

КЛАССИЧЕСКИЕ ДВУМЕРНЫЕ МОДЕЛИ КУЧИ ПЕСКА

А. В. Подлазов

Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН
125047, Москва, Миусская пл., д.4
E-mail: tiger-cub@mail.ru

Работа посвящена изучению моделей кучи песка – открытых нелинейных систем, демонстрирующих возникновение лавинообразного развивающегося отклика на единичное возмущение устойчивого состояния. Подробно рассмотрены пять наиболее известных вариантов правил в двумерной постановке – модели Дхара–Рамасвами, Пастор–Саторраса–Веспиньяни, Федеров, Манни и Бака–Танга–Визенфельда.

Для первых четырех моделей были известны аналитические решения, полученные различными способами, а для пятой – причины, препятствовавшие построению решения. Обобщение этих результатов позволяет выработать единый подход к теоретическому исследованию самоорганизованно-критических явлений.

Самоорганизация в критическое состояние приводит к возникновению масштабно-инвариантных свойств, статистическое описание которых в общем случае не может быть дано на основе правил изучаемых моделей. Между локальным поведением их элементов на микроуровне и целостным поведением всей системы на макроуровне посредничают модели промежуточного уровня. Их правила не выводятся из правил исходных моделей, а формулируются на основе физической интуиции, результатов компьютерного эксперимента и общих представлений о динамических процессах, удерживающих систему вблизи критической точки. На промежуточном уровне коллективная динамика всех рассмотренных моделей сведена к привычным для математической физики процессам, в первую очередь – к несимметричному случайному блужданию. На этой основе предложены сходные методики решения моделей, причем модель БТВ решена впервые.

Для рассматриваемых моделей аналитически определены все критические индексы, на основе чего проанализировано влияние особенностей правил моделей на их общие свойства.

Важнейшей деталью правил является их стохастичность или детерминированность. Первая увеличивает количество характеристик лавины, различающихся по свойствам, а вторая помогает крупным лавинам помещаться в систему конечного размера и приводит к возникновению у системы как у целого динамических симметрий, отсутствующих на уровне правил поведения ее отдельных элементов.

Ключевые слова: Самоорганизованная критичность, модели кучи песка, масштабная инвариантность, степенные распределения, конечно-размерный скейлинг, модели промежуточного уровня, случайные блуждания, спонтанная анизотропия, динамические симметрии.

DOI: 10.18500/0869-6632-2016-24-4-39-70

Ссылка на статью: Подлазов А.В. Классические двумерные модели кучи песка // Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2016. Т. 24, No 4. С. 39–70.

CLASSICAL TWO-DIMENSIONAL SANDPILE MODELS

A. V. Podlazov

Russian Academy of Sciences Keldysh Institute of Applied Mathematics
Miusskaya sq., 4, Moscow, 125047, Russia
E-mail: tiger-cub@mail.ru

I consider sandpile models being open nonlinear systems demonstrating the phenomenon of avalanche-like response to a single disturbance of steady state. I study thoroughly the five most known variants of the two-dimensional rules referred as the models of Dhar–Ramaswamy, Pastor-Satorras–Vespignani, Feder–Feder, Manna and Bak–Tang–Wiesenfeld. The analytical solutions obtained in various ways are known for the first four models and the reasons preventing the construction of a solution are known for the fifth one. The generalization of these results allows to develop a common approach to the theoretical study of self-organized critical phenomena.

Self-organization into the critical state gives rise to the scale-invariant properties. Theirs statistical description can not be generally obtained on the basis of the models' rules. Intermediate level models mediates between the microlevel of the elements local behavior and the macrolevel of the entire system behavior. The rules of these models are not derived from the rules of original models, but are formulated on the ground of physical intuition, computer simulation results and common understanding of the dynamic processes that hold the system near the critical point.

The collective dynamics of all of the models is reduced at the intermediate level to the processes familiar to mathematical physics, the first of them are asymmetric random walks. On this basis, I propose uniform methods of solution of models. The BTW model is solved for the first time.

All the critical indices are analytically calculated for the models considered. The influence of the rules features of models on their common properties is analysed on these ground.

The most important for the rules is the aspect whether they are stochastic or deterministic. The former increases the number of avalanche characteristics with different properties, and the later helps large avalanches fit into a finite-size system and results in the system as a whole obtaining dynamic symmetries absent at the level of elements behaviour rules.

Keywords: Self-organized criticality, sandpile models, scale invariance, power laws, finite-size scaling, meso-level models, random walks, spontaneous anisotropy, dynamical symmetries.

DOI: 10.18500/0869-6632-2016-24-4-39-70

Paper reference: Podlazov A.V. Classical two-dimensional sandpile models // Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics. 2016. Vol. 24, N4. P. 39–70.