

## CONTINUED FRACTIONS, THE PERTURBATION METHOD AND EXACT SOLUTIONS TO NONLINEAR EVOLUTION EQUATIONS

*A. I. Zemlyanukhin, A. V. Bochkarev*

Yuri Gagarin State Technical University of Saratov  
Politekhnikeskaya 77, Saratov, 410008, Russia  
E-mail: zemlyanukhinai@sstu.ru

A new method is proposed in which constructing exact solutions to nonlinear evolution equations is based on successive applying the perturbation method and apparatus of the continued fractions. It is shown that exact solitary-wave solutions arise in the limiting case as the sum of geometric series of the perturbation method based on the linearized problem. It is demonstrated that the continued fraction corresponding to the perturbation series, terminates to a convergent giving an expression for the desired exact soliton-like solution. The order of the convergent is established to be not less than twice the pole order of the original equation's solution. The effectiveness of the method is demonstrated on the solution of integrable 5th order equation of the Korteweg–de Vries family, 3rd order equation with 5 arbitrary constants, the Calogero–Degasperis–Fokas equation and the non-integrable Kuramoto–Sivashinsky equation. The analysis showed that in the case of integrable equations the continued fraction corresponding to the perturbation series terminates unconditionally, that is, the series is geometric or becomes so after regrouping the terms. For non-integrable equations the requirement of termination of the continued fraction that is equivalent to the geometricity of the perturbation series leads to the conditions on the original equation coefficients, which are necessary for the existence of exact soliton-like solutions. The advantages of the method, which can be easily implemented using any of the computer mathematics systems, include the ability to work with equations, the solution of which has a pole of zero, fractional or higher natural order.

*Keywords:* Continued fractions, perturbation method, exact solutions, nonlinear evolution equations.

DOI: 10.18500/0869-6632-2016-24-4-71-85

*Paper reference:* Zemlyanukhin A.I., Bochkarev A.V. Continued fractions, the perturbation method and exact solutions to nonlinear evolution equations // Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics, 2016. Vol. 24. N4. P. 71–85.

# НЕПРЕРЫВНЫЕ ДРОБИ, МЕТОД ВОЗМУЩЕНИЙ И ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ЭВОЛЮЦИОННЫХ УРАВНЕНИЙ

*А. И. Землянухин, А. В. Бочкарёв*

Саратовский государственный технический университет имени Гагарина Ю. А.  
410054 Саратов, ул. Политехническая, 77  
E-mail: zemlyanukhinai@sstu.ru

Предложен новый метод построения точных решений нелинейных эволюционных уравнений, основанный на последовательном применении метода возмущений и аппарата непрерывных дробей. Показано, что точные уединенно-волновые решения возникают в предельном случае как суммы геометрических рядов метода возмущений на основе линеаризованной задачи. Продемонстрировано, что непрерывная дробь, соответствующая ряду возмущений, обрывается, и оставшаяся подходящая дробь дает выражение для искомого точного солитоноподобного решения. Установлено, что порядок подходящей дроби не меньше удвоенного порядка полюса решения исходного уравнения. Эффективность метода продемонстрирована на решении интегрируемых уравнений: семейства Кортевега–де Вриза 5-го порядка, третьего порядка с 5-ю произвольными постоянными, Калоджеро–Дегаспериса–Фокаса и неинтегрируемого уравнения Курамото–Сивашинского. Проведенный анализ показал, что в случае интегрируемых уравнений непрерывная дробь, соответствующая степенному ряду метода возмущений, обрывается безусловно, то есть ряд является геометрическим или становится таковым после перегруппировки слагаемых. Для неинтегрируемых уравнений требование обрывания непрерывной дроби, равносильное геометричности ряда метода возмущений, приводит к условиям на коэффициенты исходного уравнения, необходимым для существования точных солитоноподобных решений. К преимуществам метода, который может быть легко реализован с помощью любой из систем компьютерной математики, можно отнести возможность работы с уравнениями, решение которых имеет полюс нулевого, дробного или высокого натурального порядка.

*Ключевые слова:* Непрерывные дроби, метод возмущений, точные решения, нелинейные эволюционные уравнения.

DOI: 10.18500/0869-6632-2016-24-4-71-85

*Ссылка на статью:* Землянухин А.И., Бочкарев А.В. Непрерывные дроби, метод возмущений и точное решение нелинейных эволюционных уравнений // Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика, 2016. Т. 24. No 4. P. 71–85.