного конденсатора. Исходя из сказанного, нейрон может быть представлен эквивалентной электрической схемой, изображенной на рис. 2. Записывая уравнение Кирхгофа для проходящих через поверхность клеточной мембраны токов, получим следующее уравнение:

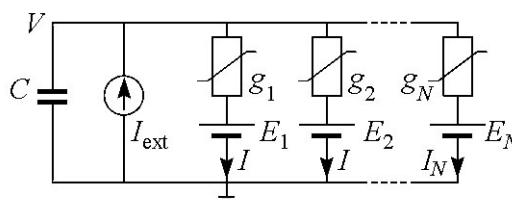


Рис. 2. Эквивалентная схема нейронной мембраны
Fig. 2. Electronic equivalent circuit for a neural membrane

$$C \frac{dV}{dt} = I_{ext} - \sum_{j=1}^N I_j, \quad (1)$$

где V – электрический потенциал клеточной мембраны; C – электрическая емкость мембраны; I_{ext} – внешний ток; I_j – ионные токи, протекающие через ионные каналы различных типов. Величина каждого ионного тока определяется потенциалом реверсии E_j для соответствующего типа ионов и проводимостью соответствующих каналов g_j

$$I_j = g_j(V - E_j). \quad (2)$$

Уравнения (1)–(2) являются основными уравнениями трансмембранного ионного транспорта. Существует широкий класс моделей нейронов, основанных на данных уравнениях. Эти модели отличаются количеством и типом учитываемых ионных каналов, а также способами описания проводимости селективных каналов, которая динамическим образом изменяется во времени благодаря их открытию и закрытию.

2. Модели нейронной активности с непрерывным временем

2.1. Модель Ходжкина–Хаксли. Исторически первой и наиболее известной моделью, основанной на ионном транспорте, является модель, предложенная в 1952 году английскими нейрофизиологами А. Ходжкиным и Э. Хаксли [2]. В своих экспериментах, выполненных на гигантском аксоне кальмара, они исследовали механизмы возникновения и передачи нервного возбуждения. В своих работах Ходжкин и Хаксли показали, что проводимость селективных каналов определяется состоянием их так называемых активирующих и инактивирующих ворот. Активирующие ворота постепенно открываются при повышении мембранного потенциала, а инактивирующие ворота, наоборот, при этом закрываются. Проводимость каналов j -го типа определяется следующим выражением:

$$g_j = \bar{g}_j a_j^{p_j} b_j^{q_j}, \quad (3)$$

где \bar{g}_j – максимальная проводимость каналов в открытом состоянии; a_j и b_j – соответственно активационная и инактивационная переменные, характеризующие вероятность быть в открытом состоянии активирующих и инактивирующих ворот; p_j и

q_j – положительные целые числа, определяющие число активирующих и инактивирующих ворот на ионный канал. По предположению Ходжкина и Хаксли, динамика активационной и инактивационной переменных описывается дифференциальными уравнениями первого порядка

$$\frac{dx}{dt} = \frac{x_\infty(V) - x}{\tau_\infty(V)}. \quad (4)$$

Здесь $x = a_j, b_j$ – вектор переменных; $x_\infty(V)$ и $\tau_\infty(V)$ определяют стационарные состояния переменных и время релаксации процессов, которые в общем случае зависят от величины мембранного потенциала. Ходжкин и Хаксли установили, что главную роль в процессе ионного транспорта играют ионы натрия и калия. Именно натриевые и калиевые каналы детально описываются в предложенной ими модели, а вклад остальных ионов характеризуется общим током утечки. Ходжкин и Хаксли экспериментально показали, что для натриевых каналов характерно наличие трех активирующих и одних инактивирующих ворот ($p_{Na} = 3, q_{Na} = 1$), а для калиевых – наличие четырех активирующих ворот на канал ($p_K = 4, q_K = 0$). Данные числа подбираются эмпирически так, чтобы наилучшим образом описать кинетику токов. Функции $x_\infty(V)$ и $\tau_\infty(V)$ также подбираются эмпирически. В результате модель Ходжкина–Хаксли принимает следующий вид:

$$C \frac{dV}{dt} = I_{ext} - \bar{g}_K n^4 (V - V_K) - \bar{g}_{Na} m^3 h (V - V_{Na}) - \bar{g}_L (V - V_L), \quad (5)$$

$$\frac{dx}{dt} = \alpha_x(V)(1 - x) - \beta_x(V)x. \quad (6)$$

Здесь V обозначает мембранный потенциал в mV, отсчитываемый от потенциала покоя; вектор $x = n, m, h$, где n и m – активационные переменные для калиевых и натриевых каналов, h – инактивационная переменная натриевых каналов.

Численное интегрирование системы (5)–(6) при биологически релевантных параметрах показывает, что данная модель адекватно воспроизводит динамику мембранного потенциала нейрона. Основным свойством системы является генерация потенциала действия, происходящая по закону «все или ничего». На рис. 3 приведены

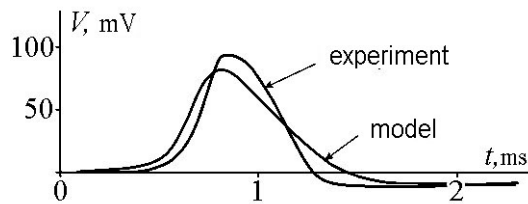


Рис. 3. Сравнение экспериментально наблюдаемого потенциала действия в гигантском аксоне кальмара и результатов численного интегрирования модели Ходжкина–Хаксли. Модифицировано из [2]

Fig. 3. Comparison of the action potential experimentally observed in the giant squid axon and the results of numerical integration of the Hodgkin–Huxley model. Modified from [2]

для сравнения графики, иллюстрирующие динамику мембранного потенциала гигантского аксона кальмара и модели Ходжкина–Хаксли. Видно, что форма импульса, демонстрируемого моделью, близка к форме сигналов, полученных экспериментально, и потенциал действия также сопровождается периодом рефрактерности. Наблюдается не только качественное, но и количественное сходство динамики модели и поведения реальной мембраны: длительность и амплитуда представленных на рис. 3 импульсов совпадают с хорошей степенью точности.

Принципы, положенные в основу модели Ходжкина–Хаксли, были использованы другими авторами для создания целого ряда моделей подобного типа (см., например, [3–5]). Эти модели отличаются количеством и типом учитываемых ионных каналов. Несомненным достоинством моделей типа Ходжкина–Хаксли является детальное описание динамики ионных каналов, биологическая адекватность и наличие соответствия модельных и физиологических параметров. Однако сложность аналитического и численного исследования привела к необходимости использования других, более простых моделей нейронной активности.

2.2. Модель Моррис–Лекара. Другая широко известная модель, опирающаяся на формализм Ходжкина–Хаксли, была предложена К. Моррис и Г. Лекаром [6] для описания различных режимов осцилляторной активности, наблюдаемых в экспериментах с гигантским мышечным волокном усонного рака. На основе экспериментальных данных [7] была построена трехмерная динамическая модель, учитывающая наличие двух потенциал-зависимых ионных каналов – кальциевого и калиевого, которые никогда полностью не инактивируются. В работе [6] представлен анализ возможных режимов, предсказываемых теоретической моделью, и их сопоставление с данными, полученными экспериментально. При проведении анализа режимов, отвечающих осцилляторному поведению потенциала мышечного волокна было сделано предположение, что проводимости кальциевого и калиевого каналов имеют различные времена релаксации. Это позволило получить редуцированную модель второго порядка при условии, что проводимость кальциевого канала мгновенно принимает стационарное значение,

$$C \frac{dV}{dt} = I_{ext} - g_L(V - V_L) - g_{Ca} M_\infty(V)(V - V_{Ca}) - g_K n(V - V_K), \quad (7)$$

$$\frac{dn}{dt} = \frac{n_\infty(V) - n}{\tau_n(V)}.$$

Переменные V и n имеют тот же смысл, что и в модели Ходжкина–Хаксли. Слагаемые в правой части первого уравнения (7) определяют, соответственно, внешний ток, ток утечки, кальциевый и калиевый токи, текущие через мембрану. Функции $M_\infty(V)$, $n_\infty(V)$ и $\tau_n(V)$ имеют следующий вид:

$$M_\infty(V) = 0.5 \left[1 + \tanh \left(\frac{V - V_1}{V_2} \right) \right],$$

$$n_\infty(V) = 0.5 \left[1 + \tanh \left(\frac{V - V_3}{V_4} \right) \right],$$

$$\tau_n(V) = \left[\phi \cosh \left(\frac{V - V_3}{2V_4} \right) \right]^{-1}.$$

Такая упрощенная модель позволила описать ряд осцилляторных режимов (затухающие и периодические колебания), зафиксированных в экспериментах с мышечным волокном усонного рака. В силу относительной простоты модель Моррис–Лекара (М–Л) является одной из популярных моделей, построенных на основе уравнений для ионного транспорта, которая используется для моделирования колебательной активности, в том числе и нервных тканей.

Динамика модели (7) была рассмотрена в ряде работ [8–12]. Основное внимание в данных работах преимущественно было сосредоточено на исследовании влияния внешнего тока на характер рождения колебаний. Наиболее подробно исследование бифуркационной структуры модели М–Л в плоскостях различных параметров представлено в [11]. Проведённый в этой работе анализ двухпараметрических бифуркационных диаграмм, где в качестве контрольных параметров выбраны внешний ток I_{ext} и одна из величин g_{Ca} , ϕ , V_3 или V_4 , позволил выделить области с различным поведением мембранного потенциала и определить сценарии, приводящие к установлению этих режимов. Система (7) может демонстрировать режим периодической генерации импульсов, а также возбудимые режимы различной сложности. В общем случае, поведение системы определяется числом аттракторов, взаимным расположением сепаратрис седла и неустойчивых предельных циклов, существующих на фазовой плоскости при выбранных значениях параметров. В модели М–Л существует два вида аттракторов – устойчивые состояния равновесия и предельные циклы, которые при описании нейронной активности отвечают состоянию покоя и периодической генерации импульсов нейрона. В зависимости от параметров динамика модели М–Л может быть моностабильной, бистабильной и даже тристабильной. Установлено, что система (7) может иметь от одного до трех состояний равновесия, что определяется числом точек пересечения нульклин системы (рис. 4). В случае, когда система имеет три состояния равновесия, одно из них (O_2) является седлом, устойчивые сепаратрисы которого задают порог возбуждения нейрона. Простейший пример возбудимого режима представлен на рис. 4, *a*. В начальный момент времени система находится в состоянии покоя, которое на фазовой плоскости определяется устойчивым состоянием равновесия O_1 и которое является единственным аттрактором системы. При воздействии на систему внешнего стимула происходит смещение изображающей точки на фазовой плоскости из состояния равновесия. После окончания действия стимула система возвращается в состояние покоя. При этом если внешнее воздействие было достаточно сильным, то отклик характеризуется значительным нарастающим изменением переменной V , то есть система генерирует импульс возбуждения. Система (7) может демонстрировать и более сложное возбудимое поведение, когда в ответ на внешнее воздействие наблюдается генерация серии импульсов возбуждения (рис. 4, *b*). Такое поведение наблюдается при приближении параметров системы к бифуркационным значениям, отвечающим рождению двукратного предельного цикла. Возникновение сложного отклика обусловлено образованием «слоений» на фазовой плоскости, связанным со сгущением фазовых траекторий, являющимся следствием динамической памяти системы о недавнем существовании двукратного предельного цикла. При попадании в одно из таких «слоений», возвращаясь в состояние равновесия O_1 , траектория системы совершает некоторое число оборотов, что означает генерацию серии импульсов возбуждения.

Режим периодической генерации импульсов возбуждения определяется появлением на фазовой плоскости системы устойчивого предельного цикла (рис. 4 *c*, *d*). Режим периодических колебаний может возникать в результате различных бифуркаций [11]: Андронова–Хопфа, двукратного предельного цикла, бифуркации петли сепаратрис седло-узла.

*А.С. Дмитричев, Д.В. Касаткин, В.В. Клиньшов, С.Ю. Кириллов,
О.В. Масленников, Д.С. Щапин, В.И. Некоркин*
Изв. вузов «ПНД», т. 26, № 4, 2018

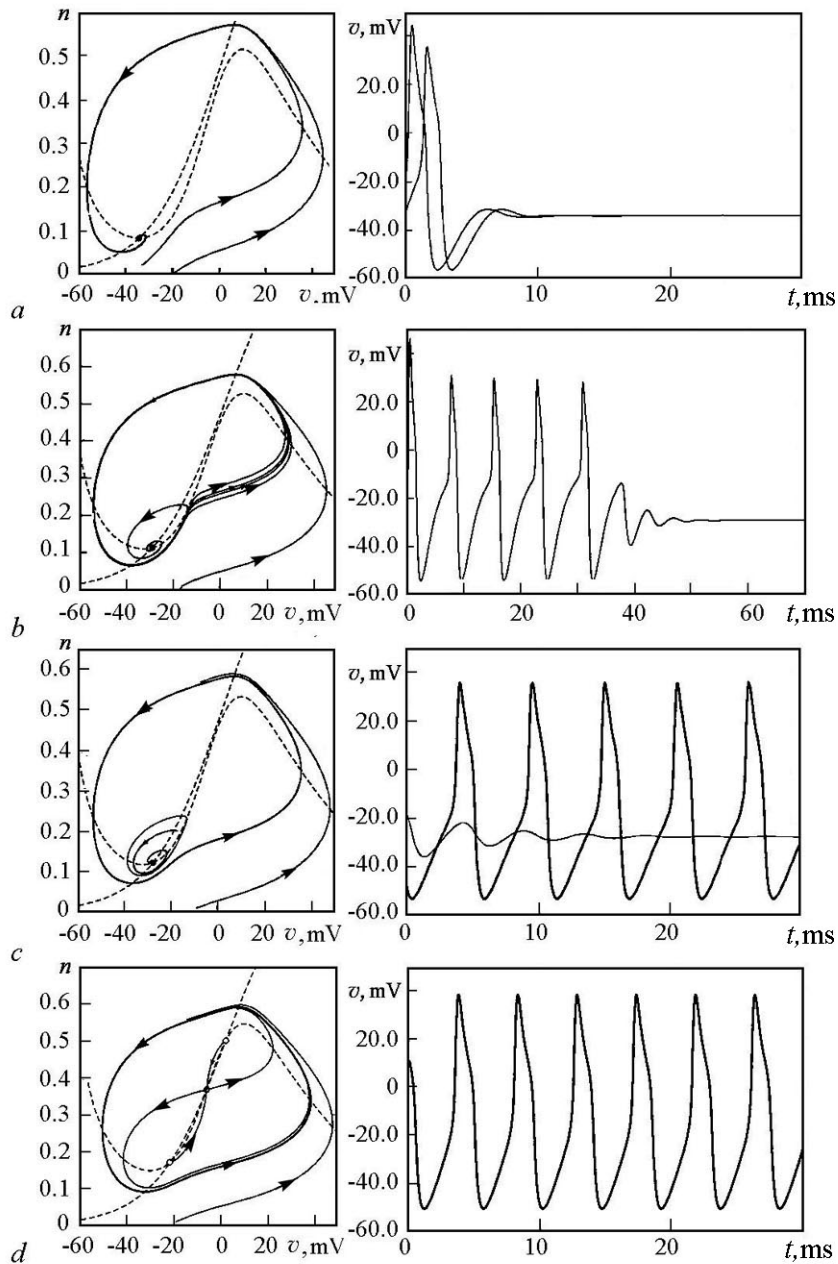


Рис. 4. Фазовые портреты и временные реализации модели М-Л при $C = 20 \mu\text{F}/\text{cm}^2$, $g_L = 0.2 \text{ mS}/\text{cm}^2$, $g_{Ca} = 4.4 \text{ mS}/\text{cm}^2$, $g_K = 8.0 \text{ mS}/\text{cm}^2$, $V_i = 50 \text{ mV}$, $V_{Ca} = 100 \text{ mV}$, $V_K = 70 \text{ mV}$, $V_1 = -1 \text{ mV}$, $V_2 = 15 \text{ mV}$, $V_3 = 2 \text{ mV}$, $V_4 = 30 \text{ mV}$, $\phi = 0.05 \text{ s}^{-1}$ и при различных значениях внешнего тока $I_{ext} \mu\text{A}/\text{cm}^2$: $a - 20$, $b - 27.54842$, $c - 30$, $d - 40$

Fig. 4. Phase portraits and waveform of membrane potential in Morris-Lecar model for $C = 20 \mu\text{F}/\text{cm}^2$, $g_L = 0.2 \text{ mS}/\text{cm}^2$, $g_{Ca} = 4.4 \text{ mS}/\text{cm}^2$, $g_K = 8.0 \text{ mS}/\text{cm}^2$, $V_i = 50 \text{ mV}$, $V_{Ca} = 100 \text{ mV}$, $V_K = 70 \text{ mV}$, $V_1 = -1 \text{ mV}$, $V_2 = 15 \text{ mV}$, $V_3 = 2 \text{ mV}$, $V_4 = 30 \text{ mV}$, $\phi = 0.05 \text{ s}^{-1}$ and for different value of external current $I_{ext} \mu\text{A}/\text{cm}^2$: $a - 20$, $b - 27.54842$, $c - 30$, $d - 40$

Система (7) может демонстрировать бистабильное поведение, одновременно обладая возбудимыми и колебательными свойствами. Пример фазового портрета, отвечающего такому поведению, представлен на рис. 4, *e*. На фазовой плоскости существуют пара предельных циклов – устойчивый и неустойчивый и три состояния равновесия, одно из которых (O_1) также является устойчивым. Если в результате действия стимула изображающая точка оказывается ниже устойчивых сепаратрис седла O_2 , оставаясь при этом внутри области, ограниченной неустойчивым предельным циклом, то система генерирует импульс возбуждения (см. рис. 4, *e*). Если параметры стимула таковы, что изображающая точка на фазовой плоскости после его действия оказывается вне области, выделяемой неустойчивым предельным циклом, то система переходит в режим периодических колебаний, отвечающих устойчивому предельному циклу.

Наконец, существуют области параметров, где система имеет три аттрактора [11]: два состояния равновесия и предельный цикл. В этом случае благодаря внешней стимуляции можно вызвать, например, генерацию серий импульсов возбуждения, заканчивающуюся возвращением обратно в состояние покоя, или перевести в режим периодических колебаний.

2.3. Модель ФитцХью–Нагумо. Как было сказано выше, динамика селективного ионного канала характеризуется следующими ключевыми чертами. Во-первых, при фиксированном трансмембранном потенциале V значение тока I устанавливается равным некоторому постоянному значению $I_\infty(V)$. Во-вторых, данное значение устанавливается не мгновенно, а в течение некоторого характерного времени $\tau(V)$. Не вдаваясь в детали динамики ионных каналов, для моделирования данных свойств можно использовать простое линейное дифференциальное уравнение следующего вида [13]:

$$\frac{dI}{dt} = \frac{I_\infty(V) - I}{\tau(V)}. \quad (8)$$

Впервые модель, использующая такой упрощенный способ описания динамики ионных каналов нервных клеток, была введена в работах ФитцХью [14, 15], а позже была обобщена Нагумо на случай пространственно-распределенных систем [16]. В рамках модели ФитцХью–Нагумо используется подход, основанный на разделении различных ионных токов по их характерным временным масштабам (ср. с [17]). Предполагается, что характерные времена установления токов для большинства ионных каналов достаточно малы, что позволяет считать суммарный ток через них I_Σ всегда равным своему равновесному значению $f(V)$. Выделяется также один или несколько типов каналов I , характерное время изменения токов которых $\max_V \tau(V)$ сравнимо и считается достаточно большим. Для описания этих токов используется уравнение типа (8), а для динамики трансмембранного потенциала записывается уравнение типа (5). В результате получим следующую обобщенную двумерную систему ФитцХью–Нагумо:

$$\begin{cases} \dot{V} = I_{ext} - I - f(V), \\ \dot{I} = \varepsilon(g(V) - I), \end{cases} \quad (9)$$

где $\varepsilon = C / \max \tau(V)$. Используя вид функций f и g из оригинальной работы Фитц-

Хью, после замены переменных получим классический вид системы ФитцХью–Нагумо

$$\begin{cases} \dot{u} = u - u^3/3 - v + I_{ext}, \\ \dot{v} = \varepsilon(u - a - bv). \end{cases} \quad (10)$$

Здесь u описывает динамику мембранного потенциала нейрона; v – совокупное действие всех медленных ионных токов, отвечающих за восстановление потенциала покоя мембраны. Параметры a и b определяют проводимостные характеристики ионных каналов, а ε ($\varepsilon > 0$) – относительную скорость изменения медленных ионных токов.

Изначально на параметры b и ε накладывались следующие условия: $0 < b < 1$, $\varepsilon \ll 1/b$. Первое условие обеспечивает существование в системе (10) лишь одного состояния равновесия, отвечающего состоянию покоя нейрона. Второе условие, с одной стороны, обеспечивает возможность смены этим состоянием равновесия устойчивости, а с другой – приводит к тому что, динамика системы в целом становится близкой к релаксационной. Таким образом, вне зависимости от параметров системы, ее динамика формируется так называемыми быстрыми и медленными движениями [18–21]. Первые происходят вдоль кривых $v \approx \text{const}$. Вторые происходят в ε -окрестности устойчивого многообразия медленных движений, образованного двумя падающими участками u -нульклина ($v = u - u^3/3 + I_{ext}$). Левый падающий участок (в области отрицательного мембранного потенциала) обычно ассоциируют с рефрактерным (или невозбужденным) состоянием нейрона, а правый падающий участок (в области положительного мембранного потенциала) – с возбужденным состоянием нейрона.

Рассмотрим более подробно типичные режимы классической системы ФитцХью–Нагумо. Их качественные фазовые портреты приведены на рис. 5, $a-f$, а на рис. 5, $g-i$ приведены характерные отклики системы в этих режимах. Режим на рис. 5, a реализуется при $a > a^+$. Состояние равновесия O в этом режиме является глобально устойчивым и расположено на левом участке устойчивого многообразия медленных движений. При этом действие стимула может вызывать генерацию системой одиночных импульсов возбуждения (потенциалов действия или спайков), поэтому этот режим называют еще возбудимым. Действительно, при достаточно сильной стимуляции изображающая точка (траектория C_0) может покинуть окрестность состояния равновесия и преодолеть пороговое многообразие, которое образовано слоем неустойчивых медленных движений, происходящих в ε -окрестности возрастающего участка u -нульклина, и его следом в обратном времени (на рис. 5, a область отмечена серым цветом). Далее по быстрым движениям изображающая точка переходит на правый участок устойчивого многообразия медленных движений, движется вдоль него до точки срыва, а затем по быстрым движениям вновь возвращается на левый участок, релаксируя в конце концов обратно к состоянию покоя. При $a = a^+$ происходит бифуркация Андронова–Хопфа и смена устойчивости состояния равновесия, которое переходит на неустойчивое многообразие медленных движений. При уменьшении $a < a^+$ на фазовой плоскости нейрона появляется малый предельный цикл C_1 (см. рис. 5, b), отвечающий квазигармоническим подпороговым колебаниям. Далее система проходит через каскад так называемых уточных решений [20], содержащих как участки многообразий быстрых и устойчивых медленных движений, так

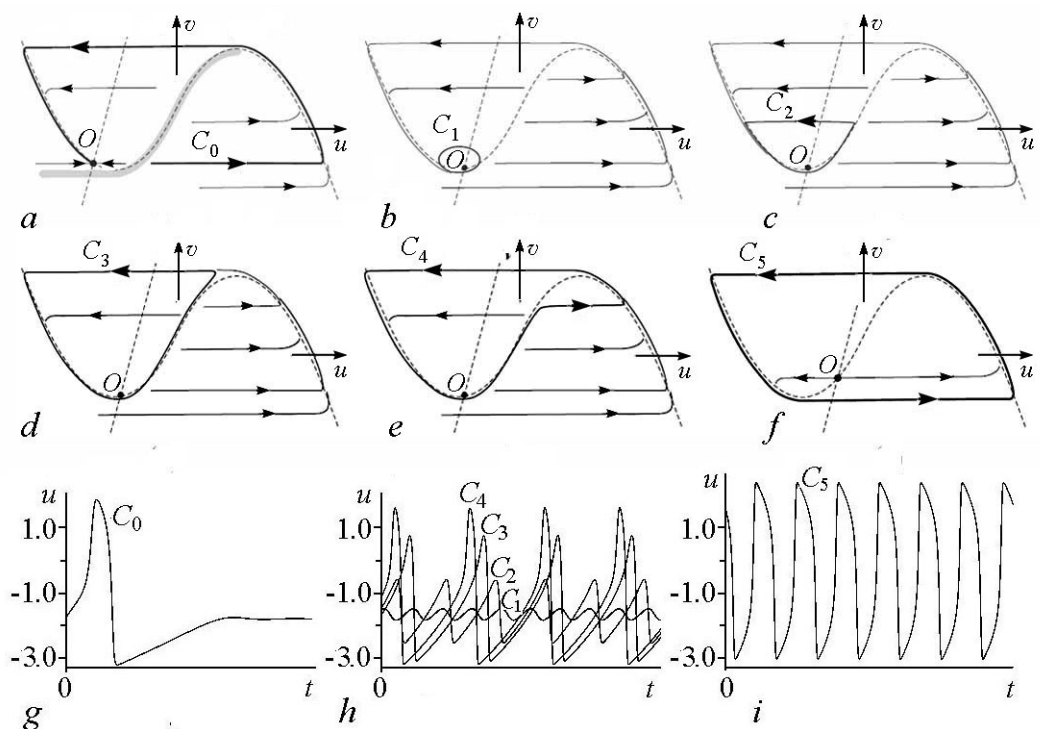


Рис. 5. Типичные режимы классической системы ФитцХью–Нагумо: (a, e, f) – режимы одиночной и периодической генерации импульсов возбуждения (потенциалов действия или спайков); (b–d) – режимы подпороговых колебаний; (g–i) – характерные отклики в соответствующих режимах. Пунктиром изображены нульклины системы. Параметры: (a) – $a > a^+$; (b–f) – $a \in (a^-, a^+)$, $a^\mp(\varepsilon, b, I_{ext}) = u_{1,2} - b(u_{1,2} - u_{1,2}^3/3 + I_{ext})$, $u_{1,2} = \mp\sqrt{1 - b\varepsilon}$

Fig. 5. Typical regimes of classical FitzHugh–Nagumo system: (a, e, f) – regimes of single and periodic generation of excitation pulses (action potentials or spikes); (b–d) – regimes of subthreshold oscillations; (g–i) – typical responses in the regimes. The dashed lines represent the system’s nullclines. The parameters: (a) – $a > a^+$; (b–f) – $a \in (a^-, a^+)$, $a^\mp(\varepsilon, b, I_{ext}) = u_{1,2} - b(u_{1,2} - u_{1,2}^3/3 + I_{ext})$, $u_{1,2} = \mp\sqrt{1 - b\varepsilon}$

и участки неустойчивых многообразий медленных движений. Эти решения отвечают сложным подпороговым (см. рис. 5, c, d) и спайковым (см. рис. 5, e) колебаниям системы. Сначала малый предельный цикл деформируется в так называемую «малую утку без головы» (C_2). Называют это решение так, потому, что оно содержит лишь один левый участок устойчивого многообразия медленных движений. «Малая утка» затем деформируется в «большую утку без головы» (C_3), а та, в свою очередь, в «большую утку с головой» (C_4). Последняя содержит как левый, так и правый участки устойчивого многообразия медленных движений. Наконец, «большая утка с головой» деформируется в большой предельный цикл C_5 (см. рис. 5, f). Нейрон при этом переходит в режим периодической генерации импульсов возбуждения. При дальнейшем уменьшении a наблюдается обратный каскад «уточных» решений, при $a = a^-$ происходит бифуркация Андронова–Хопфа, состояние равновесия снова становится устойчивым, переходит на правый участок устойчивого многообразия медленных движений, и в системе возникает возбудимый режим.

Классическая система ФитцХью–Нагумо широко применяется и в настоящее время, причем в самых разнообразных областях современной науки. Однако ряд свойств этой системы затрудняют ее применение для описания динамики нейронов.

Пороговое многообразие формируется ε -слоем неустойчивых медленных движений в окрестности неустойчивого медленного многообразия, и достаточно трудно однозначно классифицировать факт возбуждения. Основной режим динамики нейронов, возбудимый режим, реализуется в системе при достаточно малых ε . Для преодоления этих недостатков систему рассматривают в области, где существует три состояния равновесия и пороговое многообразие формируется сепаратрисами седлового состояния (см. ниже), либо же разрабатывают на ее основе модифицированные системы. Модификации в основном касаются вида функции g в уравнении для медленных ионных токов. Например, в [22, 23] теоретически и экспериментально изучалась модель с нелинейным восстановлением, отличающаяся кусочно-линейным видом этой функции,

$$\begin{cases} \dot{u} = u - u^3/3 - v + I_{ext}, \\ \dot{v} = \varepsilon(\alpha u H(-u) + \beta u H(u) - v - a), \end{cases} \quad (11)$$

где H – функция Хевисайда, а параметры α , β ($\alpha > 0$, $\beta > 0$) и a описывают нелинейные свойства ионных каналов. С одной стороны, такой вид функции g , более адекватно описывает динамику ионных токов, делая ее схожей с динамикой токов в системе Моррис–Лекара. С другой стороны, такая модификация приводит к возникновению новых динамических свойств системы. В частности, исследования показали, что в такой системе наблюдается большее по сравнению с классической моделью разнообразие динамических режимов.

Система (11) в зависимости от параметров может иметь либо одно, либо три грубых состояния равновесия. В первом случае это может быть как устойчивый, так и неустойчивый фокус (или узел). И в этой области параметров система ведет себя аналогично поведению классической системы ФитцХью–Нагумо, уже рассмотренному выше. Во втором случае на фазовой плоскости имеется два состояния равновесия типа фокус (или узел), которые могут быть как устойчивыми, так и неустойчивыми, и одно состояние равновесия седлового типа. На рис. 6 представлены разбиения плоскости параметров ($\varepsilon, I_0 \equiv a + I_{ext}$) для трех различных соотношений параметров α и β на области, отвечающие различным динамическим режимам системы (11). Фазовые портреты режимов, существующих соответственно в областях 1–15, приведены на рис. 7. Фазовые портреты в областях со штрихами зеркально эквивалентны соответствующим портретам в областях без штрихов. Кривые A_1^+ и A_3^+ (A_3^-) на диаграммах отвечают, соответственно, бифуркациям Андронова–Хопфа (смены устойчивости) состояний равновесия O_1 и O_3 , локализованных в левой ($u < 0$) и правой ($u > 0$) полуплоскости (см. рис. 7). Верхний индекс при A_1 и A_3 показывает знак первой ляпуновской величины. Кривые H_1^+ и H_2^+ (H_2^-) соответствуют бифуркациям «малых» петель сепаратрис седлового состояния равновесия $W_1^s - W_1^u$ и $W_2^s - W_2^u$, а кривые $H_{1,2}^+(H_{1,2}^-)$ и $H_{2,1}^+$ – бифуркациям «больших» петель сепаратрис $W_1^s - W_2^u$ и $W_2^s - W_1^u$. Верхний индекс при $H_1, H_2, H_{1,2}$ и $H_{2,1}$ показывает знак седловой величины. Кривая C отвечает бифуркации образования «большого» двукратного предельного цикла, охватывающего все три состояния равновесия системы (11), а кривые C_3^a и C_3^b соответствуют бифуркациям образования «малых» двукратных предельных циклов, локализованных в окрестности состояния равновесия O_3 . Заметим, что разбиение на рис. 6 *a* можно получить и для классической системы ФитцХью–Нагумо [24], однако разбиения на рис. 6 *b, c* можно получить уже только в рамках моделей типа Моррис–Лекара.

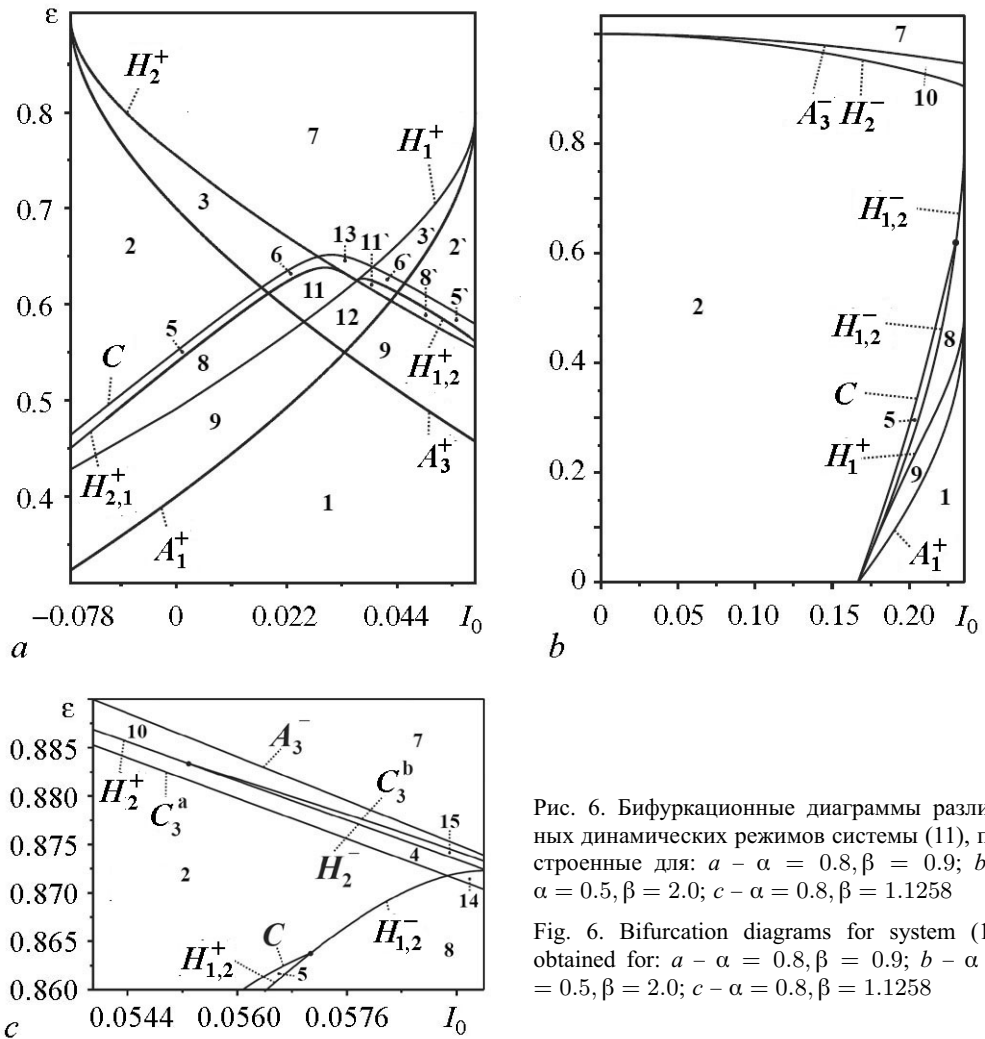


Рис. 6. Бифуркационные диаграммы различных динамических режимов системы (11), построенные для: *a* – $\alpha = 0.8, \beta = 0.9$; *b* – $\alpha = 0.5, \beta = 2.0$; *c* – $\alpha = 0.8, \beta = 1.1258$

Fig. 6. Bifurcation diagrams for system (11) obtained for: *a* – $\alpha = 0.8, \beta = 0.9$; *b* – $\alpha = 0.5, \beta = 2.0$; *c* – $\alpha = 0.8, \beta = 1.1258$

В зависимости от параметров система может иметь до трех различных аттракторов. Так по одному аттрактору (моностабильность) имеется в областях 1 и 2, по два аттрактора (бистабильность) – в областях 3–5, 7–10 и по три аттрактора (мультистабильность) – во всех остальных областях. К аттракторам относятся: устойчивые состояния равновесия O_1 и O_3 , отвечающие состояниям покоя и «перманентного» возбуждения нейрона, соответственно; глобальный устойчивый предельный цикл – L^s , охватывающий все три состояния равновесия и отвечающий режиму периодической генерации импульсов возбуждения; локальные устойчивые предельные циклы – l_1^s и l_3^{s*} (l_3^s и l_3^{s*}), охватывающие состояние равновесия O_1 (O_3) и отвечающие режимам подпороговых колебаний (перманентного нестационарного возбуждения). Бассейны притяжения этих аттракторов ограничиваются устойчивыми сепаратрисами седла O_2 и/или глобальным неустойчивым предельным циклом L^u , и/или локальными неустойчивыми предельными циклами l_1^u, l_3^u , охватывающими состояния равновесия O_1 и O_3 , соответственно. Наличие тех или иных аттракторов и пороговых многообразий, а также их определенных конфигураций свидетельствует о наличии в системе определенного типа поведения. Если на фазовой плоскости имеются устойчивые предельные циклы, то имеет место колебательное поведение. Ес-

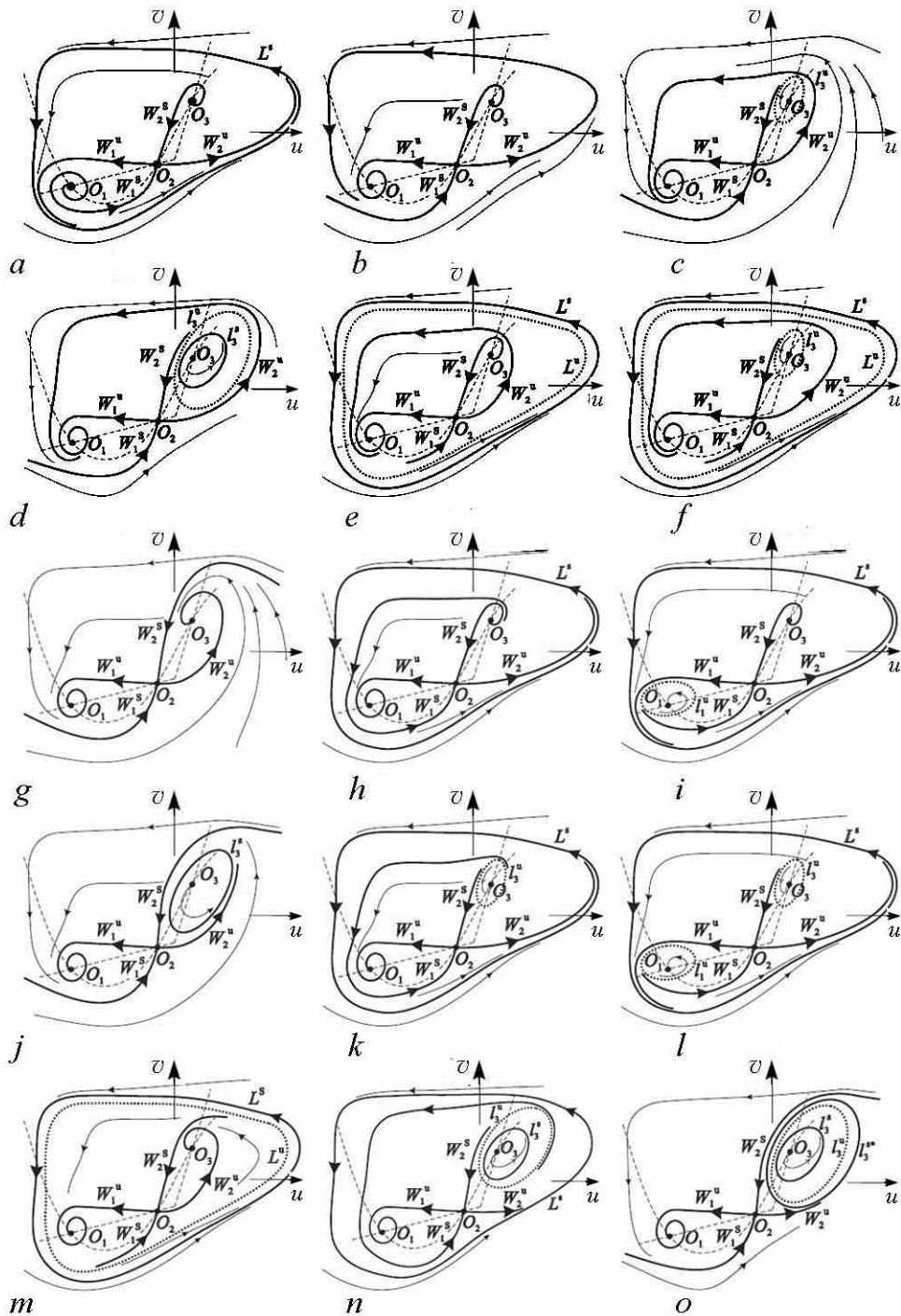


Рис. 7. Структурно устойчивые фазовые портреты системы (11), отвечающие динамическим режимам в областях 1–15 (см. рис. 6), соответственно

Fig. 7. Structurally stable phase portraits of system (11) corresponding to regimes in regions 1–15 (see fig. 6), respectively

ли обе неустойчивые сепаратрисы седла стремятся к одному и тому же состоянию равновесия, то имеет место возбудимое поведение относительно этого состояния. Если неустойчивые сепаратрисы стремятся к различным аттракторам или на фазовой плоскости имеются неустойчивые предельные циклы, то имеет место триггерное (переключательное) поведение. В зависимости от начальных условий в системе реализуется один из аттракторов, который впоследствии может меняться посредством соответствующей внешней стимуляции, перебрасывающей систему в область притяжения необходимого аттрактора. Заметим, что все рассмотренные выше типы поведения могут наблюдаться одновременно. Так, в области 1 наблюдается лишь колебательное поведение. В областях 2–6 наблюдается возбудимое поведение. Кроме того, в областях 3, 6 возможно установление или переход в состояние перманентного возбуждения, а в областях 3–6 возможен переход в различные колебательные режимы. Наконец в областях 7–15 наблюдается всевозможное триггерное поведение между состоянием покоя и перманентного возбуждения (области 7, 11–13), а также между различными колебательными режимами (области 8–15).

Одной из основных черт режимов, описанных выше (даже достаточно сложных), является наличие лишь не более чем двух порогов возбуждения, отделяющих друг от друга различное динамическое поведение системы (колебания, покой, возбудимость). Рассмотрим ещё ряд режимов системы (11), обладающих достаточно нетривиальными сложно-пороговыми динамическими свойствами, а именно, наличием значительного числа порогов возбуждения.

На рис. 8, *a* приведен фазовый портрет одного из таких режимов, который имеет место в области 1, при приближении параметров системы либо к бифуркационной кривой, отвечающей «большой» петле сепаратрис с отрицательной седловой величиной $H_{1,2}^-$, либо к кривой «большого» двукратного предельного цикла C (Рис. 6). При этом входящая сепаратриса седла W_1^s приближается к выходящей сепаратрисе W_1^u и начинает совершать вращение (при $t \rightarrow -\infty$) вокруг всех трех состояний равновесия. На фазовой плоскости (u, v) это соответствует появлению «слоений», ограниченных витками сепаратрисы W_1^s . Число таких «слоений» растет с приближением параметров к обозначенным бифуркационным кривым и устремляется в бесконечность при точном совпадении параметров с бифуркационными значениями. При попадании начальных условий в одно из «слоений», возвращаясь в состояние равновесия O_1 , траектория будет совершать некоторое число оборотов, что означает генерацию серии импульсов возбуждения. На рис. 8, *b* представлены области p_i , определяющие в зависимости от параметра ε диапазон начальных возмущений u_p (по переменной u при фиксированном v), отвечающих генерации различного числа импульсов ($i = \overline{0, 7}$). Область p_0 определяет отсутствие отклика, область p_i отклик в виде серии из i последовательных импульсов. Следует отметить, что генерация импульсов в данном режиме становится возможной не только для возбуждающих ($u_p > 0$), но и подавляющих ($u_p < 0$) воздействий. Рис. 8, *c, d* иллюстрируют отклик системы на возбуждающее и подавляющее воздействия в виде 2 и 6 импульсов, соответственно. Подобный режим может возникать и в случае когда система имеет лишь одно состояния равновесия. Например, он наблюдается, когда параметры системы приближаются к бифуркационным значениям, отвечающим рождению в её фазовом пространстве двукратного предельного цикла. А образование «слоений» связано со сгущением фазовых траекторий, являющимся следствием динамической памяти системы о недавнем существовании двукратного предельного цикла.

*А.С. Дмитричев, Д.В. Касаткин, В.В. Клиньшов, С.Ю. Кириллов,
О.В. Масленников, Д.С. Щапин, В.И. Некоркин*
Изв. вузов «ПНД», т. 26, № 4, 2018

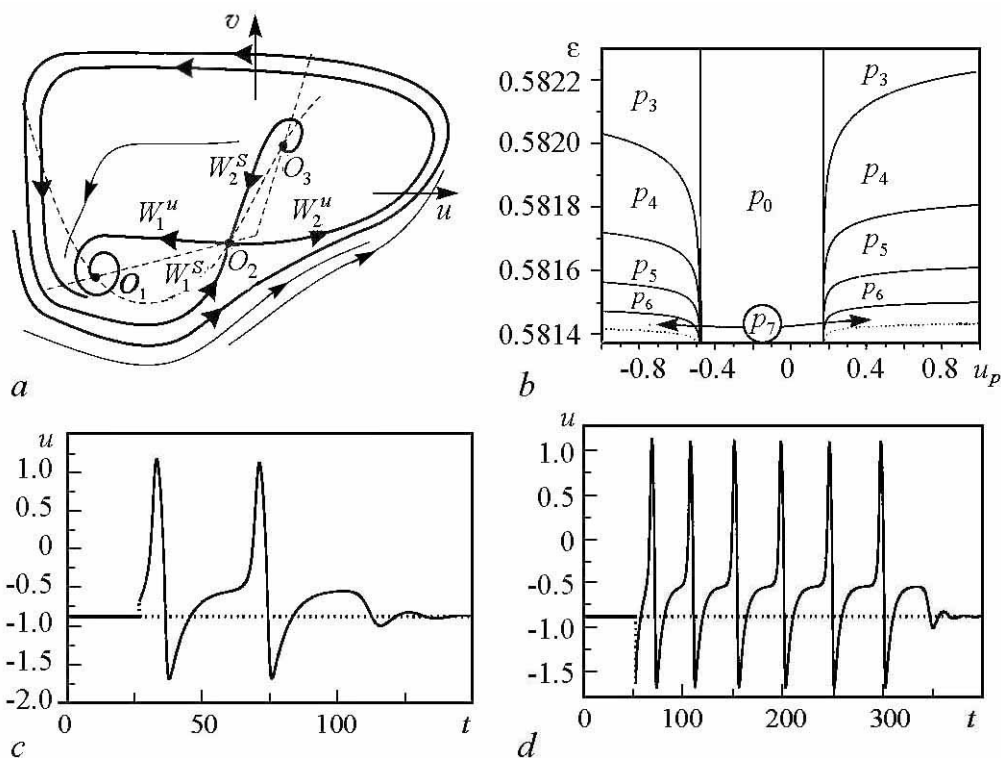


Рис. 8. *a* – возбудимый мультипороговый режим. *b* – области генерации серий импульсов отклика (p_i) в зависимости от величины внешнего воздействия и параметра ε . *c* и *d* – генерация серий импульсов отклика в ответ на возбуждающее и подавляющее воздействия. Параметры: $\alpha = 0.8, \beta = 0.9, I_0 = 0.01$

Fig. 8. *a* – excitable multi-threshold regime. *b* – areas of generation (p_i) of different number of response pulses (spike trains) depending on the amplitude of external stimulus and the parameter ε . *c* and *d* – the examples of responses to excitatory and inhibitory stimuli. The parameters are $\alpha = 0.8, \beta = 0.9, I_0 = 0.01$

Другой мультипороговый режим имеет место в области 7 в окрестности бифуркационной кривой «большого» двукратного предельного цикла C (см. рис. 6, *a*). Типичный фазовый портрет этого режима приведен на рис. 9, *a*. Здесь, как и в предыдущем случае, при приближении параметров к C , начинают вращаться обе входящие сепаратрисы седла. При этом триггерный бистабильный режим (переходы между состояниями равновесия) приобретает возбудимые мультипороговые свойства. Появляется, с одной стороны, возможность генерации импульсов и серий импульсов возбуждения причем как относительно нижнего, так и относительно верхнего состояния равновесия. С другой стороны, вращение устойчивых (входящих) сепаратрис приводит к возникновению нетривиального триггерного поведения, переходы между состояниями равновесия которых также сопровождаются генерацией серий импульсов возбуждения. На рис. 9, *b* представлены области, отвечающие разнообразному поведению системы (11), возникающему в ответ на возмущение состояния покоя O_1 . Здесь области s_i отвечают триггерному поведению системы (11), сопровождающемуся генерацией серии из i импульсов возбуждения. Рис. 9, *c, d* иллюстрируют типичное поведение системы (11) в данном режиме.

Еще один мультипороговый режим имеет место в области 10 также в окрестности бифуркационной кривой «большой» петли сепаратрис с отрицательной седловой величиной $H_{1,2}^-$ (см. рис. 6, *c*). Типичный фазовый портрет этого режима при-

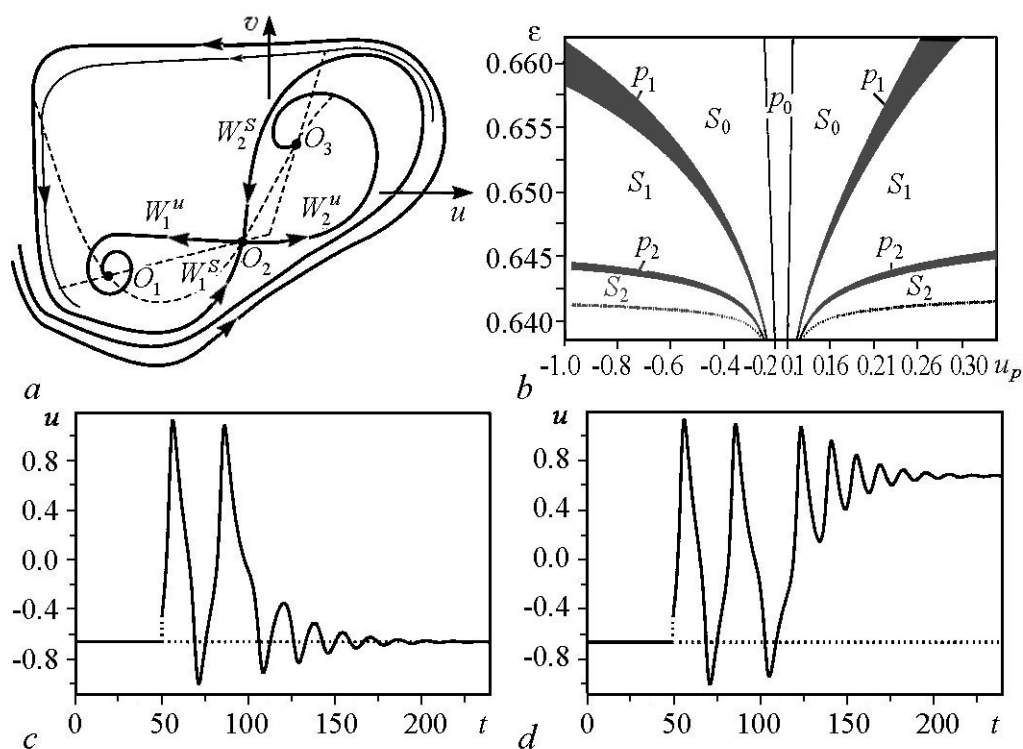


Рис. 9. *a* – возбуждаемо-триггерный мультипороговый режим. *b* – области генерации серий импульсов отклика с возвращением к исходному (p_i) или переходом в другое (s_i) состояние равновесия. *c* и *d* – примеры откликов. Параметры: $\alpha = 0.8, \beta = 0.9, I_0 = 0.035$

Fig. 9. *a* – excitable-trigger multi-threshold regime. *b* – areas of generation of different number of response pulses (spike trains) with either return to previous equilibrium state (p_i) or transition to another one (s_i). *c* and *d* – the examples of responses. The parameters are $\alpha = 0.8, \beta = 0.9, I_0 = 0.035$

веден на рис. 10, *a*. Здесь, в отличие от предыдущего случая, при приближении параметров к $H_{1,2}^-$, вокруг всех состояний равновесия начинают вращаться обе входящие сепаратрисы седла W_1^s и W_2^s . Это приводит к тому, что ранее простой режим с триггерно-подобной динамикой (переходы между состоянием покоя и локальными колебаниями) приобретает возбуждаемо-колебательное мультипороговое поведение. Пусть изначально (11) система находится в состоянии покоя. Тогда в зависимости от его начального возмущения можно получить генерацию серий импульсов возбуждения, заканчивающуюся либо возвращением обратно в состояние покоя, либо переходом в режим низкоамплитудных колебаний. Аналогичные процессы происходят при возмущении колебательного состояния системы. На рис. 10, *b* представлены области, отвечающие различному отклику системы (11) на возмущение ее состояния покоя. Как и прежде, область p_i отвечает отклику системы в виде серии из i импульсов возбуждения с возвращением обратно в состояние покоя. Область же s_i также соответствует генерации серии из i импульсов, но с последующим переходом в колебательный режим. Рис. 10, *c, d* иллюстрируют оба рассмотренных типа поведения.

Аналогичными мультипороговыми свойствами обладает система (11) в области 8 для параметров, локализованных вблизи кривой C , и в областях 13 и 15 для параметров, локализованных вблизи кривой $H_{1,2}^-$. Фазовые портреты данных режимов представлены на рис. 11. Данные режимы имеют общие черты с рассмотренными

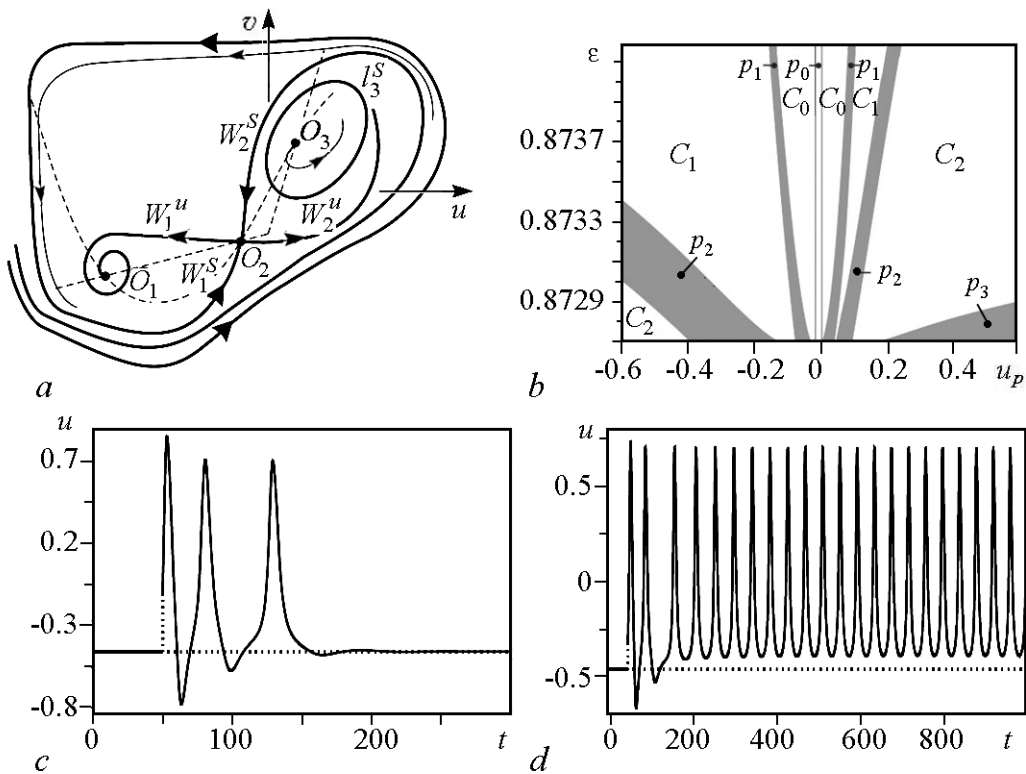


Рис. 10. *a* – возбуждаемо-колебательный мультипороговый режим. *b* – области генерации серий импульсов отклика (p_i) с возвращением к исходному состоянию равновесия либо (c_i) переходом в режим периодической генерации импульсов. *c* и *d* – примеры откликов. Параметры: $\alpha = 0.8, \beta = 1.1258, I_0 = 0.0595$

Fig. 10. *a* – excitable-oscillatory multi-threshold regime. *b* – areas of generation of different number of response pulses (spike trains) with either return to previous equilibrium state (p_i) or transition to regime of periodic spiking (c_i). *c* и *d* – the examples of responses. The parameters are $\alpha = 0.8, \beta = 1.1258, I_0 = 0.0595$

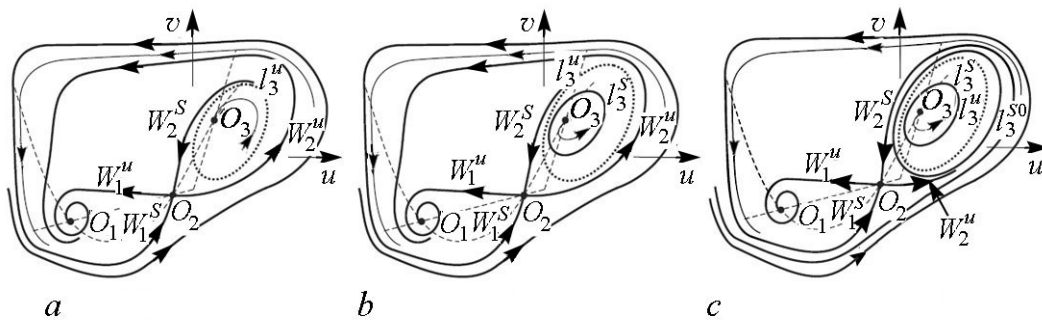


Рис. 11. (*a, b*) – возбуждимые мультипороговые режимы с фоновым состоянием равновесия (O_3) и предельным циклом (l_3^s), соответственно. *c* – возбуждаемо-колебательный мультипороговый режим с фоновым предельным циклом (l_3^s)

Fig. 11. (*a, b*) – excitable multi-threshold regimes with background equilibrium state (O_3) and limit cycle (l_3^s), respectively. *c* – excitable-oscillatory multi-threshold regimes with background limit cycle (l_3^s)

выше режимами с мультипороговыми свойствами, поэтому останавливаться на них подробно не будем.

Подводя итог, можно сказать, что модель ФитцХью–Нагумо, представляющая собой простую динамическую систему на плоскости, адекватно описывает ключевые черты динамики нейрона – наличие потенциала покоя, возможность генерации потенциала действия, порог возбуждения, рефрактерность и проч. Наблюдаемые в данной системе динамические режимы включают в себя возбудимость и периодическую генерацию импульсов действия. Однако, в отличие от более сложных для аналитического исследования моделей типа Ходжкина–Хаксли, динамика модели ФитцХью–Нагумо может быть изучена качественными методами и проиллюстрирована на фазовой плоскости. Кроме того, важной особенностью моделей ФитцХью–Нагумо является достаточно простая схема радиотехнической реализации [16, 23, 24]. Именно благодаря простоте, с одной стороны, и адекватному отражению базовых свойств нейрона, с другой, модель ФитцХью–Нагумо пользуется большой популярностью среди исследователей.

2.4. Модель Хиндмарша–Роуза. Приведённые выше модели нейронной активности описывают генерацию нейронами отдельных импульсов – потенциалов действия, или спайков. Однако в нейрофизиологии известна другая, не менее важная, форма нейронной активности – генерация бёрстов. Бёрсты представляют собой группы двух или более спайков, идущих подряд друг за другом и перемежаемых периодами отсутствия активности. Впервые модель нейронного бёрстинга была предложена в работе Хиндмарша и Роуза [25]. Данная модель может трактоваться, с одной стороны, как обобщение модели ФитцХью–Нагумо, а с другой стороны как упрощение физиологически реалистичной модели Ходжкина–Хаксли. Данная модель является оптимальной с точки зрения баланса простоты и богатства демонстрируемых динамических режимов. Модель Хиндмарша–Роуза представляет собой трехмерную динамическую систему следующего вида:

$$\frac{dx}{dt} = y - ax^3 + bx^2 + I_{ext} - z, \quad (12)$$

$$\frac{dy}{dt} = c - dx^2 - y, \quad (13)$$

$$\frac{dz}{dt} = r(s(x - x_1) - z). \quad (14)$$

Здесь переменная x описывает мембранный потенциал нейрона, переменные y и z соответствуют быстрому и медленному ионным токам, протекающим через мембрану, причём параметр $r \ll 1$ определяет отношение характерных временных масштабов изменения этих токов. Параметр I_{ext} описывает внешний ток, подаваемый на нейрон, а остальные параметры характеризуют нелинейность проводимости мембраны. Типичными значениями являются $a = c = 1$, $b = 3$, $d = 5$, остальные параметры обычно рассматриваются как контрольные и позволяют управлять динамическими режимами системы.

Благодаря малости параметра r в системе Хиндмарша–Роуза могут быть выделены так называемые быстрые и медленные движения [26]. Первые два уравнения для переменных x и y задают быструю подсистему, переменная z является медленной. При $r = 0$ значение переменной z является фиксированным и входит в быструю подсистему в качестве параметра. Наиболее важным свойством быстрой подсисте-

мы (12)–(13) является наличие в ней двух различных аттракторов – устойчивого предельного цикла и устойчивого состояния равновесия. Предельный цикл соответствует периодической генерации нейроном спайков, а состояние равновесия – покоем нейрона. При увеличении z предельный цикл исчезает через бифуркацию петли сепаратрис седла, а при уменьшении z через седло-узловую бифуркацию исчезает устойчивое состояние равновесия. Принципиально важным свойством быстрой подсистемы является наличие в ней интервала бистабильности, то есть сосуществования устойчивого предельного цикла и устойчивого состояния равновесия (рис. 12, *a*).

При $0 < r \ll 1$ происходит медленное изменение переменной z . При этом аттракторы быстрой системы формируют в фазовом пространстве полной системы два многообразия медленных движений: состоянию равновесия в быстрой системе соответствует одномерное многообразие W_0 , а предельному циклу – двумерное многообразие W_1 , представляющее собой осцилляционную поверхность (рис. 12, *b*). Устойчивые многообразия медленных движений системы по одной разделены неустойчивым многообразием W_U , соответствующим седлу быстрой подсистемы. Граница многообразия W_1 определяется гомоклинической бифуркацией в быстрой подсистеме, а граница многообразия W_0 определяется седло-узловой бифуркацией в быстрой подсистеме.

В соответствии с уравнением (14), динамика медленной переменной z зависит от состояния быстрой подсистемы: если быстрая система находится в колебательном режиме, то есть на многообразии W_1 , то переменная z растет, а если быстрая система находится в состоянии покоя, то есть на многообразии W_0 , то медленная переменная z убывает. Таким образом в полной системе возникает повторяющееся движение по многообразиям. Сначала изображающая точка движется по многообразию W_1 в сторону увеличения z , пока не достигает его края. Затем система переключается на

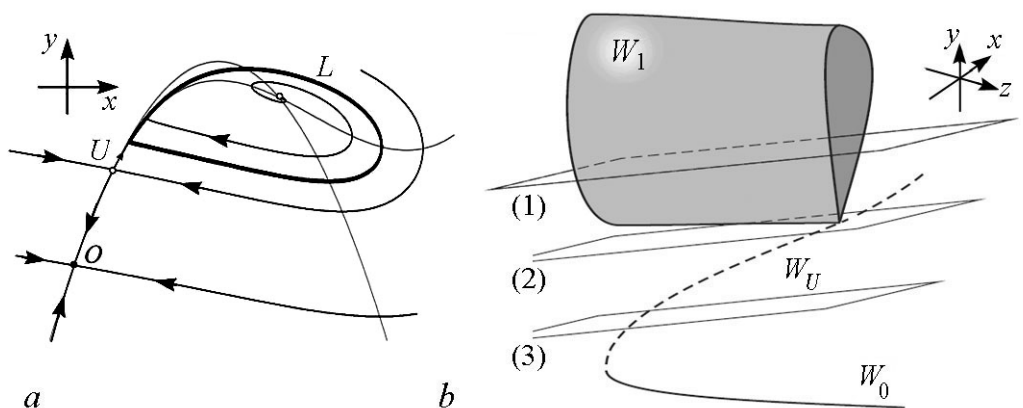


Рис. 12. *a* – характерный фазовый портрет быстрой подсистемы (12)–(13) модели Хиндмарша–Роуза. В широкой области параметров система бистабильна, в ней сосуществуют устойчивое состояние равновесия O и устойчивый предельный цикл L , разделённые седлом U . *b* – качественное изображение полного фазового пространства модели Хиндмарша–Роуза. Устойчивые многообразия W_0 и W_1 разделены неустойчивым многообразием W_U . Также изображены три различных положения плоскости нульклины для уравнения (14)

Fig. 12. *a* – a typical phase portrait of the fast subsystem (12)–(13) of the Hindmarsh–Rose model. The system is bistable in a wide range of parameters with a stable steady state O and a stable limit cycle L separated by a saddle U . *b* – a qualitative view of the full phase space of the Hindmarsh–Rose model. The stable manifolds W_0 and W_1 are separated by the unstable manifold W_U . Also depicted are three different positions of the nulcline plane for Eq. (14)

многообразие W_0 и движется по нему в сторону уменьшения z , пока не доходит до края; после этого процесс повторяется. Когда изображающая точка полной системы находится вблизи многообразия W_0 , это соответствует гиперполяризованному состоянию нейрона, то есть времени затишья. Когда изображающая точка вращается вокруг многообразия W_1 , это соответствует генерации спайков. Таким образом, повторяющиеся переключения между многообразиями соответствуют генерации полной системы пачек спайков, или бёрстов (рис. 13).

Заметим, что скорость движения системы вдоль многообразий медленных движений определяется расположением плоскости $z = s(x - x_1)$, которая определяет нульклину уравнения (14). Положение данной плоскости контролируется параметрами s и x_1 , которые таким образом определяют длительности бёрстов и периодов затишья между ними. Так, при больших x_1 , когда плоскость нульклина пересекает многообразие W_1 , система не покидает данного многообразия (положение (1) на рис. 12, *b*). В этом случае периодов затишья не возникает, и система генерирует периодические спайки с высокой частотой. При малых x_1 , когда плоскость нульклина пересекает седловое многообразие, происходят повторяющиеся переключения между многообразиями (положение (3) на рис. 12, *b*). При этом чем ниже расположена плоскость нульклина, тем больше времени система проводит на многообразии W_0 и, соответственно, тем дольше периоды затишья между бёрстами.

Большой интерес представляет промежуточное положение плоскости нульклина, когда пересечение нульклина с многообразием W_1 происходит вблизи седла (положение (2) на рис. 12, *b*). В данной области параметров происходит переход от генерации спайков к генерации бёрстов, ставший предметом ряда исследований [27–29]. Следует отметить, что в данной области параметров разделение движений системы на быстрые и медленные становится некорректным. Действительно, период предельного цикла в быстрой подсистеме неограниченно возрастает по мере приближения к точке бифуркации. Исследования показывают, что при уменьшении x_1 предельный цикл, соответствующий периодическому спайкингу, претерпевает каскад бифурка-

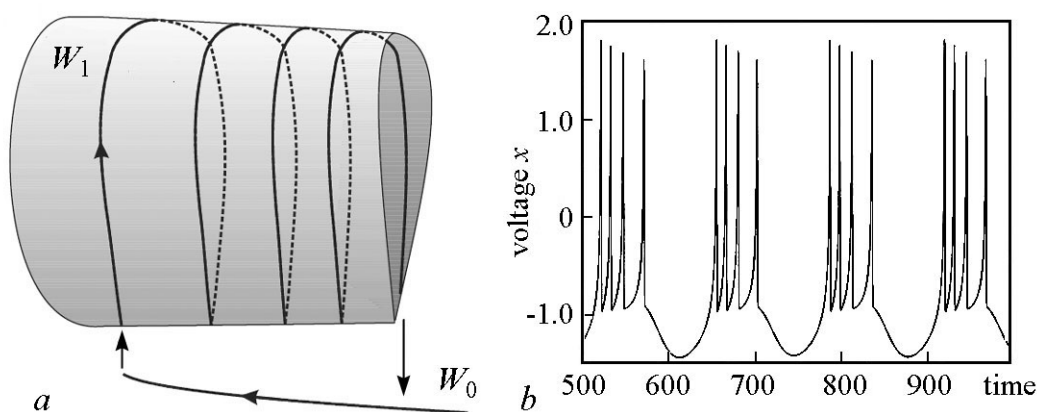


Рис. 13. Характерная динамика полной системы Хиндмарша–Роуза. *a* – последовательные переходы между многообразиями W_0 и W_1 . *b* – зависимость мембранного потенциала x от времени – периодическая генерация бёрстов, состоящих из четырех спайков

Fig. 13. Typical dynamics of the Hindmarsh–Rose system. *a* – sequential transitions between the manifolds W_0 and W_1 . *b* – the membrane potential x versus time – periodic generation of burst consisting of four spikes

ций удвоения периода. В системе рождается странный аттрактор, расположенный вблизи края многообразия W_1 и соответствующий хаотической генерации спайков. Переход от хаотической генерации спайков к хаотической генерации бёрстов происходит через гомоклиническую бифуркацию в полной системе. Дальнейшее уменьшения x_1 приводит к уменьшению продолжительности и числа спайков в бёрстах. Возникают окна прозрачности, в которых генерация бёрстов является регулярной.

Таким образом, система Хиндмарша–Роуза способна демонстрировать широкий спектр динамических режимов в зависимости от управляющих параметров. К числу этих режимов относятся регулярная и хаотическая генерации спайков или бёрстов, а также возбудимые режимы.

2.5. Модель нейрона с постдеполяризацией. Как было сказано выше, важнейшим свойством нервных клеток является возбудимость, то есть способность генерировать электрический импульс в ответ на внешнее воздействие достаточной амплитуды. Количественной характеристикой возбудимости является порог возбуждения нейрона, то есть минимальная величина амплитуды внешнего воздействия, приводящее к возбуждению системы. Оказывается, порог возбуждения некоторых нейронов не является постоянной величиной, а изменяется во времени: генерация одного потенциала действия может привести к временному изменению порога возбуждения последующих импульсов. Данное явление называется постгиперполяризацией (afterhyperpolarization, АНП) в случае повышения порога и постдеполяризацией (afterdepolarization, ADP) в случае его понижения (см., например, [30–32]).

Свойство постдеполяризации нейронной мембраны может играть важную роль в динамике отдельных нейронов и нейронных ансамблей. Понижение порога возбуждения после однократной генерации потенциала действия может приводить к возникновению в дальнейшем спонтанных вторичных спайков или к переходу нейрона в режим бёрстовой активности. Предполагается, что постдеполяризация играет важную роль в когнитивных процессах центральной нервной системы, в частности, при формировании рабочей памяти [33–35]. Ионные механизмы, лежащие в основе постдеполяризации, до конца не изучены, однако наиболее вероятный механизм связан с некоторым ионным током, который быстро активируется после возбуждения нейрона и затем медленно инактивируется [36, 37].

Свойство постдеполяризации описывает модель, предложенная в работе [38]. Данная система является обобщением классической модели ФитцХью–Нагумо, в которую вводится дополнительный входящий ионный ток z . Этот ток быстро включается после возбуждения нейрона и медленно уменьшается после прекращения этого возбуждения. Модель имеет следующий вид:

$$\varepsilon \frac{dx}{dt} = z + I_{ext} - y - f(x), \quad (15)$$

$$\frac{dy}{dt} = a + g(x) - by, \quad (16)$$

$$\frac{dz}{dt} = \alpha(x)(1 - z) - \beta(x)z. \quad (17)$$

Здесь x описывает мембранный потенциал, I_{ext} – внешний ток, y и z соответствуют двум различным типам ионных токов, малый параметр $\varepsilon \ll 1$ соответствует емкости мембраны, $f(x)$ является нелинейной функцией кубической формы, $g(x)$ –

монотонно возрастающая функция, функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ описывают активацию и инактивацию входящего ионного тока z и имеют вид ступенчатых функций.

В системе (15)–(17) также можно выделить быстрые и медленные движения. Многообразие медленных движений системы изображено на рис. 14. Оно имеет размерность 2 и состоит из двух устойчивых и одной неустойчивой компонент. Устойчивая компонента W_0 располагается в области отрицательных x и соответствует невозбужденному состоянию нейрона, компонента W_1 расположена при положительных x и соответствует возбуждению.

Как и классическая модель ФитцХью–Нагумо, система (15)–(17) является возбудимой: под действием достаточно сильного импульса изображающая точка переходит с многообразия W_0 на многообразие W_1 , нейрон генерирует спайк. После этого изображающая точка возвращается на многообразие W_0 и движется вдоль него. Важно, что в процессе движения траектория приближается к границе данного многообразия. В случае, если траектория не достигает этой границы, нейрон возвращается в состояние покоя (рис. 14, *a*). Однако важное значение имеет тот факт, что пока траектория проходит вблизи границы, мембранный потенциал x испытывает положительное отклонение по сравнению с равновесным состоянием. Это значит, что мембрана имеет в это время пониженный порог возбудимости, то есть для повторного возбуждения достаточно стимула меньшей амплитуды. Именно в этом и заключается свойство постдеполяризации (рис. 15, *a*). Динамический механизм, лежащий в основе данного свойства, заключается в приближении траектории, соответствующей потенциалу действия, к граничному множеству, определяющему порог возбуждения системы.

В случае, если траектория пересекает границу многообразия W_0 , нейрон повторно генерирует спайк, как это изображено на рис. 14, *b*. Этот процесс может повториться несколько раз или вылиться в периодическое возбуждение нейрона. Возникновение режима периодической генерации потенциалов действия связано с бифуркацией двойного предельного цикла. В результате этой бифуркации в системе рождается устойчивый предельный цикл, и система становится бистабильной. Внешний стимул приводит к «переключению» нейрона из состояния покоя в режим периодической генерации потенциалов действия (рис. 15, *b*). Такое поведение может быть интерпретировано как динамическая память: нейрон «запо-

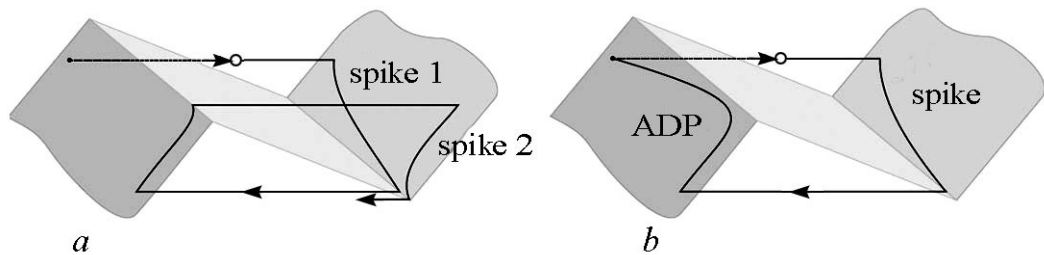


Рис. 14. Движения между многообразиями медленных движений: *a* – одиночный спайк; *b* – повторяющиеся спайки. Модифицировано из *Klinshov V.V., Nekorkin V.I. // Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation. 2012. Vol. 17(3). Pp. 1438–1446*

Fig. 14. Transitions between the slow motion manifolds: *a* – a single spike; *b* – tonic spiking. Modified from *Klinshov V.V., Nekorkin V.I. Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, 2012, 17(3), pp. 1438–1446*

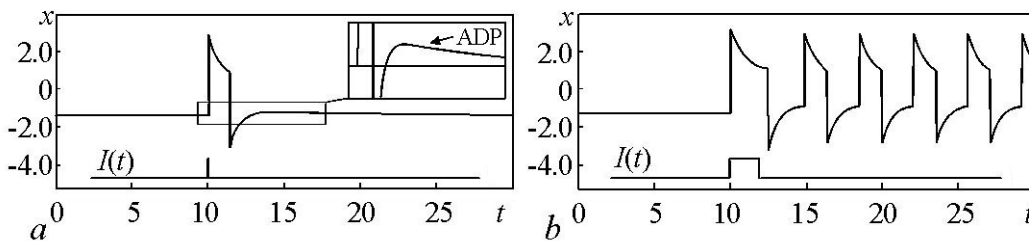


Рис. 15. Отклики нейрона на внешние стимулы, параметры $\varepsilon = 10^{-2}$, $b = 0.5$, $\delta_0 = 0.1$, $\delta_1 = 1$, $a = -1$ зафиксированы, параметр γ изменяется: a – возбудимость и постдеполяризация, $\gamma = 1.6$; b – периодическая генерация спайков, $\gamma = 2$. Модифицировано из *Klinshov V.V., Nekorkin V.I. // Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*. 2012. Vol. 17(3). Pp. 1438–1446

Fig. 15. The response of a neuron on external stimuli, parameters $\varepsilon = 10^{-2}$, $b = 0.5$, $\delta_0 = 0.1$, $\delta_1 = 1$, $a = -1$ are fixed, parameter γ is varied: a – excitability and afterdepolarization, $\gamma = 1.6$; b – tonic spiking, $\gamma = 2$. Modified from *Klinshov V.V., Nekorkin V.I. Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 2012, 17(3), pp. 1438–1446

минает» внешнее воздействие и хранит информацию о нём в форме периодической активности (ср. с [33]).

Заметим, что вблизи точки бифуркации в системе могут наблюдаться так называемые спонтанные вторичные спайки [39,40]. Под действием внешнего импульса изображающая точка попадает в область сгущения траекторий и совершает несколько оборотов, после чего вновь возвращается в состояние равновесия. Это соответствует генерации нейроном нескольких дополнительных спайков после прекращения стимуляции.

2.6. Модель нейрона нижних олив. Нижние оливы являются одним из основных элементов системы контроля и координации движений [41] у многих позвоночных животных и наиболее ярко выражены в организмах птиц и млекопитающих. Нижние оливы специфическим образом преобразуют сигналы, поступающие от коры больших полушарий и спинного мозга, и передают эти сигналы далее в различные отделы мозжечка. Сигналы, поступающие через нижние оливы несут информацию о планируемом к выполнению движении, на основе которой мозжечок оптимизирует управление мышцами, обеспечивая рациональность, эффективность и отточенность движений.

Индивидуальная динамика нейронов нижних олив характеризуется ритмической колебательной активностью. Эта активность может проявляться как в форме квазипериодических подпороговых колебаний, так и в регулярной генерации потенциалов действия (спайков) [42, 43]. Кроме того, нейроны нижних олив могут также демонстрировать хаотическую динамику.

Электрофизиологические свойства нейронов нижних олив определяются ионными токами, протекающими через клеточную мембрану [44]. Эти токи формируются в основном ионами кальция, калия и натрия и обладают различными уровнями активации и временами действия. Кальциевые ионные токи участвуют преимущественно в медленных процессах деполяризации и гиперполяризации клеточной мембраны и отвечают за генерацию низкочастотных подпороговых колебаний мембранного потенциала. Натриевые ионные токи отвечают за формирование коротких потенциалов действия, возникающих, как правило, на волне плавной деполяризации и/или в ответ на возбуждающее внешнее воздействие. Однако спайковый отклик может также воз-

никать и в ответ на подавляющее воздействие (так называемый постингибиторный отклик). Калиевые ионные токи в нейронах нижних олив играют скорее вторичную роль, внося определенный вклад как в быструю, так и в медленную динамику.

Одной из самых простых моделей нейронов нижних олив, демонстрирующих хорошее качественное соответствие с результатами натуральных экспериментов, является модель, предложенная в [45, 46]. Эта модель состоит из двух связанных подсистем. Первая подсистема моделирует колебания, вызванные действием натриевых ионных токов, в то время как вторая воспроизводит динамику кальциевых ионных токов. Полная модель представляет собой систему четырех нелинейных дифференциальных уравнений первого порядка и имеет вид

$$\begin{cases} \varepsilon_{Na} \frac{du}{dt} = f(u) - v, \\ \frac{dv}{dt} = u - (z - I_{Ca}) - I_{Na}, \end{cases} \quad (18)$$

$$\begin{cases} \frac{dz}{d(kt)} = f(z) - w, \\ \frac{dw}{d(kt)} = \varepsilon_{Ca}(z - I_{Ca} - I_{ext}(t)), \end{cases}$$

где переменные z и w отвечают за генерацию подпороговых колебаний и низкочастотных (Ca^{2+} -зависимых) спайков, а переменные u и v генерацию высокопороговых (Na^{2+} -зависимых) спайков. Параметры ε_{Ca} и ε_{Na} контролируют временные масштабы собственных колебаний модели, токи I_{Ca} и I_{Na} управляют уровнем деполаризации мембраны двух подсистем, f – нелинейная функция кубической формы ($f(x) = x(x-a)(1-x)$). Параметр k устанавливает отношение временных масштабов подсистем модели. Величина $I_{ext}(t)$ моделирует действие внешних токов на нейрон.

Заметим, что связь кальциевой и натриевой подсистем в (18) является односторонней. Иными словами изменение величины кальциевых ионных токов влечет за собой изменение натриевых, но не наоборот. Подобная конфигурация носит название «master-slave configuration». Таким образом, в модели (18) колебания кальциевых ионных токов задают ритм, на фоне которого формируется динамика натриевых ионных токов.

При соответствующем выборе параметров модель (18) может генерировать устойчивые подпороговые или спайковые колебания. Рассмотрим более подробно механизм возникновения таких колебаний, выбрав в качестве контрольного параметра величину I_{Ca} . Положим вначале, что параметр I_{Ca} достаточно мал и при $I_{ext}(t) = 0$ система (18) находится в состоянии покоя. С ростом I_{Ca} в кальциевой подсистеме происходит рождение периодических колебаний в результате суперкритической бифуркации Андронова–Хопфа. Эти колебания, в свою очередь, порождают вынужденные квазигармонические колебания в подсистеме для натриевых ионных токов. Такое поведение и определяет возникновение в модели нейрона нижних олив устойчивых подпороговых колебаний мембранного потенциала. Результаты численного моделирования демонстрируют хорошее качественное совпадение с данными натуральных экспериментов (рис. 16), полученных *in vitro* при послонных исследовани-

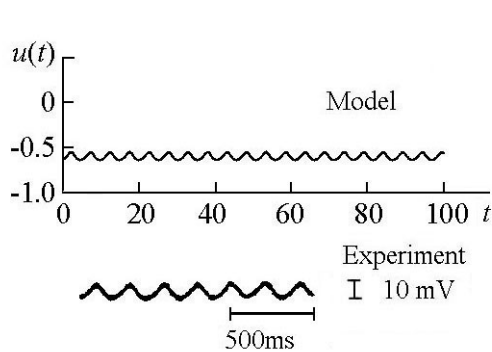


Рис. 16. Сравнение результатов моделирования с экспериментальными данными, полученными *in vitro*. Значения параметров: $\varepsilon_{Na} = 0.001$, $\varepsilon_{Ca} = 0.02$, $I_{Na} = -0.6$, $I_{Ca} = 0.01$, $a = 0.01$, $k = 10$. Модифицировано из [47]

Fig. 16. Comparison of simulation results with experimental data obtained *in vitro*. Parameter values: $\varepsilon_{Na} = 0.001$, $\varepsilon_{Ca} = 0.02$, $I_{Na} = -0.6$, $I_{Ca} = 0.01$, $a = 0.01$, $k = 10$. Modified from [47]

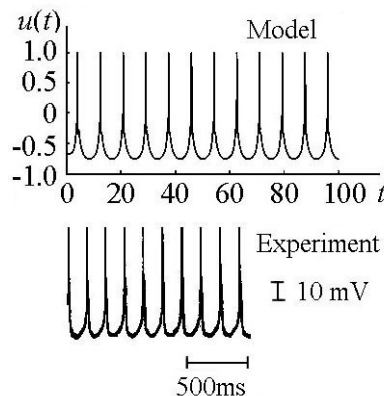


Рис. 17. Сравнение результатов моделирования с экспериментальными данными, полученными *in vitro*. Значения параметров: $\varepsilon_{Na} = 0.001$, $\varepsilon_{Ca} = 0.02$, $I_{Na} = -0.59$, $I_{Ca} = 0.03$, $a = 0.01$, $k = 10$. Модифицировано из [47]

Fig. 17. Comparison of simulation results with experimental data obtained *in vitro*. Parameter values: $\varepsilon_{Na} = 0.001$, $\varepsilon_{Ca} = 0.02$, $I_{Na} = -0.59$, $I_{Ca} = 0.03$, $a = 0.01$, $k = 10$. Modified from [47]

ях мозгового ствола морских свинок и опубликованных впервые в работе Llinas & Yarom [47].

Амплитуда подпороговых колебаний в (18) при увеличении бифуркационного параметра I_{Ca} нарастает вначале плавно, и дальнейшее поведение модели зависит от величины I_{Na} . Если параметр I_{Na} достаточно велик, то с ростом I_{Ca} в натриевой подсистеме амплитуда колебаний мембранного потенциала превышает порог возбудимости, и модель начинает генерировать периодические релаксационные колебания большой амплитуды – так называемые Na^{2+} -зависимые спайки (рис. 17). Заметим, что возникновение спайков происходит на волне гиперполяризации мембраны нейрона, вызванной колебаниями кальциевых ионных токов, то есть полностью определяется в этом случае фазой подпороговых колебаний. Если величина I_{Na} достаточно мала, то амплитуда колебаний в кальциевой подсистеме недостаточна для генерации Na^{2+} -зависимых спайков. Однако кальциевая подсистема обладает собственным порогом возбудимости. При превышении этого порога с ростом I_{Ca} форма колебаний в кальциевой подсистеме трансформируется нелинейным образом и при последующем увеличении I_{Ca} практически не изменяется. Мембранный потенциал при этом совершает колебания, форма которых существенно отличается от квазигармонической формы подпороговых колебаний, а амплитуда остается значительно ниже амплитуды Na^{2+} -зависимых спайков. Такое поведение соответствует режиму генерации Ca^{2+} -зависимых спайков, наблюдаемых в натуральных экспериментах (рис. 18). Отметим также, что в зависимости от параметров модель (18) может качественно воспроизводить спонтанные или вынужденные колебания, наблюдаемые в нейронах нижних олив.

Модель (18) представляет значительный интерес для моделирование коллективной динамики ансамблей нейронов нижних олив. Объединенные в единую сеть

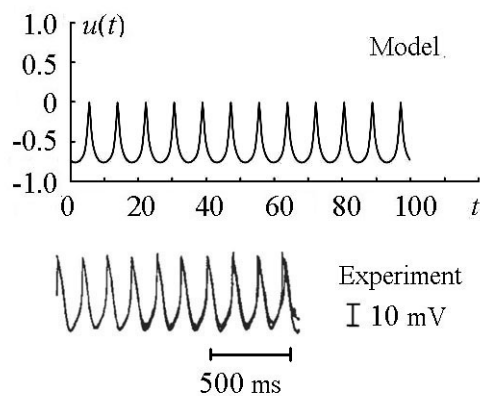


Рис. 18. Сравнение результатов моделирования с экспериментальными данными, полученными *in vitro*. Значения параметров: $\varepsilon_{Na} = 0.001$, $\varepsilon_{Ca} = 0.02$, $I_{Na} = -0.6$, $I_{Ca} = 0.03$, $a = 0.01$, $k = 10$. Модифицировано из [47]

Fig. 18. Comparison of simulation results with experimental data obtained *in vitro*. Parameter values: $\varepsilon_{Na} = 0.001$, $\varepsilon_{Ca} = 0.02$, $I_{Na} = -0.6$, $I_{Ca} = 0.03$, $a = 0.01$, $k = 10$. Modified from [47]

используются при исследовании больших нейронных ансамблей, так как, в силу своей низкой размерности, позволяют сэкономить вычислительные ресурсы. С другой стороны, простота подобных моделей часто позволяет получать аналитические результаты для крупномасштабных сетей, например, путём сведения их динамики к редуцированным среднеполевым уравнениям [48–57].

Первая феноменологическая модель нейрона была предложена более века назад в 1907 году, задолго до открытия механизмов нейронной возбудимости. В работе Л. Лапика [58] нейрон моделировался как шунтированный конденсатор, заряжаемый внешним током. Емкость конденсатора соответствует при этом емкости мембраны, а сопротивление шунтирующего резистора – сопротивлению утечки. Напряжения на конденсаторе соответствует мембранному потенциалу и описывается уравнением

$$C \frac{dV_m}{dt} = I_{ext} - g(V_m - V_0), \quad (19)$$

где V_0 – потенциал покоя, I_{ext} – подаваемый на нейрон внешний ток, g – проводимость утечки мембраны. Когда мембранный потенциал достигает некоторого порогового значения $V_{th} > V_0$, считается, что нейрон генерирует спайк, после которого его мембранный потенциал мгновенно устанавливается равным некоторому значению $V_{reset} < V_0$.

Динамика такой системы проиллюстрирована на рис. 19, а. Под действием внешнего тока мембранный потенциал постепенно увеличивается и при достаточно интенсивном воздействии в некоторый момент достигает порогового значения. После этого генерируется спайк, и мембранный потенциал мгновенно уменьшается до минимального значения и снова постепенно нарастает. Благодаря характерному для подобных систем чередованию периодов длительного накопления и кратковременного сброса потенциала, модели такого типа часто называют «накопление–сброс».

модельные нейроны (18) формируют разнообразные структуры колебательной активности в виде фазокогерентных кластеров. Различные наборы кластеров представляют собой шаблоны управляющих команд, задаваемых сетью. При этом внешние сигналы, поступающие на отдельные элементы могут обеспечивать быструю перестройку кластеров на выходе сети.

2.7. Модели типа «накопление–сброс».

Перейдем к описанию моделей нейронов, не претендующих на детальное описание ионного транспорта через мембрану. Такие модели нацелены преимущественно на воспроизведение базовых динамических режимов и свойств нейронов без привязки к определяющим их физическим механизмам.

С одной стороны, эти модели часто

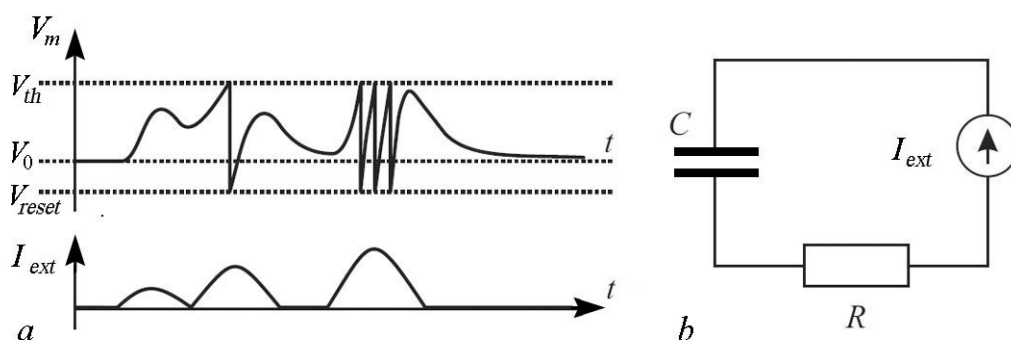


Рис. 19. *a* – динамика системы (19) – зависимость от времени мембранного потенциала при заданном внешнем воздействии; спайк соответствует мгновенному изменению величины мембранного потенциала с V_{th} на V_{reset} . *b* – эквивалентная электрическая схема

Fig. 19. *a* – dynamics of the system (19) – time dependence of the membrane potential for a given external action; spike corresponds to an instantaneous change in the value of the membrane potential from V_{th} to V_{reset} . *b* – equivalent electrical circuit

Накопление соответствует подпороговой динамике мембранного потенциала, а сброс – генерации потенциала действия.

Модели подобного типа адекватно описывают динамику мембранного потенциала ниже порога возбуждения, воспроизводя её интегрирующие свойства. С физической точки зрения подпороговая динамика данной модели аналогична динамике линейного шунтированного конденсатора (рис. 19, *b*). В отсутствие внешнего сигнала мембранный потенциал равен потенциалу покоя V_0 . Поступление на вход ненулевого внешнего сигнала приводит к зарядке конденсатора, однако наличие конечного сопротивления вызывает ток утечки. Таким образом, короткий импульс тока вида $I_{ext} = A\delta(t)$ приведет к экспоненциально затухающему отклику $u(t) = u_0 + (A/C) \exp(-tg/C)$. Вследствие линейности подпороговой динамики, подача на нейрон серии коротких импульсов вызовет отклик, являющийся линейной суперпозицией откликов на каждый из импульсов. Таким образом, модель (19) эффективно интегрирует входные сигналы на характерных интервалах времени $\tau \sim g/C$.

Отметим, что модели типа «накопление–сброс» не описывают динамики нейрона выше порога возбуждения. По достижении мембранным потенциалом порогового значения считается, что нейрон мгновенно генерирует спайк. Таким образом, подобные модели ничего не говорят ни о динамическом механизме, ни о форме и длительности потенциала действия. Во многих случаях такое допущение оправдано, так как потенциалы действия зачастую имеют фиксированную форму и происходят гораздо быстрее подпороговых процессов. Использование моделей типа «накопление–сброс» позволяет исключить из рассмотрения динамику мембранного потенциала во время спайка и упростить тем самым как численное, так и теоретическое исследование.

В зависимости от задачи в модели «накопление–сброс» могут вводиться различные дополнения для более адекватного описания тех или иных свойств нейрона. Так, для учёта свойства рефрактерности зачастую вводится следующее уточнение. После генерации спайка мембранный потенциал в течение некоторого фиксированного времени τ_{ref} удерживается равным V_{reset} , при этом нейрон не реагирует на внешние воздействия (см., например, [59]). Для учёта свойства адаптации частоты

проводимость мембраны g может полагаться изменяющейся во времени и описываться отдельным дифференциальным уравнением, например,

$$\tau_a \frac{dg}{dt} = -g,$$

причём при каждой генерации нейроном спайка проводимость g мгновенно увеличивается на некоторую величину Δg . Такая модификация приводит к возрастанию проводимости мембраны при генерации спайка и, как следствие, к постепенному снижению частоты спайков при фиксированном внешнем воздействии. Возможны и другие методы учёта адаптивных свойств нейрона, например, путём введения дополнительного медленного ионного тока, а также учёта нелинейности мембраны [60–62].

Большой популярностью пользуется так называемая квадратичная модель типа «накопление–сброс» [63–65]. В данной модели динамика мембранного потенциала описывается следующим квадратичным уравнением:

$$\frac{dV}{dt} = I_{ext} + a(V - V_0)(V - V_{th}). \quad (20)$$

При достижении мембранным потенциалом величины V_{th} нейрон генерирует спайк, и его потенциал мгновенно приобретает значение V_{reset} . Квадратичная модель обладает рядом дополнительных свойств по сравнению с линейной моделью. Например, при определённых значениях параметров в ней возможна бистабильность между режимом покоя и периодической генерацией спайков. Модель (20) является нормальной формой для так называемой возбудимости первого класса, связанной с седлоузловой бифуркацией [66].

3. Дискретные модели нейронной активности

В последнее время для исследования кооперативных явлений в крупномасштабных нейронных сетях возрастающий интерес вызывает новый класс систем с дискретным временем: системы взаимосвязанных точечных отображений. Модели в форме точечных отображений обладают рядом преимуществ по сравнению с моделями в форме дифференциальных уравнений. Например, если для воспроизведения колебательных свойств в системах дифференциальных уравнений требуется, как минимум, два измерения, а хаотического поведения – три, то в дискретном времени и тот, и другой тип динамики можно описать в рамках даже одномерного отображения. Это преимущество проявляется при моделировании сложных режимов активности даже отдельных нейронов и в значительной степени крупномасштабных нейронных цепей, состоящих из взаимодействующих между собой различных структурных единиц. Например, для моделирования режима хаотических спайк-бёрстовых колебаний (одного из важнейших режимов нейронной активности) с помощью систем с непрерывным временем потребуется, как минимум, трёхмерная нелинейная система дифференциальных уравнений. С другой стороны, известны [67–69] дискретные модели в форме двумерных точечных отображений, которые достаточно хорошо воспроизводят режим спайк-бёрстовых колебаний. Точечные отображения позволяют моделировать и многие другие режимы нейронной активности. Например, модель

*А.С. Дмитричев, Д.В. Касаткин, В.В. Клиньшов, С.Ю. Кириллов,
О.В. Масленников, Д.С. Шапин, В.И. Некоркин*
Изв. вузов «ПНД», т. 26, № 4, 2018

Д. Киалво [70] позволяет имитировать режимы так называемой нормальной и супернормальной возбудимости и др. Модель Н. Рувькова имеет несколько модификаций [71–73], одна из которых настроена на воспроизведение различных спайковых и бёрстовых колебательных режимов, а другая способна генерировать так называемые подпороговые колебания, то есть колебания малой амплитуды ниже порога возбуждения. Модель Курбажа–Некоркина [74, 75] является достаточно универсальной и описывает многие режимы нейронной активности.

3.1. Модель Киалво. Модель Киалво в форме точечного отображения имеет следующий вид [70]:

$$x_{n+1} = x_n^2 e^{y_n - x_n} + I, \quad (21)$$

$$y_{n+1} = ay_n - bx_n + c. \quad (22)$$

Здесь переменная x воспроизводит динамику мембранного потенциала; y – восстанавливающая переменная; a, b, c, I являются параметрами. Эти параметры управляют динамикой системы следующим образом: a – константа времени восстановления ($a < 1$); b определяет степень зависимости восстанавливающих процессов от уровня активности; c – постоянное смещение; параметр I характеризует действие ионных токов, инжестрированных в нейрон. В зависимости от параметра I динамика модели может быть разнообразной. Ключевую роль в установлении того или иного режима играет взаимное расположение изоклин $y = \ln \frac{x-I}{x} + x$ и $x = \frac{-(1-a)y+c}{b}$. Первая из этих изоклин представляет N -образную кривую с максимумом и минимумом, которая определяет пороговые свойства модели. Вторая изоклина – прямая, положение которой управляет устойчивостью неподвижной точки отображения.

В работе [70] описаны различные моды нейронной активности, воспроизводимые системой. Остановимся подробнее на некоторых из них.

Нормальная возбудимость. В таком режиме после генерации потенциала действия (спайка) и периода рефрактерности, мембранный потенциал монотонно возрастает к значению, соответствующему состоянию покоя. В модели последнему соответствует единственный аттрактор – устойчивый узел. Если амплитуда стимула достаточна для преодоления порога, на фазовой плоскости формируется траектория, напрямую возвращающаяся в неподвижную точку. Эта траектория воспроизводит режим нормальной возбудимости.

Супернормальная возбудимость. Отличие от предыдущего заключается в том, что процесс перехода мембранного потенциала к состоянию покоя сопровождается затухающими колебаниями. На фазовой плоскости этому режиму соответствует неподвижная точка – устойчивый фокус.

Колебательная бистабильность. При $I = 0.03$ динамика отображения бистабильна. На фазовой плоскости одновременно сосуществуют два аттрактора: устойчивый фокус и устойчивая замкнутая инвариантная кривая. Их области притяжения разделяются неустойчивой замкнутой инвариантной кривой. В зависимости от начальных условий, траектории могут притягиваться либо устойчивой точкой, либо устойчивой инвариантной кривой. Соответственно, в этом случае отображение воспроизводит либо режим супернормальной возбудимости, либо периодических спайковых колебаний.

Хаотические спайк-бёрстовые колебания. Показано, что при $a = 0.89$, $b = 0.18$, $c = 0.28$, $I = 0.03$ в системе существуют неустойчивая неподвижная точка и хаотический аттрактор в области D^+ . Динамический механизм хаотических колебаний состоит в следующем. Поскольку параметр b достаточно мал, переменная y остается более или менее в «замороженном» состоянии. Если пренебречь слагаемым $-bx$ в уравнении (22), то динамика переменной y будет задаваться одномерным отображением

$$y_{n+1} = ay_n + c \quad (23)$$

Это отображение имеет устойчивую неподвижную точку $y = c/(1 - a) = y_0$ с относительно большим мультипликатором $s = 0.89$. Поэтому любая траектория отображения стремится к этой точке достаточно быстро. В этом случае динамика переменной x описывается одномерным отображением

$$x_{n+1} = x_n^2 \exp(y_0 - x) + I. \quad (24)$$

Численное изучение этого отображения свидетельствует о его хаотических свойствах. Таким образом, относительно медленное изменение y и относительно быстрое изменение x формируют хаотический аттрактор в системе Киалво. Этот аттрактор определяет режим хаотических спайк-бёрстовых колебаний.

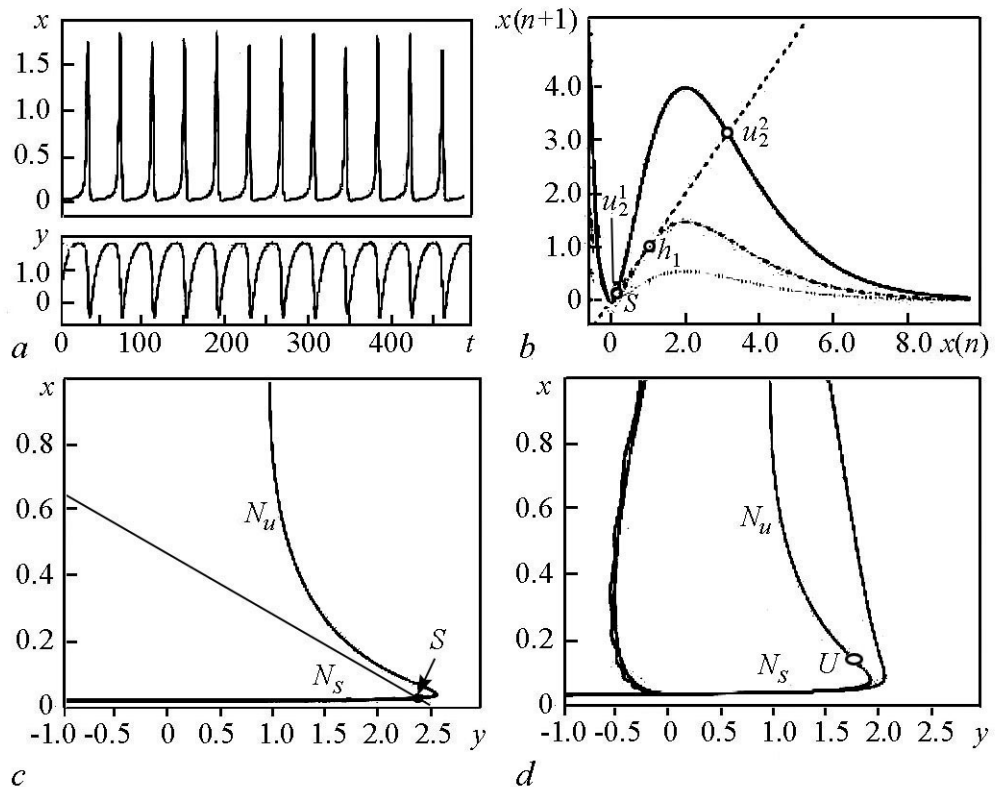


Рис. 20. *a* – динамика переменных модели Киалво для режима спайковой активности. *b* – отображение быстрой системы. *c* и *d* – фазовая плоскость с изображенными изоклинами. Взяты из [68]

Fig. 20. *a* – waveforms for the Chialvo model in case of the spiking activity regime. *b* – the map of fast motions. *c* and *d* – phase plane with nullclines. From [68]

3.2. Модель Ижикевича. Модель Ижикевича изначально разработана в непрерывном времени, но её дискретизация с временным шагом 1 ms даёт точечное отображение [76]

$$v_{n+1} = F[v_n, I - u_n], \quad (25)$$

$$u_{n+1} = \begin{cases} u_n + a \cdot [bv_n - u_n], & v_n < 30, \\ u_n + d, & v_n \geq 30, \end{cases} \quad (26)$$

где

$$F(v, I) = \begin{cases} \min(0.04v^2 + 6v + 140 + I, 30), & v < 30, \\ c, & v \geq 30. \end{cases} \quad (27)$$

Здесь v – мембранный потенциал в mV, u – медленная восстанавливающая переменная. Параметр a является малым и разделяет временные масштабы. Параметр c определяет напряжение при переустановке. Медленная подсистема имеет особенности: когда генерируется спайк, медленная переменная испытывает резкий скачок, равный значению параметра d . Быстро-медленные свойства модели позволяют ей воспроизводить разнообразные типы колебательной активности, в частности, спайк-бёрстовые колебания (рис. 21, *a*). Заметим, что отображение быстрых движений есть ни что иное как модель «накопление–сброс». Это видно из представленного рис. 21, *b*, на котором изображена диаграмма Кёнигса–Ламерея для медленной переменной u . Динамика полной системы определяется двумерным отображением, поэтому исчерпывающую информацию о возможных динамических сценариях нам даёт фазовая плоскость (рис. 21, *c*) с изображенными изоклинами. Изоклина, получаемая из быстрого отображения, является параболой

$$u = 0.04v^2 + 5v + 140 + I, \quad v < 30, \quad (28)$$

которая смещается влево или вправо на фазовой плоскости, если значение I уменьшается или увеличивается, соответственно. Поскольку парабола имеет две ветви, то при значениях переменной u , лежащих правее вершины параболы, быстрая система имеет две неподвижные точки: устойчивую и неустойчивую. Соответственно, ветви изоклины на фазовой плоскости (u, v) также могут быть классифицированы как устойчивая (N_s) и неустойчивая (N_u). Вершина параболы соответствует точке седло-узловой бифуркации быстрой подсистемы. С другой стороны, изоклина, получаемая из медленной подсистемы, является наклонной прямой. Когда изображающая точка находится выше этой прямой, значение u возрастает, когда ниже, значение u убывает. Параметр b управляет наклоном прямой изоклины. Множества, отмеченные на рис. 21, *c* и *d* как M_{spikes} , соответствуют спайковым циклам быстрой подсистемы. Их разрывы определяют смены периодов спайков. Когда множество M_{spikes} лежит целиком выше медленной изоклины, значение u увеличивается вдоль спайковых орбит до $u = u_h$, где линия переустановки $v = c$ пересекает N_u , формируя гомоклиническую орбиту быстрой подсистемы.

В модели Ижикевича может быть от нуля до двух неподвижных точек. Их устойчивость управляется значением внешнего тока I , как это показано на рис. 21, *c*, *d*. Разница между ними заключается в горизонтальном смещении N_s , N_u , M_{spikes} . Когда значение I достаточно мало, одна неподвижная точка глобально устойчива, а другая является седлом. Нейрон находится в возбудимом режиме.

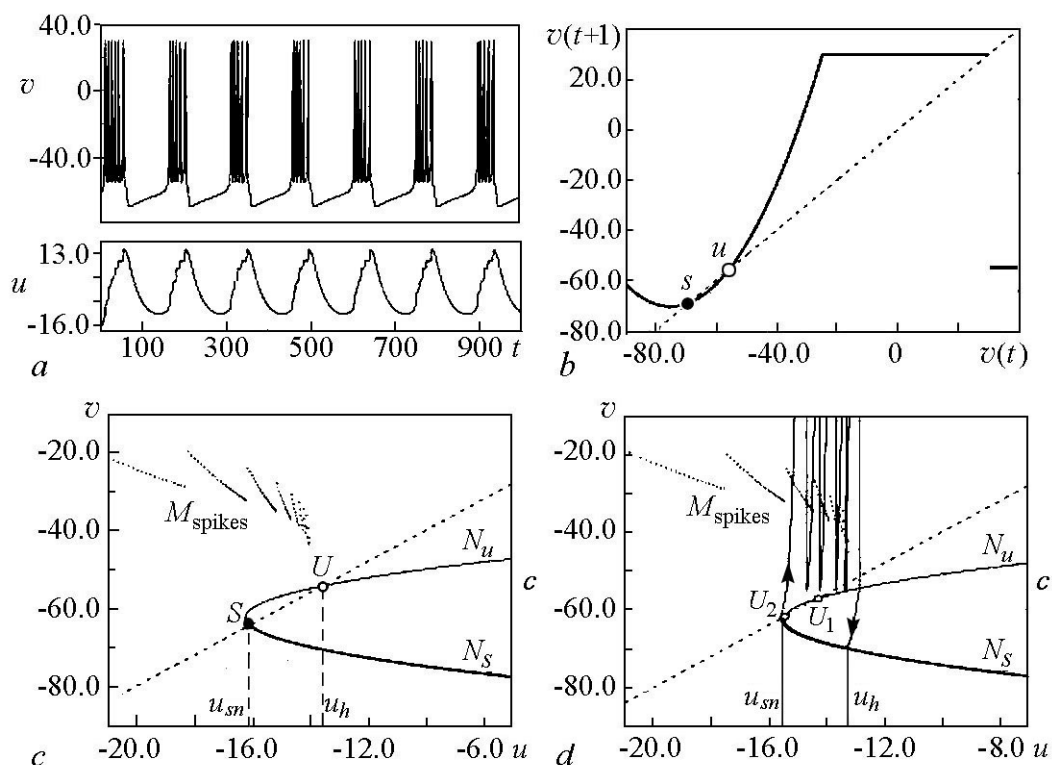


Рис. 21. *a* – динамика переменных модели Ижикевича для режима бёрстовой активности. *b* – отображение быстрой системы. *c* и *d* – фазовая плоскость с изображенными изоклинами. Взята из [68]

Fig. 21. *a* – waveforms for the Izhikevich model in case of the bursting activity regime. *b* – the map of fast motions. *c* and *d* – phase plane with nullclines. From [68]

Возмущение, переводящее за неустойчивую ветвь, вызывает генерацию ответного потенциала действия. Когда значение I растет, многообразия смещаются вправо и теряют устойчивость через бифуркацию Неймарка–Сакера при

$$I_{NS,Izh} = 16.25 - 62.5b + 6.25 \left(b^2 - \frac{(b-a)^2}{(1-a)^2} \right).$$

Это значение лежит в окрестности точки пересечения медленной изоклины и вершины $N_s - N_u$. Интересно отметить, что S перестает быть глобально устойчивой неподвижной точкой при слегка меньшем значении I , поскольку бифуркация Неймарка–Сакера субкритическая. После бифуркации S становится неустойчивым фокусом U_2 , и в системе теперь существуют две неустойчивые неподвижные точки. Траектория притягивается орбитой, соответствующей спайковым или бёрстовым колебаниям.

3.3. Модель Рутькова. Двумерное отображение, описывающее динамику модели Рутькова, записывается в виде [71]

$$x_{n+1} = f(x_n, y_n), \tag{29}$$

$$y_{n+1} = y_n - \mu(x_n + 1) + \mu\sigma, \tag{30}$$

где x_n – быстрая переменная, отражающая взаимодействие калиевых и натриевых «быстрых» ионных токов; y_n – медленная переменная, моделирующая динамическое действие «медленных» ионных токов, например, кальциевого тока. Медленное изменение во времени переменной y_n обуславливается малостью параметра μ , в большинстве случаев будем полагать $\mu = 0.001$. Как будет показано ниже, параметр σ задает невозмущенное состояние модельного нейрона. Быстрое одномерное отображение модельной системы построено так, чтобы оно могло отвечать как за спайковую активность нейрона, так и за его равновесное состояние. Такое поведение может быть достигнуто благодаря использованию разрывной функции специального вида $f(x, y)$

$$f(x, y) = \begin{cases} \alpha/(1-x) + y, & x \leq 0, \\ \alpha + y, & 0 < x < \alpha + y, \\ -1, & x \geq \alpha + y. \end{cases} \quad (31)$$

Здесь α является контрольным параметром отображения. Зависимость $f(x, y)$ от x , полученная при фиксированном значении y , приведена на рис. 22. Значения параметров α и y выбраны таким образом, чтобы проиллюстрировать возможность одновременного существования неподвижных точек x_{ps} , x_{pu} и предельного цикла P_k , соответствующего спайковым колебаниям. Функция строится таким образом, что когда значения y возрастают или уменьшаются, график зависимости $f(x, y)$ от x соответственно поднимается вверх или опускается вниз. Исключение составляет лишь третий интервал, заданный неравенством $x \geq \alpha + y$, где значения функции $f(x, y)$ остаются равными (-1) .

Уравнение для медленной переменной y_n задает нелинейную обратную связь и позволяет моделировать как некоторые свойства медленных переходных процессов, так и медленные колебания, формирующие пачки импульсов нейронной активности. При значениях $\alpha < 4.0$ в зависимости от величины параметра σ отображение либо находится в режиме устойчивого равновесия, либо генерирует непрерывную последовательность спайков. Частота генерации импульсов при этом возрастает с увеличением значений параметра σ . При $\alpha > 4$ динамика отображения позволяет генерировать пачки спайков. Этот режим наблюдается в интервале значений параметра σ , который располагается между режимами непрерывной импульсной активности и стационарным состоянием. Режимы пачечной активности включают в себя как регулярные, так и хаотические режимы.

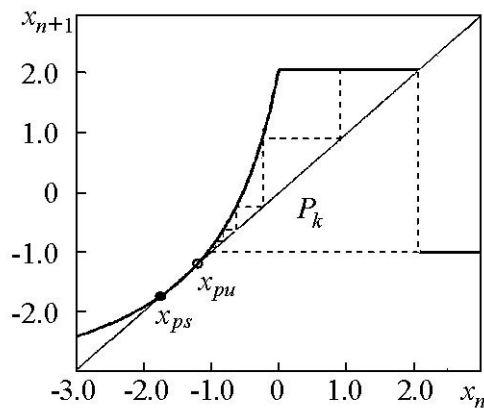


Рис. 22. Структура функции быстро одномерного отображения, полученная при $\alpha = 5.6$ и фиксированном $y_n = y = -3.75$. График функции $f(x, y)$ изображен жирной сплошной линией. Пунктирная линия изображает суперустойчивый цикл P_k . Устойчивая и неустойчивая неподвижные точки одномерного отображения обозначены как x_{ps} и x_{pu} , соответственно. Взято из [71]

Fig. 22. Structure of the fast 1D map for the Rulkov model at $\alpha = 5.6$ and fixed $y_n = y = -3.75$. The bold solid line corresponds to $f(x, y)$. The dotted line depicts the superstable cycle P_k . The stable and unstable fixed points of the 1D map are marked by x_{ps} and x_{pu} , respectively. From [71]

3.4. Модель Курбажа–Некоркина. Рассмотрим систему точечных отображений [74, 75] следующего вида:

$$x_{n+1} = x_n + F(x_n) - \beta H(x_n - d) - y_n, y_{n+1} = y_n + \varepsilon(x_n - J). \quad (32)$$

Здесь переменная x качественно характеризует изменение мембранного потенциала клетки, y отвечает за совокупное действие ионных токов (так называемая, восстанавливающая переменная). Параметр ε определяет скорость изменения переменной y , параметры β, d, J контролируют форму генерируемого сигнала. Отметим, что модель основана на дискретной версии известной в нейродинамике системы ФитцХью–

Нагумо с кубической нелинейностью $F(x)$ и дополнительно введенной ступенчатой функцией Хевисайда $H(x)$

$$F(x) = x(x - a)(1 - x),$$

$$H(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases} \quad (33)$$

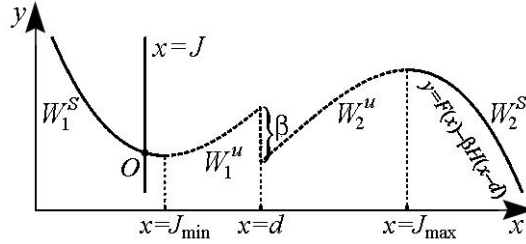


Рис. 23. Качественный вид изоклин горизонтальных и вертикальных наклонов на фазовой плоскости отображения (32), (33). Взято из [77]

Fig. 23. Shown qualitatively are the nullclines of map (32), (33). From [77]

На рис. 23 качественно показаны изоклины горизонтальных (прямая $x = J$) и вертикальных (кривая $y = F(x) - \beta H(x - d)$) наклонов системы (32), (33) на фазовой плоскости (x, y) .

3.4.1. Регулярные режимы активности. Одним из основных свойств нейронов, изначально находящихся в состоянии покоя, является их способность к генерации потенциала действия, при превышении некоторого порога, в результате действия внешнего стимула (свойство возбудимости). Состоянию покоя нейрона в системе (32), (33) отвечает устойчивая неподвижная точка O . Показано, что на фазовой плоскости при этом существуют два порога, фактически определяемых неустойчивыми инвариантными кривыми W_1^u и W_2^u (точнее, тонкими слоями, состоящими из медленных траекторий, локализованных в окрестности этих инвариантных кривых). При действии на систему стимула, которого недостаточно для преодоления первого порога возбуждения (W_1^u), генерации потенциала действия не происходит, образуется лишь ответный отклик малой амплитуды (рис. 24, a, b (i)). Если амплитуда стимула оказывается достаточной для преодоления второго порога (W_2^u), то траектория попадает в область притяжения устойчивой инвариантной кривой W_2^s и описывает характерную кривую, оканчивающуюся в устойчивой неподвижной точке O . Такое поведение на фазовой плоскости отвечает режиму генерации одиночного потенциала действия, или спайка (рис. 24, a, b (ii)).

Другой важный режим, который наблюдается в системе (32), (33) – это подпороговые колебания. На фазовой плоскости ему соответствует устойчивая замкнутая инвариантная кривая C (рис. 24, c), рожденная при смене устойчивости неподвижной точки в результате бифуркации Неймарка–Сакера. Еще один регулярный нейронный режим, воспроизводимый в системе, – периодические спайковые колебания. Установлено, что одним из условий их появления является относительная малость параметра β . При этом становятся возможными перемещения между слоями медленных движений, локализованных в окрестности двух устойчивых кривых W_1^s и

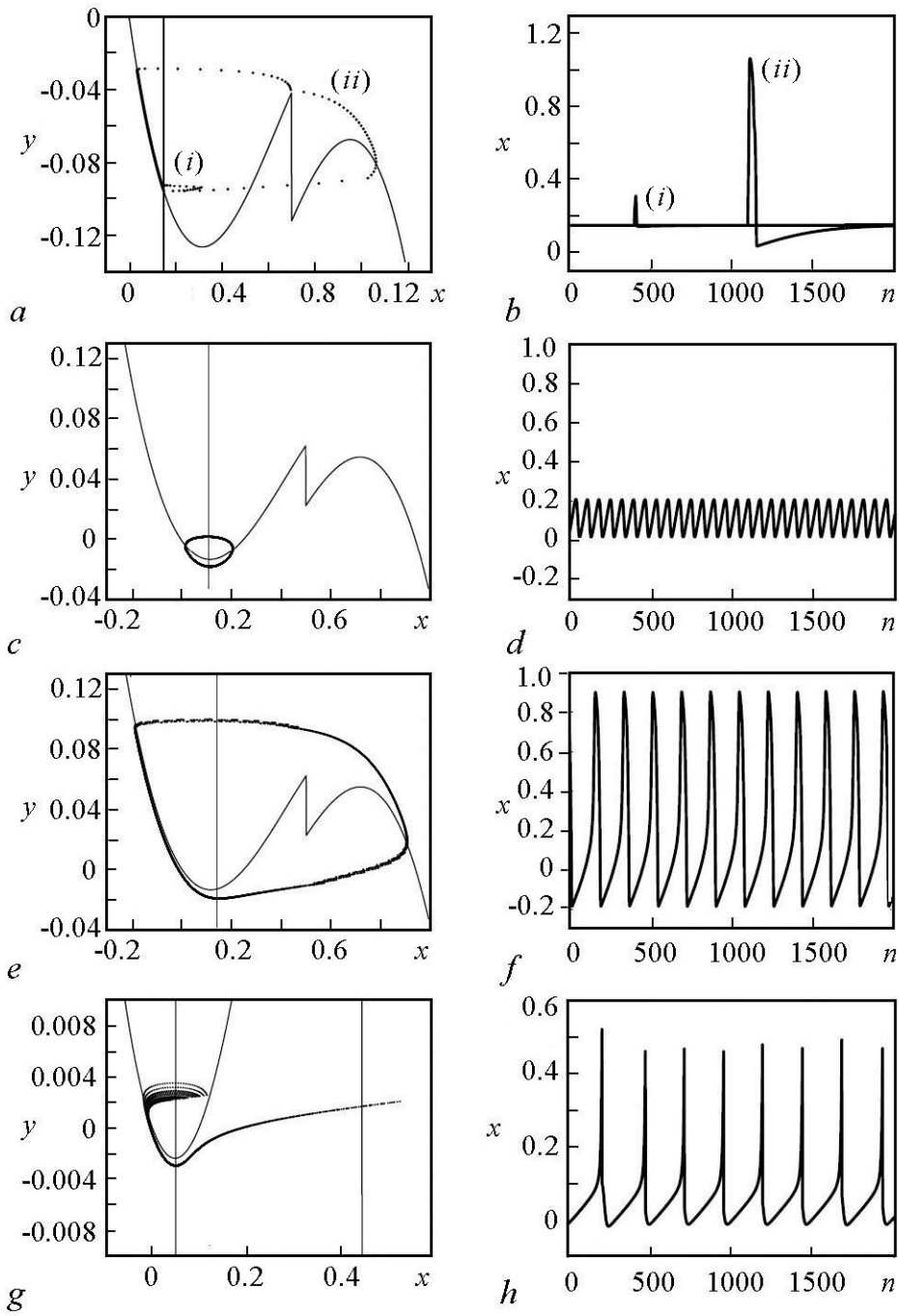


Рис. 24. Фазовые портреты (левый столбец) и соответствующие осциллограммы (правый столбец) регулярных режимов нейронной активности в модели (32), (33). Взяты из [77]

Fig. 24. Phase portraits (left column) and corresponding waveforms (right column) of regular regimes of neural activity in model (32), (33). From [77]

W_2^s , без изменения направления движения при прохождении прямой разрыва $x = d$. В результате на фазовой плоскости формируется устойчивая замкнутая инвариантная кривая C (рис. 24, *e*), соответствующая периодическим спайковым колебаниям (рис. 24, *f*).

В модели (32), (33) помимо указанных наблюдается иной тип спайковой активности. При этом на фазовой плоскости образуется разрывный аттрактор A (рис. 24, *g*), определяющий колебания данной формы (рис. 24, *k*).

3.4.2. Хаотические режимы активности. В системе (32), (33) могут существовать различные хаотические аттракторы. Один из таких аттракторов, A , представлен на рис. 25, *a*, а соответствующий режим нейронной активности на рис. 25, *b*. В этом режиме потенциалы действия генерируются, перемежаясь с подпороговыми колебаниями. Динамический механизм таких колебаний заключается в том, что в окрестности линии разрыва $x = d$ инвариантная кривая W_2^u разделяет траектории системы (32), (33) на два потока. Первый поток состоит из траекторий, которые совершают движения в окрестности $x = d$. Второй поток образован траекториями, преодолевшими второй порог и движущимися в окрестности кривой W_2^s . В результате такого разделения траектория хаотически переходит из одного потока в другой, формируя аттрактор A .

Один из наиболее важных динамических режимов, встречающихся в различных нейронных структурах, – это хаотические спайк-бёрстовые колебания. В си-

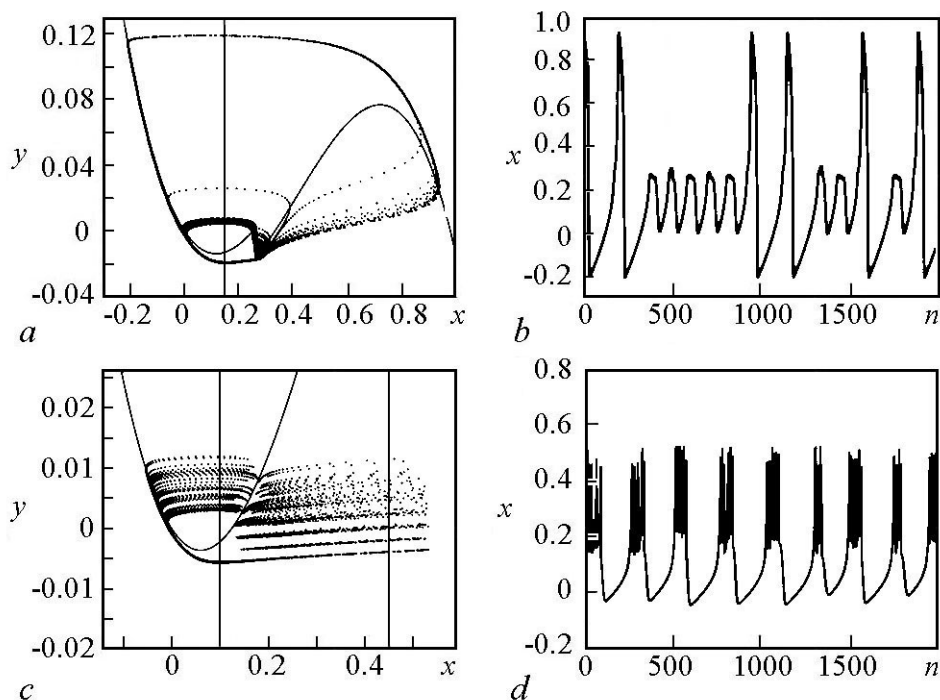


Рис. 25. Фазовые портреты (левый столбец) и соответствующие осциллограммы (правый столбец) хаотических режимов нейронной активности в модели (32), (33). Взяты из [77]

Fig. 25. Phase portraits (left column) and corresponding waveforms (right column) of chaotic regimes of neural activity in model (32), (33). From [77]

стеме (32), (33) данный режим с различными характеристиками воспроизводится в широком диапазоне значений параметров. На фазовой плоскости ему отвечает релаксационный хаотический аттрактор A (рис. 25, c), соответствующие ему колебания приведены на рис. 25, d . В силу важности режима хаотических спайк-бёрстовых колебаний, подробнее остановимся на динамическом механизме их установления.

3.4.3. Спайк-бёрстовые колебания. Хаотические спайк-бёрстовые колебания условно можно разделить на две фазы – быструю и медленную (см. рис. 25, c, d). Рассмотрим, как происходит формирование таких двухмасштабных колебаний. Пусть сначала $\varepsilon = 0$ и, следовательно, переменная $y = y^0 = \text{const}$ играет роль параметра в уравнении (32). В зависимости от значения y^0 отображение быстрых движений (32) может демонстрировать как регулярную, так и хаотическую динамику (рис. 26). В случае регулярной динамики единственным аттрактором отображения (32) является устойчивая неподвижная точка x_s (рис. 26, a, b). При квазистатическом уменьшении параметра y^0 состояние равновесия x_s при некотором бифуркационном значении сливается с неустойчивой неподвижной точкой x_u и исчезает (происходит касательная, или седло-узловая бифуркация).

В случае хаотической динамики отображение (32) действует подобно отображению Лоренца и имеет инвариантный интервал, содержащий хаотический аттрактор (рис. 26, c, d). При квазистатическом увеличении параметра y^0 этот аттрактор претерпевает внутренние бифуркации и, наконец, при некотором значении $y^0 = y_{cr}$ происходит его граничный кризис [77]: одна из его границ сливается с неустойчи-

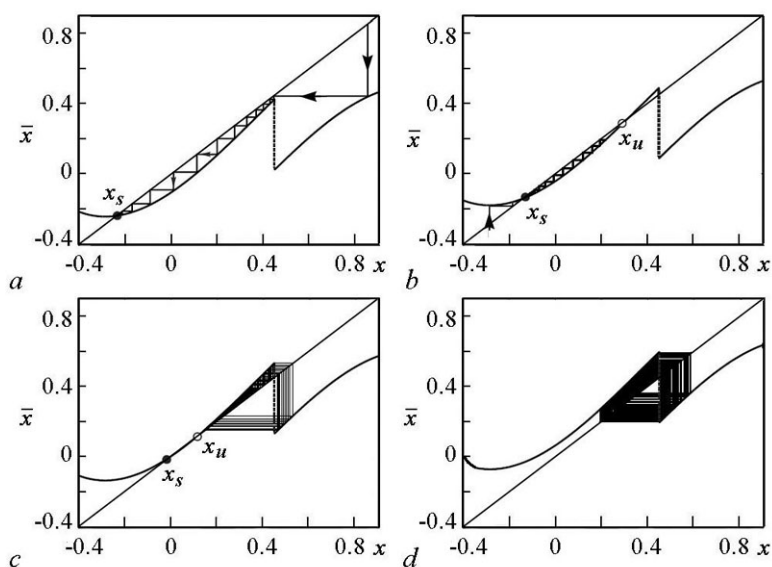


Рис. 26. Динамика отображения (32), (33) при различных значениях y^0 : a – единственная устойчивая неподвижная точка; b – устойчивая и неустойчивая неподвижные точки; c – устойчивая и неустойчивая неподвижные точки и инвариантный интервал, содержащий хаотический аттрактор; d – инвариантный интервал, содержащий хаотический аттрактор. Взят из [77]

Fig.26. Dynamics of map (32), (33) for different values of y^0 : a – a single stable fixed point; b – stable and unstable fixed points; c – stable and unstable fixed points and an invariant interval containing a chaotic attractor; d – an invariant interval containing a chaotic attractor. From [77]

вой неподвижной точкой x_u , и аттрактор разрушается. Пусть теперь $\varepsilon > 0$. В этом случае семейство устойчивых неподвижных точек отображения (32) образует на фазовой плоскости (x, y) при $x < J$ устойчивую инвариантную кривую W_1^s . А при $x > J$ семейство одномерных хаотических аттракторов образует переходное хаотическое множество. Допустим, что в начальный момент времени траектория стартует в окрестности кривой W_1^s . Переменная y медленно убывает вдоль этой кривой, а переменная x поддерживается в квазиравновесном состоянии. Данная фаза образует медленный регулярный участок двумерного хаотического аттрактора, соответствующий пассивной фазе спайк-бёрстовых колебаний.

В окрестности значения y , при котором устойчивая W_1^s и неустойчивая W_1^u кривые сливаются, траектория покидает слой медленных движений и попадает в область притяжения переходного хаотического множества. Поскольку теперь мы находимся в той части плоскости, где $x > J$, то в этом случае переменная y начинает медленно расти. Итерируя отображение (32) численно, мы обнаружили, что хаотические колебания продолжают существовать в системе (32), (33) и после значения $y^0 = y_{cr}$, соответствующего кризису хаотического аттрактора в статическом случае $\varepsilon = 0$ (см. рис. 26). Следовательно, имеет место эффект задержки исчезновения хаотических колебаний. Данная фаза движений образует быстрый хаотический участок аттрактора, который соответствует активной фазе или фазе деполяризации спайк-бёрстовых колебаний.

Отметим, что указанная универсальность модели Курбажа–Некоркина позволяет использовать данную модель при моделировании разнообразных процессов в нейроподобных системах [78–91].

Заключение

В обзоре представлены наиболее популярные динамические модели нейронов. Исторически первыми были сформулированы *модели с непрерывным временем*, такие как модель Ходжкина–Хаксли. Эта модель детально описывает ионный транспорт через нейронную мембрану, но является достаточно сложной с математической точки зрения. Наряду с ней представлены более простые редуцированные модели типа Моррис–Лекара, ФитцХью–Нагумо, Хиндмарша–Роуза и «накопление–сброс», которые, однако, обладают значительно меньшей степенью биологической релевантности. Кроме того, приводятся модели нейронов со специфическими свойствами, такими как последеполяризация и двухпороговая генерация спайков на фоне подпороговых колебаний. Отдельную нишу занимают *модели нейронов с дискретным временем*, то есть в форме точечных отображений. С одной стороны, подобные модели не могут быть выведены из первых принципов и предлагают лишь качественное описание динамики реальных нейронов. С другой стороны, дискретные модели обладают большим богатством динамических режимов и удобны для численного моделирования, в том числе крупномасштабных нейронных сетей.

Работа выполнена в рамках государственного задания ИПФ РАН (проект № 0035-2014-0007) и программы РАН «Нелинейная динамика в математических и физических науках» (№ 0035-2018-006) при поддержке РФФИ (гранты № 17-02-00874, № 17-02-00904 и № 18-02-00406).

*А.С. Дмитричев, Д.В. Касаткин, В.В. Клиньшов, С.Ю. Кириллов,
О.В. Масленников, Д.С. Шапин, В.И. Некоркин*
Изв. вузов «ПНД», т. 26, № 4, 2018

Библиографический список

1. *McCulloch W., Pitts W.* A logical calculus of the ideas immanent in nervous activity // *Bulletin of Mathematical Biophysics*. 1943. Vol. 5, № 4. P. 115.
2. *Hodgkin A.L., Huxley A.F.* A quantitative description of membrane current and its application to conduction and excitation in nerve // *J. Physiol.* 1952. Vol. 117, № 4. P. 500.
3. *Noble B.* A modification of the Hodgkin–Huxley equations applicable to Purkinje fibre action and pacemaker potentials // *J. Physiol.* 1962. Vol. 160, № 2. P. 317.
4. *Plant R.E., Kim M.* Mathematical description of a bursting pacemaker neuron by a modification of the Hodgkin–Huxley equations // *Biophys. J.* 1976. Vol. 16, № 3. P. 227.
5. *Braun H.A., Huber M.T., Dewald M., Schäfer K., and Voigt K.* Computer simulations of neuronal signal transduction: The role of nonlinear dynamics and noise // *Int. J. Bifurcation Chaos in Appl. Sci. Eng.* 1998. Vol. 8. P. 881.
6. *Morris C., Lecar H.* Voltage oscillations in the barnacle giant muscle fiber // *Biophys. J.* 1981. Vol. 35. P. 193.
7. *Keynes R.D., Rojas E., Taylor R. E., Vergara J.* Calcium and potassium systems of a giant barnacle muscle fibre under membrane potential control // *J. Physiol. (Lond.)* 1973. Vol. 229, № 2. P. 409.
8. *Gutkin B.S., Ermentrout G.B.* Dynamics of membrane excitability determine interspike interval variability: a link between spike generation mechanisms and cortical spike train statistics // *Neural Computation*. 1998. Vol. 10, № 5. P. 1047.
9. *Rinzel J., Ermentrout G.B.* Analysis of neural excitability and oscillations // *Methods in Neuronal Modeling: From Ions to Networks* (Eds. C. Koch, I. Segev). London: MIT Press. 1999. P. 251.
10. *Ermentrout G.B., Terman D.H.* *Mathematical Foundations of Neuroscience*. New York: Springer. 2010. 422 p.
11. *Tsumoto K., Kitajima H., Yoshinaga T., Aihara K., Kawakami H.* Bifurcations in Morris–Lecar neuron model // *Neurocomputing*. 2006. Vol. 69, № 4-6. P. 293.
12. *Behdad R., Binczak S., Dmitrichev A.S., Nekorkin V.I., Bilbault J.M.* Artificial electrical Morris–Lecar neuron // *IEEE Trans. Neural Netw. Learn. Syst.* 2015. Vol. 26, № 9. P. 1875.
13. *Abbot L.F.* A network of oscillators // *J. Phys. A: Math. Gen.* 1990. Vol. 23. P. 3835.
14. *FitzHugh R.* Thresholds and plateaus in the Hodgkin–Huxley nerve equations // *J. Gen. Physiol.* 1960. Vol. 43. P. 867.
15. *FitzHugh R.* Impulses and physiological states in theoretical models of nerve membranes // *Biophysical Journal*. 1961. Vol. 1. P. 445.
16. *Nagumo J., Arimoto S., Yoshizawa S.* An active pulse transmission line simulating nerve axon // *Proc. IRE*. 1962. Vol. 50. P. 2061.
17. *Kepler T.B., Abbott L.F., Marder E.* Reduction of conductance-based neuron models // *Biol. Cybern.* 1992. Vol. 66, № 5. P. 381.
18. *Андронов А.А., Витт А.А., Хайкин С.Э.* *Теория колебаний* // М.: Физматиз, 1959. 915 с.

19. *Mischenko E.F., Kolesov Yu.S., Kolesov A.Yu., Rozov N.Kh.* Asymptotic Methods in Singularly Perturbed Systems, Monographs in Contemporary Mathematics // NY, Consultants Bureau. 1984. 294 p.
20. *Арнольд В.И., Афраймович В.С., Ильяшенко Ю.С., Шильников Л.П.* Теория бифуркаций // Итоги науки и техники. Серия «Современные проблемы математики. Фундаментальные направления». 1986. Т. 5. 218 с.
21. *Fenichel N.* Geometric singular perturbation theory for ordinary differential equation // SIAM J. Diff. Eqns. 1979. Vol. 31. P. 53.
22. *Некоркин В.И., Дмитричев А.С., Щапин Д.С., Казанцев В.Б.* Динамика модели нейрона со сложно-пороговым возбуждением // Математическое моделирование. 2005. Т. 17. № 6. С. 75.
23. *Binczak S., Kazantsev V.B., Nekorkin V.I., Bilbault J.M.* Experimental study of bifurcations in a modified FitzHugh-Nagumo cell // Electron. Lett. 2003. Vol. 39. P. 13.
24. *Щапин Д.С.* Динамика двух нейроноподобных элементов с подавляющей обратной связью // Радиотехника и электроника. 2009. Т. 54. № 2. С. 185.
25. *Hindmarsh J.L., Rose R.M.* A model of neuronal bursting using three coupled first order differential equations // Proc. of the Royal Society London B. 1984. Vol. 221. P. 87.
26. *Некоркин В.И.* Лекции по основам теории колебаний. Н. Новгород: Изд-во ННГУ, 2012. 311 с.
27. *Wang X.-J.* Genesis of bursting oscillations in the Hindmarsh–Rose model and homoclinicity to a chaotic saddle // Physica D. 1993. Vol. 62, № 1-4. P. 263.
28. *Innocenti G., Morelli A., Genesio R., Torcini A.* Dynamical phases of the Hindmarsh–Rose neuronal model: Studies of the transition from bursting to spiking chaos // Chaos. 2007. Vol. 17, № 4. P. 043128.
29. *Shilnikov A., Kolomiets M.* Methods of the qualitative theory for Hindmarsh–Rose model: A case study – A tutorial // Int. J. of Bifurcation and Chaos. 2008. Vol. 18, № 8. P. 2141.
30. *Izhikevich E.M.* Dynamical Systems in Neuroscience: The Geometry of Excitability and Bursting. Cambridge: MIT Press. 2007. 441 p.
31. *Miura R.M.* Analysis of excitable cell models // Journal of Computational and Applied Mathematics. 2002. Vol. 144, № 1-2. P. 29.
32. *Yue C., Remy S., Su H., Beck H., Yaari Y.* Proximal persistent Na⁺ channels drive spike afterdepolarizations and associated bursting in adult CA1 pyramidal cells // J. Neurosci. 2005. Vol. 25, № 42. P. 9704.
33. *Lisman J.E., Idiart M.A.* Storage of 7 +/- 2 short-term memories in oscillatory subcycles // Science. 1995. Vol. 267, № 5203. P. 1512.
34. *Jensen O., Idiart M.A.P. and Lisman J.E.* Physiologically realistic formation of autoassociative memory in networks with theta/gamma oscillations: Role of fast NMDA channels // Learn. Mem. 1996. Vol. 3, № 2-3. P. 243.
35. *Jensen O., Lisman J.E.* Hippocampal sequence-encoding driven by a cortical multi-item working memory buffer // Trends in Neurosciences. 2005. Vol. 28, № 2. P. 67.
36. *Haj-Dahmane S., Andrade K.* Ionic mechanism of the slow afterdepolarization induced by muscarinic receptor activation in rat prefrontal cortex // J. Neurophysiol. 1998. Vol. 80, № 3. P. 1197.

*А.С. Дмитричев, Д.В. Касаткин, В.В. Клиньшов, С.Ю. Кириллов,
О.В. Масленников, Д.С. Щапин, В.И. Некоркин*
Изв. вузов «ПНД», т. 26, № 4, 2018

37. *Park J.-Y., Remy S., Varela O., Cooper D.C., Chung S., Kang H.-W., Lee J.-H., Spruston N.* A post-burst after depolarization is mediated by group I metabotropic glutamate receptor-dependent upregulation of Ca(v)2.3 R-type calcium channels in CA1 pyramidal neurons // *PLoS Biology*. 2010. Vol. 8, № 11. P. e1000534.
38. *Клиньшов В.В., Некоркин В.И.* Модель нейрона с последеполяризацией и краткосрочная память // *Изв. ВУЗов Радиофизика*. 2005. Vol. 48, № 3. P. 228.
39. *Kepler T.B., Marder E.* Spike initiation and propagation on axons with slow inward currents // *Biol. Cybern.* 1993. Vol. 68, № 3. P. 209.
40. *Enns-Ruttan J., Miura R.M.* Spontaneous secondary spiking in excitable cells // *J. Theor. Biol.* 2000. Vol. 205, № 2. P. 181.
41. *Schweighofer N., Lang E.J., Kawato M.* Role of the olivo-cerebellar complex in motor learning and control // *Front. Neural Circuits*. 2013. Vol. 7. Art. № 94. P. 1.
42. *Manor Y., Rinzel J., Segev I., Yarom Y.* Low-amplitude oscillations in the inferior olive: A model based on electrical coupling of neurons with heterogeneous channel densities // *J. Neurophysiol.* 1997. Vol. 77, № 5. P. 2736.
43. *Velarde M.G., Nekorkin V.I., Kazantsev V.B., Makarenko V.I., Llinas R.* Modeling inferior olive neuron dynamics // *Neural Netw.* 2002. Vol. 15, № 1. P. 5.
44. *Schweighofer N., Doya K., Kawato M.* Electrophysiological properties of inferior olive neurons: A compartmental model // *J. Neurophysiol.* 1999. Vol. 82, № 2. P. 804.
45. *Kazantsev V.B., Nekorkin V.I., Makarenko V.I., Llinas R.* Olivo-cerebellar cluster-based universal control system // *Proc. Natl. Acad. Sci. USA*. 2003. Vol. 100, № 22. P. 13064.
46. *Kazantsev V.B., Nekorkin V.I., Makarenko V.I., Llinas R.* Self-referential phase reset based on inferior olive oscillator dynamics // *Proc. Natl. Acad. Sci. USA*. 2004. Vol. 101, № 52. P. 18183.
47. *Llinas R., Yarom Y.* Oscillatory properties of guinea-pig inferior olivary neurones and their pharmacological modulation: An in vitro study // *J. Physiol.* 1986. Vol. 376. P. 163.
48. *Klinshov V., Franovic I.* Slow rate fluctuations in a network of noisy neurons with coupling delay // *EPL (Europhysics Letters)*. 2016. Vol. 116, № 4. P. 48002.
49. *Klinshov V., Franovic I.* Mean field dynamics of a random neural network with noise // *Physical Review E*. 2015. Vol. 92, № 6. P. 62813.
50. *Franovic I., Klinshov V.* Clustering promotes switching dynamics in networks of noisy neurons // *Chaos*. 2018. Vol. 28. P. 23111.
51. *Brunel N.* Dynamics of sparsely connected networks of excitatory and inhibitory spiking neurons // *Journal of Computational Neuroscience*. 2000. Vol. 8, № 3. P. 183.
52. *Olmi S., Politi A., Torcini A.* Collective chaos in pulse-coupled neural networks // *EPL (Europhysics Letters)*. 2010. Vol. 92, № 6. P. 60007.
53. *Ullner E., Politi A.* Self-sustained irregular activity in an ensemble of neural oscillators // *Physical Review X*. 2016. Vol. 6, № 1. P. 1.
54. *Hasegawa H.* Population rate codes carried by mean, fluctuation and synchrony of neuronal firings // *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*. 2009. Vol. 388, № 4. P. 499-513.

55. *Hasegawa H.* Synchrony and variability induced by spatially correlated additive and multiplicative noise in the coupled Langevin model // *Physical Review E.* 2008. Vol. 78, № 3. P. 31110.
56. *Nykamp D.Q., Friedman D., Shaker S., Shinn M., Vella M., Compte A., Roxin A.* Mean-field equations for neuronal networks with arbitrary degree distributions // *Physical Review E.* 2017. Vol. 95, № 4. P. 1.
57. *Montbrio E., Pazo D., Roxin A.* Macroscopic description for networks of spiking neurons // *Physical Review X.* 2015. Vol. 5, № 2. P. 1.
58. *Lapicque L.* Recherches quantitatives sur l'excitation électrique des nerfs traitée comme une polarisation // *J. Physiol. Pathol.* 1907. Gen. 9. P. 620.
59. *Lazar A.A.* Time encoding with an integrate-and-fire neuron with a refractory period // *Neurocomputing.* 2004. Vol. 58. P. 53.
60. *Liu Y.-H., Wang X.-J.* Spike-frequency adaptation of a generalized leaky integrate-and-fire model neuron // *Journal of Computational Neuroscience.* 2001. Vol. 10, № 1. P. 25.
61. *Brette R., Gerstner W.* Adaptive exponential integrate-and-fire model as an effective description of neuronal activity // *Journal of Neurophysiology.* 2005. Vol. 94, № 5. P. 3637.
62. *Abbot L.F., van Vreeswijk C.* Asynchronous states in networks of pulse-coupled oscillators // *Physical Review E.* 1993. Vol. 48. P. 1483.
63. *Ermentrout B.* Type I membranes, phase resetting curves, and synchrony // *Neural Computation.* 1996. Vol. 8, № 5. P. 979.
64. *Latham P.E., Richmond B.J., Nelson P., Nirenberg S.* Intrinsic dynamics in neuronal networks. I. Theory // *J. Neurophysiology.* 2000. Vol. 83, № 2. P. 808.
65. *Hansel D., Mato G.* Existence and stability of persistent states in large neuronal networks // *Phys. Rev. Letters.* 2001. Vol. 86. P. 4175.
66. *Izhikevich E.M.* Neural excitability, spiking and bursting // *International Journal of Bifurcation and Chaos.* 2000. Vol. 10, № 6. P. 1171.
67. *Courbage M., Nekorkin V.I.* Map based models in neurodynamics // *International Journal of Bifurcation and Chaos.* 2010. Vol. 20, № 6. P. 1631.
68. *Ibarz B., Casado J.M., Sanjuán M. A. F.* Map-based models in neuronal dynamics // *Physics Reports.* 2011. Vol. 501, № 1-2. P. 1.
69. *Girardi-Schappo M., Tragtenberg M.H.R., Kinouchi O.* A brief history of excitable map-based neurons and neural networks // *Journal of neuroscience methods.* 2013. Vol. 220, № 2. P. 116.
70. *Chialvo D.R.* Generic excitable dynamics on a two-dimensional map // *Chaos, Solitons & Fractals.* 1995. Vol. , № 3-4. P. 461.
71. *Rulkov N.F.* Modeling of spiking-bursting neural behavior using two-dimensional map // *Physical Review E.* 2002. Vol. 65, № 4. P. 041922.
72. *Shilnikov A.L., Rulkov N.F.* Subthreshold oscillations in a map-based neuron model // *Physics Letters A.* 2004. Vol. 328, № 2-3. P. 177.
73. *Rulkov N.F.* Regularization of synchronized chaotic bursts // *Physical Review Letters.* 2001. Vol. 86, № 1. P. 183.

*А.С. Дмитричев, Д.В. Касаткин, В.В. Клиньшов, С.Ю. Кириллов,
О.В. Масленников, Д.С. Цапин, В.И. Некоркин*
Изв. вузов «ПНД», т. 26, № 4, 2018

74. *Некоркин В.И., Вдовин Л.В.* Дискретная модель нейронной активности // Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2007. Том. 15, № 5. Стр. 36.
75. *Courbage M., Nekorkin V.I., Vdovin L.V.* Chaotic oscillations in a map-based model of neural activity // *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*. 2007. Vol. 17, № 4. P. 043109.
76. *Izhikevich E.M., Hoppensteadt F.* Classification of bursting mappings // *International Journal of Bifurcation and Chaos*. 2004. Vol. 14, № 11. P. 3847.
77. *Maslennikov O.V., Nekorkin V.I.* // *Nonlinear Dynamics and Complexity* (Eds. V. Afraimovich, A.C.J. Luo, X. Fu). Springer, 2014. P. 143.
78. *Hess A., Yu L., Klein I., De Mazancourt M., Jebrak G., Mal H., Brugière O., Fournier M., Courbage M., Dauriat G.* Neural mechanisms underlying breathing complexity // *PloS one*. 2013. Vol. 8, № 10. P. e75740.
79. *Courbage M., Maslennikov O.V., Nekorkin V.I.* Synchronization in time-discrete model of two electrically coupled spike-bursting neurons // *Chaos, Solitons & Fractals*. 2012. Vol. 45, № 5. P. 645.
80. *Maslennikov O.V., Nekorkin V.I.* Modular networks with delayed coupling: Synchronization and frequency control // *Physical Review E*. 2014. Vol. 90, № 1. P. 012901.
81. *Maslennikov O.V., Nekorkin V.I.* Discrete model of the olivo-cerebellar system: structure and dynamics // *Radiophysics and Quantum Electronics*. 2012. Vol. 55, № 3. P. 198.
82. *Nekorkin V.I., Maslennikov O.V.* Spike-burst synchronization in an ensemble of electrically coupled discrete model neurons // *Radiophysics and Quantum Electronics*. 2011. Vol. 54, № 1. P. 56.
83. *Maslennikov O.V., Nekorkin V.I., Kurths J.* Basin stability for burst synchronization in small-world networks of chaotic slow-fast oscillators // *Physical Review E*. 2015. Vol. 92, № 4. P. 042803.
84. *Maslennikov O.V., Nekorkin V.I.* Evolving dynamical networks with transient cluster activity // *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*. 2015. Vol. 23, № 1-3. P. 10.
85. *Yu L., De Mazancourt M., Hess A., Ashadi F.R., Klein I., Mal H., Courbage M., Mangin L.* Functional connectivity and information flow of the respiratory neural network in chronic obstructive pulmonary disease // *Human Brain Mapping*. 2016. Vol. 37, № 8. P. 2736.
86. *Maslennikov O.V., Kasatkin D.V., Rulkov N.F., Nekorkin V.I.* Emergence of antiphase bursting in two populations of randomly spiking elements // *Physical Review E*. 2013. Vol. 88, № 4. P. 042907.
87. *Maslennikov O.V., Shchapin D.S., Nekorkin V.I.* Transient sequences in a hypernetwork generated by an adaptive network of spiking neurons // *Phil. Trans. R. Soc. A*. 2017. Vol. 375, № 2096. P. 20160288.
88. *Yue Y., Liu Y.-J., Song Y.-L., Chen Y., Yu L.-C.* Information Capacity and Transmission in a Courbage–Nekorkin–Vdovin Map-Based Neuron Model // *Chinese Physics Letters*. 2017. Vol. 34, № 4. P. 048701.
89. *Franović I., Maslennikov O.V., Bačić I., Nekorkin V.I.* Mean-field dynamics of a population of stochastic map neurons // *Physical Review E*. 2017. Vol. 96, № 1. P. 012226.

90. *Mangin L., Courbage M.* Respiratory Neural Network: Activity and Connectivity // *Advances in Dynamics, Patterns, Cognition* (Eds. Aronson, I.S., Pikovsky, A., Rulkov, N.F., Tsimring, L.S.). Nonlinear Systems and Complexity. Springer Int. 2017. Vol. 20. P. 227.
91. *Yang X., Wang M.* The evolution to global burst synchronization in a modular neuronal network // *Modern Physics Letters B*. 2016. Vol. 30, № 14. P. 1650210.

References

1. McCulloch W., Pitts W. A logical calculus of the ideas immanent in nervous activity. *Bulletin of Mathematical Biophysics*, 1943, vol. 5, № 4, p. 115.
2. Hodgkin A.L., Huxley A.F. A quantitative description of membrane current and its application to conduction and excitation in nerve. *J. Physiol.*, 1952, vol. 117, № 4, p. 500.
3. Noble B. A modification of the Hodgkin–Huxley equations applicable to Purkinje fibre action and pacemaker potentials. *J. Physiol.*, 1962, vol. 160, № 2, p. 317.
4. Plant R.E., Kim M. Mathematical description of a bursting pacemaker neuron by a modification of the Hodgkin-Huxley equations. *Biophys. J.*, 1976, Vol. 16, № 3. p. 227.
5. Braun H.A., Huber M.T., Dewald M., Schäfer K., and Voigt K. Computer simulations of neuronal signal transduction: The role of nonlinear dynamics and noise. *Int. J. Bifurcation Chaos Appl. Sci. Eng.*, 1998, vol. 8, p. 881.
6. Morris C., Lecar H. Voltage oscillations in the barnacle giant muscle fiber. *Biophys. J.*, 1981, vol. 35, p. 193.
7. Keynes R.D., Rojas E., Taylor R. E., Vergara J. Calcium and potassium systems of a giant barnacle muscle fibre under membrane potential control. *J. Physiol. (Lond.)*, 1973, vol. 229, № 2, p. 409.
8. Gutkin B.S., Ermentrout G.B. Dynamics of membrane excitability determine interspike interval variability: a link between spike generation mechanisms and cortical spike train statistics. *Neural Computation*, 1998, vol. 10, № 5, p. 1047.
9. Rinzel J., Ermentrout G.B. Analysis of neural excitability and oscillations. *Methods in Neuronal Modeling: From Ions to Networks* (Eds. C. Koch, I. Segev). London: MIT Press. 1999. P. 251.
10. Ermentrout G.B., Terman D.H. *Mathematical Foundations of Neuroscience*. New York: Springer. 2010. 422 p.
11. Tsumoto K., Kitajima H., Yoshinaga T., Aihara K., Kawakami H. Bifurcations in Morris-Lecar neuron model. *Neurocomputing*, 2006, vol. 69, № 4–6, p. 293.
12. Behdad R., Binczak S., Dmitrichev A.S., Nekorkin V.I., Bilbault J.M. Artificial electrical Morris–Lecar neuron. *IEEE Trans. Neural Netw. Learn. Syst.*, 2015, vol. 26, № 9, p. 1875.
13. Abbot L.F. A network of oscillators. *J. Phys. A: Math. Gen.*, 1990, vol. 23, p. 3835.
14. FitzHugh R. Thresholds and plateaus in the Hodgkin–Huxley nerve equations. *J. Gen. Physiol.*, 1960, vol. 43, p. 867.
15. FitzHugh R. Impulses and physiological states in theoretical models of nerve membranes. *Biophysical Journal*, 1961, vol. 1, p. 445.

*А.С. Дмитричев, Д.В. Касаткин, В.В. Клиньшов, С.Ю. Кириллов,
О.В. Масленников, Д.С. Цапин, В.И. Некоркин*
Изв. вузов «ПНД», т. 26, № 4, 2018

16. Nagumo J., Arimoto S., Yoshizawa S. An active pulse transmission line simulating nerve axon. *Proc. IRE.*, 1962, vol. 50, p. 2061.
17. Kepler T.B., Abbott L.F., Marder E. Reduction of conductance-based neuron models. *Biol. Cybern.*, 1992, vol. 66, № 5, p. 381.
18. Andronov A.A., Vitt A.A., Khaikin S.E. Theory of Oscillators. Oxford: Pergamon Press, 1966. 815 p.
19. Mischenko E.F., Kolesov Yu.S., Kolesov A.Yu., Rozov N.Kh. Asymptotic Methods in Singularly Perturbed Systems, Monographs in Contemporary Mathematics. NY, Consultants Bureau, 1984. 294 p.
20. Arnold V.I., Afrajmovich V.S., Il'yashenko Yu.S., Shil'nikov L.P. Bifurcation theory and catastrophe theory. *Encyclopaedia of Mathematical Sciences: Dynamical Systems V.*, 1994, vol. 5, 274 p.
21. Fenichel N. Geometric singular perturbation theory for ordinary differential equation. *SIAM J. Diff. Eqns.*, 1979, Vol. 31, P. 53.
22. Nekorkin V.I., Dmitrichev A.S., Shapin D.S., Kazantsev V.B. Dynamics if a neuron model with complex-threshold excitation. *Mathematical Models and Computer Sim.*, 2005, vol. 17, № 6, p. 75. (In Russian).
23. Binczak S., Kazantsev V.B., Nekorkin V.I., Bilbault J.M. Experimental study of bifurcations in a modified FitzHugh-Nagumo cell. *Electron. Lett.*, 2003, vol. 39, p. 13.
24. Shchapin D.S. Dynamics of two neuronlike elements with inhibitory feedback. *Journal of Communications Technology and Electronics*, 2009, vol. 54, № 2, p. 175.
25. Hindmarsh J.L., Rose R.M. A model of neuronal bursting using three coupled first order differential equations. *Proc. of the Royal Society London B.*, 1984, vol. 221, p. 87.
26. Nekorkin V.I. Introduction to Nonlinear Oscillations. Wiley-VCH, 2015. 264 p.
27. Wang X.-J. Genesis of bursting oscillations in the Hindmarsh–Rose model and homoclinicity to a chaotic saddle. *Physica D.*, 1993, vol. 62, № 1–4, p. 263.
28. Innocenti G., Morelli A., Genesio R., Torcini A. Dynamical phases of the Hindmarsh–Rose neuronal model: Studies of the transition from bursting to spiking chaos. *Chaos*, 2007, vol. 17, № 4, p. 043128.
29. Shilnikov A., Kolomiets M. Methods of the qualitative theory for Hindmarsh–Rose model: A case study – A tutorial. *Int. J. of Bifurcation and Chaos*, 2008, vol. 18, № 8, p. 2141.
30. Izhikevich E.M. Dynamical Systems in Neuroscience: The Geometry of Excitability and Bursting. Cambridge: MIT Press, 2007. 441 p.
31. Miura R.M. Analysis of excitable cell models. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 2002, vol. 144, № 1–2, p. 29.
32. Yue C., Remy S., Su H., Beck H., Yaari Y. Proximal persistent Na⁺ channels drive spike afterdepolarizations and associated bursting in adult CA1 pyramidal cells. *J. Neurosci.*, 2005, vol. 25, № 42, p. 9704.
33. Lisman J.E., Idiart M.A. Storage of 7 +/-2 short-term memories in oscillatory subcycles. *Science*, 1995, vol. 267, № 5203, p. 1512.
34. Jensen O., Idiart M.A.P. and Lisman J.E. Physiologically realistic formation of

- autoassociative memory in networks with theta/gamma oscillations: Role of fast NMDA channels. *Learn. Mem.*, 1996, vol. 3, № 2–3, p. 243.
35. Jensen O., Lisman J.E. Hippocampal sequence-encoding driven by a cortical multi-item working memory buffer. *Trends in Neurosciences*, 2005, vol. 28, № 2, p. 67.
 36. Haj-Dahmane S., Andrade K. Ionic mechanism of the slow afterdepolarization induced by muscarinic receptor activation in rat prefrontal cortex. *J. Neurophysiol.*, 1998, vol. 80, № 3, p. 1197.
 37. Park J.-Y., Remy S., Varela O., Cooper D.C., Chung S., Kang H.-W., Lee J.-H., Spruston N. A post-burst after depolarization is mediated by group I metabotropic glutamate receptor-dependent upregulation of Ca(v)2.3 R-type calcium channels in CA1 pyramidal neurons. *PLoS Biology*, 2010, vol. 8, № 11, p. e1000534.
 38. Klin'shov V.V., Nekorkin V.I. Model of a neuron with afterdepolarization and short-term memory. *Radiophysics and Quantum Electronics*, 2005, vol. 48, № 3, p. 203.
 39. Kepler T.B., Marder E. Spike initiation and propagation on axons with slow inward currents. *Biol. Cybern.*, 1993, vol. 68, № 3, p. 209.
 40. Enns-Ruttan J., Miura R.M. Spontaneous secondary spiking in excitable cells. *J. Theor. Biol.*, 2000, vol. 205, № 2, p. 181.
 41. Schweighofer N., Lang E.J., Kawato M. Role of the olivo-cerebellar complex in motor learning and control. *Front. Neural Circuits*, 2013, vol. 7, art. № 94, p. 1.
 42. Manor Y., Rinzel J., Segev I., Yarom Y. Low-amplitude oscillations in the inferior olive: A model based on electrical coupling of neurons with heterogeneous channel densities. *J. Neurophysiol.*, 1997, vol. 77, № 5, p. 2736.
 43. Velarde M.G., Nekorkin V.I., Kazantsev V.B., Makarenko V.I., Llinas R. Modeling inferior olive neuron dynamics. *Neural Netw.*, 2002, vol. 15, № 1, p. 5.
 44. Schweighofer N., Doya K., Kawato M. Electrophysiological properties of inferior olive neurons: A compartmental model. *J. Neurophysiol.*, 1999, vol. 82, № 2, p. 804.
 45. Kazantsev V.B., Nekorkin V.I., Makarenko V.I., Llinas R. Olivo-cerebellar cluster-based universal control system. *Proc. Natl. Acad. Sci. USA*, 2003, vol. 100, № 22, p. 13064.
 46. Kazantsev V.B., Nekorkin V.I., Makarenko V.I., Llinas R. Self-referential phase reset based on inferior olive oscillator dynamics. *Proc. Natl. Acad. Sci. USA*, 2004, vol. 101, № 52, p. 18183.
 47. Llinas R., Yarom Y. Oscillatory properties of guinea-pig inferior olivary neurones and their pharmacological modulation: An in vitro study. *J. Physiol.*, 1986, vol. 376, p. 163.
 48. Klinshov V., Franovic I. Slow rate fluctuations in a network of noisy neurons with coupling delay. *EPL (Europhysics Letters)*, 2016, vol. 116, № 4, p. 48002.
 49. Klinshov V., Franovic I. Mean field dynamics of a random neural network with noise. *Physical Review E*, 2015, vol. 92, № 6, p. 62813.
 50. Franovic I., Klinshov V. Clustering promotes switching dynamics in networks of noisy neurons. *Chaos*, 2018, vol. 28, p. 23111.
 51. Brunel N. Dynamics of sparsely connected networks of excitatory and inhibitory spiking neurons. *Journal of Computational Neuroscience*, 2000, vol. 8, № 3, p. 183.
 52. Olmi S., Politi A., Torcini A. Collective chaos in pulse-coupled neural networks. *EPL (Europhysics Letters)*, 2010, vol. 92, № 6, p. 60007.

А.С. Дмитричев, Д.В. Касаткин, В.В. Клиньшов, С.Ю. Кириллов,
О.В. Масленников, Д.С. Щапин, В.И. Некоркин
Изв. вузов «ПНД», т. 26, № 4, 2018

53. Ullner E., Politi A. Self-sustained irregular activity in an ensemble of neural oscillators. *Physical Review X*, 2016, vol. 6, № 1, p. 1.
54. Hasegawa H. Population rate codes carried by mean, fluctuation and synchrony of neuronal firings. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 2009, vol. 388, № 4, p. 499.
55. Hasegawa H. Synchrony and variability induced by spatially correlated additive and multiplicative noise in the coupled Langevin model. *Physical Review E*, 2008, vol. 78, № 3, p. 31110.
56. Nykamp D.Q., Friedman D., Shaker S., Shinn M., Vella M., Compte A., Roxin A. Mean-field equations for neuronal networks with arbitrary degree distributions. *Physical Review E*, 2017, vol. 95, № 4, p. 1.
57. Montbrio E., Pazo D., Roxin A. Macroscopic description for networks of spiking neurons. *Physical Review X*, 2015, vol. 5, № 2, p. 1.
58. Lapique L. Recherches quantitatives sur l'excitation électrique des nerfs traitée comme une polarisation. *J. Physiol. Pathol. Generale*, 1907, 9, p. 620.
59. Lazar A.A. Time encoding with an integrate-and-fire neuron with a refractory period. *Neurocomputing*, 2004, vol. 58, p. 53.
60. Liu Y.-H., Wang X.-J. Spike-frequency adaptation of a generalized leaky integrate-and-fire model neuron. *Journal of Computational Neuroscience*, 2001, vol. 10, № 1, p. 25.
61. Brette R., Gerstner W. Adaptive exponential integrate-and-fire model as an effective description of neuronal activity. *Journal of neurophysiology*, 2005, vol. 94, № 5, p. 3637.
62. Abbot L.F., van Vreeswijk C. Asynchronous states in networks of pulse-coupled oscillators. *Physical Review E*, 1993, vol. 48, p. 1483.
63. Ermentrout B. Type I membranes, phase resetting curves, and synchrony. *Neural Computation*, 1996, vol. 8, № 5, p. 979.
64. Latham P.E., Richmond B.J., Nelson P., Nirenberg S. Intrinsic dynamics in neuronal networks. *I. Theory. J. Neurophysiology*, 2000, vol. 83, № 2, p. 808.
65. Hansel D., Mato G. Existence and stability of persistent states in large neuronal networks. *Phys. Rev. Letters*, 2001, vol. 86, p. 4175.
66. Izhikevich E.M. Neural excitability, spiking and bursting. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 2000, vol. 10, № 6, p. 1171.
67. Courbage M., Nekorkin V.I. Map based models in neurodynamics. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 2010, vol. 20, № 6, p. 1631.
68. Ibarz B., Casado J.M., Sanjuán M.A.F. Map-based models in neuronal dynamics. *Physics Reports*, 2011, vol. 501, № 1–2, p. 1.
69. Girardi-Schappo M., Tragtenberg M.H.R., Kinouchi O. A brief history of excitable map-based neurons and neural networks. *Journal of Neuroscience Methods*, 2013, vol. 220, № 2, p. 116.
70. Chialvo D.R. Generic excitable dynamics on a two-dimensional map. *Chaos, Solitons & Fractals*, 1995, vol. , № 3–4, p. 461.
71. Rulkov N.F. Modeling of spiking-bursting neural behavior using two-dimensional map. *Physical Review E*, 2002, vol. 65, № 4, p. 041922.

72. Shilnikov A.L., Rulkov N.F. Subthreshold oscillations in a map-based neuron model. *Physics Letters A.*, 2004, vol. 328, № 2–3, p. 177.
73. Rulkov N.F. Regularization of synchronized chaotic bursts. *Physical Review Letters*, 2001, vol. 86, № 1, p. 183.
74. Nekorkin V.I., Vdovin L.V. Map-based model of the neural activity. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*, 2007, vol. 15, № 5, p. 36. (In Russian).
75. Courbage M., Nekorkin V.I., Vdovin L.V. Chaotic oscillations in a map-based model of neural activity. *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, 2007, vol. 17, № 4, p. 043109.
76. Izhikevich E.M., Hoppensteadt F. Classification of bursting mappings. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 2004, vol. 14, № 11, p. 3847.
77. Maslennikov O.V., Nekorkin V.I. // *Nonlinear Dynamics and Complexity* (Eds. V. Afraimovich, A.C.J. Luo, X. Fu). Springer, 2014. P. 143.
78. Hess A., Yu L., Klein I., De Mazancourt M., Jebrak G., Mal H., Brugière O., Fournier M., Courbage M., Dauriat G. Neural mechanisms underlying breathing complexity. *PloS ONE*, 2013, vol. 8, № 10, p. e75740.
79. Courbage M., Maslennikov O.V., Nekorkin V.I. Synchronization in time-discrete model of two electrically coupled spike-bursting neurons. *Chaos, Solitons & Fractals*, 2012, vol. 45, № 5, p. 645.
80. Maslennikov O.V., Nekorkin V.I. Modular networks with delayed coupling: Synchronization and frequency control. *Physical Review E.*, 2014, vol. 90, № 1, p. 012901.
81. Maslennikov O.V., Nekorkin V.I. Discrete model of the olivo-cerebellar system: structure and dynamics. *Radiophysics and Quantum Electronics*, 2012, vol. 55, № 3, p. 198.
82. Nekorkin V.I., Maslennikov O.V. Spike-burst synchronization in an ensemble of electrically coupled discrete model neurons. *Radiophysics and Quantum Electronics*, 2011, vol. 54, № 1, p. 56.
83. Maslennikov O.V., Nekorkin V.I., Kurths J. Basin stability for burst synchronization in small-world networks of chaotic slow-fast oscillators. *Physical Review E.*, 2015, vol. 92, № 4, p. 042803.
84. Maslennikov O.V., Nekorkin V.I. Evolving dynamical networks with transient cluster activity. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 2015, vol. 23, № 1-3, p. 10.
85. Yu L., De Mazancourt M., Hess A., Ashadi F.R., Klein I., Mal H., Courbage M., Mangin L. Functional connectivity and information flow of the respiratory neural network in chronic obstructive pulmonary disease. *Human Brain Mapping*, 2016, vol. 37, № 8, p. 2736.
86. Maslennikov O.V., Kasatkin D.V., Rulkov N.F., Nekorkin V.I. Emergence of anti-phase bursting in two populations of randomly spiking elements. *Physical Review E.*, 2013, vol. 88, № 4, p. 042907.
87. Maslennikov O.V., Shchapin D.S., Nekorkin V.I. Transient sequences in a hypernetwork generated by an adaptive network of spiking neurons. *Phil. Trans. R. Soc. A.*, 2017, vol. 375, № 2096, p. 20160288.

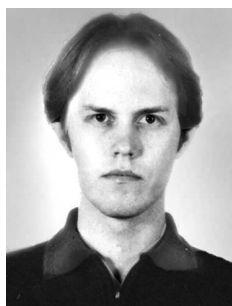
*А.С. Дмитричев, Д.В. Касаткин, В.В. Клиньшов, С.Ю. Кириллов,
О.В. Масленников, Д.С. Щапин, В.И. Некоркин*
Изв. вузов «ПНД», т. 26, № 4, 2018

88. Yue Y., Liu Y.-J., Song Y.-L., Chen Y., Yu L.-C. Information capacity and transmission in a Courbage–Nekorkin–Vdovin map-based neuron model. *Chinese Physics Letters*, 2017, vol. 34, № 4, p. 048701.
89. Franović I., Maslennikov O.V., Bačić I., Nekorkin V.I. Mean-field dynamics of a population of stochastic map neurons. *Physical Review E.*, 2017, vol. 96, № 1, p. 012226.
90. Mangin L., Courbage M. Respiratory neural network: Activity and connectivity. Advances in dynamics, patterns, cognition (Eds. Aronson, I.S., Pikovsky, A., Rulkov, N.F., Tsimring, L.S.). *Nonlinear Systems and Complexity. Springer Int.* 2017. vol. 20. p. 227.
91. Yang X., Wang M. The evolution to global burst synchronization in a modular neuronal network. *Modern Physics Letters B.*, 2016, vol. 30, № 14, p. 1650210.



Дмитричев Алексей Сергеевич – родился в 1980 году в селе Слободское Кстовского района Горьковской области. Окончил радиофизический факультет Нижегородского государственного университета им. Н.И. Лобачевского (2002). С 2002 года работает в Институте прикладной физики РАН. Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук (2010, ННГУ). Область научных интересов – нелинейная динамика, динамические сети, структурообразование, волны и пространственно-временной хаос, синхронизация. Имеет более 50 научных публикаций по указанным направлениям.

Россия, 603950 Нижний Новгород, 603950, ул. Ульянова, 46
Институт прикладной физики РАН
E-mail: admity@neuron.appl.sci-nnov.ru



Касаткин Дмитрий Владимирович – родился в 1978 году в Горьком. Окончил радиофизический факультет Нижегородского государственного университета им. Н.И. Лобачевского (2001). С 2002 года работает в Институте прикладной физики РАН. Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук (2004, ННГУ). Область научных интересов – теория нелинейных колебаний и волн, теория синхронизации, динамический хаос, нейродинамика. Имеет более 50 научных публикаций по указанным направлениям.

Россия, 603950 Нижний Новгород, 603950, ул. Ульянова, 46
Институт прикладной физики РАН
E-mail: kasatkin@appl.sci-nnov.ru



Клиньшов Владимир Викторович – родился в 1984 году в Горьком, окончил радиофизический факультет Нижегородского государственного университета им. Н.И. Лобачевского (2006). С 2003 года работает в Институте прикладной физики РАН. Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук (2009, ИПФ РАН). Область научных интересов – нелинейная динамика, динамические сети, синхронизация, системы с запаздыванием. Имеет более 60 научных публикаций по указанным направлениям. В 2017 году награжден Медалью Российской академии наук с премией для молодых ученых РАН.

Россия, 603950 Нижний Новгород, 603950, ул. Ульянова, 46
Институт прикладной физики РАН
E-mail: vladimir.klinshov@gmail.com



Кириллов Сергей Юрьевич – родился в 1986 году в Горьком, окончил радиофизический факультет Нижегородского государственного университета им. Н.И. Лобачевского (2009). С 2008 года работает в Институте прикладной физики РАН. Защитил диссертацию на соискание учёной степени кандидата физико-математических наук (2017, ННГУ им. Н.И. Лобачевского). Область научных интересов – нелинейная динамика, нейродинамика, теория бифуркаций, параметрические и автоколебательные системы, нелинейные волны в активных средах. Имеет более 20 научных публикаций по указанным направлениям.

Россия, 603950 Нижний Новгород, 603950, ул. Ульянова, 46
Институт прикладной физики РАН
E-mail: skirillov@ipfran.ru



Масленников Олег Владимирович – родился в 1988 году в Горьком, окончил радиофизический факультет Нижегородского государственного университета им. Н. И. Лобачевского (2011). С 2007 года работает в Институте прикладной физики РАН. Защитил диссертацию на соискание учёной степени кандидата физико-математических наук (2014, ИПФ РАН). Область научных интересов – нелинейные колебания и волны, синхронизация, сложные сети, нейродинамика. Имеет более 40 научных публикаций по указанным направлениям. Награжден медалью РАН с премией для молодых ученых (2016).

Россия, 603950 Нижний Новгород, 603950, ул. Ульянова, 46
Институт прикладной физики РАН
E-mail: olmaov@ipfran.ru



Щапин Дмитрий Сергеевич – родился в 1981 году в Горьком, окончил радиофизический факультет Нижегородского государственного университета им. Н.И. Лобачевского (2003). С 2003 года работает в Институте прикладной физики РАН. Защитил диссертацию на соискание учёной степени кандидата физико-математических наук (2011, ННГУ). Область научных интересов – теория нелинейных колебаний и волн, синхронизация, нейродинамика. Имеет более 10 научных публикаций по указанным направлениям.

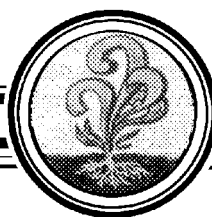
Россия, 603950 Нижний Новгород, 603950, ул. Ульянова, 46
Институт прикладной физики РАН
E-mail: shapinds@mail.ru



Некоркин Владимир Исаакович – родился в 1948 году, окончил радиофизический факультет Горьковского государственного университета им. Н.И. Лобачевского (1971). Доктор физико-математических наук (1992), профессор кафедры теории колебаний и автоматического регулирования ННГУ, заведующий отделом нелинейной динамики Института прикладной физики РАН, лауреат премии им. А.А. Андропова (2012). Область научных интересов – динамика нелинейных систем, нейродинамика, теория синхронизации, пространственно-временной хаос, структурообразование и нелинейные волны. Имеет более 250 научных публикаций в отечественных и зарубежных изданиях, в том числе 4 книги и 2 патента.

Россия, 603950 Нижний Новгород, 603950, ул. Ульянова, 46
Институт прикладной физики РАН
E-mail: vnekorkin@neuron.appl.sci-nnov.ru

*А.С. Дмитричев, Д.В. Касаткин, В.В. Клиньшов, С.Ю. Кириллов,
О.В. Масленников, Д.С. Щапин, В.И. Некоркин*
Изв. вузов «ПНД», т. 26, № 4, 2018



УДК 537.86, 621.373

Сверх- и гиперширокополосная относительная передача информации на основе хаотических радиоимпульсов

А. С. Дмитриев¹, Т. И. Мохсени¹, К. М. Сьерра-Теран²

¹Институт радиотехники и электроники им. В.А.Котельникова РАН
Россия, 125009 Москва, ул. Моховая, 11, стр. 7

²Московский физико-технический институт (государственный университет)
Россия, 141700 Долгопрудный Московской обл., Институтский пер., 9

E-mail: chaos@cplire.ru, mokhseni@gmail.com, serra@phystech.edu
Поступила в редакцию 2.08.2018; принята к публикации 17.08.2018

Тема и цель исследования. Схема с относительной передачей информации, использующая в качестве носителя хаотические сигналы - DCSK (Differential Chaos Shift Keying) была предложена как альтернатива системам с применением хаотической синхронизации. Она устойчива к шумам и возмущениям на уровне классических систем передачи с регулярными сигналами. Однако практическая реализация беспроводных систем связи на ее основе осложняется необходимостью использования линий задержек большой длительности. В работе рассмотрена схема относительной передачи данных, использующая в качестве носителя информации хаотические импульсы. Схема содержит элементы задержки только с малой длительностью, что упрощает практическую реализацию схемы в микроволновом диапазоне частот по сравнению с известными аналогами. **Методы.** Проведено компьютерное моделирование предложенной схемы в среде Matlab. Модель описывается системой дифференциально-разностных уравнений. Переменные системы уравнений представляют собой сигнал в различных точках схемы при передаче информации. Даны аналитические оценки помехоустойчивости в каналах с белым шумом и ее зависимость от базы несущего сигнала. **Результаты.** Показано, что при малых базах сигнала схема подвержена воздействию собственных шумов, которые затрудняют ее работу даже при отсутствии внешних шумов. Однако ее эффективность резко возрастает при использовании сверхширокополосных и гиперширокополосных хаотических сигналов с большой базой вплоть до 10^6 . При таких значениях базы устойчивый прием передаваемых импульсов может быть обеспечен из-под шумов даже при отношении сигнал/шум порядка -20 дБ. **Обсуждение.** Анализ полученных результатов показывает, что в предложенной относительной схеме передачи с использованием в качестве носителя информации хаотических радиоимпульсов отсутствует проблема с необходимостью использования задержек большой длительности, которая является критической для схемы DCSK. В рассмотренной схеме используются задержки только с малой длительностью. Это обстоятельство радикально упрощает практическую реализацию схемы в микроволновом диапазоне частот.

Ключевые слова: система связи, хаотический радиоимпульс, сверхширокополосный сигнал, гиперширокополосный сигнал, относительный прием, корреляция.

<https://doi.org/10.18500/0869-6632-2018-26-4-59-74>

Образец цитирования: Дмитриев А.С., Мохсени Т.И., Сьерра-Теран К.М. Сверх- и гиперширокополосная относительная передача информации на основе хаотических радиоимпульсов // Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2018. Т. 26, № 4. С. 59–74. <https://doi.org/10.18500/0869-6632-2018-26-4-59-74>

Differentially coherent information transmission based on chaotic radio pulses

A.S. Dmitriev¹, T.I. Mokhseni¹, C.M. Sierra-Teran²

¹Kotelnikov Institute of Radioengineering and Electronics of RAS
11-7, Mokhovaya, 125009 Moscow, Russia

²Moscow Institute of Physics and Technology
9, Institutskiy pereulok, 141700 Dolgoprudny, Moscow Region, Russia
E-mail: chaos@cplire.ru, mokhseni@gmail.com, serra@phystech.edu

Received 2.08.2018; accepted for publication 17.08.2018

Subject of the study. Differentially coherent information transmission scheme using chaotic signals as carriers - DCSK (Differential Chaos Shift Keying) was proposed as an alternative to communication systems based on chaotic synchronization. It is resistant to noise and other disturbances at the same level as classic transmission systems based on regular signals. However the requirement of using long time delay lines makes difficult practical implementation of wireless communication systems based on DCSK. A differentially coherent data transmission scheme using chaotic signals as information carriers is considered in the given paper. The scheme includes delay elements only with short duration, which simplifies its practical implementation in microwave frequency ranges in comparison with known analogs. **Methods.** Computer based simulation of the transmission process was carried out in Matlab environment. Simulation model is described by a system of differential-difference equations. The variables of the system of equations represent the signal at various points of the circuit during the transmission of information. Analytical estimation of noise immunity for channels with white noise and of noise immunity as the function of processing gain are given. **Results.** It is shown that for small values of processing gain the scheme is affected by its own noise, which complicates its operation even in the absence of external noise. However, its efficiency dramatically increases with the use of ultra-wideband and hyper-wideband signals with big processing gain up-to 10^6 . At such processing gain values stable reception of transmitted pulses can be provided from under noise even with signal-to-noise ratio around -20 dB. **Discussion.** An analysis of the results shows that in the proposed differentially-coherent transmission scheme based on chaotic radio pulses as information carriers there is no problem with the requirement of using long-duration delays, which is critical for DCSK-based scheme. In the considered scheme only short durations delays are used. This radically simplifies practical realization of the scheme in microwave frequency ranges.

Keywords: communication system, chaotic radio pulse, ultra-wideband signal, hyper-wideband signal, differentially coherent detection, correlation.

<https://doi.org/10.18500/0869-6632-2018-26-4-59-74>

Reference: Dmitriev A.S., Mokhseni T.I., Sierra-Teran C.M. Differentially coherent information transmission based on chaotic radio pulses. *Izvestiya VUZ, Applied Nonlinear Dynamics*, 2018, vol. 26, iss. 4, pp. 59–74. <https://doi.org/10.18500/0869-6632-2018-26-4-59-74>

Введение

Работы по использованию динамического хаоса для передачи информации, в частности беспроводной передачи информации, ведутся как минимум с начала 90-х годов двадцатого века. Кроме общего и давнего интереса к системам связи с использованием шумовых и шумоподобных сигналов [1–4], в динамическом хаосе исследователей привлекло такое явление как хаотическая синхронизация [5]. После выявления проблем с практическим использованием хаотической синхронизации при беспроводной передаче информации, в середине 90-х годов были предприняты попытки использования динамического хаоса для передачи информации на основе относительных методов. К тому времени эти методы были хорошо известны, в том

числе для шумовых и шумоподобных сигналов [3, 4]. Однако хаотические сигналы «вдохнули» в них новую жизнь. Наиболее популярной стала схема относительной хаотической манипуляции (DCSK – Differential Chaotic Shift Keying), предложенная в работах [6, 7], устойчивость которой в канале с белым шумом близка к характеристикам классических схем передачи с регулярными сигналами. В DCSK при передаче каждый двоичный информационный символ с длительностью T_6 представляется в виде двух фрагментов хаотического сигнала с продолжительностью $T_6/2$ каждый, при этом второй фрагмент хаотического сигнала является либо копией первого, либо его инвертированной копией. Первый фрагмент выступает в качестве опорного, второй фрагмент несет информацию. Последовательность таких пар хаотических фрагментов передается в канал связи. В приемнике двоичный информационный символ для каждой пары переданных фрагментов хаотического сигнала определяется путем сравнения результата корреляции второго фрагмента хаотического сигнала из пары и первого фрагмента с нулевым порогом. Результат корреляции больше нуля (первый и второй фрагменты хаотического сигнала в паре совпадают) соответствует передаче «1», результат корреляции меньше нуля (второй фрагмент хаотического сигнала в паре инвертирован по отношению к первому) соответствует передаче «0». Чтобы получить идентичные фрагменты хаотического сигнала, служащие в качестве опорного и несущего информацию при передаче, используется задержка сигнала, равная половине времени продолжительности бита. При физической реализации схемы связи, использующей метод модуляции DCSK, блоки модуляции и демодуляции, отвечающие за задержку сигнала, будут иметь тракт с эквивалентной длиной $cT_6/2$, (c – скорость света). Соответственно, при длительности задержки порядка микро-секунды, необходимая длина тракта для задержки сигнала будет составлять около 300 метров. Такие требования значительно усложняют реализацию компактных систем связи, использующих DCSK и аналоговые хаотические сигналы. Потенциальным решением проблемы больших задержек является переход к цифровым методам формирования фрагментов хаотического сигнала. Однако в этом случае вступают в силу серьезные ограничения по возможной максимальной скорости передачи.

Были предложены и проанализированы две другие схемы с относительной передачей: схема манипуляции с корреляционной задержкой (CDSK – Correlation Delay Shift Keying) и схема симметричной хаотической манипуляции (SCSK – Symmetric Chaos Shift Keying) [8]. Но, как показали сами авторы, характеристики этих схем оказались на 2...3 dB хуже в каналах с белым шумом, чем у схемы DCSK. Поэтому дальнейшего развития эти схемы не получили.

Таким образом, к началу нынешнего века появились схемы применения хаотических сигналов для систем беспроводных коммуникаций на основе относительных методов, которые по своим статистическим характеристикам были близки к классическим узкополосным системам связи. Однако даже у лучшей из них были проблемы с практической реализацией.

Следует отметить, что техника генерации хаоса в микроволновом диапазоне, а также ряд других критических элементов необходимых для создания беспроводных средств коммуникаций к этому времени были уже разработаны, что способствовало появлению практически реализуемых схем.

В 2000 году была предложена прямохаотическая схема связи (ПХСС), использующая в качестве носителя информации хаотические радиоимпульсы [9, 10]. В последующие годы она успешно развивалась: вскоре удалось создать малогабаритные

сверхширокополосные приемопередатчики и сети на их основе. Эта схема была принята в качестве опционального решения в стандарт сверхширокополосной персональной беспроводной связи IEEE 802.15.4a. На сегодняшний день ПХСС является единственной практически реализованной и используемой схемой беспроводной связи на основе динамического хаоса.

В настоящее время к беспроводным средствам коммуникаций предъявляются новые требования. В первую очередь это относится к широкому применению беспроводных, малопотребляющих, достаточно высокоскоростных средств связи для Интернета вещей, Интернета вещей для робототехники и других массивных применений. Эти задачи стимулируют интерес к расширению возможностей использования хаотических сигналов в области беспроводной передачи данных.

В данной работе рассматривается предложенная в [11] прямохаотическая схема относительной передачи, использующая в качестве носителя информации хаотические радиоимпульсы, в которой не применяются задержки большой длительности. Показывается, что эта схема пригодна для создания сверхширокополосных и гиперширокополосных средств беспроводной связи.

1. Схема относительной передачи на основе хаотических радиоимпульсов

В исходной прямохаотической схеме связи [9, 10] в качестве носителя информации используются хаотические импульсы, находящиеся на определенных временных позициях внутри битовых интервалов. Наличие хаотического радиоимпульса на такой позиции означает передачу «1», а его отсутствие – передачу «0». Оставшаяся часть битового интервала используется как защитная пауза, например, при наличии эффектов многолучевого распространения.

В рассматриваемой ниже схеме для передачи информации также используется поток хаотических радиоимпульсов с защитными паузами между ними. Однако при этом применяется другая (относительная) модуляция импульсов информационными сигналами.

Перед тем, как перейти к описанию схемы передачи, отметим, что в реальных прямохаотических средствах связи используются хаотические радиоимпульсы с большой базой $B = 2\Delta F\Delta T$ или коэффициентом процессинга $K = \Delta F\Delta T$, где ΔF – полоса несущего информацию сигнала, а ΔT – его длительность. Обычно база имеет величину 100 и более. Это означает, что время автокорреляции хаотических радиоимпульсов мало и составляет незначительную часть от их длительности. Если, например, использовать сверхширокополосные хаотические сигналы в микроволновом диапазоне частот, то при полосе несущего сигнала 2 GHz (рис. 1, *a*) время его автокорреляции составляет около наносекунды (рис. 1, *b*). Сдвинутый на такой или больший интервал времени хаотический сигнал будет практически ортогонален исходному сигналу. Задержки с подобными временами запаздывания легко и компактно реализуются, например, с помощью тонких микроволновых кабелей длиной в несколько десятков сантиметров.

Структура предлагаемой системы передачи показана на рис. 2 и 3. Передатчик системы (см. рис. 2) состоит из источника хаотических радиоимпульсов, делителя, модулятора, управляемого внешним информационным сигналом; задержки на время τ , превышающее время автокорреляции сигнала; сумматора и передающей антенны. Источник хаотических радиоимпульсов формирует импульсы длительно-

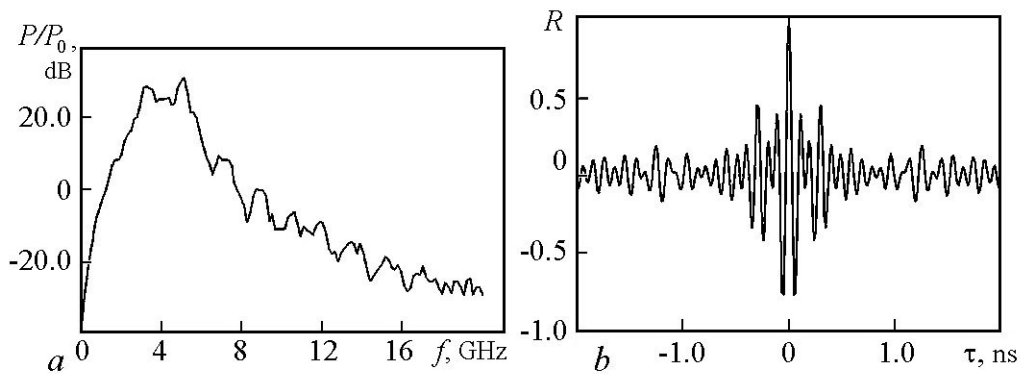


Рис. 1. Характеристики хаотического сигнала: *a* – спектр мощности; *b* – автокорреляционная функция
 Fig. 1. Characteristics of chaotic signal: *a* – power spectrum, *b* – autocorrelation function

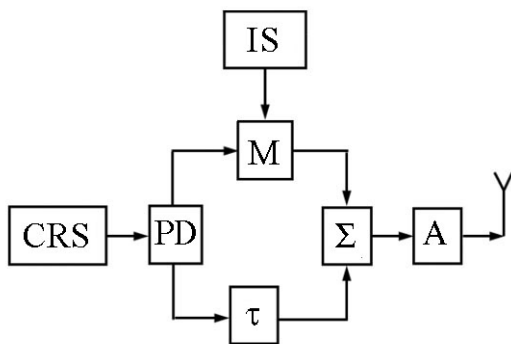


Рис. 2. Структура передатчика: CRS – источник хаотических радиоимпульсов; PD – делитель; IS – информационная последовательность; M – модулятор; τ – задержка; Σ – сумматор; A – усилитель

Fig. 2. Transmitter structure: CRS – chaotic radio pulses source, PD – power divider, IS – information sequence, M – modulator, τ – time delay, Σ – adder, A – amplifier

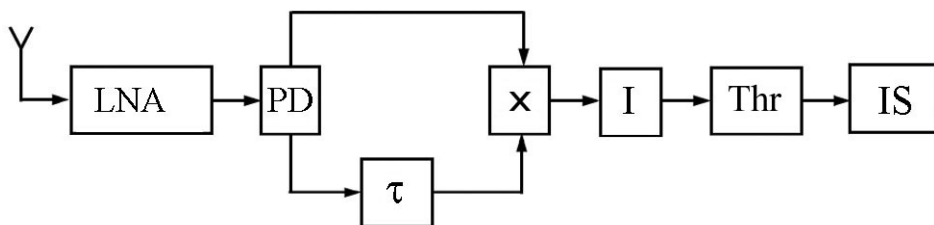


Рис. 3. Структура приемника: LNA – малошумящий усилитель; PD – делитель; τ – задержка; \times – перемножитель; I – интегратор; Thr – пороговое устройство; IS – информационная последовательность

Fig. 3. Receiver structure: LNA – low-noise amplifier, PD – power divider, τ – time delay, \times – multiplier, I – integrator, Thr – threshold device, IS – information sequence

стью $T_{и}$; промежутки между импульсами – защитные интервалы – имеют длительность $T_{зи}$. Суммарная длительность импульса и защитного интервала представляет собой длительность передаваемого бита $T_б$. Каждый импульс поступает в делитель, после которого попадает в два канала. В первом канале его модулируют информационным сигналом путем умножения на (± 1) , а во втором канале задерживают на время τ . Умножение на $(+1)$ соответствует передаче «1», умножение на (-1) – передаче «0». После этого сигналы суммируют, суммарный сигнал усиливают, он поступает в антенну и излучается. При этом длина излучаемого суммарного импульса равна $T_{изл} = T_{и} + \tau$.

Приемник системы (см. рис. 3) состоит из антенны, малошумящего усилителя, делителя, задержки на время τ , перемножителя, интегратора и порогового устройства. Принятый антенной сигнал усиливают до нужного уровня в малошумящем усилителе, делят пополам и подают в два канала. В первом канале никаких действий с сигналом не производят, и он поступает на перемножитель. Во втором канале сигнал задерживают на время τ , после чего он также поступает на перемножитель. Заметим, что длительность импульса, полученного путем перемножения импульсов, поступивших на перемножитель, равна T_n . Импульс, полученный с выхода перемножителя, интегрируется в течение времени T_n . Затем сигнал поступает на пороговое устройство с нулевым порогом. Если поступивший сигнал больше нуля, то пороговое устройство фиксирует прием «1», если же он меньше нуля, то фиксируется прием «0».

Пусть $S_k(t)$ – k -й хаотический импульс в потоке, формируемом источником хаотических радиоимпульсов (мы должны индексировать их, поскольку, в силу хаотичности, они все разные); $\alpha_k \in \{-1, 1\}$ – значение информационного модулирующего сигнала. При передаче k -го двоичного информационного символа сигнал на выходе передатчика будет выглядеть следующим образом:

$$Y_k(t) = \frac{\alpha_k S_k(t) + S_k(t - \tau)}{2}. \quad (1)$$

В приемнике, при отсутствии шумов, импульс на выходе блока перемножения, соответствующий k -му информационному символу, поступает на интегратор, после которого приобретает вид:

$$Z_k(t) = \frac{\int_{\tau}^{T_n+\tau} \alpha_k S_k(t - \tau) S_k(t - \tau) dt}{4} + \theta_k(t), \quad (2)$$

где

$$\theta_k(t) = \left[\int_{\tau}^{T_n+\tau} S_k(t) S_k(t - \tau) dt + \int_{\tau}^{T_n+\tau} \alpha_k S_k(t) S_k(t - 2\tau) dt + \int_{\tau}^{T_n+\tau} S_k(t - \tau) S_k(t - 2\tau) dt \right] / 4. \quad (3)$$

Составляющая $\theta_k(t)$ сигнала (2) представляет собой шум, создаваемый самой схемой. Поскольку время задержки τ превышает время автокорреляции, все компоненты $\theta_k(t)$ будут существенно меньшими по сравнению с первым членом в выражении (2), являющимся полезным сигналом. Таким образом, знак α_k («+» или «-») определяет и знак $Z_k(t)$. Сигнал с выхода интегратора поступает на блок принятия решения, где осуществляется его сравнение с нулевым порогом. По знаку определяется значение выходного двоичного информационного символа.

2. Сверх- и гиперширокополосные средства связи

Под сверхширокополосными системами связи в настоящее время понимают системы, использующие сигналы с относительной полосой не менее 20% или с абсолютной полосой не менее 500 MHz (в диапазоне частот от 3.1 до 10.6 GHz).

это определение было введено Федеральной комиссией по коммуникациям США в 2002 году и положено в основу всех дальнейших документов по сверхширокополосной связи (В Российской федерации это диапазон 2.85...10.6 GHz).

В 2014 году агентство DARPA (Defense Advanced Research Projects Agency) стало использовать термин гиперширокополосная связь, понимая под этим связь с полосой частот не менее 10 GHz. Агентство объявило конкурс на исследования в области гиперширокополосной связи (Программа HERMES – Hyper-wideband Enabled RF Messaging).

В этом конкурсе DARPA запросило инновационные исследовательские предложения для изучения возможности использования широкополосной радиочастотной системы с расширением спектра до полосы частот более 10 GHz. Система должна будет работать на частотах ниже 20 GHz, чтобы уменьшить поглощение атмосферы и использовать коэффициент процессинга (базу сигнала) и спектральную фильтрацию для обеспечения работоспособности. Исследования предполагалось продвигать по двум направлениям: 1) исследование системных архитектур, эффектов распространения канала, регулирования спектра, методов обработки сигналов, кульминации демонстрации с использованием коммерческих компонентов и 2) разработка новых технологий приемника, предположительно на основе фотоники, с размером, весом и мощностью, соответствующими устройству, размещаемому в руке [12].

На первом этапе предлагалось создать действующий макет системы с полосой пропускания, демонстрирующий возможность достижения полосы расширенного спектра не менее 10 GHz при коэффициенте процессинга не менее 40 dB, с пропускной способностью не менее 100 килобит в секунду (10^5 bit rate). Демонстрация предполагалась в перегруженной радиочастотной среде.

В 2016 году появились первые публикации, относящиеся к тематике программы [13, 14]. Ниже, в разделе 5 показано, что на рассматриваемой в данной работе схеме относительной передачи могут быть реализованы характеристики, близкие к тем, которые запрашиваются программой HERMES.

3. Компьютерное моделирование

На основе предложенной схемы была построена математическая модель схемы относительной передачи информации с использованием хаотических импульсов.

Поскольку речь идет об исследовании возможности передачи данных по радиоканалу, подходящий для этого хаотический сигнал должен иметь полосовую форму спектра. В модели в качестве источника хаотических колебаний использовался генератор полосового хаоса с 2.5 степенями свободы [15]. Автоколебательная система генератора включает в себя замкнутые в кольцо обратной связи: нелинейный элемент с характеристикой $F(y) = My \exp(-y^2)$, фильтр нижних частот (ФНЧ) первого порядка, ФНЧ второго порядка и полосовой фильтр (ПФ). Уравнения автоколебательной системы имеют вид:

$$\begin{aligned} T_1 \dot{y}_1(t) + y_1(t) &= F(y_3)D(t), \\ \ddot{y}_2(t) + \beta_2 \dot{y}_2(t) + \omega_2^2 y_2(t) &= \omega_2^2 y_1(t), \\ \ddot{y}_3(t) + \beta_3 \dot{y}_3(t) + \omega_3^2 y_3(t) &= \omega_3^2 y_2(t), \end{aligned} \quad (4)$$

где T_1 – постоянная времени ФНЧ первого порядка, β_k и ω_k ($k = 2, 3$) – коэффици-

енты диссипации и резонансные частоты фильтров. Спектр мощности и автокорреляционная функция для типичного режима работы автогенератора, используемого в дальнейшем при моделировании работы схемы передачи, показаны на рис. 1.

Заметим, что для того, чтобы генератор хаоса формировал вместо непрерывного хаотического сигнала поток хаотических импульсов, при компьютерном моделировании в правую часть первого уравнения системы (4) введен меняющийся во времени коэффициент $D(t)$:

$$D(t) = \frac{\text{sign}(\sin(2\pi t)/T_6) + 1}{2}. \quad (5)$$

Система (4) формирует поток хаотических импульсов с длительностью $T_n = T_6/2$ и скважностью 2. Сигнал на выходе передатчика описывается уравнением:

$$y_4(t) = \frac{\alpha(t)y_3(t) + y_3(t - \tau)}{2}. \quad (6)$$

Функция $\alpha(t)$ в уравнении (6) представляет собой входной информационный сигнал и принимает на битовом интервале значение -1 или 1 : $\alpha(t) = \{-1, 1\}$ в зависимости от передаваемого в момент времени t информационного символа «1» или «0». После этого сигналы суммируют. Выходной сигнал поступает в канал связи и затем в приемник.

В приемнике производится перемножение поступившего сигнала и его задержанной копии $y_5(t) = (y_4(t)y_4(t - \tau))/4$, после чего результирующие импульсы поступают на вход ФНЧ второго порядка, моделирующего интегратор. В целом динамика модели приемника описывается уравнением:

$$\ddot{y}_6(t) + \beta_6\omega_6\dot{y}_6(t) + \omega_6^2y_6(t) = \omega_6^2y_5(t), \quad (7)$$

где β_6 и ω_6 – коэффициент диссипации и резонансная частота фильтра, соответственно.

Решение о полученном информационном символе принимается на основании сравнения сигнала на выходе фильтра с нулевым порогом. Таким образом, система уравнений (4)–(7) описывает модель системы относительной передачи информации. Построенная модель представляет собой систему дифференциально-разностных уравнений с запаздыванием. Решение системы осуществлялось в среде Matlab с использованием функции для решения дифференциально-разностных уравнений с фиксированными задержками `dde23`.

Моделирование системы передачи проводилось для импульсов с коэффициентом процессинга $K = 10$ при следующих нормированных значениях параметров: $M = 32$; $T_1 = 1$; $\beta_2 = 0.3$; $\omega_2 = 1.0$; $\beta_3 = 0.2$; $\omega_3 = 1.55$; $T_6 = 300$; $\tau = 10$; $\beta_6 = 0.9$; $\omega_6 = 0.63$. Для последующего перевода в реальные значения частот и запаздываний использовали масштабирующий коэффициент $L = 2 \cdot 10^{10}$. Результаты моделирования представлены на рис. 4.

Источник формирует поток хаотических радиоимпульсов со скважностью 2 (рис. 4, *a*). Поток поступает на делитель мощности пополам. Сигнал с первого выхода делителя перемножают с входным двоичным информационным сигналом (рис. 4, *b*). Таким образом, в зависимости от передаваемого информационного символа хаотический импульс проходит без изменений («1») или инвертируется («0»).

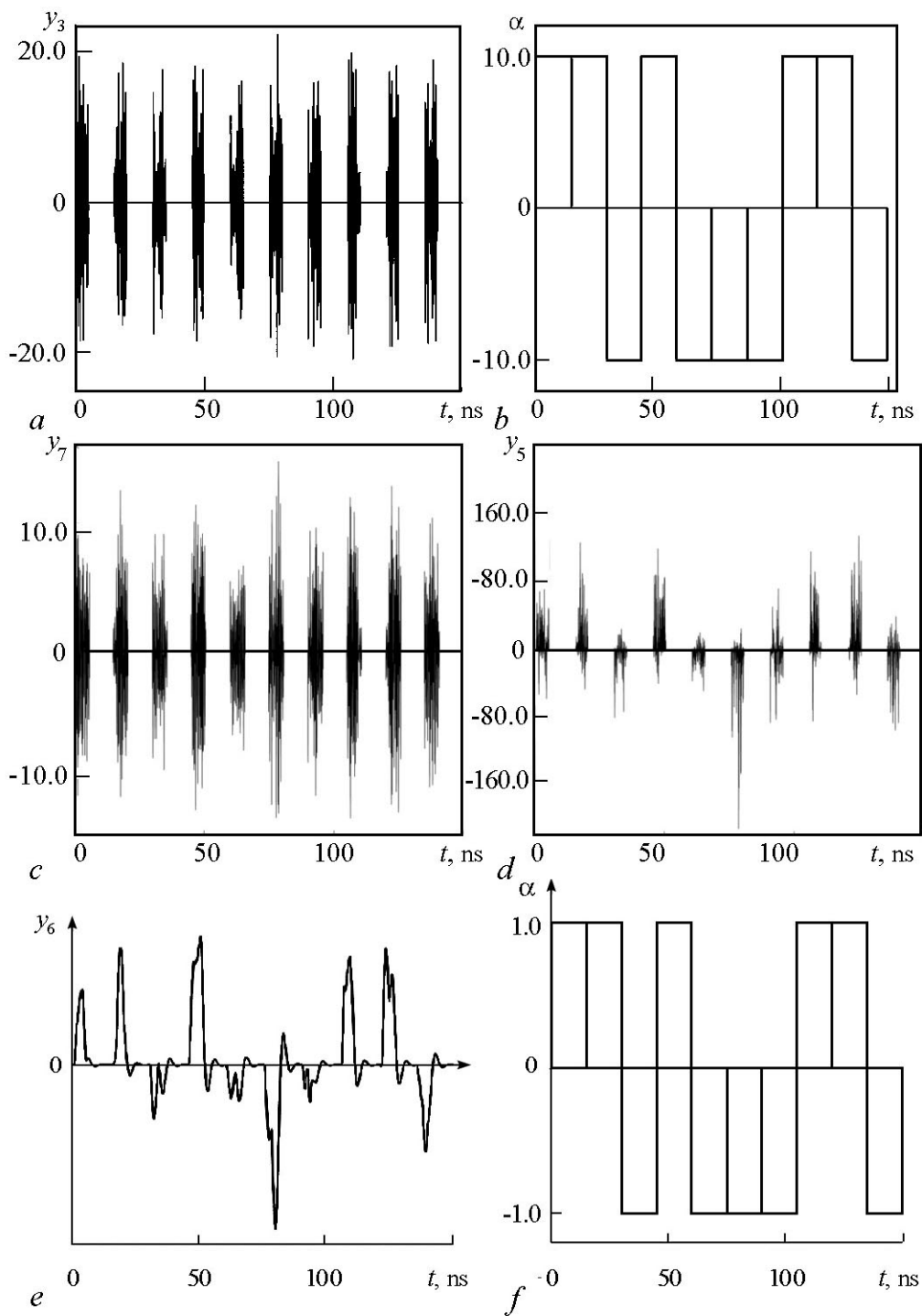


Рис. 4. Вид сигналов при преобразованиях в передатчике и приемнике: *a* – поток хаотических радиоимпульсов на выходе CRS; *b* – входная модулирующая последовательность; *c* – сигнал на выходе сумматора; *d* – сигнал на выходе перемножителя; *e* – сигнал на выходе интегратора; *f* – выходная информационная двухуровневая последовательность

Fig. 4. Signal form during transformations in transmitter and receiver: *a* – chaotic radio pulses flow at the output of CRS; *b* – input modulating sequence; *c* – signal at the output of the adder; *d* – signal at the output of the multiplier; *e* – signal at the output of the integrator; *f* – two-level output information sequence

Сигнал со второго выхода делителя поступает на блок задержки. Сигнал с выхода сумматора показан рис. 4, *c*.

В приемнике полученный сигнал поступает в делитель мощности пополам. Сигнал с нижнего выхода делителя подают на блок задержки на время τ . Сигнал с верхнего выхода делителя без изменений подают на умножитель, где осуществляется его перемножение с сигналом с выхода блока задержки. После перемножения полученный сигнал (рис. 4, *d*) поступает на интегратор. В результате интегрирования получается сигнал, который показан на рис. 4, *e*. Он содержит импульсы огибающей положительной и отрицательной полярности и интервалы между ними. Импульсы соответствуют передаваемым информационным битам: положительные «1», отрицательные «0». Затем сигнал поступает на блок принятия решения, где осуществляется сравнение сигнала с нулевым порогом. По знаку определяется выходной двоичный информационный символ (рис. 4, *f*).

4. Аналитические оценки

Наряду с компьютерным моделированием были проведены аналитические оценки характеристик схемы [11] на основе метода, описанного в [3].

При аналитических оценках алгоритм работы приемника, описанного в предыдущих разделах, представлялся следующим образом:

$$\text{sign}(y_5(t)) = \text{sign} \int_{\tau}^{T_n+\tau} y_4(t)y_4(t-\tau)dt. \quad (8)$$

В присутствии шума сигналы под знаком интеграла имеют вид:

$$\begin{aligned} y_4(t) &= y_3(t) + y_3(t-\tau) + \eta(t), \\ y_4(t-\tau) &= y_3(t-\tau) + y_3(t-2\tau) + \eta(t-\tau), \end{aligned} \quad (9)$$

где $y_3(t)$ – сигнал, моделирующий хаотический радиоимпульс в виде фрагмента реализации случайного процесса с нормальным распределением амплитуд и равномерной спектральной плотностью N_c ; $\eta(t)$ – белый шум со спектральной плотностью N_0 .

Подставляя в интеграл (8) выражения для сигналов (9), получаем:

$$\begin{aligned} \int_{\tau}^{T_n+\tau} y_4(t)y_4(t-\tau)dt &= \int_{\tau}^{T_n+\tau} y_3(t-\tau)y_3(t-\tau)dt + \int_{\tau}^{T_n+\tau} y_3(t)y_3(t-\tau)dt + \\ &+ \int_{\tau}^{T_n+\tau} y_3(t)y_3(t-2\tau)dt + \int_{\tau}^{T_n+\tau} y_3(t-\tau)y_3(t-2\tau)dt + \int_{\tau}^{T_n+\tau} y_3(t)\eta(t-\tau)dt. \end{aligned} \quad (10)$$

В (10) полезную информацию переносит лишь первое слагаемое, остальные представляют собой помеху, обусловленную как флуктуационным шумом $\eta(t)$, так и самим сигналом. Далее для нахождения распределения случайных величин, входящих в равенство (10) производится их разложение в виде ряда Фурье и используется метод, изложенный в [3]. Итоговое выражение для вероятности ошибки при приеме

сообщения имеет вид (11):

$$P_{\text{ош}} = f \left(N_c \Delta F T_{\text{и}} / \sqrt{N_c N_0 \Delta F T_{\text{и}}} \left(2 + \frac{N_0}{2N_c} + \frac{5N_c}{2N_0} \right) \right), \quad (11)$$

где

$$f(x) = \left[1 - \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} \right],$$

N_c – спектральная плотность хаотического радиоимпульса, ΔF – полоса хаотического сигнала, $T_{\text{и}}$ – длительность хаотического радиоимпульса, N_0 – спектральная плотность белого шума.

Эта вероятность ошибки обладает интересным асимптотическим свойством. При стремлении отношения сигнал/шум к бесконечности вероятность ошибки стремится не к нулю, а к некоторому пределу, равному:

$$P_{\text{ош пред}} = f \left(\sqrt{\frac{2\Delta F T_{\text{и}}}{5}} \right). \quad (12)$$

Такой характер поведения вероятности ошибки можно объяснить следующим образом. Из формулы (10) видно, что, при равной нулю флуктуационной помехе $\eta(t)$, остается помеха, обусловленная задержанными относительно друг друга компонентами самого полезного сигнала. Причем мощность такой помехи пропорциональна мощности полезного сигнала и возрастает вместе с ним. Поэтому при любой конечной базе сигнала вероятность ошибки даже при отсутствии внешнего шума не равна 0. Однако при стремлении коэффициента процессинга (базы) сигнала к бесконечности предельная вероятность ошибки (12) стремится к нулю, так как при этом происходит лучшее усреднение помехи от собственного сигнала в приемнике.

На рис. 5 представлен график зависимости вероятности ошибки на бит от коэффициента процессинга (базы) сигнала в приемнике с алгоритмом работы (8). Флуктуационные помехи считаются равными нулю. Расчет вероятности ошибки производился по формуле (12). Из него можно сделать вывод, что несмотря на внутренние помехи, при увеличении базы сигнала вероятность ошибок при приеме в отсутствие внешних шумов быстро падает, и при базе сигнала 200 (процессинге 100) ее величина уже не превышает значения 10^{-10} . Таким образом, внутренние шумы схемы при больших базах сигнала практически не влияют на помехоустойчивость схемы при наличии внешних шумов (эти характеристики будут приведены ниже). Но именно сигналы с большой базой, как показывает практика применения прямохаотических систем связи, и представляют наибольший интерес.

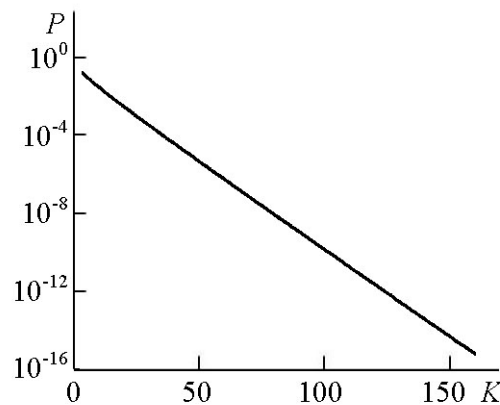


Рис. 5. Зависимость вероятности ошибки от коэффициента процессинга сигнала при отсутствии флуктуационных помех

Fig. 5. Error probability as function of signal processing gain in the absence of fluctuation noise

5. Характеристики схемы в сверхширокополосном и гиперширокополосном случаях

Количественные оценки вероятностей ошибок при наличии внешнего шума для малых, средних и больших коэффициентов процессинга хаотических радиоимпульсов представлены, соответственно, на рис. 6. Коэффициент процессинга K зависит как от полосы сигнала, так и от его длительности. В принципе, коэффициенты процессинга как сверхширокополосного, так и гиперширокополосного сигнальных элементов, несущих информацию, могут варьироваться в широких пределах, начиная с единиц и кончая сотнями тысяч и более. Однако именно величина процессинга будет, в основном, определять устойчивость схемы связи к шумам. Из рис. 6, *a* видно, что при значениях $K \leq 20$ вероятность ошибки в рассматриваемой схеме передачи нельзя снизить до величины меньше 10^{-3} даже при очень больших отношениях сигнал/шум. С другой стороны, при $K > 100$ вероятность ошибки меньше 10^{-5} уже при отношениях E_b/N_0 меньше 20 dB (рис. 6, *b*). Отметим, что для таких коэффициентов процессинга отношение сигнал/шум (SNR), при котором возможно извлечение сигнала, становится уже меньше 0 dB. При дальнейшем увеличении коэффициента процессинга полезный сигнал может быть извлечен даже из-под шума. Уровень требуемого для этого значения SNR падает с ростом K до величины (-20) dB при $K = 10^6$ (рис. 6, *c* и рис. 7).

Каковы параметры хаотического радиоимпульса, например, с коэффициентом процессинга $K = 10^5$ (50 dB) (это на десять децибел больше, чем минимальные требования программы HERMES)? Если полоса сигнала равна 10 GHz, то длина

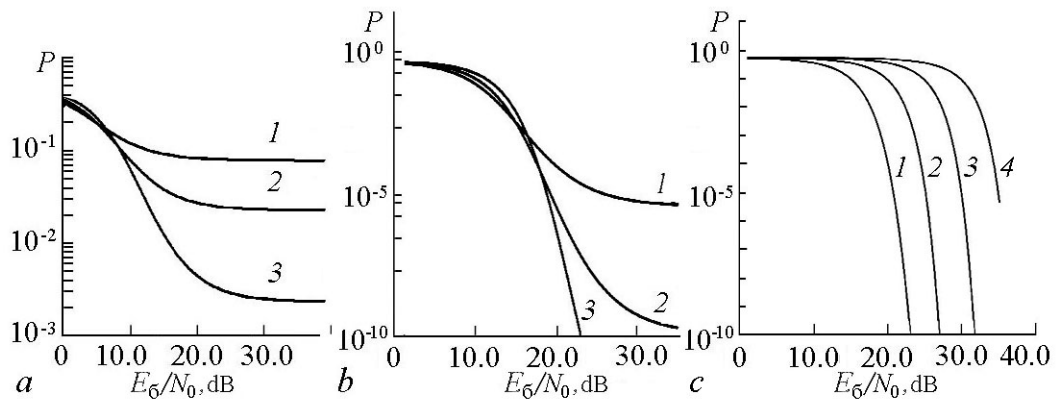


Рис. 6. Зависимости вероятности ошибки от отношения энергии бита к спектральной плотности шума (E_b/N_0): *a* – при малых значениях коэффициента процессинга K , кривые 1–3 соответствуют K : 5; 10; 20; *b* – при средних значениях коэффициента процессинга K , кривые 1–3 соответствуют K : 50, 100, 200; *c* – при больших значениях коэффициента процессинга K . Кривые 1–4 соответствуют K : 10^3 , 10^4 , 10^5 , 10^6

Fig. 6. Error probability as function of the ratio of bit energy to noise spectral density (E_b/N_0): *a* – for small values of processing gain K , curves 1–3 correspond to K : 5; 10; 20; *b* – for medium values of processing gain K , curves 1–3 correspond to K : 50, 100, 200; *c* – for medium values of processing gain K , curves 1–4 correspond to K : 10^3 , 10^4 , 10^5 , 10^6

хаотического будет равна 10^{-5} секунд, и максимальная скорость передачи около 100 килобит в секунду, при этом средняя мощность принимаемого сигнала может уменьшаться до величины (-15) dB при вероятности ошибки на бит (BER – Bit Error Ratio) не более 10^{-5} .

Исходя из сделанных оценок, можно утверждать, система относительной передачи с хаотическими радиоимпульсами является неплохим кандидатом для класса беспроводных гиперширокополосных систем передачи информации. Осталось добавить, что возможность получения хаотических колебаний с гипершироким спектром в диапазоне до 30 GHz показана в работе [16].

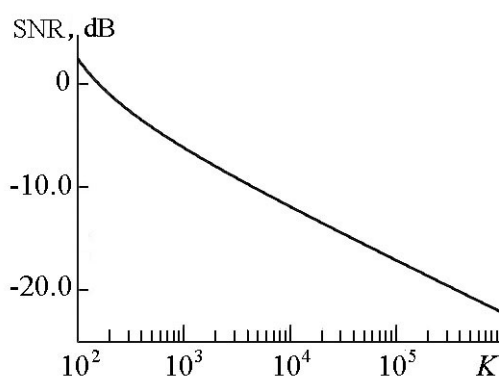


Рис. 7. Зависимость минимального отношения сигнал/шум SNR, при котором обеспечивается вероятность ошибки на принимаемый бит 10^{-5} , от коэффициента процессинга K

Fig. 7. Minimum signal-to-noise ratio SNR, at which the provided error probability for the received bit is 10^{-5} , as function of processing gain K

Заключение

Рассмотренная в работе схема передачи информации, использующая в качестве носителя информации хаотические радиоимпульсы, относится к классу схем с относительной передачей. В отличие от схемы DCSK, в предложенной схеме используются задержки значительно меньшей длительности, что облегчает ее практическую реализацию в микроволновом диапазоне частот. Например, требуемые для схемы задержки при полосе сигнала 1 гигагерц составляют 1–2 наносекунды, и могут быть выполнены в отрезках современных кабелей длиной до 50 сантиметров.

Следует отметить, что в предлагаемой схеме даже при отсутствии внешних помех вероятность ошибки на принимаемый бит не равна нулю, а стремится к некоторому пределу. Это вызвано помехой, обусловленной задержанными относительно друг друга компонентами полезного сигнала. Однако при достаточно больших базах (начиная с 50) этот фактор уже практически не сказывается на свойствах системы, а именно такие базы сигналов и представляют интерес для практических приложений.

Оценки показывают, что рассмотренная относительная схема передачи может быть использована для создания не только сверхширокополосных, но и гиперширокополосных средств связи с базами сигнала (коэффициентами процессинга) вплоть до 10^6 . При таких коэффициентах процессинга устойчивый прием передаваемых сигналов может быть обеспечен из-под шумов.

Важным свойством схемы является также нулевой порог принятия решения о приходе «0» или «1».

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 16-19-00084).

Библиографический список

1. *Котельников В.А.* Сигналы с максимальной и минимальной вероятностью обнаружения // РЭ. 1959. № 3. С. 354–358.
2. *Харкевич А.А.* Передача сигналов модулированным шумом // Электросвязь. 1957. № 11. С. 42–46.
3. *Петрович Н.Т., Размахнин М.К.* Системы связи с шумоподобными сигналами. М.: Советское радио, 1969.
4. *Варакин Л.Е.* Системы связи с шумоподобными сигналами. М.: Радио и связь, 1985.
5. *Pecora L.M., Carroll T.L.* Synchronization in Chaotic systems // Phys. Rev. Lett. 1990. Vol. 64, № 8. P. 821–824.
6. *Kolumban G., Kennedy M.* The role of synchronization in digital communications using chaos – Part I: Fundamentals of digital communications // IEEE Trans. Circuits and Systems. 1997. Vol. 44, № 10. P. 927–936.
7. *Kolumban G., Vizvari B., Schwarz W., Abel A.* Differential chaos shift keying: A robust coding for chaotic communication // in Proc. NDES'96. 1996. P. 87–92.
8. *Sushchik M., Tsirning L.S., Volkovskii A.R.* Performance analysis of correlation-based communication schemes utilizing chaos // IEEE Trans. Circuits and Systems. 2000. Vol. 47, № 12. P. 1684–1691.
9. *Дмитриев А.С., Кяргинский Б.Е., Панас А.И., Старков С.О.* Прямохаотические схемы передачи информации в сверхвысокочастотном диапазоне // РЭ. 2001. Т. 46, № 2. С. 224–233.
10. *Dmitriev A.S., Kyarginsky B. Ye., Panas A.I., Starkov S.O.* Experiments on ultra wideband direct chaotic information transmission in microwave band // Int. J. Bifurcation and Chaos. 2003. Vol. 13, № 6. P. 1495–1507.
11. *Дмитриев А.С., Мохсени Т.И., Сьерра-Теран К.М.* Относительная передача информации на основе хаотических радиоимпульсов // РЭ. 2018. Т. 63, № 10. С. 1–9.
12. Документ DARPA: Broad Agency Announcement Hyper-wideband Enabled RF Messaging (HERMES) Microsystems Technology Office DARPA-BAA-14-34. 30 June 2014. 36 p.
13. *Subramanian, Vijayan.* Hyper-wideband wireless communication link empowered by silicon photonics for low cost RF systems // IJARTET. 2018. Vol. 5, № 1. P. 25–29.
14. *Esman D., Ataie V., Kuo B. P.-P., Alic N., Radic S.* Subnoise signal detection and communication // Journal of Lightwave Technology. 2016. Vol. 34, № 22. P. 5214–5219.
15. *Дмитриев А.С., Ефремова Е.В., Максимов Н.А., Панас А.И.* Генерация хаоса. М.: Техносфера, 2012.
16. *Ефремова Е.В.* Модель хаотической автоколебательной системы диапазона 10–30 GHz на основе SiGe-технологии 130 nm // Письма в ЖТФ. 2018. Т. 44, № 9. С. 26–33.

References

1. Kotelnikov V.A. Signals with maximum and minimum probability of detection.

А.С. Дмитриев, Т.И. Мохсени, К.М. Сьерра-Теран
Изв. вузов «ПНД», т. 26, № 4, 2018

- Radiotekhnika I Electronica*, 1959, no. 3, pp. 354–358 (in Russian).
2. Kharkevich A.A. Transmission of signals by modulated noise. *Electrosvyaz.*, 1957, no. 11, pp. 42–46 (in Russian).
 3. Petrovich N.T., Razmakhnin M.K. Communication systems with noise-like signals. Moscow: Soviet Radio, 1969 (in Russian).
 4. Varakin L.E. Communication systems with noise-like signals. M.: Radio I Svyaz. 1985 (in Russian).
 5. Pecora L.M., Carroll T.L. Synchronization in Chaotic systems. *Phys. Rev. Lett.*, 1990, vol. 64, no. 8, pp. 821–824.
 6. Kolumban G., Kennedy M. The role of synchronization in digital communications using chaos – Part I: Fundamentals of digital communications. *IEEE Trans. Circuits and Systems*, 1997, vol. 44, no. 10, pp. 927–936.
 7. Kolumban G., Vizvari B., Schwarz W., Abel A. Differential chaos shift keying: A robust coding for chaotic communication. In *Proc. NDES'96*, 1996, pp. 87–92.
 8. Sushchik M., Tsirning L.S., Volkovskii A.R. Performance analysis of correlation-based communication schemes utilizing chaos. *IEEE Trans. Circuits and Systems*, 2000, vol. 47, no. 12, pp. 1684–1691.
 9. Dmitriev A.S., Kjarginsky B.E., Panas A.I., Starkov S.O. Direct-chaotic schemes of information transmission in the microwave range. *Journal of Communications Technology and Electronics*, 2001, vol. 46, no. 2, pp. 224–233.
 10. Dmitriev A.S., Kyarginsky B. Ye., Panas A.I., Starkov S.O. Experiments on ultra wideband direct chaotic information transmission in microwave band. *Int. J. Bifurcation and Chaos*, 2003, vol. 13, no. 6, pp. 1495–1507.
 11. Dmitriev A.S., Mokhseni T.I., Sierra-Teran K.M. Differential information transfer based on chaotic radio pulses. *Journal of Communications Technology and Electronics*, 2018, vol. 63, no. 10. (in print).
 12. Broad Agency Announcement Hyper-wideband Enabled RF Messaging (HERMES) Microsystems Technology Office DARPA-BAA-14-34. 30 June 2014. 36 p.
 13. Subramanian, Vijayan. Hyper-wideband wireless communication link empowered by silicon photonics for low cost RF systems. *IJARTET*, 2018, vol. 5, no. 1, pp. 25–29.
 14. Esman D., Ataie V., Kuo B. P.-P., Alic N., Radic S. Subnoise Signal Detection and Communication. *Journal of Lightwave Technology*, 2016, vol. 34, no. 22, pp. 5214–5219.
 15. Dmitriev A.S., Efremova E.V., Maksimov N.A., Panas A.I. Generation of chaos. M.: Technosphere, 2012 (in Russian).
 16. Efremova E.V. Model of a chaotic self-oscillating system of the range 10–30 GHz based on SiGe-technology 130 nm. *Technical Physics Letters*, 2018, vol. 44, no. 5, pp. 378–380.



Дмитриев Александр Сергеевич. Закончил факультет общей и прикладной физики Московского физико-технического института в 1971 году. Кандидат физико-математических наук по специальности радиофизика с 1974. Доктор физико-математических наук по специальности радиофизика с 1988. Профессор с 1995. Заведующий отделом статистической радиофизики в ИРЭ им. В.А. Котельникова РАН. Профессор Московского физико-технического института. Область научных исследований и разработок: информационные и коммуникационные технологии на основе динамического хаоса. Автор и соавтор более 230 статей в журналах, 9 монографий, более 25 патентов и авторских свидетельств. Дважды Лауреат Премии Совета Министров СССР. Заслуженный радист Российской Федерации.

125009 Москва, ул. Моховая, д. 11, корп. 7
Институт радиотехники и электроники им. В.А. Котельникова РАН
E-mail: chaos@cplire.ru



Мохсени Тимур Исхакович – родился в Чебоксарах (1985), окончил Московский физико-технический институт (2008). После окончания института работает в Институте радиотехники и электроники им. В.А. Котельникова РАН. Область научных интересов – применение широкополосных хаотических сигналов для передачи информации. Автор более 30 печатных работ (из них 9 статей в соавторстве) по направлению, указанному выше.

125009 Москва, ул. Моховая, д. 11, корп. 7
Институт радиотехники и электроники им. В.А. Котельникова РАН
E-mail: mokhseni@gmail.com



Сьерра-Теран Кристиан Маурисио – родился в 1990 году в Картахене, Колумбия. В 2014 году окончил радиотехнический факультет Московского физико-технического института (МФТИ). Область интересов – применение динамического хаоса в информационных системах связи. Аспирант Московского физико-технического института. Автор и соавтор ряда печатных работ (в том числе 1 статьи).

141701 Долгопрудный, Институтский переулок, 9
Московский физико-технический институт
E-Mail: serra@phystech.edu



УДК 551.465

Хаос и порядок в атмосферной динамике

Часть 3. Предсказуемость Эль-Ниньо

Н. В. Вакуленко¹, И. В. Серых¹, Д. М. Сонечкин^{1,2}

¹Институт океанологии им. П.П. Ширшова РАН
117997 Москва, Нахимовский проспект д. 36

²Гидрометеорологический научно-исследовательский центр России
123242 Москва, Большой Предтеченский пер., 11-13

Email: vanava139@yandex.ru, iserykh@ocean.ru, dsonech@ocean.ru
Поступила в редакцию 2.03.2018, принята к публикации 20.04.2018

Тема. Опираясь на предположение, что короткопериодные климатические вариации нехаотичны, и, следовательно, к этим вариациям не применима парадигма ограниченной предсказуемости погоды, сформулированная Э.Н. Лоренцем, ставится вопрос о неограниченной предсказуемости короткопериодных вариаций климата. Это принципиально отличается от общепринятого в климатологии представления о неустойчивости атмосферных движений всех временных масштабов, начиная от изменений погоды ото дня ко дню и включая многолетние, многовековые и даже тысячелетние вариации климата. **Цель.** Конкретно, рассматриваются межгодовые масштабы, и специально исследуется предсказуемость широко известного феномена Эль-Ниньо. При этом рассматривается недавно обнаруженная так называемая Глобальная Атмосферная Осцилляция (ГАО), которая представляет собой синхронизованную совокупность хорошо известных процессов в тропиках, связанных с Эль-Ниньо, и внетропических процессов. **Метод.** Считая ГАО главной модой короткопериодных климатических вариаций, определяются индексы, характеризующие динамику самого ГАО и взаимосвязи внетропических и тропических компонент ГАО друг с другом. Оказывается, что между этими индексами имеется столь тесная кросскорреляция, что ее можно считать проявлением взаимно-однозначных связей между тропическими и внетропическими компонентами ГАО. **Результаты.** Это позволяет положительно ответить на поставленный вопрос о нехаотичности вариаций климата. Среди индексов, характеризующих ГАО, находится один, с помощью которого оказывается возможным предсказывать Эль-Ниньо с заблаговременностью в 14 месяцев. Затем, с помощью специально разработанной техники кроссвейвлетного анализа пар временных рядов, выявляется диапазон временных масштабов, внутри которого имеет место наиболее тесная кросскорреляция этого индекса с индексом, характеризующим Эль-Ниньо. Этот диапазон включает в себя масштабы всех известных ритмов Эль-Ниньо, то есть от двух до примерно 16 лет. **Обсуждение.** В итоге указывается на возможность дальнейшего увеличения этой заблаговременности до нескольких лет. Это много больше, чем заблаговременности всех ныне существующих динамических и статистических методов прогноза Эль-Ниньо.

Ключевые слова: нехаотические короткопериодные климатические вариации, вейвлетный анализ, предсказуемость Эль-Ниньо.

<https://doi.org/10.18500/0869-6632-2018-26-4-75-94>

Образец цитирования: Вакуленко Н.В., Серых И.В., Сонечкин Д.М. Хаос и порядок в атмосферной динамике. Часть 3. Предсказуемость Эль-Ниньо // Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2018. Т. 26, № 4. С. 75–94.

<https://doi.org/10.18500/0869-6632-2018-26-4-75-94>

Chaos and order in atmospheric dynamics

Part 3. Predictability of El Niño

N.V. Vakulenko¹, I.V. Serykh¹, D.M. Sonechkin^{1,2}

¹Shirshov Institute of Oceanology, Russian Academy of Sciences
36, Nakhimovskiy prospect, 117997 Moscow, Russia

²Hydrometeorological Research Centre of the Russian Federation
11-13 Bol'shoi Predtechenskii per., 123242 Moscow, Russia
Email: vanava139@yandex.ru, iserykh@ocean.ru, dsonech@ocean.ru
Received 2.03.2018; accepted for publication 20.04.2018

Topic. Based on the assumption that short-term climatic variations are nonchaotic, and, therefore, the paradigm of the limited predictability of weather formulated by E.N. Lorenz is not applicable to these variations, a question is posed about the unlimited predictability of the short-term climatic variations. It differs from the opinion generally accepted in climatology now that atmospheric motions of all time scales, beginning from daily weather variations, and including interannual, centennial and even millennial variations of climate are unstable. **Aim.** Specifically, the interannual scales are considered in this paper, and the predictability of the well-known phenomenon of El Niño is investigated. For this purpose, the so-called Global Atmospheric Oscillation (GAO) is considered which has been recently recognized by climatologists. GAO represents a synchronized integrity of the well-known processes in tropics connected with El Niño, and some extratropical processes. **Method.** Assuming GAO to be the main mode of the short-term climatic variations, some indices are defined which characterize the dynamics of GAO itself as well as the interrelations between the extratropical and tropical components of GAO with each other. It turns out that crosscorrelations exist between these indices which are so high that they may be considered as evidences of some one-to-one relationships between the tropical and the extratropical components of GAO. **Results.** It allows give a positive answer to the question posed on nonchaoticity of the short-term climatic variations. Among the indices characterizing GAO there is one by means of which it is possible to predict El Niño with the lead time of 14 months. Then, by means of a specially designed technique of the crosswavelet analysis of pairs of time series, a range of time scales is found in which the closest crosscorrelations exist of the index-predictor with an index characterizing El Niño itself. This time scale range includes within itself all known El Niño rhythms, i.e. the time periods from 2 to about 16 years. **Discussion.** As a result, it is indicated a possibility of a further increase in the lead time of the of El Niño prediction up to several years. It is much more, than the lead times of all present-day hydrodynamical and statistical forecasts of El Niño.

Key words: nonchaotic short-term climatic variations, wavelet analysis, predictability of El Niño.

<https://doi.org/10.18500/0869-6632-2018-26-4-75-94>

Reference: Vakulenko N.V., Serykh I.V., Sonechkin D.M. Chaos and order in atmospheric dynamics. Part 3. Predictability of El Niño. *Izvestiya VUZ, Applied Nonlinear Dynamics*, 2018, vol. 26, no. 4, pp. 75–94. <https://doi.org/10.18500/0869-6632-2018-26-4-75-94>

Введение

Прогноз погоды издавна был основной практической целью исследований физики атмосферных процессов. Сначала такие предсказания делались с помощью самых различных эмпирических приемов. Однако в 30-е годы XX века выдающийся отечественный гидродинамик И.А. Кибель предложил использовать для этого уравнения гидродинамики с учетом так называемого ускорения Кориолиса, учитывающего вращение Земли [1]. Ранее такие уравнения уже пытался использовать для про-

гноза погоды американец Л.Ф. Ричардсон [2]. К сожалению, после долгих расчетов с помощью арифмометра, Ричардсон составил прогноз на завтра, который оказался совершенно ошибочным. Причиной ошибки оказались быстрые гравитационные и звуковые волны, которые описывались гидродинамическими уравнениями, которые использовал Ричардсон, наряду с погодообразующими волнами. Достижением Кибеля было то, что он предложил видоизменение уравнений гидродинамики атмосферы, исключаящее из рассмотрения быстрые волны и описывающее только погодообразующие волны. На западе это достижение связывают с именем американца Дж. Чарни [3]. Однако его работы были сделаны в конце 1940-х годов, то есть на десятилетие позже работ Кибеля.

Предложение Кибеля стало возможно реализовать только в 1950-х годах, когда появились первые электронные вычислительные машины (ЭВМ). По мере увеличения мощности ЭВМ, гидродинамические модели для численного прогноза погоды становились все более детальными. Поэтому прогнозы погоды быстро совершенствовались. Но в 1960-е годы это совершенствование начало замедляться. Метеорологи-прогнозисты выяснили, что их прогнозы более или менее хороши только на первые сутки прогноза. Потом качество прогнозов начинает падать и для заблаговременности в три-пять дней прогнозы совсем теряют связь с реальностью. Возникло подозрение, что, как бы ни увеличивалась мощность ЭВМ, достигаемая за счет этого детализация прогностических гидродинамических моделей не способна привести к увеличению заблаговременности надежных прогнозов, то есть у гидродинамических прогнозов существует некий практически непреодолимый предел предсказуемости.

1. Парадигма хаотичности и ограниченной предсказуемости атмосферных процессов

Теоретическое обоснование существования такого предела было дано в серии работ, опубликованных в 1960-е годы американским метеорологом-теоретиком Э.Н. Лоренцем. В своей знаменитой статье «Детерминированное непериодическое течение» [4] Лоренц построил математическую конструкцию, которую позднее назвали странным аттрактором. С помощью этой конструкции Лоренц объяснил, как, несмотря на отсутствие каких-либо случайных внешних воздействий, даже идеальная гидродинамическая модель атмосферы ведет себя так, что уже малые неточности в задании начального ее состояния (они неизбежны из-за неполноты и неточности метеорологических наблюдений) фатально сказываются на составляемых с ее помощью прогнозах погоды.

На основе этого наблюдения Лоренц сформулировал парадигму хаотичности и ограниченной предсказуемости погодообразующих процессов. Фундаментальной математической причиной хаотичности является квадратичная нелинейность уравнений гидродинамики. Физически это означает, что движение жидкости определяется полем давления. Но движение само меняет это поле. Изменившееся поле давления определяет следующие изменения в поле движения и т.д.

Парадигму Лоренца позднее распространили и на более долгопериодные атмосферные вариации (вариации климата). Вообще говоря, для этого не было достаточных оснований. Действительно, численные гидродинамические модели долгосрочного (на месяц, сезон) прогноза погоды, которые в СССР начала создавать еще в

середине XX века Е.Н. Блинова [5], были линейными. Позднее стали использовать нелинейные модели, которые принципиально не отличались от моделей краткосрочного прогноза. Выходной продукт этих моделей просто усредняли по времени, надеясь, что недельный предел предсказуемости погоды не скажется на «климате» этих моделей. К сожалению, это ожидание не оправдалось. Вплоть до настоящего времени долгосрочные прогнозы погоды, как и предсказания короткопериодных вариаций климата, например, предсказания Эль-Ниньо, остаются мало успешными. Однако причина этого, по-видимому, состоит не в хаотичности климатических вариаций.

Причина хаотичности вариаций погоды состоит в том, что очень малые неточности в задании начальных условий при интегрировании прогностических гидродинамических моделей укрупняются и примерно через неделю становятся соизмеримыми с реально существующими крупномасштабными особенностями прогнозируемых метеорологических полей. Дальнейшее интегрирование становится бесполезным, то есть наступает предел предсказуемости.

Укрупнение ошибок прогноза обеспечивается существованием восходящего каскада энергии, то есть потока энергии, направленного от малых к большим масштабам атмосферных движений. Признаками этого каскада являются гладкие графики пространственных и временных энергетических спектров атмосферных движений с наклоном, примерно равным минус двум. Уже давно было установлено [6], что в пространственных спектрах этот каскад начинается в масштабах порядка 1000 километров, то есть на характерном размере циклонов, и охватывает все масштабы вплоть до планетарного.

Во временных спектрах каскад начинается на временах порядка нескольких дней, то есть на характерном времени жизни циклонов, но охватывает лишь ограниченный диапазон более долгих временных масштабов. Существование низкочастотного конца восходящего временного каскада энергии можно определить по переходу графика спектра к нулевому или даже положительному наклону. Детальные расчеты временных энергетических спектров, представленные, например, в [7], указывают, что в тропиках восходящий каскад четко ограничен периодом 45 дней. У внетропической погоды такого четкого ограничения нет, ибо наклон уменьшается до нуля очень плавно в масштабах от месяца до нескольких сезонов. Во всяком случае, можно считать, что восходящий каскад энергии не проникает в междугодовые масштабы. Из этого следует, что парадигма Лоренца не применима к междугодовым и, может быть, даже к сезонным атмосферным вариациям.

Разумеется, в климатических (междугодовых и еще более долгих) временных масштабах существуют свои источники неустойчивости атмосферных движений, которые могут порождать свои восходящие каскады энергии. Например, это может быть каскад, порождаемый неустойчивым откликом климатической системы Земли на годовой ход притока тепла от Солнца. В связи с этим были важны многочисленные исследования, которые показали, что графики временных энергетических спектров междугодовых климатических вариаций являются негладкими.

В диапазоне временных масштабов от года до примерно десяти лет были найдены многие пики спектральной плотности. Особенно четко эти пики видны в спектрах процессов Эль-Ниньо – Южного Колебания (ЭНЮК), развивающихся в тропиках Тихого океана. Происхождение этих пиков долгое время было предметом жарких дебатов. Многие исследователи считали, что эти пики, будучи найденными по довольно коротким рядам инструментальных метеорологических наблюдений, явля-

ются незначимыми со статистической точки зрения, то есть они возникают «по воле случая» и при более длительных наблюдениях исчезнут.

Были и те, кто признавал реальность пиков и связывал их с некоторыми процессами в атмосфере, возбуждаемыми внешними силами. Среди этих исследователей надо упомянуть Н.С. Сидоренкова, считающего, что в возникновении пиков в спектрах процессов ЭНЮК повинны неравномерности вращения Земли [8]. Сходного мнения уже довольно давно придерживались отдельные зарубежные ученые.

В работе [9] точка зрения Сидоренкова была подвергнута проверке на доступных сейчас тщательно выверенных рядах инструментальных метеорологических наблюдений и их, так называемых, ре-анализах, то есть рядах наблюдений, пропуски и внутренние несогласованности которых были исключены с помощью современных гидродинамических моделей циркуляции атмосферы и океана. В результате все основные пики спектральной плотности в диапазоне временных масштабов от года до примерно десятилетия были соотнесены с тремя внешними периодическими воздействиями на климатическую систему: чандлеровским колебанием полюсов Земли; лунно-солнечной нутацией оси вращения Земли; циклом солнечной активности. Главные периоды этих воздействий составляют приблизительно 1,2, 18,6 и 11,5 года, соответственно. Они несоизмеримы друг с другом и воздействуют на климатическую систему как бы невпопад и вместо хаоса порождают очень сложные, кажущиеся случайными, но, на самом деле, предсказуемые вариации, среди которых наиболее известны «ритмы» ЭНЮК.

Коль скоро вышеуказанные периоды действительно несоизмеримы, уместно проверить гипотезу, что математическим образом короткопериодных вариаций климата является странный нехаотический аттрактор (СНА), обнаруженный математиками в конце XX века в решениях простых нелинейных динамических систем, возбуждаемых двумя внешними силами, периоды которых «очень несоизмеримы» (обычно находятся в соотношении так называемого «золотого сечения») $(\sqrt{5} - 1)/2$. Гипотеза СНА привлекательна тем, что допускает предсказание будущего поведения рассматриваемой динамической системы без каких-либо ограничений, по крайней мере, в принципе.

Анализ, выполненный в [9] (см. также [10, 11]), показал, что пики в спектрах ЭНЮК и даже в спектрах некоторых метеорологических процессов, развивающихся во внетропических широтах Земли, действительно имеют свойство, присущее спектрам СНА-динамики. Это свойство состоит в том, что величины логарифмов амплитуд пиков связаны линейной зависимостью с величинами логарифмов порядковых номеров этих пиков.

Цель настоящей работы – продемонстрировать, что, благодаря СНА-характеру межгодовых климатических вариаций, Эль-Ниньо может быть предсказано с заблаговременностью более года. Это превосходит пределы предсказуемости всех ныне существующих методов прогнозов Эль-Ниньо.

2. Общепланетарная синфазность междугодовых атмосферных ритмов

Основанием для возможности неограниченного предсказания Эль-Ниньо является то, что процессы ЭНЮК не являются изолированным региональным явлением. В [11] было доказано, что ЭНЮК есть часть некоторого общепланетарного про-

цесса, названного по этой причине Глобальной Атмосферной Осцилляцией (ГАО). Пространственная структура ГАО была определена как средняя разность в среднемесячных полях давления на уровне моря и приповерхностной температуры, имеющая место при событиях Эль-Ниньо и противоположных им событиях Ла-Нинья. Для поля давления на уровне моря эта структура показана на рис. 1. Она определяется наличием двух очень больших по площади областей разностей давления одного и того же знака.

Во-первых, это – X-образная структура с перекрестьем, приходящимся на канонический район возникновения Эль-Ниньо на востоке приэкваториальной полосы Тихого океана. Внутри этой структуры разность давления является отрицательной. Это значит, что при Эль-Ниньо приземное давление внутри этой области ниже, чем при Ла-Нинья. Четыре ветви отходят от перекрестья в направлениях Берингового пролива и далее на северо-восток Азии, в сторону Новой Зеландии, далее на юг Индийского океана, в сторону юга Северной Америки и далее в Северную Атлантику, и, наконец, в сторону юга Южной Америки и далее в Южную Атлантику. Во-вторых, это область, имеющая форму эллипса, внутри которой разность давления является положительной. Она охватывает западную часть Тихого океана, Австралию, большую часть Индийского океана, и приэкваториальные части Африки и Атлантического океана.

Надо подчеркнуть, что обе описанные области довольно симметрично расположены относительно экватора. И это – несмотря на весьма различную конфигура-

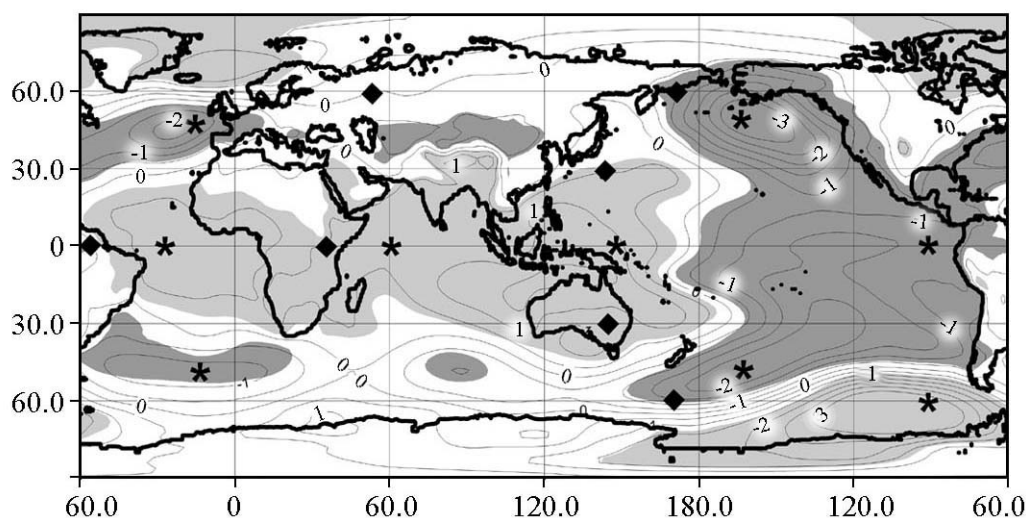


Рис. 1. Глобальная карта, показывающая пространственную структуру Глобальной Атмосферной Осцилляции (ГАО) в сглаженном среднемесячном поле приземного давления (гПа) по данным анализа инструментальных метеорологических наблюдений HadSLP2 за период с 1920 по 2016 гг. Символы * указывают географические районы, значения давления в которых используются, чтобы рассчитать индексы ГАО1 и ГАО2 (исключая район на экваторе у западных берегов Центральной Америки и район к западу от Индонезии). Значки ♦ указывают такие районы, используемые для расчета индекса ГАО3

Fig. 1. The global map showing the spatial structure of the Global Atmospheric Oscillation (GAO) in the monthly mean field of the sea-level pressure (SLP, hPa) according to an analysis of instrumental meteorological observations HadSLP2 from 1920 for 2016. Symbols * specify geographical areas, values of SLP in which are used to calculate the GAO1 and GAO2 indices (excepting an area on the equator near the west coast of Central America, and an area to the west from Indonesia). Symbols ♦ specify such areas used to calculate the GAO3 index.

цию континентов в северном и южном полушариях, что должно было бы приводить к различной географической локализации крупномасштабных особенностей метеорологических полей. Наличие симметрии указывает, что есть нечто более существенное, чем топография земной поверхности. Можно предположить, что это – общие для обоих полушарий внешние воздействия на климатическую систему. Например, три ранее указанные периодичности (чандлеровское колебание полюсов Земли и другие).

ГАО можно охарактеризовать всего одним числом – индексом ГАО1, который вычисляется как сумма нормированных значений давления на уровне моря в десяти географических районах, совпадающих с экстремумами (максимумами и минимумами) в поле ГАО. Задание этих десяти значений позволяет весьма хорошо охарактеризовать обе вышеописанные области в поле ГАО. Центры районов указаны на рис. 1 звездочками: $GAO1 = P(5^{\circ}S - 5^{\circ}N, 35^{\circ} - 25^{\circ}W) + P(5^{\circ}S - 5^{\circ}N, 55^{\circ} - 65^{\circ}E) + P(55^{\circ} - 65^{\circ}N, 95^{\circ} - 85^{\circ}W) + P(65^{\circ} - 55^{\circ}S, 95^{\circ} - 85^{\circ}W) + P(5^{\circ}S - 5^{\circ}N, 145^{\circ} - 155^{\circ}E) - P(45^{\circ} - 55^{\circ}N, 175^{\circ} - 165^{\circ}W) - P(45^{\circ} - 55^{\circ}N, 15^{\circ} - 5^{\circ}W) - P(55^{\circ} - 45^{\circ}S, 15^{\circ} - 5^{\circ}W) - P(55^{\circ} - 45^{\circ}S, 175^{\circ} - 165^{\circ}W) - P(5^{\circ}S - 5^{\circ}N, 95^{\circ} - 85^{\circ}W)$. При Эль-Ниньо этот индекс является положительным, а при Ла-Нинья – отрицательным.

Среди выбранных районов есть два, которые приходятся на канонические районы развития процессов ЭНЮК. Это – районы с координатами $(5^{\circ}S - 5^{\circ}N, 145^{\circ} - 155^{\circ}E)$ и $(5^{\circ}S - 5^{\circ}N, 95^{\circ} - 85^{\circ}W)$. Значения давления на уровне моря в этих районах сильно различаются при Эль-Ниньо и Ла-Нинья. Поэтому может показаться, что именно они определяют значение индекса ГАО1. Если бы это имело место в реальности, то ГАО было бы не более чем индексом ЭНЮК, отличным от ранее предложенных индексов.

Действительно, если подсчитать индекс процессов ЭНЮК (будем называть его Расширенным Океаническим Ниньо Индексом – РОНИ или Extended Oceanic Niño Index – EONI) как среднюю приповерхностную температуру в приэкваториальной полосе Тихого океана $(5^{\circ}S - 5^{\circ}N, 170^{\circ} - 80^{\circ}W)$, то кросскорреляция между временными вариациями индексов ГАО1 и РОНИ оказывается максимальной при нулевом фазовом сдвиге между этими вариациями, то есть вариации происходят синхронно во времени. Величина этой максимальной кросскорреляции для межгодовых вариаций очень велика (примерно 0.9). Учитывая, что исходные метеорологические данные, использованные в ре-анализе NOAA CIRES 20th Century Global Reanalysis Version 2c, по которому считалась эта кросскорреляция, отягощены ошибками наблюдений, уменьшающими всякую возможную связь между рассматриваемыми индексами, можно заключить, что между процессами ГАО и ЭНЮК на межгодовых периодах фактически имеется взаимно однозначная (функциональная) связь. Помимо указанного ре-анализа, были исследованы данные наблюдений Met Office Hadley Center HadSLP2 и HadCRUT.4.6, которые продемонстрировали аналогичный результат.

Чтобы убедиться, что процессы ГАО и ЭНЮК не являются тождественными, определим еще один индекс ГАО, обозначаемый далее, как ГАО2. Этот индекс отличается от ГАО1 тем, что при его подсчете районы с координатами $(5^{\circ}S - 5^{\circ}N, 145^{\circ} - 155^{\circ}E)$ и $(5^{\circ}S - 5^{\circ}N, 95^{\circ} - 85^{\circ}E)$, соответствующими каноническому району развития Южного колебания, исключаются из рассмотрения. Синхронная кросскорреляция между индексом ГАО2 и РОНИ тоже оказывается очень велика (примерно 0.8), хотя и меньше, чем между ГАО1 и РОНИ.

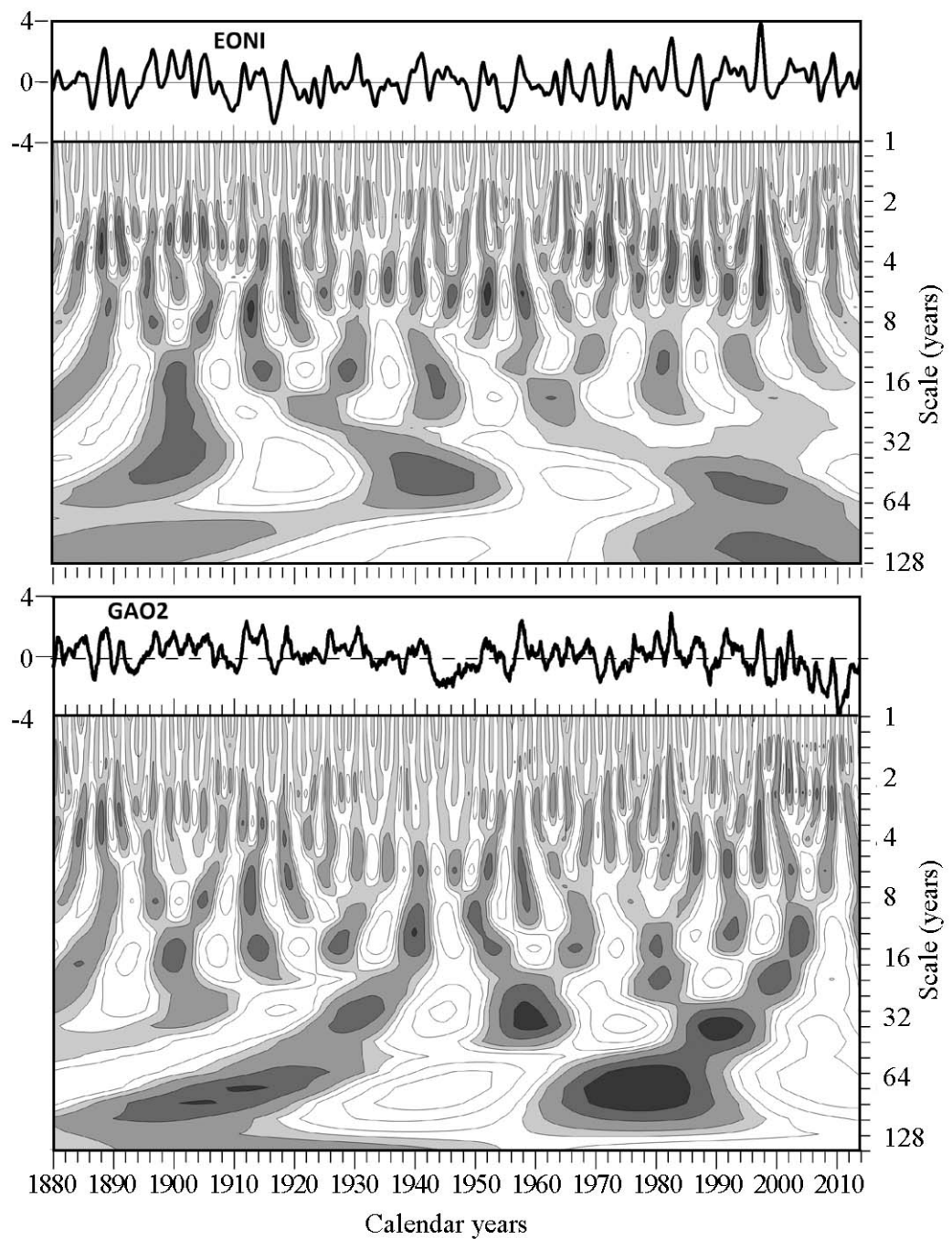


Рис. 2. Ряды ПОНИ и ГАО2, подсчитанные по данным метеорологических наблюдений HadCRUT и HadSLP2 за период 1920–2014 гг., и картины вещественных компонент их вейвлетных преобразований. Области положительных значений вещественных компонент закрашены оттенками серого цвета. Области отрицательных значений оставлены белыми

Fig. 2. Time series of EONI and GAO2 according to meteorological observations HadCRUT and HadSLP2 during 1920–2014 and patterns of the real components of the wavelet transforms of these series. Areas of positive values of real components are painted over by shades of the gray color. Areas of negative values are left white

Вейвлетное преобразование (ВП) рядов РОНИ и ГАО2 позволяет выяснить, вариации каких временных масштабов определяют эту большую кросскорреляцию. Сами ряды и картины вещественных компонент ВП обоих рядов показаны на рис. 2. Даже простое визуальное сопоставление этих картин позволяет увидеть, что сходство между рядами в расположении областей, где вещественная компонента ВП или положительна или отрицательна, имеет место только в относительно малых временных масштабах (менее примерно 8 лет). В масштабах более 16 лет сходства, как кажется, совсем нет. Заметим, что отсутствие сходства в больших масштабах может быть следствием того, что рассматриваемые временные ряды имеют конечную длину. В результате при ВП этих рядов возникают краевые искажения, которые тем существеннее, чем больше масштаб ВП. Конечно, чтобы уменьшить краевые искажения, ряды были во-первых, предварительно центрированы и нормированы, и во-вторых, дополнены с обоих краев «буферами», то есть искусственными рядами постоянных значений РОНИ и ГАО2 длиной по 50 лет. Постоянные значения при этом были определены по средним 50-летним отрезкам в началах и концах фактических рядов. Тем не менее полного исключения краевых искажений все это не гарантирует.

Чтобы оценить степень сходства картин ВП в относительно малых масштабах с большими деталями, удобно рассмотреть картину кросскорреляции ВП рядов ГАО2 и РОНИ, показанную на рис. 3. Как она вычисляется, описано в Приложении.

Из рис. 3 видно, что во временных масштабах менее 8 лет серые области, которые соответствуют синфазным вариациям ГАО2 и РОНИ, покрывают почти всю эту картину. При этом большинство соседних областей, закрашенных серым цветом, разделяются жирной черной линией. Это указывает на то, что в этих масштабах существует практически полное совпадение фаз вариаций ГАО2 и РОНИ. Имеющиеся очень небольшие по площади белые области в этих масштабах, скорее всего, надо отнести на счет ошибок метеорологических наблюдений. Эти области наиболее заметны в 1930–1940-е годы, когда, из-за мировой войны, количество и качество наблюдений заметно уменьшалось.

Серые области преобладают также в масштабах от 8 до 16 лет. А вот в масштабах более 16 лет, особенно в средней части картины, то есть в 1930–1970-е годы, преобладают уже белые области. В масштабах более 32 лет доминирование белых областей существует уже все время (с 1880 по 2012 год). При этом вблизи масштаба 64 года в 1880–1950-е годы существуют только белые области, разделенные жирными линиями. Это, возможно, свидетельствует о противофазности вариаций этого масштаба в сравниваемых рядах, хотя вышеуказанное наличие краевых искажений ВП не позволяет говорить об этом с полной определенностью. По причине краевых искажений являются сомнительными также довольно значительные положительные и отрицательные кросскорреляции в масштабах около 64 лет, о которых будет говориться далее. Впрочем, большие временные масштабы не очень важны с точки зрения разработки метода предсказаний Эль-Ниньо, что является целью данной работы.

Справа от картины локальных (относящихся к конкретному календарному году) вейвлетных кросскорреляций на рис. 3 показан график кросскорреляций, рассчитанный путем осреднения всех локальных кросскорреляций для каждого временного масштаба, рассматриваемого по отдельности. Видно, что средние кросскорреляции

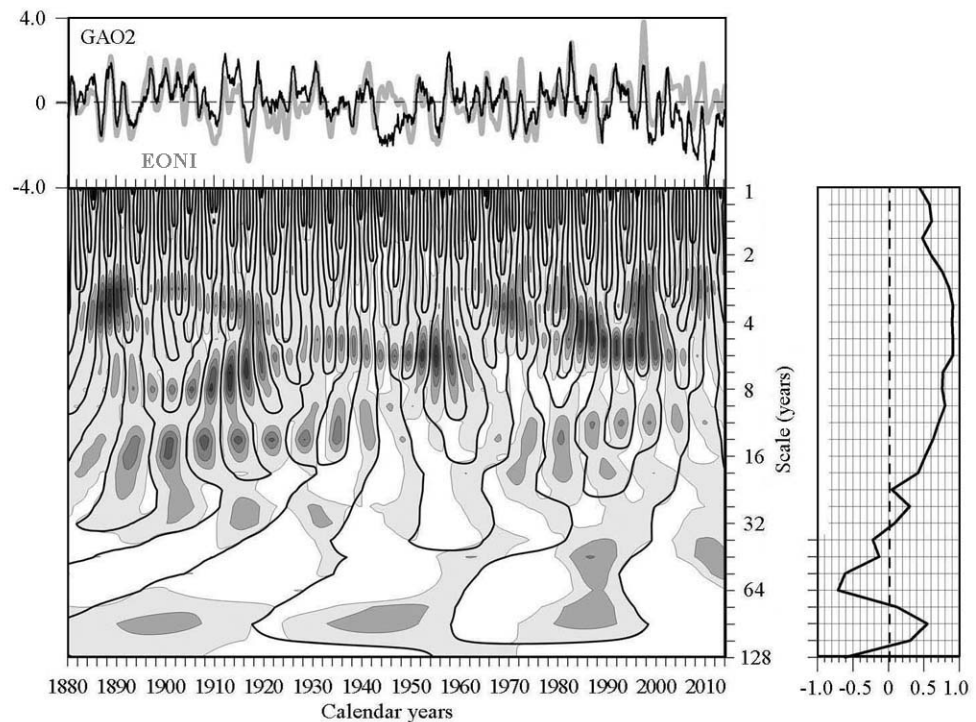


Рис. 3. Ряды ГАО2 и РОНИ и картина локальных кросскорреляций их вещественных преобразований, показанных на рис. 2. Области положительных кросскорреляций закрашены оттенками серого цвета. Области отрицательных значений оставлены белыми. Границы между областями, на которых вещественная компонента вейвлетного преобразования ряда ГАО2 меняет свой знак, показаны жирными черными линиями. Границы между областями, на которых меняется знак вещественной компоненты ряда РОНИ, показаны тонкими черными линиями. Справа от картины показан график средней кросскорреляции между колебаниями рядов ГАО2 и РОНИ в зависимости от вейвлетного временного масштаба

Fig. 3. Time series of GAO2 and EONI and patterns of local crosscorrelations of the real components of their wavelet transforms shown in fig. 2. Areas of positive local crosscorrelation values are painted by shades of the gray color. Areas the of the negative values are left white. Boundaries between the areas on which the real component of wavelet transform of the GAO2 series changes its sign are shown by fat black lines. Boundaries between the areas on which the sign in the EONI series changes are shown by thin black lines. To the right of the pattern, temporal mean crosscorrelations between variations in the GAO2 and EONI series are shown for each wavelet scale taken separately

очень велики (превышают 0.5) для диапазона масштабов от года до 16 лет, достигая 0.9 для масштабов от примерно 3.5 до 5.6 года. Как упоминалось ранее, на этот диапазон приходятся самые главные пики в энергетических спектрах ГАО и ЭНЮК, относимые к субгармоникам чандлеровского колебания полюсов Земли и супергармонике цикла пятен на Солнце.

В еще одном временном масштабе, соответствующем супергармонике 1:2 лунно-солнечной нутации в 9.3 года, средняя кросскорреляция превышает 0.8. Средняя кросскорреляция остается довольно большой (около 0.5) в масштабах 16–18 лет, хотя спектры в этих масштабах уже не показывают какого-либо пика спектральной плотности. Эти масштабы соответствуют главному периоду лунно-солнечной нутации (18.6 года), который слишком велик, чтобы оценка его спектральной плотности по рядам длиной лишь порядка 100 лет могла быть удовлетворительной. Однако значительные в среднем кросскорреляции на этом периоде, вероятно, реальны. Хотя бы потому, что два самых мощных Эль-Ниньо за всю историю инструментальных

метеорологических наблюдений (1997/98 и 2015/16 годов) разделены как раз этим периодом.

В еще больших временных масштабах средние кросскорреляции резко уменьшаются, становясь иногда даже отрицательными. Конечно, осреднение вейвлетных кросскорреляций в этих масштабах крайне ненадежно, ибо на всем интервале наблюдений укладывается менее десятка вариаций таких масштабов. Но, во всяком случае, видимые в этих масштабах большие области локальных кросскорреляций, как уже упомянуто выше, почти все являются белыми, то есть соответствуют противофазности сравниваемых вариаций ГАО2 и РОНИ. Из всего сказанного можно заключить, что динамика внетропических компонент ГАО и РОНИ (ЭНЮК) отнюдь не тождественна. Между этими процессами существует очень большое сходство в диапазоне временных масштабов примерно от года до десятилетия, но поведение ГАО и РОНИ (ЭНЮК) в масштабах нескольких десятилетий является совершенно различным.

До настоящего времени было принято истолковывать наличие тесных кросскорреляций между различными индексами ЭНЮК и индексами внетропических атмосферных процессов так, что ЭНЮК считались причиной, а внетропические процессы – следствиями. Однако еще много лет назад А.Н. Колмогоров предупреждал о неправомерности истолкования кросскорреляционных связей между различными временными рядами в терминах причин и следствий. В последующем проблема фазовой синхронизации совокупностей нелинейных осцилляторов рассматривалась многими исследователями. Укажем на книгу Блехмана [12], на сравнительно недавно опубликованную за рубежом книгу [13], а также на недавнюю публикацию в журнале SCIENCE [14], в которой даются отличные иллюстрации тех трудностей, с которыми приходится сталкиваться при исследовании причинно-следственных связей в нелинейных системах.

При рассмотрении проблемы взаимосвязи между процессами ЭНЮК и внетропическими процессами в глобальной климатической системе естественно предположить, что имеет место вынужденная фазовая синхронизация, когда обе подсистемы находятся под воздействием одних и тех же периодических внешних сил. Такая синхронизация отличается от часто рассматриваемой внутренней синхронизации нелинейных осцилляторов, связанных друг с другом (известный эффект Гюйгенса). Конечно, процессы ЭНЮК как-то взаимодействуют с внетропическими процессами. Однако эти взаимодействия до сих пор очень плохо изучены. Вероятно, они проявляют себя через целые цепочки взаимодействий. Например, влияние Эль-Ниньо на процессы в Северной Атлантике или, наоборот, влияние Северной Атлантики на Эль-Ниньо не может быть непосредственным.

3. Предсказуемость Эль-Ниньо

Как уже говорилось выше, одним из важных внешних воздействий на климатическую систему, вероятно, является чандлеровское колебание полюсов Земли. Как было установлено еще во второй половине XX века [15, 16], это колебание возбуждает в атмосфере и океанах приливные волны, распространяющиеся с запада на восток противофазно во внетропических широтах обоих полушарий. Эти волны называются «полюсными приливами». Недавно, путем анализа данных спутнико-

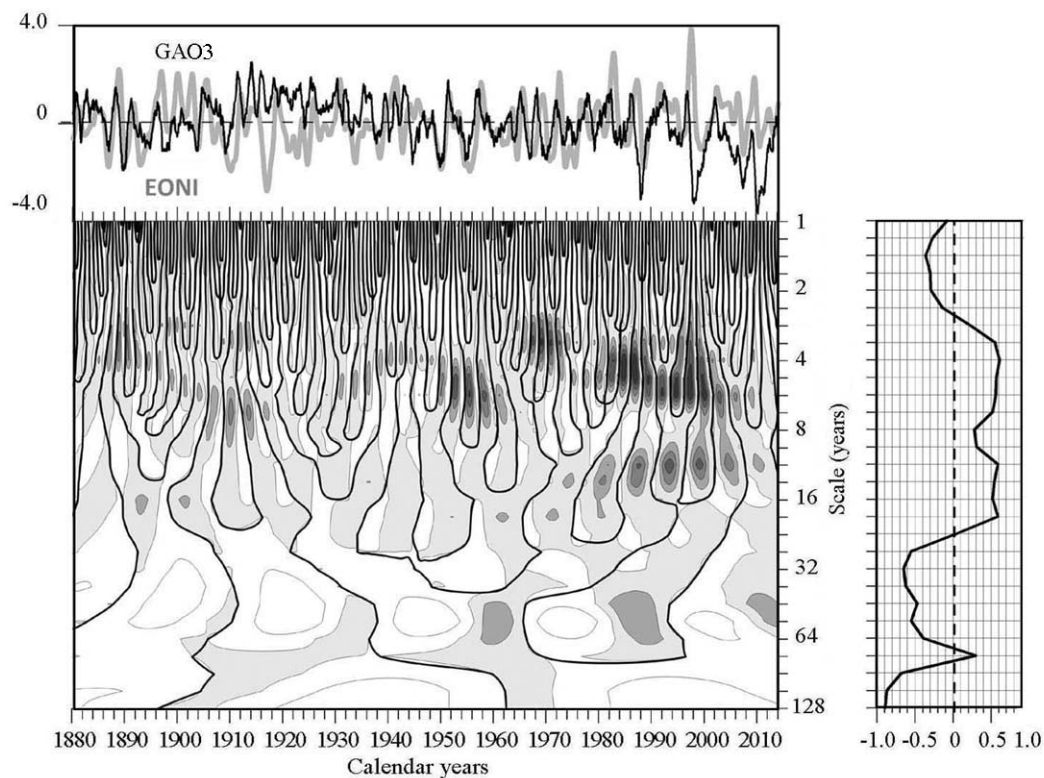


Рис. 4. То же самое, что на рис. 3, но для рядов ГАО3 и РОНИ. Причем вейвлетное преобразование вещественной компоненты ряда ГАО3 смещено на 14 месяцев вперед

Fig. 4. The same is shown that in fig. 3, but for the GAO3 and EONI series. The pattern of the real component of the GAO3 wavelet transform is displaced for 14 months ahead

вой альтиметрии водной поверхности Тихого океана, было показано [17], что волна северотихоокеанского полюсного прилива, после отражения от западных берегов Северной Америки, возбуждает в приэкваториальной полосе Тихого океана теплое поверхностное течение. Это – как раз положительные аномалии температуры при Эль-Ниньо, которое является составным элементом ЭНЮК.

Что касается полюсных приливов в атмосфере, они тоже распространяются с запада на восток, но континенты не являются для них непреодолимым препятствием. Поэтому можно ожидать, что в динамике ГАО тоже будет наблюдаться западно-восточное смещение. При рассмотрении временных изменений пространственной структуры ГАО в полях давления на уровне моря такое смещение действительно было найдено. Оказалось, что, в процессе этого смещения, обе ранее упомянутые пространственные области в поле ГАО смещаются с запада на восток и переходят друг в друга, то есть X-образная область после перемещения над континентом Америки и Атлантикой становится эллиптической, а эллиптическая область после смещения ее центра на запад Тихого океана становится X-образной. Оба перехода происходят примерно за 14 месяцев до наступления следующего события Эль-Ниньо. Общую структуру поля ГАО в это время можно характеризовать одним числом – еще одним индексом ГАО, который назовем ГАО3. ГАО3 вычисляется как сумма нормированных значений среднемесячного приземного давления в 7 географических районах: $GAO3 = P(50^{\circ}N - 70^{\circ}N, 170^{\circ}E - 120^{\circ}W) + P(70^{\circ}S - 50^{\circ}S, 170^{\circ}E - 120^{\circ}W) +$

$+P(60^{\circ}\text{S} - 20^{\circ}\text{N}, 40^{\circ}\text{E} - 80^{\circ}\text{E}) + P(30^{\circ}\text{S} - 30^{\circ}\text{N}, 70^{\circ}\text{W} - 10^{\circ}\text{W}) - P(0^{\circ} - 40^{\circ}\text{N}, 120^{\circ}\text{E} - 120^{\circ}\text{W}) - P(45^{\circ}\text{S} - 25^{\circ}\text{S}, 120^{\circ}\text{E} - 60^{\circ}\text{W}) - P(50^{\circ}\text{N} - 70^{\circ}\text{N}, 50^{\circ}\text{E} - 90^{\circ}\text{E})$.
Центры всех семи районов показаны на рис. 1 ромбиками.

Был построен временной ряд значений индекса ГАОЗ. Этот ряд показан в верхней части рис. 4 вместе с рядом РОНИ. Оба ряда центрированы и нормированы. Можно видеть, что основные экстремумы ряда ГАОЗ опережают экстремумы ряда РОНИ примерно на год. Так что, как кажется, ГАОЗ можно использовать для предсказания РОНИ, то есть того, будет ли наблюдаться Эль-Ниньо или Ла-Нинья с примерно годичной заблаговременностью.

Чтобы оценить эту возможность более определенно, были вычислены кросскорреляции между показанными рядами в разных временных масштабах и при различных временных сдвигах между этими рядами. Для этого была использована техника кросскорреляций вейвлетных преобразований двух рядов, описанная в Приложении. Картина локальных вейвлетных кросскорреляций, то есть соотношений между вариациями в этих рядах в каждом вейвлетном (временном) масштабе и для каждого календарного года, показана на рис. 4. Ряд ГАОЗ при этом уже сдвинут вперед по времени на 14 месяцев. Справа от этой картины показаны средние этих локальных вейвлетных кросскорреляций для всех временных масштабов по отдельности.

Видно, что в верхней половине картины, начиная с временного масштаба 2 года и до масштаба между 16 и 32 годами, преобладают области, закрашенные оттенками серого цвета. Средние локальных кросскорреляций в этих масштабах превышают 0.5 (за исключением временного масштаба около 8 лет).

Так что, зависимости между упреждающими вариациями ГАОЗ и следующими за ними вариациями РОНИ в этих масштабах не очень сильно уступают таким же зависимостям между синхронными вариациями ГАОЗ и РОНИ, показанным на рис. 3. Поэтому их можно использовать в целях прогноза. Заметим, что современные прогнозы Эль-Ниньо/Ла-Нинья имеют кросскорреляцию с фактами на уровне 0.5 лишь при заблаговременности порядка половины года, а не 14 месяцев, как в случае использования ГАОЗ. В масштабах, превышающих главный период лунно-солнечной нутации (18.6 года), связи между сдвинутым вперед ГАОЗ и РОНИ становятся, в целом, несинхронными. Так что их уже нельзя использовать в прогностических целях.

Легче рассматривать картины синхронных и упреждающих кросскорреляций между ВП рядов ГАОЗ и РОНИ так, как они показаны на рис. 5 для календарных лет 1960–2014. В эти годы метеорологические наблюдения были наиболее полными и точными по сравнению с предыдущим периодом наблюдений. На рис. 5, вверху рисунка снова показаны отрезки исходных рядов ГАОЗ и РОНИ. По ним хорошо видно, что практически все максимумы и минимумы РОНИ запаздывают по сравнению с максимумами и минимумами ГАОЗ на год, а иногда даже более.

Верхняя из показанных на рис. 5 картин локальных вейвлетных кросскорреляций между рядами ГАОЗ и РОНИ соответствует нулевому временному сдвигу между сопоставляемыми рядами, средняя картина соответствует временному сдвигу ряда ГАОЗ вперед на 14 месяцев, как и на картине кросскорреляций между ВП полных рядов ГАОЗ и РОНИ, показанной на рис. 4, а нижняя картина – временному сдвигу в целых 38 месяцев. При построении этой последней картины знак ВП сдвинутого ряда ГАОЗ был изменен на обратный.

Укрупнение картин на рис. 5 по сравнению с картиной на рис. 4 позволяет

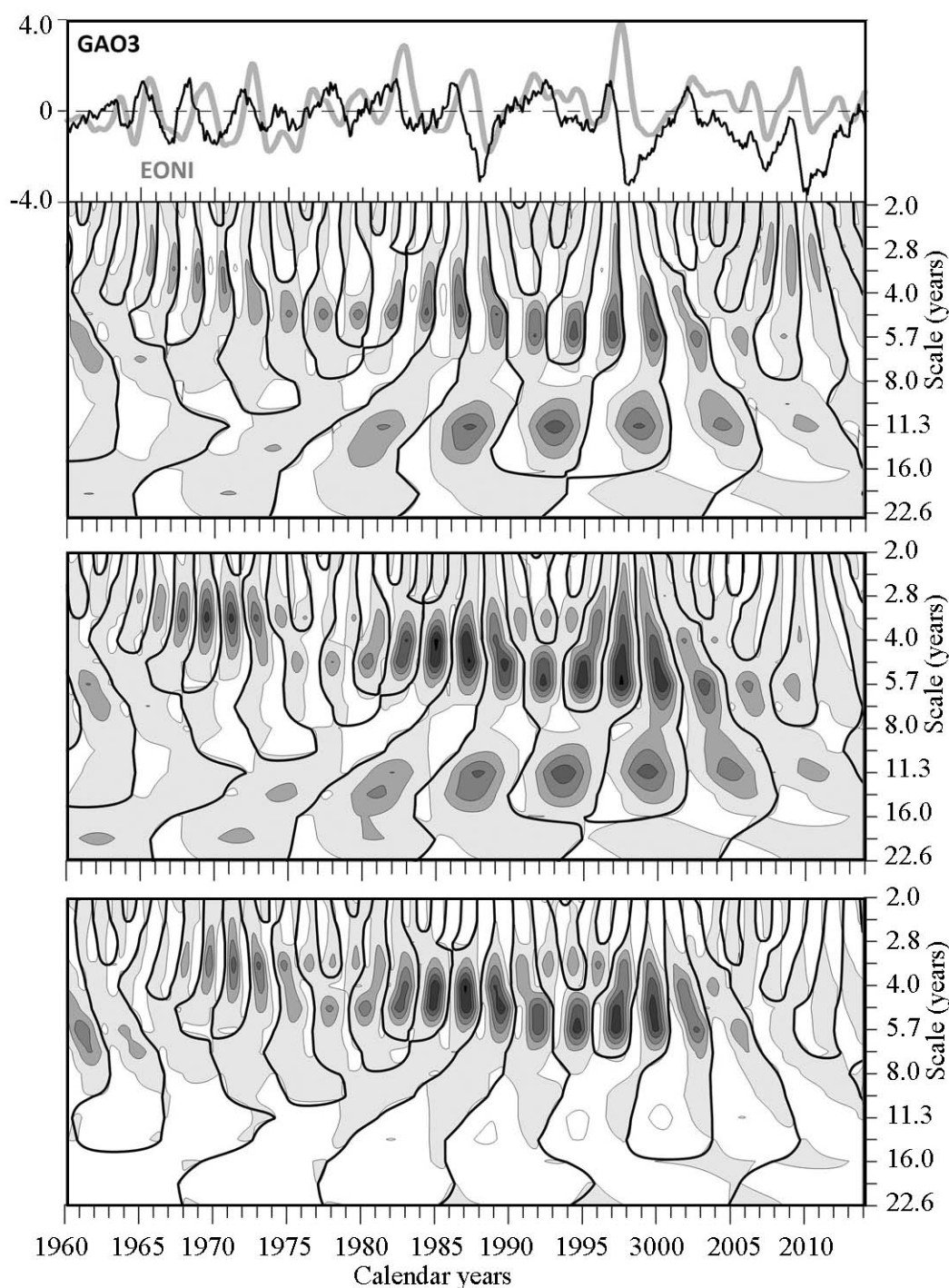


Рис. 5. То же, что на рис. 4, но только для интервала календарных лет 1960–2014 гг. при отсутствии временного сдвига ряда ГАОЗ (верхняя картина), при сдвиге в 14 месяцев (средняя картина) и при сдвиге в 38 месяцев и смене знака вещественной компоненты ВП ряда ГАОЗ (нижняя картина)

Fig. 5. The same is shown that in fig. 4, but only for an interval of calendar years 1960–2014 in the absence of temporary displacement of a row GAO3 (the top pattern), at the displacement of 14 months (an average pattern) and at the displacement of 38 months, and the signs of the real component pattern of the GAO3 wavelet transform are changed to the opposite signs (the lower pattern)

ясно видеть, что, в диапазонах масштабов от 4 лет до примерно 5.7 года и от 8 до 16 лет, практически после всех жирных черных линий (напомним, они обозначают моменты смены знака вещественной компоненты ВП ряда ГАОЗ) располагаются белые области. Сопоставляя эти белые области с графиками рядов ГАОЗ и РОНИ, можно усмотреть, что они соответствуют периодам времени, когда величина ГАОЗ уже начала уменьшаться, а величина РОНИ все еще росла. Эти белые области занимают примерно половину расстояния (в календарных годах) до следующей жирной черной линии. Вторые половины этих расстояний отделены от первых половин тонкими черными линиями. Это значит, что в моменты времени, соответствующие этим тонким линиям менялся знак вещественной компоненты ВП ряда РОНИ, а знак ряда ГАОЗ оставался неизменным, так что в эти периоды времени величины обеих вещественных компонент рядов ГАОЗ и РОНИ одновременно уменьшались.

Обращаясь теперь к картине кросскорреляций ВП рядов ГАОЗ и РОНИ, показанной для временного сдвига в 14 месяцев, видим качественное изменение в том, что в обеих вышеуказанных областях временных масштабов существуют только серые области, отделенные друг от друга жирными черными линиями. Это означает, что вариации вещественных компонент обоих рядов в этих масштабах были полностью синфазными. Иначе говоря, прогнозы величин вещественной компоненты ряда РОНИ по величинам такой компоненты ряда ГАОЗ, взятым на 14 месяцев ранее, были бы вполне успешными. В том числе, по графикам рядов ГАОЗ и РОНИ, показанным вверху рис. 5, и соответствующему участку картины ВП для сдвига ряда ГАОЗ на 14 месяцев можно видеть, что предсказание сильнейшего Эль-Ниньо 1997 года было бы успешным. Единственным исключением является диапазон календарных лет 1970–1980 гг., когда на картине видны белые области. Так что соответствующие прогнозы были бы малоуспешными.

После того как данная статья была подготовлена, произошло новое мощное Эль-Ниньо в 2015 году. Все существующие сейчас прогностические схемы дали ложную тревогу о начале этого Эль-Ниньо еще в 2014 году и только потом откорректировали свои предсказания с малой заблаговременностью. Дополнительный же расчет индекса ГАОЗ показал, что Эль-Ниньо 2015/16 вполне могло быть предсказано с заблаговременностью в 14 месяцев, хотя мощность его, конечно, была бы при этом занижена, как это свойственно всем прогностическим схемам, основанным на линейной регрессии.

Обратимся, наконец, к рассмотрению картины локальных кросскорреляций ВП рядов ГАОЗ и РОНИ, подсчитанных для временного сдвига в 38 месяцев. Можно видеть, что в диапазоне временных масштабов от более чем в 2.8 до 5.7 года резко преобладают серые области, разделенные жирными черными линиями. Хотя во многих случаях можно увидеть полоски белого цвета (они особенно узки в интервале 1970–2007 календарных лет), можно говорить, что вариации этих масштабов в ряду РОНИ действительно могут быть довольно хорошо предсказаны по вариациям в ряду ГАОЗ с заблаговременностью в 38 месяцев при обращении знака этих последних вариаций.

Зато в диапазоне временных масштабов от 8 до 16 лет в рассматриваемой картине преобладают белые области, оконтуренные слева жирными черными линиями и затем переходящие (через тонкие черные линии) в серые области. Это свидетельствует о том, что предсказания с заблаговременностью в 38 месяцев для данного диапазона временных масштабов затруднены.

Заключение

Подвергнута ревизии общепринятая парадигма об ограниченной предсказуемости вариаций погоды и климата. Для этого использовано представление о странной нехаотичности короткопериодных вариаций климата, ранее полученное с помощью анализа временных энергетических спектров рядов метеорологических наблюдений.

В качестве главной моды короткопериодных климатических вариаций использована недавно выявленная так называемая Глобальная Атмосферная Осцилляция (ГАО), которая включает в себя, как составную часть, процессы Эль-Ниньо – Южного Колебания (ЭНЮК). Определены индексы, характеризующие ГАО и ЭНЮК, среди которых имеется индекс ГАОЗ, временные изменения которого предвещают временные изменения индекса РОНИ, характеризующего процессы ЭНЮК.

С использованием специально разработанной техники анализа кросс-корреляций между временными рядами выявлены диапазоны масштабов, внутри которых существует тесная связь между временными вариациями упреждающего индекса ГАОЗ и индекса РОНИ. Это – междугодовые – декадные временные масштабы, в которых, как было показано ранее, глобальная климатическая система форсируется несколькими внешними силами, периоды которых, по-видимому, несоизмеримы друг с другом. Помимо годового хода притока тепла от Солнца, эти силы включают чандлеровское колебание полюсов Земли, лунно-солнечную нутацию и цикл солнечной активности. В результате оказывается возможным предсказывать индекс РОНИ, характеризующий ЭНЮК, с заблаговременностью в 14 месяцев, что существенно превышает заблаговременность существующих сейчас прогнозов ЭНЮК. Указано также на возможность дальнейшего увеличения заблаговременности до нескольких лет.

Приложение

Кросскорреляция пар временных рядов по их вейвлетным преобразованиям

Вейвлетное преобразование (ВП)

$$WT_b(a) = a^{-1/2} \sum_{t=t_1}^{t=t_n} X(t)G(t - b/a) \quad (1)$$

является популярной техникой для изучения многомасштабных вариаций во временных рядах. В (1) $X(t)$, $t = t_1, t_2, t_3, \dots, t_n$ является преобразуемым рядом, $b = t_1, t_2, \dots, t_n$ – временные сдвиги этого ряда, $a = a_1, a_2, \dots, a_m$ – вейвлетные временные масштабы, а $G(t - b/a)$ – вейвлетная функция. Выходным продуктом ВП является картина величин $WT_b(a)$ на части полуплоскости (b, a) , ограниченной временными рамками преобразуемого ряда и диапазоном рассматриваемых временных масштабов.

Одной из наиболее часто используемых вейвлетных функций является функция Морле

$$G(t) = \pi^{-0.25} \exp(-t^2/2) \exp(iCt), \quad C > 5. \quad (2)$$

В данной работе использовано значение $C = 6.2035$, при котором масштаб a точно соответствует обычному временному масштабу. С помощью функции Морле удобно изучать волноподобные вариации во временных рядах, поскольку помимо картины величин вещественной ($\text{Re } WT_b(a)$) и мнимой ($\text{Im } WT_b(a)$) компонент $WT_b(a)$ в качестве выходного продукта можно использовать амплитуду $\text{Am } WT_b(a) = \sqrt{(\text{Re } WT_b(a))^2 + (\text{Im } WT_b(a))^2}$ и фазу $\text{Ph } WT_b(a) = \tan^{-1}(\text{Im } WT_b(a)/\text{Re } WT_b(a))$.

ВП отличается от спектрального анализа Фурье тем, что оно в равной степени применимо для анализа стационарных и нестационарных временных рядов. Однако вариант ВП, аналогичный взаимному спектральному анализу, не существовал. Только недавно в [18–20] для этой цели было предложено вычислять произведение вещественных компонент двух рассматриваемых рядов

$$\text{Cross } WT_b(a) = \text{Re } WT_{1b}(a) \cdot \text{Re } WT_{2b}(a) \quad (3)$$

Это произведение является как бы локальной (по времени и по вейвлетному масштабу) кросскорреляцией сравниваемых рядов. Области на картине всех таких произведений, внутри которых произведения являются положительными, закрашиваются оттенками серого, пропорционально величине произведения. Области, внутри которых произведения отрицательны, оставляются белыми. Граница между серой и белой областями помечается жирной черной линией, если при росте времени (слева направо на картине) переход между областями в рассматриваемом временном масштабе происходит за счет смены знака ВП первого ряда, то есть вариации этого ряда в рассматриваемом временном масштабе опережают соответствующие вариации второго ряда. Такая граница помечается тонкой черной линией, если первыми идут вариации второго ряда. Аналогично, жирная линия на границе между белой и серой областями свидетельствует о лидировании вариаций второго ряда, а тонкая линия – о лидировании первого ряда. Жирная линия на границе между двумя соседними серыми областями говорит о полной фазовой синхронизации вариаций рассматриваемых рядов, а тонкая линия на границе между соседними белыми областями – об их противофазности.

Исследование выполнено частично при финансовой поддержке по гранту Российского научного фонда (проект № 14-50-00095).

Библиографический список

1. *Кибель И.А.* Введение в гидродинамические методы краткосрочного прогноза погоды. М.: Гостехиздат, 1957. 375 с.
2. *Richardson L.F.* Weather Prediction by Numerical Process. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1922. 236 p.
3. *Charney J.* On the scale of atmospheric processes // Geophys. Publ. 1948. Vol. 17. P. 1–17.
4. *Lorenz E.N.* Deterministic nonperiodic flow // J. Atmos.Sci., 1963. Vol. 20. P. 130–141.
5. *Блинова Е. Н.* Динамика атмосферных движений планетарного масштаба и гидродинамический долгосрочный прогноз погоды. М.: Гидрометеоздат, 1976. 78 с.

6. *Saltzman B., Teweles S.* Further statistics on the exchange of kinetic energy between harmonic components of the atmospheric flow // *Tellus*. 1964. Vol. 16. P. 432–435.
7. *Серых И.В., Сонечкин Д.М.* Хаос и порядок в атмосферной динамике. Часть 1. Хаотические вариации погоды // *Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика*. 2017. Т. 25. № 4. С. 4–22.
8. *Сидоренков Н.С.* Атмосферные процессы и вращение Земли. СПб: Гидрометеоиздат, 2002. 200 с.
9. *Серых И.В., Сонечкин Д.М.* Сопоставление временных энергетических спектров индексов Эль-Ниньо – Южного Колебания и глобальных полей температуры и атмосферного давления в приповерхностном слое // *Фундаментальная и Прикладная Климатология*. 2017. Т. 2. С. 144–155.
10. *Серых И.В., Сонечкин Д.М.* О проявлениях движений полюсов Земли в ритмах Эль-Ниньо – Южного Колебания // *Доклады Академии наук*. 2017. Т. 472. № 6. С. 716–719.
11. *Бышев В.И., Нейман В.Г., Романов Ю.А., Серых И.В., Сонечкин Д.М.* О статистической значимости и климатической роли глобальной атмосферной осцилляции // *Океанология*. 2016. Т. 56. № 2. С. 179–185.
12. *Блехман И.И.* Синхронизация динамических систем. М.: Наука, 1971. 896 с.
13. *Pikovsky A., Rosenblum M., Kurths J.* Synchronization. A Universal Concept in Nonlinear Sciences. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2001. 496 p.
14. *Sugihara G., May R., Ye H., Hsieh C.-H., Deyle E., Fogarty M., Munch S.* Detecting causality in complex systems // *Science*. 2012. Vol. 338. P. 496–500.
15. *Максимов И.В.* Полюсный прилив в морях и атмосфере Земли // *Труды института океанологии АН СССР*. 1955. № 8. С. 92–118.
16. *Bryson R.A., Starr T.B.* Chandler tides in the atmosphere // *J. Atmos. Sci.* 1975. Vol. 34. P. 1975–1986.
17. *Серых И.В., Сонечкин Д.М.* О влиянии полюсного прилива на Эль-Ниньо // *Современные проблемы дистанционного зондирования Земли из космоса*. 2016. Т. 13. № 2. С. 44–52.
18. *Вакуленко Н.В., Котляков В.М., Сонечкин Д.М.* О соотношениях лидирования–запаздывания между атмосферными трендами температуры и концентрации углекислого газа в период плейстоцена // *Доклады Академии наук*. 2016. Т. 467. № 6. С. 709–712.
19. *Вакуленко Н.В., Котляков В.М., Парренин Ф., Сонечкин Д.М.* Исследование разномасштабных взаимосвязей между изменениями приземной температуры воздуха и концентрации CO₂ в атмосфере // *Лёд и Снег*. 2016. Т. 56. № 4. С. 533–544.
20. *Вакуленко Н.В., Котляков В.М., Сонечкин Д.М.* О связи антропогенного роста концентрации углекислого газа в атмосфере и современного потепления // *Доклады Академии наук*. 2017. Т. 477. № 1. С. 87–91.

References

1. Kibel I.F. *Vvedebie v Gidrodinamicheskie Metodi Kratkosrochnogo Prognoza Pogodi*. M.: Gostechizdat, 1957. 375 s. (in Russian).
2. Richardson L.F. *Weather Prediction by Numerical Process*. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1922. 236 p.

3. Charney J. On the scale of atmospheric processes. *Geofys. Publ.*, 1948, vol. 17, pp. 1–17.
4. Lorenz E.N. Deterministic nonperiodic flow. *J. Atmos.Sci.*, 1963, vol. 20, pp. 130–141.
5. Blinova E.N. Dinamika Atmosfery i Dvijeniy Planetarnogo Masshtaba i Gidrodinamicheskiy Dolgosrochniy Prognoz Pogodi. M.: Gidrometeoizdat., 1976. 78 s. (in Russian).
6. Saltzman B., Teweles S. Further statistics on the exchange of kinetic energy between harmonic components of the atmospheric flow. *Tellus*, 1964, vol. 16, pp. 432–435.
7. Serykh I.V., Sonechkin D.M. Chaos and order in atmospheric dynamics. Part 1. Chaotic weather variations. *Izvestiya VUZ, Applied Nonlinear Dynamics*, 2017, vol. 25, iss. 4, pp. 4–22. DOI:10. 18500/0869-6632-2017-25-4-4-22.
8. Sidorenkov N.S. Atmosferye Prozessi i Vraschenie Zemli. StPb.: Gidrometeoizdat, 2002. 200 s. (in Russian).
9. Serykh I.V., Sonechkin D.M. An Intercomparison of temporal power spectra of the El Niño – Southern Oscillation indices and of the global temperature and pressure fields in the surface layer. *Fundamentalnaya I Prikladnaya Klimatologia*, 2017, vol. 2, s. 144–155 (in Russian).
10. Serykh I.V., Sonechkin D.M. Manifestations of motions of the Earth’s pole in the El Niño – Southern Oscillation Rhythms. *Doklady Earth Sciences*, 2017, vol. 472, no. 2, pp. 256–259.
11. Byshev V.I., Neiman V.G., Romanov Y.A., Serykh I.V., Sonechkin D.M. Statistical significance and climatic role of the Global Atmospheric Oscillation. *Oceanology*, 2016, vol. 56, no. 2, pp. 165–171.
12. Blekhman I.I. Sinchronizatsiya Dinamicheskikh System. M.: Nauka, 1971. 896 s. (in Russian).
13. Pikovsky A., Rosenblum M., Kurths J. Synchronization. A Universal Concept in Nonlinear Sciences. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2001. 496 p.
14. Sugihara G., May R., Ye H., Hsieh C.-H., Deyle E., Fogarty M., Munch S. Detecting causality in complex systems. *Science*, 2012, vol. 338, pp. 496–500.
15. Maximov I.V. Poljussniy priliv v moriach i atmosfere Zemli. *Trudy instituta okeanologii AN USSR*, 1955, no. 8, s. 92–118 (in Russian).
16. Bryson R.A., Starr T.B. Chandler tides in the atmosphere. *J. Atmos. Sci.*, 1975, vol. 34, pp. 1975–1986.
17. Serykh I.V., Sonechkin D.M. Confirmation of the oceanic pole tide influence on El Niño. *Sovremennije problemi distanzionnogo zondirovaniya Zemli iz Kosmosa*, 2016, vol. 13, no. 2, s. 44–52 (in Russian).
18. Vakulenko N.V., Kotlyakov V.M., Sonechkin D.M. Lead–lag relationships between atmospheric trends of temperature and carbon dioxide concentrations during the Pliocene. *Doklady Earth Sciences*, 2016, vol. 467, part 2, pp. 423–426.
19. Vakulenko N.V., Kotlyakov V.M., Parrenin F., Sonechkin D.M. A study of different scale relationship between changes of the surface air temperature and the CO₂ concentration in the atmosphere. *Ice and Snow*, 2016, vol. 56(4), pp. 533–544.
20. Vakulenko N.V., Kotlyakov V.M., Sonechkin D.M. The connection between the growth of anthropogenic carbon dioxide in the atmosphere and the current climate warming. *Doklady Earth Sciences*, 2017, vol. 477, part 1, pp. 1307–1310.



Вакуленко Надежда Викторовна – родилась в Москве (1955), окончила МВТУ им. Н.Э. Баумана, факультет Приборостроение (1978). С 1993 года работает в Институте океанологии им. П.П. Ширшова Российской академии наук. Защитила в ИО РАН диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук (2004) в области исследований климата с помощью вейвлетного преобразования. С 1999 по 2007 год работала под руководством академика Моница А.С., занимаясь математической обработкой научных исследований. Опубликовала около 30 научных статей.

117997 Москва, Нахимовский проспект д. 36
Институт океанологии им. П.П. Ширшова РАН
E-mail: vanava139@yandex.ru



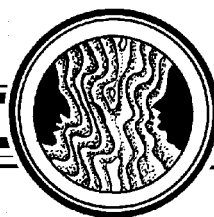
Серых Илья Викторович – родился в Москве (1983), окончил факультет ВМК Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова (2006). После окончания МГУ работает в Институте океанологии им. П.П. Ширшова Российской академии наук. Защитил в ИО РАН диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук (2009) в области теории колебаний климата, изменчивости гидрофизического режима Мирового океана, применения нелинейной динамики в исследовании климатических изменений. Опубликовал 20 научных статей по направлениям, указанным выше.

117997 Москва, Нахимовский проспект д. 36
Институт океанологии им. П.П. Ширшова РАН
E-mail: iserykh@ocean.ru



Сонечкин Дмитрий Михайлович – родился в Москве (1937), окончил географический факультет МГУ по кафедре метеорологии и климатологии, после чего работал как синоптик-прогнозист в Центральном институте прогнозов Гидрометеорологической службы СССР, а с начала 1960-х годов участвовал в работах по созданию метеорологической космической системы «Метеор». В 1970-х годах организовал в Гидрометеорологическом научно-исследовательском центре СССР лабораторию динамико-стохастических методов для применения идей и методов современной теории нелинейных динамических систем к задачам численного долгосрочного прогноза погоды и динамики климата. В начале 2000-х годов перешел на работу в Институт океанологии им. П.П. Ширшова РАН, продолжая участвовать в работах лаборатории динамико-стохастических методов в Гидрометцентре России. В настоящее время является также приглашенным профессором в Институте исследований окружающей среды холодных и засушливых регионов Китайской академии наук. Доктор физико-математических наук, профессор, академик РАН. Научные интересы: теоретические проблемы долгопериодных колебаний в климатической системе; численный долгосрочный прогноз погоды; современное изменение климата; реконструкции и исследования динамики климатов прошлого. Автор монографий: Метеорологическое дешифрирование космических снимков Земли (количественные методы). Л.: Гидрометеоиздат, 1979; Стохастичность в моделях общей циркуляции атмосферы. Л.: Гидрометеоиздат, 1984; Колебания климата по данным наблюдений. Тройной солнечный и другие циклы. М.: Наука, 2005 (в соавторстве с А.С. Мониньым); Хаос и порядок в динамике погоды и климата. Водный и тепловой балансы тропосферы. С.-Пб.: Гидрометеоиздат, 2005 (в соавторстве с Р.Ф. Бурлуцким). Общее количество публикаций – более 200.

117997 Москва, Нахимовский проспект д. 36
Институт океанологии им. П.П. Ширшова РАН
123242 Москва, Большой Предтеченский пер., 11-13
Гидрометеорологический научно-исследовательский центр России
E-mail: dsonech@ocean.ru



УДК 51(09)

Наследие Александра Михайловича Ляпунова и нелинейная динамика

Р. Р. Мухин

Старооскольский технологический институт им. А.А. Угарова,
филиал Национального исследовательского технологического университета «МИСиС»
Россия, 309516 Старый Оскол, Белгородской обл., мкр. Макаренко, 42
E-mail: mukhiny@mail.ru

Поступила в редакцию 27.04.2018, принята к публикации 29.05.2018

Цель. Целью работы является изучение научного наследия А.М. Ляпунова с позиций нелинейной физики. Фундаментальной важности вклад Ляпунова определяется не только созданными им методами, которые вошли в основу математического аппарата при изучении нелинейных явлений. Его идеи и введенные им понятия способствовали формированию концепций и принципов нелинейной динамики. **Метод.** Исследование основано на анализе оригинальных работ Ляпунова с привлечением имеющейся литературы, касающейся его творчества. **Результаты.** Творчество Ляпунова тесно переплетается с деятельностью А.Пуанкаре, среди многих других фундаментальных достижений которого особое значение имеет качественная теория, составившая концептуальную основу нелинейной динамики. Ляпунов явился ближайшим продолжателем Пуанкаре в области качественной теории. Качественной по своей сути является теория устойчивости Ляпунова, одно из крупнейших достижений математики XIX в. С этих позиций Ляпунов подходит к самой постановке задачи устойчивости, выделяя невозмущенное и возмущенное движение. Он разработал методы решения задач устойчивости, предложив и строго обосновав конкретные алгоритмы. Одной из труднейших проблем математики и механики уже в течение нескольких столетий является проблема фигур равновесия вращающейся жидкости. Она имеет многочисленные приложения, стимулировала появление новых идей и целых направлений исследований. В решение проблемы фигур равновесия Ляпунов вместе с Пуанкаре внес определяющий вклад. Ляпунов подробно и совершенно строго исследовал серии новых фигур равновесия, их бифуркации и устойчивость. При этом он создал новые аналитические методы исследования, в частности, работы Ляпунова и Пуанкаре дали мощный импульс развитию теории нелинейных интегральных уравнений. Важное общенаучное значение имеет дальнейшее развитие результатов Ляпунова. Фундаментальное значение для нелинейной динамики приобрели показатели Ляпунова. В основе их использования лежит мультипликативная эргодическая теорема. Показатели Ляпунова связаны с другой важнейшей величиной, также являющейся мерой хаотичности и неустойчивости – энтропией Колмогорова–Синяя. **Обсуждение.** Введенные Ляпуновым понятия и созданные методы имеют непреходящее значение, они не только составили математический аппарат, но в значительной степени формируют концепции и принципы нелинейной динамики.

Ключевые слова: нелинейные системы, качественные методы, устойчивость и неустойчивость, фигуры равновесия, бифуркации, показатели Ляпунова, энтропия Колмогорова–Синяя.

<https://doi.org/10.18500/0869-6632-2018-26-4-95-120>

Образец цитирования: Мухин Р.Р. Наследие Александра Михайловича Ляпунова и нелинейная динамика // Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2018. Т. 26, № 4. С. 95–120. <https://doi.org/10.18500/0869-6632-2018-26-4-95-120>

Legacy of Alexander Mikhailovich Lyapunov and nonlinear dynamics

R. R. Mukhin

Ugarov Stary Oskol Technological Institute (branch)
of National University of Science and Technology «MISiS»
42, mkr Makarenko 309516 Stary Oskol, Belgorod region, Russia
E-mail: mukhiny@mail.ru

Received 27.04.2018, accepted for publication 27.04.2018

Aim. The aim of the work is to study the scientific heritage of A.M. Lyapunov from the standpoint of nonlinear physics. Fundamental importance Lyapunov's contribution is determined not only by the methods he created, which became the basis of the mathematical apparatus in the study of nonlinear phenomena, but his ideas and concepts introduced by him contributed to the formation of concepts and principles of nonlinear dynamics. **Method.** The study is based on an analysis of Lyapunov's original works with the involvement of existing literature on his scientific heritage. **Results.** Lyapunov's creativity is closely intertwined with the works of A. Poincaré, among many other fundamental achievements of which the qualitative theory that formed the conceptual basis of nonlinear dynamics is of particular importance. Lyapunov was the closest successor to Poincaré in the field of qualitative theory. Qualitative in its essence is the Lyapunov stability theory, one of the greatest achievements of mathematics of the XIX century. From these positions Lyapunov approaches the very formulation of the stability problem, singling out the unperturbed and disturbed motion. He developed methods for solving stability problems by proposing and rigorously justifying specific algorithms. One of the most difficult problems of mathematics and mechanics for several centuries is the problem of the equilibrium figures of a rotating liquid. It has numerous applications, stimulated the emergence of new ideas and whole research directions. To solving the problem of the figures of equilibrium, Lyapunov together with Poincaré made a decisive contribution. Lyapunov studied in detail and quite rigorously a series of new equilibrium figures, their bifurcations and stability. At the same time he created new analytical methods of research, in particular, the works of Lyapunov and Poincaré gave a powerful impetus to the development of the theory of nonlinear integral equations. An important general scientific value is the further development of Lyapunov's results. The Lyapunov exponents have become fundamental for nonlinear dynamics. Their use is based on the multiplicative ergodic theorem. The Lyapunov exponents are related to another most important quantity, also a measure of randomness and instability – the Kolmogorov–Sinai entropy. **Discussion.** The concepts introduced by Lyapunov and the methods created have an enduring significance, they have not only formed a mathematical apparatus, but to a great extent form the concepts and principles of nonlinear dynamics.

Key words: nonlinear systems, qualitative methods, stability and instability, equilibrium figures, bifurcations, Lyapunov exponents, Kolmogorov–Sinai entropy.

<https://doi.org/10.18500/0869-6632-2018-26-4-95-120>

References: Mukhin R.R. Legacy of Alexander Mikhailovich Lyapunov and nonlinear dynamics. *Izvestiya VUZ, Applied Nonlinear Dynamics*, 2018, vol. 26, iss. 4, pp. 95–120.

<https://doi.org/10.18500/0869-6632-2018-26-4-95-120>

For a physicist mathematics is not just a tool by means of which phenomena can be calculated, it is the main source of concepts and principles by means of which new theories can be created.

Freeman Dyson. Mathematics in the Physical Sciences

Введение. В этом году исполняется сто лет со дня трагической гибели Александра Михайловича Ляпунова (1857–1918) и, полагаю, надлежит не только воздать должное памяти человека, являющегося гордостью отечественной науки, но и постараться вспомнить о его вкладе в формирование современной нелинейной физики.

Творчеству Ляпунова уделено немало места в историко-научной литературе (см., например, [1–19 и др.]). Если даже ограничиться наследием Ляпунова в теории устойчивости – оно имело огромное воздействие на развитие теории дифференциальных, интегральных, интегро-дифференциальных уравнений, дифференциальных и эволюционных уравнений в банаховых пространствах, нелинейных параболических уравнений, теории хаоса, дискретных динамических систем, разностных уравнений, в механике, теории регулирования, математической биологии, динамике популяций, экономике [16]. Из всего этого неисчерпаемого многообразия в данной работе внимание концентрируется на наследии Ляпунова с позиций нелинейной физики. Приведенные выше слова Ф. Дайсона как нельзя лучше характеризуют место и значение наследия Ляпунова. Введенные им понятия и созданные методы составляют не только математический аппарат, это способ думать и видеть.

Качественные методы. Говорить о творчестве Ляпунова невозможно без упоминания Анри Пуанкаре (1854–1912) – одной из крупнейших фигур в науке за всю ее историю – так тесно переплелась деятельность обоих математиков. С зарождения качественных методов в работах Пуанкаре и Ляпунова следует начать отсчет появления нелинейной динамики как отдельной области знания.

Одной из насущных задач математики XIX–XX вв. являлось интегрирование дифференциальных уравнений. Во многом здесь питательной средой служили задачи механики и физики. Несмотря на известные успехи, возможности проинтегрировать уравнения в квадратурах оставались весьма ограниченными. Здесь намечилось несколько путей. С одной стороны, разрабатывались практические методы, когда с помощью разложения в бесконечные ряды, непрерывные дроби или численным интегрированием уравнений можно было получить решения с требуемой степенью точности. Другой подход был предложен Софусом Ли на основе теории непрерывных групп преобразований, которая, как он сам видел, должна была стать аналогом теории Галуа для обыкновенных дифференциальных уравнений. Как видел Пуанкаре подходы к вопросам интегрирования уравнений, он писал в составленном им самим «Аналитическом резюме» своих работ:

«Можно задаться целью выразить интегралы посредством разложений, справедливых *всегда* и более не ограниченных какой-либо частной областью. При этом приходят к введению в науку новых трансцендентностей; и это введение необходимо, так как старые известные функции позволяют интегрировать лишь небольшое число дифференциальных уравнений» [20, с. 583].

Этот путь, пролегающий через аналитическую теорию дифференциальных уравнений, и самим Пуанкаре активно разрабатывавшийся применительно к линейным дифференциальным уравнениям, привел его к открытию автоморфных функций. Но Пуанкаре предложил для интегрирования уравнений и совершенно другой подход, исходя из качественной теории. Ее основы были им заложены в серии четырех мемуаров «*Mémoire sur les courbes définies par une équations différentielle*» («*О кривых, определяемых дифференциальными уравнениями*»), выходящими в 1881–1886 гг. [21]. Русский перевод под редакцией А.А. Андропова появился в 1947 г. [22]. В начале первого мемуара Пуанкаре четко формулирует проблему:

«В громадном большинстве случаев, с которыми нам приходится иметь дело, эти уравнения не могут быть проинтегрированы с помощью уже известных нам функций, например, с помощью функций, определяемых квадратурами. И если бы

мы захотели ограничиться только теми случаями, которые можно изучить при помощи определенных или неопределенных интегралов, то область наших исследований оказалась бы чрезвычайно суженной, и огромное большинство вопросов, встречающихся в приложениях, осталось бы нерешенным. Необходимо, следовательно, изучать функции, определяемые дифференциальными уравнениями, сами по себе, не пытаясь сводить их к более простым функциям» [22, с. 11].

«Именно с качественной части должно начинаться исследование всякой функции, и поэтому проблема, которая в первую очередь встает перед нами, – это *построение кривых, определяемых дифференциальными уравнениями*. Это качественное исследование, когда оно будет полностью выполнено, будет очень полезно для вычисления значений искомой функции. <...> С другой стороны, это качественное исследование и само по себе представляет первостепенный интерес. К нему могут быть сведены различные, исключительно важные вопросы анализа и механики» [22, с. 12–13].

Качественные методы выявляют топологию всего множества решений, упор производится на решения как единого целого, а не на индивидуальные решения, выражаемые конкретными функциями. В постановке задачи и разработке качественных методов интегрирования дифференциальных уравнений у Пуанкаре практически не было предшественников. Такое положение можно объяснить господством аналитических методов, где основные заслуги принадлежат школам О.Л. Коши и К. Вейерштрасса. Изучение проводилось переходом в комплексную область, и рассматривалось в окрестности отдельной точки, то есть носило, в отличие от качественного подхода, *локальный* характер. Фактически, качественной является теория Ш. Штурма об осцилляциях решений линейного дифференциального уравнения второго порядка (1836). Однако такие единичные случаи находились вне русла развития вопросов интегрирования [18, с. 163]. Можно отметить связь теоретико-функциональных идей Б. Римана с качественной теорией, в которой геометрия стала способом рассуждений. Создание качественной теории явилось революционным шагом, сами основатели качественной теории не осознавали в полной мере разрыв с традициями классической математики, это была новая математика и для нее открылось целое поле приложений. Оказалось, что математика может быть иной, чем только исследование аналитических структур. Такое понимание пришло лишь десятилетия спустя. Пожалуй, лучше всего о значении качественных методов сказал П.С. Александров в своем выступлении на торжественном заседании в честь столетия со дня рождения Пуанкаре на XI Международном конгрессе математиков (Гаага, 1954):

«Пуанкаре открыл для математики и целый мир новых проблем – проблем “качественного”, т.е. именно топологического характера, целый мир, по своему существу недоступный не только методам, но и самому, если так можно выразиться, мировоззрению “классической” математики, в центре которой находились формула и вычисление (т.е. техника оперирования с формулами). Таким образом, величайший представитель классической математики Пуанкаре, как никто другой “взорвал изнутри” ее традиции и открыл доступ в нее не только новым методам исследования, но, что может быть еще важнее, и новым способам видеть вещи и интересоваться ими» [23, с. 809–810].

Ляпунов был в конце XIX в. одним из немногих, кто проникся идеями качественных методов, и они в его трудах получили значительное дальнейшее развитие.

Теория устойчивости. Теория устойчивости является важнейшей и очень значительной частью качественной теории, и определяющее значение имели работы Пуанкаре и Ляпунова.

Бельгийский математик Ж. Мовен отнес 1892 год к «*annus mirabilis*» («чудесный год») [8] – так обозначают годы, отмеченные необычайно важными и позитивными событиями. Тогда вышел первый том «*Новых методов небесной механики*» Пуанкаре и главный труд Ляпунова по теории устойчивости «*Общая задача об устойчивости движения*» [24] – одно из самых значительных достижений математики XIX в. Идеи об устойчивости восходят еще к античности, и в науке Нового времени вопросы устойчивости постоянно находились в поле зрения. Такой интерес был обусловлен фундаментальной проблемой устойчивости Солнечной системы, прочности конструкций, устойчивости гидродинамических течений и т.д. История устойчивости до Пуанкаре и Ляпунова описывалась неоднократно (см., например, [7, 25, 26]). Коснемся лишь некоторых моментов, связанных с последующим изложением. Первая строгая постановка задачи об устойчивости была дана Л. Эйлером (1744), рассмотревшим вопрос устойчивости упругого стержня под действием продольных сил [27]. Ж.Л. Лагранж дал определение устойчивости и достаточное условие равновесия консервативной механической системы в небольшой заметке 1798 г. [28], позже включенное им во второе издание «*Аналитической механики*» (1811) [29, р. 97]. На современном языке это достаточное условие формулируется следующим образом: система находится в положении устойчивого равновесия, если в этом состоянии потенциальная энергия имеет строгий минимум. Эта важнейшая теорема механики была доказана Лагранжем с помощью разложения потенциальной энергии в ряд с точностью до второго порядка. Недостаток подхода Лагранжа был очевиден и в последующем в значительной степени восполнен П.Г. Лежен-Дирихле (1846), который указал, что могут вносить вклад также четвертый и более высокие порядки, но значение минимума потенциальной энергии по-прежнему сохраняется [30; 31].

Пуанкаре первым отметил, что используемое понятие устойчивости является неоднозначным. Он различает устойчивость по Лагранжу и устойчивость по Пуассону. Понятие устойчивости не является интуитивно ясным и нуждается в точном определении. Пуанкаре дал такое определение для некоторых частных случаев [22, с. 106–110; 32, с. 130–131]. Укажем также на забытую работу Н.Е. Жуковского, который дал строгое понятие орбитальной устойчивости и сформулировал для этого случая общие теоремы для нелинейных систем (1882) [33; 34, с. 324–325]. Концепция Жуковского согласуется с подходом Пуанкаре в случае равновесия или периодических движений. Идеи Пуанкаре оказали значительное влияние и явились источником вдохновения для Ляпунова, что он и отмечает в своем труде [24, с. 28–29].

Ляпунов исходит из системы дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_s}{dt} = X_s(t, x_1, x_2, \dots, x_n), \quad s = 1, 2, \dots, n.$$

Далее он рассматривает какое-либо частное решение $x_s = f_s(t)$.

«Этому частному решению будет соответствовать некоторое определенное движение нашей системы. Сравнивая его в известном отношении с другими, возможными для нее при тех же силах, движение это будем называть *невозмущенным*, а все остальные, с которыми оно сравнивается, возмущенными» [24, с. 28–29].

Здесь сразу бросается в глаза отход от традиционного подхода в исследовании дифференциальных уравнений. Сам подход Ляпунова к постановке задачи устойчивости находится в русле идей качественной теории. Речь идет уже не об одной траектории, а при определенных условиях всего множества траекторий посредством привлечения возмущенного движения. Рассмотрим главную идею подхода Ляпунова к устойчивости:

«Пусть Q_1, Q_2, \dots, Q_n суть какие-либо данные непрерывные вещественные функции величин

$$q_1, q_2, \dots, q_k, q'_1, q'_2, \dots, q'_k.$$

Для невозмущенного движения они обратятся в некоторые известные функции t , которые означим соответственно через F_1, F_2, \dots, F_n . Для возмущенного движения они будут некоторыми функциями величин

$$t, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_k, \varepsilon'_1, \varepsilon'_2, \dots, \varepsilon'_l.$$

Когда все величины $\varepsilon_j, \varepsilon'_j$ равны нулю, величины

$$Q_1 - F_1, Q_2 - F_2, \dots, Q_n - F_n$$

будут равны нулю для всякого t . Но если постоянные $\varepsilon_j, \varepsilon'_j$, будучи нулями, предполагаются все же все бесконечно малыми, то является вопрос, можно ли назначить такие бесконечно малые пределы для величин $Q_s - F_s$, которых последующие никогда не превзошли бы по численным значениям?

Решение этого вопроса, который составит предмет наших изысканий, зависит как от характера рассматриваемого невозмущенного движения, так и от выбора функций Q_1, Q_2, \dots, Q_n и момента времени t_0 . При определенном выборе последних ответ на этот вопрос будет, следовательно, характеризовать в известном отношении невозмущенное движение, определяя собой то свойство последнего, которое будем называть *устойчивостью*, или противоположное ему, которое будем называть *неустойчивостью*» [24, с. 34].

На современном языке устойчивость по Ляпунову означает устойчивость по отношению к возмущениям начальных условий, когда при заданном $\varepsilon > 0$ можно найти такое $\delta > 0$, что для всех векторов $\mathbf{x}(t)$ таких, что $|\mathbf{x}(t_0) - \mathbf{x}_0(t_0)| < \delta$, при $t \geq t_0$ будет выполняться неравенство $|\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}_0(t_0)| < \varepsilon$. Кроме того, Ляпунов вводит очень важное понятие асимптотической устойчивости: при $t \rightarrow \infty$ $|\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}_0(t_0)| \rightarrow 0$.

Отметим концептуальную важность введенных понятий *устойчивости* и *неустойчивости*. Особое внимание обратим на понятие неустойчивости, которое обрело первостепенное значение и содержательность в целом ряде научных направлений и было понято лишь в XX в., в отличие от науки XIX в., которую можно отнести к «эпохе устойчивости». Ляпунову принадлежит и терминология теории устойчивости, применяемая до настоящего времени. Определение Ляпунова является исходным пунктом всех последующих исследований, где используется понятие устойчивости, и с его работы [24] берет свое начало современная теория устойчивости, и не только в контексте механики. В последующем для определенных классов задач разными авторами использовались различные модификации теории устойчивости Ляпунова.

Для решения задач устойчивости Ляпунов разработал два метода. Первый метод основан на том, что удается каким-либо образом проинтегрировать дифференциальные уравнения возмущенного движения. В работах его предшественников для этого обычно использовали разложения правых частей уравнений в ряды по степеням x , а поскольку рассматривались решения при малых начальных значениях x , то ограничивались линейным приближением, которое восходит еще к XVIII–началу XIX в. (Лагранж, Лаплас, Пуассон) и широко использовалось следующим поколением исследователей (У. Томсон и П. Тэт [35], Э. Раус [36, 37], Н.Е. Жуковский [33] и др.). Но это уже была совсем другая задача, сведение нелинейной задачи к линейной не всегда корректно. Это ясно сейчас, но в то время такое утверждение не укладывалось в рамки господствовавших воззрений. Еще далеко было до принципов «нелинейного мышления» Л.И. Мандельштама [38]: нелинейные задачи являются самостоятельным объектом исследования и должны рассматриваться сами по себе, а не как поправки к линейным случаям. Движение неустойчивой системы в линейном приближении может быть устойчивым и наоборот. Оставалось неясным, когда такое линейное приближение является справедливым. Ляпунов дал совершенно строгое решение этой задачи. Не будем касаться других результатов, полученных с помощью первого метода: сомнительные случаи применимости линейного приближения, исследование уравнений с постоянными, с периодическими коэффициентами и др.

Перейдем ко второму методу решения задач устойчивости. Ляпунов указывает:

«К другой [категории. – Р.М.] мы причислим все те, которые основываются на принципах, не зависящих от разыскания каких-либо решений дифференциальных уравнений возмущенного движения. Таков, например, известный способ исследования устойчивости равновесия в случае существования силовой функции» [24, с. 46–47].

Здесь Ляпунов имеет в виду теорему Лагранжа–Дирихле, когда устойчивость равновесия следует из максимума силовой функции. Совокупность методов решения задач устойчивости без решения уравнений возмущенного движения составляет *второй метод Ляпунова*. В этом случае строится вспомогательная функция $V(t, x)$ (функция Ляпунова). На ее основе Ляпунов построил очень эффективный и обладающий большой общностью математический аппарат, позволяющий простым и единообразным способом решать самые разные задачи устойчивости. Главная здесь трудность заключается в удачном выборе функции Ляпунова. Второй метод Ляпунова является важнейшим продвижением в качественной теории после Пуанкаре, в полной мере соответствующим самому духу качественного подхода. Первый и второй метод дополняют друг друга, но второй метод вследствие своей общности стал основным для приложений. Теория устойчивости Ляпунова непосредственно связана с глубинными вопросами гидродинамики, теории автоматического регулирования, стала неотъемлемой частью физики, небесной механики, биологии, других естественных наук, экономики, некоторых социальных наук, многих инженерных дисциплин. С 1950-х гг. теория устойчивости Ляпунова стала общепризнанной во всем мире.

Фигуры равновесия вращающейся жидкости. Бифуркации. Теперь коснемся еще одной стороны наследия Пуанкаре и Ляпунова, также имеющего первостепенное научное значение, в том числе и для нелинейной физики. Речь идет о большой серии работ обоих математиков по фигурам равновесия вращающейся жидкой массы. А. Эддингтон говорил, что одна из самых глубоких загадок Вселенной

заключается во всеобъемлемости вращения, по-видимому, для всех ее объектов [11]. С этих позиций становится ясной актуальность задачи о фигурах равновесия. Эта задача восходит еще к И. Ньютону, который первым осознал значение сил тяготения для формы небесных тел. В книге III «Начал» при рассмотрении гравитационного равновесия вращающейся однородной жидкой массы Ньютон установил, что даже при медленном вращении фигура может приобрести небольшую сплюснутость у полюсов. Далее он отметил, что при равновесии должна иметь место пропорциональность между сжатием фигуры вращения и причиной этого сжатия, определяемого отношением центробежного ускорения на экваторе и гравитационным ускорением на поверхности [39, с. 531–537]. Проблема фигур равновесия вращающейся жидкой массы остается труднейшей и очень важной задачей математики и механики до настоящего времени и, видимо, она не имеет общего решения. Трудности здесь того же рода, что и для любой многочастичной задачи. В такой системе для описания состояния любой частицы требуется информация о её взаимодействии с другими частицами, а это взаимодействие, в свою очередь, зависит от состояния частиц. В задачах о фигурах равновесия требуется знание формы поверхности, в каждой точке которой равнодействующая сил гравитации и центробежных сил будет перпендикулярна этой поверхности. Между тем, гравитационное взаимодействие между частицами само зависит от формы поверхности. Эта задача продолжает стимулировать поиски новых аналитических методов и новых подходов для своего решения, допускает нетривиальные обобщения, лежит в основе целых направлений современной астрофизики, таких как, например, теория вращающихся звезд [40]. Место и значение этой задачи в науке XVIII–XIX вв. видно уже из того, кто ею занимался: помимо Ньютона, это А. Клеро, К. Маклорен, Т. Симпсон, П.Л. Мопертюи, Ж. Даламбер, П.С. Лаплас, Ж.Л. Лагранж, А.М. Лежандр, С.Д. Пуассон, Ж. Лиувилль, К.Г. Якоби, П. Дирихле, Б. Рیمان, В. Томпсон (Кельвин), П. Тэт, П.Л. Чебышев. История этой задачи до XIX в. хорошо описана в книге И. Тодхантера [41]. Маклорен (1742) [42] уточнил и обосновал результаты Ньютона, и фигуры равновесия, представляющие эллипсоиды вращения, получили название эллипсоидов Маклорена. Совершенно новый и неожиданный результат в 1834 г. получил Якоби [43]. Он показал, что трехосный эллипсоид с тремя неравными осями также может быть фигурой равновесия. Это было совершенно неожиданно, противоречило интуиции – фигура равновесия, не являющаяся телом вращения! Такие эллипсоиды получили название эллипсоидов Якоби, и они привели к новому направлению исследований. Значение эллипсоидов Маклорена и Якоби заключается в том, что они представляют собой решения модельных задач, которые используются в качестве первого приближения при описании формы небесных тел. При этом другие фигуры равновесия можно рассматривать как возмущения этих эллипсоидов.

Задача о фигурах равновесия попала в поле зрения Чебышева, возможно, под воздействием Лиувилля, с которым он находился в дружеских отношениях. Проблеме фигур равновесия Чебышев предлагал и своим ученикам, в том числе и Ляпунову. Вот как вспоминает об этом сам Ляпунов во вступительной лекции курса «О форме небесных тел», читавшегося им осенью 1918 г. незадолго до смерти в Новороссийском (Одесском) университете. Это воспоминание интересно еще тем, что ясно показывает видение Чебышевым (и вообще Петербургской математической школы) научной деятельности:

«В 1882 г., желая подыскать подходящую тему для магистерской диссертации, я не раз беседовал с Чебышевым по поводу различных математических вопросов, причем Чебышев всегда высказывал мнение, что заниматься легкими, хотя бы и новыми вопросами, которые можно разрешить общеизвестными методами, не стоит, и что всякий молодой ученый, если он уже приобрел некоторый навык в решении математических вопросов, должен попробовать свои силы на каком-либо серьезном вопросе, представляющем известные теоретические трудности. При этом он предложил мне следующий вопрос.

«Известно, что при некоторой величине угловой скорости эллипсоидальные формы перестают служить формами равновесия вращающейся жидкости. Не переходят ли они при этом в какие-либо новые формы равновесия, которые при малом увеличении угловой скорости мало отличались бы от эллипсоидов». При этом он прибавил: «Вот если бы вы разрешили этот вопрос, на вашу работу сразу обратили бы внимание».

Впоследствии я узнал, что этот же самый вопрос Чебышев предлагал и другим математикам, например, Золотареву, молодому тогда ученому, блестящие лекции которого я слушал в университете, и Софии Ковалевской.

Не знаю, пробовали ли решить этот вопрос Золотарев и Ковалевская. Я же сильно заинтересовался вопросом, тем более, что Чебышев не дал никаких указаний для его решения, и я тотчас же принялся за работу. Однако при тех ничтожных математических ресурсах, которыми я обладал тогда, лишь два года спустя после окончания курса, я встретил непреодолимые затруднения» [44, с. 368–369].

Никто до Чебышева не ставил задачу о фигурах равновесия таким образом, и она стала для Ляпунова делом всей жизни. Он дал точную постановку задачи об устойчивости фигур равновесия и решил ее в первом приближении, придя к следующим заключениям. С ростом момента импульса при некотором критическом значении J_1 эллипсоиды Маклорена теряли устойчивость и переходили в эллипсоиды Якоби. С дальнейшим ростом J при $J = J_2$ эллипсоиды Якоби становились неустойчивыми и переходили в новые фигуры, которые впоследствии были названы грушевидными. Эти результаты Ляпунова вошли в его магистерскую диссертацию (1884) [45]. Непреодолимые тогда трудности, о которых говорил Ляпунов, заключались в получении следующих приближений. К задаче Чебышева он вернулся лишь спустя почти два десятилетия. Но раньше появляется фигура Пуанкаре.

Задача о фигурах равновесия находится в давних традициях французской математики. Из серии работ Пуанкаре по данному вопросу для наших целей наибольший интерес представляет его объемистый мемуар (1885) [46]. В этой работе было введено понятие о бифуркациях и появляется сам термин:

«Les forms l'équilibre du système considéré sont données par les n équations:

$$\frac{dF}{dx_1} = \frac{dF}{dx_2} = \dots = \frac{dF}{dx_n} = 0$$

auront un certain nombre de solutions réelles et quand y variera d'une façon continue, ces solutions varieront elles-mêmes d'une façon continue de manière à former diverses séries linéaires de forms d'équilibre.

Il pourra d'ailleurs arriver qu'une même forme d'équilibre appartienne à la fois à deux ou plusieurs séries linéaires. Nous dirons alors que c'est une *forme de bifurcation*. On

peut en effet, pour une valeur de y infiniment voisine de celle qui correspond a cette forme, trouver deux formes d'équilibre qui différent infiniment peu de la forme de bifurcation.

Il peut arriver également que deux séries linéaires de formes d'équilibre réelles, viennent, quand on fait varier y , à se confondre, puis à disparaître, parce que les racines des équations d'équilibre deviennent imaginaires. La forme d'équilibre correspondante s'appellera alors *forme limite*» [46, p. 49–50].

Перевод:

«Формы равновесия рассматриваемой системы задаются n уравнениями:

$$\frac{dF}{dx_1} = \frac{dF}{dx_2} = \dots = \frac{dF}{dx_n} = 0,$$

которые будут иметь ряд реальных решений, и когда y [переменный параметр. – *Р.М.*] будет меняться непрерывным образом, эти решения сами будут меняться непрерывно, формируя различные линейные ряды равновесных форм.

Кроме того, может случиться, что одна и та же форма равновесия принадлежит двум или более линейным рядам. Тогда мы скажем, что это *форма бифуркации*. Действительно, при значении y , бесконечно близком к значению, соответствующему этой форме, можно найти две формы равновесия, которые бесконечно мало отличаются от формы бифуркации.

Также может случиться, что при изменении y существуют два линейных ряда действительных форм равновесия, которые начинают смешиваться, а затем исчезают, потому что корни уравнений равновесия становятся мнимыми. Соответствующая форма равновесия будет тогда называться *предельной формой*».

Под линейной серией понимается непрерывное семейство фигур равновесия, зависящее от одного или нескольких параметров (в данном случае от угловой скорости). Такие серии образуют эллипсоиды Маклорена и эллипсоиды Якоби. При изменении параметра эти эллипсоиды претерпевают бифуркации, переходя в новые, неэллипсоидальные фигуры равновесия. Понятие бифуркации приобрело сейчас ключевое значение не только в нелинейной динамике, а в общенаучном смысле. Но еще в 1970-е гг., почти через столетие введения этого понятия, оно являлось относительно малоупотребительным. Чаще говорили о бифуркации как о раздвоении (bronхи, русла рек и т.д., см., например, БСЭ [47]). Именно развитие нелинейной динамики привело к распространению понимания бифуркации как разделения качественным образом различающихся состояний при малом изменении параметров системы. Понятие бифуркации сегодня проникло не только в разные области науки, но и в политический лексикон и даже в быденную речь.

Ляпунов вернулся к проблеме фигур равновесия после переезда из Харькова в Петербург (1902), когда он был избран в Академию наук и, оставив педагогическую работу, смог полностью отдаться научной деятельности. Фигуры равновесия стали главным предметом его интересов до конца жизни. Возвращению к задаче Чебышева Ляпунова подталкивали два обстоятельства. Первое – незавершенность работы 1884 г. [45], когда ему не удалось продвинуться дальше первого приближения. Второе обстоятельство заключалось в том, что в 1902 г. в небольшой заметке при рассмотрении грушевидных форм равновесия Пуанкаре дал в общей форме решение задачи во втором приближении [48]. Однако вопрос устойчивости грушевидных

форм оставался открытым. Результаты Пуанкаре непосредственного ответа на него не давали, хотя, по его словам, грушевидные фигуры, по всей вероятности, должны быть устойчивы. Но прямое доказательство требовало длинных и трудоемких вычислений. Работа Пуанкаре вследствие постановки новых проблем и его высочайшего авторитета имела значительный резонанс в научном мире и, в том числе, привлекла внимание Джорджа Дарвина (сын Чарльза Дарвина), известного астрофизика, президента Лондонского королевского астрономического общества, который, используя результаты Пуанкаре [48], провел трудоемкие расчеты до второго приближения и пришел к выводу об устойчивости грушевидных форм [49; 50]. Устойчивость грушевидных фигур являлась краеугольным камнем развиваемой Дарвиным космогонической теории. Согласно этой теории, эволюция и распад грушевидных фигур на две или несколько частей могла объяснить образование двойных звезд и планет со спутниками и вообще происхождение двойных систем во Вселенной. Выводы Дарвина лишь на основе второго приближения совершенно не удовлетворили Ляпунова, и он провел основательное и строгое исследование этой сложнейшей задачи, потребовавшее значительных усилий. Свои результаты он опубликовал в серии мемуаров (1905–1914) [51–54]. Строгий подход Ляпунова привел к выводу о неустойчивости грушевидных форм. Развернувшаяся полемика утихла лишь после того, как Дж. Джинс повторил вычисления Дарвина с учетом третьего приближения и подтвердил результаты Ляпунова о неустойчивости грушевидных форм (1917) [55]. К сожалению, ни Пуанкаре, ни Дарвин об этом уже не узнали, к тому времени их обоих не было в живых. Не совсем обоснованные, исходящие лишь из эвристических рассуждений, выводы Пуанкаре могут создать негативное впечатление от его подхода. Объяснение следует искать в особенностях стиля работы Пуанкаре, в его нетерпении, когда он «дойдя до вершины, не возвращался назад» [3, с. 171]. Такое не так уж редко встречается в творчестве крупнейших фигур в науке, когда их переполняют новые идеи, неудержимо влекущие их вперед. Вспомним А.Н. Колмогорова, которому неинтересно было дальше развивать проблему, когда принципиальная сторона была ясна. Вместо этого он предпочитал сосредоточиться на получении новых результатов. Отметим еще стиль работы Пуанкаре и Ляпунова. Для Пуанкаре был характерен подход с явным акцентом на геометрический образ мышления, Ляпунов же был аналитиком в полном смысле этого слова.

Хочется еще остановиться на подходе Ляпунова к применению математики для прикладных задач. Для Петербургской математической школы (представителем которой был и Ляпунов) являлось характерным отрицательное отношение к общим абстрактным схемам, предпочтение отдавалось конкретным задачам, которые доводились до алгоритма. В своей работе «Об одной задаче Чебышева» [56] Ляпунов полемизирует с Пуанкаре по поводу нестрогих рассуждений в проблеме фигур равновесия:

«Это не есть доказательство, это есть скорее обобщение по аналогии, и сам Пуанкаре, видимо, признается в этом, когда говорит: ”можно было бы сделать много возражений, но нельзя требовать в механике той же строгости, как в чистом анализе, во всем, что касается бесконечности”. Но я не придерживаюсь такого мнения. Я думаю, что если в некоторых случаях и допустимо пользоваться неясными рассуждениями, когда желают установить новый принцип, <...> однако же невозможно так поступать, когда надо решать определенную задачу (механики или физики),

которая поставлена математически совершенно точно. Эта задача становится тогда проблемой чистого анализа и должна быть решаемая как таковая» [56, с. 209].

Здесь затронут очень важный вопрос о взаимодействии математики и физики. Я уже высказывался по этому поводу [57, с. 46], в связи с настоящей работой подчеркну лишь основные моменты. В физических задачах применение математического аппарата чаще всего ограничивается «физическим уровнем строгости», который обычно весьма далек от канонов строгости и доказательности, принятых в математике. Такой подход вполне правомерен, поскольку строгое математическое рассмотрение, требующее значительных дополнительных усилий, часто добавляет лишь какие-то детали. Более того, строгий математический подход может на сегодняшний день даже оказаться невозможным. Так, квантовый аналог теории КАМ еще ждет своего создания. Однако имеется класс физических задач, в которых без строгого подхода не обойтись, в противном случае мы рискуем прийти к поверхностным и сомнительным выводам. К этому классу относятся и многие задачи нелинейной физики. Они, как правило, очень трудны в математическом отношении. После своей постановки такие задачи смещаются в математическую плоскость, приводится в действие весь арсенал методов, находящихся на переднем крае математической науки. Как легко прийти к ошибочному заключению, показывает пример об устойчивости грушевидных фигур, когда даже интуиции Пуанкаре оказалось недостаточно.

Вернемся к работам Ляпунова о задаче Чебышева [51–54]. Здесь был им получен целый ряд важных побочных результатов, касающихся интеграла Стильтьеса, сферических функций и др., но наибольшее значение имело исследование нелинейных интегральных уравнений. Тогда, на рубеже веков интегральные уравнения являлись новым предметом для математики, до этого они встречались лишь как единичные примеры. Теория интегральных уравнений, и то только линейных, еще создавалась, главным образом, в трудах Э.И. Фредгольма, В. Вольтерры и Д. Гильберта. Развитие науки обычно идет по пути рассмотрения сначала наиболее простых задач, лишь затем переходя к более сложным. Так произошло, например, с теорией колебаний. Ко второй половине XIX в. была создана теория линейных колебаний, итогом стала «Теория звука» Дж.У. Рэлея (1877–1878) [58]. Лишь в XX в. нелинейные колебания стали предметом самостоятельного изучения. С интегральными уравнениями привычная логика развития была нарушена: нелинейные интегральные уравнения стали изучаться одновременно с линейными. Причина была вызвана потребностями прикладных задач.

Уже в работе [51] Ляпунов получил фундаментальное для теории фигур равновесия вращающейся жидкости нелинейное интегральное уравнение, к которому сводится решение задачи о неэллипсоидальных фигурах равновесия. В серии последующих объемных и богатых результатами работ [52–54] Ляпунов во всех деталях изучил бифуркации, установил сходимости применяемых разложений и со всей строгостью доказал существование эллипсоидальных фигур равновесия, от которых могут отделяться новые неэллипсоидальные фигуры. Надо сказать, что открытие Пуанкаре и Ляпуновым нового класса фигур равновесия произвело огромное впечатление в научном мире. Нелинейные интегральные уравнения как отдельная область теории интегральных уравнений впервые появляются в работах ученика Гильберта Э. Шмидта (1907) [59; 60]. Шмидт упоминает связь развиваемой им теории с

проблемой фигур равновесия и рассматривает появление бифуркаций в окрестности некоторых фигур, но без ссылки на Ляпунова. Обширный класс нелинейных интегральных уравнений, рассмотренных Шмидтом, к которому принадлежит и уравнение Ляпунова, сейчас называют уравнениями Ляпунова–Шмидта [61].

Немного о том, как научное сообщество познакомилось с трудами Ляпунова. Работы Ляпунова, выходявшие сначала на русском языке, стали известны во Франции прежде всего благодаря рефератам во французских журналах и сразу привлекли внимание крупнейших ученых [62]. Реферат его магистерской диссертации (1884) появился через год, и это повлекло за собой переписку между Пуанкаре и Ляпуновым в 1885–1886 гг. [63], сама диссертация была переведена на французский язык в 1904 г. В 1896–1900 гг. Ляпунов публиковал свои статьи по теории устойчивости и другим вопросам в *Comptes rendus* и *Journal des mathématiques pures et appliquées*, а в дальнейшем – в изданиях Академии наук, но почти все на французском языке [62; 64]. Реферат главного труда Ляпунова по теории устойчивости (1892) [24] появился в том же году. Изданный на русском языке в Харькове этот труд в ограниченном качестве был доступен за рубежом из-за языкового барьера. Все же ввиду важности изложенных в нем идей некоторые математики, как, например, Т. Леви-Чивита, смогли ознакомиться с основным содержанием. Широкую известность труд Ляпунова получил после перевода Е. Даваух на французский язык в 1907 г. [65]. Этот перевод был воспроизведен в 1947 г. в Принстоне [66]. На английском языке труд Ляпунова был издан в год столетия его создания (1992) [67].

Признание Ляпунова в научном мире еще при его жизни характеризует тот факт, что в 1916 г. он был избран членом-корреспондентом Французской Академии наук [62]. Значение этого события можно оценить из того факта, что на предыдущую вакансию в 1911 г. был избран Давид Гильберт.

Показатели Ляпунова. Фундаментальное значение для нелинейной физики имеют характеристические числа (показатели) Ляпунова. Он их ввел в своем труде «Общая задача об устойчивости движения» для исследования устойчивости нулевого решения системы линейных дифференциальных уравнений, исходя из идеи, что качественно различные решения должны отличаться некоторыми специальными свойствами.

Пусть для функции $\mathbf{x}(t)$ существуют два вещественных числа λ_1 и λ_2 таких, что функция $\mathbf{x}(t)e^{\lambda_1 t}$ будет исчезающей, то есть $\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{x}(t)e^{\lambda_1 t} = 0$, а функция $\mathbf{x}(t)e^{\lambda_2 t}$ будет неограниченной. Тогда можно найти такое вещественное число λ , что для любого положительного ε функция $\mathbf{x}(t)e^{(\lambda+\varepsilon)t}$ будет неограниченной, а функция $\mathbf{x}(t)e^{(\lambda-\varepsilon)t}$ – исчезающей

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |\mathbf{x}(t)|e^{(\lambda+\varepsilon)t} = \infty, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{x}(t)e^{(\lambda-\varepsilon)t} = 0. \quad (1)$$

Число λ , удовлетворяющее условиям (1), Ляпунов назвал *характеристическим числом* функции $\mathbf{x}(t)$ [24, с. 48–49]. На современном языке идея характеристических чисел заключается в том, что рост нормы $|\mathbf{x}(t)|$ решения системы $\mathbf{x}(t)$ при $t \rightarrow \infty$ определяется по шкале ростов, заданной семейством функций действительного переменного (в данном случае $e^{\lambda t}$) и тем самым данному решению приписывается определенная числовая характеристика (характеристическое число λ). Таким обра-

зом, семейство решений получает упорядочение по шкале ростов [13, с. 10]. Другими словами, производится сравнение асимптотического поведения решений $x(t)$ с асимптотическим поведением некоторой монотонной функции $f(t)$. Для оценки характеристических чисел λ Ляпунов установил связь между ними и арифметическими операциями. Результаты Ляпунова и содержащиеся в них идеи продолжают активно разрабатываться. Коснемся лишь некоторых из них, непосредственно связанных с нелинейной динамикой.

Немецкий математик О. Перрон дал эквивалентное определение показателей Ляпунова (1930) [68], которое в настоящее время является общепринятым [13, с. 10]

$$\lambda = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln |x(t)|. \quad (2)$$

Характеристические показатели были введены Ляпуновым для определения устойчивости одной траектории. Фундаментальное значение показателей Ляпунова в нелинейной физике заключается в том, что они характеризуют устойчивость почти всех (по мере) траекторий на аттракторе. В основе использования показателей Ляпунова лежит мультипликативная эргодическая теорема о существовании и конечности множества возможных значений показателей, которую доказали ученик Я.Г. Синай В.И. Оселедец и ученик А.Н. Колмогорова М.Д. Миллионщиков [69; 70]. Мультипликативная эргодическая теорема позволяет обобщить показатели Ляпунова на совокупность траекторий и дает строгое обоснование для их вычисления.

Показатели Ляпунова связаны с важнейшей характеристикой систем со сложным поведением – метрической энтропией или энтропией Колмогорова–Синай (КС-энтропия) [71–74]. КС-энтропия является мерой хаотичности и неустойчивости. Статистические свойства динамических систем являются предметом эргодической теории, и до появления работ Колмогорова (1958–1959) [71; 72] она, в основном, пользовалась функционально-аналитическими представлениями. В этих работах Колмогорова происходит явное смещение акцентов с функционально-аналитического подхода в эргодической теории на вероятностные представления. Однако продолжало существовать убеждение, что динамические системы в теории вероятностей с метрической точки зрения совершенно отличны от динамических систем, описываемых дифференциальными уравнениями. В дальнейшем выяснилась глубокая внутренняя связь теории динамических систем с теорией вероятностей. Яков Григорьевич Синай, один самых ярких учеников Колмогорова, вспоминал, что впервые о метрической энтропии Колмогоров рассказал на одной из лекций своего спецкурса по динамическим системам [75]. Колмогоров ввел важное и плодотворное понятие «квазирегулярных систем», названных позже К-системами (в честь Колмогорова) и определил для них понятие энтропии [71; 72]. К-системы соответствуют процессам с наиболее слабыми свойствами регулярности. Синай стал изучать вопрос, как можно применить энтропию к общим динамическим системам и предложил несколько другое определение энтропии, применимое к любым динамическим системам [73]. В дальнейшем было показано, что оба определения эквивалентны [76]. Небезынтересно отметить (полагаю, это особенно актуально для молодого поколения), какими критериями руководствовались в школе Колмогорова и вообще в Московской математической школе в подходе к научной деятельности. Я.И. Синай вспоминал:

«Я был уже аспирантом, когда принёс статью об энтропии своему научному руководителю А.Н. Колмогорову и он сказал: “Наконец вы можете соперничать с другими моими учениками”» [77, с. 53].

Заметим, что речь идет вообще о второй научной работе Синая, работе, в значительной степени определившей присуждение Синаю премии Абеля (эту премию, наряду с другой высшей наградой для математиков – медалью Филдса, рассматривают как своего рода Нобелевскую премию по математике). Соответствующие же требования предъявлялись вообще в вопросах подготовки к научной деятельности, в частности, к сдаче кандидатского минимума. Вот что говорит другой ученик Колмогорова – В.А. Успенский:

«Сейчас центральным экзаменом минимума является экзамен по более или менее узкой математической специальности – той самой специальности, по которой и происходит обучение в аспирантуре. Тогда такого экзамена не было. Считалось, что свою-то специальность аспирант должен знать и безо всякого экзамена, просто потому, что ею занимается – или, во всяком случае, должен заниматься – на должном уровне. Когда я явился к Колмогорову, чтобы он указал мне тему моих предстоящих экзаменов, он отнесся к проблеме очень серьезно. Немного подумав, он назвал высшую алгебру (по двухтомнику ван дер Вардена “Современная алгебра”; экзамен я вспоминаю как один из самых трудных в моей жизни, а принимали его Колмогоров и Курош на университетской квартире Колмогорова). В качестве второго экзамена были названы уравнения математической физики – по “Методам математической физики” Гильберта и Куранта и “Уравнениям математической физики” С.Л. Соболева. Надо сказать, что сюжеты обоих экзаменов, в особенности же второго, были весьма далеки от моих собственных математических интересов. Колмогоров это, конечно, понимал, но хотел сделать из меня образованного человека. Поэтому, говоря об уравнениях математической физики, он прибавил: “И уж, пожалуйста, с численными методами. А математическую логику Вы и так должны знать”. По-видимому, что-то отразилось на моем лице, потому что Колмогоров меня пожалел и объявил, что в качестве третьего экзамена назначит нечто близкое к логике. В качестве такого близкого была выбрана теория релейно-контактных схем по незадолго до того вышедшей книге М.А. Гаврилова. Я уже писал, что эта книга относилась к жанру технических, а не математических наук и что мне нелегко было сквозь нее продрасться <...> Кроме иностранного языка, философии и трех математических экзаменов, полагалось еще сдать три отчета. В качестве одного из них мне было велено перевести на русский язык книгу Рожи Петер “Рекурсивные функции” (первую в мире книгу на эту тему), вышедшую на немецком языке в Будапеште в 1951 г. Я не решился сказать Колмогорову, что не знаю немецкого языка. К счастью, Рожа Петер была венгеркой, и ее немецкий был не слишком сложен. К тому же в книге было много формул. Все это способствовало тому, что я успешно сдал отчет, и русский перевод книги вышел в Издательстве иностранной литературы в 1954 г.» [78, с. 1110–1111].

Другое свидетельство – о начале аспирантской жизни известного воронежского математика В.И. Соболева. Вспоминает один из его учеников:

«Помню рассказ Владимира Ивановича о том, как он в Москве начинал работать с Л.А. Люстерником. Л.А. сказал ему на одной из первых встреч: “Володя, ты кончал провинциальный университет и курс алгебры там, без сомнения, читался слабо. Вряд ли тебе это потребуется [Соболев специализировался по функциональному анализу. – *Р.М.*], но сдай-ка ты экзамен по книге Ван дер Вардена”. Не знаю,

видел ли кто-нибудь из нынешних студентов или аспирантов этот первый фундаментальный учебник по абстрактным алгебраическим структурам, содержащий более 500 страниц, только появившийся в то время. Л.А. продолжал: “Володя, ты учил в университете английский язык, но в математике трудно без французского, поэтому кандидатский экзамен ты сдай по французскому языку. Кроме того, сейчас очень популярна квантовая механика, поэтому сдай экзамен и по этой дисциплине”» [79, с. 52–53].

Надеюсь, эти отступления не покажутся неуместными. Они свидетельствуют о высочайшем уровне отечественной науки еще не так давно. Вспомним о приведенном немного выше видении Чебышевым научной деятельности при постановке Ляпунову задачи магистерской диссертации. Работы Ляпунова являются здесь эталонными. Силу Ляпунова-аналитика, глубину его проникновения в сущность сложных проблем можно видеть из следующего факта. В 1954 г. В.И. Смирнов обнаружил в архиве Ляпунова рукопись неизвестной его работы, написанной не позднее 1893 г. [80]. Оказалось, что к моменту опубликования (1963) содержащиеся в [80] результаты были еще совершенно не известными, никем не переоткрытыми и не перекрытыми. И это при том, что те результаты находились в средоточии активно разрабатывавшейся в течение 60 лет области исследований [18, с. 179]. Хочется верить, что тот уровень российской науки не полностью утерян и в настоящее время.

Вернемся к КС-энтропии. Энтропия измеримого разбиения A пространства M с мерой μ на конечное или счетное число множеств A_1, A_2, \dots дается выражением

$$H(A) = - \sum_k \mu(A_k) \log \mu(A_k),$$

где сумма берется по всем элементам разбиения, имеющим положительную меру. Далее рассматриваются разбиения $\xi_T^n = V_{k=0}^n T^k A$, где $\xi \vee \eta$ представляет разбиение, элементами которого являются пересечения разбиений ξ и η ; T – автоморфизм пространства M . Для любого конечного разбиения существует (конечный или бесконечный) предел [81]

$$H(T, \xi) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} H(\xi_T^n). \quad (3)$$

Синай предложил определить энтропию $h(T)$ как верхнюю грань $h(T\xi)$ на множестве измеримых разбиений [73]

$$h(T) = \sup h(T\xi).$$

Если выбрать в качестве энтропии функцию $h(T\xi)$, то возникают сложности с проблемой изоморфизма, то есть имеет место зависимость от разбиения ξ . При определении (3) энтропия является инвариантом, но появляются трудности с ее вычислением. Положительность энтропии, в противоположность системам с нулевой энтропией, отражает разделение динамических систем на стохастические и регулярные. Таким образом, КС-энтропия привела к пониманию того, что случайные явления и классические динамические системы можно описывать *на одном и том же языке*.

Характеристические показатели Ляпунова решения линейной системы обыкновенных дифференциальных уравнений рассматривают как количественную меру степени стохастичности. Энтропийное направление изучения динамических систем

исследует характеристики, имеющие экспоненциальный рост. Ясно, что должна существовать связь энтропии со средней скоростью экспоненциальной расходимости близких траекторий, описываемых показателями Ляпунова. Через несколько лет после появления работ Колмогорова и Синая, определивших энтропийное направление эргодической теории, Я.Б. Песиным была выдвинута гипотеза о равенстве энтропии интегралу суммы положительных характеристических показателей Ляпунова. Эта гипотеза обсуждалась на Школе по эргодической теории в Хумсане (около Ташкента, 1965). Г.А. Маргулисом была получена точная оценка сверху, а Я.Б. Песиным и А.Б. Катком – точная оценка снизу. В основополагающей работе Песина [82] был получен главный результат: для диффеоморфизма f многообразия M , сохраняющего меру ν , энтропия $h(f)$ равна

$$h(f) = - \int \int \sum_{i=1}^{k(x)} q_i(x) \chi_i d\nu(x), \quad (4)$$

где $q_i(x)$ – кратность соответствующего значения χ_i , $k(x)$ – число различных отрицательных значений показателя. Энтропия динамической системы гораздо труднее вычислима, чем показатели Ляпунова. Выражение (4) дает возможность рассчитывать энтропию, исходя из показателей Ляпунова.

Во второй половине XX в. пришло понимание того, что для описания устройства мира недостаточно классической физики и квантово-релятивистской физики. Нелинейность явилась еще одним измерением, приведя к новой парадигме физико-математических наук. При этом открывается целое поле необычных явлений, не только обогащая существующую картину мира, но и значительно меняя наше понимание природы. Фундаментальной важности вклад Ляпунова явился одним из оснований новой нелинейной науки. Место Ляпунова в мировой науке характеризует, например, тот факт, что в обстоятельном сборнике «*Landmark writings in western mathematics, 1640–1940*» под редакцией А. Граттан-Гиннеса [83] основной труд Ляпунова по теории устойчивости [24] находится в одном ряду с такими классическими сочинениями его современников, как «*К проблеме трех тел и уравнения динамики*» А. Пуанкаре, «*Основания геометрии*» Д. Гильберта, «*Теория электронов*» Г.А. Лоренца.

Библиографический список

1. *Стеглов В.А.* Александр Михайлович Ляпунов // Ляпунов А.М. Работы по теории потенциала. М.;Л.: ГИТТЛ, 1949. С. 9–32.
2. *Смирнов В.И.* Александр Михайлович Ляпунов // Академик А.М. Ляпунов. Собр. соч. Т. I. М.: Изд-во АН СССР, 1954. С. 5–15.
3. *Цыкало А.Л.* Александр Михайлович Ляпунов. М.: Наука, 1988. 244 с.
4. *Смирнов В.И.* Очерк научных трудов А.М. Ляпунова // Ляпунов А.М. Избр. труды. М.: Изд-во АН СССР, 1948. С. 341–450.
5. *Шибанов А.С.* Александр Михайлович Ляпунов. М.: Мол. гвардия, 1985. 336 с.
6. *Демидов С.С., Козлов В.В.* К 150-летию Александра Михайловича Ляпунова // Ляпунов А.М. Избр. труды: работы по теории устойчивости. М.: Наука, 2007. С. 7–26.

7. *Leine R.I.* The historical development of classical stability concepts: Lagrange, Poisson and Lyapunov stability // *Nonlinear Dyn.* 2010. Vol. 59. Pp. 173–182.
8. *Mawhin J.* Nonlinear oscillations: one hundred years after Liapunov and Poincare // *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik.* 1993. В. 73. S. 54–62.
9. *Bountis T.* Stability of motion: from Lypunov to the dynamics of N-degree of freedom Hamiltonian system // *Nonlinear phenomena in complex systems.* 2006. Vol. 9, no. 3. Pp. 209–239.
10. *Grattan-Guinness I.* The Norton History of the Mathematical Sciences. N.Y.: W.W. Norton and Com., 1997. 832 pp.
11. *Iurato G.* The dawning of the theory of equilibrium figures // archive: 1409.1823.
12. *Jardetzky W.S.* Theories of figures of selestial bodies. N.Y.: Interscience Publishers, Inc., 1985. 208 pp.
13. *Былов Б.Ф., Виноград Р.Э., Гробман Д.Н., Немыцкий В.В.* Теория показателей Ляпунова и ее приложения к вопросам устойчивости. М.: Наука, 1966. 576 с.
14. *Литтлтон Р.А.* Устойчивость вращающихся масс жидкости. Москва; Ижевск: РХД, 2001. 240 с.
15. *Лихтенштейн Л.* Фигуры равновесия вращающейся жидкости. М.: Наука, 1965. 252 с.
16. *Mawhin J.* Alexandr Mikhailovich Liapunov. The general problem of the stability of motion // *Landmark writings in western mathematics, 1640–1940.* Amsterdam: Elseiver, 2005. Pp. 664–676.
17. *Mawhin J.* The centennial legacy of Poincare and Liapunov in ordinary differential equations // *Rendiconti Circolo Matematico di Palermo.* 1994. Suppl. Ser. II, no. 34. Pp. 9–46.
18. *Демидов С.С., Петрова С.С., Симонов Н.Н.* Обыкновенные дифференциальные уравнения // *Математика XIX в.* М.: Наука, 1987. С. 80–183.
19. Aleksandr Mikhailovich Lyapunov // *Russian Mathematicians in 20th Century/ Ya. Sinai ed.* N.Y.; L.: World Scientific, 2003. P. 1–16.
20. *Пуанкаре А.* Аналитическое резюме // *А. Пуанкаре. Избр. труды.* Т. 3. М.: Наука, 1974. С. 580–655.
21. *Poincaré H.* Memoire sur les courbes définies par une équations differentielle // *J. math. pures et appl. Sér. 3.* 1881. Vol. 7. Pp. 375–422; 1882. Vol. 8. Pp. 251–296; *Sér. 4.* 1885. Vol. 1. Pp. 167–244; 1886. Vol. 2. Pp. 151–217.
22. *Пуанкаре А.* О кривых, определяемых дифференциальными уравнениями. М.: ГИТТЛ, 1947. 392 с.
23. *Александров П.С.* Пуанкаре и топология // *УМН.* 1972. Т. 27. В. 1. С. 147–158.
24. *Ляпунов А.М.* Общая задача об устойчивости движения // *Ляпунов А.М. Избр. труды: Работы по теории устойчивости.* М.: Наука, 2007. С. 27–298.
25. *Моисеев Н.Д.* Очерки развития теории устойчивости. М.; Л.: ГИТТЛ, 1949. 664 с.
26. *История механики с конца XVIII до середины XX века.* М.: Наука, 1972. 417 с.
27. *Метод нахождения кривых линий, обладающих свойствами максимума либо минимума или решение изопериметрической задачи, взятой в самом широком смысле, Леонарда Эйлера, королевского профессора и члена Императорской Петербургской Академии наук.* М.; Л.: ГТТИ, 1934. 603 с.

28. *Lagrange J.L.* Sur le principe des vitesses virtuelles // Oeuvres de Lagrange. T. VII. Paris: Gautier-Villars, 1877. Pp. 317–321.
29. Механика аналитическая, par J.L. Lagrange. T. Première. Paris, 1811. 422 p.
30. *Lejeune-Dirichlet P.G.* Über die Stabilität des Gleichgewichts // CRELLE, J. *Reine Angew. Math.* 1846. B. 32. S. 85–88.
31. *Лежен-Дирихле П.Г.* Об устойчивости равновесия // Лагранж Ж. Аналитическая механика. Т. 1. М.; Л.: ГИТТЛ, 1950. С. 537–540.
32. *Пуанкаре А.* Новые методы небесной механики // А. Пуанкаре. Избр. труды. Т. II. М.: Наука, 1972. 998 с.
33. *Жуковский Н.Е.* О прочности движения // Учен. записки Москов. ун-та. Отдел физ.-мат. наук. 1882. Т. 4. С. 10–21.
34. *Leonov G.A., Burkin I.M., Shepeljavyi A.I.* Frequently methods in oscillation theory. Mathematics and its applications. Vol. 357. Kluwer Academic, Dordrecht. 1996. 403 p.
35. *Thomson W.* Treatise on Natural Philosophy. Vol. 1.1. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1879. 508 p.
36. *Routh E.* A Treatise on the Stability of a Given State of Motion. London: Macmillan and Co., 1877. 129 p.
37. *Routh E.* The Elementary Part of a Treatise on the Dynamics of a System of Rigid Bodies. London: Macmillan and Co., 1860. 588 p.
38. *Мандельштам Л.И.* Предисловие к кн.: Андронов А.А., Витт А.А., Хайкин С.Э. Теория колебаний. М.: Физматлит, 1959. С. 9–13.
39. *Ньютон И.* Математические начала натуральной философии // В кн.: Собрание трудов академика А.Н. Крылова. Т. 7. М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1936. 703 с.
40. *Тассуль Ж.-Л.* Теория вращающихся звезд. М.: Мир, 1982. 472 с.
41. *Todhunter I.* A History of the Mathematical Theories of Attraction and the Figure of the Earth from the Time of Newton to that of Laplace. L.: Macmillan and Co., 1873. V. I. XVIII + 474 p.
42. *Maclauren C.* Traite des Fluxions. Edinburgh, 1742. 574 p.
43. *Jacobi C.G.* Über die Figur des Gleichgewichts // *Ann. Phys. u. Chem.* 1834. B. 33. S. 229–233; *Gesammelte Werke.* T. 2. Berlin: Verlag von G. Reimer, 1882–1891. S. 17–22.
44. *Ляпунов А.М.* О форме небесных тел // Академик А.М. Ляпунов. Собр. соч. Т. III. М.: Изд-во АН СССР, 1959. С. 361–374.
45. *Ляпунов А.М.* Об устойчивости эллипсоидальных форм равновесия вращающейся жидкости // Академик А.М. Ляпунов. Собр. соч. Т. III. М.: Изд-во АН СССР, 1959. С. 5–113.
46. *Poincaré H.* Sur l'équilibre d'une masse fluide animée d'un mouvement de rotation // *Acta. Math.* 1885. T. 7. P. 259–380; *Oeuvres de Henri Poincaré.* T. VII. Paris: Gautier-Villars, 1952. P. 40–140.
47. Большая Советская энциклопедия. Т. 3. М.: Сов. Энциклопедия, 1970. 640 с.
48. *Poincaré H.* Sur la stabilité d'équilibre des figures piriformes affectées par une masse fluide animée en rotation // *Proc. Roy. Soc. London.* 1901. Vol. 69. Pp. 148–149.

49. *Darwin G.* The stability of the pear-shaped figure of equilibrium of a rotating mass of liquid // *Phyl. Transactions.* 1903. Vol. 200. Ser. A. Pp. 251–314.
50. *Darwin G.* Further consideration of the stability of the pear-shaped figure of equilibrium of a rotating mass of liquid // *Phyl. Transactions of the Royal Soc. of London.* 1908. Vol. 208. Ser. A. Pp. 1–19.
51. *Liapounoff A.M.* Sur les figures d'équilibre peu différentes des ellipsoïdes d'une masse liquide homogène douée d'un mouvement de rotation. I partie. Etude générale du problème // *St.-Pbg. Imprim. de l'Acad. des Sc.* 1906. IV+225 p.
52. *Liapounoff A.M.* Sur les figures d'équilibre peu différentes des ellipsoïdes d'une masse liquide homogène douée d'un mouvement de rotation. II partie. Figure d'équilibre dérivée des ellipsoïdes de Maclaurin // *St.-Pbg. Imprim. de l'Acad. des Sc.* 1909. IV+203 p.
53. *Liapounoff A.M.* Sur les figures d'équilibre peu différentes des ellipsoïdes d'une masse liquide homogène douée d'un mouvement de rotation. III partie. Figure d'équilibre dérivée des ellipsoïdes de Jacobi. *St.-Pbg. Imprim. de l'Acad. des Sc.* 1912. IV+228 p.
54. *Liapounoff A.M.* Sur les figures d'équilibre peu différentes des ellipsoïdes d'une masse liquide homogène douée d'un mouvement de rotation. IV partie. Nouvelles formules pour la recherches des figures d'équilibre // *St.-Pbg. Imprim. de l'Acad. des Sc.* 1914. IV+112 p.
55. *J Jeans G.* The motion of tidally-distorted masses with special reference of cosmogony // *Memories of the Royal Astron. Soc.* 1917. Vol. 62. Pp. 1–48.
56. *Ляпунов А.М.* Об одной задаче Чебышева // *Зап. Акад. Наук по Физ.-мат. отд.* 1905. 8 сер. Т. 17. № 3. С. 1–32; *А.М. Ляпунов. Собр. Соч. Т. 3. М.–Л.: Изд-во АН СССР, 1959. С. 207–236.*
57. *Мухин Р.Р.* Динамический хаос: трудный путь открытия // *Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика.* 2014. № 4. С. 43–54.
58. *Rayleigh J.W.* The theory of sound. L.: MacMillan and Co. In two volumes. 1877. Vol. I. 326 p.; 1878. Vol. II. 315 p.
59. *Schmidt E.* Zur Theorie der linearen und nichtlinearen Integralgleichungen. I Teil: Entwicklung willkürlicher Funktionen nach Systemen vorgeschriebener // *Math. Ann.* 1907. B. 63. S. 433–476.
60. *Schmidt E.* Zur Theorie der linearen und nichtlinearen Integralgleichungen. II Teil: Auflösung der allgemeinen linearen Integralgleichung // *Math. Ann.* 1907. B. 64. S. 161–174.
61. *Хведелидзе Б.В.* Уравнение Ляпунова–Шмидта // *Матем. Энциклопедия. Т. 3. М.: Сов. Энциклопедия, 1982. С. 473–474.*
62. *Юшкевич В.И.* А.М. Ляпунов и Академия наук Института Франции // *Ист.-матем. исслед.* 1965. № 16. С. 375–388.
63. *Смирнов В.И., Юшкевич В.И.* Переписка А.М. Ляпунова с А. Пуанкаре и П. Дюэмом // *Ист.-матем. исслед.* 1985. № 29. С. 265–284.
64. Александр Михайлович Ляпунов. Библиография / Составитель А.М. Лукомская, под ред. В.И. Смирнова. М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1953. 268 с.
65. *Liapounoff A.* Problème générale de la stabilité du mouvement // *Annales de la faculté des science de Toulouse, 2-sérié, № 9.* 1907. P. 203–474.
66. *Lyapunov A.M.* Problème Générale de la Stabilité du Mouvement. Princeton, N.Y.:

- Princeton Univ. Press, 1947. 375 pp.
67. *Lyapunov A.M.* The general problem of the stability of motion // *Int. J. Control.* 1992. Vol. 55, no. 3. Pp. 521–790.
 68. *Perron O.* Die Ordnungszahlen linearer Differential gleichungs systeme // *Mathem. Zeitschr.* 1930. B. 31. S. 748–766.
 69. *Оседедец В.И.* Мультипликативная эргодическая теорема. Характеристические показатели Ляпунова динамических систем // *Тр. Моск. мат. общества.* 1968. Т. 19. С. 179–210.
 70. *Миллионщиков М.Д.* Критерий устойчивости вероятностного спектра линейных систем дифференциальных уравнений с рекуррентными коэффициентами и критерий почти приводимости систем с почти периодическими коэффициентами // *Мат. сб.* 1969. Т. 78, № 2. С. 179–202.
 71. *Колмогоров А.Н.* Новый метрический инвариант транзитивных динамических систем и автоморфизмов пространств Лебега // *ДАН СССР.* 1958. Т. 119, № 5. С. 861–864.
 72. *Колмогоров А.Н.* Об энтропии на единицу времени как метрическом инварианте автоморфизмов // *ДАН СССР.* 1959. Т. 124, № 4. С. 754–755.
 73. *Синай Я.Г.* О понятии энтропии динамических систем // *ДАН СССР.* 1959. Т. 124, № 4. С. 768–771.
 74. *Мухин Р.Р.* Развитие Колмогоровым энтропийного направления эргодической теории // *Истор.-матем. исслед.* 2003. серия. В. 8 (43). С. 18–26.
 75. *Синай Я.Г.* Письменное сообщение 26.03.2007.
 76. *Рохлин В.А.* Лекции по энтропийной теории преобразований с инвариантной мерой // *УМН.* 1967. Т. 22. В. 5. С. 3–56.
 77. *Рауссен М., Скау К.* Интервью с Я.Г. Синаем, абелевским лауреатом 2014 года // *Матем. просвещение.* Третья серия, вып. 19. М.: изд-во МЦНМО, 2015. С. 52–69.
 78. *Успенский В.А.* Колмогоров, каким я его помню // *Труды по Нематематике.* Т. 2. М.: ОГИ, 2002. С. 1068–1163.
 79. *Каменский М.И.* Некоторые не записанные вовремя рассказы Владимира Ивановича // *Владимир Иванович Соболев в воспоминаниях коллег и учеников.* Воронеж: НАУКА-ЮНИПРЕСС, 2014. С. 50–53.
 80. *Ляпунов А.М.* Исследование одного из особенных случаев задачи об устойчивости движения. Л.: Изд-во ЛГУ, 1963. 117 с.
 81. *Хинчин А.Я.* Об основных теоремах теории информации // *УМН.* 1956. Т. 11. В. 1. С. 17–75.
 82. *Песин Я.Б.* Характеристические показатели Ляпунова и гладкая эргодическая теория // *УМН.* 1977. Т. 32. В. 4. С. 55–112.
 83. *Landmark writings in western mathematics, 1640–1940.* Amsterdam: Elseiver, 2005. 1022 p.

References

1. Steklov V.A. Alexandr Mikhailovich Lyapunov. In: Lyapunov A.M. Works on the Theory of Potential. M.; L.: GITTL, 1949, pp. 9–32 (in Russian).
2. Smirnov V.I. Alexandr Mikhailovich Lyapunov. In: Academician A.M. Lyapunov. Coll. of works. T. I. Moscow: Publishing House of the Academy of Sciences of the USSR, 1954, pp. 5–15 (in Russian).
3. Tsykalo A.L. Alexandr Mikhailovich Lyapunov. Moscow: Nauka, 1988, 244 p. (in Russian).
4. Smirnov V.I. Essay on the scientific works of A.M. Lyapunov. In: Lyapunov A.M. Select. Works. Moscow: Publishing House of the USSR Academy of Sciences, 1948, pp. 341–450 (in Russian).
5. Shibanov A.S. Alexandr Mikhailovich Lyapunov. Moscow: Mol. Gvardia, 1985, 336 p. (in Russian).
6. Demidov S.S., Kozlov V.V. To the 150th anniversary of Alexandr Mikhailovich Lyapunov. In: Lyapunov A.M. Select. Works: Works on the Theory of Stability. Moscow: Nauka, 2007, pp. 7–26 (in Russian).
7. Leine R.I. The historical development of classical stability concepts: Lagrange, Poisson and Lyapunov stability. *Nonlinear Dyn.*, 2010, vol. 59, pp. 173–182.
8. Mawhin J. Nonlinear oscillations: one hundred years after Liapunov and Poincare. *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*, 1993, B. 73, s. 54–62.
9. Bountis T. Stability of motion: from Lyapunov to the dynamics of N-degree of freedom Hamiltonian system. *Nonlinear phenomena in complex systems*, 2006, vol. 9, no. 3. pp. 209–239.
10. Grattan-Guinness I. The Norton History of the Mathematical Sciences. N.Y.: W.W. Norton and Com., 1997. 832 p.
11. Iurato G. The dawning of the theory of equilibrium figures. *archive*: 1409.1823.
12. Jurdetzkij W.S. Theories of Figures of Celestial Bodies. N.Y.: Interscience Publishers, Inc., 1985, 208 p.
13. Bylov B.F., Vinograd R.E., Grobman D.N., Nemytsky V.V. The Theory of Lyapunov Exponents and its Applications to Stability Problems. Moscow: Nauka, 1966, 576 p. (in Russian).
14. Littleton R.A. The stability of rotating liquid masses of liquid. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1953. 171 p.
15. Liechtenstein L. Gleichgewichtsfiguren Rotierender Flüssigkeiten. Berlin: Verlag von J. Springer, 1933, 174 s.
16. Mawhin J. Alexandr Mikhailovich Liapunov. The general problem of the stability of motion. In: Landmark writings in western mathematics, 1640–1940. Amsterdam: Elsevier, 2005, pp. 664–676.
17. Mawhin J. The centennial legacy of Poincare and Liapunov in ordinary differential equations. *Rendiconti Circolo Matematico di Palermo*, 1994, Suppl. Ser. II, no. 34, pp. 9–46.
18. Demidov S.S., Petrova S.S., Simonov N.N. Ordinary differential equations. In: Mathematics of XIX century. M.: Nauka, 1987, pp. 80–183 (in Russian).
19. Aleksandr Mikhailovich Lyapunov. In: Russian Mathematicians in 20th Century. Ed. Ya. Sinai. N.Y.; L.: World Scientific, 2003, pp. 1–16.

20. Analyse de ses travaux scientifique, par H. Poincaré. *Acta Mathem.* 1921, Vol. 38, pp. 36–135.
21. Poincaré H. Memoire sur les courbes définies par une équations differentielle. *J. math. pures et appl.*, sér. 3, 1881, vol. 7, pp. 375–422; 1882, vol. 8, pp. 251–296; sér. 4, 1885, vol. 1, pp. 167–244; 1886, vol. 2, pp. 151–217.
22. Poincaré H. Sur les Courbes Définies par des Équations Différentielles. Moscow: GITTL, 1947, 392 p. (in Russian).
23. Aleksandrov P.S. Poincaré and topology. *Russian Mat. Survey*, 1972, vol. 27, iss. 1, pp. 147–158 (in Russian).
24. Lyapunov A.M. The general problem of the stability of motion. In: Lyapunov A.M. Select. Works: Works on the Stability of Motion. Moscow: Nauka, 2007, pp. 27–298 (in Russian).
25. Moiseyev N.D. Essais on the Developement of the Theory of Stability. M.; L.: GITTL, 1949, 664 p. (in Russian).
26. The History of Mechanics from the Late Eeigteenth to the Middle of the Twentieth Century. Moscow: Nauka, 1972, 417 p. (in Russian).
27. The Method of Finding Curves of Lines with the Properties of a Maximum or a Minimum, or the Solution of an Isoperimetric Problem, Taken in the Broadest Sense of Leonard Euler, a Royal Professor and a Member of the Imperial Petersburg Academy of Sciences. M.; L.: GTTI, 1934, 603 p. (in Russian).
28. Lagrange J.L. Sur le Principe des Vitesse Virtuelles. Oeuvres de Lagrange. T. VII. Paris: Gautier-Villars, 1877, pp. 317–321.
29. Mécanique Analytique, par J.L. Lagrange. T. Premiere, Paris, 1811, 422 p.
30. Lejeune-Dirichlet P.G. Über die Stabilität des Gleichgewichts. *CRELLE, J. Reine Angew. Math.*, 1846, B. 32, s. 85–88.
31. Lejeune-Dirichlet P.G. On the Stability of Equilibrium. In: Lagrange J. Analytical Mechanics. T. 1. M.; L.: GITTL, 1950, pp. 537–540 (in Russian).
32. Poincaré H. Les Méthodes Nouvelles de la Mécanique Céleste. Tome 3. Paris: Gauthier-Villars, 1899. 410 p.
33. Zhukovsky N.E. On the strength of motion. *Scholar notes of Moscow University. Department of Physics and Mathematics. Sciences*, 1882, vol. 4, pp. 10–21 (in Russian).
34. Leonov G.A., Burkin I.M., Shepeljavyi A.I. Frequently methods in oscillation theory. *Mathematics and its applications*, vol. 357. Kluwer Academic, Dordrecht, 1996, 403 p.
35. Thomson W., Treatise on Natural Philosophy. V. 1.1. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1879, 508 p.
36. Routh E. A Treatise on the Stability of a Given State of Motion. London: Macmillan and Co., 1877, 129 p.
37. Routh E. The Elementary part of a Treatise on the Dynamics of a System of Rigid Bodies. London: Macmillan and Co., 1860, 588 p.
38. Mandelshtam L.I. Foreword to: Andronov AA, Witt AA, Khaikin S.E. Theory of oscillations. Moscow: Fizmatlit, 1959, pp. 9–13 (in Russian).

39. Newton I. *Mathematical Principles of Natural Philosophy*. N.Y.: Daniel Adee, 1846, 575 p.
40. Tassul J.-L. *The Theory of Rotating Stars*. Princeton: Princeton Univ. Press, 1978, 524 p.
41. Todhunter I. *A History of the Mathematical Theories of Attraction and the Figure of the Earth from the Time of Newton to That of Laplace*. L.: Macmillan and Co., 1873, Vol. I, XVIII + 474 p.
42. Maclaurin C. *Traité des Fluxions*. Edinburgh, 1742, 574 p.
43. Jacobi C.G. Über die Figur des Gleichgewichts. *Ann. Phys. u. Chem.* 1834, B. 33, S. 229–233; *Gesammelte Werke*. T. 2. Berlin: Verlag von G. Reimer, 1882–1891, S. 17–22.
44. Lyapunov A.M. On the Form of Celestial Bodies. In: Academician A.M. Lyapunov. *Coll. op.* T. III. Moscow: Publishing House of the Academy of Sciences of the USSR, 1959, pp. 361–374 (in Russian).
45. Lyapunov A.M. On the stability of ellipsoidal forms of equilibrium of a rotating fluid. In: Academician A.M. Lyapunov. *Coll. op.* T. III. Moscow: Publishing House of the Academy of Sciences of the USSR, 1959, pp. 5–113 (in Russian).
46. Poincaré H. Sur l'équilibre d'une masse fluide animée d'un mouvement de rotation. *Acta Math.* 1885. T. 7. P. 259–380; *Oeuvres de Henri Poincaré*. T. VII. Paris: Gautier-Villars, 1952, pp. 40–140.
47. *Great Soviet Encyclopedia*. T. 3. Moscow: Sov. Encyclopedia, 1970, 640 p. (in Russian).
48. Poincaré H. Sur la stabilité d'équilibre des figures piriformes affectées par une masse fluide animée en rotation. *Proc. Roy. Soc. London*, 1901, vol. 69, pp. 148–149.
49. Darwin G. The stability of the pear-shaped figure of equilibrium of a rotating mass of liquid. *Phyl. Transactions of the Royal Soc. of London*, 1903, vol. 200, ser. A, pp. 251–314.
50. Darwin G. Further consideration of the stability of the pear-shaped figure of equilibrium of a rotating mass of liquid. *Phyl. Transactions of the Royal Soc. of London*, 1908, vol. 208, ser. A, pp. 1–19.
51. Liapounoff A.M. Sur les figures d'équilibre peu différentes des ellipsoïdes d'une masse liquide homogène douée d'un mouvement de rotation. I partie. Etude générale du problème. St.-Pbg. Imprim. de l'Acad. des Sc. 1906. IV+225 p.
52. Liapounoff A.M. Sur les figures d'équilibre peu différentes des ellipsoïdes d'une masse liquide homogène douée d'un mouvement de rotation. II partie. Figure d'équilibre dérivée des ellipsoïdes de Maclaurin. St.-Pbg. Imprim. de l'Acad. des Sc. 1909. IV+203 p.
53. Liapounoff A.M. Sur les figures d'équilibre peu différentes des ellipsoïdes d'une masse liquide homogène douée d'un mouvement de rotation. III partie. Figure d'équilibre dérivée des ellipsoïdes de Jacobi. St.-Pbg. Imprim. de l'Acad. des Sc. 1912. IV+228 p.
54. Liapounoff A.M. Sur les figures d'équilibre peu différentes des ellipsoïdes d'une masse liquide homogène douée d'un mouvement de rotation. IV partie. Nouvelles formules pour la recherches des figures d'équilibre. St.-Pbg. Imprim. de l'Acad. des Sc. 1914. IV+112 p.

55. Jeans G. The Motion of Tidally-distorted Masses with special Reference of Cosmogony. *Memories of the Royal Astron. Soc.*, 1917, vol. 62, pp. 1–48.
56. Lyapunov A.M. On a problem of Chebyshev. *Notes of Acad. Sciences in Phys. and Math. Dep.* 1905. 8 ser. T. 17. no. 3. pp. 1–32; A.M. Lyapunov. Coll. works. T. 3. Moscow-Leningrad: Publishing House of the Academy of Sciences of the USSR, 1959, pp. 207–236 (in Russian).
57. Mukhin R.R. Dynamic chaos: a difficult path of discovery. *Izvestiya VUZ. Applied nonlinear dynamics*, 2014, no. 4, pp. 43–54 (in Russian).
58. Rayleigh J.W. The Theory of Sound. L.: MacMillan and Co. In two volumes: 1877, vol. I. 326 p.; 1878, vol. II. 315 p.
59. Schmidt E. Zur Theorie der linearen und nichtlinearen Integralgleichungen. I Teil: Entwicklung willkürlicher Funktionen nach Systemen vorgeschriebener. *Math. Ann.*, 1907, B. 63, s. 433–476.
60. Schmidt E. Zur Theorie der linearen und nichtlinearen Integralgleichungen. II Teil: Auflösung der allgemeinen linearen Integralgleichung. *Math. Ann.*, 1907, B. 64, s. 161–174.
61. Khvedelidze B.V. The Lyapunov–Schmidt equation. *Mat. Encyclopedia*. T. 3. Moscow: Sov. Encyclopedia, 1982. S. 473–474 (in Russian).
62. Yushkevich V.I. A.M. Lyapunov and the Academy of Sciences of the Institute of France. *Histor.-mat. research*, 1965, no. 16, pp. 375–388 (in Russian).
63. Smirnov V.I., Yushkevich V.I. Correspondence A.M. Lyapunov with A. Poincaré and P. Duhem. *Histor.-mat. research*, 1985, no. 29, pp. 265–284 (in Russian).
64. Alexander Mikhailovich Lyapunov. Bibliography. Compiled by A.M. Lukomsky, ed. V.I. Smirnov. Moscow-Leningrad: Publishing House of the USSR Academy of Sciences, 1953, 268 p. (in Russian).
65. Liapounoff A. Problème générale de la stabilité du mouvement. *Annales de la faculté des science de Toulouse*, 2- serié, no. 9, 1907, pp. 203–474.
66. Lyapunov A.M. Problème Générale de la Stabilité du Mouvement. Princeton, N.Y.: Princeton Univ. Press, 1947, 375 p.
67. Lyapunov A.M. The general problem of the stability of motion. *Int. J. Control*, 1992, vol. 55, no. 3, pp. 521–790.
68. Perron O. Die ordnungszahlen linearer differential gleichungs systeme. *Mathem. Zeitschr.*, 1930, B. 31, s. 748–766.
69. Oseledets V.I. The multiplicative ergodic theorem. Characteristic Lyapunov exponents of dynamical systems. *Proceedings of Moskow mat. society*, 1968, vol. 19, pp. 179–210 (in Russian).
70. Millionshchikov M.D. A stability criterion for the probability spectrum of linear systems of differential equations with recurrent coefficients and a criterion for almost reducibility of systems with almost periodic coefficients, *Mat. collection*, 1969, T. 78, no. 2, pp. 179–202 (in Russian).
71. Kolmogorov A.N. A new metric invariant of transitive dynamical systems and automorphisms of Lebesgue spaces. *Reports of the Academy of Sciences of the USSR*, 1958, pp. 119, no. 5, pp. 861–864 (in Russian).
72. Kolmogorov A.N. On entropy per unit time as a metric invariant of automorphisms.

Reports of the Academy of Sciences of the USSR, 1959, vol. 124, no. 4. pp. 754–755 (in Russian).

73. Sinai Ya.G. On the concept of the entropy of dynamical systems. *Reports of the Academy of Sciences of the USSR*, 1959, vol. 124, no. 4, pp. 768–771 (in Russian).
74. Mukhin R.R. Kolmogorov's development of the entropy direction of the ergodic theory. *Histor.-mat. research*, 2003, Series B. 8 (43), pp. 18–26 (in Russian).
75. Sinai Ya.G. Written communication on 26.03.2007.
76. Rokhlin V.A. Lectures on the entropy theory of transformations with invariant measure. *Russian Mat. Survey*, 1967, T. 22, v. 5. S. 3–56 (in Russian).
77. Raussen M., Scow K. Interview with Ya.G. Sinai, an Abelian laureate of 2014. *Mat. education*. Series 3, issue. 19, Moscow: MCNMO Publishing House, 2015, pp. 52–69 (in Russian).
78. Uspensky V.A. Kolmogorov, how do I remember him. Proceedings of NONmathematics. T. 2. Moscow: OGI, 2002, pp. 1068–1163 (in Russian).
79. Kamenskiy M.I. Some of the stories of Vladimir Ivanovich not written in time. In: Vladimir Ivanovich Sobolev in the memoirs of colleagues and students. Voronezh: SCIENCE-UNIPRESS, 2014, pp. 50–53 (in Russian).
80. Lyapunov A.M. Study of One of the Special Cases of the Problem of Stability of Motion. Leningrad: Leningrad State University, 1963, 117 p. (in Russian).
81. Khinchin A.Ya. On the main theorems of information theory. *Russian Mat. Survey*, 1956, T. 11, v. 1, pp. 17–75 (in Russian).
82. Pesin Ya.B. Lyapunov characteristic exponents and a smooth ergodic theory. *Russian Mat. Survey*, 1977, T. 32, v. 4, pp. 55–112 (in Russian).
83. Landmark Writings in Western Mathematics, 1640–1940. Amsterdam: Elsevier, 2005, 1022 p.



Мухин Равиль Рафкатович – родился в Челябинской области (1947), окончил Московский инженерно-физический институт (1976). Защитил кандидатскую диссертацию по химической физике (1991, Институт органического синтеза и углехимии АН Казахстана) и докторскую диссертацию по истории динамического хаоса (2011, ИИЕТ РАН). Автор монографии «Очерки по истории динамического хаоса» (2007, 2012). Область научных интересов: история физико-математических наук. В настоящее время профессор Старооскольского технологического института (НИТУ МИСиС).

309516 Белгородская обл., Старый Оскол, мкр-н Макаренко, 42
Старооскольский технологический институт им. А.А. Угарова, филиал
Национального исследовательского технологического университета
«Московский институт стали и сплавов»
E-mail: mukhiny@mail.ru