

**МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ДИНАМИЧЕСКОГО ХАОСА И ЕЁ ПРИЛОЖЕНИЯ:  
ОБЗОР**

**Часть 1. Псевдогиперболические аттракторы**

*А. С. Гонченко<sup>1</sup>, С. В. Гонченко<sup>1</sup>, А. О. Казаков<sup>2,1,3</sup>, А. Д. Козлов<sup>1</sup>*

<sup>1</sup>Нижегородский национальный исследовательский университет имени Н.И.  
Лобачевского

Россия, 03950 Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23

<sup>2</sup>Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»  
Россия, 603155 Нижний Новгород, ул. Большая Печерская, д.25/12  
ЗУдмуртский государственный университет  
Россия, 426034 Ижевск, ул. Университетская, 1

E-mail: [agonchenko@mail.ru](mailto:agonchenko@mail.ru), [sergey.gonchenko@mail.ru](mailto:sergey.gonchenko@mail.ru),  
[kazakovdz@yandex.ru](mailto:kazakovdz@yandex.ru), [kozozloff@list.ru](mailto:kozozloff@list.ru)

В работе рассматриваются актуальные вопросы современной математической теории динамического хаоса и ее приложений. В настоящее время принято считать, что в конечномерных гладких динамических системах могут наблюдаться три принципиально различных формы хаоса. Это диссипативный хаос, математическим образом которого является странный аттрактор; консервативный хаос, для которого все фазовое пространство является большим «хаотическим морем» с беспорядочно расположенными внутри него эллиптическими островами; и смешанная динамика, характеризующаяся принципиальной неотделимостью в фазовом пространстве аттракторов, репеллеров и консервативного поведения траекторий.

В настоящей работе (открывающей цикл из трех статей) представлены элементы теории псевдогиперболических аттракторов многомерных отображений. Такие аттракторы, также как и гиперболические, являются настоящими странными аттракторами, однако, допускают существование гомоклинических касаний. Мы приводим математическое определение псевдогиперболического аттрактора для случая многомерных отображений, из которого выводим необходимые условия для его существования в трехмерном случае, формулируемые с помощью показателей Ляпунова. Мы также даем описание феноменологических сценариев возникновения псевдогиперболических аттракторов различных типов в однопараметрических семействах трехмерных диффеоморфизмов, предлагаем новые методы исследования таких аттракторов (в частности, метод карт седел и модифицированный метод диаграмм Ляпунова), а в качестве примеров рассматриваем ориентируемые и неориентируемые трехмерные обобщенные отображения Эно.

Во второй части будет дан обзор теории спиральных аттракторов как важного и часто встречающегося в приложениях типа диссипативного хаоса. Третья часть будет посвящена смешанной динамике – нового типа хаоса, который характерен, в частности, для обратимых (реверсивных) систем, то есть систем инвариантных относительно некоторых замен координат и обращения времени. Хорошо известно,



что такие системы встречаются во многих задачах механики, электродинамики и других областей естествознания.

*Ключевые слова:* Странный аттрактор, псевдогиперболичность, гомоклиническое касание, дискретный аттрактор Лоренца, трехмерное обобщенное отображение Эно.

DOI: 10.18500/0869-6632-2017-25-2-4-36

*Ссылка на статью:* Гонченко А.С., Гонченко С.В., Казаков А.О., Козлов А.Д. Математическая теория динамического хаоса и её приложения: Обзор. Часть 1. Псевдогиперболические аттракторы // Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2017. Т. 25, No 2. P. 4–36.

## **MATHEMATICAL THEORY OF DYNAMICAL CHAOS AND ITS APPLICATIONS: REVIEW**

### **Part 1. Pseudohyperbolic attractors**

A. S. Gonchenko<sup>1</sup>, S. V. Gonchenko<sup>1</sup>, A. O. Kazakov<sup>2,1,3</sup>, A. D. Kozlov<sup>1</sup>

<sup>1</sup> N.I. Lobachevsky State University of Nizhni Novgorod – National Research University  
23 Prospekt Gagarina (Gagarin Avenue) BLDG 2, 2nd floor, 603950 Nizhny Novgorod,  
Russia

<sup>2</sup> National Research University Higher School of Economics  
25/12 Bolshaya Pecherskaya Ulitsa, 603155 Nizhny Novgorod, Russia

<sup>3</sup>Udmurt State University, Universitetskaya 1, 426034 Izhevsk, Russia

E-mail: agonchenko@mail.ru, sergey.gonchenko@mail.ru,  
kazakovdz@yandex.ru, kozzzloff@list.ru

We consider important problems of modern theory of dynamical chaos and its applications. At present, it is customary to assume that in the finite-dimensional smooth dynamical systems three fundamentally different forms of chaos can be observed. This is the dissipative chaos, whose mathematical image is a strange attractor; the conservative chaos, for which the whole phase space is a large «chaotic sea» with elliptical islands randomly disposed within it; and the mixed dynamics which is characterized by the principle inseparability, in the phase space, of attractors, repellers and orbits with conservative behavior.

In the first part of this series of our works, we present some elements of the theory of pseudohyperbolic attractors of multidimensional maps. Such attractors, the same as hyperbolic ones, are genuine strange attractors, however, they allow homoclinic tangencies. We also give a description of phenological scenarios of the appearance of pseudohyperbolic attractors of various types for one parameter families of three-dimensional diffeomorphisms, and, moreover, consider some examples of such attractors in three-dimensional orientable and nonorientable Henon maps.



In the second part, we will give a review of the theory of spiral attractors. Such type of strange attractors are very important and are often observed type in dynamical systems. The third part will be dedicated to mixed dynamics – a new type of chaos which is typical, in particular, for (time) reversible systems i.e. systems which are invariant with respect to some changes of coordinates and time reversing. It is well known that such systems occur in many problems of mechanics, electrodynamics, and other areas of natural sciences.

*Keywords:* Strange attractor, pseudohyperbolicity, homoclinic tangency, discrete Lorenz attractor, three-dimensional generalized Henon map.

DOI: 10.18500/0869-6632-2017-25-2-4-36

*Paper reference:* Gonchenko A.S., Gonchenko S.V., Kazakov A.O., Kozlov A.D. Mathematical theory of dynamical chaos and its applications: Review. Part 1. Pseudohyperbolic attractors. Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics. 2017. Vol. 25. Issue 2. P. 4–36.

