Обзоры актуальных проблем нелинейной динамики

Изв. вузов «ПНД», т. 14, № 1, 2006 УДК 537

ХАОС И НЕИНТЕГРИРУЕМОСТЬ В ГАМИЛЬТОНОВЫХ СИСТЕМАХ

Р.Р. Мухин

Статья посвящена историческому развитию одного из ключевых понятий гамильтоновых систем – неинтегрируемости и ее связи с хаотическим поведением системы. Рассмотрена эволюция от понятия полностью интегрируемой системы до понятия частично интегрируемой. Обсуждается связь неинтегрируемости с такими фундаментальными понятиями нелинейной динамики как колмогоровская устойчивость, системы с разделенным фазовым пространством, диффузия Арнольда, паутина Заславского и др.

Феномен динамического хаоса или просто хаоса находит свое проявление в самых различных областях науки и является предметом многочисленных исследований. Хаотическая динамика тесно связана с таким тонким и сложным понятием, как интегрируемость дифференциальных уравнений. Установление того факта, что неинтегрируемость обусловлена сложным характером поведения динамических систем, явилось крупнейшим достижением. Последовательное и систематическое изложение вопросов неинтегрирумости как отдельного раздела теории вперые дал В.В. Козлов [1], эти вопросы вошли также отдельной главой в широко известный обзор [2]. В более поздней книге Козлова [3] результаты значительно дополнены. Сложилась самостоятельная часть теории гамильтоновых систем, предметом которой стали вопросы неинтегрируемости. Гамильтонов формализм представляет важнейшую часть теории динамических систем, сфера его применения продолжает расширяться, он входит существенной составной частью в целый ряд математических теорий. В данной работе делается попытка проследить в историческом развитии некоторые стороны одного фундаментального аспекта неинтегрируемости – ее связи со сложным поведением системы.

Проблема неинтегрируемости возникла на пересечении нескольких направлений исследований. Интегрирование уравнений динамики со времен Ньютона является важнейшей проблемой как для самой математики, так и для ее приложений.

Понятие об интегрировании претерпело длительную эволюцию, и огромное стимулирующее влияние здесь оказали прикладные проблемы, в первую очередь задачи, пришедшие из небесной механики. В математике XVIII – первой половины XIX веков под интегрированием понималось интегрирование в явном виде, включая сюда и интегрирование в квадратурах. При этом вопрос о самой интегрируемости не ставился, это считалось само собой разумеющимся. Задачи подразделялись на проинтегрированные и непроинтегрированные. Довольно скоро стало ясно, что во многих практически важных случаях задачу не удается свести к квадратурам. Сюда, в первую очередь, относится знаменитая проблема трех тел, которая до наших дней остается неисчерпаемым источником новых задач и новых идей. Дальнейшее развитие пошло несколькими путями. С одной стороны, усилия были направлены на разработку практических методов, когда с помощью разложения в бесконечные ряды, непрерывные дроби или численным интегрированием уравнений движения можно было получить решение с требуемой степенью точности. Вполне становится понятной позиция известного математика XVIII века И. Ламберта, полагавшего все задачи динамики в этом смысле разрешимыми [4].

Описанный подход, несмотря на его во многих практически важных случаях достаточность, оставался внутренне неудовлетворительным. Это отчетливо видно в свете развернувшейся в первой половине XIX века глубокой реформы математического анализа, заложившего новые каноны математической строгости и обоснованности [5]. Кроме того, приближенные решения не давали ответа на некоторые насущные вопросы прикладных задач, например, в небесной механике – о характере движения небесных тел на неограниченном промежутке времени. Последнее имеет непосредственное отношение к проблеме устойчивости Солнечной системы.

В русле новых тенденций в математике стала рассматриваться и проблема интегрирования. В 20–40-х годах XIX века утверждалась методология, направленная на выявление условий и границ истинности каждого утверждения. Особое значение получили теоремы существования, в частности, теоремы существования и единственности решений дифференциальных уравнений, и четкое различие необходимых и достаточных условий. Одной из форм выражения новой идейной атмосферы была постановка вопроса о неразрешимости той или иной задачи [6]. В это время Н.Х. Абелем была доказана неразрешимость в радикалах общего алгебраического уравнения пятой степени, П. Ванцелем – невозможность решения с помощью циркуля и линейки восходящих еще к античности задач об удвоении куба и трисекции угла. Сюда же примыкает и работа 1841 года Ж. Лиувилля «Новые замечания об уравнении Риккати» [7], в которой была доказана невозможность в общем случае интегрирования этого уравнения в квадратурах. Эта работа является очень примечательной и ее можно принять за отправную точку широко развернувшихся в дальнейшем исследований о неинтегрируемости тех или иных классов уравнений. К этому же времени относится и первая строгая постановка вопроса об интегрируемости. Это было сделано в 1855 году Э. Буром и Ж. Лиувиллем, связавшими интегрирование гамильтоновой системы в квадратурах с существованием достаточно большого набора ее первых интегралов [1, 8, 9], что направило по новому пути поиски точных решений. Справедливости ради надо заметить, что главные заслуги здесь принадлежат малоизвестному математику Буру, традиция же их относит одному Лиувиллю (интегрируемость по Лиувиллю), хотя результаты последнего более скромные [10].

Как едко отмечает Д.В. Аносов, это тот случай, когда имущему добавляется, а у неимущего отнимается.

В вопросе об интегрировании на протяжении XIX века прослеживаются две тенденции. С одной стороны, происходило постепенное снижение интереса к поиску методов интегрирования дифференциальных уравнений в квадратурах [6], с другой – прикладные задачи поддерживали обостренное внимание к таким методам, и главной питательной средой здесь служила все та же проблема трех тел.

Поворотным пунктом в понимании принципиального различия между интегрируемыми и неинтегрируемыми системами стали фундаментальные работы А. Пуанкаре [11–13]. В первой из них (1881–1886) объединены четыре мемуара под общим названием «О кривых, определяемых дифференциальными уравнениями» [11]. Вторую работу «О проблеме трех тел и уравнениях динамики» [12] составил мемуар, выдвинутый на конкурс на премию шведского короля Оскара II (1890). Третьей работой (1892–1899) является трехтомник «Новые методы небесной механики» [13]. В названии подчеркнуто радикальное отличие от другого фундаментального труда – пятитомной «Небесной механики» П.С. Лапласа, в которой подведен итог развития данной области до начала XIX века. У Лапласа и Пуанкаре не просто два разных подхода к одному и тому же кругу проблем, отличие носит глубинный характер. Здесь две разные философии, с одной стороны, принцип жесткого детерминизма Лапласа («демон Лапласа»), с другой – идеи о сложном поведении, неоднозначности, неопределенности. Поначалу Пуанкаре изложил не совсем явно эти идеи. Они существовали у него как бы в зародыше и развились в его более поздних работах, а главным образом, достались в наследство XX веку. В указанных трудах Пуанкаре вводит в круг идей и понятий, положивших начало целому ряду новых областей математики. Поразительное богатство наследия Пуанкаре легло в основу многих исследований нескольких поколений математиков и не исчерпано до сих пор. Со времен Ньютона, в течение двух веков продолжалось господство количественных методов, когда сложилась парадигма явных решений, точных формул, долговременного предсказания поведения системы. В противовес сложившимся представлениям Пуанкаре показал, что в подавляющем большинстве дифференциальные уравнения неинтегрируемы, интегрируемые случаи встречаются крайне редко. Произошла переоценка ценностей, указанные работы Пуанкаре положили начало новому этапу – качественным методам исследования, что значительно расширило класс изучаемых динамических систем.

Качественная теория означала переход к принципиально иной стратегии исследования. Преобладающими стали топологические и теоретико-групповые методы, проникновение вероятностного описания. Было осознано, что математические проблемы динамики связаны с качественным поведением траекторий во всем фазовом пространстве, на смену локальному подходу должно прийти глобальное рассмотрение.

Следующий значительный шаг в качественной теории был сделан Дж. Биркгофом. Под влиянием идей Пуанкаре у Биркгофа произошло смещение в определении главного объекта исследования. Им становится динамическая система – понятие, претерпевшее длительное развитие от механической системы с конечным числом степеней свободы до произвольной системы безотносительно к ее происхождению, эволюция которой однозначно определяется начальными состояниями.

Главным трудом Биркгофа в этой области является ставшая классической монография «Динамические системы» [14], вышедшая в 1927 году, в которой подведены итоги его исследований до времени издания книги. Биркгофом выдвинута программная задача исследования динамических систем – определить качественный характер всех возможных типов движений динамической системы и взаимоотношений между этими движениями. Эта грандиозная задача вряд ли может быть решена в полной общности. Первые шаги были предприняты самим Биркгофом.

Биркгоф вводит понятие транзитивной системы, явившейся предтечей доказанной им через несколько лет после выхода книги и носящей его имя эргодической теоремы. Теорема Биркгофа составила один из главных результатов, положивших начало эргодической теории – статистической теории динамических систем. Процитируем Биркгофа: «Для проблем классической динамики транзитивность означает, что любая малая частица при своем движении описывает все многообразие M состояний движения, исключая лишь нигде не плотное множество движений, а интегрируемость означает, что для какой-то частицы это не будет справедливо. ... Между самым общим транзитивным случаем и весьма специальным случаем интегрируемой до конца системы лежит бесконечное разнообразие промежуточных возможных случаев, зависящих от частных свойств дифференциальных уравнений» [14, с. 209-212] (цитировано по последнему русскому изданию). И далее: «...для некоторых задач можно ввести вспомогательные аналитические соотношения, с помощью которых мы можем удовлетворительно исследовать решения соответствующих уравнений. В этом случае система может быть названа «интегрируемой». Если, однако, мы попытаемся сформулировать точное определение интегрируемости, то оказываются возможными различные определения, каждому из которых присущ известный теоретический интерес. Рассмотрим вкратце понятие интегрируемости, не забывая при этом указания Пуанкаре, что система дифференциальных уравнений может быть только более или менее интегрируемой» [14, с. 254-255].

Наиболее просто устроены полностью интегрируемые системы, что и делает их привлекательными. При канонических преобразованиях сохраняется структура гамильтоновых уравнений. Особенно удобным для интегрирования этих уравнений оказывается тип канонических переменных «действие–угол», введенных в 1860 году французским астрономом Ш. Делоне [15]. Для систем с двумя степенями свободы О. Штауде, а затем для многомерного случая П. Штеккелем (в диссертации) было показано, что движение системы, для которой уравнение Гамильтона – Якоби допускает разделение переменных, является квазипериодическим [16–18]. В переменных действие–угол $(I - \theta)$ гамильтониан $H(I_1, I_2, \ldots, I_n)$ зависит только от новых импульсов – переменных действия $I_1, I_2, \ldots, I_n$, определяемых как

$$I_k = \oint\limits_C p_k dq_k \,,$$

где q_k, p_k – пара сопряженных координат и импульсов, интеграл берется по полному периоду движения. Угловые переменные θ_k при завершении периода будут изменяться на 2π. Например, в случае одной степени свободы уравнения движения приобретают вид

$$\dot{I} = 0, \ \dot{\theta} = \omega\,(I)$$

и легко интегрируются: $I = const$, $\theta = \omega(I)t + \alpha$, движение происходит по окружности. Для систем с двумя степенями свободы имеются две частоты ω_1 и ω_2 и движение происходит на торе. Если соотношение между частотами выражается рациональным числом, то есть

$$n_1\omega_1 + n_2\omega_2 = 0, \tag{1}$$

где n_1 и n_2 не равные одновременно нулю целые числа, то траектория на торе замыкается и движение будет периодическим. Здесь мы имеем дело с хорошо известным понятием резонанса. При иррациональном соотношении между частотами траектория никогда не замыкается, всюду плотно навиваясь на тор, и движение будет квазипериодическим.

Переменные действие–угол оказались мощным средством для решений уравнений динамики, хотя в течение нескольких десятилетий они оставались погребенными в недрах астрономической литературы и были неизвестны широкому кругу механиков и физиков. Положение изменилось с рождением квантовой теории [1, 18]. Введение переменных действие–угол в квантовую теорию является, в первую очередь, заслугой К. Шварцшильда (1916) [19]. На языке переменных действие–угол очень удобно формулировать условия квантования. Эти переменные составили основу старой квантовой теории, систематическому изложению которой посвящена классическая монография А. Зоммерфельда [20], являвшаяся наиболее читаемой среди физиков того времени.

Описанный характер движения с двумя степенями свободы остается справедливым и в многомерном случае. Но сначала приведем по поводу интегрирования небольшую выдержку из классической книги А. Уинтнера: «...динамическую систему следует называть «интегрируемой» тогда (но не только тогда), когда она может быть расщеплена с помощью «явных» преобразований координат и времени на совокупность динамических систем, каждая из которых имеет одну степень свободы» [4, с. 179]. Идеи в этом направлении восходят к У. Гамильтону и К.Г. Якоби, разработавших общий метод интегрирования уравнений динамики, основанный на введении специальных канонических координат, и к Буру и Лиувиллю. С другой стороны, условия квантования способствовали пониманию того, что в общем случае совместные уровни полного набора интегралов в инволюции гомеоморфны инвариантным торам. Развитие этих идей привело к понятию полной интегрируемости, когда в системе с n степенями свободы имеется n независимых интегралов в инволюции [1]. Напомним, что в системе имеется полный набор интегралов $F_1, F_2, \ldots, F_n$ в инволюции, если все скобки Пуассона $\{F_i, F_j\} = 0$. Важное обобщение теоремы Лиувилля принадлежит Арнольду (1963) [21]. Теорема Лиувилля – Арнольда описывает геометрию интегрируемой гамильтоновой системы с n степенями свободы. В переменных действие–угол движение будет происходить на многомерных торах, что позволяет делать качественные выводы о поведении траекторий в целом. В неинтегрируемом случае во всем фазовом пространстве не существует полного набора независимых интегралов, и траектории не ложатся на многообразия малого числа измерений [2].

Систематическому изложению современного понимания всего круга вопросов о математической структуре уравнений динамики посвящена книга Арнольда «Математические основы классической механики» 1974 года [22]. Книга Арнольда ока-

зала огромное влияние на утверждение теории гамильтоновых систем как самостоятельной области математики в рамках теории динамических систем. Так нередко случается в истории науки, когда появляется труд, сконцентрировавший полученные результаты и давший толчок к осознанию того, что сложилась и приобрела самостоятельное значение новая область. Примеров тому немало, укажем на книгу А.А. Андронова, А.А. Витта и С.Э. Хайкина «Теория колебаний» (1937) или С. Банаха «Теория линейных операторов» (1932). С появлением последней стало возможным говорить, что окончательно сформировался функциональный анализ как новый раздел математики.

Как замечает Козлов [1], каждое поколение исследователей по-своему интерпретирует существо проблемы интегрирования гамильтоновых систем. Однако общим моментом различных подходов является наличие независимых интегралов – законов сохранения. Хорошо известно, что интегралы системы находятся в тесной связи с их скрытыми алгебраическими свойствами, где на первом месте – свойства симметрии [23]. Широко известно замечание Г. Вейля, что знание свойств симметрии позволит проникнуть во внутреннее строение объекта [24]. Чем выше степень симметричности системы, тем более упорядочены ее траектории. Как выявить интегрируемость данной системы и скрытые симметрии, лежащие в основе ее интегрируемости? Для решения этой задачи не существует систематического подхода. Установление интегрируемости, как и ее антипода – неинтегрируемости, для конкретной системы часто оказывается нетривиальной задачей. Выяснение условий нарушения симметрии объекта или его других скрытых алгебраических свойств дает возможность прояснить особенности перехода к сложной динамике.

Один из основных подходов при приближенном изучении неинтегрируемых систем – предположение малых отклонений от интегрируемых систем. На этом пути усилиями крупнейших математиков XVIII–XIX вв. были развиты многочисленные методы, составившие различные формы теории возмущений. Задача о влиянии возмущений на полностью интегрируемую гамильтонову систему представлялась столь важной, что Пуанкаре отнес ее к «основной проблеме» динамики [13, т. 1]. Задача оказалась труднейшей и не поддавалась многолетним усилиям до появления работ А.Н. Колмогорова [25, 26], В.И. Арнольда [27], Ю. Мозера [28], которые составили основу теории КАМ. Сам термин «теория КАМ» был предложен Б.В. Чириковым [29].

Случай функциональной независимости частот относят к невырожденным случаям. Условие невырожденности имеет вид

$$\det\left|\frac{\partial\omega_i}{\partial I_j}\right| = \det\left|\frac{\partial^2 H_0}{\partial I_i \partial I_j}\right| \neq 0, \tag{2}$$

где H_0 – невозмущенный гамильтониан, I_i – первые интегралы движения. Главный результат теории КАМ заключается в том, что при достаточно малом возмущении и невырожденности невозмущенной гамильтоновой системы большинство инвариантных торов не разрушается, а лишь немного деформируется, оставаясь топологически торами. В невырожденных системах инвариантные торы $I_i = \mathrm{const}$ определены однозначно, независимо от выбора координат действие–угол, в построении которых возможен некоторый произвол [22]. Нерезонансные торы образуют нигде не плотное замкнутое множество с положительной мерой.

Сохранение нерезонансных торов с квазипериодическим движением на них получило название колмогоровской устойчивости [30]. Характерной особенностью рядов теории возмущений является появление в их членах так называемых малых знаменателей, связанных с соизмеримостью частот взаимодействующих явлений. В этом случае

$$\sum_i n_i \omega_i = 0. \tag{3}$$

Вследствие резонанса ряды теории возмущений оказываются расходящимися. В качестве хорошо известного из астрономической литературы примера можно указать малый знаменатель $2\omega_1 - 5\omega_2 \approx 0$, где $\omega_1 = 299".1$ и $\omega_2 = 120".5$ – частоты движения Юпитера и Сатурна [31]. Теория КАМ разрешила главную трудность «основной проблемы» динамики – появление малых знаменателей. Согласно старой работе Э. Ферми [32] любая нелинейность в системах с достаточно большим числом степеней свободы приводит к полному разрушению интегралов движения и система становится неинтегрируемой. Хотя доказательство Ферми было неубедительным и вызвало критику со стороны математиков (см. [33]), весьма распространенным было убеждение в универсальности поведения нелинейных систем, когда под действием возмущения происходит разрушение квазипериодического движения на торах и требуется переход к статистическому описанию. Вопреки этим представлениям теория КАМ установила, что при наложении малого возмущения разрушению подвергнутся лишь резонансные торы, мера которых мала. Один из главных результатов современной нелинейной динамики состоит в том, что реальные системы не являются ни полностью упорядоченными, ни полностью хаотичными, имеет место сосуществование порядка и хаоса. В утверждении такого взгляда к числу основных истоков относится теория КАМ. Колмогоровскую устойчивость можно отнести к случаю слабой неинтегрируемости.

Еще Биркгоф изучал поведение гамильтоновых систем в окрестности положений равновесия с формальной точки зрения, то есть не заботясь о сходимости получающихся степенных рядов [14]. Он предложил формальное каноническое преобразование (нормализация Биркгофа) для гамильтониана. Если преобразование к нормальной форме выражается сходящимися рядами, то соответствующие уравнения полностью интегрируются. Нормализацию Биркгофа можно распространить и на случай периодических траекторий. В общем случае ряды, вводимые при нормализации Биркгофа, оказываются расходящимися [34].

Существует еще один результат, в течение нескольких десятилетий считавшийся формальным, и его важность выяснилась лишь в 1960-е годы. В работах [34, 35] Э. Уиттекер ввел понятие *дополнительных интегралов*. Установленная Пуанкаре неинтегрируемость динамических систем в общем случае относится к существованию однозначного (относительно некоторого параметра) интеграла. Тем не менее могут существовать интегралы для отдельных значений параметров или для отдельных значений начальных условий. Однако ряды для таких дополнительных интегралов в общем случае не могут быть равномерно сходящимися.

Работы Г. Контопулоса [36, 37] способствовали выяснению новых черт дополнительных интегралов. Он показал с помощью вычислительных экспериментов, что эти интегралы представляют не просто формальный результат, а остаются постоянными в течение очень большого промежутка времени, всего времени численного

интегрирования. К этому же кругу идей относится работа М. Хенона и К. Хейлеса [38], которая по отчетливости полученных результатов может считаться образцовой. В этой работе рассмотрена система из двух частиц с гамильтонианом

$$H = \frac{1}{2}(p_x^2 + p_y^2 + x^2 + y^2) + x^2 y - \frac{1}{3}y^3$$

и были изучены движения на трехмерном многообразии $H = E$, $E > 0$. На нем была выделена двумерная поверхность (p_y, y) при $x = 0$ и отмечались точки, в которых частные решения пересекали эту поверхность. При малых значениях энергии $(E = 1/12)$ эти точки образовывали семейство замкнутых кривых. Здесь эти кривые не воспроизводятся, так как они широко известны и вошли во многие руководства по нелинейной динамике (см., например, [39]). При $E = 1/8$ картина существенным образом изменилась, часть кривых начала распадаться, но наряду с распавшимися кривыми имелась область островков устойчивости. С дальнейшим увеличением E область устойчивости все уменьшалась и при $E = 1/6$ все гладкие кривые практически исчезли. Описанная картина была позднее интерпретирована как стохастическое разрушение интегралов движения, когда при разных значениях параметра E движение изменялось от преимущественно регулярного до преимущественно хаотического [40]. Эта работа Хенона и Хейлеса [38], первоначально оставшаяся непонятой, оказала затем большое влияние на формирование представлений нелинейной динамики.

Обратимся теперь к одной из последних работ Ферми, выполненной совместно с Дж. Пастом и С. Уламом [41]. Побудительным мотивом послужил давний интерес Ферми к нелинейным проблемам и возможность их изучения с помощью недавно созданных ЭВМ. В указанной работе изучался вопрос о распределении энергии в цепочке из 64 нелинейных осцилляторов, нелинейность вводилась как возмущение исходной линейной задачи. Рассматриваемая система являлась неинтегрируемой и не допускала аналитических решений, что и побудило ее численное исследование. Общепринятой была точка зрения, что в системах с большим числом степеней свободы действуют законы статистической механики, и ожидалось равномерное распределение энергии между всеми модами. Вопреки ожидаемой термолизации система демонстрировала устойчивый квазипериодический характер движения без заметных признаков хаотичности. Возникший парадокс получил название проблемы Ферми – Пасты – Улама (ФПУ-проблема).

ФПУ-проблема явилась одним из поворотных пунктов в развитии нелинейной динамики. В 2005 году как раз исполнилось 50 лет со дня публикации работы Ферми, Пасты и Улама [41] (май 1955) и этому событию целиком посвящен выпуск журнала «Chaos» [42]. В ФПУ-проблеме сошлись, как в фокусе, несколько важнейших аспектов. Во-первых, она привела к созданию нового метода интегрирования нелинейных эволюционных уравнений – обратного преобразования рассеяния и теории солитонов (см., например, [43]). Сформировался важнейший раздел современной математической физики. Во-вторых, ФПУ-проблема послужила одним из исходных пунктов, положивших начало новому методу научного исследования – вычислительного эксперимента наряду с теорией и натурным (лабораторным) экспериментом. И, наконец, ФПУ-проблема явилась одним из истоков исследований, которые привели к открытию гамильтонова хаоса.

Вычислительные эксперименты Ферми, Пасты и Улама [41] были продолжены в работах Чирикова с сотрудниками [30, 44] и Заславского и Сагдеева [45]. Исследования новосибирской школы, частью которых явились указанные работы, положили начало новому этапу в развитии нелинейной динамики, приведшему к современным представлениям о связи хаоса и неинтегрируемости, о соотношении регулярности и нерегулярности в гамильтоновых системах. Эти исследования получили дальнейшее развитие в Институте физики (Красноярск), Институте космических исследований (ИКИ, Москва), Институте им. Р. Куранта (Нью-Йорк) и других научных центрах.

Вернемся к указанным работам Чирикова и его сотрудников [30, 44]. В основу рассмотрения был положен критерий перекрытия нелинейных резонансов. Согласно их результатам возникший парадокс находит естественное объяснение в теории КАМ: при достаточно малом возмущении в нелинейной системе сохраняются колмогоровские торы с квазипериодическим характером движения на них. Колмогоровская устойчивость существует до некоторого критического возмущения, при котором начинается проявление хаотичности (или, по терминологии [30, 44], стохастичности). Было показано, что при возбуждении низших мод хаотическое поведение возможно лишь для очень больших нелинейных возбуждений. Это дало объяснение ФПУ-проблемы, поскольку в [41] в качестве начального условия было выбрано возбуждение первой моды. Наоборот, для высших мод и большого числа осцилляторов хаотичность начинается при очень малой нелинейности.

Заславский и Сагдеев провели рассмотрение с помощью отображений, что является более общим методом, чем метод перекрытия резонансов [40, 45]. Такой подход позволяет исследовать не только ФПУ-проблему, но и тонкие эффекты в различных нелинейных волновых полях.

Выше отмечалось, что нерезонансные торы под действием возмущения лишь немного деформируются, оставаясь топологически торами. Множество резонансных торов хоть и имеет малую меру, но является всюду плотным. Другими словами, резонансные торы подходят к нерезонансным сколь угодно близко и в реальной системе нет возможности различить эти два класса торов. Однако системы с двумя степенями свободы при достаточно малом возмущении являются выделенными. В этом случае определяющим моментом становится особая топология фазового пространства, и связано это с тем, что размерность энергетической поверхности на единицу больше размерности тора, поэтому резонансные торы лежат между инвариантными нерезонансными торами, оказываясь вложенными друг в друга. Это приводит к тому, что переход между двумя резонансными торами становится возможным только через нерезонансные торы. Поскольку нерезонансные торы сохраняются, траектории из разрушенного резонансного тора оказываются зажатыми между системами нерезонансных торов, что обеспечивает колмогоровскую устойчивость [29].

В многомерных системах ситуация радикальным образом меняется. При числе степеней свободы $n > 2$ n-мерные инвариантные торы уже не делят гиперповерхность постоянной энергии размерности $2n - 1$ на несвязанные куски. В этом случае становится возможным объединение стохастических слоев в связанную систему на энергетической поверхности. По образовавшейся таким образом всюду плотной паутине возможно движение системы по всей энергетической поверхности, оставаясь внутри стохастического слоя. Эта гипотеза была высказана Арнольдом, который привел пример дифференциального уравнения, описывающего движение вдоль

стохастического слоя [46, 47]. Такая неустойчивость многомерных систем является универсальной, поскольку она присутствует при любых сколь угодно малых возмущениях, а не только при достаточно сильных, как в случае стохастической неустойчивости. Для нее Чириков предложил термин «диффузия Арнольда» [29], ставший общепринятым. Диффузия Арнольда приводит к неустранимой области хаоса в фазовом пространстве.

Чириковым были получены грубые оценки скорости диффузии Арнольда для широкого класса нелинейных гамильтоновых систем [29]. Строгие оценки скорости диффузии сверху провел Н.Н. Нехорошев [48, 49]. Для системы с гамильтонианом

$$H = H_0(I) + \varepsilon H_1(I, \theta)$$

при всех начальных условиях $I(t)$ будет находиться вблизи $I(0)$ в течение экспоненциально большого промежутка времени $[0, T]$, то есть

$$\|I(t) - I(0)\| < \varepsilon^b$$

при всех $t \in [0, T]$, где

$$T = \exp\left[\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^a\right],$$

a, $b > 0$. Из-за экспоненциально малой величины эффекта можно говорить о «почти интегралах движения».

Поначалу диффузия Арнольда выглядела совершенно странным и экзотическим явлением, и было непонятно, имеет ли она какое-либо отношение к физической реальности. Доказательство присутствия диффузии Арнольда в физических системах представляет собой крайне сложную задачу. Систематическое изучение этого необычного явления было осуществлено Чириковым с сотрудниками [29, 50–52]. Было отмечено следующее важное обстоятельство. В реальных системах из-за случайных внешних возмущений при любых начальных условиях имеет место обычная диффузия. Она приводит систему к ближайшему стохастическому слою, после чего вступает в игру более быстрая диффузия Арнольда вдоль слоя. Таким образом, комбинация двух явлений может привести к существенному усилению эффекта – качественно новой особенности хаотического поведения.

В настоящее время можно утверждать, что диффузия Арнольда – реально присутствующее явление в физических системах, хотя при математически строгом рассмотрении остается пока не решенным ряд вопросов [53]. Продолжается расширение области ее проявлений. Чириков говорит о диффузии Арнольда в экспериментах по удержанию электронов в магнитной ловушке, расширении пучка протонов в накопителях ускорителей, гибели астероидов, частоты вращения которых попадают в резонанс с Юпитером. Еще сам Арнольд отмечал возможность диффузии в проблеме трех тел [46]. Это предположение подтвердилось в недавних исследованиях [54, 55]. Кроме того, диффузия Арнольда была обнаружена еще в одной старой классической задаче небесной механики – задаче Д'Аламбера о вращении вокруг неподвижной звезды сплющенной у полюсов планеты [56].

Пуанкаре показал, что при общих условиях гамильтонова система не имеет аналитических интегралов движения, которые можно представить в виде сходящихся рядов по степеням малого параметра, кроме аддитивных интегралов энергии, импульса и момента [13]. Отсюда вытекает расходимость рядов различных вариантов

теории возмущений. Пуанкаре обнаружил также явления качественного характера в поведении фазовых траекторий, препятствующие появлению новых интегралов. Среди них – рождение изолированных периодических движений и расщепление асимптотических поверхностей.

Напомним некоторые важнейшие понятия, тесно связанные с неинтегрируемостью [57]. Каждый добавочный интеграл приводит к существенным ограничениям в поведении траекторий. Из этого вытекает, что сложный характер движения возможен лишь в неинтегрируемых системах, неинтегрируемые возмущения разрушают интегралы движения. Еще сам Пуанкаре при устранении ошибки в своем мемуаре по проблеме трех тел отметил, что области неустойчивости могут находиться в окрестности сепаратрисы [12, 58]. Неподвижная гиперболическая точка p характеризуется устойчивым $\mathrm{W}^{\mathrm{s}}(p)$ и неустойчивым $\mathrm{W}^{\mathrm{u}}(p)$ инвариантными многообразиями, через точки которых проходят фазовые траектории, стремящиеся к p при $t \to \infty$ и $t \to -\infty$. В интегрируемых системах эти асимптотические поверхности совпадают, мы имеем дело с вырожденным случаем. Если инвариантные многообразия одномерны, их называют сепаратрисами. Возмущение снимает вырождение, приводя к расщеплению асимтотических поверхностей. Трансверсальные пересечения (пересекающиеся без касания) устойчивого и неустойчивого многообразий приводят к образованию гомоклинической структуры в близлежащей области фазового пространства, где движение носит сложный, хаотический характер. В окрестности расщепленных асимтотических поверхностей, как установил Пуанкаре, ряды теории возмущений расходятся, система является неинтегрируемой [1, 57].

Впервые детальные исследования окрестности сепаратрисы были проведены В.К. Мельниковым [58, 59] (см. также работу Арнольда [47]), и метод Пуанкаре – Арнольда – Мельникова стал стандартным инструментом для исследования расщепления сепаратрисы [57]. Систематическому изучению стохастической неустойчивости в окрестности сепаратрисы посвящены многочисленные работы физиков новосибирской школы (результаты и подробная библиография приведены в [40, 52]). Надо отметить отличия как в методах изучения, так и в языке у математиков и физиков. Указанные математические работы явились составной частью результатов деятельности отечественной школы динамических систем, переживавшей в 1950–1970-е годы период расцвета, и добившейся выдающихся достижений. Работы физиков исходили из двух строгих математических результатов – теории КАМ и эргодической теории, полукачественных физических подходов и вычислительных экспериментов. Первая оценка ширины области разрушения сепаратрисы, получившей название «стохастический слой», для специальной динамической системы была сделана в работе Г.М. Заславского, Р.З. Сагдеева и Н.Н. Филоненко [60]. Стохастический слой представляет минимальную область фазового пространства, где зарождается хаотическое движение, что имеет существенное значение для различных физических приложений. Приведем один результат, полученный из физических соображений, очень удобный для проведения оценок. Для оценки границы между двумя качественно различающимися видами движения – регулярным и хаотическим из параметров системы в ряде случаев можно составить безразмерную величину K. При $K < 1$ движение системы устойчиво, регулярно, а при $K \geq 1$ движение приобретает неустойчивый, хаотический характер. Последнее неравенство принимается в качестве критерия перехода к хаотическому движению.

Еще со времен классических исследований А. Пуанкаре и А.М. Ляпунова значительное внимание уделялось критическим элементам – положениям равновесия, периодическим траекториям, сепаратрисам, поскольку в них содержится значительная информация о динамической системе. В последующем упор стали делать на выяснение структуры семейства интегральных кривых, заполняющих некоторую область, то есть на проведение исследований динамических систем в целом. Для интегрируемых гамильтоновых систем с n степенями свободы периодические решения образуют $(n-1)$-мерные семейства. Доказательство неинтегрируемости (как правило) гамильтоновых систем основано на том факте, что в общем случае периодические решения на поверхности фиксированной энергии изолированы [61]. Заметим, что даже нахождение периодических решений, представляющих простейший объект теории динамических систем после положений равновесия, часто является нетривиальной задачей.

В данном круге проблем выступают на первый план топологические соображения. Рассмотрим систему с двумя степенями свободы. Ее пространством положений является поверхность M, представляющая собой сферу с некоторым числом приклеенных ручек к. Это число к – топологический инвариант поверхности, называемый ее родом. Опуская детали, выделим основной результат: при роде поверхности к ≥ 2, то есть, когда M не гомеоморфна сфере S^2 или тору T^2, система неинтегрируема [1, 3]. При к ≥ 2 замкнутая аналитическая поверхность не может быть конфигурационным пространством аналитической интегрируемой системы. В этом случае имеется большое число неустойчивых периодических траекторий, на которых первые интегралы зависимы. По словам В.В. Козлова, этот результат не был замечен классиками из-за их пристрастия к локальному рассмотрению динамических систем [3].

Приведенные результаты имеют интересные и многочисленные математические и физические интерпретации [62, гл. 19]. Мерой средней скорости экспоненциального разбегания соседних траекторий служат показатели Ляпунова. Системы с хаотической динамикой характеризуются положительным показателем Ляпунова и перемешивающим характером движения. Однако существуют системы с нулевым показателем Ляпунова, но в то же время со случайным движением. В таких системах происходит слабое перемешивание в фазовом пространстве. Они получили название псевдоинтегрируемых систем, а само явление – псевдохаоса. Псевдохаос демонстрируют различные биллиардные системы, он наблюдается при распространении звука в неоднородной среде, в поведении силовых линий магнитного поля в плазменных установках и др.

Вернемся к глубокому замечанию Пуанкаре, что системы могут быть только более или менее интегрируемыми. При величине параметра $K \gg 1$ система становится локально неустойчивой почти всюду [29]. Здесь надо сделать оговорку, что под «почти всюду» понимается не исключение областей нулевой меры, как принято в эргодической теории, а относится это к областям малой, но конечной меры. Такое незначительное, на первый взгляд, различие приводит к очень важным последствиям. Эргодическая теория дает статистическое описание динамических систем, когда сложное поведение, хаотичность, присутствует, так сказать, в чистом виде. Реальные системы являются неоднородными, в них всегда имеются области устойчивого движения малой меры. Такие системы называются системами с разделенным фазо-

вым пространством [29, 63]. Разделенное фазовое пространство, другими словами, сосуществование областей с регулярным и хаотическим движением представляет одну из самых удивительных особенностей хаоса и одновременно является главным препятствием для математически строгого описания. Последнее, казалось бы, можно осуществить выделением областей с регулярным движением, что относится к случаю интегрируемых систем, а для нерегулярного движения использовать статистическое описание. Однако простое исключение из области неустойчивости «вкраплений» с регулярным движением не приводит к упрощению ситуации, поскольку эргодическая компонента заполняет область фазового пространства очень сложной формы и, вероятно, топологии. Я.Г. Синай высказал гипотезу, что устойчивые области фазового пространства образуют всюду плотное множество, пронизывающие эргодическую компоненту [64].

Итак, простая картина движения, когда отдельно существуют области регулярности и хаоса с более или менее четко выраженной границей, является сильно идеализированным представлением. Часть фазового пространства с хаотической динамикой получила название стохастического моря. В реальных системах присутствует бесконечное число эллиптических точек, окруженных островками инвариантных кривых. Наличие этих островков влияет на близлежащие траектории, что приводит к изменению структуры фазового пространства. Особую проблему составляет граничная область вблизи островков. Дело в том, что вокруг выбранного островка существует цепочка вторичных островков, которые, в свою очередь, окружены цепочками следующего уровня и т.д. Таким образом, имеется сложная самоподобная иерархическая структура фрактального характера. Если вспомнить, что островок в стохастическом море соответствует области начальных условий, при которых движение является регулярным, то становится ясной условность понятия интегрируемости в системах с разделенным фазовым пространством. Эта условность представляет отражение того факта, что регулярная и хаотическая компонента переплетены, обладают очень сложной топологией, которая трансформируется при изменении параметров системы.

Выработка представлений о статистических системах и статистическом описании основывалась на наличии систем с очень большим числом степеней свободы. Простейшими моделями статистических систем являются модели газов, движение частиц которых является сложным, хаотическим. В основе методов статистического описания лежит положение об однородности, однотипности характера движения. Сложная топология фазового пространства реальных систем вследствие сосуществования областей хаоса и регулярности делает затруднительным непосредственное использование имеющихся методов статистического описания. В динамических системах с разделенным фазовым пространством мы сталкиваемся с другим, более высоким уровнем сложности, чем в чисто статистических системах.

Указанные трудности делают неизбежным индуктивный подход, когда во главу угла ставятся обобщения, аналогии, полукачественные физические соображения. Огромную роль при этом играет вычислительный эксперимент, который служит не только для получения конкретных численных результатов, а является эвристическим средством для выяснения основных черт интересующего явления. Если же подходить с позиций установленных канонов математического анализа, вычислительный эксперимент при всех своих достоинствах остается лишь предварительным

этапом исследования, поскольку его результаты необходимо интерпретировать методами строгой математики. В качестве одного из немногих таких примеров можно привести аттрактор Лоренца [65, 66]. В этих работах был проведен расчет на ЭВМ основных траекторий, затем были применены методы теории бифуркаций и воссоздана картина эволюции структуры фазового пространства.

Во многих задачах физики и механики нарушается условие невырожденности (2) и теория КАМ становится неприменимой [31]. Такая ситуация имеет место в весьма общем случае собственного вырождения, когда движение невозмущенной системы описывается меньшим числом частот n_0, чем число степеней свободы n. Например, к случаю собственного вырождения относится задача о движении заряженной частицы в сильном магнитном поле, а также многие задачи небесной механики. Для последних роль невозмущенной системы играет задача двух тел ($n_0 = 1$, $n = 3$) и определитель

$$\det \left| \frac{\partial \omega_i}{\partial p_j} \right| = \left| \frac{\partial^2 H_0}{\partial p_i \partial p_j} \right| \equiv 0.$$

Арнольд провел важное обобщение теории КАМ на случай собственного вырождения [67–69]. Он показал, что главный результат теории КАМ остается справедливым: при действии малых возмущений на интегрируемую гамильтонову систему для большинства начальных условий движение сохраняет квазипериодический характер на инвариантных торах.

Отказ от условия невырожденности (2) не только расширяет класс динамических систем, доступных для анализа. Рассмотрение в ряде физических задач вырожденных систем или систем, близких к вырождению, привело к открытию совершенно новых явлений и к существенному расширению представлений о зарождении хаоса и неинтегрируемости в гамильтоновой динамике.

Указанное направление развилось из нелинейных задач плазменной физики и главные заслуги принадлежат Заславскому с сотрудниками. Одной из таких задач, очень важной для физических приложений, была проблема разрушения магнитных поверхностей, которые соответствуют инвариантным торам [60]. Разрушение происходит под действием возмущения, что приводит к образованию областей фазового пространства с хаотической динамикой. Эти области очень малы, однако при выполнении некоторых общих условий относительно размерности системы области хаоса неустранимы. Случай таких областей малой меры получил название слабого хаоса [70]. Как бы ни были малы области хаоса, их наличие означает принципиальную неинтегрируемость системы. Слабый хаос может реализоваться в виде стохастических слоев или в виде стохастической паутины. Из теории КАМ следует существование стохастической паутины при числе степеней свободы $n > 2$ (диффузия Арнольда). Для вырожденных систем положение существенным образом меняется [71–73]. Сам механизм образования стохастической паутины в главных чертах такой же, как и в невырожденном случае. С ростом возмущения увеличивается ширина стохастического слоя и при перекрытии щелей между сепаратрисами стохастические слои соединяются, что приводит к образованию стохастической паутины. Но в вырожденных системах стохастическая паутина или, как она часто именуется в зарубежной литературе, паутина Заславского существует уже при меньшей размерности, $n = 1.5$. Другое отличие состоит в скорости диффузии, которая вдоль каналов значительно превосходит экспоненциально малую скорость диффузии Арнольда. Указан-

ные отличия очень важны как для многочисленных приложений в физике плазмы, в физике ускорителей, в астрофизике и др., так и в принципиальном отношении. Здесь мы как раз сталкиваемся со случаем, где отчетливо видна справедливость замечания Пуанкаре об интегрируемости в большей или меньшей степени.

Рассмотрим подробнее работу [72], посвященную важной задаче плазменной физики – взаимодействию частицы с волновым пакетом в поперечном магнитном поле. Уравнение движения имеет вид

$$\ddot{x} + \omega_H^2 x = -\frac{e}{m} \sum_k E_k \sin(kx - \omega_k t). \tag{4}$$

Невозмущенная часть уравнения (4) является линейной, условие невырожденности (2) оказывается невыполненным и теория КАМ непосредственно неприменима. При рациональных соотношениях между частотами ω_k и ω_H фазовая плоскость $(x, \dot{x})$ покрывается стохастической паутиной, внутри ячеек которой движение регулярное. Хаотическое движение рождает на фазовой плоскости дальний порядок.

Обратимся еще к одной особенности паутины Заславского. В ряде случаев покрытие ею фазовой плоскости имеет замечательно симметричную форму, что характеризует неожиданную связь между совершенно разнородными явлениями, когда хаос (а следовательно, неинтегрируемость) формирует упорядоченность. На рис. 1, 2 приведены некоторые структуры, образованные паутиной Заславского. Сразу же отметим наличие запрещенной в кристаллах симметрии 5-го порядка, здесь проглядывается явное сходство со структурами квазикристаллического типа. В 1984 году Д. Шехтманом с сотрудниками [74] в быстро охлаждаемых образцах алюминиево-марганцевого сплава было обнаружено образование структур, имеющих икосаэдрическую группу симметрии. Они содержат оси симметрии 5-го порядка, что несовместимо с трансляционной инвариантностью кристаллов. В отличие от жидкости и аморфных тел, в квазикристаллах присутствует дальний порядок. Последнее для сто-

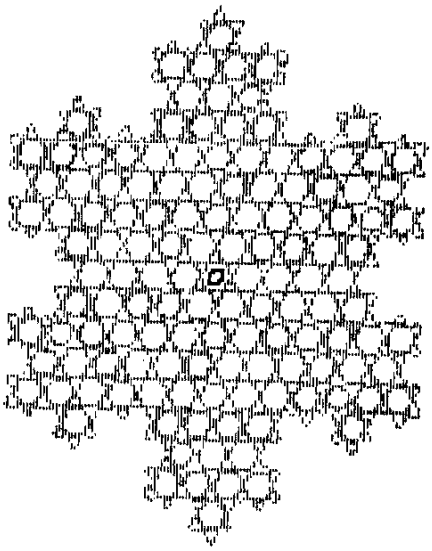


Рис. 1.

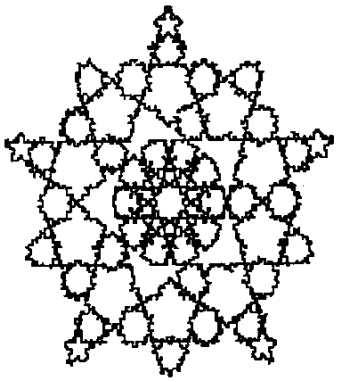


Рис. 2.

хастической паутины, покрывающей фазовую плоскость, находит свое выражение в глобальном характере хаоса. Случайные блуждания образуют фигуры не только 5-го, но также 7 и 8-го порядков. Характерный размер структуры определяет область существования инвариантных торов. Появление динамических структур обусловлено наличием особых точек и особых траекторий в фазовом пространстве, что своеобразным путем проявляется посредством случайных блужданий.

Образование правильных структур хаотическим движением демонстрирует типичное для нелинейной динамики сосуществование порядка и хаоса. Только форма сосуществования в данном случае является довольно неожиданной. Ведь привычным являлась связь интегрируемости, выражающей регулярный характер движения, со свойствами симметрии. Теперь же с симметрией, регулярностью связано противоположное свойство динамических систем – неинтегрируемость, которая ассоциируется, наоборот, со сложностью, нерегулярностью. Связи между различными аспектами динамических систем, такими как интегрируемость и неинтегрируемость, упорядоченность и хаос, являются более глубокими и богатыми, чем это представлялось. Сопроводим изложенное словами Чирикова, которыми заканчивается одна из его работ: «Мы бесконечно благодарны Природе за неисчерпаемое разнообразие ее простейших проявлений» [75, с. 425].

Проявления симметрии на этом не заканчиваются. Она предстает в новой форме на границах фигур паутины. Эти границы имеют самоподобную фрактальную структуру и чем точнее мы хотим определить форму границы, тем более сложная структура будет открываться. Симметрия оказывается приближенной, поэтому правильнее говорить о квазисимметрии. Видимо, именно квазисимметрия является в природе правилом, а полная симметрия, скорее, исключением.

Обратимся к другой стороне проблемы интегрируемости. Результаты своих исследований по качественной теории дифференциальных уравнений Пуанкаре предваряет словами: «...в громадном большинстве случаев, с которыми нам приходится иметь дело, эти уравнения не могут быть проинтегрированы с помощью уже известных нам функций, например, с помощью функций, определяемых квадратурами. И если бы мы захотели ограничиться только теми случаями, которые можно изучить при помощи определенных или неопределенных интегралов, то область наших исследований оказалась бы чрезвычайно суженной, и огромное большинство вопросов, встречающихся в приложениях, осталось бы нерешенным. Необходимо, следовательно, изучать функции, определяемые дифференциальными уравнениями, сами по себе, не пытаясь сводить их к более простым функциям, так же как это было сделано по отношению к алгебраическим функциям, которые сначала пытались свести к радикалам, а теперь изучают непосредственно» [11, с. 11]. Другими словами, без интегрирования, лишь по виду самого уравнения нужно построить картину расположения кривых, удовлетворяющих этому уравнению. Здесь фактически Пуанкаре сформулировал одну из программ изучения динамических систем.

Указанная программа допускает весьма содержательное обобщение, которое можно сформулировать следующим образом: по виду самого уравнения попытаться решить вопрос об его интегрируемости. В такой постановке задача восходит к работам С.В. Ковалевской и П. Пенлеве [76, 10] и связана с аналитической структурой уравнений. Говоря о Ковалевской, мы имеем в виду ее классическую работу о движении тяжелого волчка относительно неподвижной точки. Ее подход ведет в комплекс-

ную область для выяснения вопроса о том, в каких случаях все решения являются мероморфными функциями времени. Напомним, что под мероморфной функцией понимается аналитическая функция комплексного переменного, не имеющая других конечных особых точек, кроме полюсов. Ковалевская, видимо, основывалась на более ранних исследованиях И. Фукса по дифференциальным уравнениям первого порядка, который тоже использовал технику комплексного переменного. Такое обращение в комплексную область выглядит вполне закономерным, если вспомнить, что и Фукс, и Ковалевская были учениками К. Вейерштрасса, являющегося одним из главных творцов теории аналитических функций.

Для уравнений движения волчка (уравнений Эйлера) издавна были известны три интеграла, и вопрос об интегрировании сводился к отысканию четвертого интеграла. Для линейных обыкновенных дифференциальных уравнений особенности определяются коэффициентами уравнений, и они локализованы, то есть находятся в фиксированных точках комплексной плоскости. Для нелинейных уравнений положение меняется, особенности уже могут быть подвижными и их локализация определяется начальными условиями. Ковалевская изучила условия, при которых единственной подвижной особенностью решений в комплексной плоскости будут полюсы, четвертый интеграл получается уже как побочный результат. Она показала, что уравнения Эйлера имеют недостающий интеграл движения лишь при четырех комбинациях параметров, три из которых были получены ранее, и теперь добавилась еще одна, получившая название «случай Ковалевской». Заметим, что общее утверждение о связи подвижных полюсов и интегрируемости, на котором основан результат Ковалевской, остается недоказанным. Можно вспомнить многократно подтверждавшееся глубокое замечание Ж. Адамара, что «наиболее короткий и наилучший путь между двумя истинами в действительной области часто проходит через мнимую область» [77, с. 115].

Следующий шаг был сделан Пенлеве и его учениками (подробности можно найти в [76]). Они проанализировали класс обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка, не имеющих других подвижных особенностей кроме полюсов. Были рассмотрены уравнения типа

$$\frac{d^2y}{dx^2} = F(\frac{dy}{dx}, y, x), \tag{5}$$

где F – аналитическая по x и рациональная по y и $\frac{dy}{dx}$ функция. Пенлеве обнаружил 50 типов уравнений с желаемыми аналитическими свойствами. Это аналитическое свойство называют свойством Пенлеве, и оно является критерием интегрируемости. Из указанных уравнений 44 типа могут быть проинтегрированы, и решение выражается через известные функции (включая эллиптические функции). Оставшиеся шесть типов, называемые уравнениями Пенлеве, имеют трансцендентные мероморфные решения.

Применение идеи Ковалевской к гамильтоновым уравнениям приводит к еще одному препятствию их интегрируемости [1, 3]. Было замечено, что в большинстве проинтегрированных случаев известные первые интегралы продолжаются в комплексную область до голоморфных или мероморфных функций. Ветвление решений в общем случае препятствует появлению новых однозначных первых инте-

гралов. Еще В.В. Голубев предложил расширение задачи Пенлеве [78]: выяснение связи между ветвлением решений как функций комплексного времени и наличием однозначных первых интегралов. Значительный вклад в решение задачи Пенлеве – Голубева внесли В.В. Козлов и С.Л. Зиглин [79–81], показавшие, что при определенных условиях общего характера эта задача имеет положительное решение.

Глобальная интегрируемость гамильтоновых систем в открытом подмножестве фазового пространства не является типичной ситуацией. Когда гамильтонова система зависит от параметра, в общем случае может оказаться, что интегрируемость существует для изолированных значений параметра.

Как видим, понятие интегрируемости имеет очень сложный, многоплановый и неоднозначный характер. В этом отражается сложность поведения динамических систем, богатство их связей. Время простого описания прошло. Новый этап в развитии знаний потребовал принципиально новых взглядов, нового языка, новой системы понятий. Неинтегрируемость вошла составной, неотъемлемой частью в один из важнейших разделов современной математики и, в более широком контексте, нелинейной динамики.

В процессе работы я пользовался советами и консультациями Г.М. Заславского (Институт им. Р. Куранта Нью-Йоркского университета) и А.И. Нейштадта (ИКИ РАН). Они внимательно ознакомились с первоначальным вариантом и сделали ряд конструктивных замечаний. За все им я искренне благодарен.

Библиографический список

1. *Козлов В.В.* Интегрируемость и неинтегрируемость в гамильтоновой механике // Успехи мат. наук. 1983. Т. 38, вып. 1. С. 3.
2. *Арнольд В.И., Козлов В.В., Нейштадт А.И.* Математические аспекты классической и небесной механики. М.: ВИНИТИ, 1985.
3. *Козлов В.В.* Симметрия, топология и резонансы в гамильтоновой механике. Ижевск: Изд-во Удмурт. ун-та, 1995.
4. *Уинтнер А. А.* Аналитические основы небесной механики. М.: Наука, 1967.
5. *Молодший В.Н.* О. Коши и революция в математическом анализе первой четверти XIX века // Истор.-матем. исслед. 1978. Вып. 23. С. 32.
6. *Демидов С., Петрова С.С., Симонов Н.Н.* Обыкновенные дифференциальные уравнения // Математика XIX в. М.: Наука, 1987. С. 80.
7. *Liouville J.* Remarques nouvelles sur l'equation de Riccati // J.Math. Pures et Appl. 1841. P. 1.
8. *Bour J.* Sur l'integration des équations differentielles de la Mécanique Analytic // J.Math. Pure et Appl. 1855. Vol. 20. P. 185.
9. *Liouville J.* Note à l'occasion du memoire précident de M. Edmond Bour // Ibid. P. 201.
10. *Аносов Д.В.* О развитии теории динамических систем за последнюю четверть века // Студенческие чтения МК НМУ. Вып. 1. М.: МЦНМО, 2000. С. 74.
11. *Пуанкаре А.* О кривых, определяемых дифференциальными уравнениями. М.-Л.: ОГИЗ, 1947.
12. *Poincaré H.* Sur le problème des trois corps et les équations de la Dynamique // Acta Math. 1890. Vol. 13. P. 1.

13. *Пуанкаре А.* Новые методы небесной механики // Избр. труды: В 3 т. М.: Наука, 1971, т. 1; 1972, т. 2.
14. *Биркгоф Д.* Динамические системы. Ижевск: РХД, 1999.
15. *Delauney C.E.* Theorie du Mouvement de la Lune. Paris, 1860.
16. *Staude O.* Über eine Gattung doppelt reel periodischer Funktionen zweier Varanderlicher // Math. Ann. 1887. Bol. 29. S. 468.
17. *Stäckel P.* Über die integration der Hamilton-Jakobischen Differentialgleichung mittels der Separation der Variabein. Habilationschrift, Halle, 1891.
18. *Джеммер М.* Эволюция понятий квантовой механики. М.: Наука, 1985.
19. *Schwarzschild K.* Zur Quantenhypotese // Berliner Berichte. 1916. S. 548.
20. *Sommerfeld A.* Atombau und Spektrallinien. Braunschweig: Vieweg, 1919; Рус. пер.: Зоммерфельд А. Строение атома и спектры. М.-Л., 1926.
21. *Арнольд В.И.* Об одной теореме Лиувилля, касающейся интегрируемых проблем динамики // Сиб. матем. журн. 1963. Т. 4, № 2. С. 471.
22. *Арнольд В.И.* Математические методы классической механики. М.: Наука, 1974.
23. *Трофимов В.В., Фоменко А.Т.* Алгебра и геометрия интегрируемых гамильтоновых дифференциальных уравнений. М.: Факториал, 1995.
24. *Вейль Г.* Симметрия. М.: Наука, 1968.
25. *Колмогоров А.Н.* О сохранении условно-периодических движений при малом изменении функции Гамильтона // ДАН СССР. 1954. Т. 98, № 4. С. 527.
26. *Колмогоров А.Н.* Общая теория динамических систем и классическая механика // Межд. матем. конгресс в Амстердаме 1954. М.: Физматгиз, 1961. С. 187.
27. *Арнольд В.И.* Доказательство теоремы А.Н. Колмогорова о сохранении условно-периодических движений при малом изменении функции Гамильтона // Успехи мат. наук. 1963. Т. 18, вып. 5. С. 13.
28. *Moser J.* On invariant curves of area-preserving mappings of an annuals // Nachr. Akad. Wiss., Göttingen, Math.-Phys. K1. IIa. 1962. №1. P. 1.
29. *Чириков Б.В.* Исследования по теории нелинейного резонанса и стохастичности. Докт. дисс. Новосибирск: ИЯФ СО АН СССР, 1969.
30. *Израйлев Ф.М., Чириков Б.В.* Статистические свойства нелинейной струны // ДАН СССР. 1966. Т. 166, № 1. С. 57.
31. *Арнольд В.И.* Малые знаменатели и проблемы устойчивости движения в классической и небесной механике // Успехи мат. наук. 1963. Т. 18, вып. 6. С. 91.
32. *Fermi E.* Beweis dass ein Mechnisches Normalsystem in Allgemeinen Quasi-ergodisch ist // Phys. Zs. 1923. Bol. 24. S. 261; Рус. пер.: Ферми Э. Научн. труды. Т. 1. М.: Наука, 1971. С. 115.
33. *Зигель К.* Лекции по небесной механике. М.: ИЛ, 1959.
34. *Джакалья Г.* Методы теории возмущений для нелинейных систем. М.: Наука, 1979.
35. *Уиттекер Э.* Аналитическая динамика. М.: ОНТИ, 1937.
36. *Contopoulos G.* On the existence of a third integral of motion // Astron. J. 1962. Vol. 67, №1. P. 1.
37. *Contopoulos G.* A classification of the integrals of motion // Astron. J. 1963. Vol. 138, №4. P. 1297-1.

38. *Henon M., Heiles C.* The applicability of the third integral of motion; some numerical experiments // Astron. J. 1964. Vol. 69, №1. P. 73.
39. *Лихтенберг А., Либерман М.* Регулярная и стохастическая динамика. М. Мир, 1984.
40. *Заславский Г.М.* Стохастичность динамических систем. М.: Наука, 1984.
41. *Fermi E., Pasta J., Ulam S.* Studies in nonlinear problems // Los-Alamos report – 1940. 1955; Рус. пер.: Ферми Э. Научн. труды. Т. 2. М.: Наука, 1972. С. 647.
42. Chaos. 2005. Vol. 15. 015101.
43. Солитоны. М.: Мир, 1983.
44. *Израилев Ф.М., Хисамутдинов А.И., Чириков Б.В.* Численные эксперименты с нелинейной цепочкой. Препринт 252. Новосибирск: ИЯФ СО АН СССР, 1968. 38 с.
45. *Заславский Г.М., Сагдеев Р.З.* О пределах статистического описания нелинейного волнового поля // ЖЭТФ. 1967. Т. 52, вып. 4. С. 1081.
46. *Арнольд В.И.* О неустойчивости динамических систем со многими степенями свободы // ДАН СССР. 1964. Т. 156, № 1. С. 9.
47. *Арнольд В.И.* Проблема устойчивости и эргодические свойства классических динамических систем // Тр. Межд. конгресса математиков. Москва – 1966. М.: Мир, 1968. С. 387.
48. *Нехорошев Н.Н.* О поведении гамильтоновых систем, близких к интегрируемым // Функц. анализ и его приложения. 1971. Т. 5, вып. 4. С. 82.
49. *Нехорошев Н.Н.* Метод последовательных канонических замен переменных // Мозер Ю. Лекции о гамильтоновых системах. Добавление. М.: Мир, 1973. С. 150.
50. *Гадияк Г.В., Израйлев Ф.М., Чириков Б.В.* Предварительные численные эксперименты по диффузии Арнольда. Препринт 74-49. Новосибирск: ИЯФ СО АН СССР, 1974. 24 с.
51. *Гадияк Г.В., Израйлев Ф.М., Чириков Б.В.* Численные эксперименты по универсальной неустойчивости в нелинейных колебательных системах (диффузия Арнольда) // VII. Int. Konf. uber nichtlineare Schwingungen. B. II, 1. Berlin: Akademie-Verlag, 1977. S. 315.
52. *Chirikov B.V.* A universal instability of many-dimensional oscillator systems // Phys. Rep. 1979. Vol. 52, №5. P. 263.
53. *Лошак П.* Каноническая теория возмущений: подход, основанный на совместных приближениях // Успехи мат. наук. 1992. Т. 47, вып. 6. С. 59.
54. *Xia Z.* Arnold diffusion in the elliptic restricted three-body problem // J.Dynamics and Diff. Equations. 1993. Vol. 5, №2. P. 219.
55. *Xia Z.* Arnold diffusion and oscillating solutions in the planar three-body problem // J.Diff. Equations. 1994. Vol. 110. P. 289.
56. *Chierchia L., Gallavotti G.* Drift and diffusion in phase space // Ann. de l'Institut Poincaré, B. 1994. Vol. 60. P. 1.
57. *Алексеев В.М.* Лекции по небесной механике. М.: УРСС, 1999.
58. *Мельников В.К.* Качественное описание сильного резонанса в нелинейной системе // ДАН СССР. 1963. Т. 148, № 6. С. 1257.
59. *Мельников В.К.* Устойчивость центра при периодических по времени возмущениях // Тр. Моск. мат. общества. 1963. Т. 12. С. 3.

60. *Filonenko N.N., Sagdeev R.Z., Zaslavsky G.M.* Destruction of magnetic surfaces by magnetic field irregularities. Part II // Nucl. Fusion. 1967. Vol. 7. P. 253.
61. *Мозер Ю.* Некоторые аспекты интегрируемых гамильтоновых систем // Успехи мат. наук. 1981. Т. 36, вып. 5. С. 109.
62. *Zaslavsky G.M.* Hamiltonian chaos and fractional dynamics. Oxford: Oxford Univ. Press, 2004.
63. *Израйлев Ф.М., Чириков Б.В.* Стохастичность простейшей динамической модели с разделенным фазовым пространством. Препринт 191. Новосибирск: ИЯФ СО АН СССР, 1968. 64 с.
64. *Синай Я.Г.* Асимптотика числа замкнутых геодезических на компактных многообразиях отрицательной кривизны // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1966. Т. 30, № 6. С. 1275.
65. *Афраймович В.С., Быков В.В., Шильников Л.П.* О притягивающих негрубых предельных множествах типа аттрактора Лоренца // Тр. Моск. матем. общества. 1982. Т. 44. С. 150.
66. Странные аттракторы / Под ред. Я.Г. Синая и Л.П. Шильникова. М.: Мир, 1981.
67. *Арнольд В.И.* О рождении условно-периодического движения из семейства периодических движений // ДАН СССР. 1961. Т. 138, № 1. С. 13.
68. *Арнольд В.И.* О поведении адиабатического инварианта при медленном периодическом изменении функции Гамильтона // ДАН СССР. 1962. Т. 142, № 4. С. 758.
69. *Арнольд В.И.* О классической теории возмущений и проблеме устойчивости планетных систем // ДАН СССР. 1962. Т. 145, № 3. С. 487.
70. *Заславский Г.М., Сагдеев Р.З., Усиков Д.А., Черников А.А.* Слабый хаос и квазирегулярные структуры. М.: Наука, 1991.
71. *Заславский Г.М.,Филоненко Н.Н.* Стохастическая неустойчивость захваченных частиц и условия применимости квазилинейного приближения // ЖЭТФ. 1968. Т.54, вып. 5. С. 1590.
72. *Заславский Г.М., Захаров М.Ю., Сагдеев Р.З., Усиков Д.А., Черников А.А.* Стохастическая паутина и диффузия частиц в магнитном поле // ЖЭТФ. 1986. Т.91, вып. 5. С. 500.
73. *Заславский Г.М., Сагдеев Р.З., Усиков Д.А., Черников А.А.* Минимальный хаос, стохастическая паутина и структура с симметрией «квазикристалл» // УФН. 1988. Т. 156, вып. 2. С. 193.
74. *Shechtman D., Blech I., Gratias D., Cahn I.W.* Metallic phase with long-rage orientational order and no translational symmetry // Phys. Rev. Lett. 1984. Vol. 53. P. 1951.
75. *Chirikov B.V., Izrailev F.M.* Some numerical experiments with a nonlinear mappings: stochastic component // Colloq. Intern. du C.N.R.S. Transformations ponctuelles et leur applications. Toulouse-1973. Paris, 1976. P. 409.
76. *Tabor M.* Modern dynamics and classical analysis // Nature. 1984. Vol. 30. P. 277.
77. *Адамар Ж.* Исследование психологии процесса изобретения в области математики. М.: Сов. радио, 1970.
78. *Голубев В.В.* Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений. М.; Л.: Гостехиздат, 1950.

79. *Козлов В.В.* Несуществование однозначных интегралов и ветвление решений в динамике твердого тела // ПММ. 1978. Т. 42 (3). С. 400.
80. *Козлов В.В.* Методы качественного анализа в динамике твердого тела. М.: Изд-во МГУ, 1980.
81. *Зиглин С.Л.* Самопересечение комплексных сепаратрис и несуществование интегралов в гамильтоновых системах с полутора степенями свободы // ПММ. 1981. Т. 45 (3). С. 564.

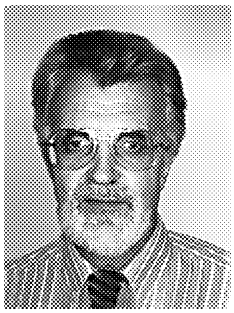
Старооскольский технологический институт

Поступила в редакцию 13.07.2005

CHAOS AND NONINTEGRABILITY IN HAMILTONIAN SYSTEMS

R.R. Mukhin

The article is devoted to historical development of one key aspect of Hamiltonian systems – nonintegrability, and its relation with chaotic behavior of the system. Evolution from the concept of quite integrable system to partly integrable one is shown. The relation of nonintegrability with such fundamental concepts as Kolmogorov stability, systems with divided phase space, Arnold diffusion, Zaslavsky web and others is discussed.



Мухин Равиль Рафкатович – родился в Челябинской области (1947), окончил Московский инженерно-физический институт (1976). После защиты кандидатской диссертации (1991, Институт органического синтеза и углехимии АН Казахстана) работал в Карагандинском государственном университете. В настоящее время работает в Старооскольском технологическом институте (Старый Оскол Белгородской области). Сейчас область научных интересов – история физики, в особенности, история нелинейной динамики. Имеет публикации.
E-mail:mukhiny@mail.ru

Прикладные задачи нелинейной теории колебаний и волн

Изв. вузов «ПНД», т. 14, № 1, 2006 УДК 621.391.01

ДИНАМИКА ДВУХ ПАРАЛЛЕЛЬНО СВЯЗАННЫХ ФАЗОУПРАВЛЯЕМЫХ ГЕНЕРАТОРОВ С МАЛОИНЕРЦИОННЫМИ ЦЕПЯМИ УПРАВЛЕНИЯ

В.В. Матросов

Изучается динамика ансамбля, состоящего из двух параллельно связанных систем фазовой автоподстройки с малоинерционными цепями управления. Рассматриваются вопросы устойчивости синхронных режимов ансамбля, изучаются механизмы возникновения квазисинхронных колебаний, анализируются области существования синхронных, квазисинхронных и асинхронных режимов. Полученные результаты сравниваются с аналогичными результатами моделирования динамики ансамбля с каскадным типом соединения, выделяются общие свойства и принципиальные различия.

Введение

В настоящее время проявляется большой интерес к исследованию динамического поведения связанных активных элементов. Этот интерес обусловлен тем, что при объединении в ансамбль связываемые элементы приобретают ряд новых свойств, которые представляют интерес для различных приложений. Среди активных элементов особый класс составляют фазоуправляемые генераторы (системы фазовой автоподстройки – ФАП), поскольку их математические модели содержат угловые координаты, то есть фазовые пространства этих моделей представляют собой либо окружность, либо цилиндры. Системы в цилиндрических фазовых пространствах допускают бóльшее разнообразие движений, чем динамические системы, определенные в декартовых системах координат [1]. При объединении системы, заданные на окружности или цилиндрах, порождают модели с существенно бóльшим разнообразием аттракторов, чем эти системы имели до объединения. Так, например, две системы, заданные на окружности, обладающие только двумя типами стационарных движений, при объединении порождают систему на торе, которая содержит счетное множество различных аттракторов, а следовательно, и бифуркаций [2, 3]. Возникающие новые движения являются образом новых динамических режимов, не свойственных парциальным системам. Для эффективного использования этих режимов крайне важно понимать механизмы их возникновения, а также, как с помощью параметров ансамблей можно управлять свойствами этих режимов.

Представляемая статья продолжает исследования динамики малых ансамблей фазоуправляемых систем. Наличие локальных цепей управления у этих систем позволяет даже в рамках двух систем конструировать различные ансамбли. К настоящему времени достаточно хорошо изучены динамические свойства малых ансамблей каскадно связанных систем [3–10]. В данной работе анализируется динамика двух параллельно связанных фазовых систем. С помощью компьютерного моделирования, основанного на методах теории бифуркаций, проводится анализ различных сечений пространства параметров. Цель исследований состоит в выявлении особенностей параллельного объединения, в изучении влияния связей на динамику ансамбля и структуру пространства параметров.

1. Структурная схема, математические модели и динамические режимы двух параллельно связанных систем фазовой автоподстройки

Структурная схема параллельного объединения двух ФАП (ПФАП) в ансамбль представлена на рис. 1. Здесь опорным сигналом для обоих управляемых генераторов ансамбля является сигнал $S_0(t)$. Этот сигнал поступает на фазовые детекторы ФД$_1$ и ФД$_2$, где сравнивается с сигналами $S_1(t)$ и $S_2(t)$ управляемых генераторов Γ_1 и Γ_2, соответственно. В результате на выходе ФД$_1$ и ФД$_2$ вырабатываются напряжения u_1 и u_2, пропорциональные разности фаз колебаний управляемых генераторов и опорного сигнала. Далее сигналы фазовых рассогласований u_1 и u_2 поступают на сумматоры Σ, где суммируются с преобразованными напряжениями $u_1' = \kappa u_2$ и $u_2' = \delta u_1$. Суммарные сигналы $\bar{u}_1 = u_1 - \kappa u_2$ и $\bar{u}_2 = u_2 + \delta u_1$ используются для управления генераторами Γ_1 и Γ_2. Операторные уравнения, описывающие динамику такой системы, имеют вид [11, 12]

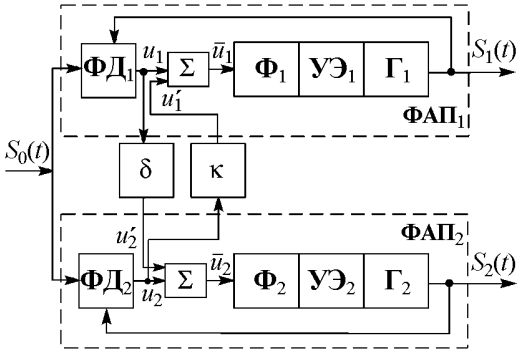


Рис. 1. Структурная схема параллельного соединения двух ФАП

$$\begin{aligned} \frac{p\varphi_1}{\Omega_1} &= \frac{\Omega_1^0}{\Omega_1} - K_1(p)[F(\varphi_1) + \kappa F(\varphi_2)], \\ \frac{p\varphi_2}{\Omega_2} &= \frac{\Omega_2^0}{\Omega_2} - K_2(p)[F(\varphi_2) + \delta F(\varphi_1)], \end{aligned} \tag{1}$$

где $p \equiv d/dt$, φ_i – текущее фазовое рассогласование; а Ω_i^0 – начальная частотная расстройка i-го управляемого генератора относительно опорного сигнала; Ω_i характеризует полосу удержания i-го генератора; $K_i(p)$ – коэффициент передачи фильтра низких частот Φ_i; $F(\varphi_i)$ – характеристика фазового дискриминатора ($i = 1, 2$).

В предположении одинаковых полос удержания парциальных систем $\Omega_1 = \Omega_2 = \Omega$, синусоидальных характеристик фазовых дискриминаторов $F(\varphi_{1,2}) = \sin(\varphi_{1,2})$ и при использовании в цепях управления фильтров первого порядка с коэффициентами передачи $K_{1,2}(p) = (1 + T_{1,2}p)^{-1}$, из уравнений (1) получается

следующая динамическая система:

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi_1}{d\tau} &= y_1, \quad \varepsilon_1 \frac{dy_1}{d\tau} = \gamma_1 - \sin\varphi_1 - y_1 - \kappa \sin\varphi_2 \equiv P_1(\varphi_1, y_1, \varphi_2, y_2), \\ \frac{d\varphi_2}{d\tau} &= y_2, \quad \varepsilon_2 \frac{dy_2}{d\tau} = \gamma_2 - \sin\varphi_2 - y_2 - \delta \sin\varphi_1 \equiv Q_1(\varphi_1, y_1, \varphi_2, y_2), \end{aligned} \tag{2}$$

Здесь $\tau = \Omega t$ – безразмерное время; $\varepsilon_i = \Omega T_i$ – безразмерные параметры фильтров, T_i – постоянные времени фильтров; $\gamma_i = \Omega_i^0/\Omega$ – относительные начальные частотные расстройки управляемых генераторов; $\kappa = \kappa/\Omega$; $\delta = \delta/\Omega$. Система (2) определена в четырехмерном цилиндрическом фазовом пространстве $V = \{\varphi_1(\mathrm{mod}2\pi), y_1, \varphi_2(\mathrm{mod}2\pi), y_2\}$.

При $\varepsilon_1 \ll 1$, $\varepsilon_2 \ll 1$ система (2) имеет устойчивую интегральную поверхность $W_1 : \{P_1(\varphi_1, y_1, \varphi_2, y_2) = 0, Q_1(\varphi_1, y_1, \varphi_2, y_2) = 0\}$, движения на которой определяются системой уравнений

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi_1}{d\tau} &= \gamma_1 - \sin\varphi_1 - \kappa \sin\varphi_2, \\ \frac{d\varphi_2}{d\tau} &= \gamma_2 - \sin\varphi_2 - \delta \sin\varphi_1. \end{aligned} \tag{3}$$

Система (3) в силу периодичности ее правых частей по переменным φ_1 и φ_2 с периодом 2π является нелинейной динамической системой на тороидальной фазовой поверхности $\mathrm{T} = \{\varphi_1(\mathrm{mod}2\pi), \varphi_2(\mathrm{mod}2\pi)\}$. Она описывает динамику ПФАП с идеализированными единичными фильтрами ($K_{1,2}(p) = 1$) в цепях управления и отражает динамические процессы, протекающие в ПФАП с малоинерционными цепями управления. Модели (2) и (3) есть уравнения двух систем маятникового типа, объединенных нелинейными связями, поэтому исследование этих уравнений может представлять интерес и для других приложений, где процессы описываются динамическими системами типа взаимосвязанных ротаторов.

В основе исследования динамических режимов ансамблей ФАП по их математическим моделям лежит взаимно-однозначное соответствие между аттракторами модели и динамическими режимами управляемых генераторов [7]: состояния равновесия отвечают режимам глобальной синхронизации, когда все генераторы ансамбля синхронизированы относительно опорного сигнала; аттракторы колебательные соответствуют режимам глобальной квазисинхронизации, когда все генераторы ансамбля функционируют в квазисинхронном режиме; колебательно-вращательные – режимам частичной квазисинхронизации, когда одни генераторы ансамбля находятся в квазисинхронном режиме, а другие – в режиме биений; наконец, вращательные аттракторы отражают глобальный режим биений, когда все генераторы ансамбля функционируют в режиме биений. Таким образом, изучение областей существования различных типов динамических режимов в пространстве параметров сводится к анализу областей существования аттракторов того или иного типа. Наиболее полную информацию о поведении ансамбля удается получить, когда динамика ансамбля описывается двумерными моделями. В настоящее время существуют методики, позволяющие провести достаточно полный бифуркационный анализ этих моделей. В силу существенной нелинейности модели (3) этот анализ проводится путем компьютерного моделирования с использованием программного комплекса ДНС [13]. Напомним, что динамические системы на торе содержат счетное множество различных

аттракторов, провести их полное рассмотрение не представляется возможным. Поэтому мы ограничимся рассмотрением колебательных и колебательно-вращательных аттракторов модели (3), которые определяют динамические режимы, представляющие наибольший интерес для практических приложений.

2. Синхронные режимы и точность синхронизации

Синхронные режимы ПФАП с единичными фильтрами в цепях управления определяются устойчивыми состояниями равновесия модели (3). При $(\gamma_1, \gamma_2, \kappa, \delta) \in C_S$ в фазовом торе T существует четыре состояния равновесия

$$\begin{aligned} &O_1(\varphi_1^*, \varphi_2^*), && O_2(\varphi_1^*, \pi - \varphi_2^*), \\ &O_3(\pi - \varphi_1^*, \pi - \varphi_2^*), && O_4(\pi - \varphi_1^*, \varphi_2^*), \end{aligned} \tag{4}$$

где

$$\varphi_1^* = \arcsin \frac{\gamma_1 - \kappa\gamma_2}{1 - \delta\kappa}, \qquad \varphi_2^* = \arcsin \frac{\gamma_2 - \delta\gamma_1}{1 - \delta\kappa}, \tag{5}$$

$$\begin{aligned} C_0 = \Bigg\{ &\max\left[\frac{(\kappa\delta - 1)\cdot \mathrm{sign}(1-\kappa\delta)\cdot \mathrm{sign}\delta + \gamma_2}{\delta}, (\kappa\delta-1)\mathrm{sign}(1-\kappa\delta) + \kappa\gamma_2\right] < \\ &< \gamma_1 < \min\left[\frac{(1-\kappa\delta)\cdot \mathrm{sign}(1-\kappa\delta)\cdot \mathrm{sign}\delta + \gamma_2}{\delta}, (1-\kappa\delta)\mathrm{sign}(1-\kappa\delta) + \kappa\gamma_2\right]\Bigg\}. \end{aligned} \tag{6}$$

Устойчивые состояния равновесия O_1, O_2 и O_4 определяют синхронные режимы I_{S1}, I_{S2} и I_{S4}, соответственно. Так как при значениях параметров из области C_0 на торе T всегда есть устойчивое состояние равновесия, то область C_S существования синхронных режимов совпадает с C_0. Примечательно, что области C_S в случае параллельного и каскадного соединения ФАП с идеализированными фильтрами в цепях управления ($K_{1,2}(p) = 1$) совпадают, различия имеют место в размерах областей существования конкретных синхронных режимов, различающихся точностью синхронизации. Распределение синхронных режимов по области C_S определяется бифуркационными кривыми смены устойчивости состояний равновесия модели (3). Установлено, что при $\kappa\delta < 1$ устойчивым является состояние равновесия O_1, а при $\kappa\delta > 1$ – либо O_2, либо O_4. Смена устойчивости состояний равновесия O_2 и O_4 происходит одновременно при значениях параметров, удовлетворяющих уравнениям

$$\gamma_1 = \frac{1+\kappa}{1+\delta}\gamma_2, \quad \gamma_1 = \frac{\kappa - 1}{1 - \delta}\gamma_2. \tag{7}$$

Прямые смены устойчивости на плоскости (γ_1, γ_2) являются диагоналями параллелограмма C_0. Распределение синхронных режимов модели (3) в сечениях (κ, γ_1) и (δ, γ_1) области C_S представлено на рис. 2. Здесь штрихпунктирными линиями выделена область C_S, внутри которой сплошными линиями проведены границы областей существования синхронных режимов для ПФАП, а штриховыми линиями – для каскадного соединения двух ФАП (КФАП). Точки $B_{1,2}$ соответствуют обращению в нуль первой ляпуновской величины L [14]. Слева от точек $B_{1,2}$ смена устойчивости

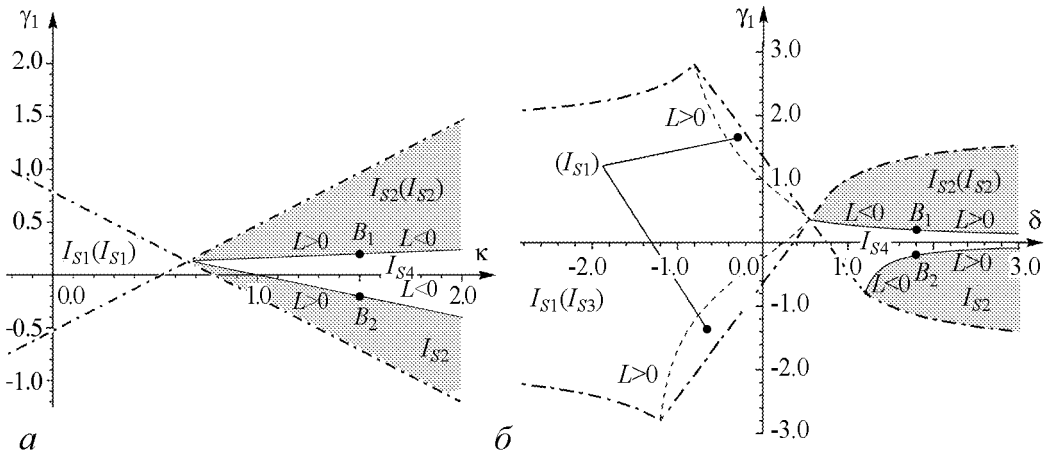


Рис. 2. Структуры области C_S существования синхронных режимов модели (3); $\delta = 1.5$ (*а*), $\kappa = 1.8$ (*б*); $\gamma_2 = 0.2$

синхронного режима I_{S4} происходит мягко, а справа она носит жесткий характер. В скобках указаны динамические режимы для ансамбля с каскадным типом соединений. Из представленных картин видно, что степень влияния параметров связей на синхронные режимы при каскадном и параллельном соединениях различна. В области, где $1 - \kappa\delta < 0$, сильнее сказываются дополнительные связи в каскадном соединении, а при $1 - \kappa\delta > 0$ – в параллельном.

На рис. 3 приведены диаграммы, иллюстрирующие изменения точности синхронизации колебаний управляемых генераторов ПФАП и КФАП с опорным сигналом при вариациях начальной частотной расстройки γ_1 для $\kappa = 1.8, \gamma_2 = 0.2$, $\delta = -0.7$ (рис. 3, *а*) и $\delta = 1.7$ (рис. 3, *б*). На рис. 3, *а* штрихпунктирные линии ограничивают область C_S, пунктирные линии соответствуют смене устойчивости синхронных режимов, линии *1* и *2* отражают эволюцию ошибок синхронизации первого и второго генераторов ансамбля ПФАП в режиме I_{S1}, штриховые линии *5*, *6* и линии *3*, *4* – ансамбля КФАП в режимах I_{S1} и I_{S3}. Из анализа этих линий следует, что

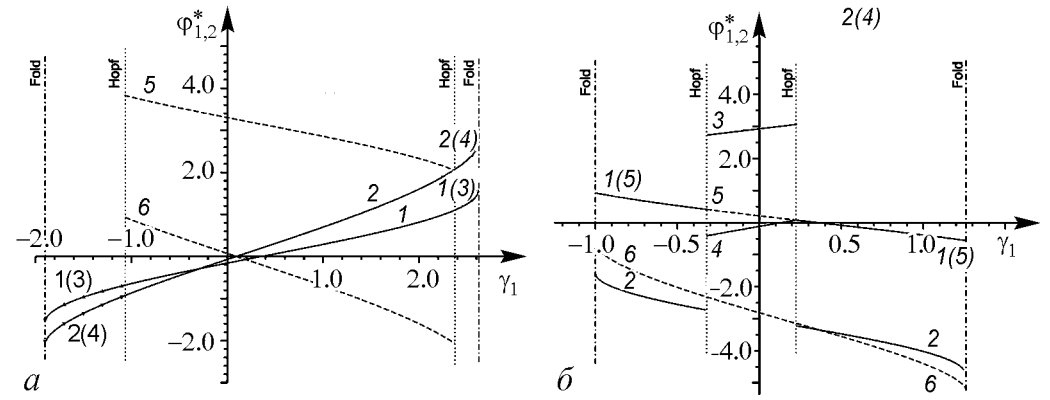


Рис. 3. Эволюция ошибок синхронизации синхронных режимов ПФАП при вариациях параметра γ_1 для $\delta = -0.7$ (*а*) и 1.7 (*б*). $\kappa = 1.8$, $\gamma_2 = 0.2$

на границах области C_S ошибки синхронизации ПФАП и КФАП одинаковы, по мере уменьшения начальной частотной расстройки возникают качественные изменения, обусловленные жесткой сменой устойчивости синхронного режима I_{S3} в модели КФАП. В результате бифуркации Андронова – Хопфа появляется синхронный режим I_{S1}, ошибки синхронизации которого отличаются от ошибок синхронизации режима I_{S3} на π. Таким образом, при рассматриваемых значениях параметров в ансамбле КФАП, в отличие от ансамбля ПФАП, наблюдается противофазная синхронизация. Как показали исследования, существует и обратная ситуация, когда противофазный синхронный режим имеет место в ПФАП, а в КФАП такой режим отсутствует. Этот случай иллюстрирует рис. 3, *б*. Здесь линии *1* и *2* характеризуют точность синхронизации первого и второго генераторов ПФАП в режиме I_{S2}, а линии *3* и *4* – в режиме I_{S4}, штриховые линии *5* и *6* отражают ошибки синхронизации первого и второго генераторов КФАП в режиме I_{S2}. Отметим, что в рассматриваемом примере совпадение точности синхронизации на границах области C_S для каскадного и параллельного соединений имеет место лишь для первых генераторов ансамблей. Обнаруженный эффект противофазной синхронизации может представлять интерес для передачи информации на основе манипуляции фазы.

3. Динамические режимы и структура пространства параметров в случае слабых связей

На рис. 4, *а* представлено разбиение плоскости (γ_1, γ_2) начальных частотных расстроек модели (3) в случае, когда обе связи являются слабыми δ=0.5, κ=0.7. Рис. 4, *б* отражает структуру пространства параметров (3) в случае, когда одна из связей является сильной κ=1.8>1, другая – слабой δ=0.2<1, при этом совокупность связей остается слабой ($\delta\kappa$<1). На представленных диаграммах штрихпунктирной линией выделена область C_0.

При значениях параметров из области C_0 в фазовом пространстве модели (3) всегда существует устойчивое состояние равновесия O_1 (рис. 5, *а*), определяющее

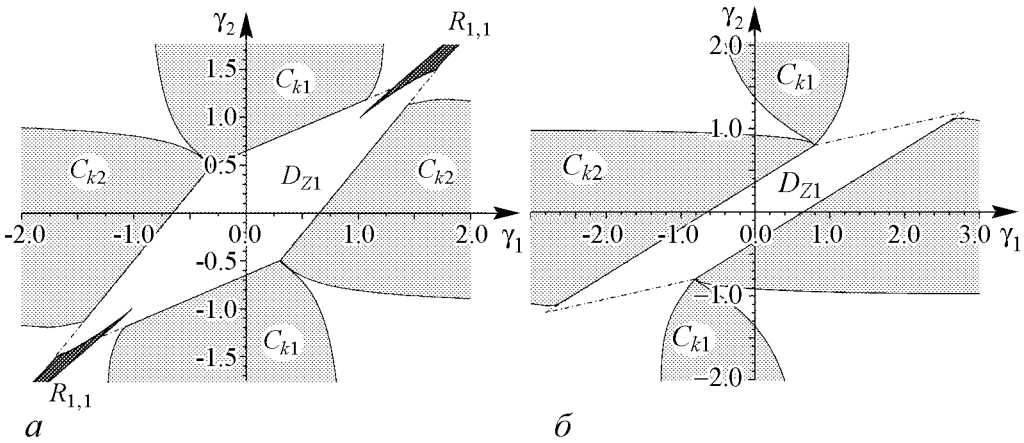


Рис. 4. Структура пространства параметров ПФАП с малоинерционными цепями управления в случае слабых связей для $\delta = 0.5$, $\kappa = 0.7$(*а*) и $\delta = 0.2$, $\kappa = 1.8$ (*б*)

синхронный режим I_{S1}. Поэтому область C_{S1} существования (удержания) режима I_{S1} совпадает с областью C_0. При выходе из C_{S1} в области C_{k2} состояния равновесия исчезают, в фазовом пространстве системы (3) рождается пара колебательно-вращательных предельных циклов, охватывающих фазовый тор Т в направлении φ_1 (рис. 5, *б*). Устойчивый цикл $L_{1,0}$ определяет режим, в котором первый генератор работает в режиме биений, а второй – в режиме квазисинхронизма, в ПФАП устанавливается режим частичной квазисинхронизации I_{k2}. Границами областей C_{k2} служат бифуркационные кривые образования двойных предельных циклов и петли сепаратрис седло-узла второго рода. При выходе из области C_{S1} в область C_{k1} исчезновение состояний равновесия сопровождается рождением колебательно-вращательных предельных циклов, охватывающих тор в направлении φ_2 (рис. 5, *в*). Устойчивый цикл $L_{0,1}$ соответствует тому, что второй генератор работает в режиме биений, а первый – в режиме квазисинхронизма, в ПФАП возникает режим частичной квазисинхронизации I_{k1}. Границами областей C_{k1} служат бифуркационные кривые двойных предельных циклов и петли сепаратрис седло-узла второго рода. Вне областей C_{S1}, C_{k1} и C_{k2} в фазовом пространстве модели (3) имеют место движения, охватывающие тор как в направлении φ_1, так и в направлении φ_2. Эти движения характеризуются числом вращения ν [2], если ν число рациональное и $\nu \neq 0, \nu \neq \infty$, то ему отвечают вращательные предельные циклы (рис. 5, *г*), если ν иррациональное, то имеет место квазиобмотка тора Т (рис. 5, *д*). Все вращательные аттракторы определяют глобальный режим биений.

На рис. 4, *б* в области C_0 состояние равновесия O_1 устойчиво глобально, поэтому область C_0 является также областью D_{Z1} захвата в синхронный режим I_{S1}. В случае, когда обе связи слабые (см. рис. 4, *а*), глобальная устойчивость синхронного режима I_{S1} может нарушаться за счет возникновения в фазовом пространстве

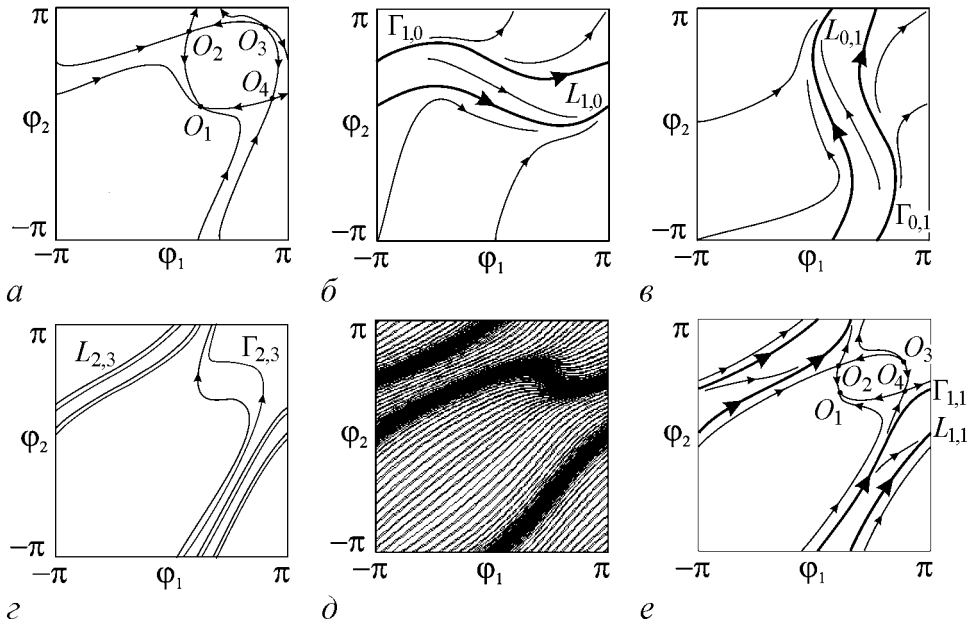


Рис. 5. Фазовые портреты модели (3) в случае слабых связей

модели (3) устойчивого вращательного цикла $L_{1,1}$ (рис. 5, *e*). Область $R_{1,1}$ существования цикла $L_{1,1}$ на рис. 4, *a* выделена темным цветом. Эта область вклинивается в область C_0, поэтому здесь область захвата $D_{Z1} = C_0 \backslash R_{1,1}$ в режим I_{S1} меньше области C_{S1}.

4. Динамические режимы и структура пространства параметров в случае сильных связей

Параметрический портрет системы (3) на плоскости (γ_1, γ_2) в случае сильных связей представлен на рис. 6. Здесь штрихпунктирная линия ограничивает область C_0. Остальные линии отражают следующие бифуркации: линии *1* и *2* – кривые смены устойчивости состояний равновесия O_2 и O_4, смена устойчивости состояния равновесия O_4 происходит мягко, а O_2 – жестко; линия *3* ограничивает область существования колебательных предельных циклов. Она состоит из кривой касательной бифуркации (между точками b_1 и b_2) и кривой петель сепаратрис первого рода (не охватывающих фазовый тор Т); линии *4*, *6* и *8*, *10* – кривые касательных бифуркаций колебательно-вращательных предельных циклов, охватывающих Т в направлении φ_2 и φ_1, соответственно; линии *5*, *7* и *9*, *11* отвечают образованию петель сепаратрис второго рода, охватывающих Т в направлении φ_2 и φ_1, соответственно.

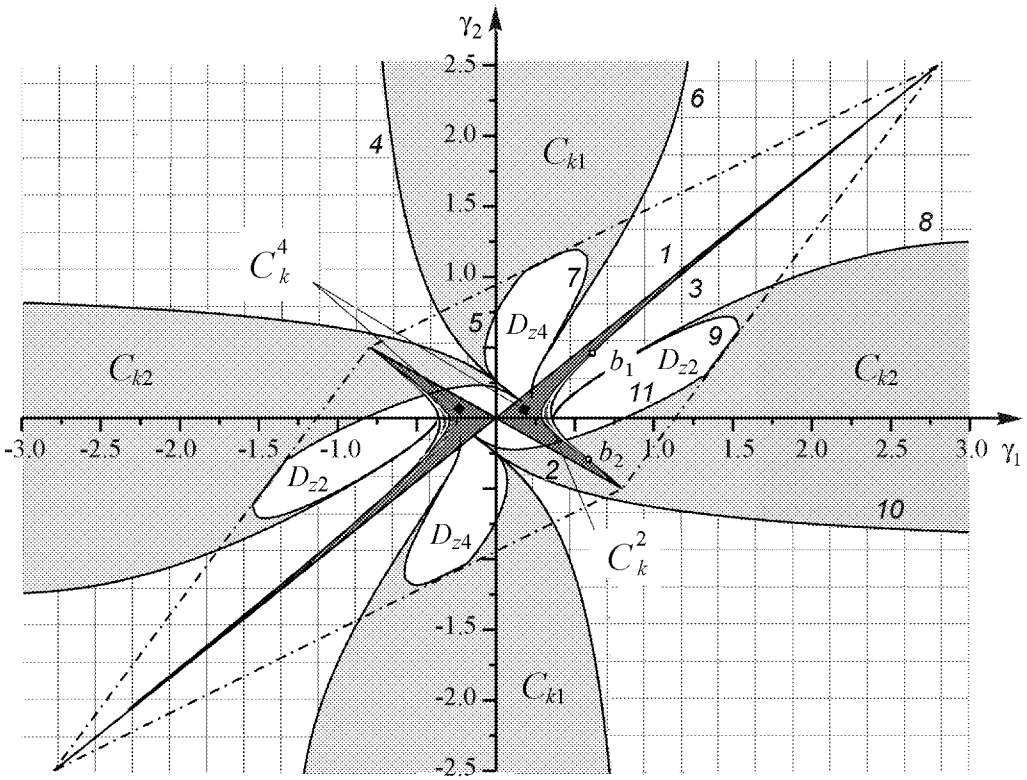


Рис. 6. Структура пространства параметров ПФАП с малоинерционными цепями управления в случае сильных связей: $\delta = 1.5$; $\kappa = 1.8$

Система (3) инвариантна относительно замены $(\gamma_1, \gamma_2, \varphi_1, \varphi_2)$ на $(-\gamma_1, -\gamma_2, -\varphi_1, -\varphi_2)$, поэтому остальные линии на рис. 6 не пронумерованы, так как они переходят в пронумерованные линии в результате вышеуказанного преобразования. Перейдем к анализу областей, образованных приведенными бифуркационными кривыми, и реализующихся в этих областях динамических режимов. Ограничимся рассмотрением синхронных и квазисинхронных режимов, которым в фазовом пространстве отвечают устойчивые состояния равновесия, колебательные и колебательно-вращательные предельные циклы.

Диагонали параллелограмма C_0 делят его на четыре части. В левой и правой частях устойчивым является состояние равновесия O_2 и, следовательно, это есть области C_{S2} существования синхронного режима I_{S2}. В верхней и нижней частях C_0 устойчиво O_4 и, следовательно, эти части образуют область C_{S4}, где существует синхронный режим I_{S4}. Синхронные режимы I_{S2} и I_{S4} являются глобально устойчивыми в областях D_{Z2} и D_{Z4}, которые ограничены линиями *1*, *3* и *5*, *7*, *9*, *11*. Области D_{Z2} и D_{Z4} являются областями захвата в синхронные режимы I_{S2} и I_{S4}, соответственно, границами этих областей служат кривые бифуркаций Андронова – Хопфа и петель сепаратрис второго рода. Области захвата в синхронный режим выделены белым цветом.

Фазовые портреты, отвечающие областям D_{Z2} и D_{Z4}, представлены на рис. 7, *а* и *б*, соответственно. Эти портреты есть результат компьютерного моделирования, дополненный обозначениями состояний равновесия и стрелками, указывающими направление движения по фазовым траекториям[1], здесь $x(1) \sim \varphi_1$, $x(2) \sim \varphi_2$. Примечательно, что область D_{Z4} состоит из двух частей, разделенных узкой областью существования режимов биений. Глобальная устойчивость состояний равновесия нарушается возникновением устойчивых предельных циклов. Одновременно с устойчивыми состояниями равновесия на торе Т может существовать несколько аттракторов различного типа, поэтому сценарии развития динамики ансамбля при вхождении в области захвата весьма разнообразны и зависят как от параметров системы, так и от состояния системы.

Линии *1* и *3* ограничивают область C_k^4 существования глобального квазисинхронного режима I_{k4}, в котором оба генератора ансамбля находятся в квазисинхронном режиме. Режиму I_{k4} на фазовом торе отвечает колебательный предельный цикл L_0^4, охватывающий состояние равновесия O_4 (рис. 7, *в*). Состояние равновесия O_2 охватывает неустойчивый колебательный цикл Γ_0^2. Этот цикл ограничивает бассейн притяжения Π_{02} состояния равновесия O_2, при $(\varphi_1, \varphi_2) \in \Pi_{02}$ в ПФАП реализуется синхронный режим I_{S2}. На рис. 6 область C_k^4 выделена темным цветом, границами этой области служат бифуркационные кривые: Андронова – Хопфа, петли сепаратрис первого рода седла O_1, охватывающей O_4, двойных предельных циклов первого рода (между точками b_1 и b_2). Точки b_1 и b_2 служат началом еще одной бифуркационной кривой петли сепаратрис первого рода седла O_1, охватывающей состояние равновесия O_2. Эта кривая предшествует бифуркации двойных предельных циклов. В результате бифуркации петли, охватывающей O_2, на торе Т возникает устойчивый колебательный предельный цикл L_0^2, охватывающий Γ_0^2. Одновременно с циклом L_0^2

[1] При компьютерном моделировании с помощью комплекса ДНС особые фазовые траектории, образующие фазовый портрет, рисуются разными цветами, поэтому дополнительных надписей не имеют. Предельные циклы на фазовых портретах, как правило, характеризуются уплотнением фазовых траекторий в их окрестности.

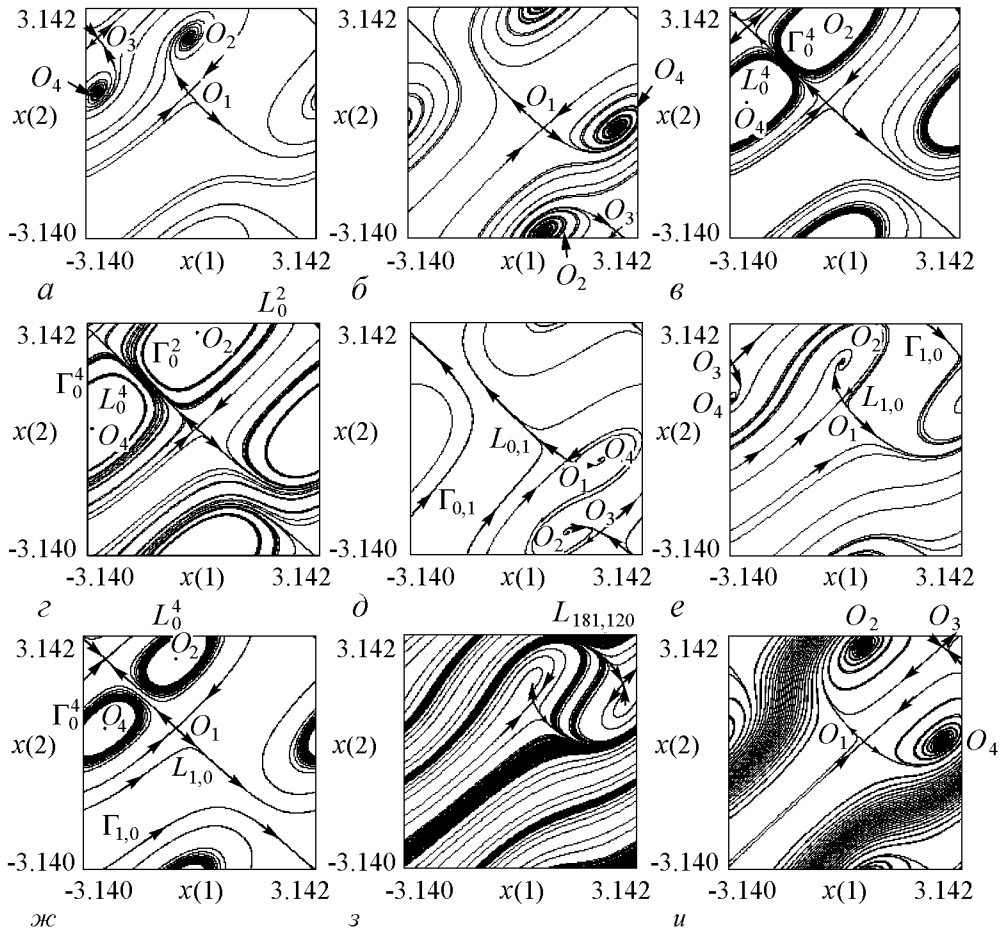


Рис. 7. Фазовые портреты модели (3) в случае сильных связей

из петли сепаратрис седла O_3 возникает неустойчивый предельный цикл Γ_0^4, охватывающий L_0^4 (рис. 7, *г*). Таким образом, бифуркационные кривые двойного предельного цикла и петель сепаратрис выделяют на плоскости параметров области C_k^2, при значениях параметров из которых на торе T существует L_0^2. На рис. 6 область C_k^2 отмечена более светлым цветом, чем C_k^4. Цикл L_0^2 определяет режим глобальной квазисинхронизации I_{k2}, который отличается от режима I_{k4} большей глубиной модуляции и средним значением по фазе. Так как C_k^2 пересекается с C_k^4, то эта область является областью мультистабильного поведения. Здесь в зависимости от начальных условий возможно установление режимов I_{S2}, I_{k2}, I_{k4} (см. рис. 7, *г*).

Области C_{k1} и C_{k2} есть области существования режимов частичной квазисинхронизации I_{k1} и I_{k2}. Этим режимам на торе T отвечают устойчивые колебательно-вращательные предельные циклы $L_{0,1}$ и $L_{1,0}$ соответственно. На рис. 6 эти области выделены светло-серым цветом, их границами служат бифуркационные кривые петель сепаратрис и двойных предельных циклов второго рода. Вне области C_0 режимы I_{k1} и I_{k2} являются глобально устойчивыми (фазовые портреты эквивалентны портретам на рис. 5, *б*, *в*), в областях пересечения с C_0 они всегда живут совместно с

синхронными режимами (рис. 7 *д*, *е*), а также существуют значения параметров, где они реализуются совместно с режимами глобальной квазисинхронизации (рис. 7, *ж*).

В областях, выделенных штриховкой на торе T, могут существовать вращательные аттракторы, отвечающие за установление глобальных режимов биений. Вне области C_0 это либо вращательные предельные циклы, либо квазипериодические траектории (фазовые портреты эквивалентны портретам на рис. 5, *г*, *д*). В области C_0 могут существовать только вращательные предельные циклы, но различной сложности, от простых, содержащих по одному обороту на 2π вдоль координат φ_1 и φ_2, до сложных, включающих многочисленные провороты φ_1 и φ_2. В результате многочисленных оборотов, число которых, как правило, по переменным φ_1 и φ_2 не одинаково, сложные предельные циклы по своему виду больше схожи с хаотическими аттракторами, чем с регулярными (рис. 7, *з*). Области существования режимов биений образуют в области C_0 слоистую структуру, аналогичную слоистой структуре пространства параметров, выявленную в каскадном типе соединения – при движении в заштрихованной области C_0 области глобальной устойчивости синхронных режимов чередуются с областями режимов биений. В этой части пространства параметров переходные процессы к глобально устойчивым синхронным режимам могут быть достаточно длительными и иметь сложный вид. Фазовый портрет системы (3), где переходные процессы к синхронному режиму могут иметь сложный вид, представлен на рис. 7, *и*. Здесь состояние равновесия O_4 является устойчивым, а O_2 – неустойчивым. Если начальное состояние системы расположить в окрестности O_2, то переход к O_4 окажется длительным и будет иметь сложный вид. Сложный переходный процесс к режиму I_{S2} можно наблюдать также при разрушении предельного цикла $L_{181,120}$ на рис. 7, *з*.

Заключение

В данной работе в рамках динамических моделей (2) и (3) проведено исследование динамических режимов параллельного соединения двух фазоуправляемых систем с малоинерционными цепями управления. Проведенное на основе модели (3) компьютерное исследование позволило выявить роль связей при параллельном объединении систем в ансамбль.

Установлено, что объединение фазовых систем слабыми связями приводит к появлению регулярных квазисинхронных режимов, не свойственных парциальным системам. Области существования квазисинхронных режимов не пересекаются с областями существования синхронных режимов и режимов биений, поэтому квазисинхронные режимы всегда глобально устойчивы. В случае, когда обе связи слабые ($\kappa<1, \delta<1$), область захвата в синхронный режим меньше области удержания этого режима. За счет изменения силы связи, оставаясь в рамках совокупной слабой связи ($\kappa\delta<1$), можно добиться совпадения областей захвата и удержания синхронного режима. Глобальных квазисинхронных режимов, когда оба генератора работают в квазисинхронном режиме, в ПФАП со слабыми связями быть не может.

Объединение фазовых систем сильными связями приводит к появлению ряда новых эффектов, не свойственных ансамблю со слабыми связями. При наличии сильных связей в ансамбле возникают глобальные квазисинхронные режимы. Области существования этих режимов всегда располагаются внутри области C_0, поэтому,

во-первых, они имеют ограниченные размеры, во-вторых, эти режимы не могут быть глобально устойчивыми. Области существования режимов частичной квазисинхронизации и биений проникают в область существования синхронных режимов, что приводит к возникновению слоистой структуры пространства параметров, появлению мультистабильности и гистерезисных явлений. Области захвата в синхронные режимы не совпадают с областью удержания, области захвата в синхронный режим состоят из нескольких подобластей.

Сравнительный анализ результатов исследований каскадного и параллельного типов соединений свидетельствует, что многие явления, обнаруженные ранее при изучении каскадного соединения, сохраняются. Например, наличие нескольких синхронных режимов, возникновение режимов глобальной и частичной квазисинхронизации, бифуркационные механизмы возникновения квазисинхронных режимов, существование слоистой структуры пространства параметров и т.д. Различия же наблюдаются в соотношениях параметров систем и связей, когда реализуются те или иные режимы. В частности, при параллельном типе соединения, в отличие от каскадного соединения, режимы глобальной квазисинхронизации возникают в области малых частотных расстроек, при слабых связях квазисинхронные режимы всегда глобально устойчивы, области захвата в синхронный режим состоят из нескольких подобластей.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 05-02-17409), а также программы «Университеты России» (проект УР.03.01.179).

Библиографический список

1. *Барбашин Е.А., Табуева В.А.* Динамические системы с цилиндрическим фазовым пространством. М.: Наука, 1969.
2. *Плисс В.А.* Нелокальные проблемы теории колебаний. М.: Наука, 1967.
3. *Матросов В.В.* Некоторые особенности динамического поведения каскадного соединения двух фазовых систем // Изв.вузов. Прикладная нелинейная динамика. 1997. Т.5, №6. С.52.
4. *Корзинова М.В., Матросов В.В.* Моделирование нелинейной динамики каскадного соединения фазовых систем // Изв.вузов. Радиофизика. 1993. Т.36, №8. С.815.
5. *Матросов В.В., Корзинова М.В.* Коллективная динамика каскадного соединения фазовых систем // Изв.вузов. Прикладная нелинейная динамика. 1994. №2. С.10.
6. *Матросов В.В., Корзинова М.В.* Синхронные и автоколебательные режимы каскадного соединения фазовых систем // Вестник ННГУ. Нелинейная динамика – синхронизация и хаос. Н.Новгород: Изд-во ННГУ, 1996. С.77.
7. *Матросов В.В., Касаткин Д.В.* Динамические режимы связанных генераторов с фазовым управлением // Радиотехника и электроника. 2003. Т.48. №6. С.637.
8. *Матросов В.В., Касаткин Д.В.* Анализ процессов возбуждения хаотических колебаний во взаимосвязанных генераторах с фазовым управлением // Изв.вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2003. Т.11, №4. С.31.

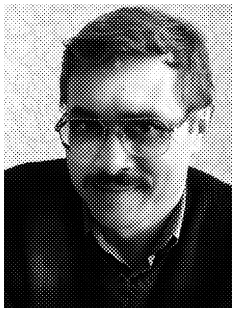
9. *Матросов В.В., Касаткин Д.В.* Особенности динамики трех каскадно связанных генераторов с фазовым управлением // Изв.вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2004. Т.12, №1. С.159.
10. *Мишагин К.Г., Матросов В.В., Шалфеев Д.В., Шохнин В.В.* Экспериментальное исследование генерации хаотических колебний в ансамбле двух каскадно связанных фазовых систем // Письма в ЖТФ. 2005. Т.31, №24. С.31.
11. *Капранов М.В.* Взаимодействующие многосвязанные СФС // Системы фазовой синхронизации / Под ред. В.В. Шахгильдяна, Л.Н. Белюстиной. М.: Радио и связь, 1982. С.55.
12. *Афраймович В.С., Некоркин В.И., Осипов Г.В., Шалфеев В.Д.* Устойчивость, структуры и хаос в нелинейных сетях синхронизации. Горький: Изд-во ИПФАН, 1989.
13. *Матросов В.В.* Динамика нелинейных систем. Программный комплекс для исследования нелинейных динамических систем с непрерывным временем. Учебно-методическая разработка. Н.Новгород: Изд-во ННГУ, 2002. 54 с.
14. *Баутин Н.Н.* Поведение динамических систем вблизи границ области устойчивости. М.: Наука, 1984. 176 с.

Нижегородский государственный университет *Поступила в редакцию 27.11.2005*

DYNAMICS OF TWO PARALLEL PHASE-LOCKED-LOOPS WITH LOW-INERTIA CONTROL LOOPS

V.V. Matrosov

Dynamics of an ensemble of two parallel phase-locked-loop systems with low-inertia control loops is investigated. Stability of synchronous modes of the ensemble is considered. Mechanisms of arising of quasi-synchronous oscillations are studied. Domains of existence of synchronous, quasi-synchronous, and asynchronous modes are analysed. The results obtained are compared with analogous data of modeling dynamics of an ensemble with cascade coupling; their common features and basic differences are distinguished.



Матросов Валерий Владимирович – родился в 1960 году. Окончил факультет вычислительной математики и кибернетики Горьковского государственного университета по специальности «прикладная математика» (1982). С 1984 по 1999 – научный сотрудник НИИ прикладной математики и кибернетики при ННГУ, с 1999 года – доцент кафедры теории колебаний и автоматического регулирования ННГУ. Кандидат физико-математических наук (1994), доцент (2001). Область научных интересов – динамика нелинейных систем, динамический хаос, синхронизация и управление хаосом, математическое моделирование. Имеет более 100 публикаций в отечественных и зарубежных изданиях, является соавтором двух учебных пособий.
E-mail: matrosov@rf.unn.ru.

Прикладные задачи нелинейной теории колебаний и волн

Изв. вузов «ПНД», т. 14, № 1, 2006 УДК 531.36

МЕТОД КВАЗИПОТЕНЦИАЛА В АНАЛИЗЕ СТОХАСТИЧЕСКОЙ ЧУВСТВИТЕЛЬНОСТИ 2-ТОРА

Л.Б. Ряшко

На основе метода квазипотенциала исследуется стационарное распределение случайных траекторий в окрестности тороидальных многообразий стохастически возмущенных нелинейных систем. Для аппроксимации квазипотенциала используется квадратичная форма, задаваемая некоторой определенной на торе матричной функцией. Эта функция – стохастическая функция чувствительности – характеризует реакцию рассматриваемой системы на случайные возмущения, позволяет описать разброс случайных траекторий вблизи тора. Построение этой функции сводится к решению краевой задачи для линейного дифференциального матричного уравнения. Для случая 2-тора в трехмерном пространстве дается конструктивное решение этой задачи. Построение стохастической функции чувствительности – скалярной функции – сводится к решению некоторого функционального уравнения. Эффективность полученных результатов демонстрируется на примере.

Введение

Исследования последних лет показали, что разнообразие, наблюдаемое в поведении нелинейных динамических систем, можно свести к анализу относительно простых стационарных режимов (инвариантных многообразий) и их качественных преобразований (бифуркаций). Так, например, одним из стандартных сценариев перехода от порядка к хаосу служит цепь последовательных бифуркаций: положение равновесия (точка покоя) – периодические колебания (цикл) – квазипериодические колебания (тор) – хаотические колебания (странный аттрактор). Каждый такой переход сопровождается потерей устойчивости простого многообразия и рождением нового, более сложного устойчивого многообразия. Анализ устойчивости этих многообразий, исследование их чувствительности к возмущениям различной природы, является здесь ключевым моментом в понимании механизма сложных явлений нелинейной динамики. Значительный интерес вызывает изучение реакции аттракторов

динамических систем на случайные возмущения. Если циклы и, тем более, точки покоя являются достаточно подробно исследованными объектами современной теории стохастической нелинейной динамики, то стохастически возмущенные тороидальные инвариантные многообразия еще только начинают рассматриваться. Тор, ставший после работ Пуанкаре, Данжуа и Арнольда [1] классическим объектом качественной теории дифференциальных уравнений, достаточно подробно исследовался с точки зрения его структурной устойчивости (КАМ-теория). Анализу устойчивости тороидальных многообразий к возмущению начальных данных даже в рамках детерминированной теории посвящено лишь небольшое число работ (см., например, [2–7]). Экспоненциальная среднеквадратическая устойчивость стохастически возмущенных тороидальных движений исследовалась в [8].

Рассмотрим систему

$$\dot{x} = f(x) \tag{1}$$

где x – n-мерный вектор, f – достаточно гладкая вектор-функция. Предполагается, что система (1) имеет инвариантное двумерное тороидальное многообразие Г.

Поведение фазовых траекторий на тороидальной поверхности в общем случае может быть весьма сложным. В данной работе предполагается, что на многообразии Г нет точек покоя и фазовые траектории системы (1) полностью покрывают тор Г. При этом тороидальная поверхность может целиком состоять как из замкнутых фазовых траекторий – циклов и траекторий, к ним сходящихся (периодическая обмотка), так и из семейства незамкнутых траекторий, лежащих всюду плотно на Г (квазипериодическая обмотка).

В формальных построениях будем исходить из возможности следующей параметризации 2-тора Г (рис. 1). Пусть на Г лежит некоторая замкнутая достаточно гладкая кривая α (экватор), задаваемая функцией $\alpha(s)$ на интервале $0 \le s \le 1$ с условием $\alpha(0) = \alpha(1)$. Из каждой точки $\alpha(s)$ кривой α, как начальной, выходит решение $x(t,s)$ системы (1) с условием $x(0,s) = \alpha(s)$. Предполагается, что траектория $x(t,s)$, совершив оборот вокруг тора Г, через некоторое время вновь пересечет кривую α. Пусть $T(s) = \min\{\, t > 0 \mid x(t,s) \in \alpha \,\}$ – момент первого возвращения траектории $x(t,s)$ на кривую α, при этом $x(T(s),s)$ есть точка возвращения. Пусть $\tau(s)$ такова, что $\alpha(\tau(s)) = x(T(s),s)$. Здесь $\tau(s)$ есть функция последования сечений Пуанкаре кривой α фазовыми траекториями системы (1). Естественная область изменения переменной s – окружность. При рассмотрении функции $\tau(s)$ на полуинтервале [0,1) неизбежно возникают разрывы. Для того чтобы обеспечить непрерывность $\tau(s)$, принято считать областью изменения s всю числовую ось. При этом функции $\alpha(s)$ и $\tau(s)$ являются периодическими $\alpha(s) = \alpha(s+1)$, $\tau(s) = \tau(s+1)$. Равенства $x(t,s) = x(t,s+1)$, $x(T(s)+t,s) = x(t,\tau(s))$ позволяют распространить функцию $x(t,s)$ на всю плоскость $\Pi = \{(t,s) | -\infty < t < +\infty, -\infty < s < +\infty\}$.

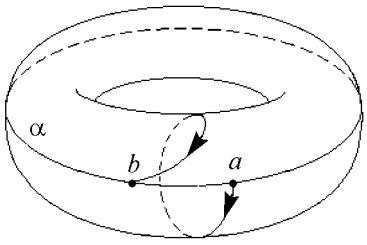


Рис. 1. α - замкнутая кривая (экватор), $a = x(0,s) = \alpha(s)$ - начальная точка решения $x(t,s)$, $b = x(T(s),s) = \alpha(\tau(s))$ - точка первого возвращения решения $x(t,s)$ на кривую α

Функция $x(t,s)$ устанавливает взаимно-однозначное соответствие между точками 2-тора Г и точками множества $\{(t,s) \mid 0 \le t < T(s),\ 0 \le s < 1\}$. Вектор-функции $\dfrac{\partial x(t,s)}{\partial t}$, $\dfrac{\partial x(t,s)}{\partial s}$ – линейно независимы. При этом для каждой точки γ на торе Г можно указать $t = t(\gamma),\ s = s(\gamma)$ такие, что $x(t,s) = \gamma$.

Рассмотрим в некоторой окрестности D тороидальной поверхности Г функцию $\gamma(x)$, где $\gamma(x)$ – ближайшая к x точка 2-тора Г. Функция $\gamma(x)$ в общем случае может быть многозначной. Однако вблизи достаточно гладкой поверхности Г все обстоит просто. При рассмотрении вопросов устойчивости окрестность D можно считать достаточно малой. При этом $\Delta(x) = x - \gamma(x)$ – вектор отклонения x от Г – будет в D однозначной и гладкой функцией.

Определение 1. Тор Г называется экспоненциально устойчивым (Э-устойчивым) в D, если при некоторых $K > 0,\ l > 0$ выполняется условие

$$\|\Delta(x(t))\| \le Ke^{-lt}\|\Delta(x_0)\|,$$

где $x(t)$ – решение системы (1) с начальным условием $x(0) = x_0 \in D$, $\|\cdot\|$ – евклидова норма.

Э-устойчивость тороидальных многообразий для детерминированных систем исследовалась в работах [2–7].

Исследование аттракторов нелинейных стохастических систем было начато в [9] и продолжено в большом числе работ (см., например, [10–15]). Для систем со случайными возмущениями стандартной моделью является стохастическая система Ито

$$\dot{x} = f(x) + \varepsilon\sigma(x)\dot{w}, \tag{2}$$

где $w(t)$ – n-мерный винеровский процесс; $\sigma(x)$ – достаточно гладкая $(n \times n)$-функция, определяющая зависимость помех от состояния системы; ε – параметр интенсивности возмущений. Предполагается, что $\det\ \sigma(\mathrm{x})|_\Gamma \ne 0$ – шумы на торе Г являются невырожденными. В результате действия возмущений случайные траектории системы (2) покидают тороидальную поверхность и формируют вокруг нее некоторое случайное распределение.

Исчерпывающее вероятностное описание (плотность распределения $\rho(t,x,\varepsilon)$) случайного разброса траекторий возмущенной системы вокруг Г дается уравнением Фоккера – Планка – Колмогорова (ФПК). Если характер переходного процесса является несущественным, а основной интерес представляет установившийся в (2) режим стохастических автоколебаний (стохастический аттрактор), то можно ограничиться исследованием стационарной плотности распределения $\rho(x,\varepsilon)$, задаваемой стационарным уравнением ФПК. Аналитическое исследование этого уравнения, даже в простейшем случае цикла на плоскости, представляет весьма сложную задачу. При малых шумах здесь возникают известные трудности, связанные с малыми коэффициентами при старших производных.

Соответствующая асимптотика стационарной плотности распределения $\rho(x,\varepsilon)$ в случае малых шумов задается функцией $v(x) = -\lim_{\varepsilon\to 0}\varepsilon^2 \ln\rho(x,\varepsilon)$ – квазипотенциалом. При этом $\rho(x,\varepsilon) \approx K \cdot e^{-\frac{v(x)}{\varepsilon^2}}$. Квазипотенциал был введен в работах А.Д. Вентцеля и М.И. Фрейдлина в связи с решением известной задачи Колмогорова о выходе случайной траектории из области, содержащей устойчивую точку покоя, и рассматривался в [16–18].

Квазипотенциал связан с некоторой вариационной задачей минимизации функционала действия и удовлетворяет уравнению Гамильтона – Якоби. Уравнение Гамильтона – Якоби выглядит проще, нежели исходное уравнение ФПК, однако и его точное решение является по-прежнему весьма сложной задачей. Здесь возможен конструктивный подход, связанный с введением еще одной асимптотики – малой окрестности исследуемого аттрактора. Для случая предельного цикла аппроксимация квазипотенциала исследовалась в [19].

В разделе 1 настоящей работы дается локальное описание квазипотенциала вблизи тора Г. Аппроксимацией квазипотенциала $v(x) = \varphi(x) + O(\|\Delta(x)\|^3)$ служит квадратичная форма $\varphi(x) = \dfrac{1}{2}(\Delta(x), \Phi^+(\gamma(x))\Delta(x))$, задаваемая определенной на Г симметрической $(n\times n)$-матрицей $\Phi(\gamma) = \left[\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2}(\gamma)\right]^+$ (+ означает псевдообращение). В результате асимптотика стационарной плотности распределения для рассматриваемого в работе случая, когда малы как шумы, так и отклонения от тора, может быть записана в форме нормального распределения с ковариационной матрицей $\varepsilon^2\Phi(\gamma)$, дающей простое описание отклика рассматриваемой нелинейной системы на малые случайные возмущения. Функция $\Phi(\gamma)$ – стохастическая функция чувствительности тороидальной поверхности – позволяет сравнивать реакцию различных ее участков (разброс случайных траеторий) на вносимые помехи, предсказывая достаточно тонкие эффекты случайных воздействий. Возможности такого анализа для случая стохастически возмущенного цикла рассмотрены в [20–21]. В [22] с помощью функции чувствительности удалось провести конструктивный анализ стохастической модели Лоренца в цепи бифуркаций удвоения периода при переходе к хаосу.

Данная работа посвящена разработке теории построения функции стохастической чувствительности для тороидальных многообразий. В разделе 1 для случая 2-тора получено параметрическое описание стохастической функции чувствительности $\Phi(\gamma)$ при помощи матрицы $W(t,s) = \Phi(x(t,s))$ на решениях $x(t,s)$, лежащих на тороидальной поверхности. Отыскание этой матрицы сводится к решению линейного дифференциального матричного уравнения.

В разделе 2 детально исследуется случай 2-тора в трехмерном пространстве. Здесь построение стохастической функции чувствительности – скалярной функции – сводится к решению некоторого функционального уравнения.

Эффективность полученных результатов демонстрируется в разделе 3, где дается пример конструктивного построения стохастической функции чувствительности и ее исследования в зависимости от параметров системы.

1. Аппроксимация квазипотенциала. Функция чувствительности для тора

Квазипотенциалом системы (2) в окрестности D тороидальной поверхности Г является функция

$$v(x) = \inf_{u\in U} J(x,u), \quad J(x,u) = \frac{1}{2}\int_0^\infty u^\top(\tau)\mathcal{S}^{-1}(y(\tau))u(\tau)d\tau, \quad \mathcal{S}(y) = \sigma(y)\sigma^\top(y).$$

Здесь множество допустимых управлений U составляют n-мерные вектор-функции u,

переводящие систему

$$\dot{y} = -f(y) + u \tag{1.1}$$

из начального положения $y(0) = x$ на тороидальную поверхность $\Gamma : \lim\limits_{\tau\to\infty} \Delta(y(\tau)) = 0$. Функция $v(x)$ удовлетворяет уравнению Гамильтона – Якоби

$$\left(f(x), \frac{\partial v}{\partial x}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x}, \mathcal{S}(x)\frac{\partial v}{\partial x}\right) = 0 \tag{1.2}$$

с условиями

$$v|_\Gamma = 0\,, \quad v|_{D\setminus\Gamma} > 0\,. \tag{1.3}$$

Квазипотенциал $v(x)$ в окрестности D является функцией Ляпунова для системы (1) и позволяет показать асимптотическую устойчивость тора Г. Действительно, функция $v(x)$ в точках тора Г обращается в нуль, а вне тора – положительна; производная $\dot{v}(x)$ в силу системы (1), благодаря (1.2), имеет вид

$$\dot{v} \;=\; \left(f(x), \frac{\partial v}{\partial x}\right) \;=\; -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x}, \mathcal{S}(x)\frac{\partial v}{\partial x}\right) \le 0$$

и обращается в нуль только в точках тора Г. Функция v строго убывает и стремится к нулю на всяком решении системы (1), выходящем из начальной точки, расположенной около тора.

Квазипотенциал $v(x)$ обращается в минимум на тороидальной поверхности Г, где вместе со своими частными производными первого порядка равен нулю. Поэтому первым приближением функции $v(x)$ вблизи тора Г является квадратичная форма

$$\varphi(x) = \frac{1}{2}(\Delta(x), \Psi(\gamma(x))\Delta(x)),\ v(x) = \varphi(x) + O(||\Delta(x)||^3),$$

задаваемая определенной на Г функцией $\Psi(\gamma) = \dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2}(\gamma)$. В каждой точке γ тора Г значение функции $\Psi(\gamma)$ – симметрическая неотрицательно определенная $(n \times n)$-матрица.

Проведем через точку γ поверхности Г произвольную гладкую кривую β, задаваемую параметрически функцией $\beta(\tau)$. Дифференцируя очевидное тождество $\dfrac{\partial v}{\partial x}(\beta(\tau)) \equiv 0$ по τ, получим тождество $\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2}(\beta(\tau))\dfrac{d\beta(\tau)}{d\tau} \equiv 0$, означающее, что

$$\Psi(\gamma)r(\gamma) \equiv 0\,, \tag{1.4}$$

где $r(\gamma)$ – произвольный вектор, касательный к тору Г в точке γ. Условие (1.4) означает, что матрица $\Psi(\gamma)$ является вырожденной и имеет ранг $\mathrm{rank}(\Psi(\gamma)) = n - 2$.

Значения функции $\Psi(\gamma)$ в точках тора удобно искать в параметрической форме. Воспользовавшись параметризацией 2-тора, связанной с семейством решений $x(t, s)$ детерминированной системы (1), перейдем от функции $\Psi(\gamma)$, заданной на Г, к функции

$$V(t, s) = \Psi(x(t, s)), \tag{1.5}$$

заданной на П. При этом, благодаря равенствам $x(t, s+1) = x(t, s),\ x(T(s)+t, s) = x(t, \tau(s))$, должны выполняться условия

$$V(t, s+1) = V(t, s), \;\; V(T(s)+t, s) = V(t, \tau(s)). \tag{1.6}$$

Равенство $\Psi(\gamma) = V(t(\gamma), s(\gamma))$ позволяет по функции $V(t,s)$ однозначно восстановить $\Psi(\gamma)$. При этом равенство (1.4), определяющее характер вырождения матриц $\Psi(\gamma)$, эквивалентно системе

$$V(t,s)\frac{\partial x(t,s)}{\partial t} \equiv 0\,,\ V(t,s)\frac{\partial x(t,s)}{\partial s} \equiv 0\,,$$

которую, в свою очередь, можно записать в форме

$$V(t,s)y(t,s) = 0\,,\ V(t,s)z(t,s) = 0\,. \tag{1.7}$$

Здесь

$$y(t,s) = f(x(t,s))\,, \tag{1.8}$$

а $z(t,s)$ – решение системы

$$\frac{\partial z}{\partial t} \ = \ F(t,s)z\ , \qquad \text{где}\ \ F(t,s) = \frac{\partial f}{\partial x}(x(t,s)) \tag{1.9}$$

с начальным условием $z(0,s) = \dfrac{d\alpha(s)}{ds}$.

Установленное таким образом соответствие функций $\Psi(\gamma)$ и $V(t,s)$ позволяет конструировать квазипотенциал $v(x)$ с помощью функций $V(t,s)$ – элементов пространства Σ. Пространство Σ составляют функции $V(t,s)$, определенные и достаточно гладкие на плоскости Π со значениями – симметрическими $(n \times n)$-матрицами, для которых справедливы условия (1.6), (1.7).

В последующих построениях важную роль играют матрицы, связанные с проекторами на подпространство, ортогональное тороидальной поверхности.

Рассмотрим матрицу $P_{y,z}$, задающую оператор проектирования на подпространство, ортогональное плоскости, натянутой на векторы y и z. Введем матрицу $P(t,s) = P_{y(t,s),z(t,s)}$, где $y(t,s)$ и $z(t,s)$ определены в (1.8), (1.9) и задают плоскость касательную к 2-тору Γ в точке $x(t,s)$.

Отметим, что $P_{y,z} = P_y - \dfrac{P_y z z^\top P_y}{z^\top P_y z}$, $P_y = I - \dfrac{yy^\top}{y^\top y}$, $\mathrm{rank}(P_{y,z}) \ = \ n-2\,.$

Определение 2. Матрицу $V(t,s)$ из Σ будем называть $P(t,s)$-положительно определенной в точке (t,s), если для любого вектора u, такого, что $P(t,s)u \neq 0$ справедливо неравенство $(u, V(t,s)u) > 0$. Матрицу $V(t,s)$, являющуюся $P(t,s)$-положительно определенной при любых $(t,s) \in \Pi$, будем называть P-положительно определенной.

В пространстве Σ рассмотрим конус матриц $\mathcal{K} = \{V \in \Sigma | V(t,s)$-неотрицательно определенная при любых $(t,s) \in \Pi\}$ и множество $\mathcal{K}_P = \{V \in \Sigma | V \ - \ P$-положительно определенная$\}$.

Дифференцируя уравнение Гамильтона – Якоби (1.2) в предположении достаточной гладкости квазипотенциала $v(x)$ и подставляя $x = x(t,s)$, получим для $V(t,s)$ матричное дифференциальное уравнение Бернулли

$$\frac{\partial V(t,s)}{\partial t} + F^\top(t,s)V(t,s) + V(t,s)F(t,s) + V(t,s)S(t,s)V(t,s) = 0,\ V \in \Sigma, \tag{1.10}$$

где

$$F(t,s) = \frac{\partial f(x(t,s))}{\partial x},\ \ S(t,s) = \mathcal{S}(x(t,s)) = \sigma(x(t,s))\sigma^\top(x(t,s)).$$

Рассмотрим наряду с (1.7) линейное матричное уравнение

$$\frac{\partial W(t,s)}{\partial t} = F(t,s)W(t,s) + W(t,s)F^{\top}(t,s) + P(t,s)S(t,s)P(t,s),\ W \in \Sigma. \quad (1.11)$$

Лемма 1. Пусть тор Г системы (1) является Э-устойчивым. Тогда уравнение (1.11) имеет единственное решение $W \in \mathcal{K}$.

Доказательство. Э-устойчивость тора означает [7], что для любого элемента $C \in \mathcal{K}$ существует единственное решение $V \in \mathcal{K}$ матричного уравнения Ляпунова $L[V] = -C$, где оператор Ляпунова L имеет вид

$$L[V] = \frac{\partial V(t,s)}{\partial t} + F^{\top}(t,s)V(t,s) + V(t,s)F(t,s).$$

Поскольку конус $\mathcal{K}$ – воспроизводящий в Σ [23], то оператор L обратим на всем пространстве Σ. Для пространства Σ со скалярным произведением

$$\langle V, W\rangle = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T \mathrm{tr}(V(t,s)W(t,s))dt$$

оператор L^*, сопряженный к L, имеет следующее представление

$$L^*[W] = -\frac{\partial W(t,s)}{\partial t} + F(t,s)W(t,s) + W(t,s)F^{\top}(t,s).$$

При этом уравнение (1.11) можно записать в виде $L^*[W] + PSP = 0$. Единственным решением этого уравнения будет $W = -(L^{-1})^*[PSP] \in \mathcal{K}$. Лемма 1 доказана.

Лемма 2. Пусть W – решение (1.11). Тогда $V = W^+$ – решение (1.10).

Доказательство. Умножая (1.11) слева и справа на V, получим

$$V\dot{W}V = VFP + PF^{\top}V + VSV. \quad (1.12)$$

Здесь $\dot{W} = \dfrac{\partial W}{\partial t}$. Дифференцируя равенство $V = VWV$, получим $\dot{V} = \dot{V}P + V\dot{W}V + P\dot{V}$, откуда следует $V\dot{W}V = \dot{V} - \dot{V}P - P\dot{V}$. Умножая последнее равенство слева и справа на P, получим $V\dot{W}V = -P\dot{V}P$, откуда, с учетом (1.12), следует

$$P[\dot{V} + VF + F^{\top}V + VSV]P = 0. \quad (1.13)$$

Для произвольного вектора $r = r(t,s)$ из плоскости, натянутой на векторы $y(t,s)$, $z(t,s)$, с учетом $Vr = 0$, выполняется

$$[\dot{V} + VF + F^{\top}V + VSV]r = [\dot{V} + VF]r = [\dot{Vr}] = 0. \quad (1.14)$$

Из (1.13), (1.14) следует, что $V = W^+$ – решение (1.10). Лемма 2 доказана.

Полученные результаты дают возможность записать аппроксимацию квазипотенциала

$$v(x) \approx \varphi(x) = \frac{1}{2}(\Delta(x), \Phi^+(\gamma(x))\Delta(x)),\ \ \Phi(\gamma) = W(t(\gamma), s(\gamma)),$$

используя решение $W(t,s)$ линейного матричного уравнения (1.11).

Теорема 1. Для квазипотенциала $v(x)$ в окрестности D тора Γ справедлива аппроксимация

$$v(x) = \varphi(x) + O(\|\Delta(x)\|^3). \tag{1.15}$$

Доказательство. При выводе уравнений (1.10), (1.11) предполагалось, что квазипотенциал $v(x)$ – достаточно гладкая функция. Приведем независимое доказательство, не использующее предположений гладкости.

Разность $R(x,u) = J(x,u) - \varphi(x)$ представим в интегральном виде

$$R(x,u) = \int_0^\infty G(y(s),u(s))ds, \;\; G(y,u) = \frac{1}{2}u^\top \mathcal{S}^{-1}(y)u + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}(y), -f(y)+u\right).$$

Здесь $y(t), u(t)$ – состояние и управление системы (1.1).

Управление $u_0(y) = -\mathcal{S}(y)\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}(y)$ минимизирует по u функцию $G(y,u)$

$$G(y,u) \geq G(y,u_0) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}(y), \mathcal{S}(y)\frac{\partial\varphi}{\partial x}(y)\right) + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}(y), f_0(y)\right)$$

и формирует замкнутую систему

$$\dot{y} = f_0(y), \qquad f_0(y) = -f(y) + u_0(y). \tag{1.16}$$

Функции $\eta(t,s) = x(-t,s)$ являются решениями системы (1.16) и задают параметрическое описание тороидальной поверхности Γ.

Используя [7], запишем аппроксимацию оператора Ляпунова $\mathcal{L}\varphi = (\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}, f_0)$ системы (1.16) вблизи тора в форме

$$\mathcal{L}\varphi = \frac{1}{2}(\Delta(y), \Theta(\gamma(y))\Delta(y)) + O(\|\Delta(y)\|^3), \tag{1.17}$$

где

$$Q(t,s) = \Theta(\eta(t,s)) = \frac{\partial V_0(t,s)}{\partial t} + F_0^\top(t,s)V_0(t,s) + V_0(t,s)F_0(t,s), \tag{1.18}$$

$$V_0(t,s) = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}(\eta(t,s)), \; F_0(t,s) = \frac{\partial f_0}{\partial x}(\eta(t,s)) = -\frac{\partial f}{\partial x}(\eta(t,s)) - S_0(t,s)V_0(t,s),$$
$$S_0(t,s) = \mathcal{S}(\eta(t,s)).$$

Подставляя в (1.18) $\eta(t,s) = x(-t,s)$ и учитывая (1.10), получим

$$\begin{aligned} Q(t,s) &= -\frac{\partial V(-t,s)}{\partial t} - F^\top(-t,s)V(-t,s) - \\ &-V(-t,s)F(-t,s) - 2V(-t,s)S(-t,s)V(-t,s) = \\ &= -V(-t,s)S(-t,s)V(-t,s) = -V_0(t,s)S_0(t,s)V_0(t,s). \end{aligned} \tag{1.19}$$

Полученное соотношение, в частности, означает [7], что для замкнутой системы (1.16) тор является Э-устойчивым.

Из аппроксимации

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}(y), \mathcal{S}(y)\frac{\partial\varphi}{\partial x}(y)\right) = (\Delta(y), \Omega(\gamma(y))\Delta(y)) + O(\|\Delta(y)\|^3),$$

где

$$M(t,s) = \Omega(\eta(t,s)) = V_0(t,s)S_0(t,s)V_0(t,s),$$

и соотношений (1.17)-(1.19) следует

$$G(y,u_0(y)) = O(\|\Delta(y)\|^3), \qquad R(x,u_0) = O(\|\Delta(x)\|^3), \tag{1.20}$$

$$G(y,u_0(y)) \geq -|O(\|\Delta(y)\|^3)|, \qquad R(x,u_0) \geq -|O(\|\Delta(x)\|^3)|.$$

В результате для $v(x)$ получаем оценку снизу

$$v(x) = \inf_{u\in U} J(x,u) \geq \varphi(x) - |O(\|\Delta(x)\|^3)|. \tag{1.21}$$

Из соотношений $v(x) \leq J(x,u_0) = \varphi(x) + R(x,u_0)$ и (1.20) следует оценка сверху

$$v(x) \leq \varphi(x) + |O(\|\Delta(x)\|^3)|. \tag{1.22}$$

Из (1.21) и (1.22) вытекает неравенство

$$|v(x) - \varphi(x)| \leq |O(\|\Delta(x)\|^3)|,$$

которое и доказывает теорему.

Полученная аппроксимация $\varphi(x)$ квазипотенциала $v(x)$ позволяет представить асимптотику стационарной плотности в форме нормального распределения

$$\rho(x,\varepsilon) \approx \rho_*(x,\varepsilon) = K\exp\left(-\frac{(\Delta(x), \Phi^+(\gamma(x))\Delta(x))}{2\varepsilon^2}\right)$$

с ковариационной матрицей $\varepsilon^2\Phi(\gamma)$. Эта матрица характеризует разброс случайных траекторий системы (2) в точке γ тороидальной поверхности. Пусть $\lambda_1(\gamma) \geq \lambda_2(\gamma) \geq \ldots \geq \lambda_n(\gamma)$ – собственные числа, а $h_1(\gamma)$, $h_2(\gamma), \ldots, h_n(\gamma)$ – ортонормированный базис собственных векторов матрицы $\Phi(\gamma)$. Поскольку при каждом $\gamma \in \Gamma$ матрица $\Phi(\gamma)$ вырождена ($\mathrm{rank}\Phi(\gamma) = n-2$), то $\lambda_{n-1}(\gamma) = \lambda_n(\gamma) \equiv 0$. Соответствующие собственные векторы $h_{n-1}(\gamma)$ и $h_n(\gamma)$ лежат в касательной плоскости к тору. Остальные собственные числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-2}$ при невырождающихся на Γ шумах системы (2) строго положительны и задают при каждом γ разброс случайных траекторий в направлении векторов $h_1, \ldots, h_{n-2}$ (базиса нормальной гиперплоскости).

Матрица $\Phi(\gamma)$ характеризует реакцию системы (2) вблизи тора Γ на случайные входные воздействия. Если систему (2) рассматривать как некоторый преобразователь стохастического входа (стационарный винеровский процесс $w(t)$) в стохастический выход (стационарное распределение случайных траекторий вокруг Γ), то ее собственные значения задают коэффициенты усиления ($\lambda_i > 1$) и ослабления ($\lambda_i < 1$) этого преобразователя. Функция $\Phi(\gamma)$ – стохастическая функция чувствительности тора – позволяет описать неравномерность разброса случайных траекторий около тора по всем направлениям, указать участки тороидальной поверхности, наиболее и наименее чувствительные к помехам.

2. Стохастическая чувствительность 2-тора в трехмерном пространстве

Рассмотрим систему (2) при $n = 3$. Матрица проектирования $P(t,s)$ имеет в этом случае ранг, равный единице, и может быть представлена в виде $P(t,s) = p(t,s)p^\top(t,s)$, где $p(t,s)$ – вектор единичной длины, ортогональный векторам $y(t,s)$ и $z(t,s)$. При этом матрица W решения (1.11), задающая разброс случайных траекторий вблизи 2-тора, также имеющая ранг, равный единице, может быть записана в виде $W(t,s) = \mu(t,s)P(t,s)$. Матрица проектирования $P(t,s)$ однозначно находится по исходной детерминированной тороидальной поверхности Γ. Таким образом, задача построения стохастической функции чувствительности здесь сводится к отысканию скалярной функции $\mu(t,s)$. Эта функция задает дисперсию разброса случайных траекторий в направлении нормали к тору Γ в точке $x(t,s)$.

Лемма 3. Матрица $W(t,s) = \mu(t,s)P(t,s)$ является решением уравнения (1.11) тогда и только тогда, когда скалярная функция $\mu(t,s)$ является решением системы

$$\frac{\partial \mu}{\partial t}(t,s) = a(t,s)\mu(t,s) + b(t,s) \tag{2.1}$$

с условиями

$$\mu(t,s+1) = \mu(t,s), \tag{2.2}$$

$$\mu(T(s)+t,s) = \mu(t,\tau(s)). \tag{2.3}$$

Здесь

$$a(t,s) = p^\top(t,s)[F^\top(t,s) + F(t,s)]p(t,s), \quad b(t,s) = p^\top(t,s)S(t,s)p(t,s).$$

Доказательство. Действительно, подставляя решение $W(t,s) = \mu(t,s)p(t,s)\times$ $\times p^\top(t,s)$ в уравнение (1.11), получим

$$\dot\mu pp^\top + \mu(\dot p p^\top + p(\dot p)^\top) = \mu(Fpp^\top + pp^\top F^\top) + pp^\top Spp^\top.$$

Умножая слева на $p^\top$ и справа на p, учитывая тождества $p^\top p \equiv 1$, $(\dot{p^\top p}) = \dot p^\top p +$ $+p^\top \dot p \equiv 0$, получим уравнение для μ

$$\dot\mu = p^\top(F + F^\top)p\mu + p^\top Sp.$$

Доказательство обратного утверждения легко следует из приведенных выше выкладок. Лемма 3 доказана.

В итоге при $n = 3$ отыскание стохастической функции чувствительности сводится к решению скалярного уравнения (2.1) с условиями (2.2), (2.3).

Общее решение уравнения (2.1) имеет вид

$$\mu(t,s) = g(t,s)[c(s) + h(t,s)], \tag{2.4}$$

где $g(t,s)$ и $h(t,s)$ – известные функции

$$g(t,s) = \exp\left(\int_0^t a(\tau,s)d\tau\right), \quad h(t,s) = \int_0^t \frac{b(\tau,s)}{g(\tau,s)}d\tau, \tag{2.5}$$

а $c(s)$ – неизвестная функция, играющая для $\mu(t,s)$ роль начальной: $\mu(0,s) = c(s)$. Условие (2.2) приводит к уравнению $c(s+1) = c(s)$. Условие (2.3) ведет к соотношению

$$g(T(s),s)[c(s) + h(T(s),s)] = c(\tau(s)).$$

Обозначим

$$\alpha(s) = g(T(s),s), \qquad \beta(s) = \alpha(s)h(T(s),s). \tag{2.6}$$

В итоге для функции $c(s)$ получаем функциональное уравнение

$$c(\tau(s)) = \alpha(s)c(s) + \beta(s) \tag{2.7}$$

с условием

$$c(s+1) = c(s). \tag{2.8}$$

Таким образом, построение стохастической функции чувствительности $\mu(t,s)$ для 2-тора в трехмерном пространстве по формулам (2.4),(2.5) сводится к решению функционального уравнения (2.7) с условием (2.8). Существование и единственность решения (2.7)-(2.8) в случае Э-устойчивости тора Г системы (1) непосредственно следует из леммы 1 и леммы 3.

Решение $\bar{c}(s)$ системы (2.7)-(2.8) может быть найдено методом установления. Рассмотрим последовательности $s_0 = s,\ s_1, \ldots,\ s_k, \ldots$, где $s_{k+1} = \tau(s_k)$, и $\bar{c}_0, \bar{c}_1, \ldots,\ \bar{c}_k, \ldots$, где $\bar{c}_k = \bar{c}(s_k)$. Значения $\bar{c}_k$, благодаря (2.7), связаны уравнением

$$\bar{c}_{k+1} = \alpha_k \bar{c}_k + \beta_k, \ \ \alpha_k = \alpha(s_k)\ ,\ \beta_k = \beta(s_k). \tag{2.9}$$

Для элементов $\bar{c}_k$ рассмотрим приближения c_k, задаваемые рекуррентной формулой

$$c_{k+1} = \alpha_k c_k + \beta_k,$$

где c_0 – некоторое приближение для $\bar{c}_0$.

Теорема 2. Пусть тор Г является Э-устойчивым. Тогда $\lim\limits_{k\to\infty}(c_k - \bar{c}_k) = 0$ независимо от выбора начального приближения c_0.

Доказательство. Погрешность $r_k = c_k - \bar{c}_k$ удовлетворяет уравнению $r_{k+1} = \alpha_k r_k$ и связана с погрешностью r_0 соотношением $r_k = q_k r_0$, где $q_k = \prod\limits_{i=0}^{k-1} \alpha_i$. Для величины q_k справедливо [7] представление

$$q_k = \exp\left(\int_0^{T_k(s)} a(t,s)dt\right),$$

где $T_k(s)$ – время, необходимое для прохождения траектории $x(t,s)$ по спирали, состоящей из k витков.

Необходимым и достаточным условием Э-устойчивости тора в системе (1) является [7] неравенство

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T a(t,s)dt < 0. \tag{2.10}$$

Условие (2.10) означает, что $\lim\limits_{k\to\infty} q_k = 0$ и, следовательно, $\lim\limits_{k\to\infty} r_k = 0$ независимо от выбора c_0.

3. Пример

Рассмотрим в трехмерном пространстве переменных (x, y, z) 2-тор Γ, задаваемый уравнением

$$(\sqrt{x^2+y^2}-1)^2+z^2=r_0^2, \quad 0<r_0<1.$$

В канонических переменных r, φ, ψ, связанных с исходными переменными x, y, z соотношениями $x=(2+r\cos\psi)\cos\varphi,\ y=(2+r\cos\psi)\sin\varphi,\ z=r\sin\psi$, тороидальная поверхность задается следующим образом:

$$r=r_0, \quad 0\le\varphi\le 2\pi, \quad 0\le\psi\le 2\pi.$$

Рассмотрим в новых переменных стохастическую систему

$$\begin{aligned} \dot r &= f(r)+\varepsilon\sqrt{\sigma(\varphi,\psi)}\dot w, \\ \dot\varphi &= \omega, \\ \dot\psi &= \nu, \end{aligned} \tag{3.1}$$

где $f(r)=\dfrac{A}{4}r[(\dfrac{r}{r_0})^2-1]$ и $\sigma(\varphi,\psi)=1+B\cos(\varphi)+D\cos(\psi)$, $w(t)$ – стандартный винеровский процесс. Поскольку $f(r_0)=0$, то для системы (3.1) при $\varepsilon=0$ тор Γ является инвариантным многообразием и может быть параметрически задан семейством ее решений $r(t)\equiv r_0$, $\varphi(t,s)=\omega t+2\pi s$, $\psi(t)=\nu t$. Здесь роль одного из параметров играет время t, а параметр s задает начальное состояние $\varphi(0,s)=2\pi s$. При этом $T(s)=\dfrac{2\pi}{\nu}$, $\tau(s)=\dfrac{\omega}{\nu}+s$.

Необходимым и достаточным условием Э-устойчивости детерминированного тора Γ будет неравенство $A<0$.

Найдем функции $g(t,s)$, $h(t,s)$ и $c(s)$, задающие стохастическую функцию чувствительности (2.4) тора Γ для системы (3.1). В нашем примере коэффициенты уравнения (2.1) имеют вид $a(t,s)\equiv A$, $b(t,s)=\sigma(\omega t+2\pi s,\nu t)=$ $=1+B\cos(\omega t+2\pi s)+D\cos(\nu t)$. Из (2.5) следует

$$g(t,s)=e^{At},$$

$$h(t,s)=\frac{1}{A}(1-e^{-At})+$$

$$+\frac{B}{A^2+\omega^2}\left[e^{-At}(-A\cos(\omega t+2\pi s)+\omega\sin(\omega t+2\pi s))+A\cos 2\pi s-\omega\sin 2\pi s\right]+$$

$$+\frac{D}{A^2+\nu^2}\left[e^{-At}(-A\cos(\nu t)+\nu\sin(\nu t))+A\right].$$

Коэффициенты (2.6) имеют вид

$$\alpha(s)\equiv\alpha=e^{\frac{2\pi A}{\nu}},$$

$$\beta(s)=\alpha\int\limits_0^{\frac{2\pi}{\nu}}e^{-A\tau}(1+B\cos(\omega\tau+2\pi s)+D\cos(\nu\tau))d\tau=K_0+K_1\cos(2\pi s)+K_2\sin(2\pi s),$$

где

$$K_0 = (\alpha - 1)\left(\frac{1}{A} + \frac{AD}{A^2 + \nu^2}\right),\ K_1 = \frac{B}{A^2 + \omega^2}\left(-A\cos\eta + \omega\sin\eta + A\alpha\right)$$

$$K_2 = \frac{B}{A^2 + \omega^2}\left(A\sin\eta + \omega\cos\eta - \omega\alpha\right), \qquad \eta = \frac{2\pi\omega}{\nu}.$$

В рассматриваемом примере функциональное уравнение (2.6)-(2.7) имеет аналитическое решение

$$c(s) = c_0 + c_1\cos(2\pi s) + c_2\sin(2\pi s),$$

где

$$c_0 = \frac{K_0}{1-\alpha},\ \ c_1 = \frac{K_1(\cos\eta - \alpha) - K_2\sin\eta}{1 - 2\alpha\cos\eta + \alpha^2},\ \ c_2 = \frac{K_2(\cos\eta - \alpha) + K_1\sin\eta}{1 - 2\alpha\cos\eta + \alpha^2}.$$

В итоге получаем стохастическую функцию чувствительности

$$\mu(t,s) = e^{At}\left(c_1\cos(2\pi s) + c_2\sin(2\pi s) + \frac{B}{A^2+\omega^2}(A\cos(2\pi s) - \omega\sin(2\pi s))\right) +$$

$$+\frac{B}{A^2+\omega^2}(-A\cos(\omega t + 2\pi s) + \omega\sin(\omega t + 2\pi s)) + \frac{D}{A^2+\nu^2}(-A\cos(\nu t) + \nu\sin(\nu t)) - \frac{1}{A}.$$

Данная формула задает связь значений стохастической функции чувствительности с параметрами системы. Рассмотрим зависимость функции чувствительности μ от параметров $A,\ B,\ D,\ w$ и ν. При уменьшении параметра A функция μ убывает. Параметр A характеризует степень устойчивости детерминированного тора. Как видим, увеличение степени устойчивости детерминированного тора ведет к уменьшению стохастической чувствительности. Параметры B и D характеризуют перепад интенсивности случайных возмущений при движении вблизи тора. Увеличение B и D приводит к соответствующему увеличению перепада значений стохастической чувствительности μ.

Зависимость μ от частот вращений ω и ν удобно изобразить графически.

На рис. 2 представлены графики стохастической функции чувствительности при $A = -1,\ B = 0.5,\ D = 0.4$ для различных значений параметров ω и ν. Слева в плоскости переменных (s, μ) приведены графики $\mu(t_k, s)$ для некоторого набора t_k. Справа – графики функции $\mu(t,s)$ в трехмерном пространстве. Как видно из рис. 2, значения μ при движении вдоль тороидальной поверхности существенно изменяются: *а*) при $\omega = 1,\ \nu = 1$ значения μ лежат в интервале $(0.4,\ 1.6)$; *б*) при $\omega = 1,\ \nu = 3$ значения μ лежат в интервале $(0.5,\ 1.5)$; *в*) при $\omega = 3,\ \nu = 1$ значения μ лежат в интервале $(0.6,\ 1.4)$; *г*) при $\omega = 3,\ \nu = 3$ значения μ лежат в интервале $(0.7,\ 1.3)$.

Соответствующим образом будет меняться и разброс случайных траекторий около тороидальной поверхности.

Увеличение частот вращения ω и ν, приводящее к увеличению скорости движения вдоль тороидальной поверхности, ведет к уменьшению перепада значений стохастической функции чувствительности μ. Увеличение ω и ν улучшает стохастическое перемешивание случайных траекторий, делая их разброс около тора более однородным.

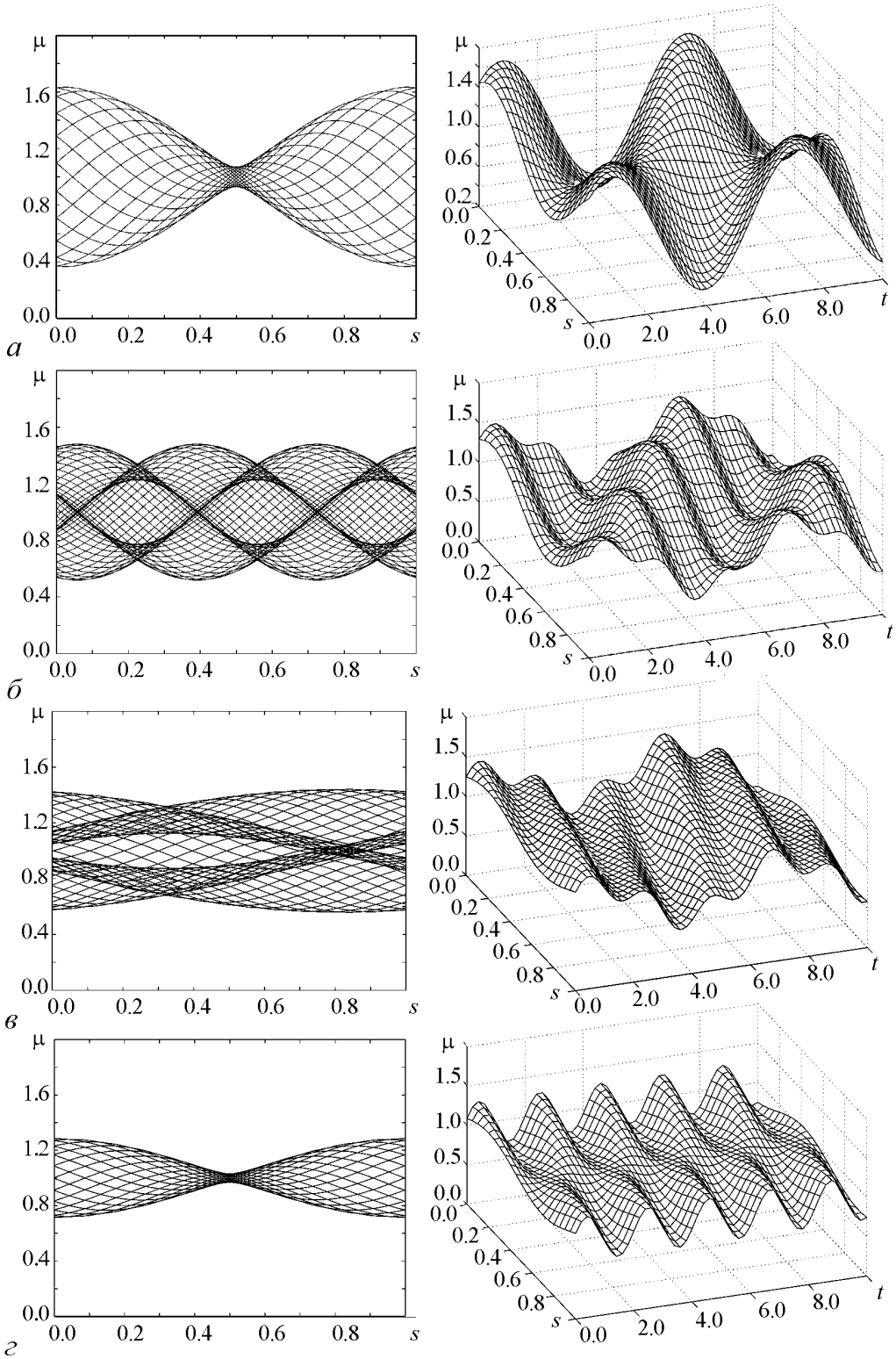


Рис. 2. Стохастическая функция чувствительности: *а* – $\omega = 1$, $\nu = 1$; *б* – $\omega = 1$, $\nu = 3$; *в* – $\omega = 3$, $\nu = 1$; *г* – $\omega = 3$, $\nu = 3$

На рис. 3 для $A = -1$, $B = 0.5$, $D = 0.4$, $\omega = 1$, $\nu = 1$ представлен график (сплошная линия) теоретической функции чувствительности $\mu(t, s)$ при фиксированном значении $s = 0$. Соответствующие значения эмпирической функции чувствительности $\mu_i^* = \dfrac{D_i}{\varepsilon^2}$, где D – эмпирическая дисперсия, полученны прямым численным моделированием случайных траекторий (изображены звездочками).

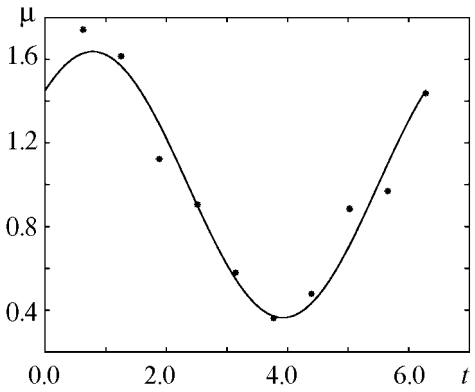


Рис. 3. Теоретическая (сплошная линия) и эмпирическая (звездочки) стохастическая чувствительность

Как видим, хорошее соответствие позволяет использовать представленную в работе конструкцию теоретической функции чувствительности в описании особенностей распределения случайных траекторий около тороидальной поверхности.

Заключение

В работе на основе аппроксимации квазипотенциала введена конструкция функции стохастической чувствительности для динамической системы, аттрактором которой является двумерное тороидальное многообразие. Построение этой функции сводится к некоторой краевой задаче для линейного матричного дифференциального уравнения. В случае трехмерного пространства для этой задачи получено аналитическое решение. Приведенный пример показывает, что функция стохастической чувствительности является удобным инструментом в исследовании разброса стохастически возмущенных траекторий вблизи тороидальных многообразий.

Работа выполнена при поддержке грантов РФФИ № 06-01-00625 и № 04-01-9698 Урал.

Библиографический список

1. *Арнольд В.И.* Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978. 304 с.
2. *Неймарк Ю.И.* Интегральные многообразия дифференциальных уравнений // Изв. вузов. Радиофизика. 1967. Т. 10, №3. С. 321.
3. *Гуртовник А.С., Неймарк Ю.И.* К вопросу об устойчивости квазипериодических движений // Дифференциальные уравнения. 1969. Т. 5, №5. С. 824.
4. *Самойленко А.М.* Элементы математической теории многочастотных колебаний. Инвариантные торы. М.: Наука, 1987. 304 с.
5. *Колесов А.Ю., Мищенко Е.Ф.* Существование и устойчивость релаксационного тора. // Успехи математических наук. 1989. Т. 44, вып. 3(365). С. 161.

6. *Колесов А.Ю.* О существовании и устойчивости двумерного релаксационного тора // Математические заметки. 1994. Т. 56, вып. 6. С. 40.
7. *Ряшко Л.Б.* Метод функций Ляпунова в исследовании устойчивости и стабилизации двумерного инвариантного тора // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2001. Т. 9, № 4-5. С. 140.
8. *Ryashko L.B.* Exponential mean square stability of stochastically forced 2-torus // Nonlinearity. 2004. Vol. 17. P. 729.
9. *Понтрягин Л.С., Андронов А.А.,Витт А.А.* О статистическом рассмотрении динамических систем // ЖЭТФ. 1933. Т. 3, вып. 3. С.165.
10. *Стратонович Р.Л.* Избранные вопросы теории флуктуаций в радиотехнике. М.: Сов. радио, 1961.
11. *Рытов С.М.* Введение в стохастическую радиофизику. М.: Наука, 1976.
12. *Болотин В.В.* Случайные колебания упругих систем. М.: Наука, 1979.
13. *Диментберг М.Ф.* Нелинейные стохастические задачи механических колебаний. М.: Наука, 1980.
14. *Неймарк Ю.И., Ланда П.С.* Стохастические и хаотические колебания. М.: Наука, 1987. 424 с.
15. *Soong T.T., Grigoriu M.* Random vibration of mechanical and structural systems. RTR Prentice–Hall, Englewood Cliffs, New Jersey. 1993.
16. *Вентцель А.Д., Фрейдлин М.И.* Флуктуации в динамических системах под действием малых случайных возмущений. М.: Наука, 1979. 424 с.
17. *Day M.V.* Regularity of boundary quasi-potentials for planar systems // Applied Mathematics and Optimization. 1994. Vol. 30. P. 79.
18. *Naeh T., Klosek M.M., Matkowsky B.J., Schuss Z.* A direct approach to the exit problem // SIAM Journal Appl.Math. 1990. Vol. 50, №2. P. 595.
19. *Мильштейн Г.Н., Ряшко Л.Б.* Первое приближение квазипотенциала в задачах об устойчивости систем со случайными невырожденными возмущениями // Прикл. математика и механика. 1995. Т. 59, вып. 1. С. 53.
20. *Башкирцева И.А., Исакова М.Г., Ряшко Л.Б.* Асимптотическое разложение квазипотенциала для стохастически возмущенного нелинейного осциллятора // Дифференциальные уравнения. 1999. Т. 35, №10. С. 1319.
21. *Башкирцева И.А., Ряшко Л.Б.* Метод квазипотенциала в анализе чувствительности автоколебаний к стохастическим возмущениям // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 1998. Т. 6, №5. С. 19.
22. *Bashkirtseva I.A., Ryashko L.B.* Sensitivity analysis of stochastically forced Lorenz model cycles under period-doubling bifurcations // Dynamic Systems and Applications. 2002. Vol. 11, №2. P. 293.
23. *Красносельский М.А., Лифшиц Е.А., Соболев А.В.* Позитивные линейные системы. М.: Наука, 1985. 255 с.

Уральский государственный университет, Екатеринбург

Поступила в редакцию *25.04.2005*
После доработки *29.11.2005*

QUASI-POTENTIAL METHOD FOR 2-TORUS STOCHASTIC SENSITIVITY ANALYSIS

L.B.Ryashko

On the basis of quasi-potential method the stationary distribution of random trajectories in a vicinity of toroidal manifolds of stochastically forced nonlinear systems is investigated. For the quasi-potential approximation the quadratic form defined by some matrix function is used. This function named stochastic sensitivity function characterizes the response of considered system on random disturbances. Construction of this function is reduced to the decision of a boundary problem for linear differential matrix equation. For 2-torus in three-dimensional space a constructive decision of this problem is given. Construction of stochastic sensitivity function is reduced to the decision of some functional equation. Efficiency of the presented results is shown on the example.

Ряшко Лев Борисович – окончил Уральский госуниверситет (1975), кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математической физики Уральского госуниверситета, Соросовский доцент (1996, 1998). Область научных интересов – устойчивость, стабилизация и управление стохастическими системами, автор ряда статей по данной тематике.
E-mail: lev.ryashko@usu.ru

Прикладные задачи нелинейной теории колебаний и волн

Изв. вузов «ПНД», т. 14, № 1, 2006 УДК 517.9

ПРИБЛИЖЕННОЕ ОПИСАНИЕ МНОЖЕСТВА МАНДЕЛЬБРОТА. ТЕРМОДИНАМИЧЕСКАЯ АНАЛОГИЯ

О.Б. Исаева, С.П. Кузнецов

В работе развита аналогия между приближенным ренормгрупповым анализом каскада удвоений Фейгенбаума, обобщенным на комплексный случай, и фазовыми переходами в соответствии с теорией Ли и Янга (основанной на рассмотрении формально комплексифицированных термодинамических величин). Результаты обобщены на случай других последовательностей усложнения периода, характерных для комплексных аналитических отображений. Показано, что множества Жюлиа преобразований перенормировки являются приближенными версиями множества Мандельброта.

Введение

В последние годы интенсивно изучается фазовый переход между магнитным и немагнитным состояниями вещества [1–4]. В магнитной фазе, наблюдающейся при достаточно низких температурах, элементарные атомные магниты вещества стремятся расположиться параллельно друг другу, определяя тем самым упорядоченность системы. С ростом температуры тепловые флуктуации возрастают и этот порядок постепенно разрушается. При переходе через критическую точку – точку фазового перехода Кюри – реализуется хаотическая ориентация элементарных магнитов, то есть возникает немагнитная фаза. Однако вблизи критической точки элементарные магниты еще могут сохранять упорядоченность на определенных расстояниях и в течение определенных промежутков времени, которые уменьшаются при увеличении температуры. Таким образом, вблизи точки Кюри сосуществуют области когерентности и области тепловых флуктуаций. Причем наблюдать области флуктуаций в магнитной фазе или области когерентности в немагнитной можно лишь в определенных масштабах. На достаточно больших масштабах система будет выглядеть полностью упорядоченной (как при нулевой температуре) или хаотической (как при бесконечной температуре). Если одну и ту же систему при фиксированной температуре рассматривать в различных масштабах, то она будет выглядеть так, как будто ее

температуры различны. Масштабные преобразования можно связать с изменениями температуры – ввести перенормировку температуры.

Допустим, имеется система из N атомов с межатомным расстоянием a при температуре T. Если рассматривать эту систему при достаточно грубом масштабе, при котором элементарная ячейка имеет характерный размер na и содержит n^3 атомов, то система будет выглядеть так, как будто она состоит из N/n^3 атомов и имеет перенормированную температуру $T' = R(T)$ (R – функция перенормировки). Непосредственно в точке фазового перехода тепловые флуктуации наблюдаются на любых масштабах. Они имеют согласованный характер и являются самоподобными. Идея самоподобия была предложена в 1966 году Кадановым [5] и далее развита в метод перенормировок в работах Вильсона [6] (см. также [2]).

Концепции универсальности и скейлинга вблизи критической точки, метод перенормировок – метод ренормализационной группы (РГ), далее были перенесены в нелинейную динамику Фейгенбаумом [7, 8]. Обнаруженная им аналогия между переходом к хаосу и теорией фазовых переходов проявляется в увеличении временных и пространственных масштабов вблизи критической точки, подобии образований в широком интервале масштабов, возможности ренормгруппового анализа и существовании универсальных критических индексов и масштабных факторов, которые определяются самыми общими требованиями к типу системы [9–12].

В 1952 году Ли и Янгом [13, 14] была развита теория, основанная на рассмотрении аналитических свойств некоторых термодинамических величин, в частности, статистической суммы и термодинамических потенциалов, в зависимости от температуры, рассматриваемой формально как комплексная переменная.

Выражение для статистической суммы выглядит следующим образом:

$$Z_N(T,H) = \sum_{[s_i]} \exp\left(-\frac{E[s_i]}{kT}\right) = \sum_{[s_i]} \exp\left(\frac{J}{kT}\sum_{\langle i,j\rangle} s_i s_j + \frac{H}{kT}\sum_i s_i\right), \qquad (1)$$

где H – внешнее магнитное поле; T – температура; k – постоянная Больцмана; s_i – спин, находящийся в i-м узле решетки и принимающий значения ± 1; $E[s_i]$ – суммарная энергия конфигурации системы $[s_i]$. Спины взаимодействуют с магнитным полем и со своими ближайшими соседями $\langle i,j\rangle$. При $J > 0$ взаимодействие ферромагнитное, а при $J < 0$ – антиферромагнитное.

Выражение для статсуммы заменой переменной $z = \exp(-2H/kT)$ можно преобразовать к виду

$$Z_N = e^{-N/2}\sum_{n=0}^{N} p_n z^n. \qquad (2)$$

Известно, что в точке фазового перехода должны существовать расходимости термодинамического потенциала (удельной свободной энергии)

$$f(H,T) = \lim_{N\to\infty} -\frac{kT}{N}\ln Z_N. \qquad (3)$$

Отсюда видно, что в нулях статистической суммы, представляющих собой решения полиномиального алгебраического уравнения, возникают особенности, делающие их кандидатами на фазовые переходы. Однако эти корни должны быть положительными и действительными, что невозможно из-за того, что все коэффициенты $p_n > 0$. Идея

теории Янга – Ли заключается в введении комплексных температуры и магнитного поля [4, 13–15]. В этом случае уже комплексные нули статсуммы, так называемые нули Янга – Ли, собираются вблизи действительной оси и тем самым определяют искомые особенности. Это становится возможным лишь в термодинамическом пределе, соответствующем бесконечному числу частиц. Действительно, в случае когда число частиц конечно, статсумма имеет конечное число нулей в комплексной плоскости. По мере роста числа частиц растет число нулей, при этом множество нулей становится все плотнее и все больше прижимается к действительной оси. Лишь в термодинамическом пределе они выстраиваются в одну линию пересекающую действительную ось в точке фазового перехода. При этом области, разграниченные этой линией, являются продолженными на комплексную плоскость областями той или иной фазы, а сама линия может быть интерпретирована как комплексная фазовая граница.

Для отыскания нулей Янга – Ли можно применить развитый Вильсоном метод РГ, который заключается в последовательном уменьшении числа степеней свободы статистической суммы. Идея этого метода состоит в нахождении преобразования, выражающего N-частичную статсумму через N'-частичную ($N' < N$). Ясно, что это преобразование не является взаимооднозначным. Таким образом, для того, чтобы найти нули Z_N надо найти нули $Z_{N'}$, а затем получить их прообразы относительно РГ-преобразования. Повторив эту процедуру соответствующее количество раз можно прийти к тривиальной двухчастичной статистической сумме. Предположив, что нули Z_2 принадлежат бассейну притяжения некой неподвижной точки преобразования перенормировки в термодинамическом пределе мы получим границу области притяжения, которая представляет собой так называемое множество Жюлиа (подробнее см. раздел 3). В результате устанавливается тождественность в т/д пределе нулей Янга – Ли и множества Жюлиа преобразования перенормировки. Этот результат был получен в работе [16][1].

Таким образом, теория Ли и Янга оказалась плодотворной для понимания природы фазовых переходов. Представляется, что подход с аналогичных позиций к анализу перехода к хаосу в динамических системах может оказаться полезным для углубления аналогии с фазовыми переходами и для выработки новых критериев, характеризующих сложность динамического поведения нелинейных систем. В данной работе мы развиваем такой подход опираясь на приближенный РГ-анализ перехода к хаосу через удвоения и другие характерные для комплексных отображений типы усложнения периода.

[1]К сожалению, аналитическим образом функцию перенормировки удается найти лишь для простейших моделей – иерархических решеток. Примером может служить одномерная модель со спинами Изинга (спины могут принимать значения $+1$ и -1), преобразование перенормировки которого выглядит как $x' = R(x) = (1/2)(x+1/x)$, где x – некая переменная, соответствующая температуре. Причем, значение $x = 0$ отвечает нулевой температуре, а $x = 1$ – бесконечной. Для некоторых систем множество нулей статсуммы может быть получено и без использования метода перенормировок, например, для одномерной и квадратной двумерной решеток Изинга. Решение для двумерной модели Изинга было получено Онзагером [17] (см. также [18]). Кроме простой модели Изинга, большой интерес представляют иерархические решетки со спинами Поттса (спин может иметь q различных состояний). Преобразования перенормировки для этих решеток имеют вид $x' = R(x) = (x^2+q-1)^2/(2x+q-2)^2$, $x' = R(x) = (x^3 + 3(q-1)x + (q-1)(q-2))^2/(3x^2 + 3(q-2)x + q^2 + 3q + 3)^2$. Существует также ряд других моделей иерархических решеток [19–23].

1. Приближенный ренормгрупповой анализ Фейгенбаума

В 1978 году Фейгенбаум открыл универсальность последовательности бифуркаций удвоения периода и предложил ее объяснение на основе метода ренормгруппы. Простейшей моделью являющейся представителем фейгенбаумовского класса универсальности является логистическое отображение

$$x_{n+1} = f_\lambda(x_n) = \lambda - x_n^2, \tag{4}$$

где x – вещественная переменная, а λ – вещественный параметр. Это преобразование имеет неподвижную точку, которую можно найти как корень уравнения $x_* = \lambda - x_*^2$. При $\lambda > \Lambda_1 = 3/4$ теряет устойчивость цикл периода 1 (то есть неподвижная точка), где Λ_1 – значение параметра, определяющее момент первой бифуркации удвоения периода. Мультипликатор цикла $\mu = f'_\lambda(x_*) = -2x_* = -1$. Значения параметра λ, отвечающие последующим бифуркациям, можно найти посредством приближенного метода РГ-анализа [24]. Выполним преобразование (4) дважды, тогда получим

$$x_{n+2} = \lambda - \lambda^2 + 2\lambda x_n^2 - x_n^4. \tag{5}$$

Пренебрежем здесь последним слагаемым x_n^4 (будем рассматривать такие значения λ, при которых интервал $[-1, 1]$ переходит в себя, то есть $|x_n| < 1$). Оставшееся равенство с помощью масштабного преобразования

$$x_n \to x_n/\alpha_0, \qquad \alpha_0 = -2\lambda, \tag{6}$$

определяемого условием равенства минус единице коэффициента при квадратичном члене, можно переписать в виде уравнения $x_{n+2} = \lambda_1 - x_n^2$, отличающегося от (4) лишь заменой параметра λ на

$$\lambda_1 = \varphi(\lambda) = -2\lambda(\lambda - \lambda^2). \tag{7}$$

Таким образом, оператор эволюции за удвоенный временной интервал приводится приближенной перенормировкой (7) к исходному виду (будем также называть уравнение (7) РГ-преобразованием). Повторяя эту операцию с масштабными множителями $\alpha_1 = -2\lambda_1, \ldots$, получим ряд последовательных отображений того же вида

$$x_{n+2^m} = \lambda_m - x_n^2, \qquad \lambda_m = \varphi(\lambda_{m-1}). \tag{8}$$

Неподвижные точки этих отображений отвечают 2^m-циклам ($m = 1, 2, 3, \ldots$). Нетрудно видеть, что все эти циклы, как и неподвижная точка отображения (4), становятся неустойчивыми при $\lambda_m = \varphi^m(\lambda) = \Lambda_1 = 3/4$. Решая цепочку уравнений

$$\Lambda_1 = \varphi(\Lambda_2),\ \Lambda_2 = \varphi(\Lambda_3), \ldots, \Lambda_{m-1} = \varphi(\Lambda_m), \tag{9}$$

можно найти соответствующую последовательность бифуркационных значений параметра λ (значение параметра $\lambda = \Lambda_m$ отвечает бифуркации удвоения периода, при которой у отображения (4) возникает устойчивый цикл периода 2^m). Последовательность критических значений управляющего параметра при $m \to \infty$ сходится к конечному пределу Λ_∞ – неподвижной точке РГ-преобразования (рис. 1), то

есть корню уравнения $\lambda = \varphi(\lambda)$, который равен $\lambda_* = \Lambda_\infty = (1+\sqrt{3})/2 \approx 1.37$. Кроме того, к конечному пределу стремятся и масштабные факторы $\alpha_m \to \alpha$, где $\alpha = -2\Lambda_\infty \approx 2.74$, и мультипликаторы этих циклов $\mu_m \to \mu = \sqrt{1-4\Lambda_\infty} \approx -1.54$.

Нетрудно видеть, что из преобразования (8) при $\Lambda_{m+1} \to \Lambda_\infty$ можно получить закон сходимости бифуркационных значений параметра к критической точке

$$\Lambda_m \approx \varphi(\Lambda_\infty) + \varphi'(\Lambda_\infty)(\Lambda_{m+1} - \Lambda_\infty) = \Lambda_\infty + \delta(\Lambda_{m+1} - \Lambda_\infty). \qquad (10)$$

Причем $\delta = \varphi'(\Lambda_\infty) = 4 + \sqrt{3} \approx 5.73$ – константа сходимости бифуркационных значений управляющего параметра к критическому значению.

В табл. 1 приведены приближенные значения критических индексов и соответствующие известные значения этих критических индексов, получаемые посредством точного ренормгруппового анализа. Видно, что они достаточно хорошо согласуются друг с другом.

Таблица 1

Точные и приближенные значения критических индексов для точки Фейгенбаума

	Точн. [24]	Прибл.
λ_*	1.401	1.37
α	-2.802	-2.74
δ	4.669	5.73
μ	-1.569	-1.54

.

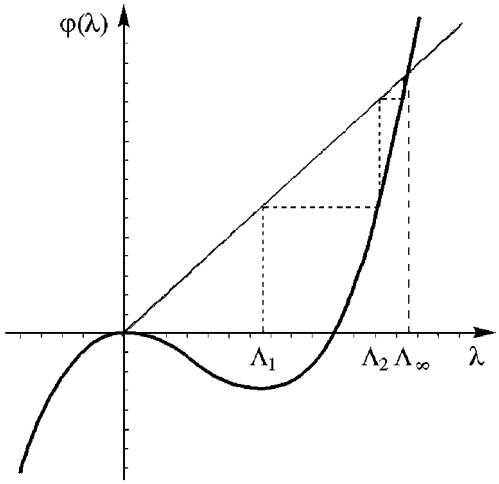


Рис. 1. Итерационная диаграмма РГ-преобразования (7). Пунктиром обозначена траектория, соответствующая обратным итерациям (7). Траектория стартует из первого бифуркационного значения параметра $\Lambda_1 = 3/4$ и далее отображается в последующие точки удвоений периода Λ_m

2. Комплексная версия уравнения РГ и его множество Жюлиа – множество критических точек

При переходе в область комплексных значений динамической переменной x и параметра λ отображения (4) обнаруживается, что закономерности скейлинга Фейгенбаума выступают как частный случай свойств скейлинга множества Мандельброта. Множество Мандельброта, представленное на рис. 2, как известно [4, 25], может быть построено как

$$M = \{\lambda \in \mathbf{C} : \lim_{n\to\infty} f_\lambda^n(0) \neq \infty\}, \qquad (11)$$

то есть в виде множества значений комплексного параметра, для которых орбиты экстремума отображения (4) $0 \to \lambda \to \lambda - \lambda^2 \to, , ,$ остаются ограниченными. Множество Мандельброта включает в себя как совокупность областей, для которых реализуются периодические траектории отображения (большая кардиоида и множество

круглых «лепестков», закрашенные серым цветом), так и множество значений параметров, отвечающих ограниченной хаотической динамике (черный фрактальный узор). Фейгенбаумовский каскад удвоений периода располагается вдоль действительной оси (см. аналогию с бифуркационным деревом).

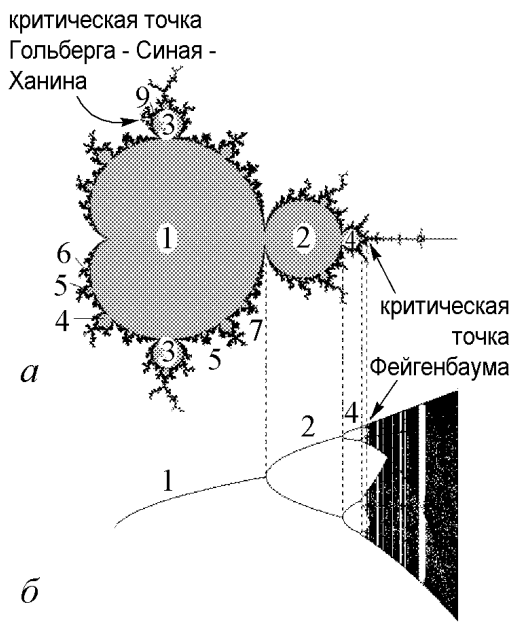


Рис. 2. Соотношение между множеством Мандельброта (*а*) и фейгенбаумовским бифуркационным деревом (*б*). Множество Мандельброта построено на плоскости $(\mathrm{Re}\lambda, \mathrm{Im}\lambda)$ для комплексного квадратичного отображения (4). Бифуркационное дерево построено на плоскости (λ, x_n) для отображения (4) с вещественными переменной и параметром. Серым цветом на рисунке (*а*) обозначены области, которым соответствует существование периодической динамики (периоды указаны цифрами); черным цветом обозначены точки, в которых реализуется ограниченная в фазовом пространстве хаотическая динамика; белый цвет означает убегание траекторий на бесконечность

Однако на комплексной плоскости имеются точки накопления и других бифуркаций. Одна из таких точек, в окрестности которой имеют место свои, отличные от фейгенбаумовских, закономерности скейлинга (типичные лишь для аналитических комплексных отображений [26, 27]), связана с каскадом утроений периода и обнаружена в работе [28]. Существуют также критические точки каскадов учетверений периода, упятерений и т.д. Таким образом, комплексификация отображения приводит к возникновению новых сценариев перехода к хаосу и других критических явлений.

Рассмотрим обобщенное на комплексный случай приближенное уравнение перенормировки для удвоений периода

$$\lambda_{n+1} = \varphi(\lambda_n) = -2\lambda_n(\lambda_n - \lambda_n^2), \quad (12)$$

которое представляет из себя отображение с комплексной переменной λ. Стартуя из некоторой точки комплексной плоскости, можно наблюдать итерации в конечной области либо уход на бесконечность, то есть в данном случае существуют два аттрактора – нуль и бесконечность. Множество точек, разграничивающее бассейны притяжения этих аттракторов, является так называемым множеством Жюлиа J [4]. Будем называть его *критическим множеством* по аналогии с теорией фазовых переходов, в которой оно интерпретируется как критическая фазовая граница. Необходимо отметить, что классическое множество Жюлиа строится на фазовой плоскости переменной комплексного квадратичного отображения. Для рассматриваемого отображения перенормировки (12) в качестве переменной выступает параметр λ исходного отображения и обобщенное множество Жюлиа определяется как граница области

$$P = \{\lambda \in \mathbf{C} : \lim_{n\to\infty} \varphi^n(\lambda) \neq \infty\}. \quad (13)$$

На рис. 3 изображена комплексная плоскость начальных значений переменной λ итерационного процесса, представленного РГ-преобразованием (12). Черным цветом показан бассейн притяжения неподвижной точки отображения, то есть область ограниченная множеством Жюлиа J. Различными оттенками серого обозначены области

комплексной плоскости с различными временами убегания (динамическим расстоянием до аттрактора на бесконечности), то есть множества точек с различным числом итераций, необходимых для убегания точки из круга определенного достаточно большого радиуса.

Необходимо отметить, что представленное на рисунке множество Жюлиа напоминает по форме множество Мандельброта исходного отображения (4) (см. рис. 2). Сходство между ними определяется следующим фактом. Действительно, убегание на бесконечность при итерациях РГ-преобразования означает убегание на бесконечность итераций исходного отображения (4) за соответствующее число шагов. Различие же в некоторой степени объясняется тем, что при построении процедуры приближенного РГ-анализа не учитывались члены высокого порядка (см. раздел 1). Кроме того, следует учесть, что преобразование перенормировки (12) описывает свойства лишь каскада удвоений периода, тем самым обеспечивая сходство множеств M и J лишь вблизи точки Фейгенбаума[2], а также других точек накопления бифуркаций удвоения. В связи с этим имеет смысл обобщить эти результаты и на другие последовательности усложнения периода.

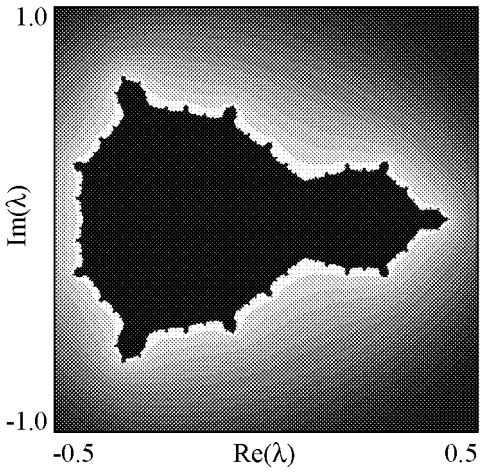


Рис. 3. Комплексная плоскость начальных значений λ для РГ-преобразования (12). Черным цветом обозначен ограниченный критическим множеством Жюлиа бассейн притяжения. Оттенками серого цвета размечена область убегания орбит на бесконечность. Более светлые цвета соответствуют большему динамическому расстоянию до аттрактора на бесконечности

3. Комплексные циклы уравнения РГ

Опишем процедуру построения критического множества J с помощью метода обратного итерирования, основанного на известных фундаментальных свойствах множеств Жюлиа аналитических отображений [4, 25].

Если задано итерационное отображение $\lambda_{n+1} = \varphi(\lambda_n)$ и для него известна периодическая отталкивающая точка λ_*, то множество

$$J' = \{\lambda : \varphi^n(\lambda) = \lambda_*, n = 1, 2, ...\} \tag{14}$$

плотно в J. Неподвижная точка может быть найдена непосредственно из итерационного полинома как корень уравнения $\varphi(\lambda_*) = \lambda_*$, при этом, если выполняется условие $|\varphi'(\lambda_*)| > 1$, неподвижная точка является отталкивающей.

Кроме того, множество Жюлиа обладает свойством инвариантности как по отношению к прямому итерированию, так и при обратном итерировании. А так же очевидно, что поиск прообразов любой точки, лежащей в области притяжения аттрактора, в результате обратного итерирования приведет в пределе к границе этой области.

[2]Асимптотическое сходство области аналитичности решения точного РГ уравнения на плоскости параметра и множества Мандельброта вблизи точки Фейгенбаума отмечалось ранее в работах [29–31].

Отталкивающие неподвижные точки в нашем случае известны $\lambda_* = (1 \pm \sqrt{3})/2$. Далее, необходимо знать вид обратного преобразования. Это можно сделать, решив уравнение (12) относительно переменной λ_n. Оно имеет точное решение следующего вида:

$$\lambda_n^1 = \frac{1}{3} + \frac{2^{2/3}}{3(4 + 27\lambda_{n+1} + 3\sqrt{3\lambda_{n+1}(8 + 27\lambda_{n+1})})^{1/3}} + \\ + \frac{(4 + 27\lambda_{n+1} + 3\sqrt{3\lambda_{n+1}(8 + 27\lambda_{n+1})})^{1/3}}{3 \times 2^{2/3}}, \\ \lambda_n^{2,3} = \frac{1}{3} - \frac{1 \pm \sqrt{3}i}{3 \times 2^{2/3}(4 + 27\lambda_{n+1} + 3\sqrt{3\lambda_{n+1}(8 + 27\lambda_{n+1})})^{1/3}} - \\ - \frac{(1 \pm \sqrt{3}i)(4 + 27\lambda_{n+1} + 3\sqrt{3\lambda_{n+1}(8 + 27\lambda_{n+1})})^{1/3}}{6 \times 2^{2/3}}. \tag{15}$$

Таким образом, при компьютерном построении множество J можно заменить множеством J'. При достаточно большом количестве итераций изображение будет достаточно хорошо приближать изображение критического множества.

Кроме того, множество J можно рассматривать как множество всех циклов всевозможных периодов n [4, 32, 33]. По мере увеличения периода циклов элементы получаемого множества точек приближаются друг к другу. При $n \to \infty$ пространственное распределение этих элементов должно совпасть с критическим множеством. Нахождение циклов периода связано с построением всевозможных периодических последовательностей $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n, \ldots$ где ε_i принимает значения 1, 2 или 3, что соответствует выбору корня λ^1, λ^2 или λ^3 на i-й обратной итерации (15). В результате итерирования последовательность значений управляющего параметра сходится к циклу определенного периода, не превышающего период последовательности ε_i.

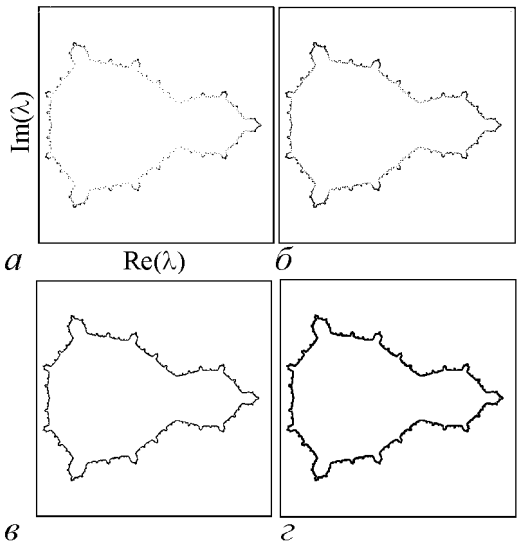


Рис. 4. Множества всех неустойчивых циклов с периодами n: *а* – 6; *б* – 7; *в* – 9; *г* – 11, получаемых при обратном итерировании РГ-преобразования (12)

Итак, одна из неподвижных точек преобразования перенормировки (12) находится на действительной оси и отвечает за переход к хаосу по Фейгенбауму. Кроме того, имеются также неустойчивые циклы различных периодов. Элементы цикла периода n РГ-преобразования (12) отвечают приближенным значениям точек накопления бифуркаций увеличения периода в 2^n раз на множестве Мандельброта. Это также объясняет сходство критического множества со множеством Мандельброта.

На рис. 4 показаны точки критического множества, отвечающие циклам периодов 6–11. Видно, что с ростом периода рассматриваемых циклов получается все

более и более полная картина критического множества. Здесь следует отметить аналогию между совокупностью элементов рассматриваемых циклов и нулями Янга – Ли, а также между пределом большого периода циклов и термодинамическим пределом в теории фазовых переходов. Как уже говорилось, в термодинамическом пределе (когда число рассматриваемых частиц стремится к бесконечности) есть возможность того, что бесконечное множество нулей статистической суммы выстроится в линию, которая пересечет действительную ось комплексной температуры (или магнитного поля) в точке физического фазового перехода.

4. Электростатическая аналогия – потенциал критического множества и его аналитические свойства на пороге хаоса

Точка фазового перехода отвечает тому, что нули статистической суммы в термодинамическом пределе формируют определенное множество (множество Жюлиа в смысле теории Янга – Ли), которое должно обеспечивать скачок производной термодинамического потенциала (удельной свободной энергии). Имеются в виду точки фазовых переходов первого рода. Могут также иметь место фазовые переходы второго рода, при которых скачок имеет вторая производная потенциала.

Заметим, что распределение удельной свободной энергии в зависимости от температуры можно интерпретировать как распределение электростатического потенциала, создаваемого в двумерном пространстве совокупностью точечных зарядов, расположенных в нулях статсуммы, а в термодинамическом пределе – соответствующим предельным распределением заряда на критическом множестве.

Электростатический потенциал для критического множества – множества Жюлиа при определенных условиях может быть достаточно легко вычислен по формуле

$$U = \frac{1}{3^n} \lim_{n\to\infty} \ln|\varphi^n(\lambda)|, \qquad (16)$$

полученной Хаббардом и Дуади [34] (см. также [4]) из соображений существования взаимно однозначного конформного отображения множества Жюлиа на окружность. Коэффициент не имеет принципиального значения. (В данном случае он определяется третьим порядком отображения (12): при однократном применении этого отображения потенциал точки утраивается.) На бесконечности потенциал множества Жюлиа должен совпадать с потенциалом заряженного диска $U_0 = (1/3^n)\ln|z|$.

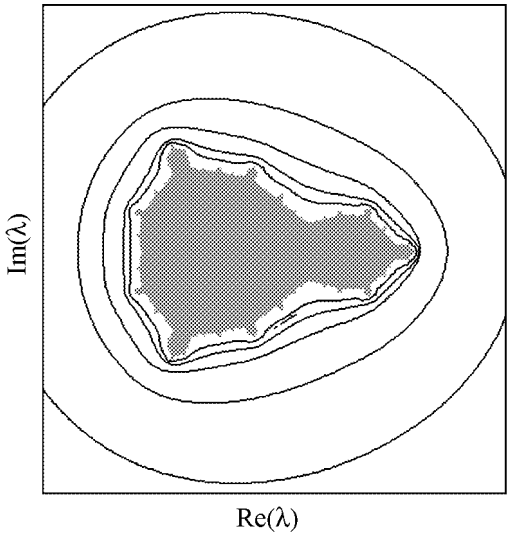


Рис. 5. Система эквипотенциалей множества Жюлиа отображения (12), демонстрирующая распределение электростатического потенциала в комплексной плоскости

Исследуем распределение потенциала и его производных как в комплексной области, так и на действительной оси. Представленная на рис. 5 система эквипотен-

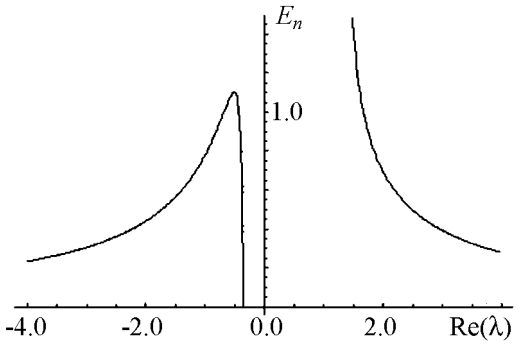


Рис. 6. Распределение нормальной составляющей напряженности поля критического множества вдоль действительной оси λ

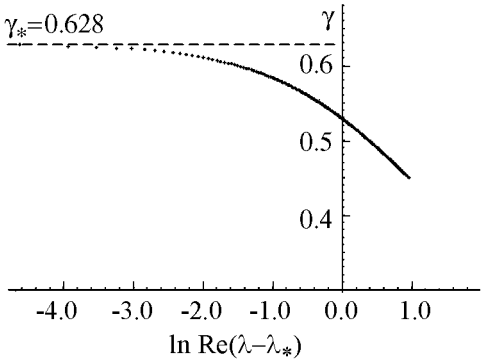


Рис. 7. Наклон кривой распределения потенциала вдоль действительной оси λ вблизи критической точки Фейгенбаума λ_*. Распределение потенциала строилось в двойном логарифмическом масштабе $\ln U(\mathrm{Re}\lambda)$ от $\ln(\mathrm{Re}\lambda - \mathrm{Re}\lambda_*)$

циальных линий однородно заряженного двумерного объекта, ограниченного множеством Жюлиа, характеризует распределение потенциала в комплексной плоскости. На рис. 6 показана зависимость потенциала и нормальной составляющей поля от параметра λ вдоль действительной оси. Факт существования разрыва производной потенциала в критической точке подтверждается. Вблизи другой точки пересечения критического множества с действительной осью первая производная потенциала ведет себя непрерывно, но имеет излом, обеспечивающий скачок второй производной и тем самым указывающий на фазовый переход второго рода. Кроме того, как оказалось, зависимость потенциала вблизи фейгенбаумовской критической точки имеет в асимптотике степенной характер $U = (\lambda - \lambda^*)^\gamma$, где $\gamma = 0.63$ (рис. 7).

Исходя из вышесказанного, можно утверждать, что потенциал множества Жюлиа является неким критерием упорядоченности хаотической динамики системы вблизи точки перехода к хаосу, как термодинамические потенциалы определяются параметром порядка т/д системы (например, намагниченностью). Аналогом параметра порядка также являются ляпуновские показатели [2]. Однако использование потенциала для описания динамики в некоторых случаях является более эффективным, например, в областях убегания траекторий на бесконечность.

5. Приближенный РГ-анализ для иных, отличных от фейгенбаумовской, последовательностей усложнения периода. Приближенная версия множества Мандельброта

Обобщим процедуру приближенной перенормировки для других последовательностей бифуркаций увеличения периода, характерных для комплексных аналитических отображений, а именно, рассмотрим последовательности утроений, учетверений периода и т.д.

Чтобы получить РГ-преобразование для критической точки утроений (учетверений) периода, необходимо применить исходное отображение (4) трижды (четырежды) и разложить результат в ряд Тейлора, ограничиваясь квадратичными слагае-

мыми по переменной x_n,

$$x_{n+3} = f(f(f(x_n))) = \lambda - (\lambda - \lambda^2)^2 - 4\lambda(\lambda - \lambda^2)x_n^2 + O(x_n^4), \tag{17}$$

$$\begin{aligned} x_{n+4} &= f(f(f(f(x_n)))) = \\ &= \lambda - (\lambda - (\lambda - \lambda^2)^2)^2 + 8\lambda(\lambda - \lambda^2)(\lambda - (\lambda - \lambda^2)^2)x_n^2 + O(x_n^4). \end{aligned} \tag{18}$$

Из полученных выражений (17) и (18) можно получить преобразования перенормировки по параметру для утроений (19) и учетверений периода (20), соответственно,

$$\lambda' \to 4\lambda(\lambda - \lambda^2)(\lambda - (\lambda - \lambda^2)^2), \tag{19}$$

$$\lambda' \to -8\lambda(\lambda - \lambda^2)(\lambda - (\lambda - \lambda^2)^2)(\lambda - (\lambda - (\lambda - \lambda^2)^2)^2). \tag{20}$$

Соответствующие скейлинговые факторы равны

$$\alpha = 4\lambda(\lambda - \lambda^2), \tag{21}$$

$$\alpha = -8\lambda(\lambda - \lambda^2)(\lambda - (\lambda - \lambda^2)^2). \tag{22}$$

Множества Жюлиа преобразований (19) и (20) показаны на рис. 8, *а*, *б*. Численно были получены критические значения параметра λ, масштабные факторы, константы скейлинга по параметру и критические мультипликаторы. Очевидно, что критические индексы являются комплексными величинами. Можно сравнить их с численными результатами точного РГ-анализа [26] (табл. 2 и 3). Например, рассмотрим одну из неподвижных точек преобразования перенормировки (19), которая соответствует точке накопления утроений периода Гольберга – Синая – Ханина [27,28]. Рис. 9, *а* демонстрирует скейлинговые свойства критического множества преобразования перенормировки (19) вблизи приближенного значения критической точки утроений периода. На рис. 9, *б* представлена иллюстрация скейлинга множества Мандельброта вблизи точки Гольберга – Синая – Ханина. Фрагменты критического множества Жюлиа (рис. 9, *а*) или множества Мандельброта (рис. 9, *б*) умножением на комплексную скейлинговую константу δ (приближенную или соответственно точную) преобразуются в рисунки, представленные справа. Так как константа δ является комплексной величиной, это преобразование будет включать в себя пересчет масштаба и поворот.

Таблица 2

Точные и приближенные значения критических индексов для точки накопления утроений периода

	Точн. [26–28]	Прибл.
λ_*	0.024+0.784i	0.025+0.792i
α	-2.097+2.358i	-2.317+2.147i
δ	4.600+8.981i	7.078-7.624i
μ_c	-0.476-1.055i	-0.493-1.062i

Таблица 3

Точные и приближенные значения критических индексов для точки накопления учетверений периода

	Точн. [26]	Прибл.
λ_*	-0.310+0.495i	-0.314+0.493i
α	-1.131+3.260i	-1.238+2.913i
δ	-0.853-18.110i	3.041-13.984i
μ_c	0.063-1.053i	0.070-1.060i

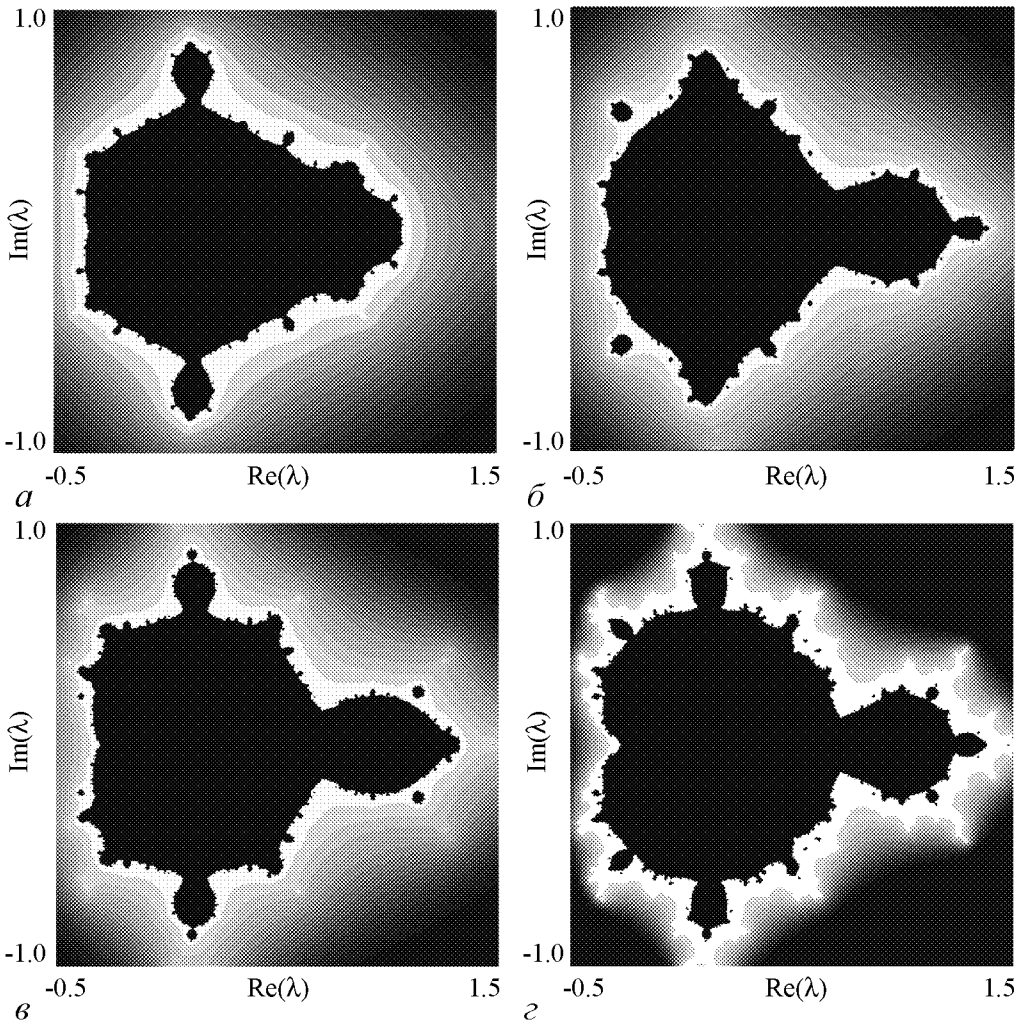


Рис. 8. Плоскость начальных значений λ для отображений перенормировки различных бифуркационных последовательностей порядка $N = 3$ (*а*), 4 (*б*), $2 \cdot 3$ (*в*) и $3 \cdot 4$ (*г*). Черная область, границей которой является множество Жюлиа, – бассейн притяжения нуля. Оттенками серого обозначены области с различными временами убегания на бесконечность

Обобщим процедуру приближенного РГ-анализа на случай последовательностей бифуркаций увеличения периода в произвольное число N раз. Выражения для масштабного фактора и преобразование перенормировки параметра будут выглядеть по индукции следующим образом:

$$\alpha = (-2)^{N-1} \prod_{i=1}^{N-1} f_\lambda^i(0), \tag{23}$$

$$\lambda' \to (-2)^{N-1} \prod_{i=1}^{N} f_\lambda^i(0). \tag{24}$$

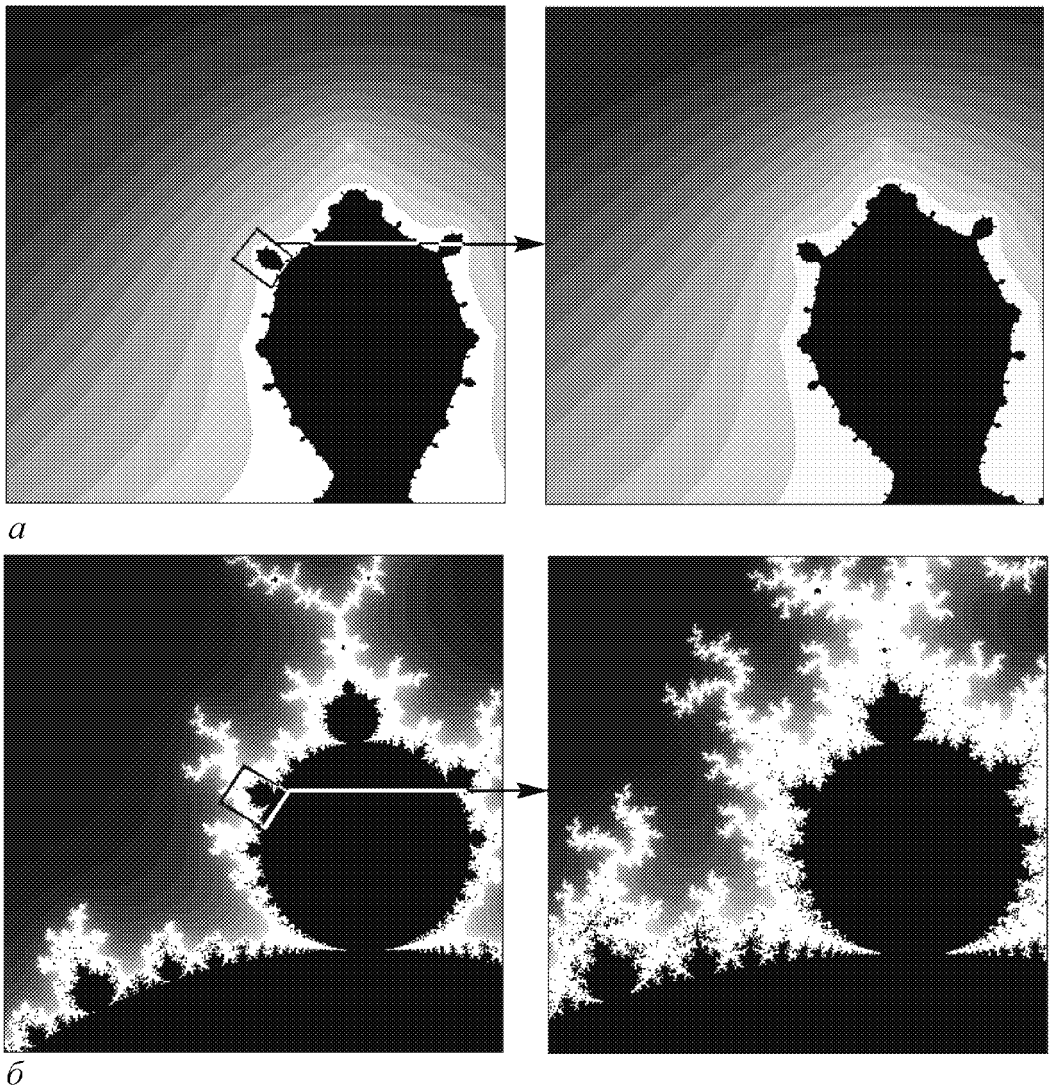


Рис. 9. Демонстрация скейлинга вблизи критической точки утроений периода: *а* – на множестве Жюлиа приближенного преобразования перенормировки (19); *б* – на множестве Мандельброта исходного отображения (4)

Очевидно, что множества Жюлиа РГ-преобразований (24) для последовательностей усложнения периода более высокого порядка N будут лучше приближать фрактальные свойства множества Мандельброта. Например, одна из неподвижных точек РГ-преобразования для учетверений периода располагается на действительной оси в точке $\lambda_* = 1.396$. Эта точка соответствует фейгенбаумовской точке накоплений удвоений перпиода $\lambda_* = 1.401$ и, как нетрудно видеть, аппроксимирует ее более точно, чем предыдущая оценка $\lambda_* = 1.37$, сделанная посредством другой приближенной РГ схемы.

Необходимо отметить, что для лучшей аппроксимации множества Мандельброта множеством Жюлиа приближенного преобразования перенормировки, порядок бифуркационной последовательности N должен представлять из себя число ти-

па $2 \times 3 \times 4$ и т.д., то есть быть не простым числом.Тогда РГ-преобразование будет описывать всевозможные последовательности порядков 2, 3, и т.д. (см. рис. 8).

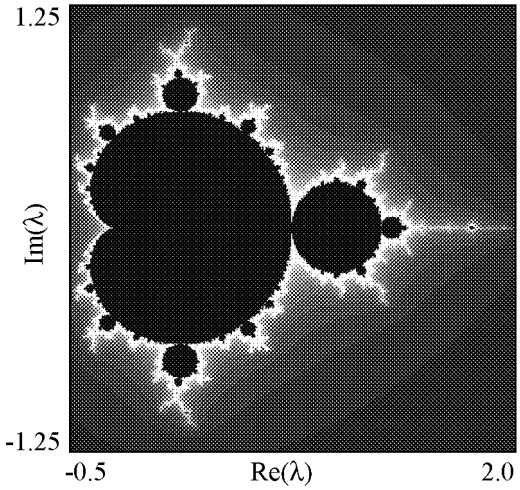


Рис. 10. Множество Жюлиа приближенного РГ преобразования для каскада бифуркаций увеличения периода бесконечного порядка $N \to \infty$

Можно сконструировать отображение, переводящее РГ-преобразование последовательности усложнения периода $N+1$ порядка через РГ-преобразование N порядка

$$\lambda_{N+1} = (-2)\lambda_N\left(\frac{\lambda_N}{-2\lambda_{N-1}} - \left(\frac{\lambda_N}{-2\lambda_{N-1}}\right)^2 - \left(\frac{\lambda_{N-1}}{-2\lambda_{N-2}}\right)^2\right),$$
$$\lambda_1 = f_\lambda(0) = \lambda, \quad \lambda_0 = 1, \quad \lambda_{-1} = \infty. \tag{25}$$

Динамика такого отображения при $N \to \infty$ будет включать в себя описание всевозможных последовательностей усложнений периода. На рис. 10 представлено множество Жюлиа такого отображения. Видно, что оно удивительно точно соответствует множеству Мандельброта.

Заключение

В работе получена комплексифицированная версия приближенного РГ-анализа для удвоений периода Фейгенбаума, которая далее обобщена на случай иных, отличных от фейгенбаумовской, последовательностей усложнения (увеличения в N раз) периода, характерных для комплексных отображений. Показано, что множество Жюлиа преобразования перенормировки параметра комплексного логистического отображения является приближенной версией множества Мандельброта этого отображения, причем с повышением порядка рассматриваемого бифуркационного каскада N сходство между ними становится все более полным. Сходство объясняется тем фактом, что рассматриваемые множества Жюлиа являются множествами всевозможных неустойчивых циклов преобразования перенормировки, элементы же этих циклов соответствуют точкам накопления последовательностей бифуркаций увеличения периода в N^n раз ($n \to \infty$), распределенных на границе множества Мандельброта всюду плотно.

Полученные результаты интерпретированы в свете аналогии с теорией фазовых переходов, а именно, с теорией Янга – Ли, основанной на рассмотрении свойств термодинамических величин в зависимости от комплексной температуры. Элементы рассмотренных в работе неустойчивых циклов РГ-преобразования, совокупность которых эквивалентна множеству Жюлиа этого преобразования, в термодинамической аналогии будут соответствовать так называемым нулям Янга – Ли, определяющим в термодинамическом пределе границу фазового перехода. Показано, что в точках перехода к хаосу наблюдается скачок электростатического поля критического множества Жюлиа. В рамках рассматриваемой аналогии в точках фазового перехода на-

блюдается скачок производной термодинамического потенциала. Тем самым можно определить новый критерий перехода к хаосу. Потенциал может выступать в качестве параметра порядка.

Можно заключить, что комплексное обобщение приближенного РГ-анализа оказывается полезным для углубления понимания критических явлений на пороге хаоса и развития аналогии с теорией фазовых переходов, которое в свою очередь дает новые подходы к описанию этих явлений.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 04-02-04011). О.Б. Исаева выражает благодарность Фонду содействия отечественной науке, Министерству образования и науки РФ и АФГИР за финансовую поддержку в рамках проекта «Фундаментальные исследования и высшее образование» (Y_3-P-06-03) и гранту президента РФ (МК-8501.2006.2).

Библиографический список

1. *Румер Ю.Б., Рывкин М.Ш.* Термодинамика, статистическая физика и кинетика. М.: Наука, 1977. 552 с.
2. *Синай Я.Г.* Теория фазовых переходов: Строгие результаты. М.: Наука, 1980. 208 с.
3. *Балеску Р.* Равновесная и неравновесная статистическая механика. М.: Мир, 1978. 408 с.
4. *Пайтген Х.-О., Рихтер П.Х.* Красота фракталов. Образы комплексных динамических систем. М.: Мир, 1993. 176 с.
5. *Kadanoff L.P.* Scaling laws for Ising models near T_c // Physics. 1966. Vol. 2. P. 263.
6. *Wilson K.G.* Renormalisation group and critical phenomena // 1. Phys. Rev. B. 1971. Vol. 4. P. 3174; 2. Phys. Rev. B. 1971. Vol. 4. P. 3184.
7. *Feigenbaum M.J.* Quantitative universality for a class of non-linear transformations // J. Stat. Phys. 1978. Vol. 19, № 1. P. 25.
8. *Feigenbaum M.J.* The universal metric properties of non-linear transformations // J. Stat. Phys. 1979. Vol. 21, № 6. P. 669.
9. *Шустер Г.Г.* Детерминированный хаос. М.: Мир, 1988. 250 с.
10. *Хакен Г.* Синергетика. М.: Мир, 1980.
11. *Кузнецов С.П.* Динамический хаос. М.: Физматлит, 2001. 296 с.
12. *Кузнецов А.П., Кузнецов С.П.* Критическая динамика одномерных отображений: Часть 1. Сценарий Фейгенбаума // Изв. вузов. ПНД. 1993. Т. 1, № 1–2. С. 15.
13. *Yang C.N., Lee T.D.* Statistical theory of equations of state and phase transitions: 1. Theory of condensation // Phys. Rev. 1952. Vol. 87. P. 404.
14. *Lee T.D., Yang C.N.* Statistical theory of equations of state and phase transitions: 2. Lattice gas and Ising model // Phys. Rev. 1952. Vol. 87. P. 410.
15. *Wood D.W., Turnbull R.W.* Numerical experiments on Yang-Lee zeros // J. Phys. A: Math. Gen. 1986. Vol. 19. P. 2611.
16. *Derrida B., De Seze L., Itzykson C.* Fractal structure of zeros in hierarchical models // J. Stat. Phys. 1983. Vol. 33, № 3. P. 559.

17. *Onsager L.* Crystal statistics: 1. Two-dimensional model with an order-disorder transition // Phys. Rev. 1944. Vol. 65. P. 117.
18. *Wim van Saarloos, Kurtze D.A.* Location of zeros in the complex temperature plane: Absence of Lee-Yang theorem // J. Phys. A: Math. Gen. 1984. Vol. 17. P. 1301.
19. *Ananikian N.S., Ghulghazaryan R.G.* Yang-Lee and Fisher zeros of multisite interaction Ising models on the Cayley-type lattices // Phys. Lett. A. 2000. Vol. 277. P. 249.
20. *Ananikian N.S., Izmailian N.Sh., Oganessyan K.A.* An Ising spin-S model on generalized recursive lattice // Physica A. 1998. Vol. 254.P. 207.
21. *Ananikian N.S., Dallakian S.K., Hu B., Izmailian N.Sh., Oganessyan K.A.* Chaos in Z(2) gauge model on a generalized Bethe lattice of plaquettes // Phys. Lett. A. 1998. Vol. 248. P. 381.
22. *Ananikian N.S., Dallakian S.K.* Multifractal approach to three-site antiferromagnetic Ising model // Physica D. 1997. Vol. 107. P. 75.
23. *Akheyan A.Z., Ananikian N.S.* Global Rethe lattice consideration of the spin-1 Ising model // J. Phys. A: Math. Gen. 1996. Vol. 29. P. 721.
24. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Гидродинамика. М.: Наука, 1986. 736 с.
25. *Кроновер Р.М.* Фракталы и хаос в динамических системах. Основы теории. М.: Постмаркет, 2000. 352 с.
26. *Cvitanović P., Myrheim J.* Complex universality // Commun. Math. Phys. 1989. Vol. 121. P. 225.
27. *Isaeva O.B., Kuznetsov S.P.* On scaling properties of two-dimensional maps near the accumulation point of the period-tripling cascade // Regular and Chaotic Dynamics. 2000. Vol. 5, № 4. P. 459.
28. *Гольберг А.И., Синай Я.Г., Ханин К.М.* Универсальные свойства для последовательностей бифуркаций утроения периода // УМН. 1983. Т. 38, № 1. С. 159.
29. *Nauenberg M.* Fractal boundary of domain of analyticity of the Feigenbaum function and relation to the Mandelbrot set // J. Stat. Phys. 1987. Vol. 47, № 3–4. P. 459.
30. *Buff X.* Geometry of the Fiegenbaum map // Conformal Geometry and Dynamics. 1999. Vol. 3. P. 79.
31. *Wells A.L.J., Overill R.E.* The extension of the Feigenbaum-Cvitanović function to the complex plane // Int. J. of Bif. and Chaos. 1994. Vol. 4, № 4. P. 1041.
32. *Widom M., Bensimon D., Kadanoff L.P.* Strange objects in the complex plane // J. Stat. Phys. 1983. Vol. 32, № 3. P. 443.
33. *Jensen M.H., Kadanoff L.P., Procaccia I.* Scaling structure and thermodynamics of strange sets // Phys. Rev. A. 1987. Vol. 36. P. 1409.
34. *Douady A., Hubbard J.H.* Iteration des polynomes quadratiques complexes // CRAS Paris 294:123–126 (On the dynamics of polynomial-like mappings. Electronic preprint, 1984)

Саратовский филиал ИРЭ РАН
Саратовский государственный университет

Поступила в редакцию *25.07.2005*
После доработки *26.12.2005*

APPROXIMATE DESCRIPTION OF THE MANDELBROT SET. THERMODYNAMIC ANALOGY

O.B. Isaeva, S.P. Kuznetsov

Analogy between an approximate version of period-doubling (and period N-tupling) renormalization group analysis in complex domain and the phase transition theory of Yang-Lee (based on consideration of formally complexified thermodynamic values) is discussed. It is shown that the Julia sets of the renormalization transformation correspond to the approximation of Mandelbrot set of the original map. New aspects of analogy between the theory of dynamical systems and the phase transition theory are uncovered.

Исаева Ольга Борисовна – родилась в 1977 году. В 1999 году закончила факультет нелинейных процессов Саратовского госуниверситета, в 2003 году защитила диссертацию на соискание степени кандидата физико-математических наук. В настоящее время работает старшим научным сотрудником Саратовского филиала Института радиотехники и электроники РАН. Автор около 50 научных публикаций.

Кузнецов Сергей Петрович – родился в Москве (1951). Окончил Саратовский государственный университет (1973). С 1988 – сотрудник Саратовского филиала Института радиотехники и электроники РАН, в настоящее время заведующий лабораторией теоретической нелинейной динамики. Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук в СГУ (1977) и доктора наук (1987) по специальности радиофизика. Профессор кафедры динамических систем. Автор учебно-научной монографии «Динамический хаос» и «Нелинейные колебания» (в соавторстве с А.П. Кузнецовым и Н.М. Рыскиным). Опубликовал свыше 150 научных статей по нелинейной динамике, радиофизике и электронике. Под руководством С.П.Кузнецова защищены шесть кандидатских диссертаций. Лауреат государственной научной стипендии для ученых России (1994-1996), Соросовский доцент (1998), Соросовский профессор (2000, 2001). Член-корреспондент РАЕН. Член редакционной коллегии журнала «Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика».
E-mail:spkuz@rambler.ru

Прикладные задачи нелинейной теории колебаний и волн

Изв. вузов «ПНД», т. 14, № 1, 2006 УДК 517.9

ИНИЦИИРОВАННЫЕ КОРОТКИМИ ИМПУЛЬСАМИ УСТОЙЧИВЫЕ КВАЗИПЕРИОДИЧЕСКИЕ И ПЕРИОДИЧЕСКИЕ РЕЖИМЫ В СИСТЕМЕ С НЕУСТОЙЧИВЫМ ПРЕДЕЛЬНЫМ ЦИКЛОМ

А.П. Кузнецов, Л.В. Тюрюкина

Рассматривается динамика системы с неустойчивым предельным циклом под периодической последовательностью δ-импульсов. Показано, что при наличии в системе кубической нелинейности в узкой области значений параметров внешнего воздействия наблюдаются устойчивые квазипериодические режимы и режимы захвата фазы (синхронизация). Изучено влияние основных параметров системы на возникновение таких режимов.

Введение

Явление синхронизации известно очень давно и тем не менее продолжает привлекать внимание исследователей. Классическая ситуация синхронизации состоит в том, что на автоколебательную систему с устойчивым предельным циклов воздействуют внешним периодическим (обычно гармоническим) сигналом [1–8]. В этом случае возможны режимы захвата частоты и квазипериодические режимы, соответственно, внутри и вне языков Арнольда на плоскости амплитуда – частота внешнего воздействия. При этом в фазовом пространстве реализуется либо устойчивый тор, либо устойчивый и седловой предельные циклы, возникающие на этом торе.

Эталонной системой для изучения явления синхронизации является находящаяся под гармоническим воздействием система Ван дер Поля, в которой имеет место бифуркация Андронова – Хопфа рождения устойчивого предельного цикла при переходе управляющего параметра λ через нуль,

$$\ddot{x} - (\lambda - x^2)\dot{x} + x = B\cos(2\pi t/T). \tag{1}$$

Здесь x – динамическая переменная, B и T – амплитуда и период внешнего воздействия.

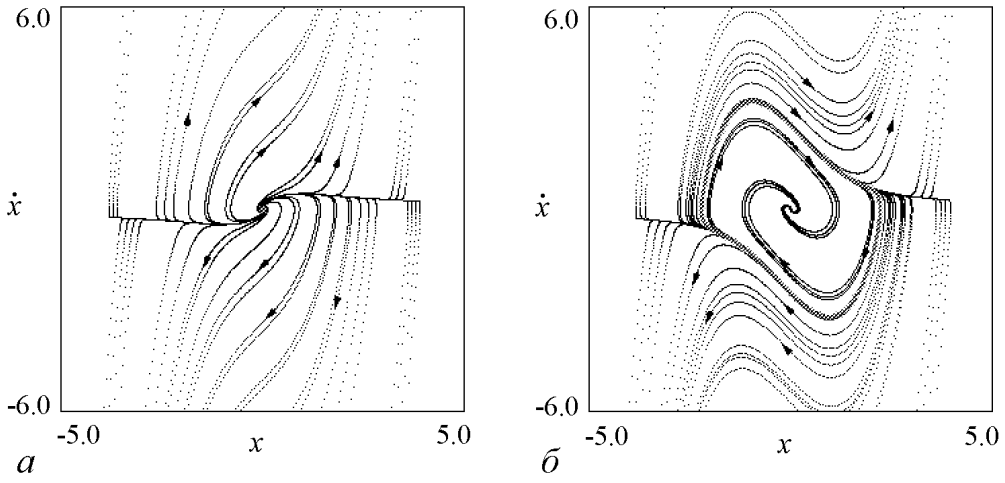


Рис. 1. Фазовые портреты автономной системы (2), $\lambda < 0$ (*а*) и $\lambda > 0$ (*б*)

Рассмотрим (пусть отчасти и формально) ситуацию, когда в системе (1) обращено время. В этом случае мы с очевидностью приходим к уравнению

$$\ddot{x} + (\lambda - x^2)\dot{x} + x = B\cos(2\pi t/T). \tag{2}$$

Понятно, что изменение времени с точки зрения фазового пространства скажется лишь на направлениях «стрелочек» на фазовых портретах. Таким образом, относительно системы (2) можно сказать следующее. В автономном случае при $\lambda > 0$ в фазовом пространстве имеется неустойчивый предельный цикл (рис. 1). При наличии внешнего воздействия в его окрестности в расширенном фазовом пространстве появляется неустойчивый тор, либо неустойчивые и седловые предельные циклы на поверхности этого тора [6]. Таким образом, гармоническое воздействие на систему типа Ван дер Поля с неустойчивым предельным циклом инициирует в его окрестности неустойчивые режимы. На первый взгляд, для режимов, лежащих в окрестности такого неустойчивого предельного цикла, форма внешнего сигнала не должна быть существенной с принципиальной точки зрения. Оказывается, однако, что это не так, и импульсный сигнал может инициировать устойчивый тор и устойчивые предельные циклы на его поверхности в окрестности неустойчивого цикла в том случае, однако, если в системе существенна фазовая нелинейность.

1. Модифицированное уравнение Ван дер Поля под действием периодической последовательностью δ-импульсов

Пусть теперь система (2) находиться под внешним периодическим воздействием в виде последовательности δ-функций. Тогда ее уравнение примет вид:

$$\ddot{x} + (\lambda - x^2)\dot{x} + x = B\sum \delta(t - nT). \tag{3}$$

Здесь по-прежнему B – амплитуда внешнего воздействия, а T – период следования импульсов. На рис. 2 показана построенная численно карта динамических режимов

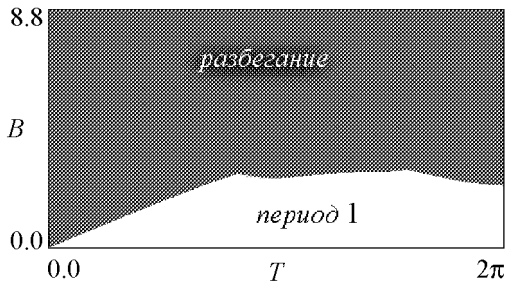


Рис. 2. Карта динамических режимов системы (3) на плоскости амплитуда B – период T внешнего воздействия для $\lambda = 1.2$

системы (3) на плоскости амплитуда B – период T воздействия для значения управляющего параметра $\lambda = 1.2$. Карта представляют собой плоскость параметров, на которой разными цветами обозначены области существования устойчивых режимов различных периодов. На этой и всех последующих картах используется палитра, состоящая из оттенков серого цвета: белый цвет отвечает режиму периода 1; светло-серый – режиму периода 2 и т.д.; черный цвет отвечает квазипериодическим, хаотическим режимам, а также режимам, имеющим большой период. Кроме того, один из серых оттенков используется для обозначения области, в которой траектории системы в фазовом пространстве убегают на бесконечность. На карте, представленной на рис. 2, наблюдаются всего две обширные области – область, отвечающая устойчивому режиму периода 1, и область убегания траектории на бесконечность. Наличие этих двух областей легко объяснимо. При небольших значениях амплитуды воздействия B попавшая внутрь неустойчивого предельного цикла изображающая точка за время автономной эволюции успевает прийти в устойчивый фокус, и внешняя сила не может «выбросить» ее за пределы неустойчивого цикла. Если же амплитуда B велика, то изображающая точка будет «выброшена» за пределы неустойчивого цикла и, как следствие, уйдет на бесконечность.

Модифицируем теперь исследуемую систему. Для этого добавим в автономное уравнение еще одну нелинейность, а именно, нелинейность кубического типа, характерную для осциллятора Дуффинга,

$$\ddot{x} + (\lambda - x^2)\dot{x} + x + \beta x^3 = 0, \tag{4}$$

где β – параметр нелинейности. Эта нелинейность сказывается, как известно [6], существенным образом на динамике фазы, которая в рамках укороченных уравнений теперь зависит от амплитуды. (Изображающие точки, имеющие одинаковые начальные координаты, в случаях $\beta = 0$ и $\beta \neq 0$ двигаются по-разному – во втором случае фаза меняется быстрее.)

Вновь введем в рассматриваемую систему внешнее периодическое импульсное воздействие

$$\ddot{x} + (\lambda - x^2)\dot{x} + x + \beta x^3 = B \sum \delta(t - nT). \tag{5}$$

Для исследования системы (5) построим карты динамических режимов на плоскости амплитуда B – период T воздействия при значении параметра фазовой нелинейности $\beta = 1$. Карты для малых λ (например, $\lambda = 0.3$) качественно не отличаются от приведенных на рис. 2. Но уже при $\lambda = 1.2$ (рис. 3, *а*) видно, что на границе областей периода 1 и разбегания появляется узкая полоса устойчивых квазипериодических режимов и режимов захвата фазы (синхронизации). На увеличенном фрагменте на рис. 4, *а* очень хорошо просматривается классическая картина языков синхронизации устойчивых режимов, опирающихся своими остриями на границу

области режима периода 1 (исключение составляет область периода 2). При увеличении параметра λ эта картина сохраняется, а внутренняя структура языков синхронизации становится более ярко выраженной (рис. 3, *б* и 4, *б*). Так, внутри области режима периода 2 и внутри большинства языков синхронизации возникают области режимов удвоенного периода с последующим переходом к хаосу через удвоения периода. На рис. 4, *б* хорошо видна область устойчивых режимов характерного вида («crossroad area», по терминологии [22]) на базе цикла периода 4.

Таким образом, имеет место эффект возникновения устойчивых квазипериодических и синхронных режимов, включая режимы удвоенного периода, в окрестности неустойчивого предельного цикла, инициированных периодической последовательностью δ-функций. Численные эксперименты говорят о том, что этот эффект реализуется (по крайней мере, становится заметным) лишь при достаточно больших значениях параметра фазовой нелинейности β и управляющего параметра λ.

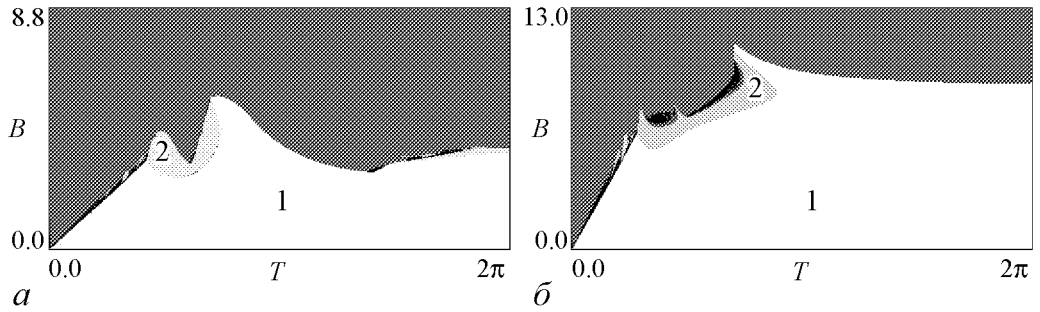


Рис. 3. Карты динамических режимов системы (5) на плоскости амплитуда B - период T внешнего воздействия для $\lambda = 1.2$ (*а*), $\lambda = 3.0$ (*б*). Параметр нелинейности $\beta = 1$

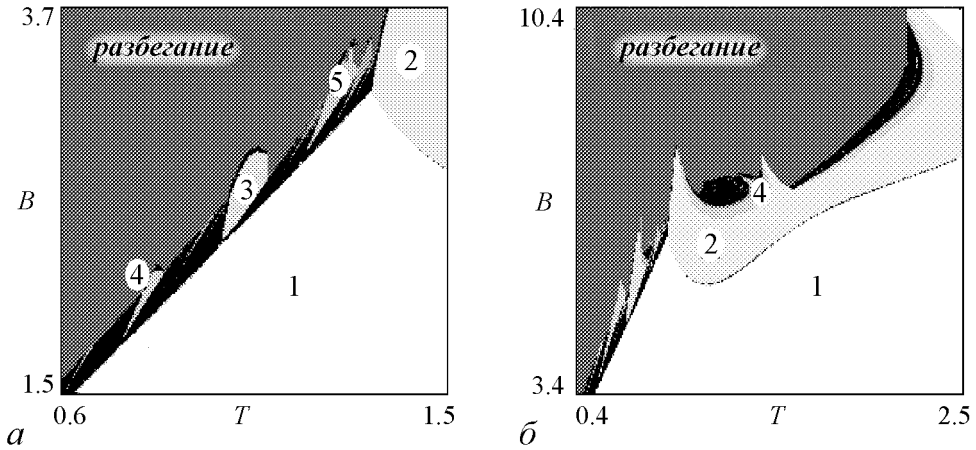


Рис. 4. Увеличенные фрагменты карт динамических режимов системы (5), представленных на рис. 3, *а* (*а*) и 3, *б* (*б*). На них хорошо видна узкая полоса устойчивых синхронных и квазипериодических режимов

Дадим еще несколько характерных иллюстраций. На рис. 5 представлен фрагмент карты динамических режимов системы (5) и соответствующие портреты аттракторов, построенные внутри основных языков синхронизации, а также аттрактор для квазипериодического режима. На рис. 6 показаны бассейны притяжения простейшего периодического и одного из квазипериодических аттракторов. Здесь L –

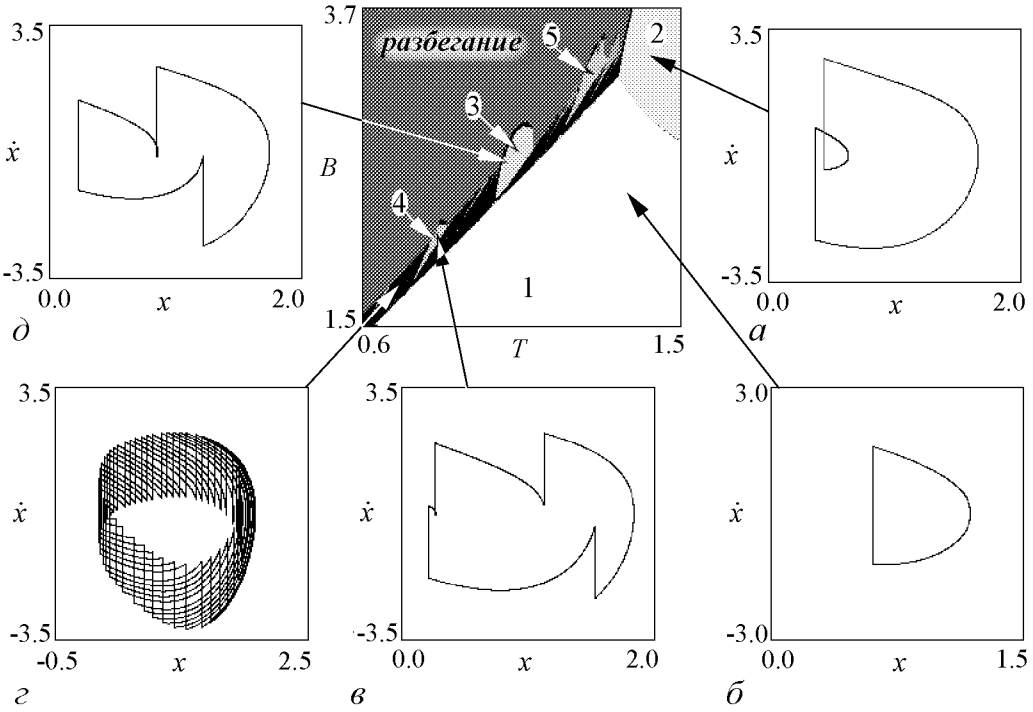


Рис. 5. Система языков синхронизации, возникающая в дифференциальном уравнении (5) при $\lambda = 1.2$ и $\beta = 1$ и портреты аттракторов, построенные для некоторых режимов

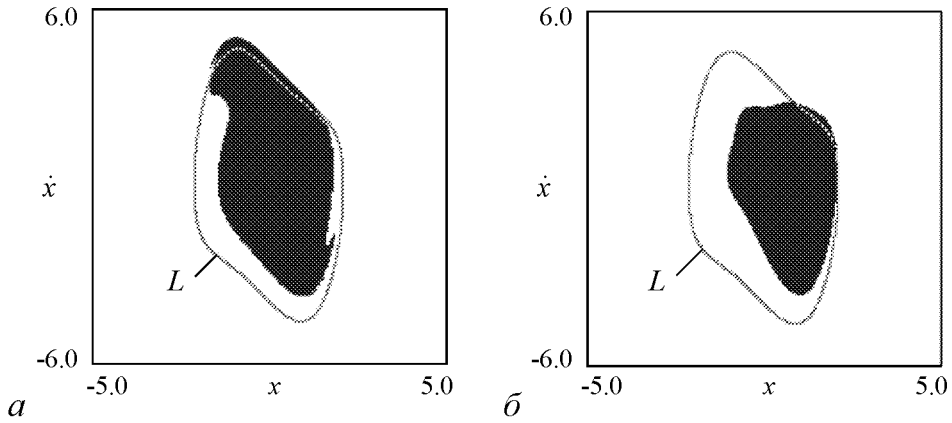


Рис. 6. Бассейны притяжения, построенные для аттракторов периодов 2 (*а*) и квазипериодического аттрактора (*б*) неавтономной системы (5)

неустойчивый цикл автономной системы, черная область представляет собой бассейн притяжения для аттрактора неавтономной системы (5). Все бассейны построены для сечения Пуанкаре неавтономной системы. Хорошо видно, что возникшие в рассматриваемой системе устойчивые периодические режимы располагаются в окрестности неустойчивого предельного цикла автономной системы.

При достаточно больших значениях параметров λ и β на картах динамических режимов системы (5) на границе области режима периода 1 и области разбегания наблюдается еще одна область режимов, имеющих отличный от единицы период (правая часть рис. 3, *а*, $T \approx 4-5$). Эта область в увеличенном виде для $\beta = 2$ показана на рис. 7, который иллюстрирует ее эволюцию с ростом параметра λ. При небольших λ четко видна система языков синхронизации и структуры типа «crossroad area». С ростом управляющего параметра λ языки синхронизации «опускаются» под область режима периода 1 и исчезают (рис. 7, *б*). В результате при $\lambda = 1.2$ на картах остаются лишь структуры типа «crossroad area». Это также устойчивые режимы, инициированные внешним импульсным сигналом в окрестности неустойчивого цикла, в чем убеждаемся, обратившись к рис. 8. Из сравнения рис. 5 и 8 видно, что в первом случае в промежутке между импульсами фазовая траектория совершает примерно пол-оборота вокруг устойчивого фокуса, а во втором – целый оборот. Естественно ожидать, что при больших значениях периода внешнего воздействия возникнут и другие системы языков синхронизации и структуры типа «crossroad area», отвечающие большему числу оборотов фазовой траектории вокруг устойчивого фокуса.

Итак, динамика системы протекает следующим образом. В промежутке между импульсами (стадия автономной эволюции) фазовая траектория уходит от неустойчивого цикла, однако затем внешний импульс возвращает ее в его окрестность. Затем траектория опять уходит от неустойчивого цикла, а следующий импульс ее опять возвращает в окрестность неустойчивого цикла и т.д. Этим же объясняется и тот факт, что возникшая в системе (5) структура языков синхронизации располагается на границе области режима периода 1 и области убегания траектории на бесконечность. Очевидно, что для возвращения фазовой траектории в окрестность неустойчивого цикла автономной системы необходимо, чтобы внешний импульс действовал

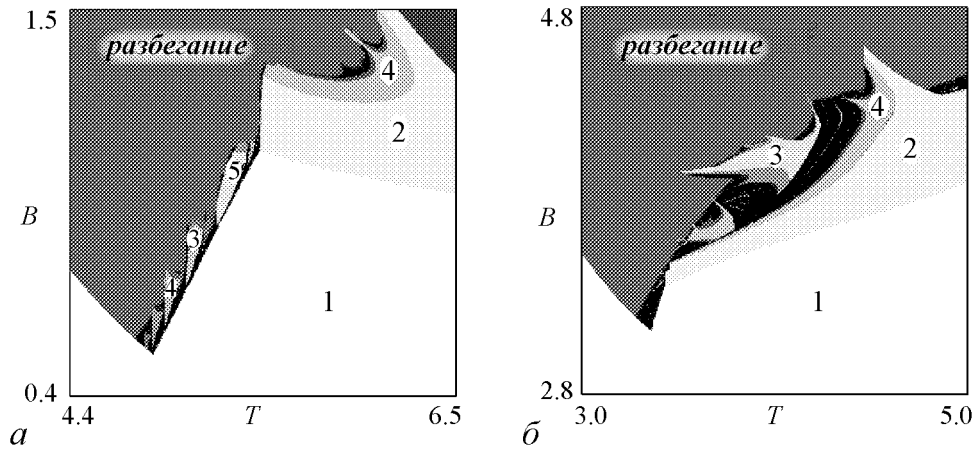


Рис. 7. Эволюция карт динамических режимов системы (5) для второй системы языков синхронизации. Карты построены при $\beta = 2$ и следующих значениях параметров λ: *а* – 0.3; *б* – 1.2

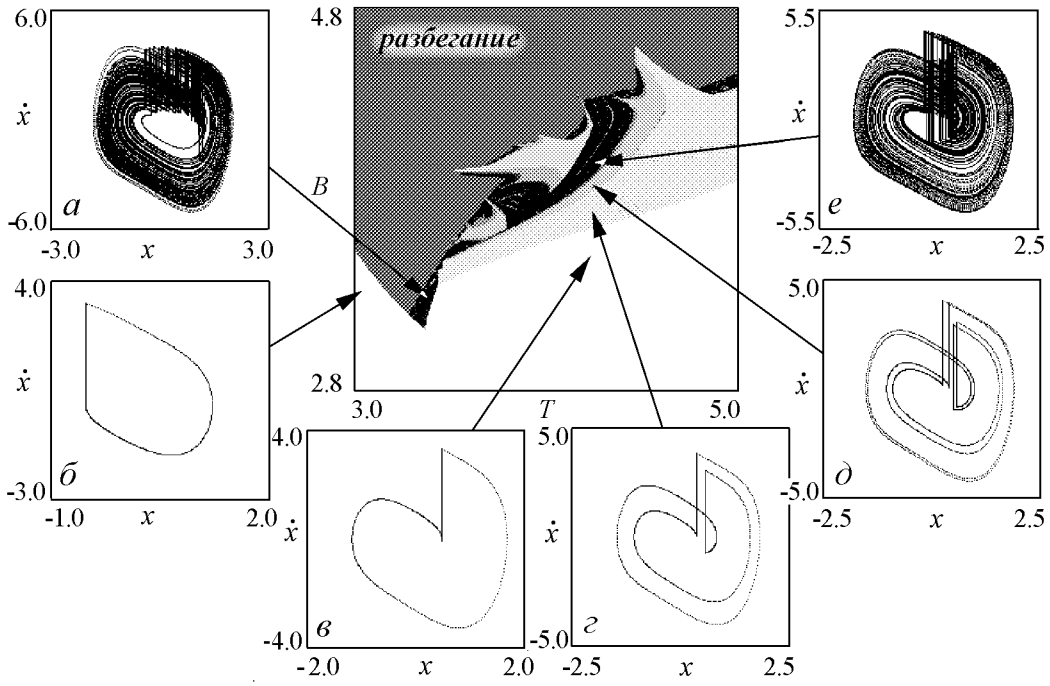


Рис. 8. Вторая область устойчивых режимов, возникающая в системе (5) при $\lambda = 1.2$ и $\beta = 2$ и портреты аттракторов, построенные для некоторых режимов

в строго определенный момент времени и имел определенную амплитуду. С одной стороны, она должна быть достаточно большой, чтобы «выбросить» фазовую траекторию как можно дальше от устойчивого фокуса, а с другой – не очень большой, чтобы траектория не ушла за пределы неустойчивого цикла. Существенную роль в стабилизации неустойчивости, как мы видели из численных экспериментов, играет фазовая нелинейность (см. ниже).

2. Роль кубической нелинейности в процессе стабилизации неустойчивого цикла периодической последовательностью δ-функций

Численные расчеты сигнализируют о том, что для того, чтобы в системе (5) была возможна стабилизация и возникли устойчивые периодические и квазипериодические режимы, необходимо присутствие кубической нелинейности и с достаточно большим параметром β. Причем чем больше β, тем при меньших значениях управляющего параметра λ возникают языки синхронизации, и тем более они «развиты». Чтобы «выявить» роль фазовой нелинейности, было проведено попарное сопоставление фазовых траекторий неавтономной системы (5), построенных в отсутствие фазовой нелинейности и при ее наличии. За траекториями наблюдали в течение времени, чуть большего периода внешнего воздействия T. Сравниваемые траектории стартовали из одной точки на фазовой плоскости. Результаты представлены на рис. 9, где изображены также неустойчивые циклы автономной системы в отсутствие фазовой нелинейности и для случая $\beta = 1$. Видно, что вторая траектория движется по орбите большего радиуса, и ее фаза изменяется более ускоренно. Как

итог – первую траекторию импульс выбрасывает за пределы неустойчивого цикла, а вторая успевает заметно приблизиться к устойчивому фокусу в центре рисунка, так что внешний импульс возвращает ее в окрестность предельного цикла.

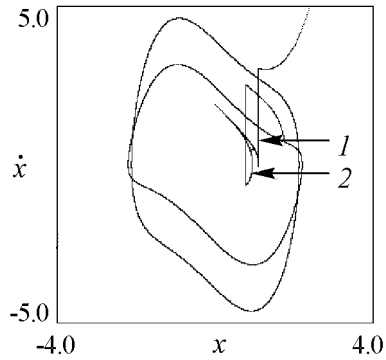


Рис. 9. Неустойчивые предельные циклы и две избранные фазовые траектории неавтономной системы (5), стартующие из одной точки, в случае отсутствия фазовой нелинейности $\beta = 0$ (*1*) и при $\beta = 1$ (*2*). Остальные параметры фиксированы и имеют значения: $\lambda = 1.2$, $T = 1.5$ и $B = 3.2$

Еще одна иллюстрация роли фазовой нелинейности представлена на рис. 10. Здесь показаны по паре фазовых траекторий, стартовавших из близких точек. Рис. 10, *а* относится к системе без фазовой нелинейности, а рис. 10, *б* – с существенной нелинейностью. Точки старта помещены вблизи неустойчивого цикла, чтобы сделать наличие неустойчивости в системе более явным. Траектории на рис. 10, *а*, несмотря на импульсное внешнее воздействие, очень быстро расходятся. А на рис. 10, *б* видно, что изображающая точка, которая движется по орбите большего радиуса, опережает другую по фазе. В результате после действия двух импульсов расстояние между орбитами практически равно начальному. Фазовая нелинейность практически полностью компенсировала присущую системе неустойчивость.

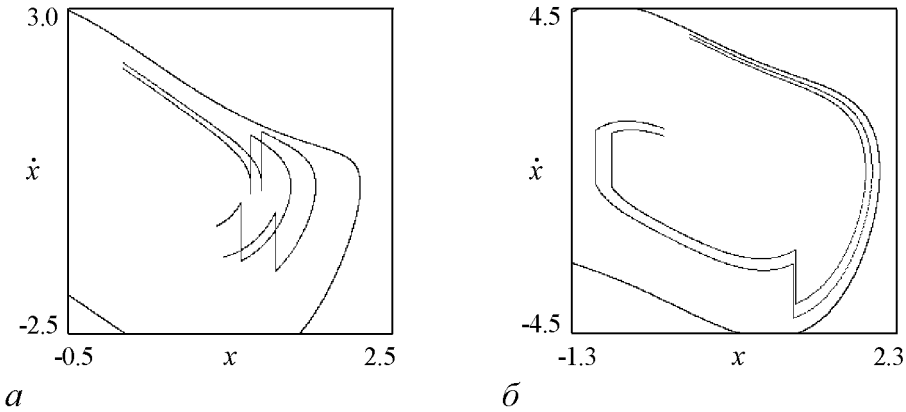


Рис. 10. Вид фазовых траекторий, стартовавших из двух близких точек, в случае, когда $\beta = 0$ (*а*) и $\beta = 1$ (*б*). Остальные параметры $\lambda = 1.2$, $T = 1.5$ и $B = 1.8$

Заключение

Таким образом, в работе рассмотрена динамика неавтономной системы типа Ван дер Поля – Дуффинга с неустойчивым предельным циклом. Показано, что внешнее воздействие в виде периодической последовательности δ-функций вызывает в неавтономной системе эффект стабилизации неустойчивости и приводит к возникновению устойчивых квазипериодических режимов со встроенной системой языков синхронизации Арнольда, а также областей удвоенного периода и характерных структур «crossroad area», которые локализованы у границы области разбегания траекторий. Аттракторы разных типов устойчивых режимов существуют в окрестно-

сти неустойчивого цикла автономной системы. Этот эффект возможен (по крайней мере, становится заметным при компьютерном моделировании) при наличии достаточно сильной кубической нелинейности в исходной дифференциальной системе.

Работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований грант №03-02-16074 и грантом №Y2-P-06-13 в рамках программы «Фундаментальные исследования и высшее образование».

Библиографический список

1. *Неймарк Ю.И., Ланда П.С.* Стохастические и хаотические колебания. М.: Наука, 1987.
2. *Берже П., Помо И., Видаль К.* Порядок в хаосе. М.: Мир, 1991.
3. *Ott E.* Chaos in dynamical systems. Cambridge university press, 1993.
4. *Анищенко В.С.* Сложные колебания в простых системах. М.: Наука, 1990.
5. *Winfree A.T.* The Geometry of Biological Time. Berlin: Springer, 1980.
6. *Пиковский А., Розенблюм М., Куртс Ю.* Синхронизация. Фундаментальное нелинейное явление. М.: Техносфера, 2003.
7. *Caldas I.L., Tasson H.* Limit cycles of periodically forced oscillations // Phys. Lett. 1989. Vol. A135. P. 264.
8. *Steeb W.H., Kunick A.* Chaos in limit-cycle systems with external periodic excitation // Int. J. of Nonlinear Mechanics. 1987. №22. P. 349.
9. *Gonzalez D.L. and Piro O.* Chaos in a nonlinear driven oscillator with exact solution // Phys. Rev. Lett. 1983. Vol. 50, №12. P. 870.
10. *Ding E.J.* Analytic treatment of periodic orbit systematics for a nonlinear driven oscillator // Phys. Rev. 1986. Vol.A34, №4. P. 3547.
11. *Ding E.J.* Analytic treatment of a driven oscillator with a limit cycle // Phys. Rev. 1987. Vol. A35, №6. P. 2669.
12. *Ding E.J.* Structure of parameter space for a prototype nonlinear oscillator // Phys. Rev. 1987. Vol. A36, №3. P. 1488.
13. *Ding E.J.* Structure of the parameter space for the van der Pol oscillator // Physica Scripta. 1988. Vol. 38. P. 9.
14. *Ullmann K. and Caldas I.L.* Transitions in the parameter space of a periodically forced dissipative system // Chaos, Solitons & Fractals. 1996. №11. P. 1913.
15. *Keener J.P., Glass L.* Global bifurcation of a periodically forced nonlinear oscillator // J. Math. Biology. 1984. №21. P. 175.
16. *Glass L., Sun J.* Periodic forcing of a limit-cycle oscillator: Fixed points, Arnold tongues, and the global organization of bifurcations // Phys. Rev. 1994. Vol. 50, №6. P. 5077.
17. *Ding E.J. and Hemmer P.C.* Exact treatment of mode locking for a piecewise linear map // Journal of Statistical Physics. 1987. Vol.46, №1-2. P. 99.
18. *Кузнецов А. П., Тюрюкина Л. В.* Осциллятор Ван дер Поля с импульсным воздействием: от потока к отображениям // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2001. Т.9, №6. С. 69.
19. *Glass L., et al.* Global bifurcations of a periodically forced biological oscillator // Phys. Rev. A. 1983. №29. P. 1348.

20. *Кузнецов А. П., Тюрюкина Л. В.* Синхронизация автоколебательной системы Ван дер Поля – Дуффинга короткими импульсами // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2004. Т.12, №5. С. 16.
21. *Кузнецов А.П., Кузнецов С.П., Рыскин Н.М.* Нелинейные колебания. М.: Физматлит, 2002. 292 с.
22. *Кузнецов С.П.* Динамический хаос. М.: Физматлит, 2001. 296 с.

Саратовский филиал ИРЭ РАН
Саратовский государственный университет

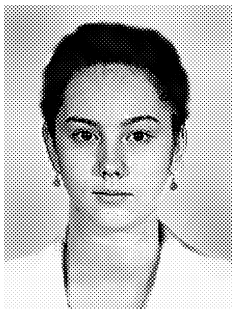
Поступила в редакцию *24.03.2005*
После доработки *14.10.2005*

STABLE QUASI-PERIODIC AND PERIODIC REGIMES INITIATED BY THE SHORT PULSES IN SYSTEM WITH UNSTABLE LIMIT CYCLE

A.P. Kuznetsov, L.V. Turukina

The dynamics of a system with unstable limit cycle under the periodic sequence of delta-pulses is considered. It is shown, that stable quasi-periodic regimes and phase lock regimes (synchronization) are observed within a narrow range of parameters of the external action in the system with cubic nonlinearity. Influence of main system's parameters to the stable quasi-periodic regimes and phase lock regimes is investigated.

Кузнецов Александр Петрович – родился в 1957 году. Доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник Саратовского филиала Института радиотехники и электроники РАН, профессор Саратовского госуниверситета, заведующий базовой кафедрой динамических систем СГУ в СФ ИРЭ РАН. Специалист по нелинейной динамике, теории динамического хаоса и теории критических явлений. Занимается использованием идей теории катастроф и теории бифуркаций, а также развитием концепции сценариев перехода к хаосу применительно к многопараметрическим модельным и физическим нелинейным системам. Соросовский профессор (2000, 2001), научный руководитель студенческой лаборатории «Теоретическая нелинейная динамика» и заочной школы факультета нелинейных процессов. Опубликовал более 100 научных работ. Автор нескольких оригинальных учебных курсов для факультета нелинейных процессов и лицея прикладных наук СГУ, шести учебных пособий и монографии «Нелинейные колебания» (совместно с С.П. Кузнецовым и Н.М. Рыскиным. М.: Физматлит, 2002). Член редколлегии журнала «Империя математики».
E-mail: alkuz@sgu.ru; www.sgtnd.tserv.ru



Тюрюкина Людмила Владимировна – родилась в 1977 году. Кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник Саратовского филиала Института радиотехники и электроники РАН, ассистент базовой кафедры динамических систем СГУ в СФ ИРЭ РАН. Область научных интересов – динамический хаос, критические явления на пороге хаоса, сложная динамика нелинейных осцилляторов и автоколебательных систем с внешним периодическим воздействием в контексте сопоставления различных подходов к их описанию, синхронизация короткими импульсами и управление неустойчивыми режимами посредством коротких импульсов. Автор 26 научных публикаций, в том числе 7 статей в российских и зарубежных журналах. Лауреат стипендии Президента РФ для студентов и аспирантов. В 2001 и 2002 годах получила персональные гранты РФФИ для молодых исследователей. Принимает участие в работе международных научных коллективов.
E-mail:ludmila@forpost.ru

Прикладные задачи нелинейной теории колебаний и волн

Изв. вузов «ПНД», т. 14, № 1, 2006 УДК 621.385

ДИНАМИКА ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ЛИНЕЙНОЙ ВОЛНЫ И ВОЛНЫ С ИНЕРЦИОННОЙ НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ ПОД ВОЗДЕЙСТВИЕМ ШУМА

А.П. Четвериков, Н.Б. Фролова

Представлены результаты численного моделирования колебаний в простой модели взаимодействия волн с инерционной нелинейностью, которые применимы для анализа в простейшем приближении процессов в лампе обратной волны типа О. Для идентификации непериодических колебаний использованы удобные численные характеристики – декремент автокорреляционной функции и характерное время корреляции. Обнаружено, что под воздействием аддитивного шума возможно как усложнение, так и упорядочивание формы генерируемого сигнала. Определена зависимость критического значения интенсивности шумового воздействия, при котором происходит разрушение автономной динамики системы, от параметра неравновесности системы.

Введение

Исследуемая однопараметрическая модель взаимодействия линейной волны и волны с инерционной нелинейностью возникла в простейшем варианте нестационарной теории лампы обратной волны типа О [1–3]. В силу своей простоты она удобна и для исследования воздействия внешних флуктуаций на динамику моделей взаимодействующих волн с инерционной нелинейностью и лампы обратной волны типа О (ЛОВО). Интерес к подобным проблемам обусловлен целым рядом причин. В частности, все реальные автогенераторы подвержены влиянию внутренних шумов, то есть шумов, не связанных с их динамикой, в связи с чем различные тонкие эффекты в динамике не могут быть корректно исследованы [4–6] без учета влияния шума. Кроме того, внешними шумами малой интенсивности можно, хотя бы грубо, моделировать разного рода возмущающие факторы, присущие реальным системам, но не учтенные в модели. Наконец, обнаружено [6], что внешние флуктуации не

всегда повышают уровень шума в системе, возможна другая реакция динамики системы, как, например, в модели взаимодействия встречной электромагнитной волны и электронной волны с кубичной фазовой нелинейностью [7]. Важен также вопрос о максимально допустимых значениях интенсивности внешнего шума, при которых сохраняется автономная динамика системы.

1. Однопараметрическая модель взаимодействия линейной волны и волны с инерционной нелинейностью с учетом флуктуаций

Рассмотрим распространенную модель исследования процессов взаимодействия волн в электронном потоке со встречной электромагнитной волной в ЛОВ типа О [2, 8, 9]. Добавим в модель источник шума, полагая, что на электронный поток помимо излучаемой им электромагнитной волны воздействует распределенный в пространстве взаимодействия дополнительный флуктуационный компонент электромагнитного поля. В результате взаимодействие электронного потока с волной в присутствии внешнего шумового воздействия описывается системой дифференциальных уравнением в частных производных

$$\frac{\partial F}{\partial \tau} - \frac{\partial F}{\partial \xi} = -AI, \tag{1}$$

$$I = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} e^{-ju} du_0, \tag{2}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} = -A^2 \mathrm{Re}[Fe^{ju}] + B_G \zeta(\xi, \tau). \tag{3}$$

Здесь F и I – безразмерные медленно меняющиеся во времени и пространстве по сравнению с несущей $\exp(j(\Omega t - k_0 x))$ комплексные амплитуды взаимодействующих волн; τ и ξ – безразмерные время и координата. Единственный параметр взаимодействия системы $A = k_0 LC$, от величины которого зависит характер устанавливающегося автоколебательного режима, является безразмерным и имеет смысл нормированной длины пространства взаимодействия системы.

Система уравнений (1)–(3) дополняется граничными условиями $I|_{\xi=0} = 0$, $F|_{\xi=1} = 0$. В качестве начальных используются условия, задаваемые начальными шумовыми возмущениями пучка и волны с малыми амплитудами.

Отличие представленного уравнения движения электронов (3) от традиционного в нестационарной теории ЛОВО заключается в наличии дополнительного члена, описывающего источник аддитивного шума интенсивностью B_G. Полагая спектральную плотность источника шума в полосе взаимодействия волн постоянной, будем рассматривать вводимый в систему шум как белый, то есть считать функцию $\langle\zeta(\xi,\tau)\rangle$ удовлетворяющей условиям $\langle\zeta(\xi,\tau)\rangle = 0$, $\langle\zeta(\xi,\tau)\zeta(\xi',\tau')\rangle = \delta(\xi-\xi')\delta(\tau-\tau')$. Величина B_G в конкретных случаях может быть рассчитана исходя из представлений об источнике шума.

Уравнения (1)–(3) решаются численно методом второго порядка на основе двухслойной разностной схемы [10, 11]. В процессе моделирования накапливается модуль амплитуды «выходного сигнала» $|F_k| = |F(0, \Delta\tau k)|$, где $\Delta\tau = \Delta\xi/2$ –

шаг интегрирования по времени, а $\Delta\xi$ – шаг интегрирования по координате (обычно использовалось $\Delta\xi = 0.01$), и действительная часть амплитуды выходного сигнала $\mathrm{Re}F_k = |F_k|\cos\varphi_F$. Изучение временного поведения функции $\mathrm{Re}F_k$ позволяет оценить вклад модуляции фазы комплексной амплитуды в автоколебательных режимах. Идентификация сложных автоколебательных режимов проводится на основе сравнительного анализа результатов расчета спектральной плотности мощности $S(f)$, плотности распределения вероятностей значений $|F_k|$, двумерной проекции «фазового пространства» системы и автокорреляционной функции $R(\tau)$.

Степень развитости нерегулярных автоколебаний оценивается на основе зависимостей от бифуркационного параметра системы A и амплитуды внешнего шумового воздействия показателей стандартных статистических характеристик, таких как декремент χ автокорреляционной функции, отношение декремента к частоте автомодуляции колебаний χ/f_a, характерное время корреляции τ_c АКФ, отношение шум/сигнал P.

Автокорреляционная функция процесса может быть представлена в следующей форме

$$R(\tau) \approx e^{-\chi|\tau|}F(f_0\tau), \tag{4}$$

где декремент χ характеризует хаотическую компоненту, $F(f_0\tau)$ – периодическая функция, описывающая регулярную компоненту, причем в рассматриваемом случае $f_0 = f_a$. Если в спектре превалирует основная спектральная компонента с частотой автомодуляции f_a, то соотношение (4) переписывается в виде

$$R(\tau) \approx e^{-\chi|\tau|}\cos(2\pi f_a\tau), \tag{5}$$

чему соответствует спектральная плотность мощности

$$S(f) = 2\chi[1/(\chi^2 + 4\pi^2(f + f_a)^2) + 1/(\chi^2 + 4\pi^2(f - f_a)^2)]. \tag{6}$$

Определяя из последнего выражения $S_{max} = S(f_a)$ и величину $S(f_a + \Delta f/2)$ на уровне $S_{max}/2$, получим $\Delta f \approx \chi/\pi$. Полагаем режим развитым хаотическим, если ширина спектральной линии $\Delta f > f_a$ (или, по крайней мере, близка к этому значению). Отсюда следует

$$\chi(A)/f_a(A) \geq \pi/2. \tag{7}$$

По мере увеличения параметра неравновесности относительная мощность регулярной компоненты уменьшается вплоть до исчезновения, а декремент АКФ растет, свидетельствуя об увеличении степени хаотизации автоколебаний.

На графиках спектральная плотность мощности представлена в виде

$$S = 10\ \lg(S(f)/S_{max}),$$

где S_{max} – максимальное значение $S(f)$ для данной реализации.

Однако не всегда рассматриваемые автокорреляционные функции могут быть аппроксимированы соотношениями (4) или (5). В более общем случае подходящей количественной характеристикой в численных экспериментах с конечной длиной временных реализаций является введенное в [12] характерное (нормированное) время корреляции τ_c

$$\tau_c = \frac{1}{T}\int\limits_0^T |R(\tau)|\,d\tau, \tag{8}$$

которое применимо для любых типов процессов. Усложнению поведения системы соответствует уменьшение значений характерного времени корреляции.

В данной работе для сравнения приведены результаты расчетов обеих характеристик – как декремента АКФ, так и характерного времени корреляции.

Степень влияния аддитивного шума на интегральные характеристики определяется по графикам зависимостей мощности выходного сигнала от параметра B_G. Так, в ходе обработки выходной реализации рассчитывается общая мощность сигнала P, мощность несущей P_0 и мощность автомодуляционной компоненты P_a

$$P = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}|F_i|^2;\ P_0 = (\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}|F_i|)^2;\ P_a = P - P_0. \tag{9}$$

2. Параметры автокорреляционной функции в отсутствие внешнего воздействия

Поскольку бифуркационные значения параметра неравновесности A хорошо известны из многочисленных работ [1, 2, 8, 9, 13–15] по изучению динамики ЛОВО в рамках рассматриваемой простой модели, перейдем сразу к определению степени развитости сложных, в первую очередь хаотических, автоколебаний в ней, используя введенные характеристики автокорреляционной функции.

Напомним, что одночастотная генерация возникает при $A = A_1 \approx 1.98$, а при $A = A_2 \approx 2.9$ одночастотный режим теряет устойчивость, сменяясь двухчастотным. Таким образом, в системе возникает периодическая автомодуляция [2, 8, 9, 13], а далее, при $A = A_3 \approx 4.11$ происходит переход к хаотическим колебаниям через удвоение периода [4]. Однако в широком диапазоне значений параметра $A > A_3$ наблюдается большое количество окон периодичности [4], а шумовой компонент в выходном сигнале остается незначительным (или исчезает вовсе), о чем свидетельствует рассчитанная зависимость декремента автокорреляционной функции $\chi(A)$ (рис. 1, линия *1*). Видно, что эта величина, как и отношение декремент/частота $\chi(A)/f_a(A)$ (линия *2*), остаются малыми до значения $A = A_4 \approx 6.0$, при превышении которого стремительно возрастают. И хотя отношение $\chi(A)/f_a(A)$ в довольно широком диапазоне остается меньшим $\pi/2$, то есть значения, которое ранее было определено как граничное для развитых хаотических колебаний (см. рис. 1, линия *4*), именно $A = A_4 \approx 6.0$ следует считать бифуркационным значением возникновения в ЛОВО развитых хаотических колебаний. Подтверждением этого вывода являются также данные расчета отношения шум/сигнал P_s (см. рис. 1, линия *3*), где под сигналом понимается мощность спектральной компоненты $S(f_a)$ и ее гармоник, а под шумом – мощность всех остальных компонент в полосе $\Delta f \approx 5f_a$, а также характерного времени корреляции $\tau_c(A)$ (рис. 2). В параметрической области вблизи значения A_4 его малое изменение в пределах $5.95...6.05$ приводит к увеличению декремента почти в десять раз, при этом значение характерного времени корреляции уменьшается более чем в восемь раз. Расчет характерного времени корреляции τ_c позволяет уточнить значение бифуркационного параметра и определить его как $A_4 = 5.96$. Эти данные согласуются с результатами расчета других статистических

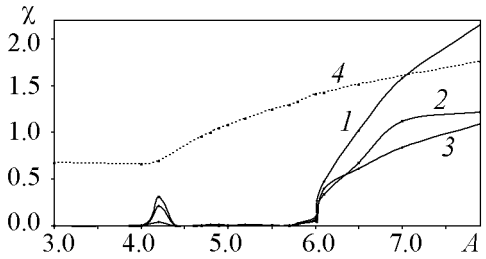


Рис. 1. Зависимость декремента χ (линия *1*), отношения декремент/частота автомодуляции χ/f_0 (линия *2*), отношения шум/сигнал $0.01P_s$ (линия *3*) и частоты автомодуляции f_a (линия *4*) от параметра A в отсутствие шума, $B_G = 0$

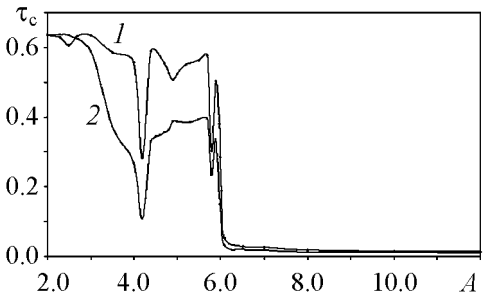


Рис. 2. Зависимость характерного времени корреляции τ_c от параметра A в отсутствие шума ($B_G = 0$), рассчитанная для модуля выходной реализации $|F(\tau)|$ (линия *1*) и действительной части поля $\mathrm{Re}F(\tau)$ (линия *2*)

характеристик [16], на основании которых хаотические режимы при $A \leq 6.0$ квалифицируются как «слабый хаос», а при $A \geq 6.0$ – как гиперхаос.

На графике зависимости характерного времени корреляции $\tau_c(A)$ (см. рис. 2) представлены две кривые: первая отображает характерное время корреляции, рассчитанное для модуля выходной реализации $|F(\tau)|$, вторая построена для действительной части выходного массива $\mathrm{Re}F(\tau)$. В обоих случаях на графиках характерного времени корреляции наблюдаются «клювы» уменьшенных значений τ_c для A вблизи значений 4.2 и 5.8, которые объясняются возникновением в этой области хаотических колебаний даже в отсутствие внешнего воздействия. В целом в диапазоне значений $A_3 < A < A_4$ наблюдается смена различных режимов колебаний в системе [4], что отображается на представленной зависимости $\tau_c(A)$ разбросом значений характерного времени корреляции около величины, определяющей упорядоченные колебания – $\tau_c \sim 0.55...0.65$ для модуля выходной реализации $|F(t)|$. Поведение системы в этом диапазоне является достаточно сложным [4], однако воздействие внешнего шума, как показано ниже, сглаживает все описанное разнообразие режимов.

Обращает на себя внимание обнаруженная разница в степени автокорреляций значений модуля выходного сигнала $|F(\tau)|$ и его действительной части $\mathrm{Re}F(\tau)$ (сравнивая данные анализа этих двух величин, можно оценить влияние модуляции фазы выходного сигнала на динамику). Для $|F(\tau)|$ наблюдаются небольшие дополнительные минимумы τ_c при значениях $A \approx 2.5$ и $A \approx 4.9$. Действительная часть $F(\tau)$ при этом выраженного уменьшения характерного времени корреляции не демонстрирует. Необходимо отметить, что после первого провала в функции $\tau_c(A)$, рассчитанной по реализации $\mathrm{Re}F(\tau)$, ее значения при увеличении A не возвращаются к первоначальному уровню значений характерного времени корреляции. Такая ситуация может быть связана с большим влиянием вариаций фазы волны, которое слабо «улавливается» при оперировании с модулем амплитуды волны в тех случаях, когда модуляция фазы может быть сильной при относительно слабой модуляции модуля. Кроме того, существенную роль играет уровень средних значений обеих величин: для $|F(\tau)|$ среднее значение отлично от нуля и максимально, как установлено, для развитых колебаний в диапазоне $A_3 < A < A_4$, для $\mathrm{Re}F(\tau)$ среднее значение функции прак-

тически равно нулю. Таким образом, малое отклонение системы от периодических колебаний при обработке временной зависимости $|F(\tau)|$ не заметно в отличие от существенной реакции на это возмущение действительной части функции $F(\tau)$.

3. Воздействие внешнего шума на характеристики системы

Влияние шума на динамику рассматриваемой системы изучалось в численных экспериментах, в ходе которых изменялась амплитуда внешнего аддитивного шума B_G от значений, соответствующих слабому шуму, к значениям, соответствующим сильному, при нескольких характерных фиксированных значениях параметра неравновесности A. Но прежде чем анализировать полученные результаты, уточним понятия слабого и сильного шума для рассматриваемой системы.

Полагаем, что источник возбуждает в системе слабый шум, если его мощность P_{noise} составляет менее 0.01 максимальной мощности $P_{1\max}$ выходного сигнала в одночастотном режиме генерации, и сильный, если P_{noise} более $0.05P_{1\max}$. В промежуточном случае шум считается умеренным. Соответствующие области значений амплитуд источника шума с гауссовым распределением представлены на графике зависимости $P_{\text{noise}}(B_G)$ (рис. 3, *а*). На рис. 3, *б* показана зависимость общей мощности реализации от параметра A при некоторых характерных значениях амплитуды шума.

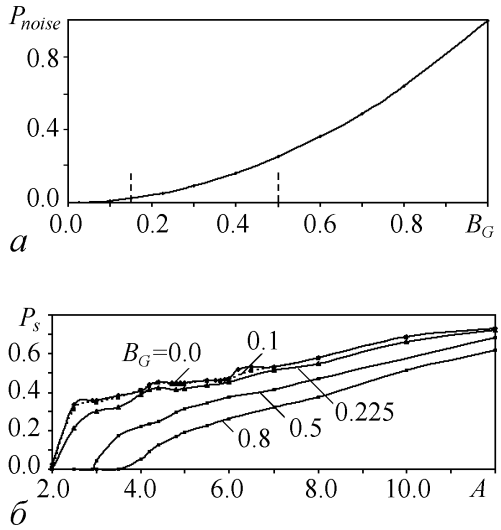


Рис. 3. Зависимость мощности шумового сигнала на выходе из системы от амплитуды шумового источника B_G (*а*) и общей мощности выходного сигнала от значений параметра A для некоторых характерных значений амплитуды внешнего шума (*б*)

Все приведенные зависимости $\tau_c(A)$ (рис. 4) получены для некоторых характерных значений амплитуды B_G, взятых из каждой выделенной области: 0.0, 0.025, 0.1, 0.225, 0.5 и 0.8. На рис. 4, *а* зависимости $\tau_c(A)$ рассчитаны на основе реализации модуля выходного сигнала $|F(\tau)|$ с вычтенным средним, а зависимости, представленные на рис. 4, *б*, получены в результате обработки функции $\mathrm{Re}F(\tau)$. Проведем их анализ, выделяя области различных автоколебательных режимов.

Рассмотрим сначала воздействие шума на одночастотный режим колебаний. Как показывают результаты исследований, в области одночастотных автоколебаний $1.98 < A < 2.9$ внешний шум фактически «складывается» с генерируемым сигналом. При увеличении амплитуды шума происходит превращение одночастотного автоколебательного режима в режим генерации одночастотных колебаний, модулированных внешним шумовым сигналом, что соответствует известным выводам об устойчивости предельного цикла по отношению к внешним флуктуациям не слишком большой интенсивности [17]. Однако дальнейшее повышение амплитуды шума выше определенного (критического) значения $B_G^{(\text{cr})}$ приводит к прекращению вза-

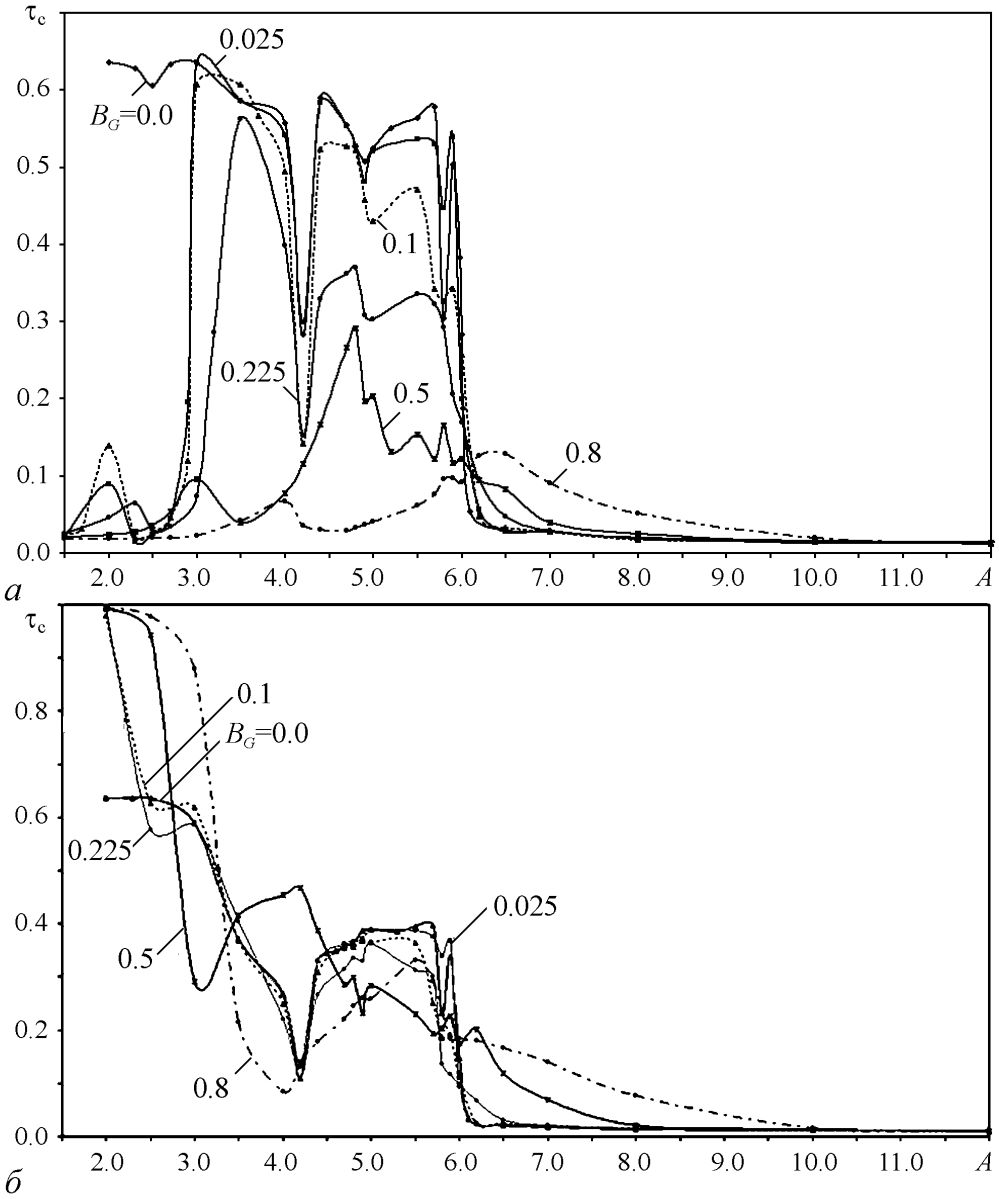


Рис. 4. Зависимость характерного времени корреляции τ_c от параметра A, рассчитанное для $|F_0(\tau)|$ (*а*) и действительной компоненты поля $\mathrm{Re}F(\tau)$ (*б*), для нескольких характерных значений амплитуды шума B_G

имодействия волн и срыву автоколебаний. В частности, это хорошо видно из графика временной зависимости амплитуды. Это означает, что сильный шум нарушает условия пространственно-временного резонанса и внутренняя динамика системы разрушается. Такой эффект наблюдается и в режиме автомодуляции, по крайней мере, периодической (рис. 5). Поэтому график зависимости критического значения $B_G^{(\mathrm{cr})}(A)$ (рис. 6) приведен сразу для всех значений параметра неравновесности A, при которых значения $B_G^{(\mathrm{cr})}$ не превышают разумных пределов. Из рис. 6 видно, что

величина $B_G^{(\mathrm{cr})}$ растет с увеличением A. В частности, на границе устойчивости одночастотного режима вблизи $A = 2.9$, чтобы сорвать автоколебания, в систему нужно подать внешний шум с мощностью, составляющей 14.3% мощности генерируемого сигнала.

Эти выводы подтверждаются и данными анализа остальных статистических характеристик. Воздействие внешнего шума малой амплитуды $(B_G = 0.015)$ незначительно «размывает» автономную динамику системы, например, с $A = 2.7$ (рис. 5, *а*). Шум средней $(B_G = 0.225)$ амплитуды приводит к хаотическому поведению на фоне колебаний с частотой автомодуляции системы (рис. 5, *б*), а увеличение значений его амплитуды выше критического значения $(B_G \geq 0.5)$ ведет к полному разрушению внутренней динамики системы (рис. 5, *в*). Рассчитанное характерное время корреляции τ_c при всех значениях бифуркационного параметра A для разных значений амплитуды B_G в области одночастотных колебаний имеет малые величины. Они соответствуют узкополосному шуму, «вырезанному» из внешнего шума системой благодаря ее селективным частотным свойствам, обеспечиваемым пространственно-временным резонансом (см. рис. 4).

Влияние внешнего шума на различные не одночастотные режимы колебаний можно оценить на основе зависимостей от амплитуды шума декремента $\chi(B_G)$ [6] и характерного времени корреляции $\tau_c(B_G)$ (рис. 7) при некоторых характерных значениях бифуркационного параметра A.

Обнаружено, что в режимах периодических (в отсутствие шума) колебаний, наблюдающихся в области параметра $2.9 < A < 4.02$, внешний

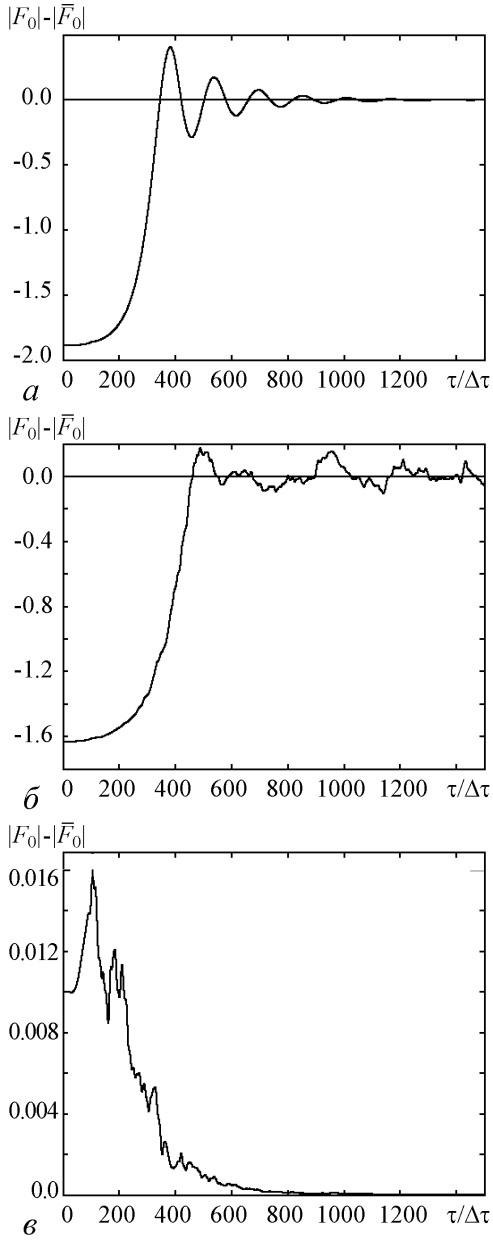


Рис. 5. Реализация $|F_0(\tau)| - |\bar{F}_0|$, где $|\bar{F}_0|$ – среднее значение $|F_0(\tau)|$, при $A = 2.7$ и характерных значениях амплитуды внешнего шума B_G: 0.015 (*а*); 0.225 (*б*); 0.5 (*в*)

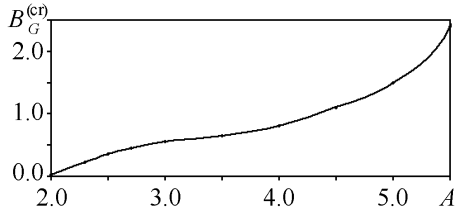


Рис. 6. Зависимость критической амплитуды шума B_G от параметра A

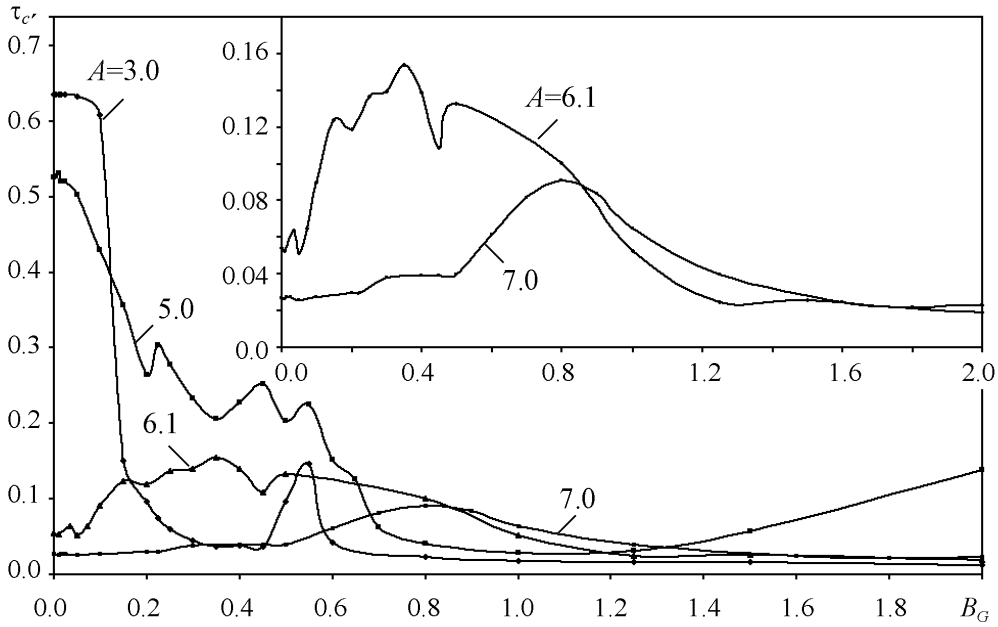


Рис. 7. Зависимость характерного времени корреляции от амплитуды шума для нескольких значений параметра A: 3.0, 5.0, 6.1, 7.0

шум малой амплитуды также фактически складывается с генерируемым сигналом. Это приводит к расширению основной спектральной линии и спектральных линий ее гармоник в остающемся сильно неоднородном спектре практически без изменения автокорреляционной функции (точнее, с появлением спада АКФ с очень маленьким декрементом (рис. 8, *а*)). Плотность распределения вероятностей теряет вид, характерный для синусоидальной функции, но пока сохраняет два максимума (см. рис. 8, *а*), «предельный цикл» на проекции фазового портрета начинает размываться, хотя его структура еще вполне различима. Дальнейшее увеличение амплитуды внешнего шума приводит к быстрому усложнению колебаний системы с полным разрушением ее внутренней динамики при превышении критического значения амплитуды флуктуаций (рис. 8, *б*).

Из графиков зависимостей $\chi(B_G)$ и $\tau_c(B_G)$ (см. рис. 7) видно, что влияние шума на поведение системы тем сильнее, чем меньше значения бифуркационного параметра. Так, при $A = 3.0$ декремент при небольших значениях амплитуды внешнего шума B_G растет, а характерное время корреляции падает быстрее, чем при других значениях параметра A.

Таким образом, внешний шум в этом режиме понижает степень корреляции колебаний в системе и вызывает существенную непериодическую модуляцию выходного сигнала, что подтверждается также графиками пространственно-временных распределений амплитуд поля и тока для характерных значений амплитуды внешнего воздействия (рис. 9).

Воздействие шума малой амплитуды в области значений бифуркационного параметра A, соответствующих сложной динамике системы $(4.11 < A < 6.0)$, приво-

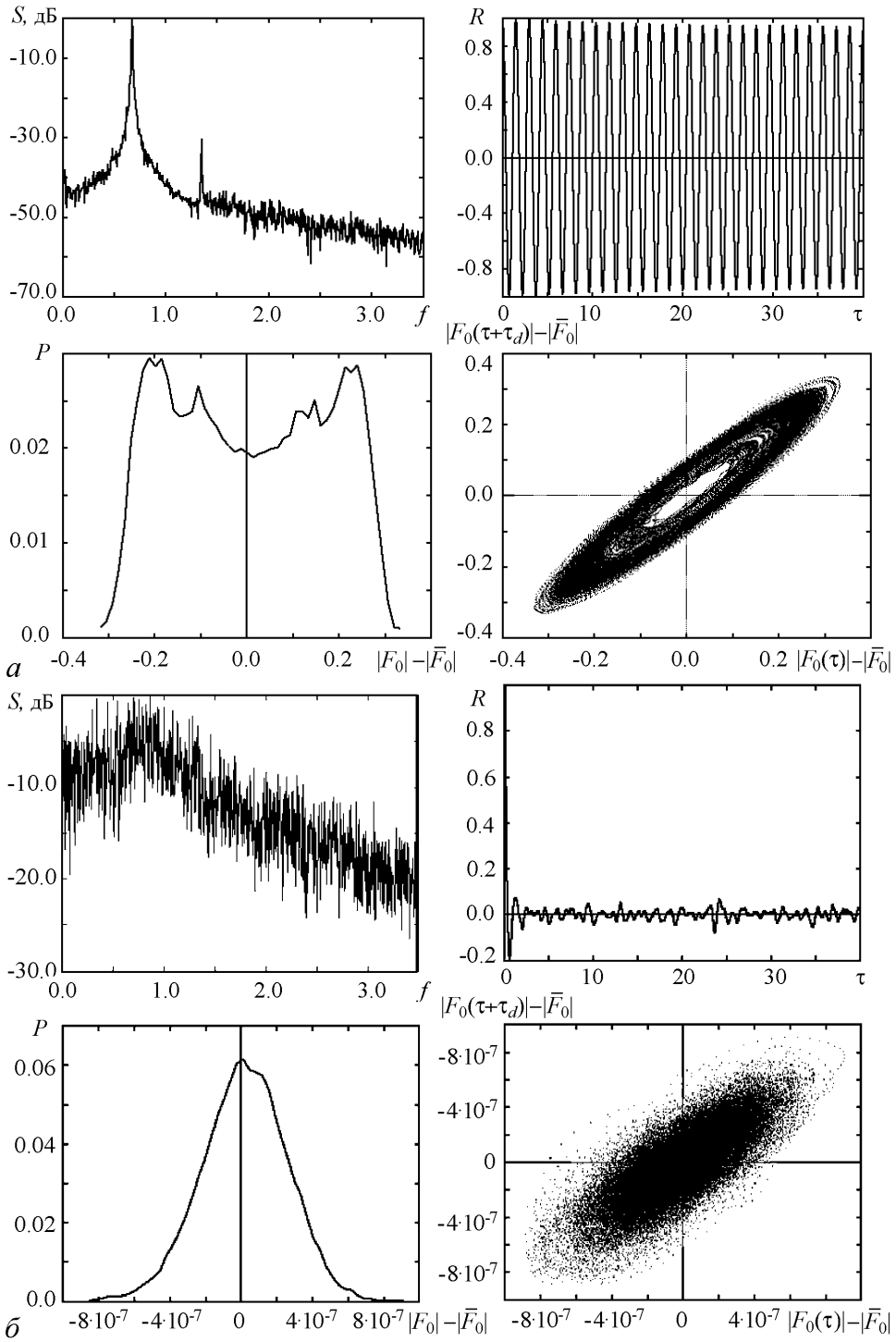


Рис. 8. Спектральная плотность мощности $S(f)$, автокорреляционная функция $R(\tau)$, плотность распределения вероятностей P и проекция фазового портрета (τ_d – время запаздывания) для $A = 3.0$ при характерных значениях амплитуды внешнего шума B_G: 0.1 (*а*), 0.8 (*б*)

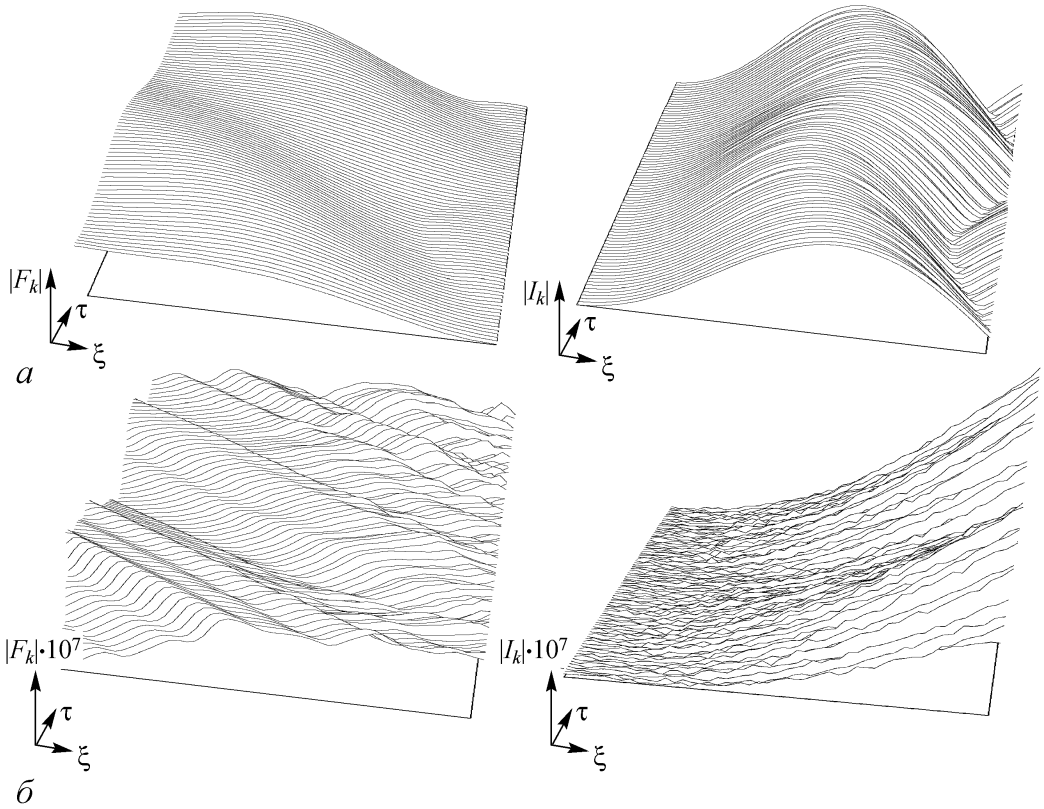


Рис. 9. Пространственно-временные распределения поля $|F_k|$ и тока $|I_k|$ в ЛОВО для $A = 3.0$ и характерных значений амплитуды внешнего шума B_G: 0.1 (*а*), 0.8 (*б*)

дит к постепенному (по мере роста B_G) усложнению поведения. Это хорошо видно из графика зависимостей характерного времени корреляции $\tau_c(A)$ (см. рис. 4), построенных как на основе $|F(\tau)|$, так и по реализации действительной части комплексной амплитуды волны. В частности, для слабой и средней амплитуды шумового воздействия при $A = 4.2$ характерное время корреляции τ_c имеет гораздо меньшее значение, чем, например, при $A = 5.0$. Это согласуется с известными результатами численного моделирования ЛОВО в этой области параметров [3, 4]. Однако следует отметить, что внешний шум «размазывает» сложную картину динамики системы, не изменяя общей тенденции поведения. Действительно, в отсутствие шума система при $A = 4.2$ демонстрирует более хаотическое поведение, чем при $A = 5.0$, эта же закономерность остается и при внешнем воздействии небольшой интенсивности.

В области параметров $4.11 < A < 6.0$ на графиках характерного времени корреляции $\tau_c(A)$ (см. рис. 4) для модуля поля можно выделить три основных минимума значений τ_c при $A = 4.2$, 4.9 и 5.8, для действительной части поля – только два (при $A = 4.2$ и 5.8). Такое поведение обусловлено неустойчивой динамикой системы в этой области [4]. Отсутствие минимума при $A = 4.9$ связано с тем, что значения характерного времени корреляции после первого минимума не возвращаются на прежний уровень, что свидетельствует о более сложной эволюции действительной части поля $\mathrm{Re}F(\tau)$ (и, естественно, $\mathrm{Im}F(\tau)$), чем модуля $F_0(\tau)$.

В целом, можно заключить, что слабый аддитивный шум в нелинейной волне не инициирует развития в системе сильных хаотических автоколебаний, чего нельзя сказать о шуме с большей интенсивностью.

В области параметров $A > 6.0$, условно выделенной по признаку характерного поведения системы, реализуются развитые хаотические автоколебания («гиперхаос» [16]). В системе с $A = 6.1$, где в отсутствие шума декремент $\chi \approx 0.5$ [6], то есть в системе с достаточно развитым динамическим хаосом, внешний шум может не только повышать степень хаотизации сигнала, но и стимулировать возникновение режимов, в которых уровень хаотичности сигнала примерно такой же, как в автономной системе, и даже ниже. В частности, в интервале значений $0.15 < B_G < 0.8$ декремент остается почти постоянным и примерно в два с половиной раза меньшим ($\chi \approx 0.2$), чем при меньших значениях B_G. Характерное время корреляции τ_c в этом же диапазоне увеличивается приблизительно в два–три раза, от $\tau_c \approx 0.05$ до $\tau_c \approx 0.15$ (см. рис. 7 на общем графике и в более крупном масштабе на врезке). Однако зависимости характерного времени корреляции от интенсивности шума фиксируют более сложную картину влияния шума различной интенсивности, чем зависимости декремента, что связано с не совсем однозначным определением декремента для столь сложного поведения наблюдаемых автокорреляционных функций. Из полученных статистических характеристик следует, что наибольшую степень упорядоченности вносят средние значения амплитуды внешнего шума. Наиболее характерное проявление эффекта упорядочения хаотических автоколебаний внешним сигналом наблюдается при большом значении параметра A, например, $A = 7$. В этом случае значение декремента может быть более чем в 5 раз меньше соответствующего значения автономной системы, но достигается при больших значениях $B_G \approx 0.8$ [6]. Характерное время корреляции при этих же значениях B_G увеличивается примерно в четыре раза (см. рис. 7). По мере увеличения внешнего воздействия на графике спектральной плотности мощности постепенно формируется ярко выраженный максимум, автокорреляционная функция спадает все медленнее (рис. 10, *а*, *б*). Дальнейшее увеличение амплитуды внешнего шума возвращает систему к первоначальному хаотическому поведению со значениями χ и τ_c, присущими системе без внешнего воздействия.

Такое свойство влияния внешнего шума на рассматриваемую динамическую систему характерно для эффектов разного рода стохастических резонансов [12, 18]. Поэтому есть основания полагать, что обнаруженное явление понижения степени хаотичности автоколебаний аналогично эффектам резонансного воздействия внешнего шума, хотя без проведения специальных исследований утверждать это с полной уверенностью нельзя.

В самом деле, колебания амплитуды выходного сигнала определяются характерным временем прохождения сигнала по петле обратной связи системы, часть которого составляет время переноса возмущения нелинейной волной вдоль системы. Этот компонент включает в себя время движения вдоль системы относительно мощных импульсов и время «установления» мощного импульса из сложного распределения волн, остающихся в системе после ухода из нее предыдущего импульса. В хаотическом режиме импульсы разные, их «хвосты» также разные и поэтому время образования и сам импульс могут существенно различаться. Подаваемый в систему внешний шум выравнивает условия развития мощных импульсов, и их последовательность оказывается более регулярной (рис. 10, *в*, *г*). Такой эффект должен быть

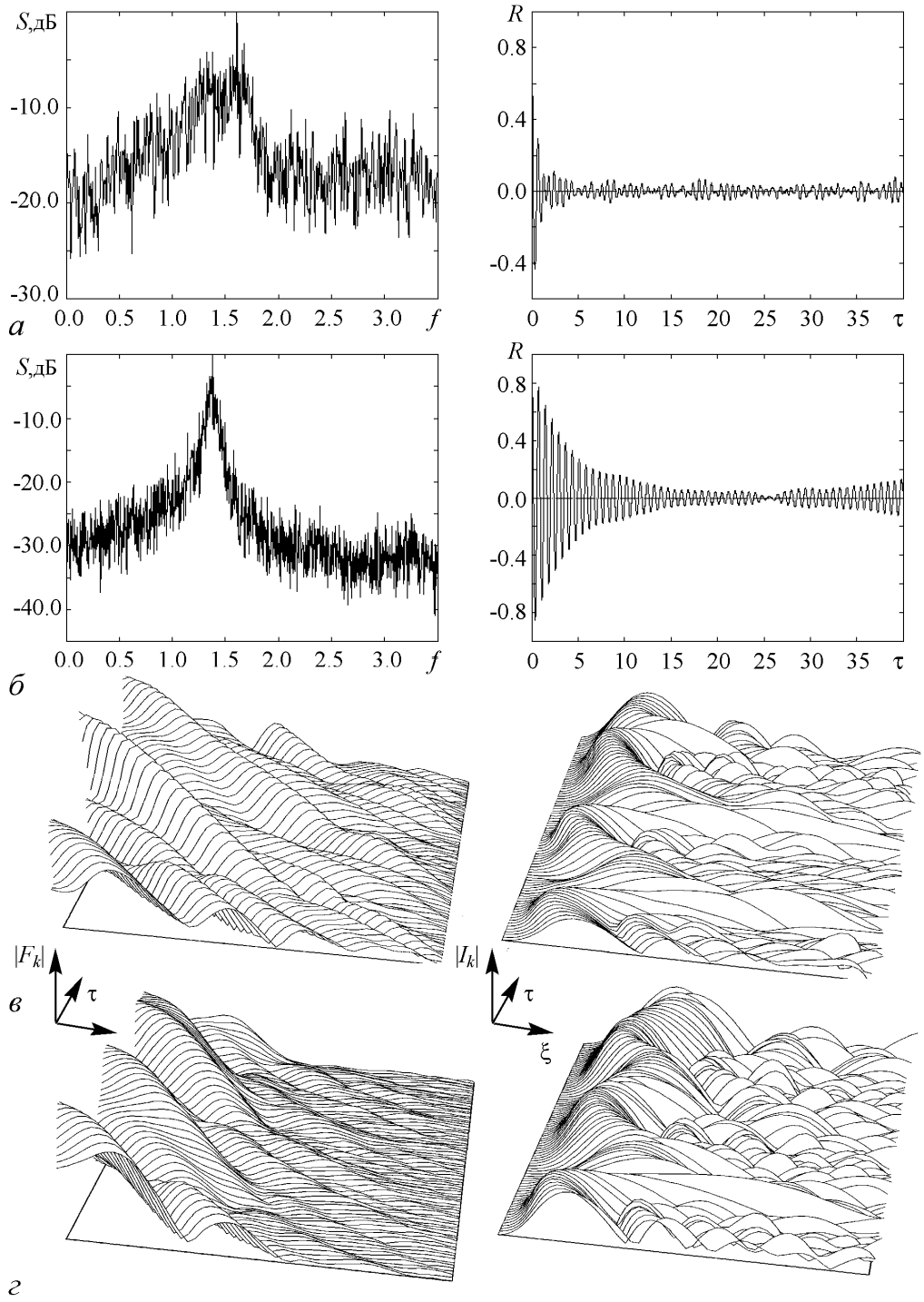


Рис. 10. Спектральная плотность мощности $S(f)$ и автокорреляционная функция $R(\tau)$ (*а*, *б*) и пространственно-временные распределения поля $|F_k|$ (левая колонка) и тока $|I_k|$ (правая колонка) (*в*, *г*) в ЛОВО для $A = 7.0$ и характерных значений амплитуды внешнего шума B_G 0.1 (*а*, *в*); 0.8 (*б*, *г*)

резонансным по уровню амплитуды шума, поскольку совсем слабый шум практически не влияет на процесс выравнивания условий формирования импульсов, а очень большой шум просто разрушает динамику системы. Поэтому в режиме развитого хаоса существует оптимальное значение амплитуды внешнего шума, при котором достигается наибольшая степень упорядоченности.

Заключение

Рассчитаны значения декремента автокорреляционной функции выходного сигнала и время его автокорреляции для характерных автоколебательных режимов автономной модели взаимодействия волн. Показано, что хаотические колебания, возникающие при $A = A_3 \approx 4.11$, в широком параметрическом диапазоне $A_3 < A < A_4 = 6.0$ представляют собой сильно окрашенный шум с маленьким значением декремента АКФ. Только при превышении значения $A_4 = 6.0$ автоколебания могут рассматриваться как развитый динамический хаос («гиперхаос»).

Изучено влияние внешнего шума различной амплитуды B_G на динамику поведения системы. Определены границы областей мощности шума по степени его влияния. Обнаружено, что увеличение шумовой компоненты может как усложнять, так и упорядочивать автоколебания в системе. В одночастотной области $(A_1 < A < A_2)$ влияние даже самого слабого шума приводит к хаотическим колебаниям со свойствами воздействующего шума. В области периодических колебаний (при $A_2 < A < A_3$) внешний шум малой амплитуды не оказывает существенного влияния на динамику системы. Шум средней амплитуды приводит к постепенному зашумлению периодических колебаний. Шум большой амплитуды приводит к срыву автоколебаний в системе. Область сложного поведения $(A_3 < A < A_4)$ более чувствительна к внешнему шуму. Он может существенно усложнить периодические и сложнопериодические колебания в системе, в целом сглаживая разницу между множеством различных режимов и переходов между ними. Увеличение амплитуды внешнего шума приводит на границе области шума большой амплитуды сначала к упорядочиванию колебаний, а далее к полному разрушению динамики системы. В области хаотических автоколебаний $(A \geq A_4)$ существенное влияние на динамику системы оказывает только шум большой амплитуды, особенно вблизи границы возникновения хаотических колебаний. Наблюдается упорядочение колебаний, которые, однако, становятся полностью хаотическими при дальнейшем увеличении значений бифуркационного параметра и амплитуды шума. Такое поведение позволяет сделать предположение о возможности управления характеристиками хаотических колебаний в лампах обратной волны, подавая тем или иным способом внешний шум различной амплитуды.

Библиографический список

1. Электроника ламп с обратной волной / Под ред. В.Н. Шевчика, Д.И. Трубецкова. Саратов: Изд-во СГУ, 1975.
2. *Гинзбург Н.С., Кузнецов С.П., Федосеева Т.Н.* Теория переходных процессов в релятивистской ЛОВ // Изв. вузов. Радиофизика. 1978. Т. 21, №7. С. 1037.
3. *Четвериков А.П.* Периодические и хаотические автоколебания в простых распределенных электронно-волновых системах // Известия АН. Сер. Физическая. 1994. Т. 58, №8. С. 171.

4. *Рыскин Н.М., Титов В.Н., Трубецков Д.И.* Детали перехода к хаосу в системе электронный пучок – обратная электромагнитная волна // Докл. РАН. 1998. Т. 358, №5. С. 620.
5. *Четвериков А.П.* Нелинейная динамика системы вазимодействующих встречных электромагнитной волны и электронной волны с кубичной фазовой нелинейностью // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 1994. Т. 2, №5. С. 46.
6. *Четвериков А.П., Фролова Н.Б.* Влияние флуктуаций на динамику лампы обратной волны // Радиотехника и электроника. 2004. Т. 4, №7. С. 876.
7. *Фролова Н.Б., Четвериков А.П.* Автоколебания в распределенной системе взаимодействующих встречных волн в присутствии флуктуаций // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2002. Т. 10, №5. С. 50.
8. *Безручко Б.П., Кузнецов С.П., Трубецков Д.И.* Экспериментальное наблюдение стохастических колебаний в динамической системе электронный пучок – обратная электромагнитная волна // Письма в ЖЭТФ. 1979. Т. 29, №3. С. 180.
9. *Гинзбург Н.С., Кузнецов С.П.* Периодические и стохастические автомодуляционные режимы в электронных генераторах с распределенным взаимодействием // Релятивистская высокочастотная электроника. Проблемы повышения мощности и частоты излучения. Горький: ИПФ АН СССР, 1981. С. 101.
10. *Garcia-Ojalo J., Sancho J.M.* Noise in Spatially Extended Systems. Springer–Verlag, New York, 1999.
11. *Никитин Н.Н., Разевич В.Д.* Методы цифрового моделирования стохастических дифференциальных уравнений и оценка их погрешностей // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1978. Т. 18, №1. С. 106.
12. *Ланда П.С.* Теория флуктуационных переходов и ее приложения // Радиотехника и электроника. 2001. Т. 46, №10. С. 1157.
13. *Безручко Б.П., Булгакова Л.В., Кузнецов С.П., Трубецков Д.И.* Стохастические автоколебания и неустойчивость в лампе обратной волны // Радиотехника и электроника. 1983. Т. 28, №6. С. 1136.
14. *Кузнецов С.П., Трубецков Д.И.* Две лекции по нестационарной теории взаимодействия электронных пучков с электромагнитными волнами // Лекции по электронике СВЧ. Саратов: Изд-во СГУ, 1974. С. 88.
15. *Кузнецов С.П., Пищик Л.А., Трубецков Д.И., Четвериков А.П.* Программа численного моделирования нестационарных процессов и автоколебательных режимов в ЛОВО // Электронная техника. Сер. Электроника СВЧ. 1983. Вып.4. С. 66.
16. *Кузнецов С.П., Трубецков Д.И.* Хаос и гиперхаос в лампе обратной волны // Известия вузов. Радиофизика. 2004. Т. 47, №6. С. 383.
17. *Малахов А.Н.* Флуктуации в автоколебательных системах. М.: Наука, 1968.
18. *Анищенко В.С., Астахов В.В., Вадивасова Т.Е., Нейман А.Б., Стрелкова Г.И., Шиманский-Гайер Л.* Нелинейные эффекты в хаотических и стохастических системах. Москва–Ижевск, Институт компьютерных исследований, 2003.

Саратовский государственный университет
Саратовский государственный социально-экономический университет

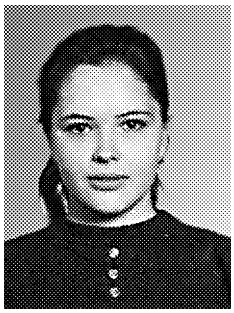
Поступила в редакцию 23.05.2005

DYNAMICS OF INTERACTION OF LINEAR WAVE AND A WAVE WITH INERTIAL NONLINEARITY UNDER INFLUENCE OF NOISE

A.P. Chetverikov, N.B. Frolova

The results of numerical simulation of oscillations in a simple model of interaction of waves with inertial nonlinearity applicable to study of phenomena in a backward wave oscillator are produced. Convenient numerical characteristics for identification of anharmonic oscillations – a decrement of the autocorrelation function and the characteristic correlation time – have been used. It has been found that both sophistication and ordering of an excited signal were possible under influence of additive noise. The dependence of a critical value of noise intensity at which disintegration of autonomous dynamics of the system on the nonequilibrium parameter of a system has been determined.

Четвериков Александр Петрович – родился в 1953 году, окончил Саратовский государственный университет (1975). Работал в НИИ механики и физики СГУ, затем на физическом факультете СГУ. В настоящее время профессор кафедры радиофизики и нелинейной динамики СГУ. Доктор физико-математических наук (1996). Область научных интересов: нелинейная динамика распределенных систем, физика неравновесных процессов, вакуумная сверхвысокочастотная электроника, компьютерное моделирование сложных процессов. Автор более 100 работ в отечественных и международных изданиях.



Фролова Наталья Борисовна – родилась в 1975 году, окончила Саратовский государственный университет (1997), аспирантуру на кафедре электроники, колебаний и волн (2003). Кандидат физико-математических наук (2004). В настоящее время доцент кафедры Информационные системы в экономике Саратовского государственного социально-экономического университета. Область научных интересов: нелинейная динамика распределенных систем, компьютерное моделирование сложных процессов, информационные технологии в экономике. Автор 10 работ в отечественных и международных изданиях.

Нелинейнпя динамика в действии

Изв. вузов «ПНД», т. 14, № 1, 2006 УДК 574.3

РЕЖИМЫ ДИНАМИКИ ГЕНЕТИЧЕСКОЙ СТРУКТУРЫ И ЧИСЛЕННОСТИ В МОДЕЛЯХ ЭВОЛЮЦИИ ЛОКАЛЬНОЙ ЛИМИТИРОВАННОЙ ПОПУЛЯЦИИ

Е.Я. Фрисман, О.Л. Жданова

Показано, как эволюционное изменение частот аллелей, сопровождающееся ростом средней приспособленности популяции, приводит к циклическим и хаотическим режимам динамики ее численности. Рассмотрены возможные механизмы появления сложной временной организации генетического биоразнообразия.

1. Проблема динамики численности в современной популяционной экологии

Поведение численности популяций во времени – одна из основных характеристик биологического вида. Не существует ни одной популяции, численность которой не испытывала бы изменений. Некоторые из этих изменений носят сезонный характер, другие затрагивают периоды времени, включающие годы и десятилетия. Колебания численности обладают различной регулярностью и размахом, могут сопровождаться существенными перестройками структуры популяций, приводить к изменениям роли и значимости различных видов в биосистемах. В большинстве ранних работ все значительные изменения, происходящие с численностью популяции, связывали со случайными и периодическими воздействиями на нее со стороны внешней среды. К климатическим теориям динамики численности примыкает трофоклиматическая теория Рулье [1], который полагал, что климатические факторы не только и не столько определяют интенсивность размножения и выживаемость особей популяции животных, сколько влияют на состояние их кормовой базы. Позже сформировались представления, согласно которым популяционные циклы объясняются сложными трофическими взаимоотношениями внутри биоценоза; однако стали накапливаться факты, свидетельствующие о том, что роль колебаний численности «хищника» в поддержании колебаний численности «жертвы» явно преувеличена.

В результате сложилась стройная система представлений о существовании внутрипопуляционной регуляции численности.

Гипотеза стресса и гипотеза генетического контроля [2] являются наиболее популярными гипотезами о механизмах внутрипопуляционной регуляции уровня численности. Согласно первой, при излишне высоких плотностях населения в пиках численности у животных появляется стресс-синдром, из-за чего резко падает рождаемость и растет смертность [3]. Согласно второй гипотезе, колебания численности популяций связывают с изменением их генетического состава [4]. Поскольку в период минимумов и пиков численности популяция оказывается в разных экологических условиях, она должна испытывать действие разнонаправленного естественного отбора. Это может приводить к изменению генетической структуры при каждом переходе от депрессии к максимуму и наоборот. Запаздывание такого перехода и поддерживает колебания. Тем не менее в рамках первой гипотезы остается непонятен эволюционный механизм, закрепивший закономерные резкие снижения приспособленности в пиках численности. Вторая же гипотеза объясняет наличие плотностно зависимого отбора, который является следствием колебаний численности, но мало что говорит об их первопричине.

Еще одним существенным фактором, вызывающим принципиальные изменения характера динамики численности, могут служить абиотические воздействия различной природы, приводящие к заметным сужениям естественных экологических ниш популяций. Часто эти воздействия носят антропогенный характер. Многократно описывались снижение численности популяций и уменьшение запасов биологических ресурсов, вызванные хозяйственной деятельностью человека, причем в большом числе случаев эта деятельность не была связана с каким-либо использованием данных ресурсов. При этом не только уменьшается численность популяций, но может происходить существенное изменение характера ее динамики. Возникают всплески и колебания численности, а также нерегулярные режимы динамики. Все это требует обстоятельного анализа и обсуждения различных механизмов, что возможно путем построения и анализа простейших моделей динамики численности.

2. Характер динамики численности популяций с неперекрывающимися поколениями

Для однолетних растений, многих видов насекомых, некоторых видов рыб, земноводных и пресмыкающихся каждая отдельная популяция представляет собой один возрастной класс и смежные поколения такой популяции не перекрываются. Ограничимся подробным анализом закономерностей этой динамики, а результаты рассмотрения более сложных ситуаций обсудим в заключительной части. Если условия среды меняются от поколения к поколению не очень сильно, то численность некоторого поколения будет определяться только численностью предыдущего поколения. Обозначив через N_n численность n-го поколения, можно записать следующее детерминистическое уравнение, описывающее динамику численности такой одновозрастной популяции:

$$N_{n+1} = F(N_n). \tag{1}$$

Простейший вид этого уравнения известен как модель Мальтуса

$$N_{n+1} = rN_n. \tag{2}$$

Здесь r – некоторая постоянная (каждая особь оставляет в следующем поколении r потомков независимо от численности родительской популяции). Решение этого уравнения представляет собой геометрическую прогрессию со знаменателем r и начальным членом N_0, что фактически идентично экспоненциальному росту численности популяции при отсутствии лимитирующих факторов.

Хорошо известно, что достаточно долгий экспоненциальный рост численности в природе никогда не наблюдается. Рано или поздно сказывается действие лимитирующих факторов, поэтому коэффициент r в уравнении (2) оказывается функцией численности. Положим $r = af(N)$, где $f(N)$ – функция, описывающая лимитирование, и a – параметр, называемый репродуктивным потенциалом популяции и характеризующий скорость роста популяции в пустоту (то есть a выбирается так, чтобы выполнялось $f(0) = 1$). Теперь вместо уравнения (2) получаем

$$N_{n+1} = aN_n f(N_n)\,. \tag{3}$$

В начале 1970-х годов появились глубокие исследования моделей динамики численности, подобных (3), дальневосточного ученого А.П. Шапиро [5, 6] и его американского коллеги Р.М. Мэя [7]. Они показали, что динамика численности популяции, описываемая уравнением (3), может быть весьма сложной, если функция $F(N) = aNf(N)$ убывает достаточно быстро (например, быстрее чем $1/N^2$).

Конкретизируя вид функции $f(N)$, численно для уравнения (3) можно построить бифуркационную диаграмму, характеризующую предельные траектории в зависимости от величины коэффициента a. Наиболее изучены дискретный аналог модели Ферхюльста, для которого $f(N) = 1 - kN$, и модель Рикера, для которой $f(N) = \exp(-bN)$ [8].

Исследование хаотических режимов динамического поведения, получаемого в моделях Рикера, Ферхюльста и др., позволяет выявить некоторые общие закономерности, проявляющиеся при достаточно больших значениях репродуктивного потенциала и степени экологического лимитирования. Если в начале такого хаотического поведения значение численности невелико, то в течение достаточно большого ряда последовательных поколений будет наблюдаться медленный рост (который может сопровождаться в отдельных поколениях даже некоторыми небольшими спадами), после чего происходит резкое увеличение численности (скачок вверх), сопровождающееся в следующей генерации значительно большим падением ее до значения, близкого к начальному уровню. Эти периодические «переломы» не будут, однако, возвращать популяцию точно на начальный уровень. Следовательно, несмотря на явный периодический характер изменения численности, не будет обнаружено полных совпадений ни по значениям численности, ни по числу генераций в фазе возрастания. Подобное не строго периодическое поведение численности характерно для многих естественных популяций высших организмов, особенно насекомых (например, саранчи, кузнечиков, ночных мотыльков).

3. Изменение характера динамики численности в процессе эволюции лимитированной популяции

Мы рассматривали характер динамики численности при фиксированных значениях параметров. Однако эволюционный процесс и изменения в окружающей среде могут привести к изменению параметров конкретной популяции. Обсудим возможные механизмы и направленность этих изменений.

Одной из первых задач математической популяционной генетики оказался количественный анализ результатов действия отбора в изолированной популяции диплоидных организмов. Предполагалось, что популяция не лимитирована внешними ресурсами, и динамика ее численности не рассматривалась. Мы попытались перенести полученные здесь результаты на лимитированные популяции и неожиданно обнаружили, что чисто количественные изменения генетической структуры приводят к существенным качественным изменениям динамики численности.

Для понимания основных закономерностей эволюции динамического поведения численности лимитированной популяции ограничимся подробным рассмотрением простой модельной ситуации, когда все адаптивное разнообразие в популяции определяется одним полиаллельным A локусом с аллеломорфами A_i, причем фенотип особи жестко определяется ее генотипом; популяция панмиктична, в ней действуют менделевские правила наследования, а смежные поколения особей не перекрываются. В этом случае действие отбора можно описать количественно, поставив в соответствие каждому из генотипических классов особей A_iA_j по одному коэффициенту W_{ij}, называемому приспособленностью (fitness); W_{ij} равно среднему числу потомков, произведенных одной особью данного генотипического класса и доживших до репродуктивного возраста (давших вклад в следующее поколение). Это определение приспособленности формально эквивалентно определению Р.А. Фишера [9, 10].

Введем следующие обозначения: q^i – частота гамет, несущих аллель A_i; N – численность популяции. Сделанные предположения позволяют получить рекуррентные уравнения, связывающие значения этих переменных в смежных поколениях

$$\begin{aligned} q^i_{n+1} &= q^i_n \sum_j W_{ij} q^j_n \,/\, \overline{W}_n, \\ N_{n+1} &= \overline{W}_n N_n, \end{aligned} \tag{4}$$

где n – номер поколения, $\overline{W}_n = \sum\limits_{ij} W_{ij} q^i_n q^j_n$ – средняя приспособленность популяции.

Пусть действие отбора не зависит от численности (плотности населения) популяции, однако будем учитывать влияние плотностно зависимых факторов, лимитирующих рост популяции. Такое представление, по-видимому, вполне соответствует реальному действию отбора на те признаки, природная генотипическая изменчивость по которым никак не коррелирована с изменениями плотности в популяции. Подобным образом должны, по-видимому, отбираться многие физиологические мутации, влияющие на общую жизнеспособность. Можно привести опубликованные данные о плотностно независимом поведении генетической структуры популяции. Например, L.D. Gottlieb [11] показал отсутствие какой-либо корреляции между изменениями численности и динамикой частот аллелей для трех (из пяти изученных) поли-

морфных белковых локусов в четырех сильно флуктуирующих популяциях степных полевок *Microtus ochrogaster*, а M.S. Graines, et al. [12] обнаружили стабильность генетической структуры по пяти полиморфным ферментным локусам в географически изолированной популяции однолетнего растения *Stephanomeria exigua (Compositae)*. Аллельные частоты этих локусов практически не изменились в течение четырех последовательных поколений, несмотря на то, что численность популяции испытывала в этот период значительные колебания. Это означает, что относительные приспособленности (отношения W_{ij}/W^*, где W_{ij} – приспособленность ij-го генотипа, а W^* – приспособленность одного из генотипов, принятая за эталон), не зависят от величины численности популяции, то есть их можно считать константами. Если популяция находится под действием плотностно зависимых лимитирующих факторов, то абсолютные приспособленности каждого генотипического класса должны зависеть от численности популяции

$$W_{ij}(N) = a_{ij} f(N). \tag{5}$$

Здесь $f(N)$ – функция, характеризующая плотностную регуляцию численности, одинаковую для каждого генотипа; a_{ij} – коэффициенты, равные относительным генотипическим приспособленностям. Функцию $f(N)$ мы по-прежнему будем считать монотонно убывающей с ростом численности, причем $f(0) = 1$. Такое действие отбора мы предлагаем называть F-отбором, подчеркивая этим тот факт, что отбор осуществляется при постоянных относительных приспособленностях (fitnesses). Уравнения динамики (4) в случае F-отбора преобразуются к виду

$$\begin{aligned} q^i_{n+1} &= q^i_n \sum_j a_{ij} q^j_n \,/\, a_n, \\ N_{n+1} &= a_n N_n f\left(N_n\right). \end{aligned} \tag{6}$$

Заметим, что уравнение для динамики численности N рассматриваемой популяции, находящейся под действием F-отбора, фактически совпадает с (3). Разница в том лишь, что a_n зависит от n, это связано с тем, что a_n равно среднему значению относительных приспособленностей a_{ij} в популяции, то есть $a_n = \sum\sum a_{ij} q^i_n q^j_n$, где q^i_n – частоты соответствующих генотипов в n-м поколении.

Уравнения, характеризующие изменение генетической структуры популяции, при F-отборе не зависят от ее численности, поэтому могут быть исследованы отдельно. Кроме того, они совпадают с точностью до обозначений с уравнением динамики генетической структуры нелимитированной популяции (4). Следовательно, здесь справедливо утверждение теоремы Фишера, для дискретного случая доказанного Кингманом [13],

$$a_{n+1} \geq a_n\,, \tag{7}$$

то есть среднее значение относительных приспособленностей a_i может лишь возрастать в процессе эволюции, независимо от их конкретных значений и начального состояния популяции. Это означает, что репродуктивный потенциал лимитированной популяции возрастает в процессе эволюции, так же как средняя приспособленность свободной. Однако такой монотонный рост репродуктивного потенциала, вызванный динамикой генетической структуры, может привести к изменению характера динамического поведения численности популяции и обусловить возникновение колебаний и хаотических режимов изменения численности. Рассмотрим это

на примере диаллельной популяции $(i, j = 1, 2)$ и экспоненциальной зависимости $f(N) = \exp(-bN)$, используемой в модели Рикера. На рис. 1 приведен пример закрепления рецессивной мутации с большим репродуктивным потенциалом $a_{11} = 18$ при $a_{12} = a_{22} = 5$, $b = 1$ и $q_0 = 0,01$. Монотонный рост частоты мутантного гена и связанный с этим рост репродуктивного потенциала a_n сначала приводит к медленному (если исключить переходный процесс, то малозаметному) росту численности, а затем вызывает возникновение нерегулярных колебаний и хаоса.

По-видимому, в естественных популяциях должно наблюдаться медленное и весьма неравномерное увеличение параметра a_n, вызванное селекцией вновь возникших адаптивных мутаций, обуславливающих постепенный весьма небольшой прирост репродуктивного потенциала (на рис. 2 – пример модельной динамики). Можно предположить, что в некоторые промежутки времени численность популяции должна успевать выходить на устойчивый стационарный уровень $N(a)$. В дальнейшем с ростом a_n динамика численности может измениться. Вначале это изменение будет носить только количественный характер, связанный с увеличением равновесной численности, затем при переходе a_n через некоторое бифуркационное значение картина меняется качественно: возникают циклические режимы динамики. Если рост a_n продолжается, то циклика становится все более и более сложной. Более того, неограниченное увеличение a_n может стать трагическим для популяции, так как может привести к резким динамическим колебаниям и вывести популяцию на такой низкий уровень численности, из которого она уже не сможет восстановиться. Итак, для лимитированных популяций с неперекрывающимися поколениями прогрессивное возрастание средней приспособленности может оказаться в диссонансе со стабильностью роста популяции [14]. Этот факт находится в явном противоречии с интуитивным представлением об увеличении стабильности популяции с ростом

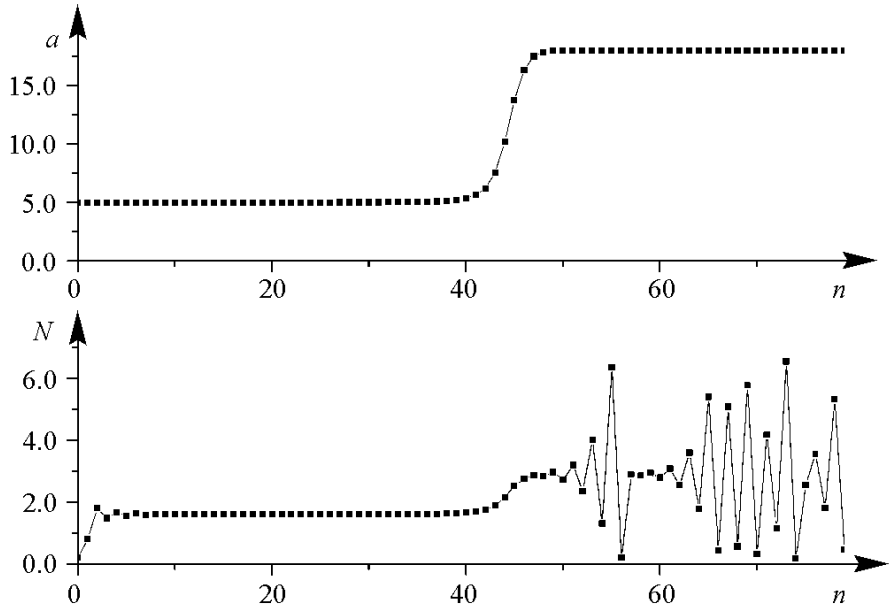


Рис. 1. Диаллельная модель. Динамика средней приспособленности a_n и численности популяции N_n при рикеровском плотностном регулировании численности $f(N) = \exp(-N)$

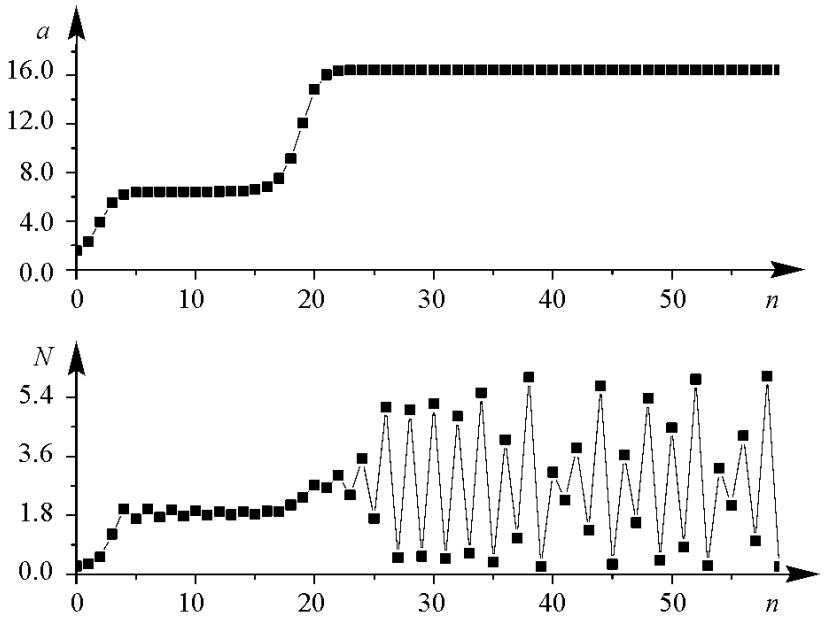


Рис. 2. Триаллельная модель. Динамика a_n и N_n; в результате мутации появился третий аллель с большим репродуктивным потенциалом в гомозиготном состоянии; $q_0^1 = 0.733$, $q_0^2 = 0.21$, $q_0^3 = 0.057$, $N_0 = 0.25$, $a_{11} = 1.11$, $a_{22} = 7.39$, $a_{33} = 16.4$, $a_{12} = 1.22$, $a_{13} = 1.66$, $a_{23} = 3.29$; первые несколько поколений наблюдаются небольшие колебания численности популяции (в это время происходит вытеснение первого аллеля, частота второго аллеля растет); после 20-го поколения происходит уже вытеснение второго аллеля, что сопровождается резким ростом средней приспособленности популяции и далее хаотической динамикой численности

ее средней приспособленности. Для более сложных нелинейных моделей динамики популяций с возрастной структурой можно показать, что увеличение средней индивидуальной приспособленности приводит к возникновению хаотических аттракторов, структура и размерность которых меняются при изменении параметров модели [15]. Вместе с тем, эволюционный переход от стабильных режимов динамики численности к хаотическим оказывается возможным только при достаточно высокой интенсивности экологического лимитирования. Однако увеличение интенсивности экологического лимитирования, вызванное антропогенным сужением экологической ниши, при достаточно высоких значениях a_n, обусловленных предшествующим отбором, само способно вызвать эти перестройки.

4. Характер динамики генетического состава лимитированной популяции

Таким образом, F-отбор создает необходимые условия для возникновения колебаний численности, так как приводит к быстрому росту популяции при ограниченности ресурсов. При этом на фоне колебаний численности появляются условия для «конкуренции» между генотипами или, иными словами, условия для возникновения R–K-отбора. Теперь уже относительные приспособленности генотипов будут зависеть от численности популяции. Продолжая аналогию с моделью Рикера, введем следующее выражение для приспособленностей генотипов:

$$W_{ij}(N) = a_{ij} \exp(-b_{ij} N). \tag{8}$$

Коэффициенты a_{ij} и b_{ij} можно заменить на более содержательные $R_{ij} = \ln(a_{ij})$, $K_{ij} = R_{ij}/b_{ij}$ [16]:

$$W_{ij} = \exp(R_{ij}(1 - N/K_{ij})), \tag{9}$$

где R_{ij} – мальтузианский, а K_{ij} – ресурсный параметр ij-го генотипа. Мальтузианский параметр описывает экспоненциальную скорость размножения соответствующего генотипа в отсутствие плотностного лимитирования; а ресурсный – равновесную численность популяции, состоящей только из ij-го генотипа.

Под стратегией R-отбора понимается такой отбор, когда имеется некоторый экологический вакуум и оптимальным является максимально возможное использование материи и энергии в целях наибольшего репродуктивного успеха, то есть максимальное увеличение числа потомков. Стратегия K-отбора предполагает наличие максимальных плотностно зависимых эффектов и заключается в стратегии траты энергии на поддержание наименьшего количества потомков, которые являются конкурентоспособными, то есть характеризуются большой выживаемостью даже в условиях крайнего проявления плотностно зависимых факторов [17–19].

Описаны результаты многих наблюдений стратегии R- и K-отбора в лабораторных и природных популяциях как низших, так и высших организмов [20–22]. Основной результат всех этих исследований заключается в том, что стратегия K-отбора преобладает, как правило, в стационарной или слабо меняющейся среде обитания, в то время как стратегия R-отбора преобладает в среде обитания, испытывающей сильные случайные или периодические изменения.

Работы подобного рода послужили толчком для теоретического исследования моделей плотностно зависимого отбора. Интересные исследования проделаны J. Rougharden [23] и B. Charlesworth [24]. Выяснилось, что в стационарной среде направление эволюции популяции определяется, в основном, генетическими значениями конкурентоспособности. Так, если значение конкурентоспособности для гетерозигот больше, чем для гомозигот, то в популяции устанавливается устойчивый полиморфизм. Если же значение конкурентоспособности гетерозигот лежит между значениями этого параметра для гомозигот, то происходит вытеснение того из аллелей, гомозиготы по которому обладают наименьшей конкурентоспособностью. Значения репродуктивных потенциалов влияют только на характер устойчивости равновесного состояния. При определенных соотношениях параметров в популяции могут возникать сложные колебания и размера популяции и ее генетической структуры. M.A. Asmussen [25] подробно проанализировал условия существования и устойчивости циклических режимов динамики численности и генетической структуры популяции для двух видов зависимости приспособленности от численности популяции – логистического и экспоненциального. В частности, существуют значения параметров K_{ij} и R_{ij}, которые приводят к динамическому поведению, весьма похожему на колебания численности (плотности) популяции и ее генетической структуры, описанные L.C. Birch [26] для инверсионного полиморфизма в популяциях дрозофилы.

Приведем детальное рассмотрение последствий R–K-отбора в двухаллельном локусе. В этом случае система модельных уравнений (4) примет вид

$$\begin{cases} N_{n+1} = \overline{W}_n(N_n)N_n, \\ q_{n+1} = q_n\left(W_{11}(N_n)q_n + W_{12}(N_n)(1-q_n)\right)/\overline{W}_n(N_n), \end{cases} \tag{10}$$

где n – номер поколения, q_n – частота первого аллеля в n-м поколении; $\overline{W}_n = W_{11}(N)q_n^2 + 2W_{12}(N)q_n(1-q_n) + W_{22}(N)(1-q_n)^2$ – средняя приспособленность популяции в n-м поколении; приспособленности генотипов W_{ij} экспоненциально зависят от численности (9) и имеют одну общую точку N^*.

Система (10) кроме тривиальной $(N = 0)$ имеет три стационарные точки.

1. $q = 0$, $N = K_{22}$; равновесие устойчиво, если $0<R_{22}<2$ и $K_{22} > K_{12}$.

2. $q = 1$, $N = K_{11}$; стационарная точка устойчива, если $0<R_{11}<2$ и $K_{11} > K_{12}$.

3. Полиморфное равновесие: $\begin{cases} (W_{12}-1)^2 = (W_{11}-1)(W_{22}-1) \quad (*), \\ q = (1-W_{12})/(W_{11}-W_{12}). \end{cases}$

Случай 3 не существует, если ресурсный параметр гетерозиготы занимает промежуточное положение $K_{22} < K_{12} < K_{11}$. Если наибольший ресурсный параметр имеет гетерозигота $K_{22} < K_{11} < K_{12}$, то в полиморфном равновесии численность больше, чем в обоих мономорфных; это равновесие может быть устойчивым (одно из его собственных чисел по модулю всегда меньше единицы). Если наименьший ресурсный параметр имеет гетерозигота $K_{22} > K_{11} > K_{12}$, то в полиморфном равновесии численность наименьшая; это равновесие не может быть устойчивым (модуль одного из его собственных чисел всегда больше единицы).

Аналитическое и численное исследование модели (10) показывает, что на динамику популяции влияет не столько преимущество по мальтузианскому параметру отдельного генотипа, сколько преимущество по ресурсному параметру. Этот результат согласуется с известными исследованиями B. Charlesworth [24] и Е.В. Евдокимова [16].

В модели возможны колебания численности в отсутствие колебаний генетического состава (рис. 3), этот факт является еще одним контрпримером гипотезы генетического контроля, которая колебания численности популяции связывает с колебаниями ее генетической структуры [4, 27].

Проиллюстрируем динамическое поведение модели (10) на следующем примере. Зафиксируем значения параметров: $K_{12} = 0.95$, $R_{12} = 3.8$, $K_{22} = 0.57$, $R_{22} = 2.8$, $q_0 = 0.8$, $N_0 = 0.1$. Будем изменять репродуктивный потенциал гомозиготы по первому аллелю A_1A_1 $(a_{11} = \exp R_{11})$ с шагом 0.3, начиная с $a_{11} = 1.0$ $(R_{11} = 0, K_{11} = 0)$. При этом будет изменяться и ресурсный параметр гомозиго-

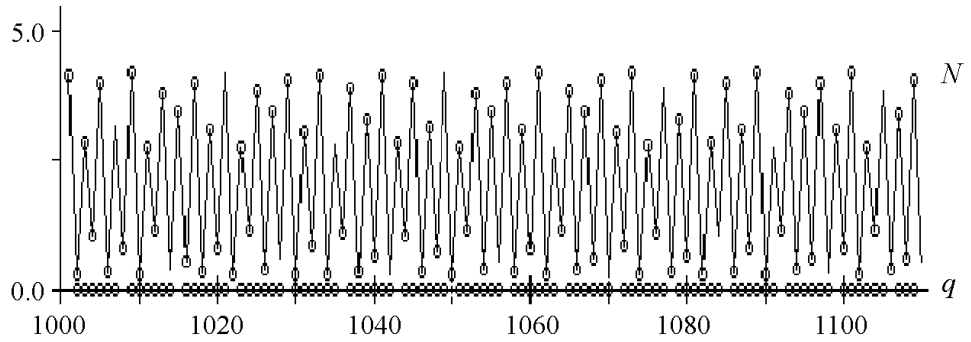


Рис. 3. Колебания численности при мономорфизме аа. Закрепление генотипа аа, неоптимального по ресурсному параметру, обусловлено его большим начальным преимуществом: $q_0 = 0.1$. Популяционные параметры: $R_{11} = 4.6$, $R_{12} = 1.1$, $R_{22} = 2.7$, $K_{11} = 2.7$, $K_{12} = 1.1$, $K_{22} = 2.0$

ты A_1A_1, поскольку его значение зависит от варьируемого R_{11}. На рис. 4 представлена бифуркационная диаграмма генетического состава Q, ниже – численности N. В работе вычислялась ляпуновская размерность по формуле Каплана – Йорке [28]. При маленьких значениях варьируемого параметра имеется цикл длины два по обоим показателям; далее рождается цикл длины четыре по Q и по X, цикл длины 8, циклов следующей длины уже не видно, видна хаотическая динамика (рис. 5). Далее можно различить цикл длины три, хаотическую динамику обоих показателей, и при $R_{11} = R_{22}$ уже колеблется только численность, а генетический состав q выходит на стационарный уровень $q = 0.5$. Дальнейшее увеличение параметра a_{11} сопровожда-

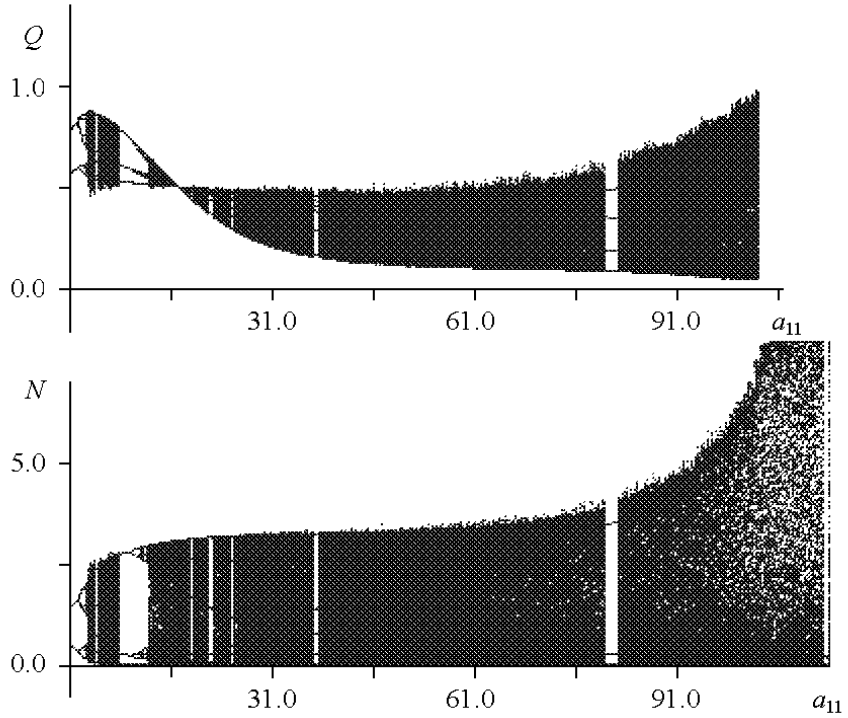


Рис. 4. Бифуркационная диаграмма генетического состава и численности при изменении репродуктивного потенциала гомозиготы AA, сопровождающегося изменением ее ресурсного параметра

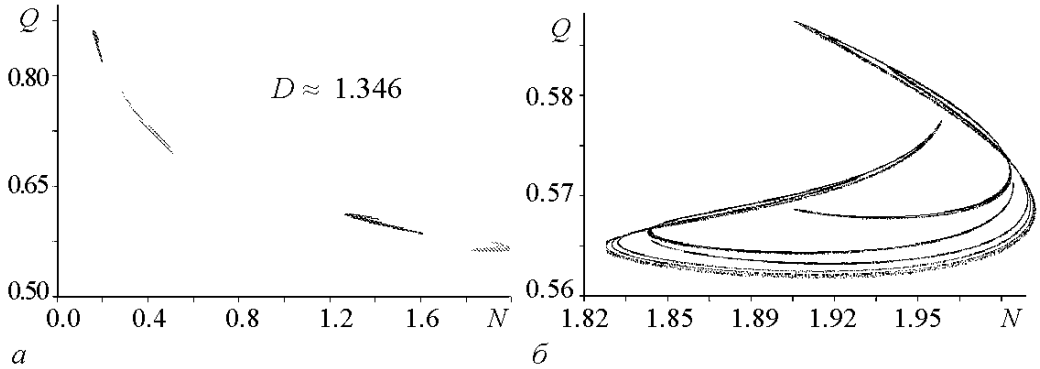


Рис. 5. *а* – аттрактор дробной размерности ($a_{11} = 3.27$, $R_{11} \approx 1.18$, $K_{11} \approx 0.86$), *б* – увеличенный фрагмент аттрактора

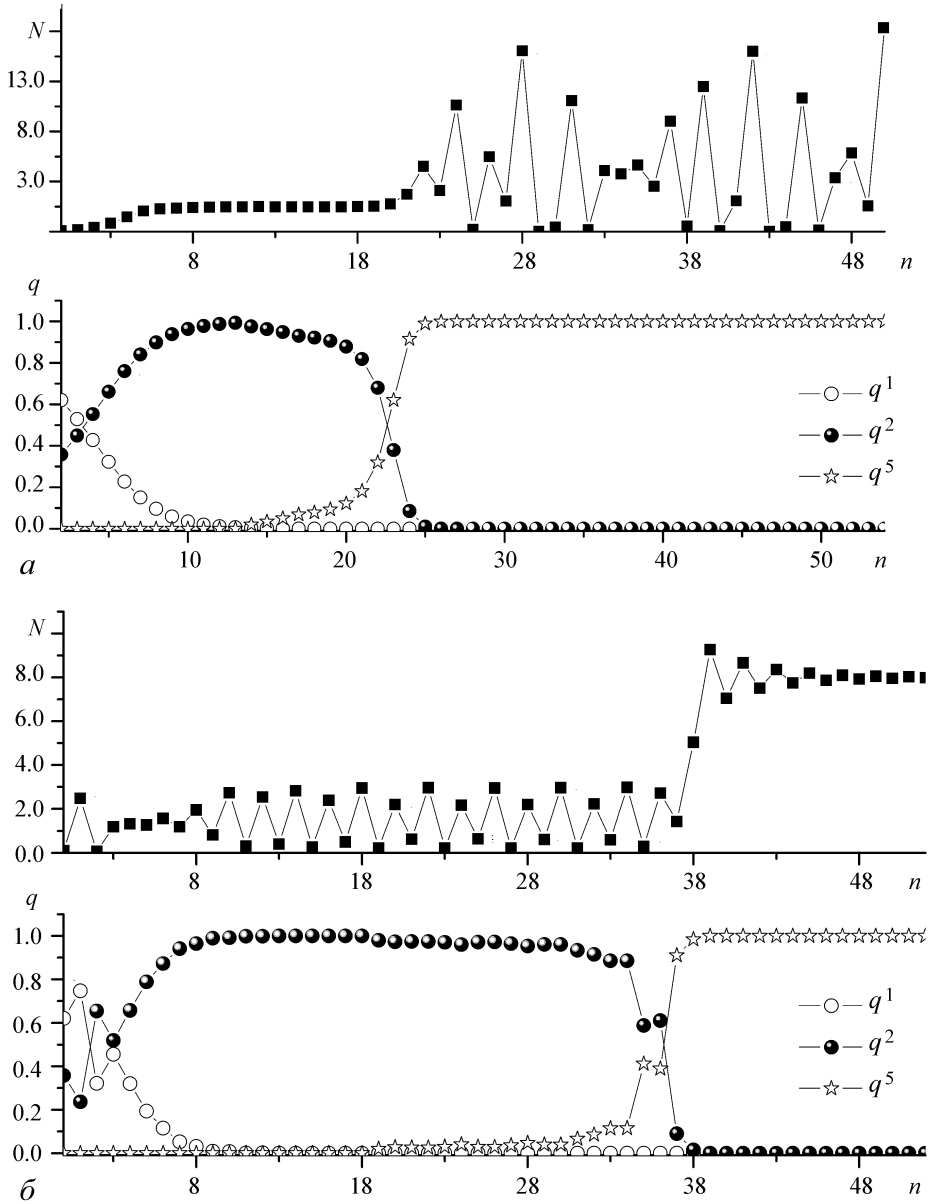


Рис. 6. Полиаллельная популяция: пять аллелей. Динамика численности и частот аллелей. Параметры модели: *а* – $R_{11} = 0.5$, $R_{12} = 0.71$, $R_{22} = 0.76$, $R_{33} = 0.93$, $R_{44} = 1.32$, $R_{55} = 3.63$, $K_{11} = 1$, $K_{12} = 1.4$, $K_{22} = 1.5$, $K_{33} = 1.8$, $K_{44} = 2.5$, $K_{55} = 6$; *б* – $R_{11} = 4$, $R_{12} = 3.2$, $R_{22} = 2.97$, $R_{33} = 2.8$, $R_{44} = 2.67$, $R_{55} = 1.73$, $K_{11} = 1$, $K_{12} = 1.2$, $K_{22} = 1.3$, $K_{33} = 1.4$, $K_{44} = 1.5$, $K_{55} = 8$. Третий и четвертый аллели быстро элиминируются из популяции

ется появлением колебаний генетического состава. После значения $a_{11} = 45$ ресурсный параметр гетерозиготы займет промежуточное положение и в системе уже не будет полиморфной стационарной точки, однако полиморфизм еще некоторое время сохранится.

В результате случайных мутаций количество аллелей в одном локусе может увеличиться. Чтобы проиллюстрировать, как появление новых генов отражается на динамике численности популяции, рассмотрим простую модельную ситуацию. Пусть

было два аллеля: A_1 и A_2, приспособленность гетерозиготы A_1A_2 находилась между приспособленностями гомозигот A_1A_1 и A_2A_2, то есть $\min(K_{11}, K_{22}) < K_{12} < \max(K_{11}, K_{22})$. Появился третий аллель, четвертый и т.д., m-й. Пусть мальтузианские параметры гомозигот подчинены следующему соотношению: $R_{ii} > R_{jj}$, если $i > j$. Параллельно рассматривается симметричный случай, когда $R_{ii} < R_{jj}$, для $i > j$. Приспособленности по-прежнему экспоненциально зависят от численности (9). Также предполагаем, что все графики функций приспособленности пересекаются в одной точке численности N^*, то есть $W_{ij}(N^*) = W_{kl}(N^*)$, $\{i, j, k, l\} = 1 \ldots m$. Сделаем еще одно сильное предположение: динамика приспособленности любой из гетерозигот такова, что ее описывает функция $W_{12}(N)$. Динамическое поведение такой полиаллельной популяции описывается системой рекуррентных уравнений (4) с рикеровским видом зависимости приспособленностей от численности.

Проведенные в [29] поиск и исследование на устойчивость стационарных точек модели менделевской полиаллельной экспоненциально лимитированной популяции показывает, что если в процессе эволюции появляются новые все более приспособленные генотипы, то в равновесии популяция однородна по генетическому составу (в зависимости от начальных условий, закрепится один из «новых» аллелей); при этом возможна как хаотизация численности (рис. 6, *а*), так и переход к стационарному состоянию (рис. 6, *б*) – в зависимости от величины репродуктивного потенциала закрепившегося генотипа. Если же ресурсный параметр одного из «старых» генотипов A_1A_1 или A_2A_2 максимален, то при достаточно больших репродуктивных потенциалах, возможен полиморфизм, характеризующийся очень сложной динамикой уже не только численности, но и генетического состава популяции (рис. 7).

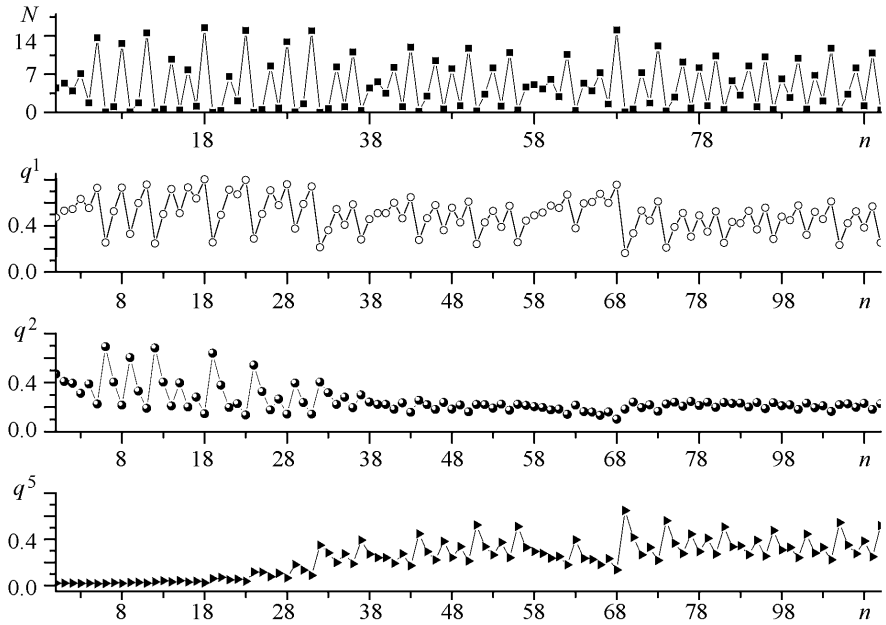


Рис. 7. Полиаллельная популяция: пять аллелей. Динамика численности и частот аллелей. Параметры модели: $R_{11} = 4$, $R_{12} = 2.88$, $R_{22} = 1.1$, $R_{33} = 0.93$, $R_{44} = 0.8$, $R_{55} = 0.55$, $K_{11} = 5$, $K_{12} = 4.8$, $K_{22} = 3.9$, $K_{33} = 3.7$, $K_{44} = 3.5$, $K_{55} = 3$. Третий и четвертый аллели быстро элиминируются из популяции

Заключение

Мы показали, как эволюционное изменение частот аллелей, сопровождающееся ростом средней приспособленности популяции, может привести к циклическим и хаотическим режимам динамики ее численности. При этом на фоне колебаний численности возникают условия для возникновения «конкуренции» между генотипами, чувствительными к уровню численности, то есть условия для R–K-отбора. Действие такого отбора приводит к возникновению сложных режимов динамики уже не только численности, но и генетической структуры популяции. Таким образом, в работе показаны возможные механизмы появления очень сложной временной организации генетического биоразнообразия, весьма чувствительной к внешнему воздействию.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, гранты № 03-01-00044-а и 04-04-97000-р.

Библиографический список

1. *Рулье К.Ф.* Жизнь животных по отношению к внешним условиям. М.: Наука, 1952.
2. *Пианка Э.* Эволюционная экология. М.: Мир, 1981. 400 с.
3. *Дэвис Д.Е., Кристиан Дж.* Популяционная рефляция у млекопитающих // Экология. 1976. № 1. С. 15.
4. *Chitty D.* The natural selection of self-regulatory behavior in animal populations // Proc. Ecol. Soc. Australia. 1967. Vol. 2. P. 51.
5. *Шапиро А.П.* К вопросу о циклах в возвратных последовательностях // Управление и информация. Вып. 3. Владивосток: ДВНЦ АН СССР, 1972. С. 96.
6. *Шапиро А.П., Луппов С. П.* Рекуррентные уравнения в теории популяционной биологии. М.: Наука, 1983. 132 с.
7. *May R.M.* Biological population obeying difference equations: stable points, stable cycles, and chaos // J. Theor. Biol. 1975. Vol. 51, №2. P. 511.
8. *Ricker W.E.* Stock and recruitment // Theor. J. Fish. Res. Bard. Can. 1954. Vol. ll, №5. P. 559.
9. *Fisher R.A.* The genetical theory of natural selection. Oxford: Clarendon Press, 1930.
10. *Ратнер В.А.* Математическая популяционная генетика. Новосибирск: Наука, 1977.
11. *Gottlieb L.D.* Genetic stability in a peripheral isolate of Stephanomeria exigua spp. coronaria that fluctuates in population size // Genetics. 1974. Vol. 76, №3. P.551.
12. *Graines M.S., McClenaghay L.R., Rose R.R.* Temporal patterns of allozymic variation in fluctuating populations in Microtus ochrogaster // Evolution. 1978. Vol. 32, №4. P.723.
13. *Kingman J.F.C.* A mathematical problem in population genetics // Proc. Can. Phill. Soc. 1961. Vol. 57. P. 574.
14. *Witten M.* Fitness and survival in logistic models // J.Theor. Biol. 1978. Vol. 74, №1. P. 23.

15. *Фрисман Е.Я., Скалецкая Е.И.* Странные аттракторы в простейших моделях динамики численности биол. популяций // Вестник ДВО РАН. 1994. №5/6. С. 97.
16. *Евдокимов Е.В.* Проблемы регулярного поведения и детерминированного хаоса в основных моделях популяционной динамики (Теория и эксперимент) // Автореф. дис... д-ра биол. наук. Красноярск, 1999.
17. *Pianka E.R.* On r- and K-selection // Amer. Natur. 1970. Vol. 104. P. 592.
18. *Pianka E.R.* Evolution ecology. New York: Harper and Row. 1974. 356 p.
19. *Pianka E.R.* On r- and K-selection // Reading Sociobiol. San Francisco, 1978. P. 45.
20. *Graham J.* Reproductive effect and r- and K-selection in two species of Lacuna (Gastropods: Prosobranchia) // Mar. Biol. 1977. Vol. 40, №3. P. 217.
21. *Long Th., Long G.* The effects of r- and K-selection on components of variance for two quantitative traits // Genetics. 1974. Vol. 76, №3. P. 567.
22. *MacNaughton S.J.* r- and K-selection in Tipha // Amer. Natur. 1975. Vol. 109, №961. P. 251.
23. *Rougharden J.* Density dependent natural selection // Ecology, 1971. Vol. 52. P. 453.
24. *Charlesworth B.* Selection in density-regulated populations // Ibid. P. 469.
25. *Asmussen M.A.* Regular and chaotic cycling in models of ecological genetics // Theoretical population biology. 1979. Vol. 16, №2. P. 172.
26. *Birch L.C.* Selection in Drosophila pseudob. in relat. to crow. // Evol. 1955. Vol. 9, №4. P. 160.
27. *Chitty D.* Population processes in the vole and their relevance to general theory // Canad. J. Zool. 1960. Vol. 38. P. 99.
28. *Farmer J. Doyne, Ott Edward, Yorke James A.* The dimension of chaotic attractors // Physica D7, North-Holland Publishing Company, 1983. P. 153.
29. *Жданова О.Л., Фрисман Е.Я.* Исследование динамики модели менделевской однолокусной полиаллельной популяции с экспоненциальным плотностно зависимым отбором // Дальневосточный математический журнал. 2004. Т. 5, №2.

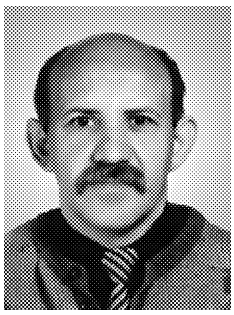
Институт автоматики и процессов управления ДВО РАН, Владивосток

Поступила в редакцию *6.06.2005*
После доработки *22.01.2006*

THE DYNAMIC BEHAVIOR OF GENETIC STRUCTURE AND POPULATION SIZE IN THE EVOLUTION MODELS OF LIMITED POPULATION

E.Ya. Frisman, O.L. Zhdanova

It has been shown in this work how the evolutionary change of alleles' frequencies, which is accompanied by the growth of average population fitness, leads to chaotic and cyclic dynamics of population size. Then the possible mechanisms of appearance of complicate temporal organization of genetic biodiversity have been considered.



Фрисман Ефим Яковлевич – родился в 1948 году в Сталинабаде (ныне Душанбе), окончил Новосибирский государственный университет в 1971 году. После окончания НГУ работает в Институте автоматики и процессов управления ДВО РАН. С 1988 года зав. лабораторией математического моделирования экологических систем ИАПУ ДВО РАН. С 2002 года – директор Института комплексного анализа региональных проблем ДВО РАН (Биробиджан). Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата биологических наук (1982) в Институте цитологии и генетики СО РАН (Новосибирск) и доктора биологических наук (1989) в Институте биофизики ДВО РАН (Красноярск) в области математической теории эволюции. Автор 4-х монографий (две вышли в издательстве «Наука» и две – в ДВО АН СССР). Опубликовал более 120 научных работ по общим вопросам математического моделирования и по конкретным моделям экологических и популяционных систем. Соросовский профессор. E-mail:frisman@iacp.dvo.ru

Жданова Оксана Леонидовна – родилась в 1977 году во Владивостоке, окончила факультет прикладной математики Дальневосточного государственного технического университета в 2000 году. Защитила диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук (2003) в Институте автоматики и процессов управления ДВО РАН (Владивосток) по специальности «биофизика». Работает научным сотрудником в лаборатории математического моделирования экологических систем ИАПУ ДВО РАН. Основные научные интересы сосредоточены в области математического моделирования популяционно-генетических процессов, теории колебаний и хаоса в эволюционирующих системах. Опубликовала 22 работы по этим направлениям.
E-mail:axanka@iacp.dvo.ru

Изв. вузов «ПНД», т. 14, № 1, 2006 УДК 621.382; 539.21

О ВТОРИЧНО-ИОННОМ ФОТОЭФФЕКТЕ

А.Г. Роках, С.В. Стецюра, А.А. Сердобинцев, А.Г. Жуков

Показано, что в процессе ионной бомбардировки освещение может изменять выход вторичных ионов из фоточувствительных полупроводников (вторично-ионный фотоэффект). Дана классификация наблюдаемого явления по реакции на освещение: определены нормальный и аномальный вторично-ионные фотоэффекты. Нормальный фотоэффект проявляется в уменьшении выхода положительных вторичных ионов кадмия при освещении мишени CdS-PbS в результате уменьшения работы выхода электрона. Аномальный эффект заключается в увеличении при освещении выхода положительных вторичных ионов свинца из той же мишени (до 1200% по отношению к темновому). Предложено объяснение аномального эффекта, основанное на увеличении при освещении скорости рекомбинации неравновесных носителей заряда в узкозонных включениях. Приведена аппроксимация зависимости выхода ионов от изменения электронной работы выхода на основе предположения, что изменение определяется смещением электронного квазиуровня Ферми в результате освещения.

Влияние видимого, инфракрасного и ультрафиолетового света на выход микрочастиц из твердого тела в вакуум известно только для электронов [1, 2]. В результате последних исследований нашей научной группы было обнаружено влияние освещения на выход вторичных ионов в вакуум из фоточувствительных фотопроводников [3, 4]. Это явление может быть названо вторично-ионным фотоэффектом. В данной статье приводится краткий обзор выполненных нами исследований указанного явления. Рассматривается влияние на этот эффект освещенности мишени и ее исходного состояния.

Исследуемые образцы представляют собой поликристаллические полупроводниковые пленки толщиной порядка 1 мкм, полученные испарением в вакууме порошковой шихты состава 90% CdS и 10% PbS с легирующей добавкой $CuCl_2$. Затем пленки подвергаются отжигу на воздухе, в результате чего увеличивается удельное

сопротивление образцов в темноте и повышается кратность изменения сопротивления при освещении. Так как CdS и PbS обладают ограниченной взаимной растворимостью [5], в результате образуется поликристаллический гетерофазный материал. Кристаллиты в такой пленке можно разделить на два типа. Первый представлен кристаллитами, которые состоят из твердого раствора PbS в CdS, такие кристаллиты будем условно называть фазой CdS. Второй тип – кристаллиты, представляющие собой твердый раствор CdS в PbS, соответственно условно обозначим их как фазу PbS. Поскольку содержание PbS в исходной шихте 10%, кристаллиты фазы PbS как бы вкраплены в основную матрицу кристаллитов фазы CdS. Такой сложный поликристаллический гетерофазный материал далее будем для краткости называть CdS-PbS.

Указанные образцы изучались с помощью метода вторично-ионной масс-спектрометрии (ВИМС), причем в процессе масс-спектрометрических исследований образец дополнительно освещался белым светом различной интенсивности. Для этого использовалась установка на базе масс-спектрометра МИ-1305, снабженная дополнительным окном в камере образцов для подсветки мишени. Ионная бомбардировка осуществлялась пучком положительных ионов кислорода с энергией 4. . . 8 кэВ под углом 60° к нормали образца. Диаметр пучка составлял 1 мм, детектировались положительные вторичные ионы. Установка оснащена масс-анализатором с однородным магнитным полем секторного типа, разрешающая способность 300 единиц. Магнитное поле регистрировалось датчиком Холла ПХЭ 606118А, для определения интенсивности освещения в камере образцов установлен фотодиод ФД-263. Освещение в ходе экспериментов осуществлялось лампой накаливания мощностью 150 Вт, при этом освещенность исследуемого образца изменялась от 0 до 1300 лк с помощью нейтральных светофильтров.

На начальном этапе исследований изучалась реакция выхода вторичных ионов Pb и Cd на освещение модулированным светом с частотой 15 мГц. На рис. 1 представлены концентрационные профили упомянутых элементов по толщине образца. Относительное изменение выхода вторичных ионов при освещении для образцов из различных партий составило по свинцу 2. . . 25%, по кадмию 24. . . 35%. Причем в случае свинца наблюдался рост уровня выхода при включении света, а для кадмия – уменьшение выхода при освещении. В отдельных случаях наблюдалось увеличение выхода Pb при освещении до 1200% по отношению к темновому значению. После выключения освещения выход обоих компонентов возвращался к исходным темновым значениям. Полученные результаты обладают хорошей повторяемостью, что позволяет говорить об обнаружении нового эффекта, предварительно названного вторично-ионным фотоэффектом. Необходимо отметить, что наблюдаемый эффект реализуется за короткое время (см. рис. 1), в течение которого тепловые эффекты не успевают установиться.

Следующим шагом стало получение зависимости величины эффекта от интенсивности освещения. Исследовались образцы CdS-PbS из одной партии, но часть образцов была предварительно подвергнута ионной бомбардировке в течение 20 мин. В случае Cd уменьшение выхода практически прямо пропорционально освещенности в обоих случаях, отличие только в величине изменения выхода. Для Pb существуют две характерные зависимости увеличения выхода от освещенности (рис. 2). Особый интерес представляет кривая *1*, имеющая ярковыраженный нелинейный характер. Эта кривая соответствует образцу, не подвергавшемуся предварительной ионной бомбардировке. Кривая *2* относится к образцу, прошедшему предварительную ионную бомбардировку. На этой кривой максимум не наблюдается, следовательно, в результате предварительного ионного облучения один из механизмов практически утратил свое влияние на результаты измерений.

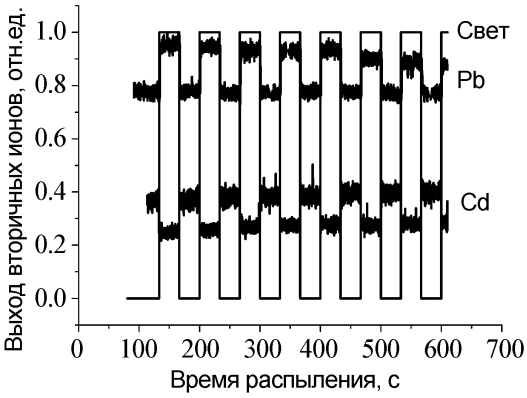


Рис. 1. Концентрационные профили кадмия и свинца при импульсной засветке белым светом

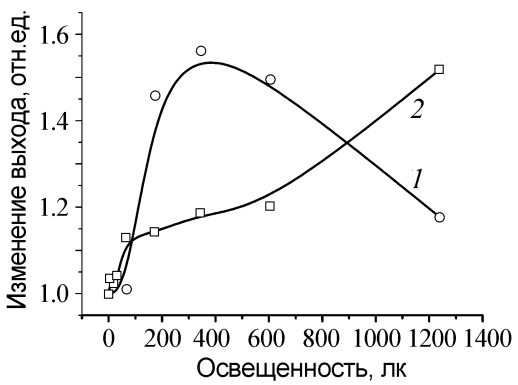


Рис. 2. Зависимости относительного выхода Pb^+ от освещенности

Выход вторичных ионов из мишени принято связывать с работой выхода электронов. Согласно литературным данным [6], снижение работы выхода электронов приводит к увеличению вероятности туннелирования электронов с поверхности образца на внешние уровни распыленных ионов. В нашем случае работа выхода в образце снижается за счет повышения квазиуровня Ферми для электронов при освещении. Следовательно, для вторичных ионов повышается вероятность присоединения электрона в момент вылета из образца, что приводит к уменьшению доли положительных ионов и росту доли нейтральных атомов в суммарном выходе. Совокупность описанных процессов будем в дальнейшем называть механизмом нейтрализации, который хорошо описывается эмпирической формулой

$$Y^+ \propto \exp\left(\frac{\Delta A}{\varepsilon_p}\right), \tag{1}$$

где Y^+ – выход положительных вторичных ионов; ΔA – изменение работы выхода; ε_p – характерный параметр системы, зависящий от энергии и угла эмиссии. Результатом действия механизма нейтрализации является снижение выхода положительных вторичных ионов. Так как данное явление было обнаружено ранее [7], обозначим его как нормальный вторично-ионный фотоэффект.

Очевидно, что для дальнейшего описания наблюдаемого явления необходимо перейти от термина «освещенность» к термину «изменение электронной работы выхода, вызванное освещенностью». Для этого использовались следующие известные формулы:

$$A(\Phi) = E_{\text{vac}} - E_{\text{Fn}}(\Phi)\,,$$

$$\sigma(\Phi) = \frac{1}{R(\Phi)}\frac{l}{S}\,,$$

$$n(\Phi) = n_0 \exp\left(-\frac{E_c - E_{\text{Fn}}(\Phi)}{kT}\right),$$

$$\sigma(\Phi) = qn(\Phi)\mu(\Phi)\,,$$

где Φ – интенсивность освещения; A – работа выхода; E_{vac} – энергия, соответствующая вакуумному уровню; E_{Fn} – энергия квазиуровня Ферми для электронов;

σ – проводимость; R – сопротивление; l – расстояние между напыленными на образец контактами; S – площадь, через которую течет ток в образце; n_0 – концентрация электронов в темноте; E_c – энергия дна зоны проводимости; k – постоянная Больцмана; T – температура; q – заряд электрона; μ – подвижность электрона в образце.

В результате несложных математических преобразований получаем

$$\Delta A(\Phi)[\text{эВ}] = \frac{kT}{q} \ln \frac{R_{\text{C}}(\Phi)}{R_{\text{T}}},$$

где R_{C} – сопротивление образца при освещении, R_{T} – темновое сопротивление.

Таким образом, зная люкс-омную характеристику образца, можно определить изменение электронной работы выхода при освещении. Отложив на оси абсцисс изменение работы выхода, а на оси ординат – изменение выхода вторичных ионов, получаем следующие графики (рис. 3). Результаты, представленные на рис. 3, *а* хорошо согласуются с данными [7], что позволяет распространить применение формулы (1) на случай изменения работы выхода при помощи освещения. Более сильная реакция на освещение подвергнутого ионной бомбардировке образца (кривая *2*) объясняется образованием слоя с повышенной проводимостью в результате обогащения поверхности Cd [8]. Такой слой образует n-n$^+$ переход с основной матрицей CdS, что приводит к притоку неравновесных электронов на поверхность образца. В результате повышается квазиуровень Ферми и работа выхода при той же освещенности снижается больше, чем в образце, не подвергнутом предварительной обработке ускоренными ионами. Таким образом, для вторичных ионов Cd$^+$ имеет место нормальный вторично-ионный фотоэффект.

Рост выхода положительных вторичных ионов (в данном случае Pb) при понижении работы выхода электрона нетипичен. Более того, при анализе литературы по данной тематике нами не было обнаружено аналогов данного явления, поэтому оно было названо аномальным вторично-ионным эффектом. Мы предлагаем пока качественное объяснение, обусловленное гетерофазной структурой поликристаллического фотопроводника CdS-PbS. В исследуемом образце существуют ямы потенциального рельефа, соответствующие местам локализации узкозонных включений (кристаллитов) фазы PbS. Свободные носители заряда концентрируются, а затем рекомбинируют преимущественно именно в этих включениях [9]. Энергия, выделяющаяся при рекомбинации, передается кристаллической решетке и расшатывает

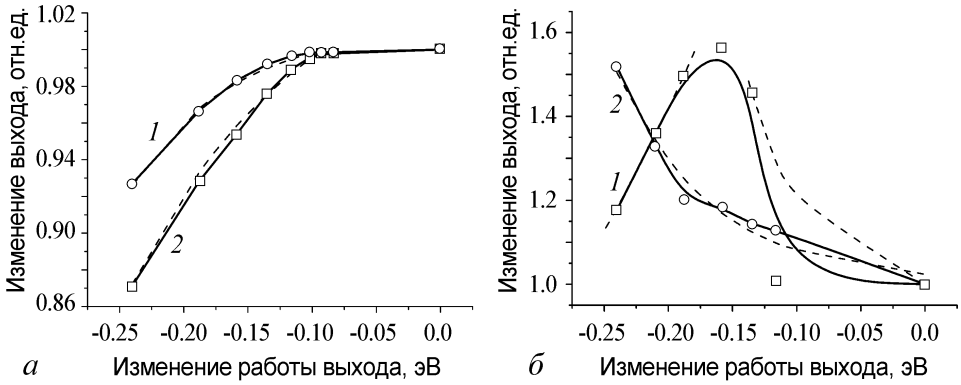


Рис. 3. Зависимости относительного изменения выхода Cd$^+$ (*а*) и Pb$^+$ (*б*) от изменения электронной работы выхода для исходного образца CdS-PbS (кривая *1*) и образца, подвергнутого ионной очистке (кривая *2*). Пунктирными линиями показаны результаты аппроксимации

ее. При освещении образца в фазу PbS устремляется мощный, ввиду высокой фоточувствительности, поток неравновесных носителей, многократно увеличивающий рекомбинацию. Следовательно, осуществляется «накачка» узкозонных включений, атомы решетки приобретают дополнительную энергию по сравнению с основной матрицей CdS. В результате возрастает число атомов, энергии которых хватает для выхода за пределы образца в ходе ионной бомбардировки. Совокупность процессов, приводящих к росту выхода положительных вторичных ионов из узкозонной фазы, будем в дальнейшем называть механизмом рекомбинации. Этот механизм в фазе PbS преобладает над механизмом нейтрализации в силу высокой скорости рекомбинации в узкозонных включениях. В результате наблюдается увеличение выхода положительных вторичных ионов с ростом освещенности.

В линейном приближении скорость рекомбинации прямо пропорциональна концентрации носителей заряда, которая экспоненциально зависит от положения квазиуровня Ферми. Следовательно, изменение относительного выхода Pb в результате действия рекомбинационного механизма можно описать следующей формулой:

$$\frac{Y^{+}_{\mathrm{Pb}}}{Y^{+}_{0\mathrm{Pb}}} \propto \exp\left(\frac{\Delta E_{\mathrm{Fn}}}{kT}\right) = \exp\left(-\frac{\Delta A}{kT}\right). \qquad (2)$$

В случае Cd рекомбинационный поток также отвлекается в фазу PbS, следовательно, рост выхода за счет усиления рекомбинации носителей в фазе CdS незначителен и выход Cd падает. Тем не менее кривые на рис. 3, *а* недостаточно хорошо аппроксимируются функцией вида (1), наилучшие результаты достигаются при аппроксимации экспериментальных данных функцией вида (3):

$$\frac{Y^{+}_{\mathrm{Cd}}}{Y^{+}_{0\mathrm{Cd}}} \propto A_1 \exp\left(\frac{\Delta A}{\varepsilon_p}\right) - A_2 \exp\left(-\frac{\Delta A}{kT}\right), \qquad (3)$$

где A_1 и A_2 – некоторые константы. Второе слагаемое определяет вклад рекомбинационного механизма, который хоть и незначителен, но все равно заметен. На рис. 3 результаты аппроксимации экспериментальных данных с помощью функции вида (3) показаны пунктиром.

Возвращаясь к выходу Pb, отметим, что функция вида (3) не может описать кривую *1* на рис. 3, *б*, что подтверждает наличие, по крайней мере, еще одного процесса, влияющего на выход вторичных ионов Pb^{+}. Появление максимума может быть объяснено следующим образом. При увеличении освещенности сглаживаются барьеры между фазами в исследуемом образце [10], что приводит к уменьшению концентрации носителей в узкозонных включениях. Поэтому скорость рекомбинации в фазе PbS уменьшается и начинает преобладать механизм нейтрализации. В образце после предварительной ионной бомбардировки (кривая *2*) часть потока электронов отвлекается в обогащенный Cd n^{+}-слой, в результате чего освещение оказывает меньшее влияние на барьер между фазами CdS и PbS. Следовательно, для появления максимума требуется большая освещенность (большее изменение работы выхода), чем для образца, не подвергавшегося ионной бомбардировке.

В результате проведенных исследований обнаружен и исследован новый вид внешнего фотоэффекта – вторично-ионный фотоэффект и показана его связь с внутренним фотоэффектом (фотопроводимостью) в полупроводниковой мишени. Установлено, что высокая фоточувствительность и гетерофазная структура полупроводниковых пленок CdS-PbS являются причинами нормального и аномального вторично-ионного фотоэффекта. Первый проявляется в уменьшении выхода положительных

ионов Cd при освещении мишени CdS-PbS. Второй заключается в увеличении на свету выхода положительных ионов Pb. Приведена аппроксимация экспериментальных результатов с помощью экспоненциальных функций, содержащих зависимость от работы выхода электрона.

Библиографический список

1. *Гладун А.Д., Барашев П.П.* Внешний многоквантовый эффект // УФН. 1969. Т. 98, вып. 3. С. 493.
2. *Щемелев В.Н., Савинов Е.П., Щемелев В.В.* Внешний фотоэффект эффективных фотокатодов в мягкой рентгеновской области спектра // ФТТ. 1997. Т. 39, вып. 9.
3. *Роках А.Г., Стецюра С.В., Жуков А.Г., Сердобинцев А.А.* Исследование особенностей ионного травления гетерофазных полупроводников при освещении белым светом // Письма в ЖТФ. 2003. Т. 29, вып. 2. С. 23.
4. *Rokakh A.G., Zhukov A.G., Stetsura S.V. and Serdobintsev A. A.* Secondary-ion mass spectrometry of photosensitive heterophase semiconductor // Nuclear Inst. and Methods in Physics Research. B. 2004. Vol. 226, № 4. P. 595.
5. *Calawa A.R., Mroczkowski I.A., Harman T.C.* Preparation and properties of $\mathrm{Pb}_{1-x}\mathrm{Cd}_x\mathrm{S}$// J. Electron. Mater. 1972. Vol. 1. P. 191.
6. Распыление под действием бомбардировки частицами / Под ред. Р. Бериша и К. Виттмака. Пер. с англ. М.: Мир, 1998. 552 с.
7. *Yu M. L., Lang N. D.* Direct evidence of electron tunneling on the ionization of sputtered atoms // Phys. Rev. Lett. 1983. Vol. 50. P. 127.
8. *Bleil C.E., Snejder D.D. and Sihvonen Y.T.* Bombardment of Cadmium Sulfide crystals with 30-60 keV electrons // Phys. Rev. 1958. Vol. 111, №6. P. 1522.
9. *Роках А. Г.* Варизонная модель полупроводника, стойкого к деградации // Письма в ЖТФ. 1984. Т. 10, №13. С. 820.
10. *Роках А. Г., Стецюра С. В.* Влияние неоднородностей на фотоэлектрические характеристики гетерофазных пленок системы $\mathrm{CdS}_x\mathrm{Se}_{1-x}$ – PbS// Изв. АН СССР. Неорг. мат. 1997. Т. 33, №2. С. 198.

Саратовский государственный университет

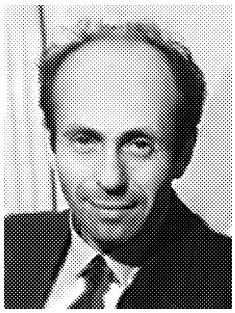
Поступила в редакцию 19.10.2005

ON SECONDARY-ION PHOTOEFFECT

A.G. Rokakh, S.V. Stetsyura, A.A. Serdobintsev, A.G. Zhukov

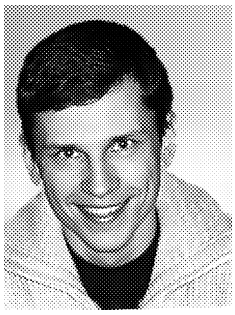
A secondary ion yield change from photoconducting semiconductors under influence of illumination has been established (secondary-ion photoeffect). The classification of this phenomenon is given: the normal and the anomalous secondary ion photoeffects are defined. The normal photoeffect is found in reducing of cadmium positive secondary ion yield from CdS-PbS sample under illumination as a result of electron work function decrease. The anomalous effect consists in increase of lead positive secondary ion yield from the same sample under illumination (up to 1200% about in dark). Explanation of the

anomalous effect based on non-equilibrium carriers recombination rate increase in narrow gap inclusions under illumination is suggested. Ion yield dependence of electron work function change is approximated on the hypothesis that this change is defined by Fermi electron quasilevel varying due to illumination.



Роках Александр Григорьевич – родился в Москве (1934). В 1941 году вместе с семьей был эвакуирован в Саратов. Окончил физический факультет Саратовского государственного университета (1957). С тех пор работает в СГУ. Там же защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук (1964). Диссертацию на соискание ученой степени доктора физико-математических наук защитил в диссертационном совете Молдавской АН (Кишинев, 1985). Обе диссертации посвящены фотоэлектрическим явлениям в широкозонных полупроводниках и действию ионизирующих излучений на широкозонные полупроводники. Один из авторов и редактор монографии «Фотопроводящие пленки типа CdS». Опубликовал более 150 научных статей по физике, философии и психологии творчества, сделал 40 изобретений. В настоящее время – профессор кафедры физики полупроводников факультета нано- и биомедицинских технологий СГУ. Является членом диссертационных советов по физике, философии и вновь создаваемого совета по психологии в Саратовском государственном университете.

Стецюра Светлана Викторовна – родилась в Саратове (1966), окончила Саратовский государственный университет имени Н.Г. Чернышевского (1988). Дальнейшая работа и учеба связана с СГУ – стажировка, аспирантура и работа в должности инженера на кафедре физики полупроводников. Защитила диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук в области физики полупроводников и диэлектриков (1999). В настоящее время – доцент кафедры материаловедения, технологии и метрологии материалов факультета нано- и биомедицинских технологий СГУ. Опубликовано более 20 научных статей, одно учебно-методическое пособие.



Сердобинцев Алексей Александрович – родился в Саратове (1980), окончил физический факультет Саратовского государственного университета в 2001 году с присвоением квалификации бакалавра. В 2003 году там же защитил диссертацию на соискание степени магистра техники и технологии. Область научных интересов – фотоэлектрические явления в широкозонных полупроводниках и ионное распыление указанных веществ. В настоящее время – аспирант кафедры физики полупроводников факультета нано- и биомедицинских технологий СГУ. Имеет 6 научных публикаций по направлениям, указанным выше.

Жуков Александр Георгиевич – родился в Саратове (1940), окончил Саратовский государственный университет (1966) по специальности физика. После окончания СГУ работал в НИИ механики и физики при СГУ, затем в СГУ. Защитил диссертацию «Анализ концентрационных неоднородностей сложнолегированных промышленных материалов методом вторично-ионной масс-спектрометрии» на соискание ученой степени кандидата технических наук в институте металлофизики АН УССР (1987) по специальности «физика твердого тела». Является руководителем группы масс-спектрометрии и заведующим лаборатории анализа природных сред СГУ. Опубликовал 50 научных статей по направлениям, указанным выше, из них 3 авторских свидетельства и 1 патент РФ.

Изв. вузов «ПНД», т. 14, № 1, 2006 УДК 530.182(075)

ДВЕ ТЫСЯЧИ ПЯТЫЙ ГОД В ДАТАХ НЕЛИНЕЙНОЙ ДИНАМИКИ

Д.И. Трубецков

Время – друг великих сочинений
И смертельный враг плохих.
Там поймешь, кто гений, кто не гений,
Где давно не будет нас в живых.

Александр Кушнер

Уважаемый читатель! Минул еще один год и Вашему вниманию предлагается опять же, как и в прошлом году[1], непрочитанная лекция. Она планировалась для прочтения на Международном симпозиуме «Topical Problems of Nonlinear Wave Physics», который проходил на пароходе, следующем по маршруту Санкт-Петербург – Нижний Новгород в августе 2005 года. Правда, фрагменты лекции были прочитаны школьникам и учителям на традиционных «Нелинейных днях в Саратове для молодых» в ноябре 2005 года.

История распорядилась так, что все даты условно можно сгруппировать следующим образом:

- «гидродинамические» даты (прямо-таки для пароходной конференции!);
- «фрактальные» даты;
- даты других важных событий нелинейной динамики.

Сохранен, как отвечающий жанру, эпиграф к прошлогодней лекции. По-прежнему выбор событий и героев, а также число выделенных дат на совести автора. Сохранена и стилистика прошлогодней лекции.

Итак, чем интересен в указанном смысле 2005 год?

[1]Имеется в виду лекция «Две тысячи четвертый год в датах нелинейной динамики», опубликованная в журнале Известия вузов. ПНД, 2005. Т. 13, №1–2. С. 152–167.

1. Созвездие гидродинамических дат

305 лет со дня рождения швейцарского ученого Даниила Бернулли – автора книги «Гидродинамика, или Изъяснение сил и движений жидкости». Он вывел уравнение стационарного движения идеальной жидкости, носящее его имя. Бернулли предложил дифференциальное уравнение колебаний струны и нашел его решение в виде бегущих волн

260 лет назад Леонард Эйлер вывел нелинейные уравнения идеальной жидкости (1745). В этом же году им вслед за Жаном Лероном Д'Аламбером обнаружено явление, состоящее в том, что при протекании идеальной жидкости по трубе постоянного сечения давление не падает и жидкость течет, не испытывая сопротивления. Не должны испытывать сопротивления и тела, движущиеся равномерно и прямолинейно (парадокс Д'Аламбера – Эйлера)

220 лет со дня рождения французского инженера и исследователя строительной механики Луи Мари Анри Навье, сформулировавшего в 1822 году дифференциальные уравнения движения вязкой жидкости (газа)

195 лет со дня рождения английского корабельного инженера Уильяма Фруда, с именем которого связывают создание первого бассейна для испытаний моделей судов и начало теории подобия

160 лет назад (1845) английский физик и математик Джордж Габриэль Стокс дополнил теорию движения вязкой жидкости (уравнение Навье – Стокса) и разработал теорию вязкости жидкостей

155 лет со дня рождения чешского ученого Стру́халя. Известно «число Струхаля», учитывающее нестационарные эффекты в жидкости (газе)

130 лет со дня рождения немецкого аэрогидродинамика Людвига Прандтля, создавшего теорию крыла конечного размаха и теорию пограничного слоя

100 лет назад английский ученый Осборн Рейнольдс (1842–1912), убедившись, что последние его работы оказались непонятными из-за утраченной им ясности изложения, отстранился от дел и до конца жизни не занимался больше научной работой. Неожиданная дата, но ведь наука – не только драма идей, но часто и драма их создателей

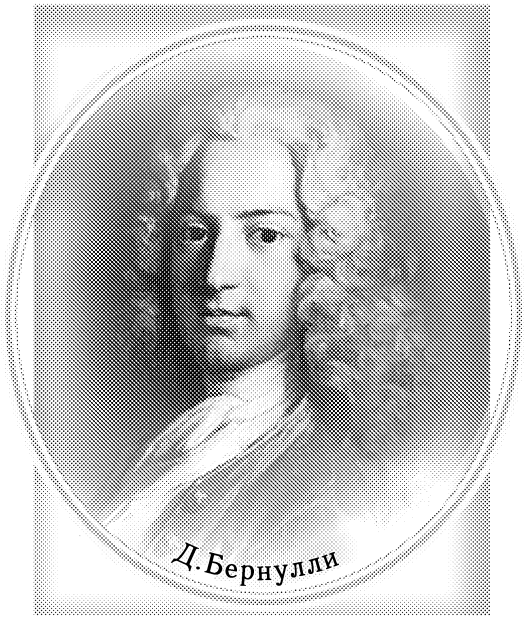
40 лет назад переиздана монография Льюиса Фрая Ричардсона (1881–1953) «Wheather prediction by numerical process» Dover, 1965 (первое издание Cambridge University Press, 1922), в которой приведены его знаменитые строки о турбулентности:

Big whirls make little whirls
Which feed on their velocity,
Little whirls have smaller ones
And so on into viscosity.

Даниил Бернулли. Академик Н.А. Крылов в «Очерке развития теории корабля» (1933) обратил внимание на один любопытный исторический факт. Он писал: «Сколь это ни странно, жители гористой Швейцарии Иоганн Бернулли и его ученик Леонард Эйлер первые начали прилагать «новую математику» к решению вопросов, касающихся корабля».

1

Во времена, о которых пойдет речь, Петербургская, Парижская и Берлинская академии наук побуждали и даже обязывали своих профессоров писать трактаты на важные для практики темы. Хотя, скажем, каналы строили инженеры-практики, теоретические работы сыграли важную роль в становлении гидродинамики. Все три основоположника теоретической гидродинамики получали прямые задания от академий: француз Д'Аламбер от Парижской, один из «сухопутных швейцарцев» – Даниил Бернулли – от Петербургской, а другой – Леонард Эйлер – от Петербургской и Берлинской.



Даниил Бернулли – выходец из семьи голландского происхождения, многие представители которой стали физиками и математиками. Несомненно, он – самый выдающийся ученый из этой династии и один из самых выдающихся физиков и математиков XVIII века. Не случайно Парижская королевская академия наук десять раз присуждала ему премии за лучшие работы по вопросам математики и физики, а в 1734 году он разделил со своим отцом Иоганном двойную премию той же академии за сочинение «О причинах различного наклонения планетарных орбит к солнечному экватору». Вот некоторые основные даты жизни Даниила Бернулли.

Он родился 8 ноября 1700 года. В 1716 году окончил Базельский университет и получил степень магистра философии. По совету отца он стал изучать медицину в Базеле, а затем в Гейдельберге и Страсбурге. В 1721 году Даниил получил степень лиценциата медицины. Большая часть его первой крупной работы (1724) была посвящена задаче истечения жидкости из сосуда. В медицине его интересовали вопросы определения скорости движения крови в кровеносных сосудах, влияние величины кровяного давления на характер этого движения и т.п. Смысл всех этих задач был чисто гидродинамическим.

Его «Гидродинамика, или Изъяснение сил и движений жидкости» – пестрый набор необычных задач, тонких наблюдений, неожиданных открытий и остроумных рассуждений, часто весьма далеко уходящих от темы заглавия: здесь и движение жидкостей в трубах и каналах, истечение жидкостей из отверстий, изменение формы водной поверхности в ускоренно движущихся и вращающихся объемах, колебания жидкостей в сообщающихся сосудах, размышления о замерзании льда и о том, каким требованиям должен удовлетворять идеальный газ, и, разумеется, жемчужина трактата – уравнение Бернулли (к нему мы вернемся).

В 10-й главе «Гидродинамики» Бернулли четко сформулировал основные идеи кинетической теории газов. Увы, они были забыты, и только в XIX веке их заново предложили и развили Клаузиус и Максвелл.

Интересен и взгляд самого Бернулли на книгу «Гидродинамика», сформулированный в кратком предисловии к ней.

«Наконец, выходит в свет наша «Гидродинамика», после того как были преодолены все препятствия, задерживающие ее напечатание в течение почти восьми лет; возможно, что ей и не пришлось бы увидеть света, если бы вся эта работа пришлась исключительно на мою долю. Я охотно объявляю, что главнейшая часть этой работы обязана руководству, замыслам и поддержке со стороны Петербургской Академии наук. Повод для написания этой книги дало постановление Академии, в котором первых профессоров, собравшихся для ее создания, обязали и затем определенно побуждали, чтобы они писали рассуждения на какую-нибудь полезную и, насколько возможно, новую тему. Всякий легко согласится с тем, что теория о силах и движениях жидкостей, если только она не создана против воли Минервы, не является ни бесполезной, ни тривиальной. Для того чтобы рассеять скуку у читателя, я подверг рассмотрению разнообразные вопросы, в особенности в последних пяти частях, а также включил примеры аналитические, физические, механические, как теоретические, так и практические, некоторые геометрические, мореходные, астрономические и иные. Введение таких примеров представляется мне не только допустимым, но прямо вытекающим из существа предпринятой работы... Настоящая моя работа преследует единственную цель: принести пользу Академии, все усилия которой направлены к тому, чтобы содействовать росту и общественной пользе благих наук.»

В 1725–1733 годах Бернулли работал в Петербургской АН, занимаясь сначала физиологией на основе математики, а с 1730 года – возглавляя кафедру чистой математики. В 1733 году он возвратился в Базель, где сначала возглавил кафедру анатомии и ботаники, а с 1750 года – кафедру опытной физики.

Даниил Бернулли умер в возрасте 82 лет, оставив свою кафедру только за пять лет до смерти.

Напомним смысл уравнения Бернулли, которое имеет вид:

$$p + \frac{\rho v^2}{2} + \rho g h = \mathrm{const},$$

где p – давление жидкости, ρ – ее плотность, v – скорость движения, g – ускорение свободного падения и h – высота, на которой находится элемент жидкости.

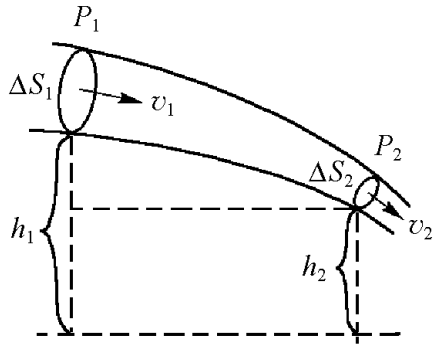


Рис. 1.

Для современного читателя очевидно, что уравнение Бернулли выражает закон сохранения энергии и условие неразрывности течения идеальной жидкости[2]. Предполагается (как и для уравнения неразрывности), что жидкость течет в некоторой трубе, сечение которой изменяется достаточно плавно и картина течения не меняется со временем, то есть течение стационарное. Как видно из рис. 1, за время Δt элемент жидкости массой $\Delta m = \rho S_1 v_1 \Delta t = \rho S_2 v_2 \Delta t$ спустился с уровня

[2]Для жидкости, текущей в трубе, закон сохранения массы имеет вид уравнения неразрывности: $vS = \mathrm{const}$, где S – площадь сечения трубы, по которой течет жидкость. Иными словами, сколько жидкости вливается в трубу, столько и выливается, если условия течения не изменяются.

h_1 на уровень h_2, а его скорость увеличилась с v_1 до v_2. Приращение кинетической энергии элемента жидкости

$$\Delta E_{\text{кин}} = \Delta m \left(\frac{v_2^2}{2} - \frac{v_1^2}{2} \right) = \frac{1}{2} \rho \Delta t \left(S_2 v_2^3 - S_1 v_1^3 \right).$$

Изменение потенциальной энергии этого же элемента

$$\Delta E_{\text{пот}} = \Delta m g \left(h_2 - h_1 \right) = \rho g \Delta t \left(S_2 v_2 h_2 - S_1 v_1 h_1 \right).$$

Работа сил давления, совершенная над элементом жидкости при его перемещении

$$A = p_1 S_1 v_1 \Delta t - p_2 S_2 v_2 \Delta t.$$

Закон сохранения имеет вид

$$A = \Delta E_{\text{кин}} + \Delta E_{\text{пот}}$$

или после простых преобразований

$$p + \frac{\rho v^2}{2} + \rho g h = \text{const}.$$

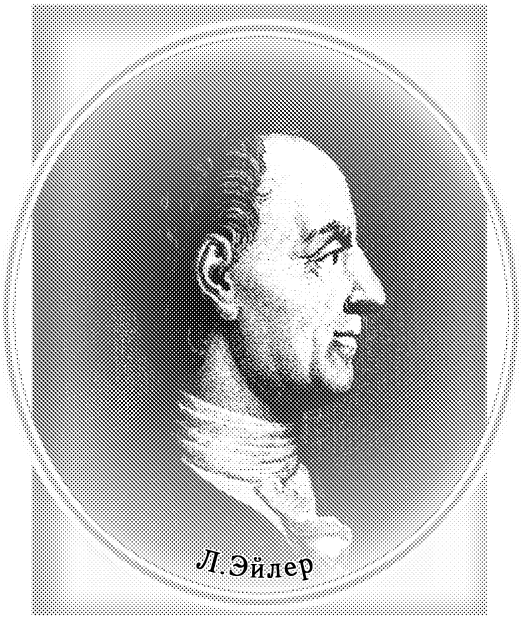
статическое давление — динамическое давление — весовое давление

Уравнение Бернулли просто объясняет множество явлений, происходящих в жидкости и газе.

Вот одно из коварных проявлений этого уравнения, знакомое капитанам морских и речных судов. Если два корабля идут параллельным курсом слишком близко друг к другу, то возникает гидродинамическая сила, сближающая их, что опасно. Почему возникает эта сила? Из закона неразрывности следует, что относительная скорость воды между судами будет больше, чем снаружи. Тогда давление на корабли в пространстве между ними окажется ниже, чем извне. Этот перепад давления по разные стороны кораблей и создает силу, толкающую их друг к другу.

Гидродинамика Эйлера и Навье – Стокса. Другие гидродинамические даты. В 1707 году в швейцарском Базеле в семье пастора родился Леонард Эйлер. Его жизнь пришлась на XVIII век – недолгий временной отрезок Просвещения между эпохами жестокой нетерпимости: за 6 лет до его рождения в Берлине была сожжена последняя ведьма, а через 6 лет после его смерти вспыхнула Великая французская революция. В значительной мере своим начальным образованием он обязан отцу. Высшее образование Эйлер получил в Базельском университете, где познакомился с братьями Николаем и Даниилом Бернулли. Семья Бернулли представляла собой созвездие талантов во главе с Иоганном (отцом Николая и Даниила) и его братом Якобом. Именно благодаря им Базель стал третьим по важности математическим центром Европы после Парижа и Лондона. Помимо математики, которую в университете читал Иоганн Бернулли, Эйлер изучал богословие, восточные языки, физиологию. По приглашению Екатерины I двадцатилетний Эйлер прибыл в Петербург для работы в незадолго до этого учрежденной по указу Петра I Петербургской академии наук, где уже работал Даниил Бернулли. В 26 лет Эйлера избрали российским академиком, а в 1741 году он переехал в Берлин, став членом Берлинской

академии наук. В России завершилось царствование Анны Иоановны и пошла чехарда дворцовых переворотов, а в Берлине молодой король Фридрих II решил создать научный центр не слабее парижского. В Берлине Эйлер провел четверть века, с 1741 по 1766, считая эти годы лучшими в своей жизни. В 1766 году по настоянию Екатерины II он вернулся в Петербург, где и работал до конца жизни. Умер он в 1783 году. Его прах покоится в Петербургском некрополе.



Эйлер был тихим и скромным человеком; он был счастливо женат и имел 13 детей, из которых пять пережили отца. Под конец жизни он ослеп и 16 лет диктовал статьи и книги, работая до самой смерти. Всего им было написано более 800 работ. В 1973 году Швейцарская академия и АН СССР все еще издавали полное собрание его сочинений – более 80 томов.

Дать даже краткий обзор научного наследия Эйлера невозможно. Выделим его работы по математическому анализу, где он придал дифференциальному и интегральному исчислению вид, близкий к современному, решил множество частных задач, создал вариационное исчисление, основал математическую физику в современном смысле слова; значителен его вклад в алгебру, теорию чисел, геометрию, в астрономию и прикладную механику.

Для нас важно, что с именем Эйлера связаны основные уравнения движения твердого тела и жидкости.

Удивительно ясное изложение современного ему естествознания Эйлер дал в «Письмах некой германской принцессе[3] о разных физических и философских материях», собранных в трех томах. «Письма» только при жизни Эйлера издавались практически на всех языка Европы более 20 раз. Письма вышли в свет в 1765 году.

Еще раньше, в 1745 году, Эйлер вывел нелинейные уравнения идеальной жидкости, которые, как известно, имеют вид

$$\rho\left(\frac{\partial\overrightarrow{v}}{\partial t}+(\overrightarrow{v}\nabla)\,\overrightarrow{v}\right)=-\nabla p+\overrightarrow{a}_{\text{вн}}\rho\,, \tag{1}$$

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\mathrm{div}\rho\,\overrightarrow{v}=0\,, \tag{2}$$

где ρ – плотность жидкости, $\overrightarrow{v}$ – скорость рассматриваемого объема жидкости, p – давление (для идеальной жидкости – скаляр), $\overrightarrow{a}_{\text{вн}}\rho$ – плотность внешней заданной силы.

[3]Племяннице Фридриха II.

В это же время им, вслед за Жаном Лероном Д'Аламбером, обнаружено явление, получившее название парадокса Эйлера – Д'Аламбера.

Чтобы напомнить его смысл, рассмотрим следующую задачу. Поток несжимаемой идеальной жидкости с плотностью ρ обтекает цилиндр. Пусть скорость потока v, давление вдали от цилиндра равно нулю, а в точке A на рис. 2 давление равно p. Необходимо исследовать зависимость p от v и найти силу F, с которой поток действует на цилиндр. Поскольку жидкость является идеальной, то есть совершенно не вязкой, то течение будет ламинарным, и линии тока будут выглядеть как на рисунке.

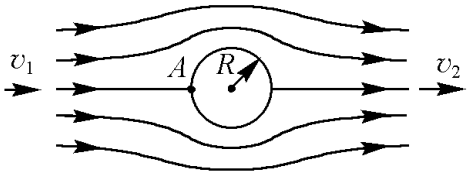


Рис. 2.

Будем искать зависимость $p = f(\rho, v, R)$ методом размерностей. В системе LMT матрица размерностей имеет вид:

$$\begin{array}{cccc} & p & \rho & v & R \\ L & -1 & -3 & 1 & 1 \\ M & 1 & 1 & 0 & 0 \\ T & -2 & 0 & -1 & 0 \end{array}.$$

Тогда, поскольку $p = C\rho^\alpha v^\beta R^\gamma$ (C – неизвестная постоянная), находим, что

$$L^{-1}MT^{-2} = (L^{-3}M)^\alpha (LT^{-1})^\beta L^\gamma.$$

Откуда

$$\left.\begin{array}{rcl} -1 & = & -3\,\alpha + \beta + \gamma \\ 1 & = & \alpha \\ -2 & = & -\beta \end{array}\right\} \begin{array}{rcl} \alpha & = & 1 \\ \beta & = & 2 \\ \gamma & = & 0 \end{array}$$

и, следовательно,

$$p = C\rho v^2. \tag{3}$$

Заметим, что в конечном результате нет зависимости от R. Найдем теперь F. Очевидно, что

$$LMT^{-2} = (L^{-3}M)^{\alpha_1}(LT^{-1})^{\beta_1}L^{\gamma_1}.$$

и $\alpha_1 = 1$, $\beta_1 = 2$, $\gamma_1 = 2$, то есть

$$F = C_1\rho v^2 R^2. \tag{4}$$

Соотношение (4) верно при любых значениях v; естественно предположить, что оно верно и при $v < 0$. Поэтому

$$\left.\begin{array}{l} F(-v) = C_1\rho(-v)^2 R \\ F(v) = C_1\rho(v)^2 R \end{array}\right\} \longrightarrow F(v) = F(-v).$$

Но, если $v < 0$, то и $F < 0$, то есть $F(-v) = -F(v)$, что возможно лишь при

$$F(v) = 0. \tag{5}$$

Этот результат и был получен Эйлером из строгой теории. Позднее Д'Аламбер с помощью некоторых ухищрений рассчитал обтекание произвольного тела конечного объема и получил тот же удивительный результат, который противоречил «здравому смыслу». Действительно, для поддержания любого движения к телу необходимо приложить силу тяги для преодоления силы сопротивления (именно поэтому корабли, летательные и подводные аппараты имеют двигатели). Д'Аламбер не смог объяснить полученный результат и с горечью заметил, что нулевое сопротивление – «единственный парадокс, разрешение которого я оставляю геометрии будущего».

Течение, изученное Эйлером и Д'Аламбером, симметрично (см. рис. 2): левая половина течения совпадает с правой. Это означает, что составляющая импульса (она совпадает с направлением невозмущенного потока) струйки жидкости, обтекающей тело, постоянна. Иными словами, она такая же в некотором сечении слева вдали от тела, как и в некотором сечении справа вдали от тела. Согласно закону сохранения импульса, на струйку, как и на помещенное в нее тело, не действует сила сопротивления.

Идеализация математической модели, которую анализировали Эйлер и Д'Аламбер, оказалась избыточной: реальные течения несимметричны, поскольку симметрию нарушает вязкость. Качественно ее влияние легко учесть также в рамках анализа размерностей.

Скорость u натекающего потока жидкости будем считать постоянной (движения стационарные и не зависят от времени). В жидкости существуют силы трения, возникающие между ее соседними слоями из-за разной скорости их движения. Такую жидкость, как известно, называют вязкой и характеризуют коэффициентом кинематической вязкости $\nu[L^2T^{-1}]$. Искомой величиной в этом случае будет векторная скорость $\overrightarrow{v}$ течения, которая зависит от пространственных координат, то есть от вектора $\overrightarrow{r}$. По-прежнему будем говорить о цилиндре радиуса R. Тогда

$$\overrightarrow{v} = f(\overrightarrow{r}, \nu, R, u).$$

Будем измерять длины в единицах R, а скорости в единицах u, то есть введем безразмерные величины $\dfrac{\overrightarrow{v}}{u}$ и $\dfrac{\overrightarrow{r}}{R}$. Из величин R, u, ν, определяющих каждый тип движения жидкости, можно составить всего одну безразмерную комбинацию $Re = \dfrac{Ru}{\nu}$ – число Рейнольдса. Тогда можно записать, что

$$\overrightarrow{v} = uf_1\left(\frac{\overrightarrow{r}}{R}, Re\right).$$

Из последнего выражения следует, что в двух разных течениях одного типа (например, обтекание цилиндров разного радиуса жидкостями разной вязкости) величины безразмерных скоростей $\dfrac{\overrightarrow{v}}{u}$ являются одинаковыми функциями от $\dfrac{\overrightarrow{r}}{R}$ при одинаковых для этих течений числах Re, то есть $Re = idem$ – критерий подобия течений. При разных Re мы имеем разные виды течений. Вязкость ответственна за образование следа за телом.

Но разгадка парадокса Эйлера – Д'Аламбера не в этом. Почему? Потому, что даже при очень больших числах Re, когда силы вязкости пренебрежимо малы, сила

лобового сопротивления остается конечной. Значит, и в невязкой жидкости может возникнуть асимметрия и ненулевые сопротивления.

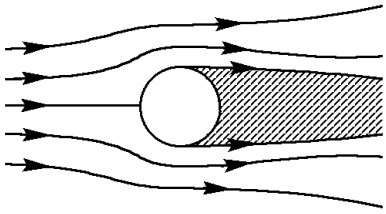
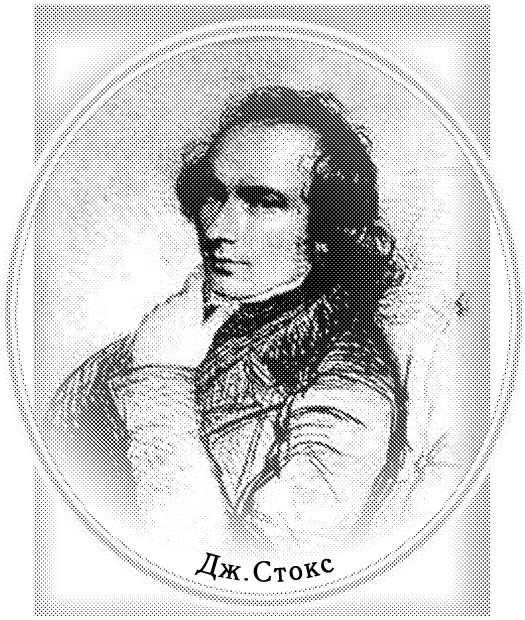


Рис. 3.

Именно такое сечение «построил» в 1868 году Гельмгольц, снявший последнее покрывало с парадокса. Обтекание цилиндра по модели Гельмгольца показано на рис. 3. За цилиндром образуется область покоящейся жидкости – след, который потом разрушается, превращаясь в турбулентный след.

Дифференциальные уравнения движения несжимаемой вязкой жидкости (газа) были сформулированы на основе модельных представлений французским инженером и исследователем строительной механики Луи Анри Мари Навье.



Теорию вязкости впоследствии разработал английский физик и математик Джордж Габриэль Стокс[4] (1819–1903). Он дополнил исследования Навье, получив уравнение

$$\rho\left[\frac{\partial\overrightarrow{v}}{\partial t}+(\overrightarrow{v}\nabla)\,\overrightarrow{v}\right]=$$

$$=-\mathrm{grad}\,p+\eta\Delta\overrightarrow{v}+\left(\xi+\frac{\eta}{3}\right)\mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,\overrightarrow{v}\,, \qquad (6)$$

которое носит название уравнения Навье – Стокса. Здесь η и ξ – постоянные коэффициенты вязкости, причем ξ часто называют второй вязкостью. Если жидкость можно считать несжимаемой, то $\mathrm{div}\,\overrightarrow{v}=0$,

[4]Помимо упомянутых работ в области гидродинамики, Стокс выполнил ряд значительных исследований в математической физике, оптике и спектроскопии.

В 1851 году он вывел формулу, определяющую силу сопротивления, действующую на твердый шар при его падении под действием силы тяжести в вязкой жидкости (закон Стокса).

В области оптики он исследовал аберрацию света, кольца Ньютона, интерференцию и поляризацию света, спектры и люминесценцию. В 1852 году установил, что длина волны фотолюминесценции больше длины волны возбуждающего света (правило Стокса). Дал первое теоретическое объяснение происхождения рентгеновских лучей.

Со студенческих лет всем известна теорема Стокса:

$$\oint\limits_C \overrightarrow{V}\,d\overrightarrow{r}=\int\limits_\Sigma rot\overrightarrow{V}\,d\overrightarrow{s}$$

– циркуляция поля по кривой C равна потоку ротации через любую поверхность Σ, ограниченную контуром C.

и уравнение (6) сильно упрощается, принимая вид

$$\frac{\partial \overrightarrow{v}}{\partial t} + (\overrightarrow{v}\nabla)\,\overrightarrow{v} = -\frac{1}{\rho}\,\mathrm{grad}\,p + \frac{\eta}{\rho}\Delta\overrightarrow{v}\,. \tag{7}$$

Отношение

$$\nu = \frac{\eta}{\rho} \tag{8}$$

называют кинематической вязкостью, а о самой η говорят как о динамической вязкости. Очевидно, что в пренебрежении вязкостью уравнение (6) совпадает с уравнением (1), когда $\overrightarrow{a}_{\text{вн}}\rho = 0$.

Интересные рассуждения о важности учета вязкости есть в Фейнмановских лекциях (Фейнман Р., Лейтон Р., Сэндс М. Фейнмановские лекции по физике. Физика сплошных сред. 7. Москва: Мир, 1966. С. 237). Приведем их.

«...Выбрасывая слагаемое с вязкостью, мы делаем приближение, которое описывает некоторое идеальное вещество, а не реальную воду. Об огромной разнице, возникающей в зависимости от того, оставляем ли мы слагаемое с вязкостью или нет, в свое время хорошо знал Джон фон Нейман. Известно ему было и то, что во времена наибольшего расцвета гидродинамики, то есть примерно до 1900 года, основные усилия были направлены на решение красивых математических задач в рамках именно этого приближения, которое ничего не имеет общего с реальными жидкостями. Поэтому теоретиков, которые занимались подобными веществами, он называл людьми, изучающими «сухую воду». Они отбрасывали важнейшее свойство жидкости. Именно потому, что в этой главе мы при наших вычислениях тоже этим свойством будем пренебрегать, я озаглавил ее «Течение "сухой воды"». А обсуждение настоящей «мокрой» воды мы отложим до следующей главы.»

Вернемся к уравнению (7) и оценим входящие в него слагаемые по порядку величины для стационарного движения

$$\rho\,(\overrightarrow{v}\nabla)\,\overrightarrow{v} \longleftrightarrow \rho\frac{v^2}{L}; \quad \eta\Delta\overrightarrow{v} \longleftrightarrow \frac{\eta v}{L^2}; \quad grad\ P \longleftrightarrow \frac{P}{L}\,.$$

Здесь L – характерный линейный масштаб. Легко заметить, что отношение инерционного (нелинейного) слагаемого к слагаемому, отвечающему за вязкость, дает число Рейнольдса

$$\frac{\rho\frac{v^2}{L}}{\eta\frac{v}{L^2}} = \frac{\rho v L}{\eta} = \frac{vL}{\nu} = Re.$$

Кстати, этот критерий стали называть числом Рейнольдса в 1919 году, когда немецкий гидродинамик М. Вебер (1871–1951) ввел Re в научный обиход.

Я умышленно вернулся к числу Re, поскольку хочу отметить необычную дату, характеризующую Осборна Рейнольдса как человека и ученого.

Молодой инженер-практик Рейнольдс решил, что для успешной работы ему не хватает математических знаний. Для поступления в Кембриджский университет

необходимо было изучить греческий язык, что он сделал и, став студентом, быстро добился успехов в математике. По окончании Кембрижда Рейнольдс получил кафедру физики в Манчестерском университете, где и провел исследования, принесшие ему мировую славу, начатые статьей «Вихревое движение» (1877). Опыты его были наглядны и интересны.

Тонкая струйка красителя, введенная в воду, текущую в стеклянной трубке, быстро вытягивается в длинную резко очерченную, не смешивающуюся с водой полоску, параллельную стенкам трубки. Вода как будто движется концентрическими слоями, как вложенные одна в другую металлические трубки: внутренняя быстрее, примыкающая к ней – чуть медленнее, следующая – еще медленнее. Слоистым – ламинарным – называет Рейнольдс такое течение (от лат. lamina – «пластинка»). При увеличении скорости резким скачком замедляется движение подкрашенной струйки. Видно, как беспорядочные завихрения перемешивают краску с водой по всему объему трубки – ламинарное течение потеряло устойчивость, превратилось в вихревое течение, для которого позднее лорд Кельвин придумал великолепное название – турбулентное течение (от лат. turbulentus – бурный, беспорядочный).

Рейнольдсу приписывают любопытную аналогию.

«Жидкость, – говорил он своим ученикам, – можно уподобить отряду солдат, ламинарное течение – четкому походному строю, турбулентное – беспорядочному движению. Тогда скорость жидкости и диаметр трубы – это скорость движения и величина отряда. Вязкость – дисциплина, плотность – вооружение. Чем больше отряд, чем быстрее маневры и чем тяжелее вооружение – тем раньше расстраивается походный порядок. И так же в жидкости, турбулентность начинается тем быстрее, чем она тяжелее, чем меньше ее вязкость и больше диаметр и скорость.»

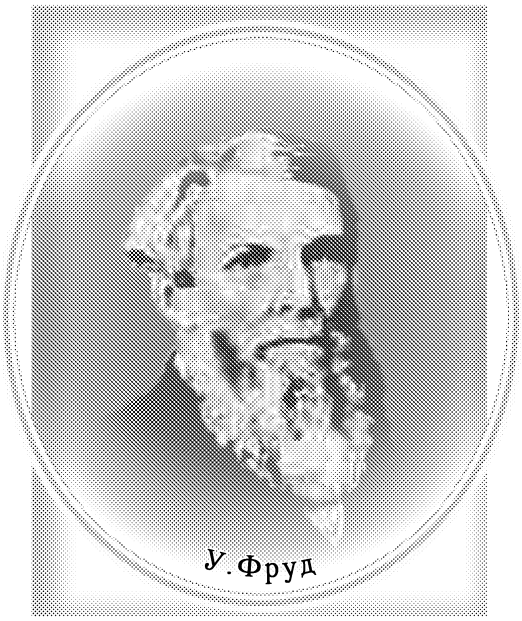
Когда $Re < 2300$, течение ламинарное. Если $Re > 6000$, то течение всегда турбулентное. В интервале $Re = 2300$–6000 течение неустойчивое.

В своих работах Рейнольдс исследовал образование града, конденсацию паровоздушной смеси, отслаивание металла с поверхности рельса, построил теорию сопла Лаваля и т.д.

Он мужественно встретил угасание творческой активности. Убедившись, что последние его работы оказались непонятными из-за утраченной им ясности изложения, Рейнольдс в 1905 году в возрасте 63 лет перестал заниматься научной работой.

Именно этот поступок, совершенный 100 лет назад, я и хотел отметить.

С именем английского корабельного инженера Уильяма Фруда (1810–1879) связывают создание первого бассейна для испытаний моделей судов и начало теории подобия.



Середина XIX века. Идет постройка гигантского парохода «Грейт Истерн». В ней оказались связанными в один узел судьбы У. Фруда, создавшего классическую методику модельных испытаний и Скотта Рассела – его постоянного оппонента и принципиального противника моделей...

Инициатором постройки гиганта, главным конструктором и руководителем всего дела был Изамбар Брюнель, – быть может, самый крупный инженер первой половины XIX века, построивший 25 железных дорог, 125 мостов, 8 причалов и сухих доков, двухмильный железнодорожный туннель Бокс, долгое время остававшийся самым длинным туннелем в мире, и три парохода – «Грейт Вестерн», «Грейт Брити» и «Грейт Истерн», каждый из которых составил эпоху в истории парового океанского судоходства.

Скотт Рассел предложил придать корпусу будущего корабля «гидродинамическую волновую форму», при которой якобы волновое сопротивление получается наименьшим. Брюнель согласился, но его мучали сомнения, поскольку Скотт Рассел, толкуя о наименьшем сопротивлении, не мог ответить на главный для конструктора вопрос: машины какой мощности нужны для того, чтобы сообщить судну заранее заданную скорость. Поэтому одному из своих помощников – Уильяму Фруду – Брюнель поручил всерьез заняться теорией сопротивления судов.

В марте 1872 года вблизи дома Фруда был построен первый в мире опытовый бассейн, который представлял собой крытый легкой деревянной крышей канал длиной 110 м. Шестидесятиметровый измерительный участок имел ширину по уровню воды 11 м и глубину 3 м, с двух сторон к нему примыкали разгонный и тормозной участки шириной 3.4 м и глубиной 0.9 м. Наклонные стенки канала были утрамбованы и покрыты асфальтом. Модели буксировались тележкой с измерительными приборами, которая двигалась по рельсовому пути с помощью паровой лебедки, способной разгонять ее до 5 м·с$^{-1}$.

Именно здесь в течение двух лет Фруд производил свои уникальные исследования по сопротивлению трения. Впоследствии один из крупнейших американских гидромехаников Д. Тейлор, оценивая заслуги Фруда, писал: «...работая в опытовом бассейне, грубом и примитивном по сравнению с современными, он разработал методы и количественные коэффициенты, надежно служившие корабельным архитекторам почти пятьдесят лет»[5].

[5]Более подробно о работах У. Фруда и его сына и преемника Р. Фруда (1846–1942) можно прочитать в интересной книге Германа Смирнова «Рожденные вихрем» (М.: Знание, 1982), из которой мы заимствовали ряд фактов.

Бессмертной заслугой Фруда перед мировым кораблестроением было открытие закона подобия для пересчета данных модели на натуру. Для вывода критерия подобия вновь обратимся к анализу размерностей.

Если влияние силы тяжести на движение существенно, то движение определяется не тремя, как свыше, а четырьмя величинами: линейным размером тела l (в случае цилиндра – R), v, ν и ускорением силы тяжести g. Из них можно составить две безразмерных комбинации, скажем, Re и число Фруда

$$F = \frac{v^2}{lg}.$$

Тогда в формуле $\overrightarrow{v} = uf\left(\frac{\overrightarrow{r}}{R}, Re\right)$ функция f будет зависеть и от Re, и от F, а течения будут подобными лишь при равенстве обоих этих чисел.

Из выражения для F, в частности, следует, что, если одна модель длиннее другой в 4 раза, то они подобны только тогда, когда большую буксируют в $\sqrt{4} = 2$ раза быстрее, чем малую. При таком подобии легко вычислить волновое сопротивление натурного корабля по измеренному экспериментально волновому сопротивлению модели: достаточно умножить сопротивление модели на куб масштаба (в нашем примере на $4^3 = 64$).

Конечно, все это для идеальной жидкости. Однако при измерениях в бассейне измеряют не только волновое сопротивление, но и сопротивление трения. Их не разделить в эксперименте, но можно разделить в теории, что и сделал Фруд (за это и хвалил его Тейлор). Если сопротивление трения модели зависит от площади подводной части и качества ее поверхности, то, измерив суммарное сопротивление, можно вычесть из него рассчитанную по формулам часть, связанную с трением. Тогда остаток и будет волновым сопротивлением модели. Умножив полученную величину на куб масштаба, можно получить волновое сопротивление натурного корпуса, прибавить к нему расчетное сопротивление трения натурного корпуса, вычислить полное сопротивление будущего корабля.

Работы Фрудов (отца и сына) по моделированию помогли будущей авиации, поскольку вряд ли появились бы аэродинамические трубы, если бы в опытовых бассейнах не была доказана эффективность испытания корабельных моделей.

С помощью анализа размерностей мы получили два критерия подобия гидродинамических течений. Что изменится, если движение станет нестационарным, то есть будет изменяться со временем?

Ответ на этот вопрос связан с именем чешского ученого – физика и гидродинамика В. Струхаля (1850–1922).

В данном случае наряду с величинами ν,v, l нужно ввести характерное для этого движения время τ. Например, при колебаниях погруженного в жидкость твердого тела определенной формы за τ можно принять период колебаний. Из четырех размерных величин можно составить две безразмерные комбинации – Re и число Струхаля

$$St = \frac{v\tau}{l}.$$

Подобие движения имеет место в этом случае, когда $Re = idem$ и $St = idem$.

Как указано в работе М.И. Рабиновича «Малые нервные системы: динамика ритмического поведения животных» (СОЖ. 1995, №1), детальные эксперименты специалистов по гидродинамике и биомеханике показали, что при движении любых

живых организмов, реализующих «изгибный» механизм плавания, независимо от размера тела $St = \mathrm{const}$. В этом случае τ — период осцилляций хвоста, v – скорость рыбы, l – размах осцилляций хвоста.

Чтобы плавание было эффективным, нужно $St \sim 0.3$. В природе для любых рыб реализуется именно это значение. Если $St = \mathrm{const}$, то скорость рыбы будет тем больше, чем больше l. Последнее возможно, когда изгибные колебания имеют длину волны, равную длине тела. Так, например, и плавает минога, которая изучена очень хорошо.

Еще одна аэрогидродинамическая дата: 130 лет со дня рождения немецкого исследователя Людвига Прандтля (1875–1953) – создателя теории крыла конечного размаха и теории пограничного слоя.

Людвиг Прандтль родился 4 февраля 1875 года в Фрейзинге (Бавария). После окончания Высшего политехнического училища в Мюнхене он работал профессором Высшего технического училища в Ганновере с 1901 года, а затем с 1904 – в Геттингенском университете. С 1925 года Прандтль в течение 22 лет был директором института гидроаэродинамики им. кайзера Вильгельма в Геттингене.

Прандтль внес значительный вклад, занимаясь и теорией и экспериментом, в теорию турбулентности, в теорию несущего крыла и флаттера, в исследования упругости и пластичности. Он был одним из создателей динамической метеорологии. И.В. Андрианов, Р.Г. Баранцев, Л.И. Маневич в книге «Асимптотическая математика и синергетика» (М.: Едиториал УРСС, 2004) указывают следующее. «Многие ученые считают сейчас, что датой рождения теории сингулярных возмущений следует считать третий международный математический съезд, состоявшийся в Гейдельберге в 1904 году, где Прандтль сделал доклад «О движении жидкости с малым трением». В трудах съезда есть 7-страничная заметка Прандтля. На вопрос, почему заметка столь мала, Прандтль ответил, что у него было 10 минут на выступление, а будучи совсем молодым исследователем, он считал, что может опубликовать только то, что успел сказать. Эта короткая заметка оказала огромное влияние на развитие науки в XX веке...

Впервые само понятие «пограничный слой» возникло в указанной работе Прандтля.»

Напомним, что пограничный слой представляет собой область около поверхности обтекаемого тела с толщиной, малой по сравнению с размерами тела R. Он характеризуется большим градиентом скорости в направлении, перпендикулярном поверхности тела в данной точке. Причина образования такого большого градиента при больших Re в том, что скорость жидкости равна нулю на поверхности обтекаемого тела и очень велика при небольшом удалении от него (на бесконечности она переходит в скорость потока жидкости).

Пограничный слой может быть как ламинарным (при удалении от поверхности тела он переходит в ламинарное течение), так и турбулентным (он образуется за обтекаемым телом и граничит с турбулентным течением жидкости).

В ламинарном слое нельзя пренебрегать вязкостью жидкости, несмотря на большие значения Re, так как в нем существенны малые расстояния порядка толщины этого слоя (местное число Рейнольдса невелико). Если поток обтекает какое-то тело, то ламинарный слой образуется перед обтекаемым телом.

Оценим в качестве примера толщину ламинарного пограничного слоя вблизи поверхности тела с характерным размером R, обтекаемого потоком жидкости со скоростью v. Число Рейнольдса $Re = \dfrac{vR}{\nu} \gg 1$. Будем следовать книге В.П. Крайнова «Качественные методы в физической кинетике и газодинамике» (М.: Высшая школа, 1989).

Рассмотрим стационарное ламинарное течение, считая, что скорость v направлена вдоль оси x, ось y перпендикулярна поверхности тела, а от координаты z зависимости нет. Изменения физических величин вдоль оси x характеризуются размером тела R (рис. 4).

Из-за отсутствия зависимости от z уравнение несжимаемости жидкости имеет вид

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0.$$

Для оценок его можно представить так:

$$\frac{v_x}{R} \sim \frac{v_y}{\delta},$$

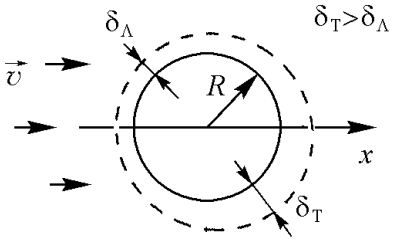


Рис. 4.

где δ – толщина пограничного слоя вдоль оси y. Скорость v_x совпадает по порядку величины со скоростью v основного течения жидкости вне ламинарного пограничного слоя, поэтому

$$v_y \sim \frac{\delta}{R} v \ll v. \tag{9}$$

Неравенство (9) будет доказано ниже.

Уравнение Навье – Стокса (7) для стационарного случая будет таким:

$$v_x \frac{\partial \vec{v}}{\partial x} + v_y \frac{\partial \vec{v}}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \left(\frac{\partial^2 \vec{v}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vec{v}}{\partial y^2} \right). \tag{10}$$

Проецируя (10) на ось y и оценивая каждое слагаемое, получаем при $\delta \ll R$

$$v \frac{v_y}{R} \sim \frac{p}{\rho \delta} \sim \nu \frac{v_y}{\delta^2}. \tag{11}$$

Из (11) определяем толщину пограничного слоя

$$\delta \sim \left(\frac{\nu R}{v} \right)^{1/2} \sim \frac{R}{(Re)^{1/2}} \ll R, \tag{12}$$

$Re = \dfrac{vR}{\nu} \gg 1$. Подставляя (12) в (9) находим, что

$$v_y \sim \frac{v}{(Re)^{1/2}} \ll v,$$

а из (11) следует оценка для давления

$$p \sim \frac{\rho v^2}{Re} \ll \rho v^2.$$

Если теперь спроецировать (10) на ось x, то получаем

$$\frac{v^2}{R} \sim \nu \frac{v}{\delta^2}, \tag{13}$$

откуда снова получается оценка (12). Слагаемым с давлением в (10) можно пренебречь, так как оно имеет оценку $\dfrac{p}{\rho R}$ и его отношение к первому слагаемому в (13) имеет порядок величины $\dfrac{p}{\rho v^2} \sim Re^{-1} \ll 1$.

Уже указывалось, что ламинарный пограничный слой образуется в области перед обтекаемым телом. Он образуется в самой передней точке по отношению к натекающему потоку (см. рис. 4) и стелется по поверхности тела до некоторого расстояния, определяемого формой тела. Потом ламинарный пограничный слой переходит в турбулентный пограничный слой, который за обтекаемым телом толще, чем перед ним.

Любопытен один эпизод из жизни лаборатории Прандтля, который демонстрирует, как из неточной постановки задачи следует открытие.

В 1911 году докторант К. Хименц по заданию Прандля должен был построить водяной лоток для исследования отрыва потока от поверхности цилиндра. Цель исследования – проверить, совпадет ли точка отрыва пограничного слоя с рассчитанной теоретически. Сначала требовалось установить распределение давлений вокруг цилиндра в равномерном потоке.

Но Хименц в процессе экспериментов убедился, что течение за цилиндром не устойчивое, а сильно пульсирует. Прандтль при обсуждении результатов предположил, что либо цилиндр недостаточно кругл, либо лоток несимметричен. Регулировка установки ни к чему не привела.

В это время в лаборатории Прандля в Геттингене появился молодой специалист из Австро-Венгрии Т. фон Карман (1881–1963), который впоследствии работал в Америке. Наблюдая за безнадежной работой Хименца, Карман подумал, а нужно ли устранять пульсации, не лучше ли их изучить. Потом Карман так вспоминал о своих раздумьях.

«Однажды в воскресенье я попытался рассчитать устойчивость системы вихрей и сделал это весьма примитивно, предположив, что только один вихрь волен двигаться, в то время как все остальные зафиксированы... Полученный результат гласил, что при симметричном расположении неподвижных вихрей подвижный всегда уходит из своего первоначального положения. Такой же результат получился и для асимметричного расположения, но оказалось, что при определенном расстоянии между рядами и двумя последовательными вихрями подвижный вихрь не уходит и остается вблизи своего первоначального положения, описывая вокруг него небольшие замкнутые траектории.

Я закончил работу к понедельнику и утром, показав ее Прандтлю, спросил:

– Что вы скажете на это?

– О, это кое-что важное, – сказал он. – Напишите об этом статью, и я представлю ее в Академию.

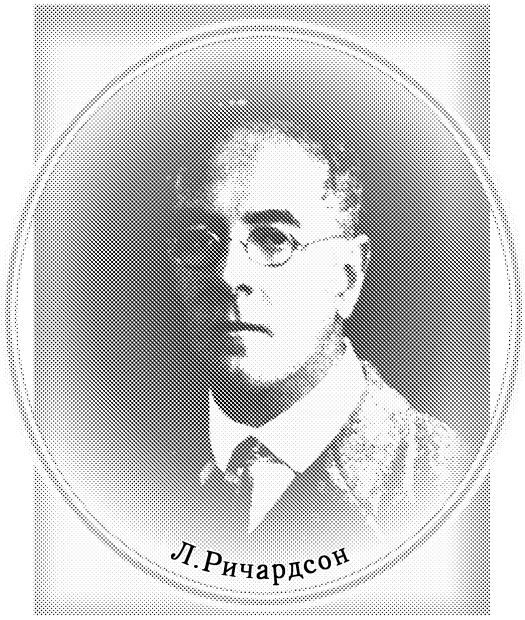
Так появилась моя первая статья на эту тему.»

Систему вихрей, следующих в шахматном порядке за движущимся цилиндром или поперечной пластиной, впоследствии стали именовать «вихревой дорожкой Кармана».

В цитируемой выше книге И.В. Андрианова и др. есть интересная характеристика научного стиля Прандля.

«...Инженер по образованию и, если можно так выразиться, по убеждению, он всегда подчеркивал, что наиболее эффективное приближение к действительности нельзя получить на основе формального решения. Для этого нужно глубокое проникновение в физическую суть явления. К решению сложных проблем он применял простые математические подходы, что и было главной отличительной чертой его научного метода. Таково происхождение теории пограничного слоя, которая возникла при исследовании потока жидкости и описывается весьма скромными математическими средствами.»

Для оценки толщины пограничного слоя в нашей статье использованы еще более скромные средства, чем у Прандтля.



Несомненно удивительной личностью был Льюис Фрай Ричардсон. По словам одного из его современников, он был «очень интересным и оригинальным человеком, который обо всем имел собственное мнение, почти никогда не совпадающее с общепринятым; часто люди просто не понимали его».

Ричардсон окончил Кембриджский университет и получил степени бакалавра по физике, математике, химии, биологии и зоологии. Такое разнообразие было связано с размышлениями о выборе карьеры. Он почему-то был в натянутых отношениях с кембриджской администрацией, поэтому, когда ему понадобилась докторская степень, он отказался получать необходимую степень магистра в Кембридже (это обошлось бы ему в 10 фунтов). Вместо этого он поступил на общих основаниях в Лондонский университет (он преподавал там в это время), учился вместе со студентами и в 47 лет получил степень доктора по математической психологии.

Монография 1922 года со знаменитыми стихотворными строчками о турбулентности, которые приведены выше, через 43 года была переиздана как классическая, хотя в течение первых двадцати лет после выхода у нее была сомнительная репутация.

О Ричардсоне можно говорить и в связи с фрактальными датами. Действительно, чтобы дать представление о степени иррегулярности движения воздуха, он в своих работах упоминает функцию Вейерштрасса (она непрерывна, но нигде не дифференцируема). Из посмертных статей стала знаменитой работа Ричардсона «The problem of contiguity: an appendix of statistics of deadly quarrels» (General Systems Yearbook, 1961, 6, 139-187), где изложены результаты исследования длины береговых линий. Без ссылки на эту работу не обходится, по крайней мере, ни одна книга по фракталам.

В последние годы жизни Ричардсон занимался изучением психологии вооруженных конфликтов между государствами.

2. Созвездие фрактальных дат[6]

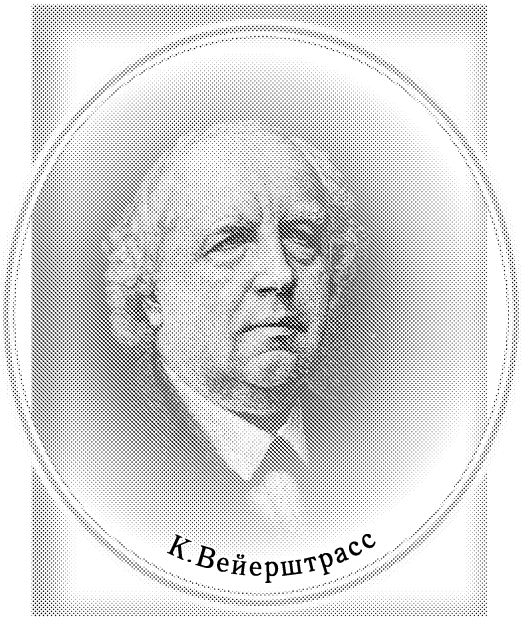
190 лет со дня рождения немецкого математика Карла Вейерштрасса (1815–1897) – автора многочисленных исследований в области математического анализа, теории чисел, вариационного исчисления. Он впервые привел пример непрерывной функции, не имеющей производных

160 лет со дня рождения Георга Фердинанда Кантора (1845–1918). Развив теорию множеств, Кантор, по выражению Гильберта, построил рай для математиков

60 лет назад умер Алексей Николаевич Крылов (1863–1945) – всемирно известный кораблестроитель, адмирал. Применил функции без производных для моделирования процесса колебаний корабля

35 лет со дня смерти Абрама Самуиловича Безиковича (1891–1970) и Альфреда Реньи (1921–1970)

30 лет со дня выхода в свет на французском языке книги Бенуа Мандельброта «Фрактальная геометрия природы»



Когда еще не было термина «фрактал», к функциям, графиком которых была негладкая кривая, относились как к «монстрам» среди гладких обитателей евклидовой, неевклидовой геометрий (типа геометрий Лобачевского и Римана).

Одним из первых, кто начал изучать монстров, был Карл Вейерштрасс. Вслед за чешским философом, математиком и теологом Бернардом Больцано (1781–1848), опубликовавшим книгу «Парадоксы бесконечности» (1851), Вейерштрасс привел пример функции, графиком которой была негладкая кривая. Он обратил внимание на то, что понятия «непрерывная функция» и «непрерывная функция, имеющая в

[6]Часть материалов этого раздела взята из книги Владислава Тарасенко «Фрактальная логика» (М.: «Прогресс-Традиция», 2002).

2

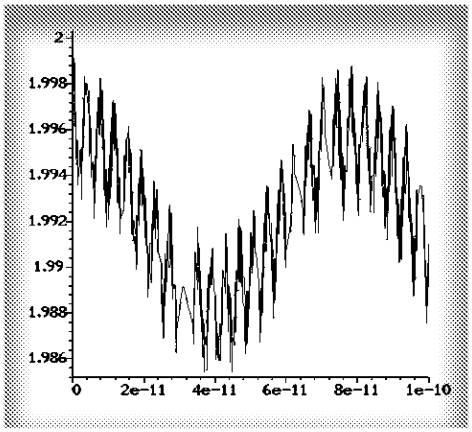


Рис. 5.

каждой точке производную», не тождественны. В докладе Берлинской академии наук 18 июля 1872 года Вейерштрасс привел пример негладкой непрерывной функции, которая задается рядом

$$W(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a^n \cos(b^n \pi p x),$$

$$a < 1,\ b > 1,\ ab > 1.$$

Функция имеет очень сложную «пилообразную» структуру (рис. 5). Причем на «пилы» большего масштаба до бесконечности накладываются «пилы» меньшего масштаба. График функции самоподобен: при растяжении по абсциссе в b раз и $1/a$ раз по ординате он инвариантен. Таким образом, из-за того, что в малом масштабе дублируются детали крупного масштаба, функция никогда на малом отрезке не сводится к линии, то есть она непрерывна, но не имеет ни дифференциала, ни производной.

У российских ученых имя Вейерштрасса всегда связывается с именем Софьи Ковалевской, которая познакомилась с ним в 1870 году, когда ей было двадцать лет, а Вейерштрассу – пятьдесят пять, и он считался величайшим аналитиком своего времени.

Вейерштрассу из-за плохого здоровья приходилось читать лекции сидя, а кто-нибудь из способных студентов делал записи на доске. Несмотря на это, на его лекциях аудитория была полна. Ковалевской не разрешили посещать его лекции, поскольку научная жизнь не была рассчитана на свободы женщин. Однако Вейерштрасс, узнав об этой решительной и энергичной девушке, устроил для нее частные уроки. Их дружба продолжалась более двадцати лет, которую оборвала лишь мучительная и преждевременная смерть этой замечательной женщины.

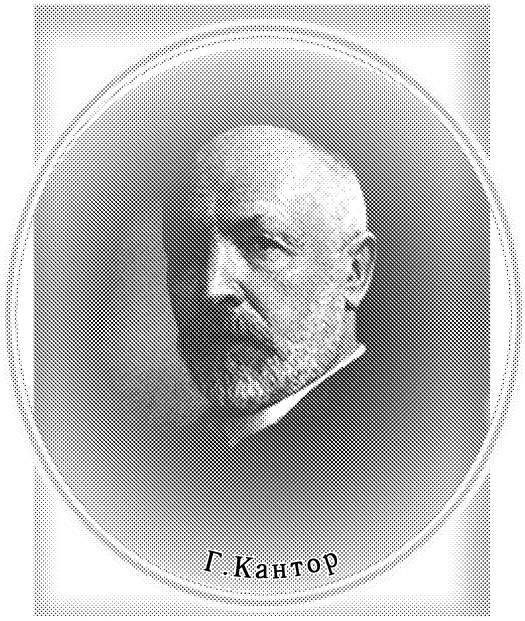
Интересный аспект этой дружбы раскрывают в своей книге «Небесные встречи. Истоки хаоса и устойчивости» Ф. Диаку и Ф. Холмс (Москва; Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2004). Они пишут так.

«Несмотря на всю важность вкладов, внесенных Ковалевской в механику, мы вспомнили историю Сони Ковалевской и Карла Вейерштрасса по другой причине. Дружба этих двух неординарных людей вылилась в длительную переписку, в которой можно найти корни многих математических идей. В частности, читая письма Вейерштрасса, начинаешь понимать образ его мышления и работы. Это совсем не похоже на чтение его математических статей. Научные статьи, особенно по математике, представляют только научный продукт. Они скрывают само создание, путь к конечному результату, надежды и сомнения, страсть, движение в ложном направлении и ошибки, разочарования. Все это присутствует в письмах. Они изображают человеческий разум, стоящий за абстрактными теоремами. Они показывают неудачные попытки, результаты которых никогда не публиковались. Они позволяют нам проследить не всегда гладкий процесс изобретения.»

К построению и исследованию «монстров» в своем творчестве обращался Георг Фердинанд Кантор. В 1883 году Кантор публикует статью «Über unendliche, lineare Punktmannigfaltigkeiten», в которой демонстрирует пример множества – «мон-

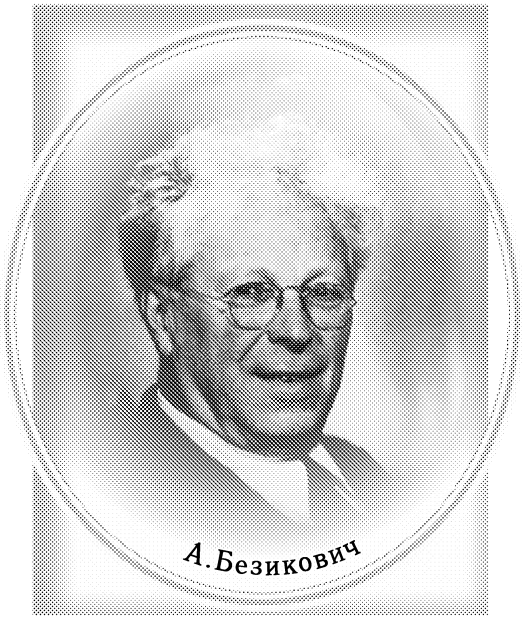
стра», называемого сейчас множеством Кантора или «пылью Кантора». Напомним, как строится множество Кантора.

Возьмем отрезок $[0,1]$, имеющий единичную длину, разделим его на три части и выбросим середину – открытый интервал $(1/3, 2/3)$. Будем дальше поступать аналогично: отрезки $[0;1/3]$ и $[2/3;1]$ делим на три части и выбрасываем середины. На k-ом шаге описываемой процедуры получим 2^k оставшихся отрезков, не связанных между собой. Длина каждого отрезка равна $\left(\dfrac{1}{3^k}\right)$. В пределе, когда $k \to \infty$, число вырезанных отрезков неограниченно возрастает, а длина их стремится к нулю. Суммарная длина всех вырезанных отрезков представляет собой сумму геометрической прогрессии со знаменателем $q = 2/3$ и первым слагаемым $a_1 = 1/3$, то есть



$$S = \frac{a_1}{1-q} = \frac{1}{3} + \frac{2}{9} + \frac{4}{27} + \ldots = \frac{1/3}{1-2/3} = 1.$$

Поскольку исходная длина отрезка равна единице, то мера остатка равна нулю. Однако это не значит, что ничего нет, – множество существует, но нужны другие понятия для его количественной характеристики.



Как известно, размерность Хаусдорфа – Безиковича для множества Кантора

$$D = \lim_{k \to 0} \frac{\ln 2^k}{\ln 3^k} = \frac{\ln 2}{\ln 3} = 0.63\,.$$

Абрам Самуилович Безикович, имя которого уже упоминалось в связи с размерностью множества Кантора, происходил из талантливой семьи, в которой было шестеро детей. В 1912 году он окончил Санкт-Петербургский университет и впоследствии стал профессором Пермского университета. Он радовался отречению царя от престола, но нужда и лишения последующих лет вынудили его бежать из России. Существует следующая легенда о том, как Безикович нелегально покинул Росиию.

Первоначально он хотел осуществить переход вместе с двумя коллегами – А.А. Фридманом (известным своей теорией расширения Вселенной) и математиком И.Д. Тамаркиным. Операция финансировалась отцом Фридмана, который был богатым нэпманом. Фридман в последний момент по каким-то причинам отказался

от затеи, а через несколько месяцев умер от тифа. Тамаркин и Безикович продолжали выполнять намеченный план. Путь их лежал через Латвию и включал переход через замерзшую реку, лед на которой был еще не слишком твердым. Чтобы уменьшить давление на лед, нужно было перебираться ползком. Что и сделал успешно Безикович. Тамаркин, однако, обладая внушительными пропорциями, считал такой способ недостойным для человека. Он пошел пешком, заставив всех изрядно поволноваться. Но все обошлось благополучно.

Из Латвии Безикович отправился в Копенгаген, где началась его «заграничная жизнь». Потом были Оксфорд, Ливерпуль и, наконец, Кембридж. В этом университете он проработал с 1927 года до конца своих дней.

Самый значительный вклад Безиковича в математику лежит в области почти периодических функций и фрактальной размерности. Сам себя он называл знатоком «патологии» математики. Если кто-то выдвигал предположение, которое, как чувствовал Безикович, было неверным, он не успокаивался до тех пор, пока не находил контрпредположение. Безикович был добрым и общительным человеком. Среди его друзей был П.Л. Капица. Он был остроумен, его афоризмы пользовались успехом. В день своего тридцатишестилетия Безикович, думая, что его творческие силы иссякли, объявил: «Прошло четыре пятых моей жизни». Когда ему напомнили об этом при занятии в 59 лет кафедры знаменитого Литлвуда, он отправил открытку с ответом: «Числитель был правильным!».

Размерность носит имя Хаусдорфа и Безиковича. Поэтому несколько слов о Феликсе Хаусдорфе (1868–1942).

Хаусдорф до 35 лет большую часть времени посвящал литературе и музыке, писал беллетристические произведения под псевдонимом Paul Mongré. Известен его математический трактат «Grundzuge der Mengenlehre» (Leipzig, 1914), который отличали ясность, точность и доведение каждого результата до полного понимания. Один из американских рецензентов книги, указывая, что способ доказательств в трактате близок к стилю Эвклида и едва ли вызовет активность читателя и даст волю его воображению, тем не менее отмечал: протест против такого стиля изложения подобен спору с Бетховеном из-за того, что он писал симфонии вместо опер.

Хаусдорф был евреем и покончил с собой вместе с женой и ее сестрой 26 января 1942 года, чтобы избежать депортации в концлагерь. У входа в Математический институт Боннского университета висит мемориальная доска: «В этом университете с 1921 по 1935 год работал математик Феликс Хаусдорф (8.11.1868 – 26.01.1942). Он умер по вине национал-социалистов из-за того, что был евреем. В его лице мы чтим память всех жертв тирании. Пусть никогда не повторится диктатура и война!».

Помимо размерности Хаусдорфа – Безиковича фракталы характеризуются и другими размерностями, например, размерностью Реньи – венгерского математика Альфреда Реньи.

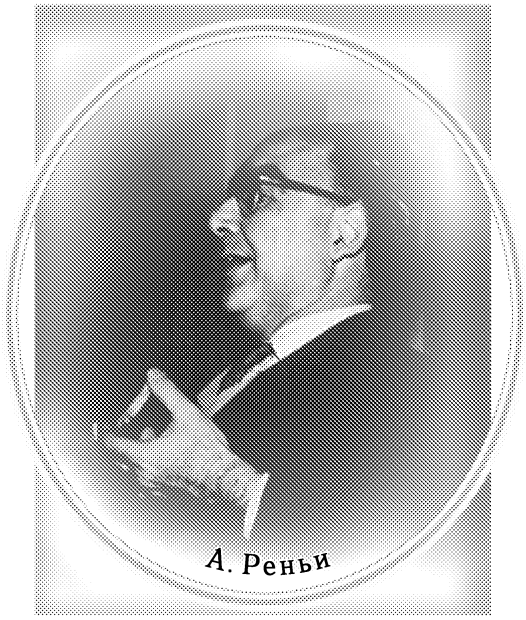
Напомним, что Реньи предложил континуальное семейство размерностей, включающее в себя многие известные размерности, в том числе размерность Хаусдорфа – Безиковича. По определению, q-я размерность Реньи вычисляется по формуле

$$D_q = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{q-1} = \frac{\log \sum\limits_{i=1}^{N} p_i^q}{\log \varepsilon},$$

где p_i – вероятность попадания на i-ю компоненту фрактала, ε – радиус сферы покрытия. При $q = 0$

$$D_0 = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{(-1)} = \frac{\log \sum\limits_{i=1}^{N} p_i^0}{\log \varepsilon} = \frac{\log \sum\limits_{i=1}^{N} 1}{-\log \varepsilon} = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{\log N(\varepsilon)}{\log \dfrac{1}{\varepsilon}}$$

– размерность Хаусдорфа – Безиковича.



Альфред Реньи родился 20 марта 1921 года в Будапеште в семье инженера. Его дед со стороны отца был известным литературным критиком и большим знатоком древнегреческой литературы. Отец будущего ученого свободно владел многими европейскими языками. Видимо от них внук унаследовал и литературные способности.

Реньи окончил в 1944 году университет в Будапеште и защитил первую диссертацию в Сегеде. Затем поступил в докторантуру к академику Ю.В. Линнику (Ленинградское отделение Математического института им. В.И. Стеклова). Он окончил докторантуру за год благодаря своей одаренности и трудолюбию. Возвратившись после защиты диссертации в Венгерскую Народную Республику, Реньи приступил к научно-педагогической работе в Дебреценском университете. В 1950 году при активном участии Реньи в Будапеште был создан Институт прикладной математики Венгерской академии наук (позже он был переименован в Институт математики). Альфред Реньи стал первым и бессменным (на протяжении двадцати лет) директором этого института. С 1952 года Реньи заведовал кафедрой теории вероятностей Будапештского университета имени Этвеша.

В нашей стране Реньи известен всем интересующимся математикой книгой «Трилогия о математике. Диалоги о математике. Письма о вероятности. Дневник. Записки студента по теории информации» (М.: Мир, 1980. 376 с.)[7]. Форма диалогов позволила автору не только изложить собственные взгляды на предмет, но и противопоставить им иные точки зрения и привести доводы «за» и «против».

Обратимся далее к воспоминаниям академика АН УССР Б.В. Гнеденко (из Предисловия к «Трилогии о математике»).

«Вслед за этой книгой (имеется в виду книга «Диалоги о математике». – *Д.И.Т.*), принесшей Реньи широкую известность как популяризатору и ученому, занимающемуся философскими проблемами математики, он начал работать над другой популярной книгой – «Письмами о вероятности». Замыслами о ней поделился со мной в октябре 1966 года, когда я был гостем венгерских математиков в Будапеште. Как-то перед одной из своих лекций по телевидению, посвященной элементам теории вероятностей, он,

[7]Первые две части трилогии издавались отдельными книгами: «Диалоги о математике» (М.: Мир, 1969) и «Письма о вероятности» (М.: Мир, 1970). Обе книги стали уже библиографической редкостью.

рассказывая мне о том, что собирается публично выступить с демонстрацией игральных костей различных времен и народов, упомянул о замысле задуманной им книги. Надо полагать, идея написания такой книги и ее форма были навеяны его поездкой во Францию по случаю 300-летия со дня смерти Паскаля, когда он побывал не только в Париже, но и в Клермон-Ферране, неподалеку от которого Паскаль проводил свои опыты.»

«Дневник» посвящен выяснению основного понятия теории информации – количества передаваемой информации. Форма, к которой прибегнул автор, своеобразна и удивительно интересна. Преждевременная смерть не позволила Реньи завершить эту книгу. Его не стало 1 февраля 1970 года. Книгу закончили его ученики и друзья.

Альфред Реньи был тонким музыкантом и знатоком литературы, он высоко ценил в математике ее эстетическое начало; интересовался историей математики и размышлял над ее философскими проблемами.

3. Даты, которые не имеют отношения к гидродинамике и фракталам, но важны для нелинейной динамике

375 лет назад умер Иоганн Кеплер (1571–1630).

370 лет со дня рождения Роберта Гука (1635–1703), через 30 лет в 1665 году вышла в свет его знаменитая «Микрография».

310 лет со дня смерти Христиана Гюйгенса (1629–1695).

240 лет назад вышли в свет «Письма к одной немецкой принцессе» Леонарда Эйлера.

150 лет назад умер Карл Фридрих Гаусс (1777–1855).

140 лет назад Джеймс Клерк Максвелл (1831–1879) постулировал существование электромагнитных волн и выдвинул идею электромагнитной природы света.

Рудольф Клаузиус (1822–1888) ввел понятие энтропии.

Умер Уильям Роуэн Гамильтон (1805–1865).

115 лет назад родился Рональд Эймлер Фишер (1890–1962), который одновременно с Колмогоровым, Петровским и Пискуновым исследовал уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k\,u(1-u) + D\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

(частный случай уравнения КПП).

80 лет назад умер Александр Александрович Фридман – автор теории расширяющейся Вселенной, созданной в рамках общей теории относительности Эйнштейна.

65 лет назад в США построена первая ЭВМ. Проведены исследования, получившие название парадокса Ферми – Пасты – Улама.

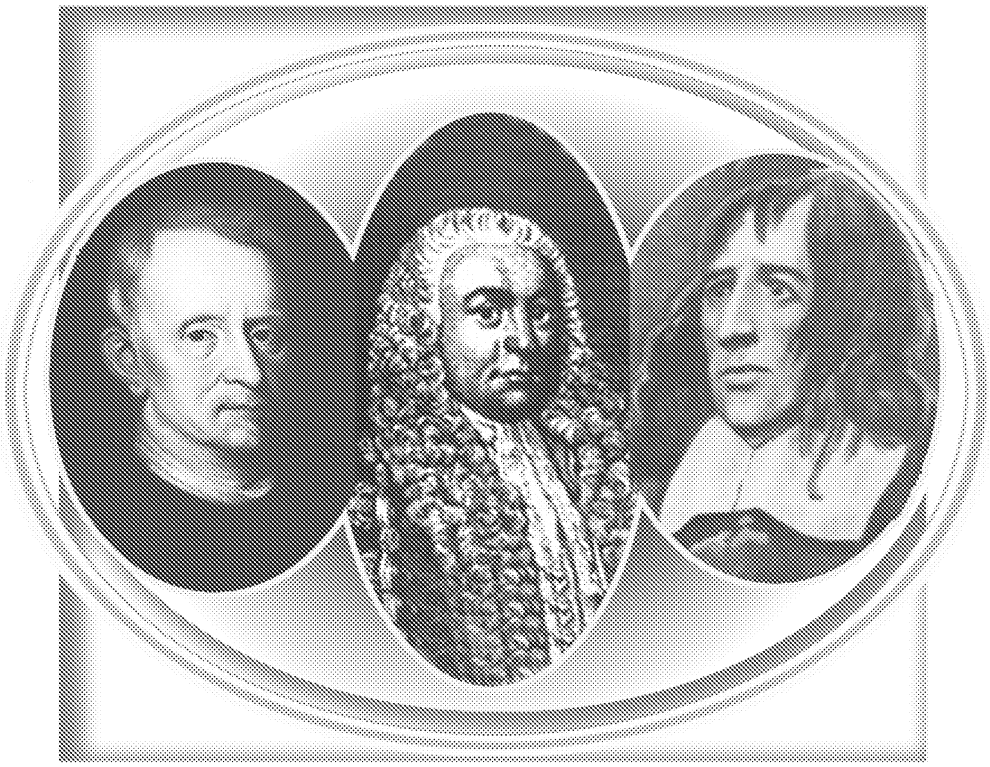
50 лет со дня смерти Николая Митрофановича Крылова (1879–1955). Метод Крылова – Боголюбова применяется необычайно широко.

Вышла в свет книга И.Р. Пригожина «Введение в термодинамику необратимых процессов» (Introduction to Thermodynamics of Irreversible Processes Springfield, Illinois, USA,1955.)

40 лет назад Забусски и Крускал опубликовали статью: Zabusky N.J., Kruskal M.D. Interaction of «solitons» in a collisionless plasma and the recurrence of unitial states (Phys. Rev. Lett. 1965. Vol.15. P. 240), в которой ввели термин «солитон» для уединенных волн – решений уравнения Кортевега – де Вриза.

3

4



Посмертные портреты Гука

Подлинных портретов Роберта Гука не существует. Есть несколько изображений, воссозданных по описаниям современников, поскольку подлинного портрета до сих пор обнаружить не удалось. Легенда гласит, что после смерти Гука Ньютон, заняв место президента Королевского общества, приказал уничтожить все портреты Гука. За легендой стоит научное столкновение между Ньютоном и Гуком, длившееся без малого 30 лет. Приведем словесный портрет Гука, принадлежащий Ричарду Уоллеру (Waller R. The Life of Dr. Robert Hooke, – In: Hooke R. Posthumous Works. 2nd ed. L., 1974, XXVI – XXVII)[8].

«Что касается его вида, то он был неописуем, будучи чрезвычайно сгорбленным, хотя, как я слышал от него и от других, приблизительно до шестнадцатилетнего возраста он был стройным. С этого возраста он стал горбиться, к чему его привела постоянная работа на токарном станке и иные искривляющие тело упражнения, тем более, что телом он был хилый и слабый. С возрастом все это увеличивалось, так что в конце концов стало весьма заметно: таким образом, он казался очень низкого роста, хотя судя по его членам, был достаточно высок. Всегда он был очень бледен и худ, а позже стал только кожа да кости, очень тощий, у него были серые глаза навыкате с острым умным взглядом в годы его молодости. У него был тонкий нос умеренной высоты и длины, средней величины рот с тонкой верхней губой, острый подбородок и высокий лоб; голова средней величины. Он носил собственные волосы темно-каштанового цвета, очень длинные, которые небрежно спадали на его лицо, неподрезанные и гладкие; лишь за три года до смерти он постриг их и начал носить парик. Ходил он наклонившись и очень быстро (пока его болезнь за несколько лет до смерти не помешала ему в этом), ибо его ноги несли легкое тело. Он был чрезвычайно умен и деятелен, в особенности в молодые годы.

[8]Текст взят из книги А.Н. Боголюбова «Роберт Гук» («Наука», 1984).

Он обладал активной, беспокойной, неутомимой одаренностью почти до самого своего конца, и всегда, вплоть до своей смерти, он спал мало, редко ложился спать раньше двух, трех или четырех часов утра и еще реже укладывался в кровать, зачастую продолжая свои занятия всю ночь и лишь позволяя себе днем немного вздремнуть. Характер его был меланхолический, недоверчивый и ревнивый, что с возрастом у него усиливалось.»

Роберт Гук известен чуть ли не каждому образованному человеку в связи с законом Гука (1678), который положил начало науке о прочности материалов и механике упругого тела. И мало кто знает, что Гук был замечательным ученым-энциклопедистом с чрезвычайно широким диапазоном творчества, он был талантливым изобретателем, выдающимся архитектором и градостроителем, отличным организатором, профессором и лектором и поистине гениальным экспериментатором.

Невозможно найти такое направление в науке или технике XVII века, которым бы Гук не занимался. Его работы выполнены в области физики, химии, биологии, геологии, астрономии, палеонтологии, физиологии. Он превосходно чертил и рисовал, знал архитектуру и производство строительных работ, любил музыку, был замечательным гравером. Но основные его исследования сделаны в области механики (пожалуй, он разбирался в механике лучше всех своих современников), а в технике эксперимента равных ему не было.

Жизнь Гука пришлась на период бурных перемен в Англии. Он пережил две революции, несколько гражданских войн, пять монархов и одного лорда-протектора и оставил громадное научное наследие. По широте диапазона научных интересов Гука можно сравнить, пожалуй, лишь с Леонардо да Винчи.

И конечно, имя Гука неотделимо от Королевского общества. В своей «Истории Королевского общества» де Андраде так пишет о деятельности Гука:

«Гук произвел перед Обществом удивительное разнообразие экспериментов, например, относительно действия вакуума, о силе артиллерийского пороха, о термическом расширении стекла. Между прочими вещами он показал первый действительный микроскоп и множество открытий, сделанных с его помощью, первую ирисовую диафрагму и целый ряд метеорологических приборов. Если бы не его преданность, Общество скончалось бы подобно Академии дель Чименто или влачило бы существование как Французская академия наук в свои ранние дни» (Andrade E.N. da C. A brief History of the Royal Society. L., 1960).

По существу, Гук воспроизводил каждую работу, присылаемую в Общество, и докладывал ее коллегам. Он делал то, что под силу целому научно-исследовательскому институту.

Что в работах Гука наиболее близко науке о колебаниях и волнах?

Гук был сторонником теории «всемирных и всепроникающих» колебательных процессов, которой он не безуспешно пытался заменить декартовские вихри[9]. И конечно, Гук не мог оставить в стороне вибрацию, связанную с одним из «дел его жизни» – созданием часов.

[9]Напомним, что Декарт подразделял Вселенную на три различные области: первая включает в себя вихрь вокруг Солнца, вторая – вихри вокруг звезд, а все то, что находится вне этих двух областей, отнесено к третьей. Вихрь вокруг Солнца занимает особое положение, так как в нем расположена Земля. Декарт пытался разъяснить из этой теории все явления, наблюдаемые на небе, пятна на Солнце, появление новой звезды, кометы, выявить законы движения небесных светил.

Одно из важных направлений творчества Гука – механика упругого тела. В Кутлеровской лекции (Hooke R. Lectures De Potentia or of Spring. L., 1678. P.1.) Гук пишет:

«Около двух лет назад я напечатал эту теорию в виде анаграммы в конце моей книги... ut tensio sic vis; что значит, сила любой пружины находится в одинаковом отношении с напряжением. Иными словами, если одна сила растягивает или сгибает ее на одну длину, две согнут ее на два, а три согнут ее на три, и так далее.»

Он прекрасно понимал ценность своей теории и те возможности, которые она открывает перед человечеством:

«При помощи этого принципа легко можно будет подсчитать различные силы луков – будут ли они сделаны из дерева, стали, рога, из сухожилий или шнуров, а также катапульт или баллист, которыми пользовались древние; все это можно сделать однажды и вычислить соответствующие таблицы. Вскоре я покажу способ, как вычислять мощность, которую они имеют при стрельбе или бросании стрел, пуль, камней, гранат и подобных им.

Из этих же принципов будет легко вычислять силы пружины для механизма часов и соответственно приспособления механизма к пружине для того, чтобы он обеспечивал движение часов всегда с одинаковой силой.»

Гук надеялся применить свой закон к сжатию пружины и найти возможность так закручивать часовую пружину, чтобы она, раскручиваясь в постоянном отношении, могла послужить основой для создания часов, пригодных для мореплавания, на которые не влияли бы непогода, сырость, буря, изменения гравитационного поля. Если удлинения пружины прямо пропорциональны приложенному к ней растягивающему усилию, то, очевидно, восстанавливающая сила в закрученной пружине также будет находиться в линейной зависимости от ее раскручивания. Один конец раскручивающейся пружины продвигался бы на равные расстояния в равные времена. Так Гук нашел механическое воспроизведение изохронности.

В литературе имя Гука, как правило, связывают с его спорами с Ньютоном о приоритете в теории света и формулировке закона всемирного тяготения. Обычно об этом пишут в книгах о творчестве Ньютона, однозначно вставая на его сторону. Не все так просто, если заглянуть в переписку Гука и Ньютона, которая, несмотря на все их заявления о глубоком уважении друг друга и о чрезвычайной преданности к раскрытию правды, полна взаимных щипков и пренебрежительных замечаний. Вот один из примеров.

Гук, ссылаясь на свой общепризнанный авторитет в области теории света и цветов, указывает, что Ньютон только закончил ту картину, которую он, Гук, сделал еще в молодости и что завершил бы ее и сам, если бы «это разрешили его иные трудные занятия». Явный намек на то, что младший на семь лет Ньютон был всего лишь последователем Гука.

Ответ Ньютона следует 6 февраля 1676 года. В нем знаменитая фраза: «Если я видел дальше, то лишь потому, что стоял на плечах гигантов». Вряд ли эти слова не содержали в себе намека на малый рост и искривленность Гука. Назвать его гигантом можно было только в насмешку.

Но знаменитая фраза могла быть вложена и в уста Гука: он тоже видел дальше других, а кое в чем и дальше Ньютона.

Несомненно, что Гук внес некоторый вклад и в установление закона всемирного тяготения, поскольку именно ему принадлежат первые публикации и чтения на эту тему. Справедливость некоторых его требований вынужден был признать и Ньютон. Наследие Гука и его вклад в человеческую культуру огромны. Для доказательства этого приведем основные даты жизни и деятельности Роберта Гука, основываясь на уже цитированной книге А.Н. Боголюбова.

1635 Роберт Гук родился 18 июля в Фрешуотере (Англия)

1648 после смерти отца переехал в Лондон и поступил учеником к художнику Питеру Лели

1649 поступил в Вестминстерскую школу педагога Башби

1653 студент Оксфордского университета; хорист в церкви Христа

1654 ассистент доктора Уиллиса. Знакомство с участниками Оксфордского «Невидимого колледжа»; ассистент и ближайший сотрудник Роберта Бойля

1657 изобрел пружинный привод карманных часов

1658 изобрел воздушный насос

1661 опубликовал трактат о капиллярном движении жидкостей

1662 оксфордский университет присвоил Гуку степень магистра искусств;
Гук назначен куратором экспериментов Королевского общества

1663 составил устав Королевского общества;
3 июня избран членом Королевского общества

1664 стал профессором Грешемовского колледжа;
получил квартиру в здании колледжа

1665 11 января избран куратором пожизненно;
вышла из печати «Микрография», которая послужила распространению экспериментальных исследований с помощью микроскопа. Книга была написана прекрасным языком и иллюстрирована рисунками-гравюрами самого Гука. Книга явилась результатом ряда фундаментальных открытий и поставила Гука в число основоположников биологии. В книге приведены теоретические рассуждения о природе света и тепла, о цветах в тонких пластинках, о капиллярности, эксперименты о распространении тепла в твердых телах и жидкостях, наблюдения над структурой кристаллов, астрономические рассуждения, расчет величин звезд, указание о том, что с помощью более мощных телескопов будут открыты новые звезды

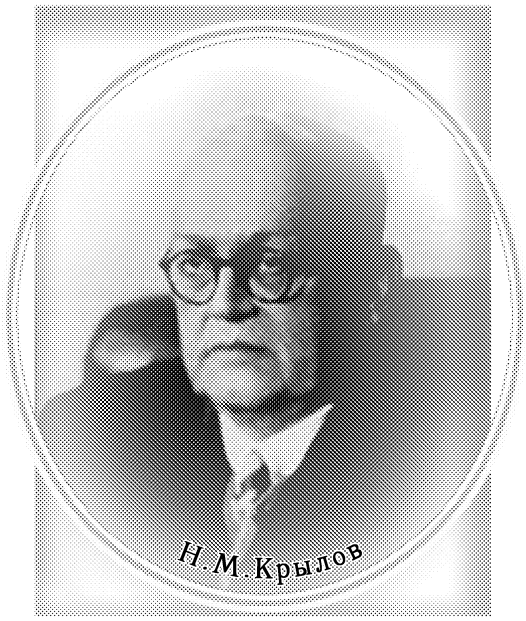
1666 назначен представителем Сити в комиссии по восстановлению Лондона, пострадавшего от Великого пожара. Начал работать в качестве архитектора, проводил эксперименты по гравитации

1667 17 января назначен профессором по чтению «Кутлеровских лекций».
28 февраля демонстрировал перед Королевским обществом свой отражательный (зеркальный) телескоп.
Начал читать Кутлеровские лекции о землетрясениях. По свидетельству самого Гука, возникли лекции так: «По тщательном обсуждении того, что сэр Джон Кутлер, рыцарь и баронет, определил платить мне пятьдесят фунтов в год в течение моей жизни, я обязался и предпринял читать в Грешемовском колледже или в каком-либо ином месте, где будет устроено собрание Королевского общества, по шестнадцати лекций в год для распространения знаний по искусствам и природе»

1670 предложил принять каплю ртути в качестве стандартной единицы мер и весов
1671 провел серию экспериментов по выяснению природы и причины тяготения
1674 изобрел машину для выполнения всех арифметических операций; впервые опубликовал одну из «Кутлеровских лекций» – «Попытка доказать движение Земли»
1675 ставил эксперименты над мускулами человека и животных
1677 избран секретарем Королевского общества
1678 провел опыты по созданию искусственных мускулов; опубликовал «закон Гука»
1679 ставил опыты по исследованию феноменов дыхания и горения; разработал теорию о причастности к обоим феноменам той части воздуха, которая содержится в селитре. Он ясно представлял себе функцию кислорода, хотя и не нашел для этой субстанции, которая имеется и в воздухе, и в селитре, особого наименования
1680 прочел лекции о кометах
1681 читал лекции о свете
1686 вступил в спор с Ньютоном о приоритете закона всемирного тяготения
1691 получил степень доктора медицины
1697 прочел три лекции о янтаре
1699 30 июля выступил с лекцией о причине землетрясений
1701 в феврале Галлей доложил на заседании Королевского общества о морском барометре – последнем изобретении Гука
1703 Роберт Гук скончался 3 марта в Лондоне в своей квартире в Грешемовском колледже

Краткое повествование о Гуке закончим фразой из книги А.Н. Боголюбова.

«Представляется, что изложенное выше является хотя бы частичным доказательством того, что идеи Гука в значительной степени определили развитие наук в XVII веке».



1955 год – скончался Николай Митрофанович Крылов (1879–1955). Всем читателям известен метод Крылова – Боголюбова.

В книге И.В. Баранцева и др. «Асимптотическая математика и синергетика» находим следующую характеристику творчества Крылова.

«Своеобразие Крылова как ученого заключается в том, что, по словам известного французского математика А. Данжуа (1884–1973), он объединял в себе три ипостаси: одновременно был выдающимся математиком, физиком и инженером. Что же касается творческой карьеры Крылова, то она как нельзя лучше характеризуется цитатой из его популярной статьи: «Естественные и

технические науки часто ставят перед математикой вопросы, на которые математика не может дать точные ответы. Другие же задачи, хотя уже и решенные точно, дают настолько сложные алгоритмы, что не могут быть применены на практике. Нахождение простейшего и, в то же время, достаточно точного метода приближенного решения вместе с оценкой степени точности приближения нередко требуют исключительного таланта и глубоких знаний. В этом смысле и нужно, очевидно, воспринимать слова великого русского математика П.Л.Чебышева (приведенные как-то французским геометром Г. Дарбу) о том, что приближенное решение лучше точного» (Боголюбов А.Н., Урбанский В.М. Николай Митрофанович Крылов. Киев: Наукова Думка, 1987).

Николай Митрофанович Крылов родился 29 декабря 1879 года в Санкт-Петербурге. В 1889 году он поступает в Киевский кадетский корпус, а в 1897 году – в Санкт-Петербургский горный институт, по окончании которого получает звание горного инженера. В 1902 году он был послан за границу (во Францию и Италию) для повышения уровня математической подготовки, где учился у выдающихся математиков того времени, таких как Г. Дарбу, Ж. Буссинеск, Ж. Адамар, А. Лебег, Э. Пикар, П. Пенлеве, Л. Бианки, У. Дини.

Его научная работа началась в 1910 году, и за 50 лет Крылов опубликовал более 180 книг и научных статей по теории аппроксимации, вариационному исчислению, приближенному интегрированию дифференциальных уравнений математической физики, нелинейной механике.

Вернувшись в Россию, Крылов преподает математику в своей alma mater (с 1912 по 1917 гг. он профессор кафедры высшей математики Горного института). Октябрьская революция застала его в Крыму, где он вынужден был подолгу находиться из-за болезни туберкулезом. С 1918 по 1922 гг. Крылов – профессор математики Таврического университета в Симферополе. В 1923 году он переезжает в Киев, где начинается его сотрудничество с Н.Н.Боголюбовым.

Крылов был избран членом-корреспондентом АН СССР в 1925 году, а ее действительным членом – в 1929 году.

Во время Великой Отечественной войны до 1943 года он работал в Уфе в тяжелых условиях, которые подорвали его здоровье. Последние годы жизни провел в Москве, тяжело болея и будучи практически слепым. Умер Николай Митрофанович Крылов 11 мая 1955 года.

Как и в прошлый раз не все упомянутые в списках даты нашли отражение в статье (особенно из последнего раздела). Можно указать разные причины, но, в основном, выбор описаний определяется вкусами автора.

Трубецков Дмитрий Иванович – родился в Саратове (1938). Окончил физический факультет Саратовского государственного университета (1960). Защитил диссертации на соискание ученой степени кандидата (1965) и доктора физико-математических наук в СГУ (1978) в области радиофизики. Заведующий кафедрой электроники, колебаний и волн факультета нелинейных процессов СГУ, профессор, член-корреспондент Российской академии наук, заслуженный деятель науки РФ, лауреат премии Президента РФ в области образования. Научный руководитель Лицея прикладных наук и факультета нелинейных процессов СГУ. Область научных интересов: вакуумная электроника и микроэлектроника сверхвысоких частот, теория колебаний и волн, нелинейная динамика, история науки. Автор более двадцати учебных пособий и монографий, а также более двухсот статей в периодической печати.

Изв. вузов «ПНД», т. 14, № 1, 2006 УДК 530.182 + 001.891.57

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ И ХАОТИЧЕСКИЕ ВРЕМЕННЫЕ РЯДЫ

Б.П. Безручко, Д.А. Смирнов

© Б.П. Безручко, Д.А. Смирнов, 2005
© Саратов: ГосУНЦ «Колледж», 2005. 320 с.
ISBN 5-94409-045-6

В книге излагаются общие вопросы моделирования и проблемы создания математических моделей эволюции (движений, процессов) по временным рядам – дискретным последовательностям экспериментально измеренных значений наблюдаемых величин. Основное внимание уделяется динамическому (детерминистическому) подходу к моделированию с присущей ему претензией на точность прогноза будущей эволюции, хаотическим сигналам и нелинейным моделям. Демонстрируются описательные возможности различных видов математического аппарата. Представлены технологические приемы построения модельных разностных и дифференциальных уравнений при различных уровнях предварительной информированности об объекте.

Книга адресована тем, кто желает ввести в свою практику прогноз, количественную проверку адекватности имеющихся представлений о механизмах функционирования объекта, «измерение» недоступных прибору величин и решение других задач по экспериментальным данным. Кроме ссылок на публикации по этой проблематике и Интернет-ресурсы, на сайте авторов представлены отдельные обучающие программы и систематизированный компьютерный практикум, дополняющие изложение. Наличие этого материала и широкое использование иллюстративных примеров должны сделать книгу полезной также студентам и аспирантам.

Предисловие

Математическое моделирование всеобъемлюще. Им занимаются математики и прикладники, профессионалы и любители, физики и вооруженные компьютерами лирики. Любая книга по точным наукам затрагивает математические модели некоторого круга объектов или явлений, более или менее специфические подходы к их

построению и исследованию, или вопросы их приложений. Как и многие учебники с похожими названиями, первая часть нашей книги посвящена общим вопросам моделирования, а вторая – отражает профессиональные пристрастия авторов-физиков, долгое время занимающихся нелинейной динамикой и сосредоточившихся в последние годы на ее актуальном направлении – «реконструкции уравнений» по дискретным последовательностям экспериментальных данных (временным рядам). Под названием «идентификация систем» это направление давно развивается в рамках математической статистики и теории автоматических систем управления, а своими корнями уходит в задачу о замене (аппроксимации) набора экспериментальных точек на плоскости гладкой кривой или подходящей формулой. Благодаря современным компьютерам с большими объемами памяти и скоростями обработки данных, теперь речь идет о получении модельных систем нелинейных уравнений, об обработке сложных (даже хаотических) зашумленных сигналов, типичных для реальных объектов и ситуаций, о приложениях в различных областях человеческой деятельности – от экономики до медицины.

Книга посвящена моделированию процессов эволюции (движений, изменений во времени). Она рассчитана на читателя, нацеленного на использование техники эмпирического моделирования для решения практических задач. Поэтому в ней освещены проблемы и «технические» приемы моделирования по данным наблюдений, описаны возможные приложения, и даже представлен компьютерный практикум и отдельные обучающие программы, помещенные на сайт авторов. В книге затронуты и мировоззренческие вопросы, неизбежно возникающие при «занятиях моделированием». Содержание и стиль изложения материала сформировались в процессе научной деятельности и многолетнего чтения лекций по моделированию на факультете нелинейных процессов и физическом факультете Саратовского госуниверситета. Некоторые главы использовались при обучении будущих геологов, биологов, экономистов; планируется использование книги студентами факультета нано- и биомедицинских технологий.

Мы надеемся, что книга будет полезна широкой аудитории, поэтому ее материал имеет различный уровень сложности. Первые главы вполне доступны читателю, имеющему подготовку на уровне современной средней школы, но изложенная в ней информация о моделировании вообще, мировоззренческие вопросы и примеры современных динамических моделей, наверное, будут интересны и специалистам. Более формализованная вторая часть предназначена тем, кто намерен строить модели по временным рядам и использовать их для прогноза, проверки адекватности имеющихся представлений о динамике объекта, измерения величин, недоступных приборам, классификации сигналов, и т.д. В книге нет строгих доказательств, обсуждение математических результатов чаще ведется на уровне наглядных иллюстраций и пояснений, при необходимости даются ссылки на математические работы. Более полному освоению материала некоторых разделов должны помочь материалы, размещенные на сайтах нашей и других научных групп. Представленный список литературы по вопросам моделирования не претендует на полноту; в него включены лишь некоторые из множества статей и монографий по проблеме. При его формировании мы часто отдавали предпочтение легко доступным изданиям, особенно если их тексты имеются в Интернете, на что также даны ссылки.

***

Содержание

Предисловие
Введение
Часть I. Модели и прогноз
Глава 1. Понятие модели. Чем замечательны модели математические
1.1. Что будем называть моделью и моделированием
1.2. Наука, научное знание, систематизации научных моделей
1.3. Обман чувств и интуиция. Спасение математикой
1.4. Сколько моделей может быть у одного объекта
1.5. Как рождаются модели
1.6. Структурная схема процесса математического моделирования
1.7. Выводы из исторической практики моделирования. Показательная судьба моделей механики
Глава 2. Два подхода к моделированию и прогноз
2.1. Основные понятия и особенности динамического моделирования
Определение динамической системы. Нестрогий пример. Переменные и параметры. Фазовое пространство. Консервативные и диссипативные системы. Аттракторы, мультистабильность, бассейны притяжения. Характеристики аттракторов. Пространство параметров. Бифуркации. Комбинированные пространства, бифуркационные диаграммы
2.2. Основания для объявления процессов случайными
Теоретико-множественный подход. Признаки случайности, традиционные для физиков. Алгоритмический подход. Случайность как непредсказуемость
2.3. Концепция частичной детерминированности
2.4. Ляпуновские показатели и пределы предсказуемости
Практическая оценка дальности прогноза. Предсказуемость и ляпуновский показатель: случай малых возмущений
2.5. Масштабы рассмотрения: как они определяют оценку свойств процесса (сложная динамика или случайность)
2.6. Пример с монетой
Глава 3. Динамические модели эволюции
3.1. Терминология
Оператор, отображение, уравнение, оператор эволюции. Функции, непрерывное и дискретное время. Отображение последования, итерация. Потоки и каскады, сечение и отображение Пуанкаре. Иллюстративный пример
3.2. Систематизация некоторых видов модельных уравнений
3.3. Явные функциональные зависимости
3.4. Линейность и нелинейность
Линейность и нелинейность функций и уравнений. Природа нелинейности. Иллюстрация на маятниках
3.5. Модели – обыкновенные дифференциальные уравнения
Виды решений. Популярный класс модельных уравнений – осцилляторы. «Стандартная форма» обыкновенных дифференциальных уравнений
3.6. Модели – точечные отображения
Введение. Эталонные нелинейные отображения. Место дискретных моделей

3.7. Модели пространственно развитых систем
Решетки связанных отображений. Клеточные автоматы. Дифференциальные уравнения с запаздыванием. Дифференциальные уравнения в частных производных
3.8. Искусственные нейронные сети
Стандартный формальный нейрон. Архитектура и классификации нейронных сетей. Основные свойства и решаемые задачи. Обучение

Глава 4. Стохастические модели эволюции
4.1. Элементы теории случайных процессов
Понятие случайного процесса. Характеристики случайного процесса. Стационарность и эргодичность случайных процессов. Статистические оценки характеристик случайных процессов
4.2. Базовые модели случайных процессов
4.3. Уравнения эволюции распределения вероятностей
4.4. Процессы авторегрессии – скользящего среднего
4.5. Стохастические дифференциальные уравнения и белый шум

Часть II. Моделирование по временным рядам

Глава 5. Постановки задач моделирования по рядам
5.1. Схема процесса построения модели по временному ряду
5.2. Систематизация задач по объему априорной информации
5.3. Особенности задач эмпирического моделирования
Прямые и обратные задачи. Корректно и некорректно поставленные задачи. Плохо обусловленные задачи

Глава 6. Ряды наблюдаемых – источник данных для моделирования
6.1. Наблюдаемые и модельные величины
Наблюдения и измерения. Методы увеличения и уменьшения числа характеризующих величин
6.2. Аналого-цифровые преобразователи
6.3. Временные ряды
Термины. Примеры
6.4. Элементы анализа временных рядов
Визуальный экспресс-анализ. Методы спектрального анализа (фурье-анализ и вейвлеты). Фаза сигнала и разложение на эмпирические моды. Анализ на стационарность/нестационарность. Анализ взаимной зависимости (корреляция, когерентность, синхронизация)
6.5. Экспериментальный пример вместо заключения

Глава 7. Восстановление временных зависимостей
7.1. Оценка параметров
Методы оценивания. Сопоставление методов. Оптимальное оценивание. Устойчивое оценивание. Выводы
7.2. Аппроксимация
Две постановки задачи и термины. Расчет параметров. Выбор размера модели, переобучение и «бритва Оккама». Выбор класса аппроксимирующих функций
7.3. Диагностическая проверка модели
Проверка независимости остатков. Проверка нормальности остатков
7.4. Примеры применения моделей
Прогноз. Численное дифференцирование

Глава 8. Модельные уравнения: оценка параметров
8.1. Оценки параметров и их точность
Динамический шум. Измерительный шум
8.2. Скрытые переменные
Методы. Что дают успехи и какая польза от неудач моделирования?
Глава 9. Модельные уравнения: восстановление нелинейных характеристик
9.1. Процедуры восстановления и особенности задачи
9.2. Оптимизация структуры модели
9.3. Восстановление характеристик нелинейного элемента электрической цепи
9.4. Специфические подходы к выбору структуры модели
Системы под регулярным внешним воздействием. Системы с запаздыванием
Глава 10. Реконструкция уравнений: «черный ящик»
10.1 Реконструкция фазовой траектории.
Теоремы Такенса. Практические алгоритмы реконструкции
10.2. Аппроксимация функций многих переменных
Модельные отображения. Модельные дифференциальные уравнения
10.3. Прогноз с помощью различных видов моделей
10.4. Диагностическая проверка модели
Глава 11. Практические приложения эмпирических моделей
11.1. Сегментация нестационарных временных рядов
11.2. Конфиденциальная передача информации
11.3. Определение характера связи между осцилляторами
11.4. Другие приложения
Заключение
Библиографический список

Зав. редакцией *Н.Н. Левина*
Редакторы *Л.А. Сидорова, Н.Н. Левина*
Обложка художника *Д.В. Соколова*
Оригинал-макет подготовлен
И.А. Пономаревой, Н.Н. Васевой
в пакете L^AT_EX

Подписка на 2006 год осуществляется
по каталогу Агентства Роспечать
«Газеты и журналы», индекс 73498
и Саратовским государственным университетом
по заключению договора между Подписчиком
(юридическим и физическим лицом) и Издателем

Стоимость подписки на 2006 год 450 руб. (6 номеров)
Заявки на заключение договора принимаются
по почте, по телефону редакции, по эл. почте редакции

Адрес редакции: 410012, Саратов, Астраханская, 83
Тел./факс: (845-2) 52-38-64
E-mail:and@nonlin.sgu.ru

Распространение журнала осуществляется
редакцией журнала по адресной системе

Сдано в набор 01.03.06. Подписано к печати 05.04.06
Формат 70x108/16. Бумага «Снегурочка». Печать трафаретная
Усл. печ. л. 14,0(10,0). Уч.-изд. л. 13,0. Тираж 200. Заказ 373

Отпечатано на ризографе GR 3750 редакции журнала

© Редакция журнала
«Известия вузов. ПНД», 2006
© Оформление художника
Д.В. Соколова, 2006