УДК 517.957:517.537.3

МЕТОД НЬЮТОНА ПОСТРОЕНИЯ ТОЧНЫХ РЕШЕНИЙ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ И НЕИНТЕГРИРУЕМЫХ ЭВОЛЮЦИОННЫХ УРАВНЕНИЙ

А. И. Землянухин, А. В. Бочкарев

Саратовский государственный технический университет имени Гагарина Ю.А.
Россия, 410054 Саратов, ул. Политехническая, д. 77

E-mail: zemlyanukhinai@sstu.ru, ab2009sar@list.ru

Предложена модификация метода степенных рядов Ньютона для решения нелинейных обыкновенных и неинтегрируемых эволюционных уравнений. На первом этапе метода определяется несколько первых членов степенного ряда для искомой зависимой переменной. Для этого используется либо прямое разложение в степенной ряд по независимой переменной с последующей подстановкой в уравнение, либо разложение в функциональный ряд метода возмущений по степеням формального параметра. Во втором случае последовательное решение уравнений метода возмущений позволяет выразить члены ряда в форме возрастающих натуральных степеней экспоненциального решения линеаризованной задачи и получить степенной ряд после соответствующей замены. На втором этапе метода постулируется геометричность полученного степенного ряда. Для большинства интегрируемых уравнений такой ряд оказывается безусловно геометрическим, то есть найденные слагаемые составляют последовательность геометрической прогрессии. Для многих неинтегрируемых уравнений возникают условия, связывающие коэффициенты уравнения с параметрами искомого решения, при выполнении которых члены ряда образуют геометрическую прогрессию. В этих случаях сумма геометрической прогрессии есть точное решение исходного уравнения. Показано, что знаменатель прогрессии представляется многочленом, степень которого не может быть меньшей порядка полюса решения уравнения. Эффективность метода продемонстрирована на нелинейном обыкновенном дифференциальном уравнении третьего порядка и семействе обобщенных эволюционных уравнений Курамото–Сивашинского, для которых построены точные рациональные и уединенно-волновые решения. Указаны достоинства и недостатки предложенного метода по сравнению с другими известными методами решения нелинейных дифференциальных уравнений.

Ключевые слова: Геометрический ряд, метод возмущений, нелинейные эволюционные уравнения, точные решения.

DOI: 10.18500/0869-6632-2017-25-1-64-83

Ссылка на статью: Землянухин А.И., Бочкарев А.В. Метод Ньютона построения точных решений нелинейных дифференциальных и неинтегрируемых эволюционных уравнений// Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2017. Т. 25, No 1. P. 64–83.

NEWTON'S METHOD OF CONSTRUCTING EXACT SOLUTIONS TO NONLINEAR DIFFERENTIAL EQUATIONS AND NON-INTEGRABLE EVOLUTION EQUATIONS

A. I. Zemlyanukhin, A. V. Bochkarev

Yuri Gagarin State Technical University of Saratov
Politekhnicheskaya 77, Saratov, 410008, Russia

E-mail: zemlyanukhinai@sstu.ru, ab2009sar@list.ru

A modification of the Newton's power series method for solving nonlinear ordinary equations and non-integrable evolution equations is proposed. In the first stage of the method the first few terms of a power series for the sought dependent variable are determined. For this we use either the direct power series expansion in independent variable, followed by substitution into the equation, or the decomposition into functional series of perturbation method in powers of the formal parameter. In the second case, a sequential solutions of the equations of the perturbation method allows us to express the terms of the series in the form of increasing natural degrees of exponential solution of the linearized problem and obtain a power series after the corresponding replacement. In the second stage of the method we postulate that the resulting power series is the geometric. For most integrable equations the power series is unconditionally geometric, in other words, found terms of the series form a sequence of geometric progression. For many non-integrable equations, there are conditions linking the coefficients of the equation with the parameters of the sought solution, under which the terms of the series form a geometric progression. In these cases, the sum of a geometric progression is the exact solution to the original equation. It is shown that the denominator of the progression is represented by a polynomial, the degree of which is not less than the pole order of the solution. The effectiveness of the method is demonstrated on a third-order nonlinear ordinary differential equation and the family of generalized Kuramoto-Sivashinski evolution equations, for which the exact rational and solitary-wave solutions are found. The advantages and disadvantages of the proposed method in comparison with other known methods of solving nonlinear differential equations are given.

Keywords: Geometric series, the perturbation method, nonlinear evolution equations, exact solutions.

DOI: 10.18500/0869-6632-2017-25-1-64-83

Paper reference: Zemlyanukhin A.I., Bochkarev A.V. Newton's method of constructing exact solutions to nonlinear differential equations and non-integrable evolution equations. Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics. 2017. Vol. 25. Issue 1. P. 64–83.