Прикладные задачи нелинейной теории колебаний и волн

Изв.вузов «ПНД»,т.2,№ 1,1994 УДК 517.9

ГЛОБАЛЬНАЯ ОГРАНИЧЕННОСТЬ РЕШЕНИЙ НЕКОТОРЫХ УРАВНЕНИЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

М.В. Баженов, Е.Ф. Сабаев

Исследуются вопросы глобальной ограниченности решений специального класса уравнений математической физики, описывающих динамику реактора. Доказательство ограниченности основано на использовании теории положительных и монотонных операторов сдвига по траекториям дифференциальных уравнений. Получены оценки на норму решения сверху.

Вопрос о глобальной ограниченности решений уравнений теоретической физики имеет важное, а в некоторых случаях принципиальное значение. Необходимость решения этого вопроса возникает, например, при анализе условий применимости той или иной математической модели для адекватного описания реального физического явления. Исследование проблемы глобальной ограниченности решений играет важную роль при доказательстве наличия в фазовом пространстве рассматриваемой системы притягивающего стохастического множества – странного аттрактора. Наконец, решающее значение этот вопрос приобретает при исследовании условий нормального функционирования различных физических систем.

Традиционным методом решения указанной проблемы является качественный анализ фазового пространства исследуемой системы с привлечением для этих целей метода функционалов Ляпунова. Однако практическое применение такого подхода вызывает значительные трудности, которые в случае распределенных систем часто становятся непреодолимыми. Ниже для доказательства глобальной ограниченности решений используются принципиально иные методы, основанные на построении систем сравнения с последующим привлечением для их анализа теории положительных и монотонных операторов сдвига по траекториям дифференциальных уравнений [1,2]. Рассматривается популярная в теории реакторов модель активной среды

$$
\begin{aligned}
l\frac{\partial \Phi}{\partial t} &= M^2\nabla^2\Phi + \Phi\rho(\mathbf{x}, t) + \sum_{i=1}^{N}\beta_i(\Phi_i - \Phi),\\
\frac{\partial \Phi_i}{\partial t} &= \lambda_i(\Phi - \Phi_i), \quad i = 1, 2, \dots, N,\\
\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t} &= A\,\mathbf{x} + \mathbf{a}\Phi
\end{aligned}
\tag{1}
$$

с краевым условием

$$\Phi + \alpha(\nabla\Phi, \mathbf{n}) = 0, \qquad \alpha > 0 \tag{2}$$

на границе Γ области Ω. Здесь l, M^2, λ_i, β_i положительные числа; $\rho(\mathbf{x},t)$ – непрерывно дифференцируемая функция: $\mathbf{R}^{m+1} \to \mathbf{R}$; A – матрица $m \times m$ с компонентами, зависящими от радиус–вектора $\mathbf{r}$; $\mathbf{a}$ – вектор из $\mathbf{R}^m$ с компонентами, зависящими от $\mathbf{r}$; Γ – замкнутая выпуклая поверхность. Решение уравнения (1) будем рассматривать в пространстве непрерывных вектор–функций, заданных на $\Omega + \Gamma = \bar{\Omega}$ с нормой

$$||(\Phi,\Phi_1,...,\Phi_N,x_1,...,x_m)|| = \sup_{\mathbf{r} \in \Omega} \left(|\Phi| + \sum_{i=1}^{N} |\Phi_i| + \sum_{i=1}^{m} |x_i| \right).$$

Наряду с диффузионной моделью (1), (2) рассмотрим сосредоточенную модель

$$\begin{aligned} l\dot{n} &= n\rho(\mathbf{x},t) + \sum_{i=1}^{N} \beta_i(n_i - n), \\ \dot{n}_i &= \lambda_i(n - n_i),\ i = 1,..., N, \\ \dot{\mathbf{x}} &= A\mathbf{x} + \mathbf{a}n, \end{aligned} \tag{3}$$

определенную в конечномерном евклидовом пространстве $\mathbf{R}^{N+m+1}$. Здесь элементы матрицы A и вектора $\mathbf{a}$ – постоянные числа. Уравнения (3) могут быть получены из системы (1) с помощью теории возмущений. Заметим, что по физическому смыслу переменные n, n_i, Φ, Φ_i – неотрицательны.

Будем предполагать, что функция $\rho(\mathbf{x},t)$ удовлетворяет неравенству

$$\rho(\mathbf{x},t) \le \rho_0 - f(\mathbf{b}^T\mathbf{x}), \tag{4}$$

где $f(\mathbf{b}^T\mathbf{x})$ – некоторая монотонно возрастающая функция: $\mathbf{R}^m \to \mathbf{R}$, непрерывно дифференцируемая и удовлетворяющая условию Липшица; $\mathbf{b}$ – вектор из $\mathbf{R}^m$ с постоянными компонентами для модели (3) и компонентами, зависящими от радиус–вектора $\mathbf{r}$ для модели (1), (2).

Существование и единственность решений уравнений (1), (2) и (3) при этих предположениях легко могут быть установлены [3,4]. Кроме того, можно показать, что оператор сдвига по траекториям уравнений (1) и (3) положительный по конусу векторов с неотрицательными компонентами

$$K_+ = \{\mathbf{x}: \mathbf{x} = (x_1,...,x_{N+1}),\ x_i \ge 0,\ i = 1,..., N+1\}, \tag{5}$$

т.е. $\Phi(\mathbf{r},t) \ge 0$, $\Phi_i(\mathbf{r},t) \ge 0$ ($n(t) \ge 0$, $n_i(t) \ge 0$), если $\Phi(\mathbf{r},0) \ge 0$, $\Phi_i(\mathbf{r},0) \ge 0$ ($n(0) \ge 0$, $n_i(0) \ge 0$) [1].

Помимо конуса векторов с неотрицательными компонентами K_+, в дальнейшем нам потребуется еще один конус

$$K(A,\mathbf{b}) = \{\mathbf{x}: \mathbf{b}^T e^{At}\mathbf{x} \ge 0,\ t \ge 0\}. \tag{6}$$

Если $K(A,\mathbf{b})$ содержит хотя бы одну внутреннюю точку, то конус $K(A,\mathbf{b})$ – телесный. Легко показать, что если $\mathbf{x} \in K(A,\mathbf{b})$, то вектора $\exp(A\tau)\mathbf{x}$, $\tau \ge 0$ также принадлежат конусу. Действительно,

$$\mathbf{b}^T e^{At} e^{A\tau}\mathbf{x} = \mathbf{b}^T e^{A(t+\tau)}\mathbf{x} \ge 0,$$

поскольку $\mathbf{x} \in K(A,\mathbf{b})$ и $t + \tau \ge 0$. Линейный функционал $\sigma = \mathbf{b}^T\mathbf{x}$ принимает на конусе $K(A,\mathbf{b})$ неотрицательные значения.

Рассмотрим уравнение

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + \mathbf{a}n. \tag{7}$$

Реакция уравнения (7) на дельта–функцию ($n(t) \equiv \delta(t)$) может быть представлена в виде $\mathbf{x}(t) = \exp(At)\mathbf{a}$, $t \geq 0$. Очевидно, что если $\mathbf{a} \in K(A,\mathbf{b})$, то $\mathbf{x}(t) \in K(A,\mathbf{b})$ для всех $t \geq 0$ и наоборот.

Лемма 1. Пусть в уравнении (7) $\mathbf{a} \in \mathrm{int}K(A,\mathbf{b})$, $n(t) \geq 0$ ($t \geq 0$) и матрица A – гурвицева. Тогда для каждого решения уравнения (7) $\mathbf{x}(t)$ существует число $T \geq 0$ такое, что решение $\mathbf{x}(t) \in K(A,\mathbf{b})$ для всех $t \geq T$.

Доказательство. Представим $\mathbf{x}(t)$ в виде

$$\mathbf{x}(t) = e^{At}\mathbf{x}_0 + \int_0^t e^{A(t-t')}\mathbf{a}n(t')dt', \tag{8}$$

где $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(0)$ и рассмотрим выражение

$$\mathbf{b}^T e^{A\tau}\mathbf{x}(t) = \mathbf{b}^T e^{A(t+\tau)}\mathbf{x}_0 + \int_0^t \mathbf{b}^T e^{A(t+\tau-t')}\mathbf{a}n(t')dt'. \tag{9}$$

Очевидно, что второе слагаемое в правой части (9) неотрицательно, поскольку $\mathbf{a} \in \mathrm{int}\ K(A,\mathbf{b})$ и $n(t) \geq 0$. Если $\mathbf{x}_0 \in K(A,\mathbf{b})$, то и первое слагаемое так же неотрицательно и, следовательно, $\mathbf{x}(t) \in K(A,\mathbf{b})$ для всех $t \geq 0$.

Пусть $\mathbf{x}_0 \notin K(A,\mathbf{b})$. Спектр матрицы A принадлежит левой полуплоскости, поэтому при $t \to \infty$ имеем $\mathbf{b}^T\exp(At)\mathbf{x}_0 \to 0$, и, начиная с некоторого момента времени $T > 0$, решение (8) принадлежит конусу (6), $\mathbf{x}(t) \in K(A,\mathbf{b})$.■

Лемма 2. Пусть выполнены условия Леммы 1. Тогда для любых достаточно больших моментов времени t и t' таких, что $t \geq t'$ имеет место неравенство

$$n(t') \geq n(t)\exp[-p_0(t - t')], \tag{10}$$

где $n(t)$ – решение уравнения (3), p_0– максимальный корень уравнения

$$lp + \sum_{i=1}^{N}\frac{p\beta_i}{p+\lambda_i} = \rho_0. \tag{11}$$

Доказательство. Согласно Лемме 1 при любых начальных возмущениях $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$, существует момент времени $T \geq 0$ такой, что условие $\mathbf{b}^T\mathbf{x}(t) \geq 0$ выполняется для всех $t \geq T$. Поскольку $n(t) \geq 0$ учитывая (4), для $t \geq T$ имеем

$$\begin{aligned} l\dot{n} &\leq n\rho_0 + \sum_{i=1}^{N}\beta_i(n_i - n), \\ \dot{n}_i &= \lambda_i(n - n_i),\ i = 1, \ldots, N. \end{aligned} \tag{12}$$

Все внедиагональные элементы матрицы в правой части линейной системы (12) неотрицательны. Следовательно, оператор сдвига по траекториям для системы сравнения (12) обладает свойством монотонности по конусу векторов с неотрицательными компонентами K_+ [1].

Выражение (11) дает характеристическое уравнение линейной системы сравнения (12). Тривиальный анализ показывает, что характеристическое уравнение (11) имеет только действительные корни и его максимальный корень p_0 – неотрицателен , если $\rho_0 \geq 0$. Если $\rho_0 < 0$, то $p_0 < 0$, т.е. спектр собственных значений линейной системы сравнения (12) лежит в левой полуплоскости и все решения уравнения (12) стремятся к нулю при $t \to \infty$. Тогда, в силу монотонности оператора сдвига по траекториям системы (12) и гурвицевости матрицы A, все решения системы (3) при $t \to \infty$ стремятся к тривиальному решению.

Любое решение системы сравнения (12) $\tilde{n}(t)$ не может расти быстрее чем с показателем p_0, и, следовательно, для любых t и t' $(t \geq t')$ имеет место неравенство

$$\tilde{n}(t) \leq \tilde{n}(t')\exp[p_0\,(t - t')]. \qquad (13)$$

Отсюда, учитывая монотонность оператора сдвига по траекториям системы сравнения (12), имеем неравенство (10) для всех $t \geq t' \geq T$.■

Из Леммы 2, в частности, следует, что поскольку решения системы (3) растут не быстрее чем с показателем p_0, не существует решений, уходящих на бесконечность за конечное время.

Теорема 1. Пусть выполняются следующие условия:

1. Матрица A в уравнении (7) гурвицева;

2. $\rho(\mathbf{x},t) \leq \rho_0 - f(\mathbf{b}^T\mathbf{x})$, $f(\mathbf{b}^T\mathbf{x})$ – монотонно возрастающая дифференцируемая функция, $f(0) = 0$, $f(\bar{\sigma}) = \rho_0$, $\bar{\sigma} \geq 0$.

3. Реакция уравнения обратной связи (7) на единичный импульс положительна по конусу $K(A,\mathbf{b})$: $\mathbf{b}^T\exp(At)\mathbf{a} > 0$ при всех $t > 0$.

Тогда все решения конечномерной системы уравнений (3), ограничены на $[0,\infty)$, а при $t \to \infty$ существует оценка сверху на норму решения уравнения (3) вида $\max(n,n_1,\dots,n_N) \leq \bar{n}$, где $\bar{n}$ – корень уравнения $\rho = f[\mathbf{b}^T(p_0I - A)^{-1}\mathbf{a}n]$, p_0 – неотрицательное число.

Доказательство. Рассмотрим уравнение (7). Используя представление (8) решения $\mathbf{x}(t)$ имеем

$$\mathbf{b}^T\mathbf{x}(t) = \mathbf{b}^Te^{At}\,\mathbf{x}_0 + \int_0^t \mathbf{b}^Te^{A(t-t')}\,\mathbf{a}n(t')dt'. \qquad (14)$$

В силу условия 3 Теоремы $\mathbf{a} \in \operatorname{int} K(A,\mathbf{b})$. Действительно, множество точек из $\operatorname{int}K(A,\mathbf{b})$ определяется неравенством $\mathbf{b}^T\exp\,(At)\mathbf{x} > 0$ при $t > 0$. Следовательно, можно воспользоваться Леммой 2 и переписать (14) в виде неравенства

$$\mathbf{b}^T\mathbf{x}(t) \geq \mathbf{b}^T\exp(At)\,\mathbf{x}_0 + \int_0^t \mathbf{b}^T\exp[(A - Ip_0)(t-t')]\,\mathbf{a}dt'n(t) =$$

$$= \mathbf{b}^T\exp(At)\,\mathbf{x}_0 + \mathbf{b}^T(A - Ip_0)^{-1}\exp[(A - Ip_0)t]\mathbf{a}n(t) - \mathbf{b}^T(A - Ip_0)^{-1}\mathbf{a}n(t). \qquad (15)$$

Далее будем предполагать $\rho_0 \geq 0$. Случай $\rho_0 < 0$ тривиален и обсуждался в Лемме 2. Тогда $p_0 \geq 0$ и, поскольку спектр матрицы A принадлежит левой полуплоскости, первые два слагаемых в правой части (15) при $t \to \infty$ стремятся к нулю как $\exp(-\varepsilon t)$, $\operatorname{Re}[\sigma(A)] \leq -\varepsilon$, $\varepsilon > 0$. Таким образом, при $t \geq T_1(C)$ имеет место оценка

$$\mathbf{b}^T\mathbf{x}(t) \geq \mathbf{b}^T(p_0I - A)^{-1}\,\mathbf{a}n(t) - C = \chi(p_0)n(t) - C, \qquad (16)$$

где $C > 0$, $T_1(C) \to \infty$ при $C \to 0$. Заметим, что $\chi(p_0) > 0$, поскольку $p_0 \geq 0$ и $\mathbf{a} \in \operatorname{int}K(A,\mathbf{b})$.

Воспользуемся условиями (4), (16) и при $t \geq T_1(C)$ найдем

$$l\dot{n} \leq n[\rho_0 - f(\chi(p_0)n - C)] + \sum_{i=1}^{N}\beta_i(n_i - n), \qquad (17)$$

$$\dot{n}_i = \lambda_i(n - n_i), \quad i = 1, \dots, N.$$

Система сравнения получается заменой знака $\leq$ знаком $=$.

Недиагональные элементы линейного оператора в правой части (17) неотрицательны и, следовательно, его резольвента является антимонотонным по K_+ оператором. Слагаемое $-nf(\chi(p_0)n)$, не вошедшее в линейный оператор, зависит только от переменной $n(t)$, стоящей в первом уравнении системы (17) на главной диагонали. Поэтому оператор сдвига по траекториям для системы сравнения обладает свойством монотонности по конусу векторов с неотрицательными компонентами K_+ [1]. Используя это утверждение, несложно так же показать, что состояние равновесия

$$n = n_i = \bar{n}, \qquad \rho_0 = f(\chi(p_0)\bar{n} - C) \tag{18}$$

системы сравнения (17) асимптотически устойчиво при любых начальных условиях из K_+.

Таким образом, решения конечномерной системы (3) ограничены на $[0,\infty)$, а при $t \to \infty$ переменная $n(t)$ ограничена числом $\bar{n}$

$$\max(n, n_1, ..., n_N) \le \bar{n},$$

удовлетворяющим уравнению (18); причем, если функция f линейная $(\rho(\mathbf{x},t) \le \rho_0 - \mathbf{b}^T\mathbf{x})$,

$$\bar{n} = \rho_0 / \chi(p_0).\blacksquare$$

Заметим, что ограниченность решений уравнения (7) при условии ограниченности функции $n(t)$ и гурвицевости матрицы A легко устанавливается методом функций Ляпунова.

Предложенное выше доказательство ограниченности решений конечномерной системы (3) легко обобщается на случай нелинейной диффузионной модели (1), (2) в пространстве $\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 \times \mathbf{E}_2 \times ... \times \mathbf{E}_1$, где $\mathbf{E}_1$ – банахово пространство, образованное совокупностью непрерывных скалярных функций, заданных на $\Omega + \Gamma$ с нормой в $\mathbf{C}[\bar{\Omega}]$.

Теорема 2. Пусть выполнены условия Теоремы 1. Тогда все решения уравнений (1), (2) ограничены на $[0,\infty)$, а при $t \to \infty$ существует оценка сверху на норму решения уравнения (1) вида $\max\limits_{\mathbf{r} \in \Omega}(\Phi, \Phi_1, ..., \Phi_N) \le \bar{\Phi}$, где $\bar{\Phi}$ – корень уравнения $\rho = f[\,\mathbf{b}^T(\bar{p}_0 I - A)^{-1}\mathbf{a}\Phi]$; $\bar{p}_0$ – неотрицательное число.

Воспользуемся Леммой 1 и условием (4) и для всех $t \ge T \ge 0$ ($T = 0$, если $\mathbf{x}_0 \in K$) рассмотрим систему сравнения

$$\begin{aligned} l\frac{\partial \Phi}{\partial t} &\le M^2\nabla^2\Phi + \Phi\rho_0 + \sum_{i=1}^{N} \beta_i(\Phi_i - \Phi), \\ \frac{\partial \Phi_i}{\partial t} &= \lambda_i(\Phi - \Phi_i), \quad i = 1, ..., N \end{aligned} \tag{19}$$

с краевым условием (2) на Г.

Система сравнения (19) является линейной, $M = \text{const}$, $\rho_0 = \text{const}$, $\beta_i = \text{const}$, $\lambda_i = \text{const}$ и поэтому, разделяя переменные $\Phi(\mathbf{r},t) = \Sigma\Phi_0(\mathbf{r})n(t)$, $\Phi_i(\mathbf{r},t) = \Sigma\Phi_0(\mathbf{r})n_i(t)$, можно перейти к конечномерной системе сравнения для $n(t)$, $n_i(t)$

$$\begin{aligned} l\dot{n} &\le n(\rho_0 + \bar{\lambda}_0) + \sum_{i=1}^{N} \beta_i(n_i - n), \\ \dot{n}_i &= \lambda_i(n - n_i), \quad i = 1, ..., N \end{aligned} \tag{20}$$

и уравнению для $\Phi_0(\mathbf{r})$

$$M^2\nabla^2\Phi_0 = \lambda_0\Phi_0,$$

$$(\Phi_0 + \alpha(\nabla\Phi_0,\mathbf{n}))\,|_\Gamma = 0. \qquad (21)$$

Здесь в качестве $\bar{\lambda}_0$ выбрано ведущее собственное значение оператора (21).

Конечномерная система сравнения (20) совпадает с системой (12), рассмотренной в Лемме 2. Поэтому, согласно Лемме 2, для всех достаточно больших значений t и t' таких, что $t \geq t' \geq 0$ имеет место неравенство

$$n(t') \geq n(t)\exp[-\bar{p}_0\,(t - t')], \qquad (22)$$

где $\bar{p}_0$ – максимальный корень уравнения

$$lp + \sum_{i=1}^{N} \frac{p\beta_i}{p + \lambda_i} = \rho_0 + \bar{\lambda}_0. \qquad (23)$$

Заметим, что если $\rho_0 + \bar{\lambda}_0 < 0$, то в силу Леммы 2 тривиальное решение системы (1), (2) $\Phi \equiv \Phi_i \equiv 0$ асимптотически устойчиво в целом. Поэтому далее будем предполагать $\rho_0 + \bar{\lambda}_0 \geq 0$ и, следовательно, $\bar{p}_0 \geq 0$.

Используя (22) и повторяя приведенные выше рассуждения, приходим при $t \geq T_1(C)$ к неравенству

$$\mathbf{b}^T\mathbf{x} \geq \chi(\bar{p}_0)\Phi - C,\ \ C > 0,\ \ T_1(C) \to \infty \ \ \text{при}\ C \to 0$$

и, следовательно, к системе сравнения

$$l\,\frac{\partial\Phi}{\partial t} \leq M^2\nabla^2\Phi + \Phi[\rho_0 - f(\chi(\bar{p}_0)\Phi - C)] + \sum_{i=1}^{N}\beta_i(\Phi_i - \Phi),$$

$$\frac{\partial\Phi_i}{\partial t} = \lambda_i(\Phi - \Phi_i), \qquad i = 1, \ldots, N \qquad (24)$$

с краевым условием (2).

Оператор сдвига по траекториям для системы сравнения (24) – монотонный по конусу K_+ вектор–функций $\mathbf{u} = (\Phi, \Phi_1, \ldots, \Phi_N)$ с неотрицательными компонентами. Кроме того, можно показать, что стационарное решение $\Phi \equiv \Phi_i \equiv \tilde{\Phi}$ системы сравнения (24)

$$M^2\nabla^2\tilde{\Phi} + \tilde{\Phi}[\rho_0 - f(\chi(\bar{p}_0)\tilde{\Phi} - C)] = 0,$$

$$(\tilde{\Phi} + \alpha(\nabla\tilde{\Phi},\mathbf{n}))\,|_\Gamma = 0 \qquad (25)$$

асимптотически устойчиво в целом. В свою очередь функция $\tilde{\Phi}$ удовлетворяет неравенству $\tilde{\Phi} \leq \bar{\Phi}$, где $\bar{\Phi}$ – число, которое находится из алгебраического уравнения

$$\rho_0 = f(\chi(\bar{p}_0)\bar{\Phi} - C). \qquad (26)$$

Итак, доказано, что решения системы (1), (2) ограничены, а при $t \to \infty$ имеет место оценка на норму решения $\max\limits_{\mathbf{r}\in\Omega}(\Phi, \Phi_i, \ldots, \Phi_N) \leq \bar{\Phi}$.■

В заключение отметим, что предложенный в работе подход к анализу глобального поведения нелинейных динамических систем (см. так же [5]) является достаточно универсальным и без каких либо принципиальных затруднений может быть перенесен на другие модели как конечномерные, так и в банаховом пространстве.

Библиографический список

1. *Красносельский М.А.* Оператор сдвига по траекториям дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1966.
2. *Крейн С.Г.* Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве. М.: Наука, 1967.
3. *Сабаев Е.Ф.* Системы сравнения для нелинейных дифференциальных уравнений и их приложения в динамике реакторов. М.: Атомиздат, 1980.
4. *Хартман Ф.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Мир, 1970.
5. *Баженов М.В., Сабаев Е.Ф.* Применение дифференциальных неравенств к доказательству глобальной ограниченности решений одного специального класса уравнений математической физики. Препринт № 338 ИПФ РАН. Нижний Новгород, 1993.

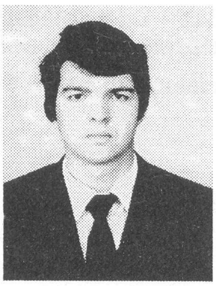
Институт прикладной физики РАН
Нижегородский университет

Поступила в редакцию 17.12.93
после переработки 22.03.94

THE GLOBAL BOUNDEDNESS OF SOLUTIONS TO SOME EQUATIONS OF MATHEMATICAL PHYSICS

M.V. Bazhenov, E.F. Sabaev

The problems of global boundedness of solutions to a particular class of the equations of mathematical physics describing reactor dynamics are investigated. The boundedness is proved proceeding from the theory of positive and monotonic operators of translation along trajectories of differential equations. The upper estimates for the solutions are obtained.



Баженов Максим Владимирович, 1967 г. рождения, научный сотрудник Института прикладной физики РАН. В 1989 г. окончил радиофизический факультет Горьковского университета. Область научных интересов: качественная теория дифференциальных уравнений, теория пространственно–временного хаоса и структурообразования в распределенных неравновесных системах. Имеет 17 публикаций в отечественных и иностранных журналах.

Сабаев Евгений Федорович, 1930 г. рождения, доктор физико–математических наук, профессор, заведующий кафедрой теоретической механики Нижегородского государственного университета. Область научных интересов – качественная теория дифференциальных уравнений и динамика ядерных энергетических установок. Имеет 2 монографии и более 80 публикаций в отечественных и зарубежных журналах.