

## Нелинейная теория возмущений на основе вариационного принципа: Модельные примеры

В. В. Учайкин<sup>1</sup>, В. А. Литвинов<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Ульяновский государственный университет,  
Россия, 432017 Ульяновск, ул. Л. Толстого, 42

<sup>2</sup>Барнаульский юридический институт МВД России  
Россия, 656038 Барнаул, ул. Чкалова, 49

E-mail: vuchaikin@gmail.com, lva201011@yandex.ru

Автор для переписки Учайкин Владимир Васильевич, vuchaikin@gmail.com

Поступила в редакцию 6.07.2018, принята к публикации 12.09.2018

**Тема.** Известно, что двойственное представление задач (через основную и сопряженную в смысле Лагранжа функции) позволяет сформулировать эффективную версию теории малых возмущений, однако расширение её области применения путём включения следующих членов ряда теории возмущений резко усложняют процедуру решения. В связи с этим, в ряде работ были предприняты поиски альтернативных подходов. К их числу относится и предложенный В.В.Учайкиным метод вариационного интерполирования (ВИ-метод), использующий не одну, как это имеет место в теории возмущений, а несколько опорных задач с известными решениями. **Цель** – демонстрация особенностей применения ВИ-метода на конкретных примерах и исследование его погрешностей. **Исследуемые модели.** Исследования проводятся на примерах решения нескольких модельных задач теории переноса, в упрощённых постановках представляющих задачи диффузии, переноса нейтронов, заряженных частиц и волн. **Результаты.** Решение параболического уравнения для амплитуды волны рассматривалось в области, где первое приближение теории возмущений неприменимо, тогда как ВИ-метод дал результаты, практически совпадающие с результатами прямого применения разностного метода, хотя для выбранных глубин опорные решения отличались от искомого более чем на порядок, а сложность вычислений ВИ-методом не превысила сложности первого приближения теории возмущений. Аналогичная ситуация обнаружилась и в случае прямого применения ВИ-метода к задаче о прохождении излучения в нерассеивающей среде и в стационарной задаче о диффузии в однородном слое с заданными коэффициентами поглощения  $\sigma$  и диффузии  $\lambda$ . **Обсуждение.** Последняя задача наиболее интересна и наглядна в плане обсуждения, поскольку ведёт к построению топограммы погрешности на плоскости  $(\sigma, \lambda)$ . При данной постановке задачи искомым функционал есть просто функция двух указанных переменных, однако в более общем (и интересном) случае он может оказаться функционалом от функций, характеризующих зависимость свойств среды от координат.

**Ключевые слова:** теория возмущений, сопряжённые функции, стационарный функционал.

**Образец цитирования:** Учайкин В.В., Литвинов В.А. Нелинейная теория возмущений на основе вариационного принципа: Модельные примеры // Изв. вузов. ПНД. 2018. Т.

26, № 6. С. 82–98. <https://doi.org/10.18500/0869-6632-2018-26-6-82-98>. Финансовая поддержка. Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 16-01-00556.

### **Nonlinear perturbation theory based on the variational principle: Model examples**

*V. V. Uchaikin<sup>1</sup>, V. A. Litvinov<sup>2</sup>*

<sup>1</sup>Ulyanovsk State University,

42, L. Tolstoy str., 432017 Ulyanovsk, Russia

<sup>2</sup>Barnaul Law Institute of the Ministry of the Interior of Russia

49, Chkalova str., 656038 Barnaul, Russia

E-mail: [vuchaikin@gmail.com](mailto:vuchaikin@gmail.com), [lva201011@yandex.ru](mailto:lva201011@yandex.ru)

Correspondence should be addressed to Uchaikin Vladimir V., [vuchaikin@gmail.com](mailto:vuchaikin@gmail.com)

*Received 6.07.2018, accepted for publication 12.09.2018*

**Topic and aim.** It is known that the dual representation of problems (via the basic and conjugate functions in the Lagrange sense) allows us to formulate an effective version of the theory of small perturbations, but expanding its scope by including the next terms in the perturbation theory series sharply complicates the solution procedure. In this regard, a number of works have been undertaken to find alternative approaches. Among them is the method of variational interpolation (VI-method), proposed by V.V. Uchaikin, which uses not one, as it is in the perturbation theory, but several reference problems with known solutions. The purpose of the article is to demonstrate some peculiarities of the method in applications to specific model problems. **Models investigated.** The investigations are carried out on the examples of solving several model problems in the transport theory, in simplified formulations representing diffusion problems, neutron transport, charged particles, and waves. **Results.** The solution of the parabolic equation for the wave amplitude was considered in the region where the first-order approximation of perturbation theory is inapplicable, whereas the VI-method showed results that practically coincide with the results given by the finite-difference method, although for the chosen depths the reference («unperturbed») the desired solution differs by an order of magnitude from the reference ones, and the computation didn't exceed in complexity of the first-order approximation of perturbation theory. A similar situation is observed in the case of the application of the VI-method to the problem of the passage of radiation in a non-scattering medium and in the stationary problem of diffusion in a homogeneous layer with given absorption coefficients  $\sigma$  and diffusion  $\lambda$ . **Discussion.** The latter case is more most interesting and visible for discussion, since it leads to the error topogram on the plane  $(\sigma, \lambda)$ . In this formulation of the problem, the desired functional is simply a function of the two material variables, but in a more general (and interesting) case it can turn out to be a functional of functions characterizing the space-time dependence of local material properties of the medium.

*Key words:* perturbation theory, adjoint function, stationary functional.

*Reference:* Uchaikin V.V., Litvinov V.A. Nonlinear perturbation theory based on the variational principle: Model examples. Izvestiya VUZ, Applied Nonlinear Dynamics, 2018, vol. 26, no. 6, pp. 82–98. <https://doi.org/10.18500/0869-6632-2018-26-6-82-98>

*Acknowledgements.* The investigation is financially supported by the Russian Foundation for Basic Research № 16-01-00556.