Изв. вузов «ПНД», т. 16, № 2, 2008 УДК 530.182(075)

ДВЕ ТЫСЯЧИ СЕДЬМОЙ ГОД В ДАТАХ НЕЛИНЕЙНОЙ ДИНАМИКИ[1]

Д.И. Трубецков

Код да Винчи и числа Фибоначчи[2]

> В геометрии существует два сокровища – теорема Пифагора и деление отрезка в крайнем и среднем отношении. Первое можно сравнить с ценностью золота, второе можно назвать драгоценным камнем.
>
> *Иоганн Кеплер (цит. по [11])*

Что такое код да Винчи?

Наверняка кто-то из читателей журнала знаком с романом американского писателя Дэна Брауна «Код да Винчи» [12], опубликованном в 2003 году, или смотрел фильм с Томом Хэнксом в главной роли. Роман по праву называют бестселлером XXI века: в первый же день после публикации он был продан в количестве 6000 экземпляров, за первую неделю продажи занял первое место в списке нью-йоркских бестселлеров, а затем стал одним из наиболее продаваемых романов всех времен[3].

Кто же автор романа и почему произведение стало бестселлером?

Американский писатель Дэн Браун родился в 1965 году в Нью-Хэмпшире (США). Его отец был профессором математики, обладателем Президентской награды (Presidential Award), а мать – профессиональным музыкантом. Мальчик рос в среде парадоксов философии в науке и религии. Начинал он взрослую жизнь как автор песен, музыкант и исполнитель. Выпустил несколько своих компакт-дисков. Написанная вместе с женой в 1995 году книга «187 мужчин, от которых следует держаться подальше: путеводитель для романтически фрустрированных женщин» – его первый писательский опыт.

[1]Начало см. в журнале «Известия вузов. ПНД», 2008, т. 16, № 1, с. 33.

[2]В этой части статьи использованы материалы книги А. Стахова, А. Слученковой, И.Щербакова «Код да Винчи и ряды Фибоначчи» [11].

[3]Роман переведен на 42 языка и разошелся 20-миллионным тиражом.

Дэна всегда интересовали философия, история религии, тайные общества, криптография. Результат этих интересов – первый роман, триллер «Цифровая крепость», опубликованный в 1998 году. В 2000 году появился интеллектуальный конспирологический детектив «Ангелы и демоны», в 2001 – триллер «Точка обмана» (Deception Point).

Приключения профессора Роберта Лэнгдона из «Ангелов и демонов» продолжились в романе «Код да Винчи». Чем интересен роман? Почему критики характеризовали его следующим образом:

– книга, которую все купили, но мало кто прочитал;

– роман, от которого все в восторге, но мало кто может объяснить, почему;

– история, которая всех заинтриговала, но мало кто с ней согласился.

Коротко перескажем интригу романа, связанную с историей христианства. В частности, в романе сделана попытка раскрыть тайну Ватикана о некоторых моментах жизни Иисуса Христа. По Брауну, церковь на протяжении веков скрывает от верующих, что Иисус Христос женился на блуднице Марии Магдалине. После распятия беременная Мария скрывается в Галлии, где рожает ребенка от Иисуса. Якобы от этого дитя пошел род французских королей династии Меровингов, потомки которых будто бы живут до сих пор. Хранит эту тайну таинственный Приорат Сиона. Роман Брауна начинается с убийства в Лувре Великого Магистра этого ордена Жака Соньера. Умирающий Магистр оставляет зашифрованное послание своей внучке Софи Неве, которая становится главной героиней романа, а главным героем – Роберт Лэнгдон – гарвардский профессор несуществующей дисциплины «религиозная символика», которой в Гарварде, естественно, нет. Лэнгдон пытается разгадать закодированный смысл фрески Леонардо да Винчи «Тайная вечеря» и раскрыть тайну Священного Грааля.

Общественный резонанс от романа был невиданным. Разразилась скандальная полемика о жизни Иисуса Христа. С резкой критикой романа выступили Ватикан и Русская православная церковь. Они обеспокоены тем, что читатели могут воспринять сюжет романа как священный текст – пересказанную евангельскую историю.

Книга прочитана, но четкого ответа на вопрос – что же такое «код да Винчи» – нет. Браун считает, что секретный код скрыт во фреске «Тайная вечеря», в портрете Моны Лизы и даже в лике на одной из величайших христианских святынь – знаменитой туринской плащанице (якобы это автопортрет Леонардо).

Анализируя одну из глав романа, в которой Роберт Лэнгдон вспоминает лекцию, прочитанную им студентам Гарвардского университета, позволю себе дать иной, вполне определенный ответ на поставленный выше вопрос. Вернемся к тексту романа.

Роберт Лэнгдон связывает убийство с «Витрувийским человеком» Леонардо да Винчи (рис. 1), поскольку именно такую позу принял Жак Соньер перед смертью. Здесь же цифры, написанные кровью, составляют последовательность Фибоначчи, и, наконец, начертан пентакл – символ пифагорейского союза. Лэнгдон размышляет, пытаясь связать воедино известные факты.

«Да Винчи, последовательность Фибоначчи, пентакл ... Неким непостижимым образом их связывала одна из самых фундаментальных концепций в истории искусств, рассмотрению которой он, Лэнгдон, даже посвящал несколько лекций на своем курсе...

Мысленно он перенесся в Гарвард, увидел себя перед аудиторией. Вот он поворачивается к доске, где мелом выведена тема «Символизм в искусстве». И пишет под ней своё любимое число: 1.618».

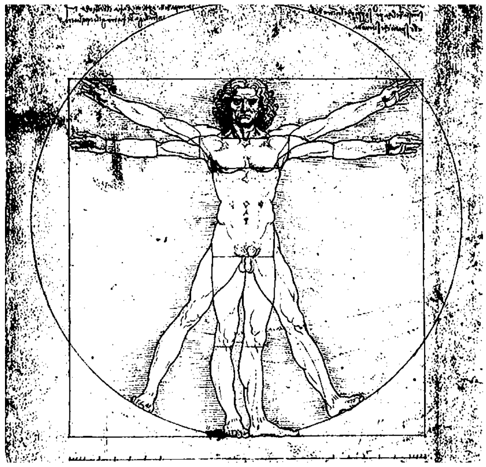


Рис. 1.

Это число называется числом Ф (phi) в честь выдающегося греческого скульптора Фидия (Phidias), который широко использовал его в своих скульптурах. Лэнгдон рассказывает студентам о том, что все растения, животные и даже люди наделены физическими пропорциями, основанными на числе Ф. Раньше считалось, что число Ф было предопределено Творцом Вселенной и посему его называли «Божественной пропорцией». Профессор Лэнгдон приводит студентам массу примеров: соотношение мужских и женских особей в пчелином рое, строение спиралеобразной морской раковины (наутилуса), цветка подсолнечника со зрелыми семенами, расположение листьев на стеблях растений, сегментационные части тел насекомых – все это покорно следует закону «божественной пропорции».

Впервые здесь Лэнгдон говорит о Леонардо да Винчи, демонстрируя студентам знаменитый рисунок обнаженного мужчины в круге – «Витрувийского человека»[4], высоко оценивая роль великого итальянца в развитии теории и практическом использовании «божественной пропорции».

«Никто лучше да Винчи не понимал божественной структуры человеческого тела. Его строения. Да Винчи даже эксгумировал трупы, изучая анатомию и измеряя пропорции костей скелетов. Он первым показал, что тело человека состоит из «строительных блоков», соотношение пропорций которых всегда равно нашему заветному числу».

Действительно, достаточно измерить расстояние от пупа до пола, затем разделить свой рост на это расстояние, и мы получим число Ф. Его же получим, если измерим расстояние от плеча до кончиков пальцев и разделим его на расстояние от локтя до тех же кончиков пальцев. Число Ф дает и отношение расстояния от верхней части бедра до пола к расстоянию от колена до пола.

Далее Лэнгдон в своей лекции демонстрирует студентам слайды с картинами Микеланджело, Альбрехта Дюрера, Леонардо да Винчи и других, доказывая, что все они следовали «божественной пропорции» в построении своих композиций; профессор обращается к архитектуре, к музыкальным произведениям и т.п. Наконец, в конце лекции он рассказывает о пентаграмме или пентакле (рис. 2). Если нарисовать правильный пятиугольник – пентагон (от гр. pentagõnon), и в нем провести все диагонали, то получим пятиконечную звезду, называемую пентаграммой[5] или пентаклем.

[4]Так он был назван в честь Маркуса Витрувия, гениального римского архитектора, который в своих «Десяти книгах об архитектуре» вознес хвалу «божественной пропорции». Леонардо да Винчи сделал рисунок, на котором показано, что размах вытянутых рук человека примерно равен его росту, поэтому фигура человека вписывается в квадрат и круг.

[5]Название пентаграмма происходит от греческого слова pentagrammon (pente – пять, grammon – линия) и означает правильный пятиугольник, на сторонах которого построены равнобедренные треугольники одинаковой высоты.

Точки пересечения диагоналей в пентагоне всегда являются точками «божественной пропорции». При этом образуется новый пентагон, в котором можно провести диагонали, их пересечение даст еще один пентагон и так до бесконечности. Таким образом, соотношение линейных сегментов в пятиконечной звезде всегда равно Ф.

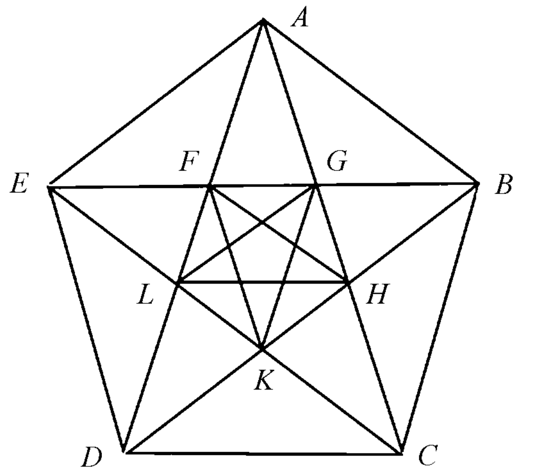


Рис. 2. Пентагон и пентакл – один из самых могущественных образов, считавшийся во многих культурах одновременно божественным и магическим

Пятиконечная звезда символизирует Венеру – богиню любви и красоты, которая занимает свое место и на ночном небе под тем же именем. Каждые восемь лет планета Венера описывает абсолютно правильный пентакл по большому кругу небесной сферы. Именно потрясение древних этим явлением сделало Венеру и ее пентакл символом совершенства и красоты. Современные Олимпийские игры следуют половинному циклу Венеры. Более того, пятиконечная звезда чуть не стала символом олимпиад. Лишь в последний момент ее модифицировали, заменив на пять переплетенных колец.

Считается, что именно Леонардо да Винчи ввел термин «золотое сечение» (aurea sectio) и использовал пропорции этого сечения во многих своих знаменитых произведениях (в частности, в «Тайной вечере» и «Моне Лизе»). Мысль о том, что золотая пропорция – универсальный код природы на всех уровнях ее организации, впервые выразил великий итальянский математик Лука Пачоли в своей книге «О божественной пропорции», которая написана под влиянием Леонардо да Винчи. Своими иллюстрациями Леонардо способствовал широкому признанию книги в научном мире, был ее вдохновителем, а по существу – соавтором.

Вот почему можно высказать гипотезу о том, что введенный Брауном термин «код да Винчи» есть, по мнению древних греков и представителей Ренессанса, универсальный код Природы, названный Леонардо да Винчи Золотым сечением (возможно, в сочетании с пентаклем).

Геометрическое определение Золотого сечения[6]

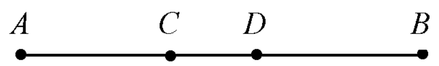


Рис. 3.

Из «Начал» Евклида пришла задача о делении отрезка в крайнем и среднем отношении. В чем суть задачи?

Разделим отрезок AB точкой C в таком отношении, чтобы большая часть отрезка CB так относилась к меньшей части AC, как отрезок AB к своей большей части CB (рис. 3), то есть

$$\frac{AB}{CB} = \frac{CB}{AC}. \tag{1}$$

[6]Материал статьи в виде лекции читался школьникам, поэтому содержит много выкладок; есть даже задачи.

Обозначим пропорцию (1) через x. Тогда с учетом того, что $AB = AC + CB$, перепишем (1) в виде

$$x = \frac{AC + CB}{CB} = 1 + \frac{AC}{CB} = 1 + \frac{1}{\dfrac{CB}{AC}} = 1 + \frac{1}{x}$$

или

$$x^2 = x + 1. \tag{2}$$

Очевидно, что решение (2) должно быть положительным числом, следовательно, решением τ задачи о делении отрезка в крайнем и среднем отношении должно быть

$$\tau = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}.$$

Приближенное значение золотой пропорции

$$\tau = \mathbf{1.618}0339887498948482045868343656381177203...$$

Это удивительное число стало эстетическим каноном древнегреческого искусства и искусства Возрождения. Уже указывалось, что термин «золотое сечение» связывают с именем Леонардо да Винчи. Однако существует мнение, что термин восходит к Клавдию Птолемею – великому античному астроному и географу. Но термин стал популярным и закрепился в науке благодаря Леонардо да Винчи, то есть он стал поистине «кодом да Винчи».

Уравнение (2) часто называют *уравнением золотой пропорции*. Заметим, что на отрезке AB существует еще одна точка, D (см. рис. 3), которая также делит его золотым сечением

$$\frac{AB}{AD} = \frac{AD}{DB} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}.$$

Из «Начал» Евклида известен следующий способ построения золотого сечения с использованием циркуля и линейки (рис. 4). Построим прямоугольный треугольник с катетами $AB = 1$ и $AC = 0.5$. По теореме Пифагора

$$CB = \sqrt{1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

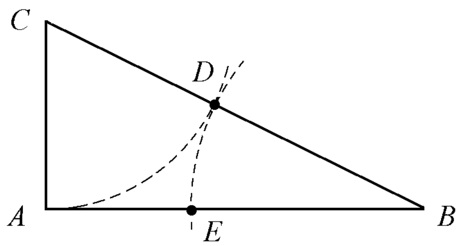


Рис. 4.

Проведя дугу AD с центром в точке C до ее пересечения с отрезком CB в точке D, получим

$$BD = CB - CD = \frac{\sqrt{5} - 1}{2} = \tau^{-1}.$$

Аналогично

$$\frac{AB}{EB} = \frac{EB}{AE} = \tau \quad \text{или} \quad AB = AE + EB, \text{ но}$$

$AB = 1$, $AE = EB^2$, поэтому

$$1 = \tau^{-2} + \tau^{-1}$$

или

$$\tau^2 = \tau + 1.$$

Таким образом, хорошо известный в древнем мире прямоугольный треугольник с отношением катетов 1:2 мог послужить основой для открытия теоремы квадратов (теоремы Пифагора), золотого сечения и несоизмеримых отрезков[7] – трех великих математических открытий, приписываемых Пифагору.

Замечательные тождества для золотой пропорции

Если корень τ подставить в уравнение (2), то получим

$$\tau^2 = \tau + 1. \tag{3}$$

Убедитесь сами в справедливости (3), подставив в него $\tau = (1 + \sqrt{5})/2$. Если члены тождества (3) разделить на τ, то имеем

$$\tau = 1 + \frac{1}{\tau} \tag{4}$$

или

$$\tau - 1 = \frac{1}{\tau}. \tag{5}$$

Как получить τ^{-1}? Из (5) следует, что надо вычесть 1 из золотой пропорции

$$\frac{1 + \sqrt{5}}{2} - 1 = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}.$$

Давайте теперь умножим (3) на τ и объединим полученное с (4). Тогда

$$\tau^3 = \tau^2 + \tau, \tag{6}$$

$$\tau = 1 + \tau^{-1}. \tag{7}$$

Будем далее (6) умножать на τ, а (7) делить на τ. На n-м этапе процедуры получим

$$\tau^n = \tau^{n-1} + \tau^{n-2}, \tag{8}$$

где n пробегает все значения в пределах от $+\infty$ до $-\infty$, то есть $n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$

Итак, *любая целая степень золотой пропорции равна сумме двух предыдущих*. Пример:

$$\tau^{100} = \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)^{100} = \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)^{99} + \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)^{98}.$$

Трудно, на первый взгляд, себе представить, что это так, но это так.

[7] Если отношение отрезков не может быть выражено в виде отношения двух рациональных чисел, то такие отрезки называются несоизмеримыми (пример – отношение диагонали квадрата к его стороне, равное $\sqrt{2}$).

фото

фото

Золотая геометрическая прогрессия

Рассмотрим последовательность степеней золотой пропорции, то есть

$$\Big\{\ldots,\ \tau^{-n},\ \tau^{-(n-1)},\ \ldots,\ \tau^{-2},\ \tau^{-1},\ \tau^{0}=1,\ \tau^{1},\ \tau^{2},\ \ldots,\ \tau^{n-1},\ \tau^{n},\ \ldots\Big\}. \qquad (9)$$

Последовательность (9) – геометрическая прогрессия со знаменателем τ, то есть

$$\tau^{n}=\tau\times\tau^{n-1}.$$

С другой стороны, в соответствии с (8) каждое число ряда (9) есть сумма двух предыдущих.

Заметим, что свойство (8) характерно только для геометрической прогрессии со знаменателем $\tau=(1+\sqrt{5})/2$, и такая прогрессия называется *золотой прогрессией.*

Представление золотой пропорции в виде цепной дроби

Если в правую часть тождества (4) вместо τ подставить его значение, выражаемое тем же (4), то мы получим «многоэтажную дробь»

$$\tau=1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\tau}}.$$

Если продолжить такую подстановку в правой части бесконечное число раз, то в результате получим непрерывную цепную дробь

$$\tau=1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\ldots}}}}=\frac{1}{1+\tau}. \qquad (10)$$

Подходящие дроби для τ получаются как последовательные отношения чисел Фибоначчи

$$\tau_{m}=\frac{F_{m-1}}{F_{m}},$$

$F_0=1$, $F_1=1$, $F_2=2$, $F_3=3$, $F_4=5$, ..., $F_{m+1}=F_m+F_{m-1}$.

Об этих числах разговор впереди.

Золотое сечение и приведенное выше представление используется в теории хаоса при объяснении того, как квазипериодическое движение с двумя несоизмеримыми частотами на торе становится хаотическим при добавлении нелинейного возмущения.

Мы вернемся и к этому вопросу.

Уравнения золотой пропорции *n*-й степени

Напомню, что в общем виде квадратное уравнение имеет вид

$$ax^{2}+bx+c=0, \qquad (11)$$

где $a \neq 0$. Известно, что

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \tag{12}$$

а детерминант уравнения

$$D = b^2 - 4ac. \tag{13}$$

Уравнение (2) есть уравнение типа (11), значения коэффициентов которого

$$a = 1, \quad b = -1, \quad c = -1, \tag{14}$$

детерминант $D = 5$, и корни

$$x_1 = \tau = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}, \tag{15}$$

$$x_2 = -\frac{1}{\tau} = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}. \tag{16}$$

Существуют ли алгебраические уравнения более высоких степеней, корнем которых является τ? Умножим обе части уравнения (2) на x

$$x^3 = x^2 + x. \tag{17}$$

Выразим из (2) $x = x^2 - 1$ и подставим в (17). Имеем

$$x^3 = 2x^2 - 1. \tag{18}$$

С другой стороны, если в (17) подставить $x^2 = 1 + x$, то получим еще одно уравнение

$$x^3 = 2x + 1. \tag{19}$$

Подставим $x = \tau = (1 + \sqrt{5})/2$ в (18)

$$\tau^3 = \tau^2 + \tau = \frac{3 + \sqrt{5}}{2} + \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = \frac{4 + 2\sqrt{5}}{2}, \quad 2\tau^2 - 1 = 2\frac{3 + \sqrt{5}}{2} - 1 = \frac{4 + 2\sqrt{5}}{2}.$$

Таким образом, уравнение (18) является *золотым*.

Задача. Докажите сами, что (19) тоже золотое.

Умножим теперь (17) на x и получим

$$x^4 = x^3 + x^2.$$

Воспользуемся уравнением (2) для $x^2 = x + 1$ и уравнениями (18) и (19) для x^3. Находим

$$x^4 = 2x^2 - 1 + x^2, x^4 = 3x^2 - 1, \tag{20}$$

$$x^4 = 3x + 2. \tag{21}$$

Замечательно, как показал Ричард Фейнман, уравнение (21) описывает энергетическое состояние молекулы бутадиена – ценного химического вещества, используемого при производстве каучука. Он восхищенно пишет:

«Какие чудеса существуют в математике! Согласно моей теории, золотая пропорция древних греков дает минимальное энергетическое состояние молекулы бутадиена» (цитируется по [11]).

Чтобы получить уравнения более высоких степеней, нужно использовать равенство $x^n = x^{n-1} + x^{n-2}$.

Задача. Выведите в качестве примера сами следующие золотые уравнения высших степеней:

$$x^5 = 5x^2 - 2 = 5x + 3,$$
$$x^6 = 8x^2 - 3 = 8x + 5,$$
$$x^7 = 13x^2 - 5 = 13x + 8.$$

Анализ показывает, что числовые коэффициенты в правой части этих уравнений есть не что иное, как знаменитые числа Фибоначчи, о которых уже упоминалось.

В общем случае алгебраические уравнения золотой пропорции n-й степени выражаются в следующем виде:

$$x^n = F_n x^2 - F_{n-2} = F_n x + F_{n-1}, \tag{22}$$

где F_n, F_{n-1}, F_{n-2} – числа Фибоначчи 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, ...

Итак, мы нашли замечательное тождество, связывающее золотую пропорцию с числами Фибоначчи, если $x = \tau = (1 + \sqrt{5})/2$:

$$\tau^n = F_n \tau^2 - F_{n-2} = F_n \tau + F_{n-1} \tag{23}$$

Дальше мы узнаем, что, например, 18, 19 и 20-е числа Фибоначчи суть

$$F_{18} = 2584, \quad F_{19} = 4181, \quad F_{20} = 6765.$$

Тогда

$$x^{20} = 6765x^2 - 2584,$$
$$x^{20} = 6765x + 4181.$$

Кажется непостижимым, что корнем этих уравнений также является золотая пропорция.

Золотое сечение в пирамиде Хеопса, в греческой культуре и в искусстве эпохи Возрождения

Рассмотрим прямоугольный треугольник ABC (рис. 5), в котором отношение катетов $AC/CB = \sqrt{\tau}$. Обозначим его стороны через x, y, z. Тогда $y/x = \sqrt{\tau}$, $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, и при $x = 1$, $y = \sqrt{\tau}$

$$z = \sqrt{1 + \tau} = \sqrt{\tau^2} = \tau.$$

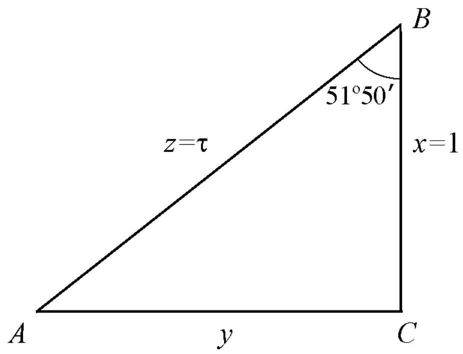


Рис. 5. «Золотой» треугольник

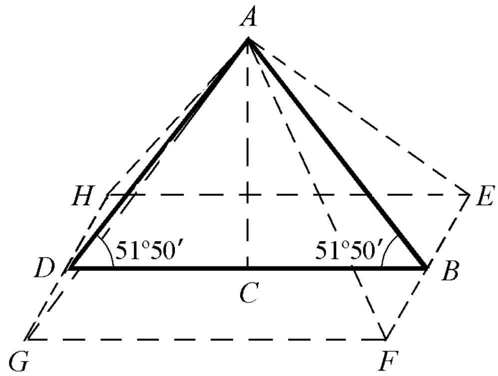


Рис. 6. Схематичное изображение пирамиды Хеопса. $GF = L$, $AC = H$, $\operatorname{tg}\alpha = AC/CB = H/(L/2) = 2H/L$

Прямоугольный треугольник, в котором стороны относятся как $\tau : \sqrt{\tau} : 1$ называется *золотым треугольником*.

Оказалось, что он является главной геометрической идеей пирамиды Хеопса (рис. 6).

В 1837 году (170 лет назад) английский полковник Г. Вайз измерил угол α наклона граней пирамиды Хеопса: он оказался равным $51°51'$ (эта величина и сегодня признается большинством исследователей). Обычно считают, что длина стороны основания $L = 233.16$ м, высота пирамиды $H = 146.6$ м (из-за осадки конструкции высота пирамиды уменьшилась). Строго говоря, пирамида Хеопса – усеченная. Сегодня ее верхняя площадка имеет размер 10×10 м, а столетие назад она была 6×6 м. Скорее всего, вершину пирамиды разобрали, и потому опять же уменьшилась ее высота. Какова же была ее первоначальная высота? Вернемся к измерению Г. Вайза. Исследователей ждал большой сюрприз: значение $\operatorname{tg}(51°51') = 1.27306$ оказалось очень близко к значению $\sqrt{\tau} = 1.272$! Если же взять $\alpha = 51°50'$, то $\operatorname{tg}\alpha = 1.272 = \sqrt{\tau}$. В 1840 году все тот же Вайз повторил свои измерения и получил $\alpha = 51°50'$! Тогда исследователи высказали гипотезу: в основу треугольника ABC пирамиды Хеопса было положено отношение $AC/BC = \sqrt{\tau} = 1.272$ и

$$H = \frac{L}{2}\sqrt{\tau} = 148.28 \text{ м}.$$

Задача. Докажите сами главную геометрическую тайну пирамиды Хеопса: отношение внешней суммарной площади пирамиды к площади основания равно золотой пропорции. Примите $CB = 1$.

Измерения пирамиды Хефрена показали, что угол боковых граней в ней равен $53°12'$, что отвечает отношению катетов прямоугольного треугольника 4:3. Плутарх писал, что египтяне сравнивали природу Вселенной со «священным» или египетским треугольником; они уподобляли вертикальный катет мужу, основание – жене, а гипотенузу – тому, что рождается от обоих.

Может быть, гениальные создатели египетских пирамид стремились поразить далеких потомков глубиной своих знаний, увековечив золотой прямоугольный треугольник и теорему Пифагора[8] задолго до ее открытия (для треугольника с отношением сторон 3:4:5 получается $3^2+4^2=5^2$)? Кстати, теорема Пифагора была известна и вавилонянам, и китайцам.

Конечно, идея гармонии, основанной на золотом сечении, не могла не найти отражение в греческой культуре. Достаточно упомянуть, что на протяжении пятнадцати лет правления Перикла в Афинах сооружали необыкновенные по красоте храмы, алтари, скульптуры. Всеми работами руководил выдающийся греческий скульптор Фидий. Мы уже упоминали, что в честь него золотое сечение часто называют числом Ф.

В 447 году до н. э. начались работы по строительству храма Афины – Парфенона, которые продолжались до 434 года до н.э. Исследователи считают, что главной причиной красоты Парфенона является исключительная соразмерность его частей, основанная на золотом сечении. Связаны с золотым сечением и знаменитые скульптуры – статуя Дорифора (скульптуру назвали «Канон» как наилучший пример для анализа пропорций идеального человеческого тела, установленных античными греческими скульпторами) и Венера Милосская – статуя богини Афродиты.

Идея «божественной гармонии» была доминантной в эпоху Ренессанса. Церковь с большой заинтересованностью относилась к концепции гармонии, поскольку, согласно христианской доктрине, Вселенная была творением Бога и беспрекословно подчинялась его воле. При этом христианский Бог руководствовался при создании Мира математическими принципами. Посему наука и искусство эпохи Возрождения приобрели форму поиска этого божественного математического плана. По мнению ряда историков тесное слияние религиозной доктрины о Боге как творце Вселенной и античной идеи о числовой гармонии Мира и стало главной причиной по существу флуктуационного подъема культуры в эпоху Возрождения.

Вот как Иоганн Кеплер формулирует цель науки того времени: «Главной целью всех исследований внешнего мира должно быть открытие рационального порядка и гармонии, которые Бог ниспослал миру и открыл нам на языке математики» (цит. по [11]).

В живописи преобладали библейские сюжеты. Знаменитое «Святое семейство» Микеланджело основано на использовании в композиции пентакла, «Распятие» Рафаэля Санти содержит золотой равнобедренный треугольник. Можно еще раз упомянуть и «Витрувийского человека» Леонардо да Винчи. И, наконец, «Мона Лиза». Исследователи обнаружили, что композиционное построение основано на двух золотых треугольниках, повернутых друг к другу основаниями. Анализ картины показывает, что зрачок левого глаза, через который проходит вертикальная ось полотна, находится на пересечении биссектрис верхнего золотого треугольника, которые, с одной стороны, делят пополам углы золотого треугольника, а с другой стороны, в точках пересечения с боковыми сторонами золотого треугольника делят их в пропорции золотого сечения. Таким образом, великий Леонардо использовал в картине и принцип симметрии, и золотое сечение – код да Винчи.

Несомненно, что еще одним ярким представителем эпохи Возрождения был

[8]Пифагор долгое время пробыл в Египте и получил там ранг «посвященного» в тайны египетской науки. Его имя состоит из двух частей: «прозревающий гармонию», ибо пифии в Древней Греции были жрицы-прорицательницы, а Гор в Древнем Египте олицетворял гармонию. Так древнеегипетские жрецы, передавая сокровенные знания представителю набирающей силу цивилизации, символически скрепляли в одном лице союз мужского и женского начал – оплот гармонии.

великий итальянский математик Лука Пачоли. Уже упоминалось, что под непосредственным влиянием Леонардо он написал книгу Divine Proportione («Божественная пропорция») – первое математическое сочинение, целиком посвященное золотому сечению. Книга состоит из трех частей: в первой излагаются свойства золотого сечения, во второй описаны правильные многогранники, в третьей – приложения золотого сечения в архитектуре. Пачоли вывел двенадцать различных свойств золотой пропорции. Он считает ее универсальным отношением, выражающим в природе и искусстве совершенство красоты, и называет «божественной». Леонардо да Винчи принадлежит не только идея книги, но и 60 великолепных иллюстраций, ценных и сегодня. Поистине, он – соавтор книги Пачоли.

О золотом сечении написано много и по-разному. Тем, кто интересуется архитектурой, можно порекомендовать книгу русского архитектора профессора Г.Д. Гримма «Пропорциональность в архитектуре» [13], изданную в 1935 году.

Исследователи искусства XIX и XX веков находят золотое сечение и в живописи, и в скульптуре, и в архитектуре, и в музыке. Но скорее всего, авторы этих творений в отличие от древних греков и титанов Ренессанса, если и использовали золотое сечение, то неосознанно.

Ряды Фибоначчи

Современные историки математики называют Фибоначчи «блестящим метеором, промелькнувшим на темном фоне западно-европейского средневековья». Фибоначчи написал несколько математических книг, наиболее известная из которых «Liber abaci» – своеобразная математическая энциклопедия эпохи Средневековья. Наиболее известной из сформулированных Фибоначчи задач является «задача о размножении кроликов», которая привела к открытию числовой последовательности 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, ..., названной впоследствии рядом Фибоначчи. Фибоначчи получил образование в арабских учебных заведениях, и его историческая роль в том, что он своими математическими книгами передавал математические знания арабов в западно-европейскую науку. Его вклад в развитие математики более существен, чем задача о кроликах.

В чем же суть задачи?

Пусть в отгороженном месте в первый день января имеется пара кроликов (самка и самец). Эта пара кроликов производит новую пару кроликов в первый день февраля, а потом в первый день каждого последующего месяца. Каждая новорожденная пара кроликов становится зрелой через месяц, а затем через месяц дает жизнь новой паре. Сколько пар кроликов будет в отгороженном месте через 12 месяцев?

Обозначим через A пару зрелых кроликов, а через B – пару новорожденных. Тогда процесс размножения может быть описан с помощью двух «переходов», соответствующих ежемесячным превращениям кроликов

$$A \to AB, \tag{24}$$

$$B \to A. \tag{25}$$

Весь процесс можно представить таблицей (ограничимся полугодом для рассмотрения).

Таблица

Дата	Пары кроликов	A	B	A+B
1 января	A	1	0	1
1 февраля	AB	1	1	2
1 марта	ABA	2	1	3
1 апреля	ABAAB	3	2	5
1 мая	ABAABABA	5	3	8
1 июня	ABAABABAABAAB	8	5	13

Из таблицы следует, что каждый член последовательности равен сумме двух предыдущих, поэтому общее правило может быть записано в виде

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \tag{26}$$

Такая формула называется рекуррентной формулой (от лат. recurere – возвращаться).

Значения числовой последовательности, порождаемой (26), зависят от начальных значений последовательности $F_1,\ F_2$. Если $F_1 = F_2 = 1$ для A-последовательности, то (26) дает такую числовую последовательность

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, ... \tag{27}$$

Для B-чисел $F_1 = 0$, $F_2 = 1$, и тогда имеем

$$0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, ... \tag{28}$$

Для $(\mathrm{A} + \mathrm{B})$ $F_1 = 1$, $F_2 = 2$, следовательно

$$1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, ... \tag{29}$$

Обычно под числами Фибоначчи понимают последовательность (27).

На самом деле кролики размножаются еще интенсивнее, чем предположил Фибоначчи в задаче. Пример – национальная трагедия Австралии, начавшаяся с того, что в 1837 году один из фермеров создал ферму всего из 24 кроликов. Они расплодились, вырвались на свободу и чуть ли не уничтожили всю зелень континента. Борьба с ними длится уже 160 лет с переменным успехом.

Заметим, что размножение пчел также осуществляется по принципу Фибоначчи.

Вариации на тему Фибоначчи

В замечательной книге венгерского математика Альфреда Реньи «Трилогия о математике» [14] есть статья «Вариации на тему Фибоначчи» (с. 326). Начинается она так.

«Вариации на избранную тему – жанр хорошо известный в музыкальной литературе. Большим любителем этого жанра был Моцарт... Отличительная особенность произведений вариационного жанра заключается в том, что они в большинстве случаев начинаются с несложной основной темы, претерпевающей в дальнейшем значительные изменения по темпу, настроению, характеру... Но сколь бы причудливыми ни были вариации, у слушателя непрерывно должно создаваться впечатление, будто каждая из них является естественным развитием основной темы, содержится в ней в зародышевой форме, и композитору остается лишь услышать и подробно разработать их. Последуем примеру музыкальной литературы и, выбрав простую математическую тему (последовательность, образуемую так называемыми числами Фибоначчи), рассмотрим ее вместе с многочисленными вариациями».

У Реньи таких вариаций 15. Рассмотрим некоторые из них.

• Суммы последовательных чисел Фибоначчи.

Вычислим сумму из n подряд идущих чисел Фибоначчи. Начнем с простейших сумм:

$$\begin{gathered}1+1=\mathbf{3}-1;\\ 1+1+2=\mathbf{5}-1;\\ 1+1+2+3=\mathbf{8}-1;\\ 1+1+2+3+5=\mathbf{13}-1.\end{gathered} \tag{30}$$

Выделенные цифры также составляют последовательность ряда Фибоначчи. Поэтому

$$F_1+F_2+...+F_n=F_{n+2}-1. \tag{31}$$

• А теперь рассмотрим сумму из n подряд идущих чисел Фибоначчи с нечетными индексами $1, 3, 5, ..., 2n-1, ...$. Опять начнем с простейших сумм

$$\begin{gathered}1+2=\mathbf{3};\\ 1+2+5=\mathbf{8};\\ 1+2+5+13=\mathbf{21};\\ 1+2+5+13+34=\mathbf{55}.\end{gathered} \tag{32}$$

Видно, что сумма из n подряд идущих чисел Фибоначчи с нечетными индексами всегда равна некоторому числу Фибоначчи.

$$F_1+F_3+F_5+...+F_{2n-1}=F_{2n}. \tag{33}$$

Задача. Докажите сами, что:

1. $F_2+F_4+F_6+\ldots+F_{2n}=F_{2n+1}-1.$
2. $F_1^2+F_2^2+\ldots+F_n^2=F_nF_{n+1}.$
3. $F_n^2+F_{n+1}^2=F_{2n+1}.$

• Связь с золотой пропорцией.

Рассмотрим числовую последовательность, образованную из отношений соседних чисел Фибоначчи, то есть:

$$\begin{gathered}\frac{1}{1},\ \frac{2}{1},\ \frac{3}{2},\ \frac{5}{3},\ \frac{8}{5},\ \frac{13}{8},\ \frac{21}{13},\ \frac{34}{21}...,\\ \frac{1}{1}=1,\ \frac{2}{1}=2,\ \frac{3}{2}=1.5,\ \frac{5}{3}=1.66,\ \frac{8}{5}=1.6,\ \frac{13}{8}=1.625,\ \frac{21}{13}=1.61538...\end{gathered} \tag{34}$$

К чему стремится последовательность (34), то есть отношение двух соседних чисел Фибоначчи F_n/F_{n-1}, если $n \to \infty$?

Для ответа вернемся к представлению золотой пропорции в виде непрерывной дроби (10). Дроби (34) являются последовательными приближениями непрерывной дроби (10)

$\frac{1}{1} = 1$ (первое приближение);

$\frac{2}{1} = 1 + \frac{1}{1}$ (второе приближение);

$\frac{3}{2} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1}}$ (третье приближение);

$\frac{5}{3} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1}}}$ (четвертое приближение).

Устремляя процесс в бесконечность, мы получим

$$\lim_{n \to \infty} \frac{F_n}{F_{n-1}} = \tau = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}.$$

Считается, что первым, кто установил эту связь, был Кеплер.

• Разберитесь сами в четвертой вариации Реньи.

Задача. Дома в новом поселке требуется окрасить так, чтобы каждый этаж оказался выкрашенным либо в белый, либо в синий цвет. Из эстетических соображений никакие два соседних этажа не должны быть окрашены в синий цвет. Сколькими способами можно окрасить дома в поселке с учетом указанных требований, если число этажей задано?

Вместо заключения

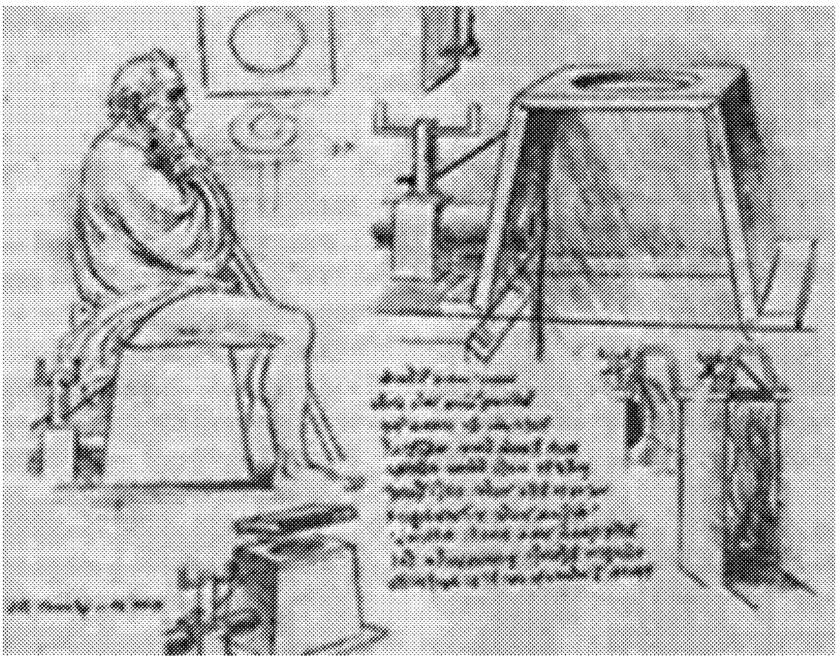
Эпиграфом к первой части повествования о Леонардо да Винчи взяты строчки из книги Аталая Бюлента [1]. Закончим изложение еще одним отрывком из этой книги. «Числа Фибоначчи дают представление о динамической симметрии, золотом сечении или «божественной пропорции», о которых он сам, возможно, не подозревал. Через триста лет после Фибоначчи Леонардо да Винчи иллюстрировал книгу, которая называлась «О божественной пропорции». Но наука и искусство имеют гораздо больше точек соприкосновения, чем открытия Фибоначчи и творчество Леонардо: эта связь проявляется в элементах архитектуры, астрономии, биологии, химии, геологии, техники, математики, философии, физики – во всем, что входило в круг интересов Леонардо да Винчи. Для него это были ветви одного дерева, часть общей структуры Вселенной» [1, с. 28].

P.S. Когда мои материалы о Леонардо да Винчи были уже сданы в редакцию, профессор Н.М. Рыскин любезно указал мне на книгу Мартина Гарднера «Путешествие во времени». Перевод с английского Ю.А. Данилова. М.: Мир, 1991, 341 с., в которой приведены удивительные сведения еще об одном изобретении великого флорентийца. Поскольку пересказывать Гарднера бессмысленно, я посчитал целесообразным перепечатать в журнале соответствующий отрывок из книги. Думаю, что он будет интересен читателям журнала.

«Когда в 1974 году компания «Макгроу-Хилл» выпустила факсимильное издание двух считавшихся утерянными книг с рабочими записями и набросками Леонардо да Винчи, новые материалы привлекли всеобщее внимание. Достоянием широкой публики стали такие ранее не известные изобретения да Винчи, как шарикоподшипники с коническим шипом (считалось, что такая фиксация вращающейся оси впервые была применена в 20-е годы нашего столетия в гироскопах Сперри), червячный винт (изобретение которого приписывалось одному часовщику, жившему в XVIII в.) и многие другие технические устройства, в том числе двухколесный велосипед с цепной передачей.

Если учесть необычайную рекламу, выпавшую на долю двухтомного издания «Макгроу-Хилл», то трудно понять, почему широкой публике ничего не было сообщено об открытии одного рисунка, которого недоставало в первой книге заметок. Эта книга, известная как «Мадридский кодекс I» (она была найдена десятью годами ранее в Национальной библиотеке в Мадриде), содержит систематическое (на 382 страницах) изложение теоретической и прикладной механики (см. статью Л. Рети «Леонардо о подшипниках и шестернях» <Reti L. Leonardo on Bearings and Gears. – Scientific American, February 1971>]). Относительно содержания утерянной страницы строились различные домыслы. А. Макарони из Католического университета в Милане высказал предположение, что, поскольку недостающая страница должна была находиться в разделе, посвященном гидравлическим устройствам, на ней скорее всего должны быть изображены какие-то типы смывного механизма.

Недостающую страницу обнаружил Р. Пац-и-Бикуспид, заведующий отделом рукописей Мадридской библиотеки. Он же нашел и те две рабочие книги Леонардо да Винчи, о которых мы уже упоминали. Недостающая страница была вырвана из рукописи и вклеена в трактат XV в. о приготовлении благовоний.



На рис<унке> воспроизведена фотокопия найденной страницы. Как нетрудно видеть, профессор Макарони был прав в своих предположениях, что именно Леонардо да Винчи является изобретателем туалета с клапанным смывным устройством.

Давно известно, что Леонардо да Винчи изобрел складное сиденье в туалете и предложил конструкцию ватерклозета с непрерывной подачей воды по каналам внутри стен, вентиляционной шахтой с выходом на крышу и противовесом, обеспечивающим плотное закрывание двери. Однако изобретение унитаза со смывным клапанным механизмом ранее приписывалось крестнику королевы Елизаветы сэру Дж. Харрингтону, который весьма занимательно описал свое изобретение в книге «Метаморфоза Аякса» (1596) – клозетной сатире, за что он был лишен права появляться при дворе. Хотя его «Аякс» действительно был построен в Келстоне неподалеку от Бата, широкое распространение он получил лишь через двести лет.

Первый английский патент на туалет с клапанным смывным устройством был выдан в 1775 г. часовых дел мастеру А. Каммингсу. Современный механизм с шаровым поплавком, автоматически отмеряющим очередную порцию воды в бачке после очередного смыва, восходит к патентам, выданным в начале XIX в. на имя англичанина Т. Краппера, занимавшегося изготовлением водопроводной фурнитуры. Более подробно об истории сантехники см. <Wright L. Clean and Decent: the Fascinate Story of the Bathroom and Water Closet. – Routledge and Kegan Paul, 1960; Reyburn W. Flushed with Pride: The Story of Thomas Crapper. – Prentice-Hall, 1971>.

Дополнение. Глава, которую вы только что прочитали, была впервые опубликована в апрельском номере Scientific American за 1975 г. Это – первоапрельская шутка. Мне казалось, что всерьез ее никто не воспримет: слишком много в ней абсурдных идей и ссылок на иностранные фамилии. Однако после ее публикации я получил более тысячи писем от читателей, не понявших, что их просто разыграли.

<...> «Рисунок Леонардо да Винчи» выполнен в действительности Антони Равиелли, художником-графиком, известным своими иллюстрациями к книгам по спорту, физике и математике. Один из ранних вариантов этого рисунка навел меня на мысль о первоапрельской колонке. Много лет назад приятель Равиелли заключил шуточное пари с одним писателем о том, что именно Леонардо да Винчи изобрел клапанное сливное устройство, используемое в современном туалете. По настоянию приятеля Равиелли выполнил «рисунок Леонардо» коричневой тушью на тонированной под старину бумаге. Рисунок Равиелли «контрабандой» попал в Нью-Йоркскую публичную библиотеку, получил свой регистрационный номер и был заключен в официальный библиотечный конверт. Увидев все эти атрибуты, удостоверявшие «подлинность» рисунка Леонардо да Винчи с изображением смывного механизма, писатель счел себя проигравшим и уплатил пари.

Аугусто Макарони – шаржированный вариант имени Аугусто Маринони, специалиста по Леонардо да Винчи из Католического университета в Милане, а Рамон Пац-и-Бикуспид – шутливый «псевдоним» Рамона Пац-и-Ремолара, которому действительно удалось найти две недостававшие книги с записями Леонардо да Винчи. Приведенные мной даты из истории туалета – подлинные, включая ссылку на Т. Краппера. Не выдумана и книга У. Рейборна <Reyburn W. Flushed with Pride: The Story of Thomas Crapper. – Prentice-Hall, 1971> – она действительно существует.

Долгие годы я считал книгу Рейборна остроумным розыгрышем на темы, связанные с историей сантехники, пока Х.Л. Менкен не написал свою псевдоисторию современной ванной. Я исходил из двух соображений. (1) В книге Рейборна утверждалось, что выражения «to take crap» – оправляться (в уборной), «crap» – чепуха, безделица происходят от фамилии Краппера, хотя сленговые выражения «crap» и «crapping case» указаны в «Словаре сленга», изданном в Лондоне еще в 1873 г. (2) Рейборн написал небольшую книгу под названием «Выше бюст: история возвышения Отто Тетцлинга и развития бюстгальтера». Выяснилось, однако, что и Томас Краппер, и Отто Титцлинг были реальными людьми и ни одна из книг Рейборна не является чистым розыгрышем».

Библиографический список

1. *Бюлент А.* Математика и «Мона Лиза». Искусство и наука в творчестве Леонардо да Винчи. М.: Техносфера, 2007. 304 с.
2. *Данилов Ю.А.* Причудливый мир науки. Саратов: Изд-во ГосУНЦ «Колледж», 2004. 228 с.
3. *Баткин Л.М.* Леонардо да Винчи и особенности ренессансного творческого мышления. М.: Искусство, 1999. 415 с.
4. *Джорджо Вазари.* Леонардо да Винчи, живописец и скульптор флорентийский (Из кн. Жизнеописания наиболее знаменитых живописцев, ваятелей и зодчих) // Леонардо да Винчи. Суждения о науке и искусстве. СПб.: Издательский дом «Азбука – классика», 2006. 224 с.
5. *Проф. Зигмундъ Фрейдъ.* Леонардо да Винчи. М.: Типография Торг. д. «Мысль», Петровка, д. 17, 1912. 119 с.
6. Леонардо да Винчи. Избранные произведения: В 2 т. СПб.: Издательский дом «Нева»; М.: Изд-во «Олма-Пресс», 2000.
7. Леонардо да Винчи. Избранные естественно-научные произведения. М.: Изд-во Академии наук СССР, 1955. 1207 с.
8. *Зубов В.П.* Леонардо да Винчи.М.: Техносфера, 1962.
9. *Тайш Джессика, Барр Трейси.* Леонардо да Винчи для «чайников». М.: Издательский дом «Вильямс», 2006. 304 с.
10. *Мэттьюз Кэйтлин.* Таро да Винчи. М.: ООО ТД Изд-во «Мир книги», 2006. 144 с.
11. *Стахов А., Слученкова А., Щербаков И.* Код да Винчи и ряды Фибоначчи. СПб.: Издательский дом «Питер», 2007. 320 с.
12. *Браун Д.* Код да Винчи. М.: «АСТ», 2004.
13. *Гримм Г.Д.* Пропорциональность в архитектуре. Л.: Издательство ОНТИ, 1935.
14. *Реньи А.* Трилогия о математике. М.: Мир, 1980. 376 с.

Саратовский государственный университет *Поступила в редакцию 14.01.2008*

Трубецков Дмитрий Иванович – родился в Саратове (1938). Окончил физический факультет Саратовского государственного университета (1960). Защитил диссертации на соискание ученой степени кандидата (1965) и доктора физико-математических наук в СГУ (1978) в области радиофизики. Заведующий кафедрой электроники, колебаний и волн факультета нелинейных процессов СГУ, профессор, член-корреспондент Российской академии наук, заслуженный деятель науки РФ, лауреат премии Президента РФ в области образования. Научный руководитель Лицея прикладных наук и факультета нелинейных процессов СГУ. Область научных интересов: вакуумная электроника и микроэлектроника сверхвысоких частот, теория колебаний и волн, нелинейная динамика, история науки. Автор более двадцати учебных пособий и монографий, а также более двухсот статей в периодической печати.