Прикладные задачи нелинейной теории колебаний и волн

Изв.вузов «ПНД»,т.1, № 3,4, 1993 УДК 535.59

"МОДЕЛЬ ЛОРЕНЦА" ДЛЯ ОПИСАНИЯ КОНВЕКЦИИ В МАГНИТНОЙ ЖИДКОСТИ

Н.М.Рыскин, Д.И. Трубецков

Рассматривается конвекция Рэлея – Бенара в плоском слое магнитной жидкости в однородном постоянном магнитном поле, направленном перпендикулярно поверхности. Для этой модели получена система уравнений, аналогичная системе Лоренца для конвекции в обычной жидкости. Показана возможность управления режимами конвекции с помощью изменения напряженности магнитного поля, что может быть важным при экспериментальном исследовании.

Известно, какое значение имеет изучение нелинейных явлений при тепловой конвекции в жидкости. Именно для этой задачи была впервые выведена система уравнений Лоренца [1], которая на сегодняшний день является одной из эталонных моделей нелинейной физики. Однако вопрос, настолько адекватно данная упрощенная система описывает явления, происходящие в реальной жидкости, до сих пор остается открытым. В основном это связано с незначительным количеством экспериментальных данных.

В последнее время все большее внимание привлекают магнитные жидкости – коллоидные растворы мелких (диаметр порядка 10 нм) ферромагнитных частиц в жидкости–носителе [2]. Представляет интерес построение для магнитных жидкостей системы, аналогичной системе Лоренца, так как можно ожидать, что сочетание свойств, присущих обычным жидкостям, со способностью эффективно взаимодействовать с магнитным полем дает богатые возможности для экспериментальных исследований.

Рассмотрим плоский слой магнитной жидкости толщиной l, помещенный в постоянное однородное магнитное поле, направленное перпендикулярно поверхности. На верхней границе слоя поддерживается постоянная температура T_1, на нижней границе – T_2, ($T_2 = T_1 + \Delta T$). Установившееся в жидкости неоднородное распределение температуры по вертикальной координате вызовет неоднородное распределение намагниченности и поля. Более холодная жидкость будет намагничиваться сильнее и стремиться в область более сильного поля, вытесняя более теплую жикость [2].

В качестве исходных примем следующие уравнения:

$$\rho[\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}\ \nabla)\mathbf{v}\ ] = \eta\nabla^2\mathbf{v} + \rho\mathbf{g} + \mu_0 M\nabla H - \nabla p, \tag{1}$$

$$\mathrm{div}\mathbf{v}\ = 0, \tag{2}$$

$$\rho C_p\left(\frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{v}\ \nabla T\right) + \mathbf{v}\ T\left[\left(\frac{\partial \rho}{\partial T}\right)_p \mathbf{g} + \mu_0\left(\frac{\partial M}{\partial T}\right)_H \nabla H\right] = \chi^2 \nabla T, \qquad (3)$$

$$\operatorname{div}(\mathbf{M} + \mathbf{H}) = 0, \qquad \operatorname{rot} \mathbf{H} = 0. \qquad (4)$$

Здесь ρ – плотность жидкости, $\mathbf{v}$ – скорость, η и χ – коэффициенты вязкости и теплопроводности, соответственно, $\mathbf{M}$ – намагниченность, $\mathbf{H}$ – напряженность магнитного поля, C_p – теплоемкость, T – температура.

(1) представляет собой уравнение движения для магнитной жидкости; при его выводе предполагалось, что вектор намагниченности параллелен полю [3]; (2) – уравнение непрерывности для несжимаемой жидкости; (3) – уравнение теплопроводности, причем слагаемые в квадратных скобках отвечают за охлаждение, соответственно, из–за сжимаемости и магнетокалоритического эффекта; (4) – два уравнения Максвелла в предположении отсутствия токов.

Будем считать, что $\mathbf{M}$ и $\mathbf{H}$ параллельны оси z и их градиенты вызваны исключительно градиентом температуры. Тогда, если $\Delta T \ll T_1$, можно линеаризовать уравнение состояния $M = M(H,T)$:

$$M = M_0 + \chi_m(H - H_0) - K(T - T_2), \qquad (5)$$

где $M_0 = M(H_0,T_2)$, $\chi_m = (\partial M/\partial H)_{H_0,T_2}$ – дифференциальная магнитная восприимчивость, $K = (-\partial M/\partial T)_{H_0,T_2}$ – пиромагнитный коэффициент.

В отсутствии конвекции, когда теплоотвод осуществляется только за счет теплопроводности, $\mathbf{v}=0$. Тогда, считая, что равновесные распределения намагниченности, температуры и магнитного поля зависят только от вертикальной координаты z, получаем:

$$T = T_1 + \Delta T - \Delta T\, z/l, \qquad M = M_0 + \frac{K\Delta T}{1+\chi_m}\ \frac{z}{l}, \qquad H = H_0 - \frac{K\Delta T}{1+\chi_m}\ \frac{z}{l}. \qquad (6)$$

Введем функцию тока ψ, определяемую соотношениями $v_x = -\partial\psi/\partial z$, $v_z = \partial\psi/\partial x$, а также переменные θ, m и h – отклонения, соответственно, температуры, намагниченности и напряженности поля от равновесных значений. Будем считать задачу двумерной. Это означает, что все переменные зависят от горизонтальной координаты x и вертикальной – z. Из уравнения (4) получим (по–прежнему считаем, что $\mathbf{M}$ и $\mathbf{H}$ имеют только z компоненты):

$$\frac{\partial m}{\partial z} + \frac{\partial h}{\partial z} = 0, \qquad \frac{\partial h}{\partial x} = 0, \qquad (7)$$

а из уравнения состояния (5) будем иметь

$$m = \chi_m h - K\theta.$$

Из последнего соотношения, учитывая (7), находим:

$$\frac{\partial m}{\partial z} = \frac{K}{1+\chi_m}\ \frac{\partial \theta}{\partial z}, \qquad \frac{\partial m}{\partial x} = -K\frac{\partial \theta}{\partial x}. \qquad (8)$$

Используем приближение Буссинеска, т.е. всюду, где ρ не стоит под знаком дифференциала, будем считать $\rho = \rho_0 = \text{const}$. При дифференцировании полагаем

$$\rho = \rho_0[1 - \alpha(T - T_0)],$$

где α – коэффициент объемного расширения, $T_0 = (T_1 + T_2)/2$.

Заменим в уравнении (3) в члене, отвечающем за сжимаемость и магнетокалоритический эффект, T на T_0. Тогда из уравнений (1)–(3) с учетом (6)–(8) можно получить следующую систему уравнений:

$$\frac{\partial \nabla^2 \psi}{\partial t} + \frac{\partial(\psi, \nabla^2 \psi)}{\partial(x,z)} = \nu \nabla^4 \psi + \frac{D}{\rho_0} \cdot \frac{\partial \theta}{\partial x} - \frac{\mu_0}{\rho_0} \cdot \frac{K^2}{1 + \chi_m} \cdot \frac{\partial \theta}{\partial z} \cdot \frac{\partial \theta}{\partial x}, \tag{9}$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + \frac{\partial(\psi, \theta)}{\partial(x,z)} = \frac{\Delta T}{l} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial x} - \frac{T_0}{\rho_0 C_p} \left[D \frac{\partial \psi}{\partial x} - \frac{\mu_0 K^2}{1 + \chi_m} \cdot \frac{\partial \theta}{\partial z} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial x} \right] + \chi_m \nabla,$$

где $\nu = \eta/\rho_0$ – кинематическая вязкость, $\chi = æ / \rho_0 C_p$ – температуропроводность,

$$D = \alpha \rho_0 g + \frac{\mu_0 K^2 \Delta T}{l(1 + \chi_m)}, \qquad \frac{\partial(a,в)}{\partial(x,z)} = \frac{\partial a}{\partial x} \cdot \frac{\partial в}{\partial z} - \frac{\partial a}{\partial x} \cdot \frac{\partial в}{\partial z}$$

Выразим t в единицах l^2/χ, x и z – в единицах l, ψ – в единицах χ, а θ – в единицах θ_0:

$$\theta_0 = \Delta T - T_0 D l / \rho_0 C_p.$$

Тогда система (9) примет вид

$$\frac{\partial \nabla^2 \psi}{\partial t} + \frac{\partial(\psi, \nabla^2 \psi)}{\partial(x,z)} = \Pr \left(\nabla^4 \psi + \mathrm{Ra} \frac{\partial \theta}{\partial x} - \varepsilon_1 \frac{\partial \theta}{\partial z} \cdot \frac{\partial \theta}{\partial x} \right),$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + \frac{\partial(\psi, \theta)}{\partial(x,z)} = \frac{\partial \psi}{\partial x} + \nabla^2 \theta + \varepsilon_2 \frac{\partial \theta}{\partial z} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial x}, \tag{10}$$

где $\Pr = \nu/\chi$ – число Прандтля, $\mathrm{Ra} = D\theta_0 l^3/\rho_0 \nu \chi$ – число Рэлея,

$$\varepsilon_1 = \frac{\mu_0 K^2}{1 + \chi_m} \cdot \frac{T_0}{\rho_0 \nu \chi}, \qquad \varepsilon_2 = \frac{\mu_0 K^2}{1 + \chi_m} \cdot \frac{T_0}{\rho_0 C_p}.$$

Заметим, что число Рэлея имеет практически тот же вид, что и в работе [3], с одной лишь разницей – в последней градиенты температуры и поля задавались независимо. Следуя [1], будем искать решение в виде трех низших мод задачи со свободными границами, а именно:

$$\psi = \psi_{11}(t) \sin(\pi a x) \sin(\pi z),$$
$$\theta = \theta_{11}(t) \cos(\pi a x) \sin(\pi z) - \theta_{02}(t) \sin(2\pi z), \tag{11}$$

где α – отношение продольного и поперечного масштабов. Подставляя (11) в систему (10) и вводя новые безмерные переменные

$$\tau = \pi^2 (a^2+1)\, t, \quad X = \frac{a}{a^2+1}\psi_{11}/\sqrt{2}, \qquad Y = \frac{\pi \mathrm{Ra}}{\mathrm{Ra}_c}\,\theta_{11}/\sqrt{2}, \qquad Z = \frac{\pi \mathrm{Ra}}{\mathrm{Ra}_c}\,\theta_{02},$$

где

$$\mathrm{Ra}_c = \frac{\pi^4 (a^2+1)^3}{a^2},$$

получаем систему, отличающуюся от системы Лоренца членами, пропорциональными ε_1, ε_2:

$$\dot{X} = \mathrm{Pr}\,(-X + Y - \varepsilon_1 YZ/\mathrm{Ra}^2, \qquad \dot{Y} = -Y + rX - (1-\varepsilon_2)XZ,$$
$$\dot{Z} = -bZ + (1-\varepsilon_2/2)XY, \tag{12}$$

где $r = \mathrm{Ra}/\,\mathrm{Ra}_c$, $b = 4/(a^2+1)$, а точка обозначает производную по τ.

Данные, приведенные в книгах В.Е. Фертмана [4, 5], позволяют заключить, что предельные значения пиромагнитного коэффициента K имеют порядок 10^2 А/мК. Тогда, считая, что $T_0 \cong 300$ К и используя типичные характеристики магнитных жидкостей, приведенные в [2, 4], получим, что $\varepsilon_2 << 1$. Полагая, что разность температур ΔT должна быть порядка нескольких градусов, получаем, что $\theta_0 \cong \Delta T$ и, следовательно,

$$\mathrm{Ra} = \frac{D\Delta T l^3}{\rho_0 \nu \chi}.$$

С учетом последнего соотношения получим, что

$$\frac{\varepsilon_1}{\mathrm{Ra}^2} = \frac{1}{\mathrm{Ra}}\,[\frac{\mu_0 K^2}{(1+\chi_m)}\cdot\frac{\Delta T}{l}/\,(\,\alpha\rho_0 g + \frac{\mu_0 K^2}{(1+\chi_m)}\cdot\frac{\Delta T}{l}\,)].$$

Очевидно, что второй сомножитель не может быть больше единицы, следовательно, $\varepsilon_1/\mathrm{Ra}^2 << 1$. Таким образом, если пренебречь членами, пропорциональными ε_1 и ε_2 в системе (12) в силу их малости, то эта система совпадает с уравнениями Лоренца. Будем считать, что это можно сделать *.

Число Рэлея в данной задаче зависит от магнитного поля. Следовательно, изменяя H, можно изменять число Рэлея, т.е. управлять ходом конвекции. Это может быть полезно при экспериментальном наблюдении последовательности бифуркаций.

Зависимость $M(H,T)$ определяется следующей формулой [2]:

$$M = \varphi\, M_d L(\xi). \tag{13}$$

Здесь φ – объемная доля твердой фазы, M_d – намагниченность насыщения

*Строго говоря, необходимо исследовать систему уравнений (12) и лишь после этого отбрасывать (или не отбрасывать) члены, пропорциональные ε_1 и ε_2. Однако это является отдельной задачей.

ферромагнетика, $L(\xi)$ – функция Ланжевена:

$$L = \operatorname{cth}\xi - \frac{1}{\xi}, \qquad \xi = \frac{mH}{kT},$$

где m – магнитный момент одной частицы, k – постоянная Больцмана.

Дифференцируя (13) по T, находим K:

$$K = \frac{M_s}{T_0} F(\xi), \qquad F = \alpha T_0 (\operatorname{cth}\xi - \frac{1}{\xi}) + \frac{1}{\xi} - \frac{\xi}{\operatorname{sh}^2\xi}, \tag{14}$$

где $M_s = \varphi M_d$ – намагниченность насыщения жидкости. При выводе соотношения (14) учитывалось, что φ пропорциональна ρ, и, следовательно,

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\rho} \cong \frac{\varphi}{\rho}.$$

Представим число Рэлея в виде $\mathrm{Ra} = \mathrm{Ra}_T(1+\delta)$, где $\mathrm{Ra}_T = \dfrac{\alpha g \Delta T l^3}{\nu\chi}$ – число Рэлея в отсутствии магнитного поля,

$$\delta = \frac{\mu_0 K^2}{1+\chi_m} \cdot \frac{\Delta T}{\alpha\rho_0 g l}.$$

С учетом соотношений (14) можно записать:

$$\delta = \frac{\mu_0 M_s^2}{1+\chi_m} \cdot \frac{\Delta T}{\alpha\rho_0 g T_0 l} F^2(\xi). \tag{15}$$

Дифференцируя (13) по H, находим χ_m:

$$\chi_m = \frac{M_s m}{k T_0}\left(\frac{1}{\xi^2} - \frac{1}{\operatorname{sh}^2\xi}\right).$$

Таким образом, соотношение (15) принимает вид

$$\delta = \frac{C_1 F^2(\xi)}{1 + C_2(\xi^{-2} - \operatorname{sh}^{-2}\xi)}, \tag{16}$$

где $C_1 = \dfrac{\mu_0 M_s^2 \Delta T}{\alpha\rho_0 g T_0 l}$, $\quad C_2 = \dfrac{M_s m}{k T_0}$.

Для эффективного воздействия на конвекцию с помощью магнитного поля диапазон изменения числа Рэлея должен быть порядка 20–30 Ra_c, т.е. при $\mathrm{Ra}_T = \mathrm{Ra}_c$ необходимо, чтобы максимальное значение δ достигало 20–30. Расчеты по формуле (16) (рисунок) показывают, что для этого коэффициент C_1 должен иметь

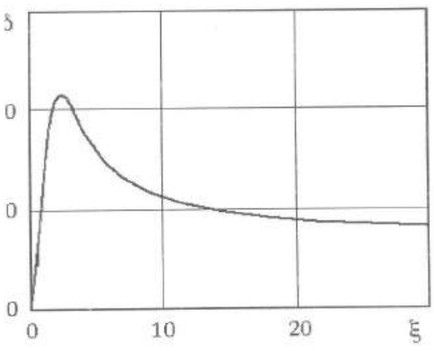

Рис. Зависимость δ(ξ) согласно формуле(16) при $C_1 = 10^2$, $C_2 = 1$

порядок 10^2. Коэффициент C_2 обычно порядка 1, поскольку начальная восприимчивость типичных магнитных жидкостей $\chi_i = C_2/3$ относительно невелика [2]. Таким образом, оказывается возможным пронаблюдать последовательность бифуркаций при тепловой конвекции в магнитной жидкости с соответствующими параметрами, изменяя лишь напряжен–ность постоянного магнитного поля.

Работа поддержана Фондом фундаментальных исследований России. Грант ФФИ 93–02–161171.

Библиографический список

1. *Lorenz E.* Deterministic Nonperiodic Flow // J. Atmos. Sci. 1963. Vol. 20. P.130.
2. *Розенцвейг З.* Феррогидродинамика. М.: Мир, 1989.
3. *Шлиомис М.И.* Конвективная неустойчивость феррожидкости // Изв. АН СССР. МЖГ. 1973. № 6. С. 130.
4. *Фертман В.Е.* Магнитные жидкости. Минск: Вышэйшая школа, 1988.
5. *Фертман В.Е.* Магнитные жидкости – естественная конвекция и тепло–обмен. Минск: Наука и техника, 1978.

Научно–исследовательский институт механики и физики Саратовского государственного университета

Поступила в редакцию 10.10.1992г.

«LORENZ MODEL» FOR DESCRIPTION OF THE CONVECTION IN MAGNETIC FLUID

N.M. Ryskin, D.I. Trubetskov

Rayleigh – Benard convection in the horizontal layer of the magnetic fluid in the vertical homogeneous dc magnetic field is studied. For this model a system of differential equations is derived, that is analogous to Lorenz system for the convection in the ordinary fluid. The possibility of controlling the convection regimes by changing the magnetic field strength is demonstrated.

Трубецков Дмитрий Иванович родился в Саратове в июне 1938 года. Окончил физический факультет Саратовского государственного университета в 1960 г. и с этого времени работает на кафедре электроники и волновых процессов СГУ. Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико–математических наук в СГУ (1965) и доктора физико–математических наук в СГУ (1978) в области радиофизики. Заведующий кафедрой электроники и волновых процессов СГУ, профессор. В 1991 году избран членом–корреспондентом Российской Академии наук. Область научных интересов – радиофизика в той ее части, которая связана с взаимодействием свободных электронов с электромагнитными полями и теорией сверхвысокочастотных электронных приборов; теория колебаний и волн; применение методов нелинейной динамики в различных областях науки; история науки.

Автор и соавтор одиннадцати монографий и учебных пособий по сверхвысокочастотной электронике, теории колебаний и волн и истории электронных ламп сверхвысоких частот, в том числе монографии «Аналитические методы расчета в электронике СВЧ» (М.: Сов. радио, 1970; совместно с В.Н. Шевчиком), коллективной монографии «Электроника ламп с обратной волной» (Изд. Сарат. универс., 1975), учебного пособия «Введение в теорию колебаний и волн» (первое издание, М.: Наука 1984; второе – М.: Наука, 1992; совместно с М.И. Рабиновичем), книги «Формирование радиотехники» (М.: Наука, 1988, раздел «История электронных ламп сверхвысоких частот»). В 1989 году книга «Введение в теорию колебаний и волн» в Нидерландах переведена на английский язык и вышла под названием «Oscillations and waves in linear and nonlinear systems» (The Netherlands : Kluver Academic Publishers,1989).

Опубликовал четыре книги лекций по электронике СВЧ и истории электронных ламп и много научных статей по указанным выше направлениям. Зам. главного редактора журнала «Прикладная нелинейная динамика».

Рыскин Никита Михайлович – родился в 1966 году в Саратове. Окончил физический факультет Саратовского университета в 1991 году. Работает в НИИ механики и физики СГУ. Область научных интересов – нелинейные явления в распределенных системах различной природы.