



## ДИАГНОСТИКА И ИЗМЕРЕНИЕ ХАОТИЧЕСКОЙ СИНХРОНИЗАЦИИ В ПРИСУТСТВИИ ПОМЕХ

*А. В. Шабунин*

Национальный исследовательский Саратовский государственный университет  
Россия, 410012 Саратов, Астраханская, 83  
E-mail: shabuninav@info.sgu.ru

Работа посвящена методам диагностики и количественного анализа хаотической синхронизации в присутствии шума. В ней проводится анализ влияния аддитивного белого гауссового шума на точность измерения синхронизации хаоса и предлагается модификация стандартного алгоритма, существенно уменьшающая чувствительность результата измерения к действию помехи.

Актуальность исследования обусловлена как его фундаментальным значением для выявления общих закономерностей хаотической синхронизации, так и возможностью практических приложений для диагностики взаимосвязи между колебательными процессами в реальных системах разной природы. Особенно важным является приложение в биологических и медицинских исследованиях, при которых уровень шумов зачастую является большим и помехи неустраняемы. Возможность измерить степень согласованности в колебаниях разных биологических образцов позволяет выявлять скрытые механизмы, действующие между ними, и тем самым поставить правильный диагноз.

Исследования проводятся методом численного (компьютерного) эксперимента. В качестве модели выбрана система двух однонаправленно связанных логистических отображений. Она является, с одной стороны максимально простой, с другой стороны позволяет исследовать на своем примере динамику взаимодействующих автоколебательных систем с бифуркациями удвоения периода.

Проведенные исследования показали, что стандартный корреляционный метод измерения синхронизации хаоса может быть использован лишь при очень малой величине шума. Предложенный в работе алгоритм, основанный на введении временной задержки между оцениваемыми сигналами, позволяет существенно улучшить точность измерений в условиях сильного шума. Он может быть применим для измерения хаотической синхронизации для широкого класса динамических систем, в тех случаях, когда статистические свойства хаотических аттракторов остаются близкими, как в режиме синхронизации, так и вне его.

*Ключевые слова:* Хаотические колебания, синхронизация хаоса, измерение синхронизации.

DOI:10.18500/0869-6632-2016-24-2-27-40

*Ссылка на статью:* Шабунин А.В. Диагностика и измерение хаотической синхронизации в присутствии помех // Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2016. Т. 24, № 2. С. 27–40.

## Введение

Полная синхронизация хаоса – явление точной подстройки временных реализаций взаимодействующих хаотических осцилляторов:  $x_1(t) = x_2(t)$ . Оно было впервые обнаружено и описано в [1], а затем исследовано во множестве работ [2–4]. Наряду с полной синхронизацией существуют и другие виды хаотической синхронизации: обобщенной [5], фазовой [6] и частотной [7–9], lag-синхронизации [10]. Для каждой из них существуют свои способы диагностирования. Разработаны также универсальные методы, применимые к разным видам синхронизации [11–18].

Измерение степени синхронизма хаотических колебаний имеет важное фундаментальное значение, поскольку позволяет выявить «внутренние» изменения, происходящие в структуре аттракторов, соответствующие колебаниям взаимодействующих под-систем, которые не всегда возможно увидеть по временным реализациям и фазовым портретам. Кроме того, данные методы имеют и существенное прикладное значение, как в технике, так и в таких науках, как физика, химия, биология, экономика и т.п., поскольку они позволяют диагностировать взаимосвязь между колебательными процессами, и тем самым выявить взаимозависимость между генерирующими их системами. На практике особенно важно иметь возможность проводить такие измерения в тех случаях, когда динамика «замаскирована» шумом. Такая ситуация встречается в технике, но особенно актуальна в биологических и медицинских исследованиях, при которых уровень шумов зачастую является большим и помехи неустраняемы. Возможность измерить степень согласованности в колебаниях разных биологических образцов позволяет выявлять скрытые механизмы, действующие между ними, и тем самым поставить правильный диагноз.

Таким образом, необходим простой и надежный метод для измерения хаотической синхронизаций, умеющий работать в условиях помех. Большинство из описанных выше алгоритмов измерения были протестированы и доказали свою работоспособность в условиях компьютерного эксперимента или специальных аналоговых моделей, когда шум либо исчезающе мал, либо полностью отсутствует, а сами наблюдаемые сигналы идентичны «внутренними» переменными динамических систем. Эти условия, однако, не выполнимы для большинства практических измерений, поэтому работоспособность любого из указанных алгоритмов требует дополнительных исследований их устойчивости к действию шума большой амплитуды, а также к встречающимся на практике искажениям сигналов: частотным, фазовым, нелинейным и т.п.

В настоящей работе проводится анализ устойчивости одного из методов диагностики и количественного измерения синхронизации хаоса – корреляционного – к действию аддитивного белого гауссова шума (АБГШ). С целью повышения устойчивости к шуму предлагается модификация метода, основанная на различии в характере затухания автокорреляционных функций для шума и хаотического сигнала. Тестирование модифицированного алгоритма проводится с помощью численных экспериментов с моделью однонаправленно связанных хаотических отображений.

### 1. Исследуемая система и режим синхронизации хаоса

В качестве простой системы, демонстрирующей режим синхронизации хаоса в широкой области параметров, выберем модель двух связанных логистических

отображения с однонаправленной связью

$$x(n+1) = f(x(n)), \quad (1)$$

$$y(n+1) = f(y(n) + \gamma(x(n) - y(n))),$$

где  $x$  и  $y$  – скалярные динамические переменные, задающие состояния первой и второй подсистем;  $n$  – дискретное время;  $f(x) = \lambda x(1-x)$  – функция, задающая динамику одиночного отображения;  $\lambda \geq 0$  – его параметр. Первое и второе уравнения обозначают управляющую (ведущую) и управляемую (ведомую) системы, соответственно. Связь устанавливается посредством включения переменной ведущей системы в переменную ведомой; ее интенсивность задается параметром  $\gamma \geq 0$ . Данный вид связи называется *внутренней* связью. Он использовался в ряде работ для моделирования систем скрытой передачи информации посредством хаотической несущей [19, 20].

Динамика системы (1) хорошо изучена и описана в литературе (см., например, [21]). При увеличении параметра  $\lambda$  в фазовом пространстве системы наблюдается каскад бифуркаций удвоения периода периодических орбит, который ведет к формированию хаотических аттракторов. Последние, в зависимости от параметра связи  $\gamma$ , могут соответствовать как режимам синхронизации хаоса, так и несинхронным колебаниям. Очевидно, что при  $\gamma = 1$  две системы гарантированно синхронизированы ( $x_{n+1} = y_{n+1}$ ), тогда как при  $\gamma = 0$  – ведут себя независимо друг от друга.

В нашем исследовании выберем  $\lambda = 3.7$ , что соответствует режиму развитого одноленточного хаоса в одиночном отображении, а следовательно и в связанных отображениях (1) при полной синхронизации. Как описано в работе [21], полная синхронизация достигается при достаточно сильной связи ( $\gamma \geq 0.3$ ) между подсистемами. Перекрестный фазовый портрет в этом случае выглядит как прямая линия (рис. 1, а). При  $0.15 \leq \gamma < 0.3$  в системе наблюдается режим частичной (перемежающейся) синхронизации, называемый также *пузырением хаотического аттрактора*, при котором, наряду с длительными интервалами почти синхронного поведения наблюдаются короткие «всплески» несинхронной динамики. Фазовый портрет, соответствующей зоне перемежающейся синхронизации построен на рис. 1, б. С уменьшением связи интервалы синхронизации становятся все более короткими и все чаще

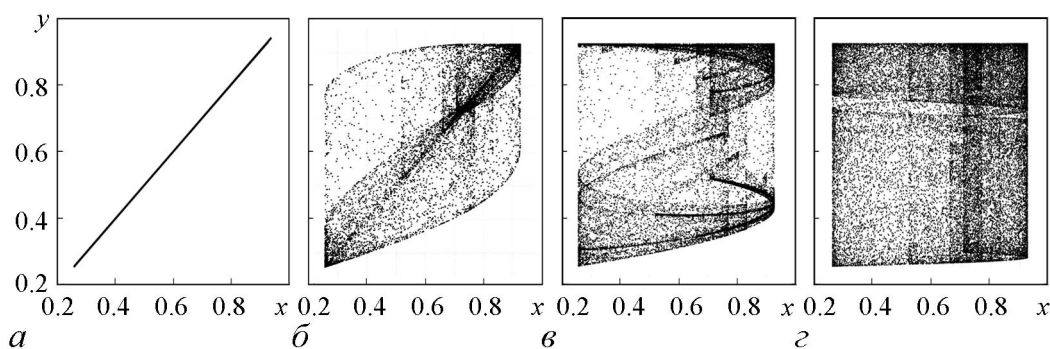


Рис. 1. Перекрестный фазовый портрет системы (1) при различных значениях интенсивности внутренней связи  $\gamma$ : 0.31 (а), 0.28 (б), 0.14 (в), 0.02 (г)

прерываются несинхронными колебаниями, что приводит к уменьшению синхронизации. При малой связи траектория практически не посещает инвариантное подпространство  $x = y$ , хотя фазовый портрет демонстрирует определенную внутреннюю структуру, что свидетельствует о более сложной взаимосвязи между временными реализациями  $x(n)$  и  $y(n)$  (рис. 1, в). Наконец, при  $\gamma \simeq 0$  режим синхронизации визуально перестает диагностироваться (рис. 1, з).

## 2. Количественный анализ синхронизации хаоса

Для количественного анализа степени синхронизма между подсистемами  $x$  и  $y$  можно использовать различные методы: функцию когерентности [18], количество информации [16, 17], «расстояние» между сигналами  $\|x - y\|$  и другие. Классическим алгоритмом, позволяющим оценивать степень сходства между временными рядами, является расчет коэффициента взаимной корреляции  $\kappa$  между сигналами  $x$  и  $y$

$$\kappa(x, y) = \frac{|K_{xy}(0)|}{\sqrt{D_x D_y}}. \quad (2)$$

Здесь  $K_{xy}(n)$  – взаимная корреляция между сигналами  $x$  и  $y$ ,  $D_x$  и  $D_y$  – средние мощности (дисперсии) соответствующих колебаний. Коэффициент корреляции  $\kappa$  принимает значения от нуля до единицы. При этом,  $\kappa = 1$  соответствует полной синхронизации хаотических колебаний, в то время как  $\kappa = 0$  – отсутствию синхронизации.

Рассмотрим возможность использования коэффициента корреляции (2) для количественного оценивания синхронизации между колебаниями первого и второго отображения системы (1). Для этого построим зависимость  $\kappa$  от коэффициента связи  $\gamma$  и сопоставим полученную зависимость с наблюдаемыми

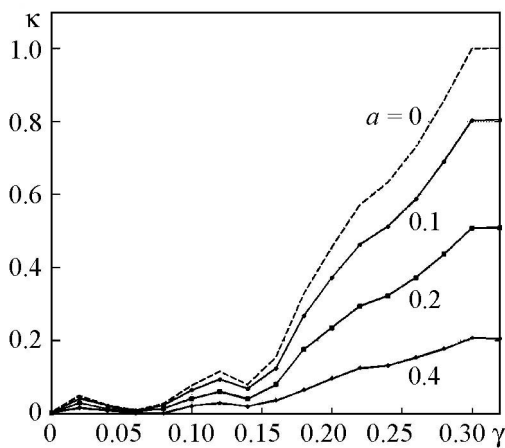


Рис. 2. График зависимости коэффициента взаимной корреляции  $\kappa(\gamma)$  от уровня связи двух систем  $\gamma$  при разных значениях интенсивности шума  $a$ : 0 (штриховая линия), 0.1 (●), 0.2 (■) и 0.4 (◆)

аттракторами. Результат расчета  $\kappa(\gamma)$  приведен на рис. 2 в виде штриховой линии. Из графика видно, что значения  $\kappa$  соответствуют явлениям, наблюдаемым при помощи фазовых портретов: коэффициент корреляции равен 1 в области полной синхронизации при  $\gamma > 0.3$  (см. рис. 1, а), монотонно и почти линейно затухает до значений  $\kappa \simeq 0.06$  в области перемежающейся синхронизации при  $0.14 < \gamma < 0.3$  (рис. 1, б), а затем медленно меняется до нуля при  $\gamma \rightarrow 0$  (рис. 1, в, з). Таким образом, при отсутствии шума и других искажений наблюдаемых переменных значение коэффициента корреляции достаточно точно диагностирует эффект синхронизации и позволяет его количественно измерить.

### 3. Влияние шума на точность измерения синхронизации

Рассмотрим вопрос диагностики и количественной оценки степени синхронизации в условиях белого гауссова шума, сопутствующего процессу измерения. При наличии аддитивного шума точные значения переменных  $x$  и  $y$  неизвестны. Вместо них доступными для наблюдения являются новые переменные

$$\begin{aligned} u(n) &= x(n) + a\xi_x(n), \\ v(n) &= y(n) + a\xi_y(n), \end{aligned} \quad (3)$$

где  $\xi_x$  и  $\xi_y$  – некоррелированные источники белого гауссового шума с нулевым средним и единичной дисперсией,  $a$  – параметр интенсивности шума.

Очевидно, что наличие шума существенно ухудшает возможность визуального диагностирования синхронизации. Например, на рис. 3, *a* показан перекрестный фазовый портрет синхронных колебаний при тех же параметрах, что и аттрактор на рис. 1, *a*, но при добавлении шума с  $a = 0.1$ . В том случае, когда шум накладывается на собственную динамику системы (1) в режиме перемежающейся синхронизации, визуальное диагностирование синхронизации становится еще более затруднительным (рис. 3, *б*).

Рассмотрим насколько изменится вид зависимости  $\kappa(\gamma)$ , при добавлении шума. Для этого рассчитаем  $\kappa(\gamma)$  по формуле (2), где вместо  $x$  и  $y$  используются переменные  $u$  и  $v$ , и отобразим результаты расчета на том же рис. 2, что и для «чистой» системы. Как видно из рисунка, все зависимости качественно подобны графику, построенному для исходной системы, но понижаются с ростом интенсивности шума. Таким образом, рост интенсивности аддитивной помехи ведет к уменьшению измеренной оценки степени синхронизации. Можно сказать, что шум «маскирует» эффект синхронизации.

Проанализируем эффект маскировки синхронизации за счет АБГШ. Так как источники шума не коррелируют ни между собой, ни с сигналами  $x(n)$  и  $y(n)$ , то взаимная корреляция между сигналами не изменится:  $K_{uv}(n) = K_{xy}(n)$ , в то время

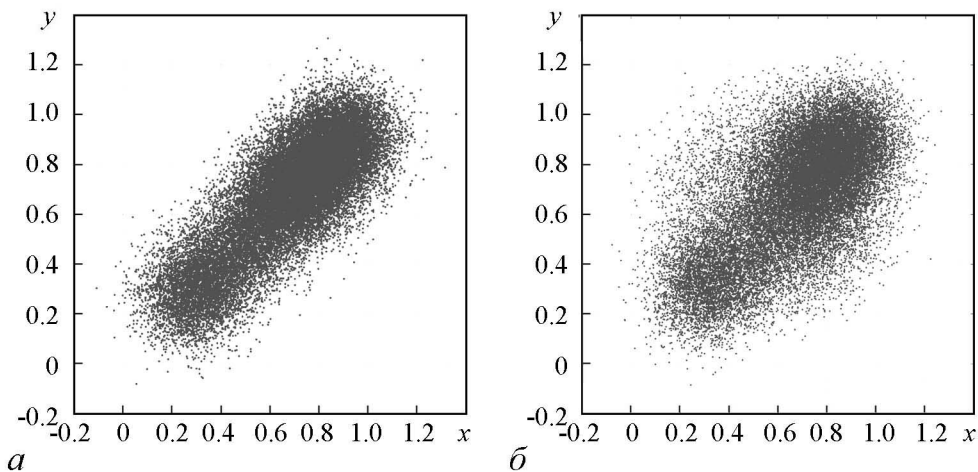


Рис. 3. Фазовый портрет в условиях действия помех с интенсивностью  $a = 0.1$ : в режиме полной синхронизации при  $\gamma = 0.31$  (*a*) и в режиме перемежающейся синхронизации при  $\gamma = 0.27$  (*б*)

как мощности сигналов увеличатся на величину мощности шума:  $D_{u,v} = D_{x,y} + a^2$ . Учитывая, что в рассматриваемом случае синхронизации одинаковых осцилляторов мощности сигналов подсистем почти одинаковы ( $D_x \simeq D_y$ ), получим оценку коэффициента корреляции по зашумленным сигналам

$$\kappa(u, v) \simeq \frac{|K_{xy}(0)|}{D_x + a^2}. \quad (4)$$

Сопоставив (4) с (2), получим

$$\kappa(u, v) \simeq \kappa(x, y) \frac{1}{1 + NSR}, \quad (5)$$

где  $NSR = a^2/D_x$  – отношение шума к сигналу (noise to signal ratio, NSR). Эта величина характеризует степень зашумленности сигналов в радиофизике и радиоэлектронике. Из формулы (5) видно, что аддитивный шум приводит к систематической погрешности, уменьшающей измеренную степень синхронизации по сравнению с истинной в  $1 + NSR$  раз. Введем абсолютную и относительную погрешности измерений:  $\Delta\kappa = \kappa(u, v) - \kappa(x, y)$  и  $\eta = |\Delta\kappa|/\kappa$ . Из формулы (5) получаем

$$\Delta\kappa = -\kappa \frac{NSR}{1 + NSR}, \quad (6)$$

$$\eta = \frac{NSR}{1 + NSR}. \quad (7)$$

Результаты счета полностью подтверждают предсказываемую выражением (7) оценку. На рис. 4 представлены результаты экспериментальных измерений относительной ошибки  $\eta$  для разных значений параметра связи  $\gamma$ , а также график теоретической зависимости (7). Сопоставление теории и эксперимента показывает, что формула (7) дает хорошую количественную оценку для погрешности измерения в широком

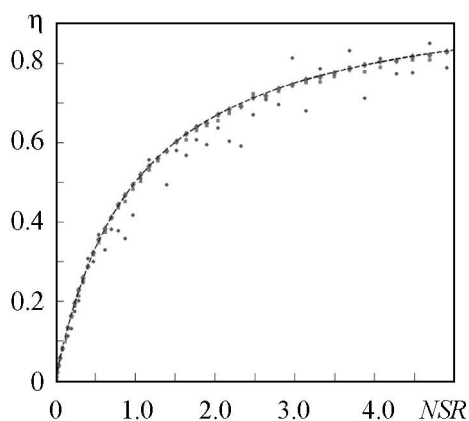


Рис. 4. Относительная погрешность расчета синхронизации между сигналами  $x$  и  $y$  в зависимости от коэффициента «шум-сигнал» для значений параметра связи  $\gamma$ : 0.1 (●), 0.2 (■), 0.3 (◆); штриховая линия – теоретическая зависимость, рассчитанная по формуле (7)

диапазоне значений интенсивности шума и параметра связи  $\gamma$ . Из нее также следует, что корреляционный метод можно использовать для определения степени синхронизации только при  $NSR \ll 1$ ; при этом относительная погрешность расчета почти равна отношению сигнал шума и линейно растет вместе с его ростом:  $\eta \simeq NSR$ .

Таким образом, корреляционный метод не может быть использован для расчета уровня синхронизации, если интенсивность шума сопоставима с величиной амплитуды «внутренних» переменных системы. Попытаемся модифицировать данный алгоритм для повышения точности расчета синхронизации по зашумленным временным рядам.

#### 4. Модификация алгоритма для повышения точности расчета синхронизации в условиях АБГШ

Для уменьшения влияния внешнего шума на результат расчета воспользуемся различием между белым шумом и детерминированным хаотическим сигналом. Несмотря на то, что временные реализации  $x(n)$  и  $y(n)$  при выбранном значении  $\lambda = 3.7$  представляют собой случайные сигналы и внешне напоминают шум, их детерминированная природа проявляется в достаточно медленном спадании модуля автокорреляционной функции  $|K(\Delta n)| = |\langle \tilde{x}(n)\tilde{x}(n - \Delta n) \rangle|$  со временем. Так как динамическая система на протяжении более или менее длительного интервала времени «помнит» свое начальное состояние, то  $|K|$  в течение этого времени остается достаточно большим. Несомненно, что интервал корреляции для разных систем и разных колебательных режимов будет различным, но во всех случаях он будет иметь конечное значение. В то же время «истинно шумовой сигнал» (белый шум), как известно, характеризуется нулевым интервалом корреляции. Данное различие можно использовать для уменьшения влияния шума на величину рассчитанной корреляционным методом степени синхронизации. Действительно, если в формуле (2) использовать временные реализации  $u$  и  $v$  в моменты времени, выбранные с лагом  $n_0 > 0$ , соответствующим области сильной корреляции для сигналов и слабой корреляции для шума, «шумовые добавки» в формуле (2) исчезнут.

Изменим алгоритм расчета величины синхронизации, введя в формулу для расчета коэффициентов корреляции (2) временной лаг  $n_0$

$$\kappa_{n_0}(u, v) = \frac{|K_{uv}(n_0)|}{\sqrt{|K_u(n_0)||K_v(n_0)|}}, \quad (8)$$

где  $\kappa_{n_0}$  – оценка величины синхронизации, полученная с использованием временного лага  $n_0$ . Учитывая, что  $K_{\xi}(n_0 > 0) = 0$ , получим

$$\kappa_{n_0}(u, v) = \left| \frac{K_{xy}(n_0)}{K_x(n_0)} \right|. \quad (9)$$

Здесь предполагается, что корреляционные свойства обоих сигналов близки друг к другу ( $K_x \simeq K_y$ ).

Как мы видим из (9), амплитуда шума  $a$  «ушла» из расчетной формулы для синхронизации. Определим, насколько формула (9) близка по своим значениям к исходной формуле (2), используя линейное приближение функций  $K_{xy}$  и  $K_x$  по  $n_0$

$$|K_{xy}(n_0)| \simeq |K_{xy}(0)|(1 - \alpha n_0), \quad |K_x(n_0)| \simeq K_x(0)(1 - \beta n_0),$$

где  $\alpha = \partial |K_x(0)| / \partial n$  и  $\beta = \partial |K_{xy}(0)| / \partial n$  – некоторые положительные константы, характеризующие скорость затухания соответствующих корреляционных функций. Поскольку  $\kappa(x, y) = |K_{xy}(0)| / K_x(0)$ , получим следующую оценку для  $\kappa_{n_0}$ :

$$\kappa_{n_0}(u, v) \simeq \kappa(x, y) \frac{1 - \alpha n_0}{1 - \beta n_0},$$

откуда следует выражение для относительной погрешности  $\eta$

$$\eta(n_0) \simeq |(\alpha - \beta)n_0|. \quad (10)$$

Для систем с непрерывным временем значение лага можно сделать сколь угодно малым, сведя относительную ошибку к нулю и, соответственно, сведя к минимуму систематическую ошибку, вызванную введением временного лага  $n_0$ . Для систем с дискретным временем это не так, поскольку существует минимальное значение лага  $n_0$ , равное единице. Поэтому, для дискретных отображений формула (9) будет давать значения, близкие к рассчитываемым по формуле (2), только в том случае, когда скорости спада взаимной и собственной корреляционных функций близки друг к другу, что означает сходство собственного и взаимного спектров мощности. Тем не менее, в рассматриваемом случае синхронизации близких по свойствам (или идентичных) подсистем указанное свойство будет, по всей видимости, иметь место, поскольку типы колебаний в обоих осцилляторах одинаковы.

### 5. Расчет синхронизации при помощи модифицированного метода

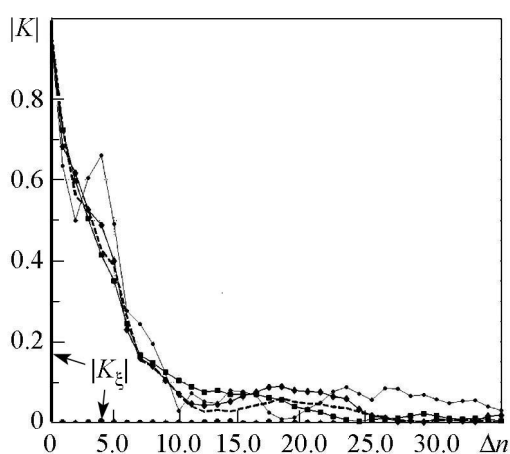


Рис. 5. Графики модуля взаимной корреляции  $|K_{xy}|$  между сигналами  $x$  и  $y$  в зависимости от интервала времени  $\Delta n$  для разных значений параметра связи  $\gamma$ : 0.2 (■), 0.15 (◆) и 0.1 (\*); модуль автокорреляционной функции  $|K_x|$  сигнала  $x$  (штриховая линия); модуль автокорреляционной функции  $|K_\xi|$  используемого источника шума (линейчатые импульсы)

Применим описанный выше алгоритм для расчета синхронизации в рассматриваемой нами системе (1) при выбранном значении параметра  $\lambda = 3.7$ . Прежде всего рассмотрим поведение модуля автокорреляционной функции  $|K_x(\Delta n)|$  и взаимной корреляции  $|K_{xy}(\Delta n)|$  для разных  $\gamma$ , чтобы оценить насколько быстро они спадают со временем. Результаты расчета приведены на рис. 5, где  $|K_x(\Delta n)|$  изображена в виде штриховой линии, а  $|K_{xy}(\Delta n)|$  — в виде сплошных кривых, отмеченных разными маркерами для разных значений параметра  $\gamma$ . На том же рисунке изображен график модуля автокорреляционной функции для используемого шумового сигнала  $\xi_x$ , построенный в виде вертикальных линий. Из сопоставления графиков следует, что:

- значения модулей автокорреляционных функций сигнала остаются существенно большими нуля при  $\Delta n \leq 10$ , в то время как автокорреляционная функция шумового сигнала  $K_\xi(\Delta n)$  спадает к почти нулевым значениям уже при  $\Delta n = 1$ ;
- скорости уменьшения модулей автокорреляционной функции и взаимных корреляций близки друг к другу при небольших  $\Delta n$ .

Таким образом, сделанные выше предположения о близости скоростей спада корреляционных функций при малых  $\Delta n$  подтверждаются для рассматриваемой системы в численном эксперименте. Соответственно, можно ожидать, что при минимально возможном  $n_0 = 1$ , модифицированная формула (8) даст близкие к (2) значения. Проверим так ли это. Пересчитаем зависимость уровня синхронизации от параметра  $\gamma$  с использованием формулы (9) вместо формулы (2) и сравним полученный



график с изображенным на рис. 2. Результаты расчетов приведены на рис. 6: график  $\kappa_1(\gamma)$  при отсутствии шума в виде сплошной кривой, а исходный график  $\kappa(\gamma)$  – в виде штриховой линии. Из их сравнения видно, что обе формулы дают близкие результаты практически во всей области параметра  $\gamma$ , то есть систематическая погрешность, вызванная модификацией алгоритма незначительна.

Рассмотрим теперь, как модифицированный алгоритм работает в условиях шума. Добавим к наблюдаемым сигналам  $x$  и  $y$  шум и сделаем те же расчеты. Результаты приведены на рис. 6. Сравнив данные зависимости с соответствующими графиками на рис. 2, обнаружим, что модификация алгоритма привела к существенному сближению результатов расчетов зашумленных сигналов с результатами расчетов характеристик незашумленных сигналов. Например, при  $a = 0.4$  первоначальный алгоритм давал многократное расхождение рассчитанного значения с истинным, что не позволяло использовать формулу (2) в условиях данного шума, в то время как расчет по формуле (8) дает значения, расходящиеся с истинными в пределах лишь нескольких процентов. Даже при сильном шуме ( $a = 0.7$ ), как следует из рисунка, модифицированный алгоритм (8) можно использовать для оценки степени синхронизации.

Рассчитаем погрешность расчета для модифицированного алгоритма в зависимости от параметра связи и величины шума. Для этого определим среднее значение ошибки расчета  $\langle \Delta \kappa \rangle = \langle \kappa_1 - \kappa \rangle$ , где  $\kappa_1$  – рассчитанное по формуле (8) значение синхронизации в условиях АБГШ, а  $\kappa$  – истинное значение, рассчитанное по формуле (2) и при отсутствии шума. Данная величина определяет систематическую ошибку, вносимую модификацией алгоритма. Кроме этого, подсчитаем также среднеквадратичное отклонение погрешности расчета  $\sigma = \sqrt{\langle (\kappa_1 - \kappa)^2 \rangle}$ , которая характеризует несистематическую погрешность, появляющуюся за счет шума. Результаты обоих расчетов отображены на рис. 7, а и б, соответственно. Как следует из приведенных графиков, систематическая ошибка измерений имеет место, но ее величина незначительна во всем диапазоне параметра связи. Значение среднеквадратичного отклонения  $\sigma$  слабо зависит от параметра связи и, как это и следовало ожидать, растет с ростом интенсивности шума.

Так как погрешность расчета, как это видно из рис. 7, а, слабо зависит от связи, а следовательно, и от степени синхронизации между подсистемами, относительная точность измерения должна существенно различаться для случаев сильной и слабой синхронизации. Для того, чтобы убедиться в этом, рассчитаем относительную погрешность расчета  $\eta$  в зависимости от интенсивности шума и сопоставим ее с погрешностью, подсчитанной ранее по формуле (7). Результаты расчета показаны на рис. 8, а для нескольких значений параметра связи  $\gamma$ .

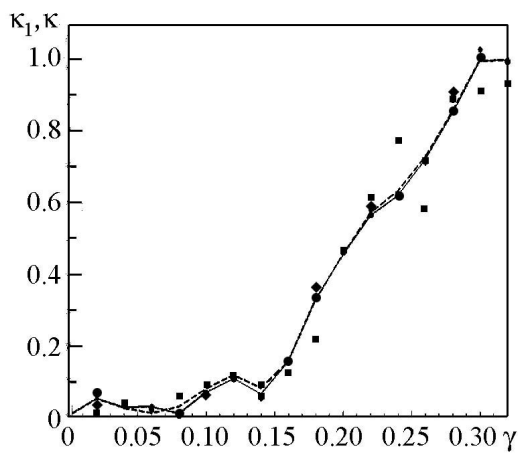


Рис. 6. Уровень синхронизации  $\kappa_1(\gamma)$ , рассчитанный по модифицированной формуле (8) при следующих значениях  $a$ : 0 (сплошная линия), 0.1 (●), 0.4 (\*) и 0.7 (■); штриховой линией изображена зависимость  $\kappa(\gamma)$ , рассчитанная по исходной формуле (2)

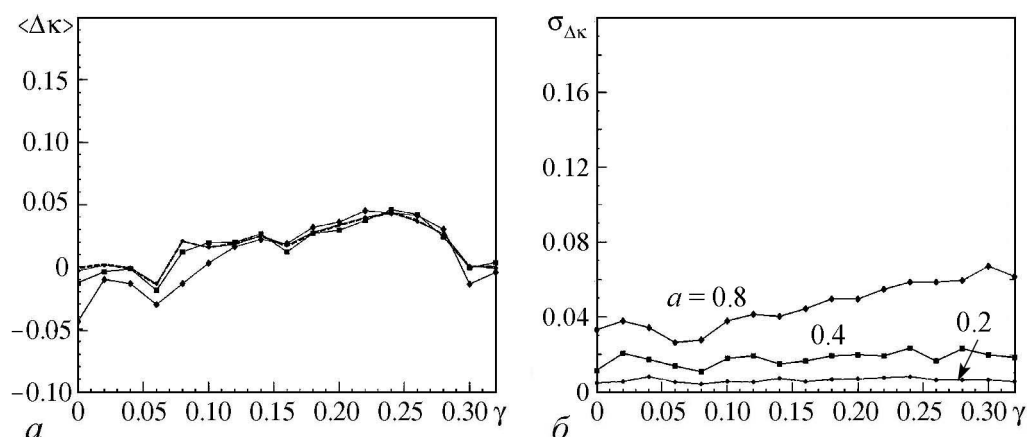


Рис. 7. Зависимость средней погрешности расчета синхронизации  $\langle \Delta \kappa \rangle$  (а) и ее среднеквадратичного отклонения  $\sigma_{\Delta \kappa}$  (б) от параметра связи при разных амплитудах шума  $a$ : 0.2 (●), 0.4 (■) и 0.8 (◆). Штриховой линией на рис.7,а показана систематическая погрешность метода при отсутствии шума

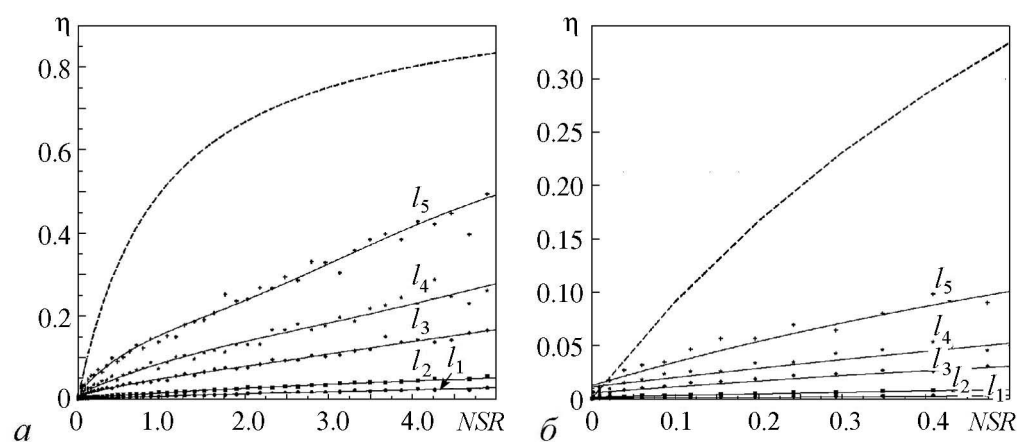


Рис. 8. а – относительная погрешность расчета синхронизации по формуле (8) в зависимости от  $NSR$  для различных значений  $\gamma$ : 0.3 ( $l_1$ ), 0.2 ( $l_2$ ), 0.15 ( $l_3$ ), 0.1 ( $l_4$ ), 0.02 ( $l_5$ ), теоретическая кривая (7) изображена штриховой линией; б – увеличенный фрагмент рис. 8, а

Как видно из графика, при существенном шуме, сопоставимом с величиной сигнала, относительная ошибка измерений по формуле (8) остается значительно меньше такой ошибки при использовании исходной формулы (2), причем это характерно как для сильной, так и достаточно слабой связи. В то же время при исчезающе слабом шуме ( $NSR < 0.02$ ) модифицированный алгоритм дает большую погрешность расчета, чем исходный. В этом случае применять модификацию алгоритма нет необходимости. Данный вывод подтверждают результаты, приведенные на рис. 8, б (увеличенный фрагмент рис. 8, а, содержащий диапазон малых  $NSR$  и выполненный в большем масштабе). Из анализа графиков также можно заключить, что при сильной и средней синхронизации ( $\gamma > 0.15$ ) модифицированный алгоритм позволяет оценить уровень синхронизации с относительной погрешностью в 2–3% вплоть до весьма существенных величин шума ( $SNR \sim 5$ ). Однако в области слабой синхронизации, как и следовало ожидать, точность расчета падает. В этом случае и формула (2), и ее модифицированный вариант (8) дают результаты с относительной ошибкой, сопоставимой с самой измеряемой величиной.

## Выводы

Проведенные исследования устойчивости корреляционного метода расчета синхронизации двух хаотических систем показали, что метод дает достоверные результаты лишь при исчезающе малом шуме; рост аддитивного шума ведет к уменьшению рассчитанного уровня синхронизации с относительной погрешностью, описываемой формулой (7). Предложенный в работе алгоритм, основанный на введении временной задержки между оцениваемыми сигналами, позволяет существенно улучшить точность расчета в условиях сильного шума, хотя и дает небольшую систематическую погрешность, ухудшающую точность расчета при отсутствии помех. Указанный алгоритм может быть применим и к другим системам, в которых наблюдается явление синхронизации хаоса, в тех случаях, когда корреляционные свойства сигналов в области синхронизации и вне ее остаются близкими.

*Работа выполнена при поддержке Министерства образования и науки РФ (проект 1008).*

## Библиографический список

1. *Fujisaka H., Yamada T.* Stability theory of synchronized motion in coupled-oscillator systems // *Progr. Theor. Phys.* 1983. Vol. 69. P. 32.
2. *Пиковский А.С.* О взаимодействии странных аттракторов // ИПФ АН СССР. № 79. Горький, 1983.
3. *Афраймович В.С., Веричев Н.Н., Рабинович М.И.* Стохастическая синхронизация колебаний диссипативных систем // *Известия вузов. Радиофизика.* 1986. Т. 29. С. 1050–1060.
4. *Pecora L.M., Carroll T.L.* Synchronization in chaotic systems // *Phys. Rev. Lett.* 1990. Vol. 64. P. 821–824.
5. *Abarbanel H.D.I., Rulkov N.F., Sushchik M.M.* Generalized synchronization of chaos: The auxiliary system approach // *Phys. Rev. E.* 1996. Vol. 53. P. 4528.
6. *Rosenblum M.G., Pikovsky A.S., Kurths J.* Phase synchronization of chaotic oscillators // *Phys. Rev. Lett.* 1996. Vol. 76. P. 1804.
7. *Анищенко В.С., Постнов Д.Э.* Эффект захвата базовой частоты хаотических автоколебаний. Синхронизация странных аттракторов // *Письма в ЖТФ.* 1988. Т. 14, вып. 6. С. 569–573.
8. *Анищенко В.С., Вадивасова Т.Е., Постнов Д.Э., Сафонова М.А.* Вынужденная и взаимная синхронизация хаоса // *Радиотехника и электроника.* 1991. Т. 36, № 2. С. 338–351.
9. *Anishchenko V.S., Vadivasova T.E., Postnov D.E., Safonova M.A.* Synchronization of chaos // *Int. J. Bifurcation and Chaos.* 1992. Vol. 2, № 3. P. 633.
10. *Rosenblum M.G., Pikovsky A.S., Kurths J.* From phase to lag synchronization in coupled chaotic oscillators // *Phys. Rev. Lett.* 1997. Vol. 78. P. 4193.
11. *Mormann F., Lehnertz K., David P., Elger C.E.* Mean phase coherence as a measure for phase synchronization and its application to the EEG of epilepsy patients // *Physica D.* 2000. Vol. 144. P. 358–369.
12. *Landa P.S., Rosenblum M.* Synchronization and chaotization of oscillations in coupled self-oscillating systems // *Appl. Mech. Reviews.* 1993. Vol. 46, № 7. P. 414–426.

13. *Quiñan Quiroga R., Kraskov A., Kreuz T., Grassberger P.* Performance of different synchronization measures in real data: A case study on electroencephalographic signals // *Phys. Rev. E.* 2002. Vol. 65. 041903.
14. *Schiff S.J., So P., Chang T.* Detecting dynamical interdependence and generalized synchrony through mutual prediction in a neural ensemble // *Phys. Rev. E.* 1996. Vol. 54. P.6708.
15. *Kramer M.A., Edwards E., Soltani M., Berger M., Knight R., Szeri A.J.* Synchronization measures of bursting data: Application to the electrocorticogram of an auditory event-related experiment // *Phys. Rev. E.* 2004. Vol. 70. P. 011914.
16. *Шабунин А.В., Демидов В.В., Астахов В.В., Анищенко В.С.* Количество информации как мера синхронизации хаоса. // *Письма в ЖТФ.* 2001. Т. 27, № 11. С. 78–85.
17. *Shabunin A., Demidov V., Astakhov V., Anishchenko V.* Information theoretic approach to quantify complete and phase synchronization of chaos. // *Phys. Rev. E.* 2002. Vol. 65. P. 056215.
18. *Shabunin A., Astakhov V., Kurths J.* Quantitative analysis of chaotic synchronization by means of coherence // *Phys. Rev. E.* 2005. Vol. 72. P. 016218.
19. *Kocarev L., Halle K.S., Eckert K., Chua L., Parlitz U.* Experimental demonstration of secure communication via chaotic synchronization // *Int. J. Bifurcation and chaos.* 1992. Vol. 2. P. 709–713.
20. *Бельский Ю.Л., Дмитриев А.С.* Передача информации с использованием детерминированного хаоса // *Радиотехника и электроника.* 1993. Т. 38. С. 1310–1515.
21. *Шабунин А.В., Астахов В.В., Демидов В.В., Ефимов А.В.* Мультистабильность и синхронизация хаоса в отображениях с «внутренней» связью // *Радиотехника и электроника.* 2008. Т. 53. С. 702–712.

*Поступила в редакцию*      21.01.2016  
*После доработки*              21.05.2016

## **DIAGNOSTICS AND MEASUREMENT OF CHAOTIC SYNCHRONIZATION IN THE PRESENCE OF NOISE**

*A. V. Shabunin*

National Research Saratov State University  
Russia, 410012 Saratov, Astrakhanskaya, 83  
E-mail: shabuninav@info.sgu.ru

The research is devoted to a method of diagnostics and quantitative analysis of chaotic synchronization in the presence of noise. We analyze how the additive white normal noise influences the accuracy of the measurement of synchronization of chaos. We also propose a new modification of the standard algorithm, which significantly reduces the sensitivity of the method to the noise.

Importance of the study is caused by its perspectives for fundamental researches of general properties of chaotic synchronization, as well as for practical applications to searching interconnections between oscillations in systems of different nature. This is especially important in biological and medical investigations where the level of noise is

usually very large and the interference can not be removed. Thus, possibility of measuring of the level of interconnection between oscillations in different biological samples allows to detect hidden mechanisms existing between them.

The researches are carried out by the method of numerical simulations. The model under study is a system of two uni-directionally coupled logistic maps, which is one of the most simple model in the nonlinear dynamics. From the other side, it allows to explore all general properties of coupled self-sustained oscillators with period-doubling bifurcations.

The results of the researches have demonstrates that the basic correlative method of measurement of chaotic synchronization is valid only when the noise is absent or very small. The proposed in the work algorithm, which is based on using time lag between the estimated signals, can significantly improve the accuracy of measurements in the presence of noise. It can be applied to measurement of chaotic synchronization for a wide class of dynamical systems, in the cases when the statistical properties of chaotic attractors remain similar for both synchronous and non-synchronous regimes.

*Keywords:* Chaotic oscillations, synchronization of chaos, measurement of synchronization.

DOI:10.18500/0869-6632-2016-24-2-27-40

*Paper reference:* Shabunin A.V. Diagnostics and measurement of chaotic synchronization in the presence of noise // *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*. 2016. Vol. 24, № 2. P. 27-40.

## References

1. *Fujisaka H., Yamada T.* Stability theory of synchronized motion in coupled-oscillator systems // *Progr. Theor. Phys.* 1983. Vol. 69. P. 32.
2. *Pikovsky A.S.* On the interaction of strange attractors // *Z. Phys. B. Condensed Matter* 1984. Vol. 55. P. 149.
3. *Afraimovich V.S., Verichev N.N., Rabinovich M.I.* Stochastic synchronization of oscillation in dissipative systems // *Radiophysics and Quantum Electronics*. 1986. Vol. 29, Issue 9. P. 795.
4. *Pecora L.M., Carroll T.L.* Synchronization in chaotic systems // *Phys. Rev. Lett.* 1990. Vol. 64. P. 821.
5. *Abarbanel H.D.I., Rulkov N.F., Sushchik M.M.* Generalized synchronization of chaos: The auxiliary system approach // *Phys. Rev. E*. 1996. Vol. 53. P. 4528.
6. *Rosenblum M.G., Pikovsky A.S., Kurths J.* Phase synchronization of chaotic oscillators // *Phys. Rev. Lett.* 1996. Vol. 76. P. 1804.
7. *Anishchenko V.S., Postnov D.E.* // *Technical Physics Letters*. 1988. Vol. 14, № 3. P. 254.
8. *Anishchenko V.S., Vadivasova T.E., Postnov D.E., Safonova M.A.* // *Radiotekhnika i Elektronika*. 1991. Vol. 36. P. 338 (in Russian).
9. *Anishchenko V.S., Vadivasova T.E., Postnov D.E., Safonova M.A.* Synchronization of chaos // *Int. J. Bifurcation and Chaos*. 1992. Vol. 2, № 3. P. 633.
10. *Rosenblum M.G., Pikovsky A.S., Kurths J.* From phase to lag synchronization in coupled chaotic oscillators // *Phys. Rev. Lett.* 1997. Vol. 78. P. 4193.

11. *Mormann F., Lehnertz K., David P., Elger C.E.* Mean phase coherence as a measure for phase synchronization and its application to the EEG of epilepsy patients. // *Physica D.* 2000. Vol. 144. P. 358.
12. *Landa P.S., Rosenblum M.G., Carbon S.* // *Soviet Physics. Doklady.* 1992. Vol. 37, № 5. P. 237.
13. *Quiñan Quiroga R., Kraskov A., Kreuz T., Grassberger P.* Performance of different synchronization measures in real data: A case study on electroencephalographic signals. // *Phys. Rev. E.* 2002. Vol. 65. P. 041903.
14. *Schiff S.J., So P., Chang T.* Detecting dynamical interdependence and generalized synchrony through mutual prediction in a neural ensemble. // *Phys. Rev. E.* 1996. Vol. 54. P. 6708.
15. *Kramer M.A., Edwards E., Soltani M., Berger M., Knight R., Szeri A.J.* Synchronization measures of bursting data: Application to the electrocorticogram of an auditory event-related experiment. // *Phys. Rev. E.* 2004. Vol. 70. P. 011914.
16. *Shabunin A.V., Demidov V.V., Astakhov V.V., Anishchenko V.S.* // *Technical Physics Letters.* 2001. Vol. 27, № 6. P. 476.
17. *Shabunin A., Demidov V., Astakhov V., Anishchenko V.* Information theoretic approach to quantify complete and phase synchronization of chaos // *Phys. Rev. E.* 2002. Vol. 65. P. 056215.
18. *Shabunin A., Astakhov V., Kurths J.* Quantitative analysis of chaotic synchronization by means of coherence. // *Phys. Rev. E.* 2005. Vol. 72. P. 016218.
19. *Kocarev L., Halle K.S., Eckert K., Chua L., Parlitz U.* Experimental demonstration of secure communication via chaotic synchronization // *Int. J. Bifurcation and Chaos.* 1992. Vol. 2. P. 709.
20. *Belsky Yu.L., Dmitriev A.S.* // *Journal of Communications Technology and Electronics.* 1993. Vol. 38. P. 1310.
21. *Shabunin A.V., Astakhov V.V., Demidov V.V., Efimov A.V.* // *Journal of Communications Technology and Electronics.* 2008. Vol. 53, № 6. P. 666.



*Шабунин Алексей Владимирович* – окончил Саратовский государственный университет (1990). Доктор физико-математических наук (2008), профессор кафедры радиофизики и нелинейной динамики СГУ. Научные интересы – нелинейная динамика, теория колебаний, синхронизация и управление хаосом. Автор более 75 научных публикаций.

410012 Саратов, ул. Астраханская, 83  
 Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского  
 E-mail: shabuninav@info.sgu.ru