

ОТОБРАЖЕНИЯ С КВАЗИПЕРИОДИЧНОСТЬЮ РАЗНОЙ РАЗМЕРНОСТИ И КВАЗИПЕРИОДИЧЕСКИМИ БИФУРКАЦИЯМИ

А. П. Кузнецов^{1,2}, Ю. В. Седова¹

¹Саратовский филиал Института радиотехники и электроники им. В.А. Котельникова РАН
Россия, 410019 Саратов, ул. Зеленая, д. 38

²Саратовский национальный исследовательский государственный
университет имени Н.Г. Чернышевского
Россия, 410012 Саратов, ул. Астраханская, 83
E-mail: arkuz@rambler.ru, sedovayv@yandex.ru

Поступила в редакцию 7.06.2017, после доработки 7.07.2017

В работе обсуждается построение удобных и информационно емких трехмерных отображений, демонстрирующих существование 2-торов и 3-торов. Первое отображение получено путем дискретизации потоковой системы – генератора квазипериодических колебаний. Второе – путем дискретизации климатической модели Лоренц-84. Третье отображение предложено в теории квазипериодических бифуркаций Симо, Броером, Витоло. Необходимость обсуждения таких отображений связана с возможностью для них квазипериодичности разной размерности, а также квазипериодических бифуркаций, то есть бифуркаций инвариантных торов. Данный вопрос пока еще недостаточно освещен как в научной, так и в учебной литературе. Основным методом исследования является построение карт ляпуновских показателей. Карты получены численными методами. На таких картах разными оттенками показаны области периодических режимов, двухчастотной квазипериодичности, трехчастотной квазипериодичности и хаоса. Представлены также иллюстрации динамики в виде фазовых портретов. Обсуждаются особенности и классификационные признаки квазипериодических бифуркаций – бифуркаций инвариантных торов. Квазипериодические бифуркации анализируются с помощью графиков ляпуновских показателей и бифуркационных деревьев. Обсуждается различие квазипериодической бифуркации Хопфа и седло-узловой бифуркации инвариантных торов. Обсуждается зависимость картины от параметра – шага дискретизации. При малых значениях этого параметра картина близка к традиционной системе языков Арнольда, которые, однако, теперь наблюдаются на базе двухчастотных режимов и погружены в трехчастотную область. Новым моментом является появление встроенных в эти языки областей периодических резонансов высокого порядка. С ростом параметра дискретизации картина меняется. Языки с характерными острями-основаниями сменяются полосами двухчастотных режимов со встроенными поперечными полосами периодических резонансов, от которых, в свою очередь, отходит новая система веерообразных языков двухчастотных режимов. Фазовые портреты внутри языков переходят от многооборотных кривых к системе изолированных овалов. Таким образом, показано,

что картина, ассоциирующаяся с квазипериодической бифуркацией Хопфа, достаточно сложна и требует для своего анализа трех параметров. Сопоставляются случаи разных отображений. Показано, что «тор-отображение» наиболее полно описывает круг существенных феноменов в системах с квазипериодичностью разной размерности.

Keywords: Отображения, квазипериодическая динамика, инвариантные торы, квазипериодические бифуркации.

DOI: 10.18500/0869-6632-2017-25-4-33-50

Образец цитирования: Кузнецов А.П., Седова Ю.В. Отображения с квазипериодичностью разной размерности и квазипериодическими бифуркациями // Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2017. Т. 25, № 4. С. 33–50. DOI: 10.18500/0869-6632-2017-25-4-33-50

MAPS WITH QUASI-PERIODICITY OF DIFFERENT DIMENSION AND QUASI-PERIODIC BIFURCATIONS

A. P. Kuznetsov^{1,2}, Y. V. Sedova¹

¹Kotel'nikov Institute of Radio-engineering and Electronics of RAS (Saratov Branch)

38, Zelenaya str., 410019 Saratov, Russia

²National Research Saratov State University

83, Astrakhanskaya str., 410012 Saratov, Russia

E-mail: apkuz@rambler.ru, sedovayv@yandex.ru

Recieved 7.06.2017, revised 7.07 2017

The paper discusses the construction of convenient and informative three-dimensional mappings demonstrating the existence of 2-tori and 3-tori. The first mapping is obtained by discretizing the continuous time system – a generator of quasi-periodic oscillations. The second is obtained via discretization of the Lorentz-84 climate model. The third mapping was proposed in the theory of quasi-periodic bifurcations by Simo, Broer, Vitolo. The necessity of discussing such mappings is connected with the possibility for them of a quasi-periodicity of different dimensions, as well as quasi-periodic bifurcations, i.e. bifurcations of invariant tori. This issue has not yet been adequately covered both in scientific and educational literature. The main method of investigation is the construction of Lyapunov exponents charts. Charts are obtained by numerical methods. On such charts regions of periodic modes, two-frequency quasi-periodicity, three-frequency quasi-periodicity, and chaos are marked by different colors.

Illustrations of dynamics in the form of phase portraits are also presented. Specific features and classification features of quasi-periodic bifurcations – bifurcations of invariant tori – are discussed. Quasi-periodic bifurcations are analyzed using graphs of Lyapunov exponents and bifurcation trees. The difference between the quasi-periodic Hopf bifurcation and the saddlenode bifurcation of invariant tori is discussed. The dependence of the picture on the parameter – the discretization step – is discussed. At small values of this parameter, the picture is close to the traditional system of Arnold's tongues, which, however, are now

observed on the basis of two-frequency regimes and are immersed in a three-frequency region. The new moment is the appearance of regions of periodic high-order resonances built into these languages. As the sampling parameter increases, the picture changes. Tongues with characteristic cuspidbases are replaced by bands of two-frequency modes with built-in transverse bands of periodic resonances, from which, in turn, a new system of fan-like tongues of two-frequency modes departs. The phase portraits inside languages change from multi-turn curves to a system of isolated ovals. Thus, it is shown that the picture associated with the quasi-periodic Hopf bifurcation is quite complex and requires three parameters for its analysis. The cases of different mappings are compared. It is shown that the «torus-mapping» most fully describes the range of essential phenomena in systems with quasi-periodicity of different dimensions.

Ключевые слова: Maps, quasi-periodic dynamics, invariant tori, quasi-periodic bifurcations.

DOI: 10.18500/0869-6632-2017-25-4-33-50

Paper reference: Kuznetsov A.P., Sedova Y.V. Maps with quasi-periodicity of different dimension and quasi-periodic bifurcations. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*. 2017. Vol. 25. Issue 4. P. 33–50. DOI: 10.18500/0869-6632-2017-25-4-33-50