



## ВОЛНОВОД С ТОНКИМИ НЕЛИНЕЙНЫМИ СТЕНКАМИ

*А.Б. Маненков*

Исследованы характеристики мод планарного диэлектрического волновода с тонкими стенками, изготовленными из нелинейных материалов. Рассмотрен эффект перехода моды из одного множества в другое при варьировании параметров волновода или передаваемой по нему мощности. Показано, что с ростом амплитуды полей возможно «исчезновение» направляемой или вытекающей мод, то есть при высоком уровне мощности, вводимой в волновод, модовое распространение может быть подавлено.

*Ключевые слова:* Волноводы с нелинейными средами, вытекающие и антиповерхностные моды, преобразование мод

### Введение

Материалы с нелинейными характеристиками представляют значительный интерес для применения в схемах интегральной и волоконной оптики, а также в системах СВЧ [1, 2]. К настоящему времени исследованы нелинейные диэлектрики с большим разнообразием параметров, которые можно использовать для подобных структур [3, 4]. Среди структур, в которых применяются нелинейные материалы, важную роль играют слоистые волноводы [1, 5]. Ранее было показано, что слоистые волноводы с линейными средами, в которых могут распространяться вытекающие моды (ВМ), обладают рядом уникальных свойств [6–9]. Можно предположить, что, используя нелинейные материалы, удастся существенно расширить области применения подобных систем; поэтому анализ ВМ в таких структурах представляет как теоретический, так и практический интерес.

В работе [10] описан метод расчета характеристик вытекающих мод в планарных волноводах, изготовленных из нелинейных материалов. Был рассмотрен общий случай многослойных волноводов с достаточно произвольными параметрами; анализ проводился численно. В настоящей работе влияние нелинейностей сред изучено более подробно на одном простом примере – на примере волновода с тонкими стенками. Такая структура является двумерной моделью так называемых диэлектрических трубок (брэгговских волокон) [6–8], а также упрощенной моделью волокон на основе фотонных кристаллов [9] и некоторых плазменных структур. Несмотря на простоту, такая модель очень удобна для анализа многих свойств ВМ [11]. Как будет

показано ниже, с ее помощью можно рассмотреть различные явления, происходящие в волноводах с нелинейными средами. В частности, на этом примере удается получить аналитические результаты, которые позволяют детально изучить области параметров, где нелинейности проявляются наиболее сильно, а также исследовать вопрос об изменении структуры и типа мод при варьировании параметров волновода и передаваемой по нему мощности.

Отметим, что рассматриваемая задача тесно связана с задачей об отражении плоской волны от нелинейного слоя [12]. В частности, используя результаты указанной задачи, можно определить характеристики вытекающих мод в приближении геометрической оптики.

## 1. Исходные уравнения

Рассматриваемый волновод (рис. 1) представляет собой планарную структуру: центральный волноведущий слой, окруженный сверху и снизу нелинейными диэлектрическими слоями малой толщины. Поперечный размер центрального слоя обозначим через  $2d$ , а его постоянную проницаемость – через  $\varepsilon_g = n_g^2$  ( $n_g$  – показатель преломления). Предполагаем, что проницаемость окружающей среды (выше и ниже стенок) также равна  $\varepsilon_g$ . Рассматриваем частный случай симметричного волновода, когда характеристики волновода при  $y > 0$  и  $y < 0$  совпадают. Толщину стенки и ее диэлектрическую проницаемость обозначим через  $d_1$  и  $\varepsilon_1$ . В дальнейшем предполагаем, что стенки изготовлены из нелинейного материала с кубической (керровской) нелинейностью [5, 13], причем считаем, что амплитуды полей не очень велики; более точные ограничения, накладываемые на параметры задачи, описаны ниже.

Рассмотрим ТЕ-случай, когда электрическое поле имеет только одну компоненту  $E_x$ . Исследуем гармонические процессы, при которых временная зависимость имеет вид  $\exp(-i\omega t)$ , где  $\omega$  – частота, а  $t$  – время. В дальнейшем считаем, что в рассматриваемых средах высшие временные гармоники подавляются. Это приближение оправданно в случае, когда затухание волн на таких гармониках велико.

Поля мод в такой системе должны удовлетворять уравнению [5, 13]

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} + k^2 \varepsilon(y, |E_x|^2) E_x = 0, \quad (1)$$

где  $k$  – волновое число;  $\varepsilon$  – диэлектрическая проницаемость, которая зависит от поперечной координаты  $y$  и от квадрата модуля поля  $|E_x|^2$ . В стенках (покрывающих слоях), изготовленных из нелинейных диэлектриков, проницаемости равны  $\varepsilon_1 = \varepsilon_1^{(0)} + \alpha |E_x(y)|^2$ , где постоянная  $\varepsilon_1^{(0)} = n_1^2$  – линейная часть ( $n_1$  – показатель преломления). Для определенности считаем, что  $\varepsilon_1^{(0)} > 0$ . Постоянный вещественный коэффициент  $\alpha$  может быть как положительным, так и отрицательным. Предполагаем также, что диэлектрические потери на частоте  $\omega$  отсутствуют, то есть во всех точках пространства  $\text{Im } \varepsilon \equiv 0$ . Кроме того, считаем, что магнитная проницаемость всех сред равна единице.

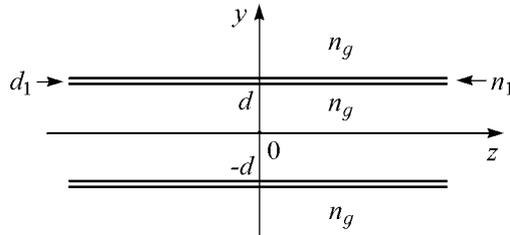


Рис. 1. Геометрия планарного волновода с тонкими стенками

В рассматриваемой системе могут распространяться моды различных типов. Ниже будут рассматриваться моды, волновые числа которых являются корнями комплексного дисперсионного уравнения, например, моды дискретного спектра. Заметим, что в волноводах с нелинейными средами, по-видимому, нельзя представить поля в виде разложений по собственным модам, которые были бы аналогичны разложениям в линейных задачах [14]. Поэтому классификация мод в указанных задачах, вообще говоря, может различаться. Однако при малых нелинейностях можно определить тип моды с помощью предельного перехода, полагая  $\alpha \rightarrow 0$  и определяя тип моды в соответствующей линейной системе (см. ниже).

Для направляемых мод (НМ) в случае отсутствия диэлектрических потерь решение уравнения (1) имеет вид бегущих волн

$$E_x = A_s \Phi_s(y) \exp [i(\beta_s z - \omega t)], \quad (2)$$

где  $\beta_s$  – постоянная распространения НМ, а  $A_s$  – вещественный амплитудный множитель; для простоты начальную фазу поля положили равной нулю. Индексом  $s$  отмечаем, что мода является направляемой (поверхностной). Отметим, что для НМ имеем  $\text{Im } \beta_s = 0$  и  $\beta_s > kn_g$ . Для симметричных мод функция  $\Phi_s(y)$  удовлетворяет уравнению

$$\frac{d^2 \Phi_s}{dy^2} + [k^2 \varepsilon(y, A_s^2 |\Phi_s|^2) - \beta_s^2] \Phi_s = 0, \quad \Phi_s(0) = 1, \quad (3)$$

и дополнительному условию  $d\Phi_s/dy = 0$  при  $y = 0$ . В приведенном уравнении проницаемость  $\varepsilon(y, A_s^2 |\Phi_s|^2)$  зависит от поперечной координаты, но не зависит от координаты  $z$ . Это свойство объясняется тем, что для НМ постоянная распространения  $\beta_s$  вещественна, а значит, модуль поля не зависит от координаты  $z$ , то есть в этом случае  $|E_x| = |A_s \Phi_s(y)|$  зависит только от  $y$ . Таким образом, для направляемой моды в уравнении (1) переменные разделяются, что и позволило искать решение задачи в виде (2).

Для другого класса мод, а именно для вытекающих (квазисобственных, англ. – quasi-modes), это свойство не имеет места; для них переменные не разделяются, так что решение задачи имеет более сложную форму. Рассмотрим характеристики вытекающей моды низшего номера  $\text{TE}_{q0}$ . Здесь и ниже добавочным нижним индексом  $q$  отмечаем, что мода вытекающая. Ищем приближенное решение задачи, предполагая, что нелинейные эффекты малы (то есть  $|\alpha E_x^2| \ll n_1^2$ ). Поле  $E_{q0}$  вытекающей моды низшего номера в нелинейных слоях в первом приближении удовлетворяет уравнению [10]

$$\frac{\partial^2 E_{q0}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_{q0}}{\partial z^2} + [k^2(n_1^2 + \alpha |E_{q0}|^2)] E_{q0} = 0. \quad (4)$$

Из приведенного уравнения следует, что для полей вытекающих мод диэлектрическая проницаемость зависит как от поперечной координаты  $y$ , так и от  $z$ , поскольку для ВМ приближенно  $|E_{q0}| \sim \exp(-z \text{Im } \beta_{q0})$ , причем  $\text{Im } \beta_{q0} \neq 0$  (здесь и ниже  $\beta_{q0}$  – комплексный коэффициент распространения ВМ типа  $\text{TE}_{q0}$ ). Для определенности исследуем прямые моды, у которых  $\text{Im } \beta_{q0} > 0$ . Далее предположим, что радиационные потери мод малы, то есть  $\text{Im } \beta_{q0} \ll kn_g$ . При указанных выше условиях решение уравнения (1) для вытекающей моды можно записать в следующей приближенной форме:

$$E_{q0} = A_{q0}(z) \Phi_{q0}(y, A_{q0}(z)) \exp \{i[\phi_{q0}(z) - \omega t]\}, \quad (5)$$

где  $A_{q0}(z)$  – вещественная амплитудная функция,  $\phi_{q0}(z)$  – вещественная фаза (фазовый набег). Функция  $\Phi_{q0}(y, A_{q0}(z))$  описывает распределение поля ВМ в поперечной плоскости при фиксированном значении  $z$ ; она является решением уравнения

$$\frac{d^2 \Phi_{q0}}{dy^2} + \{k^2 \varepsilon(y, A_{q0}^2 |\Phi_{q0}|^2) - \beta_{q0}^2\} \Phi_{q0} = 0, \quad \Phi_{q0}(0) = 1. \quad (6)$$

В этом уравнении амплитуда  $A_{q0} = A_{q0}(z)$  является параметром, зависящим от  $z$ . Таким образом, для вытекающей моды проницаемость  $\varepsilon(y, |A_{q0}^2 \Phi_{q0}|^2)$  зависит от двух координат,  $y$  и  $z$ . В силу медленности спада модуля поля  $|E_{q0}|$  можно разбить рассматриваемый интервал оси  $z$  на малые интервалы длиной  $\Delta z$ , на которых амплитуду ВМ можно считать практически постоянной (при условии  $\Delta z \operatorname{Im} \beta_{q0} \ll 1$ ). В этом случае на каждом малом интервале решение (1) можно искать в виде выражения (5), в котором набег фазы приближенно равен  $\phi_{q0}(z) \approx \operatorname{Re} \beta_{q0}(z)z$ . Далее в окрестности любой плоскости  $z = \text{const}$  можно определить локальные характеристики вытекающей моды, в частности, фазовый коэффициент  $\operatorname{Re} \beta_{q0}$  и коэффициент затухания  $\operatorname{Im} \beta_{q0}$ , которые для нелинейной задачи зависят от амплитуды  $A_{q0}(z)$ , а значит, и от координаты  $z$ . Приведенные выше качественные соображения можно уточнить, применяя метод возмущения, неполный метод Галеркина или методики, похожие на метод поперечных сечений [14–17].

Отметим, что рассматриваемая нелинейная задача похожа на линейную задачу распространения волн в нерегулярном волноводе с заполнением, параметры которого зависят от обеих координат. Однако существует ряд принципиальных различий между указанными двумя классами задач. В линейных задачах изменение показателя преломления вдоль оси  $z$  может происходить только за счет «внешнего» изменения параметров диэлектриков. В нелинейной задаче изменение эффективного значения диэлектрической проницаемости происходит за счет самого поля (самовоздействие поля), поскольку оно спадает вдоль оси  $z$ . Заметим также, что в нелинейной задаче, для того чтобы при анализе получить достаточно простые уравнения, приходится делать ряд дополнительных предположений, в частности, считать, что нелинейные эффекты малы, так что диэлектрическая проницаемость в нелинейных слоях волновода слабо зависит от координаты  $z$ , а амплитуды возбуждающихся высших мод малы. Для линейных задач уравнения связанных мод, которые выводятся, например, методом поперечных сечений, вообще говоря, верны при произвольном соотношении между амплитудами всех мод. Для этих задач требование малости амплитуд часто используется лишь на конечном этапе, если дополнительно применяется метод возмущений. Указанное различие связано, в частности, с тем, что в нелинейных структурах не выполнены условия ортогональности мод разных типов в той форме, в которой они получаются для линейных систем [14, 18].

Для фазовой функции и амплитуды основной вытекающей моды типа  $TE_{q0}$  из (4), (5) можно получить приближенные уравнения

$$\frac{d\phi_{q0}}{dz} = \operatorname{Re} \beta_{q0}, \quad (7)$$

$$\frac{dA_{q0}}{dz} = - \left[ \frac{1}{2 \operatorname{Re} \beta_{q0}} \frac{d(\operatorname{Re} \beta_{q0})}{dz} + \operatorname{Im} \beta_{q0} \right] A_{q0}, \quad (8)$$

которые в малоамплитудном приближении решаются итерациями. Заметим, что система (7)–(8) должна решаться совместно с уравнением (6), которое определяет нелинейную зависимость комплексного коэффициента распространения моды  $\beta_{q0}$  от амплитуды поля на оси волновода; поэтому в общем случае правые части системы нелинейно зависят от амплитуды  $A_{q0}$ . Заметим также, что в следующем приближении из уравнения (1) получится система уравнений, похожая на систему уравнений для связанных мод [14, 17]. Как и в линейном случае волновода с переменными параметрами, она описывает эффекты преобразования мод различных типов (как в прямые, так и во встречные). Отметим, что при анализе преобразования в открытом волноводе возникают дополнительные трудности, связанные с эффектом возбуждения пространственной волны.

В дальнейшем не будем рассматривать зависимость полей от продольной координаты, а сосредоточимся только на анализе локальных свойств вытекающей моды. Заметим, что для случая, когда длина волновода невелика, эти характеристики играют основную роль при решении многих задач, встречающихся на практике.

## 2. Локальные характеристики вытекающей моды

Для основной вытекающей моды  $TE_{q0}$  решение (6), то есть функцию  $\Phi_{q0}$  внутри и вне волновода, можно представить в виде

$$\Phi_{q0} = \begin{cases} \cos(\kappa_{q0}y), & \text{при } |y| < d; \\ B_e \exp[i\kappa_{q0}(|y| - d)], & \text{при } |y| > d, \end{cases} \quad (9)$$

где  $B_e$  – амплитуда вытекающей волны в окружающей среде. Волновые числа моды  $TE_{q0}$  связаны соотношениями

$$\beta_{q0}^2 = k^2 n_g^2 - \kappa_{q0}^2, \quad (10)$$

где  $\kappa_{q0}$  – поперечное волновое число. При выводе этих формул учтена симметрия моды  $TE_{q0}$ , условия излучения и нормировки ( $\Phi_{q0}(0) = 1$ ). В частности, из условий излучения следует, что  $\text{Im } \kappa_{q0} < 0$ . В силу симметрии системы ниже рассматриваем только верхнюю часть волновода (при  $y > 0$ ).

Считаем, что толщина стенок волновода мала [19], то есть

$$kd_1 |n_1| \ll 1. \quad (11)$$

Такую тонкую стенку можно заменить импедансной плоскостью, на двух сторонах которой выполнены граничные условия импедансного типа [11, 19, 20]

$$E_x^+ = E_x^-, \quad H_z^+ - H_z^- = -iY_w E_x^-, \quad (12)$$

где  $E_x^-, H_z^-, E_x^+, H_z^+$  – предельные значения полей на нижней и верхней частях импедансной плоскости (при  $y = d - 0$  и  $y = d + 0$ ), а двухсторонний адмитанс равен

$$Y_w = kd_1(\varepsilon_1 - \varepsilon_g), \quad \varepsilon_1 = \varepsilon_1^{(0)} + \alpha |E_x^-|^2. \quad (13)$$

При выводе (12) формально считали, что  $d_1 \rightarrow 0$ , но так, что параметр  $Y_w$  остается постоянным. Из (12) следует, что в формуле (9) коэффициент  $B_e = \cos(\kappa d)$ .

Вывод дисперсионного уравнения для основной ВМ, распространяющейся в такой структуре, проводится, так же как в линейном случае [11], с помощью формул (9) и (12). Опуская промежуточные выкладки, приведем окончательное соотношение

$$(v + ikd) \exp(-2ikd) = -v, \quad v = v(\kappa) = kdY_w/2. \quad (14)$$

Для упрощения формул опускаем нижние индексы у волновых чисел  $\kappa_{q0}$  и  $\beta_{q0}$ . Выражение для функции  $v(\kappa)$  можно записать в виде

$$v(\kappa) = v_0 + k^2 dd_1 \alpha |A_{q0} \cos(\kappa d)|^2 / 2, \quad v_0 = k^2 dd_1 (\varepsilon_1^{(0)} - \varepsilon_g) / 2, \quad (15)$$

где  $v_0$  – линейная часть выражения для  $v(\kappa)$  (при  $\alpha = 0$ ). Для дальнейшего анализа удобно переписать дисперсионное уравнение в виде

$$\kappa d = \frac{\pi}{2} - \frac{i}{2} \ln \left( 1 + \frac{ikd}{v(\kappa)} \right). \quad (16)$$

Последнее уравнение в некоторых случаях можно решать итерациями. Например, для линейной задачи ( $\alpha = 0$ ,  $v = v_0$ ) при условии  $|v_0| \gg 1$  из (16), разлагая логарифм в ряд по степеням  $1/v_0$ , получим

$$\kappa d = \frac{\pi}{2} \left( 1 + \frac{1}{2v_0} + \frac{1}{4v_0^2} - \frac{i\pi}{8v_0^2} + \dots \right). \quad (17)$$

Это соотношение можно обобщить на нелинейный случай, когда  $|v| \gg 1$ . Заметим, что условие  $|v_0| \gg 1$  (или в общем случае условие  $|v| \gg 1$ ) не противоречит неравенству (11); например, величина  $|v_0|$  может быть велика, если  $kd \gg 1$  (в области «высоких частот»), или при большой разнице диэлектрических проницаемостей. В таких случаях поле на пленке мало, поскольку  $\Phi_{q0}(d) \sim 1/|v_0| \ll 1$ , а значит,  $E_{q0}(d) \sim A_{q0}/v_0$ ; поэтому для таких  $|v_0|$  влияние нелинейности материала стенки на характеристики ВМ, как правило, не очень велико.

Из (16) следует, что нелинейность диэлектрика может сильно проявляться, если  $|v| \lesssim 1$ . При дополнительном условии  $|kd| \lesssim 1$  функция  $\Phi_{q0}(d) \sim 1$ , а значит,  $E_{q0}(d) \sim A_{q0}$ , то есть поле на стенке имеет тот же порядок величины, что и поле на оси. Рассмотрим эту область параметров подробнее, предполагая дополнительно, что  $v_0 > 0$  ( $\varepsilon_1 > \varepsilon_g$ ), то есть считая, что парциальные лучи могут распространяться в стенке. Для линейной задачи оценку величины  $kd$  можно также получить из (16) итерациями. В результате, в первом приближении при  $v_0 > 0$  получаем

$$\kappa d \approx \frac{\pi}{2} \left[ 1 + \frac{1}{\ln(1/v_0)} \right] - \frac{i}{2} \ln \left[ 1 + \frac{1}{2v_0} \ln \frac{1}{v_0} \right], \quad 0 < v_0 \ll 1. \quad (18)$$

Заметим, что величина  $|v_0|$  может быть мала, например, при очень малой толщине стенки ( $d_1 \rightarrow 0$ ) и фиксированной разности  $|n_1 - n_g|$ . Как видно из приведенных соотношений, при  $v_0 \rightarrow +0$  безразмерное волновое число  $kd$  стремится к  $(\pi/2 - i\infty)$ . «Уход» волнового числа в бесконечность объясняется тем, что при  $v_0 \rightarrow +0$  волновод фактически перестает существовать: стенки становятся практически прозрачными для падающих на них парциальных лучей и, естественно, радиационные потери вытекающей моды становятся большими. Выражение, подобное (18), можно

получить и для нелинейного случая. Следует, однако, учесть, что для нелинейной задачи соответствующая формула дает только качественную оценку величины  $kd$ , поскольку при больших отрицательных  $\text{Im}(kd)$  моду  $\text{TE}_{q0}$  уже нельзя считать слабо вытекающей, как предполагали выше. Другой случай, когда  $v_0 < 0$ , то есть когда парциальные лучи туннелируют [12] сквозь стенку волновода, более сложен; он будет рассмотрен в следующем разделе.

Кроме корней, которые являются поперечными волновыми числами вытекающей моды, уравнение (14) имеет еще два множества корней, соответствующих модам других типов. Для основной направляемой моды поперечное волновое число можно определить соотношением  $\kappa_{s0}d = i\tau_s$ , где вспомогательный вещественный параметр  $\tau_s > 0$  является корнем уравнения

$$\tau_s/[1 + \exp(-2\tau_s)] = v_0 + \alpha|A_{s0} \text{ch}(\tau_s)|^2(k^2 dd_1/2). \quad (19)$$

В этом уравнении через  $A_{s0}$  обозначено поле на оси. Поля направляемой моды экспоненциально убывают при  $y \rightarrow \pm\infty$ , поскольку  $\kappa_{s0} = i|\kappa_{s0}|$ . Заметим, что при  $kd \gg 1$  характеристики этой моды легко получить в аналитической форме, если рассматривать данную структуру как два связанных пленочных волновода, расположенных на расстоянии  $2d$  друг от друга (см. рис. 1).

Рассматриваемое дисперсионное уравнение имеет также корни, соответствующие несобственным антиповерхностным модам (АПМ) [21], для которых поперечные волновые числа являются чисто мнимыми, но в отличие от чисел направляемых мод они имеют другой знак мнимых частей. Для моды низшего номера число  $\kappa_{a0}$  (индекс  $a$  обозначает АПМ) может быть определено из вещественного уравнения

$$\kappa_{a0}d = -i\tau_a, \quad \tau_a/[1 + \exp(2\tau_a)] = v_0 + \alpha|A_{a0} \text{ch}(\tau_a)|^2(k^2 dd_1/2), \quad (20)$$

где параметр  $\tau_a > 0$ , а  $A_{a0}$  – поле на оси для этой моды. В отличие от НМ, поля АПМ растут на бесконечности при  $y \rightarrow \pm\infty$ , причем очень быстро, поэтому АПМ не может возбуждаться реальными источниками с конечной мощностью. Несмотря на ее «нефизичность», эта мода важна для интерпретации результатов исследования движения корней дисперсионного уравнения на комплексной плоскости и взаимного преобразования мод различных типов при изменении параметров волноводов<sup>1</sup>. Как показано ниже, при изменении параметров, а также амплитуды полей, может изменяться тип моды, например, вытекающая мода может преобразоваться в антиповерхностную. Заметим, что этот эффект существует и в линейных структурах [21]; там он происходит, например, при изменении частоты, а не за счет изменения передаваемой мощности.

### 3. Численные результаты

В этом разделе рассмотрены характеристики различных мод при варьировании параметров стенки и амплитуды полей. Для изучаемой структуры дисперсионное уравнение решали численно с помощью программ из пакета MINPACK [23]. В области  $|v| \gg 1$  (как при положительных, так и при отрицательных  $v$ ) для начального

<sup>1</sup>Некоторые свойства АПМ похожи на свойства антисвязанных состояний, которые рассмотрены в работах, посвященных квантовой теории рассеяния [22].

приближения при поиске корней использовали значения  $kd$ , вычисленные с помощью двух или трех итераций из асимптотической формулы (17). В области  $|v| \leq 1$  для задания начального приближения применяли процедуру непрерывного продолжения параметра. А именно, параметр  $v_0$  менялся с небольшим шагом, начиная со значений  $|v_0| \gg 1$ , и на каждом последующем шаге в качестве начального приближения использовали значение корня на предыдущем шаге. Заметим, что в нелинейном случае выражение для  $v(k)$  содержит член  $|\cos(kd)|^2$ , который быстро растет при больших  $\text{Im}(kd)$ , так что при «неудачном» выборе начального приближения возможно аварийное переполнение, которое, как правило, не позволяет проводить вычисления дальше. Волновые числа НМ и АПМ находили из более простых вещественных уравнений (19) и (20). Отметим, что точность расчетов корней была порядка  $10^{-7}$  или выше.

Для данной задачи поведение мнимых частей корней дисперсионного уравнения является более информативным, поскольку для части рассмотренных выше мод имеем  $\text{Re}(kd) \equiv 0$ ; поэтому начнем анализ результатов с исследования зависимостей  $\text{Im}(kd)$  от параметров задачи. На рис. 2 изображены зависимости безразмерных величин  $\text{Im}(kd)$  от безразмерного параметра  $v_0$  для линейной и нелинейной задач. Буквами  $q$ ,  $s$  и  $a$  отмечены кривые, рассчитанные для ВМ, НМ и АПМ, соответственно. Сплошные кривые построены для случая, когда  $\alpha = 0$  (линейная задача). Пунктирные кривые построены для волновода, у которого параметр  $\alpha = 0.1$  (нелинейная задача). Предполагали, что амплитуды полей всех мод на оси волновода равны единице (то есть  $A_{q0} = A_{s0} = A_{a0} = 1$ ) и, кроме того, параметр  $k^2 dd_1/2 = 1$ .

Рассмотрим сначала линейную задачу. В этом случае при  $v_0 > 0$  (то есть при  $\varepsilon_1^{(0)} > \varepsilon_g$ ) ВМ и НМ существуют независимо во всей указанной области параметра  $v_0$ , и каких-либо изменений типа мод при варьировании адмитанса не происходит. Поведение зависимостей  $\text{Im}(kd)$  от параметра  $v_0$  можно достаточно легко объяснить из физических соображений (в том числе и из соображений геометрической оптики). В частности, для НМ модуль волнового числа  $\kappa_{s0}$  монотонно растет с увеличением  $v_0$ , поскольку в этом случае, как можно показать, поле моды «втягивается» в стенку. Для ВМ величина  $\text{Im}(kd)$  убывает при увеличении  $v_0$  в соответствии с оценкой (17). Уменьшение  $\text{Im}(kd)$  связано с тем, что с ростом  $v_0$  углы скольжения парциальных лучей ВМ уменьшаются и, соответственно, уменьшается (по закону Френеля) доля мощности, проходящей сквозь стенку. Качественное поведение дисперсионных кривых для ВМ в области малых положительных  $v_0$  было описано выше (см. формулу (18)) и его также можно объяснить из законов геометрической оптики (предполагая  $kd \gg 1$ ).

Для случая, когда  $v_0 < 0$  (то есть при  $\varepsilon_1^{(0)} < \varepsilon_g$ ), поведение кривых иное. Во-первых, в этой области параметров для линейной задачи (при  $\alpha = 0$ ) направляемые моды не существуют. Во-вторых, в области небольших отрицательных значений  $v_0$  возникает ситуация, когда вместо вытекающих мод образуются две ветви антиповерхностных (см. левую часть рис. 2). В рассматриваемом случае при  $v_0 \approx -0.139$  кривая с меткой  $q$  раздваивается и корень дисперсионного уравнения переходит из одного множества в другое. Условно эту точку можно назвать точкой отсечки для ВМ. Соответствующее значение поперечного волнового числа в этой точке  $\kappa_{q0}d \approx i(-0.64)$ .

Перейдем теперь к анализу результатов, полученных для волновода с нелинейной стенкой. Результаты расчетов показаны на рис. 2 пунктирными кривыми.

Качественно поведение кривых можно понять, если использовать соотношение между  $\nu$  и  $\nu_0$  (15). Согласно этому соотношению, значение функции  $\nu(\kappa)$ , которое и определяет положение корня дисперсионного уравнения на комплексной плоскости чисел  $\kappa$ , получается из величины  $\nu_0$  добавлением нелинейного члена, пропорционального  $\alpha|A_{q0} \cos(\kappa d)|^2$ . В той области параметров, где мнимая часть  $\text{Im}(\kappa d)$  не очень велика, а величина  $|\cos(\kappa d)|^2$  остается порядка единицы и при изменении  $\alpha$  меняется не очень сильно, кривые для нелинейной задачи получаются из кривых для линейной горизонтальным смещением (см. рис. 2), причем величина смещения пропорциональна параметру  $\alpha$ . Поскольку в данном примере  $\alpha > 0$ , то кривые смещены влево. Эти рассуждения неверны в случае, когда  $|\text{Im}(\kappa d)| \gg 1$ . При таких параметрах из-за экспоненциального роста функции  $|\cos(\kappa d)|^2$  при увеличении  $|\text{Im}(\kappa d)|$  кроме смещения происходит также постепенное искривление кривых, которое видно внизу на рис. 2. Заметим, что в области параметров, где  $\text{Im}(\kappa d) < -1$ , радиационные потери ВМ велики и ее уже нельзя считать слабо вытекающей, как это предполагали выше. Кроме того, при условии  $|\cos(\kappa d)|^2 \gg 1$  поле в стенке волновода становится большим и нелинейный член  $\alpha|E_x|^2 \sim \varepsilon_1^{(0)}$ , поэтому для диэлектрической проницаемости нелинейной среды нельзя использовать простое выражение (13). По этим причинам указанные области не анализировали.

Опишем теперь зависимости  $\text{Re}(\kappa d)$  от  $\nu_0$  для тех же случаев. Результаты расчетов этой величины представлены на рис. 3. Параметры задачи и обозначения кривых здесь те же, что и на рис. 2. В соответствии с формулами, приведенными выше, для направляемой и антиповерхностной мод имеем  $\text{Re}(\kappa d) \equiv 0$ . Соответствующие значения величин  $\text{Re}(\kappa d)$  для этих мод лежат на лучах, идущих вдоль оси абсцисс; для упрощения рисунка они не показаны. Для вытекающей моды (метка q) при  $\nu_0 \rightarrow \pm\infty$  имеем  $\text{Re}(\kappa d) \rightarrow \pi/2$ , при  $\nu_0 \rightarrow -0$  получаем  $\text{Re}(\kappa d) \rightarrow 0$ , а при  $\nu_0 \rightarrow +0$  имеем  $\text{Re}(\kappa d) \rightarrow \pi/2$ . Эти предельные значения определяют области значений вещественной части  $\text{Re}(\kappa d)$  для ВМ в линейном случае. Приведенные выше рассуждения, которые объясняли смещение кривых при изменении параметра нелинейности  $\alpha$ , применимы и для объяснения поведения зависимостей  $\text{Re}(\kappa d)$  от  $\nu_0$  для нелинейной задачи. Исключение составляет только часть пунктирной кривой для ВМ, которая начинается при положительных  $\nu_0$  и оборвана в левой части рис. 3. В этой области параметров при  $\nu_0 < 0$ , как указывалось выше, происходит сильный рост  $|\text{Im}(\kappa d)|$ , так что ВМ уже нельзя считать слабо вытекающей и, кроме того,

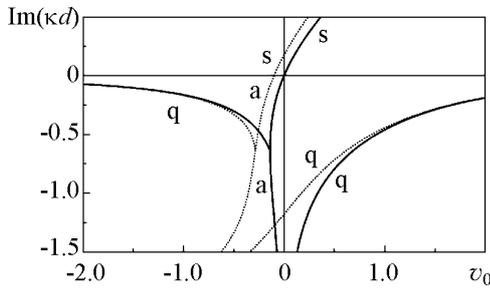


Рис. 2. Зависимость безразмерной величины  $\text{Im}(\kappa d)$  от параметра  $\nu_0$  для случая, когда  $\alpha=0.1$

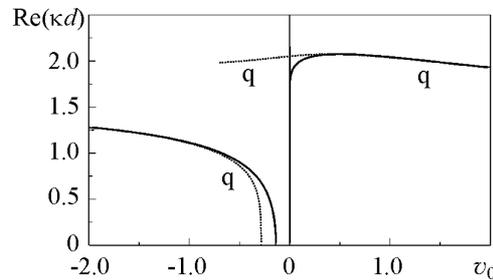


Рис. 3. Зависимость безразмерной величины  $\text{Re}(\kappa d)$  от параметра  $\nu_0$  для случая, когда  $\alpha=0.1$

малоамплитудное приближение, которое использовали для расчетов, здесь не работает. Поэтому анализ в этой области не проводили. Заметим, что для направляемой и антиповерхностной мод величины  $\text{Re}(kd)$  остаются равными нулю, но смещаются области существования этих мод.

Приведем теперь типичные распределения полей направляемой и вытекающих мод в такой системе. На рис. 4 показаны зависимости  $|E_x|$  от поперечной координаты  $y$  для рассмотренных выше мод. Расчеты проводили для волновода с нелинейной стенкой, у которого  $\alpha = 0.1$ , амплитуды полей на оси равнялись единице, а параметр  $k^2 dd_1/2 = 1$ . Безразмерный параметр  $\nu_0 = 2$  при расчете распределения НМ и  $\nu_0 = 10$  при расчете ВМ. Значения  $\nu_0$  брали разными, чтобы яснее продемонстрировать характерные особенности распределений полей этих мод. Вертикальной штриховой линией показано положение тонкой диэлектрической стенки. Как видно из рисунка, поля НМ убывают при удалении от стенки, поскольку парциальные лучи этой моды распространяются внутри стенок и испытывают полное внутреннее отражение на границах раздела сред. ВМ образованы лучами, которые преимущественно распространяются между стенками, попеременно отражаясь от них. Поля этих мод достаточно велики внутри волновода (при  $|y| < d$ ), с наружной стороны стенки они малы, но затем начинают медленно (для слабо вытекающих мод) возрастать при  $y \rightarrow \pm\infty$ .

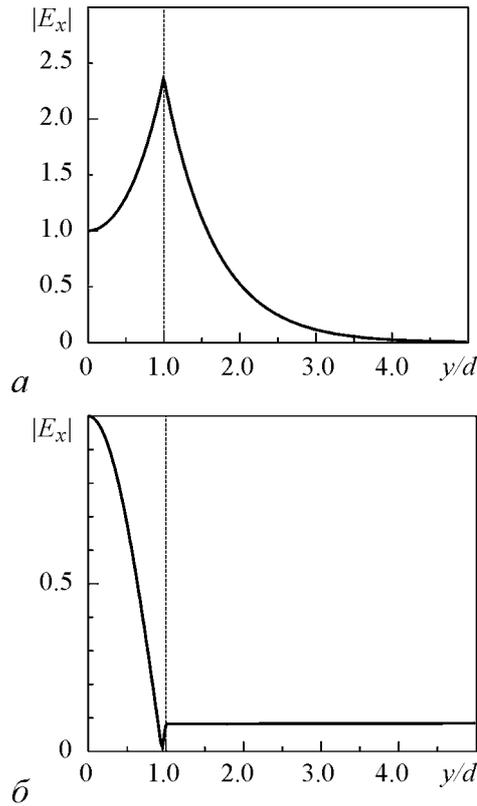


Рис. 4. Распределения полей направляемой (а) и вытекающей (б) мод в поперечной плоскости волновода

Распределение полей антиповерхностных мод, которое здесь не показано, внутри волновода похоже на распределение полей направляемых мод, а вне волновода поля не убывают, как у НМ, а экспоненциально растут (при  $y \rightarrow \pm\infty$ ) из-за другого знака мнимой части  $k$ . Заметим, что как вытекающие моды, так и антиповерхностные являются несобственными, их поля экспоненциально растут в поперечной плоскости, так что формально переносимая ими мощность равна бесконечности. Тем не менее свойства указанных мод существенно различаются [21]. В частности, в отличие от АПМ поля ВМ могут быть выделены из общего поля, возбуждаемого сторонними источниками, и полное поле в большой области пространства с малой погрешностью можно аппроксимировать суммой полей основных ВМ.

Выше был рассмотрен случай, когда параметр нелинейности  $\alpha > 0$ . В другом случае, когда  $\alpha < 0$ , зависимости  $\text{Re}(kd)$  и  $\text{Im}(kd)$  от  $\nu_0$  также получают смещением кривых, рассчитан-

ных для линейного случая, но это смещение происходит вправо. Как и в предыдущем примере, такое описание характеристик мод справедливо только до тех пор, пока нелинейные эффекты остаются достаточно малыми, то есть при условии  $|\alpha[A_0 \cos(kd)]^2| < 1$  (здесь  $A_0$  – поле на оси).

Рассмотрим теперь зависимости коэффициентов<sup>2</sup> распространения и затухания вытекающей моды низшего номера  $TE_{q0}$  от амплитуды поля на оси волновода. На рис. 5 изображены зависимости  $Re \xi$  и  $Im \xi$ , где  $\xi = \beta_{q0}/(kn_g)$  – безразмерный коэффициент распространения ВМ, от  $A_{q0}$ . Расчеты проводили для волновода с параметрами  $\alpha = 0.1$ ,  $k^2 dd_1/2 = 1$  и  $\nu_0 = -0.6$ . Приведенные кривые типичны для широкой области параметров волновода. Как следует из этого рисунка, при увеличении амплитуды поля  $A_{q0}$  радиационные потери ВМ растут. Такое увеличение потерь можно объяснить, учитывая, что при указанных выше параметрах, когда  $\alpha > 0$ , с ростом поля эффективное значение диэлектрической проницаемости стенки  $\varepsilon_1$  за счет нелинейного члена увеличивается, а значит, уменьшается модуль разности  $|\varepsilon_g - \varepsilon_1|$ ; за счет сближения проницаемостей всех сред коэффициент прохождения парциальных лучей через стенку растет, что и приводит к увеличению  $Im(\beta_{q0})$ . Заметим, что при изменении знака  $\alpha$  по тем же причинам будет наблюдаться уменьшение потерь ВМ с ростом амплитуды поля.

Поведение коэффициента распространения ВМ от  $A_{q0}$  существенно меняется в узкой области параметров, где возникает корень дисперсионного уравнения, соответствующий АПМ. Подобный случай иллюстрирует рис. 6, на котором представлены действительная и мнимая части величины  $\xi = \beta/(kn_g)$ . Кривые для этого рисунка построены при  $\alpha = 0.1$ ,  $k^2 dd_1/2 = 1$  и  $\nu_0 = -0.3$ . В такой области параметров мода  $TE_{q0}$  существует не при всех  $A_{q0}$ . При увеличении  $A_{q0}$  возникают две АПМ, у которых  $Im(\beta_{a0}) \equiv 0$ , то есть эти моды не имеют радиационных потерь. Таким образом, при увеличении  $A_{q0}$  величина  $Im(\beta_{q0})$  будет уменьшаться и в точке изменения типа моды  $\beta_{q0}$  станет чисто действительной величиной. Точка отсечки, в которой величина  $Im(\beta_{q0})$  обратится в ноль, показана на рис. 6 темным кружком. Следует учесть, что поля АПМ растут при  $y \rightarrow \pm\infty$  и их нельзя возбудить источни-

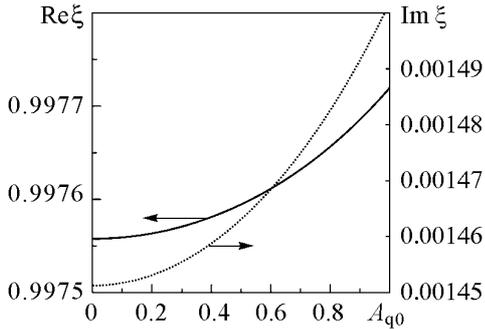


Рис. 5. Зависимости безразмерных коэффициентов распространения и затухания вытекающей моды низшего номера  $TE_{q0}$  от амплитуды поля на оси волновода  $A_{q0}$  при  $\nu_0 = -0.6$

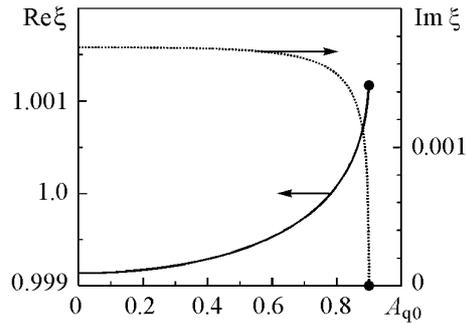


Рис. 6. Зависимости безразмерных коэффициентов распространения и затухания вытекающей моды низшего номера  $TE_{q0}$  от амплитуды поля на оси волновода  $A_{q0}$  при  $\nu_0 = -0.3$

<sup>2</sup>Для нелинейной задачи величина  $\beta_{q0}$  зависит от  $z$ , поэтому эту величину нельзя называть постоянной распространения, как это принято для линейных систем.

ком с конечной мощностью. Поэтому можно предположить, что в указанной выше точке, в которой корень дисперсионного уравнения переходит из одного множества (класса) в другое, модовое распространение излучения (на симметричных модах) будет практически невозможно. Делая этот вывод, следует, конечно, учесть, что в такой ситуации есть возможность возбуждения ВМ высших номеров, которые, как правило, имеют большие потери, а также возможность возбуждения пространственной волны. Детальный анализ этого эффекта должен включать исследование задачи возбуждения и распространения мод вдоль оси волновода, что выходит за рамки данного исследования. Отметим также, что в рассматриваемой системе существуют другие точки, в которых возможен переход моды из одного класса в другой. Например, в окрестности точки  $\nu_0 = 0$  направляемая мода может трансформироваться в антиповерхностную.

### Заключение

В работе рассмотрены локальные характеристики симметричных мод, распространяющихся вдоль волновода с тонкими стенками, изготовленными из материала с нелинейной диэлектрической проницаемостью. Задача решалась в приближении, близком к хорошо известному малоамплитудному приближению.

Расчеты показали, что в такой системе при варьировании ее параметров возможны эффекты преобразования типов мод. Под таким преобразованием понимается эффект изменения основных характеристик мод, по которым они классифицируются, например, изменение знака мнимой части поперечного волнового числа. Можно сказать, что в этом случае мода переходит из одного класса (множества), к которому она вначале принадлежала, в другой класс. Подобный переход может происходить также при изменении передаваемой по волноводу мощности. При этом вытекающая мода может «превращаться» в антиповерхностную. Поскольку антиповерхностные моды не могут возбуждаться реальными источниками, то в области параметров, где корень дисперсионного уравнения соответствует именно такой моде, возможна ситуация, когда в данной структуре модовое распространение волн будет сильно подавлено. В линейной задаче при таких параметрах основная доля излучения уйдет в непрерывный спектр (пространственную волну) и, возможно, в незначительной доле в какие-то моды высших типов. На этом эффекте могут быть сконструированы датчики или элементы схем интегральной оптики.

В работе рассмотрены характеристики мод в волноводе с тонкими диэлектрическими стенками. Описанный подход может быть обобщен на случай, когда стенка волновода образована металлическими решетками (с нелинейной проводимостью) или на случай, когда волновод представляет собой слоистую плазменную структуру. Во всех подобного рода задачах дополнительно нелинейной может быть также среда центрального волноводящего слоя.

Автор признателен И.А. Молоткову и А.Г. Рожневу за обсуждения вопросов, связанных с данной работой.

*Работа выполнена при поддержке РФФИ (гранты 08-02-00621 и 08-02-90002).*

## Библиографический список

1. *Ахмедиев Н.Н., Анкевич А.* Солитоны. М.: Физматлит, 2003.
2. *Кивишарь Ю.С., Агравал Г.П.* Оптические солитоны. М.: Физматлит, 2005.
3. *Ryasnyansky A.I., Palpant B., et al.* Nonlinear optical properties of copper nanoparticles synthesized in indium tin oxide matrix by ion implantation // *J. Opt. Soc. Am. B.* 2006. Vol. 23, № 7. P. 1348.
4. *Сотский А.Б., Хомченко А.В., Сотская Л.И.* Измерение параметров кубично-нелинейных волноводов // *Письма в ЖТФ.* 1994. Т. 20, № 6. С. 49.
5. *Ogusu K.* Analysis of non-linear multilayer waveguides with Kerr-like permittivities // *Opt. Quantum Electron.* 1989. Vol. 21, № 2. P. 109.
6. *Мелехин В.Н., Маненков А.Б.* Диэлектрические трубы как волноводы с малыми потерями // *ЖТФ.* 1968. Т. 38, № 12. С. 2113.
7. *Маненков А.Б.* Загухание быстрых волн в диэлектрических трубах // *Радиотехника и электроника.* 1977. Т. 22, № 10. С. 2043.
8. *Li J., Chiang K.S.* Disappearance of modes in planar Bragg waveguides // *Optics Lett.* 2007. Vol. 32, № 16. P. 2369.
9. *Joannopoulos J.D., Johnson S.G., Winn J.N., Meade R.D.* Photonic Crystals: Molding the Flow of Light. Princeton: Princeton University Press, 2008 (2-nd edition).
10. *Маненков А.Б.* Вытекающие моды в многослойном волноводе с нелинейными диэлектриками // *Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика.* 2008. Т. 16, № 4. С. 20.
11. *Маненков А.Б.* Возбуждение быстрых волн в открытом волноводе с диэлектрической стенкой // *Изв. вузов. Радиофизика.* 1975. Т. 18, № 7. С. 1025.
12. *Молотков И.А., Маненков А. Б.* О нелинейных туннельных эффектах // *Радиотехника и электроника.* 2007. Т. 52, № 7. С. 799.
13. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Электродинамика сплошных сред. М.: Наука, 1992.
14. *Маненков А.Б.* Возбуждение открытых однородных волноводов // *Изв. вузов. Радиофизика.* 1970. Т. 13, № 5. С. 739.
15. *Никольский В.В.* Вариационные методы для внутренних задач электродинамики. М.: Наука, 1967.
16. *Вайнштейн Л.А.* Теория дифракции. Электроника СВЧ. М.: Радио и связь, 1995.
17. *Каценеленбаум Б.З.* Теория волноводов с медленно меняющимися параметрами. М.: АН СССР, 1961.
18. *Маненков А.Б.* Условия ортогональности вытекающих мод // *Изв. вузов. Радиофизика.* 2005. Т. 48, № 5. С. 388.
19. *Вайнштейн Л.А.* Теория дифракции и метод факторизации. М.: Радио и связь, 1966.
20. *Глуценко А.Г.* Теория волноведущих структур СВЧ с нелинейными пленками // *Изв. вузов. Радиофизика.* 1988. Т. 31, № 9. С. 1098.
21. *Вайнштейн Л.А.* Электромагнитные волны. М.: Радио и связь, 1982.

22. *Ньютон Р.* Теория рассеяния волн и частиц. М.: Мир, 1969.
23. *Каханер Д., Моулер К., Нэш С.* Численные методы и программное обеспечение. М.: Мир, 1998.

*Поступила в редакцию 11.03.2009*

*После доработки 11.04.2009*

## WAVEGUIDE WITH THIN NONLINEAR WALLS

*A.B. Manenkov*

Characteristics of modes of the planar waveguide with thin walls, which are made from nonlinear media, are studied. The effect of the conversion of a mode from one set to another is considered. This effect may occur if parameters of the waveguide or transmitted power are varied. It is shown that the effect of the guided or leaky modes «disappearance» can arise when the field amplitudes increase, i.e., high powers launched into such a structure can suppress the modal propagation.

*Keywords:* Waveguides with nonlinear media, leaky and antisurface modes, mode conversion.



*Маненков Александр Бензионович* – родился в Москве (1943). Окончил Московский физико-технический институт (1965), к.ф.-м.н. (1973), д.ф.-м.н. (1996). С 1965 года работает в Институте физических проблем РАН. В физической лаборатории ИФП под руководством П.Л. Капицы экспериментально и теоретически занимался разработкой микроволновой аппаратуры для плазменных исследований. Совместно с Л.А. Вайнштейном построил общую теорию возбуждения открытых волноводов. В настоящее время – ведущий научный сотрудник ИФП РАН. Область научных интересов – анализ задач возбуждения, распространения и дифракции волн в открытых электродинамических структурах, численное исследование различных задач радиофизики (включая оптику) и электроники.

119334 Москва, ул. Косыгина, 2  
Институт физических проблем им. П.Л. Капицы РАН  
E-mail: manenkov@kapitza.ras.ru



## ПРОСТРАНСТВО УПРАВЛЯЮЩИХ ПАРАМЕТРОВ НЕЛИНЕЙНОГО ОСЦИЛЛЯТОРА ПРИ КВАЗИПЕРИОДИЧЕСКОМ ВОЗДЕЙСТВИИ

*Е.П. Селезнев, А.М. Захаревич*

Экспериментально на примере колебательного контура с полупроводниковым диодом и численно на примере отображений и дифференциальных уравнений исследуются динамика и структура пространства управляющих параметров нелинейного осциллятора при квазипериодическом воздействии. Динамика систем с квазипериодическим воздействием инвариантна по отношению к начальным фазам воздействия, как следствие – плоскость амплитуд воздействия симметрична относительно осей координат. Основными элементами структуры пространства управляющих параметров является множество терминальных точек, которые служат точками начала и окончания линии удвоения торов, перехода к странному нехаотическому и хаотическому аттракторам.

*Ключевые слова:* Странный нехаотический аттрактор, удвоение тора, терминальная точка, сингулярно-непрерывный спектр, метод рациональных аппроксимаций, метод фазовой чувствительности, показатель Ляпунова.

### Введение

Известно, что в неавтономных системах с квазипериодическим воздействием при переходе от регулярной динамики к хаосу имеет место промежуточный тип поведения между порядком и хаосом, который отвечает странному нехаотическому аттрактору (СНА). Данный тип аттрактора является устойчивым по Ляпунову, но в тоже время обладает фрактальными свойствами. Впервые СНА был описан в работе Гребоджи, Отга, Пеликана и Йорка в 1984 году [1]. Для СНА характерно совмещение определенных свойств регулярных колебаний и хаоса. Как регулярные аттракторы, они имеют только отрицательные показатели Ляпунова (помимо нулевых, обусловленных квазипериодической внешней силой), однако их геометрическая структура фракталоподобная, как у хаотических аттракторов. Спектральные свойства, характерные для режима СНА, также оказываются промежуточными между порядком и хаосом. Спектр таких колебаний является сингулярно-непрерывным. С момента первого описания [1] изучению динамики систем со СНА посвящено немало работ [2–31]. Однако, в силу сложности идентификации СНА, в подавляющем числе публикаций на эту тему представлены лишь результаты численных исследований

математических моделей в виде отображений с гармоническим воздействием, например, вида  $x_{n+1} = \lambda - x_n^2 + \varepsilon \sin 2\pi\omega n$ , где  $\lambda$  и  $\varepsilon$  – управляющие параметры, а  $\omega$  имеет иррациональное значение. Одним из интересных результатов их исследования является новый тип критического поведения [22,27–32], который реализуется в точке окончания линии удвоения тора или точке TDT (torus doubling terminal). В этой точке сходятся области всех характерных для системы качественно различных режимов: квазипериодического поведения, странного нехаотического аттрактора, хаоса [27–31].

Работ, где представлены результаты исследований экспериментальных систем или моделей с непрерывным временем, в которых наблюдается СНА, сравнительно мало. Еще меньше работ, где изучается структура пространства управляющих параметров и строятся карты динамических режимов. В этом плане следует выделить немногие работы, посвященные исследованию нелинейного осциллятора при квазипериодическом воздействии и отображению с гармоническим воздействием [22,28,29,31,32], где получено хорошее качественное соответствие результатов экспериментальных и численных исследований. Однако следует отметить, что экспериментальные исследования [28,29] проводились в узкой области значений амплитуд гармонических составляющих воздействия, где динамика системы хорошо моделируется отображением с гармоническим воздействием. Представляет интерес анализ динамики нелинейного осциллятора при квазипериодическом воздействии в более широком диапазоне значений управляющих параметров.

Целью данной работы является экспериментальное и численное исследование динамики нелинейного осциллятора при квазипериодическом воздействии в широкой области пространства управляющих параметров, сравнение структуры пространства управляющих параметров экспериментальной системы и ее моделей с дискретным и непрерывным временем.

В качестве объекта экспериментальных исследований взят колебательный контур с полупроводниковым диодом (рис. 1, а), возбуждаемый бигармоническим сигналом [28,29]

$$E(t) = A_1 \sin 2\pi f_1 t + A_2 \sin 2\pi f_2 t. \quad (1)$$

В качестве дискретных моделей использовались квадратичное отображение с гармоническим воздействием в виде [22–31]

$$\begin{cases} x_{n+1} = \lambda - x_n^2 + \varepsilon \sin 2\pi y_n \\ y_{n+1} = y_n + \omega(\text{mod}1) \end{cases} \quad (2)$$

и мультимодальное отображение [32], в которое, по аналогии с моделью (1), введено гармоническое воздействие

$$\begin{cases} x_{n+1} = \lambda + x_n \exp(-d/\omega_2) \cos(2\pi/\omega_0(1 + \beta x_n)) + \varepsilon \sin 2\pi y_n, \\ y_{n+1} = y_n + \omega(\text{mod}1). \end{cases} \quad (3)$$

Здесь  $x$  – динамическая переменная,  $\lambda$  – управляющий параметр,  $\varepsilon$  – амплитуда дополнительного воздействия,  $\omega$  – частота внешнего воздействия.

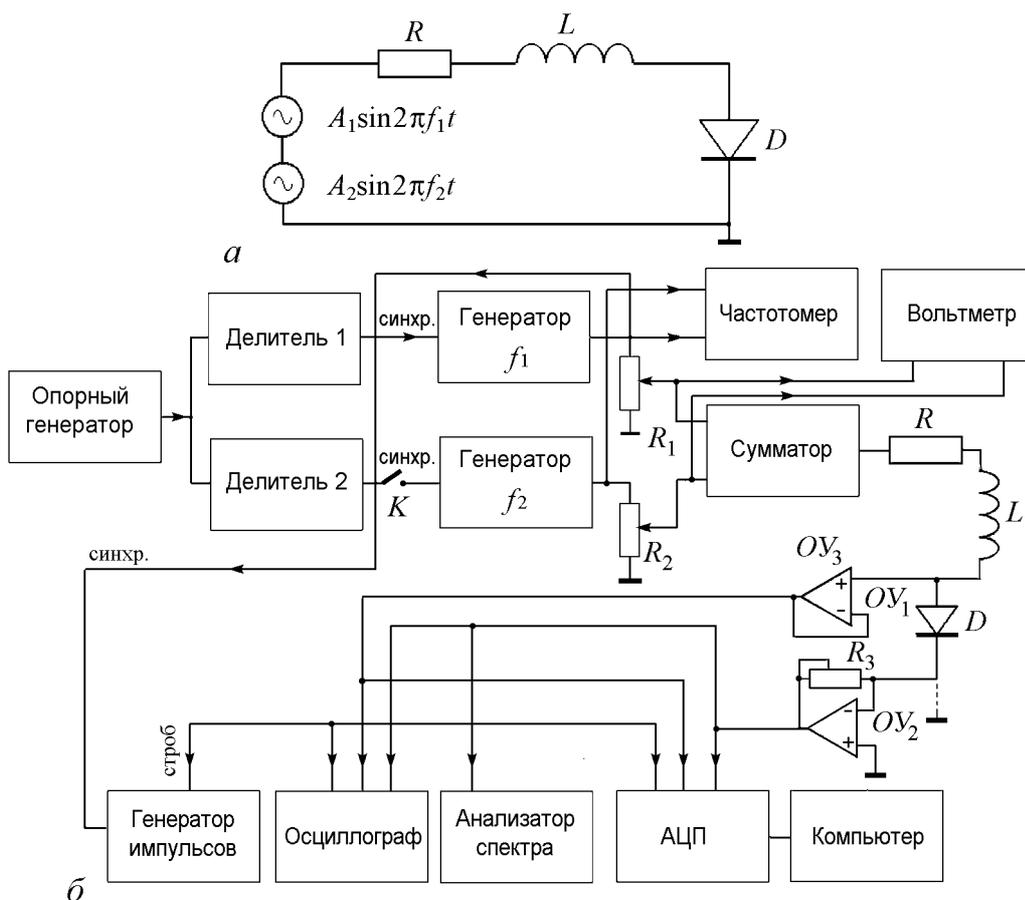


Рис. 1. Исследуемая система (а) и блок-схема установки (б)

В качестве потоковой модели использовалось уравнение Тоды с бигармоническим воздействием

$$\ddot{x} + r\dot{x} + e^x - 1 = A_1 \sin 2\pi f_1 t + A_2 \sin 2\pi f_2 t, \quad (4)$$

где  $x$  – динамическая переменная,  $r$  – параметр диссипации,  $A_1$  и  $A_2$  – амплитуды,  $f_1$  и  $f_2$  – частоты внешнего воздействия, соответственно.

## 1. Эксперимент

Принципиальная схема экспериментальной установки показана на рис. 1. Она включает в себя: а – колебательный контур, образованный катушкой индуктивности  $L$ , полупроводниковым диодом  $D$  и резистором  $R$ ; б – схему формирования сигнала воздействия, включающую три стандартных генератора гармонических колебаний, делители частоты, сумматор с низким выходным сопротивлением, приборы для регистрации колебаний и измерения управляющих параметров – частотомер, генератор импульсов, осциллограф, анализатор спектра, а также аналого-цифровой преобразователь (АЦП) для ввода данных в компьютер.

Формирование сигналов внешнего воздействия и соотношения частот осуществлялось следующим образом. Сигнал опорного генератора с кварцевой стабилизацией частоты с частотой  $f_0$  усиливался, преобразовывался в прямоугольную форму и подавался на входы цифровых делителей частоты 1 и 2 с коэффициентами деления  $m$  и  $n$ , соответственно. В делителе частоты с коэффициентом  $m$  была предусмотрена задержка импульса во времени. Выходные сигналы делителей частоты через активные фильтры низких частот подавались на входы синхронизации генераторов 1 и 2. В результате синхронизации генераторов формировались два высокостабильных по частоте гармонических сигнала воздействия: первый – амплитуды  $A_1$  и частоты  $f_1 = f_0/n$ , а второй – амплитуды  $A_2$  и частоты  $f_2 = f_0/m$ . Соотношения частот сигналов воздействия равно  $f_2/f_1 = m/n$ . Временная задержка импульса делителя 2 позволяла регулировать разность фаз сигналов воздействия. Значения частоты  $f_0$  и, соответственно,  $f_1$  и  $f_2$ , выбирались такими, чтобы с увеличением амплитуды воздействия одной или другой гармоники сигнала воздействия в нелинейном колебательном контуре наблюдалась последовательность бифуркаций удвоения периода, завершающаяся переходом к хаосу. При разомкнутом ключе  $K$  синхронизация генератора 2 отсутствует. Для задания иррационального соотношения частот проводилась незначительная отстройка частоты генератора 2. Соотношение частот сигналов воздействия контролировалось с точностью до 4-го знака после запятой и равнялось  $f_2/f_1 = (\sqrt{5} - 1)/2 \cdot 7/5$ , то есть «золотое среднее», умноженное на  $7/5$ . Гармонические сигналы генераторов 1 и 2 поступают на вход аналогового сумматора с низким выходным сопротивлением, а с его выхода – на исследуемую цепь. Использование такой схемы позволяет в эксперименте формировать достаточно стабильное по частотам внешнее воздействие.

Для определения типа динамического режима, реализующегося в системе при различных значениях параметров, привлекался следующий набор тестов. Наблюдался спектр генерируемого системой сигнала на экране анализатора спектра, что позволяло достаточно надежно идентифицировать хаотические режимы (сплошной спектр). Наблюдался фазовый портрет колебаний на экране осциллографа, что давало возможность визуально отслеживать бифуркации удвоения торов. Наблюдался портрет аттрактора в сечении Пуанкаре методом подсветки точек на экране осциллографа сигналом генератора импульсов один раз за период основного сигнала  $T = 1/f_1$ . При этом гладкому тору отвечала гладкая замкнутая кривая, удвоенному тору – две замкнутых кривых и т.д. Потеря гладкости наблюдаемой кривой или ее размытие свидетельствовало о переходе к режиму СНА или к хаосу.

Определить переход от гладкого тора к странному нехаотическому аттрактору – задача нетривиальная. В численных расчетах для идентификации странного нехаотического аттрактора используют оценку старшего показателя Ляпунова и фрактальной размерности [5, 9 11, 15, 17, 26], функцию распределения амплитуд компонент в фурье-спектре колебаний [4,17], а также показатель фазовой чувствительности [28–32]. Однако в физическом эксперименте использование этих методов представляется затруднительным и требует значительных затрат времени, особенно при построении карт динамических режимов. В [8] для определения перехода от гладкого тора к СНА был предложен метод рациональных аппроксимаций. Суть его сводится к следующему. Для определения границы перехода «гладкий тор – странный нехаотический аттрактор» иррациональное соотношение частот заменяется на рациональное, взятое из последовательности подходящих дробей, а затем система тестируется на наличие или отсутствие бифуркаций в зависимости от параметра разности

фаз между воздействующими сигналами. При этом амплитуды сигналов поддерживались постоянными. Наличие бифуркаций считается признаком присутствия СНА, хотя, строго говоря, такое заключение справедливо только в иррациональном пределе. Однако, как показали результаты исследований в [28,29], данный подход к идентификации СНА оказался в физическом эксперименте эффективным.

На рис. 2 приведена карта пространства параметров  $(f_1, A_1)$  колебательного контура с полупроводниковым диодом при гармоническом воздействии<sup>1</sup> (параметр  $A_2 = 0$ ). Тонкими сплошными линиями на рисунке обозначены бифуркации удвоения периода, жирными сплошными и пунктирными линиями – седло-узловые бифуркации, белым цветом отмечены области существования периодических колебаний, серым – хаоса. Цифрами обозначен период колебаний, выраженный в единицах периода внешнего воздействия  $T = 1/f_1$ .

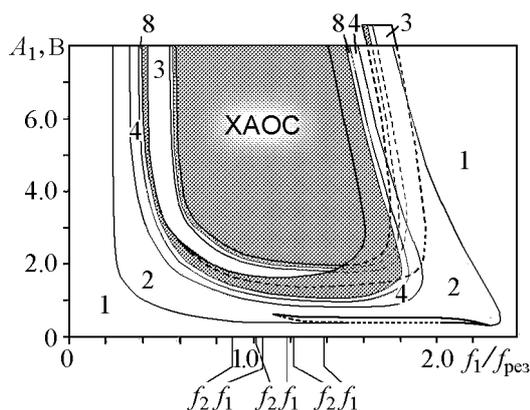


Рис. 2. Карты динамических режимов на плоскости параметров  $(f_1, A_1)$  нелинейного колебательного контура с диодом при гармоническом воздействии

Перейдем к квазипериодическому воздействию (параметр  $A_2 \neq 0$ ). Динамика подобной системы исследовалась в [28,29], но в этих работах параметр  $A_2$  был ограничен и не превышал величины, соответствующей первой бифуркации удвоения периода колебаний. Выберем *три варианта* пар значений  $f_1$  и  $f_2$ , показанных вертикальными линиями на рис. 2. Соотношение  $f_1$  и  $f_2$  в каждом случае поддерживалось постоянным, равным выбранному ранее. В *первом варианте* с увеличением амплитуды каждого из воздействий система демонстрирует последовательность бифуркаций удвоений периода колебаний, завершающуюся переходом к хаосу. Во *втором варианте* при увеличении параметра  $A_1$  имеет место седло-узловая бифуркация (пунктирная линия на рис. 2). В *третьем варианте* седло-узловые бифуркации наблюдаются как при увеличении  $A_1$ , так и при увеличении  $A_2$ .

На рис. 3 на плоскости параметров внешнего воздействия  $(A_1, A_2)$  приведены области существования различных режимов колебаний для *первого варианта* значений частот воздействия. Здесь и далее ограничимся рассмотрением только части плоскости параметров, соответствующей положительным значениям  $A_1$  и  $A_2$ . Такое упрощение вполне допустимо, так как при иррациональном соотношении частот динамика системы инвариантна по отношению к начальным фазам (или разности фаз) гармонических составляющих внешнего воздействия. Разность текущих значений фаз воздействия принимает весь непрерывный ряд значений от 0 до  $2\pi$ . Замена амплитуд  $A_1, A_2$  на  $-A_1$  и  $-A_2$  эквивалентна введению начальных фаз гармонических составляющих внешнего воздействия, равных  $\pi$ . Следует все же подчеркнуть, что при экспериментальном построении карты динамических режимов, в силу конечной точности измерений и наличия шумов, точная симметрия все же не наблюдается.

<sup>1</sup>Изучению динамики колебательного контура с варакторным диодом при гармоническом воздействии посвящено большое количество работ (см., например, [31-40]). В данной статье структура плоскости параметров приводится для обоснования выбора частот бигармонического воздействия.

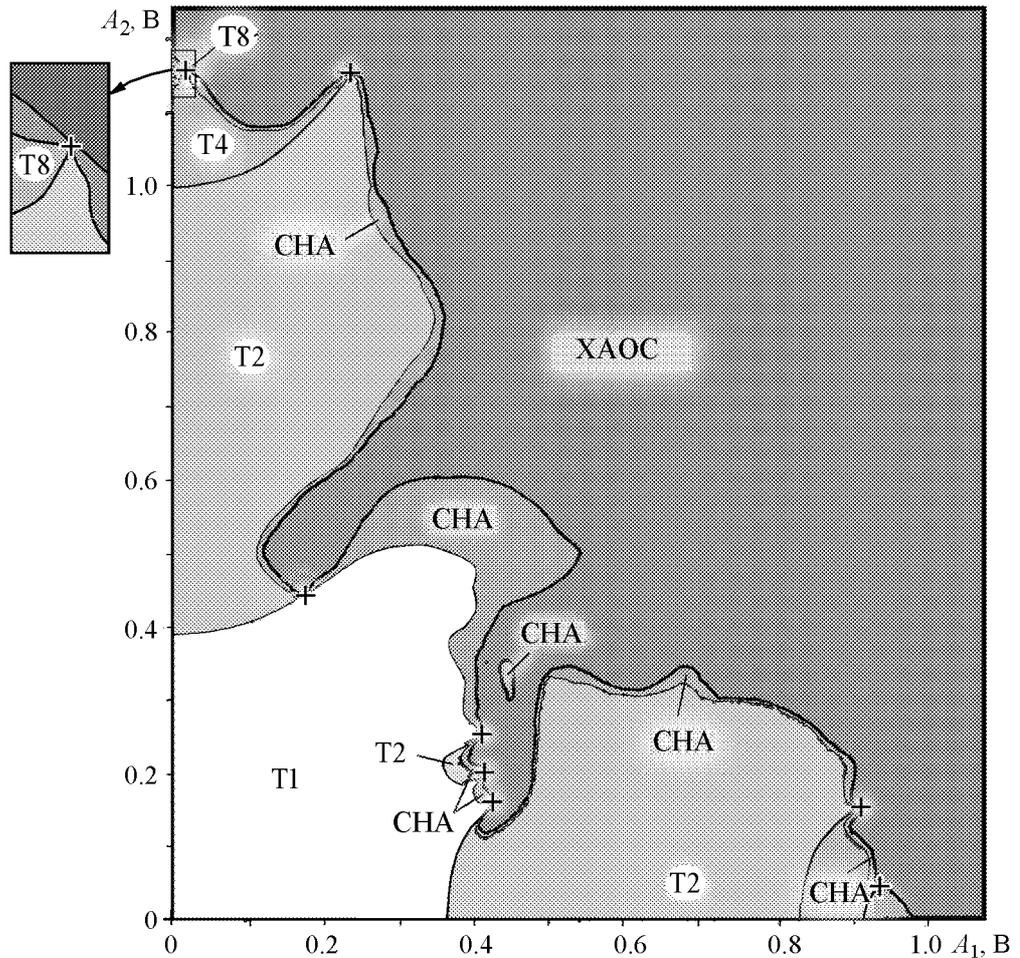


Рис. 3. Карты динамических режимов исследуемой системы на плоскости параметров  $(A_1, A_2)$  для первого варианта пары значений частот  $f_1$  и  $f_2$  (см. рис. 2)

Светлые и светло-серые области на рис. 3, обозначенные T1, T2, T3 соответствуют движению на гладких торах. На осях точками отмечены бифуркационные значения параметров  $A_1$  и  $A_2$ . Через эти точки проходят сплошные линии, на которых имеют место бифуркации удвоения тора. Рис. 4 иллюстрирует аттракторы в сечении Пуанкаре, соответствующие тору и удвоенному тору. В случае гладкого тора в сечении Пуанкаре наблюдается гладкая замкнутая кривая (рис. 4, а). Вид удвоенного тора в сечении Пуанкаре зависит от выбора проекции. В проекции на плоскость «сила тока – ЭДС (или синус фазы воздействия) генератора 2» при частоте стробирования  $f_1$  наблюдаются две отдельные замкнутые кривые (рис. 4, б). В проекции на плоскость «сила тока – ЭДС генератора 1» при частоте стробирования  $f_2$  сечение имеет вид замкнутой кривой, напоминающей удвоенный цикл (рис. 4, в).

На рис. 3 в более темных областях, обозначенных CHA, реализуются странные нехаотические аттракторы (рис. 5, а). Переход к странному нехаотическому аттрактору сопровождается появлением на изображении множества «изломов» различного масштаба. Размытие изображения в местах изломов из-за шумов в эксперименте указывает на локальную неустойчивость в этих областях фазового пространства. Изломы на изображении аттрактора в сечении Пуанкаре чередуются с участками, где размытие наблюдается очень слабо. На этих участках возмущения, нарастающие в

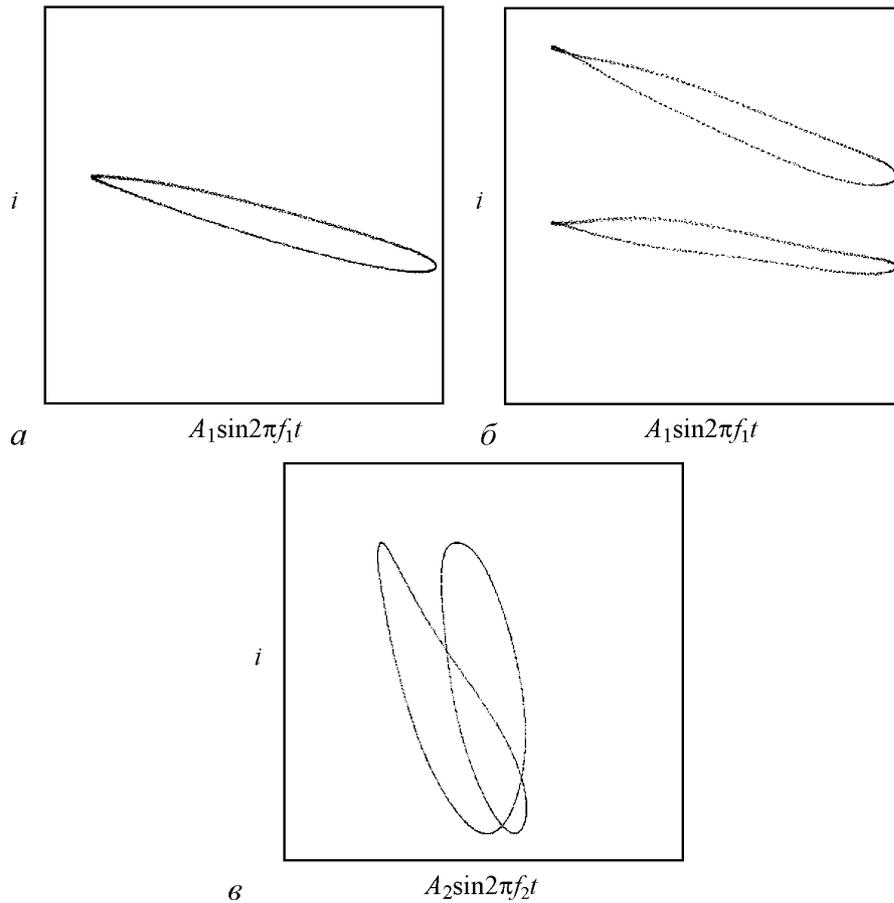


Рис. 4. Аттракторы системы в стробоскопическом сечении: *а* – гладкий тор, *б* и *в* – удвоенный тор

области изломов, спадают; это, в свою очередь, позволяет говорить о том, что в аттракторе имеются области локальной устойчивости.

На рис. 3 хаотические режимы изображены на карте как самые темные области. Следует отметить, что четко определить в эксперименте переход «СНА–хаос» не удастся из-за сложности каждого режима колебаний, поэтому граница между областями их существования построена на основе наблюдения спектров мощности. Режим считался хаотическим, если уровень шумового пьедестала на экране анализатора спектра превышал  $-50$  дБ от уровня гармоники на частоте внешнего воздействия  $f_1$ . Пример хаотического аттрактора в сечении Пуанкаре представлен на рис. 5, б.

На рис. 3 крестиками обозначены терминальные точки TDT. Каждая терминальная точка имеет точку, симметричную себе относительно осей координат. Соответственно все бифуркационные линии (удвоения тора, перехода к странному нехаотическому и хаотическому аттракторам), пересекающие оси координат, начинаются и заканчиваются в терминальных точках TDT. Как видно из рис. 3, подобными свойствами обладают не только линии, отмеченные выше, но и те, которые не пересекают оси координат.

На рис. 6 на плоскости параметров внешнего воздействия  $(A_1, A_2)$  приведены области существования различных режимов колебаний для *второго варианта* выбора значений частот воздействия. Качественно картина по сравнению с рис. 3

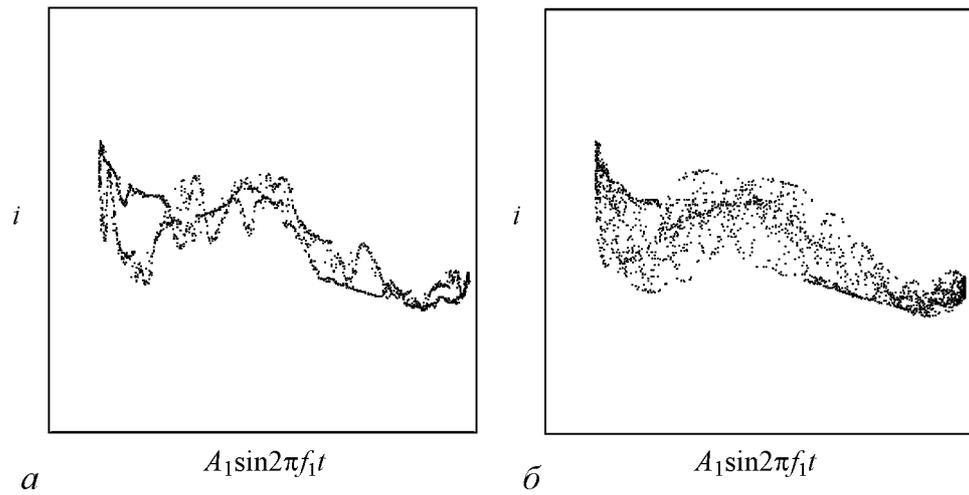


Рис. 5. Аттракторы системы в стробоскопическом сечении: *a* – странный нехаотический аттрактор, *б* – хаотический аттрактор

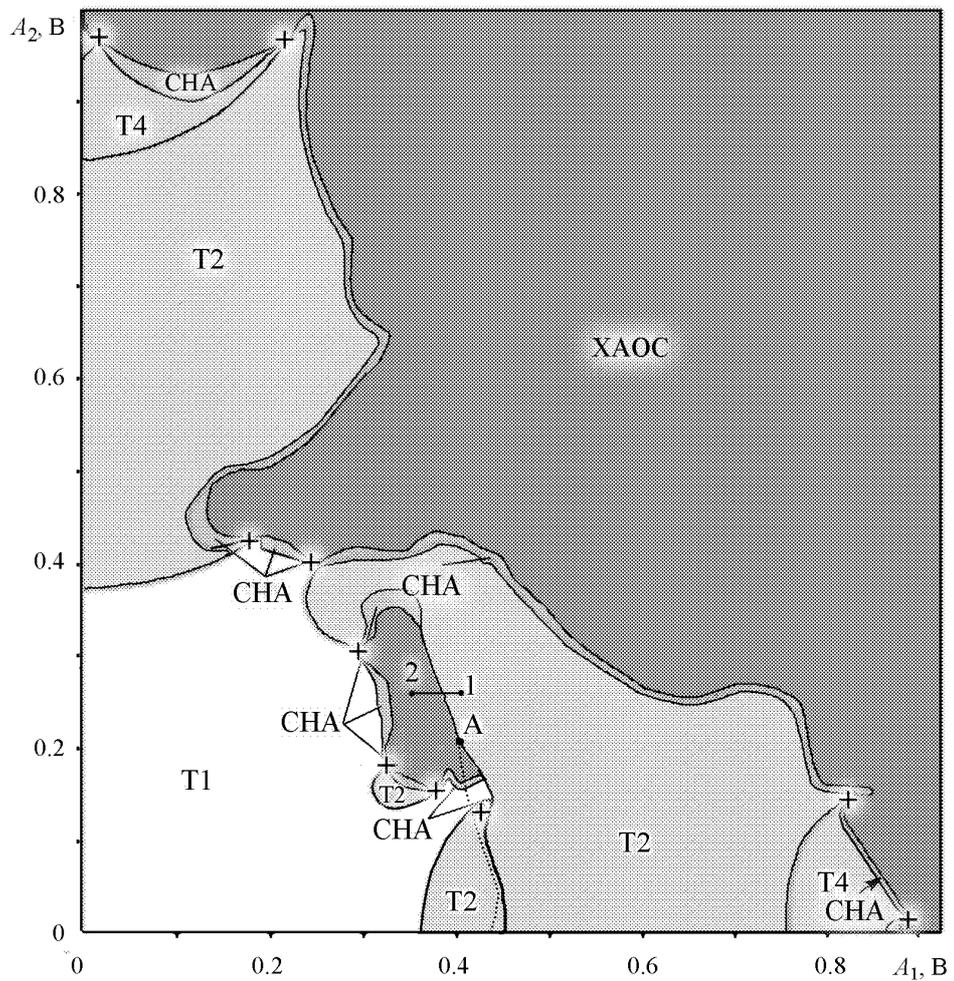


Рис. 6. Карты динамических режимов исследуемой системы на плоскости параметров  $(A_1, A_2)$  для второго варианта пары значений частот  $f_1$  и  $f_2$  (см. рис. 2)

не изменяется. Отличие состоит в появлении точки сборки  $A$ , из которой начинаются линии складки (жирные сплошная и пунктирная). Выше точки  $A$  по параметру  $A_2$  наблюдается перехода к хаосу через режим перемежаемости тор-хаос [41]. Рассмотрим эту область пространства параметров более подробно. В области сборки в фазовом пространстве системы сосуществуют два устойчивых и один неустойчивый тор. С движением вверх по плоскости параметров один из устойчивых торов сталкивается с неустойчивым. Торы исчезают, при этом жирные линии в точке сборки объединяются в одну. Выше точки  $A$  эта линия, являющаяся продолжением пунктирной, образует границу между хаосом и удвоенным тором. Рассмотрим изменения характера колебаний при движении из точки 1 влево вдоль линии 1-2.

На рис. 7, *a* представлены аттрактор в сечении Пуанкаре и временные зависимости силы тока диода для удвоенного тора (значения параметров выбраны для точ-

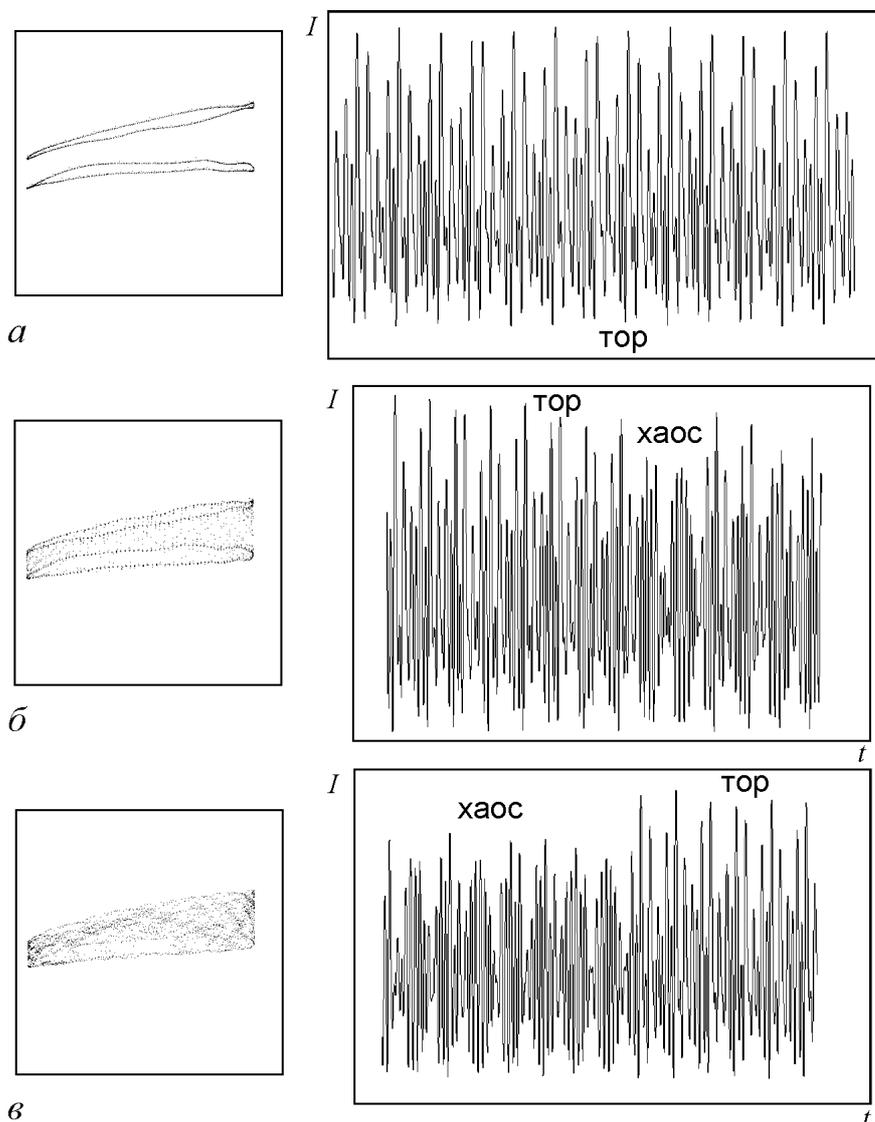


Рис. 7. Аттракторы системы в стробоскопическом сечении и временные реализации силы тока диода, соответствующие: *a* – удвоенному тору, *б* – режиму перемежаемости, *в* – хаосу

ки 1 на рис. 6). На границе области его существования в сечении фазового портрета появляются точки, не принадлежащие удвоенному тору (рис. 7, б). При этом в реализации силы тока наблюдаются длинные, почти периодические, участки колебаний, которые чередуются с короткими участками хаотических колебаний. С движением от границы в область хаоса длительность хаотических участков увеличивается, а ламинарных – уменьшается. С дальнейшим изменением параметра (точка 2 на рис. 6) формируется хаотический аттрактор, сечение которого представлено на рис. 7, в.

На рис. 8 приведен фрагмент структуры пространства параметров  $(A_1, A_2)$  для *третьего варианта* значений частот воздействия. Качественно динамика системы и структура пространства параметров сохраняются. Отличия связаны с изменением бифуркационных значений параметров (причиной которых является изменение абсолютных значений частот воздействия), а также с появлением дополнительной сборки, что обусловлено седло-узловой бифуркацией, которая имеет место при увеличении параметра  $A_2$ . Сценарий перехода к хаосу через режим перемежаемости тор–хаос в этом случае наблюдается на плоскости параметров левее точки сборки В и аналогичен предыдущему случаю.

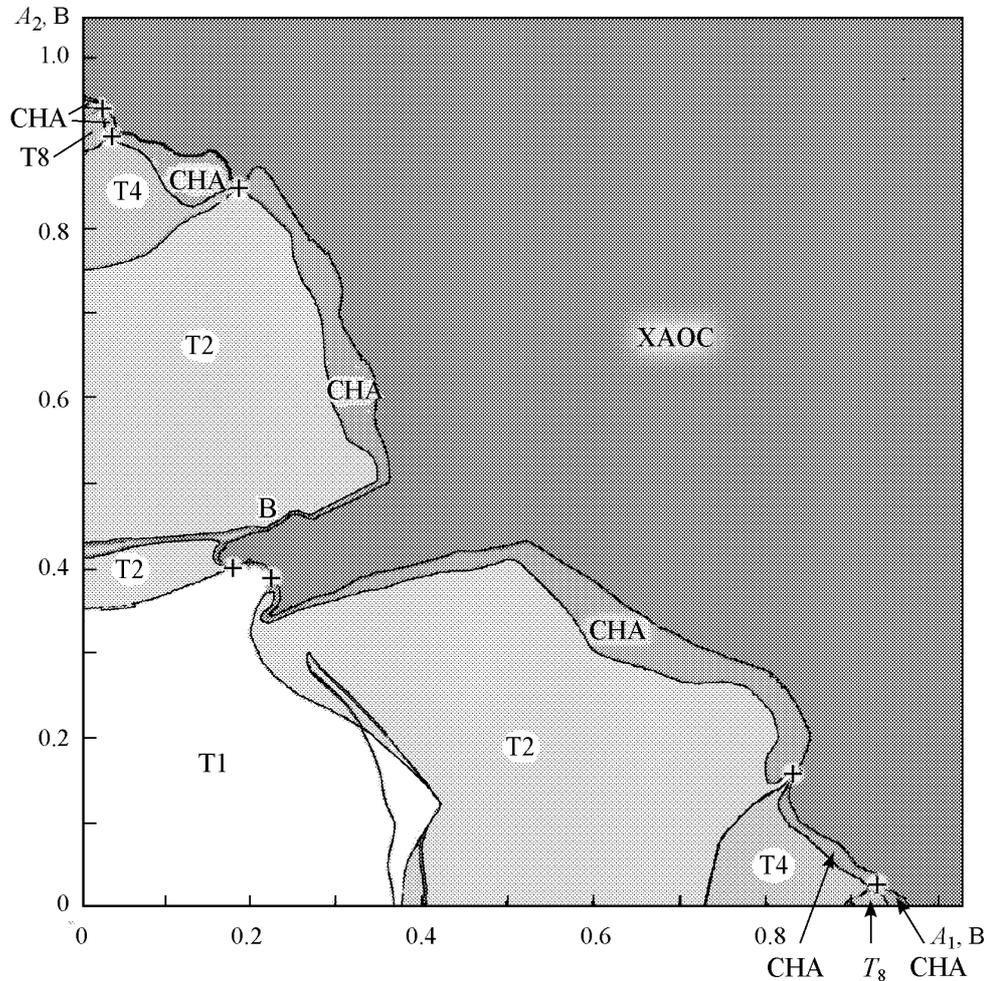


Рис. 8. Карты динамических режимов исследуемой системы на плоскости параметров  $(A_1, A_2)$  для третьего варианта пары значений частот  $f_1$  и  $f_2$  (см. рис. 2)

## 2. Одномерные дискретные модели

Для построения в пространстве управляющих параметров областей существования регулярных режимов, СНА и хаоса в системах с дискретным временем совместно используется метод фазовой чувствительности и вычисление старшего показателя Ляпунова [28,29,31]. Однако в случае систем дифференциальных уравнений этот метод требует большого объема вычислений. Возникает необходимость в поиске более оптимальной методики построения областей существования различных режимов колебаний. Один из возможных методов может быть основан на анализе автокорреляционной функции процессов.

В [42,43] представлены результаты исследования корреляционных свойств различных процессов с дискретным, сингулярно-непрерывным и сплошным спектрами. Для дискретных процессов автокорреляционная функция представляется в виде  $C(k) = (\langle x_n x_{n+k} \rangle - \langle x_n \rangle^2) / (\langle x_n^2 \rangle - \langle x_n \rangle^2)$ , где  $x_n$  – динамическая переменная,  $n$  – дискретное время,  $k$  – задержка. Известно, что интенсивность автокорреляционной функции  $C(n) = 1/T \sum_k = 1^T |C(k)|^2$  спадает пропорционально  $n^{-D_2}$ , где  $D_2$  – корреляционная размерность спектральной меры [42–47]. Для колебаний с дискретным спектром имеем  $D_2 = 0$ , и автокорреляционная функция не убывает. Для колебаний с абсолютно непрерывным спектром имеем  $D_2 = 1$  [44–47], а интенсивность автокорреляционной функции спадает пропорционально  $t^{-1}$ . В [42,43] было показано, что в двойном логарифмическом масштабе коэффициент наклона зависимости  $C(n)$  для колебаний с сингулярно-непрерывным спектром имеет промежуточное значение между коэффициентами для колебаний с дискретным и сплошным спектрами. Таким образом, определяя в двойном логарифмическом масштабе коэффициент наклона  $C(n)$ , можно различать процессы с дискретным, сплошным и сингулярно-непрерывным спектрами.

Следует отметить, что аналитические оценки коэффициента наклона  $C(n)$  для колебаний с сингулярно-непрерывным спектром отсутствуют. Однако, если провести калибровочные оценки на основе известных результатов (например, как это сделано в [27–31]), то можно получить диапазоны значений скорости спадания  $C(n)$ , соответствующие различным режимам колебаний.

Проверка работоспособности метода осуществлялась на примере системы (1) при значении  $\omega = (\sqrt{5} - 1)/2$  («золотое среднее»). Для оценки  $C(n)$  использовался массив данных в 20 000 точек. На основе данных, представленных в [27–31], выбирались уже известные значения параметров  $\lambda$  и  $\epsilon$ , соответствующие движениям на гладком торе, странном нехаотическом и хаотическом аттракторах, определялись диапазоны значений угла наклона  $C(n)$ . Так, для гладких торов диапазон значений скорости спадания  $C(n)$  составила от 0 до 0.006, СНА – от 0.006 до 0.0085 и для хаоса – свыше 0.0085. Следует отметить, что метод позволяет выделить области колебаний, автокорреляционная функция которых спадает соответствующим образом.

На рис. 9, а на плоскости управляющих параметров  $(\lambda, \epsilon)$  приведены области существования различных аттракторов: регулярных, СНА и хаотического, построенные на основе вычислений коэффициента наклона  $C(n)$  для  $\omega = (\sqrt{5} - 1)/2$ .

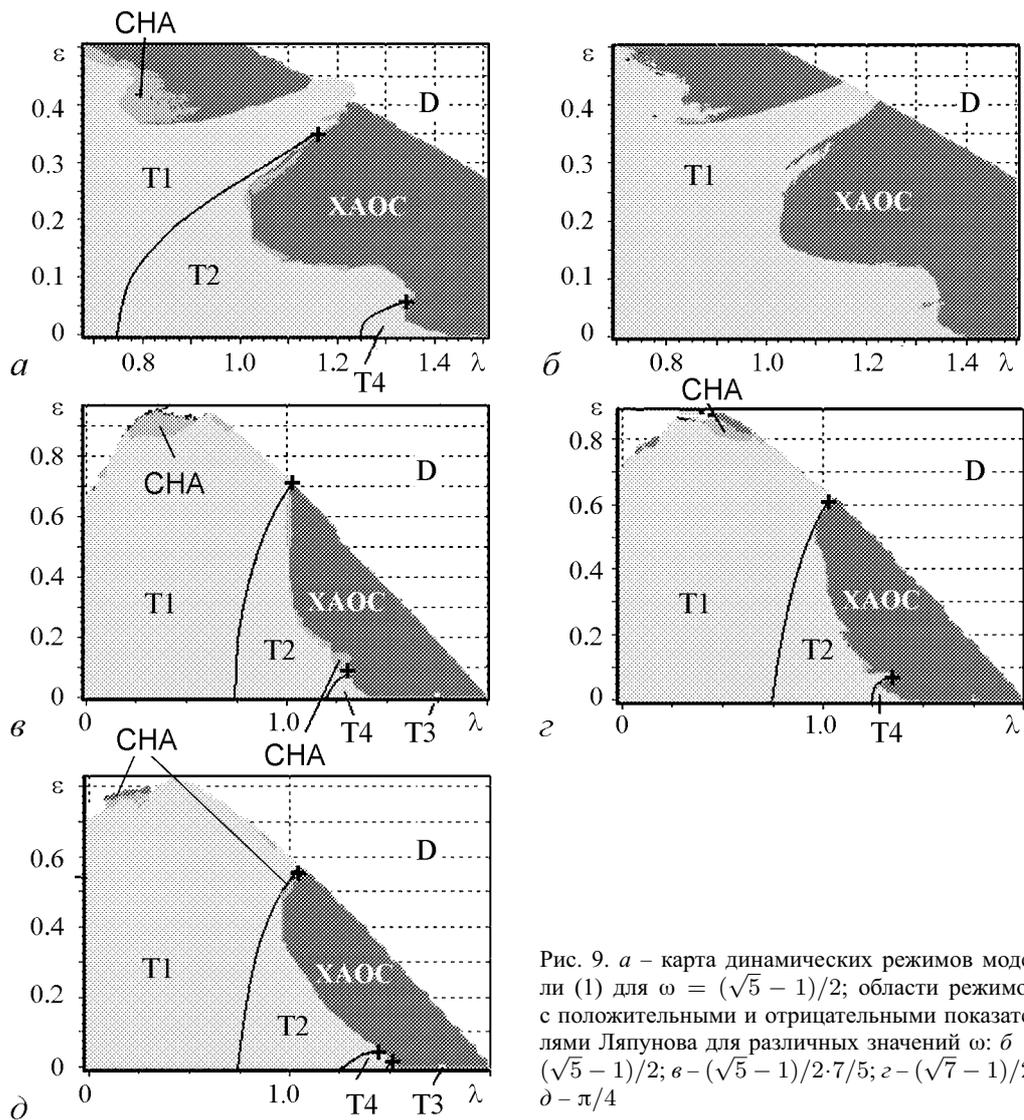


Рис. 9. *a* – карта динамических режимов модели (1) для  $\omega = (\sqrt{5} - 1)/2$ ; области режимов с положительными и отрицательными показателями Ляпунова для различных значений  $\omega$ : *б* –  $(\sqrt{5} - 1)/2$ ; *в* –  $(\sqrt{5} - 1)/2 \cdot 7/5$ ; *г* –  $(\sqrt{7} - 1)/2$ ; *д* –  $\pi/4$

Светло-серые области T1, T2, T4 соответствуют движению на гладких торах. На разделяющих эти области сплошных линиях имеют место бифуркации удвоения тора. Белая область D соответствует «убеганию траекторий на бесконечность». Более темным цветом отмечены области существования СНА, а самым темным – хаотического аттрактора. Результаты диагностики СНА хорошо согласуются с результатами, полученными на основе метода фазовой чувствительности в [27–31]. Для сравнения на рис.9,б представлена карта показателей Ляпунова системы (1). Светлая область соответствует режимам с отрицательным показателем Ляпунова, более темная – хаосу. Сравнение указывает на хорошее соответствие рис. 9, *a* и рис. 9, *б*. В целом предложенный метод позволяет достаточно уверенно распознавать области существования гладких торов, СНА и хаоса.

На рис. 9, *в-д* представлены карты динамических режимов модели (1), построенные для других иррациональных значений  $\omega$  (система обозначений аналогична

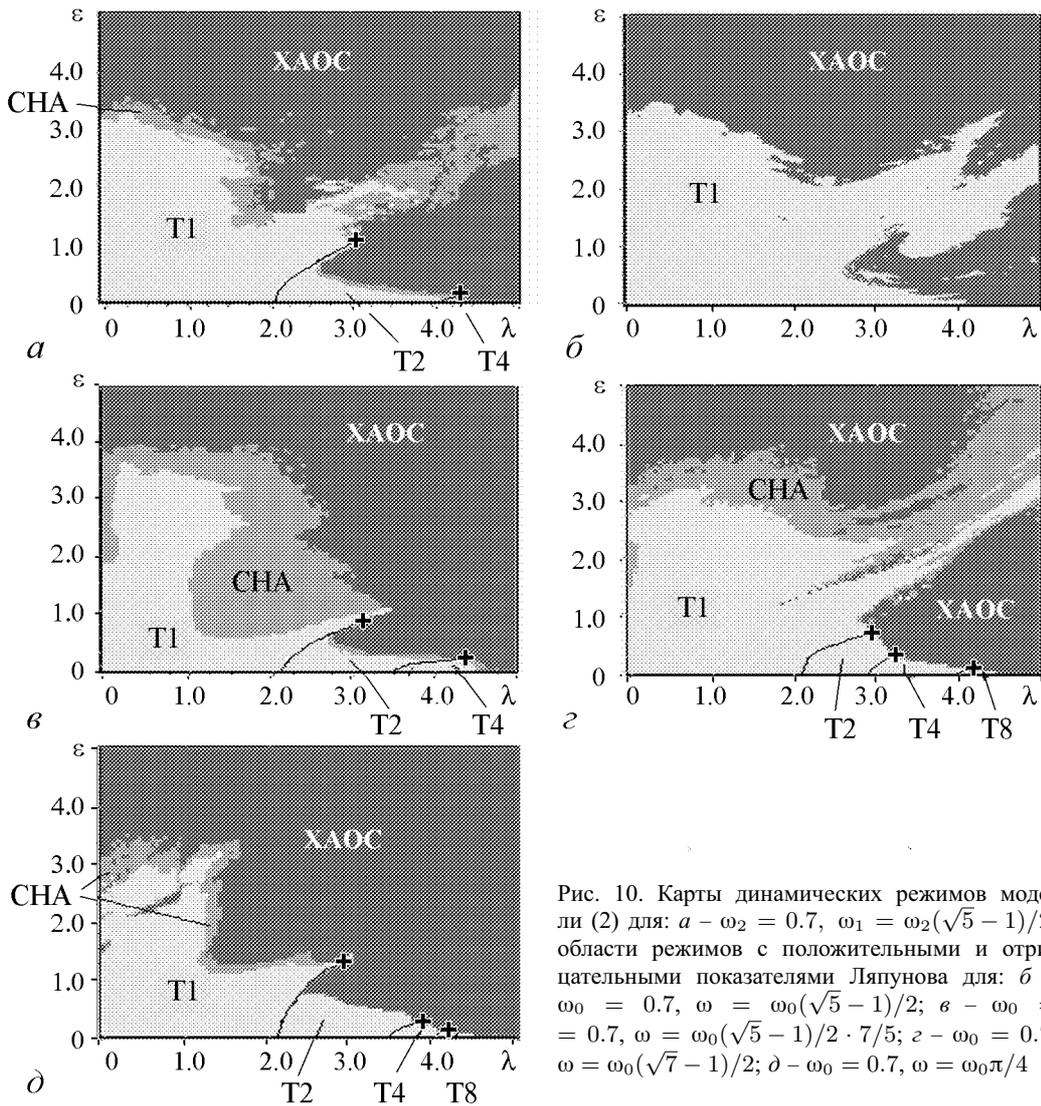


Рис. 10. Карты динамических режимов модели (2) для:  $a - \omega_2 = 0.7, \omega_1 = \omega_2(\sqrt{5} - 1)/2$ ; области режимов с положительными и отрицательными показателями Ляпунова для:  $b - \omega_0 = 0.7, \omega = \omega_0(\sqrt{5} - 1)/2$ ;  $c - \omega_0 = 0.7, \omega = \omega_0(\sqrt{5} - 1)/2 \cdot 7/5$ ;  $d - \omega_0 = 0.7, \omega = \omega_0(\sqrt{7} - 1)/2$

рис. 9,  $a$ ). Как показывает сравнение, выбор других иррациональных значений параметра  $\omega$  качественно не изменяет форму областей существования различных режимов на плоскости управляющих параметров: также имеют место линии удвоения тора, заканчивающиеся в терминальных точках, немного изменяется форма областей существования CHA и CA.

На рис. 10,  $a$  представлены области существования различных режимов поведения модели (2) при  $\omega = (\sqrt{5} - 1)/2$ . Для сравнения на рис. 10,  $b$  представлена карта показателей Ляпунова этой системы. Наблюдается качественное сходство с рис. 9,  $a, b$ . Основное отличие связано с отсутствием области параметров, при которых система (2) «убегает на бесконечность». Карты различных режимов поведения для других иррациональных значений параметра  $\omega$  представлены на рис. 10,  $c-d$ . Как и в случае системы (1), изменение отношения частот  $\omega$  качественно не изменяет структуру плоскости управляющих параметров.

Сравнение результатов исследования систем (1) и (2) показывает качественное сходство областей существования различных режимов колебаний на плоскости управляющих параметров. Это можно объяснить тем, что обе модели (1) и (2) относятся к классу одномерных отображений с добавленным в них квазипериодическим воздействием.

### 3. Потокковая модель

На рис. 11 на плоскости параметров  $(A_1, A_2)$  представлены области существования гладких торов, странного нехаотического и хаотического аттракторов системы (3), построенные на основе вычислений коэффициента наклона интенсивности автокорреляционной функции  $C(n)$ . Для вычисления  $C(n)$  использовалось 20 000 значений динамической переменной, полученных в стробоскопическом сечении с частотой стробирования  $f_1$ . Значения частот гармонических составляющих воздействия  $f_1$  и  $f_2$ , а также и параметра диссипации  $r$  выбирались такими, что в условиях гармонического воздействия с увеличением параметра  $A_2$  ( $A_1 = 0$ ) наблюдалась последовательность бифуркаций удвоения периода колебаний, завершающаяся переходом к хаосу. В то же время при увеличении параметра  $A_1$  ( $A_2 = 0$ ) помимо бифуркаций удвоения периода имеет место седло-узловая бифуркация, которая предшествует переходу к циклу периода  $4T$ , где  $T$  – период воздействия. Данный выбор управляю-

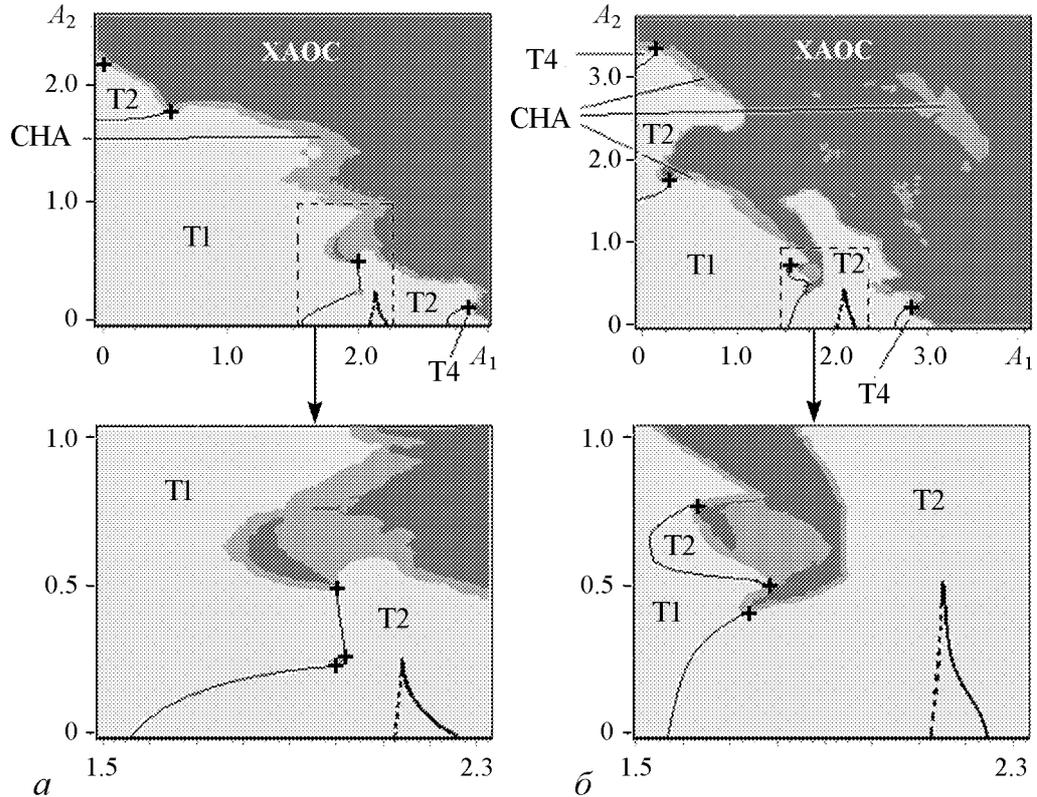


Рис. 11. Карты динамических режимов модели (3) для различных значений соотношения частот  $f_2/f_1$ :  $a - (5 - 1)/2$ ,  $b - (\sqrt{5} - 1)/2 \cdot 7/5$

щих параметров модели (3) качественно соответствует *второму варианту* значений частот гармонических составляющих воздействия экспериментальной системы.

Области, выделенные тонким пунктиром, на рисунках ниже представлены в увеличенном виде. Жирными, сплошной и пунктирной, линиями обозначены сборки, а в целом система обозначений аналогична приведенной на рис. 9. Переход к хаосу в данной системе происходит через рождение СНА. Построенные карты различных режимов колебаний имеют качественное соответствие (ср. рис. 11, *а* и рис. 11, *б*). Некоторое отличие имеет место в конфигурации границ областей существования различных типов колебаний.

### Выводы

Итак, общим для всех исследуемых систем является один и тот же набор возможных типов поведения: гладкие торы, СНА и хаос, а также сценарий перехода к хаосу через рождение СНА. Сравнение карт динамических режимов указывает на их качественное сходство для всех рассмотренных систем. При этом следует выделить наибольшее сходство между картами динамических режимов экспериментальной системы и уравнения Тоды при квазипериодическом воздействии, а также моделей с дискретным временем. Данное сходство объясняется тем, что амплитуда  $A_2$  гармонической составляющей воздействия частоты  $f_2$  в экспериментальной системе и уравнении Тоды играет ту же роль, что и амплитуда  $A_1$  гармоники частоты  $f_1$ . Напротив, в моделях с дискретным временем характер влияния амплитуды гармонического воздействия  $\varepsilon$  качественно отличается от того, какое влияние на динамику моделей (1) и (2) оказывает параметр  $\lambda$ . Можно утверждать, что одномерные отображения с гармоническим воздействием воспроизводят лишь часть плоскости параметров экспериментальной системы и потоковой модели.

Метод, используемый для построения карт динамических режимов и основанный на оценке коэффициента наклона интенсивности автокорреляционной функции  $C(n)$ , является эффективным инструментом для построения карт динамических режимов. Главное его достоинство заключается в более низких затратах машинного времени по сравнению с методом фазовой чувствительности. Он наиболее эффективен при построении карт режимов моделей в виде дифференциальных уравнений. К его недостаткам следует отнести более низкую по сравнению с методом фазовой чувствительности точность определения границ областей существования различных режимов колебаний и чувствительность к шумам.

Общим для всех рассмотренных систем является отсутствие фазовой мультистабильности [48,49], что связано с инвариантностью динамики системы по отношению к начальным фазам или разности начальных фаз воздействия. Как показывают результаты [50,51], задание рационального соотношения частот приводит к появлению фазовой мультистабильности и формированию сложной многолистной структуры пространства управляющих параметров.

*Работа выполнена при финансовой поддержке Российского Фонда Фундаментальных Исследований, грант № 09–02–00426.*

## Библиографический список

1. *Grebodgi C., Ott E., Pelican S., Yorke J.* Strange attractor that are not chaotic // *Physica*. 1984. Vol. D13. P. 261.
2. *Romeiras F.J., and Ott E.* Strange nonchaotic attractor of the damped pendulum with quasiperiodic forcing // *Phys. Rev.* 1987. Vol. A35. P. 4404.
3. *Ding M., Grebogi C., and Ott E.* Evolution of attractors in quasiperiodically forced system // *Phys. Rev.* 1989. Vol. A39. P. 2593.
4. *Ditto W.L. et al.* Experimental observation of strange nonchaotic attractors // *Phys. Rev. Lett.* 1990. Vol. 65. P. 533.
5. *Ding M., Grebogi C., Ott E.* Dimensions of strange nonchaotic attractors // *Phys. Lett. A*. 1989. Vol. 137. P. 167.
6. *Zhou T., Moss F. and Bulsara A.* Observation of strange nonchaotic attractors in a multistable potential // *Phys. Rev.* 1992. Vol. A45. P. 5394.
7. *Feudel U., Kurths J. and Pikovsky A.* Strange nonchaotic attractors in quasiperiodically forced circle map // *Physica*. 1995. Vol. D88. P. 176.
8. *Pikovsky A. and Feudel U.* Characterizing strange nonchaotic attractors // *CHAOS*. 1995. Vol. 5. P. 253.
9. *Pikovsky A., Feudel U.* Correlations and spectra of strange nonchaotic attractors // *J. Phys. A: Math., Gen.* 1994. Vol. 27. P. 5209.
10. *Ding M., Scott-Kelso J.* Phase-resetting map and the dynamics of quasiperiodically forced biological oscillators // *Int. J. Bif. Chaos*. 1994. Vol. 4. P. 553.
11. *Feudel U., Pikovsky A.S., Zaks M.A.* Correlation properties of quasiperiodically forced two-level system // *Phys. Rev. E*. 1995. Vol. 51. P. 1762.
12. *Kuznetsov S., Pikovsky A., Feudel U.* Birth of a strange nonchaotic attractor: Renormalization group analysis // *Phys. Rev. E*. 1995. Vol. 51. P. R1629.
13. *Анищенко В.С., Вадивасова Т.Е., Сосоновцева О.Н.* Механизмы рождения странного нехаотического аттрактора в отображении кольца с квазипериодическим воздействием. // *Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика*. 1995. Т. 3, № 3. С. 34.
14. *Y.-C. Lai.* Transition from strange nonchaotic attractor to strange chaotic attractor // *Phys. Rev.* 1996. Vol. E53. P. 57.
15. *Nishikawa T. and Kaneko K.* Fractalization of torus revisited as a strange nonchaotic attractor // *Phys. Rev.* 1996. Vol. E54. P. 6114.
16. *Anishchenko V.S., Vadivasova T.E., Sosnovtseva O.N.* Mechanisms of ergodic torus destruction and appearance of strange nonchaotic attractor // *Phys. Rev.* 1996. Vol. E53. P. 4451.
17. *Feudel U., Pikovsky A., Politi A.* Renormalization of correlations and spectra of a strange nonchaotic attractor // *J. Phys. A*. 1996. Vol. 29. P. 5297.
18. *Sosnovtseva O., Feudel U., Kurths J., Pikovsky A.* Multiband strange nonchaotic attractors in quasiperiodically forced systems // *Phys. Lett. A*. 1996. Vol. 218. P. 255.
19. *Keller G.* A note on strange nonchaotic attractors // *Fundamenta Mathematicae*. 1996. Vol. 151. P. 139.
20. *Prasad A., Mehra V., Ramaswamy R.* Intermittency route to strange nonchaotic attractors // *Phys. Rev. Lett.* 1997. Vol. 79, № 21. P. 4127.

21. *Witt A., Feudel U., Pikovsky A.* Birth of strange nonchaotic attractors due to interior crisis // *Physica*. 1997. Vol. 109D. P. 180.
22. *Kuznetsov S., Feudel U., Pikovsky A.* Renormalization group for scaling at the torus-doubling terminal point // *Phys. Rev. E*. 1998. Vol. 57. P. 1585.
23. *Prasad A., Mehra V., Ramaswamy R.* Strange nonchaotic attractors in the quasiperiodically forced logistic map // *Phys. Rev. E*. 1998. Vol. 57. P. 1576.
24. *Negi S.S., Prasad A., Ramaswamy R.* Bifurcations and transitions in the quasiperiodically driven logistic map // *Physica*. 2000. Vol. 145D. P. 1.
25. *Osinga H.M., Feudel U.* Boundary crisis in quasiperiodically forced systems // *Physica*. 2000. Vol. 141D. P. 54.
26. *Hunt B.R., Ott E.* Fractal properties of robust strange nonchaotic attractors // *Phys. Rev. Lett.* 2001. Vol. 87, № 25.
27. *Kuznetsov S.P., Neumann E., Pikovsky A., Sataev I.R.* Critical point of tori collision in quasiperiodically forced systems // *Phys. Rev. E*. 2000. Vol. 62. P. 1995.
28. *Безручко Б.П., Кузнецов С.П., Пиковский А.С., Фойдель У., Селезнев Е.П.* О динамике нелинейных систем под внешним квазипериодическим воздействием вблизи точки окончания линии бифуркации удвоения тора // *Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика*. 1997. Т. 5, № 6. С. 3.
29. *Bezruchko B.P., Kuznetsov S.P., Seleznev E.P.* Experimental observation of dynamics near the torus-doubling terminal critical point // *Phys. Rev. E*. 2000. Vol. 62, № 6. P. 7828.
30. *Kuznetsov S.P.* Torus fractalization and intermittency // *Phys. Rev. E*. 2002. Vol. 65. 066209.
31. *Кузнецов С.П., Пиковский А.С., Фойдель У.* Странный нехаотический аттрактор // «Нелинейные волны – 2004». М.: Наука, 2004.
32. *Kuznetsov S., Feudel U., Pikovsky A.* Strange nonchaotic attractors // *World scientific series on Nonlinear Science. Series A*. Vol. 56. 2006.
33. *Bezruchko B.P., Prokhorov M.D., Seleznev Ye.P.* Multiparameter model of a dissipative nonlinear oscillator in the form of one-dimensional map // *Chaos, Solitons, Fractals*. 1995. Vol. 5, № 11. P. 2095.
34. *Linsay P.S.* Period doubling and chaotic behaviour in a driven anharmonic oscillator // *Phys. Rev. Lett.* 1981. Vol. 47, №19. P. 1349.
35. *Testa J., Perez J., Jeffries C.* Evidence for universal behavior of a driven nonlinear oscillator // *Phys. Rev. Lett.* 1982. Vol. 48, № 11. P. 714.
36. *Buskirk R., Jeffries C.* Observation of chaotic dynamics of coupled nonlinear oscillators // *Phys. Rev. A*. 1985. Vol. 31, № 5. P. 3332.
37. *Bocko M.F., Douglass D.H., Frutchy H.H.* Bounded regions of chaotic behavior in the control parameter space of a driven nonlinear resonator // *Phys. Lett. A*. 1984. Vol. 104, № 8. P. 388.
38. *Klinker T., Meyer-Ilse W., Lauterborn W.* Period doubling and chaotic behavior in a driven Toda oscillator // *Phys. Lett. A*. 1984. Vol. 101, № 8. P. 371.
39. *Астахов В.В., Безручко Б.П., Селезнев Е.П.* Исследование динамики нелинейного колебательного контура при гармоническом воздействии // *Радиотехника и электроника*. 1987. Т. 32, № 12. С. 2558.

40. *Baxter J.H., Bocko M.F., Douglass D.H.* Behavior of a nonlinear resonator driven at subharmonic frequencies // *Phys. Rev. A.* 1990. Vol. 41, № 2. P. 619.
41. *Безручко Б.П.* Особенности возбуждения субгармонических и хаотических колебаний в контуре с диодом // *Радиотехника и электроника.* 1991. Т. 36, № 1. С. 39.
42. *Daido H.* Resonance and intermittent transition from torus to chaos in periodically forced system near intermittency threshold // *Progr. Theor. Phys. Japan.* 1983. Vol. 70, № 3. P. 879.
43. *Picovsky A.S., Zaks M.A., Feuidel U., Kurth J.* Singular continuous spectra in dissipative system // *Phys. Rev. E.* 1995. Vol. 52, № 1. P. 286.
44. *Zaks M.A.* Fractal Fourier spectra of cherry flows// *Physica.* 2001. Vol. D149. P. 237.
45. *Ketzmerick R., Petschel G., Geisel T.* Slow decay of temporal correlations in quantum systems with Cantor spectra // *Phys. Rev. Lett.* 1992. Vol. 69. P. 695.
46. *Holschneider M.* Fractal wavelet dimensions and localization // *Communications in Mathematical Physics.* 1994. Vol. 160, № 3. P. 457.
47. *Makarov K.A.* Asymptotic expansions for Fourier transform of singular self-affine measures // *J. Math. An. and App.* 1994. Vol. 186. P. 259.
48. *Астахов В.В., Безручко Б.П., Ерастова Е.Н. Селезнев Е.П.* Виды колебаний и их эволюция в диссипативно связанных фейгенбаумовских системах// *ЖТФ.* 1990. Т. 60, вып. 10. С. 19.
49. *Астахов В.В., Безручко Б.П., Пудовочкин О.Б., Селезнев Е.П.* Фазовая мультистабильность и установление колебаний в нелинейных системах с удвоением периода // *Радиотехника и электроника.* 1993. Т. 38, №. 2. С. 291.
50. *Zakharevich A.M., Seleznev Ye.P.* Sets of resonant cycles and their evolution in the nonlinear oscillator's model under two-frequency action // *Abstracts of the Second Interdisciplinary School on Nonlinear Dynamics for System and Signal Analysis (EUROATTRACTOR 2001).* Warsaw, Poland, 2001. P. 71.
51. *Захаревич А.М., Селезнев Е.П.* Структура пространства управляющих параметров в модели нелинейного осциллятора при двухчастотном воздействии // *Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика.* 2001. Т. 9, № 2. С. 39.

*Поступила в редакцию 12.05.2008  
После доработки 7.07.2009*

## **CONTROL PARAMETER SPACE OF A NONLINEAR OSCILLATOR UNDER QUASIPERIODIC DRIVING**

*E.P. Seleznev, A.M. Zakharevich*

Dynamics and space of control parameters for a nonlinear oscillator under quasi-periodic driving are investigated experimentally by using a nonlinear circuit with p-n junction diode and numerically by using maps and differential equations. The dynamics of the systems under quasiperiodic driving is invariant due to initial driving phases, as a result the plane of the driving amplitudes is symmetrical. The basic element of the control

parameter space is the set of torus doubling terminal points, which are the starting and end points of the torus doubling lines, transition to strange non-chaotic and chaotic attractors.

*Keywords:* Strange nonchaotic attractor, torus doubling, torus doubling terminal point, singular continuous spectrum, rational approximation method, phase sensitivity method, Lyapunov exponent.



*Селезнев Евгений Петрович* – родился в 1960 году в Саратове, окончил Саратовский государственный университет (1982). После окончания СГУ работает ведущим научным сотрудником Саратовского филиала Института радиотехники и электроники РАН. Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук (1990) и доктора физико-математических наук (2006). Область научных интересов – радиофизика, экспериментальное исследование нелинейных явлений. Имеет более 120 научных публикаций.

410019 Саратов, ул. Зеленая, 38  
Саратовский филиал института радиотехники и электроники  
им. В.А. Котельникова РАН  
E-mail: evgenii\_seleznev@mail.ru



*Захаревич Андрей Михайлович* – родился в Саратове (1982). Окончил Саратовский государственный университет факультет нелинейных процессов по специальности физик. Кандидат физико-математических наук (2007, СГУ). Зав. лабораторией диагностики наноматериалов и структур Образовательного института наноструктур и биосистем СГУ. Научные интересы: исследование свойств материалов и структур при взаимодействии с физическими полями и биологическими объектами; исследование динамики неавтономных нелинейных осцилляторов при двухчастотном воздействии. Автор 7 научных публикаций по указанным направлениям.

410012 Саратов, ул. Астраханская, 83  
Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского  
E-mail: ab-15@mail.ru



## ЭФФЕКТ ПОДАВЛЕНИЯ КОЛЕБАНИЙ В АНСАМБЛЯХ ВЗАИМОСВЯЗАННЫХ ФАЗОВЫХ СИСТЕМ

*Д.В. Касаткин*

В работе обсуждаются вопросы, связанные с явлением подавления колебаний в ансамблях взаимосвязанных систем фазовой синхронизации. Изучение данного явления проведено на примерах ансамбля трех каскадно связанных генераторов с фильтрами первого порядка в цепях управления и цепочки, состоящей из большого числа генераторов с безинерционными цепями управления. Продемонстрированы возможности подавления колебаний в части элементов рассматриваемых ансамблей за счет изменения параметра инерционности локальной цепи управления одной из систем фазовой синхронизации, а также благодаря наличию дополнительных связей. В пространстве параметров выделены области существования исследуемого эффекта.

*Ключевые слова:* Подавление колебаний, система фазовой автоподстройки, каскадное соединение.

### Введение

Исследование коллективного поведения взаимосвязанных автоколебательных систем является одной из актуальных проблем современной нелинейной динамики. Устойчивый интерес к данной тематике объясняется в том числе и тем, что при объединении в ансамбль такие системы приобретают новые свойства, не характерные для индивидуальной динамики связываемых объектов. Например, как показано в [1], автогенераторы с локальными цепями управления по фазе, обладая простой (нехаотической) индивидуальной динамикой, при объединении способны генерировать колебания различной сложности вплоть до хаотических. Особенности коллективного поведения определяются динамическими свойствами объединяемых элементов, а также характеристиками организуемых связей, которые, в свою очередь, являются эффективным средством управления свойствами таким систем. При исследовании особенностей коллективной динамики в моделях взаимосвязанных автоколебательных систем основное внимание исследователей, прежде всего, уделяется изучению фундаментальных физических явлений – синхронизации, подавлению колебаний, хаотизации и регуляризации колебаний, структурообразованию.

Настоящая работа также лежит в рамках этой тематики и посвящена изучению особенностей коллективного поведения в ансамблях взаимосвязанных автогенераторов с локальными цепями управления фазой (систем фазовой автоподстройки частоты – ФАП). Использование коллективных систем ФАП позволяет улучшить их динамические характеристики, а также решить задачи, связанные с оценкой параметров

сложных сигналов, синтезом частот, генерацией хаотически модулированных колебаний [2–4] и др. Исследования коллективной динамики таких ансамблей, проводимые в работах [1, 4–6], главным образом были направлены на изучение асинхронных режимов, сценариев возбуждения и хаотизации этих режимов, а также на определение областей их существования в пространстве параметров. Основное внимание в данной работе уделено изучению процессов подавления асинхронных колебаний.

## 1. Математическая модель и динамические режимы систем ФАП

Динамические процессы в моделях каскадно связанных систем ФАП, в цепях управления которых стоят интегрирующие фильтры первого порядка,<sup>1</sup> описываются следующими уравнениями [1, 2]:

$$\varepsilon_i \frac{d^2 \varphi_i}{d\tau^2} + \frac{d\varphi_i}{d\tau} + \sin(\varphi_i - \varphi_{i-1}) + \kappa_i \sin(\varphi_{i+1} - \varphi_i) = \gamma_i, \quad (1)$$

$$\varphi_0(t) = \varphi_{n+1}(t) = 0.$$

Здесь  $\varphi_i$  и  $\gamma_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) – текущие фазовые и начальные частотные расстройки  $i$ -го генератора относительно опорного сигнала;  $\varepsilon_i = \Omega T_i$ ;  $\Omega$  – максимальная расстройка по частоте, которую могут скомпенсировать цепи управления генераторов;  $T_i$  – постоянная времени фильтра;  $\tau = \Omega t$  – безразмерное время. В рассматриваемых ансамблях введены дополнительные связи  $\kappa_i$ , организованные путем подачи сигнала управления  $(i + 1)$ -м генератором в цепь управления  $i$ -го генератора.

Индивидуальная динамика объединяемых в ансамбль систем ФАП с фильтром первого порядка может быть только регулярной; имеют место следующие режимы [3]: *режим синхронизации генератора опорным сигналом*, при котором частоты управляемого генератора и опорного сигнала равны, а разность фаз принимает некоторое постоянное значение; *режим регулярных биений*, при котором разность фаз управляемого генератора и опорного сигнала неограниченно нарастает, а разность частот не равна нулю. В фазовом пространстве парциальной системы ФАП этим режимам отвечают устойчивое состояние равновесия и устойчивый вращательный предельный цикл (с набегом разности фаз более  $2\pi$ ), соответственно.

При объединении в ансамбль динамика систем ФАП характеризуется появлением нового типа динамического поведения – *режима квазисинхронизации*, при котором имеет место регулярная или хаотическая модуляция частоты управляемого генератора около стабилизированной по опорному сигналу средней частоты. В фазовом пространстве математических моделей этому режиму соответствуют аттракторы колебательного типа – предельные циклы или хаотические аттракторы с набегом разности фаз менее  $2\pi$ .

Коллективная динамика ансамблей каскадно связанных систем ФАП характеризуется режимами глобальной и частичной синхронизации, регулярной и хаотической квазисинхронизации, регулярными и хаотическими режимами биений. Динамика отдельных ФАП, входящих в состав ансамбля, определяется проекциями аттракторов на соответствующие локальные подпространства [1]. Если проекция аттрактора на соответствующее локальное подпространство вырождается в точку, то  $i$ -й генератор находится в режиме синхронизации, если проекция аттрактора ограничена по  $\varphi_i$ , то  $i$ -й генератор функционирует в режиме квазисинхронизации, в противном случае система находится в режиме биений.

<sup>1</sup>Фильтр с коэффициентом передачи  $K_i(p) = (1 + T_i p)^{-1}$ .

## 2. Процессы подавления колебаний в ансамблях ФАП

**2.1. Ансамбль из трех каскадно связанных систем ФАП.** Рассмотрим динамику ансамбля из трех каскадно связанных систем ФАП с фильтрами первого порядка в цепях управления. Для классификации аттракторов математической модели (1) и соответствующих им динамических режимов ФАП будем использовать введенный в [1] индекс вращения (индекс квазисинхронизма)  $[J_1, J_2, J_3]$ . Величина  $J_i=1$ , если по координате  $\varphi_i$  происходит вращение, и  $J_i=0$  в противном случае. Отсутствие вращения по координатам  $\varphi_i$  означает, что  $i$ -е генераторы работают в квазисинхронном режиме, когда остальные генераторы находятся в режиме биений.

Зафиксируем параметры второго и третьего генераторов в точке  $\gamma_2 = 0.5$ ,  $\varepsilon_2 = 7.5$ ,  $\gamma_3 = 0.7$ ,  $\varepsilon_3 = 3$ , а параметры дополнительных связей выберем на уровне  $\kappa_1 = 0.15$ ,  $\kappa_2 = 1.6$ . Рассмотрим, как влияют на динамику ансамбля параметры первого генератора. На рис. 1, а приведена диаграмма, иллюстрирующая распределение областей существования динамических режимов модели (1) на плоскости  $(\varepsilon_1, \gamma_1)$ . Представленная диаграмма получена при использовании методики построения карт динамических режимов, подробно описанной в [7], и проведенного бифуркационного анализа. Далее мы проанализируем возможные динамические режимы каскадной системы и свойства определяющих их аттракторов модели (1), не останавливаясь подробно на результатах бифуркационного анализа.

Из представленной на рис. 1, а диаграммы видно, что ансамбль из трех ФАП с фильтрами первого порядка обладает большим разнообразием динамических режимов как регулярных, так и хаотических. В интервале значений начальной частотной расстройки  $\gamma_1 \in (-0.95, 0.9)$  система демонстрирует режим, при котором либо один из генераторов (аттракторы с индексом квазисинхронизма  $[0,1,1]$ ), либо два генератора (аттракторы с индексами  $[0,0,1]$  или  $[0,1,0]$ ) функционируют в квазисинхронном режиме, а остальные находятся в режиме биений. Причем данные режимы могут быть как регулярными, так и хаотическими. Области существования хаотических режимов на рис. 1, а выделены штриховкой. Представленная диаграмма позволяет сделать вывод, что при рассматриваемых значениях параметров системы ФАП демонстрируют преимущественно хаотическую динамику. При больших начальных частотных расстройках вне данного интервала все генераторы ансамбля функционируют в режиме хаотических биений (аттракторы с индексом  $[1,1,1]$ ).

Остановимся более подробно на аттракторах, определяющих квазисинхронную работу одного или нескольких генераторов ансамбля и проследим их эволюцию при изменении параметра  $\varepsilon_1$ . При значениях параметра  $\varepsilon_1 < 10$  каскадная система преимущественно демонстрирует режимы, определяемые регулярными предельными циклами и хаотическими аттракторами с индексом  $[0,1,1]$ . Также можно выделить несколько узких областей, в которых существуют предельные циклы с индексами  $[0,0,1]$  или  $[0,1,0]$ . При этом существует область параметров, где предельные циклы  $[0,1,1]$  и  $[0,0,1]$  реализуются одновременно. Для значений параметров  $\varepsilon_1 > 10$ ,  $\gamma_1 \in (-0.95, 1.0)$  в фазовом пространстве системы существуют только аттракторы с индексом квазисинхронизма  $[0,0,1]$ .

При анализе областей существования динамических режимов управляемых генераторов ансамбля (1) особое внимание уделялось виду и размеру проекций аттракторов модели на соответствующие локальные подпространства. В результате проведенного анализа было установлено, что при увеличении параметра  $\varepsilon_1$  проекция

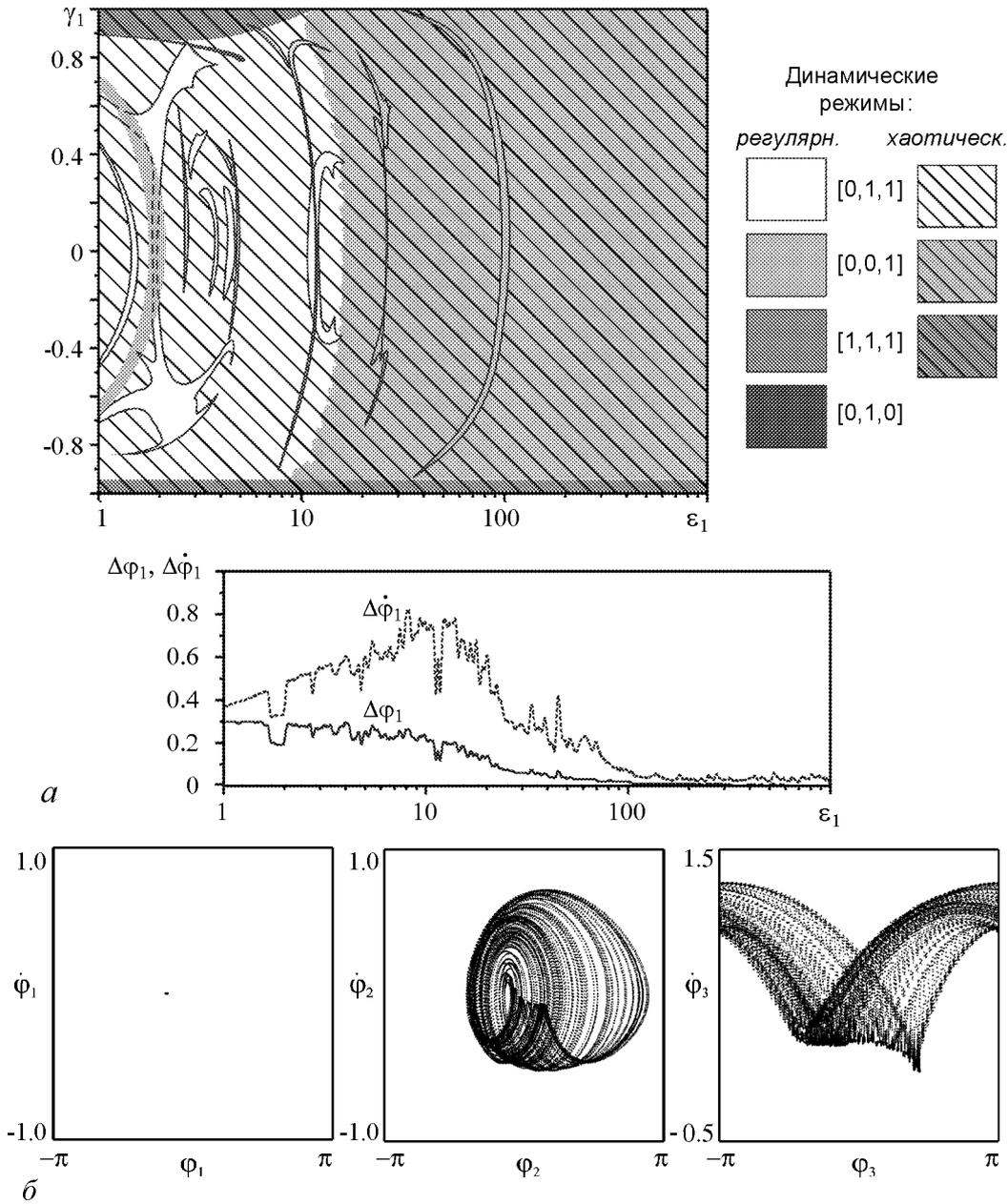


Рис. 1. *a* – карта динамических режимов системы (1) при  $N = 3$ . Значения параметров:  $\gamma_2 = 0.5$ ,  $\varepsilon_2 = 7.5$ ,  $\gamma_3 = 0.7$ ,  $\varepsilon_3 = 3$ ,  $\kappa_1 = 0.15$ ,  $\kappa_2 = 1.6$ . Размеры проекций аттрактора на локальное подпространство  $U_1$  для  $\gamma_1 = 0.4$ :  $\Delta\phi_1$  (пунктирная линия),  $\Delta\dot{\phi}_1$  (сплошная линия); *b* – фазовые проекции аттрактора системы (1) при значениях параметров из области  $D_{OS} = \{\varepsilon_1 > 100, -0.95 < \gamma_1 < 1\}$

хаотического аттрактора с индексом квазисинхронизма  $[0,0,1]$  на подпространство  $U_1 = \{\phi_1(\text{mod } 2\pi), \dot{\phi}_1\}$  сжимается. В качестве примера, иллюстрирующего данный факт, на рис. 1, *a* приведен график зависимости размеров проекций аттрактора, реализующегося в системе (1), на локальное подпространство  $U_1$  при увеличении параметра  $\varepsilon_1$ . Установлено, что в области значений параметров  $D_{OS} = \{\varepsilon_1 > 100, \gamma_1 \in (-0.95, 1.0)\}$  размер проекций аттрактора с индексом квазисинхронизма  $[0,0,1]$  на плоскость фазовых переменных первого генератора удовлетворя-

ет условиям  $\Delta\varphi_1 < 0.1$  и  $\Delta\dot{\varphi}_1 < 0.02$ . Характерный вид проекций аттрактора, существующего при значениях параметров принадлежащих области  $D_{OS}$ , на локальные подпространства отдельных генераторов представлен на рис. 1, б. Заметим, что вид проекций аттрактора на подпространство  $U_1$  более соответствует режиму синхронизации, в то время как проекции на подпространства второго и третьего генераторов отвечают режимам квазисинхронных хаотических колебаний и хаотических биений, соответственно. Таким образом, увеличение параметра  $\varepsilon_1$  может приводить к подавлению колебаний в цепи управления первого генератора в ансамбле трех каскадно связанных систем ФАП.

**2.2. Ансамбль из пятидесяти каскадно связанных систем ФАП.** Теперь рассмотрим коллективную динамику ансамбля, состоящего из пятидесяти каскадно связанных систем ФАП с цепями управления, не содержащими фильтры низких частот. Динамика такого ансамбля описывается системой (1), если положить в ней  $\varepsilon_i = 0$ , ( $i = \overline{1, n}$ ). Рассмотрим простейший случай, когда объединяемые системы идентичны ( $\gamma_1 = \gamma_2 = \dots = \gamma_n = \gamma$ ) и параметры дополнительных связей между генераторами одинаковы ( $\kappa_i = \kappa$ ,  $i = \overline{1, n-1}$ ). Изучение динамики ансамбля будем проводить в области значений начальной частотной расстройки  $\gamma > 1$ , где индивидуальная динамика элементов характеризуется режимом регулярных биений. В работах [6, 8] показано, что для малых ансамблей ФАП, состоящих из  $n = 3, 4, 5$  управляемых генераторов, в окрестности значения частотной расстройки  $\gamma = 1$  и интервале значений параметра дополнительной связи  $\kappa \in [0, 1)$  существует слоистая структура из областей частичных квазисинхронных режимов. Первые  $n^*$  ( $n^* < n$ ) генераторов ансамбля находятся в квазисинхронизме по отношению к опорному сигналу, а последующие  $n - n^*$  генераторов функционируют в режиме биений. При фиксированном значении параметра дополнительной связи увеличение начальной частотной расстройки сопровождается последовательным переходом от одного частичного квазисинхронного режима к другому и, соответственно, уменьшением значения  $n^*$ . После превышения некоторого значения  $\gamma$  все управляемые генераторы переходят в режим биений ( $n^* = 0$ ).

Установлено, что для ансамбля, состоящего из большого числа фазоуправляемых генераторов в окрестности значения  $\gamma = 1$  также существует область частичных квазисинхронных режимов, характеризуемых различными значениями  $n^*$ . Однако в данном случае наблюдается уменьшение амплитуды колебаний фазовой переменной  $\varphi_i$  при уменьшении порядкового номера генератора  $i$  и, начиная с некоторого значения  $n_0$ , отмечается подавление колебаний ( $\Delta\varphi_i \approx 0$ ,  $i = \overline{1, n_0}$ ).

Для иллюстрации такого поведения на рис. 2 приведена диаграмма, характеризующая пространственно-временную динамику ансамбля и временные реализации фазовых переменных отдельных генераторов. Диаграмма свидетельствует о том, что последний генератор в рассматриваемом ансамбле находится в режиме биений – наблюдается постоянный рост разности фаз  $\varphi_{50}(\tau)$  управляемого генератора и опорного сигнала с течением времени. В остальных генераторах ансамбля после некоторого переходного процесса устанавливается стационарный режим, при котором набег разности фаз не превышает  $2\pi$ . Однако при уменьшении порядкового номера генератора  $i$  наблюдается уменьшение амплитуды колебаний разности фаз  $\Delta\varphi_i$  и, начиная с  $i = 47$ , данная величина не превышает 0.04. Данный факт подтверждают временные реализации разностей фаз  $\varphi_1(\tau)$ ,  $\varphi_{48}(\tau)$ ,  $\varphi_{49}(\tau)$ , приведенные на рис. 2. Следовательно, в представленном случае первые  $n_0 = 47$  управляемых генераторов

функционируют в синхронном режиме по отношению к опорному сигналу, причем величина ошибки синхронизации, как видно из рис. 2, изменяется периодически в интервале от 0 до  $2\pi$  с увеличением порядкового номера генератора.

При увеличении параметра  $\gamma$  ( $\kappa$ ) происходит последовательный переход в режим биений других генераторов (отсчитывая от конца цепочки) и одновременно с этим наблюдается уменьшение значения  $n_0$ . При превышении некоторых граничных значений параметров все генераторы ансамбля переходят в режим биений. Для

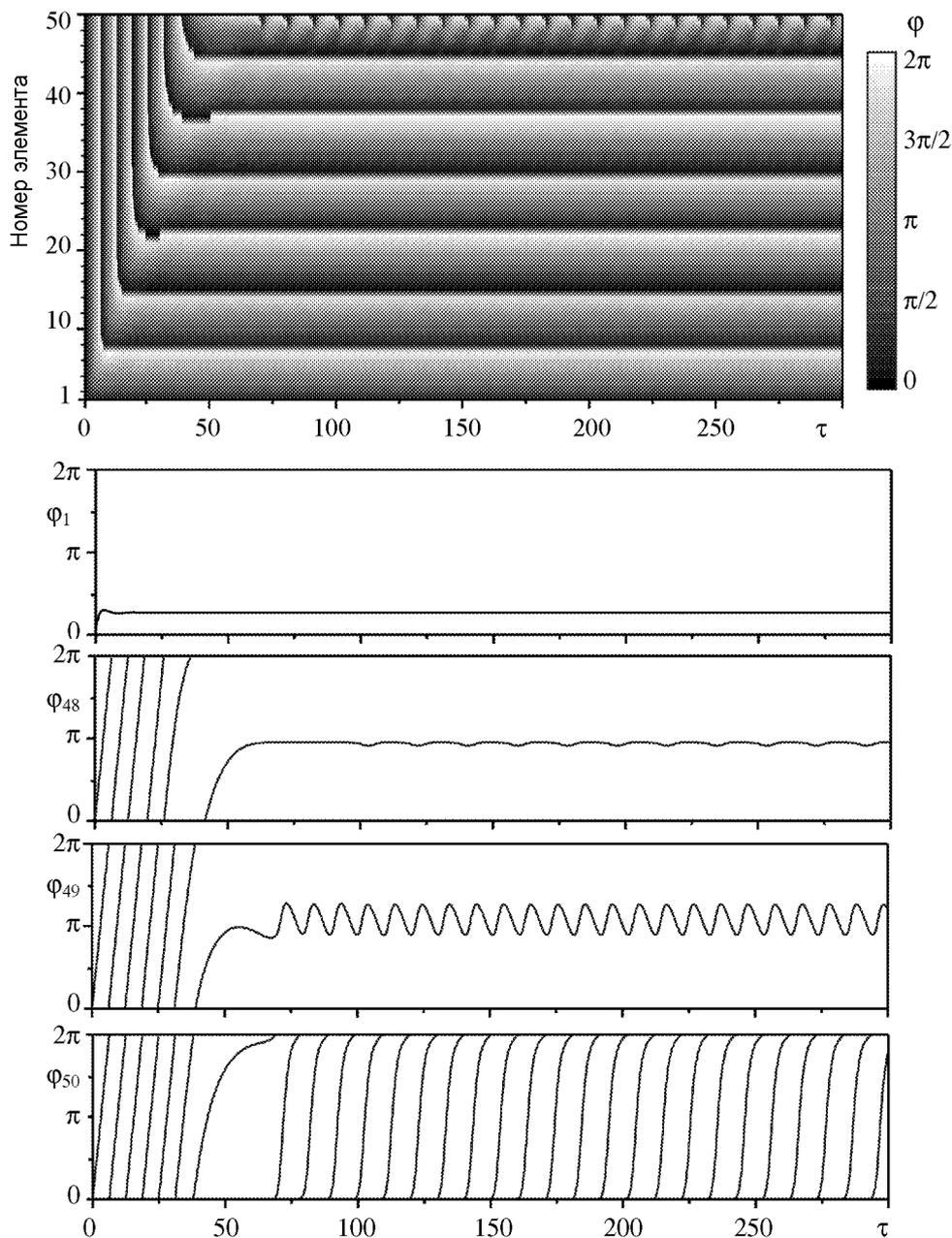


Рис. 2. Ансамбль пятидесяти каскадно связанных систем ФАП. Пространственно-временная диаграмма и временные реализации отдельных систем. Значения параметров:  $\gamma_1 = \dots = \gamma_n = \gamma = 1.01$ ,  $\kappa_1 = \dots = \kappa_{n-1} = \kappa = 0.35$

фиксированной величины параметра связи  $k = 0.35$  все генераторы ансамбля будут функционировать в режиме биений при значении  $\gamma > 1.133$ .

Таким образом, в области больших частотных расстройек обнаружен эффект подавления колебаний в ансамбле пятидесяти каскадно связанных систем ФАП с дополнительными связями «назад» (сигнал дополнительной связи передается из цепи управления впереди стоящей системы ФАП в цепь управления предшествующей). В этом случае существует возможность работы каскадной системы в частичном синхронном режиме вне области существования состояний равновесия, когда часть генераторов находится в режиме синхронизма по отношению к опорному сигналу, часть – в квазисинхронном режиме, а остальные генераторы – в режиме биений. Увеличение силы связи и частотной расстройки приводит к исчезновению данного эффекта. Следует заметить, что для больших ансамблей каскадно связанных ФАП с дополнительными связями «вперед» (связь организуется путем подачи сигнала управления  $i$ -го генератора в цепь управления  $(i + 1)$ -го генератора) также были найдены [2] режимы, когда часть генераторов находится в режиме синхронизации, при асинхронной работе остальных генераторов. Однако такое поведение было возможно только в той области значений параметров, где индивидуальная динамика систем ФАП определяется режимом синхронизации относительно опорного сигнала.

### Заключение

Проведено исследование динамических режимов ансамблей каскадно связанных фазовых систем в пространстве параметров. Прослежена эволюция стационарных движений модели (1) при варьировании параметров системы, в результате чего установлены новые сведения о возможных режимах поведения связанных генераторов. На примере малого ансамбля, состоящего из трех фазовых систем с фильтрами первого порядка в цепях управления, продемонстрирована возможность подавления асинхронных колебаний, генерируемых одной из систем, за счет увеличения параметра, характеризующего инерционность цепи управления.

Проанализированы динамические режимы ансамбля, состоящего из большого числа фазовых систем, не содержащих фильтров низких частот в цепях управления и обладающих простой индивидуальной динамикой (режим регулярных биений). Установлено, что при объединении в ансамбль часть управляемых генераторов может быть переведена в режим квазисинхронизации, а при определенных значениях параметра дополнительной связи наблюдается подавление колебаний по направлению к началу цепочки.

*Работа выполнена при финансовой поддержке Российского Фонда Фундаментальных Исследований (гранты 06-02-16137, 08-02-97035), гранта Президента РФ для поддержки молодых ученых (МК-4659.2007.2).*

### Библиографический список

1. Матросов В.В., Касаткин Д.В. Динамические режимы связанных генераторов с фазовым управлением //Радиотехника и электроника. 2003. Т. 48, № 6. С. 698.
2. Афраймович В.С., Некоркин В.И., Осипов Г.В., Шалфеев В.Д. Устойчивость, структуры и хаос в нелинейных сетях синхронизации. Горький: ИПФ АН СССР, 1989.

3. Системы фазовой синхронизации /Под ред. Шахгильдяна В.В., Белюстиной Л.Н. М.: Радио и связь, 1982.
4. *Матросов В.В., Шалфеев В.Д., Касаткин Д.В.* Анализ областей генерации хаотических колебаний в связанных фазовых системах //Известия вузов. Радиофизика. 2006. Т. 49, № 5. С. 448.
5. *Матросов В.В., Касаткин Д.В.* Анализ процессов возбуждения хаотических колебаний во взаимосвязанных генераторах с фазовым управлением //Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2003. Т. 11, № 4–5. С. 31.
6. *Матросов В.В., Касаткин Д.В.* Особенности динамики трех каскадно связанных генераторов с фазовым управлением //Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2004. Т. 12, № 1–2. С. 159.
7. *Матросов В.В.* Автомодуляционные режимы системы фазовой автоподстройки частоты с фильтром второго порядка //Известия вузов. Радиофизика. 2006. Т. 49, № 4. С. 357.
8. *Kasatkin D.V., Matrosov V.V.*, Collective dynamics of small ensembles of coupled PLL systems //Proc. of the Int. Symposium «Topical Problems of Nonlinear Wave Physics». Nizhny Novgorod: IAP RAS, 2003. P. 137.

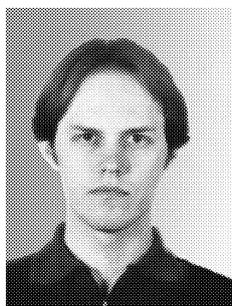
*Поступила в редакцию 11.03.2009  
После доработки 11.04.2009*

## THE PHENOMENON OF OSCILLATION SUPPRESSION IN ENSEMBLES OF COUPLED PHASE-LOCKED LOOP SYSTEMS

*D.V. Kasatkin*

The phenomenon of oscillation suppression in ensembles of coupled phase-locked loop systems is discussed. The investigation of this phenomenon was performed for ensembles of three and fifty cascade coupled phase-locked loop systems with first-order filter in control circuits and without it, respectively. The possibilities of oscillation suppression in a part of phase oscillators of ensembles are demonstrated. Domains of the analysed effect existence are determined in the parameter space.

*Keywords:* Oscillation suppression, phase-locked loop systems, cascade coupling.



*Касаткин Дмитрий Владимирович* – родился в 1978 году в Нижнем Новгороде, окончил радиофизический факультет Нижегородского государственного университета им. Н.И. Лобачевского (2001). Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук (2004, ННГУ). С 2002 года работает в Институте прикладной физики РАН. Область научных интересов – теория нелинейных колебаний и волн, динамический хаос, нейродинамика. Имеет более 30 научных публикаций по указанным направлениям.

603950 Нижний Новгород, ул. Ульянова, 46  
Институт прикладной физики РАН  
E-mail: kasatkin@neuron.appl.sci-nnov.ru



## МЕТОДИКА ИССЛЕДОВАНИЯ СИНХРОНИЗАЦИИ КОЛЕБАТЕЛЬНЫХ ПРОЦЕССОВ С ЧАСТОТОЙ 0.1 Гц В СЕРДЕЧНО-СОСУДИСТОЙ СИСТЕМЕ ЧЕЛОВЕКА

*Б.П. Безручко, В.И. Гриднев, А.С. Караваев, А.Р. Киселев,  
В.И. Пономаренко, М.Д. Прохоров, Е.И. Рубан*

Исследована синхронизация процессов вегетативной регуляции сердечного ритма и уровня кровенаполнения сосудов микроциркуляторного русла, имеющих у людей собственную частоту около 0.1 Гц. Предложен метод количественной оценки степени синхронизации этих процессов, основанный на расчете суммарного процента фазовой синхронизации колебаний. Проведен анализ статистической значимости рассчитанных показателей синхронизации.

*Ключевые слова:* Синхронизация, сердечно-сосудистая система, статистическая значимость, суррогатные данные.

### Введение

Сердечно-сосудистая система (ССС) человека является одной из наиболее важных физиологических систем, в функционировании которой принимают участие различные взаимодействующие между собой колебательные процессы. Наиболее значимыми из них являются сердечный ритм, дыхание, кровенаполнение периферических сосудистых территорий и процессы вегетативной регуляции ССС, в частности, процессы центральной регуляции с собственной частотой вблизи 0.1 Гц [1, 2]. Указанные ритмические процессы могут быть синхронизованы между собой. Наиболее изученной является кардиореспираторная синхронизация, то есть, синхронизация между основным сердечным ритмом и дыханием [3–8]. Показано, что у спортсменов длительность участков кардиореспираторной синхронизации выше [4], чем у людей со средним уровнем физической активности [5,7].

Сравнительно недавно было обнаружено, что сердцебиение и дыхание могут быть синхронизованы с процессами регуляции ритма сердца и микроциркуляции крови, имеющими частоту около 0.1 Гц [9–11]. Большой интерес представляет также исследование возможности синхронизации ритмов с частотой 0.1 Гц между собой. Эти низкочастотные колебания играют важную роль в вегетативной регуляции ССС [12–14] и существенно различаются у здоровых людей и людей, имеющих сердечно-сосудистые заболевания. Изучение синхронизации 0.1 Гц-колебаний в сердечном ритме и кровенаполнении сосудов микроциркуляторного русла (МЦР) представляется перспективным для современной кардиологии [14,15].

Данная работа посвящена разработке методики исследования синхронизации колебательных процессов с частотой около 0.1 Гц в сердечно-сосудистой системе, обеспечивающей статистически значимую оценку меры синхронизации изучаемых ритмов.

## 1. Экспериментальные данные и их предварительная обработка

Авторы исследовали синхронизацию ритмических процессов с частотой 0.1 Гц у 17 обследуемых (127 записей), возраста от 20 до 45 лет, без признаков сердечной патологии и 42 пациентов (167 записей) с ишемической болезнью сердца, возраста от 41 до 80 лет, находившихся на стационарном лечении в клинике Саратовского НИИ кардиологии по поводу острого инфаркта миокарда (3-я неделя течения заболевания). Всем испытуемым выполнялась одновременная регистрация электрокардиограммы (ЭКГ) и пульсограммы сосудов МЦР в горизонтальном положении тела. Регистрация сигналов производилась многоканальным цифровым электрокардиографом с частотой дискретизации 250 Гц и 16-ти разрядным разрешением. Продолжительность каждой записи составляла 10 минут. Во время регистрации сигналов дыхание у всех обследуемых было произвольным.

На рис. 1 приведены фрагменты типичных сигналов, регистрируемых в эксперименте. Сигнал ЭКГ (рис. 1, *a*) снимался во II стандартном отведении по Эйнтховену. Пульсограмма (рис. 1, *б*), характеризующая колебания кровенаполнения сосудов МЦР, регистрировалась с помощью плетизмографического инфракрасного датчика отраженного света, наложенного на дистальную фалангу пальца пациента. Информация о вариабельности сердечного ритма получалась путем выделения из ЭКГ последовательности R-R интервалов то есть, при построении ряда временных интервалов  $T_i$  между двумя последовательными R пиками (рис. 2, *a*). Откладывая по оси абсцисс вместо порядкового номера R-R интервала, время появления R пиков  $t_k = \sum_{i=1}^k T_i$ , легко построить кардиоинтервалограмму (рис. 2, *б*). Вследствие непостоянства частоты

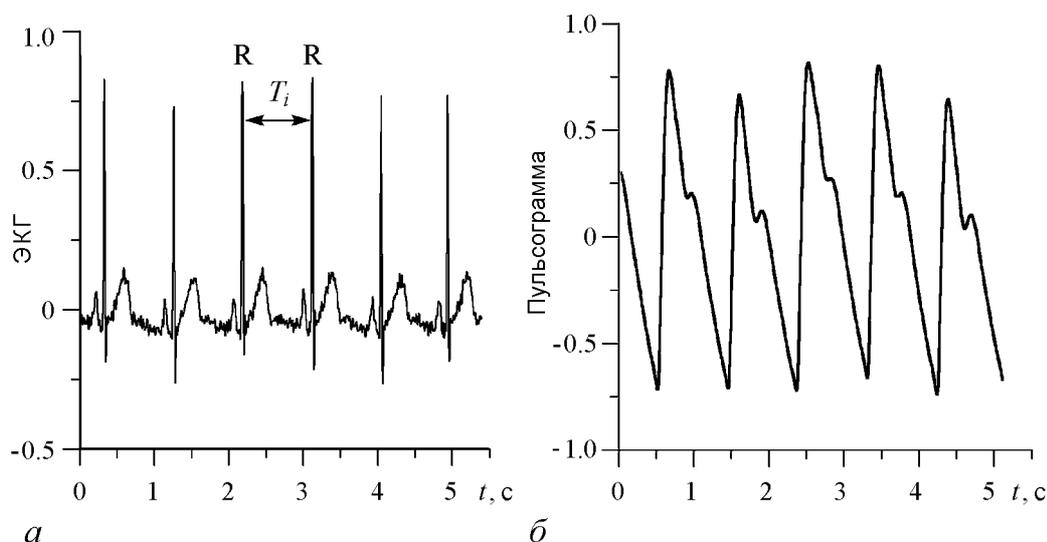


Рис. 1. Типичный вид ЭКГ (*a*) и пульсограммы с сосудов микроциркуляторного русла (*б*) здорового человека. Оба сигнала приведены в произвольных единицах

ты сердцебиения точки на рис. 2, б расположены неэквидистантно по времени. Для преобразования такого неэквидистантного ряда в эквидистантный полученная зависимость аппроксимировалась кубическими сплайнами (сплошная линия на рис. 2, б) с последующим выбором из нее значений через равные промежутки времени. При дальнейшей обработке использовался полученный таким образом эквидистантный временной ряд, частота дискретизации которого составляла 4 Гц.

Спектральный анализ кардиоинтервалограмм и пульсограмм позволяет выявить различные временные масштабы variability сердечного ритма и кровенаполнения сосудов МЦР. В общем случае в Фурье-спектрах этих сигналов (рис. 3) хорошо различимы характерные пики на частотах  $f_r$  и  $f_v$ , обусловленные соответственно респираторными и низкочастотными флуктуациями сердечного ритма и кровенаполнения сосудов МЦР. Помимо высокочастотной (ВЧ) 0.15–0.4 Гц и низкочастотной (НЧ) 0.05–0.15 Гц областей спектра мощности, к которым относятся пики

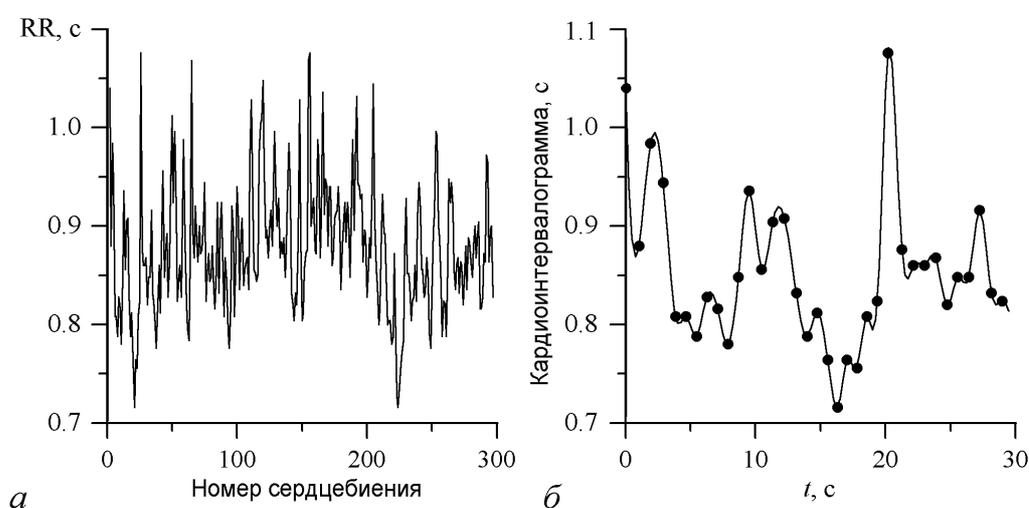


Рис. 2. Характерный вид последовательности R-R интервалов (тахограммы) (а) и кардиоинтервалограммы (б)

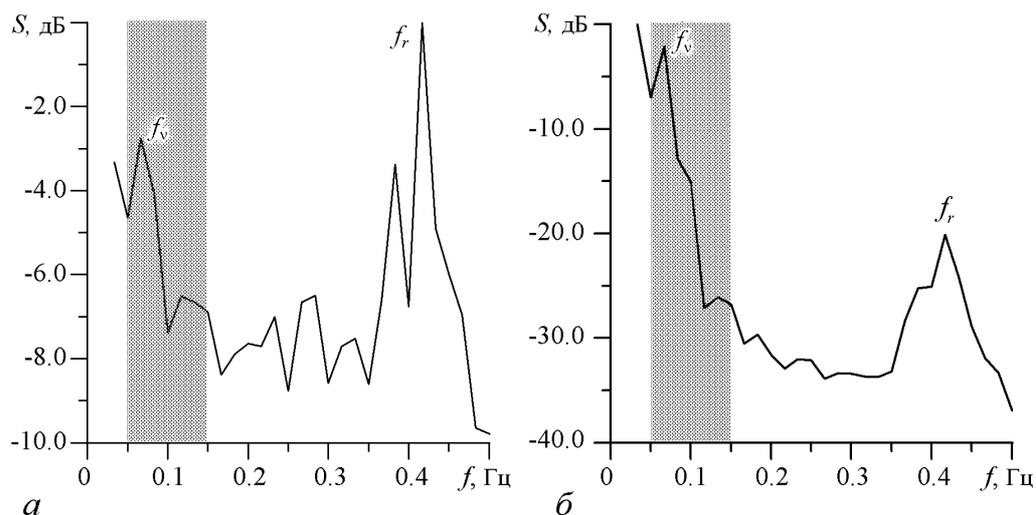


Рис. 3. Фурье-спектры мощности, построенные по сигналам кардиоинтервалограммы (а) и пульсограммы с сосудов МЦР (б) здорового человека. Серым цветом выделены НЧ области спектров

$f_r$  и  $f_v$ , соответственно, принято выделять также очень низкочастотную область с частотами меньшими 0.05 Гц [12].

В данной работе рассматривались колебания, относящиеся только к НЧ области спектров, отмеченной на рис. 3 серым цветом. Для выделения НЧ (медленных) компонент variability сердечного ритма и кровенаполнения сосудов МЦР использовался прямоугольный цифровой полосовой фильтр с полосой пропускания 0.05–0.15 Гц.

## 2. Исследование фазовой синхронизации ритмов с частотой 0.1 Гц

Синхронизация между колебательными процессами с собственной частотой около 0.1 Гц диагностировалась путем анализа разности их фаз, то есть, в работе исследовалась фазовая синхронизация автоколебаний [16]. При фазовой синхронизации происходит захват фаз колебательных процессов, в то время как амплитуды сигналов остаются несвязанными друг с другом и могут меняться хаотически. Захват фаз влечет за собой совпадение частот сигналов.

Для вычисления фазы медленных колебаний сердечного ритма и кровенаполнения сосудов МЦР построим для полученного в результате фильтрации сигнала  $s(t)$  аналитический сигнал  $\zeta(t)$  [17,18], являющийся комплексной функцией времени

$$\zeta(t) = s(t) + i\tilde{s}(t) = A(t)e^{i\phi(t)}, \quad (1)$$

где функция  $\tilde{s}(t)$  – преобразование Гильберта для  $s(t)$

$$\tilde{s}(t) = \pi^{-1}P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{s(\tau)}{t - \tau} dt, \quad (2)$$

а  $P$  означает, что интеграл берется в смысле главного значения Коши. Мгновенная амплитуда  $A(t)$  и мгновенная фаза  $\phi(t)$  сигнала  $s(t)$  однозначно определяются из уравнения (1).

На рис. 4, *a* приведены нормированные на  $2\pi$  мгновенная фаза  $\phi_1$  медленных колебаний сердечного ритма и мгновенная фаза  $\phi_2$  медленных колебаний кровенаполнения сосудов МЦР для одного из здоровых обследуемых. На рис. 4, *б* построена нормированная на  $2\pi$  разность фаз  $\varphi = \phi_1 - \phi_2$ , называемая также относительной

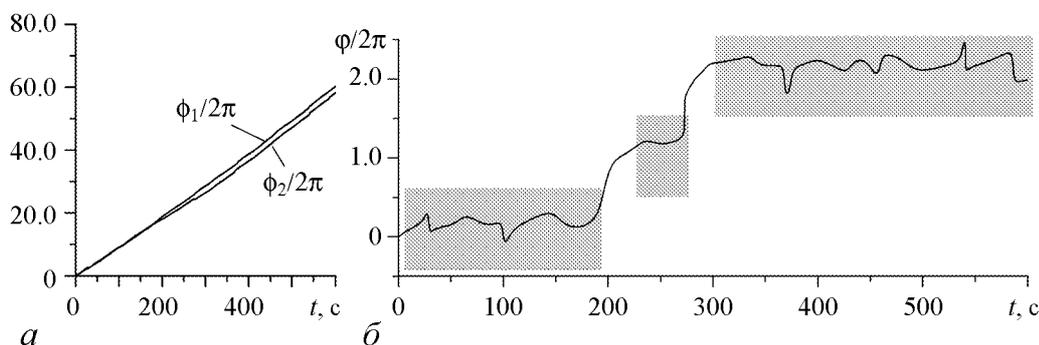


Рис. 4. *a* – мгновенные фазы  $\phi_1$  и  $\phi_2$  0.1 Гц-колебаний сердечного ритма и кровенаполнения сосудов МЦР, соответственно, в зависимости от времени; *б* – график разности фаз  $\varphi$  в зависимости от времени. Значения  $\phi_1$ ,  $\phi_2$  и  $\varphi$  нормированы на  $2\pi$

фазой [16]. Участки синхронизации между ритмами с частотой около 0.1 Гц, выделенными из кардиоинтервалограммы и пульсограммы, могут быть диагностированы по графику  $\varphi(t)$  как области, на которых относительная фаза колеблется около некоторого постоянного значения, то есть, выполняется условие  $|\varphi - C| < \text{const}$ , где  $C$  – некоторая константа [16]. Такие области отмечены на рис. 4, б серым цветом. Суммарная длительность всех участков синхронизации, выраженная в процентах от длительности всей записи, названа авторами суммарным процентом фазовой синхронизации  $S$ , и исследована возможность его использования для диагностики состояния ССС.

Для автоматизации процедуры поиска участков синхронизации исследуемых колебательных процессов был разработан алгоритм, основанный на линейной аппроксимации мгновенной разности фаз  $\varphi(t)$  в скользящем окне. Метод состоит в следующем. В окне, имеющем ширину  $b$ , с помощью метода наименьших квадратов проводится линейная аппроксимация зависимости  $\varphi(t)$  (рис. 5, а). В результате для момента времени  $t_i$ , соответствующего середине окна, получаем угловой коэффициент наклона аппроксимирующей прямой  $\alpha_i$  (рис. 5, б). Сдвигая окно на одну точку вдоль временной реализации  $\varphi(t)$ , вычисляем угол наклона  $\alpha_{i+1}$  для момента времени  $t_{i+1}$  и т.д. Областям фазовой синхронизации, на которых зависимость  $\varphi(t)$  близка к горизонтальной, соответствуют участки с малым значением  $\alpha$ . Введем пороговое значение коэффициента наклона  $\alpha$ , равное  $\pm a$  (см. рис. 5, б), полагая, что синхронизация колебаний возможна лишь при  $|\alpha| \leq a$ . Будем также считать, что вторым необходимым условием синхронизации является достаточно большая протяженность области малых значений  $\alpha$ . Ее длина должна быть не менее величины  $l$ , чтобы исключить из рассмотрения короткие участки, для которых высока вероятность случайного совпадения мгновенных фаз колебаний. Отметим, что при описанном подходе конечная ширина скользящего окна не позволяет исследовать синхронизацию сигналов на их границах – начальном участке протяженности  $b/2$  и конечном участке той же длины.

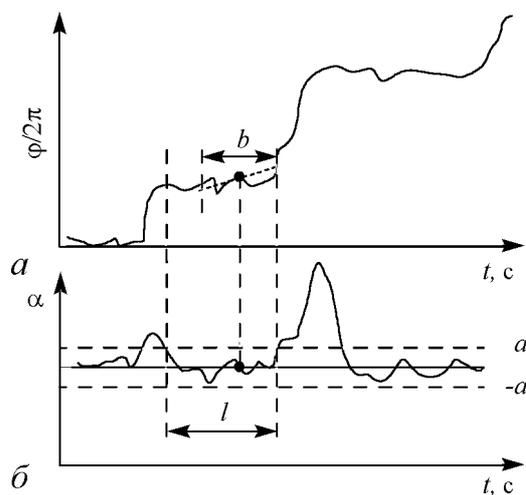


Рис. 5. Иллюстрация процедуры автоматического поиска областей синхронизации колебаний: а – линейная аппроксимация зависимости  $\varphi(t)$  в скользящем окне; б – угол наклона аппроксимирующей прямой

Похожий метод автоматического поиска областей синхронизации колебаний был использован в работе [8], однако он был основан на анализе синхрограмм, а не относительной фазы.

По описанной выше схеме были проведены детальные исследования зависимости результатов диагностики синхронизации сигналов от значений параметров метода  $b$ ,  $a$  и  $l$ . Установлено, что с уменьшением  $a$  или увеличением  $l$  величина  $S$  уменьшается. Зависимость  $S$  от параметра  $b$  является немонотонной. Предложенный метод перед применением для анализа экспериментальных данных был протестирован на модели двух связанных автоколебательных систем. В качестве модельной системы была выбрана система двух вза-

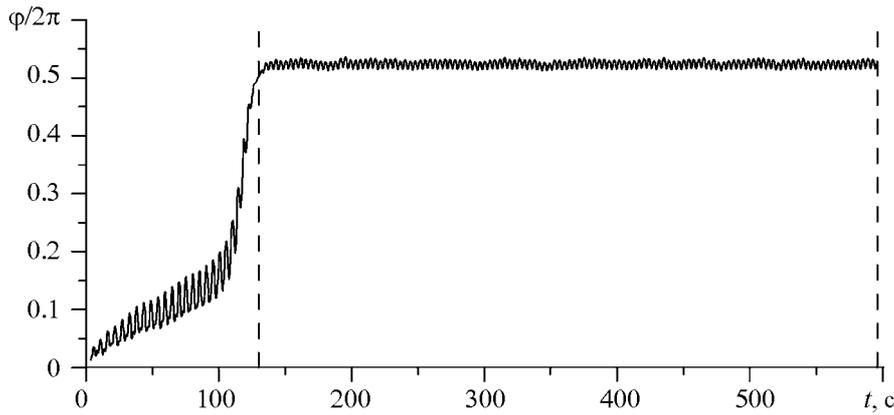


Рис. 6. Разность фаз двух взаимно связанных генераторов ван дер Поля с малой расстройкой частоты в присутствие шума

мно связанных генераторов ван дер Поля в присутствие шума

$$\begin{aligned} \ddot{x} - \mu(1 - x^2)\dot{x} + \omega_1^2 x + k_1 y + \xi &= 0, \\ \ddot{y} - \mu(1 - y^2)\dot{y} + \omega_2^2 y + k_2 x + \nu &= 0, \end{aligned} \quad (3)$$

где  $\mu$  – параметр нелинейности,  $\omega_1$  и  $\omega_2$  – собственные частоты первого и второго генераторов,  $k_1$  и  $k_2$  – коэффициенты связи генераторов,  $\xi$  и  $\nu$  – независимые некоррелированные шумовые процессы. Временные ряды переменных  $x$  и  $y$  системы (3) получены численно при  $\mu = 1$ ,  $f_1 = \omega_1/2\pi = 0.1$  Гц,  $f_2 = \omega_2/2\pi = 0.095$  Гц,  $k_1 = k_2 = 0.2$ ,  $\xi$  и  $\nu$ , имеющих нулевое среднее значение, гауссово распределение и среднеквадратичное отклонение, составляющее 5% от среднеквадратичного отклонения ряда без шума. На рис. 6 построена нормированная на  $2\pi$  разность фаз  $\varphi = \phi_1 - \phi_2$ , где  $\phi_1$  и  $\phi_2$  – мгновенные фазы первого и второго генераторов, соответственно. После переходного процесса продолжительностью около 140 с наступает синхронизация генераторов, в течение которой относительная фаза  $\varphi(t)$  колеблется в присутствие шума около постоянного значения. Суммарный процент фазовой синхронизации имеет величину  $S = 76\%$ . При параметре  $l$  порядка 1–2 характерных периодов колебаний, параметре  $b$ , близком по величине характерному периоду колебаний, и  $|a|$  из диапазона  $0.005 \div 0.01$  предложенный метод автоматического поиска областей синхронизации достаточно точно определяет границы синхронизации колебаний. Эти границы указаны на рис. 6 пунктирными вертикальными линиями. Предложенный алгоритм дает оценку  $S = 77\%$ , близкую к истинному значению.

При тестировании метода на экспериментальных данных ССС и выборе его параметров авторы исходили из того, что автоматическая процедура должна идентифицировать области синхронизации аналогично обычно используемой визуальной диагностике и обеспечивать статистическую значимость результатов (см. ниже раздел 3). В результате были выбраны следующие значения параметров:  $b = 13$  с,  $|a| = 0.01$ ,  $l = 16$  с, которые использовались в дальнейшем для исследования всех экспериментальных записей.

С помощью предложенного метода рассчитан суммарный процент  $S$  фазовой синхронизации ритмов с частотой около 0.1 Гц для всех обследуемых. На рис. 7

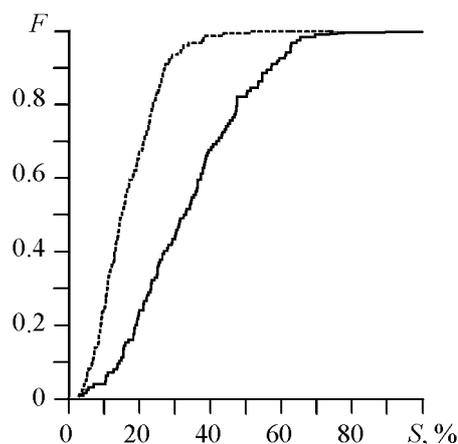


Рис. 7. Функции распределения суммарного процента фазовой синхронизации  $S$  между ритмами с частотой около 0.1 Гц, выделенными из кардиоинтервалограмм и пульсограмм с сосудов МЦР здоровых людей (сплошная линия) и пациентов на 3-й неделе после инфаркта миокарда (пунктирная линия)

показаны функции распределения значений  $S$ , полученных для всех записей здоровых обследуемых и пациентов с инфарктом миокарда (3-я неделя течения заболевания). Обнаружено, что у здоровых людей величина  $S$  имеет в среднем более высокие значения, чем у больных: значение  $S$ , усредненное по всем записям здоровых обследуемых, равнялось 34%, а усредненное по всем записям обследуемых, перенесших инфаркт миокарда, – 17%. Отметим, что абсолютные значения  $S$  зависят от значений параметров метода автоматического поиска областей синхронизации колебаний. Однако в широком интервале изменения параметров метода величина  $S$  остается в среднем существенно выше у здоровых людей, чем у больных с инфарктом миокарда.

### 3. Анализ статистической значимости результатов

Известно, что при анализе экспериментальных данных, для которых характерна нестационарность, присутствие шумов, ограниченная длина временных рядов или близость основных частот колебаний, можно получить ложный вывод о наличии фазовой синхронизации даже между несвязанными автоколебательными системами [16,19]. Поэтому, при расчете показателей синхронизации важно оценивать статистическую значимость результатов, то есть вероятность случайного получения рассчитанного значения показателя. При исследовании экспериментальных временных рядов аналитическая оценка уровня статистической значимости той или иной количественной меры синхронизации существенно затруднена необходимостью принятия ряда предположений о статистических свойствах анализируемых данных, например, их стационарности, белости шумов и т.п. За отсутствием аналитических формул статистическую значимость оценки меры синхронизации определяют обычно с помощью суррогатных данных [20]. Для приготовления суррогатных данных в работе использован подход, основанный на рандомизации начальных фаз фурье-гармоник сигналов [21]. Такой способ приготовления суррогатных данных сохраняет спектральные свойства анализируемых сигналов, но разрушает связи между ними и, как следствие, синхронизацию. Рассчитав суммарный процент  $S$  фазовой синхронизации для ансамбля суррогатных данных, можно оценить вероятность случайного получения той или иной величины  $S$  для заведомо несинхронизованных сигналов.

В настоящей работе для анализа статистической значимости результатов исследования синхронизации ритмов с частотой около 0.1 Гц применялась следующая процедура. Сначала из каждого сигнала (кардиоинтервалограммы и пульсограммы) генерировалось по  $M$  рядов суррогатных данных путем задания равномерного слу-

чайного распределения начальных фаз гармоник в разложении сигнала в ряд Фурье. Затем с помощью описанной выше процедуры автоматического поиска участков синхронизации для каждой  $i$ -й пары суррогатов рассчитывалась величина суммарного процента фазовой синхронизации  $S_i$ ,  $i = 1, \dots, M$ . По всему ансамблю суррогатных реализаций строилось распределение  $P$  величины  $S_i$ . На рис. 8 показано распределение  $P(S_i)$ , построенное по суррогатным данным, приготовленным из кардиоинтервалограммы и пульсограммы одного из обследуемых. В настоящей работе использованы ансамбли из  $M = 10000$  рядов суррогатных данных. Вертикальной линией на рисунке показано значение  $S = 37\%$ , рассчитанное по исходным экспериментальным сигналам.

Уровень статистической значимости  $p$ , рассчитанного по экспериментальным данным суммарного процента фазовой синхронизации  $S$ , можно оценить как отношение площади распределения  $P(S_i)$ , соответствующей  $S_i \geq S$  (выделена на рис. 8 серым цветом), к полной площади распределения. Для случая, изображенного на рис. 8, имеем  $p = 0.03$ . Это означает, что вероятность случайного получения значения  $S = 37\%$ , рассчитанного по экспериментальным рядам составляет не более 0.03. На практике оценка какой-либо величины по наблюдаемым данным обычно считается достаточно надежной при уровне значимости  $p < 0.05$ .

На рис. 9 представлены результаты расчета статистической значимости показателей  $S$  синхронизации ритмов для всех записей. Для здоровых людей величина суммарного процента фазовой синхронизации  $S$  и уровень его статистической значимости показаны белыми кружками, а для пациентов, перенесших инфаркт миокарда, черными кружками. Горизонтальной линией показан уровень значимости  $p = 0.05$ . Результаты нашего исследования свидетельствуют, что рассчитанные по экспериментальным рядам значения  $S$  являются статистически значимыми на уровне 0.05 (то есть, имеют доверительную вероятность 0.95) примерно для половины записей как здоровых, так и больных обследуемых. Как видно из рисунка, белые и черные

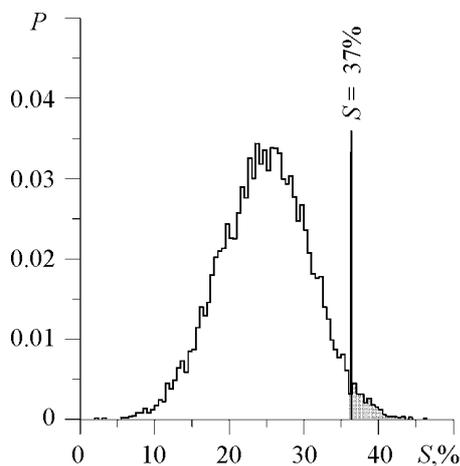


Рис. 8. Распределение суммарного процента фазовой синхронизации  $S_i$ , построенное по ансамблю суррогатных данных. Вертикальной линией показано значение  $S$ , рассчитанное по экспериментальным данным одного из обследуемых

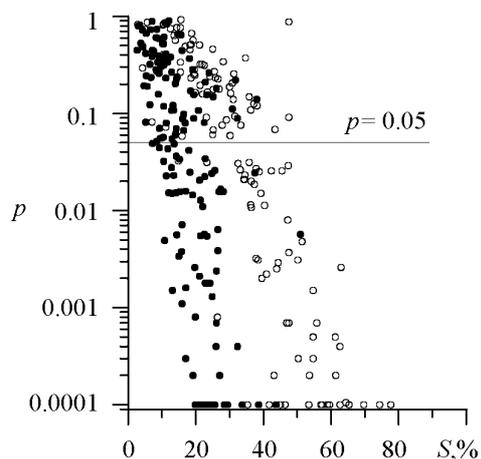


Рис. 9. Уровень статистической значимости суммарного процента фазовой синхронизации  $S$  для здоровых обследуемых (белые кружки) и пациентов на 3-й неделе после инфаркта миокарда (черные кружки)

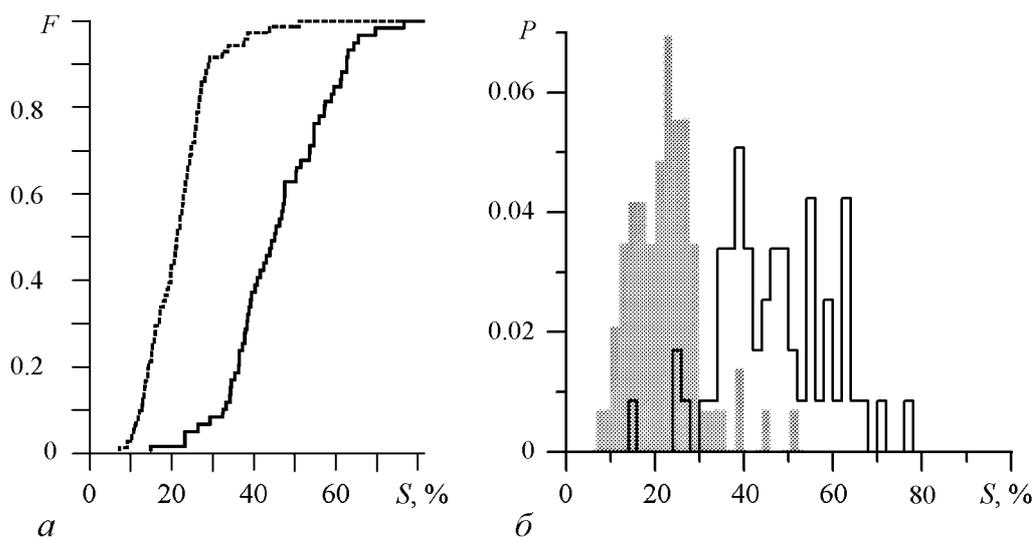


Рис. 10. *a* – функции распределения суммарного процента фазовой синхронизации для значимых на уровне 0.05 значений  $S$  для здоровых людей (сплошная линия) и пациентов на 3-й неделе после инфаркта миокарда (пунктирная линия); *б* – распределения  $P$  значимых на уровне 0.05 значений  $S$  для здоровых (белый цвет) и больных (серый цвет) обследуемых

кружки лучше разделены друг от друга в нижней части графика, соответствующей значимым величинам  $S$ .

Функции распределения суммарных процентов фазовой синхронизации, построенные только для значимых на уровне 0.05 величин  $S$ , показаны на рис. 10, *a* для двух групп обследуемых. У здоровых людей статистически значимая величина  $S$  принимала значения от 15% до 77%, а ее среднее значение равнялось 46%. У пациентов, перенесших инфаркт миокарда (3-я неделя течения заболевания), значимый суммарный процент фазовой синхронизации исследуемых ритмов принимал значения от 7% до 51% и имел среднее значение 21%. Рис. 10, *a* качественно совпадает с рис. 7, но имеет заметно меньшую область перекрытия функций распределения для здоровых и больных обследуемых.

На рис. 10, *б* значения  $S$ , статистически значимые на уровне 0.05, представлены в виде другого графика. На нем построены распределения  $P(S)$  отдельно для здоровых и больных обследуемых. Хорошо видно, что эти распределения существенно различаются и перекрываются незначительно. Таким образом, можно говорить о разделении суммарных процентов фазовой синхронизации на две группы, одна из которых соответствует группе здоровых обследуемых, а другая – группе пациентов, перенесших инфаркт миокарда (3-я неделя течения заболевания). Причем такое разделение более заметно при анализе только статистически значимых значений  $S$ .

### Заключение

Проведено исследование взаимодействия между колебательными процессами с частотой около 0.1 Гц, наблюдаемыми в сердечном ритме и кровенаполнении сосудов микроциркуляторного русла человека. Предложен метод количественной оценки степени синхронизации исследуемых ритмических процессов, основанный на расчете суммарного процента фазовой синхронизации колебаний. Разработан метод ав-

томатического поиска областей синхронизации колебаний, в основе которого лежит линейная аппроксимация мгновенной разности фаз анализируемых сигналов в скользящем окне. Даны рекомендации по выбору параметров метода, обеспечивающих его высокую эффективность. Обнаружено, что у здоровых людей длительность участков синхронизации 0.1 Гц-колебаний в сердечном ритме и кровенаполнении сосудов МЦР в среднем существенно выше, чем у больных, перенесших инфаркт миокарда (3-я неделя течения заболевания). С помощью суррогатных данных проведен анализ статистической значимости рассчитанной меры синхронизации ритмов. Показано, что значения суммарного процента фазовой синхронизации колебаний, рассчитанные по экспериментальным рядам и статистически значимые на уровне 0.05, хорошо разделяются на две группы. Одна из них соответствует группе здоровых людей, а вторая – группе людей, перенесших инфаркт миокарда. Таким образом, разработанный метод изучения синхронизации между процессами регуляции отделами ССС с частотой около 0.1 Гц потенциально может быть использован в медицинских исследованиях и клинической практике.

*Работа выполнена при поддержке РФФИ, гранты № 07-02-00589 и № 07-02-00747, и целевой программы «Развитие научного потенциала высшей школы».*

#### **Библиографический список**

1. *Malpas S.* Neural influences on cardiovascular variability: Possibilities and pitfalls // *Am. J. Physiol. Heart Circ. Physiol.* 2002. Vol. 282. P. 6.
2. *Cohen M.A., Taylor J.A.* Short-term cardiovascular oscillations in man: Measuring and modeling the physiologies // *J. Physiol. (London).* 2002. Vol. 542. P. 669.
3. *Schäfer C., Rosenblum M.G., Kurths J., Abel H.-H.* Heartbeat synchronized with ventilation // *Nature.* 1998. Vol. 392. P. 239.
4. *Schäfer C., Rosenblum M.G., Abel H.-H., Kurths J.* Synchronization in the human cardiorespiratory system // *Phys. Rev. E.* 1999. Vol. 60. P. 857.
5. *Bračič-Lotrič M., Stefanovska A.* Synchronization and modulation in the human cardiorespiratory system // *Physica A.* 2000. Vol. 283. P. 451.
6. *Janson N.B., Balanov A.G., Anishchenko V.S., McClintock P.V.E.* Phase synchronization between several interacting processes from univariate data // *Phys. Rev. Lett.* 2001. Vol. 86. P. 1749.
7. *Rzeczinski S., Janson N.B., Balanov A.G., McClintock P.V.E.* Regions of cardiorespiratory synchronization in humans under paced respiration // *Phys. Rev. E.* 2002. Vol. 66. 051909.
8. *Bartsch R., Kantelhardt J.W., Penzel T., Havlin S.* Experimental evidence for phase synchronization transitions in the human cardiorespiratory system // *Phys. Rev. Lett.* 2007. Vol. 98. 054102.
9. *Janson N.B., Balanov A.G., Anishchenko V.S., McClintock P.V.E.* Phase relationships between two or more interacting processes from one-dimensional time series. II. Application to heart-rate-variability data // *Phys. Rev. E.* 2002. Vol. 65. 036212.
10. *Prokhorov M.D., Ponomarenko V.I., Gridnev V.I., Bodrov M.B., Bespyatov A.B.* Synchronization between main rhythmic processes in the human cardiovascular system // *Phys. Rev. E.* 2003. Vol. 68. 041913.

11. Прохоров М.Д., Бодров М.Б., Пономаренко В.И., Гриднев В.И., Беспятов А.Б. Исследование синхронизации между ритмами сердечно-сосудистой системы человека по последовательности R-R интервалов // Биофизика. 2005. Т. 50. С. 914.
12. Баевский Р.М., Иванов Г.Г., Чирейкин Л.В., Гаврилушкин А.П., Довгалецкий П.Я., Кукушкин Ю.А., Миронова Т.Ф., Прилуцкий Д.А., Семенов Ю.Н., Федоров В.Ф., Флейшман А.Н., Медведев М.М. Анализ variability сердечного ритма при использовании различных электрокардиографических систем (методические рекомендации) // Вестник аритмологии. 2001. Т. 24. С.1.
13. De Boer R.W., Karemaker J.M., Straker J. On the spectral analysis of blood pressure variability // Am. J. Physiol. 1986. Vol. 251. P. 685.
14. Киселев А.Р., Беспятов А.Б., Посненкова О.М., Гриднев В.И., Пономаренко В.И., Прохоров М.Д., Довгалецкий П.Я. Внутренняя синхронизация основных 0.1 Гц-частотных ритмов в системе вегетативного управления сердечно-сосудистой системой // Физиология человека. 2007. Т. 33, № 2. С. 69.
15. Киселев А.Р., Гриднев В.И., Посненкова О.М., Беспятов А.Б., Довгалецкий П.Я., Пономаренко В.И., Прохоров М.Д., Котельникова Е.В. Оценка на основе определения синхронизации низкочастотных ритмов динамики вегетативной регуляции сердечно-сосудистой системы при применении метопролола у больных ИБС, перенесших инфаркт миокарда // Терапевтический архив. 2007. Т. 79, № 4. С. 23.
16. Pikovsky A., Rosenblum M., Kurths J. Synchronization: A universal concept in nonlinear sciences. Cambridge: Cambridge University Press, 2001.
17. Pikovsky A.S., Rosenblum M.G., Osipov G.V., Kurths J. Phase synchronization of chaotic oscillators by external driving // Physica D. 1997. Vol. 104. P. 219.
18. Gabor D. Theory of communication // J. IEE (London). 1946. Vol. 93. P. 429.
19. Смирнов Д.А., Сидак Е.В., Безручко Б.П. Статистические свойства оценки коэффициента фазовой синхронизации // Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2008. Т. 16, № 2. С. 109.
20. Schreiber T., Schmitz A. Surrogate time series // Physica D. 2000. Vol. 142. P. 346.
21. Seidel H., Herzog H.-P. Analyzing entrainment of heartbeat and respiration with surrogates // IEEE Eng. Med. Biol. 1998. Vol. 17, № 6. P. 54.

*Поступила в редакцию 23.12.2008  
После доработки 1.04.2009*

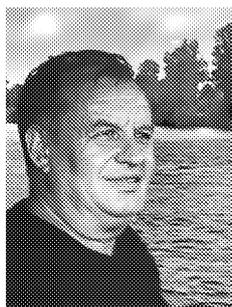
### **TECHNIQUE OF INVESTIGATION OF SYNCHRONIZATION BETWEEN OSCILLATORY PROCESSES WITH THE FREQUENCY OF 0.1 Hz IN THE HUMAN CARDIOVASCULAR SYSTEM**

*B.P. Bezruchko, V.I. Gridnev, A.S. Karavaev, A.R. Kiselev,  
V.I. Ponomarenko, M.D. Prokhorov, E.I. Ruban*

Synchronization between the processes of vegetative regulation of the heart rate and blood pressure in the vessels of microcirculatory channel having in humans a fundamental frequency of about 0.1 Hz is studied. A method for quantitative estimation of the degree

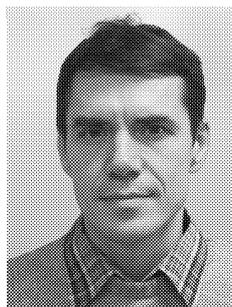
of synchronization between these processes is proposed. The method is based on the calculation of a summary percent of phase synchronization of oscillations. A statistical significance of the calculated coefficient of synchronization is analyzed.

*Keywords:* Synchronization, cardiovascular system, statistical significance, surrogate data.



*Безручко Борис Петрович* – родился в 1946 году. Окончил физический факультет Саратовского государственного университета (1969). Доктор физико-математических наук (1995). Заведующий кафедрой динамического моделирования и биомедицинской инженерии СГУ, заведующий лабораторией моделирования в нелинейной динамике СФ ИРЭ РАН. Область научных интересов – радиофизика и электроника, нелинейная динамика, моделирование по временным рядам с применением к задачам физиологии и медицинской диагностики, физический эксперимент. Опубликовал более 100 статей в научных журналах и 2 монографии (в соавторстве).

410012 Саратов, Астраханская, 83  
Саратовский государственный им. Н.Г. Чернышевского  
E-mail: bezruchkobp@gmail.com



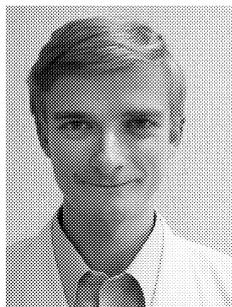
*Гриднев Владимир Иванович* – родился в 1955 году в Саратове. Окончил Саратовский государственный медицинский университет (1978). Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата медицинских наук (2004). Руководитель Центра кардиологических информационных технологий Саратовского НИИ кардиологии. Область научных интересов – физиология сердечно-сосудистой системы, клиническая кардиология, анализ открытых систем. Имеет более 50 научных публикаций.

410028 Саратов, ул. Чернышевского, 141  
Саратовский НИИ Кардиологии Росздрава  
E-mail: gridnev@san.ru



*Караваяев Анатолий Сергеевич* – родился в 1981 году в Саратове. Окончил Саратовский государственный университет (2004). Кандидат физико-математических наук (2007). Доцент кафедры динамического моделирования и биомедицинской инженерии СГУ. Область научных интересов – моделирование по временным рядам, нелинейная динамика и ее приложения. Имеет более 40 научных публикаций.

410012 Саратов, Астраханская, 83  
Саратовский государственный им. Н.Г. Чернышевского  
E-mail: karavaevas@gmail.com



*Киселев Антон Робертович* – родился в 1981 году в Ленинградской области. Окончил Саратовский государственный медицинский университет (2004). Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата медицинских наук (2006). Старший научный сотрудник Центра продвижения новых информационных кардиологических технологий Саратовского НИИ кардиологии. Область научных интересов – физиология сердечно-сосудистой системы, клиническая кардиология, анализ открытых систем. Имеет более 50 научных публикаций.

410028 Саратов, ул. Чернышевского, 141  
Саратовский НИИ Кардиологии Росздрава  
E-mail: antonkis@list.ru

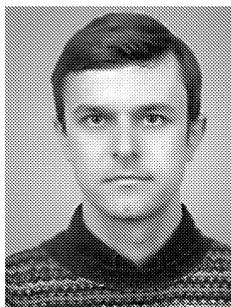


*Пономаренко Владимир Иванович* – родился в 1960 году в Саратове. Окончил Саратовский государственный университет (1982). Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук (1992) и доктора физико-математических наук (2008). Ведущий научный сотрудник Саратовского филиала Института радиотехники и электроники РАН. Область научных интересов – статистическая радиофизика, анализ временных рядов, нелинейная динамика и ее приложения. Автор более 130 научных публикаций.

410019 Саратов, ул. Зеленая, 38

Саратовский филиал Института радиотехники и электроники РАН

E-mail: [ponomarenkovi@gmail.com](mailto:ponomarenkovi@gmail.com)



*Прохоров Михаил Дмитриевич* – родился в 1968 году в Саратове. Окончил Саратовский государственный университет (1992). Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук (1997) и доктора физико-математических наук (2008). Ведущий научный сотрудник Саратовского филиала Института радиотехники и электроники РАН. Область научных интересов – нелинейная динамика и ее приложения, математическое моделирование, анализ временных рядов. Имеет более 100 научных публикаций.

410019 Саратов, ул. Зеленая, 38

Саратовский филиал Института радиотехники и электроники РАН

E-mail: [mdprokhorov@yandex.ru](mailto:mdprokhorov@yandex.ru)



*Рубан Екатерина Игоревна* – родилась в 1989 году в Энгельсе. Студентка 3-го курса факультета нано- и биомедицинских технологий Саратовского государственного университета. Область научных интересов – анализ временных рядов.

410012 Саратов, Астраханская, 83

Саратовский госуниверситет им. Н.Г. Чернышевского

E-mail: [rubanei@mail.ru](mailto:rubanei@mail.ru)



## ЦИФРОВОЙ ГЕНЕРАТОР ПОДКАЧКИ ЭНТРОПИИ НА БАЗЕ ОТОБРАЖЕНИЯ АРНОЛЬДА

*Л.С. Сотов, В.Н. Харин*

В работе обсуждается использование цифровых генераторов, моделируемых двумерными отображениями на торе, в частности отображением «Кот Арнольда», в качестве встроенных источников энтропии, работающих в составе однокристалльных криптографических систем генерации случайных чисел. Приводится практическая схема генератора на двоичных счетчиках, реализуемая на стандартной элементной базе фабрик – производителей полупроводников. Проводится сравнительная характеристика генераторов подкачки энтропии. Анализируются условия безопасности их использования.

*Ключевые слова:* Генератор случайных чисел, динамический хаос, источники энтропии, криптографические ключи, распределение вероятностей.

Большинство систем информационной безопасности имеют в своем составе генераторы случайных чисел. В связи с тем, что к данным генераторам предъявляются жесткие технические требования, использование непосредственно физических источников случайных сигналов, таких как тепловые, дробовые шумы в электронных схемах, процессы разряда в счетчиках Гейгера и т.п. обычно не представляется возможным [1,2]. Для генерации случайных чисел используются криптографические генераторы псевдослучайных последовательностей (ПСП). Для устранения угрозы восстановления последовательности по определенному в некоторый момент времени состоянию генератора ПСП периодически или по запросу системы в состояние генератора вносится неопределенность. При этом используются внешние источники случайных сигналов. Вопросы их получения и использования являются актуальными в настоящее время [3]. В литературе по криптографии такие источники часто называют источниками подкачки энтропии в систему [2]. Для большинства систем использование внешних источников случайных сигналов недопустимо из соображений безопасности, поэтому используются встроенные в систему безопасности генераторы случайных сигналов (ГСС).

Возможны два подхода при построении ГСС для подкачки энтропии.

1. Использование ГСС, работающих на флуктуациях параметров в системах с большим числом степеней свободы. При этом используется «мощный источник энтропии», а необходимый уровень сигнала получают путем его усиления.

2. Построение ГСС на базе систем с хаотической динамикой. При этом используется «слабый источник энтропии», например, обычный генератор тактовых импульсов, а динамическая система служит в качестве усилителя неопределенности.

Недостатком ГСС, работающих путем усиления случайных сигналов, таких как тепловые, дробовые шумы в электронных схемах и т.п., является малая среднеквадратичная мощность естественных флуктуаций. Это приводит к необходимости использования высокочувствительных усилителей с большим коэффициентом усиления и делает данную схему уязвимой к воздействиям со стороны злоумышленника. Высокочувствительные входные каскады усилителей имеют низкий порог насыщения. Злоумышленник может преднамеренно наводить помехи, переводящие усилитель естественных флуктуаций в режим насыщения, блокируя, таким образом, работу ГСС. В целях обеспечения безопасности представляет интерес использование динамических ГСС, которые построены на базе динамических систем с хаотической динамикой. Возможно совместное использование в качестве источников подкачки энтропии генераторов, работающих на основе систем с хаотической динамикой и с усилением естественных флуктуаций.

Известно большое количество радиотехнических генераторов с хаотической динамикой, однако большинство из них содержат либо нестандартные нелинейные элементы, либо элементы, не реализуемые в составе интегральной микросхемы (катушки индуктивности, конденсаторы достаточно большой емкости и.п.). Кроме того, для обеспечения безопасности использования такого генератора в составе используемой системы необходимо, чтобы характер его колебаний не менялся при внешних воздействиях, которые могут быть достаточно интенсивны.

С технической стороны проектируемый генератор должен удовлетворять следующим требованиям:

- ГСС должен соответствовать модели безопасности, используемой при разработке аппаратуры [2];

- должна быть обеспечена простота и надежность схемотехнических решений, а также не критичность требований к элементной базе (нестандартные элементы в ГСС не используются).

В данной работе предлагается использовать в качестве ГСС цифровой генератор, моделируемый двумерным линейным отображением на торе. Отличительной особенностью данного генератора является простота и возможность реализации в виде встраиваемой системы на кристалле, без предъявления каких-либо дополнительных требований к элементной базе производителя.

### **Модель безопасности использования ГСС**

Сформулируем условия безопасности использования ГСС в криптографических системах генерации случайных чисел. На рис. 1 схематически изображена блок-схема, иллюстрирующая модель ГСС, работающего во враждебной среде. Злоумышленник может воздействовать на ГСС и анализировать данные о его состоянии в различные моменты времени, используя доступные технические каналы утечки информации [4]. Кроме этого злоумышленнику известна конструкция и алгоритмы работы ГСС, так что он может моделировать его работу. По запросу системы

в некоторые моменты времени  $T_i$  на основе внутреннего состояния  $\vec{X}(T_i)$  генератора формируется цифровой сигнал  $\{DS\}_{T_i}$ , который по некоторому алгоритму вносит неопределенность в состояние генератора ПСП. Система определяет  $\vec{X}(T_i)$  с погрешностью  $\delta$ , таким образом  $\{DS\}_{T_i}$  генерируется на основе любого значения  $\vec{X}$  из  $\delta$ -окрестности  $\vec{X}(T_i)$  в фазовом пространстве системы  $\{\vec{X}\}_{T_i}^\delta = \{\vec{X} : \forall \vec{X}, |\vec{X} - \vec{X}(T_i)| < \delta\}$ .

Цифровой сигнал  $\{DS\}_{T_i}$  генерируется системой по известному злоумышленнику алгоритму  $s$  для  $\forall \vec{X}(T_i) \in \{\vec{X}\}_{T_i}^\delta$ ,  $s(\vec{X}(T_i)) \rightarrow \{DS\}_{T_i}$ .

Целью злоумышленника является определение состояния  $\vec{X}(T_i)$  с погрешностью, не превышающей  $\delta$ . ГСС будет безопасным, если злоумышленник не может определить состояние ГСС в требуемые моменты времени  $T_i$  с необходимой точностью даже в том случае, если некоторые значения из последовательности  $\vec{X}(T_i)$  ему известны.

Пусть  $\varepsilon > 0$  – погрешность определения злоумышленником состояния динамической системы  $\vec{X}(T_i)$ . Объем фазового пространства  $\{\vec{X}\}_{T_i}^\varepsilon = \{\vec{X} : \forall \vec{X}, |\vec{X} - \vec{X}(T_i)| < \varepsilon\}$  известен злоумышленнику,  $\{\vec{X}\}_{T_i}^\delta \in \{\vec{X}\}_{T_i}^\varepsilon$ . Если рассматривать  $\{X\}_{T_i}^\varepsilon$  как множество, содержащее непересекающиеся подмножества  $\{\vec{X}\}_{T_i}^\delta$ , то  $\{X\}_{T_i}^\varepsilon = \{\{\vec{X}_1\}_{T_i}^\delta, \{\vec{X}_2\}_{T_i}^\delta, \dots, \{\vec{X}_L\}_{T_i}^\delta\}$ . Пусть мощность  $M\{X\}_{T_i}^\varepsilon = L$ . Величина  $L$  определяет уровень безопасности ГСС. Если  $L$  больше значения  $L_m$ , определенного разработчиком в качестве параметра модели безопасности данной системы, использование ГСС безопасно [2].

При использовании безопасного ГСС для злоумышленника также вычислительно неразрешимы задачи уточнения состояния ГСС путем анализа временной эволюции. Это условие выполняется в случае локальной неустойчивости траекторий аттрактора в фазовом пространстве ГСС.

Оценим возможности злоумышленника по уточнению состояния ГСС по известным фрагментам  $\vec{X}(T_i)$ .

Пусть моделью ГСС является дискретное отображение

$$\vec{X}_{n+1} = \vec{F}(\vec{X}_n). \quad (1)$$

$\vec{X}_n^{\xi} = \vec{X}_n + \vec{\xi}_n$  – близкая к  $\vec{X}_n$  траектория в фазовом пространстве ГСС. Тогда, учитывая малость  $|\vec{\xi}_n|$  и линеаризуя уравнение (1) вблизи траектории  $\vec{X}_n$  в фазовом пространстве ГСС, получим уравнение для  $\vec{\xi}_n$

$$\begin{aligned} \vec{X}_{n+1}^{\xi} &= \vec{F}(\vec{X}_n + \vec{\xi}_n) = \vec{F}(\vec{X}_n) + [A(\vec{X}_n)] \vec{\xi}_n, \\ \vec{\xi}_{n+1} &= [A(\vec{X}_n)] \vec{\xi}_n, \end{aligned}$$

где  $[A(\vec{X}_n)]$  – матрица Якоби для  $\vec{F}(\vec{X}_n)$ .

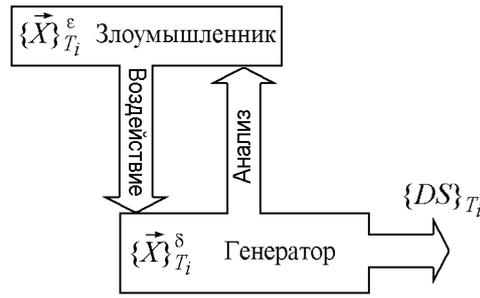


Рис. 1. Модель генератора случайных сигналов, работающего во враждебной среде

Рассмотрим эволюцию  $|\vec{\xi}_n|^2 = \vec{\xi}_n^T \vec{\xi}_n$ , где  $\vec{\xi}_n^T$  – транспонированный вектор начальных возмущений  $\vec{\xi}_n$

$$|\vec{\xi}_{n+1}|^2 = \vec{\xi}_n^T [A(\vec{X}_n)]^T [A(\vec{X}_n)] \vec{\xi}_n,$$

где  $[A(\vec{X}_n)]^T$  – транспонированная матрица  $[A(\vec{X}_n)]$ .

Рассмотрим матрицу  $[v(\vec{X}_n)] = [A(\vec{X}_n)]^T \times [A(\vec{X}_n)]$ . Собственные значения  $\chi_s$  и собственные векторы  $\vec{H}_s$  этой матрицы находятся из уравнения

$$[v(\vec{X}_n)] \vec{H}_s = \chi_s \vec{H}_s. \quad (2)$$

Задавая малое возмущение  $\vec{\xi}_n$  вдоль одного из собственных векторов  $\vec{H}_s$ , получим

$$\begin{aligned} |\vec{\xi}_{n+1}|^2 &= \vec{\xi}_n^+ [A(\vec{X}_n)]^T \times [A(\vec{X}_n)] \vec{\xi}_n = \chi_s |\vec{\xi}_n|^2, \\ \frac{|\vec{\xi}_{n+1}|}{|\vec{\xi}_n|} &= \sqrt{\chi_s}. \end{aligned} \quad (3)$$

Начальное малое возмущение будет возрастать, если  $\chi_s > 1$ . Если начальное возмущение возрастает для любого  $n$ , то ГСС безопасен для анализа в прямом времени по любому участку фазовой траектории, поскольку при попытках моделировать динамику генератора погрешность определения его состояния будет возрастать. Если отображение (1) необратимо, условием безопасности ГСС является  $\chi_s > 1$  для любого  $\vec{X}_n$ . Наличие положительного показателя Ляпунова отображения (1) является менее строгим требованием, поскольку на аттракторе системы возможны участки локально-устойчивых последовательностей  $\vec{X}_k$ , анализируя которые злоумышленник может уточнить состояние ГСС.

Если отображение (1) обратимо, злоумышленник может инвертировать время и попытаться уточнить состояние ГСС путем моделирования отображения, обратного (1)

$$\vec{\xi}_n = [A(\vec{X}_n)]^{-1} \vec{\xi}_{n+1}. \quad (4)$$

Аналогично получаем

$$\begin{aligned} [v(\vec{X}_n)]^{-1} &= \left( [A(\vec{X}_n)]^{-1} \right)^T \times [A(\vec{X}_n)]^{-1}, \\ \left( [A(\vec{X}_n)]^{-1} \right)^T \times [A(\vec{X}_n)]^{-1} \vec{H}_s &= \chi_s^r \vec{H}_s, \\ \frac{1}{\chi_s^r} \vec{H}_s &= [A(\vec{X}_n)] [A(\vec{X}_n)]^T \vec{H}_s = [A(\vec{X}_n)]^T [A(\vec{X}_n)] \vec{H}_s = [v(\vec{X}_n)] \vec{H}_s. \end{aligned}$$

Таким образом,  $\chi_s = 1/\chi_s^r$ , и ГСС будет безопасным для анализа в обратном времени, если одно из собственных значений  $\chi_s < 1$ .

Следовательно, если моделью ГСС является дискретное отображение, и в спектре собственных значений всех матриц малых возмущений  $\{[v(\vec{X}_n)], n = 1, 2, \dots, \infty\}$  есть хотя бы одно  $\chi_s > 1$  и  $\chi_s < 1$ , ГСС является безопасным по отношению к попыткам уточнить его состояние путем вычислений по известной с погрешностью  $\varepsilon$  временной последовательности  $\vec{X}_n$

$$\forall [v(\vec{X}_n)] \exists s : \chi_s > 1 \& \exists q : \chi_q < 1. \quad (5)$$

Менее строгим требованием безопасности является наличие хотя бы одного положительного и одного отрицательного показателя Ляпунова отображения (1).

Учитывая возможность внешнего воздействия на ГСС с целью изменения режима работы, необходимо, чтобы условие (5) сохранялось при любом возможном внешнем воздействии.

### Модель цифрового ГСС

Эффективная техническая реализация ГСС в цифровой системе возможна на базе модельного отображения на торе [5]

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}a_{12} \\ a_{21}a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} \text{mod}(1). \quad (6)$$

Из класса отображений, задаваемых уравнением (6), далее будут рассматриваться отображения, сохраняющие площадь  $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = 1$  и являющиеся отображениями гиперболического типа:  $(a_{11}+a_{22}) > 2$ ;  $a_{11}+a_{22} + \sqrt{(a_{11}+a_{22})^2 - 4} > 1$ ;  $a_{11}+a_{22} - \sqrt{(a_{11}+a_{22})^2 - 4} < 1$ . Эти условия являются достаточными для безопасности ГСС в рассмотренном ранее смысле.

В цифровых системах в качестве непрерывных переменных  $(x, y)$  удобно использовать длительность генерируемых импульсов. Импульс длительности  $\tau$  можно формировать с использованием реверсивного двоичного счетчика  $\tau = n\tau_g$ , где  $n$  – двоичное число, загружаемое в счетчик,  $\tau_g$  – период следования тактовых импульсов, подаваемых на счетчик. Двоичный счетчик разрядности  $N$  осуществляет счет по модулю  $2^N$ . Поэтому при использовании в ГСС счетчиков перепишем (6) для целочисленных переменных  $(k, m)$ :

$$\begin{pmatrix} k_{n+1} \\ m_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}a_{12} \\ a_{21}a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_n \\ m_n \end{pmatrix} \text{mod}(2^N). \quad (7)$$

Переход от (6) к (7) равносителен потере точности вычислений переменных  $(x, y)$ , которые определяются с погрешностью  $2^{-N}$ . Отображения (6) и (7) можно считать эквивалентными для достаточно больших  $N$ , учитывая, однако, что из-за конечности множества целых чисел, на котором задано отображение (7), последнее будет периодическим с периодом не более  $2^N$ .

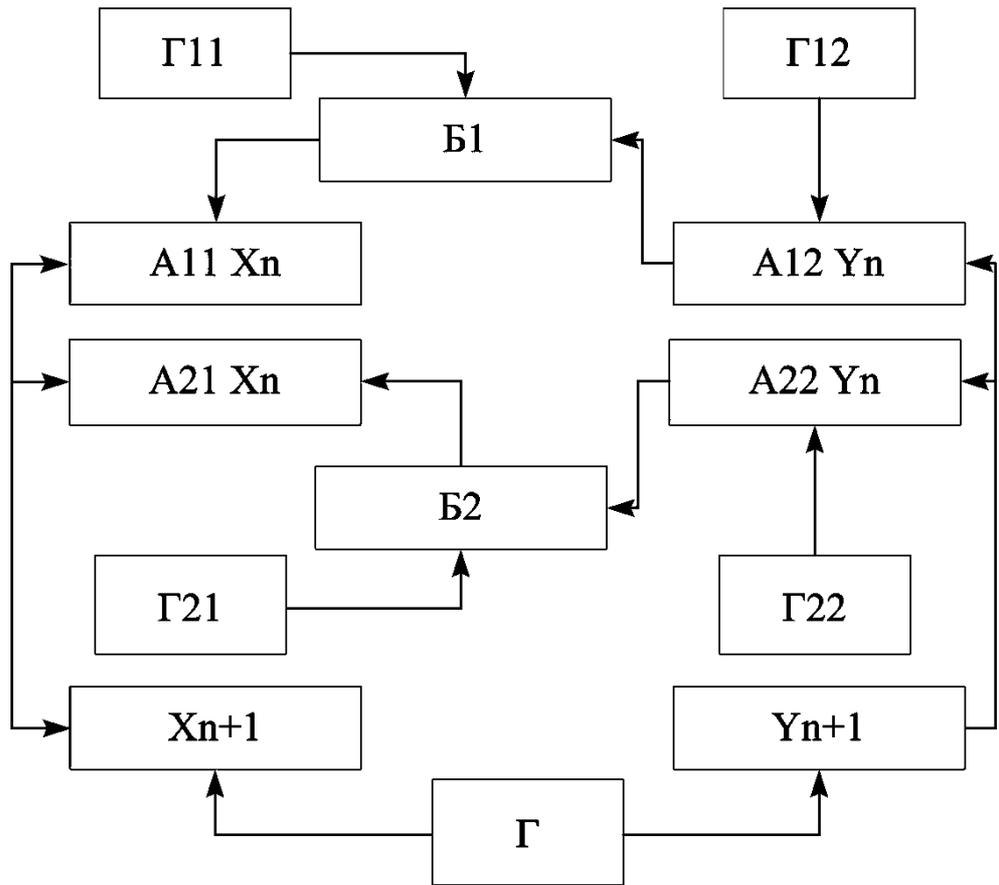


Рис. 2. Блок-схема ГСС на двоичных счетчиках

Построение цифрового ГСС, в котором реализуется модельное отображение Арнольда возможно на двоичных счетчиках. На рис. 2 представлена блок-схема разработанного ГСС. Моделирование архитектуры данного генератора выполнено на языке SystemC на уровне регистров и каналов передачи данных (RTL уровень) [6]. В процессе работы ГСС вырабатывает импульсы с длительностью, определяемой приведенным ниже выражением (8).

В общем случае ГСС состоит из четырех  $N$ -разрядных реверсивных двоичных счетчиков  $A11X_n$ ,  $A12Y_n$ ,  $A21X_n$ ,  $A22Y_n$ , двух обычных двоичных счетчиков  $X_{n+1}$ ,  $Y_{n+1}$  и, в общем случае, пяти генераторов тактовых импульсов  $\Gamma$ ,  $\Gamma11$ ,  $\Gamma12$ ,  $\Gamma21$ ,  $\Gamma22$ , а также логических блоков  $\text{Б}1$  и  $\text{Б}2$ , пропускающих импульсы от соответствующих генераторов  $\Gamma11$ ,  $\Gamma21$  при обнулении счетчиков  $A12Y_n$ ,  $A22Y_n$ , соответственно. Данную схему можно реализовать только на цифровых элементах, используя в качестве  $\Gamma$ ,  $\Gamma11$ ,  $\Gamma12$ ,  $\Gamma21$ ,  $\Gamma22$  быстродействующие автогенераторы, частота колебаний которых определяется инерционными свойствами используемых логических элементов [7]. Если  $\tau_g$  – период следования тактовых импульсов, подаваемых на генератор  $\Gamma$ , то  $\tau_{11} = a_{11}\tau_g$ ,  $\tau_{12} = a_{12}\tau_g$ ,  $\tau_{21} = a_{21}\tau_g$ ,  $\tau_{22} = a_{22}\tau_g$  – периоды следования тактовых импульсов генераторов  $\Gamma11$ ,  $\Gamma12$ ,  $\Gamma21$ ,  $\Gamma22$ , соответственно. Соотношение частот генераторов тактовых импульсов определяет коэффициенты отображения (6) и в конечном итоге характер динамики генератора.

В начальный момент времени счетчики  $X_{n+1}$ ,  $Y_{n+1}$  обнуляются, в  $A11X_n$ ,  $A21X_n$  заносится начальное значение  $k_0$ , а в счетчики  $A12Y_n$ ,  $A22Y_n$  заносится значение  $m_0$ . После этого тактовые импульсы от генераторов Г, Г12, Г22 подаются на соответствующие счетчики  $X_{n+1}$ ,  $Y_{n+1}$ ,  $A12Y_n$ ,  $A22Y_n$ , причем  $A12Y_n$ ,  $A22Y_n$  осуществляют реверсивный счет, а  $X_{n+1}$ ,  $Y_{n+1}$  – прямой. После обнуления счетчиков  $A12Y_n$ ,  $A22Y_n$  тактовые импульсы от генераторов Г11, Г21 через логические схемы Б1 поступают на счетчики  $A11X_n$ ,  $A21X_n$ , осуществляющие реверсивный счет. Цикл завершается в момент обнуления этих счетчиков. Для осуществления следующего цикла содержимое счетчиков  $X_{n+1}$ ,  $Y_{n+1}$  записывается в  $A11X_n$ ,  $A21X_n$  и  $A12Y_n$ ,  $A22Y_n$ , соответственно. Время, необходимое для совершения цикла по элементам  $k - T_{n+1}^k = k_{n+1}\tau_g = (a_{11}k_n + a_{12}m_n)\tau_g$ ; время, необходимое для совершения цикла по элементам  $m - T_{n+1}^m = m_{n+1}\tau_g = (a_{21}k_n + a_{22}m_n)\tau_g$ . Используя матричную запись, уравнения можно переписать в виде

$$\begin{pmatrix} T_{n+1}^k \\ T_{n+1}^m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}a_{12} \\ a_{21}a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_n^k \\ T_n^m \end{pmatrix} \bmod(2^N \tau_g). \quad (8)$$

Учитывая флуктуации периодов колебаний генераторов Г, Г11, Г12, Г21, Г22, длительности циклов  $T_n^k, T_n^m$  являются случайными величинами. Если флуктуации периодов колебаний генераторов – независимые случайные величины, распределение  $T_n^k, T_n^m$  будет нормальным:

$$\rho(T_n^k, T_n^m) = \frac{1}{2\pi k m \sigma} \exp\left(-\frac{(T_n^k - \mu(T_n^k))^2}{2k^2\sigma^2} - \frac{(T_n^m - \mu(T_n^m))^2}{2m^2\sigma^2}\right). \quad (9)$$

Здесь  $\sigma$  – дисперсия периодов поступающих на счетчик импульсов;  $\mu(T_n^k)$  и  $\mu(T_n^m)$  – математические ожидания длительностей циклов  $T_n^k$  и  $T_n^m$ ;  $k, m$  – число импульсов, которое поступило на двоичные счетчики за время  $T_n^k$  и  $T_n^m$ , соответственно. Поскольку  $k_n = \frac{T_n^k}{\tau_g}, m_n = T_n^m/\tau_g$ , целочисленные величины  $(k_n, m_n)$  отображения (7) станут случайными. Полагая, что  $\mu(\tau_g)$  – математическое ожидание  $\tau_g$ ,

$$P(k_n, m_n) = \int_{m_n\mu(\tau_g)}^{(m_n+1)\mu(\tau_g)} \int_{k_n\mu(\tau_g)}^{(k_n+1)\mu(\tau_g)} \rho(T_n^k, T_n^m) dT_n^k dT_n^m. \quad (10)$$

Преобразование (8) вследствие гиперболичности системы приводит к росту энтропии  $S$  в системе. С каждым циклом отображения (7) неопределенность в системе возрастает. Рассмотрим процесс роста  $S$  для  $(k_n, m_n)$ . Пусть  $\vec{H}_1, \vec{H}_2$  – собственные векторы, а  $\chi_1 > 1, \chi_2 < 1$  – собственные значения матрицы  $[A] = \begin{pmatrix} a_{11}a_{12} \\ a_{21}a_{22} \end{pmatrix}$ . Вдоль  $\vec{H}_1$  происходит растяжение, вдоль  $\vec{H}_2$  – сжатие. На рис. 3 представлена эволюция плотности распределения (9) при итерациях отображения Арнольда  $[A] = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$  для  $n = 0, 1, 2, 3$ . Вследствие сжатия вдоль направления  $\vec{H}_2$  двумерная плотность распределения быстро приближается к одномерной,

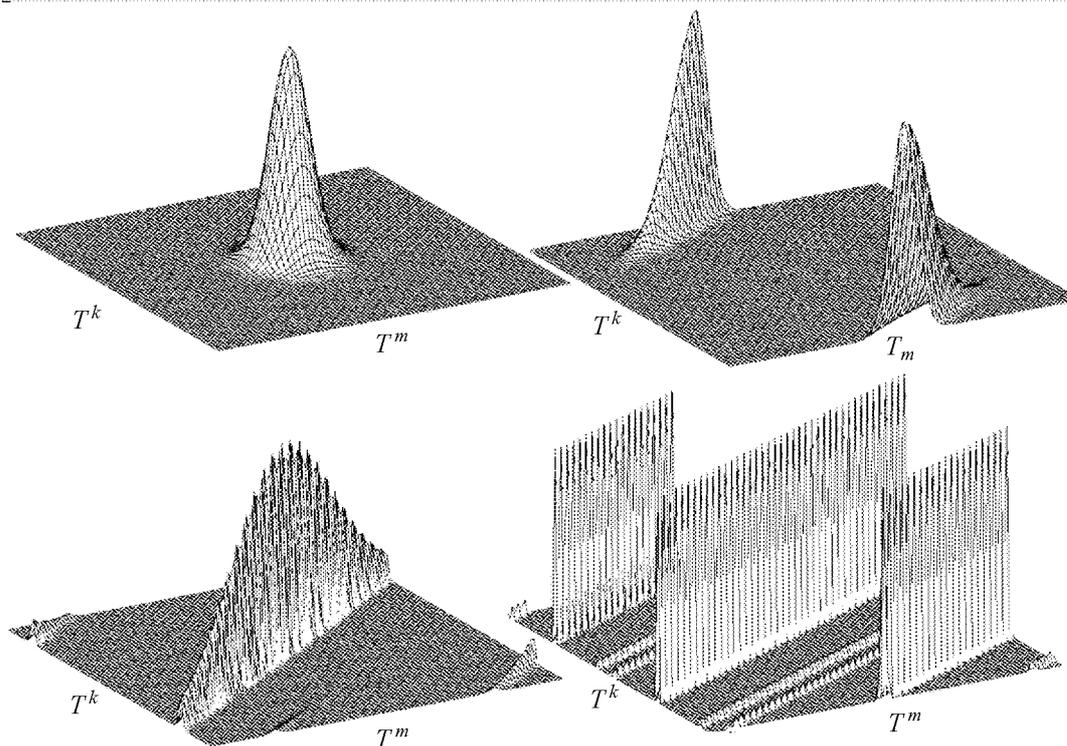


Рис. 3. Эволюция функции распределения плотности вероятности периода ГСС

и поверхность заполняется листами «всплесков» плотности вероятности. Частоты генераторов  $\Gamma$ ,  $\Gamma_{11}$ ,  $\Gamma_{12}$ ,  $\Gamma_{21}$ ,  $\Gamma_{22}$  необходимо выбирать так, чтобы обеспечить иррациональность углового коэффициента линии, вдоль которой расположен вектор  $\vec{H}_1$  [5]. В этом случае листы не перекрываются, а плотно заполняют всю поверхность, и энтропия, накапливаемая системой, будет максимальна:  $S_{\max} = 2N$ .

Вследствие растяжения вдоль направления  $\vec{H}_1$  энтропия системы  $S_n = -\sum_{k=1}^N \sum_{m=1}^N P(k_n, m_n) \log_2 P(k_n, m_n)$  растет линейно с шагом  $\Delta S = \log_2 \chi_1$  за каждую итерацию (7). При среднем времени выполнения цикла  $T_g \approx 2^{N-1} \tau_g$  производительность генератора в качестве источника энтропии  $P_S = (1/T_g) \log_2 \chi_1$ . Накопление максимальной энтропии происходит за  $L = (2N)/(\log_2 \chi_1)$  циклов, на которое затрачивается  $T_L = (2NT_g)/(\log_2 \chi_1) \approx (N2^N \tau_g)/(\log_2 \chi_1)$  времени. Если в некоторый момент времени стало известно состояние счетчиков ГСС, то за каждый цикл работы генератора происходит потеря информации о текущем состоянии  $\Delta I = \log_2 \chi_1$  [8]. Эффективным путем увеличения производительности генератора энтропии является сокращение  $T_g$ , менее эффективным – увеличение  $\chi_1$ .

Минимальная разрядность счетчиков определяется из соотношения  $N > \log_2(\tau_g/\sigma)$ . Оценим практическое число разрядов двоичных счетчиков и среднюю длительность цикла ГСС. Пусть генератор  $\Gamma$  работает на частоте  $f_0 = 100$  МГц, и его нестабильность определяется значением  $\sigma = 10^{-4}$ . В этом случае необходимо обеспечить  $N > 13$  (при  $N = 14$  средняя длительность цикла  $T_g$  будет около 164 мкс).

## Выводы

В работе предложена модель безопасности использования ГСС в системах генерации случайных чисел. Приведена архитектурная модель генератора импульсов случайной длительности с использованием только стандартных цифровых логических элементов, которая выполнена на уровне регистров и передачи данных. Динамика изменения длительности импульсов данного ГСС определяется двумерным отображением типа отображения Арнольда. Генератор удовлетворяет сформулированным в работе требованиям безопасности. Проведена оценка роста энтропии в системе и получено соотношение для минимальной разрядности используемых двоичных счетчиков. Данный генератор не обладает высоким быстродействием, однако, его быстродействия достаточно для применения данного генератора в качестве источника подкачки энтропии в криптографических системах генерации случайных чисел. Генератор прост, не требует наладки и может быть встроен в проектируемые системы на кристалле (SoC) или программируемую логическую матрицу (FPGA) путем проведения процедуры логического синтеза.

Если предположить возможность преднамеренного воздействия со стороны злоумышленника на ГСС, работающий за счет усиления естественных флуктуаций, возможно блокирование его функций за счет наводок на высокочувствительные входные каскады усилителей. В этом случае предпочтительно использование подхода, при котором используются «слабый источник энтропии», например, флуктуации периода колебаний обычного генератора тактовых импульсов, и динамическая система с хаотической динамикой, которая служит в качестве усилителя неопределенности.

## Библиографический список

1. *Menezes A., van Oorschot P., Vanstone S.* Handbook of applied cryptography CRC, 1997. P. 39.
2. *Фергюсон Н., Шнайер Б.* Практическая криптография/ Пер. с англ. М.: Издательский дом «Вильямс», 2005. С. 34,35,56,57,178–209.
3. *Kelsey J., Schneier B., Wagner D. and Hall C.* Cryptanalytic attacks on pseudorandom number generators // Fast Software Encryption. 5th International Workshop, FSE'98. Lecture Notes in Computer Science. Springer-Verlag. 1998. Vol. 1372. P. 168.
4. *Куприянов А.М.* Основы защиты информации: учеб. пособие для студ. высш. учеб. заведений / А.И.Куприянов, А.В.Сахаров, В. А. Шевцов. М.: Издательский центр «Академия», 2006. С. 48.
5. *Кузнецов С.П.* Динамический хаос. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2001. 296 с.
6. *Евтушенко Н.Д., Немудров В.Г., Сырцов И.А.* Методология проектирования систем на кристалле. Основные принципы, методы, программные средства // «Электроника». 2003. № 3.
7. *Опадчий Ю.Ф., Глудкин О.П., Гуров А.И.* Аналоговая и цифровая электроника. М.: «Горячая Линия – Телеком». 2000. С. 681, 682
8. *Шустер Г.* Детерминированный хаос: Введение. М.: Мир, 1988. С. 115.

*Поступила в редакцию 12.01.2009  
После доработки 3.04.2009*

## DIGITAL GENERATOR OF PUMPING OF ENTROPY ON THE BASIS OF ARNOLD'S MAPPING

*L.S. Sotov, V.N. Harin*

The digital generators model-based by two-dimensional mappings on toroid, in particular by mapping «Arnold's Cat», as the built-in sources of entropy working as a part of single-crystal cryptographic systems of generation of random numbers is discussed. The practical scheme of the generator on the binary counters, realised on element base of semiconductor factories is resulted. The comparative characteristic of pumping of entropy generators is discussed. Safety conditions are analyzed.

*Keywords:* Random number generator, chaotic dynamics, entropy input streams, cryptographic keys, probability distribution.

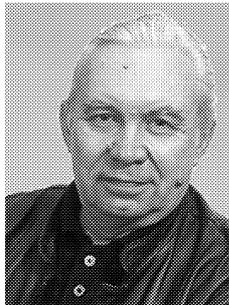


*Сотов Леонид Сергеевич* – родился в Саратове (1963), окончил Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского (1985). Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук (1991, СГУ) в области радиофизики и нелинейной динамики. Доцент кафедры общей физики СГУ. Опубликовал 50 научных статей.

410012 Саратов ул. Астраханская, 83

Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского

E-mail: slskit@mail.ru



*Харин Валерий Николаевич* – родился в 1940 году, окончил физический факультет Воронежского государственного университета (1962). Работал старшим инженером в НИИ физики ВГУ, ведущим инженером, начальником лаборатории, начальником отдела в ЦКБ НПО «Электроника». Впоследствии руководил отделением разработки программного обеспечения САПР в ОКБ при заводе «Процессор», являлся главным конструктором ряда направлений в Министерстве электронной промышленности СССР. В настоящее время работает профессором кафедры ВТиИС, д.т.н., профессор, лауреат Государственной премии СССР и Премии Совета Министров СССР. Имеет более 300 печатных работ, среди которых более 20 монографий и учебных пособий.

394613 Воронежская область, Воронеж, ул. Тимирязева, д. 8

Федеральное образовательное учреждение Воронежская государственная лесотехническая академия

E-mail: Valery-Harin@intercon.ru



## НАБЛЮДЕНИЕ БИФУРКАЦИЙ В ЛАЗЕРЕ С КРАТКОВРЕМЕННОЙ РЕЗОНАНСНОЙ МОДУЛЯЦИЕЙ ПОТЕРЬ НА НЕОДИМОВОМ СТЕКЛЕ

*Б.В. Аникеев, В.Н. Храмов, Е.В. Хайдуков*

Экспериментально обнаружен один из видов режима бифуркации периода следования ультракоротких импульсов в лазере с кратковременной резонансной модуляцией потерь на неодимовом стекле. Этот режим проявляется в удвоении периода следования ультракоротких импульсов в области малых расстройек модуляционной частоты и межмодового интервала. Обнаружено, что основным фактором, влияющим на этот эффект, является уровень накачки (усиление в активной среде).

*Ключевые слова:* Бифуркации, ультракороткие импульсы, период следования ультракоротких импульсов, кратковременная резонансная модуляция потерь.

### Введение

Основные характеристики и преимущества лазеров с кратковременной резонансной модуляцией потерь (КРМП-лазеров) [1] ранее были подробно изучены. К ним относятся: высокая точность временной электронной привязки [2], склонность к формированию высокоэнергетических цугов ультракоротких импульсов (УКИ) в различных активных средах оптического диапазона [3]. Показана высокая эффективность КРМП-лазера при использовании его в качестве задающего лазера при последующем сверхрегенеративном режиме усиления [4,5], а также показано наличие собственного чирпа (без применения внешних устройств) в УКИ этого лазера [6]. В последнее время наше внимание было обращено на эффекты, являющиеся следствием нелинейного взаимодействия в элементах такого лазера – удвоение, а иногда и учетверение периода следования УКИ в области малых расстройек между частотой модуляции потерь и межмодовой частотой лазера (частотного расстояния между аксиальными модами резонатора).

Похожие эффекты, связанные с удвоением периода следования УКИ в различных лазерных системах, ранее наблюдались и другими исследователями. Удвоение периода было экспериментально обнаружено в лазерах на центрах окраски с аддитивной синхронизацией мод с учетом керровской нелинейности [7,8]; авторами эффект объяснялся взаимодействием волн в двух резонаторах и нелинейностью процесса модуляции. Низкочастотные квазипериодические осцилляции были обнаружены и в He-Ne лазере с активной синхронизацией мод [9].

Заметим, что экспериментально бифуркации периода при нашей работе с основными распространенными твердотельными лазерами (рубин,  $\text{YAG:Nd}^{3+}$ ,  $\text{YAP:Nd}^{3+}$ , неодимовое стекло) наблюдались только в лазерах на неодимовом стекле. Возможно, это связано с особенностью процесса усиления УКИ в данном типе широкополосных активных сред. Благодаря широкому спектру спонтанного излучения происходит возбуждение различных импульсов, допускаемых системой «резонатор – активная среда лазера», при этом возможно и возникновение бифуркаций периода следования импульсов. Так, ранее [10] был зафиксирован довольно широкий спектр дополнительных резонансов мощности при расстройках  $\xi = (T_M - T_P)/T_P \cdot 100\%$  периода модуляции  $T_M$  и аксиального периода  $T_P$  в обе стороны. Это было объяснено с позиций возбуждения тех частотных компонент, которые образуются не при двукратном, а при многократном обходе резонатора волной. Правда, этот эксперимент был выполнен в рубиновом кристаллическом лазере с более узким частотным спектром, чем в лазере на стекле с неодимом.

Далее изложены основные экспериментальные результаты с точки зрения приведенных выше физических соображений.

## 1. Экспериментальные результаты

Бифуркации удвоения периода следования УКИ нами неоднократно наблюдались в КРМП-лазере на неодимовом стекле в условиях, когда на начальном этапе развития генерации, предшествующем полному включению режима, осуществляется модуляция глубиной до 100%. Причем, как показывает практика, это принципиально важно, так как обычно для достижения режима КРМП используется более чем двукратное превышение накачки над порогом генерации, и в этом случае обеспечение высококонтрастной модуляции избавляет нас от других типов колебаний, мешающих режиму (поперечные моды, пички, характерные для режима свободной генерации). И только в этом случае удается получать высококонтрастную последовательность УКИ интенсивностью до  $10^9$ – $10^{10}$  Вт/см<sup>2</sup> [11].

На рис. 1 показана типичная схема экспериментальной установки с КРМП-лазером на неодимовом стекле. Суть эксперимента заключается в том, что после мгновенного включения добротности (как в режиме гигантского импульса) в резонаторе лазера осуществляется очень кратковременная (в течение нескольких десятков обходов волной резонатора), но глубокая (практически 100%-я) резонансная электрооптическая модуляция потерь. Затем устанавливается максимальная для данного лазера добротность резонатора, и режим возбуждения УКИ свободно развивается, снимая полностью инверсию населенностей, накопленную в активной среде. Отличительной особенностью такого метода является использование высококонтрастного модулятора потерь 2 с обостренной модуляционной характеристикой [12]. Совместно со специальным управляющим генератором 4 он обеспечивает 100%-ю глубину модуляции и сравнительно малое время нахождения в открытом состоянии.

Другой особенностью установки является полное отсутствие частотной селекции резонатора лазера. Для этого активные элементы 6, 7 имеют скосы на торцах около 2°. Выходное зеркало 10 напылено на клиновидную подложку с клином 5°.

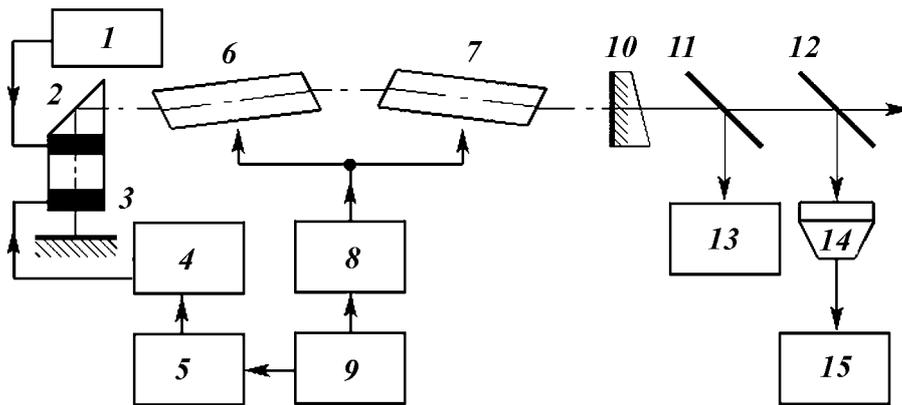


Рис. 1. Принципиальная блок-схема лазера, работающего в режиме КРМП: 1 – блок высокого напряжения; 2 – электрооптический затвор; 3 – зеркало с коэффициентом отражения 99%; 4 – высокочастотный генератор; 5 – блок высокого напряжения, формирующий прямоугольный высоковольтный импульс, МГИН-5; 6, 7 – активные элементы; 8 – блок управления и питания «Накачка 3000М» (блок накачки лазера); 9 – генератор импульсов Г5-54; 10 – зеркало-клин с коэффициентом отражения 55%; 11, 12 – светоделительные пластины; 13 – измеритель энергии ИМО-2Н; 14 – фотоэлементы коаксиальные ФК-32; 15 – шестиканальный скоростной осциллограф БЛОР-4М

В случае четвертьволнового варианта затвора 2 входная грань ориентирована под некоторым углом к оси резонатора, а при использовании двойного электрооптического затвора грани элементов затвора ориентированы под углом Брюстера к оси резонатора. Зеркало 3 выполняет роль «глухого» зеркала резонатора. Блоки 1, 4, 5 вырабатывают управляющий затвором электрический импульс.

В описанной установке при настройке резонанса частоты модуляции и частот межмодовых биений обнаружались некоторые особенности, выразившиеся в удвоении периода следования в цуге УКИ. На рис. 2, а показана типичная осциллограмма цуга генерации УКИ в КРМП-лазере при резонансе между периодом модуляции и аксиальным периодом; видно, что импульс следует со стабильным периодом  $T$ . Рис. 2, б отражает начальный этап возникновения бифуркаций (пропадание одного импульса в области малых расстройок модуляционного периода и аксиального периода). При дальнейшем увеличении расстройки  $\xi$  (более 0.06%) режим пульсации с удвоенным периодом исчезал. Рис. 2, а, б получены при использовании силикатного стекла ГЛС-1 в КРМП-лазере и четвертьволновой схемы модуляции. Такая же кинетика наблюдалась при использовании фосфатного стекла ГЛС-21 и двойного затвора, разработанного специально для КРМП-лазера [12]. Это наталкивает на мысль, что данное явление присуще именно неодимовым лазерам на стекле. Для схемы с двойным затвором результаты показаны на рис. 2, в, г, иллюстрирующих процесс возникновения бифуркации при обостренной функции модуляции, когда система становится более чувствительной к вносимым потерям. Осциллограмма на рис. 2, в получена при большей накачке, чем на рис. 2, г. По нашему мнению, сильная бифуркационная зависимость интенсивности УКИ от величины накачки, а также отсутствие положи-

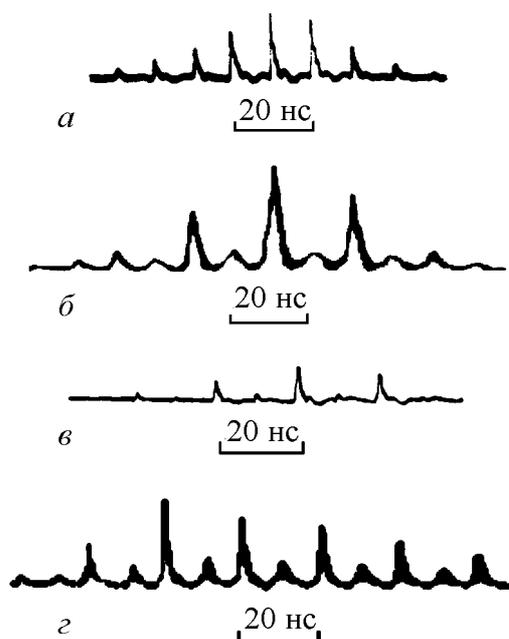


Рис. 2. Осциллограммы цуга УКИ КРМП-лазера: кинетика генерации при резонансе периода модуляции потерь и аксиального периода  $T = 10$  нс (*a*), при малой расстройке  $\xi$  периода модуляции потерь и аксиального периода (*b*) в КРМП-лазере на силикатном стекле ГЛС-1; кинетика генерации при малой расстройке  $\xi$  в КРМП-лазере на фосфатном стекле ГЛС-21 при различном превышении накачки над порогом (*в*, *г*)

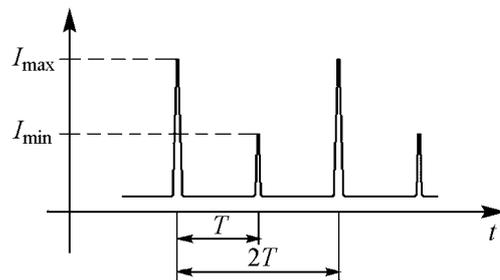


Рис. 3. Схема определения параметра  $I_{\min}/I_{\max}$  в бифуркационном режиме генерации

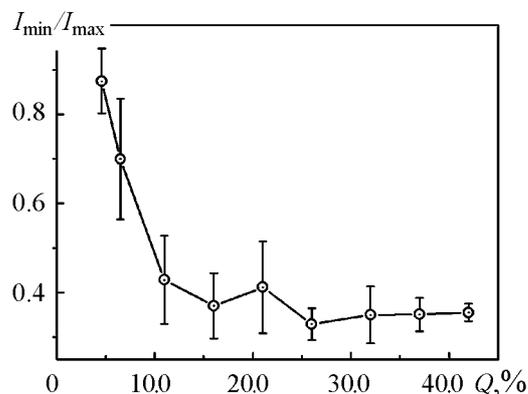


Рис. 4. Зависимость  $I_{\min}/I_{\max}$  от уровня относительной накачки  $Q$ , при котором наблюдается бифуркация

тельного результата в других экспериментах по бифуркации относительно кристаллических активных сред, говорит о том, что основным параметром, влияющим на эффективность возбуждения бифуркаций, является ширина спектра усиления активной среды. Это является общим свойством как для силикатных, так и для фосфатных стекол, имеющих более широкий спектр усиления по сравнению с кристаллическими активными средами.

В обеих схемах (как с четвертьволновым затвором, так и с двойным затвором) видна последовательность лазерных импульсов с удвоенным аксиальным периодом. Однако обе эти схемы объединяет одно не совсем понятное качество: бифуркации удвоения периода наблюдались при подходе с одной стороны – со стороны положительных расстроек. В варианте полуволновой схемы модуляции потерь было проведено исследование бифуркаций в зависимости от превышения порогового уровня накачки. Так, если изобразить схематически отдельный импульс, как показано на рис. 3, то мы можем обнаружить зависимость  $I_{\min}/I_{\max}$  от относительной накачки  $Q$  (превышения накачки над порогом режима свободной генерации) в виде графика на рис. 4. По мере увеличения накачки относительная интенсивность бифуркационного импульса падает по зависимости, близкой к экспоненциальной, то есть

бифуркации исчезают (практически остается только удвоенный период следования УКИ). Причем процесс исчезновения происходит начиная с уровня относительной накачки 25%.

Отметим также, что наблюдалось возбуждение (с весьма малой вероятностью) цугов с учетверенным периодом следования.

### **Заключение**

Представленные результаты получены в двух принципиально различных схемах – с модуляцией потерь в двойном затворе Поккельса [12] и в ее варианте при модуляции по четвертьволновой схеме. Результаты экспериментов по обеим схемам оказались сходными, их можно отнести к одному наблюдаемому нами физическому явлению – бифуркации удвоения периода следования УКИ. В обеих схемах один и тот же эффект обнаруживался в области малых расстройек, что, вполне возможно, приводило к слабому резонансному возбуждению оптической длины резонатора. В любом случае, странным представляется, что наблюдаемое удвоение периода происходит в условиях глубокой, практически 100%-й модуляции потерь, когда механизм модуляции должен бы полностью подавлять бифуркационные импульсы. По-видимому, здесь большую роль играет, во-первых, высокая добротность резонатора, во-вторых, максимальное усиление активной среды в условиях большой ширины ее линии.

Полученные данные говорят о том, что помимо большой ширины спектра неодимового лазера, способствующей наблюдаемому результату, играет роль и много-частотный характер спектра резонатора лазера [10]. Можно сделать вывод, что высококонтрастная модуляция потерь является высокоэффективным методом отбора отдельных частотных компонент системы, в число которых попадают и бифуркационные частоты.

Авторы приносят искреннюю благодарность бывшему сотруднику Левину К.А., участвовавшему на начальном этапе изложенных экспериментов и проявившему исключительную добросовестность в подготовке экспериментальных результатов, благодаря чему данная статья вообще стала возможной.

*Работа выполнена при финансовой поддержке Волгоградского государственного университета (гранты № 35-2007-а, № 41-2008-а).*

### **Библиографический список**

1. Аникеев Б.В. О динамике активной фазировки мод в импульсном лазере с периодической модуляцией потерь // Письма в ЖЭТФ. 1974. Т. 19, № 1. С. 34.
2. Аникеев Б.В., Храмов В.Н., Затрудина Р.Ш. Исследование точности временной привязки субнаносекундных импульсов лазера с кратковременной периодической модуляцией потерь // Квантовая электроника. 1993. Т. 20, № 7. С. 721.
3. Аникеев Б.В., Храмов В.Н., Левин К.А. Неодимовые лазеры с кратковременной периодической модуляцией потерь // Квантовая электроника. 1996. Т. 23, № 1. С. 59.

4. *Anikeev B.V., Khaydukov E.V., Khramov V.N., Mitrakhovich I.N., Sedov M.N.* Realization of a condition of super-regenerative amplification of USP in a laser system with an electromechanical shutter // Proc. SPIE. 2007. 6594. P. 65940V.
5. *Ганеев Р.А., Ганиханов Ф.Ш., Камалов Ш.Р., Редкоречев В.И., Усманов Т.* Высокоэффективные предусилители пикосекундных импульсов на неодимовом стекле и иттрий-алюминиевом гранате // Квантовая электроника. 1996. Т. 23, № 12. С. 1065.
6. *Anikeev B.V., Dronov S.A., Kirsanov M.V., Khramov V.N., Zatrudina R.Sh.* Possibility of self-injection realization in STRML laser with chirped USP // Proc. SPIE. 2001. 4751. P. 561.
7. *Sucha G., Bolton S.R., Weiss S., Chemla D.S.* Period doubling and quasi-periodicity in additive-pulse mode-locked lasers // Opt/ Lett. 1995. Vol. 20, № 17. P. 1794.
8. *Sucha G., Bolton S.R., Weiss S., Chemla D.S.* Period-doubling and quasi-periodicity in ultrafast lasers // IEEE Lasers and Electro-Optics Society. 1995. Vol. 9, № 6.
9. *Melnikov L.A., Rabinovich E.M., and Tuchin V.V.* Quasi-periodic oscillations and chaos in a gas-discharge active mode-locked laser // J. Opt. Soc. Am. B. 1988. Vol. 5. Issue 5. P. 1134.
10. *Аникеев Б.В., Андреев В.М., Фенчак В.А., Козубовский В.Р.* О характере пикового режима генерации при активной фазировке мод в рубиновом ОКГ // Украинский физический журнал. 1978. Т. 23. С. 1734.
11. *Anikeev B.V., Kas'yanov I.V., Khaydukov E.V., Khramov V.N.* Observation of effect of the USPs shortening at their self-action in high-temperature laser plasma // Proc. SPIE. 2007. 6726. P. 672619.
12. *Аникеев Б.В.* Исследование двойного затвора Поккельса в лазере с активной фазировкой спектра // В сб. «Квантовая электроника». Киев: Наукова думка. 1978, № 17. С. 77.

*Поступила в редакцию 14.01.2009*

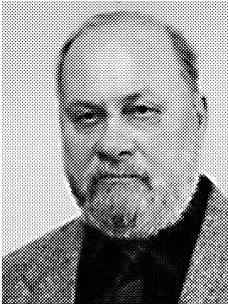
*После доработки 3.05.2009*

## **OBSERVATION OF BIFURCATIONS IN THE ND-GLASS LASER WITH SHORT-TIME RESONANT MODULATION OF LOSS**

*B.V. Anikeev, V.N. Khramov, E.V. Khaydukov*

The condition of a bifurcation of a round-trip time of ultrashort pulses (USP) in the Nd-laser with short-time resonant modulation of loss is found out experimentally. This condition is exhibited in the period doubling in the area of a small detunings of the modulation frequency and an intermodal interval. It is revealed, that the pumping level (amplification in the active medium) is a major factor, influencing this effect.

*Keywords:* Bifurcations, ultrashort pulses, round-trip time of ultrashort pulses, short-time resonant modulation of loss.



*Аникеев Борис Васильевич* – родился в Читинской области (1941), окончил Новосибирский государственный университет (1969), защитил диссертации на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук (1983) и доктора физико-математических наук (1994, СГУ, специальность «Оптика»). Область научных интересов: лазерная физика, физика ультракоротких лазерных импульсов, фоторефрактивные процессы в кристаллах, физика лазерной плазмы. С 1984 года работает в Волгоградском государственном университете. С 1992 года – заведующий научно-исследовательской лабораторией квантовой электроники ВолГУ. С 1996 по 2006 годы возглавлял организованную им кафедру лазерной физики. В настоящее время – профессор кафедры лазерной физики. Автор более 140 научных публикаций. Профессор (1998). Член-корреспондент Академии инженерных наук РФ. Почетный работник высшего образования РФ. 400062 Волгоград, пр. Университетский,100  
Волгоградский государственный университет  
E-mail: boris.anikeev@volsu.ru



*Храмов Владимир Николаевич* – родился в Волгоградской области (1964), окончил Волгоградский государственный университет (1986), защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук (1995 г., СГУ, специальность «Лазерная физика»). Работает в Волгоградском государственном университете с 1986 года. С 1996 года – доцент кафедры лазерной физики. С 2007 года – заведующий кафедрой лазерной физики. Доцент (1998). Область научных интересов: физика ультракоротких лазерных импульсов, взаимодействие мощного лазерного излучения с веществом, применение лазеров в медицине и биологии, физика лазерной плазмы. Автор 70 научных публикаций. 400062 Волгоград, пр. Университетский,100  
Волгоградский государственный университет  
E-mail: vladimir.khramov@volsu.ru



*Хайдуков Евгений Валерьевич* – родился в 1984 году. Окончил Волгоградский государственный университет (2007) по специальности «Лазерная техника и лазерные технологии». С 2007 года – аспирант. Область научных интересов: физика лазерной плазмы, высокоэнергетические лазерные системы, взаимодействие лазерного излучения с веществом. Автор 8 научных публикаций. 400062 Волгоград, пр. Университетский,100  
Волгоградский государственный университет  
E-mail: lf@volsu.ru



## СТОХАСТИЧЕСКАЯ ЧУВСТВИТЕЛЬНОСТЬ РАВНОВЕСИЙ И ЦИКЛОВ ОДНОМЕРНЫХ ДИСКРЕТНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ

*И.А. Баширцева, Л.Б. Ряшко, И.Н. Цветков*

На примере нелинейной популяционной модели Ферхюльста исследуется чувствительность циклов системы к случайным возмущениям. Анализ стохастической чувствительности осуществляется с использованием систем первого приближения. Демонстрируется соответствие полученных в численном эксперименте результатов теоретическим. Выявлена закономерность роста чувствительности циклов системы Ферхюльста при переходе к хаосу через каскады бифуркаций удвоения периода.

*Ключевые слова:* Модель Ферхюльста, циклы, стохастическая чувствительность.

### Введение

В литературе часто встречается утверждение об аналогии между переходами динамических систем от движений одного типа к движениям другого типа (например, от состояния равновесия к периодическому движению) и известными в статистической физике фазовыми переходами второго рода [1, 2]. Идея такой аналогии ведет свое начало от работы Г. Хакена [3] и в дальнейшем развита Ю.Л. Климонтовичем [4]. Эта аналогия оказалась весьма полезной, так как позволяет использовать методы теории фазовых переходов, например методы скейлинга и ренормализационной группы [5–7].

Регулярные аттракторы (равновесия и циклы) динамических систем, задаваемых детерминированными дискретными отображениями, являются классическими и наиболее изученными объектами современной теории устойчивости [8]. Прежде всего следует отметить исследования переходов от порядка к хаосу через последовательность бифуркаций удвоения периода в соответствии с законом Фейгенбаума [9–14]. Анализ устойчивости периодических орбит данных систем и оценки показателей Ляпунова приведены в работах [15–18].

В настоящее время внимание исследователей привлекает изучение реакций таких систем на внешние аддитивные и внутренние параметрические случайные возмущения. Большое число работ посвящено исследованию как переходных процессов, так и установившихся режимов – стохастических аттракторов [19–21]. В работах [22–26] показано влияние внешних возмущений на показатели Ляпунова и на интенсивность сплошного спектра цикла. Анализ скейлинга в цепи удвоения периода циклов при переходе к хаосу для стохастически возмущенных дискретных динамических систем посвящены работы [27–29].

Полное вероятностное описание случайных состояний системы требует построения функции плотности распределения. Изменение вероятностного распределения во времени задается соответствующим дискретным функциональным уравнением, решение которого даже в одномерном случае связано с большими сложностями. Здесь, наряду с известными проблемами численного решения, возникает необходимость знания закона распределения действующих случайных возмущений. Такая подробная вероятностная информация, как правило, недоступна. Типичной является ситуация, когда известными являются лишь оценки первых двух моментов. В этих обстоятельствах представляет интерес задача получения асимптотических характеристик первых двух моментов случайных состояний динамической системы для возмущений малой интенсивности. Действительно, для случая малых шумов, когда случайные состояния стохастических аттракторов локализируются вблизи соответствующих аттракторов детерминированных систем, отклонения случайно возмущенных траекторий от невозмущенных детерминированных решений можно описать линейными приближениями. Для систем с непрерывным временем, задаваемых стохастическими дифференциальными уравнениями, такой подход реализован на основе теории квазипотенциала с последующей аппроксимацией с помощью функции стохастической чувствительности [30–33].

Метод функции стохастической чувствительности (ФСЧ) для систем из двух стохастических дифференциальных уравнений впервые был описан в [30], где с помощью этого метода была найдена зона сверхчувствительности циклов брюсселятора к случайным возмущениям. Возможности метода ФСЧ для систем Лоренца и Ресслера в зоне удвоения периода исследованы в [31, 32]. В работе [33] представлен общий метод построения ФСЧ для циклов трехмерных систем, использующий технику спектрального разложения. Исследованию возможностей ФСЧ в задачах конструирования систем с циклами, имеющими заданные вероятностные характеристики, и подавления хаоса, посвящена работа [34].

Данная работа посвящена распространению аналогичного подхода на дискретные динамические системы.

В разделе 1 вводится конструкция функции стохастической чувствительности для равновесий и циклов общей одномерной дискретной динамической системы. Здесь для значений ФСЧ получены явные параметрические формулы. В разделе 2 на основе метода ФСЧ проводится анализ стохастически возмущенного квадратичного отображения – модели Ферхюльста. Детально исследована стохастическая чувствительность аттракторов (равновесий и циклов) в зонах структурной устойчивости. Показано, что при переходе от порядка к хаосу в цепи бифуркаций удвоения периода стохастическая чувствительность аттракторов растет как геометрическая прогрессия.

## 1. Функция стохастической чувствительности

Рассмотрим стохастическую систему

$$x_{t+1} = f(x_t) + \varepsilon \sigma(x_t) \xi_t, \quad (1)$$

где  $f(x)$  – достаточно гладкая функция, а  $\xi_t$  – некоррелированный случайный процесс с параметрами

$$E\xi_t = 0, \quad E\xi_t^2 = 1, \quad E\xi_t \xi_k = 0 \quad (t \neq k),$$

$E$  – знак математического ожидания. Функция  $\sigma(x)$  позволяет учесть зависимость интенсивности помех от состояния системы. Пусть  $\bar{x}_t$  – решение детерминированной системы (1) при  $\varepsilon = 0$ . Рассмотрим  $x_t^\varepsilon$  – решение (1) с начальным условием  $x_0^\varepsilon = \bar{x}_0 + \varepsilon\xi$ . При малых  $\varepsilon$  чувствительность детерминированного решения  $\bar{x}_t$  к случайным возмущениям определяется величиной

$$v_t = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{x_t^\varepsilon - \bar{x}_t}{\varepsilon}.$$

Для  $v_t$  справедлива система

$$v_{t+1} = a_t v_t + \sigma_t \xi_t, \quad (2)$$

где  $a_t = df(\bar{x}_t)/dx$ ,  $\sigma_t = \sigma(\bar{x}_t)$ ,  $v_0 = \xi$ . Стохастическая динамика последовательности  $v_t$  определяется изменением первых моментов  $m_t = Ev_t$ ,  $V_t = Ev_t^2$ . Для  $m_t$  и  $V_t$  справедливы следующие уравнения:

$$m_{t+1} = a_t m_t, \quad (3)$$

$$V_{t+1} = a_t^2 V_t + \sigma_t^2 \quad (4)$$

с начальным условием  $m_0 = E\xi$ ,  $V_0 = E\xi^2$ .

В данной работе исследуется стохастическая чувствительность стационарного и периодических решений. Пусть в системе (1) при  $\varepsilon = 0$  имеется устойчивое равновесие  $\bar{x}_t \equiv \bar{x}$ . В этом случае системы (2) – (4) имеют вид

$$v_{t+1} = a v_t + \sigma \xi_t,$$

$$m_{t+1} = a m_t,$$

$$V_{t+1} = a^2 V_t + \sigma^2,$$

где  $a = df(\bar{x})/dx$ ,  $\sigma = \sigma(\bar{x})$ . Неравенство  $|a| < 1$  является необходимым и достаточным условием экспоненциальной устойчивости равновесия  $\bar{x}$ . При этом последовательности  $m_t$  и  $V_t$  стабилизируются следующим образом:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} m_t = 0, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} V_t = w = \frac{\sigma^2}{1 - a^2}. \quad (5)$$

При малом  $\varepsilon$  в системе (1) вокруг устойчивого равновесия  $\bar{x}$  формируется стационарное распределение состояний  $\bar{x}_t^\varepsilon$  с дисперсией  $D(\bar{x}_t^\varepsilon)$ . Рассмотрим отношение

$$w = \frac{1}{\varepsilon^2} D(\bar{x}_t^\varepsilon).$$

Величина  $\varepsilon^2 w$  является первым приближением  $D(\bar{x}_t^\varepsilon)$ . Связывая в системе (1) значения входа  $\varepsilon^2$  и выхода  $D(\bar{x}_t^\varepsilon) \approx \varepsilon^2 w$ ,  $w$  играет роль *коэффициента стохастической чувствительности* равновесия  $\bar{x}$ .

Рассмотрим теперь случай, когда система (1) при  $\varepsilon = 0$  имеет  $k$ -цикл  $\Gamma$  – множество точек  $\Gamma = \{\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_k\}$ , связанных соотношениями

$$f(\bar{x}_i) = \bar{x}_{i+1} \quad (i = 1, \dots, k-1), \quad f(\bar{x}_k) = \bar{x}_1.$$

Считаем, что последовательность  $\bar{x}_t$  определена при всех  $t$  с условием периодичности  $\bar{x}_{t+k} = \bar{x}_t$ . Предполагается, что цикл  $\Gamma$  является экспоненциально устойчивым. В этом случае системы (2)–(4) имеют периодические коэффициенты

$$a_{t+k} = a_t, \quad \sigma_{t+k} = \sigma_t.$$

Пусть  $a = a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_k$ . Неравенство  $|a| < 1$  является необходимым и достаточным условием экспоненциальной устойчивости цикла. При этом последовательность  $m_t$  стремится к нулю, а последовательность  $V_t$  сходится к периодической последовательности  $w_t$  ( $w_{t+k} = w_t$ )

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (V_t - w_t) = 0.$$

Элементы последовательности  $w_t$  могут быть найдены следующим образом: величина  $w_1$  находится по явной формуле  $w_1 = q/(1 - a^2)$ ,  $q = \sigma_k^2 + a_k^2 \sigma_{k-1}^2 + \dots + (a_k \cdot \dots \cdot a_2)^2 \sigma_1^2$ , а остальные  $w_i$  находятся рекуррентно (см. Приложение)

$$w_i = a_{i-1}^2 w_{i-1} + \sigma_{i-1}^2 \quad (i = 2, \dots, k).$$

Условие  $|a| < 1$  гарантирует у системы (1) при малых шумах существование стационарно распределенного решения. Величины  $\varepsilon^2 w_t$  являются первым приближением дисперсии этого стационарно распределенного решения в окрестности точки  $\bar{x}_t$  цикла  $\Gamma$ .

Значения  $w_1, \dots, w_k$  введенной здесь  $k$ -периодической функции  $w_t$  характеризуют реакцию точек  $\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_k$  цикла  $\Gamma$  на малые случайные воздействия системы (1). Функцию  $w_t$  будем называть *функцией стохастической чувствительности цикла*.

#### **Явные формулы для значений функции стохастической чувствительности.**

*Случай 2-цикла.* Для цикла, состоящего из двух точек  $\bar{x}_1, \bar{x}_2$ , имеем

$$w_1 = \frac{\sigma_2^2 + a_2^2 \sigma_1^2}{1 - a_1^2 a_2^2}, \quad w_2 = \frac{\sigma_1^2 + a_1^2 \sigma_2^2}{1 - a_1^2 a_2^2}.$$

*Случай  $k$ -цикла.* Пусть цикл  $\Gamma$  состоит из точек  $\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_k$ . Тогда для каждой точки  $\bar{x}_i$  функция стохастической чувствительности находится по явной формуле

$$w_i = \frac{\sigma_{k+i-1}^2 + \sigma_{k+i-2}^2 a_{k+i-1}^2 + \dots + \sigma_i^2 \prod_{j=1; j \neq i}^k a_j^2}{1 - \prod_{j=1}^k a_j^2}. \quad (6)$$

Величины  $m = \min_{i=1, \dots, k} w_i$ ,  $M = \max_{i=1, \dots, k} w_i$  характеризуют диапазон изменения стохастической чувствительности состояний  $k$ -цикла. Их отношение  $M/m$  может служить показателем неравномерности стохастической чувствительности цикла. Величину  $M$  удобно использовать в качестве характеристики стохастической чувствительности аттрактора в целом; будем называть ее показателем стохастической чувствительности.

## 2. Система Ферхюльста

Рассмотрим стохастическую систему Ферхюльста

$$x_{t+1} = \mu x_t(1 - x_t) + \varepsilon \xi_t, \quad (7)$$

где  $\xi_t$  – независимые случайные величины с параметрами  $E\xi_t = 0$ ,  $E\xi_t^2 = 1$ , а  $\varepsilon$  – интенсивность шумов.

При отсутствии случайных возмущений ( $\varepsilon = 0$ ) детерминированная модель (7) имеет на интервале  $0 \leq \mu \leq 4$  различные типы динамики. Зоны порядка чередуются с зонами хаоса (рис. 1). На интервале  $I = (1, \mu_\infty)$ , где наблюдаются бифуркации удвоения периода, можно выделить зоны структурной устойчивости с постоянной кратностью циклов, разделенные точками бифуркаций – интервалы  $I_0, I_1, \dots$ . На интервале  $I_n$  наблюдаются  $2^n$ -циклы с состояниями  $\bar{x}_{n,i}(\mu)$  ( $i = 1, \dots, 2^n$ ). Точки аттрактора удобно упорядочить так, чтобы первой была точка цикла  $\bar{x}_{n,1}$ , являющаяся ближайшей к 0.5:  $1 = \operatorname{argmin}_{i=1, \dots, 2^n} |\bar{x}_{n,i}(\mu) - 0.5|$ . Для системы (7) имеем  $I_0 = (1, 3)$ ,  $I_1 \approx (3, 3.45)$ ,  $I_2 \approx (3.45, 3.54)$  и т.д. При этом на  $I_0$  имеем одну устойчивую точку покоя  $\bar{x}_{0,1}(\mu) = 1 - 1/\mu$ , на  $I_1$  имеем 2-цикл с состояниями

$$\bar{x}_{1,1}(\mu) = \frac{\mu + 1 - \sqrt{(\mu + 1)(\mu - 3)}}{2\mu}, \quad \bar{x}_{1,2}(\mu) = \frac{\mu + 1 + \sqrt{(\mu + 1)(\mu - 3)}}{2\mu}.$$

С ростом параметра  $\mu$  точки бифуркации накапливаются к значению  $\mu_\infty = 3.5699\dots$

Рассмотрим бифуркационную диаграмму системы (7) при  $\varepsilon = 0.001$ . Под воздействием случайных возмущений траектории покидают аттрактор детерминированной системы (7), формируя вокруг него стохастический аттрактор с соответствующим стационарным вероятностным распределением. В присутствии шума тонкая структура детерминированного аттрактора размывается (рис. 2). Как видно из рисунка, разброс случайных состояний неоднороден. При изменении параметра  $\mu$  на интервале структурной устойчивости дисперсия заметно меняется, резко возрастая вблизи точек бифуркации. На интервале  $I_1$  наблюдается различие в разбросе случайных состояний вокруг точек  $\bar{x}_{1,1}(\mu)$ ,  $\bar{x}_{1,2}(\mu)$ , соответствующих детерминированному 2-циклу: нижняя ветка размывается сильнее верхней.

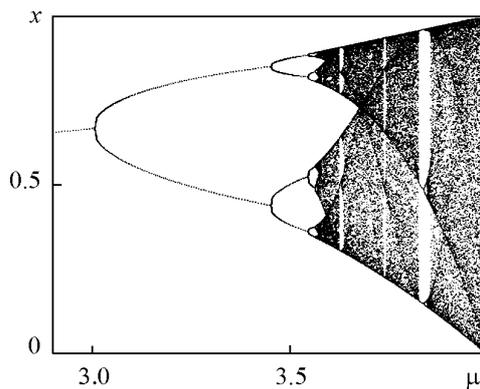


Рис. 1. Бифуркационная диаграмма детерминированной модели Ферхюльста при отсутствии возмущений

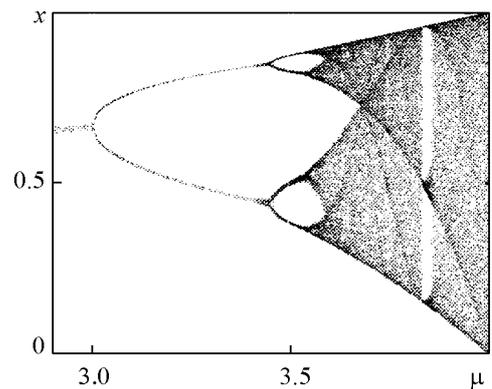


Рис. 2. Бифуркационная диаграмма в присутствии шума интенсивностью  $\varepsilon = 0.001$

Детальную картину указанных особенностей зависимости разброса траекторий для различных точек аттрактора от параметра  $\mu$  дает функция стохастической чувствительности. На каждом интервале структурной устойчивости  $I_n$  определен набор функций  $w_{n,i}(\mu)$  ( $i = 1, \dots, 2^n$ ), где  $w_{n,i}(\mu)$  задает стохастическую чувствительность  $\bar{x}_{n,i}$   $i$ -го состояния  $2^n$ -цикла при  $\mu \in I_n$ . Значения функции стохастической чувствительности на интервале  $I_n$  находятся по рекуррентным формулам

$$w_{n,1}(\mu) = \frac{q_n}{1 - a_n^2}, \quad a_n = a_{n,1} \dots a_{n,k}, \quad k = 2^n, \quad a_{n,i} = \mu(1 - 2\bar{x}_{n,i}(\mu)), \quad (8)$$

$$q_n = 1 + a_{n,k}^2 + a_{n,k}^2 a_{n,k-1}^2 + \dots + a_{n,k}^2 \dots a_{n,2}^2, \quad (9)$$

$$w_{n,i+1}(\mu) = a_{n,i}^2 w_{n,i}(\mu) + 1. \quad (10)$$

На интервалах  $I_0$  и  $I_1$  для функции стохастической чувствительности соответствующих аттракторов – равновесия  $\bar{x}_{0,1}(\mu)$  и 2-цикла с состояниями  $\bar{x}_{1,1}(\mu)$ ,  $\bar{x}_{1,2}(\mu)$  – можно получить явное представление

$$w_{0,1}(\mu) = \frac{1}{1 - (2 - \mu)^2},$$

$$w_{1,1}(\mu) = \frac{2 + 2\sqrt{D} + D}{D(2 - D)}, \quad w_{1,2}(\mu) = \frac{2 - 2\sqrt{D} + D}{D(2 - D)}, \quad D = (\mu - 3)(\mu + 1).$$

По данным прямого численного моделирования решений стохастической системы (7) для выборки случайных состояний, разбросанных в окрестности точки  $\bar{x}_{n,i}(\mu)$ , можно найти эмпирическую дисперсию  $D_{n,i}(\mu)$ .

Величины  $\bar{w}_{n,i}(\mu) = (1/\varepsilon^2)D_{n,i}(\mu)$  характеризуют стохастическую чувствительность аттракторов системы (7) при фиксированной интенсивности  $\varepsilon$  действующих шумов. На рис. 3 сплошными линиями изображены ветви функции стохастической чувствительности  $w_{n,i}(\mu)$  на интервалах  $I_0, I_1, I_2, I_3$  и звездочками отмечены значения  $\bar{w}_{n,i}(\mu)$ , полученные прямым численным моделированием решений системы (7) при шумах различной интенсивности. Как видим, при малых возмущениях теоретические кривые хорошо совпадают с эмпирическими данными. Однако, в силу высокой чувствительности системы вблизи точек бифуркаций, стохастическая чувствительность, полученная с помощью линейного приближения, не совпадает с эмпирическими данными для конечного шума. Эта разница становится более заметной с ростом кратности цикла и увеличением интенсивности возмущений.

В поведении ветвей функции стохастической чувствительности наблюдаются следующие общие закономерности. На интервале структурной устойчивости стохастическая чувствительность ведет себя достаточно регулярно: при приближении к концам интервала (точкам бифуркации) – неограниченно возрастает, выпукла вниз, имеет минимум в центральной части интервала. Стохастическая чувствительность элементов цикла существенно различается. При этом, чем выше кратность цикла, тем больше перепад значений функции стохастической чувствительности (см. рис. 3).

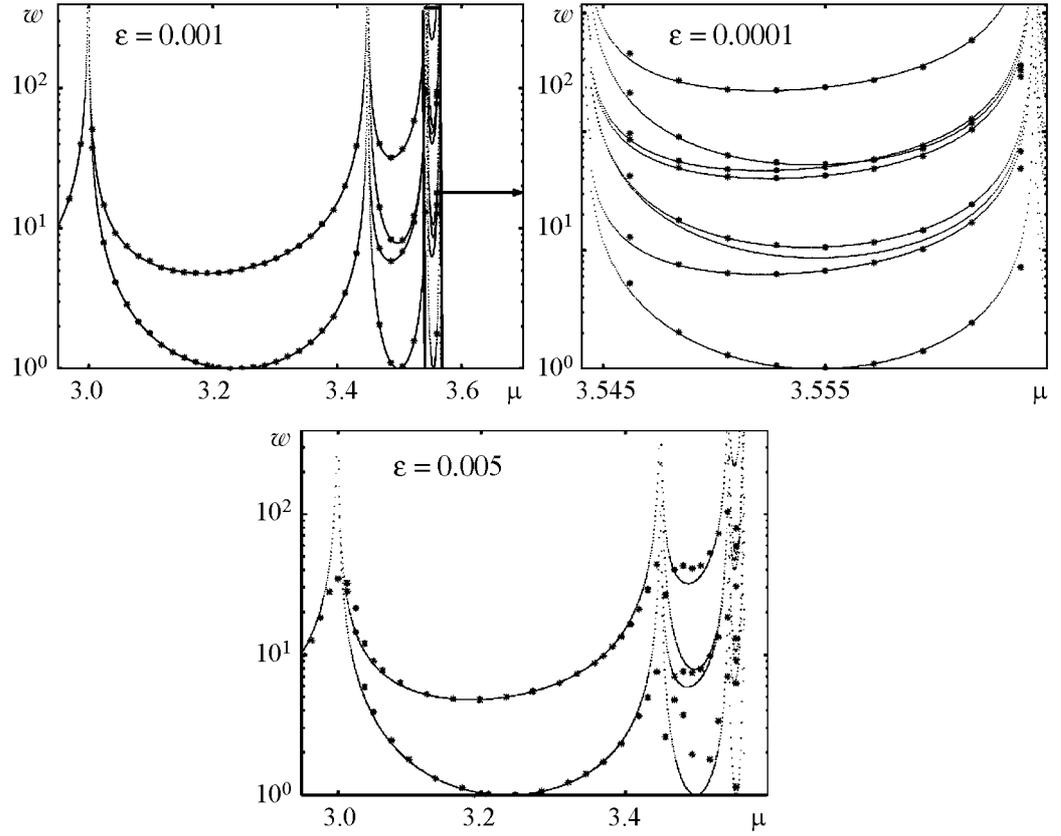


Рис. 3. Функции стохастической чувствительности

Рассмотрим функции  $m$  и  $M$ , задаваемые на каждом отдельном интервале  $I_n$  соотношениями

$$m(\mu) = \min_{i=1, \dots, 2^n} w_{n,i}(\mu), \quad M(\mu) = \max_{i=1, \dots, 2^n} w_{n,i}(\mu).$$

Рассмотрим зависимость функций  $m(\mu)$ ,  $M(\mu)$  и показателя неравномерности стохастической чувствительности  $K = M/m$  от параметра  $\mu$ . На каждом интервале  $I_n$  существует значение  $\mu_n$ , при котором показатель  $M(\mu)$  принимает наименьшее значение

$$\mu_n = \operatorname{argmin}_{\mu \in I_n} M(\mu), \quad M_n = \min_{\mu \in I_n} M(\mu).$$

Рассмотрим величины

$$m_n = m(\mu_n), \quad K_n = \frac{M(\mu_n)}{m(\mu_n)}.$$

Среди всех стохастических  $2^n$ -циклов, наблюдаемых на интервале  $I_n$ , цикл, отвечающий значению  $\mu = \mu_n$ , является наименее чувствительным. Будем называть его *стохастическим суперциклом*. Следует отметить, что уже в случае 2-цикла стохастический суперцикл отличается от детерминированного суперцикла:  $\mu_{\text{det}} = 1 + \sqrt{5} \approx 3.236$ ;  $\mu_{\text{stoch}} \approx 3.185$ . Наиболее чувствительным в  $2^n$ -цикле является состояние  $\bar{x}_{n,1}$ , а наименее чувствительным – следующее за ним  $\bar{x}_{n,2}$ .

Из формулы (8) следует, что при всех  $\mu \in I$  выполняется неравенство  $m \geq 1$ . На каждом интервале  $I_n$  имеем  $\min_{\mu \in I_n} m(\mu) = 1$ , причем минимум достигается в точках детерминированного суперцикла. Значения  $m(\mu)$  в центральной части каждого интервала  $I_n$  мало отличаются от 1. Следовательно,  $m_n \approx 1$ ,  $K_n \approx M_n$ . Значения  $\mu_n$ ,  $M_n$  для интервалов  $I_n$  структурной устойчивости системы (7) представлены в таблице.

Таблица

$n$	$\mu_n$	$M_n$	$\eta_n = \frac{M_{n+1}}{M_n}$
0	2.0	1.0	4.7775
1	3.1855	4.7775	6.7042
2	3.4876	32.0296	6.9088
3	3.5522	221.2874	6.9777
4	3.56615	1544.0766	6.9899
5	3.56911	10793.038	6.9928
6	3.56977	75474.078	6.9934
7	3.56990	527822.22	6.9935

Как видим, в цепи бифуркаций удвоения периода стохастическая чувствительность циклов неограниченно возрастает. Для больших  $n$  последовательность  $M_n$  ведет себя как геометрическая прогрессия со знаменателем  $\eta$

$$\eta = \lim_{n \rightarrow \infty} \eta_n = 6.99 \dots$$

При увеличении  $n$  растет неравномерность стохастической чувствительности циклов. Если у 2-цикла чувствительность состояний различается в 5 раз, то уже для 32-цикла это различие достигает  $10^4$ .

В работах [23, 27–29] рассматривалось влияние внешнего шума на свойство самоподобия участков бифуркационной диаграммы. Показано, что, если уменьшать интенсивность воздействия в  $\mu_F = 6.61903\dots$  раз при переходе через точки бифуркации, то для некоторых участков бифуркационной диаграммы наблюдается самоподобие. Используя метод функций стохастической чувствительности, значение  $\mu_F$  можно связать с показателем роста чувствительности  $\eta_n$  следующей формулой:

$$\mu_F^2 = \eta \alpha^2,$$

где  $\alpha = -2.5029\dots$  – вторая константа Фейгенбаума.

Введенная конструкция функции стохастической чувствительности позволяет охватить и случай мультипликативных шумов. Для системы Ферхюльста с мультипликативными шумами наблюдается подобный геометрический рост стохастической чувствительности при удвоении периода, при этом предел соответствующей последовательности  $\eta_n$  не зависит от вида шума. Похожие свойства были обнаружены для некоторых потоковых систем. Для систем Лоренца и Ресслера авторами была получена [32, 33] константа роста чувствительности, близкая к 6.99.

### Заключение

В данной статье были рассмотрены детерминированные и стохастические циклы системы Ферхюльста в зоне бифуркаций удвоения периода при переходе к хаосу.

Для исследования отклика циклов на малые случайные возмущения предлагается использовать функцию стохастической чувствительности. Получена явная формула вычисления функции чувствительности в каждой точке цикла детерминированной системы.

Для системы Ферхюльста со случайными возмущениями представлена стохастическая бифуркационная диаграмма, дающая общую картину чувствительности циклов системы к случайным возмущениям. Показано общее повышение чувствительности при переходе к хаосу. Точную количественную оценку влияние шума на предельные циклы детерминированной системы дает функция стохастической чувствительности. Данная функция позволяет сравнить между собой восприимчивость всех состояний цикла к случайным воздействиям и проследить изменения чувствительности как на интервале структурной устойчивости, так и при переходе к циклам большей кратности. Для построения функции чувствительности использовался эмпирический подход, а также метод, основанный на использовании систем первого приближения.

Показано явное увеличение чувствительности системы Ферхюльста к случайным возмущениям в цепи бифуркаций удвоения периода. Установлен показатель геометрического роста чувствительности стохастических суперциклов. Следует также отметить хорошее соответствие эмпирических данных теоретическим результатам.

*Работа выполнена при частичной поддержке грантов РФФИ № 09-01-00026, № 09-08-00048, Федерального агентства по образованию № 2.1.1/2571, ФЦП 02.740.11.02.02.*

## Приложение

**Утверждение.** Пусть у системы (1) при  $\varepsilon = 0$  имеется устойчивый  $k$ -цикл  $\Gamma$ . Тогда последовательность  $m_t$  стремится к нулю, а последовательность  $V_t$  сходится к периодической последовательности  $w_t$  ( $w_{t+k} = w_t$ ), элементы которой могут быть найдены следующим образом: величина  $w_1$  находится по явной формуле  $w_1 = q/(1 - a^2)$ ,  $q = \sigma_k^2 + a_k^2 \sigma_{k-1}^2 + \dots + (a_k \cdot \dots \cdot a_2)^2 \sigma_1^2$ , а остальные  $w_i$  находятся рекуррентно

$$w_i = a_{i-1}^2 w_{i-1} + \sigma_{i-1}^2 \quad (i = 2, \dots, k).$$

**Доказательство.** Последовательные  $k$  итераций систем (3)–(4) с учетом периодичности  $a_t$  и  $\sigma_t$  можно записать в виде

$$m_{(l+1)k+1} = am_{lk+1} \quad (11)$$

$$V_{(l+1)k+1} = a^2 V_{lk+1} + q. \quad (12)$$

Неравенство  $|a| < 1$  является необходимым условием экспоненциальной устойчивости цикла  $\Gamma$ . С учетом этого из уравнения (11) следует, что для любого  $k$  последовательность  $m_{lk+1}$  стремится к нулю при  $l \rightarrow \infty$ . Следовательно, в силу системы (3), и вся последовательность  $m_t$  стремится к нулю при  $t \rightarrow \infty$ .

Рассмотрим произвольную последовательность  $V_t$ , задаваемую системой (4), и разность  $\Delta_t = V_t - w_t$ . Из (12) и определения  $w_t$  следует, что

$$\Delta_{(l+1)k+1} = a^2 \Delta_{lk+1}, \quad \Delta_{lk+i+1} = a_i^2 \Delta_{lk+i}. \quad (13)$$

В условиях  $|a| < 1$  из (13) следует, что  $\lim_{t \rightarrow \infty} \Delta_t = 0$ . Таким образом, утверждение доказано.

## Библиографический список

1. *Полак Л.С., Михайлов А.С.* Самоорганизация в неравновесных физико-химических системах. М.: Наука, 1983.
2. *Стенли Г.* Фазовые переходы и критические явления. М.: Мир, 1973.
3. *Naken H.* Synergetics – a field beyond irreversible thermodynamics // Lect. Notes in Phys. Berlin: Springer. 1978. Vol. 84. P. 140.
4. *Климонтович Ю. Л.* Статистическая физика. М.: Наука, 1983.
5. *Синай Я. Г.* Теория фазовых переходов. М.: Наука, 1980.
6. *Вильсон К.Дж.* Ренормализационная группа и критические явления // УФН. 1983. Т. 141. Вып. 2. С. 109.
7. *Hu B.* Intoduction to real-space renormalizatin-group methods in critical and chaotic phenomen // Phys. Rep. 1982. Vol. 91, № 5. P. 233.
8. *Elaydi S.N.* An introduction to difference equations. Springer, 1999.
9. *Шустер Г.* Детерминированный хаос. М.: Мир, 1988.
10. *Feigenbaum M.J.* Quantitative universality for a class of nonlinear transformations // J. Stat. Phys. 1978. Vol. 19, № 1. P. 25.
11. *Feigenbaum M.J.* The universal metric properties of nonlinear transformations // J. Stat. Phys. 1979. Vol. 21, № 6. P. 669.
12. *Feigenbaum M.J.* The transition to aperiodic behavior in turbulent systems // Comm. Math. Phys. 1980. Vol. 77, № 1. P. 65.
13. *Hauser P. R., Tsallis C., Curado M. F.* Criticality of the routes to chaos of the  $1 - \alpha|x|^z$  map // Phys. Rev. A. 1984. Vol. 30, № 4. P. 2074.
14. *Derida B., Gervois A., Pomeau Y.* Universal metric properties of bifurcations of endomorphisms // J. Phys. A. 1979. Vol. 12, № 3. P. 269.
15. *Пиковский А.С.* О стохастических свойствах простейшей модели стохастических автоколебаний // Изв. вузов. Радиофизика. 1980. Т. 23, № 7. С. 883.
16. *Huberman B.A., Rudnick J.* Scaling behavior of chaotic flows // Phys. Rev. Lett. 1980. Vol. 45, № 3. P. 54.
17. *Huberman B.A., Zisook A. B.* Power spectra of strange attractors // Phys. Rev. Lett. 1981. Vol. 46, № 10. P. 624.
18. *Huberman B.A., Hirsch J. E., Scalapino D. J.* Theory of intermittency // Phys. Rev. A. 1982. Vol.25, № 1. P. 519.
19. *Анищенко В. С.* Стохастические колебания в радиофизических системах. Ч. 1,2. Саратов: Изд-во СГУ, 1986.
20. *Неймарк Ю.И.* О возникновении стохастичности в динамических системах // Изв. вузов. Радиофизика. 1974. Т. 17, № 4. С. 602.
21. *Неймарк Ю.И., Ланда П.С.* Стохастические и хаотические колебания. М.: Наука, 1987.
22. *Crutchfield J.P., Farmer J., Huberman B.A.* Fluctation and simple chaotic dynamics // Phys. Rep. 1982. Vol. 92, № 2. P. 45.
23. *Crutchfield J.P., Packard N.H.* Symbolic dynamics of noisy chaos // Physica D. 1983. Vol. 7D, № 1-3. P. 201.
24. *Gutierrez J., Iglesias A., Rodriguez M.A.* Logistic map driven by dichotomous noise // Phys. Rev. E. 1993. Vol. 48. P. 2507.

25. *Hall P., Wolf R. C. L.* Properties of invariant distributions and Lyapunov exponents for chaotic logistic maps // *Journal of the Royal Statistical Society.* 1995. Vol. 57. P. 439.
26. *Linz S.J., Lucke M.* Parametric modulation of instabilities of a nonlinear discrete system // *Phys. Rev. A.* 1986. Vol. 33. P. 2694.
27. *Кузнецов А.П., Капустина Ю.В.* Свойство скейлинга при переходе к хаосу в модельных отображениях с шумом // *Изв. вузов Прикладная нелинейная динамика.* 2000. Т. 8, № 6. С. 78.
28. *Кузнецов А.П., Кузнецов С.П., Седова Ю.В.* О свойствах скейлинга при воздействии шума в отображении окружности с числом вращения, заданным золотым средним // *Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика.* 2005. Т. 13, № 5, 6. С. 56.
29. *Crutchfield J. P., Nauenberg M., Rudnick J.* Scaling for external noise at the onset of chaos // *Phys. Rev. Lett.* 1981. Vol. 46, № 14. P. 933.
30. *Bashkirtseva I.A., Ryashko L.B.* Sensitivity analysis of the stochastically and periodically forced brusselator // *Phys. A.* 2000. Vol. 278. P. 126.
31. *Bashkirtseva I.A., Ryashko L.B.* Sensitivity analysis of stochastically forced Lorenz model cycles under period-doubling bifurcations // *Dynamic systems and applications.* 2002. Vol. 11, № 2. P. 293.
32. *Башикирцева И.А., Ряшко Л.Б., Стихин П.В.* Стохастическая чувствительность циклов системы Ресслера при переходе к хаосу // *Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика.* 2003. Т. 11, № 6. С. 32.
33. *Bashkirtseva I., Ryashko L.* Stochastic sensitivity of 3D-cycles // *Mathematics and Computers in Simulation.* 2004. Vol. 66. P.55.
34. *Bashkirtseva I., Ryashko L.* Sensitivity and chaos control for the forced nonlinear oscillations // *Chaos, Solitons & Fractals.* 2005. Vol. 26. P. 1437.

*Поступила в редакцию 4.02.2008  
После доработки 6.04.2009*

## **STOCHASTIC SENSITIVITY OF EQUILIBRIUM AND CYCLES FOR 1D DISCRETE MAPS**

*I.A. Bashkirtseva, L.B. Ryashko, I.N. Tsvetkov*

The response problem of equilibrium and cycles for stochastically forced Verhulst population model is considered. Theoretical and empirical approaches are used for stochastically sensitivity analysis. The theoretical approach is based on the first approximation method and the empirical approach is based on direct numerical simulation. The correspondence between the two approaches for Verhulst population model is demonstrated. The increase of discrete system sensitivity to external noise in the period-doubling bifurcation zone under transition to chaos is shown.

*Keywords:* Verhulst model, cycles, stochastic sensitivity.



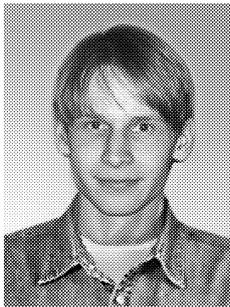
*Башкирцева Ирина Адольфовна* – родилась в 1965 году, окончила Уральский госуниверситет (1987), кандидат физико-математических наук (1997), доцент кафедры математической физики Уральского госуниверситета. Область научных интересов – асимптотический анализ и численное моделирование нелинейных стохастических систем.

620083 Екатеринбург, Ленина, 51  
Уральский государственный университет  
E-mail: irina.bashkirtseva@usu.ru



*Ряшко Лев Борисович* – родился в 1953 году, окончил Уральский госуниверситет (1975), доктор физико-математических наук, профессор кафедры математической физики Уральского госуниверситета. Область научных интересов – устойчивость, стабилизация и управление стохастическими системами. Автор ряда статей по данной тематике.

620083 Екатеринбург, Ленина, 51  
Уральский государственный университет  
E-mail: lev.ryashko@usu.ru



*Цветков Иван Николаевич* – родился в 1983 году, окончил Уральский госуниверситет (2006), аспирант кафедры математической физики. Область научных интересов – анализ чувствительности стохастических дискретных систем.

620083 Екатеринбург, Ленина, 51  
Уральский государственный университет  
E-mail: itsvet@e1.ru



## БИФУРКАЦИИ ДВУМЕРНОГО ТОРА В КУСОЧНО-ГЛАДКИХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ

*Ж.Т. Жусубалиев, О.О. Яночкина*

Исследуется динамика системы неавтономных дифференциальных уравнений с разрывной правой частью. В плоскости параметров численно и аналитически рассчитаны области с различным динамическим поведением. Показано, что в кусочно-гладких динамических системах наряду с классической бифуркацией Неймарка–Сакера существуют еще два механизма рождения инвариантного тора, не имеющие аналогов в гладких системах. В первом случае тор возникает из периодической орбиты через  $S$ -бифуркацию. Во втором случае инвариантный тор рождается из устойчивого состояния равновесия. Здесь состояние равновесия исчезает на  $S$ -бифуркационной границе и мягко сменяется неустойчивым циклом, окруженным резонансным или эргодическим тором.

*Ключевые слова:* Кусочно-гладкие динамические системы,  $S$ -бифуркация, инвариантный тор, состояние равновесия.

### Введение

Практические приложения, в которых приходится прибегать к рассмотрению кусочно-гладких динамических систем, необычайно широки. Это, например, системы с сухим трением, виброударные системы, релейные и импульсные системы автоматического управления, электронные и радиотехнические системы с кусочно-гладкими характеристиками или ключевыми элементами, широкий класс устройств современной силовой электроники.

Фазовые траектории рассматриваемых динамических систем сшиваются из отдельных гладких участков [1–4]. Усложнение колебаний в кусочно-гладких системах связано с двумя типами бифуркаций [2]. Первый тип – точно такой же, как и в гладких системах. Это так называемые локальные бифуркации, например, бифуркации седло-узел, удвоения периода, Неймарка–Сакера, и глобальные – гомоклинические и гетероклинические бифуркации (см., например, [5, 6]).

Второй тип не имеет аналогов в гладких системах и связан с ситуацией, когда траектория периодического движения проходит через границу одной из поверхностей сшивания или касается ее. Это вызывает нарушение условий существования периодического решения и соответствует появлению или исчезновению участка траектории в одной из областей кусочной непрерывности [2]. Такие бифуркации получили название  $S$ -бифуркаций [2, 7, 8] (border-collision bifurcations [9]).

Простейшей бифуркационной картине при С-бифуркациях соответствует непрерывный переход решения одного типа в решение другого типа [2]. Возможны и более сложные ситуации, например удвоение, утроение периода колебаний, рождение движений с участками скольжения или хаотического аттрактора из периодической орбиты [3, 7–13].

Изучению нелинейных явлений в кусочно-гладких системах в последние годы уделяется пристальное внимание. Теоретические исследования стимулируются потенциальными приложениями результатов во многих областях науки и техники. Они охватывают приложения к силовой электронике и теории управления [3, 13], механике [4], биологическим [14] и экономическим [15] системам. Обзор этих исследований можно найти в [16].

Наряду с бесконечным каскадом бифуркаций удвоения периода и различными формами перемежаемости, переход к хаосу через возникновение и разрушение двумерного тора является одним из классических сценариев хаотизации колебаний в диссипативных системах. Однако в рассматриваемых системах механизмы рождения и разрушения двумерного тора могут иметь некоторые отличия от классических [3, 17–19].

В классическом случае двумерный тор возникает из периодической орбиты через бифуркацию Неймарка–Сакера, условием которой является выход на единичную окружность пары комплексно-сопряженных мультипликаторов. В статье показано, что в кусочно-гладких системах наряду с классическим существуют еще два механизма рождения двумерного тора, связанные с С-бифуркацией.

В первом случае инвариантный тор возникает из периодической орбиты. В такой бифуркации комплексно-сопряженная пара мультипликаторов периодической орбиты скачком выходит из единичного круга. Потеря устойчивости сопровождается появлением резонансного или эргодического тора. Во втором случае инвариантный тор рождается из устойчивого состояния равновесия. Здесь состояние равновесия исчезает на С-бифуркационной границе и мягко сменяется неустойчивым циклом типа фокус, окруженным резонансным или эргодическим тором.

## 1. Постановка задачи

В качестве базового объекта для исследований рассмотрим полупроводниковый преобразователь постоянного напряжения с многозонной импульсной модуляцией [20–23], уравнение движения которой в безразмерной форме имеет вид [24]

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \mu x - \omega y - (\mu - \omega)K_F, & \dot{y} &= \mu x + \omega y - (\mu + \omega)K_F, \\ K_F &= \frac{1}{2N} \sum_{s=1}^N [1 + \text{sign}(\varphi - \eta_s)], \\ \varphi &= \vartheta x(\tau) - y(\tau) + \frac{q}{\Omega}, & \eta_s(t) &= \frac{P}{N\alpha\Omega} (s - 1 + t - \tau). \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь  $x, y \in \mathbb{R}$ ;  $K_F$  – сигнал на выходе модулятора;  $t$  – безразмерное время;  $\eta_s(t)$  – вынуждающее воздействие, представляющее собой периодическую последовательность импульсов пилообразной формы с периодом 1:  $\eta_s(t+1) \equiv \eta_s(t)$ ;  $\tau = [t] = k - 1$ ,  $k = 1, 2, \dots$  – дискретное время, где  $[\cdot]$  – функция, выделяющая целую часть аргу-

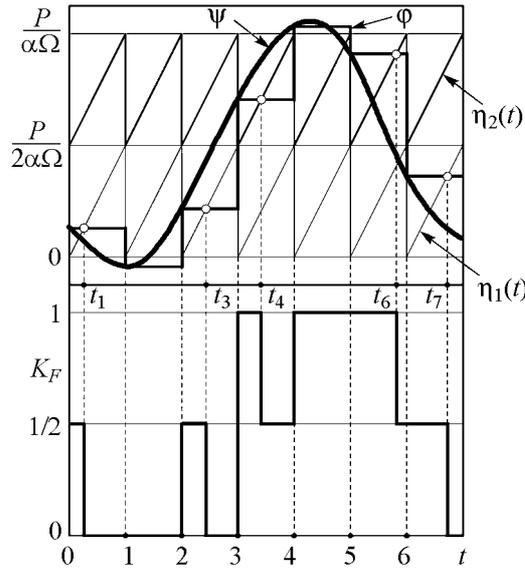


Рис. 1. Временные диаграммы работы модуляторов

менты времени  $t = k - 1, k = 1, 2, \dots$  и хранит его до конца текущего  $k$ -го интервала  $k - 1 < t < k$  (рис. 1). Как можно видеть из диаграммы, изображенной на рис. 1, сигнал  $\varphi$  является кусочно-постоянной функцией. Импульсы запускаются в моменты времени  $t = k - 1$  и существуют до момента совпадения сигнала  $\varphi$  с одним из опорных периодических сигналов  $\eta_s(t), s = \overline{1, N}$ .

В исследованиях были выбраны следующие значения параметров:  $\mu = -0.266$ ;  $\omega = 0.384$ ;  $P = 8.734$ ;  $q = P/2$ ;  $N = 2$ ;  $\alpha > 0$  и  $\Omega > 0$  – варьируемые параметры.

Систему уравнений (1) можно свести к двумерному кусочно-гладкому стробоскопическому отображению (см., например, [17, 24])

$$\begin{aligned} x_k &= e^\mu (\cos \omega \cdot x_{k-1} - \sin \omega \cdot y_{k-1}) + \frac{1}{2} [\sqrt{2}e^{\mu(1-z_k)} \sin(\pi/4 - \omega(1-z_k)) - \gamma s_k - 1], \\ y_k &= e^\mu (\sin \omega \cdot x_{k-1} + \cos \omega \cdot y_{k-1}) + \frac{1}{2} [\sqrt{2}e^{\mu(1-z_k)} \cos(\pi/4 - \omega(1-z_k)) - \delta s_k - 1], \\ k &= 1, 2, \dots, \end{aligned} \quad (2)$$

где  $\gamma = \sqrt{2}e^\mu \sin(\pi/4 - \omega)$ ,  $\delta = \sqrt{2}e^\mu \cos(\pi/4 - \omega)$ .

Переменные  $s_k$  и  $z_k$  определяются по алгоритму

$$\begin{aligned} s_k &= \begin{cases} 1, & \varphi_{k-1} \leq \frac{P}{2\alpha\Omega}, \\ 2, & \varphi_{k-1} > \frac{P}{2\alpha\Omega}, \end{cases} \\ z_k &= \begin{cases} 0, & \varphi_{k-1} < 0, \\ \frac{2\alpha\Omega}{P} \varphi_{k-1} - s_k + 1, & 0 \leq \varphi_{k-1} \leq \frac{P}{\alpha\Omega}, \\ 1, & \varphi_{k-1} > \frac{P}{\alpha\Omega}, \end{cases} \\ \varphi_{k-1} &= \vartheta x_{k-1} - y_{k-1} + \frac{q}{\Omega}. \end{aligned}$$

мента;  $q$  – опорный сигнал;  $\mu, \omega$  – соответственно действительная и мнимая части собственных значений  $\lambda_{1,2} = \mu \pm j\omega$ ,  $\mu < 0$  матрицы коэффициентов уравнения (1);  $\vartheta = (\mu + \omega)/(\mu - \omega)$ . Параметр  $P$  регулирует амплитуду импульсов  $\eta_s(t)$ ,  $\Omega$  – нормированное входное напряжение,  $\alpha$  – коэффициент усиления,  $N$  – число зон.

На рис. 1 приведены временные диаграммы, поясняющие формирование управляющих импульсов для системы с двумя зонами ( $N = 2$ ). Импульсы  $K_F$  формируются методом широтно-импульсной модуляции первого рода [25]. В начале каждого тактового интервала устройство выборки-хранения запо-

Здесь  $s_k$  – номер зоны, в которой формируются импульсы;  $z_k = t_k - k + 1$  – относительная длительность импульсов (коэффициент заполнения), где  $t_k$  – моменты переключения модулятора.

Период  $T$  периодического движения динамической системы (1) в общем случае является кратным периоду внешнего воздействия  $a$ :  $T = ma$ ,  $m = 1, 2, \dots$ , где  $a = 1$ . Движение с таким периодом будем называть  $m$ -циклом или циклом периода  $m$ .

## 2. Бифуркационный анализ

В исследованиях параметры  $\alpha$  и  $\Omega$  варьировались в следующих пределах:  $4.0 \leq \alpha \leq 24.0$ ;  $3.0 \leq \Omega \leq 13.0$ .

На рис. 2 приведена карта динамических режимов в плоскости управляющих параметров  $(\alpha, \Omega)$ . В области  $\Pi_0$  сигнал на выходе модулятора равен  $K_F = \text{const} = 1$ ,  $t \rightarrow \infty$  и состояние системы описывается уравнением

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \mu x - \omega y - \mu + \omega, & \dot{y} &= \mu x + \omega y - \mu - \omega, \\ \forall x(\tau) - y(\tau) + \frac{q}{\Omega} - \frac{P}{2\alpha\Omega} (s - 1 + t - \tau) &> 0, & s &= 1, 2. \end{aligned}$$

Это уравнение имеет единственное состояние равновесия  $(x^0, y^0) = (1, 1)$ , представляющее собой устойчивый фокус (собственные значения матрицы Якоби комплексные с отрицательной действительной частью). Такое поведение вызвано тем, что рассматриваемая динамическая система не имеет собственного «ритма» (не являет-

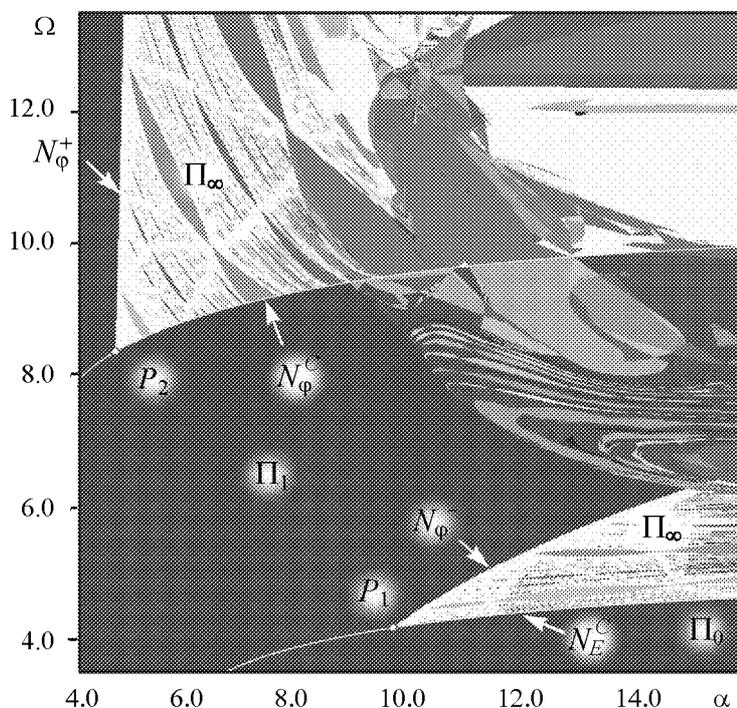


Рис. 2. Карта динамических режимов в плоскости управляющих параметров  $(\alpha, \Omega)$

ся активной системой [26]) и в отсутствие внешней вынуждающей силы, то есть управляющих импульсов  $K_F$ , не может совершать колебательное движение. Если возмутить систему, то возникают свободные колебания, которые после некоторого переходного процесса затухают из-за диссипации. Частота свободных колебаний равна  $\omega/2\pi$ , а скорость затухания определяется величиной  $|\mu|^{-1}$ .

В области, ограниченной бифуркационными линиями  $N_E^C$  и  $N_\Phi^C$ , уравнение (1) имеет единственное периодическое решение с периодом внешнего воздействия (1-цикл), определяемое неподвижной точкой  $(x^-, y^-)$  отображения (2). Это решение отвечает вынужденным колебаниям, индуцированным импульсами модулятора второй зоны. Координаты  $(x^-, y^-)$  могут быть найдены из системы уравнений

$$\begin{cases} x = e^\mu (\cos \omega \cdot x - \sin \omega \cdot y) + \frac{1}{2} [\sqrt{2}e^{\mu(1-z)} \sin(\pi/4 - \omega(1-z)) - 2\gamma], \\ y = e^\mu (\sin \omega \cdot x + \cos \omega \cdot y) + \frac{1}{2} [\sqrt{2}e^{\mu(1-z)} \cos(\pi/4 - \omega(1-z)) - 2\delta], \\ \vartheta x - y + \frac{q}{\Omega} - \frac{P}{2\alpha\Omega} (1+z) = 0. \end{cases} \quad (3)$$

После исключения переменных  $(x, y)$  система (3) приводится к трансцендентному уравнению относительно коэффициента заполнения  $z$

$$\xi(z) = \vartheta\sigma_1(z) - \sigma_2(z) + \frac{2q}{\Omega} - \frac{P}{\alpha\Omega} (1+z) = 0, \quad 0 \leq z \leq 1. \quad (4)$$

Здесь

$$\begin{aligned} \sigma_1(z) &= 1 + \frac{e^{2\mu} + f_1 - f_1 e^\mu \cos \omega - f_2 e^\mu \sin \omega - e^\mu (\cos \omega - \sin \omega)}{1 - 2e^\mu \cos \omega + e^{2\mu}}, \\ \sigma_2(z) &= 1 + \frac{e^{2\mu} + f_2 - f_2 e^\mu \cos \omega + f_1 e^\mu \sin \omega - e^\mu (\cos \omega + \sin \omega)}{1 - 2e^\mu \cos \omega + e^{2\mu}}, \end{aligned}$$

где

$$f_1 = e^{\mu(1-z)} \{\cos[\omega(1-z)] - \sin[\omega(1-z)]\}, \quad f_2 = e^{\mu(1-z)} \{\cos[\omega(1-z)] + \sin[\omega(1-z)]\}.$$

Для существования решения  $z_* \in [0, 1]$  этого уравнения ввиду непрерывности  $\xi(z)$  достаточно выполнения неравенства

$$\xi(0)\xi(1) < 0. \quad (5)$$

Доказательство условия (5) можно найти, например, в [25].

Для построения границ области существования неподвижной точки  $(x^-, y^-)$  достаточно рассмотреть условия нарушения неравенства (5), соответствующие появлению корней  $z_* = 1$  и  $z_* = 0$ . Подставив эти значения в (4), получим искомые границы в форме явной зависимости между параметрами  $\alpha$  и  $\Omega$

$$\begin{aligned} N_\Phi^C &= \left\{ (\alpha, \Omega) : \frac{2\omega}{\mu - \omega} + \frac{q}{\alpha\Omega} (\alpha - 2) = 0 \right\}, \\ N_E^C &= \left\{ (\alpha, \Omega) : \frac{2\omega}{\mu - \omega} + \frac{P}{\alpha\Omega} (\alpha - 1) = 0 \right\}. \end{aligned}$$

При нарушении условия (5) система имеет либо состояние равновесия, либо периодическое решение другого типа, индуцируемое импульсами модулятора первой зоны.

Обсудим сначала поведение динамической системы в окрестности  $N_E^C$ . Траектория рассматриваемого периодического решения сшивается из двух участков. Нарушение условия существования этого решения происходит из-за исчезновения одного из участков фазовой траектории на С-бифуркационной границе  $N_E^C$ , когда корень уравнения (4) принимает граничное значение  $z_* = 1$ . Из системы (3) и непрерывной зависимости решения уравнения (4) от параметров  $\alpha, \Omega$  легко увидеть, что на линии  $N_E^C$  неподвижная точка  $(x^-, y^-)$  непрерывно переходит в состояние равновесия.

На С-бифуркационной границе  $N_E^C$  мультипликаторы неподвижной точки  $(x^-, y^-)$  равны

$$\rho_{1,2} = \rho_r \pm j\rho_j, \quad \rho_r = e^\mu \cos \omega, \quad \rho_j = e^\mu \sin \omega \sqrt{1 - \frac{\alpha\Omega}{P}\eta}, \quad \eta = \frac{2(\mu^2 + \omega^2)}{(\mu - \omega)e^\mu \sin \omega}.$$

Как видно, действительная часть мультипликаторов не зависит от параметров  $\alpha$  и  $\Omega$ , следовательно, устойчивость определяется только мнимой частью. Несложно показать, что условие устойчивости этой неподвижной точки определяется неравенством

$$e^{2\mu} - \frac{4(\mu^2 + \omega^2)}{(2\theta - 2 + P/\Omega)(\mu - \omega)} e^\mu \sin \omega < 1$$

или

$$e^{2\mu} - \frac{(\mu^2 + \omega^2)(2 - \alpha)}{2\omega} e^\mu \sin \omega < 1.$$

Проследим за изменением мультипликаторов вдоль бифуркационной кривой  $N_E^C$ . Чуть выше границы  $N_E^C$  расположена кривая суперкритической бифуркации Неймарка-Сакера  $N_\varphi^-$ . Кривая  $N_\varphi^-$  опирается на линию  $N_E^C$  в точке  $P_1$  коразмерности два. Координаты точки  $P_1$  в плоскости параметров  $(\alpha, \Omega)$  определяются

$$P_1 = \left( \frac{2\omega(1 - e^{2\mu})}{e^\mu(\mu^2 + \omega^2) \sin \omega} + 2, \quad \frac{P(\omega - \mu)(1 - e^{2\mu})}{4e^\mu(\mu^2 + \omega^2) \sin \omega + 4\omega(1 - e^{2\mu})} \right).$$

Область, имеющая форму «клюва», ограниченная линиями  $N_E^C$  и  $N_\varphi^-$ , соответствует области квазипериодичности и хаоса. Между линиями  $N_E^C$  и  $N_\varphi^-$  можно видеть многочисленные окна с периодической динамикой, отвечающие резонансным языкам.

При изменении параметров вдоль кривой  $N_E^C$  в сторону возрастающих значений  $\alpha$  в точке  $P_1$  комплексно-сопряженная пара мультипликаторов  $\rho_{1,2} = \rho_r \pm j\rho_j$  выходит на границу единичного круга и неподвижная точка  $(x^-, y^-)$  становится неустойчивым фокусом.

Таким образом, на участке бифуркационной кривой  $N_E^C$ , расположенном слева от точки  $P_1$ , из состояния равновесия мягко рождается устойчивый цикл периода 1. На втором участке, расположенном справа от точки  $P_1$ , из устойчивого состояния равновесия возникает неустойчивый 1-цикл с комплексно-сопряженной парой мультипликаторов (неустойчивый фокус), окруженный резонансным или эргодическим тором.

Характер движения на торе определяется числом вращения. Когда оно иррационально, инвариантный тор плотно заполняется траекториями (сечение Пуанкаре представляет собой гладкую замкнутую кривую) и динамика квазипериодична.

На рис. 3, *a* изображена бифуркационная диаграмма, иллюстрирующая рождение квазипериодических колебаний из устойчивого состояния равновесия. На рис. 3, *б* приведена зависимость абсолютного значения комплексно-сопряженной пары мультипликаторов 1-цикла от параметра  $\Omega$ . Как видно из этих диаграмм, при увеличении  $\Omega$  сначала из состояния равновесия возникает инвариантный тор с иррациональным числом вращения, а затем в точке  $\Omega = \Omega_\varphi^-$ , лежащей на линии  $N_\varphi^-$ , квазипериодический режим мягко сменяется периодическим через «обратную» суперкритическую бифуркацию Неймарка–Сакера.

При рациональном числе вращения на инвариантном торе имеется четное число периодических орбит, половина из которых устойчивые, а половина – седловые, а сам тор образован замыканием неустойчивых многообразий седловых циклов. Остановимся на это переходе чуть подробнее. Важно отметить, что резонансные языки ограничены не кривыми седло-узловой бифуркации, как в случае гладких систем, а С-бифуркационными линиями, в точках которых устойчивая периодическая орбита сливается с седловой и исчезает [3, 17]. В такой бифуркации с седловой периодической орбитой может сливаться гиперболический цикл, имеющий тип как устойчивого узла, так и устойчивого фокуса. Рис. 4 иллюстрирует рождение резонансного тора устойчивого состояния равновесия. На бифуркационной диаграмме сплошные

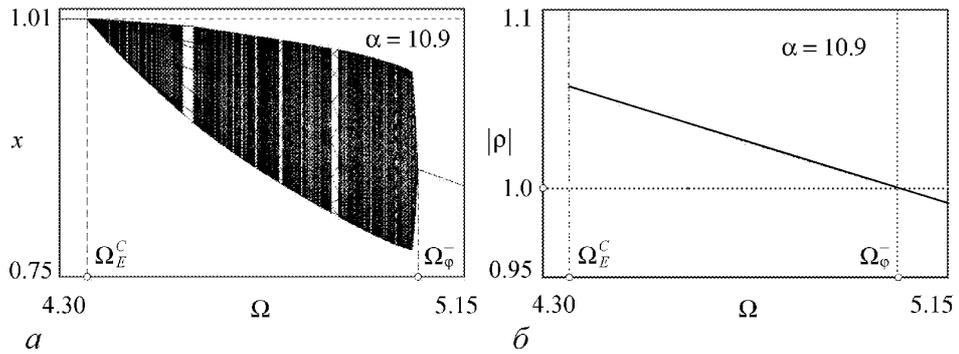


Рис. 3. С-бифуркации рождения эргодического тора из состояния равновесия, где  $\Omega_\varphi^-$ ,  $\Omega_E^C$  – бифуркационные значения параметра  $\Omega$ . В точке  $\Omega_\varphi^-$  реализуется классическая суперкритическая бифуркация Неймарка–Сакера. *a* – бифуркационная диаграмма. *б* – зависимость абсолютного значения  $|\rho|$  комплексно-сопряженной пары мультипликаторов  $\rho_{1,2} = \rho_r \pm j\rho_j$  от параметра  $\Omega$

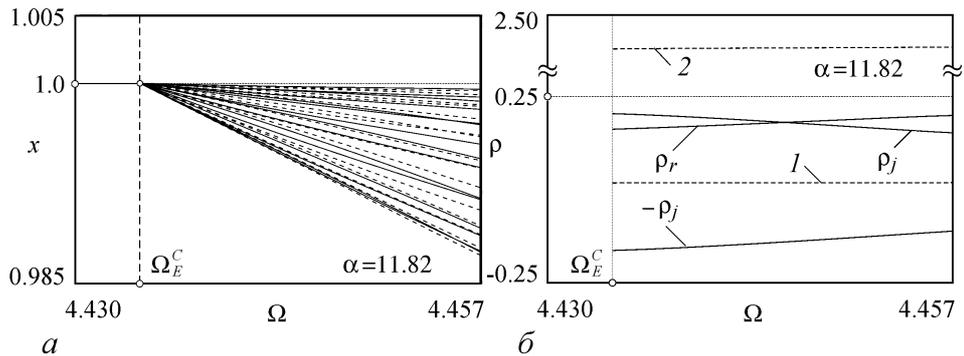


Рис. 4. К С-бифуркации рождения резонансного тора из состояния равновесия. *a* – бифуркационная диаграмма. Сплошные линии соответствуют устойчивому 15-циклу, а пунктирные – седловому. *б* – зависимости мультипликаторов устойчивого и седлового 15-циклов от параметра  $\Omega$ . Штриховые линии 1 и 2 соответствуют мультипликаторам седлового цикла, а сплошные – мультипликаторам  $\rho_{1,2} = \rho_r \pm j\rho_j$  устойчивого цикла.  $\Omega_E^C$  – бифуркационное значение параметра  $\Omega$

из линии соответствуют устойчивому 15-циклу, а пунктирные – седловому. На рис. 4, б приведены зависимости мультипликаторов от параметра  $\Omega$ , где пунктирные линии, обозначенные цифрами 1 и 2, соответствуют мультипликаторам седлового 15-цикла, а сплошные – мультипликаторам устойчивого 15-цикла. На рис. 5 изображен фазовый портрет динамической системы (2) при значениях параметров  $\alpha = 11.82$  и  $\Omega = 4.457$ , лежащих внутри резонансного языка 1 : 15. На это рисунке черными точками обозначены точки устойчивого цикла, а белыми – седлового. Через  $W_{\pm}^U$ ,  $W_{\pm}^S$  обозначены соответственно неустойчивые и устойчивые многообразия седловой периодической орбиты.

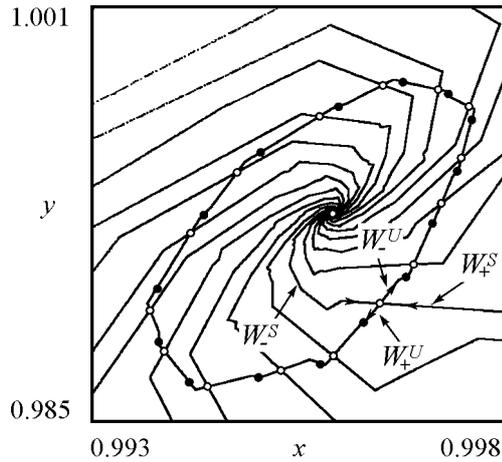


Рис. 5. Фазовый портрет динамической системы (2) при значениях параметров  $\alpha = 11.82$ ,  $\Omega = 4.457$ , лежащих внутри резонансного языка 1 : 15

Остается теперь рассмотреть бифуркации при переходе через границу  $N_{\varphi}^C$ . Выше кривой  $N_{\varphi}^C$  расположена линия  $N_{\varphi}^+$  субкритической бифуркации Неймарка–Сакера, которая опирается на  $N_{\varphi}^C$  в точке

$$P_2 = \left( \frac{\omega(1 - e^{2\mu})}{e^{\mu}(\mu^2 + \omega^2) \sin \omega} + 1, \frac{P(\omega - \mu)(1 - e^{2\mu})}{2e^{\mu}(\mu^2 + \omega^2) \sin \omega + 2\omega(1 - e^{2\mu})} \right)$$

коразмерности два.

Точка  $P_2$  делит границу  $N_{\varphi}^C$  на два участка. При переходе через участок, расположенный слева от  $P_2$ , реализуется С-бифуркация простого изменения типа решения: устойчивый 1-цикл переходит в устойчивый цикл того же периода, но другого типа. Это движение индуцируется импульсами модулятора первой зоны и отвечает неподвижной точке  $(x^+, y^+)$  отображения (2)

$$\begin{aligned} x^+ &= \frac{1}{2} + \frac{(1 - e^{\mu} \cos \omega) f_1(z_*) - 1 + e^{\mu}(\cos \omega + \sin \omega) - f_2(z_*) e^{\mu} \sin \omega}{2 - 4e^{\mu} \cos \omega + 2e^{2\mu}}, \\ y^+ &= \frac{1}{2} + \frac{(1 - e^{\mu} \cos \omega) f_2(z_*) - 1 + e^{\mu}(\cos \omega - \sin \omega) + f_1(z_*) e^{\mu} \sin \omega}{2 - 4e^{\mu} \cos \omega + 2e^{2\mu}}, \end{aligned} \quad (6)$$

где  $z_*$  – корень уравнения

$$\vartheta \sigma_1(z) - \sigma_2(z) + \frac{\vartheta - 1}{1 - 2e^{\mu} \cos \omega + e^{2\mu}} + \frac{P}{\Omega} - \frac{P}{\alpha \Omega} z = 0, \quad 0 \leq z \leq 1.$$

При переходе через участок справа от точки  $P_2$  мягко возникает инвариантный тор, а неподвижная точка  $(x^+, y^+)$  становится неустойчивым фокусом. Как удалось установить, при движении по параметрам к линии  $N_{\varphi}^C$  амплитуда колебаний монотонно убывает и становится равной нулю на бифуркационной границе  $N_{\varphi}^C$ . Так что на самой линии  $N_{\varphi}^C$  система (1) имеет устойчивое состояние равновесия  $(x^+, y^+) = (x_0^+, y_0^+) = (1/2, 1/2)$ . Необходимо отметить, что это состояние негрубое.

На рис. 6 приведены бифуркационная диаграмма и зависимость абсолютно значения комплексно-сопряженной пары мультипликаторов 1-цикла от параметра  $\alpha$ , иллюстрирующие рождение эргодического тора из периодической орбиты. Как

мы видим из рис. 6, *a*, при уменьшении  $\alpha$  комплексно-сопряженная пара мультипликаторов 1-цикла скачком выходит из единичного круга. Потеря устойчивости 1-цикла сопровождается мягким возникновением квазипериодических колебаний (см. рис. 6, *b*), а далее в точке  $\alpha = \alpha_\phi^+$  реализуется «обратная» субкритическая бифуркация Неймарка–Сакера, при которой неустойчивый цикл периода 1 вновь становится устойчивым.

На рис. 7 представлены результаты бифуркационного анализа, демонстрирующие возникновение резонансного тора из периодической орбиты. В исследованиях был выбран резонансный язык 1 : 6. Резонансный язык опирается на сегмент

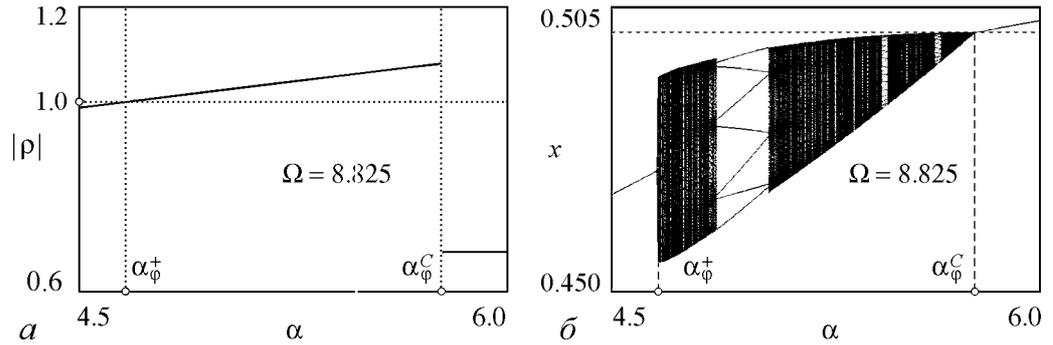


Рис. 6. С-бифуркации рождения эргодического тора из периодической орбиты, где  $\alpha_\phi^+$ ,  $\alpha_\phi^C$  – бифуркационные значения параметра  $\alpha$ . В точке  $\alpha_\phi^+$  реализуется субкритическая бифуркация Неймарка–Сакера. *a* – зависимость абсолютного значения  $|\rho|$  комплексно-сопряженной пары мультипликаторов  $\rho_{1,2} = \rho_r \pm j\rho_j$  от параметра  $\alpha$ . *b* – бифуркационная диаграмма

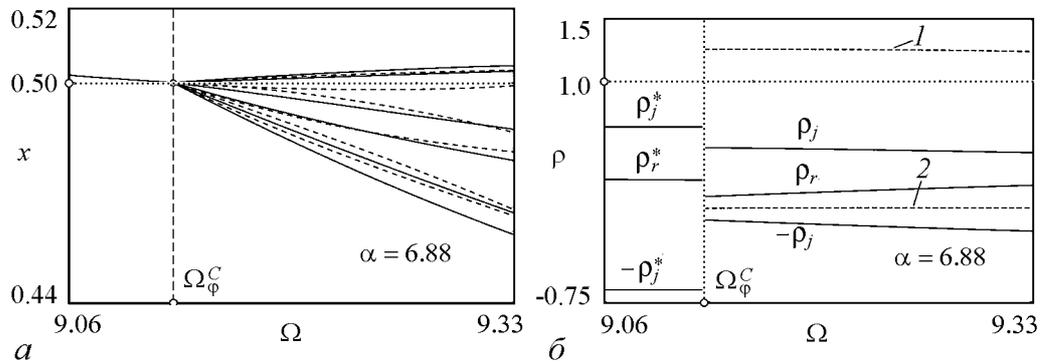
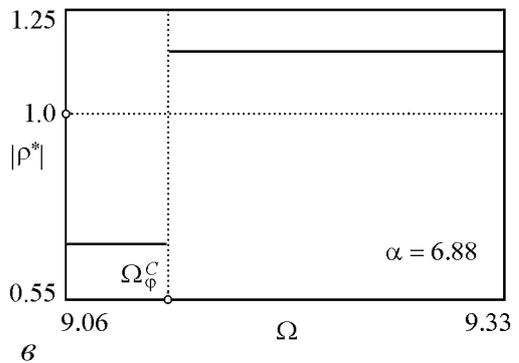


Рис. 7. К С-бифуркации рождения резонансного тора из периодической орбиты. *a* – бифуркационная диаграмма. Сплошные линии соответствуют устойчивому 6-циклу, а пунктирные – седловому. *b* – зависимости мультипликаторов устойчивого и седлового 6-циклов от параметра  $\Omega$ . Штриховые линии 1 и 2 соответствуют мультипликаторам седлового цикла, а сплошные – мультипликаторам  $\rho_{1,2} = \rho_r \pm j\rho_j$  устойчивого 6-цикла.  $\rho_{1,2}^* = \rho_r^* \pm j\rho_j^*$  – мультипликаторы устойчивого 1-цикла.  $\Omega_\phi^C$  – бифуркационное значение параметра  $\Omega$ . *b* – зависимость абсолютного значения  $|\rho^*|$  комплексно-сопряженной пары мультипликаторов  $\rho_{1,2}^* = \rho_r^* \pm j\rho_j^*$  цикла периода 1 от параметра  $\Omega$



кривой  $N_\varphi^C$ , длина которого является ненулевой (см. также [3]). В точках этого сегмента мягко рождается пара циклов – устойчивый и седловой, лежащие на двумерном инвариантном торе. Обсудим эту бифуркацию более подробно.

Как мы уже выяснили, ниже бифуркационной границы  $N_\varphi^C$  отображение (2) имеет устойчивую неподвижную точку  $(x^-, y^-)$ . При переходе через  $N_\varphi^C$  справа от  $P_2$  неподвижная точка  $(x^-, y^-)$  меняет тип и становится неустойчивым фокусом с координатами (6). Как показано на рис. 7,б, в такой бифуркации комплексно-сопряженная пара мультипликаторов периодической орбиты скачком выходит из единичного круга. Потеря устойчивости сопровождается появлением резонансного тора.

На бифуркационной диаграмме рис. 7, а сплошные линии соответствуют устойчивому 6-циклу, а пунктирные – седловому. На рис. 7, б приведены зависимости мультипликаторов от параметра  $\alpha$ , где пунктирные линии 1, 2 соответствуют мультипликаторам седлового 6-цикла, а сплошные – мультипликаторам устойчивого 6-цикла. Мультипликаторы устойчивого 1-цикла обозначены через  $\rho_{1,2}^* = \rho_r^* \pm j\rho_j^*$ . На рис. 7, в изображена зависимость абсолютного значения  $|\rho^*|$  мультипликаторов  $\rho_{1,2}^* = \rho_r^* \pm j\rho_j^*$  1-цикла от параметра  $\Omega$ .

На рис. 8 показан фазовый портрет динамической системы (2) при значениях параметров  $\alpha$  и  $\Omega$ , лежащих внутри резонансного языка.

Как можно видеть из диаграмм, приведенных на рис. 3, а и рис. 6, б, характерный размер инвариантной кривой (её «диаметр») при удалении от линий  $N_E^C$  и  $N_\varphi^C$  увеличивается приблизительно линейно от нуля в отличие от параболической зависимости, характерной для классической бифуркации Неймарка–Сакера.

### Заключение

В данной статье представлены результаты бифуркационного анализа кусочно-гладкой динамической системы, демонстрирующей квазипериодическое поведение. Показано, что в кусочно-гладких системах наряду с классической бифуркацией Неймарка–Сакера существуют еще два механизма рождения инвариантного тора.

В первом случае двумерный тор мягко возникает из периодической орбиты через С-бифуркацию. В такой бифуркации комплексно-сопряженная пара мультипликаторов скачком выходит из единичного круга: устойчивый цикл переходит в неустойчивый цикл того же периода, но другого типа. Потеря устойчивости сопровождается появлением резонансного или эргодического тора.

Во втором случае инвариантный тор рождается из состояния равновесия, имеющего тип устойчивого фокуса. Здесь состояние равновесия исчезает на С-бифурка-

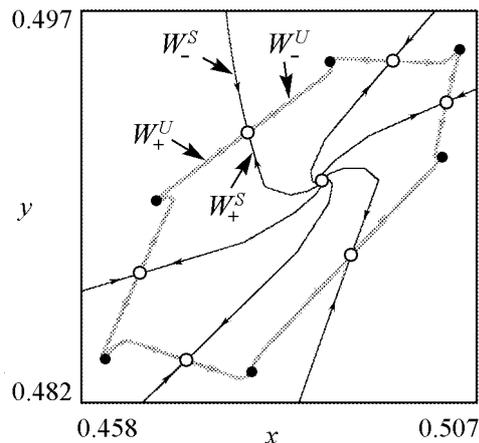


Рис. 8. Фазовый портрет динамической системы (2) при значениях параметров  $\alpha = 6.8$ ,  $\Omega = 9.3$ , лежащих внутри резонансного языка 1 : 6

ционной границе и мягко сменяется неустойчивым циклом, окруженным резонансным или эргодическим тором.

В обоих случаях характерный размер инвариантного тора («диаметр») при удалении от точки бифуркации изменяется приблизительно линейно от нуля в отличие от параболической зависимости, характерной для классической бифуркации Неймарка–Сакера.

### Библиографический список

1. Филиппов А.Ф. Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. М.: Наука, 1985.
2. Фейгин М.И. Вынужденные колебания систем с разрывными нелинейностями. М.: Наука, 1994.
3. Zhusubaliyev Zh. T., Mosekilde E. Bifurcations and Chaos in Piecewise-Smooth Dynamical Systems. Singapore: World Scientific, 2003.
4. Leine R.I., Nijmeijer H. Dynamics and Bifurcations of Non-Smooth Mechanical Systems. Berlin: Springer Verlag, 2004.
5. Арнольд В.И., Афраймович В.С., Ильясенко Ю.С., Шильников Л.П. Теория бифуркаций // Современные проблемы математики: фундаментальные направления /Под ред. В. И. Арнольда. М.: ВИНТИ, 1986.
6. Anishchenko V.S., Astakhov V.V., Neiman A.B., Vadivasova T.E., Schimansky-Geier L. Nonlinear Dynamics of Chaotic and Stochastic Systems. Tutorial and Modern Development. Berlin: Springer, 2007.
7. Фейгин М.И. Удвоение периода колебаний при C-бифуркациях в кусочно-непрерывных системах // ПММ. 1970. Т. 34, вып. 5. С. 861.
8. di Bernardo M, Feigin M.I., Hogan S.J., Homer M.E. Local analysis of C-bifurcations in  $n$ -dimensional piecewise-smooth dynamical systems // Chaos, Solitons and Fractals. 1999. Vol. 10, № 11. P. 1881.
9. Nusse H.E., Yorke J.A. Border-collision bifurcations including «period two to period three» for piecewise smooth systems // Physica D. 1992. № 57. P. 39.
10. Banerjee S., Ranjan P., Grebogi C. Bifurcations in two-dimensional piecewise smooth maps – theory and applications in switching circuits // IEEE Trans. Circ. Syst. I. 2000. Vol. 47, № 5. P. 633.
11. Zhusubaliyev Zh.T., Soukhoterlin E.A., Mosekilde E. Border-collision bifurcations and chaotic oscillations in a piecewise-smooth dynamical system // Int. J. Bifurcation Chaos. 2001. Vol. 11, № 12. P. 1193.
12. di Bernardo M., Budd C. J., Champneys A.R. Grazing bifurcations in  $n$ -dimensional piecewise-smooth dynamical systems // Physica D. 2001. Vol. 160. P. 222.
13. Banerjee S., Verghese G.C. (Eds.) Nonlinear phenomena in power electronics. New York: IEEE Press, 2001.
14. Keener J., Sneyd J. Mathematical Physiology. New York: Springer Verlag, 1998.
15. Laugesen J., Mosekilde E. Border-collision bifurcations in a dynamic management game // Comp. Oper. Res. 2006. № 33. P. 464.

16. *di Bernardo M., Budd C., Champneys A.R., Kowalczyk P., Nordmark A.B., Olivar G., Piironen P.T.* Bifurcations in nonsmooth dynamical systems // SIAM Review. 2008. Vol. 50, № 4. P. 629.
17. *Zhusubaliyev Zh. T., Mosekilde E.* Torus birth bifurcation in a DC/DC converter // IEEE Trans. Circ. Syst. I. 2006. Vol. 53, № 8. P. 2006. 1839.
18. *Zhusubaliyev Zh. T., Mosekilde E.* Birth of bilayered torus and torus breakdown in a piecewise-smooth dynamical system // Phys. Lett. A. 2006. Vol. 351, № 3. P. 167.
19. *Zhusubaliyev Zh. T., Mosekilde E., Maity S.M., Mohanan S., Banerjee S.* Border collision route to quasiperiodicity: Numerical investigation and experimental confirmation // Chaos. 2006. Vol. 16. P. 023122-1–023122-11.
20. *Кобзев А.В.* Многозонная импульсная модуляция. Новосибирск: Наука, 1979.
21. *Кобзев А.В., Михальченко Г.Я., Музыченко Н.М.* Модуляционные источники питания РЭА. Томск: Радио и связь. Томский отдел, 1990.
22. *Lai J.S., Peng F.Z.* Multilevel converters – a new breed of power converters // IEEE Trans. Ind. Appl. 1996. Vol. 32, № 3. P. 509.
23. *Meynard T.A., Foch H., Thomas P., Courault J., Jakob R., Nahrstaedt M.* Multicell converters: Basic concepts and industry applications // IEEE Trans. Ind. Electron. 2002. Vol. 49, № 5. P. 955.
24. *Zhusubaliyev Zh. T., Mosekilde E.* Direct transition from a stable equilibrium to quasiperiodicity in non-smooth systems // Phys. Lett. A. 2008. Vol. 372, № 13. P. 2237.
25. *Гелиг А.Х., Чурилов А.Н.* Колебания и устойчивость нелинейных импульсных систем. СПб.: Изд-во СПб ун-та, 1993.
26. *Пиковский А., Розенблюм М., Куртс Ю.* Синхронизация. Фундаментальное нелинейное явление. М.: Техносфера, 2003.

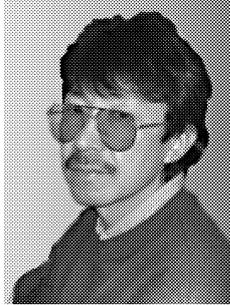
*Поступила в редакцию 9.04.2009*

## **BIFURCATIONS OF A TWO-DIMENSIONAL TORUS IN PIECEWISE-SMOOTH DYNAMICAL SYSTEMS**

*Zh.T. Zhusubaliyev, O.O. Yanochkina*

Considering a set of coupled nonautonomous differential equations with discontinuous right-hand sides, we discuss two different scenarios for torus birth bifurcations in piecewise-smooth dynamical systems. One scenario is the continuous transformation of the stable equilibrium into an unstable focus period-1 orbit surrounded by a resonant or ergodic torus. Another is the transition from a stable periodic orbit to an invariant torus through a border-collision bifurcation in which two complex-conjugate multipliers jump abruptly from the inside to the outside of the unit circle.

*Keywords:* Piecewise-smooth dynamical systems, border-collision bifurcation, invariant torus, equilibrium point



*Жусубалиев Жаныбай Турсунбаевич* – доктор технических наук, профессор. Окончил Томский институт автоматизированных систем управления и радиоэлектроники (ТИАСУР, 1982). После окончания института работал в НИИ автоматики и электромеханики при ТИАСУР. Защитил кандидатскую диссертацию (1989) и диссертацию доктора технических наук (2002) в области исследования нелинейной динамики и хаоса в импульсных системах автоматического управления. Профессор кафедры вычислительной техники Курского государственного технического университета. Область научных интересов – теория бифуркаций и динамического хаоса; сложная динамика и хаос в кусочно-гладких динамических системах, импульсных системах управления и вибрационной механике. Опубликовал свыше 100 работ в отечественной и зарубежной научной печати, является соавтором 5 монографий и одного учебного пособия. Член Международного общества физики и управления.

305040 Курск, ул. 50 лет Октября, 94

Курский государственный технический университет

E-mail: zhanybai@mail.kursk.ru, zhanybai@hotmail.com



*Яночкина Ольга Олеговна* – окончила машиностроительный факультет Курского государственного технического университета (КурскГТУ, 2001). Инженер кафедры вычислительной техники КурскГТУ. Область научных интересов – нелинейная динамика, теория бифуркаций, математическое моделирование импульсных систем автоматического управления. Имеет 11 научных публикаций.

305040 Курск, ул. 50 лет Октября, 94

Курский государственный технический университет

E-mail: yanoolga@gmail.com



## ФАЗОВАЯ МУЛЬТИСТАБИЛЬНОСТЬ В АНСАМБЛЕ ГЕНЕРАТОРОВ С УДВОЕНИЯМИ ПЕРИОДА

*А.В. Шабунин, В.В. Астахов*

Рассматриваются закономерности развития мультистабильности в больших ансамблях идентичных генераторов, демонстрирующих усложнение колебаний через каскад бифуркаций удвоения периода. Исследования проводятся на примере осцилляторов Ресслера, с симметричной диффузионной связью. Определяется число сосуществующих аттракторов при слабой связи и проводится их классификация с точки зрения спектров.

*Ключевые слова:* Мультистабильность, автоколебания, хаос.

### Введение

Синхронизация – фундаментальное природное явление, которое лежит в основе многих механизмов, управляющих эволюцией сложных систем. В связанных автоколебательных системах синхронизация может приводить к возникновению фазовой мультистабильности [1, 2], когда в фазовом пространстве сосуществует несколько аттракторов, соответствующих разным значениям установившихся разностей фаз, каждое из которых соответствует своему синхронному состоянию. В ансамблях осцилляторов с периодическими колебаниями простой формы фазовая мультистабильность реализуется в виде иерархии режимов бегущих волн [3–6]. В системах с более сложным поведением, например, в двух взаимодействующих фейгенбаумовских осцилляторах [1, 7–11], развитие фазовой мультистабильности в ходе каскада бифуркаций удвоения периода ведет к неограниченному увеличению числа сосуществующих предельных циклов на пороге перехода к хаосу. Закономерности развития мультистабильности в двух осцилляторах детально исследованы. В частности, было показано [12], что эволюция колебательных режимов может быть легко объяснена с точки зрения поведения фазовых спектров: фазы появляющихся после каждой бифуркации суб-гармоник принимают два возможных значения 0 и  $\pi$ , каждому из которых соответствует свой аттрактор.

Развитие фазовой мультистабильности в ансамблях с большим числом автогенераторов со сложной динамикой исследовано не столь полно. В ряде работ показано, что в ансамблях генераторов с хаотическим поведением возможно сосуществование хаотических бегущих волн [13–15]. В работе [16] рассматривался постепенный переход от регулярных бегущих волн к хаотическим в ходе каскада бифуркаций удвоения периода. На плоскости управляющих параметров были построены

области существования характерных пространственно – временных режимов, а также рассмотрены типичные последовательности бифуркаций на базе каждого из них. Однако, детального исследования формирования мультистабильности при усложнении формы колебаний не проводилось. В настоящей работе мы пытаемся восполнить этот пробел, исследуя как происходит развитие мультистабильности в ансамбле автогенераторов при усложнении формы колебаний в ходе каскада бифуркаций удвоения периода, сколько различных фазовых мод сосуществует в фазовом пространстве и как их число меняется с изменением параметров системы, а также, насколько подобные режимы являются типичными с точки зрения выбора начальных условий.

## 1. Исследуемая система в режиме бегущих волн

В качестве модели выберем ансамбль идентичных осцилляторов Ресслера с симметричной диффузионной связью:

$$\begin{aligned}\dot{x}_i &= -y_i - z_i + \gamma(x_{i+1} - 2x_i + x_{i-1}) \\ \dot{y}_i &= x_i + 0.2y_i \\ \dot{z}_i &= 0.2 + z_i(x_i - c)\end{aligned}\tag{1}$$

Здесь  $x_i$ ,  $y_i$  и  $z_i$  – динамические переменные  $i$ -го осциллятора ( $i = 1, \dots, N$ );  $c$  – управляющий параметр, ответственный за бифуркации удвоения периода;  $\gamma > 0$  – параметр связи. Для определенности выберем число осцилляторов  $N$ , равное 30. Будем также использовать периодические граничные условия:  $x_{31} = x_1$ ,  $x_0 = x_{30}$  (здесь и далее жирным шрифтом обозначаются векторные величины:  $\mathbf{x}_i = (x_i, y_i, z_i)$ ).

Как известно [17], осциллятор Ресслера – типичная автоколебательная система, демонстрирующая каскад бифуркаций удвоения периода. Динамика ансамбля (1) сложнее, чем динамика одного генератора. При слабой связи в подобных системах следует ожидать мультистабильность, то есть сосуществование множества устойчивых колебательных режимов, выбор между которыми осуществляется посредством выбора начальных условий. Поскольку генераторы идентичны, а связь между ними симметрична – уравнения (1) обладают трансляционной симметрией: сдвиг на любое число осцилляторов вправо или влево оставляет уравнения системы без изменения. Вследствие симметрии в (1) могут наблюдаться режимы, при которых форма колебаний и их амплитуда у всех осцилляторов одинаковые, а текущие фазы отличаются от фаз соседей на постоянную величину. Такие режимы можно рассматривать как автоволны, бегущие с постоянной фазовой скоростью вдоль цепочки.

Рассмотрим, какие бегущие волны возможны в системе (1), если колебания в каждом из генераторов близки к гармоническим. Введем в рассмотрение текущие фазы колебаний в каждом из осцилляторов ансамбля. Определим фазу в виде кусочно-линейной функции времени, монотонно возрастающей на периоде колебаний от  $-\pi$  до  $\pi$ , а затем при достижении граничного значения, скачком возвращающейся назад на  $2\pi$ ,

$$\varphi_i(t) = 2\pi \frac{t - t_n^{(i)}}{t_{n+1}^{(i)} - t_n^{(i)}} - \pi.\tag{2}$$

Здесь  $t_n^{(i)}$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ) – момент времени  $n$ -го, а  $t_{n+1}^{(i)}$  –  $n+1$ -го пересечения траекторией  $\mathbf{x}_i(t)$  некоторой гиперплоскости. Разности между текущими фазами соседних осцилляторов  $\Delta\varphi_i(t) = \varphi_{i+1}(t) - \varphi_i(t)$  ( $i = 1, 2, \dots, N$ ) будем называть фазовыми сдвигами между ними. Если величина связи равна нулю, то периоды колебаний всех осцилляторов будут одинаковы независимо от их местоположения в ансамбле, а следовательно величины фазовых сдвигов не должны меняться со временем:  $\Delta\varphi_i(t) = c_i$ . Сами значения разностей фаз для каждого  $i$  могут быть произвольными, однако, вследствие периодических граничных условий суммарный набег фаз вдоль кольца  $\Phi = \sum_{i=1}^N c_i$  пропорционален  $2\pi$ :  $\Phi = 2\pi k$ , где  $k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm N/2$  принимает целое значение. Введение сколь угодно слабой, но отличной от нуля связи приводит к синхронизации между осцилляторами, в результате которой произвол в значениях разностей фаз устраняется: фазовые сдвиги принимают строго определенные значения [18]. Симметричные системы, подобные (1), допускают решения, при которых в каждой точке среды форма колебаний в каждом из осцилляторов и фазовые сдвиги между соседними осцилляторами одинаковы:  $\Delta\varphi_i(t) = \Delta\varphi$ , то есть, допускают решения в виде волн, бегущих вдоль кольца с фазовой скоростью  $v = 2\pi/\Delta\varphi T$  и характеризуемых длиной волны  $\Lambda = 2\pi/\Delta\varphi$ . Если число осцилляторов в ансамбле ( $N$ ) конечно, то и число возможных бегущих волн также конечно и равно  $N$ . Значение фазового сдвига для каждой волны рассчитывается по формуле

$$\Delta\varphi^{(k)} = \frac{2\pi k}{N}. \quad (3)$$

Индекс  $k$  определяет пространственную структуру колебаний цепочки осцилляторов и будет в дальнейшем использоваться как индекс волны. Значению  $k = 0$  соответствует пространственно-однородное состояние, когда колебания в каждом из осцилляторов синфазны,  $k = \pm N/2$  относятся к противофазным колебаниям. В остальных случаях каждое положительное значение  $k$  соответствует прямой волне, отрицательное – обратной. Поскольку прямые и обратные волны отличаются только направлением распространения, в дальнейшем будем рассматривать только прямые волны, то есть ограничимся значениями  $k \geq 0$ .

В работе [19] проводился анализ устойчивости бегущих волн в квазигармоническом приближении, а в работе [6] – анализ устойчивости подобных режимов в ансамбле генераторов ван дер Поля с диффузионной связью, как вблизи бифуркации рождения предельного цикла, так и при релаксационных колебаниях. Было показано, что расположение областей устойчивости бегущих волн на плоскости параметров «связь – возбуждение» имеет вложенную структуру: области устойчивости коротковолновых режимов располагаются внутри областей устойчивости более длинноволновых режимов. Известно также [4], что при положительных значениях диффузионной связи могут быть устойчивыми только те волны, для которых разность фаз между соседними осцилляторами не превосходит  $\pi/2$ . В анализируемом нами случае  $N = 30$  это с учетом (3) означает, что только волны с  $k = 0, 1, \dots, 7$  могут быть устойчивыми, а с  $7 < k \leq 15$  – нет.

Итак, предыдущие исследования позволяют предположить, что при слабой диффузионной связи в системе (1) можно ожидать сосуществование бегущих волн с

$k = 0, 1, \dots, 7$ . Проведем численные исследования поведения ансамбля при  $\gamma = 0.005$  и  $c = 2.35$ , что соответствует колебаниям простой формы в каждом из генераторов. Чтобы различать волны с разными  $k$ , будем отображать «профили» бегущих волн, для чего используем следующую методику. Построим отображение Пуанкаре, выбрав в качестве секущей гиперплоскость  $y_1 = 0$ . Для этого будем отслеживать моменты времени  $t_n$ , в которые переменная  $y_1$  меняет знак с положительного на отрицательный. Построим график зависимости значений переменной  $x$  в каждом из генераторов при пересечении траекторией данной гиперплоскости ( $x_i(t_n)$ ) от номера осциллятора  $i$ . Таким образом, у нас получится «мгновенный снимок» волны, привязанный к определенному значению фазы одного из генераторов (в данном случае – первого). Для исследования бегущих волн также будем использовать спектральные характеристики:

- спектр мощности колебаний  $x_i(t)$

$$P_i(f) = \langle F_i(f)F_i^*(f) \rangle,$$

где  $F(f)$  – Фурье преобразование,  $f$  – частота;

- взаимный фазовый спектр колебаний  $x_i(t)$  и  $x_{i+1}(t)$

$$\Delta\theta_i(f) = \theta_{i+1}(f) - \theta_i(f),$$

где  $F_i(f) = |F_i(f)| \exp(j\theta_i(f))$ .

Поскольку в системе может существовать несколько аттракторов, для выбора между ними необходимо задавать разные начальные условия. Как задать начальные условия, чтобы система выбрала «нужный» аттрактор с данным  $k$ ? Очевидно, начальные условия должны быть достаточно близки к искомому аттрактору. При нулевой связи можно задать начальные условия в первом из осцилляторов, выбрав их вблизи предельного цикла, а в остальных осцилляторах – те же значения, но сдвинутые по фазе на угол  $(i - 1)\Delta\varphi^{(k)}$ , пропорционально фазовому сдвигу, характерному для заданной моды. Если полагать, что слабая связь существенно не меняет форму колебаний, можно воспользоваться той же методикой и для ансамбля слабосвязанных генераторов. В наших исследованиях мы задавали начальные значения  $x_i$  и  $y_i$  в виде функций синус и косинус от аргумента  $i\phi$  при  $\phi = \Delta\varphi^{(k)}$ , оставляя значения  $z_i$  нулевыми

$$\begin{aligned} x_i &= X_0 \sin(i\phi), \\ y_i &= Y_0 \cos(i\phi), \\ z_i &= 0, \\ i &= 0, 1, \dots, N - 1. \end{aligned} \tag{4}$$

Константы  $X_0$  и  $Y_0$  выбирались достаточно близкими к амплитудам колебаний соответствующих переменных в отдельном несвязанном осцилляторе Ресслера при данном  $c$ . Как показали исследования, данный способ выбора начальных условий позволяет получить каждый из волновых режимов с  $k = 0, \pm 1, \dots, \pm 7$ . Таким образом,

численные исследования подтверждают, что все режимы с  $k \leq 7$  при выбранной слабой связи устойчивы. На рис. 1 изображены снимки волн с  $k = 0, 1, 2, 4$  и  $7$  (слева), а также проекции фазовых портретов  $x_1-x_2$  (справа). Характер пространственного профиля волн полностью определяется значением индекса  $k$ ; последний равен числу максимумов или минимумов на профиле волны. На том же рисунке пунктирными линиями построены профили обратных волн с отрицательными  $k$ .

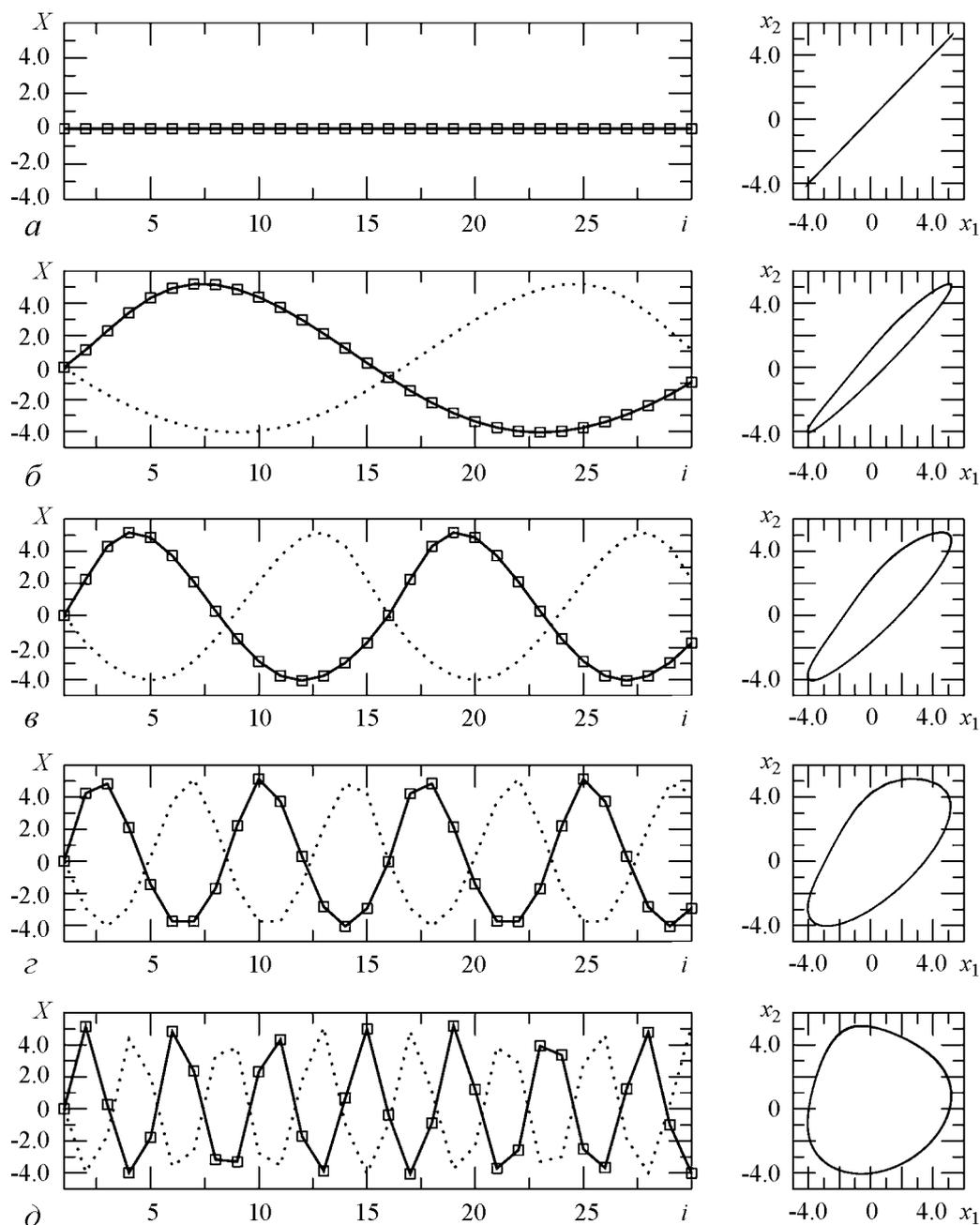


Рис. 1. «Профили» бегущих волн с разными значениями индекса  $k$  (слева) и фазовые портреты (справа):  $a - k = 0$ ;  $b - 1$ ;  $\theta - 2$ ;  $z - 4$ ;  $d - 7$ . Значения параметров:  $c = 2.35$ ,  $\gamma = 0.005$

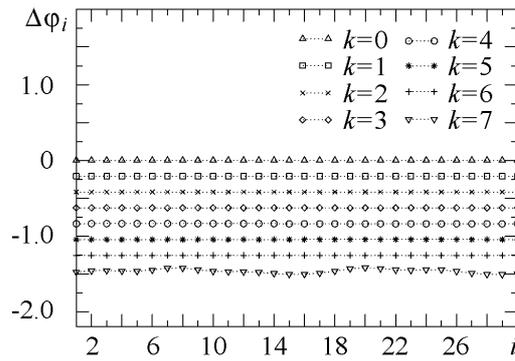


Рис. 2. Распределение разности фаз вдоль ансамбля. Значения параметров те же, что и на рис.1

волны с  $k = 2$ . В силу пространственной однородности колебаний, обе эти спектральные характеристики будут одинаковыми и для всех остальных осцилляторов ансамбля. Видно, что спектр мощности содержит основную гармонику на частоте  $f_0 \simeq 0.17$  и высшие гармоники на частотах  $2f_0, 3f_0$ , и т.д. Значение фазы основной гармоники  $\Delta\theta^{(1)} = \Delta\theta(f_0)$  совпадает со значением фазового сдвига данной моды:  $\Delta\theta^{(1)} = -4\pi/30 \simeq -0.42$ . Фазы высших гармоник принимают пропорциональные значения:  $\Delta\theta(nf_0) = n\Delta\theta^{(1)}$ .

Таким образом, мы видим, что на этапе простейших колебаний в системе (1) наблюдается фазовая мультистабильность. Специальный выбор начальных условий позволяет выявить все ожидаемые режимы бегущих волн. Существуют ли бегущие волны с другими значениями  $\Delta\varphi$ ? Будут ли волновые моды с  $\Delta\varphi^{(k)} > \pi/2$  устойчивы в ансамбле генераторов Ресслера в отличие от ансамблей квазигармонических осцилляторов? Для ответа на эти вопросы произведен поиск установившихся устойчивых колебательных режимов при том же циклическом способе задания начальных условий (4), но при произвольных значениях угла  $\varphi$ .

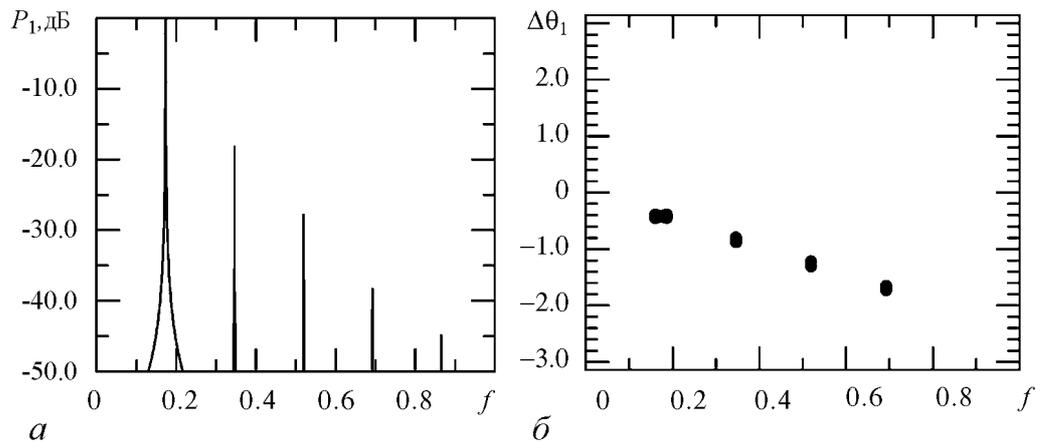


Рис. 3. Взаимный спектр мощности (а) и взаимный фазовый спектр (б) колебаний  $x(t)$  с  $k = 2$ . Значения параметров те же, что и на рис. 1

На рис. 4 представлены результаты исследований при сканировании  $\phi$  в диапазоне значений от 0 до  $\pi$  (результаты для значений с отрицательными  $\phi$  будут симметричными). На нём построена зависимость индекса  $k$ , характеризующего установившуюся волновую моду, от угла  $\phi$ . Анализ результатов показывает, что во всем диапазоне значений  $\phi$  задание циклических начальных условий приводит к выбору одной из указанных ранее бегущих волн в том же диапазоне значений  $0 \leq k \leq 7$ . Колебательные режимы с неоднородным пространственным распределением, а также бегущие волны с  $k > 7$  обнаружены не были. При малых значениях угла система демонстрирует пространственно-однородные колебания. Постепенное увеличение  $\phi$  ведет к серии «прыжков» ко все более и более коротковолновым модам. Такое поведение сохраняется вплоть до значения  $\phi = \pi/2$ , после чего характер зависимости выхода на ту или иную пространственную моду от угла  $\phi$  существенно меняется. При  $\phi > \pi/2$  эта зависимость становится неупорядоченной – близким начальным условиям могут соответствовать разные пространственные моды.

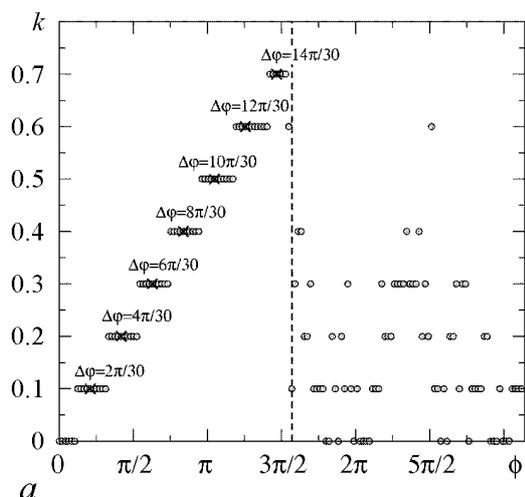


Рис. 4. Выход на разные пространственные моды в зависимости от выбора начальных условий (4). Значения параметров:  $c = 2.7$ ,  $\gamma = 0.005$

Проведенные исследования показали, что бегущие волны с  $k \in [0 : 7]$  являются устойчивыми решениями системы (1) при выбранных значениях параметров, а волны с  $k > 7$  – неустойчивыми. Однако, специальный выбор начальных условий не может дать ответа на следующие вопросы:

- насколько типичными решениями для данной системы являются решения в виде бегущих волн?
- существуют ли другие виды устойчивых решений, не обладающие такой высокой степенью пространственной однородности?

Для ответа на эти вопросы были проведены исследования вида установившихся колебаний при случайном выборе начальных условий

$$x_i = X_0 \xi_i^{(x)}, y_i = Y_0 \xi_i^{(y)}, z_i = Z_0 \xi_i^{(z)}, \quad (5)$$

где  $\xi_i^{(x,y,z)}$  – некоррелированные источники шума с равномерным распределением,  $X_0 = Z_0 = 1$ ,  $Y_0 = 0.5$  – константы. Исследования были выполнены для двух значений параметра  $c$ : 1.35 и 2.7. Как и в случае регулярных начальных условий не удалось обнаружить других устойчивых режимов, кроме указанных выше. Более того, при случайном выборе начальных условий в ходе 2000 выборок система демонстрировала только длинноволновые режимы с  $k < 5$ . Расчет вероятностей выхода на тот или иной колебательный режим ( $p^{(k)}$ ) при случайном выборе начальных условий

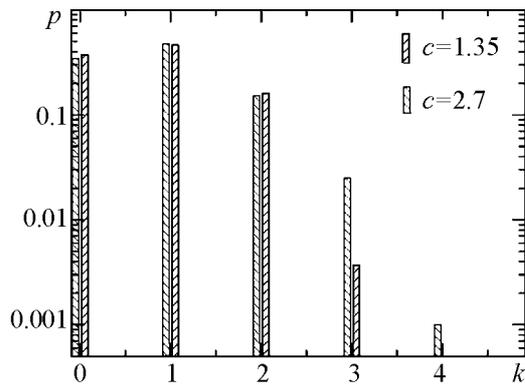


Рис. 5. Вероятности появления разных пространственных мод при случайном выборе начальных условий и  $\gamma = 0.005$

показал, что две самые длинные моды с  $k = 0$  и  $k = 1$  являются типичными решениями системы (1) с суммарной вероятностью около 85%. Оставшиеся 15% приходятся на более короткие волны с  $k = 2, 3$  и 4. Режимы с  $k \geq 5$  в ходе 2000 попыток ни разу не наблюдались. Результаты расчетов показаны на рис. 5. Видно, что распределение вероятности появления каждого типа волны сохраняется примерно одинаковым для разных значений параметра. С увеличением  $c$  мы наблюдаем небольшое увеличение вероятности появления более коротковолновых режимов.

Данные исследования позволяют заключить, что рассматриваемые режимы бегущих волн – характерные типы колебаний, которые с ненулевой вероятностью можно обнаружить в системе (1) на этапе простых однопериодных колебаний. Другие типы пространственно-временных режимов либо отсутствуют вовсе, либо бассейны притяжения их аттракторов настолько малы, что их появление крайне маловероятно.

## 2. Эволюция бегущих волн при усложнении формы колебаний в ходе удвоений периода

Рассмотрим, что происходит с режимами бегущих волн при увеличении параметра  $c$ . Выберем начальные условия, соответствующие одной из пространственных мод, например, с  $k = 2$  и, адиабатически меняя параметр, будем отслеживать качественные изменения установившихся колебательных режимов. До  $c \simeq 2.85$  в каждом из генераторов сохраняются колебания периода один. При достижении этого значения в одиночном осцилляторе Ресслера наблюдается бифуркация удвоения периода. Вместо нее в ансамбле осцилляторов имеет место мягкое возникновение двухчастотных квазипериодических колебаний, которые при  $c \simeq 3.05$  сменяются двухоборотным предельным циклом. Пространственные профили и проекции фазовых портретов показаны на рис. 6, а, б. Рассмотрим режим, соответствующий вновь появившимся колебаниям периода два, более подробно. Анализ пространственного профиля, а также распределения разностей текущих фаз вдоль цепочки показывает, что данные колебания больше не являются пространственно-однородными. В распределении разностей фаз присутствуют стационарные «фазовые дефекты», а именно – значения фазовых сдвигов в нескольких осцилляторах ансамбля отличаются от фазовых сдвигов в остальных осцилляторах. Режим с фазовыми дефектами показан на рис. 7, где построено распределение разностей текущих фаз вдоль ансамбля осцилляторов. Наблюдаются два дефекта, находящиеся на одинаковом расстоянии друг от друга. Несмотря на наличие дефектов суммарный набег фазы вдоль ансамбля сохраняет значение  $\Phi = 4\pi$ , характерное для моды с  $k = 2$ .

Дальнейшая эволюция колебаний в ансамбле происходит так же, как и в одиночном осцилляторе, то есть через каскад бифуркаций удвоения периода. При  $c \simeq 4.1$  наблюдается бифуркация удвоения периода двух-оборотного предельного цикла, и колебания в каждом из генераторов становятся четырехоборотными (рис. 6, в). Каскад бифуркаций удвоения периода при  $c \simeq 4.35$  завершается переходом к многоленточному хаосу. В закритической области наблюдаются бифуркации слияния лент многоленточных хаотических аттракторов, завершающиеся возникновением одноленточного хаоса (рис. 6, д).

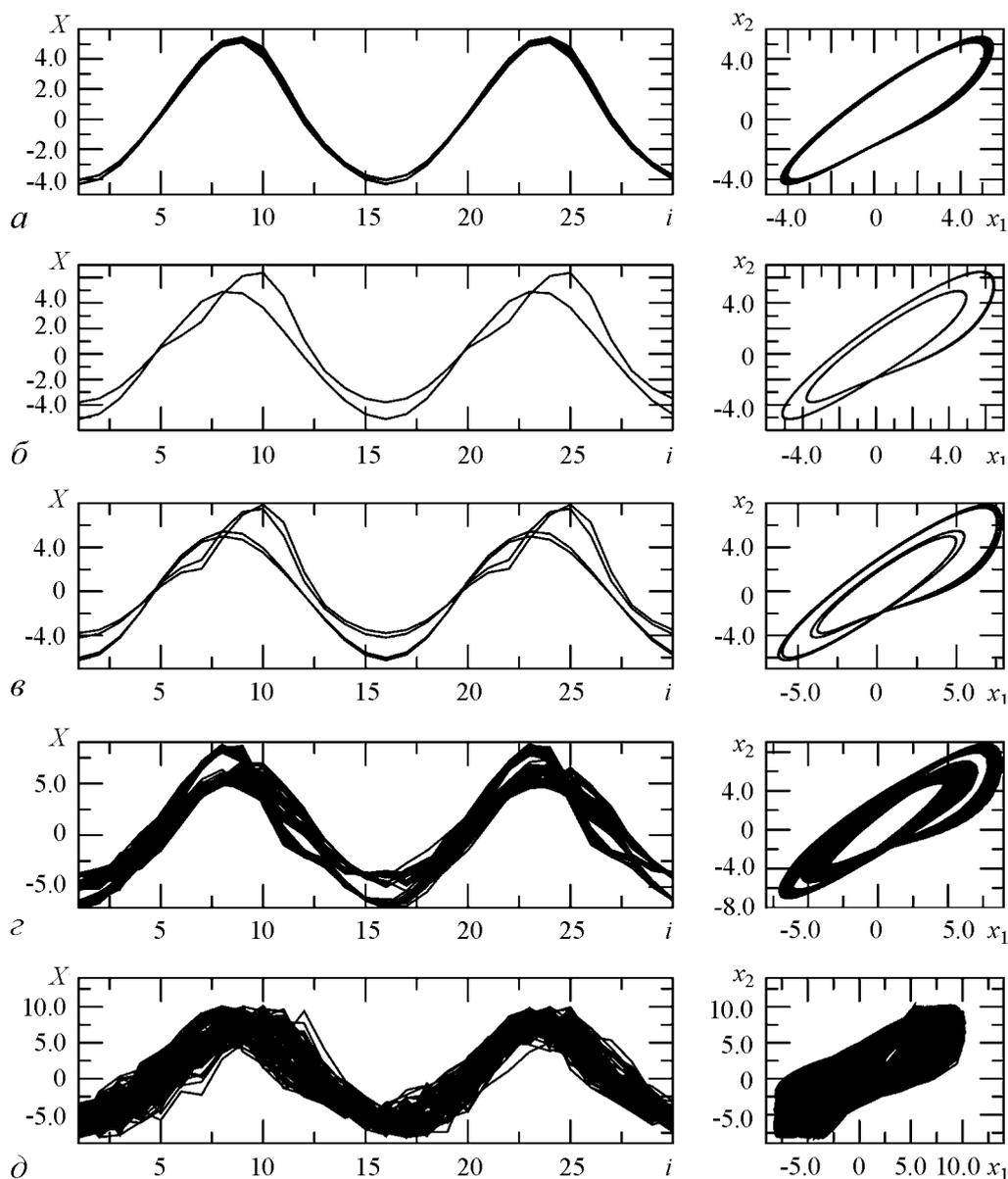


Рис. 6. Пространственные профили (слева) и проекции фазовых портретов (справа) колебательных режимов, образованных на базе волны с  $k = 2$  при увеличении параметра  $c$ : а – 2.85, б – 3.05, в – 4.1, г – 4.4, д – 6.25

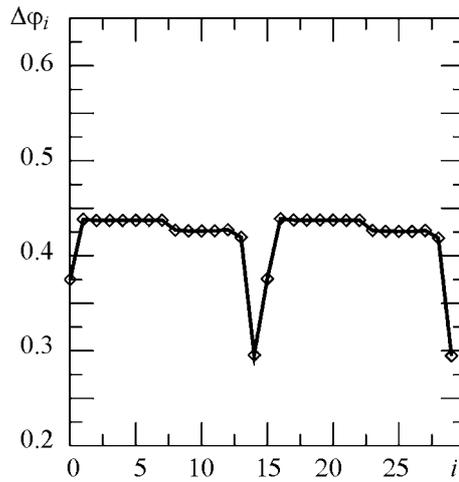


Рис. 7. Распределение разностей мгновенных фаз вдоль ансамбля для колебаний периода два;  $c = 3.05$ ,  $\gamma = 0.01$

ет трансляционной симметрией – она инвариантна по отношению к вращению вдоль кольца

$$I : \dots \rightarrow x_{i-1} \rightarrow x_i \rightarrow x_{i+1} \rightarrow \dots$$

Вследствие этого все предельные множества фазового пространства системы (1) будут либо самосимметричными, либо будут иметь симметричных «двойников». На уровне колебаний периода один все бегущие волны самосимметричны. После перехода к колебаниям периода два симметрия нарушается за счет появления фазовых дефектов. Так, например, аттрактор, показанный на рис. 6, *б*, не симметричен, поскольку имеет пару дефектов. Соответственно, имеется  $N/2 - 1$  симметричных аттракторов, которые могут быть получены посредством вращения на  $1, 2, \dots, N/2 - 1$  позиции. Рождение нескольких циклов периода два из одного цикла периода один не может происходить через бифуркацию удвоения периода. Вместо нее наблюдается сначала переход к квазипериодическим колебаниям, а затем – в результате одновременных седло-узловых бифуркаций – рождение нескольких устойчивых предельных циклов периода два.

Таким образом, переход от колебаний периода один к колебаниям периода два приводит к нарушению пространственной регулярности – на фоне бегущей волны появляются дефекты. Строго говоря, такие колебательные режимы более не являются бегущими волнами. Однако среднее значение фазового сдвига между соседними осцилляторами сохраняется и, соответственно, наследуется пространственный вид профиля моды с двумя минимумами и максимумами вдоль цепочки. Как показывают исследования спектров колебаний, также сохраняется значение фазы основной гармоники  $\Delta\theta^{(1)}$ , которое остается одинаковым для каждого из осцилляторов ансамбля. Однако значения фаз, появившихся после удвоения периода субгармоник,  $\Delta\theta^{(1/2)} = \Delta\theta(0.5f_0)$  уже перестают быть однородными. В «регулярных» осцилляторах и в «дефектах» эти значения различаются. Рис. 8 отображает проекции фазовых портретов (верхняя часть рисунка) и взаимные фазовые спектры (нижняя часть рисунка) колебаний осцилляторов в «регулярной» части ансамбля (*a*) и в ме-

Как видно, в описанном выше сценарии нарушение каскада бифуркаций удвоения периода происходит только однократно: между циклами периода один и периода два. Остальные бифуркации происходят обычным образом. Подобное замещение одной из бифуркаций удвоения периода отмечено во множестве работ, посвященных исследованию динамики взаимодействующих идентичных осцилляторов с симметричной связью. Почему именно первая из бифуркаций удвоения периода играет особую роль? Полагаем, данная особенность бифуркационного механизма связана со свойствами симметрии системы (1). Исследуемая система обладает

сте расположения дефекта ( $\bar{b}$ ). Видно, что в обоих случаях фазы гармоник  $\Delta\theta(nf_0)$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ) имеют одинаковое значение:  $-2\pi kn/N$ ; в то время как фазы субгармоник  $\Delta\theta(0.5(2n-1)f_0)$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ) могут иметь два разных значения: они равны  $-\pi k(2n-1)/N$  в первом случае, либо равны  $\pi - \pi k(2n-1)/N$  во втором случае. Таким образом, фазы субгармоники в основной части ансамбля равны половине фазы основной гармоники, а в точке дефекта – отличаются от нее на  $\pi$ .

Как показали исследования, эволюция колебательных режимов на базе каждой из бегущих волн с  $k = 1, \dots, 7$  происходит схожим образом. В каждом из случаев наблюдается замещение первой бифуркации удвоения периода последовательностью бифуркации рождения двумерного тора и синхронизацией на торе, в результате чего система переходит на один из нескольких сосуществующих предельных циклов периода два, симметричных друг другу. В пространственном распределении разностей фаз вдоль цепочки наблюдаются фазовые дефекты, обусловленные тем, что в некоторых точках среды значения фаз субгармоник отличаются на  $\pi$  от соответствующих значений в других точках среды, в то время как значения фаз основных гармоник

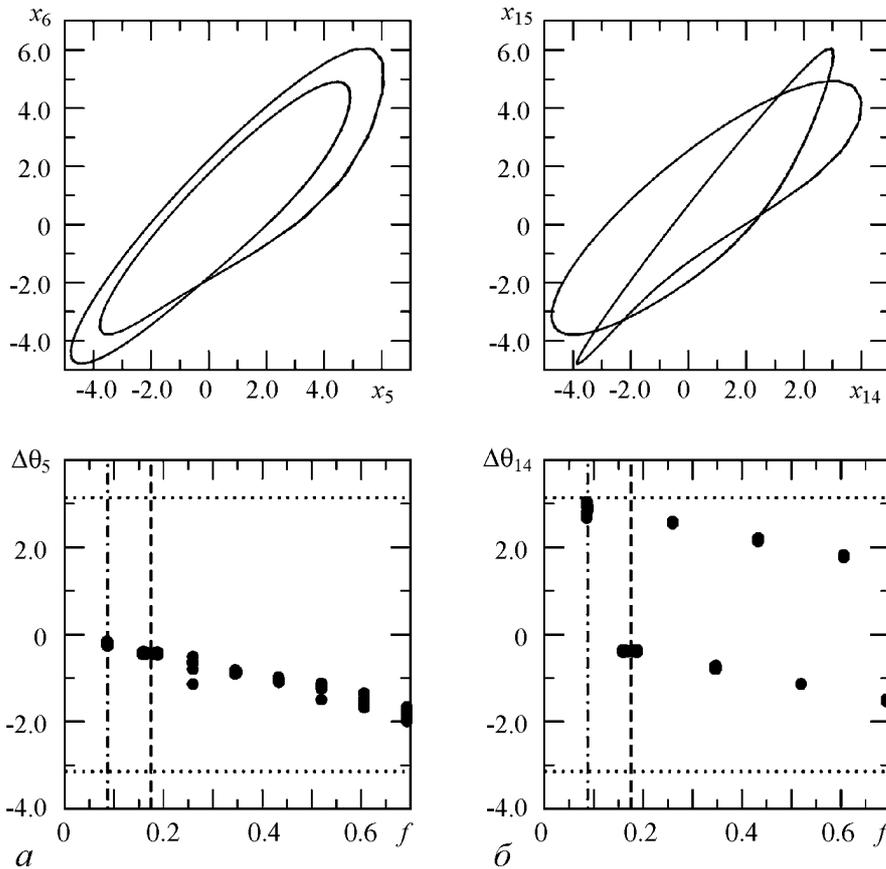


Рис. 8. Фазовые портреты (вверху) и взаимные фазовые спектры (внизу) колебаний в «регулярном» (a) и «дефектном» (б) элементах ансамбля. Вертикальные линии отмечают положение базовой частоты спектра  $f = f_0$  (штриховая линия) и первой из субгармоник  $f = f_0/2$  (штрих-пунктирная линия). Значения параметров те же, что и на рис. 7

остаются неизменными. Эволюция спектров характеризуется тем, что в результате бифуркаций колебательных режимов на базе выбранной пространственной моды фазы существующих до бифуркаций гармоник сохраняют свое значение и после нее. Данное правило имеет место и для хаотических колебаний. Многоленточный хаотический аттрактор, образованный на базе многооборотного цикла, характеризуется теми же значениями фаз гармоник и субгармоник, что и исходный предельный цикл. Поэтому усложнение формы колебаний в ходе цепочки мягких бифуркаций не разрушает пространственную структуру, характерную для выбранной фазовой моды. Сохраняется в среднем профиль волны, на который накладываются «дефекты», сохраняется значение фазы основных гармоник взаимного спектра  $\Delta\theta^{(1)}$ , а также значение суммарного набега фазы  $k$ . На рис. 9 построены взаимные фазовые спектры для ряда типичных режимов данной моды: четырехоборотного цикла (а), двухленточного (б) и одноленточного аттракторов (в). Во всех случаях фазы основных гармоник оказываются захваченными на тех же значениях, что и у исходного цикла периода один. В то же время значения фаз для субгармоник в каждом из элементов ансамбля могут различаться. Различие в фазах субгармоник является источником дальнейшего развития мультистабильности на базе каждой из пространственных мод.

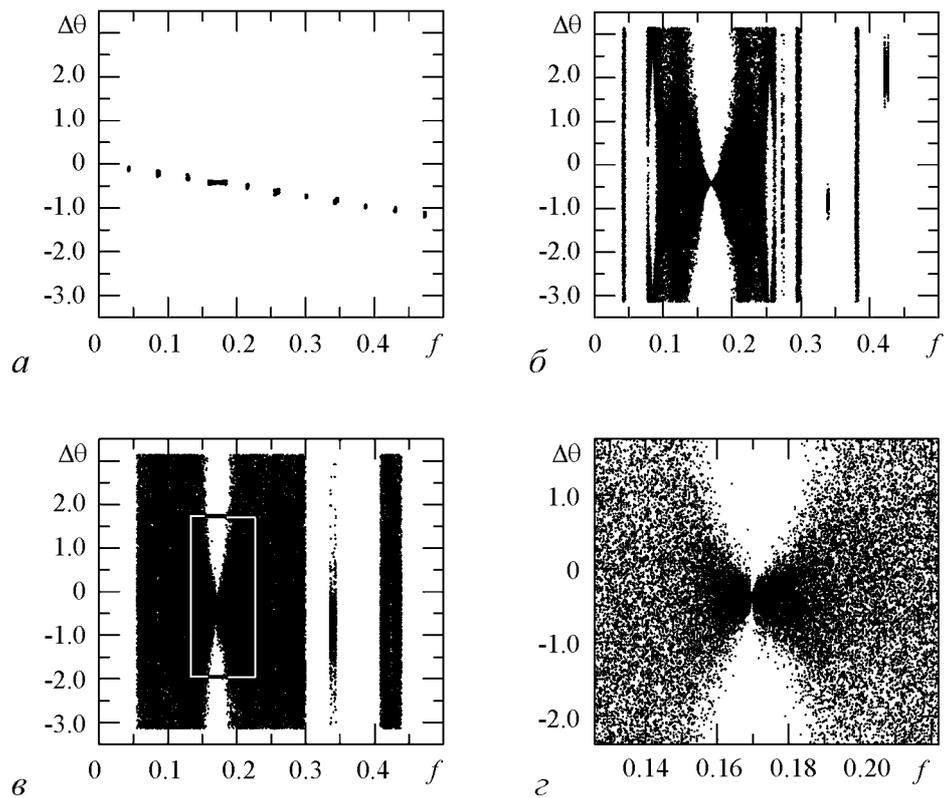


Рис. 9. Взаимный фазовый спектр колебаний для пространственной моды с  $k = 2$ : а – предельный цикл периода четыре (см. рис. 6, в); б – двухленточный хаотический аттрактор (см. рис. 6, з); в – одноленточный хаотический аттрактор (см. рис. 6, д); г – воспроизводит часть рис. в, отмеченную прямоугольником

### 3. Развитие мультистабильности при усложнении формы колебаний

Как было показано выше, при малой связи в системе (1) сосуществуют 15 аттракторов, соответствующих колебаниям периода один. Усложнение формы колебаний приводит к увеличению числа сосуществующих аттракторов за счет «расщепления» одного самосимметричного аттрактора на несколько – симметричных друг другу, различающихся расположением дефектов. Как можно оценить число сосуществующих аттракторов данной пространственной моды с определенным индексом  $k$  и с выбранной формой колебаний?

Вернемся к циклу периода два. Переход от однооборотного предельного цикла к двухоборотному сопровождается потерей симметрии: один самосимметричный аттрактор периода один порождает несколько симметричных друг другу аттракторов периода два, каждый из которых отличается своим расположением фазовых дефектов. Как показывают исследования, число дефектов совпадает со значением  $k$ , а сами дефекты располагаются равномерно вдоль ансамбля. Например, для волны с  $k = 2$  этот переход ведет к появлению 15 колебательных режимов с двумя дефектами. Таким образом, общее число сосуществующих аттракторов, возникших описанным выше способом, не должно превосходить значения  $NM_1$ , где  $M_1$  – число бегущих волн периода один. Однако экспериментальная проверка не подтверждает данный результат. Попытка подсчитать число сосуществующих аттракторов периода два обнаруживает, что их число гораздо больше.

Выберем  $c = 3.15$  и будем задавать случайные начальные условия согласно правилу (5), подсчитывая число разных аттракторов, обнаруженных после  $R$  попыток. Для каждой из  $j = 1, 2, \dots, R$  попыток будем использовать следующую методику.

- Зададим случайные начальные условия  $\mathbf{x}_i^{(j)}(0)$  ( $i = 1, 2, \dots, N$ ).
- Проинтегрируем систему (1) с выбранных начальных условий в течение заданного интервала установления  $t_r$  (в наших исследованиях  $t_r = 50000$ ).
- Выясним, относится ли точка  $\mathbf{X}_i^{(j)} = \mathbf{x}_i^{(j)}(t_r)$  к уже найденным аттракторам. Для этого будем использовать свойство возвращаемости траектории аттрактора в окрестность каждой из своих точек. Проинтегрируем систему (1) в течение времени анализа  $t_a$  ( $t_a = 10000$ ) из начальных условий  $\mathbf{X}_i^{(j)}$ , отслеживая расстояние между траекторией  $\mathbf{x}_i^{(j)}(t)$  и точками, принадлежащими уже найденным в предыдущих попытках аттракторам  $\mathbf{X}_i^{(l)}$ ,  $l = 1, 2, \dots, j - 1$ :  $d^{(j,l)} = \min \|\mathbf{x}_i^{(j)}(t) - \mathbf{X}_i^{(l)}\|$ . Если для точки, принадлежащей одному из аттракторов  $\mathbf{X}_i^{(s)}$ , это расстояние меньше заданного  $\varepsilon$  ( $d^{(j,s)} \leq \varepsilon$ ), полагаем, что точка  $\mathbf{X}_i^{(j)}$  принадлежит тому же аттрактору, что и точка  $\mathbf{X}_i^{(s)}$ .

- В противном случае принимаем, что точка  $\mathbf{X}_i^{(j)}$  не принадлежит ни одному из найденных ранее аттракторов, добавляем  $\mathbf{X}_i^{(j)}$  в общий пул точек, относящихся к найденным ранее аттракторам, и увеличиваем число последних на единицу.

На рис. 10, *a* представлен график зависимости числа обнаруженных аттракторов после задания  $R$  разных случайных начальных условий. Как видно из графика, число аттракторов растет с увеличением  $R$  практически линейно, не обнаруживая склонности к насыщению даже после 2000 выборок. Оно значительно превышает ожидаемое число аттракторов, примерно равное 450. Для сравнения на рис. 10, *б*

подобная зависимость построена для циклов периода один. Здесь число обнаруженных аттракторов после 700 попыток стабилизируется на значении 9 с  $k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4$  и больше не меняется.

Поскольку, как было обнаружено, в фазовом пространстве существует гораздо больше аттракторов, чем появляется в результате седло-узловых бифуркаций на торе, описанный в предыдущем разделе бифуркационный механизм нельзя считать единственным. Соответственно, следует ожидать существование колебательных режимов с пространственными свойствами, отличными от свойств описанных выше режимов.

Рассмотрим два произвольно выбранных колебательных режима периода два, полученных при случайном задании начальных условий (рис. 11). Их пространственные профили в среднем совпадают: оба профиля характеризуются двумя глобальными максимумами и минимумами вдоль цепочки, однако, имеются локальные

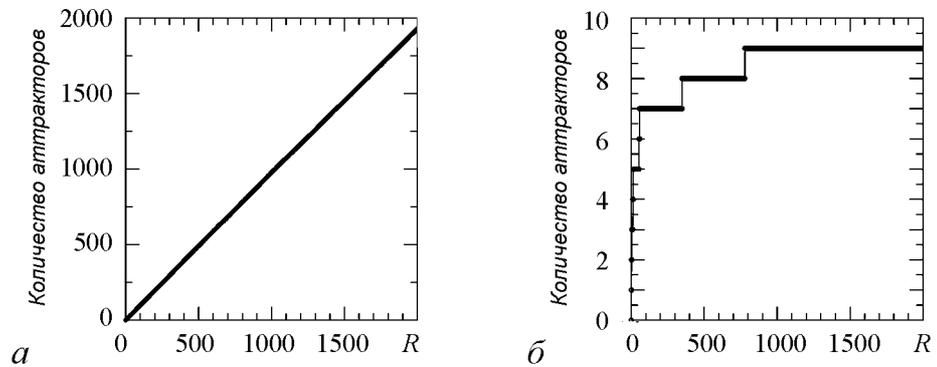


Рис. 10. Число сосуществующих аттракторов, обнаруженных после  $R$  случайных начальных условий для  $\gamma = 0.005$ :  $a$  – цикл периода два,  $c = 3.15$ ;  $b$  – цикл периода один,  $c = 2.7$

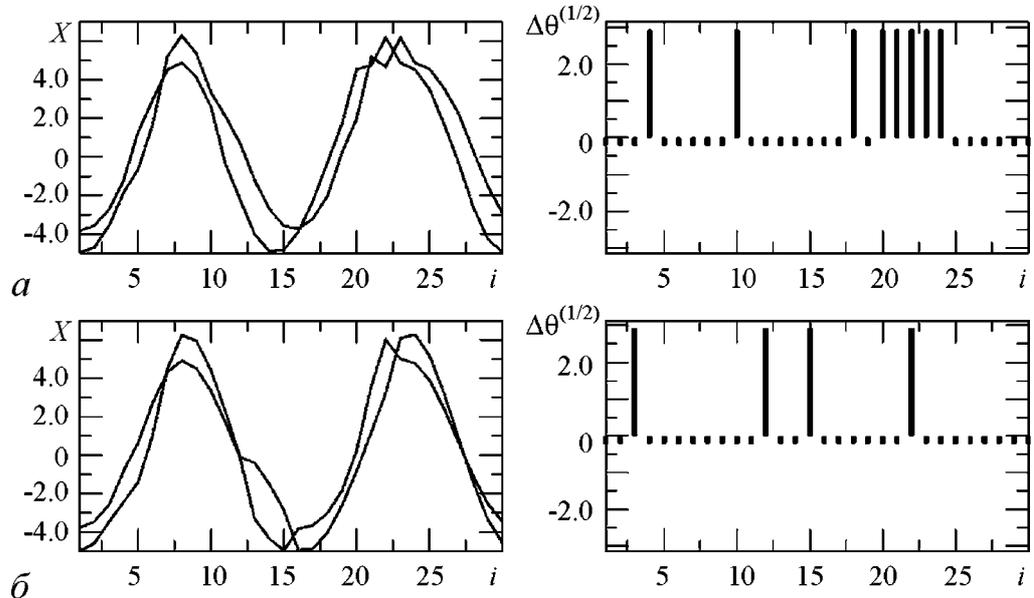


Рис. 11. Аттракторы фазовой моды  $2C^2$  ( $c = 3.15, \gamma = 0.005$ ) для двух случайных наборов начальных условий

различия. Эти различия связаны с фазами субгармоник взаимных спектров колебаний. Исследования фазовых спектров этих режимов показывают, что также как и для волн периода один значение разности фаз основной гармоники одинаково в каждом осцилляторе  $\Delta\theta_i^{(1)} = -0.418$ . Однако фазы субгармоник распределены вдоль цепочки неравномерно. Распределения данных фаз вдоль ансамбля построены для указанных режимов в правой части рис. 11. Так же как и для режимов на рис. 6,  $\bar{b}$  фазы субгармоник могут принимать в каждом осцилляторе одно из двух возможных значений:  $\Delta\theta^{(1/2)} = 0.5\Delta\theta^{(1)} = -0.209$  и  $\Delta\theta^{(1/2)} = 0.5\Delta\theta^{(1)} + \pi = 2.932$ . Однако их пространственное распределение больше не соответствует тем правилам, которые были обнаружены для предельных циклов, появившихся в результате синхронизации на торе: число дефектов больше двух и они распределены вдоль ансамбля неравномерно. Назовем элемент ансамбля, в котором фаза первой субгармоники принимает первое значение, элементом «а», а элемент ансамбля, в котором фаза первой субгармоники принимает второе значение – элементом «б». Элемент «а» соответствует «регулярному» осциллятору, элемент «б» – дефекту. Анализ этих и подобных им примеров дает возможность предположить, что сочетание «а» и «б» элементов может быть любым. Это предположение предсказывает существование  $2^{N-1}$  циклов периода два для каждой из  $M_1$  фазовых мод:

$$M_2 = M_1 2^{N-1}. \quad (6)$$

В случае 30 осцилляторов формула (6) предсказывает существование 80530636890 аттракторов, что объясняет почти линейный ход зависимости на рис. 10 а. Однако столь большое число аттракторов исключает возможность экспериментальной проверки.

Чтобы проверить правильность нашего предположения выберем ансамбль с меньшим числом осцилляторов. Для  $N = 2, 3, 5, 6$  формула (6) дает  $M_2 = 2, 4, 8, 96$  сосуществующих аттрактора, соответственно. Численные исследования подтверждают эти предсказания. Так, на рис. 12 сплошными линиями построены графики зависимости числа обнаруженных аттракторов периода два после  $R$  случайно выбранных начальных условий для ансамбля из трех (а) и пяти (б) осцилляторов. В обоих

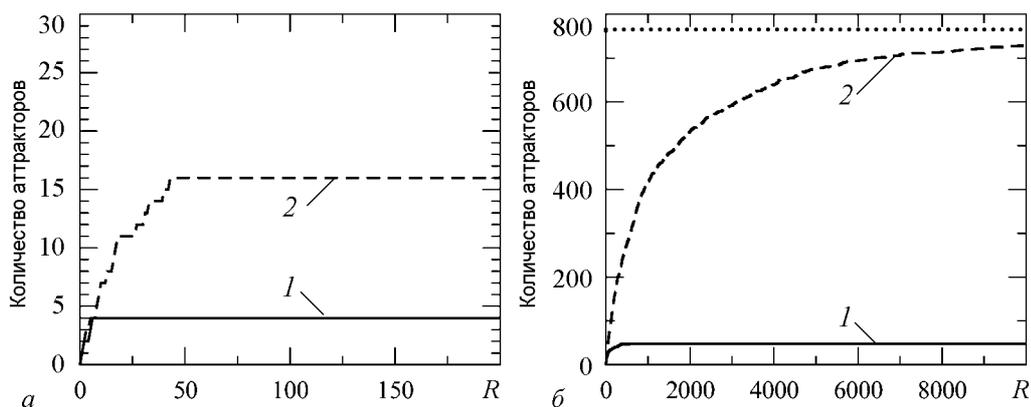


Рис. 12. Число сосуществующих аттракторов периода два (1) для  $c = 3.15$  и периода четыре (2) для  $c = 4.1$ , найденных после  $R$  случайных начальных условий для ансамблей из 3 (а) и 5 (б) осцилляторов. Во всех случаях  $\gamma = 0.005$

случаях мы наблюдаем стабилизацию зависимости на значениях в 4 и 48 аттракторов, предсказанных (6). Аналогичные результаты были получены для ансамблей из 2 и 6 осцилляторов. Что касается  $N = 4$ , то это более сложный случай, поскольку он включает в себя  $\pi/2$  моды, характеризующиеся в гармоническом приближении нейтральной устойчивостью. Они не обнаруживаются в эксперименте при положительной связи, когда колебания в осцилляторах имеют простую форму. Исследования показывают, что в случае колебаний более сложной формы некоторые из них могут быть найдены при очень слабой связи  $\gamma < 0.005$ . Если исключить из рассмотрения  $\pi/2$  колебания, то для  $N = 4$  мы получим 8 сосуществующих аттракторов, что подтверждается экспериментом. На рис. 13 построены пространственные профили и перекрестные проекции фазовых портретов для всех режимов

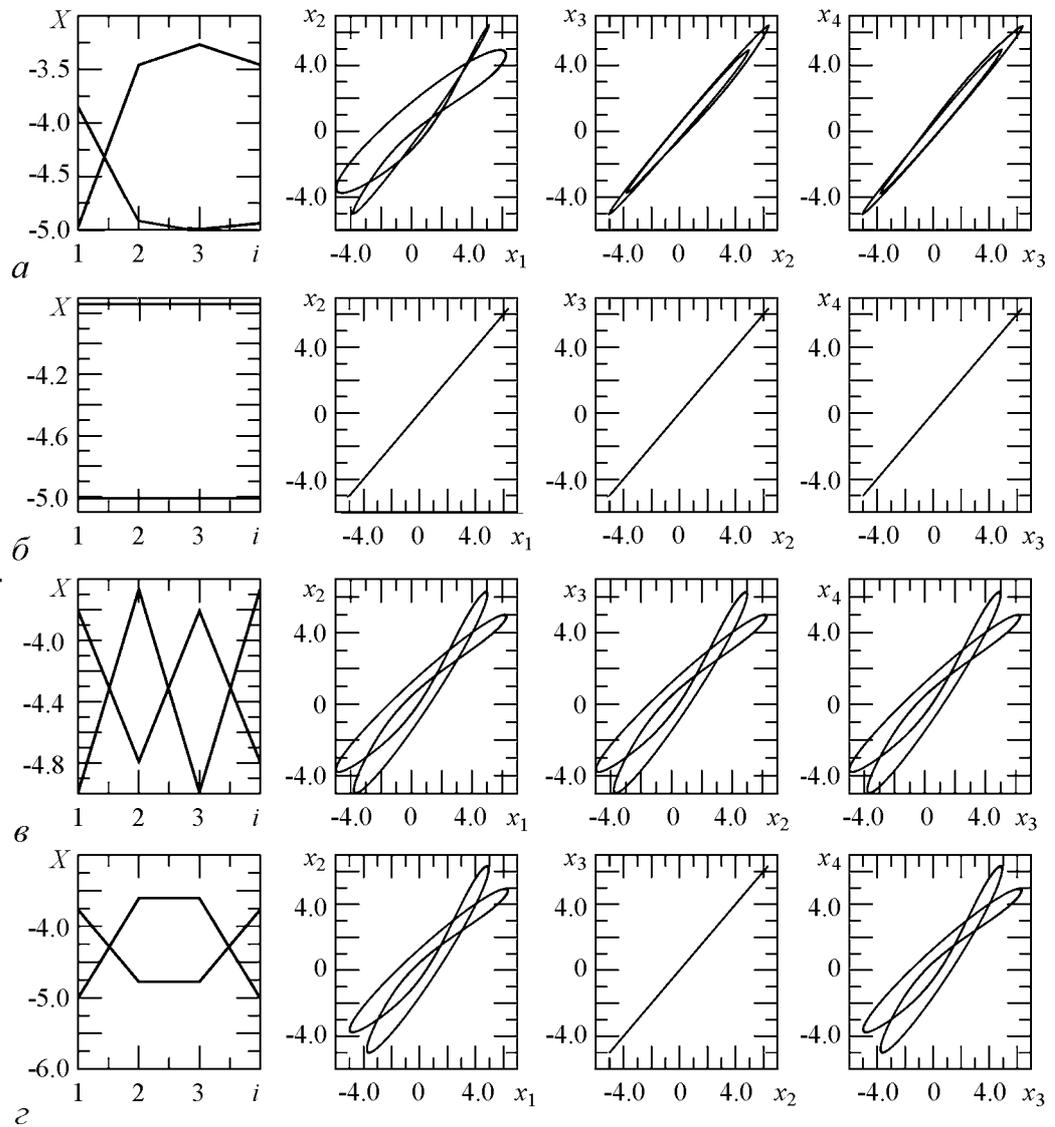


Рис. 13. Пространственные профили колебательных режимов (слева) и проекции фазовых портретов циклов периода два в цепочке из 4 осцилляторов;  $c = 3.15$ ,  $\gamma = 0.005$

периода два (с точностью до преобразования симметрии) для цепочки из четырех элементов при  $\gamma = 0.005$ . На рисунке всего четыре режима, но два из них имеют симметричных «двойников»: аттрактор на рис. 13, *a* со структурой фаз субгармоник «baab» имеет три симметричных аттрактора со структурами фаз субгармоник «aabb», «abba» и «bbaa», и аттрактор на рис. 13, *z* со структурой фаз субгармоник «baba» имеющий один симметричный аттрактор со структурой фаз «abab». Режимы (*b*) и (*e*) – самосимметричны. Распределение колебаний вдоль ансамбля для них полностью однородно. Они являются истинными бегущими волнами. Остальные из указанных режимов по нашей терминологии называются «бегущими волнами с фазовыми дефектами». Таким образом, численные исследования подтверждают правильность формулы (6) для коротких цепочек.

Дальнейшее усложнение формы колебаний в осцилляторах происходит через каскад бифуркаций удвоений периода (за исключением самосимметричных режимов, которые претерпевают последовательность бифуркаций рождения тора и синхронизации на торе). Каждая бифуркация удвоения периода сопровождается появлением новых субгармоник на все более низких частотах. Как показывают исследования, для фаз этих субгармоник действует то же правило, что и для субгармоник  $\Delta\theta_i^{(1/2)}$ . Так, например, появившаяся после перехода к четырехоборотному циклу субгармоника  $\Delta\theta_i^{(1/4)} = \Delta\theta_i(0.25f_0)$  также может принимать два разных значения:  $\Delta\theta_i^{(1/2)}/2$  или  $\pi + \Delta\theta_i^{(1/2)}/2$ , где  $\Delta\theta_i^{(1/2)}$  – фаза субгармоники на половинной частоте. Таким образом, каждый из  $M_2$  циклов периода два рождает  $2^{N-1}$  циклов периода четыре. Соответственно, полное число аттракторов периода четыре должно быть

$$M_4 = M_1 4^{N-1}.$$

Данная формула предсказывает 16 аттракторов в ансамбле из 3 осцилляторов и 768 аттракторов в ансамбле из 5 осцилляторов. Результаты численных исследований представлены на рис. 12 штриховыми линиями. В случае 3-х осцилляторов (*a*) ожидаемое число аттракторов достигается примерно после 40 случайных начальных условий и далее не меняется. Для цепочки из 5 осцилляторов (*b*) предсказанного числа аттракторов достичь не удалось за 10000 выборок. Однако налицо стремление графика к этому значению. Экстраполируя правило расчета числа аттракторов на другие многооборотные циклы, возникшие в ходе удвоения периода, получаем общую формулу для цикла периода  $i$

$$M_i = M_1 i^{N-1}. \quad (7)$$

Формула (7) обобщает известную закономерность развития мультистабильности в двух взаимодействующих системах с удвоениями периода, по которой число предельных циклов, одновременно сосуществующих в фазовом пространстве, удваивается после каждой бифуркации. На пороге хаоса число аттракторов стремится к бесконечности.

В закритической области наблюдаются бифуркации объединения лент многоленточных хаотических аттракторов. На базе каждого из предельных циклов периода- $i$  образуется  $i$ -ленточный хаотический аттрактор, характеризующийся теми же значениями фаз субгармоник, что и исходный цикл. Бифуркации объединения лент сопровождаются объединением нескольких аттракторов в один, что приводит

к последовательному уменьшению числа аттракторов. Хаотические режимы «наследуют» значения фаз субгармоник от тех периодических режимов, из которых они образовались. После бифуркации объединения лент хаотических аттракторов субгармоники «растворяются» и их фазы «высвобождаются». Например, после перехода от двух- к одноленточному аттрактору фазы на частоте  $0.5f_0$  равномерно распределяются по интервалу  $[-\pi : \pi]$ . Соответственно, фазовые дефекты, обусловленные распределением фаз на этой частоте вдоль ансамбля, исчезают. Таким образом, число сосуществующих хаотических аттракторов с  $i$  лентами должно совпадать с числом предельных циклов периода- $i$ , а значит, каждая бифуркация слияния лент сопровождается объединением  $2^{N-1}$  хаотических аттракторов. С точки зрения формирования мультистабильности, бифуркации слияния лент аттракторов оказываются симметричными бифуркациям удвоения периода. В результате – в фазовом пространстве образуется 15 одноленточных хаотических аттракторов с набегом фаз вдоль ансамбля:  $\Phi = 2\pi k$ ,  $k = 0, \pm 1, \dots, \pm 7$ . Пространственная структура каждого из таких аттракторов схожа с профилем соответствующей периодической бегущей волны.

### Заключение

Рассмотрено явление формирования фазовой мультистабильности в ансамбле осцилляторов Ресслера при постепенном усложнении временной динамики. Показано, что при колебаниях простой формы мультистабильность реализуется в виде иерархии бегущих волн. Бегущие волны являются типичными колебательными режимами рассматриваемой системы. Переход к более сложным колебаниям при удвоениях периода приводит к нарушению пространственной регулярности колебательных режимов за счет появления фазовых дефектов – осцилляторов с «нестандартными» значениями разности фаз. Наличие фазовых дефектов резко увеличивает число сосуществующих колебательных режимов: после каждого удвоения периода оно растёт как  $2^{N-1}$ , где  $N$  – число осцилляторов в ансамбле. В результате на пороге перехода к хаосу число аттракторов становится неограниченно большим. В критической области наблюдается обратный процесс: после каждой бифуркации слияния лент многоленточных аттракторов их число уменьшается в  $2^{N-1}$  раз. В итоге число сосуществующих многоленточных аттракторов совпадает с числом предельных циклов той же кратности.

*Исследования выполнены при финансовой поддержке CRDF (грант № ВР4М06) и Министерства образования и науки РФ в рамках АВЦП «Развитие научного потенциала высшей школы» (2009–2010 годы) на 2009 г. (грант 2.2.2.2/229).*

### Библиографический список

1. Астахов В.В., Безручко Б.П., Гуляев Ю.П., Селезнев Е.П. Мультистабильные состояния в диссипативно связанных фейгенбаумовских системах // Письма в ЖТФ. 1989. Т. 15, № 3. С. 60.
2. Астахов В.В., Безручко Б.П., Пудовочкин О.Б., Селезнев Е.П. Фазовая мультистабильность и установление колебаний в нелинейных системах с удвоением периода // Радиотехника и электроника. 1993. Т. 38, № 2. С. 291.

3. Дворников А.А., Уткин Г.М., Чуков А.М. О взаимной синхронизации цепочки резистивно связанных автогенераторов // Известия вузов. Радиофизика. 1984. Т. 27, № 11. С. 1388.
4. Ermentrout G.B. The behaviour of rings of coupled oscillators // J. of Math. Biol. 1985. Vol. 23, № 1. P. 55.
5. Ermentrout G.B. Stable periodic solutions to discrete and continuum arrays of weakly coupled nonlinear oscillators // SIAM J. of Appl. Math. 1992. Vol. 52, № 6. P. 1664.
6. Шабунин А.В., Акопов А.А., Астахов В.В., Вадивасова Т.Е. Бегущие волны в дискретной ангармонической автоколебательной среде // Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2005. Т. 13, № 4. С. 37.
7. Астахов В.В., Безручко Б.П., Ерастова Е.Н., Селезнев Е.П. Формы колебаний и их эволюция в диссипативно связанных фейгенбаумовских системах // Журнал технической физики. 1990. Т. 60, № 10. С. 19.
8. Астахов В.В., Безручко Б.П., Пономаренко В.И., Селезнев Е.П. Мультистабильность в системе радиотехнических генераторов с емкостной связью // Радиотехника и электроника. 1991. Т. 36, № 11. С. 2167.
9. Астахов В.В., Безручко Б.П., Пономаренко В.И. Формирование мультистабильности, классификация изомеров и их эволюция в связанных фейгенбаумовских системах // Известия вузов. Радиофизика. 1991. Т. 34, № 1. С. 35.
10. Anishchenko V.S., Astakhov V.V., Vadivasova T.E., Sosnovtseva O.V., Wu C.W., Chua L. Dynamics of two coupled Chua's circuits // Int. J. of Bifurcation and Chaos. 1995. Vol. 5, № 6. P. 1677.
11. Bezruchko B.P., Prokhorov M.D., Seleznev E.P. Oscillation types, multistability, and basins of attractors in symmetrically coupled period-doubling systems // Chaos, Solitons and Fractals. 2003. Vol. 15. P. 695.
12. Астахов В.В., Шабунин А.В., Анищенко В.С. Спектральные закономерности при формировании мультистабильности в связанных генераторах с удвоением периода // Радиотехника и электроника. 1997. Т. 42, № 8. С. 974.
13. Matias M.A., Perez-Munuzuri V., Marino I.P., Lorenzo M.N., Perez-Villa V. Size instabilities in ring of chaotic synchronized systems // Europhys. Lett. 1997. Vol. 37. P. 379.
14. Matias M.A., Guemez J., Perez-Munuzuri V., Marino I.P., Lorenzo M.N., Perez-Villar V. Observation of a fast rotating wave in rings of coupled chaotic oscillators // Phys. Rev. Lett. 1997. Vol. 78. P. 219.
15. Marino I.P., Perez-Munuzuri V., Perez-Villar V., Sanchez E., Matias M.A. Interaction of chaotic rotating waves in coupled rings of chaotic cells // Physica D. 2000. Vol. 128. P. 224.
16. Shabunin A., Astakhov V., Anishchenko V. Developing chaos on base of traveling waves in a chain of coupled oscillators with period-doubling. Synchronization and hierarchy of multistability formation // Int. J. of Bifurcation and Chaos. 2002. Vol. 12. P. 1895.
17. Rössler O.E. An equation for continuous chaos // Phys. Lett. A. 1976. Vol. 57. P. 397.
18. Блехман И.И. Синхронизация в природе и технике. М.: Наука, 1981.

19. Гуртовник А.С., Неймарк Ю.И. Синхронизмы в системе циклически слабосвязанных осцилляторов // Динамические системы: Межвузовский сборник научных трудов. Н. Новгород: Изд-во ННГУ, 1991. С. 84.

*Поступила в редакцию 30.03.2009*

*После доработки 18.05.2009*

## PHASE MULTISTABILITY IN AN ARRAY OF PERIOD-DOUBLING SELF-SUSTAINED OSCILLATORS

*A.V. Shabunin, V.V. Astakhov*

Regularities of multistability developments are considered in an array of identical self-sustained oscillators with transition to chaos through period-doubling bifurcations. The used model is chain of diffusively coupled Rössler oscillators. The number of co-existing regimes are determined through the cascade of the bifurcations. It is shown that regularities of increasing of attractors are defined by transformation of the phase spectrum during transition to chaos.

*Keywords:* Multistability, self-sustained oscillations, chaos.

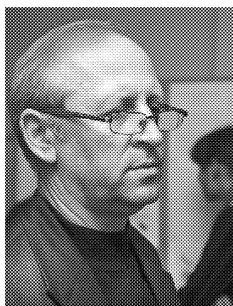


*Шабунин Алексей Владимирович* – окончил Саратовский государственный университет (1990). Доцент кафедры радиофизики и нелинейной динамики СГУ, доктор физико-математических наук (2008). Научные интересы – нелинейная динамика, теория колебаний, синхронизация и управление хаосом. Автор более 40 научных публикаций.

410012 Саратов, ул. Астраханская, 83

Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского

E-mail: shabuninav@info.sgu.ru



*Астахов Владимир Владимирович* – окончил Саратовский государственный университет (1980). Доктор физико-математических наук (1999), профессор кафедры радиофизики и нелинейной динамики СГУ. Область научных интересов – теория колебаний и динамический хаос, синхронизация и управление хаосом. Имеет более 80 публикаций в отечественных и зарубежных изданиях.

410012, Саратов, ул. Астраханская, 83

Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского

E-mail: astakhov@chaos.ssu.runnet.ru



## ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ИЗУЧЕНИЕ ПЕРЕМЕЖАЕМОСТИ ТИПА I В ПРИСУТСТВИИ ШУМА НА ПРИМЕРЕ ГЕНЕРАТОРА, СИНХРОНИЗИРУЕМОГО ВНЕШНИМ ГАРМОНИЧЕСКИМ СИГНАЛОМ

*А.А. Овчинников*

В работе впервые экспериментально исследованы статистические свойства перемежаемости первого типа в присутствии шумов на примере динамики генератора периодических колебаний под внешним гармоническим воздействием в случае малой расстройки собственных частот генератора и внешнего воздействия. Полученные экспериментальные данные находятся в хорошем соответствии с теоретическими результатами.

*Ключевые слова:* Синхронизация, перемежаемость типа I, шумы, эксперимент

1. Перемежаемость является важным нелинейным явлением, наблюдаемым в системах различной природы. При этом данное явление не имеет строгого определения. Обычно процесс называют перемежающимся, если он подвержен резким изменениям большой амплитуды [1]. Нетрудно видеть, что под подобное определение подпадает большое число различных процессов. Традиционно выделяется несколько типов перемежающегося поведения, обладающих различными отличительными особенностями: перемежаемость типов I–III [1], перемежаемость «игольного ушка» [2], «on-off» перемежаемость [3], перемежаемость «кольца» [4]. В настоящее время большой интерес вызывают исследования влияния шумов на динамику нелинейных систем. Воздействие шумов на системы, демонстрирующие черты перемежающегося поведения, может сильно влиять на характеристики перемежаемости. При этом в нелинейных системах в присутствии шумов могут возникать новые типы перемежаемости, характеризующиеся закономерностями, отличающимися от тех, которые присущи перемежающемуся поведению, наблюдаемому в отсутствие шумов. Так, перемежаемость типа I, возникающая в окрестности седло-узловой бифуркации, наблюдается в динамике генератора периодических колебаний под внешним гармоническим воздействием в случае малой расстройки собственных частот генератора и внешнего воздействия (граница области синхронизации соответствует седло-узловой

бифуркации [5–7]). Ниже границы синхронизации поведение системы соответствует перемежающемуся поведению типа I, представляющему собой чередование ламинарных и турбулентных фаз. Под *ламинарными фазами* понимаются периоды  $T$  установления режимов синхронизации колебаний, когда разность фаз

$$\Delta\varphi(t) = |\varphi(t) - \varphi_e(t)| \quad (1)$$

остаётся, примерно, постоянной и ограниченной по абсолютной величине  $\Delta\varphi(t) \approx \approx \text{const}$  (здесь  $\varphi(t)$  – мгновенная фаза неавтономного осциллятора,  $\varphi_e(t)$  – фаза внешнего сигнала). Эти участки синхронного поведения прерываются фазовыми проскоками – турбулентными фазами, когда величина  $\Delta\varphi(t)$  быстро изменяется на  $2\pi$ . С ростом параметра надкритичности, то есть с уменьшением отстройки частоты внешнего воздействия или с уменьшением амплитуды внешнего воздействия, число турбулентных фаз возрастает. Начиная с некоторого значения параметра надкритичности, ламинарные фазы в динамике системы перестают наблюдаться.

Перемежаемость типа I была исследована теоретически в докритической области значений параметров, где перемежающееся поведение наблюдается как при наличии шума, так и при его отсутствии [8–10]. Поведение систем в закритической области значений управляющих параметров в присутствии шума, где перемежающееся поведение в отсутствие шума не наблюдается, было рассмотрено впервые в работе [11]. Там была построена теория данного типа перемежаемости, и найдена зависимость средней длительности ламинарной фазы от параметра надкритичности, а также было проведено экспериментальное исследование. В работе [12] данная теория получила дальнейшее развитие, и была получена аналитическая зависимость распределения  $p(t)$  длительностей ламинарных фаз

$$p(t) = \tau^{-1} \exp(-t/\tau), \quad (2)$$

где  $\tau$  – средняя длительность ламинарных фаз. В то же самое время зависимость (2) распределения длительностей ламинарных фаз при перемежаемости типа I с шумом экспериментально исследована не была.

*Целью данной работы* стало экспериментальное исследование статистических закономерностей перемежающегося поведения в присутствии шума в закритической области значений управляющих параметров в рамках радиотехнического эксперимента.

**2.** Для исследования динамики разности фаз (1) и выделения областей синхронизации в области малой расстройки частот в присутствии шума была использована экспериментальная установка, схема которой представлена на рис. 1, *а*. В качестве базового элемента экспериментальной установки использовался генератор радиодиапазона (СГ), описанный в [13,14]. Принципиальная схема исследуемого генератора представлена на рис. 1, *б*. Генератор состоит из нелинейного усилителя и цепи линейной обратной связи, в которую входят два фильтра нижних частот. Данная схема демонстрирует различные режимы генерации как периодические, так и хаотические в зависимости от выбора управляющих параметров. В настоящей работе параметры элементов схемы были выбраны таким образом, чтобы в системе реализовывались периодические колебания.

Для изучения влияния шума на периодический генератор под внешним воздействием был использован генератор шума (ГШ), построенный по схеме, приведённой на рис. 2, а. В качестве источника шума использовался кремниевый стабилитрон  $D_1$ , работающий в предпробойном режиме. Как известно, для большинства полупроводниковых приборов преобладающим является дробовой шум, имеющий сплошной спектр в широкой полосе частот. Для стабилитрона, работающего в предпробойном режиме, уровень шума достаточно велик, что делает его удобным источником шумового сигнала. Шумовой сигнал, снимаемый со стабилитрона, предварительно усиливается транзистором  $T_1$  и затем подаётся на вход усилителя, собранного на операционном усилителе  $OP_1$ . Коэффициент усиления выходного каскада схемы может меняться в широких пределах, что позволяет получать интенсивности шумового сигнала от сравнимых с собственными шумами полупроводниковых приборов до сравнимых с амплитудой автоколебаний в исследуемых цепях. Эксперименталь-

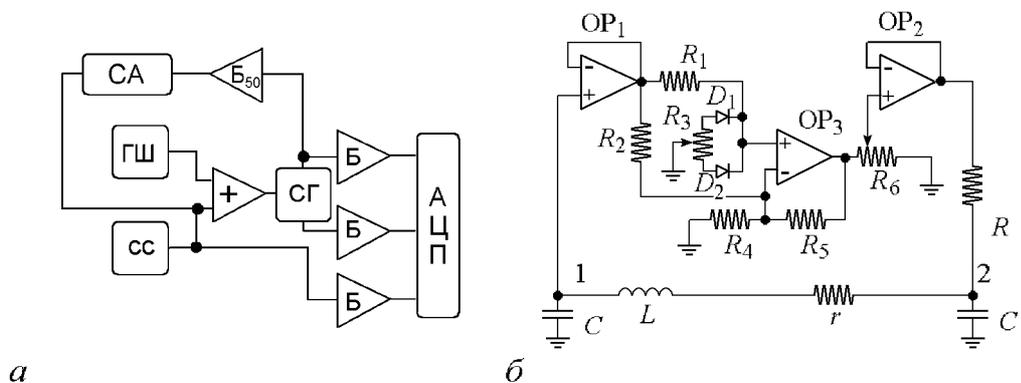


Рис. 1. а – общая схема экспериментальной установки: АЦП – аналогово-цифровой преобразователь, СГ – синхронизируемый генератор, СС – источник синхронизирующего сигнала, ГШ – источник шума, «+» – инвертирующий сумматор, Б – повторитель напряжения,  $B_{50}$  – повторитель, рассчитанный на работу с низкоомной нагрузкой, СА – спектроанализатор; б – схема синхронизируемого генератора:  $OP_1, OP_2$  – TL082;  $OP_3$  – K174УД7;  $D_1, D_2$  – 1N4148;  $R_1 = 2.7$  кОм;  $R_2 = R_5 = 7.5$  кОм;  $R_3 = 100$  Ом;  $R_4 = 12$  кОм;  $R_6 = 4.7$  кОм;  $RC', rLC$  – фильтры нижних частот;  $R = 630$  Ом;  $C' = 330$  нФ;  $r = 56$  Ом;  $L = 3.3$  мГн;  $C = 150$  нФ; выходной сигнал снимается с точек 1 и 2 схемы, внешнее воздействие подается на точку 1

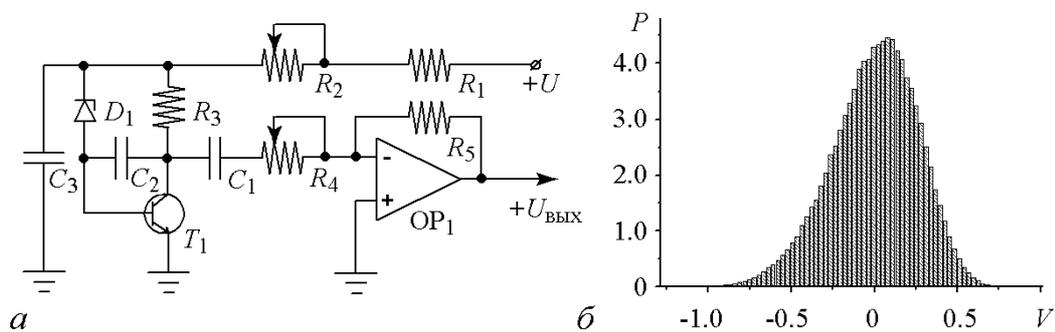


Рис. 2. а – схема генератора шума:  $D_1$  – Д814Г,  $T_1$  – КТ3102БМ,  $OP_1$  – TL082,  $R_4 = 10$  кОм,  $C_1$  и  $C_2 = 1$  мкФ,  $C_3 = 470$  мкФ,  $R_2 = R_3 = R_5 = 1$  кОм,  $R_4 = 10$  кОм,  $R_1 = 100$  Ом; б – распределение шумового сигнала

но построенное распределение шумового сигнала имеет вид, близкий к гауссову (рис. 2, б), величина дисперсии сигнала регулируется потенциометром  $R_d$  в пределах от 20 мВ до 800 мВ. Шумовой сигнал аддитивно подмешивается к напряжению на выходе нелинейного элемента.

В качестве источника внешнего гармонического сигнала использовался функциональный генератор MOTECN-FG503 (СС на рис. 1, а), частота внешнего воздействия составляла 8.75 кГц и в ходе эксперимента не изменялась.

Неавтономные колебания в системе анализировались с помощью спектроанализатора Agilent-E4402B (СА). В том случае, когда при увеличении амплитуды внешнего воздействия частота собственных колебаний  $\omega_d$  постепенно «притягивалась» к частоте внешнего воздействия  $\omega_r$  (которая оставалась постоянной при проведении эксперимента), реализуется мягкий режим установления синхронизации. Этот режим соответствует малой расстройке по частоте  $\Delta\omega = \omega_d - \omega_r$  генератора и внешнего сигнала. Если же в системе реализуется жёсткий режим установления синхронизации, то есть при достижении амплитудой внешнего воздействия некоторого порогового значения происходит мгновенное изменение частоты неавтономной автоколебательной системы к частоте внешнего воздействия, то расстройка не является малой, и перемежаемость типа I не наблюдается.

В ходе эксперимента с помощью двенадцатибитного аналого-цифрового преобразователя L-783 (АЦП), встраиваемого в персональный компьютер, регистрировался сигнал с неавтономного синхронизируемого генератора. Вместе с указанным сигналом записывался сигнал, генерируемый функциональным генератором, который в дальнейшем использовался в качестве опорного. Частота дискретизации составляла 600 кГц на канал, что с учётом того, что исследовались колебания с частотой порядка 10 кГц, можно считать более чем достаточной величиной. Полученные временные ряды в дальнейшем обрабатывались численно. Из временных рядов выделялись фазы колебаний, и анализировалось поведение разности фаз генератора и внешнего сигнала. Во избежание искажения динамики системы измерительной аппаратурой все измерительные приборы кроме спектроанализатора подключались к генератору через буферы, построенные на операционном усилителе TL082. Поскольку спектроанализатор рассчитан на подключение к линии 50 Ом, неавтономный исследуемый генератор был дополнен буфером на основе операционного усилителя TDA2030, рассчитанного на работу с низкоомной нагрузкой.

**3.** Эксперимент выполнялся для различных значений амплитуды синхронизирующего сигнала в диапазоне 80–170 мВ с шагом 5 мВ для шумового воздействия с дисперсией шумового сигнала 200 мВ, 400 мВ и 800 мВ. Распределение длительностей ламинарных фаз  $p(t)$  представлено на рис. 3, на котором показаны случаи с различными дисперсиями шумового сигнала. Для удобства сравнения распределения приведены в полулогарифмическом масштабе.

Для сравнения с экспериментальными данными на рис. 3 пунктиром нанесены теоретические зависимости распределений (2) длительностей ламинарных фаз при данных значениях дисперсии шума. Экспериментальные распределения строились по  $10^5$  ламинарным фазам, что соответствовало длине анализируемого временного ряда в 180 с. Нетрудно видеть, что для шумовых сигналов с различными

значениями дисперсии зависимость находится в соответствии с теоретически предсказанной закономерностью (2) в области больших длительностей ламинарных фаз. В этой области отклонения от теоретически предсказанной величины определяются погрешностями измерения и обработки результатов. В области малых длительностей ламинарных фаз, как нетрудно видеть, имеет место существенное расхождение между теорией и экспериментом, что объясняется ограничениями теоретической модели, на основе которой была построена теоретическая зависимость (2). На рис. 3 также хорошо видно, что зависимость (2) подтверждается при анализе шумового воздействия различной интенсивности, при этом различаются только углы наклона характеристик, что соответствует различным средним длительностям  $T$  ламинарной фазы. С увеличением интенсивности шума средняя длительность  $T$  уменьшается, что и отражается в увеличении наклона экспоненциального распределения в полулогарифмическом масштабе.

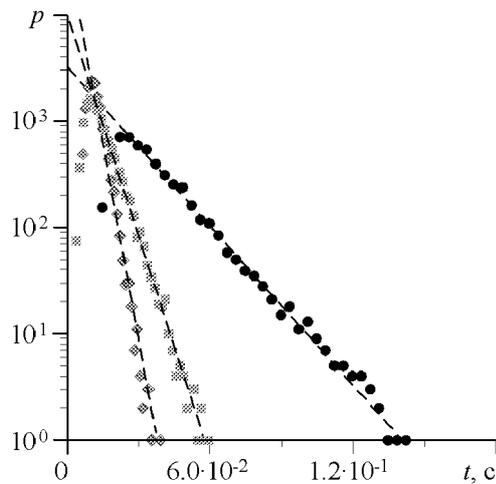


Рис. 3. Распределение длительностей ламинарных фаз для следующих значений амплитуды внешнего сигнала  $V$  и дисперсии шума:  $\blacklozenge$  –  $V=170$  мВ,  $\sigma = 475.17$  мВ;  $\blacksquare$  –  $V=170$  мВ,  $\sigma = 298.11$  мВ;  $\bullet$  –  $V=170$  мВ,  $\sigma = 141.72$  мВ. Масштаб оси ординат – логарифмический. Штриховые линии соответствуют экспоненциальному закону, предсказываемому теорией [12]

4. Таким образом, в настоящей работе экспериментально исследовано перемежающееся поведения в окрестности седло-узловой бифуркации в присутствии шума на примере синхронизации периодических колебаний в случае малой расстройки в радиотехническом эксперименте. Впервые экспериментально изучено распределение длительностей ламинарных фаз, получено хорошее соответствие между результатами эксперимента и известным теоретическим результатом.

*Работа поддержана грантом РФФИ 08-02-00102, 09-02-92421, проектом ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России на 2009–2013 годы».*

#### Библиографический список

1. *Berge P., Pomeau Y., Vidal C. L'Ordre Dans Le Chaos. Hermann, Paris, 1988.*
2. *Pikovsky A.S., Osipov G.V., Rosenblum M.G., Zaks M., Kurths J. Attractor–repeller collision and eyelet intermittency at the transition to phase synchronization // Phys. Rev. Lett. 1997. Vol. 79(1). P. 47.*
3. *Platt N., Spiegel E.A., Tresser C. On–off intermittency: a mechanism for bursting // Phys. Rev. Lett. 1993. Vol. 70(3). P. 279.*
4. *Hramov A.E., Koronovskii A.A., Kurovskaya M.K., Boccaletti S. Ring intermittency in coupled chaotic oscillators at the boundary of phase synchronization // Phys. Rev. Lett. 2006. Vol. 97. P. 114101.*

5. *Rosenblum M.G., Pikovsky A.S., Kurths J.* Phase synchronization of chaotic oscillators // *Phys. Rev. Lett.* 1996. Vol. 76 (11). P. 1804.
6. *Короновский А.А., Куровская М.К., Москаленко О.И., Храмов А.Е.* Два сценария разрушения режима хаотической фазовой синхронизации // *ЖТФ.* 2007. Т. 77(1). С. 21.
7. *Hramov A.E., Koronovskii A.A., Kurovskaya M.K.* Two types of phase synchronization destruction // *Phys. Rev. E.* 2007. Vol. 75(3). P. 036205.
8. *Богданкевич, Л.С., Рухадзе, А.А.* // *УФН.* 1971. Т. 14. С. 163.
9. *Mangioni S., Deza R., Wio H., Toral R.* Disordering effects of color in nonequilibrium phase transitions induced by multiplicative noise // *Phys. Rev. Lett.* 1997. Vol. 79(13). P. 2389.
10. *Zhou C.T., Kurths K., Kiss I.Z., Hudson J.L.* Noise-Enhanced phase synchronization of chaotic oscillators // *Phys. Rev. Lett.* 2002. Vol. 89(1). P. 014101.
11. *Kye W.H., Kim C.M.* Characteristic relations of type-I intermittency in the presence of noise // *Phys. Rev. E.* 2000. Vol. 62(5). P. 6305.
12. *Hramov A.E., Koronovskii A.A., Kurovskaya M.K., Ovchinnikov A.A., Boccaletti S.* Length distribution of laminar phases for type-I intermittency in the presence of noise // *Phys. Rev. E.* 2007. Vol. 76(2). P. 026206.
13. *Дмитриев А.С., Панас А.И.* Динамический хаос: новые носители информации для систем связи. М.: Физматлит, 2002.
14. *Rulkov N.F.* Images of synchronized chaos: experiments with circuits // *Chaos.* 1996. Vol. 6. P. 262.

*Поступила в редакцию 23.12.2008*

*После доработки 15.09.2009*

## **EXPERIMENTAL STUDY OF TYPE I INTERMITTENCY IN A GENERATOR SYNCHRONIZED WITH EXTERNAL HARMONIC SIGNAL IN THE PRESENCE OF NOISE**

*A.A. Ovchinnikov*

An experimental study of statistical properties of type I intermittency in the presence of noise is presented. For the first time an electronic experiment to study periodic oscillations synchronization destruction in case of small detuning in the presence of noise is held. The results are found to be in accordance with theory.

*Keywords:* Synchronization, noise, type I intermittency, experiment.

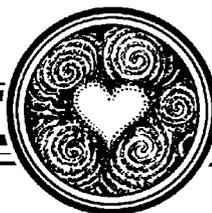


*Овчинников Алексей Александрович* – родился в 1985 году в Саратове, окончил Саратовский государственный университет (2008). Ассистент кафедры электроники, колебаний и волн СГУ. Область научных интересов – влияние шумов на явление синхронизации.

410012 Саратов, ул. Астраханская, 83

Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского

E-mail: [ovchinnikov@nonlin.sgu.ru](mailto:ovchinnikov@nonlin.sgu.ru)



## АНАЛИТИЧЕСКОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ И ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ КОНТРАСТНЫХ ДИССИПАТИВНЫХ СТРУКТУР В ПОЛЕ ФЛУКТУАЦИЙ ДИНАМИЧЕСКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

*С.Е. Курушина*

Исследовано влияние аддитивного однородного изотропного поля гауссовых флуктуаций динамических переменных на образование диссипативных структур в модели Гирера–Майнхардта при мягком режиме их возбуждения. Получена система уравнений, описывающих взаимодействие незатухающих мод. Показано, что флуктуации динамических переменных приводят к увеличению области неустойчивости мод. Проведено численное моделирование эволюции рассматриваемой системы при различных граничных условиях. Показано, что вдали от бифуркации Тьюринга флуктуации способствуют более быстрому образованию диссипативных структур и изменяют порядок расположения отдельных пиков.

*Ключевые слова:* Диссипативные структуры, незатухающие моды, поле флуктуаций динамических переменных, численное моделирование.

### Введение

В настоящее время ведутся интенсивные исследования явлений самоорганизации в различных неравновесных системах, заключающихся в возникновении эволюции упорядоченных пространственно-временных структур. Примером последних могут служить автоволны [1,2], которые формируются в так называемых возбудимых средах в ответ на внешнее возмущение. Существует множество примеров возбудимых сред: нервные и мышечные ткани [3], колонии микроорганизмов [4], ряд химических растворов и гелей [5,6], магнитные сверхпроводники с током [7], некоторые твердотельные системы [8].

Общепринятой моделью для описания возбудимых сред является система нелинейных параболических уравнений типа реакция–диффузия (см., например, [9,10]).

$$\frac{\partial x_k}{\partial t} = f_k(x_k, t) + D_{x_k} \Delta x_k, \quad k = 1, 2, 3 \dots \quad (1)$$

Одним из типов автоволновых процессов являются диссипативные структуры (ДС), теория которых в настоящее время активно строится в приложениях к моделям различной природы (биологическим, химическим, физическим и т. д.) [1–3, 11–13].

Особенности формирования ДС в автономных системах типа реакция–диффузия к настоящему времени изучены достаточно подробно [11–13]. Автономная система типа (1) аналитически исследовалась в [12,14,15] и других работах. Численное моделирование формирования ДС при различных граничных условиях проведено в работах [12,16,17].

В реальной ситуации та или иная система часто находится под действием случайных внешних полей. Известно, что при этом картина поведения систем типа реакция–диффузия может качественно меняться [18,19]. Однако теоретическое изучение динамики систем вида (1) при этом чрезвычайно усложняется, и в данной области существует весьма ограниченное число работ, обычно касающихся линейной стадии образования ДС. В работе [13] в аддитивном случайном поле вблизи точки бифуркации Тьюринга методом Ланжевена проведено аналитическое исследование линеаризованной системы морфогенеза Гирера–Майнхардта [14]. Численное исследование модели, рассматриваемой в [13], проведено в [20]. При этом случайное внешнее воздействие полагалось  $\delta$ -коррелированным по времени и пространству. Но в [13] и [20] не учитывался нелинейный характер автокаталитических реакций и не проводилось аналитическое исследование влияния флуктуаций на условия возникновения ДС.

В работе [19] проанализировано поведение системы, состоящей из двух потребителей, ориентированных на один ресурс. В частности, показано, что при сверхкритической интенсивности шума становится возможным стационарное сосуществование обоих потребителей, в отсутствие внешних воздействий запрещаемое теоремой Гаузе [21]. Однако в работе [19] анализ проводился при условии малости отклонений концентраций видов от стационарных значений и при определенных ограничениях на интенсивность шума. Кроме того, при анализе использовался целый ряд дополнительных ограничений, серьезно сужающих область применимости полученных результатов.

В этой работе исследуется влияние аддитивного однородного изотропного поля гауссовых флуктуаций динамических переменных на образование ДС при мягком режиме их возбуждения в отсутствие указанных выше ограничений.

В качестве конкретной модели используется модель морфогенеза Гирера–Майнхардта [14]. Пониманию процессов биологического формообразования мы обязаны, прежде всего, работам Б.Н. Белинцева [13,22–24] и Г. Майнхардта [14,16,17,25].

Скорости изменения концентраций автокаталитической и демпфирующей переменных (активатора и ингибитора, соответственно) описываются системой уравнений

$$\begin{aligned}\frac{\partial a}{\partial t} &= \rho + k\frac{a^2}{h} - \mu a + D_a\Delta a + F_1(\mathbf{r}, t), \\ \frac{\partial h}{\partial t} &= ca^2 - \nu h + D_h\Delta h + F_2(\mathbf{r}, t).\end{aligned}\tag{2}$$

Здесь  $\rho$  – скорость образования автокаталитической переменной,  $\mu$  – ее постоянная распада,  $D_a$  – коэффициент диффузии активатора;  $\nu$  – постоянная скорости распада демпфирующей переменной; член  $ca^2$  задает скорость образования ингибитора;  $D_h$  – коэффициент диффузии ингибитора. Слагаемое  $ka^2/h$  учитывает, что увеличение концентрации ингибитора снижает скорость автокаталитического процесса.

Случайные функции  $F_i(\mathbf{r}, t)$  определяют пространственные и временные гауссовы флуктуации скорости изменения концентраций активатора и ингибитора, соответственно, с корреляционными функциями  $\langle F_i(\mathbf{r}, t) F_i(\mathbf{r}', \tau) \rangle = \theta_i f_i(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) \delta(t - \tau)$  и нулевыми средними значениями. Взаимная корреляция случайных функций  $F_i(\mathbf{r}, t)$  отсутствует. Величины  $\theta_i$  характеризуют интенсивность флуктуаций;  $f_i(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)$  – некоторая функция, определяющая пространственную зависимость корреляций однородного и изотропного случайного поля [26];  $\delta$ -коррелированность во времени фактически означает, что время корреляции случайного поля гораздо меньше всех характерных времен задачи.

Флуктуации вызываются различными причинами. В частности, концентрация молекул может изменяться из-за тепловой и турбулентной диффузии через виртуальные или вполне реальные стенки элементарного объема (например, оболочки клеток, внутриклеточные мембраны). Необходимо также учитывать флуктуации за счет стохастического характера взаимодействия между молекулами [10]. В этом случае динамические переменные модели являются случайными функциями.

### 1. Аналитическое решение

В данной работе с использованием концепции параметра порядка [12] аналитически исследовано поведение системы (2) и осуществлено численное моделирование эволюции системы при двух различных типах граничных условий.

Вводя новые переменные,  $\mathbf{r}' = \mathbf{r} \sqrt{\nu/D_a}$ ,  $t' = \nu t$ ,  $a' = ca/k$ ,  $h' = \nu ch/k^2$ , получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial a'}{\partial t} &= \rho' + \frac{a'^2}{h'} - \mu' a' + \Delta a' + F_1'(\mathbf{r}', t'), \\ \frac{\partial h'}{\partial t} &= a'^2 - h' + D' \Delta h' + F_2'(\mathbf{r}', t'), \end{aligned} \quad (3)$$

где  $\rho' = \rho c/\nu k$ ,  $\mu' = \mu/\nu$ ,  $D' = D_h/D_a$ . Далее штрихи опускаем.

Исследование устойчивости системы (3) при  $F_1 = F_2 = 0$  проведено в работе [12]. Показано, что неустойчивость типа мягкой моды возникает при двух критических значениях волновых чисел  $k_c = \pm \sqrt[4]{\mu/D}$ .

Чтобы учесть влияние случайного воздействия, перепишем (3) в виде

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} - K(\Delta) \right) \mathbf{q} = \mathbf{g} + \mathbf{F}, \quad (4)$$

где

$$K(\Delta) = \begin{pmatrix} \mu \left( \frac{2}{\rho+1} - 1 \right) + \Delta & \frac{-\mu^2}{(\rho+1)^2} \\ \frac{2}{\mu}(\rho+1) & -1 + D\Delta \end{pmatrix}; \quad \mathbf{q} = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix}; \quad q_1 = a - a_0, \quad q_2 = h - h_0;$$

$q_1, q_2$  описывают малые отклонения концентраций относительно стационарных состояний  $h_0 = (\rho+1)^2/\mu^2$ ;  $a_0 = (\rho+1)/\mu$ . Вектор  $\mathbf{g}$  содержит квадратичные и кубические нелинейности, полученные разложением в ряд правой части (3), и определяется так:

$$\mathbf{g} = \left( (q_1^2/h_0 - (q_1^2 q_2 + 2a_0 q_1 q_2)/h_0^2 + (2a_0 q_1 q_2^2 + a_0^2 q_2^2)/h_0^3 - a_0^2 q_2^3/h_0^4), q_1^2 \right).$$

Представим вектор  $\mathbf{q}$  в виде суперпозиции

$$\mathbf{q}(\mathbf{r}, t) = \sum_{\mathbf{k}, j} \mathbf{O}^{(j)} \xi_{\mathbf{k}}^{(j)}(t) e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}}, \quad (5)$$

где  $\mathbf{O}^{(j)}$  – собственные векторы линейного оператора  $K(\Delta)$  задачи (4) ( $j = 1, 2$ ).

Считая, что неустойчивость возникает при  $\mathbf{k} = \mathbf{k}_c$ , после некоторых преобразований и проведения процедуры адиабатического исключения устойчивых мод система уравнений для амплитуд неустойчивых мод  $\xi_{\mathbf{k}}^{(1)}(t)$  с точностью до слагаемых третьего порядка малости включительно принимает вид

$$\begin{aligned} \frac{d\xi_{\mathbf{k}_c}^{(1)}}{dt} - \lambda_1(k_c) \xi_{\mathbf{k}_c}^{(1)} &= \sum_{\mathbf{k}'_c, \mathbf{k}''_c} c(k_c) \xi_{\mathbf{k}'_c}^{(1)} \xi_{\mathbf{k}''_c}^{(1)} \delta(\mathbf{k}'_c + \mathbf{k}''_c - \mathbf{k}_c) + \\ &+ \sum_{\mathbf{k}'_c, \mathbf{k}''_c, \mathbf{k}'''_c} d(k_c, \hat{k}) \xi_{\mathbf{k}'_c}^{(1)} \xi_{\mathbf{k}''_c}^{(1)} \xi_{\mathbf{k}'''_c}^{(1)} \delta(\mathbf{k}'_c + \mathbf{k}''_c + \mathbf{k}'''_c - \mathbf{k}_c) + \\ &+ \sum_{\mathbf{k}'_c, \hat{k}} \left[ \chi(k_c, \hat{k}) \left( \int \bar{O}_{1, \hat{k}}^{(1)} e^{-i\hat{k}\mathbf{r}} F_1(\mathbf{r}, t) d\mathbf{r} + \int \bar{O}_{2, \hat{k}}^{(1)} e^{-i\hat{k}\mathbf{r}} F_2(\mathbf{r}, t) d\mathbf{r} \right) + \right. \\ &+ \left. \varepsilon(k_c, \hat{k}) \left( \int \bar{O}_{1, \hat{k}}^{(2)} e^{-i\hat{k}\mathbf{r}} F_1(\mathbf{r}, t) d\mathbf{r} + \int \bar{O}_{2, \hat{k}}^{(2)} e^{-i\hat{k}\mathbf{r}} F_2(\mathbf{r}, t) d\mathbf{r} \right) \right] \xi_{\mathbf{k}'_c}^{(1)} \delta(\mathbf{k}'_c + \hat{k} - \mathbf{k}_c) + \\ &+ \int \bar{O}_{1, k_c}^{(1)} e^{-i\mathbf{k}_c \mathbf{r}} F_1(\mathbf{r}, t) d\mathbf{r} + \int \bar{O}_{2, k_c}^{(1)} e^{-i\mathbf{k}_c \mathbf{r}} F_2(\mathbf{r}, t) d\mathbf{r}. \end{aligned} \quad (6)$$

Здесь  $\bar{O}_n^{(j)}$  – компоненты собственных векторов оператора, сопряженного  $K(\Delta)$ . Выражения для  $\lambda_j(k)$  и компонент векторов  $\mathbf{O}^{(j)}$  и  $\bar{\mathbf{O}}^{(j)}$  [27] приведены ниже:

$$\mathbf{O}^{(j)} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{2(\rho+1)}{\mu(1+Dk^2+\lambda_j)} \end{pmatrix};$$

$$\bar{\mathbf{O}}^{(j)} = \begin{pmatrix} (-1)^j \frac{1+Dk^2+\lambda_j}{\lambda_2-\lambda_1} \\ (-1)^j \frac{\mu(1+Dk^2+\lambda_1)(1+Dk^2+\lambda_2)}{2(\rho+1)(\lambda_1-\lambda_2)} \end{pmatrix};$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{\alpha(k)}{2} \pm \sqrt{\frac{\alpha^2(k)}{4} - \beta(k)};$$

$$\alpha(k) = -(D+1)k^2 + 2\mu/(\rho+1) - \mu - 1;$$

$$\beta(k) = (k^2 + \mu)(Dk^2 + 1) - 2\mu Dk^2/(\rho+1).$$

Функции  $\delta(\mathbf{k}' + \mathbf{k}'' - \mathbf{k})$  и  $\delta(\mathbf{k}' + \mathbf{k}'' + \mathbf{k}''' - \mathbf{k})$  дают «правила отбора», которые важны для определения возникающих пространственных структур. Моды  $\xi_{\mathbf{k}_c}^{(1)}(t)$  служат параметрами порядка. Их кооперация или конкуренция определяет вид возникающих структур.

В уравнениях (6) введены следующие обозначения:

$$c(k_c) = \frac{\mu^2 \bar{O}_{1,k_c}^{(1)}}{(1+\rho)^2} \left[ \left( O_{1,k_c}^{(1)} \right)^2 + \frac{\mu^2}{(1+\rho)^2} \left( O_{2,k_c}^{(1)} \right)^2 - \frac{2\mu}{(1+\rho)} O_{1,k_c}^{(1)} O_{2,k_c}^{(1)} \right] + \bar{O}_{2,k_c}^{(1)} \left( O_{1,k_c}^{(1)} \right)^2;$$

$$\chi(k_c, \hat{k}) = -\frac{1}{\lambda_1(\hat{k})} \left[ \frac{2\mu^2 \bar{O}_{1,k_c}^{(1)}}{(1+\rho)^2} \left( O_{1,k_c}^{(1)} O_{1,\hat{k}}^{(1)} + \frac{\mu^2}{(1+\rho)^2} O_{2,k_c}^{(1)} O_{2,\hat{k}}^{(1)} - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{2\mu}{(1+\rho)} O_{1,k_c}^{(1)} O_{2,\hat{k}}^{(1)} \right) + 2\bar{O}_{2,k_c}^{(1)} O_{1,k_c}^{(1)} O_{1,\hat{k}}^{(1)} \right];$$

$$\varepsilon(k_c, \hat{k}) = -\frac{1}{\lambda_2(\hat{k})} \left[ \frac{2\mu^2 \bar{O}_{1,k_c}^{(1)}}{(1+\rho)^2} \left( O_{1,k_c}^{(1)} O_{1,\hat{k}}^{(2)} + \frac{\mu^2}{(1+\rho)^2} O_{2,k_c}^{(1)} O_{2,\hat{k}}^{(2)} - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{\mu}{(1+\rho)} \left( O_{1,k_c}^{(1)} O_{2,\hat{k}}^{(2)} + O_{2,k_c}^{(1)} O_{1,\hat{k}}^{(2)} \right) \right) + 2\bar{O}_{2,k_c}^{(1)} O_{1,k_c}^{(1)} O_{1,\hat{k}}^{(2)} \right];$$

$$d(k_c, \hat{k}) = -\frac{\mu^4 \bar{O}_{1,k_c}^{(1)}}{(1+\rho)^4} \left[ \left( O_{1,k_c}^{(1)} \right)^2 O_{2,k_c}^{(1)} + \frac{\mu^2}{(1+\rho)^2} \left( O_{2,k_c}^{(1)} \right)^3 - \frac{2\mu}{(1+\rho)} \left( O_{2,k_c}^{(1)} \right)^2 O_{1,k_c}^{(1)} \right] + \\ + \frac{\mu^2}{(1+\rho)^2} \left( \chi(k_c, \hat{k}) \bar{O}_{1,\hat{k}}^{(1)} + \varepsilon(k_c, \hat{k}) \bar{O}_{1,\hat{k}}^{(2)} \right) \times \\ \times \left( \left( O_{1,k_c}^{(1)} \right)^2 + \frac{\mu^2}{(1+\rho)^2} \left( O_{2,k_c}^{(1)} \right)^2 - \frac{2\mu}{(1+\rho)} O_{1,k_c}^{(1)} O_{2,k_c}^{(1)} \right) + \\ + \chi(k_c, \hat{k}) \bar{O}_{2,\hat{k}}^{(1)} \left( O_{1,k_c}^{(1)} \right)^2 + \varepsilon(k_c, \hat{k}) \bar{O}_{2,\hat{k}}^{(2)} \left( O_{1,k_c}^{(1)} \right)^2.$$

Уравнения (6) записаны в общем случае и справедливы для среды любой размерности.

Предположим, что реакция протекает в двумерном слое, размеры которого  $l_1$  и  $l_2$ , и примем периодические граничные условия. Волновой вектор определяется как

$$\mathbf{k} = 2\pi \begin{pmatrix} n/l_1 \\ m/l_2 \end{pmatrix}, \quad n, m = 0, \pm 1, \pm 2 \dots$$

Заменим вектор  $\mathbf{k}_c$  его модулем  $k_c$  и углом  $\varphi$ , который этот вектор образует с фиксированной осью. Этот угол изменяется от 0 до  $\pi$ . В первой сумме уравнений (6) может остаться только слагаемое, для которого  $\mathbf{k}'_c + \mathbf{k}''_c = \mathbf{k}_c$ . Это возможно, если рассматриваемая тройка векторов образует правильный треугольник. Аналогично во второй сумме уравнений (6)  $\mathbf{k}'_c + \mathbf{k}''_c + \mathbf{k}'''_c = \mathbf{k}_c$ . Следовательно,

$\mathbf{k}_c''' = -\mathbf{k}_c'$ ;  $\mathbf{k}_c'' = \mathbf{k}_c$ . Модуль и угол  $\beta$  волнового вектора устойчивых мод  $\hat{\mathbf{k}}$  легко выражается через  $k_c$ ,  $\varphi$  и  $\varphi'$  ( $\varphi' -$  угол, который вектор  $\mathbf{k}_c'$  образует с выбранной осью):  $\hat{k} = \sqrt{2}k_c\sqrt{1 - \cos(\varphi' - \varphi)}$ ;  $\text{tg } \beta = -\text{ctg}(\varphi' + \varphi)/2$ . В результате систему уравнений (6) для двумерного слоя можно переписать так:

$$\begin{aligned} \frac{d\xi_{k_c, \varphi}^{(1)}}{dt} - \lambda_1(k_c)\xi_{k_c, \varphi}^{(1)} &= c(k_c)\xi_{k_c, \varphi + \pi/3}^{(1)}\xi_{k_c, \varphi - \pi/3}^{(1)} + \\ &+ \sum_{\varphi'} d(|\varphi - \varphi'|)\xi_{k_c, \varphi}^{(1)} \left| \xi_{k_c, \varphi'}^{(1)} \right|^2 + \sum_{\varphi'} \xi_{k_c, \varphi'}^{(1)} z_{1, \hat{\mathbf{k}}}(t) \omega_1(|\varphi - \varphi'|) + \\ &+ \sum_{\varphi'} \xi_{k_c, \varphi'}^{(1)} z_{2, \hat{\mathbf{k}}}(t) \omega_2(|\varphi - \varphi'|) + \bar{O}_{1, k_c}^{(1)} z_{1, \mathbf{k}_c}(t) + \bar{O}_{2, k_c}^{(1)} z_{2, \mathbf{k}_c}(t), \end{aligned} \quad (7)$$

где  $\omega_1(|\varphi - \varphi'|) = \bar{O}_{1, \hat{k}}^{(1)} \chi(|\varphi - \varphi'|) + \bar{O}_{1, \hat{k}}^{(2)} \varepsilon(|\varphi - \varphi'|)$ ;

$$\omega_2(|\varphi - \varphi'|) = \bar{O}_{2, \hat{k}}^{(1)} \chi(|\varphi - \varphi'|) + \bar{O}_{2, \hat{k}}^{(2)} \varepsilon(|\varphi - \varphi'|);$$

$$z_{j, \mathbf{k}}(t) = \int e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}} F_j(\mathbf{r}, t) d\mathbf{r}$$

– компоненты случайного векторного поля  $\mathbf{z}(t)$ ,  $j$  и  $\mathbf{k}$  – индексные аргументы этого поля. Корреляционные функции для компонент поля  $\mathbf{z}(t)$  имеют вид:  $\langle z_{j, \mathbf{k}}(t) z_{j, \mathbf{k}'}(\tau) \rangle = 2\theta_j \Phi_j(k) \delta(\mathbf{k} + \mathbf{k}') \delta(t - \tau)$ . Очевидно,  $\xi_{k_c, \varphi}^{(1)}$  являются функционалами компонент поля  $\mathbf{z}(t)$ .

Усредним уравнения системы (7), используя развитый в [28] подход, и, принимая во внимание ее формальные решения и раскрывая коррелятор  $\langle \xi_{k_c, \varphi'}^{(1)} z_{j, \mathbf{k}}(t) \rangle$  с помощью многомерного обобщения формулы Фурутцу–Новикова [26], окончательно получим

$$\begin{aligned} \frac{d\langle \xi_{k_c, \varphi}^{(1)} \rangle}{dt} &= \lambda \langle \xi_{k_c, \varphi}^{(1)} \rangle + c(k_c) \langle \xi_{k_c, \varphi + \pi/3}^{(1)} \xi_{k_c, \varphi - \pi/3}^{(1)} \rangle + \\ &+ \sum_{\varphi'} d(|\varphi - \varphi'|) \langle \xi_{k_c, \varphi}^{(1)} \left| \xi_{k_c, \varphi'}^{(1)} \right|^2 \rangle + \\ &+ \sum_{\varphi'} \left( \omega_1^2(|\varphi - \varphi'|) \theta_1 \Phi_1(\hat{k}) + \omega_2^2(|\varphi - \varphi'|) \theta_2 \Phi_2(\hat{k}) \right) \langle \xi_{k_c, \varphi'}^{(1)} \rangle, \end{aligned} \quad (8)$$

где

$$\lambda = \lambda_1(k_c) + \theta_1 \omega_1^2(0) \Phi_1(0) + \theta_2 \omega_2^2(0) \Phi_2(0), \quad (9)$$

$\Phi_{1,2}(0) > 0$ ;  $\omega_{1,2}^2(0)$  – в общем случае, комплексные величины. Знак  $\circ$  над суммой означает, что в нее не входит слагаемое с  $\varphi' = \varphi$ . Из выражения (9) для собственных чисел  $\lambda$  неустойчивых мод видно, что их действительная часть пропорциональна интенсивности флуктуаций.

В одномерном случае система (6) после процедуры усреднения примет еще более простой вид:

$$\frac{d\langle \xi_{k_c}^{(1)} \rangle}{dt} = \lambda \langle \xi_{k_c}^{(1)} \rangle + 2d(k_c, 0) \langle \xi_{k_c}^{(1)} \left| \xi_{k_c}^{(1)} \right|^2 \rangle. \quad (10)$$

Пусть для простоты  $\theta_1 = \theta_2 = \theta$ ,  $f_i = \exp(-k_f |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)$ . Здесь  $k_f$  – величина, обратная радиусу корреляции. Для одномерной среды  $\Phi = 2k_f/(k^2 + k_f^2)$ , для двумерной  $\Phi = 2\pi k_f/(k^2 + k_f^2)^{3/2}$ , для трехмерной  $\Phi = 4\pi k_f/(k^2 + k_f^2)^2$ .

Численно исследовалась зависимость действительной части  $\lambda$  от волнового числа  $k$  при различных интенсивностях шума  $\theta$ . Результаты численных расчетов для двумерной среды в случае,

когда становится неустойчивой только одна мода  $k_c$  (маргинальная), при  $\theta = 0$  и для  $\theta_1 < \theta_2 < \theta_3 < \theta_4$  приведены на рис. 1. Из рисунка видно, что при увеличении интенсивности флуктуаций концентраций активатора и ингибитора область неустойчивых мод, для которых  $\text{Re}(\lambda) > 0$ , увеличивается.

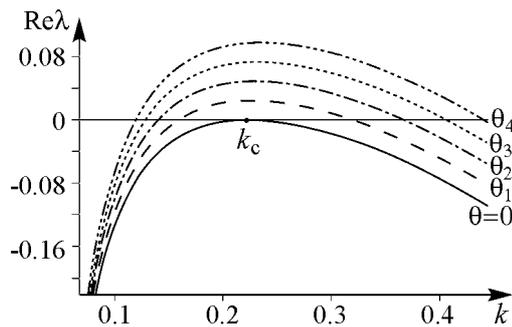


Рис. 1. Зависимость действительной части  $\lambda$  от волнового числа

## 2. Численное моделирование

Для двумерной среды было проведено численное моделирование эволюции системы (3) с граничными условиями вида [10]:

$$\left. \frac{\partial a}{\partial x} \right|_{x=0,y} = \left. \frac{\partial a}{\partial x} \right|_{x=l_1,y} = \left. \frac{\partial a}{\partial y} \right|_{x,y=0} = \left. \frac{\partial a}{\partial y} \right|_{x,y=l_2} = \left. \frac{\partial h}{\partial x} \right|_{x=0,y} = \left. \frac{\partial h}{\partial x} \right|_{x=l_1,y} = \left. \frac{\partial h}{\partial y} \right|_{x,y=0} = \left. \frac{\partial h}{\partial y} \right|_{x,y=l_2} = 0$$

– I тип

и

$$a(0, y, t) = a(l_1, y, t); \quad a(x, 0, t) = a(x, l_2, t); \quad h(0, y, t) = h(l_1, y, t); \quad h(x, 0, t) = h(x, l_2, t);$$

$$\left. \frac{\partial a}{\partial x} \right|_{x=0,y} = \left. \frac{\partial a}{\partial x} \right|_{x=l_1,y}; \quad \left. \frac{\partial a}{\partial y} \right|_{x,y=0} = \left. \frac{\partial a}{\partial y} \right|_{x,y=l_2}; \quad \left. \frac{\partial h}{\partial x} \right|_{x=0,y} = \left. \frac{\partial h}{\partial x} \right|_{x=l_1,y}; \quad \left. \frac{\partial h}{\partial y} \right|_{x,y=0} = \left. \frac{\partial h}{\partial y} \right|_{x,y=l_2}$$

– II тип.

Вдали от точки бифуркации Тьюринга установившиеся ДС пикового типа в отсутствие флуктуаций на слое большой площади при разных граничных условиях показаны на рис. 2. Процесс установления стационарных ДС пикового типа в

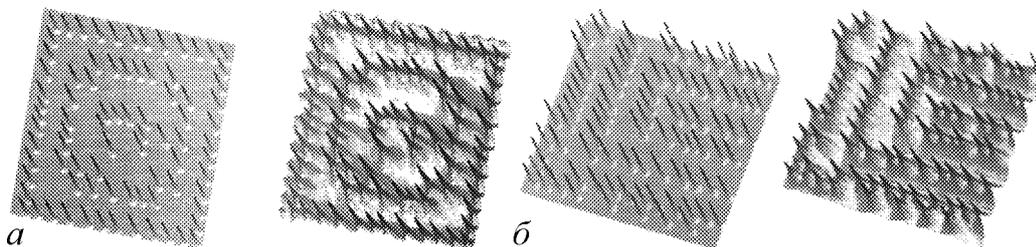


Рис. 2. Установившиеся ДС на слое большой площади ( $400 \times 400$  единиц длины) при отсутствии флуктуаций динамических переменных. Параметры модели:  $\rho = 0.1$ ;  $\mu = 1$ ;  $k_f = 1$ ;  $D = 400$ . *a* – граничные условия II типа; *б* – граничные условия I типа. Слева концентрация активатора, справа – ингибитора

отсутствие флуктуаций при граничных условиях II типа и при тех же параметрах модели представлен на рис. 3.

Формирование пиков при наличии шума различной интенсивности и при разных граничных условиях представлено на рис. 4, 5, а, 6, а. Видно, что при увеличении интенсивности флуктуаций процесс формирования стационарной ДС происходит быстрее. Кроме того, из сравнения рис. 3 и 4, 5, а можно заметить, что при наличии флуктуаций формируются ДС других периодов, то есть флуктуации играют роль фактора отбора, выбирая на стадии формирования ДС наиболее устойчивые. Последний результат согласуется с выводами, сделанными по этому поводу в работе [10].

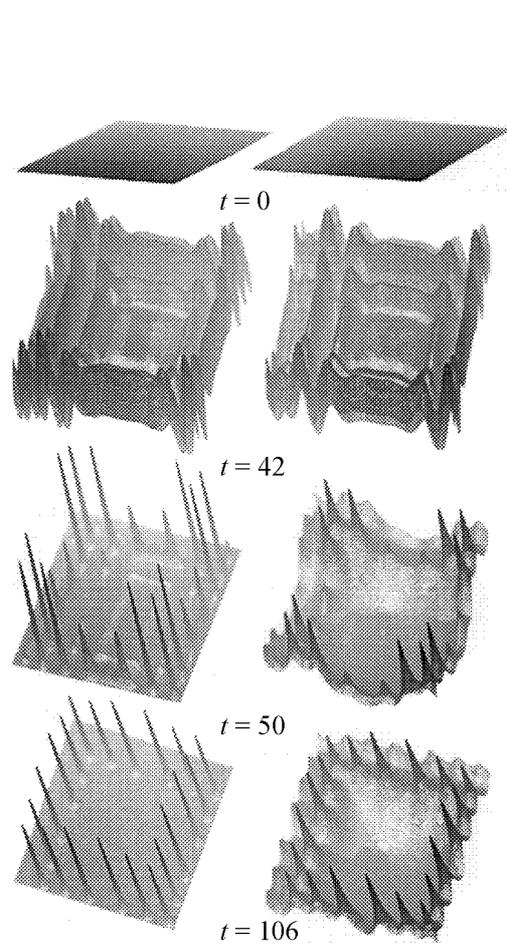


Рис. 3. Процесс образования ДС пикового типа из однородного состояния в отсутствие флуктуаций вдали от критической точки неустойчивости Тьюринга (граничные условия II типа). Параметры модели:  $\rho = 0.1$ ;  $\mu = 1$ ;  $k_f = 1$ ;  $D = 400$ . Слой  $200 \times 200$  единиц длины. В середине указаны соответствующие моменты времени; слева концентрация автокаталитической переменной, справа – демпфирующей

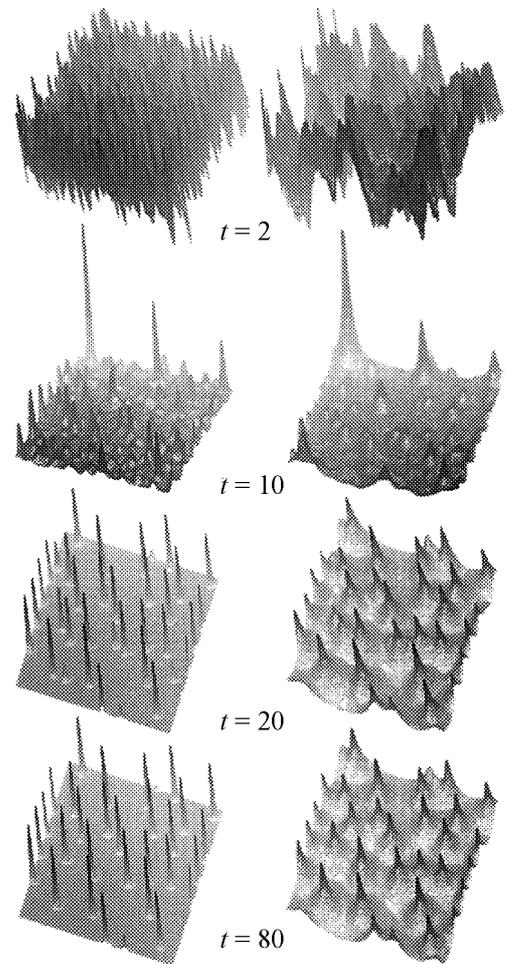


Рис. 4. Формирование ДС концентрации активатора и ингибитора при наличии флуктуаций вдали от точки бифуркации (граничные условия II типа). Параметры модели:  $\rho = 0.1$ ;  $\mu = 1$ ;  $D = 400$ ;  $k_f = 1$ ;  $\theta = 0.01$ . Слой  $200 \times 200$  единиц длины. В середине указаны соответствующие моменты времени; слева концентрация автокаталитической переменной, справа – демпфирующей

Также численно исследовались процессы изменения концентраций реагентов при  $\rho = 0.8$  в отсутствие и при наличии флуктуаций. Результаты моделирования вблизи неустойчивости Тьюринга показаны на рис. 5, *б* и 6, *б*. При выбранных параметрах модели  $D$  и  $\mu$  (см. подписи к рисункам) критическая скорость образования автокаталитической переменной  $\rho_c = 0.814$ .

Все численные эксперименты производились на слое такого размера, чтобы в результате образовывалась статистически стационарная ДС. При этом среднее амплитудное значение концентрации активатора оказалось равным приблизительно 51.9, а ингибитора – 27.1.

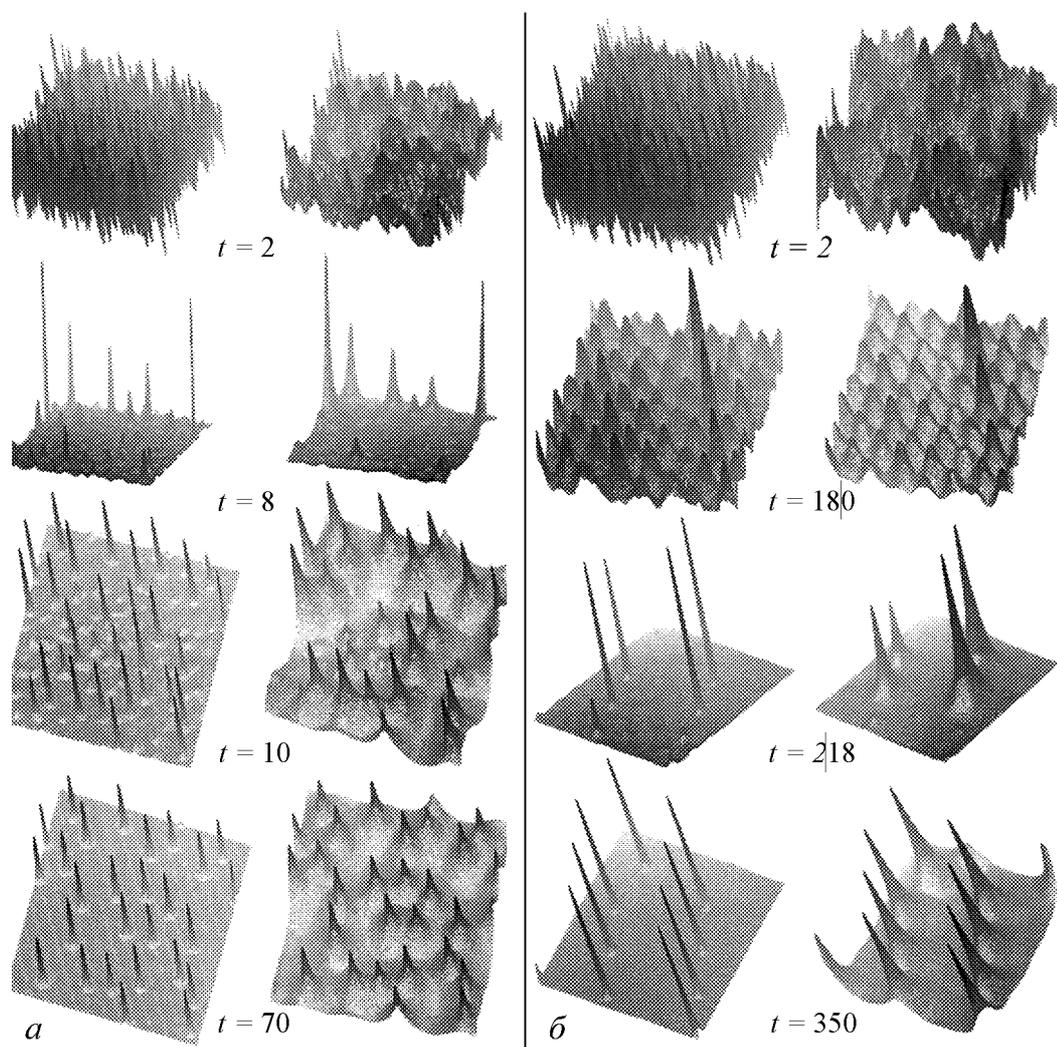


Рис. 5. Формирование ДС концентраций реагентов при наличии флуктуаций: *а* – вдали от точки бифуркации (параметры модели:  $\rho = 0.1$ ;  $\mu = 1$ ;  $D = 400$ ;  $k_f = 1$ ;  $\theta = 0.1$ ); *б* – вблизи точки бифуркации ( $\rho = 0.8$ ;  $\mu = 1$ ;  $D = 400$ ;  $k_f = 5$ ;  $\theta = 0.2$ ). Слой  $200 \times 200$  единиц длины (граничные условия II типа). В середине указаны соответствующие моменты времени; слева концентрация автокаталитической переменной, справа – демпфирующей

Интересен тот факт, что средние амплитудные значения концентраций автокаталитической и демпфирующей переменных практически не зависят от интенсивности аддитивного шума, однако, как показывает эксперимент, сильно зависят от размеров слоя  $l_1$  и  $l_2$ . При уменьшении  $l_1$  и  $l_2$  (до значений  $15 \times 15$  единиц длины

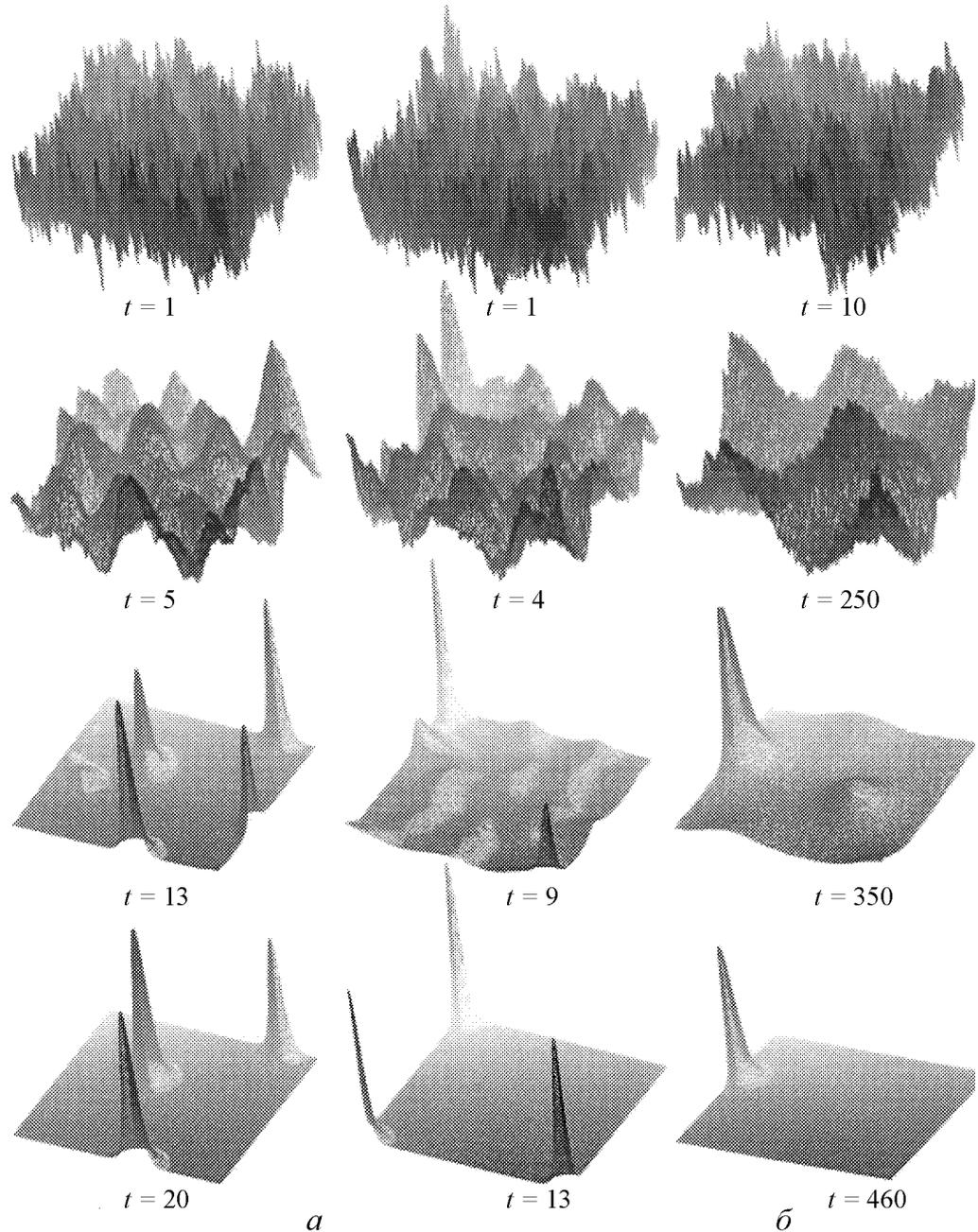


Рис. 6. Формирование ДС концентрации активатора при наличии флуктуаций (граничные условия I типа). Слой  $50 \times 50$  единиц длины. *a* – Вдали от точки бифуркации. Параметры модели:  $\rho = 0.1$ ,  $\mu = 1$ ,  $D = 400$ ,  $k_f = 5$ ,  $\theta = 0.01$  (левый вертикальный ряд);  $\rho = 0.1$ ,  $\mu = 1$ ,  $D = 400$ ,  $k_f = 5$ ,  $\theta = 0.1$  (средний вертикальный ряд). *б* – Вблизи точки бифуркации. Параметры модели:  $\rho = 0.8$ ,  $\mu = 1$ ,  $D = 400$ ,  $k_f = 5$ ,  $\theta = 0.2$

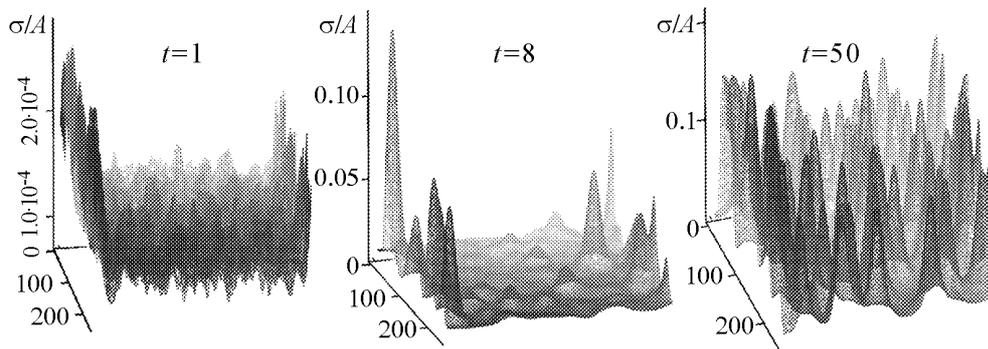


Рис. 7. Изменение поля флуктуаций концентрации активатора во времени при переходе системы от однородного состояния к ДС. Параметры модели:  $\rho = 0.1$ ;  $\mu = 1$ ;  $D = 400$ ,  $k_f = 1$ ,  $\theta = 0.1$ . Слой  $200 \times 200$  единиц длины (граничные условия II типа)

при данных параметрах модели; см. подпись к рис. 3) амплитуда ДС уменьшается, кроме того, сами ДС становятся неустойчивыми и при большом интервале модельного времени можно наблюдать их неоднократные образования и разрушения в поле флуктуаций (образуется «пульсирующая» ДС).

Численно исследовался вопрос об изменении интенсивности флуктуаций в системе при ее переходе от однородного состояния к ДС. На рис. 7 показаны поля флуктуаций концентрации активатора в разные моменты времени. По оси аппликат отложено отношение величины флуктуации концентрации активатора  $\sigma = \sqrt{\langle a^2 \rangle - \langle a \rangle^2}$  в данной точке слоя к  $A$  – среднему значению амплитуды ДС. Усреднение производилось по ансамблю реализаций.

На рис. 8 приведены усредненные по поверхности слоя значения  $\sigma/A$  в зависимости от времени. Эти графики иллюстрируют тот факт, что в области перехо-

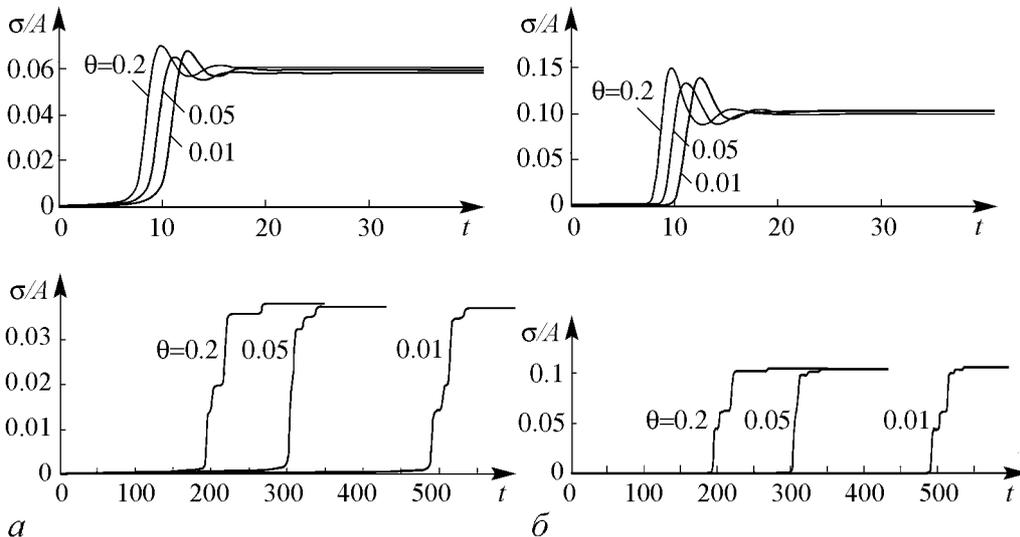


Рис. 8. Усредненные по поверхности слоя относительные флуктуации концентраций активатора (а) и ингибитора (б) при различных интенсивностях аддитивного шума вдали от точки бифуркации Тьюринга (верхний ряд,  $\rho = 0.1$ ) и вблизи этой точки (нижний ряд,  $\rho = 0.8$ ). Параметры модели:  $\mu = 1$ ;  $D = 400$ ,  $k_f = 1$ . Слой  $200 \times 200$  единиц длины (граничные условия II типа)

да флуктуации концентраций реагентов в системе возрастают до макроскопических масштабов. Кроме того, из рисунка хорошо определяются моменты начала и конца переходного режима.

### Заключение

Таким образом, в модели Гирера–Майнхардта вблизи маргинального состояния аддитивные флуктуации динамических переменных приводят к увеличению области неустойчивых мод (см. рис. 1), а в области контрастных структур вдали от бифуркации Тьюринга способствуют более быстрому образованию последних (см. рис. 4, 5, а, 6, а). Из рис. 5, б, 6, б видно, что вблизи точки бифуркации аддитивный шум замедляет процесс установления ДС. Аналитически показано, что действительная часть собственных чисел неустойчивых мод пропорциональна интенсивности флуктуаций и некоторой степени радиуса корреляции, зависящей от размерности пространства системы реакция–диффузия.

Приведенный анализ будет качественно справедлив и для других распределенных моделей типа реакция–диффузия в присутствии аддитивных шумов. Однако весьма широкий класс задач требует анализа поведения динамических систем в присутствии мультипликативных флуктуаций. Такие ситуации имеют место при изучении влияния «естественных» (внутренних) шумов, роль которых существенно возрастает в системах с малым числом взаимодействующих объектов или в системах, близких к своим точкам бифуркации и т.д. [1]. Кроме того, когда между неравновесной системой и окружающей ее средой нет обратной связи и среда не претерпевает систематических изменений во времени, флуктуации среды (внешние шумы) приводят к случайному поведению параметров системы [18], которые в этом случае можно разложить на постоянную и случайную компоненты. Это, в свою очередь, приводит к появлению в уравнениях, описывающих эволюцию системы, слагаемых, содержащих шумы, величины которых пропорциональны динамическим переменным. Задачи такого рода требуют отдельного рассмотрения.

### Библиографический список

1. Васильев В.А., Романовский Ю.М., Яхно В.Г. Автоволновые процессы. М.: Наука, 1987.
2. Кринский В.И., Михайлов А.С. Автоволны. М.: Знание, 1984.
3. Иваницкий Г.Р., Кринский В.И., Сельков Е.Е. Математическая биофизика клетки. М.: Наука, 1978.
4. Gerisch G. // Wilhelm Roux Archiv Entwicklungsmech Organismen, 1965, 156, 127.
5. Белоусов Б.П. // Сборник рефератов по радиационной медицине за 1958 г. М.: Медгиз, 1959, 145; то же в кн. Автоволновые процессы в системах с диффузией. ИПФ АН СССР, Горький, 1981, 176.
6. Жаботинский А.М. Концентрационные автоколебания. М.: Наука, 1974.
7. Буздин А.И., Михайлов А.С. // ЖЭТФ. 1986. Т. 90. С. 294.

8. *Скотт Э.* Волны в активных нелинейных средах в приложении к электронике. М.: Сов. радио, 1977.
9. *Cohen D., White A.* // SIAMJ. Appl. Math. 1991. Vol. 51. P. 472.
10. *Романовский Ю.М., Степанова Н.В., Чернавский Д.С.* Математическое моделирование в биофизике (Введение в теоретическую биофизику). Москва; Ижевск: ИКИ, 2004.
11. *Эбелинг В.* Образование структур при необратимых процессах. Введение в теорию диссипативных структур. Москва; Ижевск: ИКИ НИЦ РХД, 2004.
12. *Хакен Г.* Синергетика. М.: Мир, 1980.
13. *Белинцев Б.Н.* Динамические коллективные свойства развивающихся систем. Дисс. ... канд. физ.-мат. наук. М.: МФТИ, 1979.
14. *Meinhardt H., Gierer A.* Generation and regeneration of sequences of structures during morphogenesis // J. Theor. Biol. 1980. Vol. 85. P. 429.
15. *Keener I.P.* Activators and inhibitors in pattern formation // Studies and Applied Mathematics. 1978. Vol. 59. P. 1.
16. *Gierer A., Meinhardt H.* Biological pattern formation involving lateral inhibition // Lectures on Mathematics in the Life Sciences. 1974. Vol. 7. P. 163.
17. *Meinhardt H., Gierer A.* Applications of a theory of biological pattern formation based on lateral inhibition // Journ. Cell. Sci. 1974. Vol. 15. P. 321.
18. *Хорстхемке В., Лефевр Р.* Индуцированные шумом переходы: теория и применение. М.: Мир, 1987.
19. *Михайлов А.С., Упоров И.В.* Критические явления в средах с размножением, распадом и диффузией // УФН. 1984. Т. 144. Вып. 1. С. 79.
20. *Соляник Г.И., Чернавский Д.С.* Математические модели морфогенеза. Препринт ФИАН, 1980, № 8.
21. *Гаузе Г.Ф.* Борьба за существование. Москва; Ижевск: Изд. РХД. 2000. 234 С.
22. *Белинцев Б.Н.* Физические основы биологического формообразования. М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1991.
23. *Белинцев Б.Н.* Диссипативные структуры и проблема биологического формообразования // УФН. 1983. Т. 141. Вып.1. С. 55-101.
24. *Белинцев Б.Н.* Элементарные процессы формирования надклеточной организации при морфогенезе. Автореферат дисс... докт. физ.-мат.наук. М., 1986.
25. *Meinhardt H.* The Algorithmic Beauty of Sea Shells. Berlin, Heidelberg, New York: Springer-Verlag, 1999.
26. *Кляцкин В.И.* Стохастические уравнения глазами физика. М.: Физматлит, 2001.
27. *Абрамов Е.И., Курушина С.Е.* Влияние флуктуаций динамических переменных на образование диссипативных структур в модели морфогенеза Гирера – Майнхардта // Материалы международной междисциплинарной научной конференции «III Курдюмовские чтения. Синергетика в естественных науках». Тверь, 2007. С. 48.
28. *Свирижев Ю.М., Логофет Д.О.* Устойчивость биологических сообществ. М.: Наука, 1978.

*Поступила в редакцию 27.10.2008  
После доработки 17.06.2009*

**ANALYTICAL RESEARCH AND NUMERICAL SIMULATION  
OF CONTRAST DISSIPATIVE STRUCTURES  
IN THE FIELD OF FLUCTUATIONS  
OF DYNAMICAL VARIABLES**

*S.E. Kurushina*

The influence of additive homogeneous isotropic field of Gauss fluctuations of dynamical variables of Gierer–Meinhardt model to formation of dissipative structures in soft mode regime was investigated. The system of equations for description of undamped modes interaction was received. It was shown that fluctuations of dynamical variables are widening the instability region. The numerical simulation of considered model with different boundary condition was performed. It was shown that far from Turing bifurcation fluctuations further to acceleration of dissipative structures forming and change the order of location of separate peaks.

*Keywords:* Dissipative structures, undamped modes, field of fluctuations of dynamical variables, numerical simulation.



*Курушина Светлана Евгеньевна* – родилась в Самаре (1971), окончила Самарский государственный университет (1994). Работает в Самарском государственном аэрокосмическом университете. Защитила диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук в СГАУ (2002) по специальности 01.04.05 – Оптика. Опубликовала 30 научных работ. Область научных интересов: оптика, теория колебаний, волн, структур; динамика нелинейных стохастических систем; теория самоорганизации; прикладная математика; стохастические уравнения.

443086 Самара, Московское шоссе, 34  
Самарский государственный аэрокосмический университет  
им. академика С.П. Королева  
E-mail: kurushina72@mail.ru



## БИФУРКАЦИЯ БОГДАНОВА–ТАКЕНСА: ОТ НЕПРЕРЫВНОЙ К ДИСКРЕТНОЙ МОДЕЛИ

*А.П. Кузнецов, А.В. Савин, Ю.В. Седова*

Обсуждается методически важная бифуркация – Богданова–Такенса. Для простейшей модели описаны связанные с ней бифуркации и эволюция фазовых портретов. Представлены примеры нелинейных систем с такой бифуркацией. Обсуждается метод построения дискретных моделей, основанный на полуявной схеме Эйлера. На основе непрерывного прототипа построена дискретная модель осциллятора Богданова–Такенса, дан аналитический анализ ее бифуркаций коразмерности один и два. Методом карт динамических режимов выявлена картина языков синхронизации и продемонстрировано свойство скейлинга. Даны иллюстрации разрушения и исчезновения инвариантной кривой. Обсуждается еще одно отображение, удобное для учебных целей – отображение Богданова. Представлены некоторые Интернет-ресурсы, интересные с методической точки зрения.

*Ключевые слова:* Бифуркация Богданова–Такенса, дискретные модели.

### Введение

Бифуркация Богданова–Такенса является одной из важнейших в теории бифуркаций. К идее этой бифуркации можно прийти с помощью следующего рассуждения. Пусть в нелинейной системе возможны автоколебания и имеется параметр, ответственный за их возникновение в результате бифуркации Андронова–Хопфа. Пусть в системе есть еще один параметр, который может приводить к исчезновению устойчивого равновесия в результате седло-узловой бифуркации. Каждой из этих двух бифуркаций отвечает некоторая линия на плоскости параметров указанной гипотетической системы. Точка возможного пересечения линий представляет собой точку бифуркации Богданова–Такенса.

Очевидно, что коразмерность<sup>1</sup> обсуждаемой бифуркации равна двум. Бифуркация Богданова–Такенса была введена в рассмотрение в 1970-е годы и в настоящее время имеет необходимое математическое описание, включающее построение нормальной формы, версальной деформации и т.д. [1–3]. В силу своей достаточно низкой коразмерности она появляется во многих существенных задачах теории колебаний и нелинейной динамики.

В настоящей работе анализируются некоторые методические вопросы, связанные с этой бифуркацией, которые могут быть полезными и в учебных целях.

<sup>1</sup>Коразмерность – минимальное число параметров, при котором бифуркация является типичной [1].

Обсуждаются свойства дискретного отображения, полученного с помощью модели бифуркации Богданова–Тakens, реализующейся в автоколебательном осцилляторе. Кроме того, рассматривается одна из важных для теории бифуркаций идей, ассоциирующая консервативную систему с бифуркационной ситуацией. Исследуется также соответствующий слабодиссипативный дискретный осциллятор.

### 1. Автоколебательный осциллятор с бифуркацией Богданова–Тakens

Для «потребителей» теории бифуркаций важны простые примеры, в которых просматриваются основные моменты явления. Для бифуркации Богданова–Тakens таким примером может служить осциллятор вида

$$\ddot{x} - (\mu - x)\dot{x} + f(x) = 0, \quad (1)$$

где функция  $f(x)$  отвечает потенциалу в виде кубического полинома

$$f(x) = \frac{\partial U(x)}{\partial x}, \quad U(x) = ax - \frac{x^3}{3}. \quad (2)$$

Потенциальная функция  $U(x)$  характеризуется наличием максимума и минимума (рис. 1). Соответственно в системе возможны неустойчивая и устойчивая неподвижные точки, которые легко найти из условия равенства нулю производной от потенциала

$$x_0 = \pm\sqrt{a}. \quad (3)$$

Верхний знак в (3) соответствует неустойчивой точке, а нижний – устойчивой. Таким образом, параметр  $a$  управляет взаимным положением экстремумов и отвечает за бифуркацию «седло-узел» слияния неподвижных точек при

$$a = 0. \quad (4)$$

Член  $(\mu - x)\dot{x}$  в (1) может характеризовать как положительную, так и отрицательную диссипацию. Поэтому параметр  $\mu$  отвечает за возможность возникновения автоколебаний, а значит – за бифуркацию Андронова–Хопфа. Ее условие легко найти из

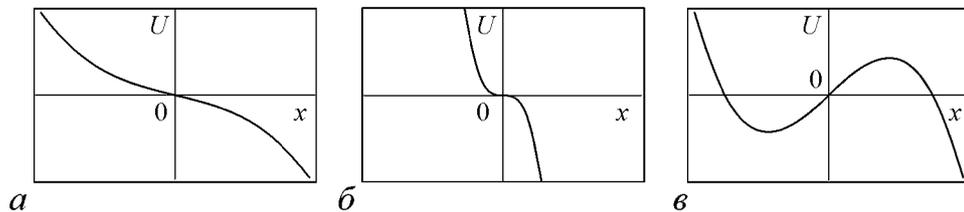


Рис. 1. Вид потенциальной функции:  $a$  – до порога бифуркации,  $a < 0$ ;  $б$  – в точке бифуркации,  $a = 0$ ;  $в$  – за порогом бифуркации,  $a > 0$

физических соображений. Действительно, диссипация меняет знак с положительно-го на отрицательный при  $\mu - x_0 = 0$ . Следовательно, бифуркация Андронова–Хопфа имеет место при

$$\mu = -\sqrt{a}. \quad (5)$$

Устойчивый предельный цикл реализуется при отрицательном трении в осцилляторе (1), а именно при  $\mu < -\sqrt{a}$ .

Таким образом, осциллятор (1) имеет все «предпосылки» для реализации точки бифуркации Богданова–Тakensа при вариации двух существенных параметров, один из которых  $a$  отвечает за бифуркацию седло-узел, а второй  $\mu$  – за бифуркацию Андронова–Хопфа.

В методических целях полезно получить условия этих бифуркаций и формальным образом. Для этого представим уравнение (1) в стандартном для динамической системы второго порядка виде

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= (\mu - x)y - a + x^2. \end{aligned} \quad (6)$$

Устойчивая неподвижная точка этой системы

$$x_0 = -\sqrt{a}, \quad y_0 = 0, \quad (7)$$

а линеаризованная в ее окрестности матрица

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -y_0 + 2x_0 & \mu - x_0 \end{pmatrix}.$$

с учетом (7) принимает вид

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2\sqrt{a} & \sqrt{a} + \mu \end{pmatrix}. \quad (8)$$

Находим след  $S$  и якобиан  $J$  этой матрицы

$$S = \sqrt{a} + \mu, \quad J = 2\sqrt{a}. \quad (9)$$

Условием бифуркации седло-узел является обращение в ноль якобиана матрицы возмущений, а бифуркации Андронова–Хопфа – ее следа [4, с. 172]. Таким образом, приходим к условиям (4) и (5).

Общая точка двух линий (4) и (5), отвечающая бифуркации Богданова–Тakensа, на плоскости параметров имеет координаты  $\mu = a = 0$ . В этой точке, как следует из (9), обращаются в ноль одновременно и след, и якобиан матрицы возмущений, что может служить удобным приемом при определении точек Богданова–Тakensа в конкретных системах.

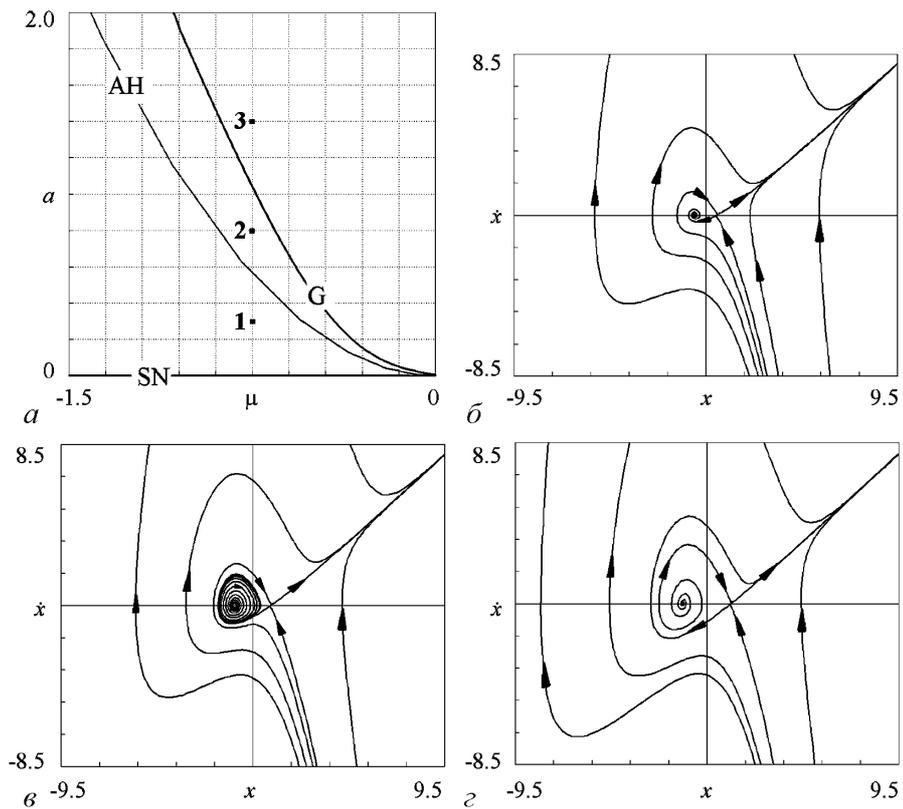


Рис. 2.  $a$  – бифуркационные линии осциллятора (1) в окрестности точки Богданова–Тakens на плоскости параметров  $(\mu, a)$ ; фазовые портреты в характерных точках:  $б$  – в точке «1»,  $в$  – в точке «2»,  $г$  – в точке «3». Здесь AH – линия бифуркации Андронова–Хопфа, SN – линия бифуркации седло-узел, G – линия влипания предельного цикла в петлю сепаратрисы

На рис. 2 показаны линии основных бифуркаций коразмерности один в окрестности точки бифуркации Богданова–Тakens и фазовые портреты системы (1) в избранных точках. Можно видеть характерные для точки Богданова–Тakens метаморфозы фазового портрета системы. Отметим, что наряду с описанными локальными бифуркациями для такой системы оказывается типичной и нелокальная бифуркация «влипания» предельного цикла в петлю сепаратрисы [1–3].

## 2. Примеры систем с бифуркацией Богданова–Тakens

В методических целях наряду с простейшей моделью полезно обсудить и другие примеры систем с данной бифуркацией, которые являются значимыми в теории колебаний и нелинейной динамике.

**2.1. Задача синхронизации в квазигармоническом приближении.** В качестве первого примера рассмотрим задачу о синхронизации системы ван дер Поля внешним гармоническим сигналом [3–7]

$$\ddot{x} - (\lambda - x^2)\dot{x} + x = A \sin \omega t. \quad (10)$$

Здесь  $\lambda$  – параметр, ответственный за бифуркацию Андронова–Хопфа в автономной системе,  $\omega$  – частота внешнего сигнала,  $A$  – его амплитуда.

Для этой задачи в квазигармоническом приближении можно прийти к следующим безразмерным укороченным уравнениям для медленной комплексной амплитуды<sup>2</sup>:

$$\dot{z} + i\Delta z = z - |z|^2 z - \varepsilon. \quad (11)$$

Здесь  $\Delta$  – безразмерная отстройка внешней частоты от собственной,  $\varepsilon$  – безразмерная амплитуда внешнего воздействия. В действительной форме из (11) получаем:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= x + \Delta y - x(x^2 + y^2) - \varepsilon, \\ \dot{y} &= y - \Delta x - y(x^2 + y^2). \end{aligned} \quad (12)$$

Матрица линеаризации этой системы имеет вид

$$\begin{pmatrix} 1 - 3x^2 - y^2 & \Delta - 2xy \\ -\Delta - 2xy & 1 - 3y^2 - x^2 \end{pmatrix}. \quad (13)$$

Для следа и якобиана этой матрицы находим

$$S = 2 - 4|z|^2, \quad J = 1 - 4|z|^2 + 3|z|^4 + \Delta^2, \quad (14)$$

где  $|z|^2 = x^2 + y^2$ . В свою очередь, из (11) в стационарном случае нетрудно получить выражение для модуля комплексной амплитуды

$$\varepsilon^2 = |z|^2 ( (|z|^2 - 1)^2 + \Delta^2 ). \quad (15)$$

Не приводя полный анализ бифуркаций (его можно найти, например, в [4–7]), укажем лишь на возможность существования точек Богданова–Такенса. Приравняв нулю след и якобиан (14) и используя выражение для неподвижных точек (15), получим

$$\Delta = \pm \frac{1}{2}, \quad \varepsilon = \frac{1}{2}. \quad (16)$$

Таким образом, в системе имеется пара точек бифуркации Богданова–Такенса, которые расположены симметричным образом относительно оси частотных расстройек. Из каждой такой точки в соответствии с основным свойством бифуркации Богданова–Такенса выходят линии седло-узловой бифуркации и бифуркации Андронова–Хопфа. Это говорит о важной роли бифуркации Богданова–Такенса в задаче синхронизации. Действительно, при малых амплитудах за возникновение квазипериодического режима (предельного цикла в терминах укороченных уравнений) отвечает седло-узловая бифуркация. В случае больших амплитуд область квазипериодических режимов исчезает в результате другого бифуркационного механизма, связанного с постепенным уменьшением предельного цикла. Точка бифуркации Богданова–Такенса выступает как «граница» между этими двумя типами разрушения квазипериодического поведения (подробнее см. [4,7]).

<sup>2</sup>Детали вывода уравнений (11) можно найти в соответствующих монографиях и учебниках по теории колебаний [4–7].

**2.2. Система Бонхоффера–ван дер Поля.** В качестве второго примера обратимся к системе Бонхоффера–ван дер Поля, которая является простейшей феноменологической моделью нейрона [5, с. 242],

$$\begin{aligned}\varepsilon \dot{x} &= x - \frac{x^3}{3} - y, \\ \dot{y} &= x + A - By.\end{aligned}\tag{17}$$

Эту систему иногда называют системой ФитцХью–Нагумо [8]. Биофизический смысл параметров в (17) объясняется в [5,8].

Матрица линеаризации системы (17)

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\varepsilon}(1 - x^2) & -\frac{1}{\varepsilon} \\ 1 & -B \end{pmatrix}.\tag{18}$$

Ее след и якобиан

$$S = \frac{1}{\varepsilon}(1 - x^2) - B, \quad J = \frac{1}{\varepsilon}(1 + (x^2 - 1)B).\tag{19}$$

Приравнивая их нулю, получаем  $B = \pm 1/\sqrt{\varepsilon}$  и  $x^2 = (B - 1)/B$ . Тогда с учетом (17) в стационарном случае получаем координаты точек Богданова–Тakensа в пространстве параметров

$$A = \pm \frac{2}{3} \sqrt{\frac{(B - 1)^3}{B}}, \quad B = \pm \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}.\tag{20}$$

Полный анализ локальных бифуркаций осциллятора Бонхоффера–ван дер Поля можно найти, например, в [9].

### 3. Метод искусственной дискретизации

Осциллятор с бифуркацией Богданова–Тakensа (1) может быть использован в качестве прототипа для построения дискретного отображения с новыми свойствами. Соответствующий прием является достаточно общим и интересным в методических целях, поэтому обсудим его несколько подробнее.

Пусть имеется динамическая система, заданная системой дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x, y, \dots), \\ \dot{y} &= g(x, y, \dots).\end{aligned}\tag{21}$$

Простейший метод численного решения (21) (метод Эйлера) состоит в том, что выполняется следующая аппроксимация производных:

$$\begin{aligned}\dot{x} &\rightarrow (x_{n+1} - x_n)/\varepsilon, \\ \dot{y} &\rightarrow (y_{n+1} - y_n)/\varepsilon.\end{aligned}\tag{22}$$

Здесь  $\varepsilon$  – параметр, представляющий собой шаг интегрирования.

Посмотрим теперь на процедуру (22) иначе. Из (21) и (22) получаем

$$\begin{aligned}x_{n+1} &= x_n + \varepsilon \cdot f(x_n, y_n, \dots), \\y_{n+1} &= y_n + \varepsilon \cdot g(x_n, y_n, \dots).\end{aligned}\tag{23}$$

Формулы (23) задают, фактически, некоторую новую динамическую систему в форме итерируемого отображения. При этом параметр  $\varepsilon$  можно считать уже не малым.

Несмотря на некоторую «искусственность», этот метод оказывается весьма эффективным с позиций построения моделей с новыми свойствами. При этом динамика полученных отображений, с одной стороны, наследует основные свойства прототипа, а с другой – оказывается существенно более богатой. Например, для бифуркации седло-узел в канонической форме [10,11]

$$\dot{x} = a - x^2,\tag{24}$$

применяя процедуру (23), после перенормировки получаем:

$$x_{n+1} = \lambda - x_n^2.\tag{25}$$

Выражение (25) описывает логистическое отображение – одну из эталонных систем нелинейной динамики [10,12,13]. Это отображение, так же как и прототип, характеризуется седло-узловой бифуркацией, но демонстрирует, кроме того, бифуркацию удвоения периода, закономерности Фейгенбаума и наличие хаоса [10, 12,13].

Для системы, описывающей бифуркацию коразмерности два, «трехкратное равновесие» [10,11] и определяемой уравнением вида

$$\dot{x} = a + bx + x^3,\tag{26}$$

применим процедуру (23). После простой перенормировки приходим к кубическому отображению

$$x_{n+1} = a + (b + 1)x_n + x_n^3.\tag{27}$$

Это отображение пригодно для описания двухпараметрической картины перехода к хаосу в системах с удвоениями периода. Соотношения ее свойств и свойств прототипа иллюстрирует рис. 3. На рис. 3, *a* показано бифуркационное множество системы (26), представляющее собой точку сборки с отходящими от нее двумя линиями седло-узловых бифуркаций. На рис. 3, *б* показана карта динамических режимов кубического отображения (27). Карта построена численным образом: с помощью компьютера определялся период в каждой точке плоскости параметров; в соответствии с величиной периода точке придавался определенный оттенок серого цвета [12]. Можно видеть, что кубическое отображение существенно богаче по свойствам, чем его прототип. Наблюдается множество областей различных периодов, точки сборки на базе циклов различных периодов, характерные двухпараметрические структуры crossroad area [12] и т.п.

Таким образом, может быть сформулирована своего рода программа построения и исследования дискретных моделей с использованием «списка» основных бифуркаций потоковых систем.

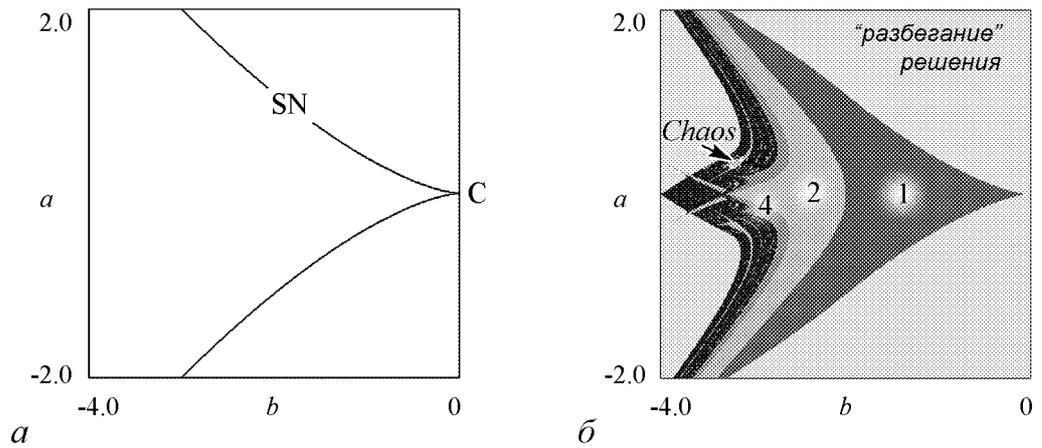


Рис. 3.  $a$  – линии бифуркаций седло-узел SN  $a = \pm 2(-b/3)^{3/2}$  на плоскости  $(a, b)$ , сходящиеся в точке сборки C для системы-прототипа (26);  $\bar{b}$  – соответствующая карта динамических режимов кубического отображения (27). Цифрами обозначены периоды циклов

Указанный метод можно применять и к различным типам осцилляторов. Пусть имеется осциллятор общего вида

$$\ddot{x} + g(\dot{x}, x) + f(x) = 0, \quad (28)$$

или

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= -g(y, x) - f(x). \end{aligned} \quad (29)$$

Применяя процедуру дискретизации (23), приходим к отображению

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n + \varepsilon y_n, \\ y_{n+1} &= y_n - \varepsilon g(y_n, x_n) - \varepsilon f(x_n). \end{aligned} \quad (30)$$

В простейшем случае консервативного осциллятора имеем  $g(y, x) = 0$ , так что для матрицы возмущений находим

$$\begin{pmatrix} 1 & \varepsilon \\ -\varepsilon \frac{df}{dx} & 1 \end{pmatrix}. \quad (31)$$

Якобиан этой матрицы  $J = 1 + \varepsilon^2 df/dx$ . Поскольку  $J \neq 1$ , то полученное отображение не является консервативным. Это определенное несоответствие порождающей системы и получаемого отображения [18], которое можно преодолеть, используя полувяную схему Эйлера

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n + \varepsilon y_{n+1}, \\ y_{n+1} &= y_n - \varepsilon g(y_n, x_n) - \varepsilon f(x_n). \end{aligned} \quad (32)$$

Так, если порождающая дифференциальная система представляет собой консервативный осциллятор, то

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n + \varepsilon y_n - \varepsilon^2 f(x_n), \\ y_{n+1} &= y_n - \varepsilon f(x_n). \end{aligned} \quad (33)$$

Это отображение характеризуется матрицей возмущений

$$\begin{pmatrix} 1 - \varepsilon^2 \frac{df}{dx} & \varepsilon \\ -\varepsilon \frac{df}{dx} & 1 \end{pmatrix} \quad (34)$$

и имеет якобиан  $J = 1$ , то есть является консервативным. Таким образом, используя (32), можно согласовать свойства порождающего уравнения и отображения.

Указанный прием использовал в своих работах один из создателей теории стохастических колебаний Б.В. Чириков (см., например, [14]) и автор обсуждаемой бифуркации Р.И. Богданов со своими учениками [15–17]. Этот же прием описан (правда, очень кратко) в монографии А.Д. Морозова [18, с. 298].

#### 4. Дискретный осциллятор Богданова–Такенса

Построим теперь дискретную модель, используя в качестве прототипа осциллятор Богданова–Такенса (1). В свете сказанного выше можно ожидать, что это будет новая модель с интересными и существенными свойствами. Применим к модели (1) процедуру (32)

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n + \varepsilon y_{n+1}, \\ y_{n+1} &= y_n + \varepsilon[(\mu - x_n)y_n - a + x_n^2]. \end{aligned} \quad (35)$$

Исследуем свойства полученного отображения<sup>3</sup>. Когда параметр дискретизации  $\varepsilon$  стремится к нулю, на плоскости параметров исходного осциллятора  $(\mu, a)$  должна быть картина, характерная для системы-прототипа (1) и представленная на рис. 1. Обсудим, как она модифицируется с ростом параметра  $\varepsilon$ .

Отображение (35) допускает аналитический анализ устойчивости и бифуркаций неподвижной точки, что делает его привлекательным в учебных целях. Неподвижные точки (35) задаются соотношениями

$$x_0 = \pm\sqrt{a}, \quad y_0 = 0, \quad (36)$$

точно такими же, как для осциллятора-прототипа. Выпишем матрицу возмущений (матрицу монодромии) для отображения (35)

$$\begin{pmatrix} 1 + \varepsilon^2(-y_0 + 2x_0) & \varepsilon + \varepsilon^2(\mu - x_0) \\ \varepsilon(-y_0 + 2x_0) & 1 + \varepsilon(\mu - x_0) \end{pmatrix}. \quad (37)$$

Для устойчивой неподвижной точки  $x_0 = -\sqrt{a}, y_0 = 0$  имеем

$$\begin{pmatrix} 1 - 2\varepsilon^2\sqrt{a} & \varepsilon + \varepsilon^2(\sqrt{a} + \mu) \\ -2\varepsilon\sqrt{a} & 1 + \varepsilon(\sqrt{a} + \mu) \end{pmatrix}. \quad (38)$$

Отсюда легко вычисляем след и якобиан этой матрицы

$$S = 2 + \varepsilon(\sqrt{a} + \mu) - 2\varepsilon^2\sqrt{a}, \quad J = 1 + \varepsilon(\sqrt{a} + \mu). \quad (39)$$

<sup>3</sup>С использованием терминологии теории бифуркаций можно сказать, что построенное отображение – своего рода дискретный «unfolding» бифуркации Богданова–Такенса, полученный путем «раздува» пространства параметров ее версальной деформации за счет нового параметра дискретизации. Надо полагать, что такая процедура применима и для любых других бифуркаций.

Собственные числа матрицы монодромии (мультипликаторы) подчиняются соотношению [12]

$$\mu^2 - S\mu + J = 0. \quad (40)$$

Таким образом, зная след и якобиан, легко найти условия всех локальных бифуркаций.

**Бифуркация Неймарка–Сакера.** Это бифуркация рождения инвариантной кривой, ей отвечает равенство  $J = 1$ . В соответствии с (39) получаем  $\mu = -\sqrt{a}$ . Таким образом, условие бифуркации Неймарка–Сакера не зависит от параметра дискретизации  $\varepsilon$  и точно совпадает с условием бифуркации Андронова–Хопфа в осцилляторе-прототипе.

**Касательная бифуркация.** Этой бифуркации отвечает значение одного из мультипликаторов, равное плюс единице, так что  $1 - S + J = 0$ . Используя соотношения (39), получаем  $a = 0$ , что точно соответствует бифуркации седло-узел в осцилляторе-прототипе.

**Бифуркация удвоения периода.** Этой бифуркации отвечает значение одного из мультипликаторов, равное минус единице, так что  $1 + S + J = 0$ . Из (39) тогда получаем

$$2 + \varepsilon(\sqrt{a} + \mu) - \varepsilon^2\sqrt{a} = 0. \quad (41)$$

Отметим, что эта бифуркация невозможна в исходной системе (1).

Далее приведем перечень основных бифуркаций коразмерности два, которым отвечает попарное пересечение линий бифуркации Неймарка–Сакера, касательной бифуркации и удвоения периода<sup>4</sup>.

**Резонанс 1:2, мультипликаторы  $\mu_1 = -1, \mu_2 = -1$ .** Эта бифуркации отвечает совместному выполнению условий (5) и (41), что приводит к

$$\mu = -\frac{2}{\varepsilon^2}, \quad a = \frac{4}{\varepsilon^4}. \quad (42)$$

**Fold-flip, мультипликаторы  $\mu_1 = -1, \mu_2 = +1$ .** Эта бифуркация отвечает совместному выполнению условий (4) и (41). В результате получаем

$$\mu = -\frac{2}{\varepsilon}, \quad a = 0. \quad (43)$$

**Резонанс 1:1, мультипликаторы  $\mu_1 = +1, \mu_2 = +1$ .** Эта бифуркации отвечает совместному выполнению условий (4) и (5), что приводит к

$$\mu = 0, \quad a = 0. \quad (44)$$

Дальнейшие иллюстрации свойств отображения (35) удобно представить с использованием карт динамических режимов (рис. 4). Параметр дискретизации во всех случаях  $\varepsilon = 0.8$ . Буквами обозначены: NS – бифуркация Неймарка–Сакера, T – касательная бифуркация, PD – линии удвоения периода, Q – область квазипериодических режимов, Chaos – область хаоса, D – область убегания фазовых траекторий на бесконечность. Цифрами обозначены периоды циклов.

<sup>4</sup>Названия бифуркаций приводятся в соответствии с [2,27].

На рис. 4, *a* показана карта в достаточно большом масштабе. На ней можно видеть найденные выше аналитически линии и точки бифуркаций, в частности, линию бифуркации Неймарка–Сакера с примыкающей к ней системой языков Арнольда. В левой части рисунка располагаются линии удвоения периода. На этом рисунке имеются точки бифуркаций коразмерности два: *fold-flip* (43) и резонанс 1:1 (44). Точка резонанса 1:2 (42) располагается при больших значениях параметра *a* и при выбранных масштабах в поле зрения не попадает.

На рис. 4, *б* показана окрестность точки  $\mu = a = 0$  в тех же масштабах, что и для потоковой системы-прототипа на рис. 2. Сравнивая эти рисунки, заключаем, что на смену бифуркации Андронова–Хопфа приходит бифуркация Неймарка–Сакера. Точка бифуркации Богданова–Тakensа  $\mu = a = 0$  заменяется на резонанс 1:1. Однако область существования предельного цикла потоковой системы (2) существенно изменяется. На смену ей приходит область квазипериодических режимов, в которую встроена система различных периодических режимов в виде языков Арнольда. На рис. 4, *в* показан еще более увеличенный фрагмент карты, демонстрирующий детали структуры языков синхронизации.

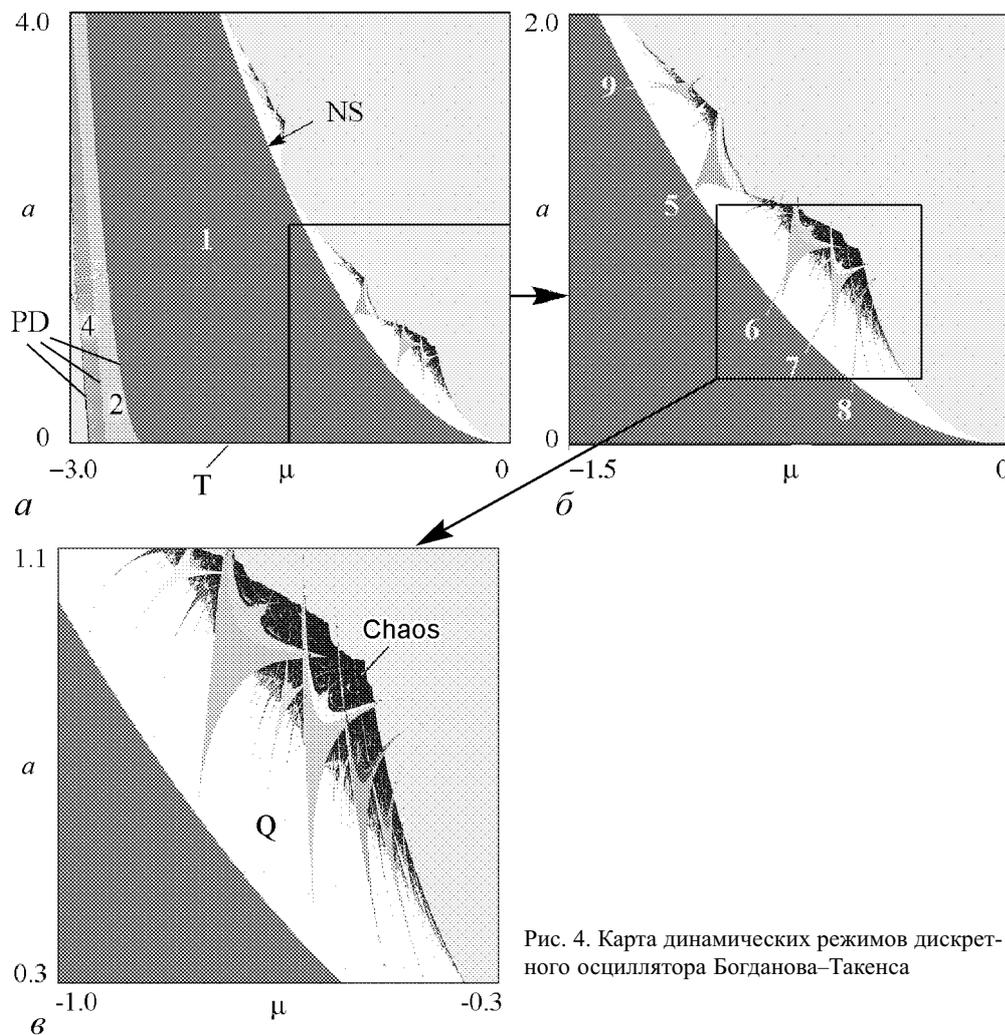


Рис. 4. Карта динамических режимов дискретного осциллятора Богданова–Тakensа

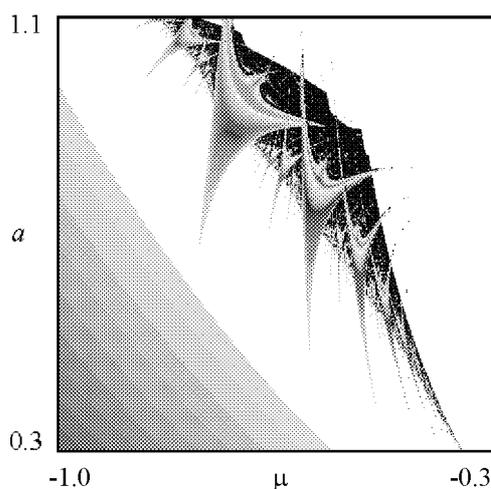


Рис. 5. Карта старшего показателя Ляпунова дискретного осциллятора Богданова–Тakensa

Чтобы на картах можно было различать области квазипериодической динамики и хаоса, необходимо дополнительно вычислить старший показатель Ляпунова. На рис. 5 показана соответствующая карта показателей Ляпунова. На ней области квазипериодических режимов отвечают нулевому показателю, а хаоса – положительному. Оттенками серого отмечены также отрицательные значения показателя, причем, чем больше его абсолютная величина, тем темнее цвет<sup>5</sup>. На рис. 5 хорошо видна линия, на которой языки синхронизации начинают перекрываться и за которой начинается хаос. Соответственно, на картах рис. 4 области квазипериодических режимов также показаны белым, а хаоса – черным цветом.

На рис. 6 показаны фазовые портреты в некоторых избранных точках плоскости параметров отображения (35), иллюстрирующие возможность реализации аттрактора в виде гладкой инвариантной кривой, резонансного цикла на ней и потерю гладкости кривой при продвижении в область хаоса.

Языки синхронизации в окрестности резонанса 1:1 (точки Богданова–Тakensa) обладают свойством самоподобия в пространстве параметров  $(\mu, a, \varepsilon)$ , которое позволяет объяснить картину перехода к непрерывному пределу при уменьшении параметра дискретизации  $\varepsilon$ . Установим это свойство.

Языки опираются своими основаниями на линию бифуркации Неймарка–Сакера, при этом число вращения можно определить по аргументу мультипликатора  $\omega = \arg \mu / (2\pi)$ . В соответствии с (40) при  $J = 1$  имеем

$$\mu = \frac{S}{2} \pm i \sqrt{1 - \frac{S^2}{2}}.$$

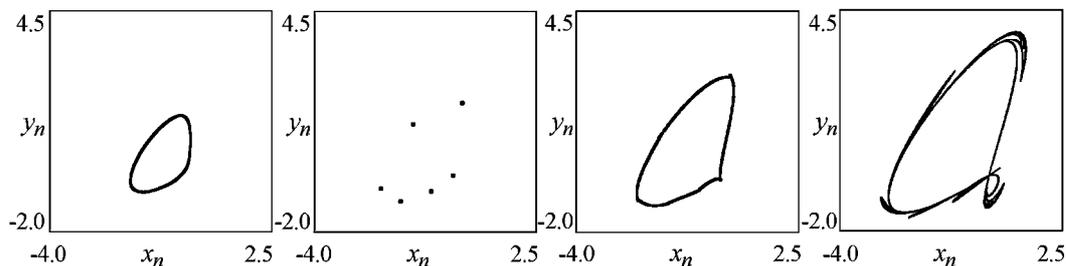


Рис. 6. Иллюстрация существования инвариантной кривой, резонансного цикла и потери гладкости инвариантной кривой в отображении (35) для  $\varepsilon = 0.8$  и различных значений параметров  $(\mu, a)$ , соответственно:  $a - (-0.68, 0.65)$ ;  $b - (-0.74, 0.85)$ ;  $v - (-0.68, 0.875)$ ;  $z - (-0.58, 0.93)$

<sup>5</sup>Для более детального знакомства с иллюстрациями в виде карт динамических режимов и карт показателей Ляпунова наряду с [5] рекомендуем Интернет-ресурсы [29,30].

В свою очередь, из (39) с учетом условия бифуркации Неймарка–Сакера (5) следует

$$S = 2 - 2\varepsilon^2\sqrt{a}.$$

Для аргумента мультипликатора при малых  $a\varepsilon^4$  получаем оценку

$$\operatorname{tg}(\arg \mu) = \frac{\sqrt{1 - S^2/2}}{S/2} \approx \sqrt[4]{4a\varepsilon^4}.$$

Таким образом, аргумент мультипликатора вблизи точки Богданова–Тakensа близок к нулю и «управляется» фактором  $a\varepsilon^4$ . Это означает, что при уменьшении параметра  $\varepsilon$  в  $N$  раз картина языков будет подобна той, которая наблюдалась бы при изменении масштаба по оси параметра  $a$  в  $N^4$  раз, а по оси  $\mu$  в соответствии с (5) – в  $N^2$  раз.

Свойство скейлинга иллюстрирует рис. 7, а, для которого по сравнению с рис. 4, б параметр  $\varepsilon$  уменьшен в  $\sqrt{2}$  раз, при этом по вертикальной и горизонтальной оси масштабы изменены в  $(\sqrt{2})^4$  и в  $(\sqrt{2})^2$  раз, соответственно. На «визуальном» уровне картинки на рис. 7, а и рис. 4, б близки, причем наблюдается соответствие по порядку языков синхронизации, обозначенному соответствующими цифрами. Заметим, что точка резонанса 1:2 (42) также удовлетворяет описанному закону скейлинга.

Из приведенного обсуждения вытекает, что при уменьшении  $\varepsilon$  в окрестности точки Богданова–Тakensа наблюдаются языки все более и более высокого порядка. Соответственно фазовый портрет внутри языков содержит все большее число точек, а сами языки вытесняются из области квазипериодических режимов (см. увеличенный фрагмент на рис. 7, б).

Еще одно существенное отличие дискретной модели от прототипа – заметные метаморфозы верхней границы области существования предельного цикла. На смену гладкой линии G на рис. 2 приходит изломанная линия – граница области хаоса и убегания на бесконечность. На этой линии инвариантная кривая исчезает. Механизм ее исчезновения состоит в столкновении с неустойчивым многообразием седловой точки, что иллюстрирует рис. 8. Интересно, что столкновение происходит с петлями неустойчивого многообразия седловой точки, причем перед столкновением как инвариантная кривая, так и неустойчивое многообразие являются гладкими (рис. 8, а), и

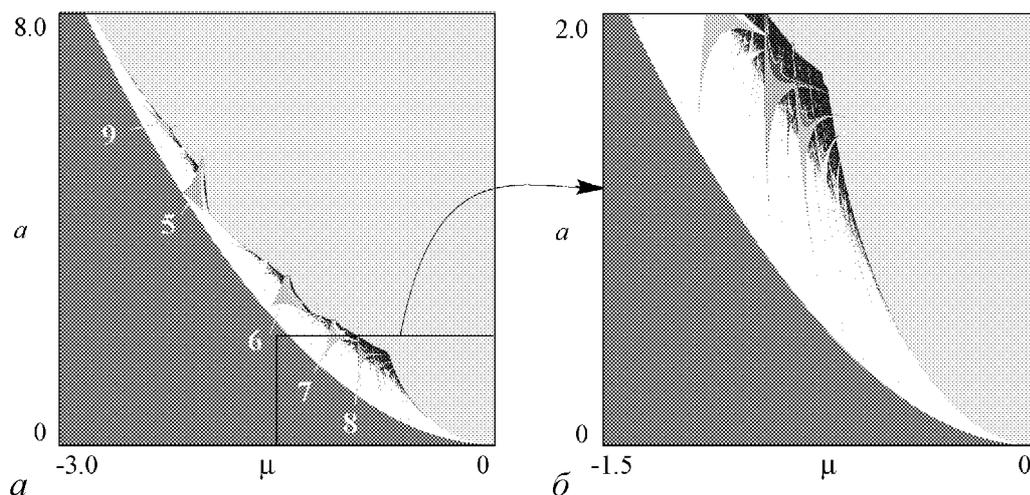


Рис. 7. Карта режимов при  $\varepsilon = 0.565\dots$  в разных масштабах

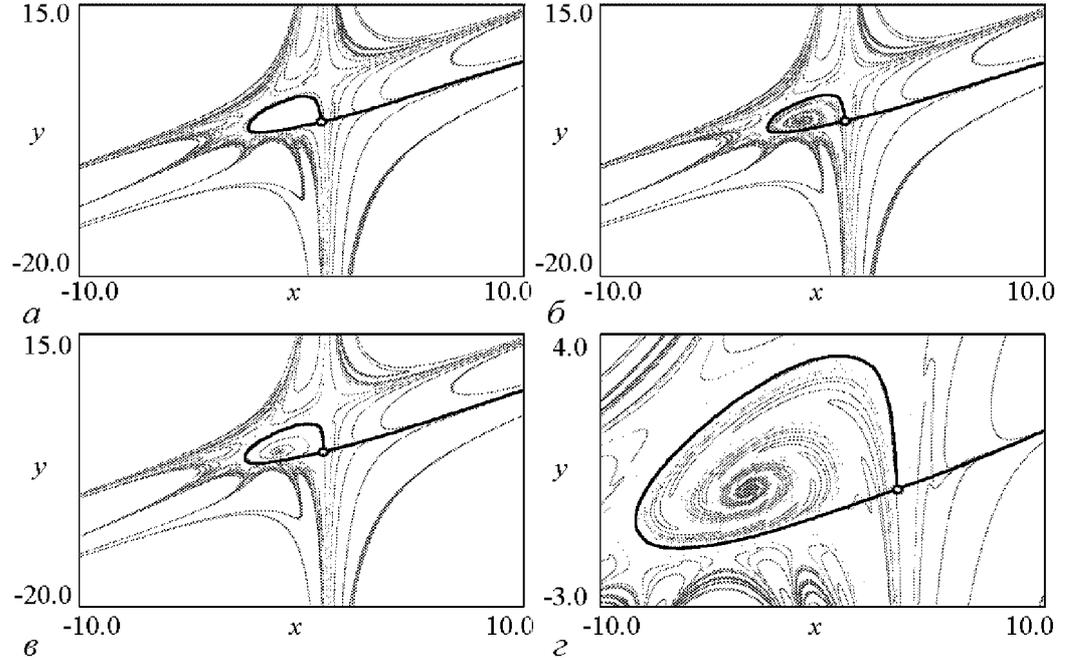


Рис. 8. Устойчивое (светло-серый) и неустойчивое (темно-серый) многообразия седловой неподвижной точки отображения (35) до момента разрушения аттрактора (а), вблизи (б) и после момента разрушения аттрактора (в) в виде инвариантной кривой при столкновении с устойчивым многообразием; г – увеличенный фрагмент рис. б. Значения управляющих параметров  $\varepsilon = 0.565$ ,  $a = 1$ ,  $\mu = -0.66$  (а);  $\mu = -0.62$  (б, г);  $\mu = -0.6$  (в)

касание происходит, по-видимому, сразу по всей длине инвариантной кривой. После касания инвариантная кривая разрушается и устойчивое многообразие проникает внутрь петли неустойчивого многообразия, образуя «классическую» гомоклиническую структуру (хорошо заметную на увеличенном фрагменте, рис. 8, г), которая сильно сжимается с увеличением параметра  $\mu$  (ср. рис. 8, б и в).

### 5. Слабодиссипативная версия осциллятора Богданова и отображение Богданова

Богданову принадлежит еще одна идея в теории бифуркаций, которая признается одной из основополагающих [1, с. 8, с. 204]. Применительно к осциллятору Богданова–Такенса (1) она выглядит следующим образом. Анализируется ситуация вдали от бифуркации седло-узел, то есть фактически только предельный цикл и петля сепаратрисы. Это позволяет в (1) провести замену переменных и параметров [1,15–17]

$$x \rightarrow 2\sqrt{ax'} - \sqrt{a}, \quad t \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2\sqrt{a}}}t', \quad \bar{\alpha} = \frac{(\mu + \sqrt{a})}{\sqrt[4]{4a}}, \quad \bar{\beta} = -\sqrt[4]{4a} \quad (45)$$

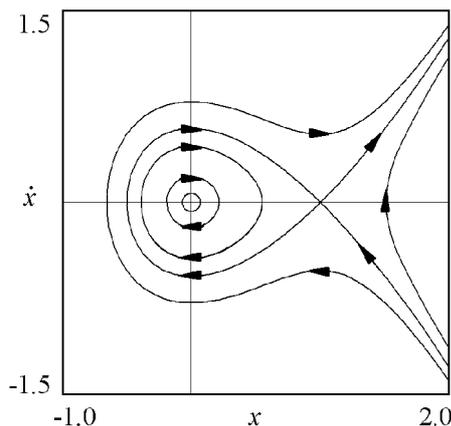
и в результате получить уравнение осциллятора следующего вида (штрихи у новых переменных опускаем)

$$\ddot{x} - (\bar{\alpha} + \bar{\beta}x)\dot{x} + \frac{\partial U(x)}{\partial x} = 0, \quad (46)$$

где потенциал задан выражением  $U(x) = x^2/2 - x^3/3$ .

Замены (45) оказываются некорректными непосредственно для бифуркации седло-узел при  $a = 0$  и, соответственно, в точке Богданова–Такенса. Однако такая переформулировка задачи имеет важные преимущества. В предположении малых значений  $\bar{\alpha}$ ,  $\bar{\beta}$  (46) описывает слабо возмущенный консервативный осциллятор

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= -x + x^2. \end{aligned} \quad (47)$$



Его фазовый портрет показан на рис. 9 и характеризуется наличием гомоклинической петли. Слабодиссипативные возмущения (46) могут приводить к появлению предельного цикла и ситуации столкновения предельного цикла с петлей сепаратрисы. Идея сопоставить с бифуркацией некоторую слабо возмущенную консервативную систему оказалась очень продуктивной<sup>6</sup>.

Осциллятор типа (46) также может быть использован как прототип для построения дискретного отображения по схеме (32), что было сделано D. Arrowsmith с соавторами в 1993 году [19]. Затем эта тема была развита в нескольких работах аспиранта Р.И. Богданова, В.В. Сухаревского в 2003–2005 годах [15–17]. В этих работах было предложено и исследовано отображение, которое D. Arrowsmith и его соавторы назвали отображением Богданова (Bogdanov map),

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n + y_{n+1}, \\ y_{n+1} &= y_n + \alpha y_n + k x_n (x_n - 1) + \beta x_n y_n. \end{aligned} \quad (48)$$

Параметры  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $x$  в (48) связаны с соответствующими параметрами осциллятора (46) следующим образом:  $\alpha = \varepsilon \bar{\alpha}$ ,  $\beta = \varepsilon \bar{\beta}$ ,  $k = \varepsilon^2$  (по определению  $k > 0$ , а  $\beta < 0$ ). Кроме того, в (48) выполнена перенормировка  $y \rightarrow \varepsilon y$ .

Представленное ранее отображение (35) по сравнению с (48) обладает тем преимуществом, что позволяет исследовать изменение «канонического» для бифуркации Богданова–Такенса устройства плоскости параметров при вариации возмущающего параметра. В то же время отображение Богданова (48) оказывается также очень интересным и привлекательным для исследования. (Достаточно сказать, что работа D. Arrowsmith с соавторами [19] занимает 40 страниц журнального текста.) Еще один показатель интереса к отображению (48) – тот факт, что к его свойствам обратился Р.И. Богданов (в соавторстве с Р.М. Богдановым) в одном из своих докладов на международной конференции «Анализ и особенности», посвященной 70-летию В.И. Арнольда в 2007 году [20]. Основное внимание в работах [15–17, 19, 20] в соответствии с упомянутыми выше принципами обращено к слабодиссипативному

<sup>6</sup>В предисловии к [1] известный специалист по теории бифуркаций Ю.С. Ильяшенко пишет о «новой эпохе в теории бифуркаций» и формулирует три основных принципа подхода Богданова, среди которых «ренормализация» – изменение масштаба с коэффициентами, стремящимися к бесконечности (см. соотношения (45)), и принцип исследования рождения предельных циклов на основе анализа нулей интегралов по замкнутым инвариантным кривым специально введенных гамильтоновых систем на плоскости [1, с. 8].

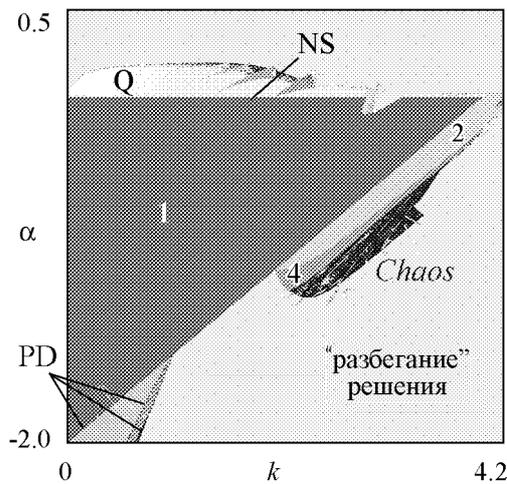


Рис. 10. Карта динамических режимов отображения Богданова (48) на плоскости  $(k, \alpha)$  при  $\beta = -1$

случаю и к достаточно амбициозной цели построения слабодиссипативной версии теории КАМ [20].

Для неподвижной точки отображения Богданова (48)  $x_0 = 0, y_0 = 0$  нетрудно найти след и якобиан матрицы возмущений

$$\begin{aligned} J &= 1 + \alpha, \\ S &= 2 + \alpha - k, \end{aligned} \quad (49)$$

условия бифуркации Неймарка-Сакера

$$\alpha = 0 \quad (50)$$

и условие равенства мультипликатора минус единице

$$4 + 2\alpha - k = 0. \quad (51)$$

Таким образом, картина простейших бифуркаций, как видно из (49)–(51), не зависит от параметра  $\beta$ , имеющего в соответствии с (46) смысл параметра нелинейной диссипации.

Карта динамических режимов отображения Богданова (48) при  $\beta = -1$  представлена на рис. 10. Компьютерное исследование указывает на возможность существования областей квазипериодической динамики и системы языков синхронизации, примыкающей к линии бифуркации Неймарка-Сакера (50). При уменьшении абсолютной величины параметра  $\beta$  (приближение к консервативной модели), вид карты качественно не изменяется, но область квазипериодических режимов становится уже. Иными словами, при малых  $\beta$  при увеличении параметра  $\alpha$ , ответственного за отрицательное трение в осцилляторе (46), инвариантная кривая почти сразу после возникновения разрушается за счет механизма, проиллюстрированного на рис. 8.

## 6. Обобщенное отображение Эно

Следует отметить, что отображения представленного типа привлекают внимание и других исследователей, среди которых С.В. Гонченко, Yu.A. Kuznetsov и др., но только в ином контексте. Эти авторы опубликовали серию работ в 2004–2007 годах [21–24]<sup>7</sup>, посвященных отображению, которое они называют «обобщенное отображение Эно» (generalized Henon map, GHM), и которое получается введением нелинейной добавки к классическому отображению Эно. Такая добавка выводит его из класса отображений с постоянным якобианом. Мотивация введения в рассмотрение этого отображения, однако, иная: авторы указывают, что отображения такого типа возникают в трехмерных потоковых системах в ситуации с гомоклиническим касанием.

<sup>7</sup>См. также цитированную в [22] литературу.

Заметим, что отображение (35) можно представить и в форме обобщенного отображения Эно. Для этого произведем замену переменной  $\xi = x - \varepsilon y$ , в результате которой (35) преобразуется к виду

$$\begin{aligned}\xi_{n+1} &= x_n, \\ x_{n+1} &= x_n + \varepsilon y_n + \varepsilon^2[(x_n - \mu)y_n - a + x_n^2].\end{aligned}\tag{52}$$

Переписывая второе уравнение (48) с учетом сделанной замены, получим

$$\begin{aligned}\xi_{n+1} &= x_n, \\ x_{n+1} &= f(x_n) - b\xi_n + \varepsilon x_n \xi_n,\end{aligned}\tag{53}$$

где  $f(x)$  – квадратичная функция  $x$ . Конкретный вид ее не важен, поскольку заменами типа сдвига и изменения масштаба она приводится к любой удобной квадратичной форме, при этом структура уравнения (53) инвариантна относительно таких замен. Именно такой вид отображения исследован, например, С.В. Гонченко в докладе на уже упомянутой конференции 2007 года [25].

В более общем случае, в рамках мотивации систем с гомоклиническим касанием, авторы [21–24] используют отображение типа (53), но с еще одной возмущающей добавкой, кубической по переменной  $x$ ,

$$\begin{aligned}\xi_{n+1} &= x_n, \\ x_{n+1} &= f(x_n) - b\xi_n + \varepsilon x_n \xi_n + s x_n^3.\end{aligned}\tag{54}$$

Понятно, что оно также может быть получено дискретизацией нелинейного осциллятора соответствующего вида: достаточно использовать в (1) кубическую нелинейность по типу осциллятора Дуффинга. Соответственно потенциал  $U(x)$  будет представлен полиномом четвертой степени.

Отметим, что отображение (54) явилось одним из основных примеров в интересной диссертации Н.Г.Е. Meijer 2007 года, выполненной под руководством D. Verhulst и Yu.A. Kuznetsov. Этому отображению посвящено также почти 40 страниц текста<sup>8</sup>. Эта диссертация сама по себе представляет интерес, и посвящена целиком бифуркациям коразмерности два итерированных отображений: «Codimension 2 bifurcations of iterated maps». Она доступна в Интернете [26], что немаловажно, поскольку, например, исходная работа D. Arrowsmith et al., отсутствует в свободном доступе. В этом плане мы рекомендуем также сайт Yu.A. Kuznetsov [27], где содержатся интересные материалы, касающиеся обсуждаемого круга вопросов, включая свойства «generalized Henon map». Метод карт динамических режимов и анализ поведения многообразий в системе (54) можно найти также в нашей работе 2006 года [28] в связи с обсуждением вопроса о возможности возникновения узких областей синхронизации у порога возникновения неустойчивости в связанных и автоколебательных системах.

<sup>8</sup>Интересно, что автор поместил это исследование в раздел Applications – Приложения.

## Заключение

Авторы надеются, что представленный здесь материал позволит обратить внимание на важность в учебных курсах по теории колебаний и нелинейной динамике бифуркации Богданова–Тakensа, которая, занимая существенное место в работах по теории бифуркаций и исследовательских публикациях, все же недостаточно освещается в учебной литературе. Хотелось бы обратить внимание и на прием искусственной дискретизации, причем как в учебных целях, так и с точки зрения возможного метода построения новых моделей с интересными свойствами. Хотелось бы также обратить внимание на отображения, получаемые дискретизацией осциллятора с бифуркацией Богданова–Тakensа и слабо диссипативного осциллятора Богданова, на важность отображений такого типа для теории динамических систем и бифуркаций как нового класса эталонных моделей, а также на некоторые интересные публикации, включая Интернет-ресурсы, посвященные подобным отображениям.

*Работа поддержана АВЦП «Развитие научного потенциала высшей школы» (проект № 2.1.1./1738) Минобрнауки РФ.*

## Библиографический список

1. Ван Д., Ли Ч., Чоу Ш.-К. Нормальные формы и бифуркации векторных полей на плоскости. М.: МЦНМО, 2005. 416 с.
2. Kuznetsov Yuri A. Elements of applied bifurcation theory. New York: Springer, 1998. 593 p.
3. Гукенхеймер Дж., Холмс П. Нелинейные колебания, динамические системы и бифуркации векторных полей. Ижевск: РХД, 2002. 560 с.
4. Кузнецов А. П., Кузнецов С. П., Рыскин Н. М. Нелинейные колебания. М.: Физматлит, 2002. 292 с.
5. Ланда П.С. Нелинейные колебания и волны. М.: Физматлит, 1997. 496 с.
6. Ланда П.С. Автоколебания в системах с конечным числом степеней свободы. М.: Наука, 1980. 360 с.
7. Пиковский А., Розенблюм М., Куртс Ю. Синхронизация. Фундаментальное нелинейное явление. М.: Техносфера, 2003. 496 с.
8. Интернет-ресурс «Encyclopedia of dynamical systems», страница «FitzHugh–Nagumo model», [http://www.scholarpedia.org/article/FitzHugh–Nagumo\\_model](http://www.scholarpedia.org/article/FitzHugh–Nagumo_model).
9. Barnes B., Grimshaw R. J. Analytical and numerical studies of the Bonhoeffer Van der Pol system // Austral. Math. Soc., Ser. B. 1997. Vol. 38. P. 427.
10. Анищенко В.С. Сложные колебания в простых системах. М.: Наука, 1990. 312 с.
11. Постнов Д.Э. Бифуркации регулярных аттракторов. Учебное пособие. Саратов: Изд-во ГосУНЦ «Колледж», 1996. 102 с.
12. Кузнецов С.П. Динамический хаос. М.: Физматлит, 2006.
13. Шустер Г. Детерминированный хаос. М.: Мир, 1990. 240с.
14. Чириков Б.В. Исследования по теории нелинейного резонанса и стохастичности. Препринт ИЯФ СО АН СССР. Новосибирск, 1969.

15. *Сухаревский В.В.* Перерасеяние частиц в поле сил ангармонического осциллятора со слабо-диссипативным возмущением. Автореф. дис... канд. физ.-мат.наук / МГУ, 2005.
16. *Сухаревский В.В.* Бистабильные состояния в отображении Богданова // Вестник МГУ, серия «Математика. Механика». 2003. № 5. С. 3.
17. *Сухаревский В.В.* Оценка температуры и плотности частиц в слабо-диссипативной теории Колмогорова–Арнольда–Мозера // Вестник МГУ, серия «Физика. Астрономия». 2005. №6. С. 28.
18. *Морозов А. Д.* Резонансы, циклы и хаос в квазиконсервативных системах // Серия современная математика. Москва – Ижевск: РХД, 2005. 424 с.
19. *Arrowsmith D.K., Cartwright J.H.E., Lansbury A.N., Place C.M.* The Bogdanov map: bifurcations, mode locking, and chaos in a dissipative system // International Journal of Bifurcation and Chaos. 1993. Vol. 3, № 4. P. 803.
20. *Богданов Р.И., Богданов Р.М.* Турбулентность в слабо диссипативной версии КАМ // Тез. докл. Межд. Конф. «Анализ и особенности», посвященной 70-летию В.И. Арнольда. М.: МИАН, 2007. С. 35.
21. *Gonchenko V.S., Kuznetsov Yu.A., Meijer H.G.E.* Generalized Hénon map and bifurcations of homoclinic tangencies // SIAM Journal on Applied Dynamical Systems. 2005. Vol. 4. P. 407.
22. *Гонченко С.В., Стенькин Н.В., Шильников Л.П.* О существовании счетного множества устойчивых и неустойчивых инвариантных торов у систем из областей Ньюхауса с гетероклиническими касаниями // Нелинейная динамика. 2006. Т. 2, № 1. С. 3.
23. *Гонченко С.В., Гонченко А.С.* К вопросу о классификации линейных и нелинейных подков Смейла // Нелинейная динамика. 2007. Т. 3, № 4. С. 423.
24. *Kuznetsov Yu.A., Meijer H.G.E., van Veen L.* The fold-flip bifurcation // Int. J. Bifurcation and Chaos. 2004. Vol. 14. P. 2253.
25. *Гонченко С.В.* Подковы Смейла и их бифуркации в обобщенных отображениях Эно // Тез. докл. Межд. Конф. «Анализ и особенности», посвященной 70-летию В.И. Арнольда. М.: МИАН, 2007. С. 43.
26. *Meijer H.G.E.* Codimension 2 bifurcations of iterated maps // Ph.D. Thesis Utrecht University. Интернет-ресурс: <http://igitur-archive.library.uu.nl/dissertations/2006-1204-200716/index.htm>.
27. Интернет-страница Yuri A. Kuznetsov: [www.math.uu.nl/people/kuznet/](http://www.math.uu.nl/people/kuznet/)
28. *Кузнецов А.П., Савин А.В.* О возможности реализации квазипериодических режимов при переходе к неустойчивой по Лагранжу динамике // Письма в ЖТФ. 2006. Т. 32, вып. 21. С. 18.
29. Интернет-ресурс «Карты динамических режимов», <http://sgtnd.narod.ru/science/atlas/rus/index.htm>.
30. Интернет-ресурс «Карты ляпуновских показателей», <http://sgtnd.narod.ru/chair/rus/index.htm>.

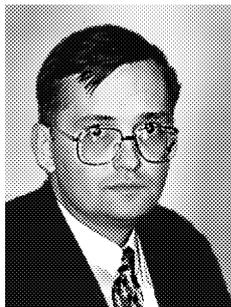
*Поступила в редакцию 16.01.2009  
После доработки 1.04.2009*

## BOGDANOV–TAKENS BIFURCATION: FROM FLOWS TO DISCRETE SYSTEMS

*A.P. Kuznetsov, A.V. Savin, Yu.V. Sedova*

The methodically important bifurcation – Bogdanov–Takens bifurcation – is discussed. For the primary model its bifurcations and evolution of phase portraits are described. The examples of nonlinear systems with such bifurcation are presented. The method of discrete models of construction that is founded on semi-explicit Euler scheme is discussed. On the base of the continuous prototype the discrete model of Bogdanov–Takens oscillator is constructed. The analytical analysis of bifurcations of a codimension one and two for discrete model is realized. With the help of method of charts of dynamical regimes the picture of synchronization tongues has been revealed and scaling has been demonstrated. The illustrations of destruction and disappearance of an invariant curve are given. One more map suitable for educational purposes – Bogdanov map is discussed. Some Internet resources interesting from methodically point of view are presented.

*Keywords:* Bogdanov–Takens bifurcation, discrete models.



*Кузнецов Александр Петрович* – родился в 1957 году. Доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник Саратовского филиала Института радиотехники и электроники РАН, профессор Саратовского государственного университета, заведующий базовой кафедрой динамических систем СГУ в СФ ИРЭ РАН. Специалист по нелинейной динамике, теории динамического хаоса и теории критических явлений. Занимается использованием идей теории катастроф и теории бифуркаций, а также развитием концепции сценариев перехода к хаосу применительно к многопараметрическим модельным и физическим нелинейным системам. Соросовский профессор (2000, 2001), научный руководитель студенческой лаборатории «Теоретическая нелинейная динамика» и школьной научной лаборатории. Опубликовал более 100 научных работ.

410012, Саратов, ул. Астраханская, 83  
Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского  
E-mail: apkuz@rambler.ru



*Савин Алексей Владимирович* – родился в Саратове в 1980 году. Окончил физический факультет Саратовского государственного университета (2002) и аспирантуру факультета нелинейных процессов СГУ. Кандидат физико-математических наук (2005). Доцент факультета нелинейных процессов СГУ, старший научный сотрудник Саратовского филиала ИРЭ РАН. Имеет более 20 научных публикаций в центральных и международных журналах. Область научных интересов – особенности поведения близких к консервативным нелинейным динамическим системам.

410012, Саратов, ул. Астраханская, 83  
Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского  
E-mail: savinA@info.sgu.ru



*Седова Юлия Викторовна* – родилась в 1979 году. Окончила Саратовский государственный университет (2001). Кандидат физико-математических наук (СГУ, 2004), старший научный сотрудник Саратовского филиала Института радиотехники и электроники РАН. Научные интересы – влияние шума на динамические системы, дискретные отображения, связанные системы, динамический хаос. Автор 10 статей в отечественной и зарубежной печати.

410012, Саратов, ул. Астраханская, 83  
Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского  
E-mail: sedovayv@rambler.ru



## КОНЕЧНОМЕРНЫЕ МОДЕЛИ ДИНАМИКИ ВИХРЕВЫХ ТЕЧЕНИЙ ИДЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТИ В КВАДРАТНОЙ ОБЛАСТИ

*Н.В. Петровская*

Метод Галеркина в сочетании с методом малого параметра применяется для изучения уравнения типа Рауса динамики двумерных течений идеальной несжимаемой жидкости в прямоугольной области. Полученные в результате конечномерные модели сохраняют с течением времени поле вихря, если в качестве его начального распределения выбрана одна из собственных функций оператора Лапласа. Численно изучается эволюция малых возмущений таких решений. Результаты расчетов сравниваются с аналогичными, полученными непосредственным применением метода Галеркина к уравнению Эйлера.

*Ключевые слова:* Идеальная несжимаемая жидкость, двумерные вихревые движения, уравнение типа Рауса, метод Галеркина.

### Введение

В работах [1, 2] предложен новый, нетрадиционный подход к исследованию динамики вихревых движений идеальной несжимаемой жидкости в односвязной области. Кратко изложим схему этого подхода. Известно, что уравнение Эйлера в лагранжевой форме обладает бесконечным набором интегралов циркуляции скорости. Процедура исключения этих интегралов лагранжевы уравнения гидродинамики приводятся к системе интегро-дифференциальных уравнений, которая вместо интегралов циркуляции имеет бесконечную серию интегралов – якобианов  $\det(\partial x/\partial a)$  для каждой жидкой частицы (здесь  $a$ ,  $x$  – «метки» жидкой частицы,  $a = (a_1, a_2)$  – начальное положение жидкой частицы при  $t = 0$ ,  $x(a, t) = (x_1, x_2)$  – ее положение в момент времени  $t$ ). Для нашего случая будет интересна рассмотренная в данных работах задача о двумерном течении в односвязной области  $D$ , когда уравнение несжимаемости

$$\det(\partial x/\partial a) = 1$$

локально может быть разрешено с помощью одновременной замены независимых переменных  $a_1, a_2$  и функций  $x_1, x_2$

$$a_1 = \alpha_1 + \Phi_{\alpha_2}, \quad a_2 = \alpha_2 - \Phi_{\alpha_1}, \quad x_1 = \alpha_1 - \Phi_{\alpha_2}, \quad x_2 = \alpha_2 + \Phi_{\alpha_1}, \quad \Phi|_{t=0} = 0. \quad (1)$$

Здесь  $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$ ,  $\alpha \in D$ ,  $\Phi(\alpha, t)$  – новая неизвестная функция. В силу этой замены уравнение несжимаемости выполняется автоматически для любой гладкой функции  $\Phi(\alpha, t)$ . При  $t = 0$  замена (1) является тождественной. При  $t \neq 0$  для ее взаимной однозначности требуется, чтобы якобиан

$$J(\alpha, t) = \det \left( \frac{\partial(a_1, a_2)}{\partial(\alpha_1, \alpha_2)} \right) = 1 + \Phi_{\alpha_1 \alpha_1} \Phi_{\alpha_2 \alpha_2} - \Phi_{\alpha_1 \alpha_2}^2 \quad (2)$$

был отличен от нуля. Для функции  $\Phi(\alpha, t)$  получено замкнутое интегро-дифференциальное уравнение типа Рауса

$$2\Phi_t = - \int_D G(x, y) \omega_0(b) |J(\beta, t)| d\beta \quad (3)$$

с начальным условием

$$\Phi|_{t=0} = 0. \quad (4)$$

Здесь  $b = (b_1, b_2)$  и  $y = (y_1, y_2)$  связаны с  $\beta = (\beta_1, \beta_2)$  ( $\beta \in D$ ) соотношениями, аналогичными (1),

$$b_1 = \beta_1 + \Phi_{\beta_2}, \quad b_2 = \beta_2 - \Phi_{\beta_1}, \quad y_1 = \beta_1 - \Phi_{\beta_2}, \quad y_2 = \beta_2 + \Phi_{\beta_1}. \quad (5)$$

Якобиан  $J(\beta, t)$  определяется аналогично (2). В двумерном случае вихрь имеет только одну ненулевую компоненту  $\omega_3 = \omega$  с начальным распределением  $\omega_0(b)$ .  $G(x, y)$  – функция Грина краевой задачи

$$-\Delta\psi = \omega, \quad \psi|_{\partial D} = 0 \quad (6)$$

для функции тока  $\psi(x)$  поля скорости жидкости  $v = (v_1, v_2)$ .

Автором работ [1, 2] высказано предположение, что уравнение (3) может оказаться эффективным средством численного анализа течений идеальной жидкости. Конечно, требование невырожденности замены (1) является очень сильным ограничением, а именно: решения уравнения (3) имеют смысл лишь в достаточно малой окрестности точки  $t = 0$ .

В настоящей работе для исследования приближенных решений задачи (3), (4) в квадратной области  $D$  используется метод Галеркина в сочетании с методом малого параметра. Полученные конечномерные модели наследуют ряд свойств исходной задачи и, в частности, сохраняют поле вихря, если его начальное распределение является одной из собственных функций задачи

$$-\Delta\psi = \lambda\psi, \quad \psi|_{\partial D} = 0, \quad (7)$$

где  $\lambda$  – соответствующее собственное значение. При помощи численных экспериментов изучается эволюция малых возмущений таких решений. Результаты вычислений сравниваются с аналогичными, полученными непосредственным применением метода Галеркина к уравнению Эйлера.

## 1. Конечномерные аппроксимации Галеркина

Рассмотрим двумерные движения идеальной несжимаемой жидкости в квадратной области  $D: 0 \leq x_1 \leq 1, 0 \leq x_2 \leq 1$ . Функция Грина  $G(x, y)$  краевой задачи (6) определяется соотношением

$$G(x, y) = \frac{4}{\pi^2} \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \varphi_{ij}(x) \varphi_{ij}(y) \frac{1}{i^2 + j^2}, \quad (8)$$

где

$$\varphi_{ij}(x) = \sin(\pi i x_1) \sin(\pi j x_2)$$

собственные функции задачи (7). Подставляя (8) в (3) и переходя к интегрированию по  $b$ , приходим к уравнению

$$\Phi_t = -\frac{2}{\pi^2} \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\varphi_{ij}(x)}{i^2 + j^2} \int_D \varphi_{ij}(y) \omega_0(b) db.$$

Для его исследования применим метод Галеркина в сочетании с методом малого параметра. Пусть  $P$  – некоторое конечное множество пар индексов  $(m, n)$ . Приближенное решение разыскивается в виде

$$\Phi(\alpha, t) = \sum_{(m,n) \in P} c_{mn}(t) \varphi_{mn}(\alpha). \quad (9)$$

Используя стандартную процедуру метода Галеркина, получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений для определения  $c_{mn}(t)$

$$\dot{c}_{mn} = -\frac{8}{\pi^2} \sum_{(i,j) \in P} \frac{1}{i^2 + j^2} K_{ij} A_{ijmn}, \quad (m, n) \in P, \quad (10)$$

где

$$A_{ijmn} = \int_D \varphi_{ij}(x) \varphi_{mn}(\alpha) d\alpha, \quad K_{ij} = \int_D \varphi_{ij}(y) \omega_0(b) db. \quad (11)$$

Уравнения (10) существенно нелинейны, так как аргументы  $x$  и  $y$  базисных функций  $\varphi_{ij}$  в (11), согласно (1) и (5) зависят от  $\Phi$ . Для получения более простых конечномерных моделей воспользуемся тем, что уравнение (3) нужно решать при нулевом начальном условии (4). Начальное поле вихря  $\omega_0(b)$  возьмем в виде

$$\omega_0(b) = \sum_{(p,q) \in P} w_{pq}^0 \varphi_{pq}(b), \quad w_{pq}^0 = 4 \int_D \omega_0(b) \varphi_{pq}(b) db,$$

тогда

$$K_{ij} \cong \sum_{(p,q) \in P} w_{pq}^0 \int_D \varphi_{ij}(y) \varphi_{pq}(b) db. \quad (12)$$

Решение системы (10) должно удовлетворять нулевым начальным условиям

$$c_{mn}(0) = 0. \quad (13)$$

Так как при  $t = 0$  замена (1) является тождественной ( $x = \alpha = a$ ,  $y = \beta = b$ ), то

$$\dot{c}_{mn}(0) = -\frac{w_{mn}^0}{2\pi^2(m^2 + n^2)}.$$

Поскольку, не теряя общности, можно считать, что  $\sum_{(p,q) \in P} (w_{pq}^0)^2 = O(1)$ , то  $c_{mn}(t) = O(\varepsilon)$  на временах порядка  $\varepsilon$  ( $\varepsilon \ll 1$ ). Поэтому для вычисления правых частей системы (10) как функций коэффициентов Галеркина  $c_{mn}(t)$  можно использовать метод малого параметра, аппроксимируя правые части дифференциальных уравнений отрезками ряда Тейлора. Если в простейшем случае ограничиться линейными относительно неизвестных  $c_{mn}$  функциями, то получим следующую систему линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами:

$$\dot{c}_{mn} = -\frac{w_{mn}^0}{2\pi^2(m^2 + n^2)} + \sum_{(k,l) \in P} c_{kl} \sum_{(p,q) \in P} w_{pq}^0 E_{pqklmn}, \quad (m, n) \in P, \quad (14)$$

где

$$E_{pqklmn} = \frac{1}{8} \left[ \frac{r_{pqklmn} - r_{mnklpq}}{m^2 + n^2} - \frac{r_{pqklmn}}{p^2 + q^2} \right], \quad r_{ijklmn} = kjs_{imk}s_{lnj} - ils_{kmi}s_{jnl},$$

$$s_{lmn} = +1 \text{ при } n = |l - m|, \quad s_{lmn} = -1 \text{ при } n = l + m, \quad s_{lmn} = 0 \text{ при } n \neq |l \pm m|.$$

Отметим, что решение задачи (14), (13), так же как и исходной задачи (3), (4), имеет смысл только при малых  $t$ , пока замена (1) остается невырожденной. Чтобы преодолеть это ограничение и исследовать поведение решений на достаточно больших временных промежутках, можно воспользоваться способом, предложенным В.И. Юдовичем [1]. При заданном начальном распределении завихренности  $\omega_0(b)$  приближенное решение уравнения (3) ищется на промежутке  $t \in [0, h]$  ( $h$  – фиксированная константа) посредством решения задачи Коши (14), (13). После этого определяется поле вихря при  $t = h$  и делается новая замена типа (1), где за новый начальный момент времени принимается значение  $t = h$ . При этом на каждом шаге разыскивается решение системы (14) с нулевыми начальными данными  $c_{mn}(0) = 0$ , но с новым начальным полем вихря. Конечно, константа  $h$  должна быть достаточно малой, чтобы исключить обращение в нуль якобиана (2).

Получим формулы для определения поля вихря  $\omega(x, t)$  при  $t > 0$ . Будем разыскивать  $\omega(x, t)$  в виде

$$\omega(x, t) = \sum_{(i,j) \in P} w_{ij}(t) \varphi_{ij}(x). \quad (15)$$

Для определения коэффициентов  $w_{ij}(t)$  используется выражение для функции тока

$$\psi(x, t) = \int_D G(x, y(b, t)) \omega_0(b) db.$$

Используя (8), (11)–(12) при интегрировании в формуле для  $\psi(x, t)$  и учитывая соотношение  $\omega = -\Delta\psi$ , находим

$$w_{ij}(t) = w_{ij}^0 + \pi^2/2 \sum_{(p,q) \in P} w_{pq}^0 \sum_{(k,l) \in P} c_{kl}(t) r_{ijklpq}. \quad (16)$$

Отметим, что при этом закон сохранения вихря

$$\omega(x(a, t), t) = \omega_0(a) \quad (17)$$

выполняется с точностью до нелинейных относительно переменных  $c_{kl}$  слагаемых, отброшенных при выводе уравнений (14). Чтобы определить, насколько сильно это повлияет на свойства приближенных решений, вычисляемых на больших временных промежутках, проведем сравнение приближенных решений задачи, рассчитанных двумя различными способами: на основе линейных уравнений (14), (16) и нелинейных моделей (см. ниже), которые выводятся непосредственным применением метода Галеркина к уравнениям Эйлера движения идеальной несжимаемой жидкости (см., например, [3]). Напомним, что в двумерном случае уравнения Эйлера для функции тока  $\psi(x, t)$  приводятся к виду

$$\frac{\partial \Delta \psi}{\partial t} = \frac{\partial \psi}{\partial x_1} \frac{\partial \Delta \psi}{\partial x_2} - \frac{\partial \psi}{\partial x_2} \frac{\partial \Delta \psi}{\partial x_1}. \quad (18)$$

Разыскивая функцию тока и вихрь в форме

$$\psi(x, t) = - \sum_{(i,j) \in P} \frac{v_{ij}(t)}{\pi^2(i^2 + j^2)} \varphi_{ij}(x), \quad \omega(x, t) = \sum_{(i,j) \in P} v_{ij}(t) \varphi_{ij}(x),$$

подставляя эти выражения в (18) и требуя ортогональности невязки функциям  $\varphi_{mn}(x)$ , выводим уравнения для определения неизвестных  $v_{mn}(t)$

$$\dot{v}_{mn} = -\frac{1}{4} \sum_{(i,j) \in P} \frac{v_{ij}}{i^2 + j^2} \sum_{k,l} v_{kl} r_{ijklmn}, \quad (m, n) \in P. \quad (19)$$

Уравнения нелинейных моделей (19) нужно решать при начальных условиях  $v_{mn}(0) = w_{mn}^0$ .

## 2. Простейшая модель

Исследование аппроксимаций Галеркина (14), (16) естественно начать с самого простого случая. Простейшая нетривиальная модель получается, если положить

$$\Phi = c_{11}\varphi_{11} + c_{12}\varphi_{12} + c_{21}\varphi_{21}, \quad \omega_0 = w_{11}^0\varphi_{11} + w_{12}^0\varphi_{12} + w_{21}^0\varphi_{21}.$$

Уравнения (14), (16) в этом случае можно привести к виду

$$\dot{\mathbf{c}} = -D_0 \mathbf{w}^0 + L(\mathbf{w}^0) \cdot \mathbf{c}, \quad (20)$$

$$\mathbf{w}(t) = \mathbf{w}^0 + [\mathbf{c}, \mathbf{w}^0], \quad (21)$$

где  $\mathbf{c} = (3\pi^2/2)(c_{11}, c_{12}, c_{21})$ ,  $\mathbf{w} = (w_{11}, w_{12}, w_{21})$ ,  $\mathbf{w}^0 = (w_{11}^0, w_{12}^0, w_{21}^0)$ , а  $D_0$  и

$L(\mathbf{w}^0)$  – матрицы

$$D_0 = \text{diag}(3/8, 3/20, 3/20),$$

$$L(\mathbf{w}^0) = \begin{pmatrix} 0 & -(3/10)w_{21}^0 & (3/10)w_{12}^0 \\ (3/40)w_{21}^0 & 0 & (3/80)w_{11}^0 \\ -(3/40)w_{12}^0 & -(3/80)w_{11}^0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Отметим, что след матрицы  $\text{Sp } L(\mathbf{w}^0)$  и ее определитель  $\det L(\mathbf{w}^0)$  равны нулю для любого начального поля вихря, и система (20) инвариантна относительно вращений  $(\mathbf{c}, \mathbf{w}^0) \mapsto (R\mathbf{c}, R\mathbf{w}^0)$ , где

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \gamma & -\sin \gamma \\ 0 & \sin \gamma & \cos \gamma \end{pmatrix},$$

$\gamma$  – произвольный угол. Правые части уравнений (20) – однородные функции коэффициентов  $w_{ij}^0$ , и система инвариантна относительно преобразований  $(t, \mathbf{w}^0) \mapsto (kt, k\mathbf{w}^0)$ ,  $k \neq 0$ .

Решение задачи Коши с нулевыми начальными данными  $\mathbf{c}(0) = \mathbf{0}$  для системы (20) определяется явными формулами. В частности, значениям  $\mathbf{w}^0 = k \cdot \mathbf{e}_i$ , ( $\mathbf{e}_i$  – координатные орты) отвечают решения, линейно зависящие от времени

$$\mathbf{c} = -k \cdot D_0 \mathbf{e}_i \cdot t. \quad (22)$$

Однако решения системы (20) имеют смысл только локально, на достаточно малом промежутке времени  $[0, h]$ , величина которого ограничена требованием невырожденности замены (1). Условие положительности якобиана (2) приводит к оценке  $h < 8/(3\pi^2)$ . Таким образом, определено отображение

$$(\mathbf{0}, \mathbf{w}^0) \mapsto (\mathbf{c}(h), \mathbf{w}(h)). \quad (23)$$

Для решений вида (22) вихрь сохраняется:  $\mathbf{w}(h) = \mathbf{w}^0$ . Более того, ввиду инвариантности простейшей модели (20) относительно вращений, сохраняются все распределения вихря вида

$$\begin{aligned} \omega_0 &= w_{11}^0 \sin(\pi a_1) \sin(\pi a_2), \\ \omega_0 &= w_{12}^0 \sin(\pi a_1) \sin(2\pi a_2) + w_{21}^0 \sin(2\pi a_1) \sin(\pi a_2). \end{aligned} \quad (24)$$

Далее можно следить за итерациями отображения (23), причем достаточно рассмотреть начальные распределения вихря

$$\omega_0 = \sin(\pi a_1) \sin(\pi a_2) + \varepsilon \sin(\pi a_1) \sin(2\pi a_2), \quad \varepsilon > 0. \quad (25)$$

Для любого начального поля вихря (25) и любого достаточно малого  $h$  итерации сходятся к одному из полей вида (24); при этом  $|w_{11}^0|$  монотонно убывает, а

$(w_{12}^0)^2 + (w_{21}^0)^2$  монотонно растет. Рис. 1 иллюстрирует этот процесс для  $\varepsilon = 0.02$ :  $a$  – начальное распределение,  $b$  – финальная фаза движения. Процесс всегда развивается одинаково: сначала единственный вихрь начинает прецессировать вдоль границы области, затем в одном из углов квадрата появляется второй вихрь (с противоположным знаком завихренности), и прецессирует уже пара вихрей. По мере выравнивания интенсивности вихрей их вращение замедляется, и устанавливается одно из стационарных распределений вида (24).

Что касается уравнений (19), то в рассматриваемом простейшем случае они приводятся к виду

$$\mathbf{v}' = [\mathbf{v}, D_0 \mathbf{v}], \quad \mathbf{v} = (v_{11}, v_{12}, v_{21}) \quad (26)$$

и по сути совпадают с уравнениями Эйлера движения свободного твердого тела (причем осесимметричного). Уравнения (26) имеют два независимых первых интеграла: это квадрат нормы вихря  $\|\mathbf{v}\|^2 = (\mathbf{v}, \mathbf{v})$  и кинетическая энергия  $H = 1/2(\mathbf{v}, D_0 \mathbf{v})$ . Имеется два семейства равновесий:  $\mathbf{v} = (w_{11}^0, 0, 0)$  и  $\mathbf{v} = (0, w_{12}^0, w_{21}^0)$ ; им отвечают поля завихренности (24). Решение задачи Коши с начальными данными (25) определяется формулами

$$v_{11}(t) = 1, \quad v_{12}(t) = \varepsilon \cos \frac{9}{40}t, \quad v_{21}(t) = \varepsilon \sin \frac{9}{40}t,$$

то есть все движения являются либо стационарными, либо периодическими по времени. Эта ситуация качественно отличается от предыдущей, так как для любого решения уравнений (26) величина  $v_{11}(t)$  постоянна. Причина такого различия в том, что в формуле (21) сохранены только линейные относительно  $c_{ij}$  слагаемые.

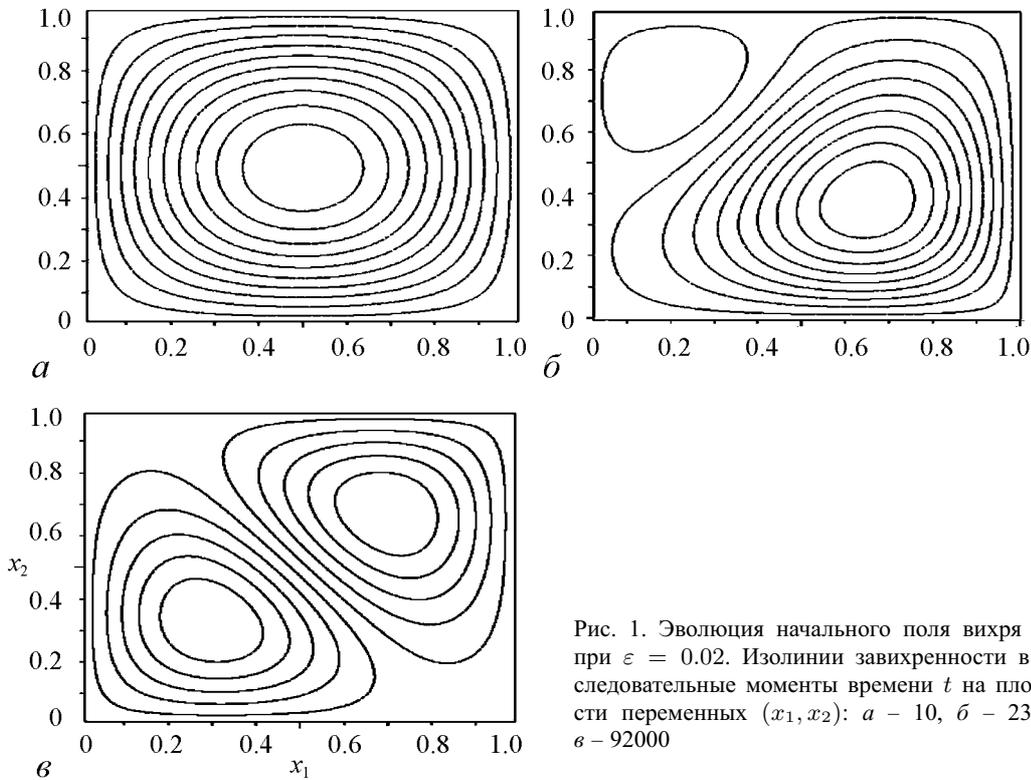


Рис. 1. Эволюция начального поля вихря (25) при  $\varepsilon = 0.02$ . Изолинии завихренности в последовательные моменты времени  $t$  на плоскости переменных  $(x_1, x_2)$ :  $a$  – 10,  $b$  – 23000,  $c$  – 92000

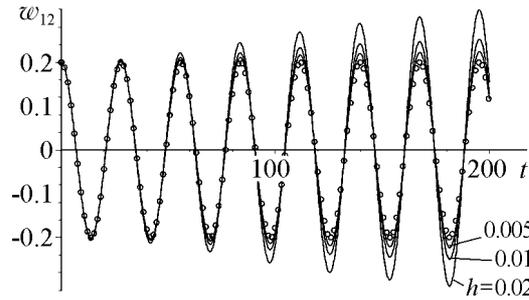


Рис. 2. Зависимости  $w_{12}$  (сплошные линии), полученные посредством итерирования отображения (23) при различных значениях шага  $h$ . Начальные данные (25) при  $\varepsilon = 0.02$ . Точки соответствуют значениям функции  $v_{12}(t) = \varepsilon \cos(9/40) \cdot t$

положительного всюду в области  $D$ , с течением времени возникают области с отрицательными значениями завихренности. Однако на конечном промежутке времени разность  $|w_{ij}(t) - v_{ij}(t)|$  с уменьшением  $h$  стремится к нулю. Это иллюстрируется таблицей 1, где приведены зависимости  $\max_{0 \leq t \leq 200} |w_{12}(t)|$ , значения квадрата нормы вихря  $\|\mathbf{w}\|^2 = (\mathbf{w}, \mathbf{w})$  и энергии  $H(\mathbf{w}) = 1/2(\mathbf{w}, D_0 \mathbf{w})$  от  $h$ . Для сравнения в последнем столбце даны значения этих же величин при  $t = 0$  (в начальный момент времени эти величины одинаковы для обеих моделей, и на решениях системы (26) они постоянны, так как являются ее первыми интегралами).

Таблица 1

Зависимость характеристик приближенного решения от значений параметра  $h$ . Линейная модель (23), начальные данные (25) при  $\varepsilon = 0.02$ ,  $t \in [0, 200]$

$h$	0.02	0.01	0.005	0.0025	$t = 0$
$\max_{0 \leq t \leq 200}  w_{12}(t) $	0.0319	0.0252	0.0224	0.0212	0.0200
$\ \mathbf{w}\ ^2 (t = 200)$	1.000538	1.000452	1.000423	1.000411	1.000400
$2H(\mathbf{w}) (t = 200)$	0.499957	0.500034	0.500060	0.500071	0.500080

### 3. Компьютерный эксперимент

Уравнения (14), (16) определяют семейство конечномерных моделей, зависящих от выбора множества  $P$ . Рассмотрим серию линейных моделей (14), (16), в которых  $P$  определяется условием  $m + n \leq N$  при  $N = 4 \dots 11$  (простейшая модель (20), (21) получается при  $N = 3$ ). Их решения приходится изучать численно. Для контроля точности получаемых решений удобно использовать нелинейную модель (19) при том же фиксированном  $P$ , что и линейная. В обоих случаях для получения решения задачи Коши используется одна и та же модификация метода Рунге–Кутты.

При заданном  $N$  можно по предыдущей схеме определить векторы  $\mathbf{c}$ ,  $\mathbf{w}$ ,  $\mathbf{w}^0$  и записать уравнения (14), (16) в векторной форме

$$\dot{\mathbf{c}} = -D_0 \mathbf{w}^0 + L(\mathbf{w}^0) \cdot \mathbf{c}, \quad (27)$$

$$\mathbf{w}(t) = \mathbf{w}^0 + M(\mathbf{w}^0) \cdot \mathbf{c}, \quad (28)$$

где  $D_0$  – диагональная матрица с числовыми элементами;  $L(\mathbf{w}^0)$  и  $M(\mathbf{w}^0)$  – матрицы с элементами, однородно и линейно зависящими от  $w_{ij}^0$ , причем  $M(\mathbf{w}^0)$  – кососимметричная матрица для любого вектора  $\mathbf{w}^0$ . Далее определяется отображение вида (23) и изучаются его итерации. Все такие отображения сохраняют начальные распределения вихря

$$\omega_0(a) = w_{ij}^0 \varphi_{ij}(a). \quad (29)$$

Напомним, что для конечномерных моделей (19), так же как для уравнений Эйлера (18) в квадратной области  $D$ , это – стационарные решения.

Цель компьютерных экспериментов – исследование эволюции во времени вихревых движений, в начальный момент времени близких к распределению (29). Начальные поля вихря в численных экспериментах выбирались в форме  $\omega_0(a) = \varphi_{ij}(a) + \varepsilon \varphi_{pq}(a)$ , где параметр  $\varepsilon$  порядка  $10^{-1} - 10^{-3}$ . Ниже приведены результаты исследования малых возмущений стационарных движений с полями завихренности  $\varphi_{11}(a)$ ,  $\varphi_{12}(a)$  и  $\varphi_{21}(a)$ .

Найденные приближенные решения сравнивались с решениями задачи Коши с теми же начальными данными для соответствующей нелинейной модели (19). Заметим, что для всех таких моделей квадрат нормы вихря  $\|\mathbf{v}\|^2 = \sum_{i+j \leq N} v_{ij}^2$  и кинетическая энергия  $H(\mathbf{v}) = 1/2 \sum_{i+j \leq N} v_{ij}^2 / (i^2 + j^2)$  являются первыми интегралами, и их удобно использовать для контроля точности приближенных решений.

С увеличением  $N$  наблюдается улучшение соответствия между приближенными решениями, полученными разными методами, что иллюстрируется рис. 3. Величина

$$\max_{0 \leq t \leq 400} |w_{12}(t) - v_{12}(t)| \approx 2 \cdot 10^{-4},$$

относительной погрешности остается в пределах 1% после 80000 итераций отображения. В таблице 2 приведены значения  $\|\mathbf{w}\|^2 = (\mathbf{w}, \mathbf{w})$  и энергии  $H(\mathbf{w}) = 1/2(\mathbf{w}, D_0 \mathbf{w})$  при  $t = 200$  в зависимости от  $N$ , последний столбец – эти же величины при  $t = 0$  (начальные данные (25) при  $\varepsilon = 0.02$ ). Отклонения этих характеристик от начальных значений на фиксированном временном промежутке за-

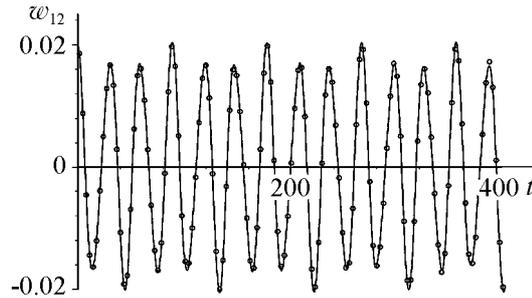


Рис. 3. Зависимость  $\omega_{12}$  (сплошная линия), полученная посредством итерирования отображения (23) при  $h = 0.005$ , начальные данные (25) при  $\varepsilon = 0.02$ . Точки соответствуют значениям функции  $v_{12}(t)$  нелинейной модели (19). Для обеих моделей  $N = 6$

Таблица 2

Зависимость характеристик приближенного решения от значений параметра  $N$ . Линейные модели (27) и (28), начальные данные (25) при  $\varepsilon = 0.02$

$t$	200					0
$N$	3	5	7	9	11	
$\ \mathbf{w}\ ^2$	1.000423	1.000423	1.000422	1.000422	1.000421	1.000400
$2H(\mathbf{w})$	0.500060	0.500083	0.500071	0.500074	0.500077	0.500080

висят от величины  $N$  и  $h$ . По-видимому, для  $\|\mathbf{w}\|^2$  более существенной является зависимость от  $h$ , а для энергии – от  $N$ .

Слабо возмущенное распределение  $\varphi_{11}(a)$  эволюционирует одним из двух возможных способов в зависимости от выбора возмущения  $\varphi_{pq}(a)$ ; эти сценарии представлены на рис. 4, 5. Характер движения зависит от свойств четности суммы индексов  $p + q$ . Дело в том, что линейные модели (14), (16) обладают следующим свойством: если  $w_{ij}(t) = 0$  при  $i + j$  нечетных, то они равны нулю и при всех  $t > 0$  (аналогично, для нелинейных моделей (19) подпространство, определяемое условиями  $v_{ij} = 0$  при  $i + j$  нечетных, является инвариантным).

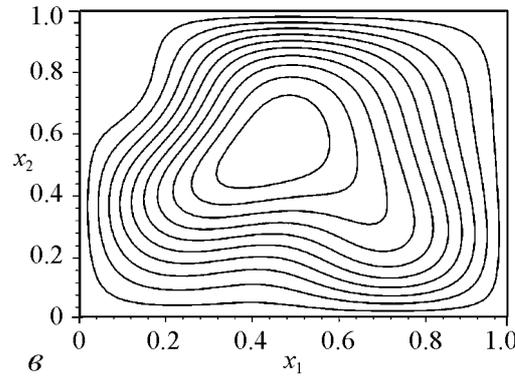
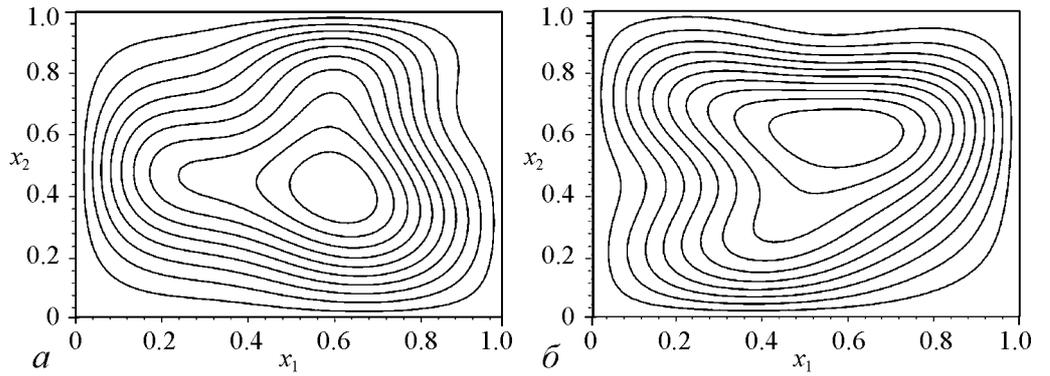


Рис. 4. Эволюция начального поля вихря  $\varphi_{11}(a) + \varepsilon\varphi_{pq}(a)$  при нечетных  $p + q$ . Расчет для  $N = 6$ , начальное распределение  $\omega_0(a) = \varphi_{11}(a) + 0.1 \cdot \varphi_{14}(a)$ ,  $h = 0.005$ . Изолинии завихренности после 77000 итераций отображения в последовательные моменты времени  $t$ :  $a - 386$ ,  $\bar{b} - 390$ ,  $\bar{e} - 394$

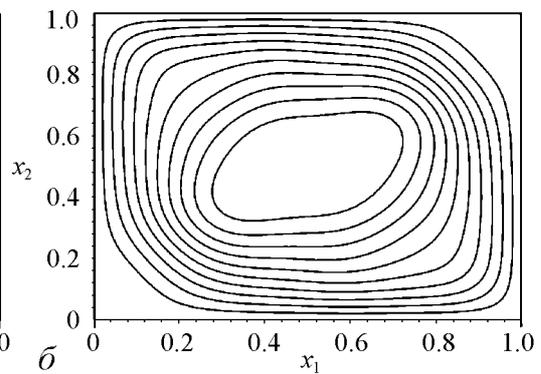
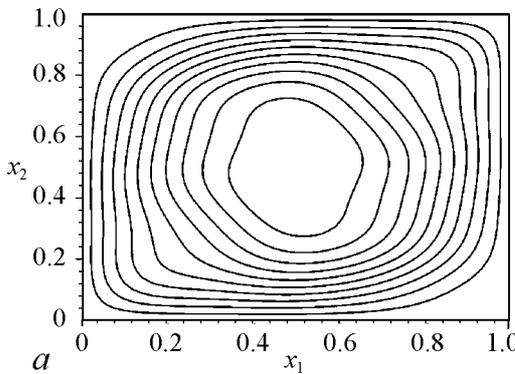


Рис. 5. Эволюция начального поля вихря  $\varphi_{11}(a) + \varepsilon\varphi_{pq}(a)$  при четных  $p + q$ . Расчет для  $N = 8$ , начальное распределение  $\omega_0(a) = \varphi_{11}(a) + 0.1 \cdot \varphi_{13}(a)$ ,  $h = 0.005$ . Изолинии завихренности после 15000 итераций отображения в последовательные моменты времени  $t$ :  $a - 77.17$ ,  $\bar{b} - 82.5$

Если  $p + q$  нечетно, то после первой же итерации отображения коэффициенты  $w_{12}(t)$  и  $w_{21}(t)$  становятся отличными от нуля. Поэтому движение имеет тот же характер, что и для трехмерной модели. Вихрь прецессирует вдоль границы области, и такое движение может продолжаться долго – несколько десятков полных оборотов вихря вдоль границы. На рис. 4 приведены изолинии вихря в последовательные моменты времени. Сильная деформация вихря обусловлена сравнительно большой величиной начального возмущения.

Если же  $p + q$  четно, то в процессе движения остаются равными нулю все коэффициенты  $w_{ij}(t)$  с нечетными  $i + j$  и, в частности,  $w_{12}(t)$  и  $w_{21}(t)$ . Движение имеет качественно иной характер: наблюдаются деформации растяжения-сжатия вихря вдоль диагоналей квадрата (рис. 5). Следует еще раз подчеркнуть, что речь идет о свойствах решений на конечном, хотя и большом промежутке времени.

Для двухвихревых режимов движения  $\varphi_{12}(a)$  и  $\varphi_{21}(a)$  наиболее интересные эффекты наблюдаются при малых возмущениях вида  $\varepsilon\varphi_{pq}(a)$  при  $p$  и  $q$  нечетных (то есть, при возмущениях с ненулевой средней завихренностью). Наиболее типичный сценарий – почти равномерное вращение пары вихрей вокруг общего центра. Например, на рис. 6 представлены изолинии вихря в последовательные моменты времени, направление вращения пары вихрей – против часовой стрелки.

На рис. 7, *a* приведены графики  $w_{12}(t)$  и  $w_{21}(t)$  – кривые *A* и *B*, соответственно, это почти гармонические колебания. Кривая *C* – график величины  $5W(t)$ ,  $W(t) = w_{11}^2(t) + \sum_{3 < i+j \leq N} w_{ij}^2(t)$  (множитель 5 использован для удобства, в этом режиме движения величина  $W(t)$  мала и не превышает 0.02). Отметим, что  $W(t)$  достигает минимума при  $w_{12}(t)w_{21}(t) = 0$  и максимума при  $|w_{12}(t)| = |w_{21}(t)|$ .

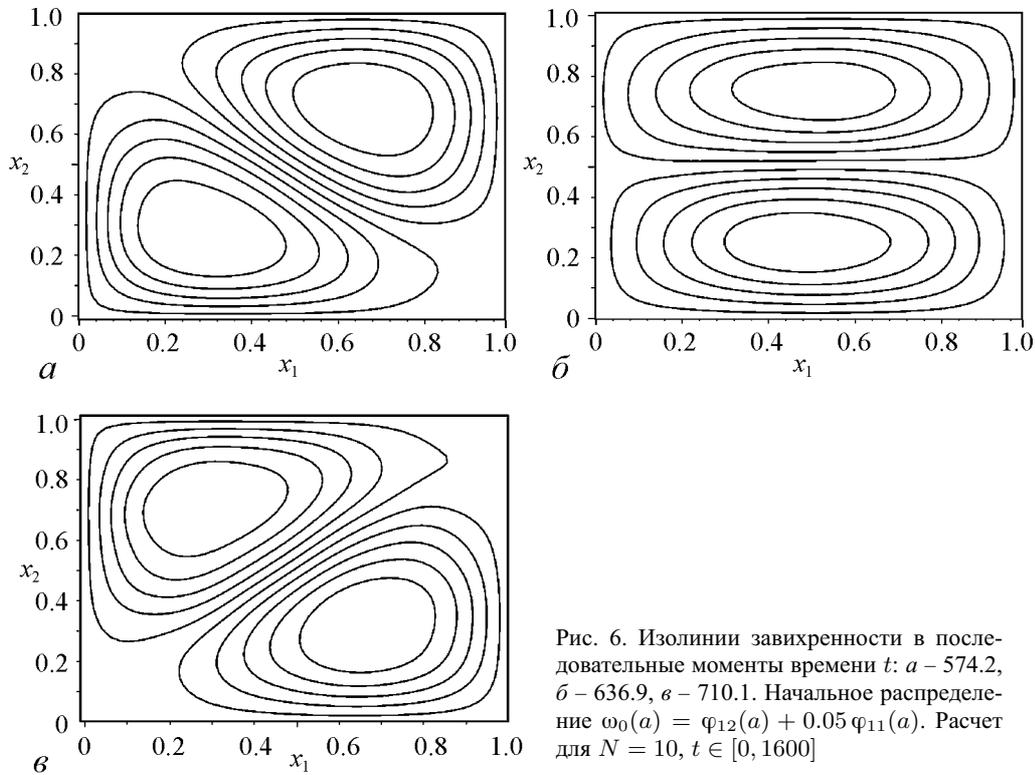


Рис. 6. Изолинии завихренности в последовательные моменты времени  $t$ :  $a$  – 574.2,  $b$  – 636.9,  $v$  – 710.1. Начальное распределение  $\omega_0(a) = \varphi_{12}(a) + 0.05\varphi_{11}(a)$ . Расчет для  $N = 10$ ,  $t \in [0, 1600]$

Другой типичный сценарий – вращательные колебания пары вихрей относительно начального состояния: система переходит из состояния рис. 6, *a* в состояние рис. 6, *б* и обратно. На рис. 7, *б* приведены графики  $w_{12}(t)$ ,  $w_{21}(t)$  и  $W(t)$  – кривые *A*, *B* и *C*, соответственно. В этом режиме движения величина  $W(t)$  существенно больше, чем в предыдущем случае, а  $w_{12}(t)$  не меняет знак.

Наблюдаются также движения смешанного типа: перемежаются колебания около одного из стационарных состояний  $\pm\varphi_{12}(a)$ ,  $\pm\varphi_{21}(a)$  и режим вращения, описанные выше.

Наиболее любопытными представляются движения, в которых наблюдаются колебания пары вихрей относительно одной из диагоналей квадрата. При этом величина  $|w_{12}(t) - w_{21}(t)|$  совершает колебания небольшой амплитуды около нуля, и движение близко к периодическому. На рис. 7, *в* отражены два таких периода движения: при  $t \in [10000, 23500]$  колебания происходят в окрестности состояния  $w_{12}(t) = w_{21}(t)$ , а при  $t \in [25000, 37000]$  – в окрестности состояния  $w_{12}(t) = -w_{21}(t)$ . В ряде расчетов наблюдается «застывание» фазовой точки в области  $|w_{12}(t)| \approx |w_{21}(t)|$ , то есть, возникает близкий к стационарному режим движения с парой почти симметричных относительно диагонали квадрата вихрей. Вообще, создается впечатление, что состояния с  $|w_{12}(t)| = |w_{21}(t)|$  играют особую роль в динамике системы. Это согласуется с результатами работы [4], где изучались вихревые движения слабо вязкой жидкости в квадрате с условиями периодичности на его границе. В описанных компьютерных экспериментах кусочно-постоянное начальное распределение вихря с близким к нулю средним значением эволюционирует к двухвихревому режиму движения, причем вихри стремятся расположиться по диагонали квадрата.

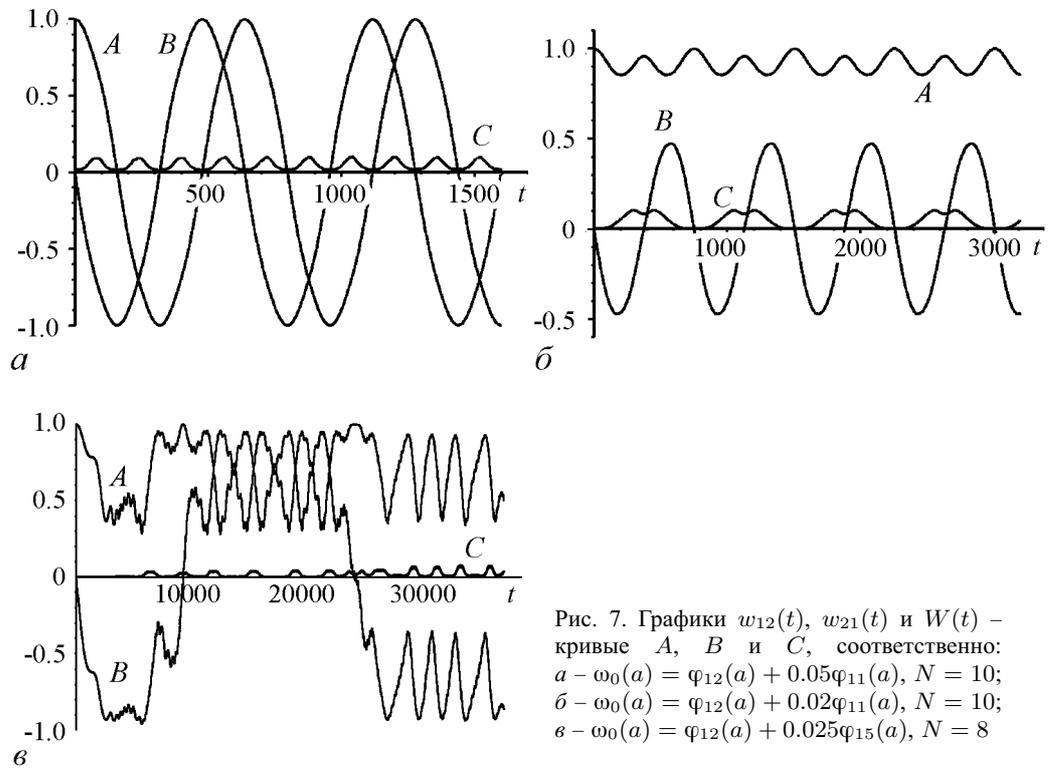


Рис. 7. Графики  $w_{12}(t)$ ,  $w_{21}(t)$  и  $W(t)$  – кривые *A*, *B* и *C*, соответственно:  
*a* –  $\omega_0(a) = \varphi_{12}(a) + 0.05\varphi_{11}(a)$ ,  $N = 10$ ;  
*б* –  $\omega_0(a) = \varphi_{12}(a) + 0.02\varphi_{11}(a)$ ,  $N = 10$ ;  
*в* –  $\omega_0(a) = \varphi_{12}(a) + 0.025\varphi_{15}(a)$ ,  $N = 8$

## Заключение

В данной работе представлен новый подход к численному исследованию двумерных вихревых движений идеальной жидкости, основанный на приближенном решении интегро-дифференциального уравнения, полученного в работах В.И. Юдовича 2000–2005 годов. Метод Галеркина в сочетании с методом малого параметра применен для вывода семейства линейных конечномерных моделей. Для контроля точности приближенных решений использованы нелинейные аппроксимации Галеркина уравнений Эйлера движения идеальной жидкости в двумерном случае. Компьютерные эксперименты показали, что с ростом размерности моделей улучшается соответствие между приближенными решениями, полученными двумя различными методами. Поэтому можно предположить, что линейные модели высокой размерности могут оказаться эффективным вычислительным средством (количество слагаемых в правой части уравнений для них растет пропорционально квадрату количества уравнений, а для нелинейных моделей – пропорционально кубу). Конечно, проверка этого предположения – предмет отдельного исследования.

Еще одна цель компьютерных экспериментов – изучение движений с начальным распределением завихренности, близким к одному из стационарных движений уравнений Эйлера. В частности, оказалось, что для решений, в начальный момент времени близких к стационарным движениям, можно провести аналогию с колебаниями и вращениями математического маятника.

Автор благодарит М.Ю. Жукова за постановку задачи и А.Б. Моргулиса за полезные обсуждения.

*Работа выполнена в рамках европейского научного объединения «Регулярная и хаотическая гидродинамика» (грант РФФИ 07-01-92213 НЦНИЛ) и аналитической ведомственной программы «Развитие научного потенциала высшей школы» (гранты 2.1.1/554 и 2.1.1/6095). Исследование поддержано грантами РФФИ 07-01-00389 и 08-01-00895, а также грантом АФГИР (CRDF) RUM1-2842-RO-06.*

## Библиографический список

1. *В.И. Юдович.* Косимметрия и консервативные системы II. Ростовский государственный университет. Ростов-на-Дону, 2000. 24 с. Деп. в ВИНТИ 06.09.00, № 2772-B00.
2. *Yudovich V.I.* Topics in an ideal fluid dynamics // Journal of Mathematical Fluid Mechanics. 2005. Vol. 7, Suppl. 3. P. S299.
3. *Гледзер Е.Б., Должанский Ф.В., Обухов А.М.* Системы гидродинамического типа и их применение. М.: Наука, 1981.
4. *Segre E., Kida S.* Late states of incompressible 2D decaying vorticity fields // Fluid Dynamics Research. 1998. Vol. 23. P. 89.

*Поступила в редакцию 18.09.2008  
После доработки 25.06.2009*

## LOW-ORDER DYNAMICAL MODELS FOR VORTICAL FLOWS OF INVISCID FLUID IN SQUARE AREA

*N.V. Petrovskaya*

The Galerkin method together with the method of small parameter is applied for study of Routh-like equations describing the dynamics of two-dimensional inviscid incompressible fluid flows. A set of simple models for some vortical flows of such fluid in rectangular area has been derived and analysed.

*Keywords:* Inviscid incompressible fluid, 2D vortical flows, Routh-like equations, Galerkin method.



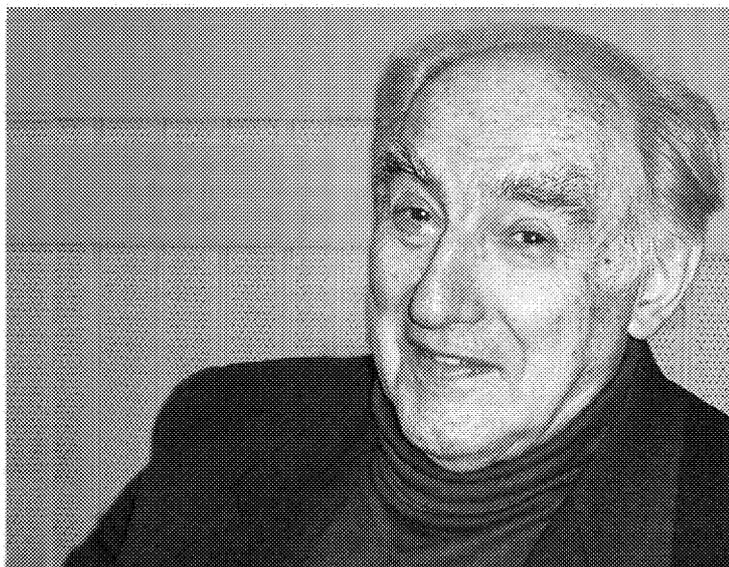
*Петровская Наталья Владимировна* – родилась в 1949 году в Ростове-на-Дону, окончила Ростовский государственный университет (1971). С 1971 года работает в Ростовском государственном университете (с 2006 года – Южный федеральный университет). Защитила диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук (1987) по специальности механика жидкости, газа и плазмы в Московском государственном университете. Область научных интересов: компьютерное моделирование течений жидкости, асимптотическое и численное исследование бифуркаций в гидродинамических моделях. Автор 46 научных публикаций.

344090 Ростов-на-Дону, ул. Мильчакова, 8а

Южный федеральный университет, факультет математики, механики и компьютерных наук

E-mail: petr@math.rsu.ru

Памяти  
Виталия  
Лазаревича  
Гинзбурга  
(1916 – 2009)



*На 94 году жизни скончался выдающийся физик современности, Нобелевский лауреат Виталий Лазаревич Гинзбург. В память о нем журнал публикует список особенно важных и интересных проблем, составленный Виталием Лазаревичем в 2001 году, и ответы Виталия Лазаревича на вопросы журнала «Physics World» – несколько штрихов к портрету замечательного Ученого, великого Учителя и удивительного Человека.\**

**Какие проблемы физики и астрофизики представляются особенно важными и интересными в начале XXI века?**

...Нужно ли подчеркивать, что выделение «особенно важных и интересных» вопросов ни в какой мере не эквивалентно объявлению массы других физических вопросов неважными или неинтересными? Это же очевидно, но привычка к перестраховке побуждает все же сделать еще пару замечаний. «Особенно важные» проблемы выделяются не тем, что другие не важны, а тем, что на обсуждаемый период времени находятся в фокусе внимания, в какой-то мере находятся на главных направлениях. Завтра эти проблемы могут оказаться уже в тылу, на смену им придут другие. Выделение «особенно важных» проблем, конечно, субъективно, возможны и нужны различные взгляды на этот счет. Однако я решительно хотел бы отметить упрек в том, что выделение производится мной под диктовку собственных научных интересов, собственной активной работы в физике. Так, больше всего мне в моей научной деятельности были и остаются дороги вопросы, связанные с излучением

\*Материалы взяты из книги В.Л. Гинзбурга «О науке, о себе и о других: Статьи и выступления». 3-е изд., доп. М.: Изд-во Физико-математической литературы, 2003. 544 с.

равномерно движущихся источников (Гинзбург В.Л. УФН **166** 1033 (1996). – *Прим. ред.*), но их в «списке» не было и нет. К сожалению, пришлось сталкиваться с осуждением «списка» по той причине, что там нет темы, интересующей критикующего. Вспоминаю в этой связи, как мой старший друг А.Л. Минц (1895–1974 гг.) после появления статьи (Гинзбург В.Л. УФН **103** 87 (1971). – *Прим. ред.*) сказал мне: «Если бы Вы написали эту статью до избрания академиком, то никогда не стали бы им». Возможно, что он был прав, но все же я верю в большую широту взглядов коллег.

### Список «особенно важных и интересных проблем» 2001 г.

Как говорится в известной поговорке: «Чтобы узнать, каков пудинг, – нужно его есть» (The proof of the pudding is in the eating). Поэтому перейду к делу и предъявлю «список», о котором упоминалось.

1. Управляемый ядерный синтез.
2. Высокотемпературная и комнатотемпературная сверхпроводимость (ВТСП и КТСП).
3. Металлический водород. Другие экзотические вещества.
4. Двумерная электронная жидкость (аномальный эффект Холла и некоторые другие эффекты).
5. Некоторые вопросы физики твердого тела (гетероструктуры в полупроводниках, квантовые ямы и точки, переходы металл–диэлектрик, волны зарядовой и спиновой плотности, мезоскопика).
6. Фазовые переходы второго рода и родственные им. Некоторые примеры таких переходов. Охлаждение (в частности, лазерное) до сверхнизких температур. Бозе–эйнштейновская конденсация в газах.
7. Физика поверхности. Кластеры.
8. Жидкие кристаллы. Сегнетоэлектрики. Ферротороики.
9. Фуллерены. Нанотрубки.
10. Поведение вещества в сверхсильных магнитных полях.
11. *Нелинейная физика. Турбулентность. Солитоны. Хаос. Странные аттракторы.*
12. Разеры, гразеры, сверхмощные лазеры.
13. Сверхтяжелые элементы. Экзотические ядра.
14. Спектр масс. Кварки и глюоны. Квантовая хромодинамика. Кварк-глюонная плазма.
15. Единая теория слабого и электромагнитного взаимодействия,  $W^\pm$ - и  $Z^0$ -бозоны. Лептоны.
16. Стандартная модель. Великое объединение. Суперобъединение. Распад протона. Масса нейтрино. Магнитные монополи.
17. Фундаментальная длина. Взаимодействие частиц при высоких и сверхвысоких энергиях. Коллайдеры.
18. Несохранение CP-инвариантности.
19. Нелинейные явления в вакууме и в сверхсильных электромагнитных полях. Фазовые переходы в вакууме.
20. Струны. М-теория.
21. Экспериментальная проверка общей теории относительности.
22. Гравитационные волны, их детектирование.

23. Космологическая проблема. Инфляция. Λ-член и «квинтэссенция» (темная энергия). Связь между космологией и физикой высоких энергий.
24. Нейтронные звезды и пульсары. Сверхновые звезды.
25. Черные дыры. Космические струны (?).
26. Квазары и ядра галактик. Образование галактик.
27. Проблема темной материи (скрытой массы) и ее детектирования.
28. Происхождение космических лучей со сверхвысокой энергией.
29. Гамма-всплески. Гиперновые.
30. Нейтринная физика и астрономия. Нейтринные осцилляции.

\* \* \*

### Ответы на вопросы журнала «Physics World»<sup>1</sup>

Окончание XX века и вступление в третье тысячелетие сопровождалось, естественно, появлением в журналах и даже газетах различных публикаций, подводящих итоги развития науки. В частности, печатаются соответствующие опросы. Как мне кажется, они представляют известный интерес.

Один такой опрос под названием «Physics World Millennium Survey» («Обзор мира физики за тысячелетие») провел научно-популярный журнал «Physics World», издающийся Институтом физики Великобритании. Журнал этот аналогичен американскому «Physics Today», а у нас по типу близок «Природе», с той лишь разницей, что посвящен только физике и смежным научным направлениям...

*Вопрос 1.* Каковы, по Вашему мнению, три наиболее важных открытия в физике и почему?

*Ответ.* Простота вопроса кажущаяся. Что понимать под открытием? Можно понимать частное, конкретное. Например, открытие электрона, радиоактивности и т.п. Можно понимать открытие новых законов и принципов. Я склонен считать более важными не частные открытия, а общие концепции, взгляды и теории, обобщающие опыт. При таком подходе важнейшими являются:

- создание классической механики (Галилей, Ньютон);
- создание специальной и общей теории относительности (Эйнштейн);
- создание квантовой теории (Планк, Эйнштейн, Бор, Гейзенберг, Шредингер, Дирак).

Если же говорить о конкретных открытиях, я бы выделил открытие электрона, фотона и кварков. Но чем хуже открытие нейтрона и позитрона (в 1932 г.)?

*Вопрос 2.* Назовите пять физиков, вклад которых в науку наиболее важен\*.

*Ответ.* Безусловно, – это Ньютон и Эйнштейн. А кого еще предпочесть: Аристотеля, Архимеда, Коперника, Галилея, Кеплера, Фарадея, Максвелла, Больцмана, Планка, Бора, Резерфорда, Гейзенберга, Шредингера, Дирака?.. Все же я бы остановился на Галилее и Боре. Но кто пятый?

*Вопрос 3.* Какова, по Вашему мнению, важнейшая нерешенная проблема в Вашей области?

\*Как разъяснила мне редакция «Physics World», здесь и ниже речь идет о всей истории физики, а не только, скажем, XX века.

*Ответ.* Я считаю физику все еще единой. Подробнее пишу об этом в статье, опубликованной в «Успехах физических наук» (169(4), 419 (1999)). Поэтому, строго говоря, у меня нет «моей области». Но, несколько условно, мне все же ближе сверхпроводимость. В этой области важнейшей представляется проблема высокотемпературной и комнатнотемпературной сверхпроводимости (ВТСП и КТСП). Каков механизм сверхпроводимости в уже известных ВТСП (купратах)? Достижима ли КТСП?

*Вопрос 4.* Какова, по Вашему мнению, наиболее важная проблема в остальной части физики?

*Ответ.* Важнейшая нерешенная проблема в физике, конечно, создание единой теории всех взаимодействий, включая гравитационное. Можно это сформулировать и уже, как создание квантовой теории гравитации, включая квантовую космологию. Физики, по-видимому, еще очень далеки от цели. Называть теорию суперструн «теорией всего» («theory of everything») было с самого начала плодом увлечений или рекламы. Подробнее об этом я пишу в упомянутой статье в УФН.

*Вопрос 5.* Стали бы Вы изучать физику, если бы поступили в университет в этом году? Если не стали бы, то почему?

*Ответ.* Сейчас мне кажется, что я опять выбрал бы физику. Вместе с тем в настоящее время на первом месте в науке (пусть и условно) находится биология. Поэтому, будь я молодым, мог бы выбрать и биологию (опять же смотри мою статью в УФН).

*Вопрос 6.* Если бы Вы начинали свои исследования в физике, какую область физики Вы бы выбрали и почему?

*Ответ.* Как ясно из ответа на вопрос 3, мне не нравится узкая специализация. Физик должен в первую очередь знать и любить физику вообще, чем шире – тем лучше. Конечно, приходится выбирать что-то более узкое, особенно экспериментатору. Но и он (экспериментатор), если сможет, не должен быть на всю жизнь привязан к какой-то узкой области. Физик же теоретик и может, и должен работать над разными вопросами (и уж заведомо интересоваться ими). Поэтому, начиная работать в физике, я выбрал бы теоретическую физику, хотя очень уважаю эксперимент и всегда плохо вычислял и плохо владел математическим аппаратом. Но не нужно все же путать теоретическую физику и математическую физику.

*Вопрос 7.* Как сказал Стивен Хокинг (Stephen Hawking), вероятность того, что мы найдем (создадим) полную единую теорию в течение ближайших 20 лет, составляет 50%. Согласны ли Вы, что конец теоретической физики уже виден?\*

*Ответ.* Много раз в истории физики считали, что вот-вот некоторые глубокие проблемы будут решены. На деле же решение либо надолго откладывалось, либо вообще не было достигнуто. По моей оценке, «вероятность того, что мы создадим полную единую теорию в течение ближайших 20 лет», вряд ли превышает 1%.

Выше ответы приведены без всяких изменений. Сейчас мне хотелось бы уточнить ответ на вопрос 2. В качестве пятого я, подумав, называю, безусловно, Максвелла. Кроме того, в списке среди физиков XX века, я забыл упомянуть Ферми, да и, пожалуй, Ландау, Паули, де Бройля и Фейнмана. Главное, я как-то сосредоточился

---

\*См.: Хокинг С. Виден ли конец теоретической физики? Природа, № 5, 48 (1982).

на физиках XX века. Поэтому в общем списке незаслуженно отсутствуют многие, например, Гиббс.

Хочу также дополнить ответ на вопрос 7. В одной из своих статей (не стал сейчас ее искать) М. Планк (1858–1947) рассказал, что в молодости (т.е. примерно в 1878 г., когда Планк окончил университет) он обратился к одному уважаемому профессору физики за советом, чем заниматься. И вот профессор ответил примерно так: «Мне жалко Вас, молодой человек, ибо Вам осталось только стирать пыль с существующих физических приборов». Другими словами, этот физик, как и немало других, считал, что главное в физике уже сделано<sup>2</sup>. И это до открытия рентгеновских лучей, радиоактивности и электрона, до создания теории относительности и квантовой механики (!). Подобная слепота встречается и сегодня, между тем как перед физикой стоят еще гигантские нерешенные задачи.

В упомянутом комментарии редакции «Physics World» содержится один момент, который, вероятно, будет интересен читателям. Именно, были подсчитаны физики, упомянутые респондентами в ответах на вопрос 2. По крайней мере «один голос» получил 61 физик. Их список таков, в порядке уменьшения поданного «числа голосов» (подчеркнуты имена ныне живущих физиков): Эйнштейн (119 голосов), Ньютон (96), Максвелл (67), Бор (47), Гейзенберг (30), Галилей (27), Фейнман (23), Дирак (22), Шредингер (22), Резерфорд (20). По 16 голосов (т.е. упоминаний) получили Больцман, Фарадей и Планк, 13 голосов получил Ферми, шесть голосов было отдано М. Кюри, четыре голоса получили Бардин и Ландау, по три голоса – Белл, Бете и Гиббс; по два голоса – Архимед, Коперник, П. Кюри, Г. 'тХуфт, Хаббл, Кеплер, Паули, Шокли, Дж. Томсон, Таунс, Вайнберг, Юкава; наконец, по одному голосу получили К. Андерсон, Аристотель, Беннетт, Бинниг, Блох, Карно, Клаузиус, Демокрит, Доплер, Эдисон, Евклид, Эддингтон, Эйлер, Хокинг, Д. Гилберт, Ланжевэн, Лорентц, Майкельсон, Онзагер, Пайн-Гапошкина, Релей, М. Рис, Рорер, Рентген, Шавлов, Тьюринг, Уилер, К. Вильсон, Янг.

Должен признаться, что не знаю, кто такие Bennett, Binnig и Rohrer. Но поскольку они получили лишь по одному голосу, мне не так уж и стыдно<sup>3</sup>. Должен также заметить, что и ряд других физиков, включенных в список пяти, внесших наибольший вклад в физику всех времен и народов, вызывает удивление. Я даже подозреваю, что редакция считала и тех, кто в ответах просто упомянут (например, в списке имеются все имена, перечисленные мною в ответе на вопрос 2, хотя я отнюдь не всех из них включил в заветную пятерку). Кроме того, вероятно, не все респонденты поняли, что речь идет не только о физиках XX века. Но это, конечно, маловажно. Первая десятка в списке великолепна, да и дальше следует немало блестящих имен.

Из физиков первой десятки я был знаком, да и то, как говорится, лишь шапочно, с Бором и Дираком, а более близко лишь с Фейнманом. И как раз только «место», отведенное Фейнману, вызывает у меня сомнение. Ричард Фейнман был превосходным физиком и яркой личностью, о чем и мне случилось писать\*. Однако, как подчеркивал в свое время Ландау, квалифицировать роль и класс физиков (если уж вообще квалифицировать) нужно «по достижениям», а не по другим признакам, например объему знаний, ораторскому искусству, учебникам и т.п. С этой точки зре-

\*См.: Гинзбург В.Л. О Ричарде Фейнмане – замечательном физике и удивительном человеке. В кн.: О физике и астрофизике. М.: Бюро Квантум, 1995. С. 430.

ния реальные научные достижения Фейнмана, сколь они ни велики, представляются мне уступающими всем остальным физикам, упомянутым в числе первых десяти, да и некоторым, оцененным в списке более скромно. Впрочем, не следует придавать всем этим «местам» существенное значение, хотя подобные «списки» и любопытны.

Думаю, что и у нас в России уместно было бы провести на достаточно серьезном уровне опрос типа осуществленного журналом «Physics World».

#### Примечания

1. Эта статья опубликована в журнале «Природа» (№ 3, 2000) под заглавием «Физика: прошлое, настоящее, будущее» (ответы на вопросы журнала «Physics World»). Первую часть этого заглавия дала редакция «Природы», и мне она кажется несколько претенциозной для такого небольшого сочинения. Поэтому здесь и оставлена только вторая часть заглавия.
2. В статье Е. М. Кляуса, помещенной в качестве приложения к сборнику Планк М. Единство физической картины мира (М.: Наука, 1966), сказанное в тексте в отношении М. Планка в общем подтверждено – Планку был дан совет не заниматься теоретической физикой. См. также: Иоффе А.Ф. Встречи с физиками (Л.: Наука, 1983. С. 64).
3. Мне все же стало стыдно и я выяснил следующее: Г. Бинниг и Г. Рорер (G. Binnig, H. Rohrer) получили Нобелевскую премию по физике за 1986 г. за изготовление сканирующего туннельного микроскопа. Что касается Беннета (Bennett), то, по-видимому, речь идет об американском физике, известном своими работами в области классической и квантовой теории информации.