Изв.вузов "ПНД", т.1, № 3, 4, 1993

УДК 534.1

ПРОСТЕЙШАЯ МОДЕЛЬ ЭКОНОМИЧЕСКОГО РАЗВИТИЯ ОБЩЕСТВА

В.И.Климов, П.С.Ланда

Рассмотрена простейшая динамическая модель развития человеческого общества, описывающая поведение трех компонент: производителей, управленцев и накопленного продукта. Модель позволяет качественно объяснить как смену различных формаций, так и кризисные явления, наблюдавшиеся в обществе. Показано, что основным параметром, определяющим характер экономического развития, является конкуренция между управленцами. При малой конкуренции путь развития общества является тупиковым, а при достаточно большой – прогрессивным.

В последние годы появилось множество динамических моделей экономических явлений [1–4]. Большинство из них касается конкретных экономических процессов, например, инновационных. В 1990 г. Ю.И.Неймарком была предложена простейшая общая математическая модель, позволяющая объяснить принципиальные закономерности экономического развития человеческого общества [5,6]. Эта модель является агрегированной и имеет тот же тип, что и различные модели «хищник–жертва», широко используемые в биологии и экологии. Она упрощенно описывает взаимодействие двух категорий людей, участвующих в производстве, – производителей (при определенном выборе переменных данная величина задается функцией $x(t)$) и управленцев (функцией $-y(t)$) с производимым ими продуктом (функцией $z(t)$). Уравнения модели можно записать в виде

$$\dot{x} = (1 - x - y + z)x, \qquad \dot{y} = \alpha\,(-b - cy + z)y, \tag{1}$$

$$\dot{z} = \begin{cases} F & \text{при } z > 0 \text{ и при } z = 0,\ F > 0, \\ 0 & \text{при } z = 0,\ F < 0, \end{cases} \tag{2}$$

где $F = g\,\dfrac{1 + \varepsilon_1 y}{1 + \varepsilon_2 y}\,\dfrac{x}{1 + \beta z} - ex - fy.$

Параметр g в правой части уравнения (2) характеризует уровень технологии общества, а функция $f(y) = (1 + \varepsilon_1 y)/(1 + \varepsilon_2 y)$, изменяющаяся в пределах от 1 до $\varepsilon_1/\varepsilon_2$, учитывает зависимость производства продукта от количества управленцев (при $\varepsilon_1 > \varepsilon_2$ функция $F(y)$ возрастает с ростом y). Параметр β характеризует тот факт, что производство продукта затрудняется при увеличении количества самого продукта, в частности, из–за ограниченности сырья. Члены $-ex$ и $-fy$ в уравнении (2) описывают потребление продукта производителями и управленцами. В уравнениях (1) член $(1+z)x$ характеризует рост количества производителей x за счет пополнения из числа других категорий населения, причем учитывается, что скорость роста возрастает при увеличении количества продукта z. Члены $-x^2$ и $-yx$ характеризуют уменьшение количества производителей за счет конкуренции между ними и влияния управленцев соответственно. Член $\alpha(z-b)y$ во втором уравнении описывает изменение числа управленцев y в зависимости от количества продукта: если продукта много, число управленцев растет, если мало – уменьшается. Член $-\alpha cy^2$ характеризует уменьшение числа управленцев за счет конкуренции между ними.

Нам представляется, что модель (1), (2) обладает следующими недостатками. Во–первых, во втором уравнении (1) не учтен член, характеризующий переход производителей в управленцы за счет, например, обучения. Этот член можно записать в виде αdxy. Во–вторых, в третьем уравнении члены, описывающие потребление продукта, не зависят от количества продукта z, тогда как очевидно, что такая зависимость существует. В простейшем виде, с учетом насыщения потребления, эту зависимость можно характеризовать функцией, аналогичной $f\,(y)$. Наконец, в уравнении (2) не учтено потребление продукта другими категориями населения. Принимая все это во внимание, можно записать следующие модифицированные уравнения модели:

$$\dot{x} = (1 - x - y + z)x, \qquad \dot{y} = \alpha(-b + dx - cy + z)y,$$

$$\dot{z} = \begin{cases} F & \text{при } z > 0 \text{ и при } z = 0,\ F > 0 \\ 0 & \text{при } z = 0,\ F < 0, \end{cases} \tag{3}$$

где $F = g\,\dfrac{1+\varepsilon_1 y}{1+\varepsilon_2 y}\,\dfrac{x}{1+\beta z} - (ex + fy + \gamma)\,\dfrac{1+\delta_1 z}{1+\delta_2 z}$.

Очевидно, что потребление продукта должно расти с ростом количества продукта. Это будет происходить, если $\delta_1 > \delta_2$.

В зависимости от параметров уравнения (3) имеют разное число особых точек, характеризующих стационарное состояние общества. Первая особая точка расположена в начале координат и всегда неустойчива. Вторая особая точка, имеющая координаты $x = 1$, $y = 0$, $z = 0$, существует только при низком уровне технологии, когда $g \le g^* = e + \gamma$, и устойчива, если $b \ge d$. В данном случае управленцы и накопленный продукт отсутствуют – все, что производится, потребляется. Кроме этой особой точки могут существовать и другие особые точки. Точки одной группы имеют координаты $x = 1 + z$, $y = 0$, где z – неотрицательные корни уравнения

$$\beta e\delta_1 z^3 + \{\beta[e + \delta_1(\gamma + e)] + e\delta_1 - g\delta_2\}z^2 + [(\beta + \delta_1)(\gamma + e) + e - g(\delta_2 + 1)]z + \\ + g^* - g = 0. \tag{4}$$

Условия устойчивости этих особых точек имеют вид

$$z \le \frac{b-d}{1+d},$$

$$g \le \frac{(1+\beta z)^2}{1-\beta}\left(e\,\frac{1+\delta_1 z}{1+\delta_2 z} + (e+\gamma+ez)\frac{\delta_1-\delta_2}{(1+\delta_2 z)^2}\right). \qquad (5)$$

Данным условиям может удовлетворять лишь один из корней уравнения (4). Заметим, что неустойчивость особых точек этой группы является апериодической.

Устойчивая особая точка рассматриваемой группы соответствует второму этапу развития человеческого общества, когда накопленный продукт имеется, но его недостаточно, чтобы "прокормить" управленцев.

Наконец, при достаточно больших значениях g возможна еще одна группа особых точек, определяемых уравнениями

$$x = \frac{(c-1)y+b+1}{1+d}, \quad z = \frac{(c+d)y+b-d}{1+d}, \qquad (6)$$

$$g = \frac{1+\varepsilon_1 y}{1+\varepsilon_2 y}\,\frac{x}{1+\beta z} = (ex+fy+\gamma)\,\frac{1+\delta_1 z}{1+\delta_2 z}. \qquad (7)$$

Отметим, что в одном из решений уравнений (6) и (7) величина y переходит через нуль при $g = g_{cr}$, где

$$g_{cr} = \frac{[\gamma(1+d)+e(b+1)][1+d+\delta_1(b-d)][1+d+\beta(b-d)]}{(1+d)(b+1)\,[1+d+\delta_2(b-d)]}. \qquad (8)$$

Этому значению g соответствует граница устойчивости решения уравнения (4), т.е. $z = (b-d)/(1+d)$.

В отличие от других особые точки этой группы могут быть неустойчивы как апериодически, так и колебательно. Согласно критерию Рауса – Гурвица условие апериодической неустойчивости имеет вид

$$a_3 = \alpha xy\,[(c-1)b_1 + (d+1)b_2 + (c+d)b_3] < 0, \qquad (9)$$

где
$$b_1 = e\,\frac{1+\delta_1 z}{1+\delta_2 z} - \frac{g}{1+\beta z}\,\frac{1+\varepsilon_1 y}{1+\varepsilon_2 y},$$

$$b_2 = f\,\frac{1+\delta_1 z}{1+\delta_2 z} - \frac{g\,(\varepsilon_1-\varepsilon_2)x}{(1+\beta z)(1+\varepsilon_2 y)^2},$$

$$b_3 = \frac{\beta g x}{(1+\beta z)^2}\,\frac{1+\varepsilon_1 y}{1+\varepsilon_2 y} + \frac{\delta_1-\delta_2}{(1+\delta_2 z)^2}\,(ex+fy+\gamma),$$

а условие колебательной неустойчивости следующее:

$$a_1 a_2 - a_3 < 0, \qquad (10)$$

где $a_1 = x + \alpha c y + b_3$, $a_2 = \alpha cxy + (x+\alpha cy)b_3 + xb_1 + \alpha dxy + \alpha y b_2$.

Это условие удобно записать в виде неравенства

$$\alpha < \alpha_{cr}. \qquad (11)$$

Особые точки последней группы соответствуют развитому обществу со сравнительно высоким уровнем технологии. Возникновение колебательной неустойчивости означает возможность рождения вокруг соответствующей особой точки устойчивого предельного цикла, что может имитировать кризисные явления в обществе, т.е. периодически повторяющиеся подъемы и спады экономического развития. Отметим, что область колебательной неустойчивости существенно зависит от параметра c, характеризующего конкуренцию управленцев: она тем меньше, чем больше c.

Рассмотрим, как ведут себя координаты рассмотренных особых точек при стремлении уровня технологии g к бесконечности. Нетрудно показать, что характер их поведения существенно зависит от параметра c. Если $c < 1$, т.е. конкуренция управленцев мала, то при $g \Rightarrow \infty$ количество продукта и число управленцев стремятся к конечным значениям ($z \Rightarrow \dfrac{b+c}{1-c}$, $y \Rightarrow \dfrac{b+1}{1-c}$), а количество производителей x стремится к нулю (при очень высоком уровне технологии для производства конечного количества продукта требуется очень мало производителей). Такой путь развития общества, безусловно, является тупиковым. Если же $c > 1$, то при увеличении уровня технологии g количество продукта (как и числа производителей и управленцев) неограниченно увеличивается тем быстрее, чем больше отношение $\varepsilon_1/\varepsilon_2$ и меньше – δ_1/δ_2. При этом из формул (6), (7) следует, что

$$x = \frac{c-1}{1+d}y, \qquad z = \frac{c+d}{1+d}y, \qquad y = \frac{\varepsilon_1\delta_2}{\beta\varepsilon_2\delta_1}\,\frac{(c-1)(1+d)g}{(c+d)(e(c-1)+f(1+d))}.$$

Очевидно, что такой путь развития общества является прогрессивным.

В качестве иллюстрации на рис. 1 показаны зависимости координат особых точек от уровня технологии g для параметров $b = 2$, $d = e = f = \gamma = 1$, $\beta = 0.1$, $\varepsilon_1 = 10$, $\varepsilon_2 = 1$, $\delta_1 = 10$, $\delta_2 = 1$, $c = 0.5$ и $c = 2$. При этих значениях параметров $g^* = 2$, $g_{cr} = 7$. В области $g^* < g_1 < g < g_{cr}$, где g_1 – некоторое значение g, слабо зависящее от параметра c, исходные уравнения имеют три состояния равновесия, одно из которых (с $y = 0$) всегда устойчиво, второе – неустойчиво, а третье, в зависимости от параметра α, может быть как устойчивым, так и неустойчивым, причем неустойчивость является колебательной.

Условие неустойчивости имеет вид (11), где α_{cr} зависит от параметров c и g (при фиксированных значениях остальных параметров). Зависимости α_{cr} от g для $c = 0.5$ и $c = 2$ показаны на рис. 2. Видно, что величина α_{cr} для $c = 0{,}5$ существенно больше, чем для $c = 2$. С увеличением уровня технологии g значение α_{cr} при $c = 0.5$ стремится к конечному значению, тогда как при $c = 2$ оно уменьшается до нуля. Это значит, что во втором случае развитие общества стабилизируется, начиная с некоторого значения g. Для достаточно малых значений параметра g вблизи границы устойчивости (при $\alpha < \alpha_{cr}$) колебания x, y, z по форме близки к гармоническим. С удалением от границы форма колебаний сильно искажается: они

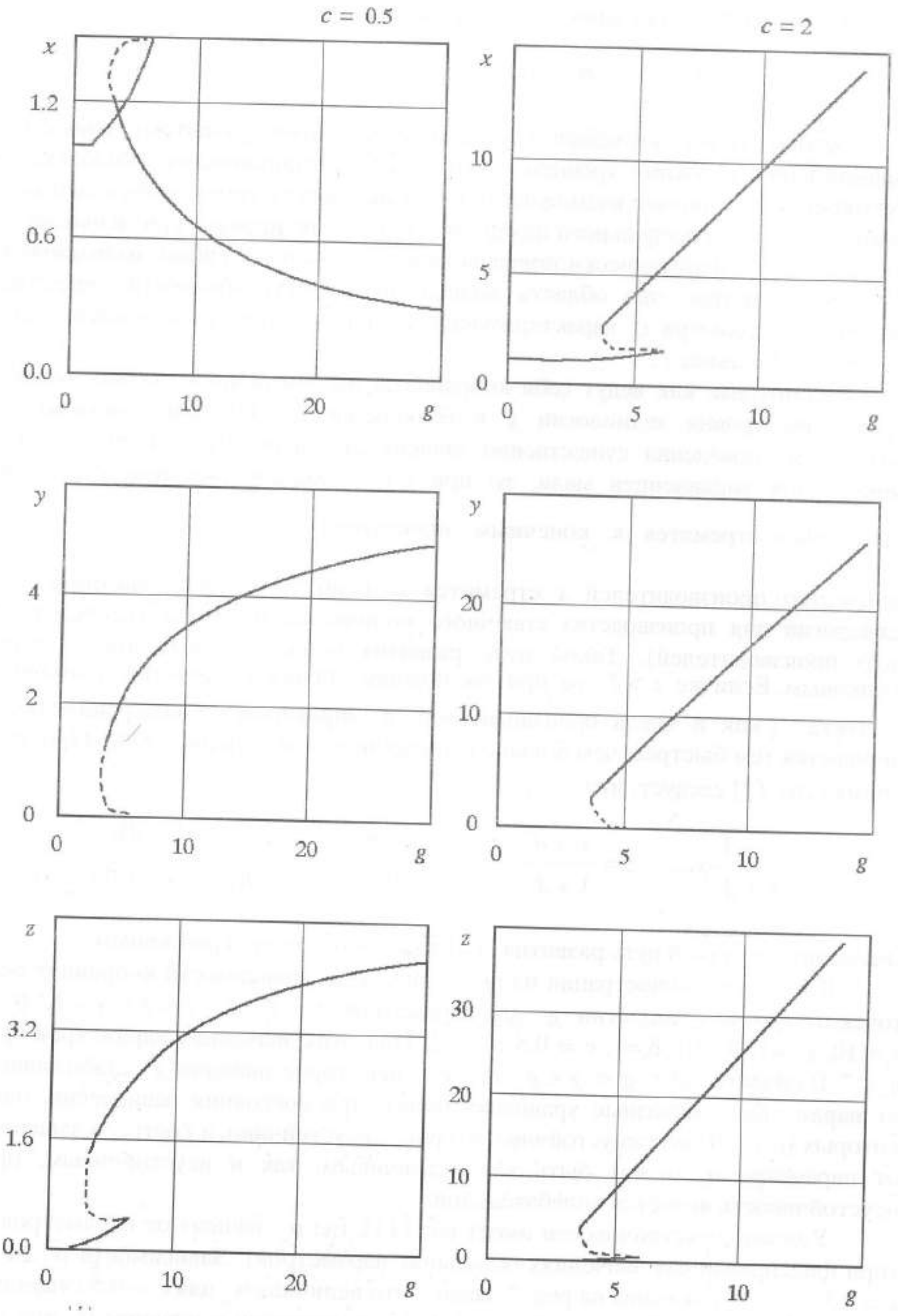


Рис. 1. Зависимости координат особых точек x, y и z соответственно от уровня технологии g

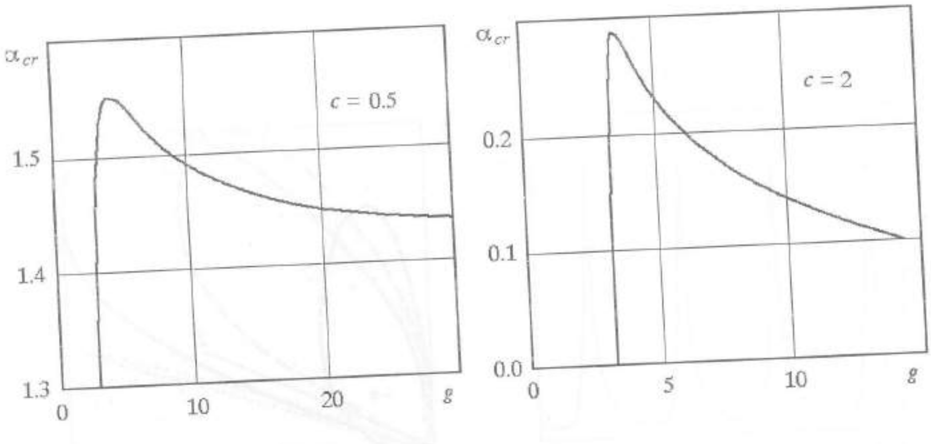


Рис. 2. Зависимости α_{cr} от уровня технологии g

приобретают импульсный характер. В данном случае период колебаний существенно увеличивается. Изменение формы колебаний при уменьшении α и фиксированном значении g продемонстрировано на рис. 3 для $c = 2$. При увеличении g и фиксированном значении α колебания приобретают вид все более острых импульсов (рис. 4, *а*, *б*). Это связано с тем, что при переходе через границу устойчивости $\alpha_{cr}(g)$ возбуждение колебаний является жестким. Действительно, для параметров $\alpha = 0.1$, $g = 15$, $c = 2$ состояние равновесия является устойчивым (см.рис.2).В то же время устойчивым является предельный цикл, соответствующий импульсной форме колебаний.

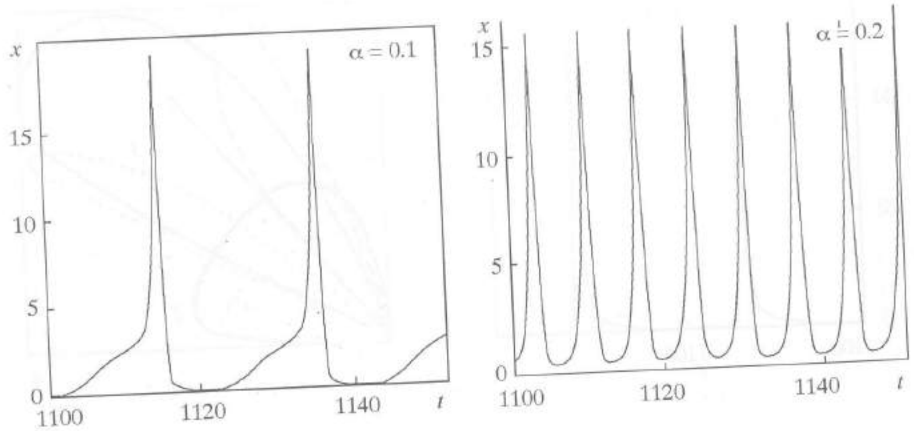
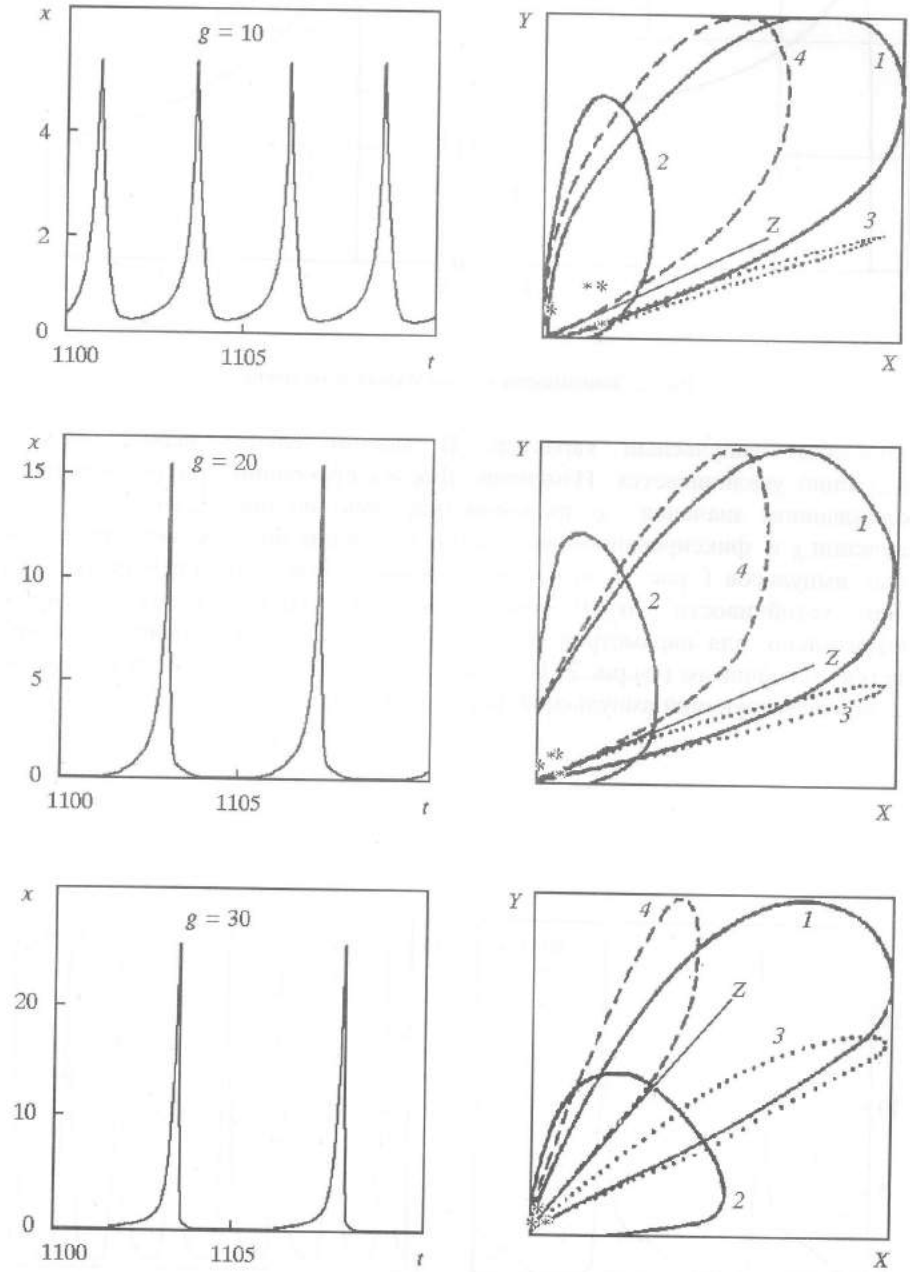


Рис. 3. Форма колебаний координаты $x(t)$ при $g = 5$ и $c = 2$



x
g = 10
0
2
4
1100
1105
t
Y
X
1
2
3
4
Z
x
g = 20
0
5
10
15
1100
1105
t
Y
X
1
2
3
4
Z
x
g = 30
0
10
20
1100
1105
t
Y
X
1
2
3
4
Z

a

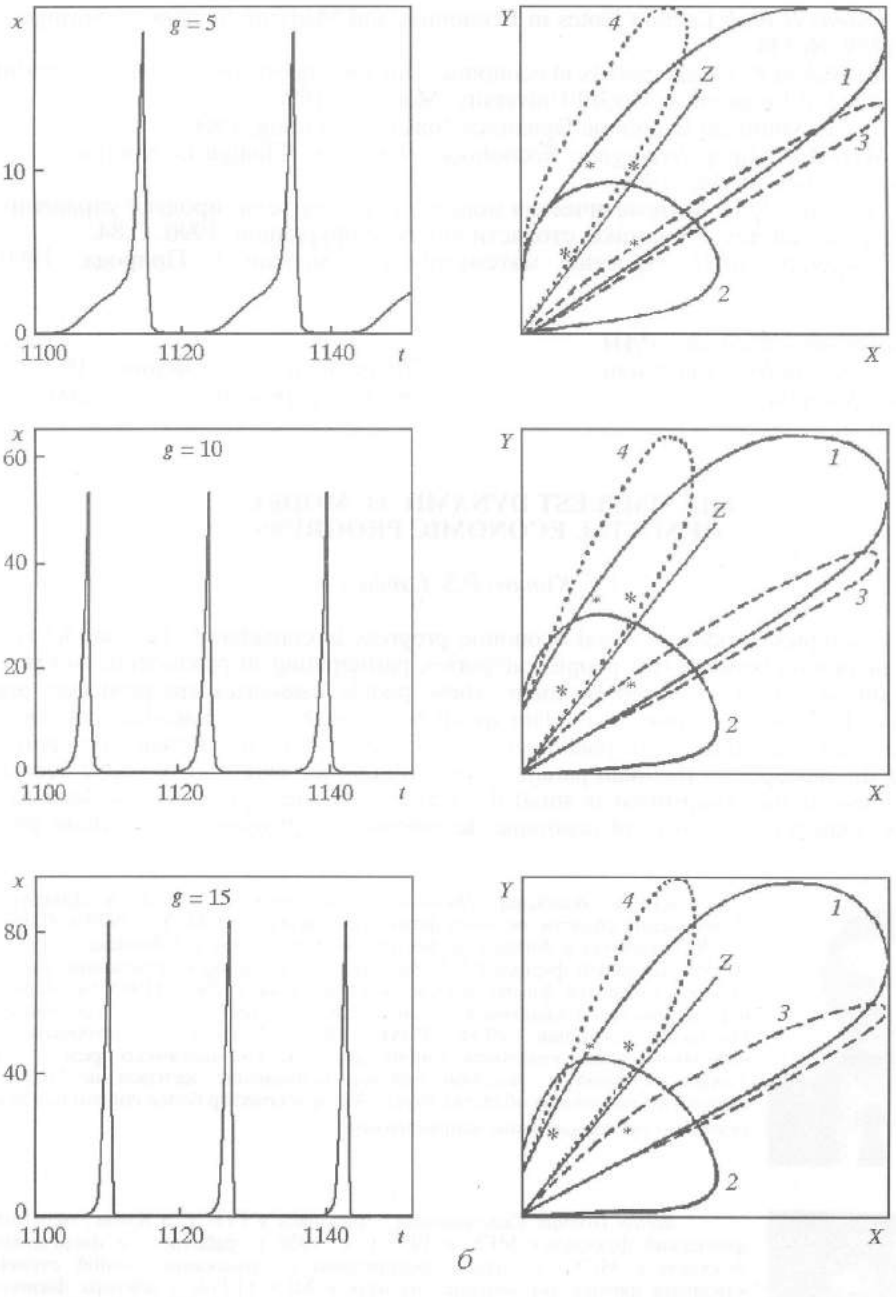


Рис. 4. Зависимости формы колебаний и предельных циклов от параметра g при фиксированных c и α : a – $c = 0.5$, $\alpha = 1.4$; b – $c = 2$, $\alpha = 0.1$; *1* – аксонометрическая проекция предельного цикла, *2*, *3*, *4* – проекции на плоскость *xy*, *xz*, *yz* соответственно. Звездочки означают расположение особых точек в соответствующих плоскостях

of Department of Economics. McGill University. Montreal, 1990.

3. *Puu T.* Nonlinear Economic Dynamics. Springier–Verlag, 1990.

4. *Wei–Bin Zhang.* Synergetic Economics: Time and Change in Nonlinear Ec·onomics. Springier–Verlag, 1991.

5. *Неймарк Ю.И.* Математическая модель производители–продукт управлен·цы // Динамика систем: Динамика, стохастичность, бифуркации. 1990. С.84.

6. *Неймарк Ю.И.* Простые математические модели // Природа. 199(Т.11.С.9.

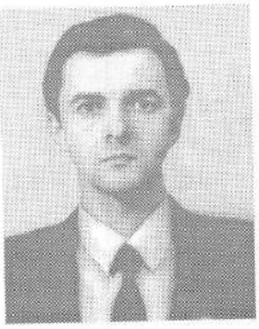
Институт общей физики РАН
Московский государственный университет

Поступила в редакцию 16.11.9
после переработки 20.02.9

THE SIMPLEST DYNAMICAL MODEL OF SOCIAL ECONOMIC PROGRESS

I.V. Klimov, P.S. Landa

The simplest model of social economic progress is considered. This model de scribes interaction between two people categories, participating in production, and pr(duct produced and accumulated by them. These people categories are producers a managers. The model permits to explain qualitatively both the replacement of soc structures and economic crisis phenomena. It is shown that the mutual competiti between the managers is the main parametre determining the character of social econ(mic progress. If the competition is small the way of economic progress will lead t(deadlock. Otherwise, the way of economic development is progressive, i.e. more pr ferable.



Климов Владимир Иванович – родился в 1955 г. в Златоу Челябинской области, окончил физический факультет МГУ в 1979 г. С 1 по 1987 работал в Физико–энергетическом институте в Обнинске, с 198 Институте общей физики РАН. Защитил диссертацию на соискание уче степени кандидата физико–математических наук в ЛГУ (1985) в обла нерелятивистской квантовой механики двух– и трехчастичных резонан(Научный сотрудник ИОФ РАН. Область научных интересов нерелятивистская квантовая теория двух– и трехчастичных резонан(теория пучковой и лазерной плазмы, применение методов нелиней динамики в различных областях науки. Автор и соавтор более сорока науч статей по указанным выше направлениям.

Ланда Полина Соломоновна – родилась в 1931 г. в Киеве, оконч фзический факультет МГУ в 1953 г. С 1956 г. работает на физичес факультете МГУ. Защитила диссертацию на соискание ученой сте кандидата физико–математических наук в МГУ (1959) и доктора физи математических наук в Горьковском госуниверситете (1972) в области тео колебаний и волн. Ведущий научный сотрудник МГУ. Область науч интересов – теория колебаний и волн, радиофизика, применение мет(нелинейной динамики в различных областях науки. Автор и соавтор четы монографий по колебаниям и волнам, в том числе моногра «Стохастические и хаотические колебания». Опубликовала много науч статей по направлениям, указанным выше. Член редакционной колл журналов «Chaos, Solitons and Fractals» и «Прикладная нелинейная динами