

## ДВЕ ТЫСЯЧИ СЕДЬМОЙ ГОД В ДАТАХ НЕЛИНЕЙНОЙ ДИНАМИКИ\*

*Д.И. Трубецков*

### Леонардо да Винчи и нелинейная наука

Турбулентные завихрения воды, описанные в дневниках, находят свое воплощение в золотых локонах художественных образов. Плавные изгибы спирали, полученной им путем математических размышлений, подозрительно напоминают позы моделей на его портретах. Леонардо писал о живописи так: «Она охватывает все формы, существующие и еще не найденные в природе». Твердые тела Платона, формировавшие его архитектурные зарисовки, видны в набросках разных кодексов и формализованы в книге «О божественной пропорции...» Он исследует птичий полет как натуралист, инженер по аэродинамике и художник, анимируя движение крыльев серией рисунков, но мечтает уже о полете человека. Винтовая спираль, ранее призванная придать динамизм художественным образам, теперь воплощается у Леонардо в воздушный винт, обеспечивающий взлет вертолета. Поглощенный проектом пилотируемого полета, он исследовал свободное падение, гравитацию и фундаментальные вопросы физики. Достигнув высокой чистоты эксперимента, он убедился в постоянстве ускорения свободного падения вне зависимости от массы падающего тела. Работы Леонардо столь целостны благодаря его синергетическому подходу, полному симбиозу различных областей знаний.

*Аталай Бюлент [1]*

### Течения, струи, турбулентность

Уже указывалось, что, намечая планы трудов той или иной области естествознания, Леонардо да Винчи перечислял будущие книги, которых так и не было. Самое большое количество книг он перечисляет в связи с гидромеханикой и связанными с ней проблемами. Причем это не столько книги, сколько разные вопросы, случаи, проблемы, расположенные без строгой системы. Нечто подобное получается, когда он хочет собрать термины о воде, иногда повторяясь. Опять перед нами воплощенная варьета – разнообразие рассматриваемого удивляет и подавляет: здесь

\*Начало см. в журнале «Известия вузов. ПНД», т. 16, № 1, с.33; № 2, с. 35.

геология, инженерия, гидродинамика и гидростатика, наблюдения над пловцами и судами; все это чередуется друг с другом и переплетается.

Леонардо советует себе: «Напиши сначала о воде в целом и о каждом ее движении, а дальше опиши все виды дна и вещества, из которых оно состоит, всегда приводя положения из указанного раздела о воде. Тогда порядок получится хороший, ибо иначе изложение было бы сбивчивое. Опиши все фигуры, образуемые водой, от самой большой до самой малой волны, и укажи их причины» [7, с. 338].

Математический аппарат Леонардо не соответствовал уровню и широте проблем, которые он ставил перед собой. Вопросы гидродинамики влекли его, но все та же скудность математического аппарата заставляла его довольствоваться множеством эмпирических наблюдений и общими качественными рассуждениями<sup>1)</sup>.

В книге [15, с. 60] утверждается: «В сущности, последующие работы Галилея и Паскаля... представляют собой развитие, оформление и закрепление основных принципов гидростатики, осознанных уже Леонардо да Винчи».

Действительно, Леонардо да Винчи сумел правильно определить условия равновесия в сообщающихся сосудах, близко подошел к формулировке закона Паскаля.

Остановимся подробнее на результатах его размышлений и наблюдений за волнами (далее приведены цитаты из [7] с указанием страниц в круглых скобках).

По-видимому, наиболее известно следующее замечание Леонардо да Винчи: «Импульс гораздо быстрее воды, потому что многочисленны случаи, когда волна бежит от места своего возникновения, а вода не двигается с места, наподобие волн, образуемых в мае на нивах течением ветров: волны кажутся бегущими по полю, между тем нивы со своего места не сходят» (с. 350).

Он сравнивает волны на воде с волнами песка, у него есть догадка о волновом распространении звука и света. Вот некоторые из его рассуждений.

«Когда дует ветер, он выглаживает песок. Посмотри, как этот песок образует свои волны, и заметь, насколько он движется медленнее, чем ветер. И так же поступи с водой и заметь различие между водой и песком» (с. 351).

«Как брошенный в воду камень становится центром и причиной различных кругов, также кругами распространяется и звук, порожденный в воздухе, также и всякое помещенное в светлом воздухе тело распространяется кругами и наполняет окружающие части бесчисленными своими образами и все является во всем и все в каждой части. Вода, ударяемая водою, образует вокруг места удара круги; звук – на далекое расстояние в воздухе; еще больше – огонь; еще дальше – ум в пределах вселенной; однако, поскольку он ограничен, он простирается не на бесконечность» (с. 653).

И рядом с внимательным Леонардо-наблюдателем Леонардо-экспериментатор.

Для исследования течения воды в разных частях реки, он пользуется окрашиванием струй.

«Вода, которая падает вниз из узкого выхода, вытекая из большого бассейна, произведет в воздухе различные пересечения, которые будут тем выше одно другого, чем ближе к устью причина одних, нежели причина других... Опыт с пересечением ты произведешь при помощи окрашенной воды: налитая с правой стороны бассейна, она ударится внизу в воду с левой стороны» (с. 342).

<sup>1)</sup>Заметим, что первая книга по гидродинамике появилась лишь в 1638 году. Ее написал ученик Галилея, Б. Кастелли (1577–1644). Она носила название «Della misura dell'acque correnti» (Рим, 1638).

«Если хочешь увидеть, где, в каком месте – на поверхности, в середине или на дне – вода течет быстрее, налей воды, которая окрашена синопской краской, вместе с маслом в поток, который протекает по неровному дну, имеющему разные наклоны, – тогда по течению ты в точности увидишь, что опережает» (с. 359).

Леонардо да Винчи наблюдает движение зернышек в трубе или стеклянном ящике, измеряет наклон течения с помощью движущейся лодочки или кусочка пробки.

«Чтобы увидеть, движет ли маленькая волна на поверхности глубокую воду, находящуюся на дне, смешай около твоего отверстия воду с черным просом и через стеклянные пластинки ты увидишь то, что тебе нужно» (с. 350).

Вспомните теперь знаменитые опыты Рейнольдса с окрашенной струйкой жидкости или замечательные фотографии из [16], где для визуализации процессов в жидкость добавляют алюминиевые частицы.

Для наблюдения водоворотов Леонардо да Винчи создает искусственные водовороты, чтобы исследовать их законы. Среди записей Леонардо есть фрагмент, который поражает воображение: ему действительно захотелось назвать разные "движения" и "фигуры" воды, поэтому он вводит 64 термина из гидродинамики, сопровождая их рисунками (см. рис. 1). Эта своеобразная, не соответствующая, а опережающая свое время научно-художественная энциклопедия нелинейных волн с акцентом на турбулентность, поражала исследователей творчества Леонардо да Винчи. Например, В.П. Зубов [8] пишет: «Леонардо переходит к простому перечислению – казалось бы, врывается мощный поток, готовый смести все». Ему вторит Баткин Л.М. [3] – мы приведем целиком небольшой отрывок.

«Перед нами, действительно, нечто совсем уже невообразимое. Леонардо захотелось назвать разные "движения" и "фигуры" воды. И он вдруг набрасывает – подряд – шестьдесят четыре обозначения!

Вот как это звучит: "Risaltazione, circulatione, revolutione, revoltamento, ragiramento, risaltamento, sommergimento, surgimento, declinatione, elevatione, cavamento, consumamento, percussione, ruinamento, disciense, impetuosità, retrosi, urtationi, confregationi, ondationi, rigamenti, bollimenti, ricasamenti, ritardamenti, serpeggianti, rigore, mormori, strepiti, ringorgare, ricalcitrazioni, flusso e riflusso, ruine, conquassamenti, baratry, spelonche delle ripe, revertigini, precipizi, riversciamenti, tumulty, confusioni, ruine tempestose, equazione, equalità, arazione di pietre, urtamenti, bollori, sommergimenti dell' onde superficiale, ritardamenti, rompimenti, divisamenti, aprimenti, celerita, vehementia, furiosità, impetuosità, concorso, declinatione, commistamento, revolutione, cascamento, cbalzamento, corruzione d'argini, confuscazioni" (цитата из [7, с. 341–342]. – Д.И.Т.). Я предложил бы примерно такой перевод: "Бурление, круговращение, переворот, поворот, круговорот, пережат, погружение, всплывание, падение, вздымание, истечение, иссякание, ударение, разрушение, спад, стремительность, откаты, столкновения, разбивания, волнения, струи, вскипания, ниспадания, замедления, извивания, неуклонность, рокоты, гулы, переполнять, нахлесты, прилив и отлив, обвалы, сотрясения, омуты, вымоины берегов, смерчи, пучины, наводнения, штормы, смешения, бурные обвалы, выравнивание, равновесие, волочение камней, толчки, вспенивания, погружения поверхностных волн, замедления, прорывы, разделения, бреши, скорость, порывистость, яростность, стремительность, слияние, понижение, перемешивание, переворот, водопад, низвержение, повреждение плотин, взбаламучивание".

Сразу же бросается в глаза, что одни слова – revolutione, ritardamenti, impretuosità – повторяются дважды; другие едва ли различимы по смыслу; и многие лишены какого-либо специфического "гидродинамического" содержания. Иначе говоря, терминологиче-



других круговых волн, движущихся им навстречу, *после* столкновения пусть вздымаются в воздух, не отделяясь от своих оснований...» [7].

Скорее, речь идет не о том как, а о том, что изображать.

Конечно, Л.М. Баткин, как специалист по истории и теории культуры, не хочет объяснить текст и рисунки Леонардо лишь стремлением провести конкретно-эмпирическое исследование. Он задает вопрос и отвечает на него.

«Что же это за потоп 64-х названий? Это потоп варьета.

Предметность бесконечно-разнообразных движений воды широко изливается в гортань Леонардо и превращается в речевые рокоты и гулы (или в "абстракционистские" рисунки серии "Потоп", хранящейся в Виндзоре, с их свободным геометрическим ритмом). Предметность природы жадно впитывается глазом и ухом, всей личностью – и становится внутренним определением мышления. Личность, стремящаяся к "универсальности", не в силах как-то ограничить предметную варьета. Она с нею не справляется, индивида несет водоворот различий. Но, следовательно, индивид не справляется с собой. Чем больше мир наполняет индивида, чем шире, универсальней творческая личность Возрождения, тем больше целиком устремленная к внешнему личность, этот Глаз в центре мира, кажется каким-то новым грандиозным явлением природы. Тем больше это, возможно, сверхличность – но не личность в конкретно-ограниченном, законченном (и поэтому частном) смысле.

Не только Леонардо описывает воду, и вода описывает Леонардо...

Идея перечисления, идея разнообразия чудовищно раздувается, затопляет берега. Тут уж могут зазвучать слова синонимические или даже те же самые слова, существенно, что они все равно звучат как разные, ибо это перечень разного. Варьета формализуется, потому что обнажается до дна ее природная предметность, видна граница "разнообразия". И это последняя логико-культурная граница итальянского Возрождения. Гениальный, но все-таки ведь человечески-конкретный ренессансный индивид претендует стать Всем, соперничая с "божественным умом", всякая ноша для него все еще недостаточно тяжела. Но ведь Бог, бесконечный абсолют, способен совпасть со всем лишь потому, что он – Ничто. Значит?..

В Леонардовых записях по гидродинамике больше трагизма, чем в "Тайной вечере" » [3].

Вода завораживала Леонардо. Его сочинение «Трактат о движении и мере воды» (Ватиканский список), который в 1643 году составил доминиканец Арконати для кардинала Барберини, состоит из 566 фрагментов, распределенных по девяти книгам.

1. О сфере воды.
2. О движении воды.
3. О волнах воды.
4. О водоворотах.
5. О падающей воде.
6. О повреждениях, причиняемых водою.
7. О предметах, переносимых водой.
8. О мере воды и о трубках.
9. О мельницах и других водяных механизмах.

Любопытны наброски к рукописи Британского музея: «Книга о сокрушении войск силою разливов, произведенных выходом вод из берегов. Книга о затоплении войск посредством закрытия устья долин. Книга, показывающая, каким образом реки приносят невредимым лес, срубленный в горах. Книга о барках, направляемых против течения

рек. Книга о подъеме больших мостов посредством одного лишь повышения уровня вод. Книга о предотвращении натиска рек, чтобы он не направлялся в города» [8, с. 98].

Никола Витковски, автор весьма своеобразной книги [17], особенно отмечает «...бесчисленные рисунки поразительной сложности, изображающие водные потоки, водопады, наводнения». Более того, Витковски пишет о Леонардо следующее: «Предчувствуя, по-видимому, что вихревое движение жидкости еще долго будет озадачивать математиков (и действительно, уравнения механики жидкостей мы научились решать только с помощью самых мощных компьютеров, да и то для этого приходится использовать весьма грубые приближения), он сумел классифицировать вихри в движении воздуха под крыльями птиц и в пенном следе позади корабля. К рекам он питал особую слабость. В эпоху, когда люди вознамерились повернуть реку Арно, любые знания о воде имели стратегическую важность» [17, с. 18–19].

Интересно, что слабость к рекам с детства питал и Джеймс Клерк Максвелл. Может быть, храня образ растекавшейся ручейками реки, он представит потом взаимодействие электрических токов и магнитных полей струями и водоворотами. «В двух статьях, непосредственно продолжающих логику рассуждений Фарадея ("О силовых линиях Фарадея», 1852, и «О физической силовой линии", 1862), Максвелл положил начало концептуальному рукоделию, неслыханно сюрреалистическому: с исключительной точностью он описывает все известные по наблюдениям магнитные и электрические явления при помощи системы мягких шестеренок, представляющих собой цепочку вихрей "воображаемой жидкости"» [17, с. 302]. «Максвелл... наполнил пространство «молекулярными вихрями», между которыми вставил маленькие шарики, чтобы передавать движение от одного вихря к другому... Ток, то есть аналогичная жидкости циркуляция маленьких шариков, заставляет вращаться магнитные вихри (создает магнитное поле), а затухание движения вихрей интерпретируется как ослабление поля по мере удаления от проводника. Именно это и наблюдал Эрстед. Фарадей же заставлял изменяться магнитное поле. Это означает, что одни вихри уже вращаются, пока другие еще находятся в покое, и оттого шарикам приходится перераспределяться между ними – то есть возникает электрический ток» [17, с. 303–304].

Модель вихрей была понятной и без использования математического аппарата. Более того, она объяснила вращение плоскости поляризованного света магнитным полем и дала для скорости распространения возмущения в этой странной среде значение, в точности равное скорости света.

«...Вихри не дают физикам забыть о себе, что показывает их недавнее триумфальное возвращение в знаменитой теории хаоса и явлениях турбулентности. Оно и к лучшему: редкое физическое явление так завораживает» [17, с. 305].

Есть момент, на который историки, изучающие творчество Леонардо да Винчи, обычно не указывают. Насколько современны чертежи дамб, шлюзов и водяных мельниц, выполненных Леонардо, настолько архаична его теория рек, в которой воплотились неоплатонические идеи относительно макрокосма и микрокосма. Главное в этих идеях: человек подобен космосу в целом, всякому минералу соответствует какое-то растение, всякому растению – орган человеческого тела, а органу человеческого тела – планета Солнечной системы и т.д. и т.п. В рамках этих идей тело человека должно находиться в точном соответствии с телом Земли. Но тогда кровообращение должно быть связано с обращением воды в реках, а ветры, которые сменяют друг друга, представляют собой дыхательную систему планеты.

фото

φωτο

Согласно [17, с. 19–20], «Леонардо видел в реках подобие лопнувших на поверхности земной кожи кровеносных вен, устремляющих воды к морю, чтобы вернуть их в огромную систему подземного кровообращения, в которой вода переносится от морского дна к горным вершинам так же, как человеческая кровь переносится по телу от ног к голове. Что до представлений о динамике воздуха и воды, они были типично аристотелевскими: птица летит потому, что ее поддерживают потоки воздуха, которые она привела в движение своими крыльями, а рыба плавает из-за того, что вода быстро смыкается позади нее... За пределами этих странностей, в то время общепринятых, Леонардо оставался теоретиком, ощущавшим значительно большую свободу в общении со своим дневником, чем на деле»<sup>2)</sup>.

### **Код да Винчи и современная нелинейная динамика. Разрушение квазипериодического движения**

Вернемся к тому месту в книге Брауна [12], в которой Лэнгдон размышляет о числе 1.618. Повторимся чуть-чуть.

«Да Винчи, последовательность Фибоначчи, пентакл... Неким непостижимым образом их связала одна из самых фундаментальных концепций в истории искусств...»

Их связала золотая пропорция, в которой мы и видим код да Винчи. Используется ли он в современной науке, в частности, в нелинейной динамике? Да, используется при рассмотрении перехода квазипериодического движения на торе с двумя несоизмеримыми частотами в хаотическое при добавлении нелинейного возмущения [18, 19]. Движение на невозмущенном торе можно в полярных координатах описать простым отображением Пуанкаре

$$\theta_{n+1} = \theta_n + \Omega \pmod{1} \quad (\theta_n \text{ берется по модулю один}),$$

где  $\Omega = \omega_1/\omega_2$  – число вращений, показывающее сдвиг угла  $\theta$  за одну итерацию. Для рациональных значений  $\omega_1/\omega_2 = p/q$  траектория замыкается после  $q$  циклов (состояние синхронизации мод). При иррациональном отношении  $\omega_1/\omega_2$  движение квазипериодическое, траектория нигде не замыкается и перекрывает весь тор.

Было показано, что для сильно диссипативных систем радиальное движение траектории при возникновении хаоса несущественно, и можно изучать разрушение тора и превращение его в странный аттрактор с помощью отображения окружности

$$\theta_{n+1} = f(\theta_n) = \theta_n + \Omega - \frac{K}{2\pi} \sin(2\pi\theta_n).$$

По аналогии, скажем, с числом Рейнольдса, число  $K$  представляет степень нелинейности последнего слагаемого, которая должна вноситься для достижения хаоса. Чтобы наблюдать переход от квазипериодичности к хаосу, в приведенной выше формуле нужно изменять два параметра. Если увеличивать нелинейность (то есть  $K$ ), то необходимо изменять и  $\Omega$ , чтобы сохранить число вращений равным заданному иррациональному числу, что гарантирует квазипериодичность.

Предлагается следующий метод. При фиксированном  $K$  вычисляется величина  $\Omega_{p/q}(K)$ , которая:

<sup>2)</sup>Чего стоит одно из его гидродинамических соображений: «Самую большую реку можно поднять на самую высокую гору, воспользовавшись принципом сифона».

- 1) принадлежит  $q$ -циклу отображения  $f(\theta)$ ;
- 2) содержит элемент  $\theta = 0$ ;
- 3) обеспечивает сдвиг на  $p$ .

Таким образом,  $\Omega_{p/q}$ , дающая рациональное число вращения  $\omega = p/q$ , определяется выражением

$$f_{K,\Omega}^q(0) = p, \quad (1)$$

где индексы  $K$  и  $\Omega$  показывают, что левая часть остается функцией обеих переменных.

Число (иррациональное) вращения оценивается последовательностью усеченных непрерывных дробей, то есть рациональных чисел. Например, золотым сечением вида  $\omega^* = \tau - 1 = (\sqrt{5} - 1)/2 = 0.6180339\dots$ . Оно получается из непрерывной дроби

$$\omega^* = \frac{1}{1 + \frac{1}{\dots}}$$

$$\omega_n = \frac{F_n}{F_{n+1}} = \frac{F_n}{F_n + F_{n-1}} = \frac{1}{1 + \frac{F_{n-1}}{F_n}}, \quad \omega^* = \lim_{n \rightarrow \infty} \omega_n = \frac{1}{1 + \omega^*}, \quad (2)$$

$$\omega^{*2} + \omega^* - 1 = 0 \rightarrow \omega^* = \frac{\sqrt{5} - 1}{2} \quad (F_n - \text{ числа Фибоначчи}).$$

Число  $\omega^*$  называют «наихудшим» иррациональным числом в том смысле, что оно хуже всего может быть приближено рациональными числами.

Для отображения окружности были получены следующие численные результаты.

1. Величины параметров  $\Omega_n(K)$ , порождающих, согласно (1), числа вращения  $\omega_n$  в (2), стремятся к некоторой постоянной по закону геометрической прогрессии, то есть

$$\Omega_n(K) = \Omega_\infty(K) - \text{const} \cdot \delta^{-n},$$

где

$$\delta = \begin{cases} -2.6180339\dots = -(\omega^*)^{-2} & \text{при } |K| < 1, \\ -2.83362\dots & \text{при } |K| = 1 \end{cases}$$

– универсальная постоянная (зависящая, однако, от  $\omega^*$ ).

2. Расстояния  $d_n$  от  $\theta = 0$  до ближайшего принадлежащего  $\omega_n$  элемента цикла

$$d_n = f_{\Omega_n}^{F_n}(0) - F_{n-1}$$

таковы, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{d_n}{d_{n+1}} = \alpha,$$

где  $\alpha$  – еще одна универсальная константа

$$\alpha = \begin{cases} -1.618\dots = -(\omega^*)^{-1} & \text{при } |K| < 1, \\ -1.28857\dots & \text{при } |K| = 1, \end{cases}$$

причем,  $f_{\Omega_n}^{F_{n+1}}(0) - F_n = 0$ . В этом случае спектр мощности

$$A(\omega) = \frac{1}{F_{n+1}} \sum_{j=0}^{F_{n+1}-1} U(t_j) e^{2\pi i \omega t_j},$$

где

$$U(t_j) = \theta^n(t_j) - t_j, \quad j = 0, 1, 2, \dots$$

периодическая функция, описывающая зависимость от времени элементов цикла

$$\theta^n(t_j) = \theta(j\omega_n) = f^j(\theta)$$

для времен  $t_j = j\omega_n$  в пределе при  $n \rightarrow \infty$ .

Спектр демонстрирует самоподобие, поскольку структура между любыми соседними пиками одна и та же. После  $F_n$  итераций движение остается почти периодическим: главные пики появляются на частотах, равных степеням чисел Фибоначчи.

Переход от квазипериодичности к хаосу при числе вращения, равном золотому среднему  $\omega^* = (\sqrt{5} - 1)/2$ , имел место и в натурном эксперименте с ячейкой Бенара с дополнительными источниками тепла в боковых стенках, модулирующими конвективный поток выбранной частотой [18, с. 144–146]. Эксперимент количественно подтвердил универсальность скейлинга в переходе от квазипериодичности к хаотической конвекции при отношении частот, близком к золотому среднему.

### Квазикристаллы и плитки Пенроуза

Мы подошли к еще одной составляющей кода да Винчи – пентаклу, входящему в пентагон.

В журнале *Physical Review Letters*, в статье, датированной 12 ноября 1984 года, израильский физик Дан Шехтман привел экспериментальное доказательство существования металлического сплава (сплав алюминия и марганца) с необычными свойствами. Сплав образуется при сверхбыстром охлаждении расплава со скоростью  $10^6$  К в секунду, и при исследовании методами электронной дифракции проявляет все свойства кристалла, поскольку его дифракционная картина состоит из ярких и регулярно расположенных точек. Но эта картина характеризуется наличием пентагональной или икосаэдрической симметрии, строго запрещенной в кристалле из геометрических соображений. Такие необычные сплавы были названы квазикристаллами. Оказалось, что их много. Специалисты в области кристаллографии быстро поняли, что понятие квазикристалла носит фундаментальный характер, потому что оно обобщает и завершает определение кристалла. Говорят даже о том, что это открытие можно сравнить с добавлением понятия иррациональных чисел к рациональным в математике.

Как описать квазикристалл? Согласно классическим представлениям кристаллографии, кристалл составляется из единственной ячейки, которая должна грань к грани (плотно) устилать всю плоскость. Плотное заполнение плоскости может быть осуществлено с помощью треугольников, квадратов и шестиугольников. С помощью пятиугольников (пентагонов) такое заполнение невозможно. Но у Шехтмана-то получилось! На протяжении нескольких последующих лет ряд научных групп во всем

мире изучали необычный сплав Шехтмана посредством электронной микроскопии высокого разрешения. Была подтверждена идеальная однородность вещества, в котором симметрия пятого порядка сохранялась в макроскопических областях с размерами в несколько десятков нанометров, близкими к размерам атомов.

Для получения кристаллической структуры квазикристалла разработана модель, в основе которой лежит понятие «базового элемента». В рамках этой модели внутренний икосаэдр из атомов алюминия окружен внешним икосаэдром из атомов марганца. В «базовом элементе» 42 атома алюминия и 12 атомов марганца. В процессе затвердевания «базовые элементы» быстро соединяются между собой жесткими октаэдрическими мостиками. Гранями икосаэдра являются равнобедренные треугольники. Для образования октаэдрического мостика из марганца нужно, чтобы два таких треугольника (по одному в каждой ячейке) приблизились достаточно близко друг к другу и выстроились параллельно. В результате и образуется квазикристалл с икосаэдрической симметрией.

Отметим, что и здесь не обошлось без золотой пропорции.

В поисках объяснения икосаэдрической симметрии кристаллов физики вспомнили о математическом открытии, сделанном в 1974 году английским теоретиком Роджером Пенроузом, – о плитках Пенроуза, представляющих собой аperiodические регулярные структуры, образованные тонкими и толстыми ромбами, подчиняющимися золотой пропорции. Они оказались плоским аналогом квазикристаллов. Именно роль ромбов Пенроуза в пространстве трех измерений стали играть икосаэдры. С их помощью осуществлялось плотное заполнение трехмерного пространства.

Вернемся к изображению пентагона. Нетрудно видеть, что после проведения в нем диагоналей, пентагон включает в себя пять равнобедренных треугольников, окрашенных в темный цвет, и пять равнобедренных треугольников, не окрашенных. И темные, и светлые треугольники являются «золотыми», так как отношение бедра к основанию равно золотой пропорции. Соединив два темных треугольника их основаниями, получим тонкий «золотой» ромб. Аналогично из светлых треугольников получим толстый «золотой» ромб. Пенроуз использовал ромбы для получения «золотого» паркета, который был назван плитками Пенроуза. Плитки имеют пентагональную симметрию, а отношение числа толстых ромбов к тонким стремится к золотой пропорции.

Еще один замечательный объект, относящийся к нашему повествованию, – фуллерены<sup>3)</sup>. Термином «фуллерены» называют замкнутые молекулы типа  $C_{60}$ ,  $C_{70}$ ,  $C_{76}$ ,  $C_{84}$ , в которых все атомы углерода находятся на сферической или сфероидальной поверхности. В этих молекулах атомы углерода расположены в вершинах правильных шестиугольников или пятиугольников, покрывающих поверхность сферы или сфероида. В молекуле  $C_{60}$ , напоминающей покрышку футбольного мяча и имеющей форму правильного усеченного икосаэдра, атомы углерода расположены на сферической поверхности в вершинах 20 правильных шестиугольников и 12 правильных пятиугольников, так что каждый шестиугольник граничит с тремя шестиугольниками и тремя пятиугольниками, а каждый пятиугольник граничит с шестиугольниками.

<sup>3)</sup> Термин «фуллерен» происходит от имени американского архитектора Бакминстера Фуллера, который использовал такие структуры при конструировании куполов зданий.

Фуллерены впервые были синтезированы в 1985 году Г. Крото и Р. Смолли, получившими в 1996 году за это открытие Нобелевскую премию. Интересно, что в 1992-м году фуллерены обнаружили в породах докембрийского периода, то есть они оказались не только рукотворными, но и природными образованиями.

#### **Вместо заключения:**

#### **Леонардо да Винчи «О своих трудах, талантах и знаниях» [20]**

«Хорошо знаю – некоторым гордецам покажется, что они вправе порицать меня, ссылаясь на то, что я человек без книжного образования. Глупый народ! Не понимают они, что, как Марий ответил римским патрициям, и я мог бы ответить им, говоря: «Вы, что украсили себя чужими трудами, вы не хотите признать за мною права на мои собственные». Скажут, что, не имея книжного образования, я не смогу хорошо сказать то, о чем хочу трактовать. Не знают они, что мои предметы более, чем из чужих слов, должны быть почерпнуты из опыта, который был наставником тех, кто хорошо писал: так и я беру его себе в наставники и во всех случаях на него буду ссылаться.

<...> Хотя бы я и не умел хорошо, как они, цитировать авторов, я буду цитировать гораздо более достойную вещь, ссылаясь на опыт наставника их наставников. Они расхаживают чванные и напыщенные, разряженные и разукрашенные не своими, но чужими трудами, а в моих мне же самому отказывают, и если меня, изобретателя, презирают, то насколько более должны быть порицаемы сами – не изобретатели, а трубачи и пересказчики чужих произведений.

<...> Многие будут считать себя вправе упрекать меня, указывая, что мои доказательства идут вразрез с авторитетом некоторых мужей, заслуживающих великого почета согласно их незрелым суждениям; они не замечают, что мои предметы родились из простого чистого опыта, который есть истинный учитель.

<...> И увлекаемый жадным своим влечением, желая увидеть великое множество разнообразных и странных форм, произведенных искусной природой, блуждая среди темных скал, я подошел ко входу в большую пещеру. На мгновение остановясь перед ней пораженный, не зная, что там, изогнув дугою свой стан и оперев усталую руку о колено, правой я затенил опущенные и прикрытые веки. Много раз наклонялся я то туда, то сюда, чтобы что-нибудь разглядеть там, в глубине, но мешала мне в том великая темнота, которая там внутри была, и когда я пробыл так некоторое время, внезапно два пробудились во мне чувства: страх и желание; страх – пред грозной и темной пещерой, желание – увидеть, не было ли чудесной какой вещи там, в глубине».

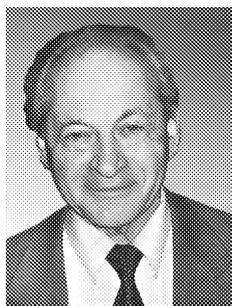
#### **Библиографический список**

1. *Бюлент А.* Математика и «Мона Лиза». Искусство и наука в творчестве Леонардо да Винчи. М.: Техносфера, 2007. 304 с.
2. *Данилов Ю.А.* Причудливый мир науки. Саратов: Изд-во ГосУНЦ «Колледж», 2004. 228 с.
3. *Баткин Л.М.* Леонардо да Винчи и особенности ренессансного творческого мышления. М.: Искусство, 1999. 415 с.
4. *Джорджо Вазари.* Леонардо да Винчи, живописец и скульптор флорентийский (Из кн. Жизнеописания наиболее знаменитых живописцев, ваятелей и зодчих) // Леонардо да Винчи. Суждения о науке и искусстве. СПб.: Издательский дом «Азбука – классика», 2006. 224 с.

5. Проф. Зигмундъ Фрейдъ. Леонардо да Винчи. М.: Типография Торг. д. «Мысль», Петровка, д. 17, 1912. 119 с.
6. Леонардо да Винчи. Избранные произведения: В 2-х т. СПб.: Издательский дом «Нева»; М.: Изд-во «Олма-Пресс», 2000.
7. Леонардо да Винчи. Избранные естественно-научные произведения. М.: Изд-во Академии наук СССР, 1955. 1207 с.
8. Зубов В.П. Леонардо да Винчи. М.: Техносфера, 1962.
9. Тайи Джессика, Барр Трейси. Леонардо да Винчи для «чайников». М.: Издательский дом «Вильямс», 2006. 304 с.
10. Мэттьюз Кэйтлин. Таро да Винчи. М.: ООО ТД Изд-во «Мир книги», 2006. 144 с.
11. Стахов А., Слученкова А., Щербаков И. Код да Винчи и ряды Фибоначчи. СПб.: Издательский дом «Питер», 2007. 320 с.
12. Браун Д. Код да Винчи. М.: «АСТ», 2004.
13. Гримм Г.Д. Пропорциональность в архитектуре. Л.: Издательство ОНТИ, 1935.
14. Реньи А. Трилогия о математике. М.: Мир, 1980. 376 с.
15. Долгов А.Н. Краткий очерк истории гидростатики // В книге «Начала гидростатики. Архимед, Стэвин, Галилей, Паскаль». Л., 1933.
16. Альбом течений жидкости и газа. Пер. с англ. / Сост. М. Ван-Дайк. М.: Мир, 1986. 184 с.
17. Витковски Н. Сентиментальная история науки. М.: Колибри, 2007. 448 с.
18. Шустер Г. Детерминированный хаос. Введение. М.: Мир, 1988. 240 с.
19. Кузнецов С.П. Динамический хаос (курс лекций). М.: Физмалит, 2001. 296 с.
20. Леонардо да Винчи. Суждения о науке и искусстве. СПб.: Издательский Дом «Азбука – классика», 2006. 135 с.

*Саратовский государственный  
университет*

*Поступила в редакцию 16.01.2008*



*Трубецков Дмитрий Иванович – родился в Саратове (1938). Окончил физический факультет Саратовского государственного университета (1960). Защитил диссертации на соискание ученой степени кандидата (1965) и доктора физико-математических наук в СГУ (1978) в области радиофизики. Заведующий кафедрой электроники, колебаний и волн факультета нелинейных процессов СГУ, профессор, член-корреспондент Российской академии наук, заслуженный деятель науки РФ, лауреат премии Президента РФ в области образования. Научный руководитель Лицея прикладных наук и факультета нелинейных процессов СГУ. Область научных интересов: вакуумная электроника и микроэлектроника сверхвысоких частот, теория колебаний и волн, нелинейная динамика, история науки. Автор более двадцати учебных пособий и монографий, а также более двухсот статей в периодической печати.*