Изв. вузов «ПНД», т. 18, № 3, 2010 УДК 537.311.33

НЕЛИНЕЙНОЕ ПРОХОЖДЕНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ВОЛНЫ ЧЕРЕЗ СЛОЙ С КВАДРАТИЧНОЙ И ДРОБНО-ПОЛИНОМИАЛЬНОЙ ЗАВИСИМОСТЯМИ ДИЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ПРОНИЦАЕМОСТИ

М.В. Давидович, Ю.В. Стефюк

Рассмотрены и решены интегральные уравнения для дифракции сильной плоской электромагнитной волны на слое с дробно-полиномиальной и кубической нелинейностями. Решения получены несколькими численными методами: последовательных приближений, минимальных невязок, разложением в степенной ряд, Рунге–Кутты, типа Штермера, а также в ряде случаев аналитически. Показана возможность сверхэкспоненциального затухания, ограничения мощности и ряд других эффектов, характерных для полупроводниковой плазмы в режиме ударной ионизации.

Ключевые слова: Нелинейное волновое уравнение, дифракция, электромагнитное туннелирование, полупроводниковая плазма, ударная ионизация, ограничение мощности, жесткие дифференциальные уравнения.

Введение

Нелинейные задачи дифракции для сильных электромагнитных волн (ЭМВ) возникают в ряде областей знаний: теории плазмы [1–3], физике твердого тела [4,5], оптике [6–8], магнитостатике [9], квантовой электронике [10]. Как обобщение сказанного – это электродинамика нелинейных и неоднородных сред и структур [1,3–18]. Нелинейность приводит к многочастотности и нестационарности. Нестационарный подход универсален и не дает усложнений алгоритма при переходе от линейных моделей к нелинейным [19]. Он предпочтителен решению большого числа связанных спектральных уравнений и формулируется, например, в виде метода конечных элементов или конечных разностей в пространственно-временной области. В ряде случаев нелинейная задача может рассматриваться как одночастотная в спектральной области [3–7,11–18]. Примером служит прохождение (туннелирование) монохроматической ЭМВ через газоразрядную или полупроводниковую плазму [3,4]. Здесь греющее поле приводит к зависимости диэлектрической проницаемости от усредненного за период квадрата электрического поля. Ниже рассмотрен этот случай нелинейности с формулировкой в виде одномерных интегральных уравнений и дифференциальных уравнений в спектральной области, которые решены итерационными методами на основе интегральных уравнений, методом Рунге–Кутты и предложенными новыми алгоритмами типа Штермера. Для одномерных нелинейных задач хорошо развиты приближенные методы [3,4,11–17] и широко используются прямые явные и неявные одношаговые, многошаговые и многозначные численные методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений типа метода Рунге–Кутты, Штермера, Адамса–Мултона, Гира и другие. Они весьма эффективны и для них имеются хорошо разработанные пакеты программ. Решение координатных трехмерных задач методами типа интегральных соотношений [20] и следующими из него методами (полос, прямых, неполным методом Галеркина) также возможно с использованием подобных алгоритмов [15–17]. Актуальным здесь является развитие итерационных алгоритмов: метода прямой итерации, метода минимальных невязок, метода наискорейшего спуска.

Цель данной работы состоит в получении и исследовании ограничения мощности и сверхэкспоненциального затухания прошедшей волны при дробно-линейной зависимости ε от квадрата электрического поля. Исследование осуществлено численно и аналитически с целью моделирования ограничителей мощности (например, в виде полупроводниковых включений в плоскопараллельном волноводе) на примере полупроводника InSb, для чего рассмотрены и исследованы дробно-полиномиальная и (как ее частный случай) кубическая (типа Керра) нелинейности. Задача формулируется на основе интегральных уравнений и решается несколькими методами интегрирования, включая метод рядов, что позволило кроме численных результатов получить и ряд аналитических решений. Анализ характерен для сильной плоской ЭМВ в слое полупроводниковой плазмы InSB в условиях ударной ионизации. Результаты по ограничению мощности хорошо совпадают с данными, полученными ранее для двух полупроводниковых пластин в прямоугольном волноводе неполным методом Галеркина на основе других зависимостей диэлектрической проницаемости с насыщением [16,17]. В качестве численных методов использовались: метод Рунге–Кутты четвертого порядка, метод Штермера пятого порядка, метод прямой итерации и метод минимальных невязок в случае нелинейности Керра, а также предложенные в работе методы интегрирования волнового уравнения и алгоритмы седьмого и восьмого порядков. Эти алгоритмы сравнены по точности и эффективности со стандартной схемой метода Рунге–Кутты, а также с результатами работы [13].

Моделирование реальных полупроводниковых устройств является сложной трехмерной нелинейной задачей для линий передачи. Ее численная реализация осуществляется обычно на основе проекционных методов: метода моментов для интегральных уравнений, неполного метода Галеркина [15,17] в сочетании с решением получаемых нелинейных дифференциальных уравнений и т.п. В последнем случае связанная система обыкновенных дифференциальных уравнений имеет высокий порядок (равный числу учтенных мод) и требует многократного решения с неизвестными начальными условиями для минимизации невязок граничных условий [15–17]. В силу этого разработка и исследование новых методов и алгоритмов нелинейной дифракции ЭМВ, в том числе и основанных на итерационных подходах, является актуальной задачей, что также *является целью настоящей работы*. На актуальность разработки новых эффективных алгоритмов даже для одномерных плоскослоистых линейных структур указывается, например, в недавних публикациях [21–24]. В [24] дан сравнительный анализ эффективности ряда применяемых подходов (прямые методы для дифференциальных уравнений, метод матриц передачи, ВКБ, метод, использованный в работе [23]), а также и итерационных подходов для метода рядов, метода интегральных уравнений неоднородных линий и интегральных уравнений на основе уравнения Риккати. Заметим, что в [23] допущена неточность (см. [24]). В ряде случаев быстрой сходимости итерационные алгоритмы весьма эффективны и могут существенно превосходить проекционные. Таким образом, обозначенная комплексная цель работы является актуальной.

1. Постановка задачи, дифференциальные и интегральные уравнения

Рассмотрим падение плоской электромагнитной волны на слой нелинейного диэлектрика толщины d. Предположим, что материальное уравнение для указанного диэлектрика имеет вид

$$\mathbf{D}(\mathbf{r},t)=\varepsilon_0\varepsilon\left(\mathbf{E}^2(\mathbf{r},t)\right)\mathbf{E}(\mathbf{r},t), \tag{1}$$

где $\varepsilon(\tilde{u})$ – диэлектрическая проницаемость, скалярная функция квадрата электрического поля $\tilde{u}=\mathbf{E}^2(\mathbf{r},t)$. Соотношение (1) означает пренебрежение процессами запаздывания (мгновенное установление поляризации). Иначе (1) должно представлять собой интегральный оператор, связывающий электрическую индукцию и поле [1] с нелинейным ядром. Если на слой падает циркулярно поляризованная ЭМВ, то квадрат поля и ε не зависят от времени [4]. Часто для плазмы можно считать [4], что процессы поляризации вещества не успевают за быстропеременным полем, а ε зависит от усредненного за период квадрата поля $u=\langle\tilde{u}\rangle$ (скобки означают усреднение за период $T_0=2\pi/\omega$) и определяется разогревом вещества, процессами рассеяния, генерации и рекомбинации. Средний квадрат поля есть функция только продольной координаты z. Решение задачи для линейно поляризованной волны будем искать в виде

$$\mathbf{E}(z,t)=\mathbf{x}_0E(z,t)=\mathbf{x}_0\mathrm{Re}\left[E(z)\exp\left(j\left(\omega t-\gamma(z)\right)\right)\right], \tag{2}$$

где введено комплексное поле $E(z)=|E(z)|\exp(j\varphi)$, $\mathbf{x}_0$ – орт-вектор оси x, при этом

$$\langle\mathbf{E}(z,t)\rangle=u(z)=|E(z)|^2/2. \tag{3}$$

Можно считать функцию $E(z)$ действительной, то есть $\varphi\equiv 0$. Комплексная функция $\dot{E}(z)=E(z)\exp(-j\gamma(z))$ с амплитудой $E(z)$ удовлетворяет волновому уравнению [4]

$$d^2\dot{E}(z)/dz^2+k_0^2\varepsilon(u)\dot{E}(z)=0, \tag{4}$$

в котором ε может зависеть от частоты $\omega=ck_0$ и быть комплексной. Рассмотренное нелинейное уравнение (4) Гельмгольца (Шредингера) исследовалось и решалось различными численными и приближенными аналитическими методами (см. [3–18]), среди которых эффективны прямые методы интегрирования. Слабая нелинейность исследуется разложением ε в ряд Тейлора по u в окрестности нуля. Оставляя члены до первого порядка, получим модель Керра. Рассмотрим подобную зависимость ε при положительном параметре нелинейности p:

$$\varepsilon(u(z))=\varepsilon^{(0)}+\varepsilon^{(2)}u^p(z)=\varepsilon^{(0)}+\varepsilon^{(2)}\left(E^2(z)/2\right)^p, \tag{5}$$

а также и более общую феноменологическую зависимость ε с насыщением

$$\varepsilon\left(E\right)=\left[\left(\sqrt[s]{\varepsilon^{(0)}}+\sqrt[s]{\varepsilon_{\infty}}\left(E/E_0\right)^p\right)/\left(1+r\left(E/E_0\right)^q\right)\right]^s.$$

Безразмерные величины $\varepsilon^{(0)}$ и ε_{∞} характеризуют ε соответственно в бесконечно слабом и сильном полях. Если $p=q$, то $r=1$, и в сильном поле ε достигает значения насыщения ε_{∞}. При $q=0$ следует полагать $r=0$, а в остальных случаях этот параметр произвольный. Величина E_0 соответствует некоторому внутреннему характеристическому полю [4,17]. Если $p=q=0$ или $r=\varepsilon_{\infty}=0$, то реализуется линейный случай. Введение феноменологических зависимостей позволяет обойти решение кинетических уравнений при исследовании процессов в полупроводниковой плазме. В работах [16,17] рассмотрены две другие подобные феноменологические модели и неполным методом Галеркина с использованием решения дифференциальных уравнений на основе метода Рунге–Кутты исследовано ограничение мощности устройством в виде отрезка прямоугольного волновода с двумя частично заполняющими его поперечное сечение тонкими полупроводниковыми пластинами. Толщина пластин много меньше размера широкой стенки, поэтому уравнения в [16,17] не очень жесткие. Далее (5) будем рассматривать в случае $p=1$. Интегрируя уравнение (4) дважды в пределах от нуля до z, получаем интегральное уравнение

$$\dot{E}\left(z\right)=\dot{E}\left(0\right)+\dot{E}'\left(0\right)z-k_0^2\int\limits_0^z dz'\int\limits_0^{z'}dz''\left[\varepsilon^{(0)}+\varepsilon^{(2)}\left|\dot{E}\left(z''\right)\right|^{2p}/2\right]\dot{E}\left(z''\right). \quad (6)$$

Здесь $\left|\dot{E}\left(z\right)\right|=E\left(z\right)$, штрих у поля означает производную по z, а точка – комплексную амплитуду. Рассмотрим решение интегрального уравнения (6) в виде ряда по z и решим методом последовательных приближений. Тогда для $p=1$ и приближения k внутри слоя

$$\dot{E}^{(k)}\left(z\right)=\sum_{n=0}^{N}e_n^{(k)}z^n,\quad\left|\dot{E}^{(k)}\left(z\right)\right|^2=\sum_{n=0}^{N}\sum_{m=0}^{N}e_n^{(k)}e_m^{(k)^*}z^{n+m}. \quad (7)$$

В качестве нулевого приближения возьмем $\dot{E}^{(0)}\left(z\right)=e_0^{(0)}+e_1^{(0)}z=\dot{E}\left(0\right)+\dot{E}'\left(0\right)z$. Все остальные коэффициенты в (7) при $k=0$ равны нулю. Пусть слой имеет небольшую электрическую толщину $k_0d\sim 1$. Тогда число членов в (7) можно взять порядка нескольких десятков. Подставляя приближение k в (6), получим для приближения $k+1$ рекуррентную формулу

$$e_i^{(k+1)}=-k_0^2\varepsilon^{(0)}\frac{e_{i-2}^{(k)}}{i\left(i-1\right)}-\frac{k_0^2\varepsilon^{(2)}}{2}\sum_{\substack{l=0,m=0,n=0\\ l+m+n+2=i}}^{N}\frac{e_l^{(k)}e_m^{(k)^*}e_n^{(k)}}{\left(l+m+n+1\right)\left(l+m+n+2\right)},$$
$$i=2.3,..., \quad (8)$$

где $e_0^{(k)}=e_0^{(0)}=\dot{E}\left(0\right)$, $e_1^{(k)}=e_1^{(0)}=\dot{E}'\left(0\right)$. Сшивая электрическое поле при $z=0$ и $z=d$, найдем

$$A(1+R)=e_0^{(0)}=\dot{E}(0),\quad AT^{(k)}=\dot{E(d)}\sum_{n=0}^{N}e_n^{(k)}d^n. \quad (9)$$

Здесь k означает порядок приближения. В (9) коэффициент отражения R (в отличие от коэффициента прохождения T) не зависит от номера приближения k и определяется амплитудой поля при $z = 0$ и амплитудой падающей волны A. Зависимость рассматриваемых величин от N и k_0 явно не указана. Магнитное поле имеет только компоненту y: $\dot{H}_y(z) = (-j\omega\mu_0)^{-1}\dot{E}'(z)$. Сшивая магнитное поле при $z = 0$ и $z = d$, получим

$$\begin{aligned} &A(1-R) = e_1^{(0)}(-jk_0)^{-1} = \dot{E}'(0)(-jk_0)^{-1}, \\ &AT^{(k)} = \dot{E}'(d)\dot{E}'(0)(-jk_0)^{-1} = \sum_{n=1}^{N} n e_n^{(k)} d^{n-1}, \end{aligned} \tag{10}$$

$$\begin{aligned} &Z = (1+R)/(1-R) = -jk_0 e_0^{(0)}/e_1^{(0)}, \\ &1 = -jk_0 \sum_{n=0}^{N} e_n^{(k)} d^n / \sum_{n=1}^{N} n e_n^{(k)} d^{n-1}. \end{aligned} \tag{11}$$

Если известны значения $e_0^{(0)}$ и $e_1^{(0)}$, то они не изменяются в рекуррентных формулах и определяют все другие коэффициенты, а также входной нормированный импеданс Z и коэффициент отражения $R = (Z-1)/(Z+1)$. Из (10) определяется амплитуда A и коэффициент T. Но $e_0^{(0)}$ и $e_1^{(0)}$ изначально неизвестны. Значение $e_0^{(0)}$ связано с амплитудой падающей волны, поэтому должно задаваться при решении уравнения (6), тогда как $e_1^{(0)}$ необходимо определять. Для этого используем (11). Тогда

$$e_1^{(k)} = -\left(jk_0 e_0^{(0)} + \sum_{n=2}^{N} e_n^{(k)} d^{n-1}\left[jk_0 d + n\right]\right)/(1 + jk_0 d), \tag{12}$$

и в качестве нулевого приближения следует взять $e_1^{(0)} = -jk_0 e_0^{(0)}/(1 + jk_0 d)$. Таким образом, задавая $e_0^{(0)}$, определяем $e_1^{(0)}$, и по формулам (8) находим $e_i^{(1)}$, $i = 2, 3, 4, 5$. Далее определяем $e_1^{(1)}$ и с помощью (8) получаем второе приближение и т.д.

Как иллюстрацию рассмотрим линейный случай $\varepsilon^{(2)} = 0$. Полагая $e_0^{(0)} = 1$ и $e_1^{(0)} = 0$, получим решение $E_0(z) = \cos\left(k_0 z\sqrt{\varepsilon^{(0)}}\right)$. Полагая $e_0^{(0)} = 0$ и $e_1^{(0)} = 1$, найдем другое решение: $E_1(z) = \sin\left(k_0 z\sqrt{\varepsilon^{(0)}}\right)/k_0$. Общее решение есть $\dot{E}(z) = A_0 E_0(z) + A_1 E_1(z)$, где A_0, A_1 – некие комплексные коэффициенты, однозначно определяемые через A, $E(d)$ и $E'(d)$,

$$A(1+R) = A_0, \quad AT = A_0 E_0(d) + A_1 E_1(d), \tag{13}$$

$$A(1-R) = A_1 E_1'(d)/(-jk_0), \quad AT = \left[A_0 E_0'(d) + A_1 E_1'(d)\right]/(-jk_0). \tag{14}$$

Отметим основные свойства предложенного подхода. Он весьма прост и дает параметры рассеяния тонкого слоя, которые можно представить матрицей передачи, зависящей от амплитуды падающей волны. Доказать сходимость можно в предположении слабой нелинейности $\varepsilon^{(0)} \ll \left|\varepsilon^{(2)}\right|\left|\dot{E}(z'')\right|^{2p}$, при этом сходимость при электрической длине $k_0 d\sqrt{\varepsilon^{(0)}} \sim 1$ весьма быстрая. При $k_0 d\sqrt{\varepsilon^{(0)}} \ll 1$ требуется всего две-три итерации и учет нескольких членов ряда [24]. Применять его для

$k_0 d\sqrt{\varepsilon^{(0)}} \gg 1$ не целесообразно. В этом случае отрезок d надо разбить на малые области размера Δd, ($k_0 \Delta d \ll 1$) и применять алгоритм последовательно.

Рассмотрим основанный на (6) прямой метод интегрирования, обозначив $\Delta d = h$, $\left(d^k/dz^k\right)\dot{E}\left(z\right)_{z=(m-1)h} = a_m^k$, $\eta_m^k = (\partial^k/\partial E)\varepsilon\left(E\left(z\right)\right)_{E=E_{m-1}^{(0)}}$, предполагая зависимость $\varepsilon\left(E\left(z\right)\right)$ и разложив решение в окрестности каждой точки $z = kh$ в ряд Тейлора: $\dot{E}\left(z\right) = a_k^0 + a_k^1 z + a_k^2 z^2/2 + \ldots$. Формулы алгоритма седьмого порядка для первых трех членов имеют вид

$$a_m^2 = -k_0^2 \eta_m^0 a_m^0,$$

$$a_m^3 = -k_0^2\left(\eta_m^0 + \eta_m^1 a_m^0\right) a_m^1,$$

$$a_m^4 = -k_0^2\left\{\left(\eta_m^0 + \eta_m^1 a_m^0\right) a_m^2 + \left[2\eta_m^1 + \eta_m^2 a_m^0\right] a_m^{12}\right\},$$

$$\ldots$$

Для подынтегрального выражения в интегральном уравнении (6) при целом p получаются простые явные схемы любого порядка точности. Так, при $p = 1$ для схемы восьмого порядка для первых трех членов имеем

$$a_m^2 = -k_0^2\left(\varepsilon^{(0)} + \varepsilon^{(2)} a_m^{02}\right) a_m^0,$$

$$a_m^3 = -k_0^2\left(\varepsilon^{(0)} + 3\varepsilon^{(2)} a_m^{02}\right) a_m^1,$$

$$a_m^4 = -k_0^2\left[\left(\varepsilon^{(0)} + 3\varepsilon^{(2)} a_m^{02}\right) a_m^2 + 6\varepsilon^{(2)} a_m^0 a_m^{12}\right],$$

$$\ldots$$

Достоинством подхода является согласованность формул с видом интегральных уравнений. Его отличие от метода Штермера в том, что последний аппроксимирует подынтегральную функцию полиномом Ньютона (а не Тейлора) с использованием квадратурной формулы. Хотя порядок формул определяется их построением, для его проверки использовался процесс Эйткена расчета на кратных шагах. Оценивалась также невязка дифференциальных уравнений (1) по чебышевской и среднеквадратичной нормам (по норме Чебышева точного и численных решений «1», а также среднеквадратичная «2» и чебышевская «3» невязки для уравнения (4) в зависимости от числа шагов интегрирования). Оценки показали, что метод эффективнее стандартного метода Рунге–Кутты на 2–3 порядка. Результаты даны в таблице.

Таблица

Метод	Метод Рунге–Кутты 4-го порядка			Метод 8-го порядка		
N	1	2	3	1	2	3
20	$2.2\cdot10^{-4}$	$6.1\cdot10^{-4}$	$2.0\cdot10^{-3}$	$1.5\cdot10^{-5}$	$4.7\cdot10^{-5}$	$1.4\cdot10^{-4}$
40	$1.4\cdot10^{-5}$	$3.7\cdot10^{-5}$	$1.2\cdot10^{-4}$	$9.2\cdot10^{-8}$	$1.8\cdot10^{-7}$	$5.5\cdot10^{-7}$
80	$8.7\cdot10^{-7}$	$2.3\cdot10^{-6}$	$7.8\cdot10^{-6}$	$2.5\cdot10^{-11}$	$7.3\cdot10^{-11}$	$2.2\cdot10^{-10}$

Рассмотрим другой подход к решению данной задачи, основанный на методе объемного интегрального уравнения [19]. Метод объемного интегрального уравнения основан на представлении дифрагированного поля через токи поляризации с помощью функций Грина [24] и пригоден для любой размерности и анизотропии. В силу одночастотности ток поляризации содержит одну основную гармонику, поэтому можно использовать спектральную скалярную функцию Грина $G(\omega, \mathbf{r})$. Поскольку поля не зависят от x и y, объемное интегральное уравнение является одномерным с функцией Грина $g(\omega, z) = -j\exp(-jk_0|z|)/(2k_0)$ [24] и имеет вид

$$\dot{E}(z) = A\exp(-jk_0z) + k_0^2\int\limits_0^d g(\omega, z - z')\left[\varepsilon^{(0)} - 1 + \varepsilon^{(2)}\left|\dot{E}(z')\right|^2/2\right]\dot{E}(z')\,dz'. \tag{15}$$

Первое слагаемое в (15) определяет падающее поле с явным заданием его амплитуды, а второе (интеграл) – поле дифракции. Падающее поле может быть взято как начальное приближение в методах итераций. Коэффициент отражения определяется через решение интегральных уравнений (15) как амплитуда бегущей влево волны в точке $z = 0$

$$R = A^{-1}k_0^2\int\limits_0^d g(\omega, 0 - z')\left[\varepsilon^{(0)} - 1 + \varepsilon^{(2)}\left|\dot{E}(z')\right|^2/2\right]\dot{E}(z')\,dz'. \tag{16}$$

Соответственно коэффициент прохождения есть амплитуда бегущей вправо волны, взятая при $z = d$. Рассмотрим линейный случай. Тогда интегральное уравнение (15) и соответственно уравнения (4) и (6) имеют точное решение: $\dot{E}(z) = A^+\exp(-j\gamma z) + A^-\exp(j\gamma z)$, где

$$\begin{aligned}
&A^+ = 2A\left(\sqrt{\varepsilon^{(0)}} - 1\right)/\left\{\left(\varepsilon^{(0)} - 1\right)\left[1 - R_0^2\exp(-2j\gamma d)\right]\right\},\\
&A^- = A^+R_0\exp(-2j\gamma d),\\
&\gamma = k_0\sqrt{\varepsilon^{(0)}} = \omega\sqrt{\varepsilon^{(0)}}/c,\\
&R_0 = (k_0 - \gamma)/(k_0 + \gamma) = \left(1 - \sqrt{\varepsilon^{(0)}}\right)/\left(1 + \sqrt{\varepsilon^{(0)}}\right).
\end{aligned}$$

Величина R_0 представляет собой коэффициент отражения от границы раздела: вакуум-диэлектрик. Это решение соответствует задаче о падении плоской волны на однородный слой линейного диэлектрика и получается также сшиванием. Через это решение определяется коэффициент отражения от слоя

$$R^{(l)} = k_0^2\left(\varepsilon^{(0)} - 1\right)A^{-1}\int\limits_0^d g(\omega, -z')\,\dot{E}(z')\,dz' = \frac{-j\tan(\gamma d)\left(\varepsilon^{(0)} - 1\right)}{2\sqrt{\varepsilon^{(0)}} + j\left(\varepsilon^{(0)} + 1\right)\tan(\gamma d)}, \tag{17}$$

и коэффициент прохождения

$$T^{(l)} = 2/\left[2\cos(\gamma d) + j\left(\sqrt{\varepsilon^{(0)}} + 1/\sqrt{\varepsilon^{(0)}}\right)\sin(\gamma d)\right],$$

где индекс l означает линейный случай. Это линейное приближение также может быть использовано в качестве начального приближения при решении как интегрального уравнения (15), так и (6).

Комплексное уравнение (4) записывается в виде двух уравнений для действительных функций $E(z)$ и $\gamma(z)$, которые в случае недиссипативных сред интегрируются в квадратурах [4]

$$z(E) = \pm\frac{1}{2}\int\limits_{E^2(0)/2}^{E^2/2} \frac{du}{\left[Wu - k_0^2\left(\varepsilon^{(0)}u^2 + \varepsilon^{(2)}u^3/2\right) - M^2\right]^{1/2}}, \tag{18}$$

$$\gamma(z) = \gamma(0) \pm \frac{M}{4}\int\limits_{E^2(0)/2}^{E^2/2} \frac{du}{u\left[Wu - k_0^2\left(\varepsilon^{(0)}u^2 + \varepsilon^{(2)}u^3/2\right) - M^2\right]^{1/2}}. \tag{19}$$

Здесь W и M – некие константы интегрирования, при этом $z \geq 0$. Константы W, M, $E(0)$, $\gamma(0)$, а также $E(d)$ и $\gamma(d)$ определены условиями $A(1+R) = \dot{E}(0) = E(0)\exp(-j\gamma(0))$, $AT = \dot{E}(d) = E(d)\exp(-j\gamma(d))$, определяющими R, T, A, или соответственно условиями

$$\begin{gathered}
-jk_0A(1-R) = \dot{E}'(0) = \\
= \left\{\pm\sqrt{2W - k_0^2\left[\varepsilon^{(0)}E^2(0) + \varepsilon^{(2)}\frac{E^4(0)}{4}\right] - \frac{M^2}{E^2(0)}} - \frac{jM}{E(0)}\right\}\exp(-j\gamma(0)), \\
-jk_0A(1-R) = \dot{E}'(d) = \\
= \left\{\pm\sqrt{2W - k_0^2\left[\varepsilon^{(0)}E^2(d) + \varepsilon^{(2)}\frac{E^4(d)}{4}\right] - \frac{M^2}{E^2(d)}} - \frac{jM}{E(d)}\right\}\exp(-j\gamma(d)), \\
\gamma(d) = \gamma(0) \pm \frac{M}{4}\int\limits_{E^2(0)/2}^{E^2(d)/2} \frac{du}{u\left[Wu - k_0^2\left(\varepsilon^{(0)}u^2 + \varepsilon^{(2)}u^3/2\right) - M^2\right]^{1/2}} \\
d = \pm\frac{1}{2}\int\limits_{E^2(0)/2}^{E^2(d)/2} \frac{du}{\left[Wu - k_0^2\left(\varepsilon^{(0)}u^2 + \varepsilon^{(2)}u^3/2\right) - M^2\right]^{1/2}}.
\end{gathered} \tag{20}$$

В качестве примера исследуем возможность экспоненциального и квазиэкспоненциального затухания волны в слое бесстолкновительной полупроводниковой плазмы. Для ε имеет место общее соотношение [4]

$$\varepsilon(E(z)) = \left[M^2 - E^3(z)E''(z)\right] / \left(k_0^2E^4(z)\right). \tag{21}$$

Будем искать решение в форме $E''(z) = M^2/E^3(z) - \varepsilon_r k_0^2 E(z) + c^2\omega_p^2(E(z))E(z)$. Тогда ε представляется как $\varepsilon(E(z)) = \varepsilon_r - \omega_p^2(E(z))/\omega^2$ с нелинейной зависимостью плазменной частоты от поля. Здесь ε_r – относительная диэлектрическая проницаемость кристаллической решетки. Учитываются только носители заряда одного типа, имеем для квадрата плазменной частоты $\omega_p^2(E) = n(E) e^2/(\varepsilon_0 m_e)$. Функция $n(E)$ может иметь разные виды в зависимости от механизмов рассеяния носителей [4]. Одна из простейших феноменологических зависимостей концентрации от поля имеет вид

$$n(E) = \left[n_0^{1/q} + n_2 E^2(z)\right]^q. \tag{22}$$

Случаю кубической нелинейности соответствует $q = 1$, при этом n_0 – концентрация в слабом поле. Для (22) возможны как рост, так и падение ($n_2 < 0$) концентрации с увеличением поля. При $q = -1$ также возможно уменьшение и увеличение концентрации (при $n_2 < 0$) с ростом поля. Для экспоненциального затухания с декрементом α из (21) имеем

$$\varepsilon(E(z)) = \left(M^2/E^4(z) - \alpha^2\right) k_0^2. \tag{23}$$

При $M \neq 0$ (имеется поток вектора Пойтинга $\mathbf{P}$) указанный закон физически не реализуем, поскольку функция (23) не ограничена в нуле, то есть экспоненциального решения быть не может. При $M = 0$ имеем $P_z = 0$, и в линейном случае $\alpha = \sqrt{\gamma_0^2 - k_0^2\varepsilon_r} > 0$, $k_0^2\varepsilon_r < \gamma_0^2$. В случае кубической нелинейности имеем $E''(z) = M^2/E^3(z) - \varepsilon_r k_0^2 E(z) + \omega_{p0}^2 c^{-2} E(z)\left[1 + E^2(z)/E_0^2\right]$, где ω_{p0} – малосигнальная плазменная частота, $E_0 = \sqrt{n_0/n_2}$. При $M = 0$, $W = 0$ из (18) получаем реализуемое при $\omega\sqrt{\varepsilon_r} < \omega_{p0}$ решение в двух формах

$$z(E) = \frac{2cE_0}{\omega_{p0}} \int\limits_E^{E(0)} \frac{dE}{E\sqrt{b^2 + E^2}} = -\frac{2cE_0}{b\omega_{p0}} \ln\left(\frac{\sqrt{b^2 + E^2(0)} + b}{\sqrt{b^2 + E^2(0)} - b} \cdot \frac{\sqrt{b^2 + E^2(z)} - b}{\sqrt{b^2 + E^2(z)} + b}\right),$$

$$E(z) = 2b\left\{\frac{\sqrt{b^2 + E^2(0)} - b}{\sqrt{b^2 + E^2(0)} + b}\right\}^{1/2}\left[1 - \frac{\sqrt{b^2 + E^2(0)} - b}{\sqrt{b^2 + E^2(0)} + b}\exp(-az)\right]^{-1}\exp(-az/2),$$

где $b^2 = \left(2E_0^2/\omega_{p0}^2\right)\left(\omega_{p0}^2 - \varepsilon_r\omega^2\right) > 0$, $a = b\omega_{p0}/(2cE_0)$.

Нетрудно видеть, что это решение удовлетворяет граничному условию при $z = 0$. При $M = 0$ в силу $P_z = 0$ набег фазы волны $\gamma(z) = \gamma(0)$ постоянен, а модуль коэффициента отражения равен единице, что соответствует входному импедансу

$$Z = \frac{1 + R}{1 - R} = \frac{jk_0(1 - D^2)^2 E(0)}{abD(1 + D^2)}.$$

Здесь обозначено $D = \left(\sqrt{b^2 + E^2(0)} - b\right)/\left(\sqrt{b^2 + E^2(0)} + b\right)$. При $z > 0$ волнового движения нет, а поля E и H находятся в квадратуре. Этот случай не реализуется для конечного слоя.

В диссипативном случае точный интеграл (18) не имеет места, а вместо него возникает нелинейное интегральное уравнение

$$E(z) = E(0) \pm \int\limits_0^z dz' \left\{2W(z') - 2k_0^2 \int\limits_0^{E(z')} v\varepsilon'(v)\,dv - \frac{M^2(z')}{E^2(z')}\right\}^{1/2}, \tag{24}$$

в котором введены монотонно убывающие (для диссипативных сред) функции

$$M(z) = M(0) - k_0^2 \int\limits_0^z \varepsilon''(E(z')) E^2(z') dz',$$
$$W(z) = W(0) - k_0^2 \int\limits_0^z M(z') \varepsilon''(E(z')) dz'.$$

Как нетрудно видеть, величина $W(z)$ определяет квадрат производной поля

$$W(z) = \frac{1}{2}\left(\frac{dE(z)}{dz}\right)^2 + \frac{M^2(z)}{2E^2(z)} + k_0^2 \int\limits_0^{E(z)} \varepsilon'(v) v dv.$$

Подкоренное выражение в интегральном уравнении (24) неотрицательно, так как оно совпадает с величиной $(dE(z)/dz)^2$. Получив его решение, найдем определенную с точностью до $\gamma(0)$ фазу

$$\gamma(z) = \gamma(0) + \int\limits_0^z \left[M(z')/E^2(z')\right] dz'.$$

Постоянные $E(0)$ и $M(0)$ также определяют производную фазы. Удобно считать амплитуду падающей волны A действительной. Обозначим $R = |R|\exp(j\varphi)$. Тогда постоянная $\gamma(0)$ связана с фазой коэффициента отражения соотношением $\tan(\gamma(0)) = -|R|\sin(\varphi)/(1+|R|\cos(\varphi))$. Поскольку на слой падает волна только слева, физический смысл имеет решение с условием $M(z) \geq 0$ (заметим, что в нелинейном случае возможно равенство $M(d) = 0$). При этом также всегда имеет место условие $0 \leq M(z) \leq M(0) \leq k_0 E^2(0)$, так как

$$A^2 = \left(1 - |R|^2\right) M(0) =$$
$$= k_0 E^2(0)\left(1 + \tan^2(\gamma(0))\right) / \left[1 + \sqrt{|R|^2 - \left(1 - |R|^2\right)\tan^2(\gamma(0))}\right]^2.$$

Рассмотрим смысл констант интегрирования, входящих в (24). Величина $E(0)$ определяет амплитуду, $M(0)$ – продольную компоненту вектора Пойтинга $P_z(0)$, а $W(0)$ – квадрат производной поля в нуле. Знак этой производной определяется знаком в интегральном уравнении (24). Обозначим P_{z0} усредненную за период компоненту вектора Пойтинга слева от слоя. Поскольку $P_{z0} = 0.5A^2/Z_0 = \left(1 - |R|^2\right) P_z(0)$ и $M(z) = 2\omega\mu_0 P_z(z) = 2k_0 Z_0 P_z(z)$, $Z_0 = \sqrt{\mu_0/\varepsilon_0}$, то для коэффициента прохождения по мощности имеем соотношение $|T|^2 = P(d)/P_0 = \left(1 - |R|^2\right) M(d)/M(0)$. Если потери отсутствуют, то M сохраняется и выполняется уравнение баланса мощности $|R|^2 + |T|^2 = 1$.

Как видно, для решения (6) или (24) необходимо задать две константы (например, $E(0)$ и $M(0)$, или $E(0)$ и $E'(0)$, и т.д.). Действительно, имеет место связь

$$(k_0 E(0))^2 + \left(E'(0)\right)^2 + \left(\gamma'(0) E(0)\right)^2 = 2(k_0 A)^2\left[1 + (E(0)/A - 1)^2\right],$$

при этом сразу получается $|R|$. Это означает, что решение уравнения (24) в произвольном случае, вообще говоря, не есть решение задачи дифракции. Действительно, из сшивания полей при $z = d$ следуют два условия, которым должно удовлетворять такое решение: $E'(d) = 0$, $\gamma'(d) = k_0$. Поэтому удобно задать $E(d)$ и $\gamma(d)$, переформулировав интегральное уравнение (24) относительно начальной точки $z = d$. Это позволяет найти все величины в нуле. Постоянная $E(d)$ определяет величины A и R, а постоянная $\gamma(d)$ – их фазы.

Рассмотрим случай экспоненциального убывания потока мощности: $M(z) = M(0)\exp(-\alpha z)$. Тогда имеем функциональное уравнение

$$E(z) = \sqrt{\alpha M(0) / \left[k_0^2 \varepsilon''(E(z))\right]} \exp(-\alpha z/2), \tag{25}$$

из которого можно найти функцию $E(z) = F(z, \alpha, k_0, M(0))$. Пусть, например, $\varepsilon''(E(z)) = \varepsilon''_0 + \varepsilon''_2 E^2(z)$. Тогда из (26) следует, что $E^2(z)$ определяется как положительный корень квадратного уравнения. Если $\varepsilon''(E(z)) = \varepsilon''_0 + \varepsilon''_1 E(z)$, то $E(z)$ определяется по формулам Кардано как положительный корень кубического уравнения. При малой нелинейности это ближайший корень к значению (25) с проницаемостью ε''_0. Подставляя решение (24) в (25), получим

$$\begin{gathered} F(z, \alpha, k_0, M(0)) = F(0, \alpha, k_0, M(0)) + \\ \pm \int\limits_0^z dz' \left\{ 2W(z') - 2k_0^2 \int\limits_0^{F(z', \alpha, k_0, M(0))} v\varepsilon'(v)\, dv - \frac{M^2(0)\exp(-2\alpha z')}{F^2(z', \alpha, k_0, M(0))} \right\}^{1/2}. \end{gathered} \tag{26}$$

Это есть интегральное уравнение для определения функции $\varepsilon'(E)$. Экспоненциальное убывание потока мощности не может достигаться при произвольных функциональных зависимостях ε от поля, поскольку их реальные части должны удовлетворять (26). Например, если $\varepsilon''(E(z)) = \varepsilon''_0 + \varepsilon''_2 E^2(z)$, то, обозначая $E_0 = \sqrt{\varepsilon''_0 / (2\varepsilon''_2)}$, найдем

$$E(z) = \sqrt{\sqrt{E_0^4 + \exp(-\alpha z)\, \alpha M(0) / \left(k_0^2 \varepsilon''_2\right)} - E_0^2}, \tag{27}$$

$$E'(z) = -\frac{\alpha}{4E} \frac{\left(E^2(z) + E_0^2\right)^2 - E_0^4}{E^2(z) + E_0^2},$$

$$E''(z) = -\frac{E'^2}{E} - \frac{8E'^3}{E^2\alpha} \frac{\left(E^2 + E_0^2\right)^2 + E_0^4}{\left(E^2 + 2E_0^2\right)^2},$$

$$\begin{aligned} \varepsilon'(E) = \frac{\alpha^2}{16k_0^2} \left[\frac{E^2 + 2E_0^2}{E^2 + E_0^2}\right]^2 \Biggl\{ 1 - \frac{2}{(E^2 + 2E_0^2)} \frac{(E^2 + E_0^2)^2 + E_0^4}{(E^2 + E_0^2)} + \\ + 16\left(\frac{k_0^2 \varepsilon''_2}{\alpha^2}\right)^2 \left(E^2 + E_0^2\right)^2 \Biggr\}. \end{aligned}$$

Диэлектрическая постоянная должна изменяться от значения $\varepsilon'(0) = \alpha^2/\left(4k_0^2\right) \times \times \left\{-1 + 4\left(k_0^2\varepsilon_0''/\alpha^2\right)^2\right\}$ в слабом поле до значений без насыщения в сильном поле

$$\varepsilon'(E) = \alpha^2/\left(16k_0^2\right)\left\{-1 + 16\left(k_0^2\varepsilon_2''/\alpha^2\right)^2 E^4\right\}. \tag{28}$$

Случаю линейных потерь $\varepsilon_2'' = 0$ соответствует ε слабого поля (28), при этом поле (27) ограничено. Действительно, при $\varepsilon_2'' \to 0$ имеем $E_0 \to \infty$, и из (27) получаем экспоненциально затухающее решение $E(z) = \sqrt{\alpha M(0)/\left(k_0^2\varepsilon_0''\right)}\exp(-\alpha z/2)$. Этот закон физически реализуем только в линейном случае, при этом для больших потерь $\varepsilon_0'' > \alpha^2/\left(2k_0^2\right)$ и $\varepsilon' > 0$. В отсутствии потерь указанный режим возможен только при отрицательной диэлектрической постоянной $\varepsilon' = -\alpha^2/\left(4k_0^2\right)$. В этом случае для константы затухания имеем $\alpha^2 = 4\omega_{p0}^2/c^2 - 4k_0^2\varepsilon_r > 0$. В диссипативном нелинейном случае реализуется сверхэкспоненциальное затухание. При произвольной $\varepsilon(E) = \varepsilon'(E) - j\varepsilon''(E)$ нелинейные уравнения (6), (15), (18)–(19), (24) решаются итерационными и прямыми методами интегрирования. Для попадания в окрестность сходимости удобны методы спуска из нескольких начальных приближений с выбором оптимальной точки.

2. Численные результаты

Введем функцию $\eta(z) = \left|\varepsilon^{(2)}\right|\left|\dot{E}(z)\right|^2/\left(2\left|\varepsilon^{(0)}\right|\right)$, определяющую отношение амплитуд нелинейной и линейной частей электрического поля в точке z, а также безразмерный коэффициент нелинейности $\eta = \eta(0) = \left|\varepsilon^{(2)}\right|\left|e_0^{(0)}\right|^2/\left(2\left|\varepsilon^{(0)}\right|\right)$. Он зависит от амплитуды падающего поля и коэффициента отражения, поскольку $\left|e_0^{(0)}\right| = \left|\dot{E}(0)\right| = |A(1+R)|$. Для произвольной зависимости ε определим эту функцию в виде $\eta(z) = \left[\varepsilon(E(z)) - \varepsilon(0)\right]/\varepsilon(0)$. Интегральное уравнение (15) решалось путем дискретизации с применением метода Галеркина. Использована наиболее простая кусочно-постоянная (ступенчатая) дискретизация, основанная на кусочно-постоянных конечных элементах, а также применена и кусочно-линейная аппроксимация в виде соответствующих конечных элементов. В результате получены две дискретные формулировки в виде системы нелинейных алгебраических уравнений, которые решались методом прямой итерации в форме метода последовательных приближений, а также с использованием метода минимальных невязок. Сходимость метода прямой итерации и метода минимальных невязок в случае компактных линейных отображений доказана. В нелинейном случае параметр итерации метода минимальных невязок определялся из кубического уравнения по формулам Кардано, поэтому возникала проблема выбора одного корня. В предположении малой невязки в качестве такового брался корень, ближайший к линейному решению.

На рис. 1 приведены результаты метода последовательных приближений при вычислении поля в области $0 \le z \le d$ для уравнения (15) при $kd = 2$ и $\varepsilon^{(0)} = 2$ для разных нелинейностей. Для $e_{i0} = 1$ метод последовательных приближений сходится в случае $-1.193002809... < \varepsilon^{(2)} < 0$ и $0 < \varepsilon^{(2)} < 0.087626...$ В приведенных результатах сходимость достигалась за несколько десятков итераций. В качестве начальной итерации взято падающее поле. Использование метода наименьшего спуска и метода минимальных невязок с линеаризацией позволило за 3–5 итераций получить решение в области значений, где метод последовательных приближений расходится. На рис. 2 представлены коэффициенты отражения и прохождения по мощности, а также баланс мощности $|R|^2 + |T|^2 \approx 1$. Указанные результаты сравнивались с решениями уравнения (4) описанным выше методом 8-го порядка, методом Рунге–Кутты 4-го порядка и методом Штермера 5-го порядка для линейного случая $\varepsilon = 4$, $k_0 d = 10$ с известным аналитическим решением. Соответствующие данные для невязки численных и точного решений в чебышевской норме и для невязки уравнения (4) в чебышевской и среднеквадратичной нормах, представленные в таблице, показывают, что эффективность первого метода на порядки выше стандартного метода Рунге–Кутты. На рис. 3 представлены вычисления для аналогичного слоя с зависимостью ε от поля в виде $\varepsilon\left(E^2\right) = \left(\varepsilon^{(0)} + \varepsilon^{(\infty)} E^2\right) / \left(1 + E^2\right)$. Здесь $\varepsilon^{(0)}$ – диэлектрическая проницаемость в слабом поле, $\varepsilon^{(\infty)}$ – проницаемость в бесконечно сильном поле. Рис. 3

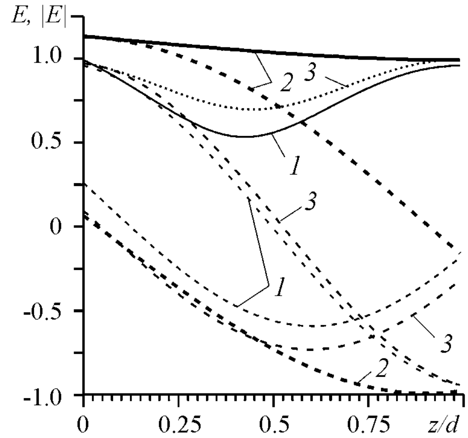

Рис. 1. Распределение модуля электрического поля (сплошные кривые), его реальной (штрих) и мнимой (пунктир) частей вдоль пластины при различных нелинейностях для $k_0 d = 2$,$\varepsilon^{(0)} = 2$: *1* – линейный случай ($\varepsilon^{(2)} = 0$); *2* – $\varepsilon^{(2)} = -0.5$, $e_{i0} = 1.5$; *3* – $\varepsilon^{(2)} = 0.05$, $e_{i0} = 1$

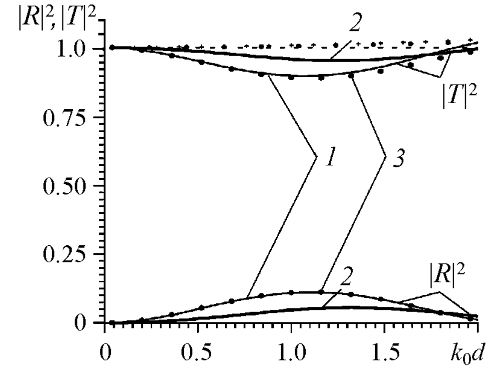

Рис. 2. Коэффициент отражения, коэффициент прохождения по мощности и баланс мощности для решения уравнения (17) при различных нелинейностях для $\varepsilon^{(0)} = 2$: *1* – линейный случай ($\varepsilon^{(2)} = 0$); *2* – $\varepsilon^{(2)} = -0.5$, $e_{i0} = 1$; *3* – $\varepsilon^{(2)} = 0.01$, $e_{i0} = 1$. Штриховая линия, звездочки и крестики – полная мощность $|R|^2 + |T|^2$соответственно для случаев *1*, *2*, *3*

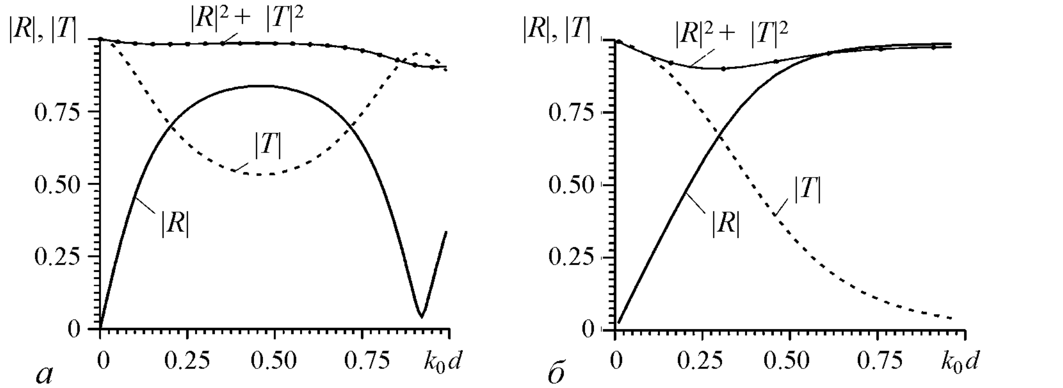

Рис. 3. Частотные зависимости модулей коэффициентов отражения и прохождения и баланса мощности при различных уровнях падающей мощности для слоя с параметрами $\varepsilon^{(0)} = 12 - 0.2j$, $\varepsilon^{(\infty)} = -20 - 1j$ и $\chi = 1$: *а* – слабый сигнал, *б* – сильный сигнал

иллюстрирует управление передачей мощности при изменении интенсивности падающей волны. В приведенных результатах амплитуда падающей волны изменялась от 0.1 (случай *а*) до 10 (случай *б*). Соответственно η изменялся до значений много меньших единицы до величин, существенно ее превышающих. Для изучения ограничения мощности использовалась частотно зависимая формула ε вида

$$\begin{gathered}\varepsilon(E)=\varepsilon_r-\omega_{0p}^2/[\omega(\omega-j\omega_{0c})]-\omega_{0p}^2\tilde{n}/[\omega(\omega-j\omega_{0c}\tilde{n}^{\alpha})],\\ \tilde{n}=1+(n_\infty-1)E^p/(E_0^p+E^p).\end{gathered}\tag{29}$$

Здесь ε_r=17–0.01j – ε кристаллической решетки, $\omega_{0p}=500$ и $\omega_{0c}\sim 50-100$ ГГц – плазменная частота и частота столкновений в слабом поле, $\tilde{n}$ – относительное увеличение концентрации при ударной ионизации, E_0 – внутренне поле, параметр α связан с диссипацией за счет рассеяния и рассматривался в пределах 0<α<1, $n_\infty=100$ – относительное увеличение концентрации в сильном поле. Взятые параметры качественно соответствуют слою полупроводниковой плазмы в InSb при азотной температуре. Соответствующие результаты по ограничению мощности представлены на рис. 4. Как видно, уровень ограничения слабо зависит от α, n_∞ и определяется в основном начальными частотами ω_{0p} и ω_{0c}, а также длиной. Для всех результатов $0.46<|R|<0.57$, что говорит об ограничении в основном за счет потерь. На рис. 5 приведено распределение электрического поля и его модуля для одной точки графика рис. 4. Результаты рис. 5 получены приведенным выше прямым методом 7-го порядка. Использовано 3000 точек и 1500 точек, при этом кривые практически совпали. Звездочками обозначены расположенные через 60 шагов точки на менее точных кривых. Результаты дополнительно контролировались методом наискорейшего спуска, методом Рунге–Кутты и методом Штермера 5-го порядка. Для получения совпадения результатов метода Рунге–Кутты с двойной точностью в трех значащих цифрах потребовалось 150000 точек.

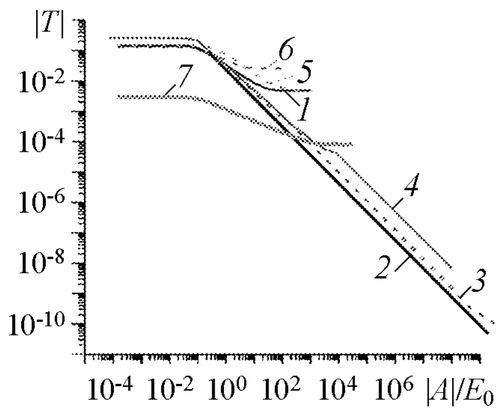

Рис. 4. Ограничение мощности волны в полупроводниковой плазме на длине $d=2$ см при различных параметрах: $\alpha=1$ (*1*, *4–7*); $\alpha=0.5$ (*2*); $\alpha=0.8$ (*3*) и $n_\infty=100$ (*1–4*, *6*, *7*), $n_\infty=10$ (*5*), а также различных малосигнальных значений плазменной частоты (в ГГц) $\omega_{0p}=300$ (*1–3*, *5*, *6*); $\omega_{0p}=500$ (*7*) и частоты столкновений $\omega_{0c}=100$ (*1–3*, *5*, *7*); $\omega_{0c}=50$ (*4*); $\omega_{0c}=150$ (*6*). Использованы параметры: $\omega=150$ ГГц, $k_0d=10$

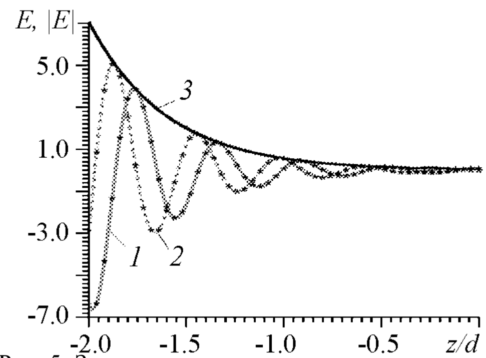

Рис. 5. Зависимость распределения электрического поля: *1* – $\mathrm{Re}\left(\dot{E}(z)\right)$, *2* – $\mathrm{Im}\left(\dot{E}(z)\right)$, *3* – $\left|\dot{E}(z)\right|$ от нормированной координаты при $A/E_0=14$, $k_0d=10$, $n_\infty=100$, $\omega=150$, $\omega_{0p}=300$, $\omega_{0c}=100$ (в ГГц)

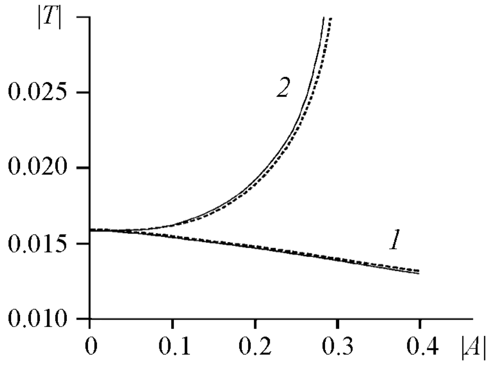

Рис. 6. Результаты сравнения данных работы [13] (сплошные линии) зависимости коэффициента прохождения от амплитуды с предложенным методом седьмого порядка (штриховые) при $N = 1500$. В наших обозначениях данные из [13] соответствуют значению $k_0 d = 10$ и параметрам: $\varepsilon^{(0)} = -11.1$, $\varepsilon^{(2)} = 4.033$ (*1*); $\varepsilon^{(0)} = 13.1$, $\varepsilon^{(2)} = -4.033$ (*2*)

Сравнение результатов, полученных с двойной точностью методом 8-го порядка, с оцифрованными данными из [13] приведено на рис. 6. Результаты [13] получены модифицированным методом Гира – многошаговым неявным методом интегрирования назад переменного порядка в представлении Нордсика. Следует заметить, что решенные выше явными схемами задачи не были очень жесткими, поскольку использовалось интегрирование назад при плавном затухании поля в прямом направлении из-за потерь, а значение $k_0 d = 1$ (вполне достаточное для ограничения мощности) не является большим. Для очень жестких дифференциальных уравнений схемы Розенброка с комплексными коэффициентами предпочтительнее методу Гира.

Выводы

1. Численно и аналитически исследовано ограничение мощности при дифракции плоской волны на пластине с обобщенной дробно-полиномиальной зависимостью диэлектрической проницаемости от амплитуды электрического поля, имеющей насыщение и моделирующей полупроводниковый слой InSb в условиях ударной ионизации сильным полем при азотной температуре. Показано, что характер ограничения качественно соответствует ограничению при дифракции волны H_{10} в прямоугольном волноводе с имеющими насыщение экспоненциальными зависимостями [16,17]. Аналитически и численно показаны возможность сверхэкспоненциального затухания в пластине и эффективное ограничение мощности.

2. Получены оригинальные итерационные алгоритмы интегрирования нелинейного волнового уравнения и соответствующего ему интегрального уравнения на основе модификации метода рядов для нелинейного интегрального уравнения в области, а также и прямые схемы типа Штермера 7 и 8-го порядков, основанные на интегральном уравнении и разложении Тейлора в окрестности левого узла. Указанные схемы не требуют дополнительных начальных условий, могут быть адаптированы для переменного шага и высокого требуемого порядка точности, а также для нескольких шагов. В случае разложения исходного интегрального уравнения около правого узла получаются соответствующие неявные схемы. Неявную схему 3-го порядка для нелинейности Керра можно разрешить относительно вычисляемого значения. Достоинством схем является явный учет структуры волнового уравнения и типа нелинейности. Это же приводит и к недостатку в плане переносимости: при изменении уравнения (например, появлении члена с первой производной) необходимо заново получать схему. Для задачи дифракции сильной плоской ЭМВ на слое нелинейного диэлектрика исследовано влияние нелинейности Керра на дифракцию от амплитуды поля. Результаты с точностью до оцифровки графика соответствуют

данным из [13]. Исследованы и получены границы сходимости метода последовательных приближений для нелинейности Керра, связанные с устойчивостью метода последовательных приближений для соответствующего кубического уравнения. Показана существенная эффективность предложенных алгоритмов применительно к рассмотренным задачам в сравнении с методом Рунге–Кутты 4-го порядка.

3. Получено и решено итерационными методами объемное одномерное интегральное уравнение. Решение трехмерных нелинейных задач проекционными методами интегральных соотношений (частными случаями которых являются метод прямых и неполный метод Галеркина) и методом сеток сталкивается с трудностями для открытых некоординатных задач и анизотропных сред. Одна из альтернатив здесь – метод объемных интегральных уравнений, обладающий универсальностью постановки, но имеющий при дискретизации объемными конечными элементами большую размерность. Его реализация возможна с использованием итерационных процедур [25]. Решение 3-D задач методом объемных интегральных уравнений с размерностью СЛАУ порядка 10^5–10^6 в литературе продемонстрировано.

Авторы выражают благодарность Е.Ю. Альтшулеру за обсуждение вопросов, связанных с параметрами твердотельной плазмы.

Библиографический список

1. *Гинзбург В.Л.* Распространение электромагнитных волн в плазме. М. Физматгиз, 1960. 550 с.
2. *Ахиезер А.И., Ахиезер И.А., Половин Р.В., Ситенко А.Г., Степанов К.Н.* Электродинамика плазмы. М.: Наука, 1974. 720 с.
3. *Литвак А.Г.* Динамические нелинейные электромагнитные явления в плазме // Вопросы теории плазмы. Вып. 10. М.: Атомиздат, 1980. С. 164.
4. *Басс Ф.Г., Гуревич Ю.Г.* Горячие электроны и сильные электромагнитные волны в плазме полупроводников и газового разряда. М.: Наука, 1975. 400 с.
5. *Любченко В.Е., Мартяхин В.А.* Усиление миллиметровых волн при взаимодействии с дрейфующими электронами в слоистых полупроводниковых диэлектрических волноводах // РЭ. 1993. Т. 38, № 10. С. 1900.
6. *Глущенко А.Г.* Теория волноведущих структур СВЧ с нелинейными пленками // Изв. Вузов. Радиофизика. 1988. Т. 31, № 9. С. 1098.
7. *Смирнов Ю.Г.* О распространении электромагнитных волн в цилиндрических диэлектрических волноводах, заполненных нелинейной средой // РЭ. 2005. Т. 50, № 2. С. 196.
8. *Лерер А.М.* Простой метод исследования распространения электромагнитных волн в нелинейных диэлектрических средах // РЭ. 1997. Т. 42, № 6. С. 649 .
9. *Макеева Г.С., Голованов О.А.* Электродинамический анализ взаимодействия электромагнитных волн с нелинейными гиромагнитными включениями в волноведущих структурах // РЭ. 2006. Т. 51, № 3. С. 261.
10. *Никогосян А.С.* Генерация УКИ миллиметрового и субмиллиметрового диапазонов в волноводе, частично заполненном нелинейным кристаллом // Квантовая электроника. 1988. Т. 15, № 5. С. 969.
11. *Молотков И.А., Вакуленко С.А.* Сосредоточенные нелинейные волны. Л.: Изд-во Ленинградск. ун-та, 1988. 240 с.

12. *Молотков И.А., Вакуленко С.А.* Нелинейные локализованные волновые процессы. М.: Янус-К, 1999. 176 с.
13. *Молотков И.А. Маненков А.Б.* О нелинейных туннельных эффектах // РЭ. 2007. Т. 52, № 7. С. 799.
14. *Миронов В.А.* От нелинейном просветлении плоского плазменного слоя // Изв. вузов. Радиофизика. 1971. Т. 14. 1450.
15. *Исаков М.В. Пермяков В.А.* Численный анализ распространения H-волны в прямоугольном волноводе с включением нелинейного диэлектрика // Изв. вузов. РФ. 1988. Т. 31, № 9. С. 1139.
16. *Альтшулер Е.Ю., Давидович М.В.* Дифракция сильной электромагнитной волны на полупроводниковых элементах в прямоугольном волноводе // Успехи современной радиоэлектроники. 2008. № 10. С. 39.
17. *Альтшулер Е.Ю., Давидович М.В.* Нелинейная дифракция электромагнитной волны на полупроводниковом элементе в прямоугольном волноводе // Физика волновых процессов и радиотехнические системы. 2008. Т. 11, № 4. С. 64.
18. *Голованов О.А.* Электродинамический анализ нерегулярных волноводов и резонаторов с нелинейными средами // РЭ. 1990. Т. 35, № 9. С. 1853.
19. *Давидович М.В.* Метод конечных элементов в пространственно-временной области для нестационарной электродинамики // ЖТФ. 2006. Т. 76, вып. 1. С. 13.
20. *Белоцерковский О.М. Давыдов Ю.М.* Метод крупных частиц в газовой динамике. Вычислительный эксперимент. М.: Наука, 1982. 392 с.
21. *Тихонровов А.В., Трубецков М.К.* Новые задачи многослойной оптики // РЭ. 2005. Т. 50, № 2. С. 265.
22. *Голант Е.И., Голант К.М.* Новый метод расчета спектра и радиационных потерь вытекающих мод многослойных оптических волноводов // ЖТФ. 2006. Т. 86, вып. 8. С. 99.
23. *Лаговский Б.А.* Поглощающие и просветляющие плавно неоднородные покрытия для электромагнитных волн // РЭ. 2006. Т. 51, № 1. С. 74.
24. *Давидович М.В., Алексутова С.В.* Дифракция плоских волн на неоднородном магнитодиэлектрическом слое: сравнительный анализ методов // Излучение и рассеяние электромагнитных волн ИРЭМВ-2007. Труды международной конференции. Таганрог: ТРТУ, 2007. С. 357.
25. *Ортега Дж., Рейнболдт В.* Итерационные методы решения нелинейных систем уравнений со многими неизвестными. М.: Мир, 1975. 558 с.

Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского — *Поступила в редакцию 3.12.2008*; *После доработки 2.03.2010*

NONLINEAR ELECTROMAGNETIC WAVE PASSING THROUGH THE LAYER WITH QUADRATIC AND FRACTIONALLY-POLYNOMIAL PERMITTIVITY DEPENDENCES ON AMPLITUDE

M.V. Davidovich, J.V. Stephuk

The integral equations for powerful flat electromagnetic wave diffraction on nonlinear dielectric layer with cubic nonlinearity and fractionally-polynomial permittivity dependence on wave amplitude have been considered and solved. There are results which have been obtained by several numerical methods: series approaching, minimal discrepancy, power series expansion, and Runge–Kutt methods. Also the some analytical results are presented. The possibilities of power limiting, super-exponential damping and some other effects in semi-conducting plasma have bean shown by numerical simulation.

Keywords: Nonlinear wave equation, diffraction, electromagnetic tunneling, semiconductor plasma, impact ionization, power limiting, stiff differential equations.

Давидович Михаил Владимирович – родился в Саратове (1950). Окончил физический факультет Саратовского государственного университета по специальности физика (специализация – теоретическая и ядерная физика, 1972). С 1972 по 1974 служил в СА. Около 20 лет проработал на предприятиях электронной промышленности Саратова. Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук в области радиофизики (1991) и доктора физико-математических наук в области применения вычислительной техники, математического моделирования и математических методов в научных исследованиях (2000). Профессор кафедры радиотехники и электродинамики СГУ, профессор (2002), Соросовский доцент (2000), Соросовский профессор (2001), Member, IEEE (1995), Senior Member, IEEE (2001), IEEE MTT/ED/AP/CPMT Saratov-Penza Chapter Vice Chair, профессор РАЕ (2009). Область научных интересов – решение краевых задач, интегральные и интегродифференциальные уравнения, метод конечных элементов, вариационные методы, электродинамика и оптика волноведущих и неоднородных структур в спектральной области, решение обратных задач, микроволновое зондирование, нестационарная нелинейная электродинамика структур и диспергирующих сред. Автор более 250 работ по указанным направлениям, опубликованных в отечественной и зарубежной печати. Редактор сборника «Modeling in Applied Electromagnetics and Electronics», член редакционной коллегии журнала «Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия физика».

410012 Саратов, ул. Астраханская, 83
Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского
E-mail: davidovichmv@info.sgu.ru

Стефюк Юлия Валентиновна – родилась в Саратове (1973), окончила СГУ (2004), в настоящее время является начальником отдела в правительстве Саратовской области и учится в заочной аспирантуре кафедры радиотехники и электродинамики СГУ. Имеет 13 научных публикаций. Область научных интересов – численные методы, итерационные методы в электродинамике.

410012 Саратов, ул. Астраханская, 83
Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского
E-mail: ystephuk@yandex.ru